Devoir à la maison n°12

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

On définit deux suites de polynômes $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $\mathrm{P}_0 = 0$, $\mathrm{Q}_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{n+1} &= \mathrm{P}_n + \mathrm{X}\mathrm{Q}_n \\ \mathrm{Q}_{n+1} &= -\mathrm{X}\mathrm{P}_n + \mathrm{Q}_n \end{aligned}$$

Il est évident que $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de polynômes à coefficients *réels*, ce que l'on ne demande pas de montrer. On pose enfin $\mathrm{R}_n = \dfrac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{Q}_n}$ et $\mathrm{Z}_n = \mathrm{Q}_n + i\mathrm{P}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans une première partie, on étudiera certains cas particuliers puis on étudiera le cas général dans la partie suivante.

Il est *fortement conseillé* de vérifier si les résultats obtenus dans le cas général sont cohérents avec ceux obtenus dans les cas particuliers.

Partie I – Etude de cas particuliers

1. Calculer P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3, P_4, Q_4.
2. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de P_2, Q_2, P_3, Q_3, P_4, Q_4 dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
3. Donner la décomposition en éléments simples de R_2, R_3, R_4 dans $\mathbb{R}(\mathrm{X})$.

Partie II – Etude du cas général

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Z}_n = (1+i\mathrm{X})^n$.
2. Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathrm{P}_n(\tan\alpha) = \frac{\sin(n\alpha)}{\cos^n(\alpha)} \qquad \mathrm{Q}_n(\tan\alpha) = \frac{\cos(n\alpha)}{\cos^n(\alpha)}$$

A partir de maintenant, on suppose n non nul.
On sera amené dans plusieurs questions à distinguer des cas selon la *parité* de n.

3. Donner une expression *développée* de Z_n à l'aide de la formule du binôme de Newton et en déduire des expressions de P_n et Q_n.

4. Déterminer la parité, le degré et le coefficient dominant des polynômes P_n et Q_n.

5. A l'aide de la question **II.2**, déterminer les racines de P_n et Q_n. Montrer en particulier que toutes les racines de P_n et Q_n sont réelles et simples.

6. Factoriser P_n et Q_n sous forme de produits de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

7. Calculer la partie entière de la fraction rationnelle R_n.

8. Calculer P'_n et Q'_n en fonction de P_{n-1} et Q_{n-1}.

9. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle R_n.

10. Calculer les produits suivants

$$A_n = \prod_{0<2k<n} \tan \frac{k\pi}{n} \qquad\qquad B_n = \prod_{0<2k+1<n} \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$