

DEVOIR SURVEILLÉ N°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

EXERCICE 1.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^2 - (4 - 2i)z + 11 - 10i = 0$$

2. On se place dans le plan complexe et on note A et B les points dont les affixes sont les solutions de l'équation précédente.
Déterminer les points C tels que ABC est un triangle rectangle et isocèle en C.
3. Représenter dans le plan complexe les triangles ABC trouvés.

EXERCICE 2.

On pose $\varphi(z) = |z^3 - z + 2|$ pour $z \in \mathbb{C}$. On souhaite déterminer la valeur maximale de $\varphi(z)$ lorsque z décrit l'ensemble \mathbb{U} des nombres complexes de module 1.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos \theta$.
2. Soit $z \in \mathbb{U}$ et θ un de ses arguments. Exprimer $|z^3 - z + 2|^2$ uniquement en fonction de $\cos \theta$.
3. Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 2$$

Déterminer les variations de f sur \mathbb{R} ainsi que ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. On regroupera ces informations dans un tableau de variations.

4. Répondre à la question initialement posée. On précisera pour quelle(s) valeur(s) de $z \in \mathbb{U}$ cette valeur maximale est atteinte.

EXERCICE 3.

Soit n un entier naturel non nul. On pose $\omega = e^{\frac{i\pi}{n}}$.

1. Justifier que $\omega \neq 1$.
2. On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$. Montrer que $A_n = \frac{2}{1 - \omega}$.
3. On pose $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$. Montrer que $C_n = 1$ et $S_n = \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$.
4. Calculer $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega^{2k} - 1|$.

Problème 1 —

Partie I – Étude d’une application

On définit une application f de la manière suivante :

$$f: \begin{cases} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + \frac{1}{z} \end{cases}$$

1. Déterminer les antécédents éventuels du nombre complexe i par f .
2. L’application f est-elle injective ?
3. Montrer que f est surjective.

Partie II – Une suite d’applications

On définit une suite d’applications (φ_n) de \mathbb{C} dans \mathbb{C} en posant

$$\forall z \in \mathbb{C}, \varphi_0(z) = 2 \text{ et } \varphi_1(z) = z$$

et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \varphi_{n+2}(z) = z\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)$$

1. Donner des expressions de $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ et $\varphi_4(z)$.
2. En déduire les solutions des équations $\varphi_2(z) = 0$, $\varphi_3(z) = 0$ et $\varphi_4(z) = 0$ d’inconnue $z \in \mathbb{C}$.
3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \varphi_n(f(z)) = f(z^n)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l’équation $f(z^n) = 0$ d’inconnue $z \in \mathbb{C}^*$.
5. En déduire les solutions de l’équation $\varphi_n(z) = 0$ d’inconnue $z \in \mathbb{C}$. On précisera également le nombre de ces solutions.