INTERROGATION ÉCRITE N°11

NOM : Prénom : Note :

1. Soit $H = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(1) = 0\}$. Justifier que H est un hyperplan et donner un supplémentaire de H dans $\mathbb{K}[X]$.

   L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}\right.$ est clairement une forme linéaire non nulle dont H est le noyau. On en déduit que H est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$. Toute droite non incluse dans H est un supplémentaire de H dans $\mathbb{K}[X]$. Puisque $1 \notin P$, on peut affirmer que $\mathbb{K}_0[X] = \operatorname{vect}(1)$ est un supplémentaire de H dans $\mathbb{K}[X]$.

2. Factoriser $X^4 + 1$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ puis de $\mathbb{R}[X]$.

   $e^{\frac{i\pi}{4}}$ est clairement racine de $X^4 + 1$. Comme $X^4 + 1$ est pair, $-e^{\frac{i\pi}{4}}$ est également racine de $X^4 + 1$. Enfin, comme $X^4 + 1$ est à coefficients réels, $e^{-\frac{i\pi}{4}}$ et $-e^{-\frac{i\pi}{4}}$ sont également racines de $X^4 + 1$.
   Puisque $\deg(X^4 + 1) = 4$, ces quatre complexes sont exactement les racines de $X^4 + 1$ et celles-ci sont toutes simples. On en déduit que la décomposition en facteurs irréductibles de $X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ est

   $$X^4 + 1 = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X + e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X + e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)$$

   En regroupant les racines conjuguées, on obtient la décomposition en facteurs irréductibles de $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

   $$X^4 + 1 = \left(X^2 - 2X\cos\frac{\pi}{4} + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\frac{\pi}{4} + 1\right) = (X^2 - X\sqrt{2} + 1)(X^2 + X\sqrt{2} + 1)$$

3. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P_n = X^{2n} + X^n + 1$ par $X^2 - 1$.

   Notons R_n le reste recherché. Puisque $\deg(R_n) < 2$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R_n = a_n X + b_n$. Par ailleurs, $X^2 - 1$ divise $P_n - R_n$ donc 1 et -1 sont racines de $P_n - R_n$. Par conséquent,

   $$R_n(1) = P_n(1) \qquad R_n(-1) = P_n(-1)$$

   ou encore

   $$a_n + b_n = 3 \qquad -a_n + b_n = 2 + (-1)^n$$

   On en déduit

   $$a_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} \qquad b_n = \frac{5 + (-1)^n}{2}$$

   et ainsi

   $$R_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} X + \frac{5 + (-1)^n}{2}$$

4. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = P(X+1)$. Montrer que P est constant.

   Considérons le polynôme $Q = P - P(0)$. Alors $Q(n+1) = P(n+1) - P(0) = P(n) - P(0) = Q(n)$. On en déduit que $Q(n) = Q(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme Q admet une infinité de racines : il est donc nul. Ainsi $P = P(0)$ donc P est constant.

5. Montrer que l'application $s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(-X) \end{array} \right.$ est une symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel F et parallélement à un sous-espace vectoriel G que l'on précisera.

   s est clairement un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. De plus, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$s^2(P) = s(s(P)) = s(P(-X)) = P(-(-X)) = P$$

   Ainsi $s^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}$ et s est bien une symétrie. On sait alors que

$$\begin{aligned} F &= \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}) = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(-X) = P(X)\} \\ G &= \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}) = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(-X) = -P(X)\} \end{aligned}$$

   Ainsi F est le sous-espace vectoriel des polynômes pairs de $\mathbb{K}[X]$ et G est le sous-espace vectoriel des polynômes impairs de $\mathbb{K}[X]$.

6. Déterminer l'ensemble F des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = XP(X)$ puis montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ dont on déterminera une base.

   Remarquons que $0 \in F$. Soit alors $P \in F$ non nul. Puisque $P(X^2) = XP(X)$, $2\deg P = \deg P + 1$ et donc $\deg P = 1$. Par ailleurs, en évaluant l'égalité précédente en 0, on obtient $P(0) = 0$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda X$. Ainsi $F \subset \operatorname{vect}(X)$.
   Réciproquement, on vérifie aisément que $\operatorname{vect}(X) \subset F$. Ainsi $F = \operatorname{vect}(X)$. F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ de base (X).