Corrigé TD : Primitives et intégrales

Solution 1.

1. $t \mapsto -\frac{1}{6}e^{-3t^2}$
2. $t \mapsto -\frac{1}{3(\ln t)^3}$
3. $t \mapsto \ln|\operatorname{sh} t|$
4. $t \mapsto \frac{1}{3}\ln(1+t^3)$
5. $t \mapsto \ln(1+\sin^2 t)$
6. $t \mapsto \tan t - t$
7. $t \mapsto 2\sqrt{\tan t}$
8. $t \mapsto \ln(\ln t)\ln t - \ln t$
9. $t \mapsto e^{e^t}$
10. $t \mapsto \arctan(\ln t)$
11. $t \mapsto \operatorname{th} t$

Solution 2.

1. Si $m=n=0$, $\mathrm{I}_{m,n}=2\pi$.
   Si $m=n\neq 0$,
   $$\mathrm{I}_{m,n}=\int_0^{2\pi}\cos^2(mt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos(2mt))\,\mathrm{d}t=\pi$$
   Enfin si $m\neq n$, on obtient en linéarisant
   $$\mathrm{I}_{m,n}=\int_0^{2\pi}\cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(m+n)t\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(m-n)t\,\mathrm{d}t=0$$
2. Si $m=n=0$, $\mathrm{J}_{m,n}=0$.
   Si $m=n\neq 0$,
   $$\mathrm{J}_{m,n}=\int_0^{2\pi}\sin^2(mt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos(2mt))\,\mathrm{d}t=\pi$$
   Enfin si $m\neq n$, on obtient en linéarisant
   $$\mathrm{J}_{m,n}=\int_0^{2\pi}\sin(mt)\sin(nt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(m-n)t\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(m+n)t\,\mathrm{d}t=0$$
3. Si $m=n=0$, $\mathrm{K}_{m,n}=0$.
   Si $m=n\neq 0$,
   $$\mathrm{K}_{m,n}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(2mt)\,\mathrm{d}t=0$$
   Enfin si $m\neq n$, on obtient en linéarisant
   $$\mathrm{K}_{m,n}=\int_0^{2\pi}\cos(mt)\sin(nt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(m+n)t\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(m-n)t\,\mathrm{d}t=0$$

Solution 3.

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} x \sin x \, \mathrm{d}x = \left[-x \cos x \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, \mathrm{d}x = \left[\sin x \right]_0^{\pi/2} = 1 .$$

$$\mathrm{J} = \int_0^1 e^{x/2} \, \mathrm{d}x = 2\left[e^{x/2} \right]_0^1 = 2(\sqrt{e} - 1),$$

$$\mathrm{K} = \frac{2}{\ln 2} \int_0^2 \frac{(\ln 2) 2^x \, \mathrm{d}x}{2\sqrt{2+2^x}} = \frac{2}{\ln 2} \left[\sqrt{2+2^x} \right]_0^2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\ln \sqrt{2}} .$$

Solution 4.

On reconnait la dérivée de l'arcussinus.

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}} \, \mathrm{d}x \\
&= \left[\arcsin\left(\frac{x}{2} \right) \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Première méthode pour B :

$$\begin{aligned}
\mathrm{B} &= \int_0^\pi \sin x (\sin x)^2 = \int_0^\pi \sin x \left(1 - (\cos x)^2 \right) \\
&= \int_0^\pi \left(\sin x - \sin x (\cos x)^2 \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[-\cos x + \frac{1}{3} (\cos x)^3 \right]_0^\pi = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Deuxième méthode pour B : avec l'exponentielle complexe.

$$\begin{aligned}
\mathrm{B} &= \int_0^\pi (\sin x)^3 \, \mathrm{d}x = \int_0^\pi \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4} \int_0^\pi (-\sin(3x) + 3 \sin x) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} \cos(3x) - 3 \cos x \right]_0^\pi = \frac{1}{4} \left(-\frac{2}{3} + 6 \right) = \frac{4}{3} .
\end{aligned}$$

Première méthode pour C : changement de variables $x = \sin t$, donc $\mathrm{d}x = \cos t \, \mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{C} &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\sin t)^2} \cos t \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t \, \mathrm{d}t = \left[\sin t \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2 \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - (\cos t)^2 \right) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \mathrm{C} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{C} = \frac{\pi}{4} .
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que le cosinus est positif sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc $\cos t = \sqrt{1-(\sin t)^2}$ dans la première ligne ci-dessus.

