Inégalités

Inégalité triangulaire

Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$,

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n,\qquad \left|\sum_{k=1}^n x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |x_k|$$

Trigonométrie

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad |\sin x|\leqslant |x| \qquad\qquad \forall x\in\mathbb{R}_+,\qquad \sin x\leqslant x$$

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\qquad |\tan x|\geqslant |x| \qquad\qquad \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[,\qquad \tan x\leqslant x$$

Logarithme et exponentielle

$$\forall x\in]-1,+\infty[,\qquad \ln(1+x)\leqslant x$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad e^x\geqslant 1+x$$

Moyennes arithmétique, géométrique, harmonique,quadratique

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n,\qquad \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

Inégalité de Minkowski

Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et $p\in[1,+\infty[$,

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n,\qquad \left(\sum_{k=1}^n |x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Inégalité de Hölder

Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et $(p,q)\in[1,+\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n,\qquad \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$