Corrigé TD : Polynômes

Solution 1.

1. Soit $n \geqslant \deg(P)$. Ecrivons la formule de Taylor à l'ordre n pour P,
$$P = P(a) + (X-a)\sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-1},$$
en convenant que la somme est nulle si $n \leqslant 0$. Par unicité dans la division euclidienne de P par $X-a$, le reste recherché vaut $P(a)$.

2. Soit $n > \deg(P)$. Ecrivons la formule de Taylor à l'ordre n pour P,
$$P = P(a) + P'(a)(X-a) + (X-a)^2\sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-2},$$
en convenant que la somme est nulle si $n \leqslant 1$. Par unicité dans la division euclidienne de P par $(X-a)^2$, le reste recherché vaut
$$P(a) + P'(a)(X-a).$$

3. Notons Q et R le quotient et le reste dans la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$. Il existe $u, v \in \mathbb{R}$ tels que $R = uX + v$. Puisque
$$P = (X-a)(X-b)Q + uX + v,$$
on obtient après évaluation en a et b,
$$P(a) = ua + v, \quad P(b) = ub + v,$$
d'où
$$u = \frac{P(b)-P(a)}{b-a} \text{ et } v = \frac{bP(a)-aP(b)}{b-a}.$$

Solution 2.

On remarque que
$$(X-1)B = X^4 - 1,$$
les racines de B sont donc les racines quatrièmes de l'unité *sauf* 1, ie
$$-1, \pm i.$$
Notons Q et R le quotient et le reste dans la division euclidienne de A par B. Il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que
$$R = aX^2 + bX + c.$$
Puisque
$$P = BQ + R,$$
on obtient après évaluation en -1 et $\pm i$,
$$\begin{cases} a - b + c = A(-1) = -2 \\ -a + ib + c = A(i) = i-1 \\ -a - ib + c = A(-i) = -i-1 \end{cases}$$
On a donc
$$a = 0 \ , \ b = 1 \ , \ c = -1.$$
Ainsi
$$R = X - 1.$$

Solution 3.

- Un polynôme P est divisible par $(X-1)^2$ *si et seulement si* 1 est une racine *au moins double* de P, ie
$$P(1) = P'(1) = 0.$$
Le polynôme de l'énoncé est donc divisible par le polynôme $(X-1)^2$ *si et seulement si*
$$a+b+1=0 \text{ et } (n+1)a+nb=0,$$
c'est-à-dire
$$a=n \text{ et } b=-n-1.$$
- Prouvons que le quotient de P par $(X-1)^2$ vaut
$$Q = \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}.$$
Posons
$$V = 1 + X + \ldots + X^n,$$
de sorte que $V' = Q$. On a
$$(X-1)V = X^{n+1} - 1,$$
donc
$$(X-1)^2V = X^{n+2} - X^{n+1} - X + 1,$$
d'où, après dérivation formelle,
$$(X-1)^2V' + 2(X-1)V = (n+2)X^{n+1} - (n+1)X^n - 1,$$
ainsi,
$$(X-1)^2Q = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1.$$

Remarque. Mais non, cher lecteur ! La formule du quotient Q ne tombe pas du ciel...En posant au brouillon la division euclidienne de P par X^2-2X+1, on aboutit rapidement à cette conjecture. Une démonstration par récurrence est possible, tout comme l'utilisation de la formule de Taylor est également envisageable. La solution retenue ci-dessus est plus astucieuse que ces deux méthodes. ■

Solution 4.

1. Ecrivons la formule de Taylor à l'ordre $2n$ pour P_n en 3,
$$P_n = P_n(3) + (X-3)\sum_{k=1}^{2n} \frac{P_n^{(k)}(3)}{k!}(X-3)^{k-1}$$
Par unicité dans la division euclidienne de P_n par $X-3$, le reste recherché vaut
$$P_n(3) = -1.$$
2. Ecrivons la formule de Taylor à l'ordre $2n$ pour P_n en 2 ,
$$P_n = P_n(2) + P_n'(2)(X-2) + (X-2)^2\sum_{k=2}^{2n} \frac{P_n^{(k)}(2)}{k!}(X-2)^{k-2}.$$
Par unicité dans la division euclidienne de P par $(X-2)^2$, le reste recherché vaut
$$P_n(2) + P_n'(2)(X-2),$$
c'est-à-dire,
$$-2n(X-2) - 1.$$

3. Notons Q et R le quotient et le reste dans la division euclidienne de P par $(X-2)^2(X-3)^2$. Il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$R = aX^3 + bX^2 + cX + d.$$

Puisque

$$P = BQ + R,$$

On a

$$P^{(k)}(u) = R^{(k)}(u)$$

pour $k \in \{0, 1\}$ et $u \in \{2, 3\}$, d'où le système suivant,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 8a & + & 4b & + & 2c & + & d & = & -1 \\ 27a & + & 9b & + & 3c & + & d & = & -1 \\ 12a & + & 4b & + & c & & & = & -2n \\ 27a & + & 6b & + & c & & & = & n \end{array}\right.$$

Ainsi, après un banal pivot de Gauss, on trouve finalement

$$a = -n, \quad b = 9n, \quad c = -26n, \quad d = 24n - 1.$$

Solution 5.

1. En reprenant pas à pas la démonstration de l'algorithme de la division euclidienne sur $\mathbb{C}$ de deux polynômes réels , on s'aperçoit que les coefficients du quotient et du reste appartiennent à $\mathbb{R}$ car se calculent au moyen de sommes et de multiplications à partir des coefficients des deux polynômes.

2. Puisque les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et j^2 , on déduit de la question précédente que

$$P_n = X^{2n} + X^n + 1$$

est divisible par $X^2 + X + 1$ *si et seulement si*

$$P_n(j) = P_n(j^2) = 0,$$

c'est-à-dire

$$1 + j^n + j^{2n} = 0$$

et

$$1 + j^{2n} + j^{4n} = 0.$$

- *Cas 1 :* $n \equiv 0[3]$. L'entier n est donc de la forme $n = 3m$ et

$$j^n = j^{2n} = j^{4n} = 1,$$

donc n n'est pas solution.

- *Cas 2 :* $n \equiv 1[3]$. L'entier n est donc de la forme $n = 3m + 1$ et

$$j^n = j^{4n} = j, j^{2n} = j^2,$$

donc n est solution puisque

$$1 + j + j^2 = 0.$$

- *Cas 3 :* $n \equiv 2[3]$. L'entier n est donc de la forme $n = 3m + 2$ et

$$j^n = j^{4n} = j^2, j^{2n} = j,$$

donc n est solution puisque

$$1 + j + j^2 = 0.$$

3. Les racines de X^2+X+1 sont j et j^2. On déduit de la question **1.** que

$$Q_n = (X^4+1)^n - X^4$$

est divisible par X^2+X+1 *si et seulement si*

$$Q_n(j) = Q_n(j^2) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(1+j^4)^n - j^4 = (1+j^8)^n - j^8 = 0.$$

Puisque $j^4 = j, j^8 = j^2$ et $1+j+j^2 = 0$, les conditions sont équivalentes à ,

$$(-1)^n j^{2n} = j \text{ et } (-1)^n j^n = j^2.$$

- Regroupons les différents cas dans un tableau.