Deuxième méthode pour C : intégration par parties.

$$\begin{aligned}
\mathrm{C} &= \int_0^1 1\cdot\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\mathrm{C} + \left[x\arcsin x\right]_0^1 = -\mathrm{C}+\frac{\pi}{2} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{C}=\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Troisième méthode pour C : on remarque que la fonction $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ décrit un arc de cercle. En effet, on l'obtient en isolant y dans l'équation $x^2+y^2=1$. Ainsi l'intégrale C représente un quart de l'aire du disque unité, d'où $\mathrm{C}=\frac{\pi}{4}$.

Solution 5.

D'abord on *linéarise* :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right)^3\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2} \\
&= \frac{(e^{i6x}-e^{-i6x}-3e^{i2x}+3e^{-i2x})(e^{i3x}+e^{-i3x})}{-16i} \\
&= \frac{e^{i9x}-e^{-i9x}-3(e^{i5x}-e^{-i5x})+e^{i3x}-e^{-i3x}+3(e^{ix}-e^{-ix})}{-16i} \\
&= -\frac{1}{8}\sin(9x)+\frac{3}{8}\sin(5x)-\frac{3}{8}\sin(x)-\frac{1}{8}\sin(3x).
\end{aligned}$$

Donc une primitive de f est la fonction donnée par

$$\mathrm{F}(x)=\frac{1}{72}\cos(9x)-\frac{3}{40}\cos(5x)+\frac{3}{8}\cos(x)+\frac{1}{24}\cos(3x).$$

Solution 6.

L'intégrale est nulle, puisqu'on intègre une fonction impaire sur un intervalle centré en 0.

Pour ceux qui ne l'ont pas vu, voici les calculs qu'ils auraient pu faire.

$$\sin(2x)^3=\left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right)^3=\frac{e^{i6x}-e^{-i6x}-3(e^{i2x}-3e^{-i2x})}{-4\times 2i}=-\frac{1}{4}\sin(6x)+\frac{3}{4}\sin(2x).$$

Donc

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin(2x)^3\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{24}\cos(6x)-\frac{3}{8}\cos(2x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=0.$$

Solution 7.

► Si $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (x-t)dt + \int_x^1 (t-x)dt \\ &= x^2/2 + (1-x)^2/2 = x^2 - x + 1/2 \end{aligned}$$

► Si $x \leqslant 0$,

$$f(x) = \int_0^1 (t-x)dt = -x + 1/2$$

► Si $x \geqslant 1$,

$$f(x) = \int_0^1 (x-t)dt = x - 1/2$$

Solution 8.

1. Effectuons le changement de variable $u = \tan(t)$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1+u^2}}{1+u^2} du = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}} \\ &= \operatorname{argsh}(1) = \ln(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

2. Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{x}$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{J} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} du = \int_0^1 \frac{2u\,\mathrm{d}u}{u+1} \\ &= 2\left(\int_0^1 du - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u+1}\right) \\ &= 2(1-\ln(2)) \end{aligned}$$

3. Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{e^x - 1}$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{K} &= \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1} = \int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^2} du \\ &= 2\left(\int_0^1 du - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\right) = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

4. Effectuons le changement de variable $x = \sqrt{u^2+u+1} - u$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+u+1}} = 2\int_{\sqrt{3}-1}^1 \frac{dt}{2t-1} \\ &= -\ln(2\sqrt{3}-3) \end{aligned}$$

5. Effectuons le changement de variable $u = \sin(x)$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos(x)} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \ln(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

