Devoir surveillé n°11 : corrigé

Problème 1 — Mines-Ponts PSI 2015

Partie I – Matrices symplectiques

On note J la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par $J = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & I_n \\ \hline -I_n & 0_n \end{array}\right)$. On note

$$\mathcal{SP}_{2n} = \left\{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}),\ {}^tMJM = J\right\}$$

1. Un calcul par blocs donne $J^2 = -I_{2n}$ et on constate que ${}^tJ = -J$. Puisque$(-J)J = I_{2n}$, J est inversible et $J^{-1} = -J$.

2. Tout d'abord,

$${}^tJJJ = (-J)J^2 = (-J)(-I_{2n}) = J$$

donc $J \in \mathcal{SP}_{2n}$.
Soit maintenant $\alpha \in \mathbb{R}$. Un calcul par blocs donne

$$\begin{aligned}
{}^tK(\alpha)JK(\alpha) &= \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0_n \\ \hline \alpha In & I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0_n & -I_n \\ \hline I_n & 0_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & \alpha I_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)\\
&= \left(\begin{array}{c|c} 0_n & -I_n \\ \hline I_n & -\alpha I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & \alpha I_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)\\
&= \left(\begin{array}{c|c} 0_n & -I_n \\ \hline I_n & 0_n \end{array}\right) = J
\end{aligned}$$

de sorte que $K(\alpha) \in \mathcal{SP}_{2n}$.

3. Soit $U \in GL_n(\mathbb{R})$. Un calcul par blocs donne à nouveau

$$\begin{aligned}
{}^tL_UJL_U &= \left(\begin{array}{c|c} {}^tU & 0_n \\ \hline 0_n & U^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0_n & -I_n \\ \hline I_n & 0_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U & 0_n \\ \hline 0_n & {}^tU^{-1} \end{array}\right)\\
&= \left(\begin{array}{c|c} 0_n & -{}^tU \\ \hline U^{-1} & 0_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U & 0_n \\ \hline 0_n & {}^tU^{-1} \end{array}\right)\\
&= \left(\begin{array}{c|c} 0_n & -{}^tU{}^tU^{-1} \\ \hline U^{-1}U & 0_n \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Or $U^{-1}U = I_n$ et ${}^tU{}^tU^{-1} = {}^t(U^{-1}U) = {}^tI_n = I_n$ de sorte que ${}^tL_UJL_U = J$. Ainsi $L_U \in \mathcal{SP}_{2n}$.

4. Soi $M \in \mathcal{SP}_{2n}$. On a donc ${}^tMJM = J$ puis

$$\det(J) = \det({}^tMJM) = \det({}^tMJM) = \det({}^tM)\det(J)\det(M) = \det(M)^2\det(J)$$

Or J est inversible donc $\det(J) \neq 0$ puis $\det(M)^2 = 1$. Ainsi $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

5. Soit $(M, N) \in \mathcal{SP}_{2n}$. Alors

$${}^t(MN)JMN = {}^tN({}^tMJM)N = {}^tNJN = J$$

Donc $(MN) \in \mathcal{SP}_{2n}$.

6. Soit $M \in \mathcal{SP}_{2n}$. Alors ${}^tMJM = J$ donc en multipliant à gauche par ${}^tJ = -J$, on obtient

$$({}^tJ{}^tMJ)M = {}^tJJ = -J^2 = I_{2n}$$

Ainsi M est inversible. De plus, en multipliant la relation ${}^tMJM$ à gauche et à droite respectivment par ${}^tM^{-1}$ et M^{-1},

$${}^tM^{-1}{}^tMJMM^{-1} = {}^tM^{-1}JM^{-1}$$

ou encore

$${}^t(MM^{-1})J(MM^{-1}) = {}^tM^{-1}JM^{-1}$$

et finalement

$${}^tM^{-1}JM^{-1} = {}^tI_{2n}JI_{2n} = J$$

Ainsi $M^{-1} \in \mathcal{SP}_{2n}$.