	$(-1)^n j^n$	$(-1)^n j^{2n}$
$n \equiv 0[6]$	1	1
$n \equiv 1[6]$	$-j$	$-j^2$
$n \equiv 2[6]$	j^2	j
$n \equiv 3[6]$	-1	-1
$n \equiv 4[6]$	j	j^2
$n \equiv 5[6]$	$-j^2$	$-j$

- L'ensemble recherché est donc

$$\mathcal{E} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 2[6]\}.$$

Solution 6.

écrivons la division euclidienne de

$$P = (\cos\theta + X\sin\theta)^n$$

par X^2+1 : comme le degré du diviseur est égal à 2, il existe deux nombres *réels* α et β tels que

$$P = (X^2+1)Q + \alpha X + \beta.$$

Débarrassons-nous du quotient en substituant i à l'indéterminée. On en déduit que $P(i) = \beta + i\alpha$ et (formules de Moivre-Euler) donc :

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = \beta + i\alpha.$$

Comme α et β sont réels (il ne peut pas nuire d'insister sur ce point), on en déduit que le reste de la division euclidienne de P par X^2+1 est égal à

$$(\sin n\theta)X + \cos n\theta.$$

Solution 7.

On vérifie que $P_n(1) = P_n'(1) = 0$ et $P_n''(1) = n(n+1)$. D'après la formule de Taylor,

$$\begin{aligned} P_n = \frac{n(n+1)}{2}(X-1)^2 \\ + \sum_{k=3}^{n+1} \frac{P_n^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k, \end{aligned}$$

donc le reste de la division euclidienne de P_n par $(X-1)^3$ est égal à

$$\frac{n(n+1)}{2}(X-1)^2.$$

Solution 8.

Par hypothèse, il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 tels que

$$P = (X+1)Q_1 + 7 = (X+5)Q_2 + 3.$$

On en déduit que $P(-1) = 7$ et $P(-5) = 3$ (en substituant -1 et -5 à l'indéterminée X).

écrivons maintenant la division euclidienne de P par

$$X^2 + 6X + 5 = (X+1)(X+5).$$

Il existe deux réels α et β tels que

$$P = (X+1)(X+5)Q + \alpha X + \beta.$$

Substituons à nouveau -1 et -5 à X : on en déduit le système

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = 7 \\ -5\alpha + \beta = 3 \end{cases}$$

dont l'unique solution est

$$(\alpha, \beta) = (1, 8).$$

Le reste de la division euclidienne est donc $X + 8$.

Solution 9.

Notons Q_n et R_n respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de P_n par X^2+1. Comme $\deg(X^2+1) = 2$, R_n est de degré au plus 1 et il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$P_n = (X^2+1)Q_n + a_n X + b_n.$$

En évaluant cette égalité en i, on aboutit à :

$$b_n + i a_n = P_n(i).$$

Or,

$$\begin{aligned} P_n(i) &= \prod_{k=1}^{n} \Big(i\sin(k\pi/n) + \cos(k\pi/n) \Big) \\ &= \prod_{k=1}^{n} e^{ik\pi/n} = e^{i\pi(1+\cdots+n)/n} \\ &= e^{i(n+1)\pi} = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

D'où $a_n = 0$ et $b_n = (-1)^{n+1}$ et
$$R_n = (-1)^{n+1}.$$

Solution 10.

Les racines de Q sont j et j^2. Ce sont des racines simples et conjuguées. Pour prouver que Q divise P_m, il est nécessaire et suffisant de prouver que j et j^2 sont des racines d'ordre au moins 1 de P_m. Comme P_m est un polynôme à coefficients réels, ses racines sont conjuguées donc si j est une racine de P_m, j^2 en est aussi une. Donc Q divise P_m si et seulement si j est une racine de P_m.
On a $P_m(j) = (j+1)^m - j^m - 1$ mais on sait que $j^2+j+1=0$ donc $P_m(j) = (-j^2)^m - j^m - 1$. En utilisant le fait que
$$j^2+j+1=0 \quad \text{et} \quad j^3=1,$$
un rapide calcul nous donne :
$$\begin{array}{lll} P_0(j) = -3 & P_1(j) = 0 & P_2(j) = 2j \\ P_3(j) = -3 & P_4(j) = 2j^2 & P_5(j) = 0 \end{array}$$
Si on poursuit le calcul pour des plus grandes valeurs de m, on constate que l'on retombe sur les mêmes valeurs. Prouvons que la suite $(P_m(j))_{m\in\mathbb{N}}$ est périodique de période 6. En effet,
$$\begin{aligned} P_{m+6}(j) &= (-j^2)^{m+6} - j^{m+6} - 1 \\ &= (-j^2)^m j^{12} - j^m j^6 - 1 \\ &= (-j^2)^m - j^m - 1 = P_m(j) \end{aligned}$$
Les seuls entiers m tels que $P_m(j) = 0$ sont les entiers de la forme $1+6k$ ou $5+6k$, où $k\in\mathbb{N}$. D'après ce qui précède, ce sont les seuls entiers tels que Q divise P_m.

Solution 11.

1. On sait que j est une racine de X^2+X+1. On en déduit que $j+1=-j^2$. De plus, $2009 \equiv 2[3]$ (2007 est divisible par 3 car la somme de ses chiffres vaut 9). Or on sait également que $j^3=1$. Donc
$$j^{2009} = j^2 \quad \text{et} \quad (j+1)^{2009} = (-1)^{2009} j^4 = -j.$$
Posons $P = (X+1)^{2009} + X^{2009} + 1$. On a
$$P(j) = j^2 - j + 1 = -2j \neq 0.$$
Par conséquent, j n'est pas une racine de P et X^2+X+1 ne divise pas P.

2. D'après la question précédente, la valeur j^n dépend de la congruence de n modulo 3 et $(j+1)^n$ dépend des congruences de n modulo 2 et modulo 3. Si on pose $P_n = (X+1)^n + X^n + 1$, $P_n(j)$ devrait dépendre de la congruence de n modulo 6. On a :
$$P_n(j) = (-1)^n j^{2n} + j^n + 1$$
   - Si $n \equiv 0[6]$, alors $P_n(j) = 3 \neq 0$.
   - Si $n \equiv 1[6]$, alors $P_n(j) = -j^2 + j + 1 = -2j^2 \neq 0$.
   - Si $n \equiv 2[6]$, alors $P_n(j) = j + j^2 + 1 = 0$.
   - Si $n \equiv 3[6]$, alors $P_n(j) = 1 \neq 0$.
   - Si $n \equiv 4[6]$, alors $P_n(j) = j^2 + j + 1 = 0$.
   - Si $n \equiv 5[6]$, alors $P_n(j) = -j + j^2 + 1 = -2j$.