6. Effectuons le changement de variable $u = \cos(x)$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{N} &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin(x)} = \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) - \frac{1}{2}\ln(3) \\ &= \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(\sqrt{3}) \end{aligned}$$

7. Effectuons le changement de variable $u = \cos(x)$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{O} &= \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^3(x)dx = \int_0^1 u^2(1-u^2)du \\ &= 1/3 - 1/5 = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

8. Effectuons le changement de variable $u = \cos(2x)$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{O} &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}dx = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{3+u} \\ &= \ln(4/3) \end{aligned}$$

9. Effectuons le changement de variable $x = \cos(2u)$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{O} &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = 4\int_0^{\pi/4} \sin^2(u)du \\ &= 2\int_0^{\pi/4} (1-\cos(2u))du = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

10. Effectuons le changement de variable $u = x^{1/4}$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{O} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x}+x^{1/4}}{\sqrt{x}+1}dx = 4\int_0^1 \frac{u^5+u^4}{u^2+1}du \\ &= 4\int_0^1 (u^3+u^2-u-1)du + 2\int_0^1 \frac{2u\,\mathrm{d}u}{u^2+1} + 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} \\ &= 4(1/4+1/3-1/2-1) + 2\ln(2) + \pi \\ &= -\frac{11}{3} + 2\ln(2) + \pi \end{aligned}$$

Solution 9.

1. On pose $z=\alpha+i$. Ainsi
$$\mathrm{H}(x)=\mathrm{Re}\left(e^{ix}\overline{z}\right)+2=|z|\cos(x-\varphi)+2=\sqrt{\alpha^2+1}\cos(x-\varphi)+2$$
où φ est un argument de z. H ne peut s'annuler que si $-\frac{2}{\sqrt{\alpha^2+1}}$ appartient à $[-1,1]$. Or
$$-1\leqslant-\frac{2}{\sqrt{\alpha^2+1}}\leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad 0\leqslant\frac{4}{\alpha^2+1}\leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha^2\geqslant 3 \quad\Leftrightarrow\quad |\alpha|\geqslant\sqrt{3}$$
Une condition nécessaire et suffisante pour que H ne s'annule pas est $|\alpha|<\sqrt{3}$.

2. La fonction $\frac{1}{\mathrm{H}}$ est continue comme comme inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas. Ainsi l'intégrale définissant $\mathrm{F}(x)$ est bien définie. De plus, F est une primitive de $\frac{1}{\mathrm{H}}$ donc F est continue (et même de classe $\mathscr{C}^1$).
Soit $x\in]-\pi,\pi[$. On a $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{\alpha\cos t+\sin t+2}$. On peut effectuer le changement de variables $u=\tan\frac{t}{2}$ puisque $t\mapsto\tan\frac{t}{2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ (ou $[x,0]$). On utilise alors le paramétrage rationnel du cercle trigonométrique pour exprimer $\cos t$ et $\sin t$ en fonction de u
$$\mathrm{F}(x)=\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{2\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)\left(\alpha\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{2u}{1+u^2}+2\right)}=\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{2\,\mathrm{d}u}{(2-\alpha)u^2+2u+2+\alpha}$$
On ne peut avoir $\alpha=2$ puisque $|\alpha|<\sqrt{3}$.
$$\mathrm{F}(x)=\frac{2}{2-\alpha}\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+\frac{2}{2-\alpha}u+\frac{2+\alpha}{2-\alpha}}=\frac{2}{2-\alpha}\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\left(u+\frac{1}{2-\alpha}\right)^2+\frac{3-\alpha^2}{(2-\alpha)^2}}$$
Or $|\alpha|<\sqrt{3}$ donc $3-\alpha^2>0$. Posons $\beta=\frac{\sqrt{3-\alpha^2}}{2-\alpha}$.
$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x)&=\frac{2}{2-\alpha}\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\left(u+\frac{1}{2-\alpha}\right)^2+\beta^2}=\frac{2}{2-\alpha}\frac{1}{\beta}\left(\arctan\left(\frac{1}{\beta}\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2-\alpha}\right)\right)-\arctan\left(\frac{1}{\beta}\frac{1}{2-\alpha}\right)\right)\\&=\frac{2}{\sqrt{3-\alpha^2}}\left(\arctan\left(\frac{2-\alpha}{\sqrt{3-\alpha^2}}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3-\alpha^2}}\right)-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3-\alpha^2}}\right)\right)\end{aligned}$$

