NOMBRES COMPLEXES

Formes algébrique et exponentielle

Exercice 1 ★

1. Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $4\sqrt{2}(-1+i)$.
2. Trois nombres complexes ont pour produit $4\sqrt{2}(-1+i)$. Leurs modules sont en progression géométrique de raison 2 et leurs arguments sont en progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$. On note z_1, z_2 et z_3 ces trois nombres, où la numérotation respecte l'ordre des modules. Sachant que z_1 a un argument compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, déterminer le module et un argument de chacun des trois nombres z_1, z_2 et z_3.
3. Construire les images M_1, M_2 et M_3 des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 dans le plan complexe.

Exercice 2 ★

Déterminer des racines carrées de $\sqrt{3}+i$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 3 ★

1. Déterminer les racines carrées complexes de $1+i$ sous forme exponentielle.
2. Déterminer les racines carrées complexes de $1+i$ sous forme algébrique.
3. En déduire que $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.
4. Montrer que $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.
5. Déterminer les valeurs de

$$\cos\frac{3\pi}{8} \qquad \sin\frac{3\pi}{8} \qquad \tan\frac{3\pi}{8}$$
$$\cos\frac{5\pi}{8} \qquad \sin\frac{5\pi}{8} \qquad \tan\frac{5\pi}{8}$$
$$\cos\frac{7\pi}{8} \qquad \sin\frac{7\pi}{8} \qquad \tan\frac{7\pi}{8}$$

Exercice 4 — Le nombre j

On note $j=e^{2i\pi/3}$.

1. Calculer j^3, $1+j+j^2$, $1+j^2+j^4$, j^{-1} et $\overline{j}$ en fonction de j.
2. Simplifier l'expression
$$\frac{1+j}{(1-i)^2}+\frac{1-j}{(1+i)^2}.$$

Exercice 5 — Formes algébriques

Voici quelques calculs pour se délier les doigts...

1. Représenter sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :
$$\frac{2-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i}, \quad \frac{(2+i)(3+2i)}{2-i}, \quad \frac{3+4i}{(2+3i)(4+i)}.$$
2. On considère les nombres complexes
$$z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{1}{\sqrt{3}+i}.$$
Représenter sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

a. z_1+z_2
b. z_1z_2
c. z_1/z_2
d. $z_1^2+z_2^2$
e. $z_1^3+z_2^3$

Exercice 6 **Formes exponentielles**

1. On pose $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1+i$.
   a. Représenter le quotient z_1/z_2 sous forme exponentielle.
   b. En déduire les valeurs de $\cos(7\pi/12)$ et de $\sin(7\pi/12)$.
2. En précisant pour quelles valeurs des réels x et y, elles ont un sens, mettre sous forme exponentielle les expressions suivantes :
   a. $1+\sin x - i\cos x$
   b. $\dfrac{1}{1+i\tan x}$
   c. $\dfrac{1+\cos x+i\sin x}{1-\cos x-i\sin x}$
   d. $\dfrac{e^{ix}+e^{iy}}{1+e^{i(x+y)}}$
   e. $\dfrac{(1-i\sqrt{3})(\cos x+i\sin x)}{\cos x+\sin x+i(\cos x-\sin x)}$

Exercice 7 ★ **Autour des formes exponentielles**

Voici quelques calculs de puissances.

1. Pour tout entier naturel n, simplifier les expressions suivantes :
   a. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^n$
   b. $\dfrac{(1-i)^n-\sqrt{2}^n}{(1+i)^n-\sqrt{2}^n}$
   c. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^n$
   d. $(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n$
   e. $\dfrac{(1+i)^n-(1-i)^n}{i}$
2. Pour quelles valeurs de l'entier relatif n le nombre complexe $(\sqrt{3}+i)^n$ appartient-il à $\mathbb{R}_+$? Pour quelles valeurs est-il imaginaire pur ?

Exercice 8 ★ **Une équation trigonométrique**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $z_\theta = -\sin(2\theta)+2i\cos^2(\theta)$.

1. Déterminer le module et un argument de z_θ. On discutera en fonction des valeurs de θ.
2. Déterminer l'ensemble des nombres réels θ tels que $|z_\theta| = |z_\theta - 1|$.