7. Soit $M \in \mathcal{SP}_{2n}$. On a vu à la question précédente que $M^{-1} \in \mathcal{SP}_{2n}$ i.e. ${}^tM^{-1}JM^{-1} = J$. En passant à l'inverse

$$({}^tM^{-1}JM^{-1})^{-1} = J^{-1}$$

ou encore

$$(M^{-1})^{-1}J^{-1}({}^tM^{-1})^{-1} = J^{-1}$$

Puisque $J^{-1} = -J$, $-MJ{}^tM = -J$, ce qui peut encore s'écrire ${}^t({}^tM)J{}^tM = J$. Ainsi ${}^tM \in \mathcal{SP}_{2n}$.

8. Tout d'abord

$${}^tMJM = \left(\begin{array}{c|c} {}^tA & {}^tC \\ \hline {}^tB & {}^tD \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0_n & -I_n \\ \hline I_n & 0_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} {}^tCA - {}^tAC & {}^tCB - {}^tAD \\ \hline {}^tDA - {}^tBC & {}^tDB - {}^tBD \end{array}\right)$$

Ainsi $M \in \mathcal{SP}_{2n}$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} {}^tCA - {}^tAC = 0_n \\ {}^tCB - {}^tAD = -I_n \\ {}^tDA - {}^tBC = I_n \\ {}^tDB - {}^tBD = 0_n \end{cases}$$

On remarque que la troisième relation est obtenu à partir de la deuxième par transposition donc $M \in \mathcal{SP}_{2n}$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} {}^tCA - {}^tAC = 0_n \\ {}^tAD - {}^tCB = I_n \\ {}^tDB - {}^tBD = 0_n \end{cases}$$

9. Puisque $n = 1$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $M \in \mathcal{SP}_2$ *si et seulement si* ${}^tMJM = J$. Or ${}^tMJM = (ad - bc)J = \det(M)J$. Donc $M \in \mathcal{SP}_2$ *si et seulement si* $\det(M) = 1$. Ainsi $\mathcal{SP}_2$ est bien l'ensemble de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de déterminant 1.

Partie II – Centre de $\mathcal{SP}_{2n}$

10. Un calcul évident montre que les matrices I_{2n} et $-I_{2n}$ appartiennent à $\mathcal{SP}_{2n}$. Elles commutent avec tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc, a fortiori, avec tout élément de $\mathcal{SP}_{2n}$. Elles appartiennent donc à $\mathcal{Z}$.

11. Avec les notations de la question **I.2**, $L = K(1)$ et appartient donc à $\mathcal{SP}_{2n}$. On a donc $ML = LM$. Un calcul par blocs donne

$$\begin{cases} A = A + C \\ A + B = B + D \\ C = C \\ C + D = C \end{cases}$$

On en déduit donc que $C = 0_n$ et que $A = D$.
Or ${}^tL = \left(\begin{array}{c|c} {}^tI_n & {}^tC \\ \hline {}^tB & {}^tD \end{array}\right) \in \mathcal{SP}_{2n}$ d'après la question **I.7**, donc on a également $M{}^tL = {}^tLM$. Un nouveau calcul par blocs donne

$$\begin{cases} A = A + B \\ B = B \\ A + C = C + D \\ B + D = D \end{cases}$$

On en déduit que $B = 0_n$.

12. Puisque $C = D = 0_n$ et $A = D$, $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0_n \\ \hline 0_n & A \end{array}\right)$. Ainsi $\det(M) = \det(A)^2$. Or M est inversible puisque $\mathcal{SP}_{2n} \subset GL_n(\mathbb{R})$ donc $\det(M) \neq 0$ puis $\det(A) \neq 0$. Finalement A est bien inversible.

13. On sait que $L_U \in \mathcal{SP}_{2n}$ d'après la question **I.3**. On a donc $ML_U = L_UM$. Puisque $M = \left(\begin{array}{c|c} {}^tA & 0_n \\ \hline 0_n & A \end{array}\right)$, un calcul par blocs donne encore $AU = UA$ et $A{}^tU^{-1} = {}^tU^{-1}A$. La première égalité montre donc que A commute avec toute matrice de $GL_n(\mathbb{R})$.