3. Par 2π-périodicité de H, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\mathrm{H}(t)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{\mathrm{H}(t)}$. Ainsi $\mathrm{F}(2\pi)=\mathrm{F}(\pi)-\mathrm{F}(-\pi)$. Comme F est continue, $\mathrm{F}(\pi)=\lim\limits_{x\to\pi^-}\mathrm{F}(x)$ et $\mathrm{F}(-\pi)=\lim\limits_{x\to-\pi^+}\mathrm{F}(x)$. En utilisant l'expression précédente valable pour $x\in]-\pi,\pi[$, on trouve :
$$\mathrm{F}(2\pi)=\mathrm{F}(\pi)-\mathrm{F}(-\pi)=\frac{2\pi}{\sqrt{3-\alpha^2}}$$

Solution 10.

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

2. On a $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Or pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\alpha+\beta\cos^2 t}\geqslant\dfrac{1}{\alpha}$. Ainsi pour $x\in\mathbb{R}_+$:
$$\mathrm{F}(x)\geqslant\int_0^x\frac{dt}{\alpha}=\frac{x}{\alpha}$$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\alpha}=+\infty$, on a également $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{F}(x)=+\infty$.

3. Soit $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Comme tan est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ (ou $[x,0]$), on peut effectuer le changement de variable $u=\tan t$ dans l'intégrale définissant f. Remarquons de plus que $\cos^2 t=\frac{1}{1+\tan^2 t}$. Ainsi :
$$\mathrm{F}(x)=\int_0^{\tan x}\frac{dt}{(1+t^2)\left(\alpha+\frac{\beta}{1+t^2}\right)}=\int_0^{\tan x}\frac{dt}{\alpha t^2+\alpha+\beta}=\frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\tan x\right)$$

4. $49-45\sin^2 x = 4+45\cos^2 x$. Il suffit donc de poser $\alpha=4$ et $\beta=45$ pour se ramener au cas précédent. Comme f est π-périodique et paire,

$$\mathrm{I} = 2\int_0^{\pi} f(t)dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = 4\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et notamment en $\frac{\pi}{2}$. En utilisant l'expression déterminée à la question précédente, on trouve :

$$\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\tan x\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}$$

Finalement, $\mathrm{I} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{4(4+45)}} = \dfrac{\pi}{7}$.

Solution 11.

Pour simplifier, on supposera $a^2 \leqslant b^2$. On effectue le changement de variable $x = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}\sin\theta$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}\sin\theta\right)\sqrt{\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\frac{b^2-a^2}{2}\cos\theta\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}\sin\theta\right)\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\, d\theta \qquad \text{car } \frac{b^2-a^2}{2} \geqslant 0 \\
&= \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}\sin\theta\right)\cos^2\theta\, d\theta \qquad \text{car } \cos\theta \geqslant 0 \text{ pour } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
&= \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2 \left[\frac{a^2+b^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta + \frac{b^2-a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^2\theta\, d\theta\right] \\
&= \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2 \frac{a^2+b^2}{2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{16}(b^2-a^2)^2(a^2+b^2)\pi
\end{aligned}$$

Si $a^2 \geqslant b^2$, on trouve pour I l'opposé de cette valeur.

Solution 12.

