Suites et séries de fonctions

Dans tout ce chapitre, A désigne une partie d'un espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie et F un espace vectoriel de dimension finie.

On rappelle que F étant de dimension finie, toutes les normes sur F sont équivalentes.

On notera $\|\cdot\|$ la norme sur F et $\|\cdot\|_\infty$ la norme uniforme sur A.

1 Modes de convergence d'une suite de fonctions

1.1 Convergence simple

Définition 1.1 Convergence simple

Soit (f_n) une suite de fonctions de A dans F. On dit que (f_n) **converge simplement** sur A vers une fonction f de A dans F si

$$\forall x \in \mathrm{A},\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

Remarque. Toutes les normes sur F étant équivalentes, la convergence de la suite $(f_n(x))$ ne dépend pas de la norme choisie.

Exemple 1.1

On pose $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $x \mapsto e^x$.

Exercice 1.1

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ à valeurrs dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement sur A vers une fonction f. Montrer que si les f_n sont croissantes / décroissantes / convexes / concaves, alors f est croissante / décroissante / convexe / concave.

1.2 Convergence uniforme

Rappel **Norme uniforme**

On rappelle que la **norme uniforme** est définie sur l'ensemble des fonctions bornées de A dans F par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathrm{A}} \|f(x)\|$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme sur F.

Remarque. Le caractère borné d'une fonction ne dépend pas de la norme choisie sur F puisque toutes les normes sur F sont équivalentes.
Par contre, la norme infinie dépend donc de la norme choisie sur F.

Remarque. En pratique, on a souvent $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ et, dans ce cas, on munit généralement $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ de la valeur absolue.

Définition 1.2 Convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions de A dans F. On dit que (f_n) **converge uniformément** sur A vers une fonction f de A dans F si les fonctions $f_n - f$ sont bornées à partir d'un certain rang et

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

Remarque. Toutes les normes sur F étant équivalentes, le fait qu'une suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f ne dépend pas de la norme choisie.

Remarque. En termes de quantificateurs, la **convergence simple** s'écrit :

$$\forall x \in \mathrm{A},\ \forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \geq \mathrm{N},\ \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

La **convergence uniforme** s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \geq \mathrm{N},\ \forall x \in \mathrm{A},\ \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

On notera la place du quantificateur «$\forall x \in \mathrm{A}$».

Proposition 1.1

Si une suite de fonctions (f_n) converge **uniformément** sur A vers f, alors elle converge **simplement** vers f sur A.

Attention ! La réciproque est fausse.

Méthode **Montrer qu'une suite de fonctions converge uniformément**

Soit (f_n) une suite de fonctions dont on souhaite montrer qu'elle converge uniformément.

1. On étudie d'abord la convergence simple. On **fixe** $x \in \mathrm{A}$ et on étudie la limite éventuelle de la suite $(f_n(x))$. Si cette limite existe, on note $f(x)$ cette limite. Ainsi (f_n) converge simplement vers f sur l'ensemble D des x pour lesquels cette limite existe.

2. Il s'agit ensuite de montrer que $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On doit donc trouver une majoration de $|f(x) - f_n(x)|$ **indépendante** de x. Pour cela, on peut étudier les variations de $f_n - f$ sur D pour déterminer la borne supérieure (ou éventuellement le maximum) de $|f_n - f|$ sur D.

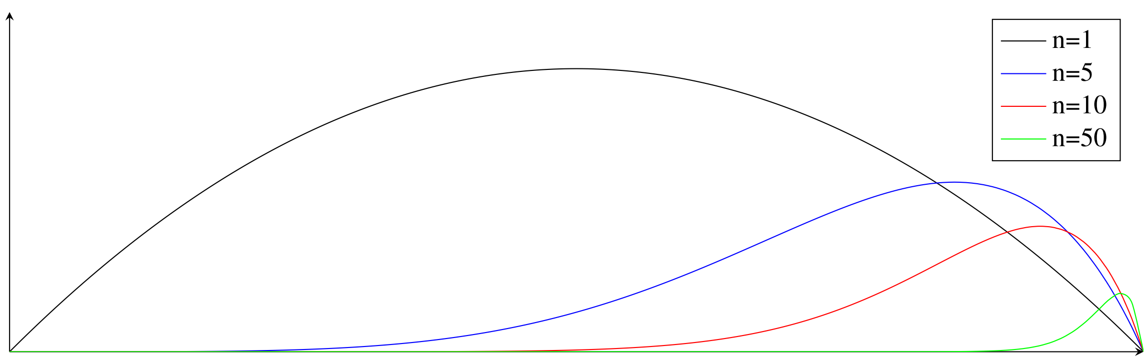
Exemple 1.2

Soit $a \in [0,1[$. On considère la suite de fonctions de terme général $f_n : x \in [0,1] \mapsto n^a x^n(1-x)$.

