Devoir à la maison n° 6 : corrigé

Problème 1 — D'après Petites Mines 2000

Partie I –

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Finalement $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$. Puisque cos est également continue sur $\mathbb{R}$, $\cos \in \mathcal{E}$.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y) = \frac{1}{4}\left[(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})\right] = \frac{1}{2}\left(e^{x+y} + e^{-x-y}\right) = \operatorname{ch}(x+y)$$

On en déduit également que

$$\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}(x+(-y)) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(-y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(-y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$$

car ch et sh sont respectivement paire et impaire. Finalement, on a bien

$$\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y) = 2\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)$$

Puisque ch est continue, $\operatorname{ch} \in \mathcal{E}$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f_\alpha(x+y) + f_\alpha(x-y) = f(\alpha x + \alpha y) + f(\alpha x - \alpha y) = 2f(\alpha x)f(\alpha y) = 2f_\alpha(x)f_\alpha(y)$$

Puisque f est continue, f_α est également continue de sorte que $f_\alpha \in \mathcal{E}$.

4. **a.** Puisque $f \in \mathcal{E}$,

$$f(0+0) + f(0-0) = 2f(0)f(0)$$

ou encore $2f(0) = 2f(0)^2$ de sorte que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

b. Supposons $f(0) = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x+0) + f(x-0) = 2f(x)f(0) = 0$$

de sorte que $f(x) = 0$. f est donc bien constamment nulle sur $\mathbb{R}$.

c. Supposons $f(0) = 1$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(0+x) + f(0-x) = 2f(0)f(x) = 2f(x)$$

ou encore $f(x) + f(-x) = 2f(x)$ de sorte que $f(-x) = f(x)$. f est donc bien paire.

Partie II –

Soit $f \in \mathcal{E}$ telle que $f(0) = 1$.

1. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.

a. Soit $x \in \mathbb{R}$. En effectuant le changement de variable $u = x + y$, on obtient le résultat demandé.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. En effectuant le changement de variable $v = x - y$, on montre que

$$\int_0^r f(x-y)\,dy = \int_{x-r}^x f(v)\,dv$$

Puisque pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

on obtient en intégrant

$$\int_0^r (f(x+y) + f(x-y))\,dy = \int_0^r 2f(x)f(y)\,dy$$

Par linéarité de l'intégrale, on a alors

$$\int_0^r f(x+y)\,dy + \int_0^r f(x-y)\,dy = 2f(x)\int_0^r f(y)\,dy$$

Or on a prouvé que

$$\int_0^r f(x+y)\,dy = \int_x^{x+r} f(u)\,du \qquad \text{et} \int_0^r f(x-y)\,dy = \int_{x-r}^x f(v)\,dv$$

ce qui donne le résultat demandé.

2. **a.** Posons $F(r) = \int_0^r f(y)\,dy$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. On sait que F est une primitive de f. En particulier, F est dérivable en 0 et $F'(0) = f(0) = 1$. Ainsi $\lim_{r\to 0} \frac{F(r)-F(0)}{r-0} = 1$ ou encore $\lim_{r\to 0} \frac{F(r)}{r} = 0$.
Supposons que $F(r) \leqslant 0$ pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\lim_{r\to 0^+} \frac{F(r)}{r} \leqslant 0$, ce qui contredit ce qui précède. Il existe donc $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $F(r) > 0$, ce qui répond à la question.

b. Posons $C = \int_0^r f(y)\,dy$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2C}\left(\int_x^{x+r} f(u)\,du + \int_{x-r}^x f(v)\,dv\right) = \frac{1}{2C}\left(F(x+r) - F(x-r)\right)$$

Puisque F est dérivable et que $F' = f$ est continue, F est de classe $\mathcal{C}^1$ et f également.

c. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.
Supposons f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = frac12C\left(F(x+r) - F(x-r)\right)$$

f est également de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.
Par récurrence, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

d. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2Cf(x) = F(x+r) - F(x-r)$$

Puisque f et F sont de classe $\mathcal{C}^1$, on peut dériver cette relation et on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2Cf'(x) = F'(x+r) + F'(x-r) = f(x+r) - f(x-r)$$

En posant $c = 2C$, on a bien la relation demandée et $c > 0$ puisque $C > 0$.

3. On vient de voir que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$cf'(x) = f(x+r) - f(x-r)$$

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on peut dériver cette relation et on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$cf''(x) = f'(x+r) - f'(x-r)$$

Mais on a également pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$cf'(x+r) = f((x+r)+r) - f((x+r)-r) = f(x+2r) - f(x) \qquad \text{et} \qquad cf'(x-r) = f((x-r)+r) - f((x-r)-r) = f(x) - f(x-2r)$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$c^2 f''(x) = cf'(x+r) - cf'(x-r) = f(x+2r)f(x-2r) - 2f(x)$$

Puisque $f \in \mathcal{E}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+2r) + f(x-2r) = 2f(x)f(2r)$$

de sorte que

$$c^2 f''(x) = 2(f(2r) - 1)f(x)$$

En posant $\lambda = \frac{2f(2r)-1}{c^2}$, on a bien le résulta voulu.

Partie III –

1. Si $\mu > 0$, les solutions de $y'' = \mu y$ sont les fonctions $x \mapsto Ae^{\sqrt{\mu}x} + Be^{-\sqrt{\mu}x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
Si $\mu < 0$, les solutions de $y'' = \mu y$ sont les fonctions $x \mapsto A\cos(\sqrt{\mu}x) + B\sin(\sqrt{\mu}x)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
Si $\mu = 0$, les solutions de $y'' = \mu y$ sont les fonctions $x \mapsto Ax + B$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

2. D'après les questions **I.1**, **I.2** et **I.3**, les fonctions $x \mapsto \cos(\alpha x)$ et $x \mapsto \text{ch}(\alpha x)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ sont dans $\mathcal{E}$. La fonction nulle est également dans $\mathcal{E}$.
Réciproquement, soit $f \in \mathcal{E}$. Si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle. Si $f(0) = 1$, la partie II et la question précédente montrent que l'on ait dans l'un des trois cas suivants :

- $f(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha > 0$;
- $f(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha > 0$;
- $f(x) = Ax + B$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

La question **I.4.c** montre également que f est paire.

- Dans le premier cas, ceci impose que $A = B$ et donc $f(x) = 2A\,\text{ch}(\alpha x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque $f(0) = 1$, $f(x) = \text{ch}(\alpha x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Dans le second cas, ceci impose $B = 0$ et donc $f(x) = A\cos(\alpha x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque $f(0) = 1$, $f(x) = \cos(\alpha x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Dans le troisième cas, ceci impose $A = 0$ et donc f est constante. Puisque $f(0) = 1$, f est constante égale à 1. On peut écrire $f(x) = \text{ch}(\alpha x)$ ou $f(x) = \cos(\alpha x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $\alpha = 0$.

Finalement les fonctions de $\mathcal{E}$ sont

- la fonction nulle ;
- les fonctions $x \mapsto \cos(\alpha x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$;
- les fonctions $x \mapsto \text{ch}(\alpha x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.