1. Notons $\mathrm{F}(x) = \int x\arctan^2(x)\,\mathrm{d}x$ et intégrons par parties,

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x) &= \frac{x^2}{2}\arctan^2(x) - \int \frac{x^2}{x^2+1}\arctan(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan(x) + \int \frac{\arctan(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int \arctan(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan^2(x) + \frac{1}{2}\arctan^2(x) - \int \arctan(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x &= x\arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)
\end{aligned}$$

D'où
$$\int x\arctan^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2+1}{2}\arctan^2(x) - x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

2. Puisque $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$,
$$\int e^x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^x}{2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{e^x\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x$$
Puisque $e^x\cos(2x) = \mathrm{Re}(e^{(1+2i)x})$, on calcule
$$\int e^{(1+2i)x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^x e^{2ix}}{1+2i} = \frac{1-2i}{5}e^x e^{2ix}$$
dont la partie réelle vaut
$$\int e^x\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{5}(\cos(2x)+2\sin(2x))$$
On a donc
$$\int e^x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{2} - \frac{e^x}{10}(\cos(2x)+2\sin(2x))$$

3. En posant $u=\ln x$,
$$\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = \int e^u\cos u\,\mathrm{d}u$$
Via un passage en complexes ou une intégration par parties
$$\int e^u\cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}e^u(\cos u+\sin u)$$
On en déduit
$$\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))$$

4. En posant $u=\sqrt{1+x}$,
$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}} = 2\int (u^2-1)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}u^3 - 2u = \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3 - 2\sqrt{1+x} = \frac{2}{3}\sqrt{1+x}(x-2)$$

5. En posant $u=e^x$, on a
$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}x} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \arctan u = \arctan(e^x)$$

Solution 13.

1. Il faut montrer que $t\mapsto \sin t+\cos t$ ne s'annule pas sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Pour $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t>0$ et $\cos t\geqslant 0$ donc $\sin t+\cos t>0$. De plus, $\sin 0+\cos 0 = 1>0$.
Ainsi $t\mapsto \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}$ et $t\mapsto\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}$ sont continues sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et S et C sont bien définies.

2. Il suffit d'effectuer le changement de variable $u=\frac{\pi}{2}-t$.

3. On a clairement $\mathrm{S}+\mathrm{C}=\frac{\pi}{2}$. On en déduit $\mathrm{S}=\mathrm{C}=\frac{\pi}{4}$.

4. On effectue le changement de variable $t=\sin u$. On en déduit

$$\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{\sin u+|\cos u|}\,\mathrm{d}u$$

Mais pour $u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos u\geqslant 0$ donc

$$\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{\sin u+\cos u}\,\mathrm{d}u=\mathrm{C}=\frac{\pi}{4}$$

Solution 14.

1. Notons I l'intégrale à calculer. Le changement de variable $u=\cos t$ donne

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}u}{4-u^2}\\&=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2+u}+\frac{1}{2-u}\right)\mathrm{d}u\\&=[\ln(2+u)]_{-1}^{1}-[\ln(2-u)]_{-1}^{1}=2\ln 3\end{aligned}$$

2. Notons J l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$\mathrm{J}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{1-\cos^2 t}$$

Le changement de variable $u=\cos t$ donne

$$\begin{aligned}\mathrm{J}&=-\int_0^{\cos x}\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\cos x}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\left([\ln(1-u)]_0^{\cos x}-[\ln(u+1)]_0^{\cos x}\right)\\&=\frac{1}{2}(\ln(1-\cos x)-\ln(1+\cos x))\\&=\frac{1}{2}\ln\left(\tan^2\frac{x}{2}\right)=\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

car pour $x\in]0,\pi[$, $\tan\frac{x}{2}>0$.

3. Notons K l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$\mathrm{K}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{(1-\sin^2 t)^2}$$

Le changement de variable $u=\sin t$ fournit donc

$$\mathrm{K}=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)^2}$$

Une décomposition en éléments simples donne ensuite

$$\begin{aligned}\mathrm{K}&=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{(u-1)^2}-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{(u+1)^2}+\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{4}\left(\left[\frac{1}{u-1}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-[\ln(1-u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\left[\frac{1}{u+1}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+[\ln(1+u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\\&=\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}\end{aligned}$$

4. Notons L l'intégrale à calculer. Le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$ allié à la paramétrisation rationnelle du cercle donne

$$\mathrm{L} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2+2u}$$

Une décomposition en éléments simples donne alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{K} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{u+\sqrt{2}-1} - \frac{1}{u-1-\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left[\ln(u+\sqrt{2}-1)\right]_0^1 - \left[\ln(1+\sqrt{2}-u\right]_0^1\right) \\
&= \sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Solution 15.

