

Convergences

Exercice 1 ★★

On pose $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+x^4 \sin^2 x}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $u_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1+(x+n\pi)^4 \sin^2 x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Encadrer les termes de la suite (u_n) à l'aide des termes de la suite (v_n) où

$$v_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1+(n\pi)^4 \sin^2 x}$$

3. Calculer explicitement v_n et en déduire un équivalent de u_n .
4. En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4 \sin^2 x}$.

Exercice 2 ★★★★★

Mines MP 2016

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2.

1. Déterminer la nature de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \cos(P(x)) dx$.
2. Déterminer la nature de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} |\cos(P(x))| dx$.
3. Déterminer le signe de I lorsque $P = X^2$.

Exercice 3 ★★

Les intégrales suivantes convergent-elles ?

$$1. \int_0^1 \ln t dt$$

$$2. \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

$$3. \int_0^{+\infty} x \sin(x) e^{-x} dx$$

$$4. \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$$

$$5. \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$$

$$6. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1} dt$$

$$7. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx$$

Exercice 4 ★★

Intégrales de Bertrand

1. Pour quelles valeurs des réels α et β l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge-t-elle ?
2. Même question pour l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$.

Exercice 5 ★★

Centrale-Supélec MP 2021

On considère $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x dx$.

1. Montrer l'existence de I .
2. Montrer $I < 0$.

Exercice 6 ★★★

1. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ converge.
2. Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} dx$.

Exercice 7 ★★★

Pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ converge-t-elle ?

Exercice 8 ★★★

X-ESPCI PC 2013

Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $(f')^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer qu'il en est de même pour $g : t \mapsto \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2$.

Exercice 9 ★★

Non convergence absolue de l'intégrale de Dirichlet

Montrer que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Théorie

Exercice 10 ★★★★★

1. Soit f une application continue par morceaux de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} admettant une limite ℓ en $+\infty$ et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Montrer que $\ell = 0$.
2. Soit f une application uniformément continue de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.

Exercice 11 ★★★★★

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

Exercice 12 ★★★★★

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 telle que f et f'' soit de carré intégrable sur \mathbb{R} .

1. Montrer que f' est également de carré intégrable sur \mathbb{R} .

2. Montrer que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right) \left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)$$

Exercice 13 ★★★

Banque Mines-Ponts PSI 2021

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

1. Prouver que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si la suite $n \mapsto \int_0^n f(t) dt$ converge et que dans ces conditions :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(t) dt$$

2. Que se passe-t-il si on enlève l'hypothèse $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?

Calculs

Exercice 14 ★★★

Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-a^2 t^2 - \frac{b^2}{t^2}} dt$ où $a, b > 0$. On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 15 ★★★

n désigne un entier naturel et α un réel strictement supérieur à -1 . On pose

$$I_n(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}}$$

1. Justifier que cette intégrale est bien définie.
2. Calculer $I_0(0)$. Posant $t = \sqrt{\frac{1+\alpha x}{1-x}}$, calculer $I_0(\alpha)$. Montrer que la fonction $\alpha \mapsto I_0(\alpha)$ est continue en 0.
3. En dérivant $x^n \sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}$ trouver une relation de récurrence entre $I_{n-1}(\alpha)$, $I_n(\alpha)$ et $I_{n+1}(\alpha)$. En déduire les valeurs de $I_n(0)$ et $I_n(1)$.

Exercice 16 ★★

Convergence et calcul de

$$I = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

Exercice 17 ★★★

X MP 2010

Déterminer

$$\sup_{x>0} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2 + t^2} dt$$

Exercice 18 ★★★

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ l'intégrale $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^a)}$ converge-t-elle ?
2. On pose $J(a) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^a)}$. Montrer que $I(a) = J(a) + J(-a)$.
3. En déduire la valeur de $I(a)$.

Exercice 19 ★★

CCP MP

1. Déterminer le domaine de définition $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2 + t^2} dt$.
2. Calculer $F(1)$.
3. Calculer $F(x)$ pour tout x dans le domaine de définition de f .

Exercice 20 ★★★

Intégrale de Dirichlet

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.
2. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t) \sin(2nt)}{\sin(t)} dt \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t} dt$$

Justifier que u_n et v_n sont bien définies.

3. En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite (u_n) est constante et préciser sa valeur.
4. Soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un segment $[a, b]$. Par une intégration par parties, montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b h(t) \sin(\lambda t) dt = 0$.
5. Montrer que la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{\cos t}{\sin t}$ est prolongeable en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
6. Calculer la limite de la suite $(u_n - v_n)$ puis celle de (v_n) .
7. En déduire la valeur de I .

Exercice 21 ★★★**TPE-EIVP PSI 2017**

Soit $a > 1$, Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$ admettant une limite finie ℓ en $+\infty$.

