Espaces vectoriels

Solution 1.

D'abord constatons que pour tous $u, v \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$u \boxplus v = uv > 0 \quad \text{et} \quad \lambda \boxdot u = u^\lambda = e^{\lambda \ln(u)} > 0,$$

donc les lois interne et externe sont bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Vérifions *ensuite* les huit règles de la définition.

▶ *Commutativité* : $u \boxplus v = uv = vu = v \boxplus u$.

▶ *Associativité* :

$$u \boxplus (v \boxplus w) = u(vw) = (uv)w = (u \boxplus v) \boxplus w.$$

▶ Le vecteur nul est le nombre $1 \in \mathbb{R}_+^*$.

▶ Le vecteur opposé de $u \in \mathbb{R}_+^*$ est u^{-1}.

▶ $1 \boxdot u = u^1 = u$.

▶ $\lambda \boxdot (\mu \boxdot u) = \lambda \boxdot u^\mu = (u^\mu)^\lambda = u^{\mu\lambda} = u^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \boxdot u$.

▶ $(\lambda + \mu) \boxdot u = u^{\lambda+\mu} = u^\lambda u^\mu = u^\lambda \boxplus u^\mu = \lambda \boxdot u \boxplus \mu \boxdot u$.

▶ $\lambda \boxdot (u \boxplus v) = (uv)^\lambda = u^\lambda v^\lambda = u^\lambda \boxplus v^\lambda = \lambda \boxdot u \boxplus \lambda \boxdot v$.

Solution 2.

L'axe réel étant non vide et stable par combinaisons linéaires à cœfficients réels, il s'agit d'un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$. Par contre, puisque $i \cdot 1 = i$ n'appartient pas à l'axe réel, ce dernier n'est pas stable par l'opération externe de $\mathbb{C}$, il n'est donc pas un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}$.

Solution 3.

1. Appliquons la caractérisation paramétrique des sev.

▶ Puisque pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda - 3\mu, 2\lambda + 3\mu, \lambda) = \lambda u_1 + \mu u_2$$

où $u_1 = (1, 2, 1)$ et $u_2 = (-3, 3, 0)$, $F = \text{vect}(u_1, u_2)$ et il s'agit donc d'un sous-espace de E.

▶ De même, $G = \{(x, x, z) \in E, \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$, ainsi $G = \text{vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, 1, 0)$ et $v_2 = (0, 0, 1)$, et G est un sous-espace vectoriel de E.

2. Un triplet (x, y, z) appartient à $F \cap G$ *si et seulement si* il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \lambda - 3\mu, \quad y = 2\lambda + 3\mu, \quad z = \lambda \quad \text{et} \quad x + 2y = 0,$$

c'est-à-dire *si et seulement si* il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$x = 6\lambda \quad y = -3\lambda, \quad z = \lambda.$$

En posant $w = (6, -3, 1)$, l'intersection $F \cap G$ est la droite $\text{vect}(w)$.

Solution 4.

▶ E_1 est non vide car contient la suite nulle ;d'après le cours d'analyse, toute combinaison linéaire de suites convergeant vers 0 converge vers 0 :E_1 est donc un sous-espace vectoriel de E.

► E_2 est non vide car contient la suite nulle ;d'après le cours d'analyse , toute combinaison linéaire de suites dominées par n^2 est dominée par n^2 :E_2 est donc un sous-espace vectoriel de E.

► E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de E car ne contient pas la suite nulle.

► E_4 n'est pas un espace vectoriel car n'est pas stable par l'addition. En effet, les suites

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geqslant 0} \quad \text{et} \quad \left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)_{n\geqslant 0}$$

appartiennent à E_4 mais pas leur différence.

Solution 5.

► Puisque toute combinaison linaire de fonctions s'annulant en 1 s'annule en 1, l'ensemble décrit au numéro **1.** (qui est est non vide car contient la fonction nulle) est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

► L'ensemble décrit au **2.** n'est pas un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car il ne contient pas le zéro de cet espace (qui est la fonction nulle).

► Puisque toute combinaison linaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$, l'ensemble décrit au numéro **3.** (qui est est non vide car contient la fonction nulle) est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

► L'ensemble décrit au numéro **4.** n'est pas un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car il n'est pas stable par combinaison linéaire. En effet, il contient les fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x^3$ mais pas leur somme qui n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

► Puisque toute combinaison linaire de fonctions impaires est impaire, l'ensemble décrit au numéro **5.** (qui est est non vide car contient la fonction nulle) est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

► Puisque toute combinaison linaire de fonctions 2π-périodiques est 2π-périodique, l'ensemble décrit au numéro **6.** (qui est est non vide car contient la fonction nulle) est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Solution 6.

