Devoir surveillé n°04 : corrigé

Solution 1.

1. **a.** Il s'agit de résoudre l'équation $z+\frac{1}{z}=i$. Cette équation équivaut à $z^2-iz+1=0$. Le discriminant de cette équation du second degré est $-5=(i\sqrt{5})^2$. Les solutions de cette équation sont donc

$$\frac{i}{2}(1+\sqrt{5}) \qquad \text{et} \qquad \frac{i}{2}(1-\sqrt{5})$$

b. Comme i possède deux antécédents par φ, φ n'est pas injective.

c. Soit $Z\in\mathbb{C}$. On considère l'équation $f(z)=Z$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}^*$. Cette équation équivaut à $z^2-Zz+1=0$. Cette équation du second degré admet au moins une solution. Une solution de cette équation ne peut être nulle puisque $0^2-Z\times 0-1=-1\neq 0$. Ainsi l'équation $f(z)=Z$ possède donc une solution dans $\mathbb{C}^*$, c'est-à-dire que Z possède un antécédent par φ. L'application φ est donc surjective.

d. Les antécédents de $2\cos\theta$ par φ sont les solutions de l'équation $\varphi(z)=2\cos\theta$ qui équivaut à $z^2-2z\cos\theta+1=0$. Puisque $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$ et $e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}=1$, les solutions de cette équation sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.
Il n'y a en fait qu'une solution lorsque le discriminant $4(\cos^2\theta-1)=-4\sin^2\theta$ est nul et deux sinon. Or le discriminant n'est nul que si $\theta\equiv 0[\pi]$.
Finalement, $2\cos\theta$ possède deux antécédents lorsque $\theta\not\equiv 0[\pi]$, à savoir $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ et un unique antécédent lorsque $\theta\equiv 0[\pi]$. On peut même préciser que, lorsque $\theta\equiv 0[2\pi]$, cet unique antécédent est $e^{i\theta}=e^{-i\theta}=1$ et que, lorsque $\theta\equiv\pi[2\pi]$, cet unique antécédent est $e^{i\theta}=e^{-i\theta}=-1$.

2. **a.** Les antécédents de $2\sqrt{12}-4i$ par ψ lorsque $n=3$ sont ses racines cubiques. Or $2\sqrt{12}-4i=8e^{-\frac{i\pi}{6}}$ donc les antécédents de $2\sqrt{12}-4i$ par ψ sont $2e^{-\frac{i\pi}{18}}$, $2e^{\frac{11i\pi}{18}}$ et $2e^{\frac{23i\pi}{18}}$.

b. De manière générale, tout complexe non nul possède n racines $n^{\text{èmes}}$ donc n antécédents par ψ. L'application ψ est donc surjective. Mais, puisque $n\geqslant 2$, ψ n'est pas injective.

c. Les antécédents de $e^{in\theta}$ par ψ sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de $e^{ni\theta}$, c'est-à-dire $e^{i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$.

3. **a.** On sait que ψ et φ sont surjectives donc $\xi=\varphi\circ\psi$ l'est également. Par contre, $\xi=\varphi\circ\psi$ ne peut-être injective car ψ le serait alors également, ce qui n'est pas.

b. D'après la question **1.d**, les antécédents de $2\cos(n\theta)$ par φ sont $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$ (éventuellement confondus lorsque $n\theta\equiv 0[\pi]$).
D'après la question **2.c**, les antécédents de $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$ sont les complexes

$$e^{i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{et} \qquad e^{-i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{pour} \qquad k\in[\![0,n-1]\!]$$

Lorsque $n\theta\not\equiv 0[\pi]$, $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$ possèdent en tout $2n$ antécédents mais, lorsque $n\theta\equiv 0[\pi]$, $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$ sont confondus donc leurs antécédents égalements.
Finalement $2\cos(n\theta)$ possède $2n$ antécédents par ξ lorsque $n\theta\not\equiv 0[\pi]$, à savoir les complexes

$$e^{i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{et} \qquad e^{-i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{pour} \qquad k\in[\![0,n-1]\!]$$

Lorsque $n\theta\equiv 0[\pi]$, $2\cos(n\theta)$ ne possède que n antécédents. On peut préciser que, lorsque $n\theta\equiv 0[2\pi]$, ces antécédents sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. En effet, ces antécédents sont les solutions de l'équation $\xi(z)=1$, qui équivaut à $(z^n-1)^2=0$. De même, lorsque $n\theta\equiv\pi[2\pi]$, ces antécédents sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de -1. En effet, ces antécédents sont les solutions de l'équation $\xi(z)=-1$, qui équivaut à $(z^n+1)^2=0$.

