Devoir surveillé n°1 : corrigé

Solution 1.

1. On trouve $S_0 = \binom{0}{0} = 1$, $S_1 = \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 3$ et $S_2 = \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \binom{2}{0} + \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 7$.
2. D'après la formule du binôme
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$
La suite (2^n) étant géométrique,
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1$$
3. On procède comme indiqué dans l'énoncé. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$S_n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}$$
D'après la question précédente,
$$S_n = \sum_{j=0}^{n} 2^j = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1$$

Solution 2.

1. a. On a d'une part
$$\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{l!(k-l)!} = \frac{n!}{(n-k)!l!(k-l)!}$$
et d'autre part
$$\binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l} = \frac{n!}{l!(n-l)!} \frac{(n-l)!}{(k-l)!(n-k)!} = \frac{n!}{l!(k-l)!(n-k)!}$$
On en déduit bien l'égalité demandée.

   b.
$$\begin{aligned}
\sum_{k=l}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{l} &= \sum_{k=l}^{n} (-1)^k \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l} && \text{d'après la question précédente} \\
&= \binom{n}{l} \sum_{k=l}^{n} (-1)^k \binom{n-l}{k-l} \\
&= \binom{n}{l} \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^{j+l} \binom{n-l}{j} && \text{en effectuant le changement d'indice } j = k-l \\
&= (-1)^l \binom{n}{l} \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^j \binom{n-l}{j} \\
&= (-1)^l \binom{n}{l} (1-1)^{n-l} && \text{d'après la formule du binôme} \\
&= 0 && \text{car } n-l > 0
\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}b_k &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}a_l \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{l}a_l \\
&= \sum_{0\leqslant l\leqslant k\leqslant n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{l}a_l \\
&= \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=l}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{l} \\
&= \sum_{l=0}^{n}a_l\sum_{k=l}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{l}
\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{k=l}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{l} = 0$ quand $l < n$. On en déduit que

$$(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}b_k = (-1)^n a_n\sum_{k=n}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{n} = (-1)^n a_n(-1)^n\binom{n}{n}\binom{n}{n} = a_n$$

Solution 3.

1. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

b. D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = n(1+x)^{n-1}$$

et d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$$

On a donc

$$f_n'(1) = 2^{n-1}n = \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$$

c. D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

et d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n''(x) = \sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^{k-2}$$

On a donc

$$f_n''(1) = 2^{n-2}n(n-1) = \sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}$$

d. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k^2 = k(k-1)+k$,

$$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = 2^{n-2}n(n-1) + 2n-1n = 2^{n-2}n(n+1)$$

2. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k \\
&= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} x^{2k} + \sum_{0\leqslant 2+1k\leqslant n} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} (-x)^{2k} + \sum_{0\leqslant 2+1k\leqslant n} \binom{n}{2k+1} (-x)^{2k+1} \\
&= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} x^{2k} + \sum_{0\leqslant 2+1k\leqslant n} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} x^{2k} - \sum_{0\leqslant 2+1k\leqslant n} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1} \\
&= 2 \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} x^{2k}
\end{aligned}$$

b. D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n'(x) = n(1+x)^{n-1} - n(1-x)^{n-1}$$

et d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n'(x) = 2 \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} 2k \binom{n}{2k} x^{2k-1} = 4 \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} k \binom{n}{2k} x^{2k-1}$$

On a donc

$$g_n'(1) = 2^{n-1} n = 4 \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} k \binom{n}{2k}$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} k \binom{n}{2k} = 2^{n-3} n$.

c. D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} + n(n-1)(1-x)^{n-2}$$

et d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n''(x) = 2 \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} 2k(2k-1) \binom{n}{2k} x^{2k-2}$$

On a donc

$$g_n''(1) = 2^{n-2} n(n-1) = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} 4k(2k-1) \binom{n}{2k}$$

Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k^2 = \frac{4k(2k-1)}{8} + \frac{k}{2}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} k^2 \binom{n}{2k} &= \frac{1}{4} \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} 2k(2k-1) \binom{n}{2k} + \frac{1}{2} \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} k \binom{n}{2k} \\
&= \frac{2^{n-2} n(n-1)}{8} + \frac{2^{n-3} n}{2} = 2^{n-5} n(n+1)
\end{aligned}$$

Solution 4.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n!^2} = \frac{2(n+1)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n!^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\mathrm{HR}(n) : \ \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{n^{\frac{1}{3}}}$$

Tout d'abord, $\frac{4^1}{2\sqrt{1}} = 2$, $\binom{2}{1} = 2$ et $\frac{4^1}{1^{\frac{1}{3}}} = 4$ donc $\mathrm{HR}(1)$ est vraie.
Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors d'après la question **1**,

$$\frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n+2}{n+1} \leqslant \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{n^{\frac{1}{3}}}$$

Il reste donc à montrer d'une part que $\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$ et d'autre part que $\frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{n^{\frac{1}{3}}} \leqslant \frac{4^{n+1}}{(n+1)^{\frac{1}{3}}}$. On procède par récurrence dans les deux cas.

$$\begin{aligned}
& & \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} &\leqslant \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \\
\iff & & 2(n+1)\sqrt{n} &\leqslant (2n+1)\sqrt{n+1} \\
\iff & & 4(n+1)^2 n &\leqslant (2n+1)^2(n+1) \\
\iff & & 4(n+1)n &\leqslant (2n+1)^2 \\
\iff & & 4n^2+4n &\leqslant 4n^2+4n+1
\end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie, la première l'est également.

