Groupes

Exercice 1 ★★★

Soit G un groupe et E l'ensemble des éléments d'ordre fini de G. Montrer que si E est fini, alors E est un groupe.

Exercice 2 ★★★

Soit G un groupe ayant un nombre fini de sous-groupes. Montrer que G est fini.

Exercice 3 ★ — Stabilisateur

Soient E un ensemble et $x \in \mathrm{E}$. On pose

$$\mathrm{S}(x) = \{\sigma \in \mathrm{S}(\mathrm{E}), \sigma(x) = x\}$$

Montrer que $\mathrm{S}(x)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{S}(\mathrm{E}), \circ)$.

Exercice 4 ★★

Soit $\mathrm{G} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On pose pour tous éléments (x, y) et (x', y') de G :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Vérifier que $*$ est une loi interne associative sur G.
2. Vérifier que $(\mathrm{G}, *)$ est un groupe. Est-il commutatif ?
3. Donner une expression de $(x, y)^{*n}$.

Exercice 5 ★★

Soit $\mathrm{G} =]-1, 1[$. On pose pour tous éléments x et y de G :

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

1. Vérifier que $*$ est une loi interne associative sur G.
2. Vérifier que $(\mathrm{G}, *)$ est un groupe. Est-il commutatif ?
3. Donner une expression de x^{*n}.

Exercice 6 ★★

Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G.

1. Montrer que $\mathrm{H} \cap \mathrm{K}$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que $\mathrm{H} \cup \mathrm{K}$ est un sous-groupe de G si et seulement si $\mathrm{H} \subset \mathrm{K}$ ou $\mathrm{K} \subset \mathrm{H}$.

Exercice 7 ★★ — Automorphismes intérieurs

Soit G un groupe. Étant donné un élément a de G on définit l'application :

$$\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{G} & \longrightarrow & \mathrm{G} \\ x & \longmapsto & axa^{-1} \end{array} \right.$$

1. Soit $a \in \mathrm{G}$. Montrer que φ_a est un automorphisme de G.
2. On pose $\mathfrak{I}(\mathrm{G}) = \{\varphi_a, a \in \mathrm{G}\}$. Montrer que l'ensemble $\mathfrak{I}(\mathrm{G})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{A}ut(\mathrm{G}), \circ)$.
3. Montrer que $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{G} & \longrightarrow & \mathrm{A}ut(\mathrm{G}) \\ a & \longmapsto & \varphi_a \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes.

Exercice 8 ★★

Soit G un groupe. Montrer que $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{G} & \longrightarrow & \mathrm{G} \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array} \right.$ est un automorphisme de G si et seulement si G est commutatif.

Exercice 9 ★★

Déterminer les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 10 ★★

Soit G un groupe d'élément neutre e tel que $\forall x \in \mathrm{G}, x^2 = e$. Montrer que G est commutatif.

Exercice 11 ★★

Montrer que les endomorphismes de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ continus sont les homothéties i.e. les applications $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 12 ★ **Centre d'un groupe**

Soit G un groupe. On définit le centre de G par

$$Z(G) = \{a \in G, \ \forall x \in G, \ ax = xa\}$$

i.e. l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G. Montrer que Z(G) est un sous-groupe de G.

Exercice 13 ★

On munit $\mathbb{R}$ de la loi interne $*$ définie par : $\forall a, b \in \mathbb{R}, \ a * b = a + b + ab$. $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ?

Exercice 14 ★★★ **Sous-groupes de $\mathbb{R}$**

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On suppose G non trivial i.e. $G \neq \{0\}$.

1. Question préliminaire : soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n\alpha \leq \beta < (n+1)\alpha$.
2. Justifier que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ possède une borne inférieure que l'on notera a.
3. On suppose que $a > 0$.
   a. On suppose que $a \notin G$. Justifier l'existence de deux éléments distincts x et y de G appartenant à l'intervalle $]a, 2a[$.
   b. Aboutir à une contradiction et en déduire que $a \in G$.
   c. En déduire que $a\mathbb{Z} \subset G$.
   d. Soit $z \in G$. En utilisant la question **1**, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $z = na$.
   e. En déduire que $G = a\mathbb{Z}$.
4. On suppose que $a = 0$.
   a. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. En utilisant la question **1**, montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $|g - t| < \varepsilon$.
   b. En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 15 ★★

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ p & \longmapsto & e^{2i\pi np\alpha} \end{array} \right.$.

1. Montrer que f_n est un morphisme du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} f_n \subset \mathbb{U}$.
3. En considérant le noyau de f_n, montrer que f_n est injective si et seulement si $\alpha \notin \mathbb{Q}$.
4. A partir de maintenant, on suppose que $\alpha \in \mathbb{Q}$. On écrit α sous forme de fraction irréductible, c'est-à-dire sous la forme $\alpha = \frac{r}{s}$ avec $r \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{N}^*$ tels que $r \wedge s = 1$.
   a. Montrer que $\operatorname{Im} f_1 \subset \mathbb{U}_s$.
   b. En écrivant une relation de Bézout entre r et s, montrer que $e^{\frac{2i\pi}{s}} \in \operatorname{Im} f_1$. En déduire que $\mathbb{U}_s \subset \operatorname{Im} f_1$.
   c. Montrer que $\operatorname{Ker} f_1 = s\mathbb{Z}$.
5. On pose $m = \frac{s}{n \wedge s}$.
   a. Justifier que m est entier.
   b. Montrer que $nr \wedge s = n \wedge s$.
   c. Montrer que $\operatorname{Im} f_n \subset \mathbb{U}_m$.
   d. En écrivant une relation de Bézout entre nr et s, montrer que $e^{\frac{2i\pi}{m}} \in \operatorname{Im} f_n$. En déduire que $\mathbb{U}_m \subset \operatorname{Im} f_n$.
   e. Montrer que $\operatorname{Ker} f_n = m\mathbb{Z}$.

