

DEVOIR SURVEILLÉ N°4 : CORRIGÉ

Problème 1 – Résolution d’une équation différentielle

Partie I – Résolution d’une première équation différentielle

1. Les solutions de l’équation caractéristique associée à (E_1) sont évidemment $2i$ et $-2i$. Les solutions de l’équation différentielle (E_1) sont les fonctions $t \mapsto \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
2. Les solutions de l’équation caractéristique associée à (E_2) sont évidemment 2 et -2 . Les solutions de l’équation différentielle (E_2) sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
3. On a montré que l’ensemble des solutions de (E_2) était

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

On veut montrer que c’est également

$$\mathcal{S}' = \{t \mapsto \lambda \operatorname{ch}(2t) + \mu \operatorname{sh}(2t), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Soit donc $f \in \mathcal{S}$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En posant $A = \frac{\lambda+\mu}{2}$ et $B = \frac{\lambda-\mu}{2}$, $f(t) = A \operatorname{ch}(2t) + \mu \operatorname{sh}(2t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc $f \in \mathcal{S}'$.

Réciproquement, soit $f \in \mathcal{S}'$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(t) = \lambda \operatorname{ch}(2t) + \mu \operatorname{sh}(2t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En posant $A = \frac{\lambda+\mu}{2}$ et $B = \frac{\lambda-\mu}{2}$, $f(t) = A e^{2t} + B e^{-2t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc $f \in \mathcal{S}$.

Par double inclusion, $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$.

Partie II – Résolution d’une seconde équation différentielle par changement de variable

4. \cos est deux fois dérivable sur $]0, \pi[$ à valeurs dans $] -1, 1[$ et f est deux fois dérivable sur $] -1, 1[$ donc $g = f \circ \arccos$ est deux fois dérivable sur $]0, \pi[$.
5. Puisque g est deux fois dérivable sur $]0, \pi[$, on montre successivement que pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= g(\arccos(x)) \\ f'(x) &= -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} g'(\arccos(x)) \\ f''(x) &= -x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} g'(\arccos(x)) + (1-x^2)^{-1} g''(\arccos(x)) \end{aligned}$$

f est solution de (F) sur $] -1, 1[$ si et seulement si

$$\forall x \in] -1, 1[, (1-x^2)f''(x) - xf'(x) + 4f(x) = 0$$

Or d’après ce qui précède, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\begin{aligned} xf'(x) &= -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} g'(\arccos(x)) \\ (1-x^2)f''(x) &= -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} g'(\arccos(x)) + g''(\arccos(x)) \end{aligned}$$

Ainsi f est-elle solution de (F) sur $] -1, 1[$ si et seulement si

$$\forall x \in] -1, 1[, g''(\arccos(x)) + 4g(\arccos(x)) = 0$$

Puisque $\arccos(] -1, 1[) =]0, \pi[$, cette dernière condition équivaut à

$$\forall t \in]0, \pi[, g''(t) + 4g(t) = 0$$

Pour résumer, f est solution de F sur $] -1, 1[$ si et seulement si g est solution de (E_1) sur $]0, \pi[$.

6. On a déterminé à la question I.1 les solutions de (E_1) sur \mathbb{R} et donc a fortiori sur $]0, \pi[$. On en déduit que les solutions de (F) sur $] -1, 1[$ sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \cos(2 \arccos(x)) + \mu \sin(2 \arccos(x))$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Or pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\cos(2 \arccos(x)) = 2 \cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$$

$$\sin(2 \arccos(x)) = 2 \cos(\arccos(x)) \sin(\arccos(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

Les solutions de (F) sur $] -1, 1[$ sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x\sqrt{1-x^2}$$

Partie III – La fonction argument cosinus hyperbolique

7. La fonction ch est strictement croissante et continue sur \mathbb{R}_+ . De plus, $\text{ch}(0) = 1$ et $\lim_{+\infty} \text{ch} = +\infty$ donc ch induit une bijection de \mathbb{R}_+ sur $[1, +\infty[$.
8. Soit $x \in [1, +\infty[$. Posons $\theta = \text{argch}(x)$. On sait que $\text{sh}^2(\theta) = \text{ch}^2(\theta) - 1 = x^2 - 1$. De plus, $\theta \in \mathbb{R}_+$ par définition de argch . Ainsi $\text{sh } \theta \geq 0$. Finalement, $\text{sh}(\text{argch}(x)) = \text{sh}(\theta) = \sqrt{x^2 - 1}$.
9. La fonction ch est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et sa dérivée sh ne s'annule pas sur cet intervalle. En tant que bijection réciproque de la bijection induite par ch de \mathbb{R}_+ sur $[1, +\infty[$, argch est dérivable sur $\text{ch}(\mathbb{R}_+^*) =]1, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\text{argch}'(x) = \frac{1}{\text{ch}'(\text{argch}(x))} = \frac{1}{\text{sh}(\text{argch}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

