

DEVOIR SURVEILLÉ N°16

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

1. Evident.
2. **a.** Comme $X \in \mathcal{S}$, $X' = AX$. Comme l'application $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mapsto AU$ est linéaire, AX est de classe \mathcal{C}^1 et $(AX)' = AX' = A(AX)$. Ainsi $AX \in \mathcal{S}$.
b. D'après la question précédente, $AV = \begin{pmatrix} -\sin \\ -\cos \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda V + \mu AV = 0$. En évaluant en 0, on obtient $\lambda = \mu = 0$. Ainsi (V, AV) est libre. Comme $\dim \mathcal{S} = 2$, (V, AV) est une base de \mathcal{S} .
3. **a.** V et AV sont clairement bornées sur \mathbb{R} . Comme (V, AV) est une base de \mathcal{S} , $X \in \mathcal{S}$ est une combinaison linéaire des deux applications bornées V et AV . Ainsi X est bornée sur \mathbb{R} .
b. Posons $X = PY$. Comme expliqué précédemment, X est de classe \mathcal{C}^1 et $X' = PY'$. Alors

$$X' = PY' = PMY = PMP^{-1}X = AX$$

D'après la question précédente, X est bornée sur \mathbb{R} . Comme l'application $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mapsto P^{-1}U$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, elle est continue et il existe donc $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $N(P^{-1}U) \leq CN(U)$ où N désigne une norme sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Notamment,

$$\forall t \in \mathbb{R}, N(Y(t)) = N(P^{-1}X(t)) \leq CN(X(t))$$

Comme X est bornée sur \mathbb{R} , Y l'est également.

4. Le produit scalaire est bilinéaire et X est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} donc $f : t \mapsto (X(t) | X(t))$ est également de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . De plus,

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) &= (X'(t) | X(t)) + (X(t) | X'(t)) \\ &= 2(X(t) | X'(t)) = 2X(t)^\top X'(t) \\ &= 2X(t)^\top (A + b(t)I_2)X(t) \\ &= 2X(t)^\top AX(t) + 2b(t)X(t)^\top X(t) \\ &= 2X(t)^\top AX(t) + 2b(t)f(t) \end{aligned}$$

Or la matrice A est antisymétrique donc pour tout $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en remarquant que $U^\top AU$ est un scalaire,

$$U^\top AU = (U^\top AU)^\top = U^\top A^\top U = -U^\top AU$$

puis $U^\top AU = 0$.

REMARQUE. On peut aboutir au même résultat en calculant directement $U^\top AU$ à l'aide des coefficients de A et U mais il est intéressant de savoir que le résultat est valide pour toute matrice antisymétrique de taille quelconque.

Finalement, on obtient bien

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = 2b(t)f(t)$$

5. Posons $B : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^t b(u) \, du$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, B est une primitive de b de sorte que $f(t) = f(0) \exp(2B(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme b est intégrable sur \mathbb{R} , les intégrales $\int_{-\infty}^0 |b(u)| \, du$ et $\int_0^{+\infty} |b(u)| \, du$ convergent et, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+, |B(t)| &\leq \int_0^t |b(u)| \, du \leq \int_0^{+\infty} |b(u)| \, du \\ \forall t \in \mathbb{R}_-, |B(t)| &\leq \int_t^0 |b(u)| \, du \leq \int_{-\infty}^0 |b(u)| \, du \end{aligned}$$

La fonction B est donc bornée. Par conséquent, f est bornée puis X également.

Problème 1

1 Considérons l'endomorphisme u_a défini plus tard avec $a \neq 0_E$. Alors $u_a \in \mathcal{T}(E)$. Mais $(-u_a(a)|a) = -\|a\|^4 < 0$ donc $-u_a \notin \mathcal{T}(E)$. Ainsi $\mathcal{T}(E)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

2 2.a On calcule la trace à l'aide des coefficients :

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} B_{j,i} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n B_{j,i} A_{i,j} = \sum_{j=1}^n (BA)_{j,j} = \text{tr}(BA) \end{aligned}$$

2.b Il existe alors $P \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Alors, d'après la question précédente :

$$\text{tr}(B) = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(APP^{-1}) = \text{tr}(A)$$

2.c La trace d'un endomorphisme de E est trace de la matrice de cet endomorphisme dans une base quelconque de E . La formule de changement de base et la question précédente montrent que cette trace est indépendante de la base choisie.

