Équations différentielles

Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 1.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$y' + \mathrm{th}(t)y = \mathrm{sh}(t).$$

Exercice 2.

Résoudre sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$ l'équation
$$y' - \tan(t)y = \frac{1}{1+\cos(t)}.$$

Exercice 3.

Résoudre sur $]-\infty, 1[$ l'équation :
$$(1-x)^2 y' = (2-x)y.$$

Exercice 4.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :
$$z' + \mathrm{th}(t)z = t\,\mathrm{th}(t).$$

Trouver l'unique solution z_1 vérifiant la condition initiale $z_1(0) = 1$.

Exercice 5.

Soit (E) l'équation :
$$y' + \frac{\sin(x)}{2-\cos(x)}y = 2\sin(x).$$

1. Résoudre (E_H).
2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme
$$x \mapsto a\cos(x) + b$$
avec a et b réel.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'unique solution de (E), notée h, vérifiant la condition initiale $h(0) = 1$.

Exercice 6.

Résoudre sur $I =]0, \pi[$ l'équation différentielle
$$(\mathbf{E}) : y' + \mathrm{cotan}(t)y = \cos^2(t).$$

Exercice 7.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' - y = \arctan(e^x)$
2. $y' + y = \arctan(e^x)$

Exercice 8.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations

1. $y' + 2y = te^{-t}$
2. $y' + 2y = e^{-2t}$

Exercice 9.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$y' + y = t\cos(t).$$

Exercice 10.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$y' - y = e^t + e^{2t}.$$

Exercice 11.

On considère l'équation $(\mathbf{E}) : y' - \ln(x)y = x^x$.

1. Calculer en intégrant par parties les primitives de $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Résoudre $(\mathbf{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 12.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(\mathbf{E_1}) : y' + 3y = \sin(x)$;
2. $(\mathbf{E_2}) : y' - 3y = e^{-x}(1-x^3)$;
3. $(\mathbf{E_3}) : y''' - y'' = x$.

Exercice 13.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(\mathbf{E}) : y' + xy = x^2 + 1$ sachant qu'elle admet une solution particulière polynomiale.

Exercice 14.

Résoudre les équations suivantes

1. $y'+y=x$;
2. $y'+y=e^{-x}$;
3. $y'+y=xe^{-x}$;
4. $y'+y=x^2e^{-x}$;
5. $y'+y=e^{2x}$;
6. $y'+y=e^{-x}+e^{2x}$;
7. $y'+y=\sin(x)$;
8. $y'+y=\cos(x)e^x$.

Exercice 15.

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants

1. $y'+2xy=e^{x-x^2}$, $y(0)=0$;
2. $x^2y'+y=0$, $y(0)=1$;
3. $x^3y'-2y=0$, $y(1)=1$.

Exercice 16.

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ l'équation

$$|x|y'+(x-1)y=x^2.$$

Exercice 17.

Résoudre l'équation

$$|x(x-1)|y'+y=x^2$$

sur $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

Exercice 18.

Résoudre l'équation différentielle :

$$(1+t^2)x'-x=1$$

Exercice 19.

Soit a et b deux fonction impaires continues sur $\mathbb{R}$. Soit f une solution de l'équation différentielle $y'+ay=b$. Montrer que f est paire.

Exercice 20.

Soient $T\in\mathbb{R}_+^*$, a et b deux fonctions continues et T-périodiques sur $\mathbb{R}$ et f une solution de l'équation différentielle (E) : $y'+ay=b$. Montrer que f est T-périodique *si et seulement si* $f(0)=f(T)$.

Exercice 21.

Résoudre sur $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ puis $]1,+\infty[$ l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'-xy=1$$

Exercice 22.

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $xy'-\alpha y=0$. Déterminer l'unique solution f vérifiant $f(1)=1$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $xy'-\alpha y=f$. Déterminer l'unique solution g vérifiant $g(1)=0$.
3. On définit par récurrence une suite de fonctions (u_n) sur $\mathbb{R}_+^*$ de la manière suivante :
   - $u_0=f$;
   - pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_{n+1} est l'unique solution de l'équation différentielle $xy'-\alpha y=u_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ valant 0 en 1.

   Remarque. On a donc $u_1=g$. ■

   Déterminer par récurrence u_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 23.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x)+f'(x)=0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Exercice 24.

On considère l'équation différentielle suivante :
$(x+1)y'+xy=x^2-x+1$.

1. Trouver une solution polynomiale.
2. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la solution vérifiant la condition initiale $y(1)=1$.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 25.

Calculer les solutions (réelles) des équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' - 3y = t^2 e^t$
2. $y'' + 4y' + 3y = te^{-2t}$
3. $y'' + 4y' + 3y = \cos(3t)$
4. $y'' + 3y' + 2y = \sin(t)$
5. $y'' - 4y' + 4y = e^{-t}$
6. $y'' - 2y' + y = \cos(2t)$
7. $y'' + 5y' + 4y = te^{-t}$
8. $y'' + y = \cos(t)$
9. $y'' - 6y' + 9y = (t+1)e^{-3t}$
10. $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}\cos(t)$

Exercice 26.

Deux problèmes de Cauchy.

1. Déterminer l'unique fonction f, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de
$$y'' + 4y' + 4y = e^{-3t}$$
pour la condition initiale $f(0) = 0, f'(0) = 1$.
2. Déterminer l'unique fonction g, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de
$$y'' + 5y' + 4y = e^{-t}$$
pour la condition initiale $g(0) = 0, g'(0) = 1$.