Exercice 16 ★★

Soit G un groupe abélien fini d'ordre impair. Calculer le produit des éléments de G.

Exercice 17 ★★★★ **X MP 2010**

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les morphismes de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 18 ★ **Transport de structures**

Soient $(G, *)$ un groupe et H un ensemble. On suppose qu'il existe une bijection f de G sur H. On définit la loi . sur H de la manière suivante :

$$\forall (x, y) \in H^2,\ x.y = f\left(f^{-1}(x) * f^{-1}(y)\right)$$

Montrer que $(H, .)$ est un groupe.

Exercice 19 ★ **Transport de structures**

Soient $(G, *)$ un groupe et $(H, .)$ un ensemble muni d'une loi interne. On suppose qu'il existe une surjection de G sur H vérifiant

$$\forall (x, y) \in G^2,\ f(x * y) = f(x).f(y)$$

Montrer que $(H, .)$ est un groupe. Que peut-on dire de f ?

Exercice 20 ★

Soit G un groupe. On définit une relation binaire $\sim$ sur G par

$$\forall (x, y) \in G^2,\ x \sim y \iff \exists g \in G, y = g^{-1}xg$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Exercice 21 ★

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. On définit une relation binaire $\sim$ sur G par

$$\forall (x, y) \in G^2,\ x \sim y \iff \exists h \in H,\ y = xh$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Exercice 22 ★

Soit H un sous-groupe d'un groupe G. On définit trois relations binaires $\sim, \sim_g, \sim_d$ sur G de la manière suivante :

$$\forall (x, y) \in G^2,\ x \sim y \iff \exists h \in H,\ y = h^{-1}xh$$
$$\forall (x, y) \in G^2,\ x \sim_g y \iff \exists h \in H,\ y = hx$$
$$\forall (x, y) \in G^2,\ x \sim_d y \iff \exists h \in H,\ y = xh$$

Montrer que $\sim, \sim_g, \sim_d$ sont des relations d'équivalence sur G.

Exercice 23 ★★

Dans cet exercice, on pourra identifier le plan à $\mathbb{C}$ via un repère orthonormé. On pourra en particulier identifier une transformation du plan à une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1. On note G l'ensemble des translations et des similitudes directes du plan. Montrer que G muni de la loi de composition est un groupe.
2. On note H l'ensemble des translations et des rotations du plan. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 24 ★★

On pose $G =]-1, 1[$.

1. Montrer que th induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur G.
2. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{th}(a+b) = \dfrac{\operatorname{th}(a) + \operatorname{th}(b)}{1 + \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}$.
3. Pour $(x, y) \in G^2$, on pose $x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. A l'aide des questions précédentes, montrer que $(G, \star)$ est un groupe commutatif.
4. Soit $x \in G$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x^{\star n} = \dfrac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}$.

Exercice 25 ★★★ **ENS MP 2019**

Soit G un groupe. Montrer que G est fini si et seulement si l'ensemble des sous-groupes de G est fini.

Exercice 26 ★★

Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

Exercice 27 ★★★

Soit G un groupe cyclique d'ordre n. Montrer que pour tout diviseur d de n, il existe un unique sous-groupe de G d'ordre d.

Exercice 28 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2021**

Soit G un groupe fini. On suppose que tous les éléments de G sont d'ordre au plus 2. Que peut-on dire du cardinal de G ?

Exercice 29 ★★

Montrer que tout groupe d'ordre premier est cyclique.

Exercice 30 ★★★ **Ordre d'un produit**

Soient x et y deux éléments d'un groupe G d'ordres respectifs p et q. On suppose que x et y commutent et que $p \wedge q = 1$. Montrer que l'ordre de xy est pq.

Exercice 31 ★★★★ **Groupes de cardinal 6**

Soit G un groupe de cardinal 6. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ou S_3.

Exercice 32 ★ **Groupes et complexes**

On rappelle que $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes.
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

1. Montrer que $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & z^n \end{array} \right.$.

- **a.** Montrer que f est un endomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
- **b.** En considérant le noyau de f, retrouver le résultat de la question **2**.
- **c.** f est-il injectif ?
- **d.** Déterminer l'image de f. f est-il surjectif ?

4. On pose $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array} \right.$.

- **a.** Montrer que g est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.
- **b.** Déterminer le noyau de g. g est-il injectif ?
- **c.** En considérant l'image de g, retrouver le résultat de la question **1**.
- **d.** g est-il surjectif ?

5. On pose $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ z & \longmapsto & |z| \end{array} \right.$.

- **a.** Montrer que h est un morphisme du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$.
- **b.** En considérant le noyau de h, retrouver le résultat de la question **1**.
- **c.** h est-il injectif ?
- **d.** Déterminer l'image de h. h est-il surjectif ?