10. C'est du calcul bête et méchant. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$2 \text{ch}^2(\theta) - 1 = 2 \left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \right)^2 - 1 = \frac{e^{2\theta} + e^{-2\theta} + 2}{2} - 1 = \frac{e^{2\theta} + e^{-2\theta}}{2} = \text{ch}(2\theta)$$

$$2 \text{ch}(\theta) \text{sh}(\theta) = 2 \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \cdot \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} = \frac{(e^\theta)^2 - (e^{-\theta})^2}{2} = \frac{e^{2\theta} - e^{-2\theta}}{2} = \text{sh}(2\theta)$$

11. Par définition de la fonction argch , $\text{ch}(\text{argch } x) = x$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. Par ailleurs, on a vu que $\text{sh}(\text{argch}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. On en déduit que pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\text{ch}(2 \text{argch}(x)) = 2 \text{ch}^2(\text{argch}(x)) - 1 = 2x^2 - 1$$

$$\text{sh}(2 \text{argch}(x)) = 2 \text{ch}(\text{argch}(x)) \text{sh}(\text{argch}(x)) = 2x\sqrt{x^2 - 1}$$

Partie IV – Un problème de raccord

12. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$. Alors $g = f \circ \text{ch}$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et, pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a successivement

$$f(x) = g(\text{argch}(x))$$

$$f'(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} g'(\text{argch}(x))$$

$$f''(x) = -x(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} g'(\text{argch}(x)) + (x^2 - 1)^{-1} g''(\text{argch}(x))$$

Or f est solution de (F) sur $]1, +\infty[$ si et seulement si

$$\forall x \in]1, +\infty[, (1 - x^2)f''(x) - xf'(x) + 4f(x) = 0$$

Or d'après ce qui précède, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} xf'(x) &= x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} g'(\operatorname{argch}(x)) \\ (1 - x^2)f''(x) &= -(x^2 - 1)f''(x) = x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} g'(\operatorname{argch}(x)) - g''(\operatorname{argch}(x)) \end{aligned}$$

Ainsi f est-elle solution de (F) sur $]1, +\infty[$ si et seulement si

$$\forall x \in]1, +\infty[, -g''(\operatorname{argch}(x)) + 4g(\operatorname{argch}(x)) = 0$$

Puisque $\operatorname{argch}(]1, +\infty[) = \mathbb{R}_+^*$, cette dernière condition équivaut à

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, g''(t) - 4g(t) = 0$$

Pour résumer, f est solution de (F) sur $]1, +\infty[$ si et seulement si g est solution de (E_2) sur \mathbb{R}_+^* .

La question I.3 montre alors que les solutions de l'équation différentielle de (F) sur $]1, +\infty[$ sont les fonctions

$$x \in]1, +\infty[\mapsto \lambda \operatorname{ch}(2 \operatorname{argch}(x)) + \mu \operatorname{sh}(2 \operatorname{argch}(x))$$

ou encore

$$x \in]1, +\infty[\mapsto \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x \sqrt{x^2 - 1}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

13. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $] -\infty, -1[$. Alors $g : x \mapsto f(-x)$ est deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in]1, +\infty[$, $g'(x) = -f'(-x)$ et $g''(x) = f''(-x)$. f est solution de (F) sur $] -\infty, -1[$ si et seulement si

$$\forall x \in] -\infty, -1[, (1 - x^2)f''(x) - xf'(x) + 4f(x) = 0$$

Ceci équivaut à

$$\forall x \in]1, \infty[, (1 - (-x)^2)f''(-x) - (-x)f'(-x) + 4f(-x) = 0$$

ou encore à

$$\forall x \in]1, \infty[, (1 - x^2)f''(-x) + xf'(-x) + 4f(-x) = 0$$

et finalement à

$$\forall x \in]1, \infty[, (1 - x^2)g''(x) - xg'(x) + 4g(x) = 0$$

Finalement f est solution de (F) sur $] -\infty, -1[$ si et seulement si g est solution de (E_2) sur $]1, +\infty[$. On en déduit que les solutions de (F) sur $] -\infty, -1[$ sont les fonctions

$$x \in]1, +\infty[\mapsto \lambda(2(-x)^2 - 1) + 2\mu(-x)\sqrt{(-x)^2 - 1}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On peut également affirmer que ce sont les fonctions

$$x \in]1, +\infty[\mapsto \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x \sqrt{x^2 - 1}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ puisque $-\mu$ décrit \mathbb{R} lorsque μ décrit \mathbb{R} .

