

DEVOIR À LA MAISON N°08 : CORRIGÉ

Problème 1 – Petites Mines 2009

Partie I – Étude d'une fonction

1. f est dérivable sur \mathbb{R} par opérations arithmétiques sur des fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3(1 - 2x^2)e^{-2x^2}$$

On en déduit que f est

- ▶ strictement décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$;
- ▶ strictement croissante sur $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$;
- ▶ strictement décroissante sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$.

Pour tout $x \neq 0$, $xe^{-x^2} = \frac{x^2 e^{-x^2}}{x}$. Par croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$$

via le changement de variables $X = x^2$. A fortiori

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x^2} = 0$$

Puis, par opérations

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

| | | | | | |
|---------|-----------|-------------------------------------|------------------------------------|-----------|-----|
| x | $-\infty$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $+\infty$ | |
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | -1 | $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | -1 | |

En particulier, \mathcal{C}_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

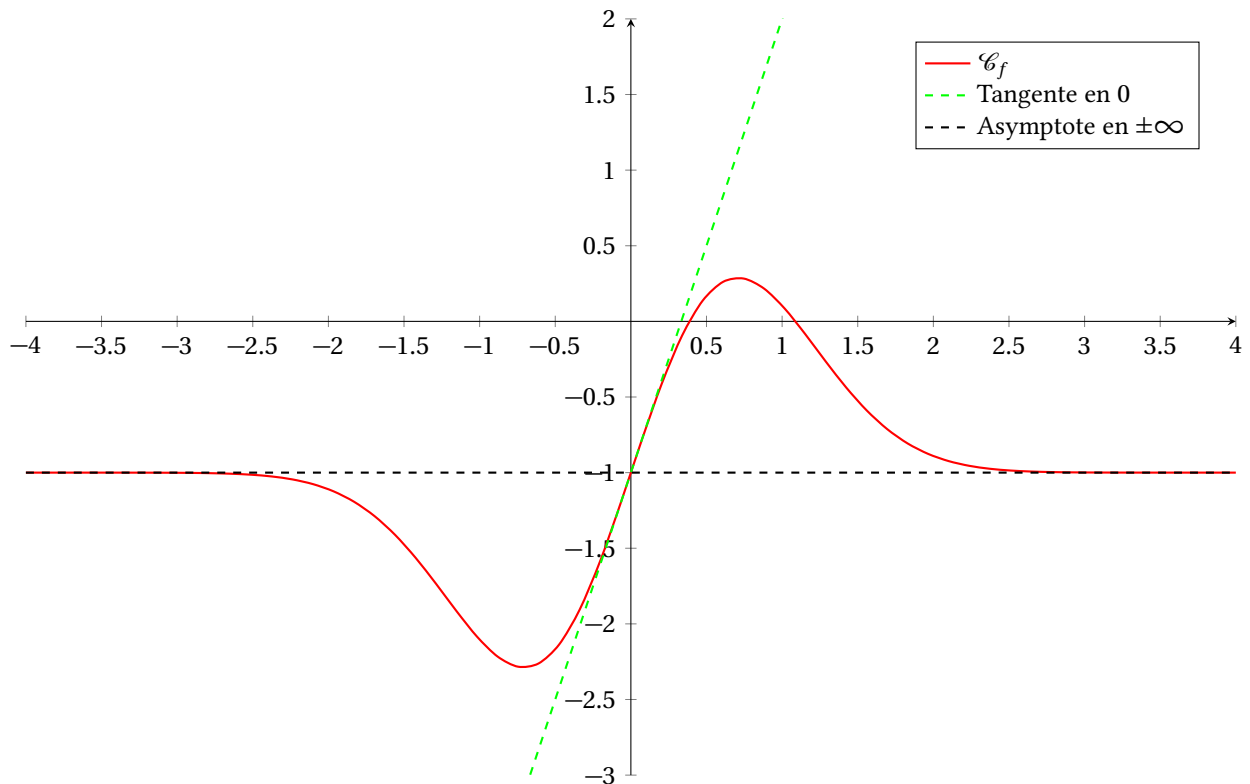
Puisque $f(-x) + f(x) = -2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, \mathcal{C}_f est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0, -1)$.

2. Puisque $f(0) = -1$ et $f'(0) = 3$, \mathcal{C}_f admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = 3x - 1$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - (3x - 1) = 3x(e^{-x^2} - 1)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} - 1 \leq 0$ car $-x^2 \leq 0$ et par croissance de \exp sur \mathbb{R} . Ainsi $f(x) - (3x - 1) \leq 0$ pour $x \geq 0$ et $f(x) - (3x - 1) \geq 0$ pour $x \leq 0$. On en déduit que \mathcal{C}_f est au-dessus de sa tangente à gauche de 0 et au-dessous de celle-ci à droite de 0. \mathcal{C}_f admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

3.



