Devoir surveillé n°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2-(4-2i)z+11-10i=0$$
2. On se place dans le plan complexe et on note A et B les points dont les affixes sont les affixes sont les solutions de l'équation précédente.
Déterminer les points C tels que ABC est un triangle rectangle et isocèle en C.
3. Représenter dans le plan complexe les triangles ABC trouvés.

Exercice 2.

On pose $\varphi(z)=|z^3-z+2|$ pour $z\in\mathbb{C}$. On souhaite déterminer la valeur maximale de $\varphi(z)$ lorsque z décrit l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.

1. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
2. Soit f la fonction définie par
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=4x^3-x^2-4x+2$$
Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. On regroupera ces informations dans un tableau de variations.
3. Soit $z\in\mathbb{U}$ et θ un de ses arguments. Montrer que
$$|z^3-z+2|^2=4f(\cos\theta)$$
4. Répondre à la question initialement posée. On précisera pour quelle(s) valeur(s) de $z\in\mathbb{U}$ cette valeur maximale est atteinte.

Exercice 3.

Soit n un entier naturel non nul. On pose $\omega=e^{\frac{i\pi}{n}}$.

1. Justifier que $\omega\neq 1$.
2. On pose $\mathrm{A}_n=\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k$. Montrer que $\mathrm{A}_n=\dfrac{2}{1-\omega}$.
3. On pose $\mathrm{C}_n=\sum_{k=0}^{n-1}\cos\dfrac{k\pi}{n}$ et $\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n-1}\sin\dfrac{k\pi}{n}$. Montrer que $\mathrm{C}_n=1$ et $\mathrm{S}_n=\dfrac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$.
4. Calculer $\mathrm{B}_n=\sum_{k=0}^{n-1}|\omega^{2k}-1|$.

Problème 1 —

Partie I – Étude d'une application

On définit une application f de la manière suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + \dfrac{1}{z} \end{array} \right.$$

1. Déterminer les antécédents éventuels du nombre complexe i par f.

2. L'application f est-elle injective ?

3. Montrer que f est surjective.

Partie II – Une suite d'applications

On définit une suite d'applications (φ_n) de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ en posant

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \varphi_0(z) = 2 \text{ et } \varphi_1(z) = z$$

et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C},\ \varphi_{n+2}(z) = z\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)$$

1. Donner des expressions de $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ et $\varphi_4(z)$.

2. En déduire les solutions des équations $\varphi_2(z) = 0$, $\varphi_3(z) = 0$ et $\varphi_4(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ \varphi_n(f(z)) = f(z^n)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $f(z^n) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$.

5. En déduire les solutions de l'équation $\varphi_n(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On précisera également le nombre de ces solutions.