

## Rayon de convergence

### Exercice 1 ★★

Soient  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$  des séries entières de rayon de convergence respectifs  $R_a$  et  $R_b$ . On note  $R$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$ . On suppose de plus que  $a_n b_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $R = \min(R_a, R_b)$ .

### Exercice 2 ★★★

#### Règle de Cauchy

Soit  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ . Déterminer le rayon de convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ .

### Exercice 3 ★★★

Soit  $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $b_n = \frac{a_n}{\sum_{k=0}^n a_k}$ . Comparer les rayons des séries entières  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ .

### Exercice 4 ★★

#### Mines-Ponts MP 2016

Soit  $q > 0$ , on pose  $a_n = q^{\sqrt{n}}$  si  $n$  est un carré d'entier et  $a_n = 0$  sinon. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ .

### Exercice 5 ★

#### Règle de d'Alembert

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

$$1. \sum \frac{(-1)^n z^n}{\sqrt{n}}$$

$$2. \sum 2^n \ln(n) z^n$$

$$3. \sum \binom{2n}{n} z^n$$

$$4. \sum (n + 2^n i) z^n$$

### Exercice 6 ★★

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

$$1. \sum \cos(n) z^n$$

$$2. \sum \frac{\sin n}{n} z^n$$

$$3. \sum \tan\left(\frac{n\pi}{7}\right) z^n$$

$$4. \sum_{n \in \mathbb{N}^*} d_n z^n \text{ où } d_n \text{ est le nombre de diviseurs positifs de } n$$

$$5. \sum a_n z^n \text{ où } a_n \text{ est la } n^{\text{ème}} \text{ décimale de } \pi$$

### Exercice 7 ★★

#### Séries lacunaires

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

$$1. \sum z^{n^2}$$

$$2. \sum 2^n z^{2^n}$$

$$3. \sum \frac{n^n}{n!} z^{3n}$$

## Etude au bord du disque de convergence

### Exercice 8 ★★

#### CCP MP

On note  $f(x)$  la somme de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ .

1. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de cette série entière.

2. Y a-t-il convergence en  $R$  et  $-R$  ?

3. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ .

4. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = 0$ .

**Exercice 9 ★★****CCP MP 2018**

Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $r_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\beta}$  et  $b_n = \frac{1}{r_n}$ .

1. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum b_n x^n$ .
2. Étudier la convergence de la série pour  $x = R$  et  $x = -R$ .

**Exercice 10 ★★★**

Soit  $(a_n)$  une suite de premier terme  $a_0 > 0$  et telle que  $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ .
2. Étudier la convergence au bord de l'intervalle de convergence.

**Exercice 11 ★★★****CCINP (ou CCP) MP 2021**

1. Déterminer le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln(n) x^n$ .

On note  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^n$ .

2. Montrer que

$$\forall x \in ]-1, 1[, S(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$$

3. En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow 1} S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

4. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1} S(x)$ .

**Calcul de sommes de séries entières****Exercice 12 ★**

Prouver la convergence et calculer la somme de la série suivante  $\sum_{n \geq 0} (n+1)3^{-n}$ .

**Exercice 13 ★★★****ENS (non PSI) PC 2019**

On pose  $E$  l'ensemble des suites à valeurs réelles de limite nulle et

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Montrer que :

$$\forall a \in E, \exists \varphi(a) \in E, \forall x \in ]0, 1[, f_{\varphi(a)}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{f_a(t)}{1-t} dt$$

**Exercice 14 ★★**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t dt$ .

1. Déterminer la limite de la suite  $(a_n)$ .
2. Quel est le sens de variation de  $(a_n)$ ?
3. Déterminer une relation simple entre  $a_n$  et  $a_{n+2}$ . En déduire un équivalent de  $(a_n)$ .
4. On pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ . Déterminer le rayon de convergence  $R$  de cette série entière.
5. Déterminer  $f(x)$  pour  $x \in ]-R, R[$ .

**Exercice 15 ★★**

Déterminer le rayon de convergence et la somme de  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) x^n$ .