1. Etudions d'abord la convergence simple. Si $x \in [0,1[$, $(f_n(x))$ converge vers 0 par croissances comparées. De plus, $f_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

2. f_n est dérivable sur $[0,1]$ et $f_n'(x) = n^a x^{n-1}(n-(n+1)x)$. Comme $f_n(0) = f_n(1) = 0$, on en déduit aisément que f_n est positive sur $[0,1]$ et qu'elle admet son maximum en $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Ainsi
$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^a}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$
Or
$$\ln\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\right) = n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -1$$
On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{-1}$$
Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^a}{n+1} = 0$ car $a < 1$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 0$ donc (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

Graphes des fonctions $x \mapsto \sqrt{n}x^n(1-x)$



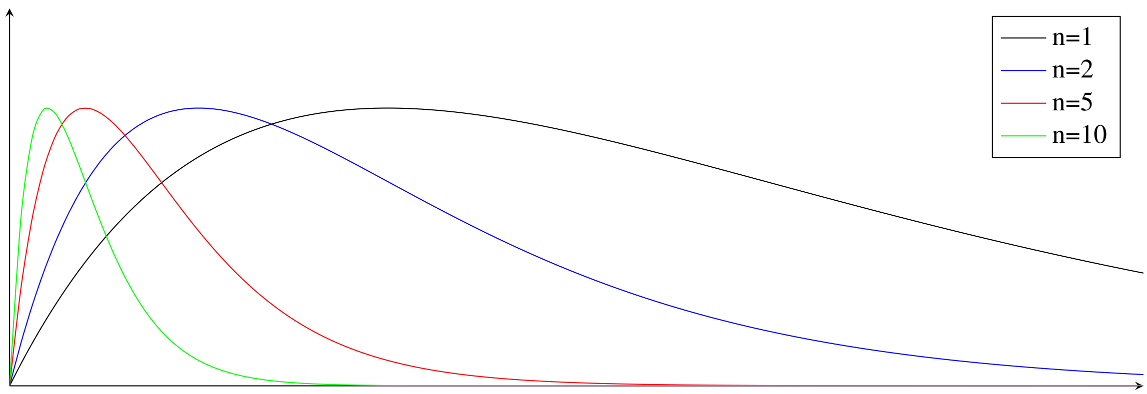
Méthode **Montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément**

- Tout d'abord, si une suite de fonctions (f_n) ne converge pas simplement, elle ne peut converger simplement.
- Si l'on veut montrer qu'une suite de fonctions (f_n) convergeant simplement vers f **ne converge pas uniformément**, il suffit de trouver une suite $(x_n) \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ tel que la suite $(f(x_n) - f_n(x_n))$ ne converge pas vers 0.
- En effet, si (f_n) convergeait uniformément, elle convergerait uniformément vers f et on aurait donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) - f_n(x_n) = 0$ quelle que soit la suite $(x_n) \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ choisie.

Exemple 1.3

Posons $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto nxe^{-nx}$. On montre aisément que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle (croissance comparée si $x > 0$ et traiter le cas $x = 0$ à part).
Une étude de fonctions montre que f_n admet son maximum en $x_n = \frac{1}{n}$. Or $f_n(x_n) = e^{-1}$ donc la suite $(f_n(x_n))$ ne converge pas vers 0. La suite de fonctions (f_n) ne converge donc pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Graphes des fonctions $x \mapsto nxe^{-nx}$



ATTENTION ! Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille **infinie** de parties de A et si (f_n) converge uniformément sur chacun des A_i, alors (f_n) ne converge pas forcément uniformément sur $\bigcup_{i\in I} A_i$.
C'est néanmoins vrai lorsque la famille $(A_i)_{i\in I}$ est **finie**.

Exercice 1.2

Montrer que la suite de fonctions $(x \mapsto nxe^{-nx})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout **segment** de $\mathbb{R}_+^*$ mais pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 Théorèmes d'interversion

2.1 Interversion limite / limite

Rappel **Point adhérent**

On rappelle que $a \in F$ est **adhérent** à A si tout voisinage de a (ou toute boule ouverte de centre a) possède une intersection non vide avec A.