4. **a.** Puisque $\alpha(0)=\alpha(2i\pi)=1$, α n'est pas injective. Soit $Z\in\mathbb{C}^*$. Notons θ un argument de Z. Alors $|Z|>0$ don on peut définir $\ln(|Z|)+i\theta$ qui est un antécédent de Z par α. Ainsi α est surjective.

b. Les antécédents de i par φ sont $\frac{i}{2}(1+\sqrt{5})=\frac{\sqrt{5}+1}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}$ et $\frac{i}{2}(1-\sqrt{5})=\frac{\sqrt{5}-1}{2}e^{-\frac{i\pi}{2}}$. Les antécédents de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}$ et $\frac{\sqrt{5}-1}{2}e^{-\frac{i\pi}{2}}$ par α sont respectivement les complexes

$$\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \qquad \text{pour} \qquad k\in\mathbb{Z}$$

Ce sont donc également les antécédents de i par $\beta=\varphi\circ\alpha$.

SOLUTION 2.

1. On a évidemment $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$.
2. D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned}
(1+i)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2k} i^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} i^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} i^{2k+1} && \text{en séparant les termes d'indices pairs et impairs} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k i && \text{car } i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k \\
&= S_n + iT_n
\end{aligned}$$

3. Tout d'abord,

$$(1+i)^{2n} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{2n} = 2^n e^{\frac{ni\pi}{2}}$$

De plus, $(1+i)^{2n} = S_n + iT_n$ et S_n et T_n sont *réels* (et même entiers) donc ce sont respectivement les parties réelle et imaginaire de $(1+i)^{2n}$. Finalement,

$$S_n = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad T_n = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

SOLUTION 3.

1. **a.** On utilise la méthode de l'arc-moitié.

$$\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1} = \frac{2ie^{i\theta}\sin\theta}{2e^{i\theta}\cos\theta} = i\tan\theta$$

b. Remarquons que $-i$ n'est pas solution de (E) et que pour $z \neq -i$, $1 - iz \neq 0$ de sorte que

$$\begin{aligned}
(1+iz)^5 = (1-iz)^5 &\iff \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5 = 1 \\
&\iff \frac{1+iz}{1-iz} \in \mathbb{U}_5 \\
&\iff \exists k \in \{-2,-1,0,1,2\},\ \frac{1+iz}{1-iz} = e^{\frac{2ik\pi}{5}} \\
&\iff \exists k \in \{-2,-1,0,1,2\},\ 1+iz = e^{\frac{2ik\pi}{5}}(1-iz) \\
&\iff \exists k \in \{-2,-1,0,1,2\},\ z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{5}}-1}{i(e^{\frac{2ik\pi}{5}}+1)} && \text{car } \forall k \in \{-2,-1,0,1,2\},\ e^{\frac{2ik\pi}{5}} \neq -1 \\
&\iff \exists k \in \{-2,-1,0,1,2\},\ z = \tan\frac{k\pi}{5} && \text{d'après la question } \mathbf{1.a}
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont donc les *réels* $-\tan\frac{2\pi}{5}$, $-\tan\frac{\pi}{5}$, 0, $\tan\frac{\pi}{5}$ et $\tan\frac{2\pi}{5}$.

c. Tout d'abord, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$(1+iz)^5 = \binom{5}{0} + \binom{5}{1}iz + \binom{5}{2}(iz)^2 + \binom{5}{3}(iz)^3 + \binom{5}{4}(iz)^4 + \binom{5}{5}(iz)^5 = 1+5iz-10z^2-10iz^3+5z^4+iz^5$$