**Exercice 16 ★★****CCP MP 2018**

1. Montrer que  $\arctan$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ .
2. On considère la série entière  $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(2k-1)} x^{2k+1}$ . Donner son rayon de convergence  $R$ . On note  $f(x)$  la somme.
3. Donner une expression simple de  $f'$  et de  $f$ .
4. Que peut-on dire de la convergence sur  $[-R, R]$  ?
5. Calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$ .

**Exercice 17 ★★★****Mines-Ponts MP 2018**

On note  $a_n = \int_0^1 \frac{dt}{(2+t^2)^{n+1}}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Donner le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ .
2. Calculer la somme de cette série entière sur son domaine de convergence.

**Exercice 18 ★****Petites Mines PC 2017**

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 + 4n - 1}{n + 2} x^n$ .

**Exercice 19 ★★**

1. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ .
2. Déterminer  $f(x)$  pour  $x \in ] -R, R[$ .

**Exercice 20 ★★**

Soit  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{sh}(\arcsin x)$ .

1. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par  $f$ .
2. En déduire que  $f$  est développable en série entière en 0 et déterminer ce développement en série entière.

**Exercice 21 ★★**

Soit  $f : x \in ] -1, 1[ \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

1. Montrer que  $f$  vérifie une équation différentielle d'ordre un.
2. En déduire que  $f$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$  et déterminer ce développement en série entière.
3. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

**Equations différentielles**

**Exercice 22 ★★★**

On considère la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$  dont on note  $S(x)$  la somme.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Montrer que  $S$  est solution sur son intervalle de convergence de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : \quad x(x-4)y' + (x+2)y = 2$$

3. Résoudre l'équation homogène  $(\mathcal{E}_H)$  associée à  $(\mathcal{E})$  sur  $]0, 4[$ .

4. Vérifier que  $x \mapsto 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right) - 2\sqrt{\frac{4-x}{x}}$  est une primitive de  $x \mapsto \frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}$  sur  $]0, 4[$ .

5. En déduire  $S(x)$  pour  $x \in ]0, 4[$ .

6. Calculer  $\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ .

**Exercice 23 ★★**

On considère la suite  $(a_n)$  définie par  $a_0 = a_1 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2}$$

1. Montrer que la suite  $(a_n)$  est croissante et diverge vers  $+\infty$ .
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ .
3. Déterminer la somme  $S(x)$  de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  à l'aide d'une équation différentielle.
4. En déduire que  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{e}$ .

**Produit de Cauchy****Exercice 24 ★★****Centrale PC**

On pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} H_n x^n$ .

**Exercice 25 ★★★**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}$$

On note  $R$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n x^n$ .

1. On suppose que  $R = \frac{1}{4}$ . Montrer que

$$\forall x \in ]-R, R[ \setminus \{0\}, S(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

2. En déduire  $u_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Justifier qu'on a bien  $R = \frac{1}{4}$ .

**Exercice 26 ★★★****Nombre d'involutions**

On rappelle qu'une involution d'un ensemble  $E$  est une application  $f : E \rightarrow E$  telle que  $f \circ f = \text{Id}_E$ . On note  $I_n$  le nombre d'involutions de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On convient que  $I_0 = 1$ .

1. Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$$

2. Montrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{I_n}{n!} x^n$  est supérieur ou égal à 1. On note  $S(x)$  sa somme.

3. Montrer que

$$\forall x \in ]-1, 1[, S'(x) = (1+x)S(x)$$

4. En déduire une expression de  $S(x)$  puis de  $I_n$ .

**Développements en série entière****Exercice 27 ★★★★★****ENS MP 2011**

Soit  $K$  un corps fini et  $\mathcal{P}$  l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de  $K[X]$ . On pose

$$\zeta(t) = \prod_{P \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - t^{\deg P}}$$

1. Montrer que  $\zeta$  est défini sur un intervalle du type  $[0, t_0[$ .
2. Montrer que  $\zeta$  est développable en série entière au voisinage à droite de 0 et déterminer son développement.

**Exercice 28 ★★★****Nombres de Bell**

On pose  $f(x) = e^{e^x}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est développable en série entière en 0 et donner les coefficients  $A_n$  de ce développement comme sommes de séries.

