Interrogation écrite n° 11

NOM : Prénom : Note :

---

1. Soit $p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,-x-y+z,-x-2y+2z) \end{array} \right.$. On admet que $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

   (a) Montrer que p est un projecteur.

   (b) Donner sans justification des bases de l'image et du noyau de p.

   (c) Déterminer le rang de p.

2. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Quelles inclusions ou égalités existent-ils entre les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(g \circ f)$, $\mathrm{Ker}(g \circ f)$, $\mathrm{Im}\, g$, $\mathrm{Ker}\, g$, $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Ker}\, f$? On justifiera ses réponses.

3. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer avec soin que $g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

4. On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. Montrer que l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$ est un hyperplan de E.

5. Soit $s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(-X) \end{array} \right.$. On admet que $s \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$. Montrer que s est une symétrie. Préciser par rapport à quel sous-espace vectoriel F et parallèlement à quel sous-espace vectoriel G.