14. Soit f une solution de (F) sur \mathbb{R} . Remarquons qu'alors f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} . En particulier, f et f' sont continues sur \mathbb{R} .

D'après, les questions précédentes il existe $(\lambda_-, \mu_-, \lambda_0, \mu_0, \lambda_+, \mu_+) \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$\begin{aligned} \forall x \in] -\infty, -1[, f(x) &= \lambda_-(2x^2 - 1) + 2\mu_- x \sqrt{x^2 - 1} \\ \forall x \in] -1, 1[, f(x) &= \lambda_0(2x^2 - 1) + 2\mu_0 x \sqrt{1 - x^2} \\ \forall x \in]1, \infty[, f(x) &= \lambda_+(2x^2 - 1) + 2\mu_+ x \sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

Par continuité de f en -1 , $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ et donc $\lambda_- = \lambda_0$. De même, par continuité de f en 1 , $\lambda_0 = \lambda_+$. Finalement, $\lambda_- = \lambda_0 = \lambda_+$.

$$\begin{aligned} \forall x \in] -\infty, -1[, f'(x) &= 4\lambda_- x + 2\mu_- \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ \forall x \in] -1, 1[, f'(x) &= 4\lambda_0 x + 2\mu_0 x \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \\ \forall x \in]1, \infty[, f'(x) &= 4\lambda_+ x + 2\mu_+ \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

Par continuité de f' en -1 et 1 , on obtient $\mu_- = \mu_0 = \mu_+ = 0$ (sinon f' admettrait des limites infinies à gauche ou à droite en -1 ou 1).

On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda(2x^2 - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, toute fonction $x \mapsto \lambda(2x^2 - 1)$ est évidemment solution de (F) sur \mathbb{R} .

En conclusion, les solutions de (F) sur \mathbb{R} sont exactement les fonctions $x \mapsto \lambda(2x^2 - 1)$.

SOLUTION 1.

1. Une primitive de $x \mapsto \frac{3x}{1+x^2}$ est $x \mapsto \frac{3}{2} \ln(1+x^2)$. On en déduit que les solutions de (E_H) sont les fonctions $x \mapsto \lambda \exp\left(\frac{3}{2} \ln(1+x^2)\right) = (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Posons donc $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On obtient $(1+x^2)P'(x) - 3xP(x) = -bx^3 + (3a-2c)x^2 + (2b-3d)x + c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Une condition suffisante (et même nécessaire en fait,

mais qu'importe) pour que P soit solution de (E) est donc que (a, b, c, d) vérifie le système
$$\begin{cases} -b = 0 \\ 3a - 2c = 0 \\ 2b - 3d = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$
. On

trouve alors $a = \frac{2}{3}$, $b = 0$, $c = 1$ et $d = 0$. Ceci signifie que la fonction polynomiale $P : x \mapsto \frac{2}{3}x^3 + x$ est solution de (E).

On en déduit que les solutions f_λ de (E) sont telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_\lambda(x) = \frac{2}{3}x^3 + x + \lambda(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Remarquons que pour tout $x > 0$,

$$(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

En utilisant un développement limité classique

$$\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{3}{2x^2} + \frac{3}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

A fortiori

$$\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

On en déduit

$$(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x^3 + \frac{3}{2}x + o(1)$$

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente,

$$f_\lambda(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{2}{3} + \lambda\right)x^3 + \left(1 + \frac{3}{2}\lambda\right)x + o(1)$$

Si $\lambda \neq -\frac{2}{3}$, $f_\lambda(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{2}{3} + \lambda\right)x^3$ et f admet une limite infinie en $+\infty$.

Si $\lambda = -\frac{2}{3}$, $f_\lambda = g$ et $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ de sorte que g admet une limite finie (nulle) en $+\infty$.

g est donc l'unique solution de (E) admettant une limite finie en $+\infty$.

