Devoir à la maison n°1 : corrigé

Solution 1.

1. **a.**
$$\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(y_1^2+y_2^2\right)-(x_1y_1+x_2y_2)^2 = x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2-2x_1y_1x_2y_2 = (x_1y_2-x_2y_1)^2 \geqslant 0$$
On a donc bien l'inégalité demandée.

   b. On raisonne par équivalence.
$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2} \leqslant \sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2}\\
\iff\quad &(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2 \leqslant \left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^2\\
&\text{car les membres de l'inégalité précédente sont positifs}\\
\iff\quad &x_1y_1+x_2y_2 \leqslant \sqrt{(x_1^2+x_2)^2(y_1^2+y_2^2)}
\end{aligned}$$
Or cette dernière inégalité est vraie. En effet d'après la question précédente
$$\sqrt{(x_1^2+x_2)^2(y_1^2+y_2^2)} \geqslant \sqrt{(x_1y_1+x_2y_2)^2} = |x_1y_1+x_2y_2| \geqslant x_1y_1+x_2y_2$$
On en déduit l'inégalité demandée.

2. **a.** Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$
$$P(\lambda)=\sum_{k=1}^n(\lambda^2x_k^2+2\lambda x_ky_k+y_k^2 = \lambda^2\sum_{k=1}^n x_k^2+2\lambda\sum_{k=1}^n x_ky_k+\sum_{k=1}^n y_k^2 = A\lambda^2+2B\lambda+C$$
avec $A=\sum_{k=1} x_k^2$, $B=\sum_{k=1}^n x_ky_k$ et $C=\sum_{k=1}^n y_k^2$.

   b. Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $P(\lambda)\geqslant 0$ comme somme de termes positifs. Le trinôme P étant de signe constant, son discriminant est négatif. Ainsi $4B^2-4AC\leqslant 0$ i.e. $B^2\leqslant AC$, ce qui est l'inégalité demandée.

   c. Si $A=0$, alors $x_k^2=0$ i.e. $x_k=0$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ puisqu'une somme de termes positifs n'est nulle que si chacun de ses termes est nul. Il s'ensuit qu'on a également $B=0$. Finalement, on a encore $B^2\leqslant AC$ puisque les deux membres sont nuls dans ce cas.

   d. On raisonne par équivalence.
$$\begin{aligned}
&\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k+y_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}\\
\iff\quad &\sum_{k=1}^n (x_k+y_k)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}\right)^2\\
&\text{car les membres de l'inégalité précédente sont positifs}\\
\iff\quad &\sum_{k=1}^n x_k^2+2x_ky_k+y_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^n x_k^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}+\sum_{k=1}^n y_k^2\\
\iff\quad &\sum_{k=1}^n x_ky_k \leqslant \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)}
\end{aligned}$$
Or cette dernière inégalité est vraie. En effet d'après l'inégalité (CS)
$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)} \geqslant \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n x_ky_k\right)^2} = \left|\sum_{k=1}^n x_ky_k\right| \geqslant \sum_{k=1}^n x_ky_k$$
On en déduit l'inégalité demandée.

e. On choisit $x_k = \sqrt{a_k}$ et $y_k = \frac{1}{\sqrt{a_k}}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ dans l'inégalité (CS). On a donc

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 = n^2$$

Solution 2.

1. Clairement, $P_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!$.
2. P_n est le produit des entiers pairs compris entre 1 et $2n$ tandis que Q_n est le produit des entiers impairs compris entre 1 et $2n$. Il en résulte que $P_n Q_n$ est le produit de tous les entiers compris entre 1 et $2n$. Ainsi $P_n Q_n = (2n)!$.
3. On en déduit que $Q_n = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

Solution 3.

1. On trouve

$$\begin{array}{lllll} a_0 = 1 & a_1 = 1 & a_2 = 2 & a_3 = 5 & a_4 = 14 \\ S_0 = 1 & S_1 = 2 & S_2 = 5 & S_3 = 14 & S_4 = 42 \end{array}$$

On remarque que $S_n = a_{n+1}$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue le changement d'indice $l = n - k$ de sorte que

$$T_n = \sum_{l=0}^{n} (n-l) a_{n-l} a_l = \sum_{k=0}^{n} (n-k) a_k a_{n-k}$$

Ainsi

$$2T_n = \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} (n-k) a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (k+n-k) a_k a_n - k = nS_n$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(n+2)a_{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n!^2} = \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!^2} = 2(2n+1)a_n$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} + T_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k a_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} k a_k a_{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (k+1) a_k a_{n+1-k} \\ &= a_0 a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1) a_k a_{n+1-k} \\ &= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (k+2) a_{k+1} a_{a_n - k} \end{aligned}$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+2)a_{k+1} = 2(2k+1)a_k$ d'après la question **3** donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} + T_{n+1} &= a_{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n} (2k+1) a_k a_{n-k} \\ &= a_{n+1} + 4\sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k} + 2\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \\ &= a_{n+1} + 4T_n + 2S_n \end{aligned}$$

Or on a vu à la question **2** que $2T_n = nS_n$ donc

$$S_{n+1} + T_{n+1} = a_{n+1} + 2nS_n + 2S_n = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

D'après la question **2**, $2T_{n+1} = (n+1)S_{n+1}$ donc

$$S_{n+1} + T_{n+1} = S_{n+1} + \frac{n+1}{2}S_{n+1} = \frac{n+3}{2}S_{n+1}$$

On en déduit que

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

5. D'après la question **1**, $S_0 = a_1 = 1$.
Supposons maintenant que $S_n = a_{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$. Or on a supposé que $S_n = a_{n+1}$ donc

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} = (2n+3)a_{n+1}$$

Or d'après la question **3**, $(n+3)a_{n+2} = 2(2n+3)a_{n+1}$ donc

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = \frac{n+3}{2}a_{n+2}$$

puis $S_{n+1} = a_{n+2}$ puisque $\frac{n+3}{2} \neq 0$.
Par récurrence, $S_n = a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Tout d'abord $a_0 = 1$ est un entier naturel. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tels que $a_0, a_1, \dots, a_n$ soient des entiers naturels. Alors S_n est également un entier naturel en tant que somme de produits de ces derniers entiers naturels. Puisque $a_{n+1} = S_n$, $an + 1$ est également un entier naturel. Par récurrence forte, a_n est donc un entier naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$.