Interrogation écrite n°01

NOM : Prénom : Note :

1. Déterminer la nature de l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

   Tout d'abord, $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2+1}$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$. *De plus,* $\frac{\sin t}{t^2+1} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. *Or* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$ *donc* $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2+1}$ *également. Comme* $\mapsto \frac{\sin t}{t^2+1}$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$, I *converge.* ∎

2. Déterminer la nature de l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^{1} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

   Remarquons que $\frac{1}{t^2} \underset{t\to0^+}{=} o\left(\frac{\ln t}{t^2}\right)$. *Comme* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *n'est pas intégrable sur* $]0,1]$, $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ *diverge. Or cette fonction est constamment négative sur* $]0,1]$ *donc* I *diverge.* ∎

3. Justifier la convergence et calculer la valeur de $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$.

   Remarquons que $t \mapsto te^{-t}$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$. *De plus,* $te^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t}^2\right)$ *par croissances comparées. Or* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$ *donc* $t \mapsto te^{-t}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$ *i.e.* I *converge.*
   Les fonctions $t \mapsto t$ *et* $t \mapsto -e^{-t}$ *sont de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *et* $\lim\limits_{t\to+\infty} -te^{-t}$ *donc, par intégration par parties,*

$$\mathrm{I} = -\left[te^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$$

∎

4. Justifier la convergence et calculer la valeur de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t \,\mathrm{d}t}{1+e^{2t}}$ par un changement de variable.

On effectue le changement de variable $u = e^t$ *i.e.* $t = \ln(u)$*. Comme* $\ln$ *est une bijection strictement croissante de* $[1,+\infty[$ *sur* $[0,+\infty[$, I *est de même nature que* $\mathrm{J} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ *et* $\mathrm{I} = \mathrm{J}$ *en cas de convergence. Comme une primitive de* $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ *est* arctan *qui admet une limite finie en* $+\infty$, J *converge et*

$$\mathrm{I} = \mathrm{J} = [\arctan(t)]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

∎

5. Déterminer un équivalent simple de $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{\ln(1+t)}{t^2+t^3} \,\mathrm{d}t$ en 0^+.

Remarquons que $\dfrac{\ln(1+t)}{t^2+t^3} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}$*. Or* $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ *est positive sur* $]0,1]$ *et* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t$ *diverge. Ainsi*

$$f(x) = \int_x^1 \frac{\ln(1+t)}{t^2} \,\mathrm{d}t \underset{x\to 0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln(x)$$

∎

6. Déterminer un équivalent simple de $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2+t^3} \,\mathrm{d}t$ en $+\infty$.

Remarquons que $\dfrac{\arctan t}{t^2+t^3} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{\pi}{2t^3}$*. Or* $t \mapsto \dfrac{\pi}{2t^3}$ *est positive sur* $]0,1]$ *et* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\pi}{2t^3} \,\mathrm{d}t$ *converge. Ainsi*

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2+t^3} \,\mathrm{d}t \underset{x\to 0+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{\pi}{2t^3} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4x^2}$$

∎