► Puisque $X\cap Y \subset X$, $\operatorname{vect}(X\cap Y)\subset \operatorname{vect}(X)$. De même, $\operatorname{vect}(X\cap Y)\subset \operatorname{vect}(Y)$ et donc

$$\operatorname{vect}(X\cap Y)\subset \operatorname{vect}(X)\cap\operatorname{vect}(Y).$$

► Dans le cas particulier où $E=\mathbb{R}^2$, posons respectivement $X=\{(0,1)\}$ et $Y=\{(0,2)\}$, on a $X\cap Y=\varnothing$ donc

$$\operatorname{vect}(X\cap Y)=\{(0,0)\}\neq\{0\}\times\mathbb{R}=\operatorname{vect}(X)\cap\operatorname{vect}(Y).$$

Solution 7.

1. E_1 : non si $a\neq 0$ car alors $0\notin E_1$; oui, si $a=0$ car alors E_1 est l'intersection des sous-espaces vectoriels $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x+y=0\}$ et $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x=0\}$.
2. E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. E_3 : non, car la fonction nulle n'appartient pas à E_3.
4. E_4 : non, en fait E_5 n'est même pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2,+)$ car $(2,0)\in E_5$ mais $-(2,0)=(-2,0)\notin E_5$.

Solution 8.

1. E_1 est un sev de $\mathbb{R}^3$ car
$$E_1=\operatorname{vect}((1,-1,0),(0,0,1)).$$

2. E_2 n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$ car n'est stable par l'addition :
$$(0,1,0)+(1,0,0)=(1,1,0)\notin E_2.$$

3. E_3 est un sev de $\mathbb{R}^4$ car
$$E_3=\mathrm{vect}((0,1,1,0),(0,0,0,1)).$$

4. E_4 n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$ car ne contient pas le zéro.

5. E_5 n'est pas un sev car n'est pas stable pas l'addition :
$$(3,-3)+(0,-1)=(3,-4)\notin E_5.$$

6. Comme
$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad x^2+xy+y^2=(x+y/2)+3y^2/4\geqslant 0,$$
$E_6=\mathbb{R}^2$ est un sev de $\mathbb{R}^2$.

7. E_7 est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ car contient 0 et est clairemenent stable par combinaison linéaire.

8. E_8 n'est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ car ne contient pas le zéro.

9. E_9 n'est pas un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ car n'est pas stable par passage à l'opposé.

Solution 9.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels stricts de E.

- Si $F\subset G$, alors $F\cup G=G\neq E$. De même, si $G\subset F$, alors $F\cup G=F\neq E$.
- Supposons alors $F\not\subset G$ et $G\not\subset F$. Il existe donc $f\in F\setminus G$ et $g\in G\setminus F$. Posons $x=f+g$. Si x appartenait à F, on aurait $g=x-f\in F$ et si x appartenait à G, on aurait $f=x-g\in G$: on aboutit à une contradiction dans les deux cas et $x\notin F\cup G$.

Solution 10.

1. On sait que
$$(x,y,z)\in F\cap G\iff\begin{cases}x+y+z=0\\x-y+2z=0\\x+y-z=0\end{cases}$$
Par pivot de Gauss
$$\begin{cases}x+y+z=0\\x-y+2z=0\\x+y-z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x+y+z=0\\-2y+z=0\\-2z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases}$$
Ainsi $F\cap G=\{(0,0,0)\}$ et F et G sont en somme directe.
On a
$$F=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+y+z=0\}=\{(x,y,-x-y),(x,y)\in\mathbb{R}^2\}=\mathrm{vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$$
et
$$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x-y+2z=x+y-z=0\}=\left\{\left(-\frac{1}{2}z,\frac{3}{2}z,z\right),z\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{vect}((-1,3,2))$$
Posons $U=(1,0,-1)$, $V=(0,1,-1)$, $W=(-1,3,2)$. On a donc $F+G=\mathrm{vect}(U,V,W)$. Soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
$$\begin{aligned}X\in F+G&\iff\exists(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3,X=\lambda U+\mu V+\nu W\\&\iff\exists(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3,\begin{cases}\lambda-\nu=x\\\mu+3\nu=y\\-\lambda-\mu+2\nu=z\end{cases}\end{aligned}$$
Ce système admet pour unique solution $\left(\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z,-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y-\frac{3}{4}z,\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z\right)$. Ceci prouve que $E=F+G$.

> **Remarque.** L'unicité de la solution montre même l'unicité de la décomposition d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G : il était en fait inutile de vérifier que F et G étaient en somme directe.