3 Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $p - 1$.

3.a De manière générale, le complémentaire d'un sous-espace vectoriel de E n'est pas un sous-espace vectoriel de E puisqu'il ne contient pas le vecteur nul. Ainsi G n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

3.b Soit $a \in G$. Comme dit précédemment, $a \neq 0_E$ donc $\dim \text{vect}(a) = 1$. Ainsi d'abord, $\dim H + \dim \text{vect}(a) = p - 1 + 1 = p = \dim E$. De plus, soit $x \in H \cap \text{vect}(a)$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda a$. Supposons $\lambda \neq 0$. Alors $a = \frac{1}{\lambda}x \in H$, ce qui n'est pas. Ainsi $\lambda = 0$ puis $x = 0_E$. Finalement $H \cap \text{vect}(a) = \{0_E\}$. On en déduit que $E = H \oplus \text{vect}(a)$.

3.c Soit $a \in H^\perp$ non nul. On ne peut avoir $a \in H$ car alors $a \in H \cap H^\perp = \{0_E\}$. D'après la question précédente, $\text{vect}(a)$ est un supplémentaire de H dans E .

3.d tr est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Ainsi Ker tr est un hyperplan de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

3.e D'après le théorème du rang, un endomorphisme de E est de rang 1 si et seulement si son noyau est de dimension $p - 1$, autrement dit si et seulement si son noyau est un hyperplan de E .

4 Soit $(f, g) \in \mathcal{S}(E)^2$. On note A et B leurs matrices respectives dans une base de E .

- Tout d'abord, $\text{tr}(f \circ g) = \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) = \text{tr}(g \circ f)$ donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.
- Soient $(f, g, h) \in \mathcal{S}(E)^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\langle \lambda f + \mu g, h \rangle = \text{tr}((\lambda f + \mu g) \circ h) = \text{tr}(\lambda f \circ h + \mu g \circ h) = \lambda \text{tr}(f \circ h) + \mu \text{tr}(g \circ h) = \lambda \langle f, h \rangle + \mu \langle g, h \rangle$$

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche et symétrique donc bilinéaire.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice dans une base orthonormée de E . Alors, d'après un calcul précédent,

$$\langle f, f \rangle = \text{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} A_{j,i}$$

Mais A est la matrice d'un endomorphisme auto-adjoint dans une base orthonormée donc elle est symétrique. Ainsi

$$\langle f, f \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}^2 \geq 0$$

- Supposons maintenant $\langle f, f \rangle = 0$. Une somme de termes positifs ne pouvant être nulle que si chacun des termes est nul, $A_{i,j} = 0$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Ainsi $A = 0$ puis $f = 0$.

On en conclut que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire.

5 Calculons d'abord le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}
 \chi_A &= \begin{vmatrix} X+5 & -1 & -1 \\ -1 & X+5 & -1 \\ -1 & -1 & X+5 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} X+3 & -1 & -1 \\ X+3 & X+5 & -1 \\ X+3 & -1 & X+5 \end{vmatrix} && \text{en effectuant } C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
 &= (X+3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & X+5 & -1 \\ 1 & -1 & X+5 \end{vmatrix} && \text{en factorisant la première colonne} \\
 &= (X+3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & X+6 & 0 \\ 1 & 0 & X+6 \end{vmatrix} && \text{en effectuant } C_2 \leftarrow C_1 + C_2 \text{ et } C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \\
 &= (X+3)(X+6)^2
 \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Sp}(A) = \{-3, -6\}$.

Comme A est symétrique réelle, A est diagonalisable. La dimension des sous-espaces propres est donc égale à la multiplicité de la valeur propre dans le polynôme caractéristique. Ainsi $\dim E_{-3}(A) = 1$ et $\dim E_{-6}(A) = 2$. On vérifie

aisément que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{-3}(A)$ donc $E_{-3}(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Comme A est symétrique réelle, ses sous-espaces propres

sont orthogonaux. On en déduit que $E_{-6}(A) = E_{-3}(A)^\perp$. Par exemple, $E_{-6}(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

6 Soit $(x, y) \in E^2$. Alors

$$(u_a(x) | y) = ((x | a)a | y) = (x | a)(a | y)$$

et

$$(x | u_a(y)) = (x | (y | a)a) = (y | a)(x | a)$$

Par symétrie du produit scalaire, $(u_a(x) | y) = (x | u_a(y))$ donc $u_a \in \mathcal{S}(E)$. De plus,

$$(u_a(x) | x) = ((x | a)a | x) = (x | a)^2 \geq 0$$

Enfin, $\text{Im}(u_a) = \mathbb{C} \text{vect}(a)$ donc $\text{rg}(u_a) \leq 1$. Ainsi $u_a \in \mathcal{T}(E)$.

