Interrogation écrite n°13

NOM : Prénom : Note :

1. Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1}$.

   Pour tout entier $n \geq 2$,
   $$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
   Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1}$ converge comme combinaison linéaire de deux séries convergentes et sa somme est
   $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

2. Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{n+1}3^{n-2}$.

   Cette série est une série géométrique de raison $\frac{2}{3}$. Or $\frac{2}{3} \in]-1,1[$ donc cette série converge et sa somme est
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n+1}3^{-n-2} = \frac{2}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

3. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} n\tan\left(\frac{1}{n}\right)-\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right)$.

   On rappelle que
$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x+\mathcal{O}\left(x^3\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1+\mathcal{O}\left(x^2\right)$$
   Ainsi
$$n\tan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
   Par conséquent
$$n\tan\left(\frac{1}{n}\right)-\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
   Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} n\tan\left(\frac{1}{n}\right)-\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right)$ converge (absolument).

4. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \exp\left(\frac{1}{n}\right)-\cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

   On sait que
$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x) \qquad \text{et} \qquad \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1+o(x)$$
   On en déduit que
$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1+o\left(\frac{1}{n}\right)$$
   puis que
$$\exp\left(\frac{1}{n}\right)-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$
   et enfin que
$$\exp\left(\frac{1}{n}\right)-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$
   Puisque $\sum \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs divergente, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \exp\left(\frac{1}{n}\right)-\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

5. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 4A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} puis calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On trouve $A^2 - 4A = -3I_2$. Ainsi $A\left(\frac{4}{3}I_2 - A\right) = \left(\frac{4}{3}I_2 - A\right)A = I_2$. Par conséquent, A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{4}{3}I_2 - A = \begin{pmatrix} -2/3 & -1 \\ -1 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Remarquons que $P = X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$ est un polynôme annulateur de A. Notons R_n le reste de la division euclidienne de X^n par P. Il existe donc $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R_n = a_n X + b_n$. En évaluant la division euclidienne en 1 et 3, on trouve

$$a_n + b_n = 1 \qquad \text{et} \qquad 3a_n + b_n = 3^n$$

Par conséquent,

$$a_n = \frac{3^n - 1}{2} \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{3 - 3^n}{2}$$

Finalement,

$$A^n = R_n(A) = \frac{3^n - 1}{2}A + \frac{3 - 3^n}{2}I_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$$

6. On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Justifier que $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et préciser sa dimension.

   L'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{M})$ est une forme linéaire non nulle. Par conséquent, $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimenson $n^2 - 1$.

7. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ les ensembles des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   L'application $f : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{M}^\top$ est linéaire et involutive : c'est donc une symétrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par conséquent,

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})})$$

   Mais

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) &= \left\{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{M}^\top = \mathrm{M}\right\} = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})\\ \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) &= \left\{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{M}^\top = -\mathrm{M}\right\} = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})\end{aligned}$$

   Ainsi $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.