   Comme P_n est à coefficients réels, j^2 est une racine de P_n *si et seulement si* j est une racine de P_n. Donc j et j^2 sont des racines de P_n *si et seulement si* $n \equiv 2[6]$ ou $n \equiv 4[6]$. Par conséquent, X^2+X+1 divise P_n pour ces valeurs de n.

Solution 12.

Solution 13.

1. D est bien une application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.
Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Il existe des polynômes $Q_1, Q_2, R_1, R_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que
$$\begin{aligned} P_1 &= AQ_1 + R_1 && \text{et } \deg R_1 < d \\ P_2 &= AQ_2 + R_2 && \text{et } \deg R_2 < d \end{aligned}$$
Ceci signifie que $D(P_1) = R_1$ et $D(P_2) = R_2$. On a alors $\lambda P_1 + \mu P_2 = A(\lambda Q_1 + \mu Q_2) + \lambda R_1 + \mu R_2$ et $\deg(\lambda R_1 + \mu R_2) \leqslant \max(\deg(\lambda R_1), \deg(\mu R_2)) < d$. Ainsi $\lambda R_1 + \mu R_2$ est le reste de la division euclidienne de $\lambda P_1 + \mu P_2$ par A. Autrement dit, $D(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda D(P_1) + \mu D(P_2)$.

2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $R = D(P)$. On a donc $\deg R < \deg A$. Puisque $R = 0 \times A + R$, on en déduit $D(R) = R$. Autrement dit $D^2(P) = D(P)$. Ceci étant valable pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a donc $D^2 = D$ et D est un projecteur de $\mathbb{K}[X]$.

3. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg D(P) < d$ i.e. $\deg D(P) \leqslant d-1$. Ainsi $\operatorname{Im} D \subset \mathbb{K}_{d-1}[X]$. De plus, on a vu que si $R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$, alors $R = D(R) \in \operatorname{Im} D$. Ainsi $\mathbb{K}_{d-1}[X] \subset \operatorname{Im} D$. D'où $\operatorname{Im} D = \mathbb{K}_{d-1}[X]$.

4. Un polynôme P appartient au noyau de D *si et seulement si* A divise P. Autrement dit, $\operatorname{Ker} D = A\mathbb{K}[X]$. Puisque A est un projecteur,
$$\mathbb{K}[X] = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A = A\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{d-1}[X]$$

Solution 14.

Raisonnons par l'absurde en supposant P_n réductible sur $\mathbb{Q}$. Il existe alors deux polynômes U et V non constants de $\mathbb{Q}[X]$. Notons a le pgcd des dénominateurs des coefficients rationnels (réduits) des polynômes U et V.

- *Commençons par établir que l'on peut toujours supposer* U *et* V *à coefficients dans* $\mathbb{Z}$. On a alors
$$a^2 P_n = (aU)(aV).$$
Posons $U_1 = aU$ et $V_1 = aV$. Ces polynômes sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Notons $\gamma(P)$ le contenu d'un polynôme P de $\mathbb{Z}[X]$. On a
$$\gamma(a^2 P_n) = a^2 \gamma(P_n) = \gamma(U_1)\gamma(V_1).$$
On a
$$U_1 = \gamma(U_1) U_2, \;\; V_1 = \gamma(V_1) V_2,$$
d'où
$$a^2 P_n = \gamma(U_1)\gamma(V_1) U_2 V_2,$$
et donc
$$a^2 P_n = a^2 \gamma(P_n) U_2 V_2,$$
puis
$$P_n = \gamma(P_n) U_2 V_2,$$
avec U_2 et V_2 non constants : P_n est donc le produit de deux polynômes non constants à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

- Notons
$$U = \sum_{k \geqslant 0} \alpha_k X^k, \;\; V = \sum_{k \geqslant 0} \beta_k X^k.$$
Par le morphisme d'anneaux de réduction modulo p (de $\mathbb{Z}[X]$ dans $\mathbb{F}_p[X]$), on obtient l'égalité
$$\overline{P} = \overline{U}\overline{V}.$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \overline{a_k} = \sum_{\ell=0}^{k} \overline{\alpha_\ell}\,\overline{\beta_{k-\ell}}.$$

On a en particulier

$$\overline{a_0} = \overline{\alpha_0}\,\overline{\beta_0} = 0$$

car p divise a_0. Ansi, on a par exemple $\alpha_0 = 0$. Mais alors $\beta_0 \neq 0$ car p^2 ne divise pas a_0. Comme

$$0 = \overline{a_1} = \overline{\alpha_0}\,\overline{\beta_1} + \overline{\alpha_1}\,\overline{\beta_0} = \overline{\alpha_1}\,\overline{\beta_0}$$

d'où $\overline{\alpha_1} = 0$. Par une récurrence facile, on prouve que

$$\forall k, \quad \overline{\alpha_k} = 0$$

ce qui est absurde car alors $\overline{U} = 0$ mais $\overline{P} \neq 0$ puisque $\overline{a_n} \neq 0$.

Solution 15.

1. Recherchons les racines complexes de P_n. Soit z une racine de P_n telle que $z^2 \neq 1$. On a alors

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (z^2)^k = \frac{1 - z^{2n}}{1 - z^2}.$$

Les racines de P_n sont donc les racines $2n$—ièmes de l'unité sauf ± 1. Puisque P_n est unitaire, on en déduit la décomposition sur $\mathbb{C}$ de P_n,

$$\prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{2ik\frac{\pi}{2n}}) \prod_{k=n+1}^{2n-1} (X - e^{2ik\frac{\pi}{2n}})$$

car $e^{i0} = 1$ et $e^{2in\pi/2n} = -1$ sont à exclure ! Ainsi,

$$\begin{aligned}
P_n &= \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{ik\frac{\pi}{n}}) \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{i(2n-k)\frac{\pi}{n}}) \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{ik\frac{\pi}{n}}) \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{-ik\frac{\pi}{n}}) \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{ik\frac{\pi}{n}})(X - e^{-ik\frac{\pi}{n}}) \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} (X^2 - 2\cos(k\pi/n)X + 1)
\end{aligned}$$

2. Calculons $P_n(1)$. On a

$$P_n(1) = \prod_{k=1}^{n-1} 2(1 - \cos(k\pi/n)) = \prod_{k=1}^{n-1} 4\sin^2(k\pi/2n)$$

Or $P_n(1) = n$, donc

$$\left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/2n) \right)^2 (2^{n-1})^2 = n.$$

On remarque alors que $\forall 1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\sin(k\pi/2n) > 0,$$

d'où

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/2n) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

3. Calculons $P_n(i)$. On a clairement

$$\begin{aligned} P_n(i) &= \prod_{k=1}^{n-1}(-2i\cos(k\pi/n)) \\ &= (-1)^{n-1}2^{n-1}i^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\cos(k\pi/n) \end{aligned}$$

Or,

$$P_n(i) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k = (1-(-1)^n)/2,$$

d'où la discussion suivante...

