SEMAINE DU 08/06 AU 12/06

1 Cours

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire et norme Définition d'un produit scalaire. Orthogonalité. Espace préhilbertien réel, espace euclidien. Norme associée à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Inégalité triangulaire. Identités de polarisation.

Familles orthogonales Définition des familles orthogonales et orthonormales. Une famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. Théorème de Pythagore. Bases orthonormales : coordonnées, expression du produit scalaire et de la norme. Procédé de Gram-Schmidt. Existence de bases orthonormales. Toute famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complété en une base orthonormale.

Orthogonalité Orthogonal d'une partie. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, $F^\perp$ est l'unique supplémentaire orthogonal de F. Dimension de l'orthogonal en dimension finie. Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales. Expression du projeté orthogonal à l'aide d'une base orthonormale. Distance à un sous-espace vectoriel. Hyperplans affines : équations, distance à un hyperplan affine.

Automorphismes orthogonaux Définition. Caractérisation par conservation du produit scalaire. Groupe orthogonal. Caractérisation par les bases orthonormales. Automorphismes orthogonaux positifs et négatifs. Groupe spécial orthogonal.

Matrices orthogonales Définition. Groupe orthogonal. Liens entre matrices orthogonales, automorphismes orthogonaux et bases orthonormales. Matrices orthogonales positives et négatives. Groupe spécial orthogonal.

Automorphismes orthogonaux du plan euclidien Description de O(2) et SO(2). Rotations. Classification des automorphismes orthogonaux du plan euclidien.

Dénombrement

Cardinal d'un ensemble fini Cardinal d'une partie, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis. Cardinal de la réunion de deux ensembles finis. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Listes et combinaisons Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n. Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.

2 Méthodes à maîtriser

- Montrer qu'une application est un produit scalaire. Dans l'ordre : symétrie, linéarité par rapport à l'**une** des deux variables (la linéarité par rapport à la seconde variable s'obtient par symétrie), positivité, définition.
- Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas des produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
- Orthonormaliser une famille libre à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.
- Déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel.
- Calculer un projeté orthogonal.
- Calculer la distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie.
- Dénombrer un ensemble en le mettant en bijection avec un autre.
- Dénombrer un ensemble en le partiotionnant.

3 Questions de cours

- **BCCP 78** Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E. On note $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
  1. On suppose que $\forall x \in \mathrm{E},\ \|u(x)\| = \|x\|$.
     (a) Démontrer que : $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.
     (b) Démontrer que u est bijectif.
  2. Démontrer que l'ensemble O(E) des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Prouver que $u \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$ **si et seulement si** $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

- On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{A}^\top \mathrm{B})$. Montrer que $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^\top$ est une symétrie orthogonale.
- Soient u et v deux vecteurs unitaires d'un espace euclidien E. Montrer qu'il existe une unique réflexion envoyant u sur v.
- **BCCP 112** Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble possédant n éléments.
  On désigne par $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ l'ensemble des parties de E.
  1. Déterminer le nombre a de couples $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^2$ tels que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$.
  2. Déterminer le nombre b de couples $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^2$ tels que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.
  3. Déterminer le nombre c de triplets $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C} = \mathrm{E}$.