2. Le projeté de $X=(x,y,z)$ sur F parallélement à G est

$$\lambda U+\mu V=\left(\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z,-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y-\frac{3}{4}z,-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right)$$

et le projeté de $X=(x,y,z)$ sur G parallélement à F est

$$\nu W=\left(-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}y-\frac{1}{4}z,\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}y+\frac{3}{4}z,\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right)$$

Solution 11.

Première version

On fait l'hypothèse de récurrence suivante

$\mathrm{HR}(n)$: $F_1,\dots,F_n$ sont en somme directe *si et seulement si*

$$\forall k\in[\![2,n]\!],\ \left(\sum_{j=1}^{k-1}F_j\right)\cap F_k=\{0_E\}$$

$\mathrm{HR}(1)$ est évidemment vraie puisque $[\![2,1]\!]=\varnothing$.
Supposons $\mathrm{HR}(n-1)$ vraie pour un certain $n\in[\![2,p]\!]$.

- Supposons que $F_1,\dots,F_n$ soient en somme directe. Alors, $F_1,\dots,F_{n-1}$ sont en somme directe. D'après $\mathrm{HR}(n-1)$

$$\forall k\in[\![2,n-1]\!],\ \left(\sum_{j=1}^{k-1}F_j\right)\cap F_k=\{0_E\}$$

Il suffit donc de prouver que $\left(\sum_{j=1}^{n-1}F_j\right)\cap F_n=\{0_E\}$. Soit donc $x\in\left(\sum_{j=1}^{n-1}F_j\right)\cap F_n$. Alors $x\in F_n$ et il existe $(x_1,\dots,x_{n-1})\in\prod_{j=1}^{n-1}F_j$ tel que $x=x_1+\dots+x_{n-1}$. Mais alors $x_1+\dots+x_{n-1}-x=0_E$ et $x_1+\dots+x_{n-1}-x\in\sum_{j=1}^{n}F_j$. Puisque $F_1,\dots,F_n=0_E$, alors $x_1=\dots=x_{p-1}=0_E$ et surtout $x=0_E$. On a donc bien $\left(\sum_{j=1}^{n-1}F_j\right)\cap F_n=\{0_E\}$.

- Supposons que

$$\forall k\in[\![2,n]\!],\ \left(\sum_{j=1}^{k-1}F_j\right)\cap F_k=\{0_E\}$$

et montrons que $F_1,\dots,F_n$ sont en somme directe. On a a fortiori

$$\forall k\in[\![2,n-1]\!],\ \left(\sum_{j=1}^{k-1}F_j\right)\cap F_k=\{0_E\}$$

donc $F_1,\dots,F_{n-1}$ sont en somme directe d'après $\mathrm{HR}(n-1)$. Soit $(x_1,\dots,x_n)\in\prod_{j=1}^{n}F_j$ tel que $x_1+\dots+x_n=0_E$. Alors $x_1+\dots+x_{n-1}=-x_n\in\left(\sum_{j=1}^{n-1}F_j\right)\cap F_n=\{0_E\}$. Ainsi $x_n=0_E$ et $x_1+\dots+x_{n-1}=0_E$. Mais comme $F_1,\dots,F_{n-1}$ sont en somme directe, $x_1=\dots=x_{n-1}=0_E$. Finalement $x_1=\dots=x_n=0_E$ et $F_1,\dots,F_n$ sont en somme directe.

On a donc prouvé que $\mathrm{HR}(n)$ est vraie.
Par récurrence finie, $\mathrm{HR}(p)$ est vraie et on a le résultat demandé.

Seconde version

Supposons que $F_1,\dots,F_p$ sont en somme directe. Soit $k\in[\![2,p]\!]$.
Soit $x\in\left(\sum_{j=1}^{k-1}F_j\right)\cap F_k$. Alors $x\in F_k$ et il existe $(x_1,\dots,x_{k-1})\in\prod_{j=1}^{k-1}F_j$ tel que $x=x_1+\dots+x_{k-1}$. Ainsi x_1+

$\cdots + x_{k-1} - x = 0_E$ et $x_1 + \cdots + x_{k-1} - x \in \sum_{j=1}^{k} F_j$. Mais comme $F_1, \ldots, F_p$ sont en somme directe, $F_1, \ldots, F_k$ le sont également. Ainsi $x_1 = \cdots = x_{k-1} = 0_E$ et surtout $x = 0_E$. Ceci prouve que $\left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k = \{0_E\}$.
Supposons que

$$\forall k \in [\![2, p]\!], \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k = \{0_E\}$$

Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in \prod_{k=1}^{p} F_k$ tel que $\sum_{k=1}^{p} x_k = 0_E$. On fait l'hypothèse de récurrence suivante

$$\mathrm{HR}(k) : \forall j \in [\![k+1, p]\!], x_j = 0_E$$

$\mathrm{HR}(p)$ est vraie puisque $[\![p+1, p]\!] = \varnothing$.
Supposons $\mathrm{HR}(k)$ vraie pour un certain $k \in [\![1, p]\!]$. Alors $\sum_{j=1}^{k} x_k = 0_E$. Ainsi $\sum_{j=1}^{k-1} x_j = -x_k \in \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k$ donc $x_k = 0_E$ et $\mathrm{HR}(k-1)$ est vraie.
Par récurrence descendante finie, $\mathrm{HR}(0)$ est vraie i.e. $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0_E$, ce qui prouve que $F_1, \ldots, F_p$ sont en somme directe.

