Dénombrement

1 Ensembles finis et cardinaux

1.1 Cardinal d'un ensemble fini

Définition 1.1

On dit qu'un ensemble non vide E est fini s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E. Dans ce cas, l'entier n est unique et est appelé *cardinal* de E : on le note $\operatorname{card} E$, $|E|$ ou encore $\#E$.
Par convention, $\varnothing$ est fini et $\operatorname{card} \varnothing = 0$.

Remarque. Plus prosaïquement, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble. ■

Proposition 1.1

Deux ensembles finis ont même cardinal *si et seulement si* il existe une bijection de l'un sur l'autre.

Méthode **Déterminer le cardinal d'un ensemble**

Pour déterminer le cardinal d'un ensemble A, il suffit de trouver un ensemble B de cardinal connu et une bijection de A sur B ou de B sur A. Alors $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$.

Proposition 1.2

Soit E un ensemble fini et A une partie de E. Alors A est fini et $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} E$. Il y a égalité *si et seulement si* $A = E$.

1.2 Opération sur les ensembles finis

Proposition 1.3

Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \cup F$ et $E \cap F$ sont finis et

$$\operatorname{card}(E \cup F) = \operatorname{card} E + \operatorname{card} F - \operatorname{card}(E \cap F)$$

Exercice 1.1 **Principe d'inclusion-exclusion**

Soient $A_1, \dots, A_n$ n ensembles finis. Montrer que

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \operatorname{card}\left(\bigcap_{l=1}^{k} A_{i_l}\right)$$

Définition 1.2 Partition

Soit E un ensemble (pas nécessairement fini) et $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de parties de E. On dit que $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une partition de E si

- les A_i sont non vides ;
- les A_i sont disjoints deux à deux ;
- $\mathrm{E} = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i$.

On note alors $\mathrm{E} = \bigsqcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i$.

Remarque. Il arrive de parler de partition même si les parties en question ne sont pas toutes vides. ■

Proposition 1.4

Soit E un ensemble fini et $(\mathrm{A}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une partition de E. Alors $\operatorname{card}\mathrm{E} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}\mathrm{A}_i$.

Remarque. La relation est vraie même si les parties ne sont pas toutes vides. ■

Proposition 1.5

Soient E et F deux ensembles finis. Alors $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ et F^{E} sont finis. De plus, $\operatorname{card}(\mathrm{E}\times\mathrm{F}) = \operatorname{card}\mathrm{E}\times\operatorname{card}\mathrm{F}$ et $\operatorname{card}(\mathrm{F}^{\mathrm{E}}) = (\operatorname{card}\mathrm{F})^{\operatorname{card}\mathrm{E}}$.

L'application de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ dans $\{0,1\}^{\mathrm{E}}$ qui à une partie de E associe sa fonction indicatrice est clairement bijective. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 1.6

Soit E un ensemble fini. Alors l'ensemble des parties de E noté $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ est également fini et $\operatorname{card}\mathscr{P}(\mathrm{E}) = 2^{\operatorname{card}\mathrm{E}}$.

1.3 Applications entre ensembles finis

Proposition 1.7

Soit $f : \mathrm{E}\to\mathrm{F}$. Si E est fini, alors $\operatorname{Im} f$ est fini et $\operatorname{card}(\operatorname{Im} f) \leqslant \operatorname{card}\mathrm{E}$.

Proposition 1.8

Soit $f : \mathrm{E}\to\mathrm{F}$.

(i) Si f est injective et F fini, alors E est fini et $\operatorname{card}\mathrm{E} \leqslant \operatorname{card}\mathrm{F}$.

(ii) Si f est surjective et E fini, alors F est fini et $\operatorname{card}\mathrm{E} \geqslant \operatorname{card}\mathrm{F}$.

(iii) Si f est bijective et E fini, alors F est fini et $\operatorname{card}\mathrm{E} = \operatorname{card}\mathrm{F}$.

Remarque. Si f est injective et E fini, $\operatorname{Im} f$ est fini et $\operatorname{card}(\operatorname{Im} f) = \operatorname{card}\mathrm{E}$ puisqu'alors f induit une bijection de E sur $\operatorname{Im} f$. ■

Principe des tiroirs de Dirichlet

Supposons que l'on veuille ranger n paires de chaussettes dans p tiroirs. Si $n > p$, il est évident qu'un des tiroirs comportera plus d'une paire de chaussettes. On peut formaliser cette remarque de la manière suivante. Si on note E l'ensemble des paires de chaussettes, F l'ensemble des tiroirs et f l'application qui à une paire de chaussettes associe le tiroir dans laquelle elle se trouve, alors la remarque précédente signifie que f n'est pas injective.

Exercice 1.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $n+1$ réels de l'intervalle $[0,1[$. Montrer que deux d'entre eux sont à une distance strictement inférieure à $\frac{1}{n}$ l'un de l'autre.