5. g est dérivable sur \mathbb{R} et on trouve $g'(x) = 2x^2 + 1 - 2x\sqrt{1+x^2} = (\sqrt{1+x^2} - x)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, par stricte croissance de la racine carrée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$. On en déduit que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi g est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Par opérations sur les limites, il est clair que $\lim_{-\infty} g = -\infty$. Par ailleurs, on a vu à la question précédente que $\lim_{+\infty} g = 0$.

SOLUTION 2.

1. On a facilement $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $J_0 = \frac{\pi^3}{24}$, $I_1 = 1$. Pour le calcul de J_1 , on intègre deux fois par parties :

$$\begin{aligned} J_1 &= [t^2 \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, dt \\ &= \frac{\pi^2}{4} + 2 [t \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction \cos^n est continue, positive et non constamment nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc son intégrale sur ce segment est strictement positive i.e. $I_n > 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On procède à nouveau à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= [\sin t \cos^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t \, dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^n t \, dt \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité demandée.

4. a. Il est évident que $t \geq 0$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Pour établir l'autre inégalité, il suffit d'utiliser la concavité de la fonction \sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. En effet, sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, le graphe de cette fonction est au-dessus de la corde reliant les points d'abscisse 0 et $\frac{\pi}{2}$. Ainsi pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$ et on en déduit bien la seconde inégalité demandée.

Pour les nouvelles générations qui ignoreront tout de la convexité, on introduit la fonction $f : t \mapsto \frac{\pi}{2} \sin t - t$. f est deux fois dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $f''(t) = -\frac{\pi}{2} \sin t$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi f'' est négative sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et ne s'annule qu'en 0 ce qui prouve la stricte décroissance de f' . On a $f'(0) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0$. f' étant également continue, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires montre que f' s'annule en un unique réel α sur $[\alpha, \frac{\pi}{2}]$. La décroissance de f' montre que f' est positive sur $[0, \alpha]$ et négative sur $[\alpha, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi f est croissante sur $[0, \alpha]$ et décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Puisque $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$, f est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leq J_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi^2}{4} \sin^2 t \cos^n t \, dt = \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^n t \, dt = \frac{\pi^2}{4} (I_n - I_{n+2})$$

- c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $I_n > 0$

$$0 \leq \frac{J_n}{I_n} \leq \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{I_{n+2}}{I_n} \right)$$

Or d'après la question 3, $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Par le théorème des gendarmes, $(\frac{J_n}{I_n})$ converge vers 0.

5. a. On procède encore une fois à des intégrations par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= [t \cos^{n+2} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{n+1} t \, dt \\ &= (n+2) \left[\frac{t^2}{2} \sin t \cos^{n+1} t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} (\cos^{n+2} t - (n+1) \sin^2 t \cos^n t) \, dt \\ &= -\frac{1}{2} (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 (\cos^{n+2} t - (n+1)(1 - \cos^2 t) \cos^n t) \, dt \\ &= -\frac{1}{2} (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 ((n+2) \cos^{n+2} t - (n+1) \cos^n t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} ((n+2)(n+1)J_n - (n+2)^2 J_{n+2}) \end{aligned}$$

- b. En utilisant la question 3

$$\frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{(n+1)J_n}{(n+2)I_{n+2}} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{\frac{n+1}{n+2}J_n - J_{n+2}}{I_{n+2}}$$

En utilisant maintenant la question précédente :

$$\frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{\frac{n+1}{n+2}J_n - J_{n+2}}{\frac{1}{2}((n+2)(n+1)J_n - (n+2)^2J_{n+2})} = \frac{2\left(\frac{n+1}{n+2}J_n - J_{n+2}\right)}{(n+1)((n+2)J_n - (n+2)J_{n+2})} = \frac{2}{(n+2)^2}$$

6. En sommant les égalités de la question précédente pour $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ (avec $N \geq 1$), on obtient par télescopage

$$\frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1} - \frac{J_{N+1}}{I_{N+1}} - \frac{J_{N+2}}{I_{N+2}} = 2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{(n+2)^2} = 2S_{N+2} - 2$$

En utilisant la question 4.c, on en déduit que (S_n) converge vers $\frac{1}{2} \left(\frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1} \right) + 1$. En utilisant les résultats de la question 1, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1} \right) + 1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{\pi^3}{24}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{1} \right) + 1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{4} - 2 \right) + 1 = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$