Solution 12.

On pose $G_1 = F_1$ et pour tout $k \in [\![2, p$, on choisit un supplémentaire G_k de $(F_1 + \cdots + F_{k-1}) \cap F_k$ dans F_k (son existence est garantie puisque E est de dimension finie).
Par construction, $G_k \subset F_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.
On va maintenant montrer que $G_1 + \cdots + G_p = E$ par récurrence. On formule donc l'hypothèse de récurrence suivante

$$\mathrm{HR}(k) : G_1 + \cdots + G_k = F_1 + \cdots + F_k$$

$\mathrm{HR}(1)$ est clairement vraie. Supposons $\mathrm{HR}(k-1)$ vraie pour un certain $k \in [\![2, p]\!]$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} F_j &= \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) + F_k \\
&= \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k + G_k && \text{par définition de } G_k \\
&= \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) + G_k && \text{car } \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k \subset \sum_{j=1}^{k-1} F_j \\
&= \left(\sum_{j=1}^{k-1} G_j\right) + G_k && \text{d'après } \mathrm{HR}(k-1) \\
&= \sum_{j=1}^{k} G_j
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{HR}(k)$ est vraie.
Par récurrence finie, $\mathrm{HR}(p)$ est vraie.
Montrons maintenant que la somme $G_1 + \cdots + G_p$ est directe. Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in G_1 \times \cdots \times G_p$ tel que $x_1 + \cdots + x_p = 0_E$.
On formule l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\mathrm{HR}(k) : \forall j \in [\![k+1, p]\!],\ x_j = 0_E$$

$\mathrm{HR}(p)$ est vraie puisque $[\![p+1, p]\!] = \varnothing$.
Supposons maintenant $\mathrm{HR}(k)$ vraie pour un certain $k \in [\![2, p]\!]$. Alors $\sum_{j=1}^{k} x_k = 0_E$. Ainsi $\sum_{j=1}^{k-1} x_j = -x_k \in \left(\sum_{j=1}^{k-1} G_j\right) \cap G_k$. Or d'après ce qui précède, $\sum_{j=1}^{k-1} G_j = \sum_{j=1}^{k-1} F_j$ donc $x_k \in \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap G_k$. Mais puisque $G_k \subset F_k$, on a également $x_k \in \left(\left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k\right) \cap G_k$. Or G_k est un supplémentaire de $\left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k$ dans F_k donc $\left(\left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k\right) \cap G_k = \{0_E\}$.
Ainsi $x_k = 0_E$ et $\mathrm{HR}(k-1)$ est vraie.
Par récurrence descendante finie, $\mathrm{HR}(1)$ est vraie i.e. $x_1 = \cdots = x_p = 0_E$ donc la somme $G_1 + \cdots + G_p$ est directe.

Solution 13.

1. Tout d'abord E, F, G sont inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Ensuite, la suite nulle appartient à chacun des ensembles E, F, G car elle est convergente, de limite nulle et constante.
Enfin, une combinaison linéaire de suite convergentes (resp. de limite nulle, resp. constante) est convergente (resp. de limite nulle, resp. constante).
Ainsi, E, F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Une suite constante de limite nulle est nulle donc $F \cap G = \{(0)\}$.
Une suite de limite nulle ou constante est convergente donc F et G sont inclus dans E. Par conséquent $F + G \subset E$.
Soit $(u_n) \in E$: (u_n) est donc une suite convergente. Notons l sa limite. Posons $v_n = u_n - l$ et $w_n = l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a clairement $(v_n) \in F$ et $(w_n) \in G$ donc $E \subset F + G$.
Par double inclusion, $E = F + G$ puis $E = F \oplus G$ puisque $F \cap G = \{(0)\}$.

Solution 14.

