Convergences

Exercice 1 ★★

On pose $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $u_n = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+(x+n\pi)^4\sin^2 x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Encadrer les termes de la suite (u_n) à l'aide des termes de la suite (v_n) où

$$v_n = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+(n\pi)^4\sin^2 x}$$

3. Calculer explicitement v_n et en déduire un équivalent de u_n.

4. En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}$.

Exercice 2 ★★★★ Mines MP 2016

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré supérieur ou égal à 2.

1. Déterminer la nature de l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \cos(\mathrm{P}(x))\,\mathrm{d}x$.

2. Déterminer la nature de l'intégrale $\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} |\cos(\mathrm{P}(x))|\,\mathrm{d}x$.

3. Déterminer le signe de I lorsque $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2$.

Exercice 3 ★★

Les intégrales suivantes convergent-elles ?

1. $\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$

2. $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

3. $\int_0^{+\infty} x\sin(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$

4. $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$

5. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$

6. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

7. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 4 ★★ Intégrales de Bertrand

1. Pour quelles valeurs des réels α et β l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$ converge-t-elle ?

2. Même question pour l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}|\ln t|^{\beta}}$.

Exercice 5 ★★★ Centrale-Supélec MP 2021

On considère $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer l'existence de I.

2. Montrer $\mathrm{I} < 0$.

Exercice 6 ★★★

1. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$ converge.
2. Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\, dx$.

Exercice 7 ★★★

Pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$ converge-t-elle ?

Exercice 8 ★★★ **X-ESPCI PC 2013**

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $(f')^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Montrer qu'il en est de même pour g : $t \mapsto \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2$.

Exercice 9 ★★ **Non convergence absolue de l'intégrale de Dirichlet**

Montrer que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorie

Exercice 10 ★★★★

1. Soit f une application continue par morceaux de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite ℓ en $+\infty$ et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge. Montrer que $\ell = 0$.
2. Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge. Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.

Exercice 11 ★★★★

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Exercice 12 ★★★★

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' soit de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f' est également de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)$$

Exercice 13 ★★★ **Banque Mines-Ponts PSI 2021**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1. Prouver que $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge si et seulement si la suite $n \mapsto \int_0^n f(t)\, dt$ converge et que dans ces conditions :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(t)\, dt$$

2. Que se passe-t-il si on enlève l'hypothèse $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

Calculs

Exercice 14 ★★★

Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2-\frac{b^2}{t^2}}\, dt$ où $a, b > 0$. On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 15 ★★★

n désigne un entier naturel et α un réel strictement supérieur à -1. On pose

$$\mathrm{I}_n(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^n \, \mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}}$$

1. Justifier que cette intégrale est bien définie.
2. Calculer $\mathrm{I}_0(0)$. Posant $t = \sqrt{\dfrac{1+\alpha x}{1-x}}$, calculer $\mathrm{I}_0(\alpha)$. Montrer que la fonction $\alpha \mapsto \mathrm{I}_0(\alpha)$ est continue en 0.
3. En dérivant $x^n\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}$ trouver une relation de récurrence entre $\mathrm{I}_{n-1}(\alpha)$, $\mathrm{I}_n(\alpha)$ et $\mathrm{I}_{n+1}(\alpha)$. En déduire les valeurs de $\mathrm{I}_n(0)$ et $\mathrm{I}_n(1)$.

Exercice 16 ★★

Convergence et calcul de

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$$

Exercice 17 ★★★ **X MP 2010**

Déterminer

$$\sup_{x>0} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2+t^2} \, \mathrm{d}t$$

Exercice 18 ★★★

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\mathrm{I}(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)}$ converge-t-elle ?
2. On pose $\mathrm{J}(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)}$. Montrer que $\mathrm{I}(a) = \mathrm{J}(a) + \mathrm{J}(-a)$.
3. En déduire la valeur de $\mathrm{I}(a)$.

Exercice 19 ★★ **CCP MP**

1. Déterminer le domaine de définition $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2+t^2} \, \mathrm{d}t$.
2. Calculer $\mathrm{F}(1)$.
3. Calculer $\mathrm{F}(x)$ pour tout x dans le domaine de définition de f.

Exercice 20 ★★★ **Intégrale de Dirichlet**

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$ converge.
2. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)} \, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t} \, \mathrm{d}t$$
Justifier que u_n et v_n sont bien définies.
3. En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite (u_n) est constante et préciser sa valeur.
4. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$. Par une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b h(t)\sin(\lambda t) \, \mathrm{d}t = 0$.
5. Montrer que la fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{\cos t}{\sin t}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
6. Calculer la limite de la suite $(u_n - v_n)$ puis celle de (v_n).
7. En déduire la valeur de I.

