DEVOIR SURVEILLÉ N°12

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Alors

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{vmatrix} = (X-a)(X-d) - bc = X^2 - (a+d)X + ad - bc = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + (ad - bc)$$

Comme $\chi_A(A) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$$

2 **2.a** $\mathbb{A} = \operatorname{vect}(I_2, A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, on a clairement, $I_2 \in \mathbb{A}$ et pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$,

$$(aI_2 + bA)(cI_2 + dA) = acI_2 + (bc + ad)A + bdA^2$$

D'après la question précédente, $A^2 \in \operatorname{vect}(I_2, A) = \mathbb{A}$ donc $(aI_2 + bA)(cI_2 + dA) \in \mathbb{A}$. Ainsi $\mathbb{A}$ est également stable par multiplication : c'est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2.b Si A est une matrice scalaire, $A \in \operatorname{vect}(I_2)$ donc $\mathbb{A} = \operatorname{vect}(I_2)$ et $\dim \mathbb{A} = 1$.
Si A n'est pas une matrice scalaire, alors (I_2, A) est libre. C'est donc une base de $\mathbb{A} = \operatorname{vect}(I_2, A)$ et $\dim \mathbb{A} = 2$.

3 Supposons que $(\operatorname{tr} A)^2 < 4\det(A)$. Alors le discriminant de χ_A est strictement négatif. Comme χ_A est à coefficients réels, χ_A admet deux racines complexes non réelles conjuguées λ et $\overline{\lambda}$. En particulier, χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Ainsi A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$. Alors pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aI_2 + bA$ est semblable à $\begin{pmatrix} a + b\lambda & 0 \\ 0 & a + b\overline{\lambda} \end{pmatrix}$.
On cherche donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} a + \lambda b = i \\ a + \overline{\lambda} b = -i \end{cases}$. Il suffit de prendre $\begin{cases} a = -\dfrac{\operatorname{Re}\lambda}{\operatorname{Im}\lambda} \\ b = \dfrac{1}{\operatorname{Im}\lambda} \end{cases}$. Ceci est possible puisque λ n'est pas réel de sorte que $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. En posant $B = aI_2 + bA \in \mathbb{A}$ avec ces valeurs de a et b (qui sont bien réelles), B est alors semblable à $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ puis B^2 est semblable à $-I_2$ et enfin $B^2 = -I_2$.
Inversement, supposons qu'il existe $B \in \mathbb{A}$ telle que $B^2 = -I_2$. Comme $B \in \mathbb{A}$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $B = aI_2 + bA$. Soit λ une valeur propre de A. Alors $a + b\lambda$ est une valeur propre de B. Or $X^2 + 1$ annule B donc les seules valeurs propres possibles de B sont $\pm i$. Ainsi $a + b\lambda = \pm i$. Comme a et b sont réels, λ ne l'est pas. Ainsi A n'admet pas de valeur propre réelle. χ_A n'admet donc que des racines complexes non réelles : son discriminant $(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A$ est donc strictement négatif.

4 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $aI_2 + bB = 0$. En multipliant par B, on obtient $aB + bB^2 = 0$ ou encore $aB - bI_2 = 0$. Ainsi

$$a(aI_2 + bB) - b(aB - bI_2) = 0$$

et donc

$$(a^2 + b^2)I_2 = 0$$

et enfin $a^2 + b^2 = 0$. Comme a et b sont réels $a = b = 0$ de sorte que (I_2, B) est une famille libre de $\mathbb{A}$. Comme $\dim \mathbb{A} = \operatorname{rg}(I_2, A) \leq 2$, c'est une base de $\mathbb{A}$.