- *Cas* 1 *:* $n \in 2\mathbb{N}$. On a
$$\prod_{k=1}^{n-1}\cos(k\pi/n) = 0,$$
ce qui n'est pas surprenant puisque que lorsque $k = n/2 \in \mathbb{N}$, on a $\cos(k\pi/n) = 0$!
- *Cas* 2 *:* $n \in 2\mathbb{N}+1$. On a
$$\prod_{k=1}^{n-1}\cos(k\pi/n) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2^{n-1}}.$$

Solution 16.

1. En utilisant les racines cubiques de -1 : $-1, -j, -j^2$ ou la factorisation de $a^n + b^n$ lorsque n est impair, on trouve

$$A = (X+1)(X^2-X+1).$$

2. Variant les plaisirs en appliquant les identités remarquables,

$$B = (X^2+1)^2 - 2X^2 = (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$$

Les deux trinômes étant de discriminants strictement négatifs, ils sont irréductibles sur $\mathbb{R}$.

3. Bis repetita !

$$C = (X^2+1)^2 - X^2 = (X^2-X+1)(X^2+X+1)$$

Les deux trinômes étant de discriminants strictement négatifs, ils sont irréductibles sur $\mathbb{R}$.

4. En utilisant la factorisation de $a^n + b^n$ lorsque n est impair, on trouve

$$D = (X^2+1)(X^4-X^2+1)$$

Or,

$$\begin{aligned} X^4 - X^2 + 1 &= (X^2+1)^2 - 3X^2 \\ &= (X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1) \end{aligned}$$

Les deux trinômes étant de discriminants strictement négatifs, ils sont irréductibles sur $\mathbb{R}$, et la décomposition de D sur $\mathbb{R}$ est achevée.

5. On a

$$\begin{aligned}E &= (X^4+1)^2 - 2X^4\\ &= (X^4-\sqrt{2}X^2+1)(X^4+\sqrt{2}X^2+1)\end{aligned}$$

Poursuivons dans cette voie...

$$\begin{aligned}X^4-\sqrt{2}X^2+1 &= (X^2+1)^2-(2+\sqrt{2})X^2\\ &= (X^2-\sqrt{2+\sqrt{2}}X+1)\times\\ &\qquad\times(X^2+\sqrt{2+\sqrt{2}}X+1)\end{aligned}$$

One more time...

$$\begin{aligned}X^4+\sqrt{2}X^2+1 &= (X^2+1)^2-(2-\sqrt{2})X^2\\ &= (X^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}X+1)\times\\ &\qquad\times(X^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}X+1)\end{aligned}$$

Les quatre trinômes étant de discriminants strictement négatifs, ils sont irréductibles sur $\mathbb{R}$, et la décomposition de E sur $\mathbb{R}$ est achevée.

6. On ne change pas une méthode qui gagne !

$$\begin{aligned}F &= (X^4+1)^2 - X^4\\ &= (X^4-X^2+1)(X^4+X^2+1)\end{aligned}$$

Poursuivons dans cette voie...

$$\begin{aligned}X^4-X^2+1 &= (X^2+1)^2-2X^2\\ &= (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)\end{aligned}$$

One more time...

$$\begin{aligned}X^4+X^2+1 &= (X^2+1)^2-X^2\\ &= (X^2-X+1)(X^2+X+1)\end{aligned}$$

Les quatre trinômes étant de discriminants strictement négatifs, ils sont irréductibles sur $\mathbb{R}$, et la décomposition de E sur $\mathbb{R}$ est achevée.

7. Ca devient lassant...

$$\begin{aligned}X^4-X^2-12 &= (X^2-1/2)^2-\frac{49}{4}\\ &= (X^2-4)(X^2+3)\\ &= (X-2)(X+2)(X^2+3)\end{aligned}$$

8. On a

$$\begin{aligned}H &= (X^3-1)(X^3+1)\\ &= (X-1)(X^2+X+1)(X+1)(X^2-X+1)\end{aligned}$$

Solution 17.

- Les racines de X^n+1 sont les racines-ièmes de -1. Puisque $e^{\frac{i\pi}{n}}$ est l'une d'entre-elles, les autres sont

$$\alpha_k = e^{\frac{i\pi}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \ , \ k \leqslant n-1.$$

- On en déduit immédiatement *la décomposition du polynôme sur* $\mathbb{C}$.

$$X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \alpha_k).$$

- *Décomposition sur* $\mathbb{R}$.

  ❧ *Cas 1 :* n *est pair,* $n = 2m$. On a alors , $\forall 0 \leqslant k \leqslant 2m-1$,

$$\overline{\alpha_k} = \alpha_{n-1-k},$$

  d'où

$$\begin{aligned} X^n + 1 &= \prod_{k=0}^{m-1} (X - \alpha_k)(X - \overline{\alpha_k}) \\ &= \prod_{k=0}^{m-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2m}\right) X + 1 \right) \end{aligned}$$

  ❧ *Cas 2 :* n *est pair,* $n = 2m+1$. On a alors, $\forall k \leqslant 2m-1$,

$$\overline{\alpha_k} = \alpha_{n-1-k},$$

  d'où

$$\begin{aligned} X^n + 1 &= (X-1) \prod_{k=0}^{m-1} (X - \alpha_k)(X - \overline{\alpha_k}) \\ &= (X-1) \\ &\quad \times \prod_{k=0}^{m-1} (X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2m+1}\right) X + 1) \end{aligned}$$

Solution 18.

1. On a

$$P(i) = P'(i) = 0,$$

   mais

$$P''(i) = -8i \neq 0.$$

   Le nombre i est donc une racine de P de multiplicité deux.

2. Puisque P est à coefficients réels , $-i$ est également une racine de P de multiplicité deux. P est donc divisible par

$$(X-i)^2(X+i)^2 = (X^2+1)^2.$$

   En posant la division euclidienne , on trouve

$$P = (X^2+1)^2(X^2+X+1).$$

   Le dernier trinôme étant de discriminant strictement négatif, il est irréductible sur $\mathbb{R}$, et la décomposition de P sur $\mathbb{R}$ est finie.

Solution 19.

1. D'après le *cours,*

$$\begin{aligned}
X^{2n+1}-1 &= \prod_{k=0}^{2n}(X-e^{2ik\pi/(2n+1)})\\
&= (X-1)\prod_{k=1}^{2n}(X-e^{2ik\pi/(2n+1)})\\
&= (X-1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2-2\cos\frac{2k\pi}{2n+1}X+1\right).
\end{aligned}$$

Remarque. On passe de la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ à la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ en regroupant par paires les racines complexes conjuguées. ■

2. D'après la formule de la série géométrique,

$$(X-1)\sum_{k=0}^{2n}X^k = X^{2n+1}-1.$$

D'après la factorisation précédente,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n}X^k &= \prod_{k=1}^{2n}(X-e^{2ik\pi/(2n+1)})\\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(X^2-2\cos\frac{2k\pi}{2n+1}X+1\right).
\end{aligned}$$

3. On s'inspire encore de la formule de la série géométrique :

$$(1-X^3)(1+X^3+X^6+X^9) = 1-X^{12}.$$

En notant R, l'ensemble des racines douzièmes de l'unité qui ne sont pas des racines cubiques de l'unité :

$$R = \left\{-1,\ e^{\pm i\pi/6},\ e^{\pm i\pi/3},\ \pm i,\ e^{\pm 5i\pi/6}\right\},$$

la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$1+X^3+X^6+X^9 = \prod_{\omega\in R}(X-\omega).$$

On associe les racines conjuguées par paires pour en déduire la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned}
&(X+1)\left(X^2-\sqrt{3}X+1\right)\left(X^2-X+1\right)\\
&\quad\times\ (X^2+1)\left(X^2+\sqrt{3}X+1\right).
\end{aligned}$$

Solution 20.

