Devoir à la maison n°11

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

Partie I –

On note E l'ensemble des applications 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note e_k l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e_k(x) = e^{2ik\pi x}$$

On pose $\tilde{E} = \text{vect}((e_k)_{k\in\mathbb{Z}})$.

1. Vérifier que $e_k \in E$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.

3. **a.** Soit $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 e_k(x)e_{-l}(x)\,dx$.

b. Montrer que la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base de $\tilde{E}$.

Partie II –

Pour $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, on définit l'application $T(f) \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.

2. Montrer que E est stable par T.

3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $T(e_k)$. On discutera suivant la parité de k.

4. Montrer que $\tilde{E}$ est stable par T. On note alors $\tilde{T}$ l'endomorphisme induit par T sur $\tilde{E}$.

5. Déterminer des bases respectives de $\operatorname{Ker}\tilde{T}$ et $\operatorname{Im}\tilde{T}$.

Partie III –

1. Justifier qu'il existe un unique endomorphisme S de $\tilde{E}$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ S(e_k) = e_{2k}$$

2. On pose $Q = \tilde{T} \circ S$. Reconnaître l'endomorphisme Q.

3. On pose $P = S \circ \tilde{T}$. Montrer que P est un projecteur et préciser Im(P) et Ker(P).