Devoir à la maison n° 21

Problème 1 —

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n.
On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule.
Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.
On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1.
On note Y_n la variable aléatoire égale a la somme des numéros des boules tirées.
On note $E(X_n)$ et $V(X_n)$ (respectivement $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$) l'espérance et la variance de X_n (respectivement Y_n).

Partie I – Étude de la variable aléatoire X_n

On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. **a.** Quelle est la loi de I_n ?

b. Quelle est la loi de X_n conditionnée par l'événement $I_n = 1$.

c. On suppose $n \geqslant 2$. Expliquer pourquoi pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![2, n]\!]$

$$P(X_n = j | I_n = k) = P(X_{k-1} = j-1)$$

2. **a.** Quelle est la loi de X_1 ?

b. Quel est l'événement $X_2 = 1$? Donner la loi de X_2, son espérance et sa variance.

c. Déterminer la loi de X_3, son espérance et sa variance.

3. **a.** Expliquer pourquoi X_n prend ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$.

b. Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.

c. On suppose $n \geqslant 2$. Montrer que pour tout entier $j \geqslant 2$,

$$P(X_n = j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1)$$

d. On suppose $n \geqslant 2$. Calculer pour tout entier $j \geqslant 1$

$$nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j)$$

En déduire que pour tout entier $j \geqslant 1$

$$P(X_n = j) = \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1)$$

4. **a.** On suppose $n \geqslant 2$. Montrer que

$$E(X_n) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$$

b. En déduire $E(X_n)$ puis donner un équivalent simple de $E(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra utiliser une comparaison à une intégrale.

5. **a.** On suppose $n \geqslant 2$. Calculer $E(X_n^2)$ en fonction de $E(X_{n-1}^2)$ et $E(X_{n-1})$.

b. En déduire une expression de $V(X_n)$ sous forme de somme.

c. Donner un équivalent simple de $V(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Soit $(T_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, T_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$. On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

a. Vérifier que X_1 et T_1 ont la même loi.

b. On suppose $n \geqslant 2$. Montrer que pour tout entier $j \geqslant 1$

$$P(S_n = j) = \frac{1}{n}P(S_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n}P(S_{n-1} = j)$$

En déduire que X_n et S_n ont même loi.

c. Retrouver ainsi $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

7. On définit le polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ par

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} P(X_n = k)X^k$$

a. Déterminer P_1 et P_2.

b. On suppose $n \geqslant 2$. A l'aide de la question **I.3.d**, montrer que

$$P_n = \frac{n-1+X}{n}P_{n-1}$$

c. En déduire P_n.

d. Déterminer $P(X_n = n-1)$.

e. Calculer $P_n'(1)$ et retrouver $E(X_n)$.

Partie II – Étude de la variable aléatoire Y_n

1. Donner la loi de Y_1.

2. Quelles sont les valeurs prises par Y_2 ? Déterminer la loi de Y_2.

3. **a.** On suppose $n \geqslant 2$. Expliquer pourquoi pour tout entier $j \geqslant 1$ et tout entier $k \geqslant 2$

$$P(Y_n = j | I_n = k) = P(Y_{k-1} = j-k)$$

b. On suppose $n \geqslant 2$. Déduire de la question précédente que pour tout entier $j \geqslant 1$

$$P(Y_n = j) = \frac{n-1}{n}P(Y_{n-1} = j) + \frac{1}{n}P(Y_{n-1} = j-n)$$

c. Montrer que $E(Y_n) = E(Y_{n-1}) + 1$ lorsque $n \geqslant 2$. Que vaut $E(Y_n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$?

Partie III –

On considère l'urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. A partir de l'urne U_n, on effectue la suite de tirages décrite dans l'en-tête du problème. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on définit la variable aléatoire $Z_i^{(n)}$ égale à 1 si, au cours de l'un quelconque des tirages, on a obtenu la boule numéro i, égale à 0 sinon.

1. Quelle est la loi de $Z_n^{(n)}$? Que dire de la variable $Z_1^{(n)}$?

2. **a.** On suppose $n \geqslant 2$. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$

$$P(Z_i^{(n)} = 1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=i+1}^{n} P(Z_i^{(k-1)} = 1)$$

b. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$, $Z_i^{(n)}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$.

c. Que vaut $\sum_{i=1}^{n} Z_i^{(n)}$? Retrouver ainsi $E(X_n)$.

d. Retrouver $E(Y_n)$.