Natures de séries

Exercice 1

Déterminer, en fonction de $\alpha > 0$, la nature de la série de terme général

$$u_n = \cos^n(1/n^\alpha).$$

Exercice 2 ★

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n+1}}.$$

Exercice 3 — Autour du binôme

Convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

Exercice 4

Soient a, b et $c > 0$. Etudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = a^{1/n} - \frac{b^{1/n} + c^{1/n}}{2}.$$

Exercice 5

Nature de la série de terme général $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+1/n}$.

Exercice 6

Nature de la série de terme général : $u_n = e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 7

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = (\ln(n))^{-\ln(n)}$.

Exercice 8

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \tan\left(\pi(7+4\sqrt{3})^n\right)$.

Exercice 9 ★ — Autour de la série harmonique

Soit $a > 0$. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

Exercice 10

Soient a et b dans $\mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2).$$

Exercice 11

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

Exercice 12

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}$ où $a, b > 0$.

Exercice 13

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+p)!}$ suivant les valeurs de $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 14

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive. On pose $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$. Comparer la nature des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{S_n}$.

Exercice 15

Soit $\sum_{n\geq0} u_n$ et $\sum_{n\geq0} v_n$ des séries à termes réels strictement positifs. On suppose que $\sum_{n\geq0} v_n$ converge et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+2}}{u_n} \leq \frac{v_{n+2}}{v_n}$$

Montrer que $\sum_{n\geq0} u_n$ converge.

Exercice 16 — Critère de Raabe-Duhamel

1. Soient (u_n) et (v_n) de suites de réels strictement positifs vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang. Montrer que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.
2. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   a. On suppose $\alpha > 1$. A l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

   b. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.

   c. On suppose $\alpha = 1$. Montrer à l'aide d'exemples qu'on ne peut rien conclure en général.
3. Application. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1}$

Exercice 17

Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge. Etudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{1+a_n}$
3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n a_{2n}$
4. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$

Exercice 18 — Sommation d'Abel

Soient $(a_n)_{n\geq n_0}$ et $(\mathrm{B}_n)_{n\geq n_0}$ deux suites complexes. On définit deux suites $(\mathrm{A}_n)_{n\geq n_0}$ et $(b_n)_{n\geq n_0}$ de la manière suivante :

$$\forall n \geq n_0,\ \mathrm{A}_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k,\ b_n = \mathrm{B}_{n+1} - \mathrm{B}_n$$

1. Montrer que $\sum_{k=n_0}^{n} a_k \mathrm{B}_k = \mathrm{A}_n \mathrm{B}_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathrm{A}_k b_k$ pour tout $n \geq n_0$.
2. Utiliser la question précédente pour étudier la convergence de $\sum_{n\geq1} \frac{\sin n}{n}$.
3. De manière générale, montrer que si (B_n) converge vers 0, si (A_n) est bornée et si $\sum_{n\geq n_0} b_n$ est absolument convergente, alors $\sum_{n\geq n_0} a_n \mathrm{B}_n$ est convergente.

Exercice 19

Soient $\sum_{n\geq0} u_n$ et $\sum_{n\geq0} v_n$ des séries à termes strictement positifs vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

1. Montrer que si $\sum_{n\geq0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq0} u_n$ converge également.
2. Montrer que si $\sum_{n\geq0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq0} u_n$ diverge également.

Exercice 20

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.

1. Montrer que la série $\sum \max(u_n, v_n)$ converge.
2. Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.
3. On suppose que $u_n + v_n$ ne s'annule pas. Montrer que la série $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ converge.

Exercice 21 **Règle de d'Alembert**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes *strictement positifs*.

1. Montrer que si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite $l<1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
2. Montrer que si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite $l>1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.
3. Montrer à l'aide de deux exemples que l'on ne peut pas conclure si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet 1 pour limite.
4. Étudier la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^n}$.

Exercice 22 **Séries de Bertrand**

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. On pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ pour $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et on s'intéresse à la convergence de la série $\sum_{n\geq2} u_n$.

1. On suppose $\alpha>1$. Montrer que $\sum_{n\geq2} u_n$ converge.
2. On suppose $\alpha<1$. Montrer que $\sum_{n\geq2} u_n$ diverge.
3. On suppose $\alpha=1$ et $\beta\leq0$. Montrer que $\sum_{n\geq2} u_n$ diverge.
4. On suppose $\alpha=1$ et $\beta>0$. Déterminer la nature de $\sum_{n\geq2} u_n$ suivant la valeur de β via une comparaison à une intégrale.

Exercice 23 ★★★ **Règle de Cauchy**

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On suppose que la suite de terme général $\sqrt[n]{u_n}$ admet une limite $\ell\in\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$.

1. Montrer que si $\ell<1$, la série $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que si $\ell>1$, la série $\sum u_n$ diverge.
3. Montrer à l'aide de deux exemples qu'on ne peut conclure dans le cas $\ell=1$.

Exercice 24

On note (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que les suites (S_{2n-1}) et (S_{2n}) sont adjacentes. En déduire la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 25

Soit $\sum u_n$ une série réelle.

