Devoir à la maison n°03

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 **1.a** Si f est positive sur $[a, +\infty[$, les propositions (i) et (ii) sont équivalentes.

1.b Si f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$, la proposition (i) implique la proposition (ii) mais la réciproque peut être fausse.

2 **2.a** On a clairement $\mathrm{E} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, la fonction nulle appartient à E et E est stable par combinaison linéaire car une combinaison linéaire de fonctions continues/intégrables sur $\mathbb{R}_+$ est continue/intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

2.b La fonction nulle appartient clairement à F et F est clairement stable par combinaison linéaire. Soient $f \in \mathrm{F}$ et $x > 0$. Alors $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est clairement continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-xt})$. De plus, $t \mapsto e^{-xt}$ estr positive sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \int_0^u e^{-xt} \, \mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{xu} = \frac{1}{x}$ donc, d'après la question **1.a**, $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par domination, $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est également intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. Par conséquent, F est un sous-espace vectoriel de E.

2.c Evident.

3 **3.a** Pour tout $x > 0$,

$$\mathcal{L}(\mathrm{U})(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{x}\left[e^{-xt}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{x}$$

3.b h_λ est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $h_\lambda \in \mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. De plus,

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+x)t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda + x}$$

4 Soit $x > 0$. Tout d'abord, $g_n : t \mapsto t^n f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car f l'est.
De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$g_n(t)e^{-xt} = t^n e{-}xt/2 f(t)e^{-xt/2}$$

Or $\lim\limits_{t\to+\infty} t^n e{-}xt/2 = 0$ donc $g_n(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(f(t)e^{-xt/2}\right)$. Or $x/2 > 0$ et $f \in \mathrm{E}$ donc $t \mapsto f(t)e^{-xt/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $t \mapsto g_n(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et donc que $g_n \in \mathrm{E}$.

5 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par intégration par parties, pour tout $u \geq 0$

$$\int_0^u f'(t)e^{-xt} \, \mathrm{d}t = [f(t)e^{-xt}]_{t=0}^{t=u} + x\int_0^u f(t)e^{-xt} \, \mathrm{d}t = f(u)e^{-xu} - f(0) + x\int_0^u f(t)e^{-xt} \, \mathrm{d}t$$

Comme f est bornée, $\lim\limits_{u\to+\infty} f(u)e^{-xu} = 0$. De plus, $f \in \mathrm{E}$ donc $t \mapsto f(t)e^{-xt} \, \mathrm{d}t$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. D'après la question **1.b**, $u \mapsto \int_0^u f(t)e^{-xt} \, \mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$, à savoir $\mathcal{L}(f)(x)$.
On en déduit que

$$\lim_{u\to+\infty} \int_0^u f'(t)e^{-xt} \, \mathrm{d}t = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$$

Comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $t \mapsto f'(t)e^{-xt}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$ et la question **1.a** garantit que cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ i.e. $f' \in \mathrm{E}$. Ce qui précède montre également que

$$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$$

$\boxed{6}$ **6.a** On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$;
- pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \mapsto -g_1(t)e^{-xt}$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto -g_1(t)e^{-xt}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$;
- pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+,\ |-g_1(t)e^{-xt}| \leq |g_1(t)|e^{-at}$$
et $t \mapsto |g_1(t)|e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisque $g_1 \in \mathrm{E}$.

On en déduit que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)'(x) = -\int_0^{+\infty} g_1(t)e^{-xt}\ \mathrm{d}t = -\mathcal{L}(g_1)(x)$$

6.b On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n\mathcal{L}(g_n)$.
Le résultat est vrai pour $n = 0$ ($\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc a fortiori $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$).
Supposons le résultat vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a donc $\mathcal{L}(f)^{(n)}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n\mathcal{L}(g_n)$. En appliquant la question précédente à $g_n \in \mathrm{E}$, $\mathcal{L}(g_n)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathcal{L}(g_n)' = -\mathcal{L}(g_{n+1})$. On en déduit que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et que $\mathcal{L}(f)^{(n+1)} = (-1)^{n+1}\mathcal{L}(g_{n+1})$.
On conclut par récurrence.