Exercice 21 ★★★ **TPE-EIVP PSI 2017**

Soit $a>1$, Soit f une fonction continue sur $[1,+\infty[$ admettant une limite finie ℓ en $+\infty$.

1. Montrer que pour tout x dans $[1,+\infty[$:

$$\int_1^x \frac{f(at)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^a \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

2. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{f(at)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer en fonction de $\int_1^a \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et de ℓ.

Exercice 22 ★★

On pose $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que l'intégrale définissant I converge.
2. Montrer que $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que $2\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire la valeur de I.

Exercice 23 ★★★

Soient a et b deux réels strictement positifs. Convergence et calcul de

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 24 ★★

Existence et calcul de

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$$

Exercice 25 ★★ **Trigonométrie**

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. Justifier la convergence et calculer

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t$$

Comportements asymptotiques

Exercice 26 ★★★ **Centrale PSI**

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. On pose

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \varphi(x) = f(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

On suppose que φ admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f admet pour limite 0 en $+\infty$.

Exercice 27 ★★★★ **Mines-Ponts MP 2016**

1. Soient $a\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(a)>0$ et f de classe $\mathcal{C}_1$ sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $\lim_{+\infty} f'+af = 0$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.
2. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $\lim_{+\infty} f''+f'+f = 0$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.
3. Généraliser.

Exercice 28 ★★★ **Centrale MP 2018**

Soit $f\colon\ \mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}$ continue de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $g\colon\ x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer la limite de g en 0.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. Montrer que g est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 29 ★★★

Déterminer un équivalent simple de F : $x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 30 ★★★

1. Montrer que $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer un équivalent de $g : x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 31 ★★★

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x)+f'(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 32 ★★★ **Banque Mines-Ponts PSI 2021**

Soit $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

1. Montrer que f est définie sur $I =]0,+\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable sur I et déterminer f'.
3. Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est définie et la calculer.

Exercice 33 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2017**

On pose pour tout x non nul,

$$F(x) = \int_x^{7x} \frac{1-e^{-t}}{t^2}\,dt$$

Déterminer $\lim_{x\to0^+} F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Exercice 34 ★

Déterminer des équivalents de

1. $\int_1^x \frac{\arctan t}{t}\,dt$ lorsque x tend vers $+\infty$;
2. $\int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{t^2}\,dt$ lorsque x tend vers $+\infty$;
3. $\int_x^1 \frac{e^t}{t^3}\,dt$ lorsque x tend vers 0^+ ;
4. $\int_0^x \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$ lorsque x tend vers 0^+.

Suites d'intégrales

Exercice 35 ★★★ **CCP MP 2018**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et π-périodique vérifiant

$$\int_0^\pi f(t)\,dt = 0$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_0^\pi f(t)e^{-t/n}\,dt \qquad v_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t/n}\,dt$$

1. Justifier que u_n et v_n sont bien définis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Justifier qu'il existe une suite (a_n), que l'on précisera, telle que $v_n = a_n u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\pi}$.
4. Montrer que (u_n) converge vers 0. Montrer que (v_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 36 ★★

Soit $f_n : t \mapsto \cos(2nt)\ln(\sin t)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier que f_n est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. On pose alors $\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{J}_n = 2n\mathrm{I}_n$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{J}_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \sin(2nt)\,\mathrm{d}t$$

3. Calculer $\mathrm{J}_{n+1} - \mathrm{J}_n$ et en déduire la valeur de J_n puis celle de I_n.

Exercice 37 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^1 (t\ln(t))^n\,\mathrm{d}t$. Montrer que cette intégrale converge. Donner sa valeur.

Exercice 38 ★

On pose $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \ln^n(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que I_n converge.

2. Déterminer une relation de récurence suivie par la suite (I_n).

3. En déduire la valeur de I_n.

Fonctions définies par des intégrales

Exercice 39 ★★ **Fonction Γ**

On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de Γ.

2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

3. Déterminer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 40 ★★ **Fonction B d'Euler**

Onpose $\mathrm{B} : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}$.

1. Montrer que B est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

2. Montrer que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$$

3. Montrer que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \mathrm{B}(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x,y)$$

4. Calculer $\mathrm{B}(n+1, p+1)$ pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.