Exercice 9 ★

Soit
$$v = \frac{\sqrt{3}+i}{i-1}.$$
Ecrire v^{2002} sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Exercice 10 ★

On pose $\omega = \sqrt{3}+i$. Déterminer $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega^n \in \mathbb{R}$. Même question avec $\omega^n \in i\mathbb{R}$.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $2z+3\overline{z} = 4-3i$
2. $3z-2\overline{z} = -5+i$

Réels et imaginaires purs

Exercice 12 ★

Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$.

1. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur si et seulement si $z \in \mathbb{U}$.
2. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U}$ si et seulement si z est imaginaire pur.

Exercice 13 ★ **Des réels**

Soient a et b de module 1 tels que $a \neq \pm b$.

1. Prouver que $\dfrac{1+ab}{a+b} \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$\frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b} \in i\mathbb{R}.$$

Module et argument

Exercice 14 ★★

On pose $\varphi(z) = |z^3 - z + 2|$ pour $z \in \mathbb{C}$. On souhaite déterminer la valeur maximale de $\varphi(z)$ lorsque z décrit l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
2. Soit f la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 2$$
Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. On regroupera ces informations dans un tableau de variations.
3. Soit $z \in \mathbb{U}$ et θ un de ses arguments. Montrer que
$$|z^3 - z + 2|^2 = 4f(\cos\theta)$$
4. Répondre à la question initialement posée. On précisera pour quelle(s) valeur(s) de $z \in \mathbb{U}$ cette valeur maximale est atteinte.

Exercice 15 ★★

On définit une suite de complexes (z_n) par son premier terme $z_0 \in \mathbb{C}$ et par la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$$

1. Que peut-on dire de la suite (z_n) si $z_0 \in \mathbb{R}_+$? si $z_0 \in \mathbb{R}_-$?
2. On suppose que $z_0 \notin \mathbb{R}_-$ jusqu'à la fin de l'énoncé. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \notin \mathbb{R}_-$.
3. On admet que tout complexe non nul admet un unique argument dans $]-\pi, \pi]$ appelé *argument principal*. Que peut-on dire de cet argument si ce complexe n'appartient pas à $\mathbb{R}_-$?
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note r_n le module et θ_n l'argument principal de z_n. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$ et $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.
5. Exprimer θ_n en fonction de θ_0. Quelle est la limite de la suite (θ_n) ?
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$r_n = r_0 \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$$
7. Montrer que $\cos(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2\sin x}$ (on précisera pour quels réels x cette égalité a un sens).
8. On suppose maintenant que $z_0 \notin \mathbb{R}$ jusqu'à la fin de l'énoncé. En déduire une expression de r_n en fonction de n, θ_0 et r_0 sans le symbole $\prod$.
9. Déterminer la limite de la suite (r_n) et en déduire celle de la suite (z_n).

Exercice 16 ★ — Fonctions symétriques

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ de module 1. Montrer que
$$|a + b + c| = |ab + bc + ac|.$$

Exercice 17 ★ — Modules

Déterminer les nombres complexes z tels que z, $1/z$ et $1 + z$ soient de même module.

Exercice 18 ★ **Posé à l'X !**

Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1 tels que $a \neq c$. Montrer que

$$\frac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2} \in \mathbb{R}_+.$$

Exercice 19 ★ **Formule du parallélogramme**

Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer que

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

Exercice 20 ★

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 = \overline{z}$
2. $z^3 = \overline{z}$
3. $z^2 = 2\overline{z}$
4. $z^2 = -\overline{z^2}$
5. $z^4 = \dfrac{32}{\overline{z}}$.
6. $z^2 = \dfrac{1}{\overline{z^2}}$
7. $z^3 = -\dfrac{1}{\overline{z^3}}$

Equations dans $\mathbb{C}$

Exercice 21 ★

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 + (5-2i)z + 5 - 5i = 0$;
2. $z^2 + (-3+i)z + 4 - 3i = 0$;
3. $z^2 - (9-2i)z + 26 = 0$;
4. $z^4 + (3-6i)z^2 + 2(16-63i) = 0$;
5. $z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0$;
6. $z^4 - z^3 - z + 1 = 0$;
7. $z^4 + 2 - i\sqrt{12} = 0$.