$\boxed{7}$ **7.a** Comme f est bornée,

$$\forall x > 0,\ |\mathcal{L}(f)(x)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}\ \mathrm{d}t \leq \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ \mathrm{d}t = \frac{\|f\|_\infty}{x}$$

On en déduit que $\lim\limits_{+\infty}\mathcal{L}(f) = 0$.

7.b Par hypothèse, f est de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée. On peut appliquer la question **5** :

$$\forall x > 0,\ x\mathcal{L}(f)(x) = \mathcal{L}(f')(x) + f(0)$$

Comme f' est bornée sur $\mathbb{R}$, $f' \in \mathrm{F}$ et on peut appliquer la question précédente : $\lim\limits_{+\infty}\mathcal{L}(f') = 0$. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$$

$\boxed{8}$ **8.a** Comme f admet une limite finie en $+\infty$, elle est bornée au voisinage de $+\infty$: il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ tel que f est bornée sur $]\mathrm{A},+\infty[$. Par ailleurs, f est continue sur le segment $[0,\mathrm{A}]$; elle y est donc bornée.
Comme f est bornée sur $[0,\mathrm{A}]$ et sur $]\mathrm{A},+\infty[$, elle est bornée sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $f \in \mathrm{F}$.

8.b Comme $a_n > 0$, en effectuant le changement de variable linéaire $x = a_nt$ dans l'intégrale convergente $a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} a_nf(t)e^{-a_nt}\ \mathrm{d}t$, on obtient bien

$$a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} h_n(x)\ \mathrm{d}x$$

8.c On vérifie qu'on peut bien appliquer le théorème de convergence dominée :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$;
- (h_n) converge simplement vers $x \mapsto \ell e^{-x}$ car (a_n) converge vers 0 par valeurs supérieures ;
- $x \mapsto \ell e^{-x}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$;
- comme f est bornée, il existe $\mathrm{K} \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f| \leq \mathrm{K}$ sur $\mathbb{R}_+$ de sorte que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ |h_n(x)| \leq \mathrm{K}e^{-x}$$
et $x \mapsto \mathrm{K}e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \ell e^{-x}\ \mathrm{d}x$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$$

8.d Le résultat de la question précédente étant valable pour toute suite (a_n) strictement positive convergeant vers 0, on en déduit par caractérisation séquentielle de la limite que $\lim\limits_{x\to0^+} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$. Notamment, si $\ell \neq 0$, $\mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{\ell}{x}$.

9 **9.a** C'est du cours mais on peut détailler. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathrm{R}(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, le théorème fondamental de l'analyse garantit que $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée f. Ainsi R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathrm{R}' = -f$.
Soit $x > 0$. Ainsi $t \mapsto e^{-xt}$ et $-\mathrm{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ de dérivées respectives, $t \mapsto -xe^{-xt}$ et f. Par intégration par parties,

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = -\left[\mathrm{R}(t)e^{-xt}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} - x\int_0^{+\infty} \mathrm{R}(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Cette intégration par parties est légitime car $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{R}(t)e^{-xt} = 0$. En effet, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{R}(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-xt} = 0$. On en déduit que

$$\mathcal{L}(f)(x) = \mathrm{R}(0) - x\mathcal{L}(\mathrm{R})(x)$$

9.b On vient de voir que $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{R} = 0$. Il existe donc $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in [\mathrm{A}, +\infty[$, $|\mathrm{R}(t)| \leq \varepsilon$.
D'après la question précédente,

$$\mathcal{L}(f)(x) - \mathrm{R}(0) = -x\int_0^{+\infty} \mathrm{R}(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = -x\int_0^{\mathrm{A}} \mathrm{R}(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t - x\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \mathrm{R}(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Par inégalité triangulaire,

$$|\mathcal{L}(f)(x) - \mathrm{R}(0)| \leq x\int_0^{\mathrm{A}} |\mathrm{R}(t)|e^{-xt}\,\mathrm{d}t + x\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} |\mathrm{R}(t)|e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

D'une part, $0 \leq e^{-xt} \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ donc

$$\int_0^{\mathrm{A}} |\mathrm{R}(t)|e^{-xt}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\mathrm{A}} |\mathrm{R}(t)|\,\mathrm{d}t$$

