Devoir à la maison n°16 : corrigé

Problème 1 — Intégrales de Wallis et formule de Stirling

Partie I – Intégrales de Wallis

1. Le calcul ne pose aucune difficulté, on trouve $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.
2. On intègre par parties

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= [-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^n(t)dt \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)dt \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^n(t)-\sin^{n+2}(t))dt \\ &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \end{aligned}$$

D'où la relation de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

3. D'après la relation de récurrence établie précédemment :

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 3\times 1}{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2} I_0 \\ &= \frac{(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times(2n-3)\times\cdots\times 4\times 3\times 2\times 1}{[(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2]^2} I_0 \\ &= \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2} I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times 5\times 3} I_1 \\ &= \frac{[(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2]^2}{(2n+1)\times(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times\cdots\times 5\times 4\times 3\times 2} I_1 \\ &= \frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!} I_1 = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

4. Puisque $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$$

Ainsi après intégration sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, $I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. On a donc en particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

Soit encore, d'après la relation de récurrence obtenue ci-dessus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

5. Par une récurrence sans difficulté, on prouve à l'aide de l'inégalité précédente que pour tout n positif, $I_n > 0$. D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$$

De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

d'où , en appliquant le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$$

et donc $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$.

6. On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_nI_{n+1}$$

La suite $((n+1)I_nI_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante égale à $\frac{\pi}{2}$ car $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

7. On a $(n+1)I_{n+1}I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} nI_n^2$ d'après ce qui précède. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}$$

Puisque la fonction racine carrée est continue en $\frac{\pi}{2}$ et que I_n est positive,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Ainsi $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Partie II – Formule de Stirling

1. On a $v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$. Or

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. Comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$ et que la série $\sum_{n\geqslant1} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n\geqslant1} v_n$ converge. Par télescopage, cela signifie que la suite $(\ln(u_n))_{n\geqslant1}$ converge vers une limite $\lambda \in \mathbb{R}$. Par continuité de l'exponentielle, la suite $(u_n)_{n\geqslant1}$ converge vers $l = e^\lambda > 0$.

3. On déduit de la question précédente que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^ne^{-n}\sqrt{n}}{l}$.
En utilisant l'expression factorielle de I_{2n} trouvée en **I.3**, on obtient $I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi l}{\sqrt{2n}}$. Or d'après la question **I.7**, on a $I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$. On en déduit $l = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Ainsi $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}n^ne^{-n}\sqrt{n}$.

Solution 1.

1. En convenant que $A_{n_0-1} = 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k &= \sum_{k=n_0}^{n} (A_k - A_{k-1}) B_k \\ &= \sum_{k=n_0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=n_0}^{n} A_{k-1} B_k \\ &= \sum_{k=n_0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=n_0-1}^{n-1} A_k B_{k+1} \\ &= A_n B_n + \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k (B_k - B_{k+1}) \\ &= A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k\end{aligned}$$

2. **a.** La série $\sum b_n$, autrement dit la série $\sum B_{n+1} - B_n$, est une série télescopique. Elle est donc de même nature que la suite (B_n), c'est-à-dire convergente.

b. Tout d'abord, (A_n) est bornée donc $A_n B_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(B_n)$. Puisque (B_n) converge vers 0, il en est de même de la suite $(A_n B_n)$.

Ensuite, $A_n b_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(b_n)$ et $\sum b_n$ est une série à termes positifs convergente donc la série $\sum A_n b_n$ converge. On en déduit que la suite de ses sommes partielles converge. La suite de terme général $\sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$ converge donc.

D'après la question **1**, la suite de terme général $\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k$ converge donc en tant que somme de deux suites convergentes. Puisque $\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k$ est la somme de partielle de rang n de la série $\sum a_n B_n$, la série $\sum a_n B_n$ converge également.

c. Posons $a_n = (-1)^n$ pour $n \geqslant n_0$. Alors A_n vaut 0, -1 ou 1 suivant la parité de n ou n_0. En particulier, la suite (A_n) est bornée et on peut donc appliquer le résultat de la question précédente. La série $\sum (-1)^n B_n$ converge donc.

3. **a.** Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique.

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ki\theta} = e^{i\theta} \frac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}} \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

b. **Cas $\alpha \leqslant 0$.** La suite de terme général $\frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0. En effet, $\left|\frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}\right| = n^{-\alpha} \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Cas $\alpha > 1$. La série $\sum \frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}$ converge absolument. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge puisque $\alpha > 1$.

Cas $0 < \alpha \leqslant 1$. On utilise les résultats précédents avec $n_0 = 1$, $a_n = e^{in\theta}$ et $B_n = \frac{1}{n}$. D'après la question **3.a**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|A_n| = \left| e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}} \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{\theta}{2}\right|}$$

La suite (A_n) est donc bornée. La suite (B_n) est clairement décroissante de limite nulle. La question **2.b** permet alors d'affirmer que la série $\sum a_n B_n$ i.e. la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$, converge. Cette série ne converge pas absolument puisque $\left|\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$ et que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ne converge pas ($\alpha \leqslant 1$).

4. Rappelons que pour tout $n \geqslant n_0$

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$$

La suite (B_n) converge vers 0 et (A_n) est bornée donc $\lim_{n\to+\infty} A_n B_n = 0$.

Puisque (A_n) est bornée, $A_n b_n = \mathcal{O}(|b_n|)$. Or la série $\sum |b_n|$ converge car $\sum_{n\geqslant n_0} b_n$ est absolument convergente. De plus, la série $\sum |b_n|$ est à termes positifs donc la série $\sum A_n b_n$ converge (absolument). Ainsi la suite de terme général $\sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$ converge.

Il s'ensuit que la suite de terme général $\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k$ converge également i.e. que la série $a_n B_n$ converge.