Devoir à la maison n°04

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

Partie I –

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone telle que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(x)+f(y)$$

On pose $c=f(1)$.

1. Déterminer $f(0)$ et montrer que $c\neq 0$. Dans la suite, on pose $g=\frac{1}{c}f$.

2. Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$g(x+y)=g(x)+g(y) \qquad \text{et} \qquad g(x-y)=g(x)-g(y)$$

3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g(n)=n$.

4. Montrer que g est une fonction impaire et en déduire que $g(n)=n$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

5. Montrer que pour tout $r\in\mathbb{Q}$, $g(r)=r$.

6. Montrer que g est strictement croissante.

7. Montrer que $g(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
On pourra raisonner par l'absurde et admettre qu'il existe toujours un rationnel strictement compris entre deux réels distincts.

8. En déduire f.

Partie II –

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On se propose de déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotones telles que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+f(y))=f(x)+y^n$$

Dans la suite, f désigne une telle application.

1. Justifier que f est injective.

2. Montrer que $f(0)=0$.

3. Montrer que $f(f(y))=y^n$ pour tout $y\in\mathbb{R}$.

4. On suppose $n=1$ dans cette question.
   a. Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$.
   b. Conclure.

5. On suppose maintenant $n>1$.
   a. Montrer que n ne peut être pair. On suppose donc n impair dans la suite.
   b. Montrer que $f\circ f$ est bijective. En déduire que f l'est également.
   c. Montrer que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
   d. En déduire une contradiction.
   e. Conclure.

Exercice 1.

On pose pour $z\in\mathbb{C}$, $f(z)=\dfrac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}$.

1. Pour quels nombres complexes z, $f(z)$ est-il défini ?
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$.
3. Montrer que $\begin{cases}|\mathrm{Im}(z)|<\dfrac{\pi}{2}\\ |f(z)|<1\end{cases}\iff |\mathrm{Im}(z)|<\dfrac{\pi}{4}$.
4. On pose $\Delta=\left\{z\in\mathbb{C},\ |\mathrm{Im}(z)|<\dfrac{\pi}{4}\right\}$ et $\mathscr{D}=\{z\in\mathbb{C},\ |z|<1\}$. Vérifier que $f(\Delta)\subset\mathscr{D}$.
5. Soit $\mathrm{Z}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. Montrer que l'équation $e^z=\mathrm{Z}$ d'inconnue z admet une unique solution telle que $\mathrm{Im}(z)\in]-\pi,\pi[$.
6. Soit $u\in\mathscr{D}$. Montrer que $\dfrac{1+u}{1-u}\notin\mathbb{R}_-$.
7. Montrer que l'application f induit une bijection de Δ sur $\mathscr{D}$.