Devoir surveillé n°08

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 —

Partie I –

Soit ℓ un réel. On note f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = \ell$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note I_n l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$.

1. Quelle valeur faut-il donner à ℓ pour que f soit continue en 0 ?
On suppose désormais que ℓ a cette valeur.

2. Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire : dérivable, et à dérivée continue) sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et explicitez la dérivée de f en 0.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez que, dans l'intervalle I_n, l'équation $x \cos x = \sin x$ possède une et une seule solution, que l'on notera x_n.

4. Déterminez un équivalent *très simple* de x_n, lorsque n tend vers l'infini.

5. Déterminez les variations de f dans l'intervalle I_0, puis dans les intervalles I_{2n-1} et I_{2n} pour $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Donnez l'allure de la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0, 4\pi]$.

Partie II –

Il est clair que la restriction g de f à l'intervalle $]0, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle ; on pourrait d'ailleurs prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ mais ce n'est pas notre objectif.
On se propose simplement d'établir quelques résultats concernant la dérivée n-ième de g, notée $g^{(n)}$. En particulier, $g^{(0)}$ désigne g elle-même.
On identifie un polynôme P et la fonction polynôme $x \mapsto \mathrm{P}(x)$ qui lui est naturellement associée.
Chaque polynôme sera écrit selon les puissances décroissantes de X.

1. Explicitez $g''(x)$ pour $x > 0$.

Au vu des expressions de $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$, on se propose d'établir que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que, pour tout $x > 0$: $g^{(n)}(x) = \dfrac{\mathrm{P}_n(x)\sin^{(n)} x + \mathrm{Q}_n(x)\sin^{(n+1)} x}{x^{n+1}}$

Dans les deux questions suivantes, vous allez raisonner par récurrence sur n.

2. Il est clair que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$; vous dresserez simplement un tableau donnant les expressions de P_n et Q_n pour ces valeurs de n.

3. On fixe $n \in \mathbb{N}$, et on suppose l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise.
Établissez l'assertion $\mathcal{A}(n+1)$; vous déterminerez des expressions de P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n.
Il résulte donc des questions **II.2** et **II.3** que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Montrez que P_n et Q_n ont tous leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$; précisez le degré, la parité, et le coefficient dominant de ces polynômes.

5. Utilisez les formules établies à la question **II.3** pour expliciter P_3 et Q_3.

6. Deux polynômes U et V vérifient $\mathrm{U}(x)\sin x + \mathrm{V}(x)\cos x = 0$ pour tout $x > 0$.
Montrez que U et V sont tous deux égaux au polynôme nul.

7. En partant de la relation $xg(x) = \sin x$ et en appliquant la formule de Leibniz, ainsi que le résultat de la question précédente, mettez en évidence deux nouvelles relations liant P_n, Q_n, P_{n+1} et Q_{n+1}.

8. Justifiez alors la relation $\mathrm{P}_n' = \mathrm{Q}_n$, et montrez que P_n est solution d'une équation différentielle du second ordre *très simple*, que l'on notera $\mathcal{E}_n$.

9. Il est clair que l'application $\Psi : \mathrm{T} \mapsto \mathrm{T} + \mathrm{T}''$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ des polynômes à coefficients réels.
Montrez que Ψ induit un automorphisme Ψ_n du sous-espace $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ constitué des polynômes de degré n au plus.
Montrez ensuite que Ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
Il résulte de ceci que P_n est l'unique solution polynomiale de l'équation différentielle $\mathcal{E}_n$.

10. $n \in \mathbb{N}$ est fixé, et p désigne la partie entière de $\dfrac{n}{2}$.
Justifiez l'existence d'une famille $(a_k)_{0 \leq k \leq p}$ de réels vérifiant $\mathrm{P}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k \mathrm{X}^{n-2k}$ et déterminez une expression de a_k faisant intervenir des factorielles et/ou des puissances, mais débarrassée de tout signe $\prod$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminez les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y = x^n$.

Exercice 1 **Supplémentaire commun**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose dans cette question que F et G admettent un supplémentaire commun dans E i.e. qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{H} = \mathrm{G} \oplus \mathrm{H} = \mathrm{E}$. Montrer que $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{G}$.

On cherche maintenant à prouver la réciproque, c'est-à-dire que si $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{G}$**, alors** F **et** G **admettent un supplémentaire commun dans** E**.**

2. Montrer que si $\mathrm{F} = \mathrm{G}$, alors F et G admettent un supplémentaire commun dans E.

On suppose maintenant $\mathrm{F} \neq \mathrm{G}$ **dans toute la fin de l'exercice.**

3. On suppose dans cette question que F et G sont deux hyperplans de E.
   - **a.** Justifier l'existence de deux vecteurs $u \in \mathrm{F}$ et $v \in \mathrm{G}$ tels que $u \notin \mathrm{G}$ et $v \notin \mathrm{F}$.
   - **b.** On pose $w = u + v$. Montrer que $w \notin \mathrm{F} \cup \mathrm{G}$.
   - **c.** Montrer que $\mathrm{H} = \mathrm{vect}(w)$ est un supplémentaire commun de F et G dans E.
4. Dans cette question, on suppose seulement $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{G}$.
   - **a.** Justifier l'existence de deux sous-espaces vectoriels F' et G' de E tels que $(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) \oplus \mathrm{F}' = \mathrm{F}$ et $(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) \oplus \mathrm{G}' = \mathrm{G}$.
   - **b.** Montrer que $\dim \mathrm{F}' = \dim \mathrm{G}' > 0$ et que $\mathrm{F}' \cap \mathrm{G}' = \{0_\mathrm{E}\}$.
   - **c.** On pose $p = \dim \mathrm{F}' = \dim \mathrm{G}'$. Soient $(f_1, \dots, f_p)$ et $(g_1, \dots, g_p)$ des bases respectives de F' et G'. On pose $h_i = f_i + g_i$ pour $1 \leq i \leq p$. Montrer que la famille $(h_1, \dots, h_p)$ est libre.
   - **d.** On pose $\mathrm{H}' = \mathrm{vect}(h_1, \dots, h_p)$. Que vaut $\dim \mathrm{H}'$? Montrer que $\mathrm{H}' \cap \mathrm{F} = \mathrm{H}' \cap \mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\}$.
   - **e.** En déduire que $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{H}' = \mathrm{G} \oplus \mathrm{H}'$.
   - **f.** Soit H'' un supplémentaire de $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ dans E. Montrer que $\mathrm{H}' \cap \mathrm{H}'' = \{0_\mathrm{E}\}$.
   - **g.** On pose $\mathrm{H} = \mathrm{H}' \oplus \mathrm{H}''$. Montrer que H est un supplémentaire commun de F et G dans E.

Exercice 2 ★★ **D'après CCP TSI 2020**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ vérifiant $f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

1. Prouver que f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} en fonction de f et Id_E.

2. Montrer que

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \oplus \mathrm{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}\right)$$

3. Calculer $\left(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}\right) \circ (f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$. En déduire que $\mathrm{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}\right) = \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

On suppose à partir de maintenant que $f \neq \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et $f \neq -\frac{1}{2}\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

4. Montrer que la famille $(f, \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ est libre.

5. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$f^n = a_n f + b_n\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

6. Justifier que les suites (a_n) et (b_n) vérifient des relations de récurrence d'ordre deux homogènes à coefficients constants que l'on déterminera.

7. En déduire des expressions de a_n et b_n en fonction de n.

8. Déterminer les limites des suites (a_n) et (b_n).