D'autre part, $|\mathrm{R}(t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [\mathrm{A}, +\infty[$ donc

$$\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} |\mathrm{R}(t)|e^{-xt}\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{x}$$

On en déduit que

$$|\mathcal{L}(f)(x) - \mathrm{R}(0)| \leq x\int_0^{\mathrm{A}} |\mathrm{R}(t)|\,\mathrm{d}t + \varepsilon$$

9.c Posons $\mathrm{K} = x\int_0^{\mathrm{A}} |\mathrm{R}(t)|\,\mathrm{d}t \geq 0$. Pour $x \in \left]0, \frac{\varepsilon}{\mathrm{K}+1}\right]$,

$$|\mathcal{L}(f)(x) - \mathrm{R}(0)| \leq 2\varepsilon$$

Par définition de la limite, $\lim\limits_{x\to0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \mathrm{R}(0) \in \mathbb{R}$. Ainsi $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0. La valeur de ce prolongement en 0 est $\mathrm{R}(0) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

10 Soit $x > 0$. Par intégration par parties,

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \cos(1) - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

D'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ car cos est bornée sur $\mathbb{R}$. D'autre part, $\frac{\cos t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $x \mapsto \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$.
Par conséquent, $x \mapsto \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$ et donc F également.

11 Remarquons que

$$u_n \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| \, \mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) \, \mathrm{d}t = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

en utilisant la π-périodicité de $|\sin|$. On en déduit que la série $\sum u_n$ diverge puis que $\int_0^{+\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t$ diverge. Ainsi f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

12 Soit $\mathrm{X} > 0$. On utilise un passage en complexes :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\mathrm{X}} \sin(t) e^{-xt} \, \mathrm{d}t &= int_0^{\mathrm{X}} \operatorname{Im}(e^{it}) e^{-xt} \, \mathrm{d}t \\
&= \operatorname{Im}\left(\int_0^{\mathrm{X}} e^{(i-x)t} \, \mathrm{d}t\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_{t=0}^{t=\mathrm{X}}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{e^{(i-x)\mathrm{X}} - 1}{i-x}\right) \\
&= -\frac{1}{1+x^2} \operatorname{Im}\left((i+x)\left(e^{-x\mathrm{X}} e^{i\mathrm{X}} - 1\right)\right) \\
&= -\frac{1}{1+x^2}\left(e^{-x\mathrm{X}}(x \sin \mathrm{X} + \cos \mathrm{X}) - 1\right)
\end{aligned}$$

Tout d'abord, $t \mapsto \sin(t) e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $\sin(t) e^{-xt} \underset{t \to +\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-xt})$ et que $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $t \mapsto \sin(t) e^{-xt}$ est également intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} \, \mathrm{d}t = \lim_{\mathrm{X} \to +\infty} \int_0^{\mathrm{X}} \sin(t) e^{-xt} \, \mathrm{d}t = \lim_{\mathrm{X} \to +\infty} -\frac{1}{1+x^2}\left(e^{-x\mathrm{X}}(x \sin \mathrm{X} + \cos \mathrm{X}) - 1\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

car sin et cos sont bornées sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{\mathrm{X} \to +\infty} e^{-x\mathrm{X}} = 0$.

13 Comme $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, f est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $x > 0$, $f(t) e^{-xt} \underset{t \to +\infty}{=} o(e^{-xt})$ donc $t \mapsto f(t) e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $f \in \mathrm{E}$.
D'après la question **6.a**, $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, \ \mathcal{L}(f)'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{1+x^2}$$

On en déduit qu'il existe une constante C telle que

$$\forall x > 0, \ \mathcal{L}(f)(x) = \mathrm{C} - \arctan(x)$$

De plus, $f \in \mathrm{F}$ d'après la question **8.a**. Donc, d'après la question **7.a**, $\lim_{+\infty} \mathcal{L}(f) = 0$. On en déduit que $\mathrm{C} = \lim_{+\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$.
D'après le résultat admis,

$$\ell = \lim_{x \to 0} \mathcal{L}(f)(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$