Exercice 27.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\sin(x).$$

Exercice 28.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$(\mathbf{E})\ :\ y'' + 4y = \sin^2(t).$$

Exercice 29.

Déterminer les solutions *à valeurs complexes* des équations suivantes :

1. $y'' + y' + y = 0$
2. $y'' - 2iy' - y = 0$
3. $y'' - iy' + 2y = 0$
4. $y'' + 4y' + 4y = 0$

Exercice 30.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les problèmes de Cauchy suivants :

1. $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0$
2. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 1$
3. $y'' - 3y' + 2y = x, \quad y(0) = y'(0) = 1$
4. $y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 1$

Exercice 31.

Résoudre l' équations suivante
$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x).$$

Exercice 32.

Résoudre les équations suivantes

1. $y'' - 3y' + 2y = x$;
2. $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$;
3. $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$;
4. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$;
5. $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{ch}(x)$.

Exercice 33.

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - (1-i)y' - 2(1+i)y = 0$.
2. Donner l'unique solution f vérifiant $f(0) = f'(0) = 1$.

Exercice 34.

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f + f'' \geqslant 0$. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$$

EXERCICE 35.

On considère l'équation différentielle dont on recherche les solutions à valeurs *réelles*

$$(\mathbf{E}) : y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin(x)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à $(\mathbf{E})$.
2. Déterminer une solution particulière de $(\mathbf{E})$.
3. Résoudre l'équation $(\mathbf{E})$.
4. Déterminer l'unique solution f de $(\mathbf{E})$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

EXERCICE 36.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)g(t)\,dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(t-x)g(t)\,dt$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = g$.

EXERCICE 37.

Soient $\omega \in \mathbb{R}$, $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\begin{cases} x' &= -y + \sin(\omega t) \\ y' &= x - \cos(\omega t) \end{cases}$$

1. Soit $z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$t \longmapsto x(t) + iy(t).$$

   Justifier la dérivabilité de z et montrer que z vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.
2. Déterminer x et y.

Changement de fonction ou de variable

EXERCICE 38.

On souhaite résoudre l'équation

$$(\mathbf{E}) \ : \ x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x^2}$$

sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

1. Soient $y : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $Y(t) = y(e^t)$.
   a. Calculer les dérivées y, y' et y'' en fonction de Y, Y' et Y''.
   b. En déduire que y est solution de $(\mathbf{E})$ *si et seulement si* Y est solution d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants $(\mathbf{E}')$ que l'on précisera.
2. Résoudre $(\mathbf{E}')$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire les solutions de $(\mathbf{E})$ sur I.
4. Montrer qu'il existe une unique solution y de $(\mathbf{E})$ sur I telle que $y(1) = y'(1) = 0$.

EXERCICE 39.

Résoudre l'équation

$$y^2 + x^2 - 2yy' = 0$$

en effectuant le changement de fonction $z = y^2$.

EXERCICE 40.

Résoudre l'équation

$$y' = e^{x+y}$$

en posant $z = e^{-y}$.

EXERCICE 41.

Soit $(\mathbf{E})$ l'équation $(x^2+1)y''-2y=0$.

1. Etablir qu'une *éventuelle* solution polynomiale et non nulle de $(\mathbf{E})$ est nécessairement de degré deux.
2. Trouver une solution polynomiale et non nulle p de $(\mathbf{E})$.
3. Justifier qu'une fonction y deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme $y = p \times z$ où z est une fonction deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. Montrer qu'une fonction $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable est solution de $(\mathbf{E})$ *si et seulement si* la fonction $Z = z'$ (où z est définie comme à la question précédente) est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre un $(\mathbf{E}')$ à préciser.
5. Résoudre $(\mathbf{E})$.

EXERCICE 42.

Soient $I =]1, +\infty[$ et $(\mathbf{E})$ l'équation

$$(\mathbf{E}) \ : \ -t^2y'+ty=y^2.$$

1. Soit y une fonction ne s'annulant pas sur I. Prouver que y est solution de $(\mathbf{E})$ *si et seulement si* $z=\dfrac{1}{y}$ est solution sur I d'une équation différentielle $(\mathbf{E}')$ linéaire d'ordre un.
2. Résoudre $(\mathbf{E}')$ sur I.
3. En déduire les solutions de $(\mathbf{E})$ ne s'annulant pas sur l'intervalle I.

EXERCICE 43.

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \ x^2y''-xy'-3y=x^4$$

1. **a.** Montrer que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ *si et seulement si* $g : t \mapsto f(e^t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.

   b. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. **a.** Montrer que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ *si et seulement si* $g : t \mapsto f(-e^t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.

   b. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Equations fonctionnelles

EXERCICE 44.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche l'ensemble S_α des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f'(x) = -f(\alpha - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une telle fonction est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Montrer que les éléments de S_α sont solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
3. Conclure.

EXERCICE 45.

Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = f(-x)$$

EXERCICE 46.

Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = -f(-x)$$

EXERCICE 47.

Déterminer les applications f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x)+f(-x)=xe^{-x}$$

EXERCICE 48.

Déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 1.$$

Problèmes de raccord

EXERCICE 49.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x^2y'-y=0$.

EXERCICE 50.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'\sin x - y\cos x + 1 = 0$.

EXERCICE 51.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy'-y=x$.

Exercice 52.

On considère l'équation différentielle $(E) : xy'' - y' - x^3 y = 0$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ en effectuant le changement de variable $t = x^2$.
2. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 53.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) :\ ty' + (1-t)y = e^{2t}$.