Exercice 22 ★ **Bizarre**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + 8|z| - 3 = 0.$$

Exercice 23 ★

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(3+i)z^2 - (8+6i)z + 25 + 5i = 0$;
2. $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$;
3. $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$;
4. $(1-5i)z^2 - (20+4i)z + 61 + 7i = 0$;
5. $z^6 - 2\cos(\theta)z^3 + 1 = 0$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 24 ★

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $(z+i)^3 + iz^3 = 0$;
2. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

Exercice 25 ★

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i$.

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ a une unique solution imaginaire pure que l'on déterminera.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.
3. Etudier dans le plan complexe la nature du triangle ayant pour sommets les images des trois racines de cette équation.

Exercice 26 ★

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. Montrer que $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i\,\text{cotan}\,\dfrac{\theta}{2}$ où $\text{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$.
2. Résoudre l'équation $(z-1)^5 = (z+1)^5$. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction cotan.

Exercice 27 ★★

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. Montrer que $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i\operatorname{cotan}\dfrac{\theta}{2}$ où $\operatorname{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$.
2. Résoudre de deux façons l'équation $(z-1)^5 = (z+1)^5$. En déduire les valeurs de $\operatorname{cotan}\dfrac{\pi}{5}$, $\operatorname{cotan}\dfrac{2\pi}{5}$, $\operatorname{cotan}\dfrac{3\pi}{5}$ et $\operatorname{cotan}\dfrac{4\pi}{5}$.

Exercice 28 ★★

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0$;
2. $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$ (exprimer les solutions à l'aide de la fonction cot) ;
3. $(1+iz)^n + (1-iz)^n = 0$ (distinguer les cas n pair et n impair et exprimer les solutions à l'aide de la fonction tan).

Exercice 29 ★ **Questions enchaînées**

Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel non nul.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$$
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation
$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1$$
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0\left[\dfrac{2\pi}{n}\right]$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{in\theta}$$
4. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation
$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 2\cos(n\theta)$$
On traitera le cas général, $\theta \in \mathbb{R}$ sans aucune restriction.

Exercice 30 ★★

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre sur l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$
$$z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$$
On précisera le nombre de solutions suivant la valeur de θ.
2. En déduire la résolution sur $\mathbb{C}$ de l'équation
$$z^{2n} - 2z^n\cos(n\theta) + 1 = 0$$
On précisera le nombre de solutions suivant la valeur de θ.

Exercice 31 ★ **Banque CCP**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Résoudre l'équation

$$(z+i)^n = (z-i)^n$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On vérifiera en particulier que les solutions sont réelles et on précisera leur nombre.

Applications à la trigonométrie

Exercice 32 ★

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

1. Déterminer une équation du second degré dont les racines sont α et β.
2. En déduire $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.
3. En déduire $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\sin \frac{\pi}{5}$.

Exercice 33 ★★

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{11}}$ ainsi que

$$S = \omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9 \qquad T = \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$$

1. **a.** Montrer que $\sin \frac{6\pi}{11} + \sin \frac{18\pi}{11} > 0$. En déduire que $\operatorname{Im}(S) > 0$.
   b. Montrer que $S + T = -1$ et $ST = 3$.
   c. En déduire une équation du second degré dont sont solutions S et T puis les valeurs de S et T.
2. **a.** Montrer que $\omega - \omega^{10} = 2i \sin \frac{2\pi}{11}$.
   b. Montrer que $\frac{1-\omega^3}{1+\omega^3} = -i \tan \frac{3\pi}{11}$.
   c. Montrer que $\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = \frac{1-\omega^3}{1+\omega^3}$.
   d. En déduire que $\tan \frac{3\pi}{11} + 4 \sin \frac{2\pi}{11} = i(T - S) = \sqrt{11}$.

Exercice 34 ★

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. On pose $A = \omega + \omega^4$ et $B = \omega^2 + \omega^3$.

1. Montrer que $A = 2\cos \frac{2\pi}{5}$ et $B = 2\cos \frac{4\pi}{5}$.
2. Calculer $A + B$ et AB. En déduire les valeurs exactes de A et B.
3. En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{5}$, $\cos \frac{2\pi}{5}$, $\cos \frac{3\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.

Exercice 35 ★ **Linéarisation**

En linéarisant $\sin^4 x$, calculer une expression simple de la somme

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right).$$

Racines de l'unité

Exercice 36 ★

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $\alpha = \omega + \frac{1}{\omega}$.

