Devoir à la maison n°08

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 Evident.

2 On trouve

$$\begin{aligned}
\phi_A(E_{1,1}) &= \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = -bE_{1,2} + cE_{2,1} \\
\phi_A(E_{2,2}) &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix} = bE_{1,2} + cE_{2,1} \\
\phi_A(E_{1,2}) &= \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} = -cE_{1,1} + (a-d)E_{1,2} + cE_{2,2} \\
\phi_A(E_{2,1}) &= \begin{pmatrix} b & 0 \\ (d-a) & -b \end{pmatrix} = bE_{1,1} + (d-a)E_{2,1} - bE_{2,2}
\end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de Φ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{pmatrix}$$

3 On trouve

$$\begin{aligned}
\chi_A = \det(XI_4 - M) &= \begin{vmatrix} X & 0 & c & -b \\ 0 & X & -c & b \\ b & -b & X-a+d & 0 \\ -c & c & 0 & X-d+a \end{vmatrix} \\
&= X\begin{vmatrix} 1 & 0 & c & -b \\ 1 & X & -c & b \\ 0 & -b & X-a+d & 0 \\ 0 & c & 0 & X-d+a \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \text{ puis factorisation} \\
&= X\begin{vmatrix} 1 & 0 & c & -b \\ 0 & X & -2c & 2b \\ 0 & -b & X-a+d & 0 \\ 0 & c & 0 & X-d+a \end{vmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&= X\begin{vmatrix} X & -2c & 2b \\ -b & X-a+d & 0 \\ c & 0 & X-d+a \end{vmatrix} \\
&= X\left(X(X-a+d)(X-d+a) - 2bc(X-a+d) - 2bc(X-d+a)\right) && \text{d'après la règle de Sarrus} \\
&= X^2\left[X^2 - \left((d-a)^2 + 4bc\right)\right]
\end{aligned}$$

4 Posons $\Delta = (d-a)^2 + 4bc$ de sorte que $\chi_{\Phi_A} = X^2(X^2 - \Delta)$.
Si $\Delta < 0$, χ_A n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$ donc Φ_A n'est pas diagonalisable.
Si $\Delta = 0$, $\chi_{\Phi_A} = X^4$ donc $\mathrm{Sp}(A) = 0$. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle donc nulle. Ainsi A n'est pas diagonalisable.
Si $\Delta > 0$, alors $\chi_{\Phi_A} = X^2(X-\delta)(X+\delta)$ en posant $\delta = \sqrt{\Delta}$. Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \delta, -\delta\}$ (en particulier, $\delta \neq -\delta$). En considérant les multiplicités de δ et $-\delta$ dans χ_{Φ_A}, on a $\dim E_\delta(\Phi_A) = \dim E_{-\delta}(\Phi_A) = 1$. Enfin, I_2 et A appartiennent à $\operatorname{Ker}\Phi_A$ et ne sont pas colinéaires par hypothèse donc $\dim E_0(\Phi) = \dim \operatorname{Ker}\Phi_A \geq 2$. En considérant la multiplicité de 0 dans χ_{Φ_A}, on a donc $\dim E_0(\Phi) = 2$. Ainsi $\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\Phi_A)} \dim E_\lambda(\Phi_A) = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc Φ_A est diagonalisable.
Par conséquent, Φ_A est diagonalisable si et seulement si $\Delta > 0$.

5 Remarquons que $\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$. Notamment le discriminant de χ_A vaut $(a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc = \Delta$.
Si $\Delta < 0$, χ_A n'est pas scindé donc A n'est pas diagonalisable.
Si $\Delta = 0$, alors $\chi_A = X^2$ et $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$. A nouveau, si A était diagonalisable, elle serait nulle, ce qui est exclu par hypothèse.
Si $\Delta > 0$, χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.
Finalement, A est diagonalisable si et seulement si $\Delta > 0$ i.e. si et seulement si Φ_A est diagonalisable.

6 **6.a** On trouve $DE_{i,j} - E_{i,j}D = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$.

6.b Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. D'après l'énoncé, $A = PDP^{-1}$. Comme $B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$

$$\Phi_A(B_{i,j}) = AB_{i,j} - B_{i,j}A = PDE_{i,j}P^{-1} - PE_{i,j}DP^{-1} = P\left(DE_{i,j} - E_{i,j}D\right)P^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j)PE_{i,j}P^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j)B_{i,j}$$

Ainsi $B_{i,j}$ est bien un vecteur propre de Φ_A.

6.c L'application $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, cette application est clairement linéaire et on vérifie qu'en posant $\psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto P^{-1}MP$, on a bien $\psi\circ\varphi = \varphi\circ\psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. On en déduit notamment que l'image de la base $(E_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à savoir la famille $(B_{i,j})$, est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de Φ_A : Φ_A est diagonalisable.