Théorème 2.1 Théorème de la double limite

Soient (f_n) une suite de fonctions de A dans F **convergeant uniformément** vers f sur A et a un point adhérent à A. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n possède une limite $\ell_n \in F$ en a, alors

- la suite (ℓ_n) possède une limite en ℓ ;
- $\lim\limits_{a} f = \ell$.

REMARQUE. Il s'agit d'un théorème d'interversion dans le sens où

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

ATTENTION ! L'hypothèse de convergence uniforme est essentielle. Considérons par exemple les fonctions $f_n : x \in [0,1[\mapsto x^n$. La suite de fonctions (f_n) converge **simplement** sur $[0,1[$ vers la fonction nulle. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{1} f_n = 1$ mais la limite de la fonction nulle en 1 est 0 et non 1.

On en déduit en particulier que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1[$.

Remarque. Les résultats restent valides :

- si $a = \pm\infty$ (dans ce cas A doit être une partie de $\mathbb{R}$ non majorée ou non minorée) :
- si $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (dans ce cas $F = \mathbb{R}$).

2.2 Transfert de continuité

Théorème 2.2 Transfert de continuité

Si (f_n) est une suite de fonctions **continues** sur A à valeurs dans F convergeant **uniformément** vers f, alors f est continue sur A.

Attention ! L'hypothèse de convergence **uniforme** est à nouveau essentielle. Considérons les fonctions $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$. Les fonctions f_n sont bien continues sur $[0,1]$. Cependant, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $x \in [0,1] \mapsto \delta_{x,1}$ qui est discontinue en 1.
On en déduit en particulier que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Attention ! Si une suite de fonctions **continues** converge **simplement** vers une fonction **continue**, la convergence n'est pas nécessairement uniforme.
On peut par exemple considérer l'exemple suivant dû à Cantor : la suite de fonctions de terme général :

$$f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2nx}{1+n^2x^2}$$

converge simplement vers la fonction nulle (traiter à part le cas $x = 0$) qui est bien continue. Pourtant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(1/n) = 1$ donc la convergence ne peut être uniforme.

Méthode **Convergence uniforme au voisinage de tout point**

Si une suite (f_n) de fonctions continue ne converge pas uniformément sur A, on peut quand même dans certaines conditions montrer que sa limite simple f est continue. En effet, la continuité est une notion **locale** ; il suffit donc de montrer que la suite (f_n) converge uniformément au voisinage de tout point de A.
Autrement dit, si $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ et si (f_n) converge uniformément sur chacun des A_i, alors f est continue sur chacun des A_i donc sur A.

Attention ! La convergence uniforme de (f_n) sur chacun des A_i ne garantit pas la convergence uniforme sur $\bigcup_{i\in I} A_i$.

Remarque. Notamment, si (f_n) est une suite de fonctions continues sur un intervalle I convergeant uniformément vers une fonction f sur tout segment de I, alors f est continue sur I.

2.3 Interversion limite / intégration

Théorème 2.3 Interversion limite / intégration

Soient (g_n) une suite de fonctions continues sur un **intervalle** I à valeurs dans F at $a \in \mathrm{I}$. On suppose que (g_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{G}_n : x \in \mathrm{I} \mapsto \int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G} : x \in \mathrm{I} \mapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors (G_n) converge uniformément vers la fonction G sur tout segment de I.

Corollaire 2.1

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un **segment** $[a,b]$ convergeant **uniformément** sur $[a,b]$ vers une fonction f. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. Il s'agit à nouveau d'un théorème d'interversion

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Attention ! A nouveau, la condition de convergence uniforme n'est pas décorative. Considérons $f_n : x \in [0,\pi/2] \mapsto (n+1)\cos^n(x)\sin(x)$. La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,\pi/2]$ (traiter à part le ca $x=0$) mais pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

2.4 Interversion limite / dérivation

Théorème 2.4 Interversion limite / dérivation

Soit (f_n) une suite de fonctions **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I à valeurs dans F. Si

- (f_n) converge **simplement** vers une fonction f sur I ;
- (f_n') converge **uniformément** vers une fonction g sur tout segment de I.

Alors

- (f_n) converge **uniformément** vers f sur tout segment de I ;
- f est de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- $f' = g$.

