Semaine du 03/01 au 07/01

1 Cours

Topologie

On admet que toutes les définitions et les résultats du cours restent inchangés si une norme est remplacée par une norme **équivalente**.

Topologie d'un espace vectoriel normé Boules ouvertes, boules fermées, sphères. Ouverts, fermés, voisinages. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection quelconque de fermés est un fermé. Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert. Une réunion **finie** de fermés est un fermé. Caractérisation séquentielle des fermés. Intérieur, adhérence, frontière. Caractérisation séquentielle de l'adhérence. Densité. Caractérisation séquentielle de la densité. Topologie relative : ouvert, fermé, voisinage relatifs à une partie.

Limite d'une application Définition. Caractérisation séquentielle de la limite. Opérations algébriques. Composition. Limite d'une application à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés.

Continuité Définition. Caractérisation séquentielle de la continuité. Opérations algébriques. Composition. Continuité d'une application à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés. Continuité uniforme. Continuité uniforme. Applications lipschitziennes. La «lipschitzianité» implique la continuité uniforme qui implique la continuité.

Continuité des applications linéaires, multilinéaires, polynomiales Notation $\mathcal{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F})$: ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Caractérisation de la continuité pour les applications linéaires : $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est continue si et seulement si $\exists \mathrm{C} \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathrm{E},\ \|f(x)\|_\mathrm{F} \leq \mathrm{C}\|x\|_\mathrm{E}$. Si E est de dimension **finie**, $\mathcal{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F}) = \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Toute application multilinéaire sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions **finies** est continue. Toute application polynomiale est continue.

Continuité et topologie Caractérisation de la continuité par les images réciproques des ouverts et des fermés. Deux applications **continues** coïncidant sur une partie **dense** sont égales.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour montrer qu'une partie est fermé, on peut :
  - utiliser la définition (raisonner en termes de boules) ;
  - la décrire comme une intersection de fermés ;
  - la décrire comme une réunion finie de fermés ;
  - la décrire comme une image réciproque de fermé par une application continue ;
  - utiliser la caractérisation séquentielle.
- Pour montrer qu'une partie est ouverte, on peut :
  - utiliser la définition (raisonner en termes de boules) ;
  - la décrire comme une réunion d'ouverts ;
  - la décrire comme une intersection finie d'ouverts ;
  - la décrire comme une image réciproque d'ouvert par une application continue ;
  - montrer que son complémentaire est fermé (cf. point précédent).
- Pour montrer qu'une application est continue, on peut :
  - utiliser les résultats sur les opérations algébriques et la composition de fonctions continues ;
  - si l'application est linéaire, utiliser la caractérisation de la continuité pour de telles applications ;
  - si l'application est linéaire et que son espace de départ est de dimension finie, il n'y a rien à faire ;
  - identifier une application multilinéaire ou polynomiale.
- Utiliser la densité pour montrer que deux applications continues sont égales (notamment la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).
- Montrer qu'une partie est dense : utiliser la définition ou la caractérisation séquentielle.
- Savoir montrer quelques résultats classiques de topologie matricielle :
  - $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
  - $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
  - $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont des parties fermées et bornées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3 Questions de cours

Matrices inversibles Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Groupe orthogonal Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont des parties fermées et bornées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Banque CCP Exercices 34, 35, 36, 37, 38, 41, 44, 45, 54.

Bonnes fêtes et bonnes vacances.