Considérons l'unique application linéaire $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A}, \mathbb{C})$ telle que $f(\mathrm{I}_2) = 1$ et $f(\mathrm{B}) = i$. Comme f envoie une base de $\mathbb{A}$ sur une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, f est bijective. Montrons que f est également un morphisme d'algèbres. Soit $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathbb{A}^2$. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\mathrm{M} = a\mathrm{I}_2 + b\mathrm{B}$ et $\mathrm{N} = c\mathrm{I}_2 + d\mathrm{D}$. Par linéarité de f,

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{M}) &= f(a\mathrm{I}_2 + b\mathrm{B}) = af(\mathrm{I}_2) + bf(\mathrm{B}) = a + ib \\
f(\mathrm{N}) &= f(c\mathrm{I}_2 + d\mathrm{B}) = cf(\mathrm{I}_2) + df(\mathrm{B}) = c + id \\
f(\mathrm{MN}) &= f(ac\mathrm{I}_2 + (ad + bc)\mathrm{B} + bd\mathrm{B}^2) = f((ac - bd)\mathrm{I}_2 + (ad + bc)\mathrm{B}) \\
&= (ac - db)f(\mathrm{I}_2) + (ad + bc)f(\mathrm{B}) = ac - bd + i(ad + bc)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f(\mathrm{M})f(\mathrm{N}) = (a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc) = f(\mathrm{MN})$$

f est bien un morphisme d'algèbres : $\mathbb{A}$ et $\mathbb{C}$ sont isomorphes.

5 Comme $(\operatorname{tr} \mathrm{A})^2 = 4 \det \mathrm{A}$, χ_{A} admet une unique racine et donc A admet pour unique valeur propre $\lambda = \frac{\operatorname{tr} \mathrm{A}}{2}$. A est trigonalisable et donc semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$ sinon A serait scalaire. Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{A}$. Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{M} = a\mathrm{I}_2 + b\mathrm{A}$. Alors M est semblable à $\begin{pmatrix} a + b\lambda & b\mu \\ 0 & a + b\lambda \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M}^2 = 0$ si et seulement si $a + b\lambda = 0$. L'ensemble des matrices $\mathrm{M} \in \mathbb{A}$ vérifiant $\mathrm{M}^2 = 0$ est donc la droite $\operatorname{vect}(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_2) = \operatorname{vect}\left(\mathrm{A} - \frac{\operatorname{tr} \mathrm{A}}{2}\mathrm{I}_2\right)$.
Notamment $\mathrm{N} = \mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_2$ vérifie $\mathrm{N}^2 = 0$ et $\mathrm{N} \neq 0$ car A n'est pas scalaire. L'anneau $\mathbb{A}$ n'est donc pas intègre : ce ne peut être un corps.

6 Comme A et B sont semblables, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. Soit alors $f : \mathrm{M} \in \mathbb{A} \mapsto \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$. f est clairement linéaire et à valeurs dans $\mathbb{B}$. On vérifie aisément qu'en posant $g : \mathrm{M} \in \mathbb{B} \mapsto \mathrm{PMP}^{-1}$, g est linéaire à valeurs dans $\mathbb{B}$, $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}}$. Ainsi f est bijective. Enfin, on vérifie aisément que $f(\mathrm{I}_2) = \mathrm{I}_2$ et que pour $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathbb{A}^2$, $f(\mathrm{MN}) = f(\mathrm{M})f(\mathrm{N})$ donc f est un isomorphisme d'algèbres : $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont des algèbres isomorphes.

7 Le discriminant de χ_{A} est strictement positif : χ_{A} est scindé à racines simples. Par conséquent, A est diagonalisable et admet deux valeurs propres distinctes λ et μ. A est donc semblable à $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. D'après la question précédente, $\mathbb{A}$ est isomorphe à $\operatorname{vect}(\mathrm{I}_2, \mathrm{D})$, qui est clairement inclus dans l'algèbre $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ des matrices diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Or D n'est pas scalaire puisque $\lambda \neq \mu$. Ainsi $\dim \operatorname{vect}(\mathrm{I}_2, \mathrm{D}) = 2 = \dim \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$, puis $\operatorname{vect}(\mathrm{I}_2, \mathrm{D}) = \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$: $\mathbb{A}$ est isomorphe à $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.
Comme $\mathbb{A}$ est isomorphe en tant qu'anneau à $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$, il suffit de vérifier que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas un corps en constatant par exemple que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas inversible. $\mathbb{A}$ n'est donc pas un corps.