1. On a :

$$P(2) = 16-72+120-88+24 = 0,$$
$$P'(2) = 32-27\times 4+120-44,$$

et

$$P''(2) = 12\times 4-54\times 2+60 = 0.$$

Comme

$$P^{(3)}(2) = 24\times 2-9\times 6 = -8 \neq 0,$$

2 est une racine de P de multiplicité 3.

2. On sait que P est divisible dans $\mathbb{R}[X]$ par $(X-2)^3$. Le quotient de P par $(X-2)^3$ est un polynôme de degré un et unitaire, il ext donc de la forme $X-a$, avec $a \in \mathbb{R}$. Comme
$$P = (X-2)^3(X-a),$$
on a
$$P(0) = 24 = 8a$$
et donc $a = 3$.

3. D'après ce qui précède,
$$P = (X-2)^3(X-3).$$

Solution 21.

1. Comme $j^3 = 1$ et $j^2 + j + 1 = 0$, on a
$$P(j) = j^2 + 2 + 3j + 2j^2 + 1 = 3(j^2 + j + 1) = 0$$
et
$$P'(j) = 8j + 12j^2 + 12 + 4j = 12(j^2 + j + 1) = 0.$$
Comme $P''(j) \neq 0$, j est une racine de P de multiplicité 2.

2. Comme P est pair, $-j$ est également une racine de multiplicité 2 de P.

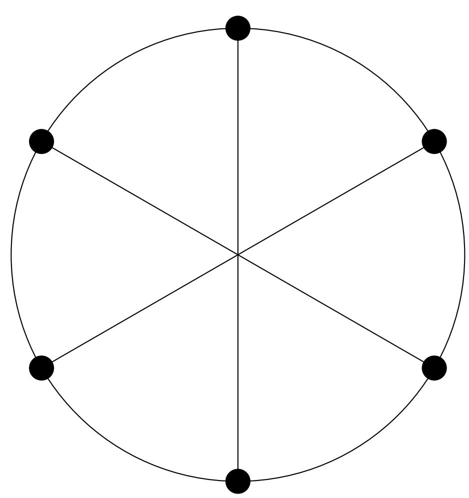
3. Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, les nombres $\pm$, j et leurs conjugués $\pm j^2$ sont des racines de multiplicité deux de P. Comme P est de degré 8 et de coefficient dominant 1, on en déduit que
$$P = (X-j)^2(X-j^2)^2(X+j)^2(X+j^2)^2$$
et donc
$$P = (X^2 + X + 1)^2(X^2 - X + 1)^2.$$

Solution 22.

1. Une racine cubique de e^{ia} est $e^{\frac{ia}{3}}$. Les trois racines cubiques de e^{ia} sont donc $e^{\frac{ia}{3}}$, $je^{\frac{ia}{3}}$ et $\bar{j}e^{\frac{ia}{3}}$.

2. On sait que $Z^2 - 2Z\cos a + 1 = (Z - e^{ia})(Z - e^{-ia})$.Ainsi (E) équivaut à $(z^3 - e^{ia})(z^3 - e^{-ia}) = 0$. Les solutions de (E) sont donc les racines cubiques de e^{ia} et e^{-ia}. Ce sont donc $e^{\frac{ia}{3}}$, $je^{\frac{ia}{3}}$, $\bar{j}e^{\frac{ia}{3}}$, $e^{-\frac{ia}{3}}$, $je^{-\frac{ia}{3}}$ et $\bar{j}e^{-\frac{ia}{3}}$.

3. **a.** Dans ce cas, les solutions de (E) sont $e^{\frac{i\pi}{6}}$, $e^{\frac{5i\pi}{6}}$, $e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i$, $e^{-\frac{i\pi}{6}}$, $e^{-\frac{5i\pi}{6}}$, $e^{-\frac{3i\pi}{2}} = i$.



b. On factorise à l'aide des racines et on regroupe les racines conjuguées :

$$\begin{aligned}
z^6+1 &= (z-e^{\frac{i\pi}{6}})(z-e^{-\frac{i\pi}{6}})(z-e^{\frac{5i\pi}{6}})(z-e^{-\frac{5i\pi}{6}})(z+i)(z-i) \\
&= (z^2-2z\cos\frac{\pi}{6}+1)(z^2-2z\cos\frac{5\pi}{6}+1)(z^2+1) \\
&= (z^2-z\sqrt{3}+1)(z^2+z\sqrt{3}+1)(z^2+1)
\end{aligned}$$

SOLUTION 23.

1. On vérifie que $P(1)=P(2)=Q(1)=Q(2)=0$. On peut donc factoriser P et Q par $(X-1)(X-2)$. On trouve

$$P=(X-1)(X-2)(3X^2+1)$$
$$Q=(X-1)(X-2)(X^2+1)$$

Ce sont bien des décompositions en facteurs irréductibles de P et Q sur $\mathbb{R}[X]$ puisque $3X^2+1$ et X^2+1 sont des polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif. On en déduit

$$P=(X-1)(X-2)(3X+i)(3X-i)$$
$$Q=(X-1)(X-2)(X+i)(X-i)$$

qui sont des décompositions de P et Q en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

2. On a clairement

$$P\wedge Q=(X-1)(X-2)$$
$$P\vee Q=(X-1)(X-2)(X^2+1)\left(X^2+\frac{1}{3}\right)$$

Attention, le PPCM doit être unitaire.

SOLUTION 24.

S'il existe $m\in\mathbb{Z}$ tel que $\theta=\frac{m\pi}{n}$, alors $P=X^{2n}-2(-1)^mX^n+1$.

► Si m est pair,

$$P=(X^n-1)^2=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$. Il faut alors distinguer suivant la parité de n.
Si n est pair, alors

$$P=(X-1)^2(X+1)^2\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(X^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}+1\right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.
Si n est impair, alors

$$P=(X-1)^2\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(X^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}+1\right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.