1. On peut prouver facilement que E, F, G, H sont stables par combinaison linéaire mais on peut également déterminer des parties génératrices de E, F, G, H.
$E = \text{vect}((1)_{n\in\mathbb{N}})$ donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
$F = \text{vect}(((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}})$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
$G = \text{vect}\left(\left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Une suite constante est clairement 4-périodique donc $E \subset H$.
Soit $(u_n) \in F$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} = u_n$ donc (u_n) est 2-périodique et a fortiori 4 périodique. Ainsi $F \subset H$.
Soit $(u_n) \in G$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+4} = -u_{n+2} = u_n$ donc (u_n) est 4-périodique. Ainsi $G \subset H$.
3. Soit $((u_n), (v_n), (w_n)) \in E \times F \times G$ tel que $(u_n) + (v_n) + (w_n) = (0)$. On a ainsi
   - $u_n + v_n + w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
   - $u_{n+1} + v_{n+1} + w_{n+1} = 0$ i.e. $u_n - v_n + w_{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
   - $u_{n+2} + v_{n+2} + w_{n+2} = 0$ i.e. $u_n + v_n - w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - $u_{n+3} + v_{n+3} + w_{n+3} = 0$ i.e. $u_n - v_n - w_{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   En additionnant d'une part la première et la troisième égalité et d'autre part la seconde et la quatrième égalité, on obtient $u_n + v_n = 0$ et $u_n - v_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $u_n = w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis que $w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. E, F, G sont bien en somme directe. On aurait pu utiliser les suites engendrant E, F, G pour arriver au même résultat.
   Puisque E, F, G sont inclus dans H, alors $E + F + G \subset H$. Soit maintenant $(z_n) \in H$.
   Analyse : On suppose qu'il existe $((u_n), (v_n), (w_n)) \in E \times F \times G$ tel que $z_n = u_n + v_n + w_n$. En particulier,

$$\begin{cases} u_0 + v_0 + w_0 = z_0 \\ u_0 - v_0 + w_1 = z_1 \\ u_0 + v_0 - w_0 = z_2 \\ u_0 - v_0 - w_1 = z_3 \end{cases}$$

   On trouve aisément

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{z_0 + z_1 + z_2 + z_3}{4} \\ v_0 = \dfrac{z_0 - z_1 + z_2 - z_3}{4} \\ w_0 = \dfrac{z_0 - z_2}{2} \\ w_1 = \dfrac{z_1 - z_3}{2} \end{cases}$$

   Synthèse : Soit
   - (u_n) la suite constante égale à $\frac{z_0+z_1+z_2+z_3}{4}$
   - (v_n) la suite de premier terme $v_0 = \frac{z_0-z_1+z_2-z_3}{4}$ et vérifiant $v_{n+1} + v_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

- (w_n) la suite de premiers termes $w_0 = \frac{z_0 - z_2}{2}$ et $w_1 = \frac{z_1 - z_3}{2}$ vérifiant $w_{n+2} + w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On vérifie alors que

$$\begin{cases} u_0 + v_0 + w_0 = z_0 \\ u_1 + v_1 + w_1 = z_1 \\ u_2 + v_2 + w_2 = z_2 \\ u_3 + v_3 + w_3 = z_3 \end{cases}$$

Puisque (u_n), (v_n), (w_n) et (z_n) sont 4-périodiques, on peut affirmer que $u_n + v_n + w_n = z_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ i.e. $(z_n) = (u_n) + (v_n) + (w_n)$. Ainsi $H \subset E + F + G$.
Par double inclusion, $E + F + G = H$ et E, F, G étant en somme directe, $E \oplus F \oplus G = H$.

Solution 15.

1. On a $G = \text{vect}(\bar{1})$ où $\bar{1}$ désigne la fonction constante égale à 1 donc G est un sous-espace vectoriel de E.
Clairement, la fonction nulle appartient à F. Soient $(f, g) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$(\lambda f + \mu g)(0) + (\lambda f + \mu g)(1) = \lambda(f(0) + f(1)) + \mu(g(0) + g(1)) = 0$$

donc $\lambda f + \mu g \in F$. Ainsi F est un sous-espaces vectoriel de E.

2. Soit $f \in F \cap G$. Puisque $f \in G$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(0) + f(1) = 2c$. Or $f \in F$ donc $f(0) + f(1) = 0$ d'où $c = 0$. Ainsi f est nulle et $F \cap G = \{0\}$.
Soit maintenant $h \in E$. Notons g la fonction constante égale à $\frac{h(0)+h(1)}{2}$ et $f = g - h$. On a bien $h = f + g$, $g \in G$ et

$$f(0) + f(1) = \frac{h(0) + h(1)}{2} - h(0) + \frac{h(0) + h(1)}{2} - h(1) = 0$$

donc $f \in F$. Il s'ensuit que $E = F + G$.
Comme F et G sont en somme directe, $E = F \oplus G$.

Solution 16.

