Semaine du 18/02 au 22/02

1 Cours

Applications linéaires

Définition et premières propriétés Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'une forme linéaire. Exemples en géométrie, dans les espaces de fonctions, dans les espaces de suites et dans les $\mathbb{K}^n$. Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$. Structure d'anneau de $\mathcal{L}(E)$.

Isomorphismes Définition d'un isomorphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme. Définition d'un automorphisme et groupe linéaire $GL(E)$.

Images directe et réciproque par une application linéaire L'image directe ou réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel. Noyau et image d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le noyau et l'image. Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $E = S \oplus \operatorname{Ker} f$, alors f induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Ker} f$.

Image d'une famille de vecteurs L'image d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image. Une application linéaire est injective/surjective/bijective **si et seulement si** l'image d'une base est une famille libre/une famille génératrice/une base.

Applications linéaires en dimension finie En dimension finie, deux espaces sont de même dimension **si et seulement si** ils sont isomorphes. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le rang. Si f est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de **même** dimension **finie**, alors f bijective $\iff$ f injective $\iff$ f surjective. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme. Si E et F sont de même dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective **si et seulement si** il existe $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ **ou** $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Formes linéaires et hyperplans Formes coordonnées. Définition d'un hyperplan comme noyau de forme linéaire non nulle. Lien entre hyperplans et droites vectorielles. Intersections d'hyperplans.

2 Méthodes à maîtriser

- Calculer avec des endomorphismes comme dans tout anneau **non commutatif** et **non intègre**.
- Utiliser le noyau ou l'image d'une application linéaire pour prouver son injectivité ou sa surjectivité.
- Les équivalences $x \in \operatorname{Ker} f \iff f(x) = 0$ et $y \in \operatorname{Im} f \iff \exists x, y = f(x)$ doivent être automatiques.
- Utiliser la dimension pour faciliter la preuve de la bijectivité (injectivité + espaces d'arrivée et de départ de même dimension)
- Utiliser le théorème du rang pour passer de résultats sur le noyau à des résultats sur l'image et vice-versa.

3 Questions de cours

- **BCCP 62.** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\,\mathrm{Id}_E = 0$.
  1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
  2. Prouver que $E = \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E)$.
  3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\operatorname{Im}(f + \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E)$.
- **BCCP 64.** Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.
  1. Démontrer que : $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f \implies \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
  2. (a) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \iff \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
     (b) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \implies E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.
- **Inégalités et rang.** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ainsi que f et g deux applications linéaires de E dans F de rangs finis. Montrer que
$$|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f + g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$
- **Base duale.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrer que $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*.
- **Hyperplan et droite supplémentaires.** Soient H un hyperplan d'un espace vectoriel E (pas nécessairement de dimension finie) et D une droite vectorielle non incluse dans H. Montrer que $E = H \oplus D$.
- **Lemme des noyaux «light».** Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On note r_1 et r_2 les deux racines du polynôme $X^2 + aX + b$. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que
$$u^2 + au + b\,\mathrm{Id}_E = (u - r_1\,\mathrm{Id}_E) \circ (u - r_2\,\mathrm{Id}_E) = (u - r_2\,\mathrm{Id}_E) \circ (u - r_1\,\mathrm{Id}_E)$$
2. Montrer que
$$\mathrm{Ker}(u - r_1\,\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u^2 + au + b\,\mathrm{Id}_E) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(u - r_2\,\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u^2 + au + b\,\mathrm{Id}_E)$$
3. On suppose $r_1 \neq r_2$. Montrer que
$$\mathrm{Ker}(u^2 + au + b\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(u - r_1\,\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - r_2\,\mathrm{Id}_E)$$