Remarque. Il s'agit bien d'un théorème d'interversion dans le sens où

$$(\lim_{n\to+\infty} f_n)' = \lim_{n\to+\infty} f_n'$$

Corollaire 2.2

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I. Si

- pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I ;
- $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors

- la limite simple f de (f_n) est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;
- pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, la suite $(f_n^{(j)})$ converge uniformément vers $f^{(j)}$ sur tout segment de I.

3 Séries de fonctions

Définition 3.1 Convergence simple / uniforme

On dit qu'une série de fonctions de A dans F converge simplement / uniformément sur A si la suite de ses sommes partielles converge simplement / uniformément sur A.

Exemple 3.1

Posons $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x^n}{n!}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge et a pour somme e^x. Ainsi la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement et a pour somme la fonction exp.

Par contre, elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\|\exp - \sum_{k=0}^{n} f_k\right\|_\infty = +\infty$ (considérer la limite en $-\infty$ par exemple).

Proposition 3.1

Une série de fonctions converge uniformément sur A si et seulement si

- elle converge simplement
- et la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle.

Rappel **Séries alternées**

Soit $\sum(-1)^n u_n$ une série vérifiant le critère spécial des séries alternées, c'est-à-dire que (u_n) est une suite réelle décroissant vers 0. Si on note $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$, alors $|\mathrm{R}_n| \leq |u_{n+1}|$.

Exemple 3.2

On considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x}$. Si on fixe $x \in \mathbb{R}^*$, la série $\sum f_n(x)$ converge car elle vérifie le critère des séries alternées. Autrement dit, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, si on pose $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ |\mathrm{R}_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}$$

ou encore $\|\mathrm{R}_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{n+1}$. On en déduit que (R_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 3.2 Convergence normale

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F. On dit que la série $\sum f_n$ converge **normalement** sur A si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Rappel **Convergence absolue**

Soit $\sum u_n$ une série de termes à valeurs dans F. On dit que $\sum u_n$ converge **absolument** si la série $\sum \|u_n\|$ converge. Quand F est de dimension finie, on peut en déduire que la série $\sum u_n$ converge.

Proposition 3.2

Si une série de fonctions converge **normalement** sur A, alors elle converge **uniformément** sur A et **absolument** en tout point de A.

Tous les théorèmes d'interversion pour les suites de fonctions s'adaptent aux séries de fonctions.

Théorème 3.1 Théorème de la double limite

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions de A dans F **convergeant uniformément** vers f sur A et a un point adhérent à A. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n possède une limite $\ell_n \in \mathrm{F}$ en a, alors

- la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell_n$ converge ;
- $\lim_a f = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Remarque. Les résultats restent valides :

- si $a = \pm\infty$ (dans ce cas A doit être une partie de $\mathbb{R}$ non majorée ou non minorée) :
- si la série $\sum \ell_n$ diverge vers $\pm\infty$ (dans ce cas $\mathrm{F} = \mathbb{R}$).

Exemple 3.3 Limite en $+\infty$ de la fonction ζ

Posons $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ et $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. En tant que série de Riemann, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [2,+\infty[,\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum f_n$ converge normalement (et donc uniformément) sur $[2,+\infty[$. De plus, $\lim\limits_{+\infty} f_n = \delta_{1,n}$ donc $\lim\limits_{+\infty} \zeta = 1$.

Exercice 3.1

Montrer que

$$\zeta(x) \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right)$$

Exemple 3.4 Limite en 1^+ de la fonction ζ

Posons à nouveau $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ et $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. La série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$ donc on ne peut pas utiliser le théorème de la double limite. Néanmoins, ζ est décroissante sur $]1,+\infty[$ en tant que série de fonctions décroissantes. La fonction ζ admet donc une limite en 1^+. Fixons $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ \zeta(x) \geq \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^x}$$

Par passage à la limite,

$$\lim_{1^+} \zeta \geq \lim_{x\to1^+} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $\lim\limits_{1^+} \zeta = +\infty$.

Théorème 3.2 Transfert de continuité

Si $\sum f_n$ est une série de fonctions **continues** sur A à valeurs dans F convergeant **uniformément** vers f, alors f est continue sur A.

Remarque. A nouveau, si $\mathrm{A} = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i$ et si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues convergeant uniformément vers f sur chacun des A_i, alors f est continue sur A.