8 Facile.

9 D'après le cours, l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'algèbres (donc injectif). On vérifie alors que l'application $\Xi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{D}) \\ a & \longmapsto & \phi_a \end{array} \right.$ est un morphisme injectif d'algèbres. Par composition, $\Phi = \Psi \circ \Xi$ est également un morphisme injectif d'algèbres.
On vérifie sans difficulté que $\Psi(\mathbb{D})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Comme Ψ est injectif, Ψ induit un isomorphisme d'algèbres de $\mathbb{D}$ sur $\Psi(\mathbb{D})$ donc $\mathbb{D}$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

10 On a clairement $\phi_z(1) = a + ib$ et $\phi_z(i) = -b + ia$ donc

$$\Psi(z) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\phi_z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

11 **11.a** Comme $\mathbb{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{I}_n \in \mathbb{A}$ puis $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_n \in \mathbb{A}$. Comme λ est valeur propre de A, $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_n$ n'est pas inversible. Comme A n'est pas scalaire, $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_n$ n'est pas nulle. Ainsi $\mathbb{A}$ possède un élément non nul et non inversible : $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.

11.b Une matrice diagonalisable ou trigonalisable possède une valeur propre réelle. D'après la question précédente, si $\mathbb{A}$ contient une telle matrice, ce n'est pas un corps.

11.c Soit A une matrice non nulle de $\mathbb{A}$. L'application Φ_A est clairement un endomorphisme de $\mathbb{A}$. De plus, l'intégrité de $\mathbb{A}$ montre que le noyau de Φ_A est nul. Enfin, $\mathbb{A}$ est de dimension finie. On peut alors affirmer que Φ_A est un automorphisme de $\mathbb{A}$. Il est notamment surjectif : en particulier, il existe $B \in \mathbb{A}$ tel que $\Phi_A(B) = I_n$ i.e. $AB = I_n$. On en déduit que A est inversible. Ainsi $\mathbb{A}$ est un corps.

12 Par exemple, $\det(A^2) = \det(-I_n)$ et donc $(-1)^n = \det(A)^2 \geq 0$ donc n est pair.

13 Par bilinéarité du produit matriciel, il suffit de remarquer que les produits deux à deux des éléments de $\{I_n, A, B, AB\}$ restent dans $\mathbb{H}$.

$$\begin{array}{cccc}
I_n^2 = I_n \in \mathbb{H} & I_nA = A \in \mathbb{H} & I_nB = B \in \mathbb{H} & I_nAB = AB \in \mathbb{H} \\
AI_n = A \in \mathbb{H} & A^2 = -I_n \in \mathbb{H} & AB \in \mathbb{H} & AAB = A^2B = -B \in \mathbb{H} \\
BI_n = B \in \mathbb{H} & BA = -AB \in \mathbb{H} & B^2 = -I_n \in \mathbb{H} & BAB = -AB^2 = A \in \mathbb{H} \\
ABI_n = AB \in \mathbb{H} & ABA = -A^2B = B \in \mathbb{H} & AB^2 = -A \in \mathbb{H} & (AB)^2 = -AB^2A = A^2 = -I_n \in \mathbb{H}
\end{array}$$

14 Les calculs de la question précédente montre que :

$$(tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_n$$

15 15.a Soit $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ tel que $tI_n + xA + yB + zAB = 0$. D'après la question précédente, $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$. On en déduit que $t = x = y = z = 0$ (somme de termes positifs). Ainsi (I_n, A, B, AB) est libre. Cette famille est donc une base de $\mathbb{H}$ et $\dim \mathbb{H} = 4$.