1. On suppose $\sum u_n$ à termes positifs. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum u_n^2$ converge. La réciproque est-elle vraie ?
2. On ne suppose plus $\sum u_n$ à termes positifs. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que la convergence de la série $\sum u_n$ n'implique pas la convergence de la série $\sum u_n^2$.

Exercice 26

Soit (u_n) une suite décroissante de limite nulle. On note (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum(-1)^n u_n$. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la série $\sum(-1)^n u_n$?

Exercice 27

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$.
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}\right)$.
3. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$.
4. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}\right)$.

Exercice 28 **Constante γ d'Euler**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.
2. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$$

Exercice 29

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k$$

A l'aide d'une permutation de sommes, montrer que les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ sont de même nature et, qu'en cas de convergence, elles ont même somme.

Etude asymptotique de sommes partielles ou de restes

Exercice 30

Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha \leq 1$.

Déterminer un équivalent du reste de la série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.

Exercice 31

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+\sqrt{k}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$S_n = C - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 32

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \ln(n!)$.

1. Par une comparaison à une intégrale montrer que $u_n \sim n \ln n$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq2} \frac{1}{u_n^2}$.
3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$.
4. A l'aide d'une comparaison à une intégrale, déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq2} \frac{1}{u_n}$.

Exercice 33

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\ln(n+2^k)}{k!}$ converge et que pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\ln(n+2^k)}{k!} \underset{n\to+\infty}{=} e\ln n + \sum_{p=1}^{m} \frac{(-1)^{p+1}e^{2^p}}{pn^p} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$$

Exercice 34

Déterminer un équivalent simple de la somme partielle de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln n$ par comparaison à une intégrale.

Calculs de sommes

Exercice 35

Soit $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)$ et calcul de la somme.

Exercice 36

Soit p un nombre premier. Calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(pn)!}$.

Exercice 37

Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^4+n^2+1}$.

Exercice 38

Montrer la convergence et déterminer la somme de la série $\sum_{n\geq 3} \frac{2n-1}{n^3-4n}$.

Exercice 39

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$ et calcul de la somme.

Exercice 40 **Taylor-Lagrange**

A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange prouver la convergence et déterminer la somme des séries suivantes

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ pour $x \in \mathbb{R}$;
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ pour $x \in [0,1]$.

Exercice 41

Soit $x \in]-1,1]$. En remarquant que $\frac{x^k}{k} = \int_0^x t^{k-1}\,\mathrm{d}t$, montrer la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ et déterminer sa somme.
On pourra distinguer les cas $x \leq 0$ et $x \geq 0$.

Exercice 42

En remarquant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$, montrer la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et déterminer sa somme.

Exercice 43 **D'après École de l'Air 1984**

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{I}(\lambda) = \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\ \mathrm{d}t \qquad \mathrm{J}(\lambda) = \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\ \mathrm{d}t$$

Montrer que $\lim_{\lambda\to+\infty} \mathrm{I}(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} \mathrm{J}(\lambda) = 0$.

2. Déterminer deux réels u et v tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^\pi (ux + vx^2)\cos(nx)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour $x \in]0, \pi]$,

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

4. Montrer que la fonction $\varphi : x \in]0, \pi] \mapsto \dfrac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

5. A l'aide des questions précédentes, déterminer la somme de la série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$.

6. En adaptant les deux réels u et v de la question **2**, justifier la convergence et déterminer les sommes des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$.

Exercice 44 **Une fraction rationnelle**

Convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n^2 + 3n}$ et calcul de la somme.

Exercice 45 ★ **Un classique sur l'arctangente**

Convergence et calcul de la somme de la série de terme général :

$$v_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right).$$

Exercice 46 ★ **Un peu de numération**

Soit $n \geqslant 1$. On note $p(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture de n en base 10. Etablir la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{p(n)}{n(n+1)}.$$

Exercice 47 ★★

Convergence et calcul de la somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 48 ★★ **Avec Stirling**

Convergence et somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Exercice 49

Etudier la convergence et calculer somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})\cdots(1+\sqrt{n})}.$$

Applications

Exercice 50 **CCP**

On pose $G(x, y) = \int_0^y \frac{t - [t]}{t(t + x)}\, dt$ où $[t]$ représente la partie entière de t.

1. Montrer que G est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
2. Montrer que $G(x, y)$ tend vers une limite finie $G(x)$ quand y tend vers $+\infty$.
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G(n, y) = \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t - [t]}{t}\, dt - \int_y^{y+n} \frac{t - [t]}{t}\, dt\right)$$
4. On note $H(n) = nG(n)$. Montrer que la série de terme général $H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n}$ converge et en déduire un équivalent de $G(n)$.

Exercice 51 **Séries de Engel**

Soit $x \in]0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 telle que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n}$.
2. Montrer que x est rationnel si et seulement si la suite (q_n) est stationnaire.
3. Montrer que e est irrationnel.

Exercice 52

Montrer que le développement décimal d'un réel est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si ce réel est rationnel.

Exercice 53

Soient $k \in [0, 1[$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tels que
$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$
Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En considérant la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n+1} - u_n$, montrer que u converge.

Exercice 54

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ k-lipschitzienne avec $k < 1$ et (x_n) une suite telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$.
2. En considérant la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{n+1} - x_n$, montrer que la suite (x_n) converge.
3. En déduire que f admet un unique point fixe.