Espaces préhilbertiens réels

1 Projection orthogonale

1.1 Définition et premières propriétés

Proposition 1.1

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E. Si F est de **dimension finie**, alors $E = F \oplus F^\perp$.

Attention ! Le résultat n'est plus forcément vrai si F n'est pas de dimension finie. On conserve néanmoins le fait que F et $F^\perp$ sont en somme directe.

Exemple 1.1

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par

$$\left\langle \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n \right\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

et on considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(1) = 0\}$$

Soit $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in F^\perp$. Alors F est orthogonal aux polynômes $X^n - 1$, ce qui signifie que $a_n = a_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais comme la suite (a_n) est presque nulle, elle est nulle. Ainsi $P = 0$. Par conséquent, $F^\perp = \{0\}$ et $F \oplus F^\perp = F \neq \mathbb{R}[X]$.

Exercice 1.1 Othogonal et topologie

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E.

1. Montrer que $F^\perp$ est fermé.
2. Montrer que $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$.

Définition 1.1 Projecteur orthogonal

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E. Si $E = F \oplus F^\perp$, on appelle **projecteur orthogonal** sur F le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque. La projection orthogonale sur F est notamment définie lorsque F est de dimension finie.

Proposition 1.2 Expression de la projection orthogonale dans une base orthonormale

Soit F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** d'un espace préhilbertien E. On se donne une base orthonormale $(f_1, \dots, f_n)$ de F. Soient p le projecteur orthogonal sur F et $x \in E$. Alors

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k \rangle f_k$$

Remarque. En particulier la projection d'un vecteur x sur une droite vectorielle $\text{vect}(u)$ est $\frac{(x|u)}{\|u\|^2}u$. Si u est normé, alors cette projection est simplement $(x|u)u$.

Proposition 1.3 Inégalité de Bessel

Soient I est un ensemble **fini ou dénombrable** et $(e_i)_{i\in I}$ une famille **orthonormale** de vecteurs d'un espace préhilbertien E. Soit également $x \in E$.
Alors la famille $(\langle x, e_i\rangle^2)_{i\in I}$ est **sommable** et

$$\sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle^2 \leq \|x\|^2$$

1.2 Convergence

Définition 1.2 Suite totale

On dit qu'une suite de vecteurs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace vectoriel normé E est **totale** si $\text{vect}(u_n,\ n \in \mathbb{N})$ est **dense** dans E.

Exemple 1.2

Posons $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$. D'après le théorème de Weierstrass la suite $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite totale de E muni de la norme infinie.

Proposition 1.4

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **orthonormale totale** d'un espace préhilbertien E. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n le projecteur orthogonal sur $\text{vect}(e_0, \dots, e_n)$.
Alors pour tout $x \in E$, la suite $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Remarque. E est muni de la norme associée produit scalaire E.

2 Endomorphismes symétriques

2.1 Définition

Définition 2.1 Endomorphisme symétrique

On dit qu'un endomorphisme u d'un espace préhilbertien E est **symétrique** si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

Proposition 2.1 Interprétation matricielle

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Alors u est **symétrique** si et seulement si sa matrice dans une **base orthonormale** de E est **symétrique**.

Proposition 2.2

Un **projecteur** d'un espace préhilbertien E est **symétrique** si et seulement si il est **orthogonal**.
Une **symétrie** d'un espace préhilbertien E est **symétrique** si et seulement si elle est **orthogonale**.

Remarque. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien de dimension n et A sa matrice dans une **base orthonormale**. Alors

- u est un **projecteur orthogonal** si et seulement si $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ et $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}$;
- u est une **symétrie orthogonale** si et seulement si $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}$.

Adjoint

Si E est un espace euclidien, on peut montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

Cet endomorphisme u^* s'appelle l'**adjoint** de u. Ainsi u est symétrique si et seulement si $u = u^*$. C'est pour cela qu'on qualifie les endomorphismes symétriques d'endomorphismes auto-adjoints.