1. On a $F \cap G \subset F = F + \{0\} \subset F + G$ car, en tant que sev de E, G contient 0.
2. On a $F = F + \{0\} \subset F + G$ et $G = \{0\} + G \subset F + G$ car tout sev de E contient 0. On a donc aussi $F \cup G \subset F + G$.
3. On a $F = F + \{0\} \subset F + G$ car, en tant que sev de E, G contient 0.
4. On a $F = F + \{0\} \subset F + F$ car, en tant que sev de E, F contient 0. Réciproquement, F étant stable par combinaison linéaire, $F + F \subset F$. On a donc $F = F + F$.
5. Comme $F \cap G \subset F$, on a $F \cup (F \cap G) = F$ donc, d'après le **3.**, $F \cup (F \cap G) \subset F + G$.
6. Comme l'addition d'un ev est toujours commutative, on a clairement $F + G = G + F$.

Solution 17.

1. Raisonnons en deux temps.

   - Supposons que $F + G = F$. Comme $0 \in F$ (car F est un sev de E), on a $G = \{0\} + G \subset F + G = F$.

   - Réciproquement, supposons que $G \subset F$. On a alors $F + G \subset F + F = F$.

2. Cette application est fausse ! Par exemple, si $E = \mathbb{R}^2$ et que F, G et H sont des droites vectorielles distinctes de E, on a $F + G = F + H = E$ mais H et G ne pas comparables par la relation d'inclusion :on n'a ni $G \subset H$, ni $H \subset G$.

Solution 18.

Il suffit de prouver que $G \subset F$. Soit $g \in G$. Puisque $0 \in H$, il existe $f \in H$ et $h \in H$ tel que $g = f + h$. On a donc $h = g - f \in G$ et $h \in H$, ainsi $h \in G \cap H = F \cap G$ d'où $h \in F$ puis $g = f + h \in F$. On a donc prouvé que $G \subset F$.

Solution 19.

1. P et I sont deux ensembles non vides de E (ils contiennent tous deux la fonction nulle) et clairement stables par combinaison linéaire : ce sont deux sous-espaces vectoriels de E.

   ▶ Puisque que la seule fonction paire et impaire est la fonction nulle, $P \cap I = \{0\}$.

   ▶ Soit $f \in E$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons

   $$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

   On a clairement $f = f_p + f_i$, $f_p \in P$ et $f_i \in I$ donc $E \subset P \oplus I$ et puisque l'inclusion réciproque est banale, $E = I \oplus P$.

   Remarque. Les formules de f_p et f_i s'obtiennent naturellement par Analyse-synthèse.

2. Il est clair que le cosinus est de partie impaire nulle et le sinus de partie paire nulle. D'après les formules précédentes, les parties paires et impaires de l'exponentielle valent respectivement ,

   $$x \mapsto \text{ch}(x) \quad \text{et} \quad x \mapsto \text{sh}(x).$$

   Il est immédiat que les parties paires et impaires de la fonction $x \mapsto x^4 + x$ valent respectivement

   $$x \mapsto x^4 \quad \text{et} \quad x \mapsto x.$$

Solution 20.

1. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ sont deux ensembles non vides de E (ils contiennent tous deux la fonction nulle) et clairement stables par combinaison linéaire : ce sont deux sous-espaces vectoriels de E.

   ▶ Puisque que la seule fonction constante sur $[0, 1]$ s'annulant en 1 est la fonction nulle, $\mathcal{C} \cap \mathcal{A} = \{0\}$.

   ▶ Soit $f \in E$. Pour tout $x \in [0, 1]$, posons

   $$c(x) = f(1) \quad \text{et} \quad a(x) = f(x) - f(1).$$

   On a clairement $f = a + c$, $a \in \mathcal{A}$ et $c \in \mathcal{C}$ donc $E \subset \mathcal{C} \oplus \mathcal{A}$ et puisque l'inclusion réciproque est banale, $E = \mathcal{C} \oplus \mathcal{A}$.

   Remarque. Les formules de c et a s'obtiennent naturellement par Analyse-synthèse.

2. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{N}$ sont deux ensembles non vides de E (ils contiennent tous deux la fonction nulle) et clairement stables par combinaison linéaire : ce sont deux sous-espaces vectoriels de E.

   ▶ Puisque que la seule fonction constante sur $[0, 1]$ d'intégrale nulle sur ce segment est la fonction nulle, $\mathcal{C} \cap \mathcal{N} = \{0\}$.

   ▶ Soit $f \in E$. Pour tout $x \in [0, 1]$, posons

   $$c(x) = \int_0^1 f(t)dt \quad \text{et} \quad n(x) = f(x) - \int_0^1 f(t)dt.$$

   On a clairement $f = n + c$, $n \in \mathcal{N}$ et $c \in \mathcal{C}$ donc $E \subset \mathcal{C} \oplus \mathcal{N}$ et puisque l'inclusion réciproque est triviale, $E = \mathcal{C} \oplus \mathcal{N}$.