Exercice 1.3

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q\mathrm{N}}$$

Proposition 1.9

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ où E et F sont des ensembles finis de *même* cardinal. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est bijective ;

(ii) f est surjective ;

(iii) f est injective.

Proposition 1.10 Lemme des bergers

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ où E et F sont des ensembles finis. On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{card}\left(f^{-1}(y)\right) = r$ pour tout $y \in \mathrm{F}$. Alors $\operatorname{card} \mathrm{E} = r \operatorname{card} \mathrm{F}$.

2 Listes, arrangements et combinaisons

2.1 Listes

Définition 2.1 Liste

Soient E un ensemble fini et $k \in \mathbb{N}$. On appelle k-*liste* d'éléments de E tout k-uplet d'éléments de E.

Remarque. Une k-liste est également une application de $[\![1,k]\!]$ dans E. ■

Remarque. On remarquera que l'*ordre* des éléments compte dans une liste. (a,b,c) et (c,b,a) ne désignent pas la même liste. ■

Proposition 2.1 Nombre d'arrangements

Soient k et n des entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Le nombre de k-listes d'un ensemble de cardinal n est n^k.

2.2 Arrangements

Définition 2.2 Arrangement

Soient E un ensemble fini et $k \in \mathbb{N}$. On appelle k-*arrangement* d'éléments de E tout k-uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

Remarque. Un k-arrangement est également une injection de $[\![1,k]\!]$ dans E. ■

Remarque. On remarquera que l'*ordre* des éléments compte dans un arrangement. (a,b,c) et (c,b,a) ne désignent pas le même arrangement. ■

Définition 2.3 Permutation

On appelle permutation d'un ensemble E de cardinal n tout n-arrangement d'éléments de E.

Proposition 2.2 Nombre d'arrangements

Soient k et n des entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Le nombre de k-arrangements d'un ensemble de cardinal n est $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Corollaire 2.1 Nombre de permutations

Le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n est $n!$.

2.3 Combinaisons

Définition 2.4 Combinaison

Soient E un ensemble fini et $k \in \mathbb{N}$. On appelle k-*combinaison* d'éléments de E toute partie de E de cardinal k.

Remarque. On remarquera que l'ordre des éléments ne compte pas dans un arrangement. $\{a,b,c\}$ et $\{c,b,a\}$ désignent la même combinaison. ■

Si on note $A_{k,n}$ l'ensemble des k-arrangements et $C_{k,n}$ l'ensemble des k-combinaisons d'un même ensemble de cardinal n, le lemme des bergers appliqué à l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} A_{k,n} & \longrightarrow & C_{k,n} \\ (x_1,\dots,x_k) & \longmapsto & \{x_1,\dots,x_k\} \end{array} \right.$ fournit le résultat suivant.

Proposition 2.3 Nombre de combinaisons

Soient k et n des entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Le nombre de k-combinaisons d'un ensemble de cardinal n est $\binom{n}{k}$.

2.4 Preuves combinatoires de relations entre coefficients binomiaux

Si E est un ensemble de cardinal n et $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_k(\mathrm{E})$ l'ensemble des parties de E de cardinal n.

Symétrie des coefficients binomiaux

Soient E un ensemble de cardinal n et $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathrm{E}) \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \overline{\mathrm{X}} \end{array} \right.$ est une involution induisant une bijection de $\mathscr{P}_k(\mathrm{E})$ sur $\mathscr{P}_{n-k}(\mathrm{E})$. On en déduit que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Relation du triangle de Pascal

Soient E un ensemble de cardinal $n+1$, x un élément fixé de E et $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des parties de E de cardinal $k+1$ contenant x et $\mathscr{B}$ l'ensemble des parties de E de cardinal $k+1$ ne contenant pas x. $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ forment clairement une partition de $\mathscr{P}_{k+1}(\mathrm{E})$ de sorte que

$$\binom{n+1}{k+1} = \operatorname{card}\mathscr{A} + \operatorname{card}\mathscr{B}$$

Raisonnement élémentaire
Choisir un élément de $\mathscr{A}$ consiste à choisir une partie de $\mathrm{E}\setminus\{x\}$ de cardinal k et à lui ajouter x. Comme $\operatorname{card}(\mathrm{E}\setminus\{x\}) = n$, il y a $\binom{n}{k}$ façons de le faire. Ainsi $\operatorname{card}\mathscr{A} = \binom{n}{k}$.
Choisir un élément de $\mathscr{B}$ consiste à choisir une partie de $\mathrm{E}\setminus\{x\}$ de cardinal $k+1$. Comme $\operatorname{card}(\mathrm{E}\setminus\{x\}) = n$, il y a $\binom{n}{k+1}$ façons de le faire. Ainsi $\operatorname{card}\mathscr{B} = \binom{n}{k+1}$.
On en déduit que $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.
Raisonnement rigoureux
L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{P}_k(\mathrm{E}\setminus\{x\}) & \longrightarrow & \mathscr{A} \\ \mathrm{F} & \longmapsto & \mathrm{F}\cup\{x\} \end{array}\right.$ est bijective de sorte que