7 7.a On a $u_a(a) = (a | a)a$ et $u_a(x) = 0$ pour $x \in \text{vect}(a)^\perp$ donc la matrice de u_a dans la base \mathcal{B} est

$$M_a = \left(\begin{array}{c|ccc} (a | a) & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

7.b On en déduit que $\text{tr}(u_a) = \text{tr}(M_a) = (a | a) = \|a\|^2$. De plus, en effectuant un produit par blocs,

$$M_a^2 = \left(\begin{array}{c|ccc} (a | a)^2 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

donc $\text{tr}(u_a^2) = \text{tr}(M_a^2) = (a | a)^2 = \|a\|^4$.

7.c Tout d'abord, $f \circ u_a(a) = (a | a)f(a)$. On écrit $f(a) = \lambda a + z$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $z \in \text{vect}(a)^\perp$. Alors $(f(a) | a) = \lambda(a | a)$ donc $f \circ u_a(a) = (f(a) | a)a + (a | a)z$. De plus, pour $x \in \text{vect}(a)^\perp$, $f \circ u_a(x) = 0_E$. Le premier coefficient diagonal de la matrice de $f \circ u_a$ dans la base \mathcal{B} est donc $(f(a) | a)$ et les autres sont nuls.

7.d On en déduit que $\text{tr}(f \circ u_a) = (f(a) | a)$.

8 8.a Puisque u est de rang 1 et que $b \in \text{Im}(u)$ est non nul, $\text{Im}(u) = \text{vect}(b)$. Notamment, $u(b) \in \text{vect}(b)$. Il existe donc $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $u(b) = \mu u$. De plus, $(u(b) | b) = \mu(b | b) \geq 0$ et $(b | b) > 0$ donc $\mu \geq 0$.

8.b Soit $x \in E$. Alors $u(x) \in \text{Im}(u) = \text{vect}(b)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda b$. Alors $(u(x) | b) = \lambda(b | b) = \|b\|^2$. Mais comme u est auto-adjoint $(u(x) | b) = (x | u(b)) = (x | \mu b) = \mu(x | b)$. Ainsi $\lambda = \frac{\mu(x | b)}{\|b\|^2}$ puis $u(x) = \frac{\mu(x | b)}{\|b\|^2} b$.

8.c On sait que $\mu \geq 0$ mais μ ne peut être nul sinon u le serait également d'après la question précédente. Ainsi $\mu > 0$.

8.d Posons $a = \frac{\sqrt{\mu}}{\|b\|} b$ de sorte que $b = \frac{\|b\|}{\sqrt{\mu}} a$. Alors

$$\forall x \in E, u(x) = \frac{\mu}{\|b\|^2} (x | b) b = (x | a) a = u_a(x)$$

9 Remarquons que si $u \in \mathcal{T}(E)$ est nul, alors $u = \varphi(0_E)$. Si $u \in \mathcal{T}(E)$ est non nul, la question précédente montre qu'il existe $a \in E$ tel que $u = \varphi(a)$. Ainsi φ est surjective.

Remarquons que pour tout $a \in E$, $\varphi(a) = \varphi(-a)$ donc φ n'est pas injective.



ATTENTION! φ n'est manifestement pas linéaire. Cela n'aurait aucun sens de considérer son noyau pour étudier son injectivité.

10 Φ est à valeurs dans \mathbb{R}_+ donc elle est minorée par 0 : elle admet donc une borne inférieure sur E .