On en déduit que

$$(1-iz)^5 = 1 - 5iz - 10z^2 + 10iz^3 + 5z^4 - iz^5$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
(1+iz)^5 = (1-iz)^5 &\iff 10iz - 20iz^3 + 2iz^5 = 0 \\
&\iff z(5 - 10z^2 + z^4) = 0 \\
&\iff z = 0 \text{ ou } z^4 - 10z^2 + 5 = 0 \\
&\iff z = 0 \text{ ou } z^2 = 5 + 2\sqrt{5} \text{ ou } z^2 = 5 - 2\sqrt{5} \\
&\iff z = 0 \text{ ou } z = \sqrt{5+2\sqrt{5}} \text{ ou } z = -\sqrt{5+2\sqrt{5}} \text{ ou } z = \sqrt{5-2\sqrt{5}} \text{ ou } z = -\sqrt{5-2\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

d. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$. Ainsi la fonction tan est-elle croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Or

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{2\pi}{5} < -\frac{\pi}{5} < 0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$$

et

$$-\sqrt{5+2\sqrt{5}} < -\sqrt{5-2\sqrt{5}} < 0 < \sqrt{5-2\sqrt{5}} < \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

de sorte qu'en particulier, $\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

2. **a.**

$$\frac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha} = \frac{1 + i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 + i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$$

b. Il s'agit d'un problème d'extraction de racines cinquièmes. Les solutions sont donc les complexes $e^{\frac{2i(\alpha+k\pi)}{5}}$ pour $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$.

c. L'équation (E_α) équivaut à l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5 = e^{2i\alpha}$. D'après la question précédente, les solutions de (E_α) sont les complexes z tels qu'il existe $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$ tel que $\frac{1+iz}{1-iz} = e^{\frac{i(\alpha+2k\pi)}{5}}$. Or, pour $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$, en posant $\alpha_k = \frac{\alpha+k\pi}{5}$

$$\begin{aligned} & \frac{1+iz}{1-iz} = e^{2i\alpha_k} \\ \iff \quad & z = \frac{e^{2i\alpha_k}-1}{i(e^{2i\alpha_k}+1)} \\ \iff \quad & z = \tan\alpha_k \qquad \text{d'après la question } \mathbf{1.a} \end{aligned}$$

Les solutions de (E_α) sont donc les réels $\tan\alpha_k$ pour $k \in \{-2,0,1,2\}$, autrement dit les réels $\tan\left(\frac{\alpha-2\pi}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha-\pi}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha+\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{\alpha+2\pi}{5}\right)$.

Solution 4.

1. **a.** On a évidemment $j^3 = e^{2i\pi} = 1$.

b. On reconnaît la somme de trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $j \neq 1$. Ainsi

$$1 + j + j^2 = \frac{j^3 - 1}{j - 1} = 0$$

puisque $j^3 = 1$.

c. En développant,

$$(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = a^2 + b^2j^3 + c^2j^3 + ab(j + j^2) + bc(j + j^2) + ca(j + j^2)$$

Or $j^3 = 1$ et $j + j^2 = -1$ donc

$$(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

d.

$$-j = -e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{-i\pi}e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$$
$$-j^2 = -e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-i\pi}e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

2. **a.** D'après la question **1.c**, $(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = 0$. Ainsi $a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$.

► Si $a + bj + cj^2 = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{c-a}{b-a} &= \frac{c + bj + cj^2}{b + bj + cj^2} && \text{car } -a = bj + cj^2 \\ &= \frac{c(1+j^2) + bj}{b(1+j) + cj^2} \\ &= \frac{-cj + bj}{-bj^2 + cj^2} && \text{car } 1 + j + j^2 = 0 \\ &= \frac{j(b-c)}{j^2(c-b)} \\ &= -\frac{1}{j} = -j^2 && \text{car } j^3 = 1 \end{aligned}$$

► Si $a + bj^2 + cj = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{c-a}{b-a} &= \frac{c+bj+cj^2}{b+bj+cj^2} && \text{car } -a = bj + cj^2 \\
&= \frac{c(1+j^2)+bj}{b(1+j)+cj^2} \\
&= \frac{-cj+bj}{-bj^2+cj^2} && \text{car } 1+j+j^2 = 0 \\
&= \frac{j(b-c)}{j^2(c-b)} \\
&= -\frac{1}{j} = -j^2 && \text{car } j^3 = 1
\end{aligned}$$

b. D'après la question **1.d**, $\frac{c-a}{b-a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ ou $\frac{c-a}{b-a} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$. Ainsi

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1 \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{|c-a|}{|b-a|} = 1 \qquad \text{ou enfin} \qquad |b-a| = |c-a|$$

et

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

Ces deux conditions s'écrivent également $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Le triangle ABC est donc équilatéral.