1. Montrer que pour tout x dans $[1, +\infty[$:

$$\int_1^x \frac{f(at) - f(t)}{t} dt = \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt - \int_1^a \frac{f(t)}{t} dt$$

2. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{f(at) - f(t)}{t} dt$ converge et la calculer en fonction de $\int_1^a \frac{f(t)}{t} dt$ et de ℓ .

Exercice 22 ★★

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$.

1. Justifier que l'intégrale définissant I converge.

2. Montrer que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$.

3. Montrer que $2I = \int_0^{\pi} \ln(\sin t) dt$.

4. En déduire la valeur de I .

Exercice 23 ★★★

Soient a et b deux réels strictement positifs. Convergence et calcul de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$$

Exercice 24 ★★

Existence et calcul de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$$

Exercice 25 ★★**Trigonométrie**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier la convergence et calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-at} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-at} dt$$

Exercice 26 ★

Déterminer la nature des intégrales suivantes et calculer leurs valeurs le cas échéant.

1. $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{4+t^2} dt$

2. $J = \int_0^2 \frac{1}{4-t^2} dt$

3. $K = \int_0^{+\infty} \sin(t) dt$

4. $L = \int_0^1 \ln(t) dt$

5. $M = \int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$

6. $N = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{1-9t^2}} dt$

7. $O = \int_3^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 3t + 2}$

8. $P = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$

Comportements asymptotiques**Exercice 27 ★★★****Centrale PSI**

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R}_+ . On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi(x) = f(x) + \int_0^x f(t) dt$$

On suppose que φ admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f admet pour limite 0 en $+\infty$.

Exercice 28 ★★★★★

Mines-Ponts MP 2016

1. Soient $a \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(a) > 0$ et f de classe \mathcal{C}_1 sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans \mathbb{C} telle que $\lim_{+\infty} f' + af = 0$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.
2. Soit f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans \mathbb{C} telle que $\lim_{+\infty} f'' + f' + f = 0$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.
3. Généraliser.

Exercice 29 ★★★

Centrale MP 2018

Soit $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ continue de carré intégrable sur \mathbb{R}_+ . On pose $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

1. Déterminer la limite de g en 0.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. Montrer que g est de carré intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 30 ★★★

Déterminer un équivalent simple de $F : x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 31 ★★★

1. Montrer que $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .
2. Déterminer un équivalent de $g : x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 32 ★★★

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + f'(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 33 ★★★

Banque Mines-Ponts PSI 2021

Soit $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que f est définie sur $I =]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable sur I et déterminer f' .
3. Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est définie et la calculer.

Exercice 34 ★★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2017

On pose pour tout x non nul,

$$F(x) = \int_x^{7x} \frac{1 - e^{-t}}{t^2} dt$$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

Exercice 35 ★

Déterminer des équivalents de

1. $\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt$ lorsque x tend vers $+\infty$;
2. $\int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{t^2} dt$ lorsque x tend vers $+\infty$;
3. $\int_x^1 \frac{e^t}{t^3} dt$ lorsque x tend vers 0^+ ;
4. $\int_0^x \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ lorsque x tend vers 0^+ .

Suites d'intégrales

Exercice 36 ★★★**CCP MP 2018**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et π -périodique vérifiant

$$\int_0^\pi f(t) dt = 0$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_0^\pi f(t)e^{-t/n} dt \quad v_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t/n} dt$$

1. Justifier que u_n et v_n sont bien définis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Justifier qu'il existe une suite (a_n) , que l'on précisera, telle que $v_n = a_n u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\pi}$.
4. Montrer que (u_n) converge vers 0. Montrer que (v_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 37 ★★

Soit $f_n : t \mapsto \cos(2nt) \ln(\sin t)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier que f_n est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

2. On pose alors $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt$ et $J_n = 2nI_n$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$J_n = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \sin(2nt) dt$$

3. Calculer $J_{n+1} - J_n$ et en déduire la valeur de J_n puis celle de I_n .

Exercice 38 ★★**Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (t \ln(t))^n dt$. Montrer que cette intégrale converge. Donner sa valeur.

Exercice 39 ★

On pose $I_n = \int_0^1 \ln^n(x) dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que I_n converge.
2. Déterminer une relation de récurrence suivie par la suite (I_n) .
3. En déduire la valeur de I_n .

Fonctions définies par des intégrales**Exercice 40 ★★****Fonction Γ**

On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de Γ .
2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

3. Déterminer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 41 ★★**Fonction B d'Euler**

On pose $B : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$.

1. Montrer que B est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
2. Montrer que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, B(x, y) = B(y, x)$$

3. Montrer que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$$

4. Calculer $B(n+1, p+1)$ pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.