11 Soit $x \in E$. On rappelle que N est la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ainsi, par identité remarquable,

$$\Phi(x) = N(f)^2 - 2\langle f, u_x \rangle + N(u_x) = N(f)^2 - 2\text{tr}(f \circ u_x) + \text{tr}(u_x^2)$$

D'après les résultats de la question 7, $\text{tr}(f \circ u_x) = (f(x) | x)$ et $\text{tr}(u_x^2) = \|x\|^4$. Ainsi

$$\Phi(x) = [N(f)]^2 - 2(x | f(x)) + \|x\|^4$$

12 On reprend la question précédente :

$$\forall t \in \mathbb{R}, h_x(t) = \Phi(x + ty) = [N(f)]^2 - 2(x + ty | f(x + ty)) + \|x + ty\|^4$$

D'une part, comme f est auto-adjoint,

$$\begin{aligned} (x + ty | f(x + ty)) &= (x + ty | f(x) + tf(y)) \\ &= (x | f(x)) + t(y | f(x)) + t(x | f(y)) + t^2(y | f(y)) \\ &= (x | f(x)) + 2t(y | f(x)) + t^2(y | f(y)) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t(x | y) + t^2\|y\|^2 = \|x\|^2 + 2t(x | y) + t^2$$

donc

$$\|x + ty\|^4 = \|x\|^4 + 4t^2(x | y)^2 + t^4 + 4t\|x\|^2(x | y) + 4t^3(x | y) + 2t^2\|x\|^2$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, h_x(t) &= [N(f)^2 - 2(x | f(x)) + \|x\|^4] + 4[\|x\|^2(x | y) - (y | f(x))]t \\ &\quad + 2[\|x\|^2 + 2(x | y)^2 - (y | f(y))]t^2 + 4(x | y)t^3 + t^4 \end{aligned}$$

13 Comme f est auto-adjoint, il existe une base orthonormée $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_p)$ de E formée de vecteurs propres de f . Quitte à réordonner les e_i , on peut supposer que leurs valeurs propres associées sont croissantes.

14 On sait que $N(f)^2 = \text{tr}(f^2)$. Or la matrice de f dans la base \mathcal{C} est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les λ_i . La matrice de f^2 dans la base \mathcal{C} est donc diagonale et ses coefficients diagonaux sont les λ_i^2 . On en déduit que

$$N(f) = \sqrt{\sum_{i=1}^p \lambda_i^2}.$$

15 Soit $z \in E$ de norme 1. Comme \mathcal{C} est une base orthonormée, $z = \sum_{i=1}^p (z | e_i) e_i$ puis $f(z) = \sum_{i=1}^p \lambda_i (z | e_i) e_i$ puis

$$(z | f(z)) = \sum_{i=1}^p \lambda_i (z | e_i)^2 \leq \lambda_p \sum_{i=1}^p (z | e_i)^2$$

Or $\|z\| = 1$ donc $\sum_{i=1}^p (z | e_i)^2 = 1$. Finalement, pour tout $z \in E$ unitaire, $(z | f(z)) \leq \lambda_p$. Cette égalité est atteinte pour $z = e_p$ donc

$$\alpha = \sup_{z \in E, \|z\|=1} (z | f(z)) = \lambda_p$$

Soit maintenant $z \in E$ unitaire tel que $(z | f(z)) = \alpha = \lambda_p$. En reprenant les calculs précédents, on a alors

$$\sum_{i=1}^p (z | e_i)^2 (\lambda_p - \lambda_i) = 0$$

A nouveau, une somme de termes positifs ne peut être nuls que si ses termes sont nuls. Ainsi, $(z | e_i)^2 = 0$ dès que $\lambda_i \leq \lambda_p$. Finalement, $z \in E_\alpha(f)$. Réciproquement, si $z \in E_\alpha(f)$, alors $(z | f(z)) = \alpha$.

Finalement, les vecteurs $z \in E$ unitaires tels que $(z | f(z)) = \alpha$ sont les vecteurs unitaires du sous-espace propre associé à la valeur propre α .

16 16.a L'expression de h_x déterminée à l'horrible question 12 montre que $h'_a(0) = 4[\|a\|^2(a | y) - (y | f(a))]$. Par ailleurs si $m(f)$ est atteint en a , alors h_a admet un minimum en 0 et $h'_a(0) = 0$.

16.b On déduit de la question précédente que $(f(a) | y) = \|a\|^2(a | y)$ pour tout vecteur unitaire y de E ou encore $(f(a) - \|a\|^2 a | y) = 0$. Par bilinéarité du produit scalaire, $(f(a) - \|a\|^2 a | y) = 0$ pour tout $y \in E$ puis $f(a) = \|a\|^2 a$.