15.b Soit $M \in \mathbb{H}$ non nulle. Comme (I_n, A, B, AB) est une base de $\mathbb{H}$, il existe $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ non nul tel que $M = tI_n + xA + yB + zAB$. Alors $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ et la question précédente montre que M est inversible d'inverse $\dfrac{1}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}(tI_n - xA - yB - zAB)$. De plus, $M^{-1} \in \mathbb{J}$. $\mathbb{H}$ est donc bien un corps.

16 16.a On vérifie immédiatement que $J^2 = I_2$. Des calculs par blocs montrent alors que A et B vérifient la condition (★).

16.b A et B sont clairement antisymétriques. De plus,

$$C^\top = (AB)^\top = B^\top A^\top = (-B)(-A) = BA = -AB = -C$$

donc C est également antisymétrique. Soit $M \in \mathbb{H}$. Il existe $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = tI_4 + xA + yB + zC$. Alors $M^\top = tI_n - xA - yB - zC \in \mathbb{H}$. De plus, $MM^\top = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_4$. Si M n'est pas nulle, $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ et donc

$$M^{-1} = \frac{1}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2} M^\top$$

De plus, on peut préciser que

$$\det(M)^2 = \det(MM^\top) = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^4$$

Ainsi

$$t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{|\det M|}$$

de sorte que

$$M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{|\det M|}} M^\top$$

17 On a déjà vu que A, B et C étaient antisymétriques, ce sont donc des quaternions purs. De plus, si on se donne $M = tI_4 + xA + yB + zC$, $M^\top = -M \iff t = 0$. Ainsi $\mathbb{L} = \text{vect}(A, B, C)$. La famille (A, B, C) est libre en tant que sous famille de la famille libre (I_4, A, B, C) : c'est donc une base de $\mathbb{L}$.
$\mathbb{L}$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathbb{H}$ puisqu'elle ne contient pas I_4.

18 Soit $(M, N) \in \mathbb{L}^2$. Il existe donc $(x, y, z, x', y', z') \in \mathbb{R}^6$ tel que $M = xA + yB + zC$ et $N = x'A + y'B + z'C$. Les calculs effectués à la question **13** montre que

$$MN + NM = -2(xx' + yy' + zz')I_4$$

Comme la base (A, B, C) est orthonormé par hypothèse

$$(M \mid N) = xx' + yy' + zz'$$

Ainsi

$$\frac{1}{2}(MN + NM) = -(M \mid N)I_4$$

19 Supposons que M soit un quaternion pur i.e. $\mathrm{M} \in \mathbb{L}$. D'après la question précédente avec $\mathrm{N} = \mathrm{M}$, $\mathrm{M}^2 = -\|\mathrm{M}\|^2 \mathrm{I}_4$ i.e. $\mathrm{M} = \lambda \mathrm{I}_4$ avec $\lambda = -\|\mathrm{M}\|^2 \leq 0$.
Réciproquement, soit $\mathrm{M} \in \mathbb{H}$ tel que que $\mathrm{M}^2 = \lambda \mathrm{I}_4$ avec $\lambda \leq 0$. On sait qu'il existe $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\mathrm{M} = t\mathrm{I}_4 + x\mathrm{A} + y\mathrm{B} + z\mathrm{C}$. Les calculs effectués à la question **13** montre que

$$\mathrm{M}^2 = (t^2 - x^2 - y^2 - z^2)\mathrm{I}_4 + 2tx\mathrm{A} + 2ty\mathrm{B} + 2tz\mathrm{C}$$

Comme $(\mathrm{I}_4, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ est libre,

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \lambda \qquad \text{et} \qquad tx = ty = tz = 0$$

Si $t \neq 0$, alors $x = y = z = 0$ et donc $\lambda = t^2 > 0$, ce qui est contradictoire. Ainsi $t = 0$ puis $\mathrm{M} = x\mathrm{A} + y\mathrm{B} + z\mathrm{C} \in \mathbb{L}$.