7 **7.a** **7.a.i** Comme Φ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ses valeurs propres sont réelles.

7.a.ii Il suffit de constater que

$$\chi_{A^\top} = \det(XI_n - A^\top) = \det((XI_n - A)^\top) = \det(XI_n - A)$$

On conclut en invoquant le fait que les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.

7.a.iii
$$\Phi_A(XY^\top) = AXY^\top - XY^\top A = zXY^\top - X(A^\top Y)^\top = zXY^\top - \overline{z}XY^\top = (z-\overline{z})XY^\top$$

Comme X et Y ne sont pas nuls, il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $X_i \neq 0$ et $Y_j \neq 0$. ALors $(XY^\top)_{i,j} = X_iY_j \neq 0$ donc $XY^\top \neq 0$. On en déduit que $z-\overline{z}$ est bien une valeur propre de Φ_A.

7.b A possède au moins une valeur propre complexe z car χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$. Comme $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, $\overline{z}$ est également valeur propre de A. D'après la question précédente, $z-\overline{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$ est également valeur propre de Φ_A. Mais toutes les valeurs propres de Φ_A sont réelles donc $\operatorname{Im}(z) = 0$ puis $z \in \mathbb{R}$. Ainsi A possède au moins une valeur propre réelle.

Remarque. On a également montré que toutes les valeurs propres de A étaient réelles.

7.c Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Par définition, $\Phi_A(P_{i,j}) = \lambda_{i,j}P_{i,j}$ ou encore $AP_{i,j} - P_{i,j}A = \lambda_{i,j}P_{i,j}$. On en déduit que

$$AP_{i,j}X = \left(\lambda_{i,j}P_{i,j} + P_{i,j}AX\right) = (\lambda_{i,j}+\lambda)P_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$$

en posant $\mu_{i,j} = \lambda + \lambda_{i,j}$.

7.d L'application linéaire $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MX \end{array}\right.$ est surjective. En effet, comme X est non nul, il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $X_i \neq 0$. Si on se donne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors en considérant la matrice M dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est Y/α et dont les autres colonnes son nulles, on a bien $MX = Y$.
L'image de la base $(P_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à savoir la famille $(P_{i,j}X)$ est donc une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On peut alors en extraire une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, cette base est composée de vecteurs propres de A. La matrice A est donc diagonalisable.

8 Tout d'abord, $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ est bien une famille de $\mathbb{R}[A]$.
Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ tel que $\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k A^k = 0$. Alors $P = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k X^k$ est un polynôme annulateur de A. Par conséquent, π_A divise P. Or $\deg P \leq m-1 < m = \deg \pi_A$ donc $P = 0$ puis $(\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}) = (0, \dots, 0)$. Ainsi $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ est libre.
Enfin, soit $M \in \mathbb{R}[A]$. Il existe donc $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M = P(A)$. Notons R le reste de la division euclidienne de P par π_A. Alors $M = P(A) = R(A)$ et $\deg R < \deg \pi_A = d$ donc $M \in \operatorname{vect}(I_n, A, \dots, A^{m-1})$. La famille $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ est génératrice.
Ainsi $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ est bien une base de $\mathbb{R}[A]$.

9 Comme $\mathbb{R}[A]$ est une algèbre commutative, $\mathbb{R}[A] \subset \operatorname{Ker} \Phi_A$. On en déduit que $\dim \operatorname{Ker} \Phi_A \geq \dim \mathbb{R}[A] = d$.

10 **10.a** Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ i.e. $\sum_{i=1}^n \lambda_i u^{n-i}(y) = 0$. Supposons que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ne soit pas nul. Notons alors $j = \max\{i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \neq 0\}$. Ainsi $\lambda_j = 0$ pour tout $j > i$. Donc $\sum_{i=1}^j \lambda_i u^{n-i}(y) = 0_E$. En appliquant, u^{j-1} à cette égalité, on obtient $\lambda_j u^{n-1}(y) = 0_E$, ce qui est contradictoire. Ainsi $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est nul et $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. Comme $\dim \mathbb{R}^n = n$, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

10.b Comme $B \in \operatorname{Ker} \Phi_A$, A et B commutent. Par conséquent, u et v commutent également. On en déduit aisément que u et v^k commutent pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\forall j \in [\![1,n]\!],\ v(e_j) = v \circ u^{n-j}(y) = u^{n-j} \circ v(y) &= u^{n-j}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = u^{n-j}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}(y)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-j} \circ u^{n-i}(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i} \circ u^{n-j}(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}(e_j) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}\right)(e_j)\end{aligned}$$

Ainsi les endomorphismes v et $\sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}$ coïncident sur la base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$: ils sont égaux.