4. a. f étant de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , elle admet un développement limité à tout ordre en 0.
 b. On sait que $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. On en déduit que

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

puis que

$$f(x) = -1 + 3x - 3x^3 + \frac{3}{2}x^5 + o(x^5)$$

Partie II – Étude d’une équation différentielle

1. L’équation différentielle H_n est $xy' - (n - 2x^2)y = 0$. Sur \mathbb{R}^* , elle équivaut à $y' - \left(\frac{n}{x} - 2x\right)y = 0$. Une primitive de $x \mapsto \frac{n}{x} - 2x$ sur \mathbb{R}_+^* est $x \mapsto n \ln(x) - x^2$. Les solutions de H_n sur \mathbb{R}_+^* sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda x^n e^{-x^2}$ où λ décrit \mathbb{R} . Une primitive de $x \mapsto \frac{n}{x} - 2x$ sur \mathbb{R}_-^* est $x \mapsto n \ln(-x) - x^2$. Les solutions de H_n sur \mathbb{R}_-^* sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda(-x)^n e^{-x^2}$ où λ décrit \mathbb{R} ou, de manière plus simple, les fonctions $x \mapsto \lambda x^n e^{-x^2}$ où λ décrit encore \mathbb{R} .
2. La fonction constante égale à -1 étant clairement une solution particulière de E_n sur \mathbb{R} . On en déduit que les solutions de E_n sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* sont les fonctions $x \mapsto -1 + \lambda x^n e^{-x^2}$.
3. Supposons dans un premier temps $n = 1$. Soit y une solution de E_1 sur \mathbb{R} . Comme y est solution de E_1 sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* , il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$y(x) = \begin{cases} -1 + \lambda x e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -1 + \mu x e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La continuité de y en 0 impose $y(0) = -1$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lambda \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \mu$$

La dérivabilité de y en 0 impose donc $\lambda = \mu$. On a donc $y(x) = \lambda x e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Réciproquement pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \mapsto -1 + \lambda x e^{-x^2}$ est de classe \mathcal{C}^1 et solution de E_1 sur \mathbb{R} .

Les solutions de E_1 sur \mathbb{R} sont donc les fonctions $x \mapsto -1 + \lambda x e^{-x^2}$ où λ décrit \mathbb{R} .

Supposons maintenant $n \geq 2$. Comme précédemment toute solution y de E_n sur \mathbb{R} est nécessairement de la forme

$$y(x) = \begin{cases} -1 + \lambda x^n e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -1 + \mu x^n e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Réciproquement, si y est de la forme précédente, elle est bien solution de E_n sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* , elle est bien de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* , elle est continue en 0 puisque $\lim_{0^+} y = \lim_{0^-} y = 0 = y(0)$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y'(x) = 0$$

donc y est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} en vertu du théorème de prolongement \mathcal{C}^1 .

REMARQUE. Si on ne connaît pas encore le théorème de prolongement \mathcal{C}^1 , on procède «à la main». On constate que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = 0$$

donc y est dérivable en 0 et $y'(0) = 0$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y'(x) = 0 = y'(0)$$

donc y' est continue en 0. Puisque y' est continue sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* , y' est continue sur \mathbb{R} i.e. y est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . ■

On vérifie alors que y est encore solution de E_n en 0 donc elle est solution de E_n sur \mathbb{R} .

Les solutions de E_n sur \mathbb{R} sont donc les fonctions $x \mapsto \begin{cases} -1 + \lambda x^n e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -1 + \mu x^n e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Partie III – Étude de deux suites

1. On a $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = \frac{3}{e} - 1 > 0$.
2. f_n est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'_n(x) = 3(n x^{n-1} - 2x^{n+1})e^{-x^2} = 3x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$$

On en déduit que f_n est strictement croissante sur $[0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ et strictement décroissante sur $[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_n(x) = (x^2)^{\frac{n}{2}} e^{-x^2} - 1$$

donc, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -1$.

Remarquons que puisque $n \geq 2$, $1 \in [0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ et puisque f_n est strictement croissante sur cet intervalle, $f_n(\sqrt{\frac{n}{2}}) \geq f_n(1) > 0$.

f est strictement monotone et continue sur chacun des deux intervalles $[0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ et $[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty[$. De plus, $f_n(0) < 0$, $f_n(\sqrt{\frac{n}{2}}) > 0$ et $\lim_{+\infty} f < 0$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f_n s'annule une unique fois sur chacun des deux intervalles $[0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ et $[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty[$ en deux réels notés respectivement u_n et v_n .
Puisque $f_n(1) > 0$ et que 1 appartient à l'intervalle $[0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ sur lequel f_n est strictement croissante, $u_n > 1$. Par ailleurs $v_n > \sqrt{\frac{n}{2}} \geq 1$ puisque $n \geq 2$.

3. D'après la question précédente, $v_n \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$ pour tout $n \geq 2$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ par théorème de minoration.
4. a. Par définition, $f_n(u_n) = 0$ pour tout $n \geq 2$ donc $e^{-u_n^2} = \frac{1}{3u_n^n}$.

- b. $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1}e^{-u_n^2} - 1 = u_n - 1 < 0$.
- c. On sait également que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ et que f_{n+1} est strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ contenant u_n et u_{n+1} . D'où $u_n < u_{n+1}$. Ceci étant valable pour tout $n \geq 2$, la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.
- d. La suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est également majorée par 1 donc elle converge en vertu du théorème de la limite monotone.
5. a. Évident.
- b. Supposons $l \neq 1$. On a en fait $l < 1$ puisque (u_n) est majorée par 1. Pour tout $n \geq 2$, $f_n(u_n) = 0$ et donc $g_n(u_n) = 0$ d'après la question précédente. Ainsi pour tout $n \geq 2$,

$$0 = \ln 3 + n \ln(u_n) - u_n^2$$

Puisque $l < 1$, le membre de droite diverge vers $-\infty$, ce qui est absurde.

On en déduit que $l = 1$.

- c. Pour tout $n \geq 2$, $g_n(u_n) = 0$ et donc

$$n \ln(1 + w_n) = u_n^2 - \ln 3$$

Puisque (w_n) converge vers 0, $n \ln(1 + w_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n w_n$. Par ailleurs, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 - \ln 3 = 1 - \ln 3$ donc

$$w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1 - \ln 3}{n}$$