20 Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{L}$. Comme ϕ est un morphisme d'algèbre. Alors $\phi(\mathrm{M})^2 = \mathrm{M}^2$. D'après la question précédente, $\mathrm{M}^2 = \lambda \mathrm{I}_4$ avec $\lambda \leq 0$. Donc $\phi(\mathrm{M})^2 = -\lambda \mathrm{I}_4$ donc $\phi(\mathrm{M}) \in \mathbb{L}$ toujours d'après la question précédente. Ainsi $\mathbb{L}$ est stable par ϕ.
D'après la question **18**,

$$\mathrm{M}^2 = -\|\mathrm{M}\|^2 \mathrm{I}_4 \qquad \text{et} \qquad \phi(\mathrm{M})^2 = -\|\phi(\mathrm{M})\|^2 \mathrm{I}_4$$

Comme $\mathrm{M}^2 = \phi(\mathrm{M})^2$, $\|\phi(\mathrm{M})\| = \|\mathrm{M}\|$. On en déduit que ϕ induit un automorphisme orthogonal de $\mathbb{L}$.

21 **21.a** Supposons M et N colinéaires. Comme M et N ont même norme, $\mathrm{M} = \mathrm{N}$ ou $\mathrm{M} = -\mathrm{N}$. Si $\mathrm{M} = \mathrm{N}$, alors $\mathrm{M} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{N}\mathrm{P}$ avec $\mathrm{P} = \mathrm{I}_4 \in \mathbb{H}$. Supposons maintenant $\mathrm{M} = -\mathrm{N}$. Soit P non nulle dans l'orthogonal de $\operatorname{vect}(\mathrm{M})$ dans $\mathbb{L}$. D'après la question **18**, $\mathrm{MP} + \mathrm{PM} = 0$. Comme $\mathbb{H}$ est un corps, P est inversible et donc $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = -\mathrm{M} = \mathrm{N}$.

21.b Supposons que M et N aient même norme. D'après la question **18**, $\mathrm{M}^2 = -\|\mathrm{M}\|^2\mathrm{I}_4$ et $\mathrm{N}^2 = -\|\mathrm{N}\|^2\mathrm{I}_4 = -\|\mathrm{M}\|^2\mathrm{I}_4$. Ainsi

$$\mathrm{M}(\mathrm{MN}) - (\mathrm{MN})\mathrm{N} = -\|\mathrm{M}\|^2\mathrm{N} + \|\mathrm{M}\|^2\mathrm{M} = \|\mathrm{M}\|^2(\mathrm{M} - \mathrm{N})$$

Ceci s'écrit également $\mathrm{MP} = \mathrm{PN}$ avec $\mathrm{P} = \mathrm{MN} - \|\mathrm{M}\|^2\mathrm{I}_4 \in \mathbb{H}$. Supposons que $\mathrm{P} = 0$. Alors $\mathrm{MP} = -\|\mathrm{M}\|^2\mathrm{N} - \|\mathrm{M}\|^2\mathrm{M} = 0$. Comme M et N ne sont pas colinéaires, $\mathrm{M} \neq 0$ puis $\|\mathrm{M}\| \neq 0$ ce qui donne $\mathrm{M} + \mathrm{N} = 0$. Ceci est absurde car M et N ne sont pas colinéaires. Ainsi $\mathrm{P} \neq 0$.
Comme $\mathbb{H}$ est un corps, P est inversible et l'égalité $\mathrm{MP} = \mathrm{PN}$ donne $\mathrm{N} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$.

22 On vérifie que ϕ_P est à valeurs dans $\mathbb{H}$, ϕ_P est linéaire, $\phi_\mathrm{P}(\mathrm{I}_4) = \mathrm{I}_4$ et pour tout $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathbb{H}^2$, $\phi_\mathrm{P}(\mathrm{MN}) = \phi_\mathrm{P}(\mathrm{M})\phi_\mathrm{P}(\mathrm{N})$. Ainsi ϕ_P est un endomorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$.
De plus, on vérifie aisément que $\phi_\mathrm{P} \circ \phi_{\mathrm{P}^{-1}} = \phi_{\mathrm{P}^{-1}} \circ \phi_\mathrm{P} = \mathrm{Id}_\mathbb{H}$ donc ϕ_P est un automorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$.

