

## Normes

### Exercice 1 ★★★

CCP MP 2016

Soient  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  des réels distincts ( $n \geq 1$ ). On pose  $N(P) = \sum_{k=0}^n |P(\alpha_k)|$ . Montrer que  $N$  est une norme non euclidienne sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

### Exercice 2 ★★★

On considère un espace euclidien  $E$  de produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  que l'on munit d'une norme  $N$  (qui n'est pas nécessairement la norme euclidienne associée au produit scalaire précédent). On note  $S$  la sphère unité pour la norme  $N$  i.e.  $S = \{y \in E, N(y) = 1\}$  et on pose pour  $x \in E$

$$N^*(x) = \sup_{y \in S} |\langle x, y \rangle|$$

1. Montrer que l'application  $N^*$  est bien définie sur  $E$ .
2. Montrer que  $N^*$  est une norme sur  $E$ .
3. Dans cette question, on suppose que  $E = \mathbb{R}^n$  et que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$ .  
Déterminer  $N^*$  lorsque  $N$  est la norme  $\|\cdot\|_2$ , la norme  $\|\cdot\|_\infty$  et la norme  $\|\cdot\|_1$ .

### Exercice 3 ★★★

Quelques normes matricielles

Pour  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , on pose

$$N_1(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |A_{i,j}|$$

$$N_2(A) = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|$$

$$N_3(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p A_{i,j}^2}$$

$$N_4(A) = \sqrt{\max \text{Sp}(A^T A)}$$

1. Montrer que  $N_1, N_2, N_3$  et  $N_4$  sont des normes sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que si  $n = p$ , ce sont des normes d'algèbre sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### Exercice 4 ★★

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

1. Montrer que pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max \{\|x + y\|, \|x - y\|\}$$

2. Montrer que l'on peut avoir l'égalité même si  $x$  et  $y$  sont non nuls.

3. Désormais la norme est euclidienne. Montrer que pour tout  $(x, y) \in E^2$

$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2} \max \{\|x + y\|, \|x - y\|\}$$

Peut-on améliorer la constante  $\sqrt{2}$ ?

### Exercice 5 ★★

Comparaison de normes usuelles de  $\mathbb{K}^n$

On pose pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ,

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad N_\infty(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Montrer que

$$N_\infty \leq N_1 \leq n N_\infty \quad N_\infty \leq N_2 \leq \sqrt{n} N_\infty \quad N_2 \leq N_1 \leq \sqrt{n} N_2$$

et montrer que chacune des ces inégalités est optimale.

### Exercice 6 ★

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'une norme  $\|\cdot\|$ . On se donne  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ . Montrer que l'application

$$N : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}_+^n \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\| \end{cases}$$

est une norme sur  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une famille libre.

### Exercice 7 ★★

Soit  $E$  un espace vectoriel que l'on munit de deux normes  $N_1$  et  $N_2$ . On définit les deux boules unités  $B_1 = \{x \in E, N_1(x) \leq 1\}$  et  $B_2 = \{x \in E, N_2(x) \leq 1\}$ . Montrer que  $N_1 = N_2$  si et seulement si  $B_1 = B_2$ .

### Exercice 8 ★★★

#### Inégalités de Hölder et Minkowski

Soient  $p$  et  $q$  deux nombres réels strictement positifs tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

1. Prouver l'inégalité de Young,

$$\forall (u; v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

2. Soient  $x_1, \dots, x_n$  et  $y_1, \dots, y_n$  des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité de Hölder,

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

3. Soient  $p > 1$ ,  $x_1, \dots, x_n$  et  $y_1, \dots, y_n$  des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité de Minkowski,

$$\left( \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^n y_k^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

## Distance

### Exercice 9 ★★

On considère  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  que l'on munit de la norme uniforme. On pose  $u : n \in \mathbb{N} \mapsto (-1)^n$ . Calculer la distance de  $u$  au sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  formé des suites convergentes.

### Exercice 10 ★★

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2, |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

## Equivalence de normes

### Exercice 11 ★★★

On pose  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$  et pour  $f \in E$ ,  $N(f) = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$ .

