Devoir à la maison n°6 : corrigé

Problème 1 — Équation fonctionnelle

1. **a.** En choisissant $x = y = 0$ dans la relation de l'énoncé, on obtient $f(0) = 0$. En choisissant $x = y = 1$, on obtient $f(1) = 0$. Enfin, en choisissant $x = y = -1$, on obtient $f(-1) = 0$.

   b. On se donne $x \in \mathbb{R}$. En choisissant $y = -1$, on obtient $f(-x) = -f(x)$ puisque $f(-1) = 0$. f est donc bien impaire.

2. **a.** On dérive la relation de l'énoncé par rapport à y :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ xf'(xy) = xf'(y) + f(x)$$

   On fixe alors $y = 1$ de sorte que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xf'(x) - f(x) = xf'(1)$$

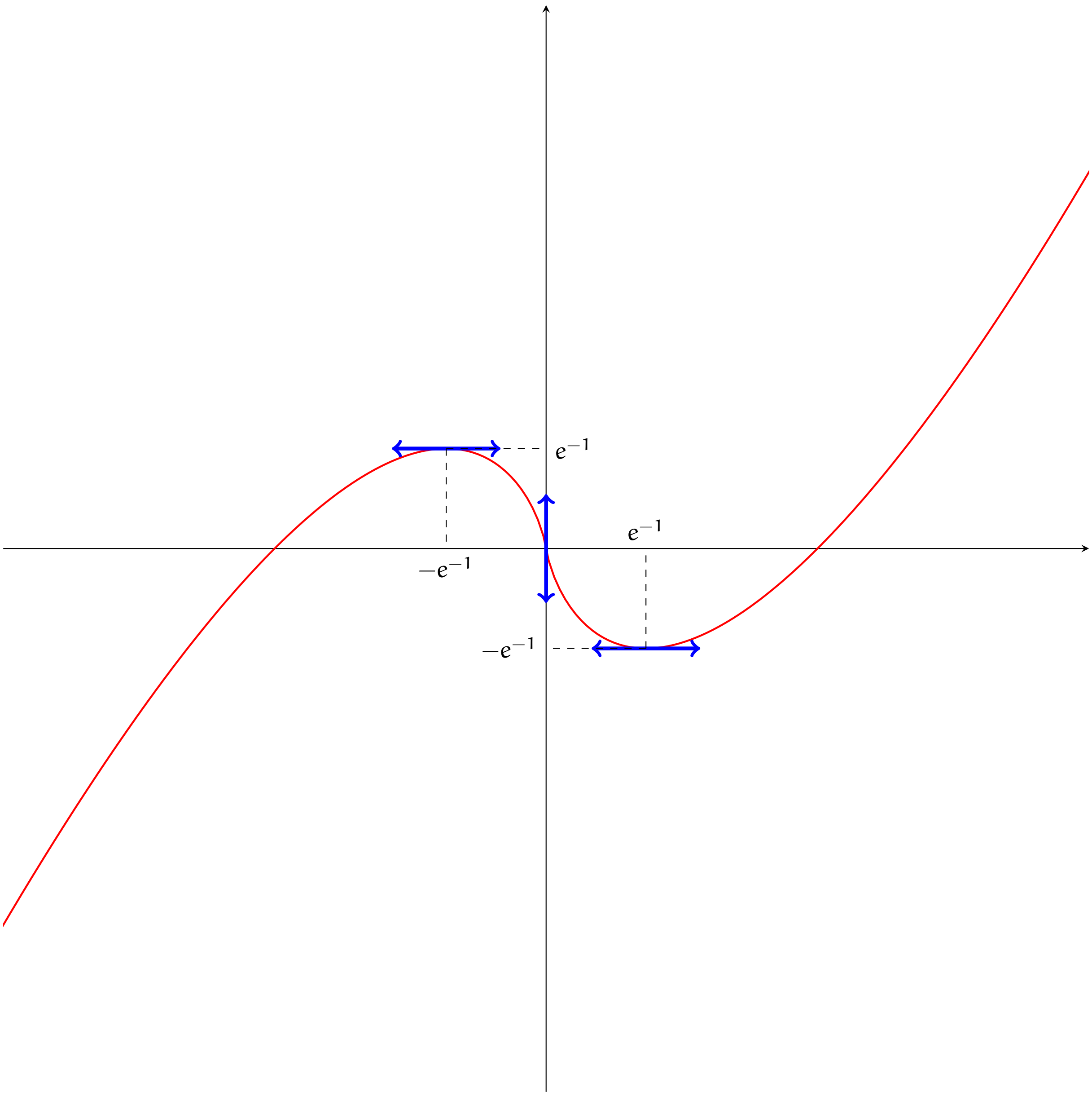
   Ainsi f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $xy' - y = kx$ avec $k = f'(1)$.

   b. Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par variation de la constante, on trouve que $x \mapsto kx\ln(x)$ est solution particulière. Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation avec second membre sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda x + kx\ln(x)$.
   Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x + kx\ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Or on sait que $f(1) = 0$, ce qui impose $\lambda = 0$. On en déduit que $f(x) = kx\ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est impaire, $f(x) = -f(-x) = kx\ln(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$. Enfin, f est continue en 0 donc $f(0) = \lim_{x\to 0^+} kx\ln(x) = 0$ par croissances comparées.

3. **a.** La question précédente montre que $\varphi(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ x\ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \ln x$. Ainsi $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$, ce qui prouve que f n'est pas dérivable en 0.

   Remarque. On prouve de même que $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$. On peut en déduire que la courbe de f admet une tangente verticale en son point d'abscisse 0. ■

   b. On se contente d'étudier f sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque f est impaire. On trouve que $f'(x) = \ln(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi f est strictement décroissante sur $]0, 1/e]$ et strictement croissante sur $[1/e, +\infty[$. Par opérations sur les limites, $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
   Puisque f est impaire, f est strictement croissante sur $[-1/e, 0[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, 1/e]$ et $\lim_{-\infty} f = -\infty$.



4. **a.** Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
On fixe alors $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(xt) = xf(t) + tf(x)$$

On se donne maintenant $y \in \mathbb{R}$ et on intègre la relation précédente entre 0 et y. Ainsi

$$\int_0^y f(xt)\,dt = xF(y) + \frac{y^2}{2}f(x)$$

On multiplie cette relation par x :

$$\int_0^y xf(xt)\,dt = x^2F(y) + \frac{xy^2}{2}f(x)$$

En effectuant le changement de variable $u = xt$ dans la première intégrale, on obtient

$$F(xy) = x^2F(y) + \frac{xy^2}{2}f(x)$$

b. En choisissant $y = 1$ dans le relation précédente, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \frac{2}{x}\left(F(x) - x^2F(1)\right)$$

Or F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que primitive. Par opérations, f est donc elle-même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. D'après la question **.2**, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = kx \ln|x|$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Réciproquement, on vérifie aisément qu'une telle fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (seule la continuité en 0 pose éventuellement problème mais $\lim_{x \to 0} x \ln|x| = 0$). On vérifie également que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \; f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

quitte à distinguer les cas où $x = 0$ ou $y = 0$.
On a donc démontré que $\mathcal{E} = \text{vect}(\varphi)$.