$$\begin{aligned}
& & \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{n^{\frac{1}{3}}} &\leqslant \frac{4^{n+1}}{(n+1)^{\frac{1}{3}}} \\
\iff & & (2n+1)(n+1)^{\frac{1}{3}} &\leqslant 2(n+1)n^{\frac{1}{3}} \\
\iff & & (2n+1)^3(n+1) &\leqslant 8(n+1)^3 n \\
\iff & & (2n+1)^3 &\leqslant 8(n+1)^2 n \\
\iff & & 8n^3+12n^2+6n+1 &\leqslant 8n^3+16n^2+8n \\
\iff & & 0 &\leqslant 4n^2+2n-1
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie puisque $n \geqslant 1$ donc la première l'est également. Finalement, $\mathrm{HR}(n+1)$ est vraie.
Par récurrence, $\mathrm{HR}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution 5.

1. On trouve $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ et $F_5 = 3$.
2. On a bien $F_5 = 5 \geqslant 5$ et $F_6 = 8 \geqslant 6$. Supposons que $F_n \geqslant n$ et $F_{n+1} \geqslant n+1$ pour un certain $n \geqslant 5$. Alors $F_{n+2} \geqslant 2n+1$. Or $2n+1 \geqslant n+2$ car $n \geqslant 5 \geqslant 1$. Ainsi $F_{n+2} \geqslant n+2$.
   Par récurrence double, $F_n \geqslant n$ pour tout $n \geqslant 5$.
   On peut en déduire que $\lim_{n\to+\infty} F_n = +\infty$.
3. **a.** On utilise la définition de la suite (F_n). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait apparaître un télescopage.

   $$1 + \sum_{k=0}^{n-1} F_k = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+2} - F_{k+1} = 1 + F_{n+1} - F_1 = F_{n+1}$$

   car $F_1 = 1$.

   b. On utilise la définition de la suite (F_n). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait apparaître un télescopage.

   $$\sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+2} - F_{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} F_{2(k+1)} - F_{2k} = F_{2n} - F_0 = F_{2n}$$

   car $F_0 = 0$.

   c. On utilise la définition de la suite (F_n). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait apparaître un télescopage.

   $$\sum_{k=0}^{n-1} F_{2k} = \sum_{k=1}^{n-1} F_{2k} = \sum_{k=1}^{n-1} F_{2k+1} - F_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} F_{2(k+1)-1} - F_{2k-1} = F_{2n-1} - F_1 = F_{2n-1} - 1$$

   car $F_1 = 1$.

4. **a.** On trouve $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Les liens coefficients/racines nous apprennent que $\alpha\beta = -1$.

b. On vérifie que $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^0 - \beta^0\right) = 0 = F_0$ et que $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^1 - \beta^1\right) = 1 = F_1$.

On suppose maintenant que $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right)$ et $F_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_n + F_{n+1}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n + \alpha^{n+1} - \beta^n - \beta^{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha^n(1+\alpha) - \beta^n(1+\beta)\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n\alpha^2 - \beta^n\beta^2\right) \qquad \text{car } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont solutions de l'équation } x^2 = x+1\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}\right)
\end{aligned}$$

Par récurrence double, $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. On tient compte du fait que $\beta = -\frac{1}{\alpha}$.
D'une part

$$\begin{aligned}
F_{p+q}F_r &= \frac{1}{5}\left(\alpha^{p+q} - (-1)^{p+q}\alpha^{-p-q}\right)\left(\alpha^r - (-1)^r\alpha^{-r}\right)\\
&= \frac{1}{5}\left(\alpha^{p+q+r} + (-1)^{p+q+r}\alpha^{-p-q-r} - (-1)^r\alpha^{p+q-r} - (-1)^{p+q}\alpha^{-p-q+r}\right)
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
F_pF_{q+r} - (-1)^rF_{p-r}F_q &= \frac{1}{5}\left(\alpha^p - (-1)^p\alpha^{-p}\right)\left(\alpha^{q+r} - (-1)^{q+r}\alpha^{-q-r}\right)\\
&\quad - \frac{(-1)^r}{5}\left(\alpha^{p-r} - (-1)^{p-r}\alpha^{-p+r}\right)\left(\alpha^q - (-1)^q\alpha^{-q}\right)\\
&= \frac{1}{5}\left(\alpha^{p+q+r} + (-1)^{p+q+r}\alpha^{-p-q-r} - (-1)^{q+r}\alpha^{p-q-r} - (-1)^p\alpha^{-p+q+r}\right)\\
&\quad - \frac{(-1)^r}{5}\left(\alpha^{p+q-r} + (-1)^{p+q-r}\alpha^{-p-q+r} - (-1)^q\alpha^{p-q-r} - (-1)^{p-r}\alpha^{-p+q+r}\right)\\
&= \frac{1}{5}\left(\alpha^{p+q+r} + (-1)^{p+q+r}\alpha^{-p-q-r} - (-1)^r\alpha^{p+q-r} - (-1)^{p+q}\alpha^{-p-q+r}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que $F_pF_{q+r} - (-1)^rF_{p-r}F_q = F_{p+q}F_r$.