23 ϕ est entièrement déterminé par $\phi(\mathrm{A})$ et $\phi(\mathrm{B})$. En effet, $(\mathrm{I}_4, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{AB})$ est une base de $\mathbb{H}$ et on sait que $\phi(\mathrm{I}_4) = \mathrm{I}_4$ et $\phi(\mathrm{AB}) = \phi(\mathrm{A})\phi(\mathrm{B})$.
Il est donc suffisant de trouver une matrice P non nulle de $\mathbb{H}$ telle que

$$\begin{cases} \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \phi(\mathrm{A}) \\ \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} = \phi(\mathrm{B}) \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \mathrm{AP} = \mathrm{P}\phi(\mathrm{A}) \\ \mathrm{BP} = \mathrm{P}\phi(\mathrm{B}) \end{cases}$$

23.a On sait que A et B sont orthogonaux donc $\phi(\mathrm{B})$ est orthogonal à $\phi(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ car la restriction de ϕ à $\mathbb{L}$ conserve le produit scalaire et donc l'orthogonalité. Ainsi $\phi(\mathrm{B}) \in \operatorname{vect}(\mathrm{A})^\perp = \operatorname{vect}(\mathrm{B}, \mathrm{C})$. Cette même restriction conserve la norme donc $\|\phi(\mathrm{B})| = \|\mathrm{B}\| = 1$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(\mathrm{B}) = \cos(\theta)\mathrm{B} + \sin(\theta)\mathrm{C}$. Posons $\mathrm{P} = \alpha\mathrm{I}_4 + \beta\mathrm{A}$ comme indiqué dans l'énoncé. On a alors clairement $\mathrm{AP} = \mathrm{PA} = \mathrm{P}\phi(\mathrm{A})$. De plus la condition

$$\mathrm{BP} = \mathrm{P}\phi(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\cos(\theta)\mathrm{B} + \sin(\theta)\mathrm{C})$$

équivaut à

$$\alpha\mathrm{B} + \beta\mathrm{BA} = \alpha\cos(\theta)\mathrm{B} + \beta\cos(\theta)\mathrm{AB} + \alpha\sin(\theta)\mathrm{C} + \beta\sin(\theta)\mathrm{AC}$$

ou encore

$$\alpha\mathrm{B} - \beta\mathrm{C} = \alpha\cos(\theta)\mathrm{B} + \beta\cos(\theta)\mathrm{C} + \alpha\sin(\theta)\mathrm{C} - \beta\sin(\theta)\mathrm{B}$$

ou enfin, comme (B, C) est libre

$$\begin{cases} \alpha = \alpha\cos(\theta) - \beta\sin(\theta) \\ -\beta = \beta\cos(\theta) + \alpha\sin(\theta) \end{cases}$$

Ceci équivaut à

$$\begin{cases} \alpha\sin^2\frac{\theta}{2} = -\beta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\alpha\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \quad = -\beta\cos^2\frac{\theta}{2} \end{cases}$$

On peut par exemple choisir $(\alpha, \beta) = \left(\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2}\right)$. Alors $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et donc $\mathrm{P} \neq 0$ car (B, C) est libre. Ce qui précède montre donc que $\phi = \phi_\mathrm{P}$.

23.b Comme A et $\phi(A)$ sont de même norme, il existe $Q \in \mathbb{H}$ non nul tel que $\phi(A) = Q^{-1}AQ$ d'après la question **21**. Posons $\psi = \phi \circ \phi_{Q^{-1}} = \phi \circ \phi_Q^{-1}$ de sorte que $\psi(A) = A$. D'après la question précédente, il existe $R \in \mathbb{H}$ non nul tel que $\psi = \phi_R$. Alors $\phi = \phi_R \circ \phi_Q = \phi_{QR}$.