**Exercice 29 ★★**

Déterminer le développement en série entière en 0 de  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx) dt$ .

**Exercice 30 ★★**

Déterminer le développement en série entière en 0 de  $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ .

**Exercice 31 ★★**

Soit  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ . Développer en série entière  $f(x) = \frac{\sin(\theta)}{x^2 - 2x \cos(\theta) + 1}$ .

**Exercice 32 ★★****Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Développer en série entière  $f : x \mapsto \ln(1 - \sqrt{2x + x^2})$ .

**Exercice 33 ★★★★★****Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

On pose pour  $x \in \mathbb{R}$ , lorsque c'est possible :  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+n^2ix}$ .

1. Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $g$  n'est pas développable en série entière.

**Exercice 34 ★★****CCINP (ou CCP) MP 2021**

Développer en séries entières les fonctions suivantes au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence :

1.  $f(z) = \frac{1}{6z^2 - 5z + 1}$ ,  $z \in \mathbb{C}$

2.  $g(x) = \ln\left(\frac{2+x}{1-x}\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

3.  $h(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Divers**

**Exercice 35 ★★★★★****X MP 2010**

Caractériser les suites  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telles que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  soit le développement en série entière en 0 d'une fraction rationnelle.

**Exercice 36 ★★★****Mines-Ponts MP 2017**

1. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $Q$  tel que  $Q(z) = e^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)z^n}{n!}$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . On notera ce polynôme  $u(P)$ .
2. Montrer que  $u$  est un automorphisme de  $\mathbb{C}[X]$ .
3. Déterminer les éléments propres de  $u$ .

**Exercice 37 ★★★****Centrale MP 2018**

Soit  $(a_n)_{n \geq 2}$  une suite de réels. On pose  $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$  et on suppose que

$$f : z \mapsto z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$$

est définie et injective sur  $D$ .

1. Montrer que  $\forall z \in D, z \in \mathbb{R} \iff f(z) \in \mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $\forall z \in D, \operatorname{Im}(z) > 0 \iff \operatorname{Im}(f(z)) > 0$ .
3. Soient  $r \in ]0, 1[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer en fonction de  $r$  et  $n$  l'intégrale

$$I_n(r) = \int_0^\pi \operatorname{Im}(f(re^{i\theta})) \sin(n\theta) \, d\theta$$

4. En remarquant que  $|\sin(n\theta)| \leq n \sin(\theta)$  pour  $\theta \in [0, \pi]$ , montrer que  $|a_n| \leq n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 38 ★★★****Mines-Ponts MP 2017**

$E$  est un ensemble à  $n$  éléments. On appelle *dérangement* une permutation de  $E$  sans point fixe. On note  $D_n$  le nombre de dérangements de  $E$ . On pose  $D_0 = 1$ .

1. Montrer l'égalité  $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$ .

On définit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$ .

2. Justifier que  $f$  est définie sur  $] -1, 1[$ .
3. Montrer que pour  $x$  dans  $] -1, 1[$ ,  $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ .
4. En déduire l'égalité  $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ .
5. Montrer que, lorsque  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $D_n$  est la partie entière de  $\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$ .

## Exercice 39

## Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2019

On cherche à résoudre l'équation

$$(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, u(x) = 1 + \int_0^x u\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

avec  $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ .

1. Soit la suite  $(u_n)$  de fonctions définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

Montrer par récurrence que,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers une certaine fonction  $u$ .

2. Montrer que  $u$  est solution de (E).
3. Donner les fonctions développables en série entière dont la restriction à  $\mathbb{R}_+$  est solution de (E).

## Exercice 40 ★★

## CCINP (ou CCP) MP 2021

Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(t) = \frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{n+1}$ .

1. Donner le domaine de convergence  $D$  de  $\sum f_n$ .
2. Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ .
3. Étudier la convergence normale de  $\sum f_n$  sur  $[0, 1]$ .
4. Étudier la convergence uniforme de  $\sum f_n$  sur  $[0, 1]$ .
5. Quelle est la nature de la série  $\sum u_n$ , avec  $u_n = \int_0^1 \frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{n+1} dt$  ?
6. Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .