Nombres réels

1 Approximations d'un réel

1.1 Ensembles de nombres

Notation 1.1

- On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres **réels**.
- On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres **rationnels** i.e. l'ensemble des nombres de la forme $\frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Un nombre réel non rationnel est dit **irrationnel**.
- On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres **décimaux** i.e. l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $(a,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.
- On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des **entiers relatifs**.
- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des **entiers naturels**.

Remarque. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemple 1.1

$\sqrt{2}$ est irrationnel.

1.2 Partie entière

Le théorème suivant découle de la construction des entiers.

Théorème 1.1 Propriété fondamentale des entiers

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément (resp. un plus petit élément).

Ce théorème légitime la définition suivante.

Définition 1.1 Partie entière d'un réel

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **partie entière** de x, notée $\lfloor x \rfloor$, le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Proposition 1.1 Caractérisation de la partie entière

Soit $(x,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

$$k = \lfloor x \rfloor \iff x - 1 < k \leqslant x \iff k \leqslant x < k + 1$$

Remarque. Il pourra être utile dans les exercices de remarquer que si n et p sont des **entiers**

$$n < p \iff n \leqslant p - 1 \iff n + 1 \leqslant p$$

REMARQUE. On appelle **partie fractionnaire** de x le réel noté $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. On a donc $\{x\} \in [0, 1[$.

Proposition 1.2 Propriétés de la partie entière

(i) La partie entière est une application croissante.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}$.

(iii) $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

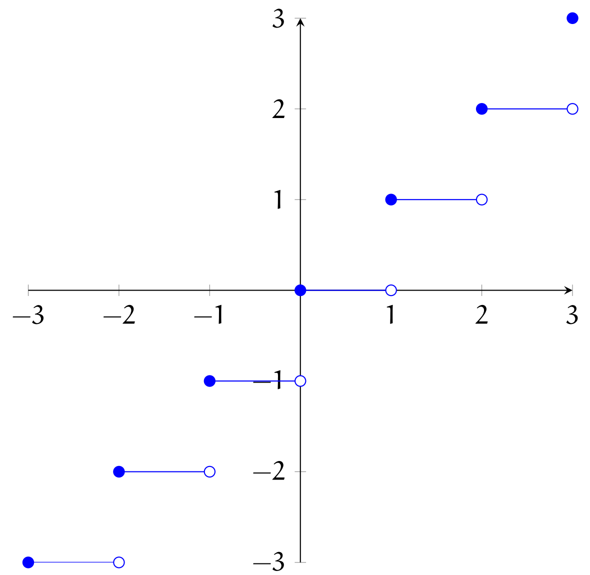
ATTENTION ! En général, $\lfloor x + y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ et $\lfloor nx \rfloor \neq n \lfloor x \rfloor$ même si n est entier.

ATTENTION ! La partie entière est croissante i.e.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \implies \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$$

Mais la partie entière n'est pas strictement croissante. Par exemple, $0 < \frac{1}{2}$ mais $\lfloor 0 \rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor$.

Graphe de la partie entière



- La partie entière est croissante.
- La partie entière est constante par morceaux.
- La partie entière présente des discontinuité en les entiers relatifs.
- La partie entière est continue en tout réel non entier.
- La partie entière est continue à gauche et non à droite en tout entier.

REMARQUE. Pour $x \in \mathbb{R}$, le plus petit entier relatif supérieur ou égal à x se note $\lceil x \rceil$. Si $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$k = \lceil x \rceil \iff x \leqslant k < x + 1 \iff k - 1 < x \leqslant k$$

On a en fait $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

1.3 Approximations décimales

Définition 1.2

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathbb{D}_n = \left\{ \frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z} \right\}$.

- On appelle **valeur décimale approchée de x à 10^{-n} près par défaut** l'unique décimal $\alpha_n \in \mathbb{D}_n$ tel que $\alpha \leqslant x < \alpha + 10^{-n}$.
- On appelle **valeur décimale approchée de x à 10^{-n} près par excès** l'unique décimal $\beta_n \in \mathbb{D}_n$ tel que $\beta - 10^{-n} < x \leqslant \beta$.

Exemple 1.2

$3,1415$ est une valeur décimale approchée de π à 10^{-4} près par défaut.
$3,1416$ est une valeur décimale approchée de π à 10^{-4} près par excès.

Remarque. On peut exprimer α_n et β_n. En fait,

$$\alpha_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \qquad \beta_n = \frac{\lceil 10^n x \rceil}{10^n}$$

Si $x \in \mathbb{D}$, alors $\alpha_n = \beta_n = x$.
Sinon, $\beta_n = \alpha_n + 10^{-n}$.

Remarque. α est le nombre décimal dont les décimales (chiffres après la virgule) sont les n premières décimales de x.

1.4 Densité dans $\mathbb{R}$

Définition 1.3 Densité

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{A}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient au moins un élément de $\mathcal{A}$.

Proposition 1.3 Caractérisation « epsilonesque » de la densité

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$. $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{R}$ **si et seulement si**

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \mathcal{A} \neq \varnothing$$

Proposition 1.4 Caractérisation séquentielle de la densité

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$. $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{R}$ **si et seulement si** pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de $\mathcal{A}$ de limite x.

Proposition 1.5 Densité de $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

2 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

2.1 Majoration et minoration

Définition 2.1 Parties majorées, minorées, bornées

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que $\mathcal{A}$ est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \leqslant M$ pour tout $x \in \mathcal{A}$. Dans ce cas, on dit que M est un **majorant** de $\mathcal{A}$.
- On dit que $\mathcal{A}$ est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant m$ pour tout $x \in \mathcal{A}$. Dans ce cas, on dit que m est un **minorant** de $\mathcal{A}$.
- On dit que $\mathcal{A}$ est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Proposition 2.1

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$. $\mathcal{A}$ est bornée **si et seulement si** il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leqslant K$ pour tout $x \in \mathcal{A}$.

2.2 Maxima et minima

Définition 2.2 Maximum et minimum

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que M est le **maximum** ou le **plus grand élément** de $\mathcal{A}$ si $M \in \mathcal{A}$ et M est un majorant de $\mathcal{A}$. On note alors $m = \min \mathcal{A}$.
- On dit que m est le **minimum** ou le **plus petit élément** de $\mathcal{A}$ si $m \in \mathcal{A}$ et m est un minorant de $\mathcal{A}$. On note alors $M = \max \mathcal{A}$.

Exemple 2.1

-1 et 1 sont respectivement le minimum et le maximum de l'intervalle $[-1, 1]$.

Attention ! Une partie de $\mathbb{R}$ n'admet pas forcément de maximum ou de minimum. Par exemple, $]-1, 1[$ n'admet ni minimum ni maximum. En particulier, -1 et 1 ne sont pas le minimum et le maximum de $]-1, 1[$ puisqu'ils n'appartiennent pas à cet intervalle.

2.3 Bornes inférieures et supérieures

Définition 2.3 Borne inférieure et supérieure

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$.

- On appelle **borne supérieure** de $\mathcal{A}$ le minimum de l'ensemble des majorants de $\mathcal{A}$, **s'il existe**. Dans ce cas, on le note $\sup \mathcal{A}$.
- On appelle **borne inférieure** de $\mathcal{A}$ le maximum de l'ensemble des minorants de $\mathcal{A}$, **s'il existe**. Dans ce cas, on le note $\inf \mathcal{A}$.

Rien ne garantit a priori l'existence d'une borne inférieure ou supérieure. On a néanmoins le théorème suivant.

Théorème 2.1 Propriété de la borne supérieure

Toute partie **non vide** et **majorée** (resp. **minorée**) de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure (resp. inférieure).

Remarque. Ce théorème est admis car il découle directement de la construction de $\mathbb{R}$ qui est hors programme. Pour votre culture, le corps des réels $\mathbb{R}$ est construit à partir des corps des rationnels $\mathbb{Q}$ de façon à ce qu'il possède justement cette propriété de la borne supérieure.

Proposition 2.2

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$.

- Si $M = \max \mathcal{A}$, alors $M = \sup \mathcal{A}$.
- Si $m = \min \mathcal{A}$, alors $m = \inf \mathcal{A}$.

ATTENTION ! Les réciproques sont fausses ! Une partie de $\mathbb{R}$ peut posséder une borne supérieure (resp. inférieure) sans posséder de maximum (resp. minimum).

Exemple 2.2

Les bornes inférieures et supérieures de $[-2, 1[$ sont -2 et 1. De plus, -2 est le plus petit élément de $\mathcal{A}$ mais $[-2, 1[$ ne possède pas de plus grand élément.

Les propositions suivantes permettent de déterminer des bornes supérieures et inférieures en pratique.

Proposition 2.3 Caractérisation « epsilonesque » des bornes inférieures et supérieures

Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

- $c = \inf \mathcal{A}$ **si et seulement si** c est un minorant de $\mathcal{A}$ et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $c + \varepsilon > a$.
- $c = \sup \mathcal{A}$ **si et seulement si** c est un majorant de $\mathcal{A}$ et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $c - \varepsilon < a$

Proposition 2.4 Caractérisation séquentielle des bornes inférieures ou supérieures

Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

- $c = \inf \mathcal{A}$ **si et seulement si** c est un minorant de $\mathcal{A}$ et s'il existe une suite (a_n) d'éléments de $\mathcal{A}$ de limite c.
- $c = \sup \mathcal{A}$ **si et seulement si** c est un majorant de $\mathcal{A}$ et s'il existe une suite (a_n) d'éléments de $\mathcal{A}$ de limite c.

Exercice 2.1

Déterminer les bornes supérieure et inférieure de $\left\{\frac{3}{2^p} - \frac{1}{3^q}, (p, q) \in \mathbb{N}^2\right\}$.

Méthode **Passage à la borne supérieure/inférieure**

- Si $\forall x \in \mathcal{A}, x \leqslant M$, alors $\sup \mathcal{A} \leqslant M$.
- Si $\forall x \in \mathcal{A}, x \geqslant M$, alors $\inf \mathcal{A} \geqslant M$.

ATTENTION ! Le passage à la borne supérieure/inférieure ne conserve que les inégalités **larges**, exactement comme le passage à la limite.

Exercice 2.2

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{x + y \mid (x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}$.

1. On suppose $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ majorées. Montrer que $\sup \mathcal{A} + \mathcal{B} = \sup \mathcal{A} + \sup \mathcal{B}$.
2. On suppose $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ minorées. Montrer que $\inf \mathcal{A} + \mathcal{B} = \inf \mathcal{A} + \inf \mathcal{B}$.

2.4 La droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 2.4 Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

On appelle droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ où les éléments $-\infty$ et $+\infty$ sont définis par les propriétés suivantes :

Prolongement de l'ordre $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, -\infty \leqslant x \leqslant +\infty$.

Prolongement de l'addition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} x+(+\infty) = +\infty + x = +\infty \\ x+(-\infty) = -\infty + x = -\infty \end{cases} \qquad \text{et} \quad \begin{cases} +\infty+(+\infty) = +\infty \\ -\infty+(-\infty) = -\infty \end{cases}$$

Prolongement de la multiplication

$$\begin{array}{ccc} \forall x > 0, & x \times (+\infty) = +\infty, & x \times (-\infty) = -\infty \\ \forall x < 0, & x \times (+\infty) = -\infty, & x \times (-\infty) = +\infty \\ \forall x \in \mathbb{R}, & \dfrac{x}{+\infty} = 0, & \dfrac{x}{-\infty} = 0 \\ (+\infty)\times(+\infty) = +\infty, & (+\infty)\times(-\infty) = -\infty, & (-\infty)\times(-\infty) = +\infty \end{array}$$

Attention ! Formes indéterminées Cette définition ne donne aucun sens aux expressions suivantes $\infty - \infty$, $0 \times \infty$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Corollaire 2.1

Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure et inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 2.5

Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- ◇ $\inf \mathcal{A} = -\infty$ **si et seulement si** pour tout $m \in \mathbb{R}$, il existe $x \in \mathcal{A}$ tel que $x \leqslant m$ (i.e. $\mathcal{A}$ est non minorée).
- ◇ $\sup \mathcal{A} = +\infty$ **si et seulement si** pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $x \in \mathcal{A}$ tel que $x \geqslant M$ (i.e. $\mathcal{A}$ est non majorée).

Proposition 2.6 Caractérisation séquentielle

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$.

- ▶ $\inf \mathcal{A} = -\infty$ **si et seulement si** il existe une suite (a_n) d'éléments de $\mathcal{A}$ de limite $-\infty$.
- ▶ $\sup \mathcal{A} = +\infty$ **si et seulement si** il existe une suite (a_n) d'éléments de $\mathcal{A}$ de limite $+\infty$.

2.5 Extension aux applications

Définition 2.5 Fonction majorée/minorée

Soient E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une application.

- On dit que f est **majorée** sur E si $f(E)$ est majorée. Un majorant de $f(E)$ est appelé un **majorant** de f sur E.
- On dit que f est **minorée**) sur E si $f(E)$ est minorée. Un minorant de $f(E)$ est appelé un **minorant** de f sur E.
- On dit que f est bornée sur E si f est minorée et majorée sur E.

Remarque. On retrouve en fait la définition classique.

- f est majorée sur E s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E,\ f(x) \leqslant M$.
- f est minorée sur E s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E,\ f(x) \geqslant m$.

Dans ce cas, M et m sont respectivement un majorant et un minorant de f sur E.

Proposition 2.7

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application. f est bornée sur E **si et seulement si** $|f|$ est majorée sur E.

Définition 2.6 Maximum/minimum

Soient E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une application.

- On appelle maximum de f sur E le réel $\max f(E)$, **s'il existe**. On le note $\max\limits_E f$ ou $\max\limits_{x \in E} f(x)$.
- On appelle minimum de f sur E le réel $\min f(E)$, **s'il existe**. On le note $\min\limits_E f$ ou $\min\limits_{x \in E} f(x)$.

Remarque. Un maximum (resp. minimum) de f sur E est un majorant (resp. minorant) de f sur E **atteint** par la fonction f. Autrement dit,

- M est un maximum de f sur E si $\forall x \in E,\ f(x) \leqslant M$ et s'il existe $c \in E$ tel que $f(c) = M$,
- m est un minimum de f sur E si $\forall x \in E,\ f(x) \geqslant m$ et s'il existe $c \in E$ tel que $f(c) = m$.

Attention ! Il ne faut pas confondre l'extremum d'une fonction et le point en lequel il est atteint. Notamment, l'extremum est unique mais peut être atteint plusieurs fois. Par exemple, -1 et 1 sont respectivement le minimum et le maximum de $\sin$ sur $\mathbb{R}$, mais ils sont atteints une infinité de fois sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.7 Borne supérieure/inférieure

Soient E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une application.

- On appelle **borne supérieure** de f sur E le réel $\sup f(E)$, **s'il existe**. On le note $\sup\limits_E f$ ou $\sup\limits_{x \in E} f(x)$.
- On appelle **borne inférieure** de f sur E le réel $\inf f(E)$, **s'il existe**. On le note $\inf\limits_E f$ ou $\inf\limits_{x \in E} f(x)$.

Remarque. Pour que f possède une borne supérieure (resp. inférieure) sur E, il est nécessaire et suffisant que E soit non vide et que f soit majorée (resp. minorée) sur E, en vertu de la propriété de la borne supérieure.
Si E est non vide, f admet toujours une borne supérieure et une borne inférieure sur E dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple 2.3

Soit E un ensemble. Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées sur E. Alors $f+g$ est bornée sur E et

$$\sup_E |f+g| \leqslant \sup_E |f| + \sup_E |g|$$

Méthode **Déterminer la borne inférieure/supérieure d'une fonction**

Il suffit d'établir le tableau de variations de la fonction.

Exemple 2.4

Considérons la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$. On obtient facilement son tableau de variation.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Le théorème de la bijection montre que $f(\mathbb{R}_+) = f(\mathbb{R}_-) =]0,1]$ et donc que $f(\mathbb{R}) =]0,1]$. On en déduit que $\max_{\mathbb{R}} f = 1$ et donc que $\sup_{\mathbb{R}} f = 1$. De plus, $\inf_{\mathbb{R}} f = 0$ mais f n'admet pas de minimum sur $\mathbb{R}$. Si elle en admettait un, ce serait 0 mais 0 n'appartient pas à $f(\mathbb{R})$.

3 Intervalles de $\mathbb{R}$

La définition suivante permet de décrire tous les intervalles de $\mathbb{R}$ (fermés, ouverts, majorés, minorés, ...).

Définition 3.1 Intervalle de $\mathbb{R}$

On appelle **intervalle** de $\mathbb{R}$ toute partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ x \leqslant t \leqslant y \implies t \in I$$

Proposition 3.1

Une intersection d'intervalles est un intervalle.

Proposition 3.2

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les ensembles du type $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$ avec $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ en position de « borne ouverte ».

Remarque. On retrouve donc bien tous les intervalles au sens précédent de l'acception.
L'ensemble vide est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ puisqu'il est du type $]a,a[$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Notation 3.1

Si I est un intervalle, on note $\bar{I}$ l'intervalle composé de la réunion de I et des bornes finies de I et on note $\mathring{I}$ l'intervalle I privé de ses bornes.

Remarque. $\bar{I}$ est le plus petit intervalle fermé contenant I.
$\mathring{I}$ est le plus grand intervalle ouvert contenu dans I.

Exemple 3.1

- Si $I =]-1, 2]$, alors $\bar{I} = [-1, 2]$ et $I =]-1, 2[$.
- Si $I =]3, +\infty[$, alors $\bar{I} = [3, +\infty[$ et $I =]3, +\infty[$.
- Si $I =]-\infty, 4]$, alors $\bar{I} =]-\infty, 4]$ et $I =]-\infty, 4[$.