- Si m est impair,

$$P = (X^n + 1)^2 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{(2k+1)i\pi}{n}}\right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$. Il faut alors distinguer suivant la parité de n.
Si n est pair, alors

$$P = \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(X^2 - 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + 1\right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.
Si n est impair, alors

$$P = (X+1)^2 \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \left(X^2 - 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + 1\right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Dans toutes les expressions précédentes, on convient qu'un produit indexé sur le vide vaut 1 et les facteurs sont bien irréductibles car les cosinus ne valent ni 1 ni -1.
On suppose maintenant qu'il n'existe pas d'entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \frac{m\pi}{n}$. Remarquons que

$$P = \left(X^n - e^{ni\theta}\right)\left(X^n - e^{-ni\theta}\right)$$

On a

$$X^n - e^{ni\theta} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$$

et par conjugaison

$$X^n - e^{-ni\theta} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{-i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$$

La décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est donc

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right) \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{-i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$$

On en déduit que la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right)$$

Les facteurs sont bien irréductibles car la condition $\theta \notin \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$ assure qu'aucun des cosinus ne vaut 1 ou -1.

Solution 25.

Première méthode :
Notons $D = (X^n - 1) \wedge (X^p - 1)$. On a

$$X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$$

et

$$X^p - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_p} (X - \omega)$$

Donc

$$D = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_p} (X - \omega)$$

Montrons que $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_p = \mathbb{U}_{n \wedge p}$.

- Soit $z \in \mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_p$. Notons $d = n \wedge p$. D'après le théorème de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $un + vp = d$. Par conséquent
$$z^d = (z^n)^u (z^p)^v = 1$$
Donc $z \in \mathbb{U}_d$.
- Soit $z \in \mathbb{U}_d$. On a donc $z^d = 1$. Comme $d|n$, on a également $z^n = 1$ donc $z \in \mathbb{U}_n$. De même, $z \in \mathbb{U}_p$. Ainsi $z \in \mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_p$.

On a donc par double inclusion $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_p = \mathbb{U}_{n \wedge p}$. Ainsi
$$D = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_d} (X - \omega) = X^d - 1$$

Seconde méthode :
Posons $r_0 = n$ et $r_1 = p$ et notons $(r_k)_{0 \leqslant k \leqslant N}$ la suite des restes dans l'algorithme d'Euclide appliqué à n et p. En particulier, $r_{N-1} = n \wedge p$ et $r_N = 0$.
Soit $k \in [\![0, N-2]\!]$. Alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $r_k = qr_{k+1} + r_{k+2}$.
$$X^{r_k - r_{k+2}} - 1 = X^{qr_{k+1}} - 1 = (X^{r_{k+1}} - 1)Q$$
en posant $Q = \sum_{j=0}^{q-1} X^{jr_{k+1}}$. Il s'ensuit que
$$X^{r_k} - X^{r_{k+2}} = (X^{r_{k+1}} - 1)X^{r_{k+2}} Q$$
ou encore
$$X^{r_k} - 1 = X^{r_{k+2}} - 1 + (X^{r_{k+1}} - 1)\tilde{Q}$$
en posant $\tilde{Q} = X^{r_{k+2}} Q$. On en déduit classiquement que $(X^{r_k} - 1) \wedge (X^{r_{k+1}} - 1) = (X^{r_{k+1}} - 1) \wedge (X^{r_{k+2}} - 1)$.
Remarque. On peut simplifier les choses en utilisant des congruences de polynômes.
$$X^{r_{k+1}} \equiv 1 \, [X^{r_{k+1}} - 1]$$
donc
$$X^{qr_{k+1}} \equiv 1 \, [X^{r_{k+1}} - 1]$$
puis
$$X^{qr_{k+1} + r_{k+2}} \equiv X^{r_{k+2}} \, [X^{r_{k+1}} - 1]$$
et enfin
$$X^{r_k} - 1 \equiv X^{r_{k+2}} - 1 \, [X^{r_{k+1}} - 1]$$
ce qui permet d'aboutir également à $(X^{r_k} - 1) \wedge (X^{r_{k+1}} - 1) = (X^{r_{k+1}} - 1) \wedge (X^{r_{k+2}} - 1)$. ■

Finalement, $(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = (X^{r_{N-1}} - 1) \wedge (X^{r_N} - 1) = (X^{n \wedge p} - 1) \wedge 0 = (X^{n \wedge p} - 1)$.

Solution 26.

Puisque P et Q sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et, a fortiori, à coefficients dans le corps $\mathbb{Q}$, le théorème de Bézout assure l'existence de deux polynômes U et V de $\mathbb{Q}[X]$ tels que $UP + VQ = 1$. En notant d le ppcm des dénominateurs des coefficients de U et V écrits sous forme fractionnaire et en posant $A = dU$ et $B = dV$, on a $AP + BQ = d$ avec A et B dans $\mathbb{Z}[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A(n)P(n) + B(n)Q(n) = d$ de sorte que u_n divise d.
Montrons alors que (u_n) est d-périodique. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$
$$(n + d)^k = n^k + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} n^{k-j} d^j = n^k + cd$$
avec $c \in \mathbb{N}$. On en déduit que $P(n + d) = P(n) + ad$ et $Q(n + d) = Q(n) + bd$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Puisque u_n divise $P(n)$, $Q(n)$ et d, u_n divise $P(n + d)$ et $Q(n + d)$ donc u_n divise u_{n+d}. De même, u_{n+d} divise $P(n + d)$, $Q(n + d)$ et d de sorte que u_{n+d} divise $P(n)$ et $Q(n)$ et donc u_n. On en déduit que $u_{n+d} = u_n$, ce qui prouve que la suite (u_n) est d-périodique.

Solution 27.

Il n'y a aucune restriction à supposer P unitaire. Puisque P est scindé, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tels que $\mathrm{P} = \prod_{i=1}^n (\mathrm{X} - \alpha_i)^{\mu_i}$. Puisque $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}'$ divise P, il existe $(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}' = \prod_{i=1}^n (\mathrm{X} - \alpha_i)^{\nu_i}$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Puisque α_i est une racine de P de multiplicité μ_i, la caractérisation de la multiplicité à l'aide des dérivées successives montre que α_i est une racine de P' de multiplicité $\mu_i - 1$. Puisque $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}'$ divise P', $\nu_i \leqslant \mu_i - 1$. Finalement, $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}'$ divise $\prod_{i=1}^n (\mathrm{X} - \alpha_i)^{\mu_i - 1}$. Réciproquement, $\prod_{i=1}^n (\mathrm{X} - \alpha_i)^{\mu_i - 1}$ divise bien P et P' donc divise également $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}'$. On en déduit que $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}' = \prod_{i=1}^n (\mathrm{X} - \alpha_i)^{\mu_i - 1}$.

Solution 28.

1. Notons P le polynôme définissant l'équation $\mathcal{E}$. On remarque que pour tout $z \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{Im}(\mathrm{P}(z)) = z - 2z^2$$
et
$$\mathrm{Q}(z) = \mathrm{Re}(\mathrm{P}(z)) = 2z^3 - 7z^2 + 11z - 4.$$
Si un nombre z est une racine réelle de $\mathcal{E}$, *nécessairement*
$$z = 0 \text{ ou } z = \frac{1}{2}.$$
On vérifie que seule $\frac{1}{2}$ est également racine de Q.