1. Montrer que  $N$  est une norme sur  $E$ .  $N$  est-elle équivalente à  $\|\cdot\|_{\infty}$  ?
2. Pour  $f \in E$ , on pose  $N'(f) = |f(0)| + \|f'\|_{\infty}$ . Montrer que  $N'$  est une norme et qu'elle est équivalente à  $N$ .

### Exercice 12 ★★★

Centrale MP 2010

Donner un exemple de deux normes non équivalentes sur un espace vectoriel normé.

### Exercice 13 ★★★

Centrale PSI 2010

Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1])$ . Pour  $f \in E$ , on pose  $\|f\|_{\infty} = \sup_{[0,1]} |f|$  et  $\|f\|_2 = \left( \int_{[0,1]} f^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ .

1. Montrer qu'il existe  $b \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\forall f \in E, \|f\|_2 \leq b \|f\|_{\infty}$ .
2. Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie. Montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\forall f \in V, \|f\|_{\infty} \leq c \|f\|_2$ .
3. Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On suppose qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\forall f \in V, \|f\|_{\infty} \leq n \|f\|_2$ . Montrer que  $V$  est de dimension finie et que  $\dim V \leq n^2$ .

**Exercice 14 ★★★**

**D'après Centrale MP 2006**

On note  $E$  l'ensemble des fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telles que  $f(0) = f'(0) = 0$ . Pour  $f \in E$ , on pose

$$N_\infty(f) = \sup_{[0,1]} |f| \quad N(f) = N_\infty(f + f'') \quad N_1(f) = N_\infty(f) + N_\infty(f'')$$

1. Montrer que  $N_\infty$ ,  $N$  et  $N_1$  sont des normes sur  $E$ .
2. Montrer que  $N_\infty$  n'est équivalente ni à  $N$  ni à  $N_1$ .
3. Soit  $f \in E$ . Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)(f(t) + f''(t)) dt$$

4. Montrer que  $N$  et  $N_1$  sont équivalentes.

**Exercice 15 ★★**

**Comparaison de normes usuelles de  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$**

On pose pour  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ ,

$$N_1(x) = \int_a^b |f(t)| dt \quad N_2(x) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \quad N_3(x) = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

1. Montrer que

$$N_1 \leq (b-a)N_\infty \quad N_2 \leq \sqrt{b-a}N_\infty \quad N_1 \leq \sqrt{b-a}N_2$$

et montrer que chacune des ces inégalités est optimale.

2. Montrer que ces trois normes ne sont pas équivalentes.

**Exercice 16 ★★★**

**TPE-EIVP MP 2012**

On pose pour une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  et  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $N_A = \sup_{x \in A} |P(x)|$ .

A quelle condition nécessaire et suffisante  $N_A$  est-elle une norme sur  $\mathbb{R}[X]$ ?

**Suites**

**Exercice 17 ★★★**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\|u(x)\| \leq \|x\|$  pour tout  $x \in E$ .

1. Montrer que  $E = \text{Ker}(\text{Id}_E - u) \oplus \text{Im}(\text{Id}_E - u)$ .
2. Soit  $x \in E$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)$ . Montrer que  $(x_n)$  converge vers la projection de  $x$  sur  $\text{Ker}(\text{Id}_E - u)$  parallèlement à  $\text{Im}(\text{Id}_E - u)$ .

**Exercice 18 ★**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que la suite de terme général  $A^n$  converge vers  $L$ . Montrer que  $L$  est une matrice de projecteur.

**Exercice 19 ★★★**

**CCP MP 2019**

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel muni de son produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On note  $\|\cdot\|$  la norme associée.

On dit qu'une suite  $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$  converge *fortement* vers  $x \in E$  si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0$  et que  $(x_n)$  converge *faiblement* vers  $x$  si  $\forall y \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n - x, y \rangle = 0$ .

1. a. Montrer que si  $(x_n)$  converge faiblement, sa limite est unique.  
b. Montrer que la convergence forte implique la convergence faible.
2. Montrer que  $(x_n)$  converge fortement vers  $x$  si et seulement si  $(x_n)$  converge faiblement vers  $x$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = \|x\|$ .
3. Montrer que, en dimension finie, ces deux modes de convergence sont équivalents.
4. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

**Exercice 20 ★★★★★**

1. Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs réelles telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ . Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $(u_n)$  est un intervalle.
2. Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  continue et  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in [a, b]$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $(u_n)$  converge si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ .

### Exercice 21 ★

Soit  $A$  une matrice antisymétrique réelle telle que  $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Montrer que la limite est nulle.

### Exercice 22 ★★★

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$ .

### Exercice 23 ★★

Soient  $A$  le point d'affixe  $i$  et  $B$  le point d'affixe  $-i$ . On définit la suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points du plan par  $M_0, M_1$  le milieu de  $[AM_0]$ ,  $M_2$  le milieu de  $[BM_1]$ ,  $M_3$  le milieu de  $[AM_2]$ ,  $M_4$  le milieu de  $[BM_3]$  et ainsi de suite.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Préciser la définition des points  $M_{2n}$  et  $M_{2n+1}$ .
2. On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_n$  l'affixe de  $M_n$ . Montrer que les suites  $(z_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(z_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont arithmético-géométriques.
3. Etudier la convergence des suites  $(M_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(M_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
4. Que dire de la suite  $(M_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$  ?

### Exercice 24 ★★

Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

1. On note  $x_n$  et  $y_n$  les parties réelle et imaginaire de  $z_n$ .
  - a. Déterminer une relation de récurrence liant  $y_n$  et  $y_{n+1}$ . En déduire la limite de  $(y_n)$ .
  - b. Déterminer le sens de variation de  $(|z_n|)$ .
  - c. Déterminer le sens de variation de  $(x_n)$ .
  - d. En déduire la convergence de  $(x_n)$ . On ne cherchera pas à calculer la limite de cette suite.
  - e. En déduire la convergence de  $(z_n)$ . Que peut-on dire de sa limite ?
  - f. Déterminer la limite de  $(z_n)$  si  $z_0 \in \mathbb{R}_+$  et si  $z_0 \in \mathbb{R}_-$ .
2. On note  $r_n$  le module et  $\theta_n$  l'argument principal (i.e. appartenant à  $] -\pi, \pi]$ ) de  $z_n$ .
  - a. En exprimant  $z_{n+1}$  sous forme exponentielle, exprimer d'une part  $r_{n+1}$  en fonction de  $r_n$  et  $\theta_n$  et d'autre part  $\theta_{n+1}$  en fonction de  $\theta_n$ .
  - b. Déterminer la limite de  $(\theta_n)$ .
  - c. Soit  $\alpha \in ] -\pi, 0[ \cup ] 0, \pi[$ . En remarquant que pour  $a \neq 0[\pi]$ ,  $\cos a = \frac{\sin 2a}{2 \sin a}$ , donner une expression simplifiée de  $S_n = \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . En déduire que  $(S_n)$  converge vers  $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ .
  - d. En déduire la limite de  $(r_n)$  puis celle de  $(z_n)$  en fonction de  $r_0$  et  $\theta_0$ .

## Séries

### Exercice 25 ★★

Soient  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie,  $k \in [0, 1[$  et  $f : E \rightarrow E$  tels que

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

Soit  $u \in E^{\mathbb{N}}$  telle que  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En considérant la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n+1} - u_n$ , montrer que  $u$  converge.

### Exercice 26 ★

Petites Mines 2016

Soit  $\sum u_n$  une série numérique absolument convergente.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{u_{n-k}}{2^k}$ .

1. Montrer que la série  $\sum v_n$  converge et calculer sa somme.
2. Reprendre la question précédente lorsque  $\sum u_n$  est une série absolument convergente à termes dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

## Suites extraites

### Exercice 27 ★★

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $\{x\} = x - [x]$  la partie fractionnaire de  $x$ . Montrer que la suite  $(\{\sqrt{n}\})$  n'admet pas de limite.

### Exercice 28 ★★★

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites de nombres réels et  $p$  et  $q$  deux entiers naturels impairs tels que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^p - v_n^q &= 0 \end{aligned}$$

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

### Exercice 29 ★★★

Centrale PC 2016

Soient  $(x_n)$  et  $(y_n)$  deux suites telles que  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n} \\ y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n} \end{cases}$$

1. Montrer que les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont bien définies.
2. On suppose que les deux suites convergent. Déterminer rigoureusement leur(s) limite(s) possible(s).
3. Montrer que  $(x_n)$  et  $(y_n)$  convergent.