16.c On reprend à nouveau l'horrible question 12 sachant que le coefficient de t est nul :

$$\begin{aligned} \Phi(a + ty) - \Phi(a) &= h_a(t) - h_a(0) = 2[\|a\|^2 + 2(a | y)^2 - (y | f(y))]t^2 + 4(a | y)t^3 + t^4 \\ &= t^2[t^2 + 4(a | y)t + 4(a | y)^2 + 2(\|a\|^2 - (y | f(y)))] \\ &= t^2[(t + 2(a | y))^2 + 2(\|a\|^2 - (y | f(y)))] \end{aligned}$$

16.d Supposons que $m_f = \Phi(a)$. On a déjà prouvé que $f(a) = \|a\|^2 a$. Par définition de $m(f)$, $\Phi(a + ty) \geq \Phi(a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si on avait $(y | f(y)) > \|a\|^2$, la question précédente montrerait que

$$\Phi(a + ty) - \Phi(a) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2(\|a\|^2 - (y | f(y)))t^2$$

et $\Phi(a + ty) - \Phi(a)$ serait donc strictement négatif au voisinage de 0. Par conséquent, $(y | f(y)) \leq \|a\|^2$.

Réciproquement, supposons que $f(a) = \|a\|^2 a$ et que pour tout $y \in E$ de norme 1, $(y | f(y)) \leq \|a\|^2$. En reprenant ce qui précède, on montre alors que $\Phi(a + ty) \geq \Phi(a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout vecteur $y \in E$ unitaire. Mais ceci signifie que $\Phi(x) \geq \Phi(a)$ pour tout $x \in E$ car tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire sous la forme $x = a + ty$ avec $t \in \mathbb{R}$ et y unitaire. En effet, si $x = a$, on prend $t = 0$ et y unitaire quelconque et sinon, on prend $y = \frac{x - a}{\|x - a\|}$ et $t = \|x - a\|$. Finalement, on a bien $m(f) = \Phi(a)$.

17 17.a Supposons que $m(f) = \Phi(a)$. D'après la question précédente, $f(a) = \|a\|^2 a$. Supposons a non nul. Ainsi a est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\|a\|^2$. Or les valeurs propres de f sont les λ_i . Comme $\lambda_p \leq 0$, toutes les valeurs propres sont négatives. Ainsi $\|a\|^2 \leq 0$, ce qui est contradictoire avec a non nul. Ainsi $a = 0_E$.

Réciproquement, supposons que $a = 0_E$. Alors on a clairement, $f(a) = \|a\|^2 a$ et pour tout $y \in E$ unitaire, $(y | f(y)) \leq \alpha = \lambda_p \leq 0 = \|a\|^2$. Donc, d'après la question précédente, $m(f) = \Phi(a)$.

17.b Les valeurs propres de f_A sont -6 et -3 : elles sont toutes négatives de sorte que

$$m(f_A) = \Phi(0_E) = N(f_A)^2 = (-3)^2 + 2 \cdot (-6)^2 = 81$$

(cf. question 14).

18 18.a Posons $a = \sqrt{\lambda_p} e_p$. Alors $\|a\|^2 = \lambda_p$ et $f(a) = \lambda_p a = \|a\|^2 a$. De plus, pour tout vecteur $y \in E$ unitaire, $(y | f(y)) \leq \alpha = \lambda_p = \|a\|^2$. On en déduit d'après la question 11,

$$m(f) = \Phi(a) = N(f)^2 - 2(a | f(a)) + \|a\|^4 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 - 2(a | \|a\|^2 a) + \|a\|^4 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 - \|a\|^4 = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2$$

18.b Supposons que $m(f) = \Phi(x)$. Alors $f(x) = \|x\|^2 x$ et pour tout $y \in E$ unitaire, $(y \mid f(y)) \leq \|x\|^2$. Notamment, pour $y = e_p$, on obtient $0 < \lambda_p \leq \|x\|^2$. Notamment, x n'est pas nul et c'est donc un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\|x\|^2$. Mais λ_p est la plus grande valeur propre de f et $\|x\|^2 \geq \lambda_p$. On en déduit que $\|x\|^2 = \lambda_p$ i.e. $\|x\| = \sqrt{\lambda_p}$ et donc que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_p i.e. $x \in \text{Ker}(f - \lambda_p \text{Id}_E)$.