1. Par une intégration par parties

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n(x) &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^{n+1}}\right]_0^x + (n+1)\int_0^x \frac{2t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+2}} \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} + (n+1)(2\mathrm{I}_n(x) - 2\mathrm{I}_{n+1}(x))
\end{aligned}$$

Ainsi

$$2(n+1)\mathrm{I}_{n+1}(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} + (2n+1)\mathrm{I}_n(x)$$

2. Le résultat de la question précédente alliée à une récurrence simple garantit l'existence de $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{I}_n(x)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Si on pose $l_n = \lim_{x\to+\infty}\mathrm{I}_n(x)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on obtient $l_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}l_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ainsi

$$\frac{l_n}{l_0} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{2k+2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

Puisque $l_0 = \frac{\pi}{2}$, $l_n = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Solution 16.

1. Pour $x\in[0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{(1-x)^n}{n!}e^x \leqslant \dfrac{(1-x)^n}{n!}e$. On en déduit que :

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant e\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}dx = -e\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^1 = \frac{e}{(n+1)!}$$

D'après le théorème de gendarmes, la suite (I_n) converge vers 0.

2. On effectue une intégration par parties :

$$\mathrm{I}_{n+1} = \left[\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}_n - \frac{1}{(n+1)!}$$

3. On utilise du télescopage. Pour $n \geqslant 1$

$$\mathrm{I}_0 - \mathrm{I}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{I}_k - \mathrm{I}_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

Or $\mathrm{I}_0 = \int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x = e - 1$ donc

$$e - \mathrm{I}_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Il suffit alors de passer à la limite.

Solution 17.

1. Pour $t \geqslant 0$, $\frac{1}{1+t} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$. On en déduit que (I_n) converge vers 0.

2. $\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^n + t^{n+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$.

3. En utilisant la question précédente, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}(\mathrm{I}_k + \mathrm{I}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\mathrm{I}_k - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \mathrm{I}_{k-1}$. On reconnaît là une somme télescopique donc $\mathrm{S}_n = (-1)^{n+1}\mathrm{I}_n - (-1)^1 \mathrm{I}_0 = \mathrm{I}_0 + (-1)^{n+1}\mathrm{I}_n$. Le calcul de I_0 donne $\mathrm{I}_0 = \ln 2$.

4. Comme (I_n) converge vers 0, Q_n converge vers $\ln 2$.

Solution 18.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Effectuons une intégration par parties (toutes les fonctions en jeu sont de classe $\mathscr{C}^1$),

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{n,p} &= \int_0^1 t^n (1-t)^p \, dt = \left[-t^n \frac{(1-t)^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{n t^{n-1}(1-t)^{p+1}}{p+1} \\
&= \frac{n}{p+1} \mathrm{I}_{n-1,p+1}
\end{aligned}$$

2. On montre par récurrence sur n que

$$\mathrm{I}_{n,p} = \frac{n!}{(p+1)\cdots(p+n)} \mathrm{I}_{0,p+n} = \frac{n!p!}{(p+n)!} \mathrm{I}_{0,p+n}$$

Or $\mathrm{I}_{0,n+p} = \int_0^1 t^{n+p} \, dt = \frac{1}{m+n+1}$. Ainsi,

$$\mathrm{I}_{n,p} = \frac{n!p!}{(n+p+1)!}$$

Solution 19.

