Devoir surveillé n°11

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 —

Partie I – Polynômes de Bernoulli

On admet l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ vérifiant les trois conditions suivantes :

$$\mathrm{B}_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{B}_n' = \mathrm{B}_{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 \mathrm{B}_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

On pose également $b_n = \mathrm{B}_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer B_1 et B_2. En déduire b_1 et b_2.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\mathrm{B}_n(0) = \mathrm{B}_n(1)$.
3. On pose pour $n \in \mathbb{N}, \mathrm{A}_n = (-1)^n \mathrm{B}_n(1-\mathrm{X})$. Montrer que la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les trois mêmes conditions que celles définissant la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{B}_n = (-1)^n \mathrm{B}_n(1-\mathrm{X})$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{B}_{2n+1}(0) = \mathrm{B}_{2n+1}(1) = 0$.
5. A l'aide de la formule de Taylor, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}\mathrm{X}^k$.
6. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{b_k}{(2n+2-k)!}$$
puis que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_{2n} = \frac{1}{(2n+1)!} - 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{2k}}{(2n+2-2k)!}$$
7. Calculer b_4.

Partie II – Lemme de Riemann-Lebesgue et noyau de Dirichlet

8. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)=0$$

9. Montrer que $\varphi : t\in]0,1[\mapsto \dfrac{t(1-t)}{\sin(\pi t)}$ peut se prolonger en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

10. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall t\in]0,1[,\ \sum_{k=1}^{p}\cos(2k\pi t)=\frac{\sin((2p+1)\pi t)}{2\sin(\pi t)}-\frac{1}{2}$$

11. Soit $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(0)=\mathrm{P}(1)=0$. Montrer que

$$\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}\int_0^1 \mathrm{P}(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$$

Partie III – Fonction ζ de Riemann

On note pour tout réel $\alpha>1$, $\zeta(\alpha)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$.
On pose pour $(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$,

$$\mathrm{I}_{k,n}=\int_0^1 \mathrm{B}_{2n}(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t$$

12. Calculer $\mathrm{I}_{k,1}$.

13. Déterminer une relation entre $\mathrm{I}_{k,n}$ et $\mathrm{I}_{k,n-1}$ valide pour tout entier $n\geqslant 2$. En déduire que

$$\forall(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ \mathrm{I}_{k,n}=\frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}}$$

14. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\zeta(2n)=\frac{(-1)^{n-1}}{2}\cdot(2\pi)^{2n}\,b_{2n}$$

15. Calculer $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

Exercice 1.

Soient $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites complexes. On définit alors deux suites $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ de la manière suivante :

$$\forall n\geqslant n_0,\ \mathrm{A}_n=\sum_{k=n_0}^{n}a_k$$
$$\forall n\geqslant n_0,\ b_n=\mathrm{B}_{n+1}-\mathrm{B}_n$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n}a_k\mathrm{B}_k=\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n-\sum_{k=n_0}^{n-1}\mathrm{A}_k b_k$ pour tout entier $n\geqslant n_0$.

2. Dans cette question, on suppose que la suite (A_n) est bornée et que (B_n) est une suite réelle décroissante de limite nulle.

a. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant n_0} b_n$ converge.

b. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n \mathrm{B}_n$ converge.

c. En déduire en particulier que la série $\sum_{n\geqslant n_0} (-1)^n \mathrm{B}_n$ converge.

3. Soient $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$.

b. Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}$.
On précisera notamment dans les cas de convergence s'il s'agit ou non de convergence absolue. De même, dans les cas de divergence, on précisera s'il s'agit ou non de divergence grossière.

c. En déduire la nature des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$.

4. Montrer que si la suite (B_n) converge vers 0, si la suite (A_n) est bornée et si la série $\sum_{n\geqslant n_0} b_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n \mathrm{B}_n$ est convergente.

Exercice 2.

Dans tout l'exercice, on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Par ailleurs, on note $\mathscr{F}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer la dimension de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On justifiera sa réponse.

2. Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Préciser sa dimension.

3. On considère l'application

$$\Phi \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathscr{F} \\ z & \longmapsto & \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Re}(z) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Montrer que Φ est un isomorphisme.

4. Montrer que pour tout couple $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\Phi(z_1 z_2) = \Phi(z_1)\Phi(z_2)$.

5. En déduire que pour tout $(z, n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}$, $\Phi(z^n) = \Phi(z)^n$.

6. On pose pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer $\Phi^{-1} \circ \mathrm{R}(\theta)$.

7. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{R}(\theta)$ est inversible et calculer son inverse. On emploiera l'application Φ.

8. Calculer également $\mathrm{R}(\theta)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ à l'aide de l'application Φ.

Exercice 3.

On pose $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2. En déduire J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $(a, b, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$. On pose

$$S_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} a^{n-2k} b^{2k}$$

$$T_n = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} a^{n-2k-1} b^{2k+1}$$

   Calculer $S_n + T_n$ et $S_n - T_n$. En déduire S_n et T_n.

3. On pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Calculer M^n.