   Remarque. Les formules de c et a s'obtiennent naturellement par Analyse-synthèse.

3. Il suffit de reprendre les calculs précédents ;la projection de $f \in E$ sur $\mathcal{C}$ parallèlement à $\mathcal{A}$ est

$$x \mapsto f(1).$$

la projection de $f \in E$ sur $\mathcal{C}$ parallèlement à $\mathcal{N}$ est

$$x \mapsto \int_0^1 f(t)dt.$$

4. Rappelons encore une fois qu'en toute généralité un sous-espace F strict d'un espace vectoriel E (ie $F \neq E$) admet une infinité de supplémentaires. Par exemple, dans cet exercice, on a prouvé que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{A}$ sont des supplémentaires de $\mathcal{C}$ dans E. On trouver une infinité de supplémentaires de $\mathcal{C}$ dans E : les sous-espaces $\mathcal{N}_u$ et $\mathcal{A}_u$ définis par tout $u \in]0, u]$ par

$$\mathcal{N}_u = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^u f(t)dt = 0 \right\}$$

et

$$\mathcal{A}_u = \{ f \in E \mid f(u) = 0 \}.$$

Solution 21.

1. On a $X \in F$ *si et seulement si* $\exists x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$X = (x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1).$$

Ainsi $F = \text{vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ et F est un sous-espace vectoriel de E. De même, un vecteur X appartient à G *si et seulement si* $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$X = (a - b, a + b, a - 3b) = a(1, 1, 1) + b(-1, 1, -3).$$

Ainsi $G = \text{vect}((1, 1, 1), (-1, 1, -3))$ et G est un sous-espace vectoriel de E.

2. Un vecteur X appartient à $F \cap G$ *si et seulement si* il est de la forme $X = (a - b, a + b, a - 3b)$ où a et b sont deux nombres réels vérifiant

$$(a - b) + (a + b) - (a - 3b) = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a = -3b.$$

On a donc

$$\begin{aligned} F \cap G &= \{(-4b, -2b, -6b) \mid b \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{vect}((-4, -2, -6)) = \text{vect}((2, 1, 3)) \end{aligned}$$

3. Puisque $F \cap G \neq \{0\}$, la somme $F + G$ n'est pas directe.

Solution 22.

1. Puisque les intersections et les sommes de sev de E sont des sev de E, F et G sont des sev de E. Il reste à vérifier que $F \subset H$ et $G \subset H$.

► Comme $A \cap B \subset A$ et $A \cap C \subset A$, on a

$$F \subset A + A = A.$$

De plus, $A \cap B \subset B$ et $A \cap C \subset C$ et donc

$$F \subset B + C$$

et ainsi $F \subset A \cap (B + C) = H$.

► Comme $A \cap C \subset C$, on a

$$B + (A \cap C) \subset B + C$$

et donc

$$G = A \cap (B + (A \cap C)) \subset A \cap (B + C) = H.$$

2. Procédons par double inclusion.

▶ Comme $A \cap B \subset A$ et $A \cap C \subset A$, on a

$$F \subset A + A = A$$

mias aussi

$$F \subset B + (A \cap C).$$

Ainsi $F \subset A \cap (B + (A \cap C)) = G$.

▶ Soit $u \in A \cap (B + (A \cap C))$: il existe $a \in A$, $b \in B$ et $a' \in A \cap C$ tels que

$$u = a = b + a'.$$

On a donc $b = a - a' \in A$ en tant que somme de deux vecteurs du sev A de E. Comme $b \in B$, on a

$$u = b + a' \in (A \cap B) + (B \cap C).$$

3. Non ! Par exemple, lorsque $E = \mathbb{R}^2$ et F, G, H sont des droites vectorielles deux à deux distinctes de E, on a :

$$F = G = \{0\} \text{ mais } H = A \neq \{0\}.$$

Solution 23.

Raisonnons par double inclusion.

▶ Comme

$$F \subset F + (G \cap F') \text{ et } F \subset F + (G \cap G'),$$

on a

$$F \subset (F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')).$$

▶ *Réciproquement*, soit

$$u \in (F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')).$$

Il existe alors f_1, f_2 dans F, $f' \in G \cap F'$ et $g \in G \cap G'$ tels que

$$u = f_1 + f' = f_2 + g.$$

On a donc

$$f' - g = f_2 - f_1 \in F$$

mais aussi $f' - g \in G$ en tant que somme de deux vecteurs du sev G de E. On a donc

$$f' - g \in F \cap G = F' \cap G' \subset G'$$

d'où $f' \in G'$ en tant que somme de deux vecteurs du sev G' de E. On a donc

$$f' \in F' \cap G' = F \cap G \subset F$$

et ainsi :

$$u = f_1 + f' \in F$$

en tant que somme de deux vecteurs du sev F de E. On a donc prouvé que

$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) \subset F.$$

Solution 24.

