Devoir à la maison n°17

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

$\boxed{1}$ **1.a** D'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

1.b D'après la question précédente, $a_n^* = \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1.c Comme α n'est pas nul, les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$ sont grossièrement divergentes.

$\boxed{2}$ **2.a** Toujours d'après la formule du binôme,

$$a_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k = \frac{1}{2^n}(z+1)^n$$

2.b **2.b.i** La série $\sum a_n$ est une série géométrique de raison z avec $|z| < 1$: elle converge. De plus, $\mathrm{A}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.
2.b.ii La série $\sum a_n^*$ est à nouveau une série géométrique de raison $\frac{1}{2}(z+1)$. Par inégalité triangulaire $|z+1| \leq |z|+1 < 2$ de sorte que $\left|\frac{1}{2}(1+z)\right| < 1$. La série $\sum a_n^*$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = \frac{2}{1-z} = 2\mathrm{A}(z)$$

2.c **2.c.i** La série $\sum a_n$ diverge grossièrement.
2.c.ii Si $z=-2$, alors $a_n^* = \frac{(-1)^n}{2^n}$. La série $\sum a_n^*$ est alors une série géométrique convergente puisque $|-1/2| = 1/2 < 1$.
2.c.iii Par la méthode de l'arc-moitié

$$\frac{z+1}{2} = \frac{e^{i\theta}+1}{2} = e^{\frac{i\theta}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Comme $0 < |\theta| < \pi|$,

$$\left|\frac{z+1}{2}\right| = |\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)| < 1$$

donc la série géométrique $\sum a_n^*$ converge. Par ailleurs, toujours par la méthode de l'arc-moitié

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{1}{1-\frac{e^{i\theta}+1}{2}} = \frac{2}{1-e^{i\theta}} = \frac{1}{-ie^{i\theta}2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{ie^{-\frac{i\theta}{2}}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 1 + i\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$\boxed{3}$ **3.a** **3.a.i** Comme k est fixé

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(n-j) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

3.a.ii D'après la question précédente

$$\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k!}\cdot\frac{n^k}{2^n}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = 0$.

3.b La somme définissant $S_q(n,a)$ est finie et chacun de ses termes tend vers 0 d'après la question précédente donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_q(n,a) = 0$.

3.c Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme (a_n) converge vers 0, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n > q$, $|a_n| \le \varepsilon/2$. Mais comme la suite de terme général $S_q(n,a)$ converge vers 0, il existe $N \ge q$ tel que pour tout entier $n \ge N$, $|S_q(n,a)| \le \varepsilon/2$. Alors pour $n \ge N$,

$$\begin{aligned}
|a_n^*| &= \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k\right| \\
&\le |S_q(n,a)| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^n \binom{n}{k}|a_k| && \text{par inégalité triangulaire} \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^n \binom{n}{k}\right) \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\right) && \text{par positivité des coefficients binomiaux} \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon && \text{d'après la question } \mathbf{1.a}
\end{aligned}$$

Par définition de la limite, (a_n^*) converge vers 0.

3.d Posons $b_n = a_n - \ell$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité (évidente ?) de l'application $u \mapsto u^*$ et d'après la question **1.b**

$$b_n^* = a_n^* - \ell$$

Comme (b_n) converge vers 0, (b_n^*) converge également vers 0 d'après la question précédente de sorte que (a_n^*) converge vers ℓ.

3.e Dans la question **2.c.ii**, on a montré que lorsque $a_n = (-2)^n$, alors $a_n^* = (-1/2)^n$. La suite (a_n^*) peut converger sans que la suite (a_n) converge.

4 **4.a** On trouve

$$U_0 = S_0 \qquad U_1 = 2S_0 + S_1 \qquad U_2 = S_2 + 3S_1 + 3S_0 \qquad U_3 = S_3 + 4S_2 + 6S_1 + 4S_0$$

4.b **4.b.i** On peut conjecturer que

$$U_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k$$

4.b.ii La relation $(\mathcal{E})$ est vraie pour $n \in \{0,1,2,3\}$. Supposons la vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Remarquons d'abord que

$$U_{n+1} = 2^{n+1}T_{n+1} = 2^{n+1}(T_n + a_{n+1}^*) = 2U_n + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a_k$$

Suivant l'indication de l'énoncé,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a_k \\
&\quad= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(S_k - S_{k-1}) \\
&\quad= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}S_k - \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}S_{k-1} \\
&\quad= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}S_k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k && \text{en réindexant et car } S_{-1} = 0 \\
&\quad= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1}\right)S_k
\end{aligned}$$

En utilisant maintenant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}_{n+1} &= 2\mathrm{U}_n + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a_k \\
&= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\mathrm{S}_k + \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1}\right)\mathrm{S}_k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1}\right)\mathrm{S}_k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+2}{k+1}\mathrm{S}_k \qquad \text{d'après la formule du triangle de Pascal}
\end{aligned}$$

La relation $(\mathcal{E})$ est donc établie par récurrence.

