Interrogation écrite n°09

NOM : Prénom : Note :

1. Soit p un projecteur d'un espace euclidien E. Montrer que p est un endomorphisme symétrique si et seulement si p est un projecteur orthogonal.

   Supposons que p est symétrique et montrons que p est un projecteur orthogonal, c'est-à-dire que $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$. *Soit* $(x, y) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$. *Alors*

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle x, p(y)\rangle \qquad \textit{car } y \in \operatorname{Im} p\\ &= \langle p(x), y\rangle \qquad \textit{car p est symétrique}\\ &= \langle 0_{\mathrm{E}}, y\rangle \qquad \textit{car } x \in \operatorname{Ker} p\\ &= 0\end{aligned}$$

   Ainsi $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$ *i.e. p est un projecteur orthogonal.*
   Réciproquement supposons que p est un projecteur orthogonal et montrons que p est symétrique. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$.

$$\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y) + y - p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle + \langle p(x), y - p(y)\rangle$$

   Or $p(x) \in \operatorname{Im} p$ *et* $y - p(y) \in \operatorname{Ker} p$ *donc* $p(x)$ *et* $y - p(y)$ *sont orthogonaux puisque p est un projecteur orthogonal. Ainsi* $\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$. *De la même manière,* $\langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$ *donc* $\langle p(x), y\rangle = \langle px, p(y)\rangle$ *et p est symétrique.* ■

2. On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel et on l'oriente de manière à ce que la base canonique soit directe. Déterminer l'image de $x = (1, 1, 1)$ par la rotation r d'axe orienté par $a = (1, 1, 0)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   Remarquons que $x = a + b$ *avec* $b = (0, 0, 1)$. *Ainsi* $r(x) = r(a) + r(b) = a + r(b)$. *Mais comme* $b \in \operatorname{vect}(a)^{\perp}$,

$$r(b) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) b + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{a}{\|a\|} \wedge b = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$$

   Finalement

$$r(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1, 0\right)$$

■

3. On pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n + e^t}$. Déterminer la limite de la suite (I_n).

Posons $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{t^n + e^t}$.

- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est continue (par morceaux) sur* $\mathbb{R}_+$.
- *La suite* (f_n) *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+$ *vers la fonction* $f : t \mapsto \begin{cases} e^{-t} & si\ 0 \leq t < 1 \\ \dfrac{1}{1+e} & si\ t = 1 \\ 0 & si\ t > 1 \end{cases}$.
- *La fonction* f *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}_+$.
- *Pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| = f_n(t) \leq e^{-t}$ *et* $t \mapsto e^{-t}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{I}_n = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-t}\ \mathrm{d}t = 1 - e^{-1}$$

■

4. On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel. On note P le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$. On note s la réflexion par rapport à P. Déterminer la matrice M de s dans la base canonique.

Remarquons que $\mathrm{P}^\perp = \mathrm{vect}(a)$ *avec* $a = (1,1,1)$. *Notons* p *le projecteur orthogonal sur* $\mathrm{vect}(a)$. *Alors en notant* (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} p(e_1) &= \frac{\langle e_1, a\rangle}{\|a\|^2} a = \frac{1}{3}(1,1,1) \\ p(e_2) &= \frac{\langle e_2, a\rangle}{\|a\|^2} a = \frac{1}{3}(1,1,1) \\ p(e_3) &= \frac{\langle e_3, a\rangle}{\|a\|^2} a = \frac{1}{3}(1,1,1) \end{aligned}$$

Ainsi la matrice de p *dans la base canonique est* $\mathrm{A} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Comme* $s = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - 2p$,

$$\mathrm{M} = \mathrm{I}_3 - 2\mathrm{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

■