1. $\mathcal{N}$ et $\mathcal{A}$ sont deux ensembles non vides de E (ils contiennent tous deux la fonction nulle) et clairement stables par combinaison linéaire : ce sont deux sous-espaces vectoriels de E.

2. En avant !

► Soit $f \in \mathcal{A} \cap \mathcal{N}$; f appartient à $\mathcal{A}$ il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b.$$

Puisque $f \in \mathcal{N}$, $a = f'(0) = 0$ et $b = f(0) = 0$. Donc $f = 0$.

► Soit $f \in E$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons

$$a(x) = f'(0)x + f(0)$$

et

$$n(x) = f(x) - a(x).$$

On a clairement $f = a + n$, $a \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathcal{N}$: en effet $n'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$ et $n(0) = f(0) - f(0) = 0$. Ainsi $E \subset \mathcal{N} \oplus \mathcal{A}$ et , puisque l'inclusion réciproque est triviale , $E = \mathcal{N} \oplus \mathcal{A}$.

Remarque. Les formules de a et n s'obtiennent naturellement par Analyse-synthèse.

3. D'après les calculs précédents , la projection d'une fonction f sur $\mathcal{A}$ parallèlement à $\mathcal{N}$ vaut

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f'(0)x + f(0).$$

Solution 25.

On peut répondre aux deux questions à la fois. Un vecteur (x, y, z) est combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F}$ *si et seulement si* le système suivant admet une solution.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & x \\ -2\alpha & - & 3\beta & + & 3\gamma & = & y \\ \alpha & + & \beta & - & 2\gamma & = & z \end{array}\right.$$

Méthode du pivot de Gauss…

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & x \\ -2 & -3 & 3 & y \\ 1 & 1 & -2 & z \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y+2x \\ 0 & -1 & -1 & z-x \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y+2x \\ 0 & 0 & 0 & x+y+z \end{pmatrix}$$

Le système admet donc une solution *si et seulement si* $x + y + z = 0$. Ainsi $(2, 5, -7)$ est combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F}$ tandis que $(2, 1, 3)$ ne l'est pas.

Solution 26.

Raisonnons par double inclusion.

► Soit $0 \leqslant k \leqslant n$. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_k(x) = \cos^k(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^k \\ &= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{\ell} e^{(2k-\ell)ix} \\ &= \text{Re}\left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} e^{(2\ell-k)ix}\right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{l} g_{2\ell-k}(x) \end{aligned}$$

Les fonctions g_ℓ étant paires , on a

$$f_k \in \text{vect}(g_0, \dots, g_n)$$

d'où

$$\text{vect}(f_0, \dots, f_n) \subset \text{vect}(g_0, \dots, g_n).$$

► *Réciproquement*, soit $0 \leqslant k \leqslant n$. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g_k(x) = \cos(kx) &= \text{Re}\left(e^{ikx}\right) \\ &= \text{Re}\left[\big(\cos(x) + i\sin(x)\big)^k\right] \\ &\text{Re}\left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \sin^\ell(x) i^\ell \cos^{\ell-k}(x)\right) \end{aligned}$$

d'où ,

$$\begin{aligned} g_k(x) = \sum_{0\leqslant 2\ell \leqslant k} \binom{k}{2\ell} (-1)^\ell \dots \\ \dots \big(1-\cos^2(x)\big)^\ell \cos^{k-2\ell}(x). \end{aligned}$$

On remarque alors qu'en posant $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{0\leqslant 2\ell \leqslant k} \binom{k}{2\ell} (-1)^\ell \big(1-x^2\big)^\ell x^{k-2\ell}$$

P est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à n telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(kx) = P\big(\cos(x)\big).$$

On a montré que

$$g_k \in \text{vect}(f_0, \dots, f_n)$$

d'où

$$\text{vect}(g_0, \dots, g_n) \subset \text{vect}(f_0, \dots, f_n).$$

> **Remarque.** Les lecteurs cultivés auront reconnu les polynômes de Tchebichev et leur problématique inverse, à savoir la linéarisation.

Solution 27.

Puisque (u, v) est libre , $w = (1, 1, 2) \in \text{vect}(u, v)$ *si et seulement si* (u, v, w) est liée. Appliquons la méthode du pivot de Gauss. Notons S le système (u, v, w).

$$S \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$S \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2a-1 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$$

S est donc de rang inférieur ou égal à 2 *si et seulement si* $a = 1/2$. Ainsi $w \in \text{vect}(u, v)$ *si et seulement si* $a = 1/2$.