10.c La question précédente montre que si $B \in \operatorname{Ker} \Phi_A$, alors $v \in \mathbb{R}[u]$ i.e. $B \in \mathbb{R}[A]$. Ainsi $\operatorname{Ker} \Phi_A \subset \mathbb{R}[A]$. Mais on a vu précédemment que $\mathbb{R}[A] \subset \operatorname{Ker} \Phi_A$ donc $\operatorname{Ker} \Phi_A = \mathbb{R}[A]$ par double inclusion.

11 **11.a** Remarquons tout d'abord que $B \in \operatorname{Ker} \Phi_A$ si et seulement si u et v commutent.
Si u et v commutent, on sait que les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Réciproquement, supposons que tous les sous-espaces propres de u soient stables par v. Fixons $k \in [\![1,p]\!]$ et $x \in E_u(\lambda_k)$. Alors, d'une part, $v \circ u(x) = v(\lambda_k x) = \lambda_k v(x)$ et d'autre part, $u \circ v(x) = \lambda_k v(x)$ car $v(x) \in E_u(\lambda_k)$.
On en déduit que $u \circ v$ et $v \circ u$ coïncident sur $E_u(\lambda_k)$. Comme u est diagonalisable, ses sous-espaces propres sont supplémentaires dans E. On en déduit que $u \circ v = v \circ u$.

11.b On en déduit que $B \in \operatorname{Ker}\Phi_A$ si et seulement si la matrice de v dans une base adaptée à la décomposition en somme directe des sous-espaces propres de u est diagonale par blocs, chaque bloc diagonal ayant même taille que la dimension du sous-espace propre respectif, c'est à-dire de la forme

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_r \end{pmatrix}$$

avec $B_k \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})$.

11.c L'isomorphisme qui à un endomorphisme associe sa matrice dans une base donnée nous permet d'affirmer que $\operatorname{Ker}\Phi_A$ a la même dimension que le sous-espace vectoriel des matrices diagonales par blocs de la forme précédente. Comme l'application qui à $(B_1, \dots, B_p) \in \prod_{k=1}^p \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})$ associe la matrice $\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_r \end{pmatrix}$ est clairement un isomorphisme, on en déduit que

$$\dim \operatorname{Ker}\Phi_A = \dim \prod_{k=1}^p \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^p m_k^2$$

11.d Il s'agit d'envisager toutes les décompositions de 7 comme sommes d'entiers naturels non nuls. Passionnant ! Un peu de Python.

```python
def partitions(n, I=1):
    yield (n,)
    for i in range(I, n//2 + 1):
        for p in partitions(n-i, i):
            yield (i,) + p
set([sum(k**2 for k in p) for p in partitions(7)])
```

Cela donne

```
{7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 25, 27, 29, 37, 49}
```

12 Remarquons déjà que $AB - BA = \alpha B$.
On procède ensuite par récurrence. Le résultat est évident pour $k = 0$. Supposons-le vrai pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors $AB^k - B^kA = \alpha k B^k$ puis

$$AB^{k+1} - B^{k+1}A = (\alpha k B^k + B^kA)B - B^{k+1}A = \alpha k B^{k+1} + B^k(AB - BA) = \alpha(K+1)B^{k+1}$$

Par récurrence, le résultat est établi pour tout $k \in \mathbb{N}$.

13 Ecrivons $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$. Par linéarité de Φ_A,

$$\Phi(P(B)) = \Phi\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k B^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \Phi_A(B^k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \alpha k B^k = \alpha B \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k B^{k-1} = \alpha B P'(B)$$

14 En appliquant la relation précédente à $P = \pi_B$, on obtient

$$0 = \Phi_A(\pi_B(B)) = \alpha B \pi_B'(B)$$

Ainsi $\alpha X \pi_B'$ est un polynôme annulateur de B. Par conséquent, π_B divise $\alpha X \pi_B'$. Comme ces deux polynômes ont même degré ($\alpha \neq 0$), ils sont associés i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda \pi_B = \alpha X \pi_B'$. En observant les coefficients dominants de ces deux polynômes, on obtient $\lambda = d\alpha$ de sorte que $X\pi_B' - d\pi_B = 0$.

15 On a donc $\frac{\pi_B'}{\pi_B} = \frac{d}{X}$. Or on sait que la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ où $P = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$ est $\sum_{i=1}^r \frac{m_i}{X - \alpha_i}$. Quitte à se placer dans $\mathbb{C}$, on peut supposer que π_B est scindé et l'unicité de la décomposition en éléments simples donne $\pi_B = X^d$. Comme π_B est un polynôme annulateur de B, $B^d = 0$.