2.2 Réduction des endomorphismes symétriques

Proposition 2.3 Stabilité de l'orthogonal

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace préhilbertien E. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $\mathrm{F}^\perp$ est également stable par u.

Exercice 2.1

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.2

Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. On pose $\varphi : x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\} \mapsto \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2}$.

1. Justifier que φ admet un maximum sur la sphère unité de E et en déduire que φ admet un maximum sur l'ouvert $\mathrm{E}\setminus\{0_\mathrm{E}\}$.
2. On note u un vecteur où φ admet son maximum. En considérant le gradient de φ, montrer que u est un vecteur propre de f.

Théorème 2.1 Théorème spectral

Soit u un endomorphisme **symétrique** d'un espace euclidien E. Alors on a les propositions équivalentes suivantes.

(i) E est la **somme directe orthogonale des sous-espaces propres** de u.

(ii) Il existe une **base orthonormale** de E formée de **vecteurs propres** de u.

Remarque. Notamment, tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est diagonalisable.

Corollaire 2.1 Réduction des matrices symétriques

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in O(n)$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^\top$.

Remarque. Notamment, toute matrice symétrique **réelle** est diagonalisable.

Attention ! Une matrice symétrique complexe n'est pas nécessairement diagonalisable. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Endomorphismes symétriques positifs

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. On dit que u est **positif** si

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geq 0$$

Il est classique de montrer que u est positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.

- Supposons u positif et donnons-nous $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et x un vecteur propre associé. Alors $\langle u(x), x\rangle \geq 0$ et $\langle u(x), x\rangle = \lambda\|x\|^2$. Comme $x \neq 0_E$, $\|x\|^2 > 0$ et donc $\lambda \geq 0$. Ainsi $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.
- Supposons $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$. D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de u. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (positives)associées à ces vecteurs propres. Un calcul simple montre que
$$\langle u(x), x\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, e_i\rangle^2 \geq 0$$

On dira que u est **défini positif** si

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ \langle u(x), x\rangle > 0$$

On montre comme précédemment que u est défini positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Matrices symétriques positives

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est **positive** si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top MX \geq 0$$

Il est classique de montrer que M est positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$.

- Supposons M positif et donnons-nous $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ et X un vecteur propre associé. Alors $X^\top MX \geq 0$ et $X^\top MX = \lambda X^\top X$. Comme $X \neq 0$, $X^\top X > 0$ et donc $\lambda \geq 0$. Ainsi $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.
- Supposons $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $M = PDP^\top$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D. Un calcul simple montre que
$$X^\top MX = (P^\top X)^\top D(P^\top X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (P^\top X)_i^2 \geq 0$$

On dira que M est **définie positive** si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^\top MX > 0$$

On montre comme précédemment que M est définie positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Remarque. On peut déduire les résultats sur les matrices symétriques positives à partir des résultats sur les endomorphismes symétriques positifs (et inversement) en considérant la matrice d'un tel endomorphisme dans une base orthonormale.

Exercice 2.3 Réduction simultanée

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive.

1. Montrer que $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \mapsto X^\top AX$ est un produit scalaire.
2. En déduire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que

$$P^\top AP = I_n \qquad \text{et} \qquad P^\top BP = D$$

3 Isométries vectorielles

3.1 Définition

Définition 3.1 Isométrie vectorielle

On appelle **isométrie vectorielle** d'un espace préhilbertien E tout endomorphisme de E **conservant la norme**, c'est-à-dire toute application $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$$

Proposition 3.1

Toute isométrie vectorielle u d'un espace préhilbertien E est linéaire et conserve le produit scalaire i.e.

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

Remarque. Réciproquement, toute application conservant le produit scalaire est évidemment une isométrie vectorielle.

Proposition 3.2

Si E est un espace euclidien, toute isométrie vectorielle de E est un automorphisme. Dans ce cas, une isométrie vectorielle est également appelée un **automorphisme orthogonal**.