14. Si $i \neq j$, $I_n + E_{i,j}$ est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls puisqu'égaux à 1 donc elle est inversible. De même, si $i = j$, $I_n + E_{i,j}$ est diagonale et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls puisqu'ils valent tous 1 sauf l'un d'entre eux qui vaut 2 donc elle est à nouveau inversible. Puisque A commute avec tout élément de $GL_n(\mathbb{R})$, A commute avec tous les $I_n + E_{i,j}$.
On en déduit que $AE_{i,j} = E_{i,j}A$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors

$$(AE_{i,j})_{k,l} = A_{k,i}\delta j, l \qquad\qquad (E_{i,j}A)_{k,l} = A_{j,l}\delta i, k$$

et donc

$$A_{k,i}\delta j, l = A_{j,l}\delta i, k$$

Notamment, si l'on choisit $k = i$ et $l = j$, on obtient $A_{i,i} = A_{j,j}$. Si l'on choisit $k = j = l \leqslant i$, on obtient, $A_{j,i} = 0$. Ceci signifie que les coefficients non diagonaux de A sont tous nuls et que ses coefficients diagonaux sont tous égaux entre eux. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$. Par ailleurs, la question **I.4** montre que $\det(M) = \pm 1$. Or $\det(M) = \det(A)^2 = \det(\lambda I_n)^2 = \lambda^{2n}$. Ainsi $\lambda = \pm 1$ et $M = \pm I_{2n}$.
La question **II.10** montre que $\{-I_{2n}, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$ et l'on vient de montrer l'inclusion donc $Z = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$.

Partie III – Déterminant d'une matrice symplectique

15. Un calcul par blocs donne

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & Q \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U & 0_n \\ \hline V & W \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} U + QV & QW \\ \hline V & W \end{array}\right)$$

Ainsi, en posant $V = D$, $W = d$, $Q = BD^{-1}$ et $U = A - BD^{-1}C$, on a bien l'égalité souhaitée.

16. D'après la question **I.8**, ${}^tDB = {}^tBD$. En multipliant par ${}^tD^{-1}$ à gauche et par D^{-1} à droite, on obtient $BD^{-1} = {}^tD^{-1}{}^tB = {}^t(BD^{-1})$. Ainsi BD^{-1} est bien symétrique.
D'après l'égalité de la question précédente,

$$\det(M) = \left|\begin{array}{c|c} I_n & Q \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right|\left|\begin{array}{c|c} U & 0_n \\ \hline V & W \end{array}\right| = \det(I_n)^2\det(U)\det(W) = \det(A - BD^{-1}C)\det(D)$$

Le déterminant étant invariant par transposition

$$\det(A - BD^{-1}C) = \det({}^t(A - BD^{-1}C)) = \det({}^tA - {}^tC{}^tBD^{-1}) = \det({}^tA - {}^tCBD^{-1})$$

car BD^{-1} est symétrique. Ainsi

$$\det(M) = \det({}^tA - {}^tCBD^{-1})\det(D) = \det(({}^tA - {}^tCBD^{-1})D) = \det({}^tAD - {}^tCB)$$

D'après la question **I.8**, ${}^tAD - {}^tCB = I_n$ donc $\det(M) = \det(I_n) = 1$.

17. Soit $V \in \operatorname{Ker} B \cap \operatorname{Ker} D$. Ainsi $BV = DV = 0$. Mais, d'après la question **I.8**, ${}^tAD - {}^tCB = I_n$ de sorte que

$$V = {}^tADV - {}^tCBV = 0$$

Ainsi $\operatorname{Ker} B \cap \operatorname{Ker} D = \{0\}$.