Exemple 3.5 Continuité de la fonction ζ

Posons $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ et $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. En tant que série de Riemann, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$.
Soit $a \in]1,+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $[a,+\infty[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [a,+\infty[,\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^a}$$

Or $\sum \dfrac{1}{n^a}$ converge donc la série $\sum f_n$ converge normalement (et donc uniformément) sur $[a,+\infty[$. On en déduit que ζ est continue sur $[a,+\infty[$.
Comme $]1,+\infty[= \bigcup_{a>1} [a,+\infty[$, ζ est continue sur $]1,+\infty[$.

Théorème 3.3 Interversion limite / intégration

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions continues sur un **intervalle** I à valeurs dans F at $a \in$ I. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{F}_n : x \in \mathrm{I} \mapsto \int_a^x f_n(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F} : x \in \mathrm{I} \mapsto \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t$$

Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_n$ converge uniformément vers la fonction F sur tout segment de I.

Corollaire 3.1

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions continues sur un **segment** $[a,b]$ convergeant **uniformément** sur $[a,b]$. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t$$

Théorème 3.4 Interversion limite / dérivation

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I à valeurs dans F. Si

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge **simplement** sur I ;
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ converge **uniformément** sur tout segment de I.

Alors

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge **uniformément** sur tout segment de I ;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Corollaire 3.2

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I. Si

- pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors

- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;
- pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(j)}$ converge uniformément vers $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)}$ sur tout segment de I.

Exemple 3.6 La fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$

Posons $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ et $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$. Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1,+\infty[,\ f_n^{(k)}(x) = \frac{(\ln n)^k}{n^x}$$

Fixons $a \in]1,+\infty[$.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [a,+\infty[,\ \left|f_n^{(k)}(x)\right| \leq \frac{(\ln n)^k}{n^a}$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(\ln n)^k}{n^a}$ (série de Bertrand, classique quoique hors programme). Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n^{(k)}$ converge normalement et donc uniformément sur $[a,+\infty[$. On en déduit que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,+\infty[$. Comme $]1,+\infty[= \displaystyle\bigcup_{a>1} [a,+\infty[$, ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$. De plus,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]1,+\infty[, \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x}$$

Méthode **Comparaison série-intégrale**

On rappelle que si f est une fonction continue par morceaux et décroissante sur $[\mathrm{N},+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_{\mathrm{N}}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge, alors la série $\sum f(n)$ converge et

$$\int_{\mathrm{N}}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t \leq \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} f(n) \leq f(\mathrm{N}) + \int_{\mathrm{N}}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$$

Exemple 3.7 Equivalent de la fonction ζ en 1

On rappelle que $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est définie sur $]1,+\infty[$. Soit $x > 1$. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est continue et décroissante sur $[1,+\infty[$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}\ \mathrm{d}t \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

ou encore

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$$

On en déduit que

$$\zeta(x) \underset{x\to1^+}{=} \frac{1}{x-1} + \mathcal{O}(1)$$

En particulier,

$$\zeta(x) \underset{x\to1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$$

4 Approximation uniforme

Théorème 4.1 Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier

Soit f une fonction **continue par morceaux** sur un **segment** $[a, b]$ à valeurs dans F. Alors il existe une suite (φ_n) de fonctions **en escalier** sur $[a, b]$ à valeurs dans F **convergeant uniformément** vers f.

Remarque. Si on note $\mathcal{C}_m([a, b], \mathrm{F})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans F et $\mathcal{E}([a, b], \mathrm{F})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans F, ceci signifie que $\mathcal{E}([a, b], \mathrm{F})$ est **dense** dans $\mathcal{C}_m([a, b], \mathrm{F})$ pour la norme uniforme.

Exercice 4.1 ★★★ **Lemme de Riemann-Lebesgue**

On considère un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et un espace vectoriel normé de dimension finie E.

1. Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans E. Montrer que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} \varphi(t) \, \mathrm{d}t = 0$$

2. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans E. Montrer que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) \, \mathrm{d}t = 0$$

3. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans E. Montrer que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t) \, \mathrm{d}t = 0$$

Théorème 4.2 Théorème de Weierstrass

Soit f une fonction **continue** sur un **segment** $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Alors il existe une suite (P_n) de fonctions **polynomiales** sur $[a, b]$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ **convergeant uniformément** vers f.

Remarque. A nouveau, ceci signifie que l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a, b]$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est **dense** dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ pour la norme uniforme.