1. Montrer que $\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} + 1 + \omega + \omega^2 = 0$.
2. En déduire que α est solution d'une équation du second degré que l'on précisera.
3. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ puis de $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 37 ★★ **Une formule autour des racines n-ièmes de l'unité**

Soient $n \geq 1$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{km}$. On distinguera suivant que m est ou non multiple de n.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose
$$S(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(z + \omega^k\right)^n$$
Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $S(z) = n\,(z^n + 1)$.
3. Calculer $S\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)$. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = 0$$

Exercice 38 ★ **Racines septièmes de l'unité**

Soit ω une racine septième de l'unité distincte de 1. Simplifier le nombre
$$\alpha = \frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} + \frac{\omega^3}{1+\omega^6}.$$

Inégalites

Exercice 39 ★★★ **D'après X 2015**

Déterminer les parties bornées non vides de $\mathbb{C}$ stables par $z \mapsto z^2+z+1$ et $z \mapsto z^2-z+1$.

Exercice 40 ★

Etablir par un calcul que $\mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2}$ équivaut à
$$\left|\frac{z}{z-1}\right| < 1.$$
Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 41 ★ **Vu à l'X (PC 2008)**

Soit λ un nombre réel irrationnel. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a
$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\lambda\pi}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(\lambda\pi)|}.$$

Exercice 42 ★ **Localisation des racines d'un polynôme**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que
$$1 + z + \cdots + z^{n-1} - nz^n = 0.$$
Montrer que $|z| \leqslant 1$.

Exercice 43 ★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Montrer que
$$\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leqslant \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}.$$

Exercice 44 ★ **Posé à Centrale**

Prouver que
$$\forall\, a, b \in \mathbb{C}, |a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|.$$
étudier les cas d'égalité.

Exercice 45 ★ **L'inégalité triangulaire générale**

Soient $n \geqslant 2$ et $z_1, z_2, \dots, z_n$ appartenant à $\mathbb{C}^*$. Prouver que
$$|z_1 + \dots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$
avec égalité *si et seulement si*
$$\arg(z_1) \equiv \arg(z_2) \equiv \dots \equiv \arg(z_n)[2\pi]$$

Géométrie

Exercice 46 ★ **Lieux géométriques**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)=0$

2. $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)=0$

3. $\mathrm{Re}(z^3)=\mathrm{Im}(z^3)$

Exercice 47 ★★ **Théorème des angles inscrits**

Soient A, B, C, D quatre points du plan distincts deux à deux. On suppose de plus A, B, C non alignés et on introduit le cercle $\mathcal{C}$ de centre O circonscrit au triangle ABC.
On choisit un repère orthonormé du plan de centre O tel que $\mathcal{C}$ ait pour rayon 1. On note a,b,c,d les affixes respectifs de A, B, C, D.
On pose enfin $\mathrm{Z}=\dfrac{d-a}{c-a}\dfrac{c-b}{d-b}$.

1. Dans cette question, on suppose que D appartient à $\mathcal{C}$.

   a. Justifier que $\overline{a}=\dfrac{1}{a},\overline{b}=\dfrac{1}{b},\overline{c}=\dfrac{1}{c},\overline{d}=\dfrac{1}{d}$.

   b. Montrer que Z est un réel.

   c. En déduire que $(\overrightarrow{\mathrm{AC}},\overrightarrow{\mathrm{AD}})\equiv(\overrightarrow{\mathrm{BC}},\overrightarrow{\mathrm{BD}})[\pi]$.

2. Réciproquement, on suppose que $(\overrightarrow{\mathrm{AC}},\overrightarrow{\mathrm{AD}})\equiv(\overrightarrow{\mathrm{BC}},\overrightarrow{\mathrm{BD}})[\pi]$ et on veut montrer que D appartient à $\mathcal{C}$.

   a. Que peut-on dire de Z ?

   b. Exprimer d en fonction de a,b,c,Z.

   c. Calculer $\overline{d}$ et en déduire que D appartient à $\mathcal{C}$.

Exercice 48 ★★

Soit z un nombre complexe. On note A, B, C, D les points d'affixes respectifs $1,z,z^2,z^3$ dans un repère orthonormé du plan.

