Devoir à la maison n°15

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

Partie I – Intégrales de Wallis

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx$$

1. Calculer I_0 et I_1.

2. En intégrant par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

3. En déduire une expression de I_{2n} et I_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de factorielles.

4. Vérifier que $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. En déduire que $\frac{n+1}{n+2}\mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{I}_{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Démontrer que $\mathrm{I}_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{I}_n$.

6. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n = \frac{\pi}{2}$.

7. En déduire que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Partie II – Formule de Stirling

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. En déduire que (u_n) converge vers une certaine limite $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.

3. Montrer que $\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et en déduire un équivalent de $n!$.

Problème 2 —

Partie I –

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathscr{A}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et préciser sa dimension.

2. Montrer que $\mathscr{A}$ est un anneau commutatif.

3. On pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que $(\mathrm{I}_3, \mathrm{M}, \mathrm{M}^2)$ est une base de $\mathscr{A}$.

4. Exprimer M^3 en fonction de I_3 et M.

Partie II –

On définit une suite (u_n) par $u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = 4$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+1} - 4u_n$.

1. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_k, b_k, c_k tels que $\mathrm{M}^k = \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k & c_k \\ 0 & -c_k & b_k \end{pmatrix}$.

2. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (a_k) et deux relations de récurrence liant les suites (b_k) et (c_k).

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on appelle z_k le nombre complexe $z_k = b_k + i c_k$. Exprimer z_{k+1} en fonction de z_k et montrer que $b_k = \mathrm{Re}\big((1+i)^k\big)$.

4. Retrouver ce dernier résultat en trouvant une relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par la suite (b_k).

5. Montrer que la suite (u_n) est à valeurs entières.

6. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{tr}(\mathrm{M}^n)$.

7. Soit p un nombre premier. On rappelle que pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$ et que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, p divise $a^p - a$ (petit théorème de Fermat).
   Montrer que p divise u_p.