Remarque. Si u est un automorphisme orthogonal, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Proposition 3.3 Interprétation matricielle

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Alors u est une isométrie vectorielle si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale de E est orthogonale.

Rappel **Isométrie vectorielle directe ou indirecte**

Une isométrie vectorielle d'un espace euclidien est dite **directe** si son déterminant est positif et **indirecte** dans le cas contraire.
On parle également d'automorphisme orthogonal **positif** ou **négatif**.

Remarque. Le déterminant d'une isométrie vectorielle ne peut valoir que -1 ou 1.

Rappel Matrice orthogonale positive ou négative

Une matrice orthogonale est dite **positive** si son déterminant est positif et **négative** dans le cas contraire.

Remarque. Le déterminant d'une matrice orthogonale ne peut valoir que -1 ou 1.

Proposition 3.4

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Alors u est une isométrie vectorielle directe (resp. indirecte) si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale de E est orthogonale positive (resp. négative).

3.2 Réduction des isométries vectorielles

Proposition 3.5 Stabilité de l'orthogonal

Soit u une isométrie vectorielle d'un espace préhilbertien E. Si F est un sous-espace vectoriel de E **stable** par u, alors $F^\perp$ est également **stable** par u.

Rappel Isométries d'un plan euclidien

Les isométries d'un plan euclidien sont :

- les rotations dont la matrice dans toute base orthonormale est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$;
- les réflexions dont la matrice dans une base orthonormale adaptée est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Proposition 3.6 Réduction des isométries vectorielles

Soit u une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E. Alors il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Corollaire 3.1 Réduction des matrices orthogonales

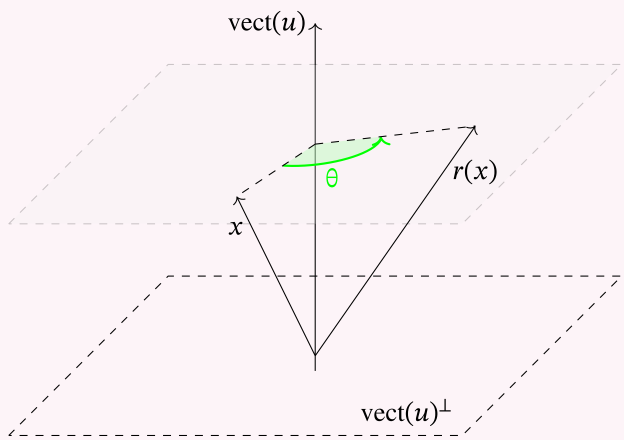
Soit $A \in O(n)$. Alors il existe une matrice $P \in O(n)$ et une matrice D diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, telles que $A = PDP^\top$.

3.3 Cas d'un espace euclidien de dimension 3

Rappel **Orientation induite**

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. On peut orienter un plan P de E en se donnant un vecteur u non nul normal à P : on décrète qu'une base (v, w) de P est directe (resp. indirecte) si (u, v, w) est directe (resp. indirecte). On vérifie sans peine qu'on a alors bien orienté P : on parle alors de l'orientation de P induite par u.

Définition 3.2 Rotation



Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et u un vecteur non nul de E. On appelle **rotation** (vectorielle) d'angle θ et d'axe orienté par u l'endomorphisme laissant les vecteurs de $\text{vect}(u)$ invariants et induisant une rotation d'angle θ dans le plan $\text{vect}(u)^\perp$ dont l'orientation est induite par celle de $\text{vect}(u)$.

Remarque. Si u et u' sont deux vecteurs non nuls, colinéaires et de même sens, les rotations d'axes orientés par u et u' et de même angle θ sont identiques.
Si u et u' sont deux vecteurs non nuls, colinéaires et de sens contraire, la rotation d'axe orienté par u et d'angle θ et la rotation d'axe orienté par u' et d'angle $-\theta$ sont identiques.

Remarque. Si on change l'orientation de E, les angles de rotation sont changés en leurs opposés.

