Devoir à la maison n°03

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1.

On souhaite montrer que

$$\forall z \in \mathbb{U},\ \sqrt{3} \leqslant |1+z| + \left|1-z+z^2\right| \leqslant \frac{13}{4}$$

On pose pour $z \in \mathbb{U}$,

$$f(z) = |1+z| + \left|1-z+z^2\right|$$

1. On se donne $z \in \mathbb{U}$ et on note θ un de ses arguments. Montrer que

$$f(z) = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| + \left|4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3\right|$$

2. On pose pour $t \in \mathbb{R}$

$$g(t) = 2|t| + \left|4t^2 - 3\right|$$

Déterminer le minimum et le maximum de f sur l'intervalle $[-1, 1]$.

3. En déduire l'inégalité demandée.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les parties réelle et imaginaire de $(1+i)^{2n}$.
2. En déduire les valeurs de

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1}$$

3. Calculer également les valeurs de

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n-1}{2k} \qquad \text{et} \qquad V_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n-1}{2k+1}$$