4.c Remarquons qu'avec la convention $\mathrm{S}_{-1} = 0$,

$$\mathrm{T}_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}\mathrm{U}_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}\mathrm{S}_k = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{S}_{k-1}$$

En notant $s_n = \mathrm{S}_{n-1}$, on a donc $\mathrm{T}_{n-1} = 2s_n^*$. Notons S la série de la série $\sum a_n$. Alors (s_n) converge vers S et, d'après la question **3.d**, (s_n^*) converge également vers S. Ainsi (T_{n-1}) converge vers 2S. La série $\sum a_n^*$ converge donc bien et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

4.d L'exemple de la question **2.c.ii** montre que $\sum a_n$ peut diverger alors que $\sum a_n^*$ converge.

$\boxed{5}$ **5.a** D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(n+1)!}$ est infini. On en déduit que f est définie, continue et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5.b Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = e^x - 1$$

5.c On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{-x}f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\boxed{6}$ **6.a** On a clairement $\sigma_n \leq n$ donc

$$0 \leq \frac{\sigma_n}{n!} \leq \frac{1}{(n-1)!}$$

Comme la série entière $\sum \frac{x^n}{(n-1)!}$ est de rayon de convergence infini par la règle de d'Alembert, il en est de même de la série entière $\sum \frac{\sigma_n x^n}{n!}$. Ainsi g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. A fortiori, elle est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

6.b Comme g est définie par une série entière de rayon de convergence infini, on obtient sa dérivée sur $\mathbb{R}$ en dérivant terme à terme :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sigma_n x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sigma_{n+1}x^n}{n!}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) - g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sigma_{n+1}-\sigma_n)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!} = f(x)$$

6.c On pourrait résoudre l'équation différentielle $y' - y = f$. On peut aussi remarquer qu'en posant $h(x) = e^{-x}g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = e^{-x}(g'(x) - g(x)) = e^{-x}f(x)$$

Sachant que $h(0) = g(0) = 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_0^x h'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^x e^{-t}f(t)\ \mathrm{d}t$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\ \mathrm{d}t$$

7 **7.a** D'après la question **5.c**,

$$e^{-x}f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Or $e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}x^n$ donc

$$e^{-x}f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{n-1}}{n!}$$

On peut primitiver terme à terme cette série entière de rayon de convergence infini

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = \int_0^x e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n \cdot n!}$$

7.b Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_n x^n}{n!} \qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n \cdot n!} \qquad g(x) = e^x\mathrm{F}(x)$$

donc, par produit de Cauchy,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k \cdot k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n x^n$$

Par unicité du développement en série entière, $\gamma_n = \dfrac{\sigma_n}{n!}$.

8 **8.a** D'après ce qui précède, $\sigma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ puis

$$\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} = 1$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \sigma_n x^n$ vaut donc 1.

8.b On peut déjà garantir que $]-1,1[\subset \Delta \subset [-1,1]$. Comme σ_n diverge vers $+\infty$, les série $\sum \sigma_n$ et $\sum (-1)^n \sigma_n$ divergent grossièrement. Finalement, $\Delta =]-1,1[$. De plus, pour tout $x \in \Delta$,

$$\phi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\sigma_n x^{n-1}$$

Il est alors clair que ϕ' est positive sur $[0,1[$. Ainsi ϕ est croissante sur $[0,1[$.

8.c Comme la suite de terme général $\dfrac{1}{k}$ décroît et converge vers 0, la série $\sum\limits_{k\geq1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées. La série entière $\sum\limits_{k\geq1} \dfrac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$ admet 1 pour rayon de convergence et

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(1+x)$$

D'après le théorème de converegence radiale d'Abel :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \lim_{x\to1^-} \ln(1+x) = \ln 2$$

8.d Puisque $\sigma_n = n!\gamma_n$,

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}n!}{k \cdot k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Ainsi, en posant $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 = 0$, $\dfrac{\sigma_n}{2^n} = a_n^*$. D'après la question **8.c**, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ln 2$ et d'après la question **4.c**, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2\ln 2$ ou encore, comme $a_0^* = a_0 = 0$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{2^n} = 2\ln 2$$

Ceci signifie que $\phi\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\ln 2$.

8.e On peut remarquer que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sigma_n x^n$ est le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{x^n}{n}$. Ainsi

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

On retrouve alors $\phi\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\ln 2$.