2. Après division euclidienne ,
$$\mathrm{P}(z) = 2\left(z - \frac{1}{2}\right)(z^2 - (3+i)z + 4).$$
Le discriminant Δ de
$$z^2 - (3+i)z + 4$$
vaut
$$\Delta = -8 + 6i.$$
Soit $\delta = a + ib$ une racine carrée de Δ. On a alors
$$|\delta|^2 = a^2 + b^2 = 10$$
et
$$\mathrm{Re}(\delta^2) = a^2 - b^2 = -8.$$
Puisque $2ab = 6$, on obtient
$$\delta = \pm(1 + 3i).$$
D'où les solutions de l'équation $\mathcal{E}$,
$$\frac{1}{2}, \ 1 - i, \ 2(1+i).$$

Solution 29.

Si α est une racine de P_n de multiplicité au moins égale à 2, alors
$$\mathrm{P}_n(\alpha) = \mathrm{P}_n'(\alpha) = 0.$$
Par différence, on en déduit que
$$\mathrm{P}_n(\alpha) - \mathrm{P}_n'(\alpha) = \frac{\alpha^n}{n!} = 0,$$
donc $\alpha = 0$. Or, de manière évidente, 0 n'est pas une racine de P_n (puisque $\mathrm{P}_n(0) = 1$), donc les racines de P_n sont toutes des racines simples.

Solution 30.

1. On remarque que $(X-1)P_n = X^n - 1$ donc les racines de P_n sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité hormis 1. On a donc

$$P_n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

2. Calculons $P_n(1)$ de deux façons. D'une part, $P_n(1) = n$ en utilisant l'expression de P_n donnée dans l'énoncé. D'autre part,

$$\begin{aligned}
P_n(1) &= \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{-ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\\
&= \left(\prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\left(\prod_{k=1}^{n-1} -2i\sin\frac{k\pi}{n}\right)\\
&= e^{\frac{i\pi}{n}(1+2+\dots+(n-1))}(-2i)^{n-1}A_n\\
&= e^{\frac{i\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}}(-2)^{n-1}i^{n-1}A_n\\
&= e^{i(n-1)\frac{\pi}{2}}(-2)^{n-1}i^{n-1}A_n\\
&= i^{n-1}(-2)^{n-1}A_n\\
&= (i^2)^{n-1}(-2)^{n-1}A_n = 2^{n-1}A_n
\end{aligned}$$

Par conséquent, $A_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

3. Posons $Q_n = X^n - e^{2in\theta}$. Les racines de Q_n sont les $e^{2i\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. On a donc la factorisation suivante de Q_n sur $\mathbb{C}$:

$$Q_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{2i\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right)}\right)$$

D'une part, $Q_n(1) = 1 - e^{2in\theta}$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
Q_n(1) &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - e^{2i\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right)}\right)\\
&= \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right)}\left(e^{-i\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right)} - e^{i\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right)}\right)\\
&= \left(\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right)}\right)\left(\prod_{k=0}^{n-1} -2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right)\right)\\
&= \left(\prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)e^{in\theta}(-2)^n i^n B_n\\
&= i^{n-1}e^{in\theta}(-2)^n i^n B_n = 2^{n-1}(-2i)e^{in\theta}B_n
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$B_n = \frac{1 - e^{2in\theta}}{2^{n-1}(-2i)e^{in\theta}} = \frac{\sin n\theta}{2^{n-1}}$$

4.

$$\begin{aligned}
C_n &= \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq k}}^{n-1} (\omega^k - \omega^l) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq k}}^{n-1} \omega^k(1-\omega^{l-k}) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{\substack{l=0 \\ l\neq k}}^{n-1} \omega^k \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq k}}^{n-1} (1-\omega^{l-k}) \right)
\end{aligned}$$

Mais, l'ensemble des ω^{l-k} pour $0 \leqslant l \leqslant n-1$ et $l \neq k$ est l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité privé de 1. Donc

$$\prod_{\substack{l=0 \\ l\neq k}}^{n-1} (1-\omega^{l-k}) = P_n(1) = n$$

Achevons le calcul de C_n :

$$\begin{aligned}
C_n &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(\omega^{k(n-1)} n\right) \\
&= n^n \prod_{k=0}^{n-1} \omega^{-k} \\
&= n^n \omega^{-(0+1+\dots+(n-1))} = n^n \omega^{-\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= n^n e^{-i(n-1)\pi} = (-1)^{n-1} n^n
\end{aligned}$$

Solution 31.

1. Supposons que R admette une racine double z. Effectuons la division euclidienne de R par R' ; on trouve $R = \frac{X}{3}R' + \frac{2X}{3} + 1$. Comme z est une racine double $R(z) = R'(z) = 0$. On en déduit que $\frac{2z}{3} + 1 = 0$ et donc $z = -\frac{3}{2}$. Or il est évident que $-\frac{3}{2}$ n'est pas racine de P.
   Les racines de P sont donc toutes simples. Puisque $\deg P = 3$, P admet trois racines complexes distictes.

2. Les complexes a, b, c étant distincts, les complexes $-a, -b, -c$ sont également distincts.
   Si z est une racine de P, alors $z^3 + z = -1$. Ainsi $P(-z) = -z^3 - z + 1 = 2$. Donc $-z$ n'est pas une racine de P. Ceci prouve que $\{a, b, c\} \cap \{-a, -b, -c\} = \varnothing$. Finalement, les complexes $a, b, c, -a, -b, -c$ sont tous distincts.

3. Le polynôme $P(X)P(-X)$ est pair donc il existe un unique polynôme Q tel que $P(X)P(-X) = Q(X^2)$.

4. On a $R(X)R(-X) = -X^6 - 2X^4 - X^2 + 1 = Q(X^2)$ avec $Q = -X^3 - 2X^2 - X + 1$. On a donc $Q(a^2) = R(a)R(-a) = 0$ car a est racine de R. Ainsi a^2 est racine de Q. De même, b^2 et c^2 sont racines de Q. Comme les complexes $a, b, c, -a, -b, -c$ sont distincts, les complexes a^2, b^2, c^2 le sont aussi. Puisque $\deg Q = 3$, a^2, b^2, c^2 sont les seules racines de Q.

   Remarque. On n'a pas vraiment utilisé le résultat de la deuxième question qui nous suggérait seulement le polynôme adéquat. ■

Solution 32.