$$\operatorname{card}\mathscr{P}_k(\mathrm{E}\setminus\{x\}) = \operatorname{card}\mathscr{A}$$

ou encore $\operatorname{card}\mathscr{A} = \binom{n}{k}$. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{P}_{k+1}(\mathrm{E}\setminus\{x\}) & \longrightarrow & \mathscr{B} \\ \mathrm{F} & \longmapsto & \mathrm{F} \end{array}\right.$ est bijective de sorte que

$$\operatorname{card}\mathscr{P}_{k+1}(\mathrm{E}\setminus\{x\}) = \operatorname{card}\mathrm{B}$$

ou encore $\operatorname{card}\mathscr{B} = \binom{n}{k+1}$.
Finalement, $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini

Soit E un ensemble de cardinal n. Les $\mathscr{P}_k(\mathrm{E})$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ forment une partition de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$. On en déduit que

$$\operatorname{card}\mathscr{P}(\mathrm{E}) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card}\mathscr{P}_k(\mathrm{E})$$

Autrement dit

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

C'est la formule du binôme de Newton appliqué à $(1+1)^n$.

Preuve de l'identité $k\binom{k}{n} = n\binom{n-1}{k-1}$

Soient E un ensemble de cardinal $n \geqslant 1$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$. On considère l'ensemble $\mathscr{A} = \{(x, \mathrm{F}),\ x \in \mathrm{F}, \mathrm{F} \in \mathscr{P}_k(\mathrm{E})\}$. L'idée consiste à déterminer le cardinal de $\mathscr{A}$ de deux manières différentes.

Raisonnement élémentaire

Choisir un élément (x, F) de $\mathscr{A}$ peut se faire de la manière suivante :

- on choisit un élément x de E (n choix possibles) ;
- puis on choisit partie F′ de cardinal $k-1$ de $\mathrm{E} \setminus \{x\}$ ($\binom{n-1}{k-1}$ choix possibles) et on pose $\mathrm{F} = \mathrm{F}' \cup \{x\}$.

Ainsi $\operatorname{card} \mathscr{A} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Mais choisir un élément (x, F) de $\mathscr{A}$ peut également se faire de la manière suivante :

- on choisit une partie F de cardinal k de E ($\binom{n}{k}$ choix possibles) ;
- puis on choisit un élément x de F (k choix possibles).

Ainsi $\operatorname{card} \mathscr{A} = k\binom{n}{k}$.

Raisonnement rigoureux

Pour $x \in \mathrm{E}$, notons $\mathscr{B}_x = \{(x, \mathrm{F}),\ x \in \mathrm{F}, \mathrm{F} \in \mathscr{P}_k(\mathrm{E})\}$. Les $\mathscr{B}_x$ pour $x \in \mathrm{E}$ forment une partition de $\mathscr{A}$. Ainsi

$$\operatorname{card} \mathscr{A} = \sum_{x \in \mathrm{E}} \operatorname{card} \mathscr{B}_x$$

Or pour tout $x \in \mathrm{E}$, l'application $\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{P}_{k-1}(\mathrm{E} \setminus \{x\}) & \longrightarrow & \mathscr{B}_x \\ \mathrm{F} & \longmapsto & (x, \mathrm{F} \cup \{x\}) \end{array}\right.$ est bijective de sorte que

$$\operatorname{card} \mathscr{P}_{k-1}(\mathrm{E} \setminus \{x\}) = \operatorname{card} \mathscr{B}_x$$

ou encore $\operatorname{card} \mathscr{B}_x = \binom{n-1}{k-1}$. On en déduit que $\operatorname{card} \mathscr{A} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Pour $\mathrm{F} \in \mathscr{P}_k(\mathrm{E})$, posons $\mathscr{C}_\mathrm{F} = \{(x, \mathrm{F}),\ x \in \mathrm{F}\}$. Les $\mathscr{C}_\mathrm{F}$ pour $\mathrm{F} \in \mathscr{P}_k(\mathrm{E})$ forment une partition de $\mathscr{A}$. Ainsi

$$\operatorname{card} \mathscr{A} = \sum_{\mathrm{F} \in \mathscr{P}_k(\mathrm{E})} \operatorname{card} \mathscr{C}_\mathrm{F}$$

Or pour tout $\mathrm{F} \in \mathscr{P}_k(\mathrm{E})$, l'application $\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathscr{C}_\mathrm{F} \\ x & \longmapsto & (x, \mathrm{F}) \end{array}\right.$ est bijective de sorte que

$$\operatorname{card} \mathrm{F} = \operatorname{card} \mathscr{C}_\mathrm{F}$$

ou encore $\operatorname{card} \mathscr{C}_\mathrm{F} = k$. On en déduit que $\operatorname{card} \mathscr{A} = k\binom{n}{k}$.

Exercice 2.1

Donner une preuve combinatoire de l'identité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.