18. Tout d'abord, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$ puisque pour $(U, V) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, ${}^tUV$ est une matrice carré de taille 1 donc un scalaire.
La bilinéarité provient de la linéarité de la transposition et de la bilinéarité du produit matriciel.
De plus, puisque ${}^tUV$ est un scalaire, ${}^t({}^tUV) = {}^tUV$ i.e. ${}^tVU = {}^tUV$ donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.
Si on note $U_1, \dots, U_n$ les coefficients de U et $V_1, \dots, V_n$ les coefficients de V, alors ${}^tUV = \sum_{i=1}^n U_iV_i$. Notamment, $\langle U, U \rangle = \sum_{i=1}^n U_i^2 \geqslant 0$. Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive.
Enfin, si $\langle U, U \rangle = 0$, la somme de termes *positifs* $\sum_{i=1}^n U_i^2$ est nulle donc ses termes sont nuls. Ainsi $U_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ i.e. $U = 0$. La forme bilinéaire, symétrique, positive $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc également définie : c'est un produit scalaire.

19. D'une part

$$\langle QV_1, QV_2 \rangle = {}^t(QV_1)QV_2 = {}^t(s_1PV_1)QV_2 = s_1{}^tV_1{}^tPQV_2$$

Mais comme ${}^tPQ$ est symétrique, ${}^tPQ = {}^tQP$ de sorte que

$$\langle QV_1, QV_2 \rangle = s_1{}^tV_1{}^tQPV_2$$

D'autre part

$$\langle QV_1, QV_2 \rangle = {}^t(QV_1)QV_2 = s_2{}^tV_1{}^tQPV_2$$

Finalement,

$$s_1{}^tV_1{}^tQPV_2 = s_2{}^tV_1{}^tQPV_2$$

et comme $s_1 \neq s_2$, ${}^tV_1{}^tQPV_2 = 0$ puis $\langle QV_1, QV_2 \rangle = 0$.

20. S'il existait $i \in [\![1, m]\!]$ tel que $DV_i = 0$, on aurait également $s_iBV_i = 0$ puis $BV_i = 0$ car $s_i \neq 0$. Ceci signifierait que $V_i \in \operatorname{Ker} B \cap \operatorname{Ker} D = \{0\}$ (question **III.17**), ce qui contredirait l'énoncé puisque V_i est non nulle.
La question **I.8** nous dit que ${}^tDB = {}^tBD$ donc la matrice ${}^tBD$ est symétrique. On peut donc appliquer la question **III.19** pour affirmer que les DV_i sont orthogonaux deux à deux. La famille $(DV_1, \dots, DV_m)$ est donc une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul : elle est libre.

21. S'il n'existait pas de réel α tel que $D - \alpha B$ soit inversible, alors on pourrait trouver des réels $s_1, \dots, s_{n+1}$ non nuls et deux à deux distincts tels que $D - s_iB$ soit non inversible pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$. On pourrait donc trouver des matrices colonnes $V_1, \dots, V_{n+1}$ non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $(D - s_iB)V_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$. Mais la question **III.20** stipulerait alors que la famille $(V_1, \vdots, V_n)$ serait libre, ce qui est impossible puisque $\dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = n < n+1$.
Il existe donc bien un réel α tel que α soit inversible.

22. D'après la question **I.2**, $K(-\alpha) \in \mathcal{SP}_{2n}$. Ensuite, ${}^tK(-\alpha) \in \mathcal{SP}_{2n}$ d'après la question **I.7**. Enfin, d'après la question **I.5**, ${}^tK(-\alpha)M \in \mathcal{SP}_{2n}$. Un produit par blocs donne

$${}^tK(-\alpha)M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C - \alpha A & D - \alpha B \end{array}\right)$$

Mais comme $D - \alpha B$ est inversible, on peut utiliser la question **III.16** pour affirmer que $\det({}^tK(-\alpha)M) = 1$. Or $\det({}^tK(-\alpha)M) = \det({}^tK(-\alpha))\det(M) = \det(M)$ donc $\det(M) = 1$.

23. Posons $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a bien $\det(M) = 1$ et ${}^tMJM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq J$ donc $M \notin \mathcal{SP}_4$.