1. Pour quelles valeurs de z les points A, B, C, D sont-il deux à deux distincts ? On suppose cette cette condition remplie dans la suite de l'énoncé.

2. Déterminer les valeurs de z tels que ABCD soit un parallélogramme. Préciser la nature de ce parallélogramme.

3. Déterminer les valeurs de z tels que le triangle ABC soit rectangle isocèle en A.

4. Déterminer les valeurs de z tels que ABD soit rectangle isocèle en A.

Exercice 49 ★★ **D'après Concours Général 1991**

On pose $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on considère l'application

$$\mathrm{P}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z & \longmapsto & z^3+\alpha z^2+\beta z\end{array}\right.$$

où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$.

1. Que vaut $1+j+j^2$?

2. Montrer que $\mathrm{P}(1)+\mathrm{P}(j)+\mathrm{P}(j^2)=3$.

3. On note A_0, A_1 et A_2 les points du plan d'affixes respectifs 1, j et j^2. On se donne également B_1 et B_2 deux points du plan.
   Montrer qu'il existe $k\in\{0,1,2\}$ tel que $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_1\cdot\mathrm{A}_k\mathrm{B}_2\geq 1$.
   On pourra utiliser le fait que le module d'une somme de complexes est toujours inférieur ou égal à la somme des modules de ces complexes (inégalité triangulaire).

Exercice 50 ★★

Soient a, b et c trois nombres complexes non nuls de même module et deux à deux distincts. On note A, B, C et H les points d'affixes respectifs a, b, c et $a+b+c$.

1. On pose $w = \overline{b}c - b\overline{c}$. Calculer $\overline{w}$ et en déduire que w est imaginaire pur.
2. Montrer que $(b+c)(\overline{b}-\overline{c})$ est également imaginaires pur.
3. Montrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs d'affixes respectifs z_1 et z_2, alors leur produit scalaire est la partie réelle de $z_1\overline{z_2}$.
4. Montrer que les droites (AH) est (BC) sont perpendiculaires.
5. En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 51 ★ **Problème d'alignement**

Déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe z tels que les points d'affixes 1, z et z^3 soient alignés.

Exercice 52 ★ **Problème d'alignement**

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que les points d'affixes respectives z, iz et z^2 soient alignés.

Exercice 53 ★ **Problème d'alignement**

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$. Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan $\mathcal{P}$ tels que les points d'affixes respectives $1, z^2$ et z^4 soient alignés.

Exercice 54 ★★ **Un bouquet de cercles**

Déterminer les points M(z) du plan $\mathcal{P}$ tels que $\left(\frac{z}{z-1}\right)^4 \in \mathbb{R}$.

Exercice 55 ★★ **Sa majesté équilatérale**

Soient A, B, C trois points deux à deux distincts d'affixes a, b, c.

1. Prouver que ABC est un triangle équilatéral direct *si et seulement si*
$$a + jb + j^2c = 0,$$
et équilatéral indirect *si et seulement si*
$$a + jc + j^2b = 0.$$
2. Prouver que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si
$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$

Exercice 56 ★ **La droite d'Euler (d'après un oral de Mines-Ponts)**

On se place dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ un triangle inscrit dans un cercle de centre O. On note z_k l'affixe de M_k.

1. Montrer que l'orthocentre H du triangle $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ a pour affixe
$$h = z_1 + z_2 + z_3.$$
2. En déduire que le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un vrai triangle sont alignés.

Exercice 57 ★ **Trois lieux géométriques**

Soient $\mathcal{E} = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ et $f \ : \ \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ l'application définie par
$$\forall z \in \mathcal{E}, \quad f(z) = \frac{z+i}{z-2i}.$$

Déterminer les ensembles suivants :

1. $\mathcal{E}_1 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathbb{R}\right\}$;
2. $\mathcal{E}_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in i\mathbb{R}\right\}$;
3. $\mathcal{E}_3 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(f(z)) \equiv \pi/2[2\pi]\right\}$.

Exercice 58 ★

Dans tout l'exercice, le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$.

1. Déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les nombres complexes z, $1/z$ et $1+z$ aient même module.

2. Déterminer les nombres complexes tels que
$$|z-1| = |\overline{z}+1|.$$
Interprétation géométrique ?

3. Déterminer le lieu des points du plan dont l'affixe z vérifie
$$|(1+i)\overline{z}-2i| = 2.$$

Calcul de sommes

Exercice 59 ★

Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et par $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = x_n + \\ y_{n+1} = y_n - x_n \end{cases}$.

On pose $z_n = x_n + iy_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer z_0, z_1, z_2 et z_3.

2. Montrer que (z_n) est une suite géométrique. On donnera sa raison sous formes algébrique et exponentielle.

3. Exprimer $\mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$, $\mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$, $\mathrm{C}_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$ en fonction de n à l'aide des fonctions cos et sin.

Exercice 60 ★★

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \not\equiv 0[2\pi]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} k\cos(k\alpha) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_n = \sum_{k=0}^{n} k\sin(k\alpha)$$

Montrer que
$$\mathrm{S}_n = \frac{n\cos(n+1)\alpha - (n+1)\cos(n\alpha) + 1}{2(\cos\alpha - 1)}$$
$$\mathrm{T}_n = \frac{n\sin(n+1)\alpha - (n+1)\sin(n\alpha)}{2(\cos\alpha - 1)}$$

Exercice 61 ★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer de deux manières $(1+i)^{2n}$ et en déduire $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}$ et $\mathrm{T}_n = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{2k+1}$.

Exercice 62 ★ **Banque CCP**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument de $z^k - 1$.

2. On pose $\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $\mathrm{S} = \dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 63 ★★

Soit n un entier naturel non nul. On pose $\omega = e^{\frac{i\pi}{n}}$.

1. Justifier que $\omega \neq 1$.
2. On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$. Montrer que $A_n = \frac{2}{1-\omega}$.
3. On pose $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{k\pi}{n}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}$. Montrer que $C_n = 1$ et $S_n = \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$.
4. Calculer $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega^{2k} - 1|$.

Exercice 64 ★★

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer de deux manières $(1+i)^n$ et en déduire les sommes suivantes

$$S_n = \sum_{0\leq 2k\leq n}^{n} (-1)^k \binom{n}{2k} \qquad T_n = \sum_{0\leq 2k+1\leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$$

Exercice 65 ★ **Noyaux de Dirichlet et de Féjer**

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $D_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ki\theta}$ et $F_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} D_k(\theta)$.

1. Montrer que si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, $D_n(\theta) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

   Préciser également la valeur de $D_n(\theta)$ lorsque $\theta \equiv 0[2\pi]$.
2. Montrer que si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, $F_n(\theta) = \frac{\sin^2\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

   Préciser également la valeur de $F_n(\theta)$ lorsque $\theta \equiv 0[2\pi]$.

Exercice 66 ★ **Simplification d'une somme**

Simplifier la somme

$$S_n = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} (-3)^k \binom{n}{2k}.$$

Exercice 67 ★ **Sommes de 3 en 3**

Pour tout entier naturel n, on pose

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}, \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+1}, \quad \text{et} \quad S_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+2}.$$

1. Calculer $S_1 + S_2 + S_3$, puis $S_1 + jS_2 + j^2S_3$ et $S_1 + j^2S_2 + j^4S_3$.
2. En déduire les valeurs de S_1, S_2 et S_3.

Exercice 68 ★ **Sommes classiques**

Soient α et β, deux nombres réels. Simplifier les sommes

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\alpha + k\beta),$$
$$S'_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(\alpha + k\beta),$$
$$S''_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos(\alpha + k\beta).$$

Exercice 69 ★ **Posé à Centrale**

Soit α, un nombre réel tel que $\cos\alpha \neq 0$. On pose

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos k\alpha}{\cos^k \alpha} \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin k\alpha}{\cos^k \alpha}.$$

Calculer $R_n + iI_n$ et en déduire des expressions simplifiées de R_n et de I_n.

Exercice 70 ★

Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \frac{\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cdots + \cos((2n+1)x)}{\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x) + \cdots + \sin((2n+1)x)}.$$

Exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 71

Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $e^z = -7$; **2.** $e^z = -2i$; **3.** $e^z = 1 + i$.

Exercice 72 ★ **Autour de l'exponentielle**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $e^z + e^{-z} = 1$; **2.** $e^z + e^{-z} = 2i$.