Proposition 3.7 Matrice d'une rotation

La matrice de la rotation d'angle θ et d'axe orienté par u dans une base orthonormale directe de premier vecteur colinéaire et de même sens que u est $R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Proposition 3.8

Les isométries vectorielles directes d'un espace euclidien de dimension 3 sont les rotations.

Méthode **Déterminer l'image d'un vecteur par une rotation d'axe et d'angle donnés**

Soit r une rotation d'angle θ d'axe orienté par u. On suppose u unitaire. Soit x un vecteur de E. On veut déterminer $r(x)$.

- On calcule la projection orthogonale y de x sur $\text{vect}(u)$: $y = (x|u)u$. On a alors $z = x - y \in \text{vect}(u)^\perp$.
- On calcule l'image de z : $r(z) = (\cos\theta)z + (\sin\theta)u \wedge z$.
- On a alors $r(x) = y + r(z)$.

Méthode **Déterminer la matrice d'une rotation d'axe et d'angle donnés**

Soit r une rotation d'angle θ orienté par u. On suppose u unitaire. On veut déterminer la matrice M de r dans la base canonique.

Méthode n^o1 On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La méthode précédente nous permet de calculer $r(e_1)$, $r(e_2)$ et $r(e_3)$. On peut aussi remarquer que $r(e_3) = r(e_1) \wedge r(e_2)$. Les colonnes de M sont les vecteurs colonnes représentant $r(e_1)$, $r(e_2)$ et $r(e_3)$ dans la base canonique.

Méthode n^o2 On détermine v, w tels que (u, v, w) soient une base orthonormale directe : il suffit de choisir v orthogonal à u et de poser $w = u \wedge v$. La matrice de r dans la base (u, v, w) est $R(\theta)$. Si on note P la matrice de la base (u, v, w) dans la base canonique, alors la matrice recherchée est $PR(\theta)P^{-1} = PR(\theta)P^{\mathsf{T}}$.

Exercice 3.1 Matrice d'une rotation

Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'axe dirigé par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Méthode **Déterminer l'axe et l'angle de la rotation associée à une matrice de** $SO(3)$

Soit r une rotation de matrice R dans une base orthonormale directe $\mathcal{B}$.

Méthode n^o1

- On cherche d'abord un vecteur directeur u de l'axe en résolvant $RX = X$.
- On détermine un vecteur v non nul et orthogonal à u.
- On détermine le vecteur $r(v)$ grâce à R.
- On a alors $\cos\theta = \frac{(v|r(v))}{\|v\|^2}$.
- On détermine θ grâce au signe de $\sin\theta$: on remarque que $[u, v, r(v)] = \|u\|\|v\|^2 \sin\theta$ ou que $v \wedge r(v) = \|v\|^2(\sin\theta)\frac{u}{\|u\|}$.

Méthode n^o2

- On cherche d'abord un vecteur directeur u de l'axe en résolvant $RX = X$.
- R et $R(\theta)$ sont la matrice de r dans des bases différentes donc $\operatorname{tr}(R(\theta)) = \operatorname{tr}(R)$ i.e. $1 + 2\cos\theta = \operatorname{tr}(R)$. On en déduit $\cos\theta$.
- On détermine θ grâce au signe de $\sin\theta$. Le signe de $\sin\theta$ est le même que celui de $[u, x, r(x)]$ où x est un vecteur quelconque de E : en pratique, on prend un vecteur de la base canonique.

Exercice 3.2 Matrice rotation

Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A \in SO(3)$.
2. Déterminer l'axe et l'angle de la rotation associée à A.

Exercice 3.3 Anti-rotations

Soit E un espace euclidien de dimension 3.

Montrer qu'une rotation de E commute avec une réflexion de E si et seulement si l'axe de la première est orthogonal au plan de la seconde.

On appelle anti-rotation de E toute composée commutative d'une rotation et d'une réflexion. Montrer que les isométries vectorielles indirectes de E sont les anti-rotations.