Devoir à la maison n°14

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1.

On considère la fonction $g\colon x \in]0,1] \mapsto x\ln(x)$.

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. On note encore g ce prolongement.
2. Etudier brièvement les variations de g sur $[0,1]$.
3. On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $t_0 \in \left]\frac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$ et $t_{n+1} = -g(t_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_0 \leq t_n \leq e^{-1}$.
4. Montrer que pour tout $x \in \left[t_0, e^{-1}\right]$,
$$\left|g(x) - g(e^{-1})\right| \leq \frac{\left|x - e^{-1}\right|^2}{2t_0}$$
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\left|t_n - e^{-1}\right| \leq 2t_0\left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n}$$
6. En déduire la limite de la suite (t_n).

Exercice 2.

1. On pose $\mathrm{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite (S_n) converge vers un réel à préciser.
2. On pose $u_n = \left(\frac{4^n n^n n!}{(2n)!}\right)^{\frac{1}{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel à préciser.

Exercice 3.

1. On considère la fonction $f\colon t \in]0,1] \mapsto -t\ln(t)$. Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0. On notera encore f son prolongement. Etudier brièvement les variations de f sur $[0,1]$.
2. On pose
$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R},\ \mathrm{R}_n(t) = e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$
   Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |\mathrm{R}_n(t)| \leq \frac{t^{n+1}e^t}{(n+1)!}$$

Dans la suite, on pose

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \mathrm{I}_{p,q} = \int_0^1 x^p (\ln x)^q \, \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I} = \int_0^1 e^{f(t)} \, \mathrm{d}t$$

3. Montrer que

$$\left| \mathrm{I} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \mathrm{I}_{k,k} \right| \leq \frac{e^{e^{-1}}}{e^{n+1}(n+1)!}$$

4. Déterminer une relation entre $\mathrm{I}_{p,q}$ et $\mathrm{I}_{p,q-1}$ puis la valeur de $\mathrm{I}_{p,q}$ pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

5. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^n}$ converge puis que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} = \mathrm{I}$.