1. Soit $n \geqslant 1$. Intégrons par parties...

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}t^n\right]_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{\frac{3}{2}}\,dt \\
&= \frac{2n}{3}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)\sqrt{1-t}\,dt = \frac{2n}{3}[\mathrm{I}_{n-1}-\mathrm{I}_n]
\end{aligned}$$

D'où,

$$\mathrm{I}_n = \frac{2n}{2n+3}\mathrm{I}_{n-1}.$$

Remarque. Les intégrations par parties sont légitimes car les fonctions en jeu sont toutes de classe $\mathscr{C}^1$. ■

2. On a

$$\mathrm{I}_0 = \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Par une récurrence immédiate , on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \frac{(2n)\cdots(2)}{(2n+3)\cdots(5)}\mathrm{I}_0 = \frac{(2n)\cdots(2)}{(2n+3)\cdots(5)}\frac{2}{3} \\
&= \frac{2^{n+1}n!}{\frac{(2n+4)!}{2^{n+2}(n+2)!}} = 2^{2n+3}\frac{n!(n+2)!}{(2n+4)!}
\end{aligned}$$

3. Effectuons le changement de variable bijectif de $[0,1]$ sur $[0,1]$ et de classe $\mathscr{C}^1$ défini par $t = 1-u^2$. On a $dt = -2u\,du$ d'où

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= 2\int_0^1 u^2(1-u^2)^n\,du \\
&= 2\int_0^1 u^2\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k u^{2k}\right)du \\
&= 2\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k u^{2k+2}\right)du \\
&= 2\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k \int_0^1 u^{2k+2}\,du \\
&= 2\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k \frac{1}{2k+3}
\end{aligned}$$

Or,

$$\mathrm{I}_n \ = \ 2^{2n+3}\frac{n!(n+2)!}{(2n+4)!}$$

donc

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k\frac{1}{2k+3} = 2^{2n+2}\frac{n!(n+2)!}{(2n+4)!}.$$

Solution 20.

1. $t \mapsto 2/3\,\sqrt{3}\arctan\left(1/3\,(2\,t+1)\sqrt{3}\right)$

2. $t \mapsto -5/2\,\ln\left(t^2+1\right)+2\,\arctan(t)$

3. $t \mapsto 3/4 \ln\left(2t^2 - 4t + 3\right) + 5/2\sqrt{2}\arctan\left((t-1)\sqrt{2}\right)$

Solution 21.

Effectuons le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$
$$t = u - x.$$
On obtient alors,
$$\psi(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$$
La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle ,
$$\psi'(x) = f(x+1) - f(x).$$

Solution 22.

$g : t \mapsto \frac{t}{1+e^t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc une primitive G sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{G}(x^3) - \mathrm{G}(x^2)$. Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$, f l'est également et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 3x^2\mathrm{G}'(x^3) - 2x\mathrm{G}'(x^2) = 3x^2 g(x^3) - 2xg(x^2) = \frac{3x^5}{1+e^{x^3}} - \frac{2x^3}{1+e^{x^2}}$$

Solution 23.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par inégalité triangulaire
$$\left|\int_{-x}^{x} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-x}^{x} |\sin(t^2)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-x}^{x} dt = 2x$$
Puisque $x \mapsto \int_{-x}^{x} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ est clairement impaire, on a également pour tout $x \in \mathbb{R}_-$
$$\left|\int_{-x}^{x} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant -2x$$
Finalement pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\left|\int_{-x}^{x} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2|x|$$
Il s'ensuit que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_{-x}^{x} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = 0$.

2. Soit $x \in]1, +\infty[$. Pour tout $t \in [x, 2x]$, $0 < \ln t \leqslant \ln(2x)$ et donc $\frac{1}{\ln t} \geqslant \frac{1}{\ln(2x)}$. On en déduit que
$$\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t} \geqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(2x)} = \frac{x}{\ln(2x)}$$
Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(2x)} = +\infty$. Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t} = +\infty$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Effectuons d'abord une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t &= -\left[\frac{\cos t}{t}\right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\cos x}{x} - \frac{\cos 2x}{2x} - \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Puisque cos est bornée, on a facilement $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} = 0$.
Supposons $x \in \mathbb{R}_+$. Par inégalité triangulaire

$$\left|\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{2x} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} = \frac{1}{2x}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 0$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = 0$.