NOM: Prénom: Note:

1. Décomposer en éléments simples  $F = \frac{1}{(X^2 - 1)^2}$ .

Remarquons que la partie entière de F est évidemment nulle et que  $F = \frac{1}{(X-1)^2(X+1)^2}$ . Il existe donc  $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$  tel que

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2}$$

Par parité de F, c=-a et d=b. Par ailleurs,  $b=((X-1)^2F)(1)=\frac{1}{4}$ . En évaluant en 0, on obtient

$$1 = -a + b + c + d$$

On en déduit

$$a=-\frac{1}{4}$$

$$b = \frac{1}{4}$$

$$c = \frac{1}{4}$$

$$d=\frac{1}{4}$$

2. Décomposer en éléments simples  $F=\frac{X}{X^4-1}$  dans  $\mathbb{R}(X).$ 

La partie entière de F est clairement nulle. Puisque  $X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$ , il existe donc  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tel que

$$F = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{cX + d}{X^2 + 1}$$

D'abord,  $a = \frac{X(1)}{(X^4 - 1)'(1)} = \frac{1}{4}$ . Par imparité de F,  $b = a = \frac{1}{4}$ . Enfin,  $((X^2 + 1)F)(i) = -\frac{i}{2} = ci + d$  donc  $c = -\frac{1}{2}$  et d = 0.

3. Soient a, b, c les racines complexes du polynôme  $P = X^3 - 2X^2 + 5X - 3$ . On ne cherchera pas à déterminer ces racines. Calculer  $S = a^2 + b^2 + c^2$ .

Remarquons que

$$S = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$$

D'après les liens coefficients/racines, a + b + c = 2 et ab + bc + ca = 5. Ainsi S = -6.

4. Montrer que toute application  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  continue sur  $\mathbb{R}$  et périodique est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

Notons T une période de f. Puisque f est continue sur le segment [0,T], elle y est bornée. Par T-périodicité, f est également bornée sur  $\mathbb{R}$ .

5. Montrer que l'équation  $x\cos(x)=\sin(x)$  admet une unique solution sur l'intervalle  $\mathrm{I}_n=[n\pi,(n+1)\pi]$  où  $n\in\mathbb{N}^*$ .

Voir la correction du DS ad hoc.