Réciproquement, supposons que $x \in \text{Ker}(f - \lambda_p \text{Id}_E)$ et $\|x\| = \sqrt{\lambda_p}$. D'après les questions 11 et 14,

$$\Phi(x) = N(f)^2 - 2(x \mid f(x)) + \|x\|^4 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 - 2\lambda_p \|x\|^2 + \|x\|^4 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 - 2\lambda_p^2 + \lambda_p^2 = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2 = m(f)$$

19 19.a $(1, \dots, 1)$ est un vecteur propre de f_M associé à la valeur propre 1 ou encore $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé

à la valeur propre 1.

19.b En procédant comme indiqué dans l'énoncé

$$\lambda x_k = \sum_{j=1}^p m_{k,j} x_j$$

Par inégalité triangulaire,

$$|\lambda| |x_k| \leq \sum_{j=1}^p |m_{k,j}| |x_j| = \sum_{j=1}^p m_{k,j} |x_j| \leq \sum_{j=1}^p m_{k,j} |x_k| = |x_k|$$

Or $|x_k| > 0$ car x n'est pas nul donc $|\lambda| \leq 1$.

19.c D'après la question 18.b, $m(f_M) = \Phi(a)$ pour $a \in \text{Ker}(f - \lambda_p \text{Id}_E)$ tel que $\|a\| = \sqrt{\lambda_p}$ où λ_p est la plus grande valeur propre de f_M . D'après les questions précédentes, cette plus grande valeur propre est 1. En effet, 1 est effectivement valeur propre et si λ est une valeur propre de f_M , alors soit $\lambda \leq 0 \leq 1$ soit $\lambda \geq 0$ et alors $\lambda = |\lambda| \leq 1$. On cherche donc un vecteur a unitaire dans $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$. Comme $(1, \dots, 1)$ est dans ce noyau, il suffit de normer ce vecteur i.e. de choisir $a = \frac{1}{\sqrt{p}}(1, \dots, 1)$.

19.d On a alors $m(f_M) = N(f - v)^2$ avec $v = u_a$.

19.e Comme a est unitaire, pour tout $x \in E$, $v(x) = u_a(x) = (x \mid a)a$ est la projection orthogonale de x sur $\text{vect}(a)$. Par conséquent, v est le projecteur orthogonal sur la droite $\text{vect}((1, \dots, 1))$.

20 On remarque aisément que p est valeur propre de f_B (pour le vecteur propre $(1, \dots, 1)$ par exemple). Comme f_B est de rang 1, 0 est valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé est $p - 1$. Avec les notations de la partie précédente, $\lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$ et $\lambda_p = p > 0$. D'après la question 18.a,

$$m(f_B) = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2 = 0$$

D'après la question 18.b, $m(f_B) = \Phi(b)$ pour $b \in \text{Ker}(f - \lambda_p \text{Id}_E)$ tel que $\|b\| = \sqrt{\lambda_p}$ c'est-à-dire $b \in \text{Ker}(f - p \text{Id}_E) = \text{vect}((1, \dots, 1))$ et $\|b\| = \sqrt{p}$. On peut donc prendre $b = (1, \dots, 1)$.

21 21.a Remarquons que $C = B - I_p$. D'après la question précédente, les valeurs propres de C sont donc $p - 1$ et -1 . De

plus, $E_{p-1}(C) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\dim E_{-1}(C) = p - 1$.

21.b Toujours avec les notations de la partie précédente, $\lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = -1$ et $\lambda_p = p - 1 > 0$ car $p > 1$. On en déduit d'après la question 18.a que

$$m(f_C) = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2 = p - 1$$

21.c D'après la question 18.b, $m(f_C) = \Phi(c)$ pour $c \in \text{Ker}(f - \lambda_p \text{Id}_E)$ tel que $\|c\| = \sqrt{\lambda_p}$ c'est-à-dire $c \in \text{Ker}(f - (p - 1) \text{Id}_E) = \text{vect}((1, \dots, 1))$ et $\|c\| = \sqrt{p - 1}$. On peut donc prendre $c = \sqrt{\frac{p-1}{p}}(1, \dots, 1)$ puis $w = u_c$.

21.d w n'est pas unique puisque $u_c = u_{-c}$.