1. On a alors $P = (X-a)^2$ et $P(X^3) = (X^3-a)^2$.
   Supposons que P divise $P(X^3)$. Comme a est une racine de P, a est également une racine de $P(X^3)$. On a donc $a^3 = a$ i.e. $a \in \{0, 1, -1\}$.
   Réciproquement :
   - si $a = 0$ alors $P = X^2$ et $P(X^3) = X^6$ donc P divise $P(X^3)$;
   - si $a = 1$, alors $P = (X-1)^2$ et $P(X^3) = (X^3-1)^2 = (X-1)^2(X^2+X+1)^2$ et P divise $P(X^3)$;
   - si $a = -1$, alors $P = (X+1)^2$ et $P(X^3) = (X^3+1)^2 = (X+1)^2(X^2-X+1)^2$ et P divise $P(X^3)$.
2. Dans ce cas, P divise $P(X^3)$ *si et seulement si* a et b sont racines de $P(X^3) = (X^3-a)(X^3-b)$. Ceci équivaut à ($a^3 = a$ ou $a^3 = b$) et ($a^3 = b$ et $b^3 = a$). Comme $a^3 \neq b^3$, on a nécessairement ($a^3 = a$ et $b^3 = b$) ou ($a^3 = b$ et $b^3 = a$).
   - Cas où $a^3 = a$ et $b^3 = b$: ceci équivaut à $a \in \{0, 1, -1\}$ et $b \in \{0, 1, -1\}$. Comme $a \neq b$, les paires $\{a, b\}$ possibles sont $\{0, 1\}$, $\{0, -1\}$, $\{1, -1\}$. On a bien également $a^3 \neq b^3$ et les polynômes P correspondants sont $X(X-1)$, $X(X+1)$ et $(X-1)(X+1)$.
   - Cas $a^3 = b$ et $b^3 = a$: ceci équivaut à $a^9 = a$ et $b = a^3$. On ne peut avoir $a = 0$ car sinon $b = 0$ et $a = b$, ce qui est exclu. D'où $a^8 = 1$ et a est une racine huitième de l'unité. De plus, a ne peut être une racine carrée de l'unité, sinon $a^3 = a$ et $b^3 = a^3$, ce qui est exlu. On doit donc traiter les 6 cas suivants :
     - Si $a = e^{\frac{i\pi}{4}}$, alors $b = a^3 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$. On a bien $a^3 \neq b^3$ et $P = (X-a)(X-b) = X^2 - i\sqrt{2}X - 1 \notin \mathbb{R}[X]$.
     - Si $a = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$, alors $b = a^3 = -i$. On a bien $a^3 \neq b^3$ et $P = (X-a)(X-b) = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.
     - Si $a = e^{\frac{3i\pi}{4}}$, alors $b = a^3 = e^{\frac{i\pi}{4}}$. On a bien $a^3 \neq b^3$ et $P = (X-a)(X-b) = X^2 - i\sqrt{2}X - 1 \notin \mathbb{R}[X]$.
     - Si $a = e^{-\frac{i\pi}{4}}$, alors $b = a^3 = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$. On a bien $a^3 \neq b^3$ et $P = (X-a)(X-b) = X^2 + i\sqrt{2}X - 1 \notin \mathbb{R}[X]$.
     - Si $a = e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i$, alors $b = a^3 = i$. On a bien $a^3 \neq b^3$ et $P = (X-a)(X-b) = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.
     - Si $a = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$, alors $b = a^3 = e^{-\frac{i\pi}{4}}$. On a bien $a^3 \neq b^3$ et $P = (X-a)(X-b) = X^2 + i\sqrt{2}X - 1 \notin \mathbb{R}[X]$.

     Finalement, on obtient 4 polynômes P dans $\mathbb{R}[X]$, à savoir $X(X-1)$, $X(X+1)$, X^2-1 et X^2+1 et 2 autres polynômes P, à savoir $X^2 - i\sqrt{2}X - 1$ et $X^2 + i\sqrt{2}X - 1$.
3. Il reste donc à traiter les cas ($a^3 = a$ et $b^3 = a$) ou ($b^3 = b$ et $a^3 = b$). Il suffit de traiter l'un des deux cas puisqu'on obtient l'autre en permutant a et b et qu'une permutation de a et b fournit le même polynôme P. Traitons donc le cas $a^3 = a$ et $b^3 = a$. On ne peut avoir $a = 0$ sinon $b = 0$ et $a = b$.
   - Si $a = 1$, alors $b = j$ ou $b = j^2$ (on ne peut avoir $b = 1$). On a alors $P = (X-1)(X-j) = X^2 + j^2X + j$ ou $P = (X-1)(X-j^2) = X^2 + jX + j^2$.
   - Si $a = -1$, alors $b = -j$ ou $b = -j^2$ (on ne peut avoir $b = -1$). On a alors $P = (X+1)(X+j) = X^2 - j^2X + j$ ou $P = (X+1)(X+j^2) = X^2 - jX + j^2$.
4. Faisons le compte : 13 polynômes conviennent ! Ce sont X^2, $(X-1)^2$, $(X+1)^2$, $X(X-1)$, $X(X+1)$, X^2-1, X^2+1, $X^2 - i\sqrt{2}X - 1$, $X^2 + i\sqrt{2}X - 1$, $X^2 + j^2X + j$, $X^2 + jX + j^2$, $X^2 - j^2X + j$, $X^2 - jX + j^2$. Les 7 premiers sont dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution 33.

Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines réelles de P et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités. Puisque P est scindé syr $\mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^r m_i = \deg P$. Remarquons tout d'abord que $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont des racines de P' de multiplicités respectives $m_1 - 1, \dots, m_r - 1$. Par ailleurs, le théorème de Rolle permet de trouver une racine réelle de P' entre deux racines consécutives de P donc $r - 1$ racines de plus. Finalement, la somme des multiplicités des racines réelles de P' est au moins égale à

$$r - 1 + \sum_{i=1}^r m_i - 1 + \deg P - 1$$

Puisque $\deg P' = \deg P - 1$, la somme des multiplicités des racines réelles de P' est donc exactement $\deg P'$, ce qui signifie que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Solution 34.

Dans ce qui suit, on pose $n = \deg(P)$.

Supposons que P soit scindé sur $\mathbb{R}$. Il existe donc des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $P = \prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)$. On montre aisément que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|$. On en déduit que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ |z - \alpha_k| \geqslant |\operatorname{Im}(z - \alpha_k)| = |\operatorname{Im}(z)|$$

En multipliant membre à membre ces inégalités, on obtient bien

$$|P(z)| = \prod_{k=1}^{n} |z - \alpha_k| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^n$$

Réciproquement, supposons que

$$\texttt{forall} z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^n$$

Soit α une racine de P. Alors $|\operatorname{Im}(\alpha)|^n \leqslant |P(\alpha)|^n = 0$ donc $\operatorname{Im}(\alpha) = 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi P est-il bien scindé sur $\mathbb{R}$.

Solution 35.

1.
   - Si $n = 0$, $T_0 = 2 - X$ admet une unique racine réelle : 2.
   - Si $n = 1$, $T_1 = 1$ n'admet aucune racine.
   - On suppose $n \geqslant 2$. Puisque $T_n' = nX^{n-1} - 1$, $T_n'(x) = 0 \iff x^{n-1} = 1/n$, et il faut discuter selon la parité de n :
     - si n est pair, T_n admet une unique racine $x_n = (1/n)^{1/(n-1)}$. Notons que $0 < x_n < 1$. n étant pair et non nul, on a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} T_n(x) = +\infty$, et puisque $0 < x_n < 1$ on a $T_n(x_n) > -x_n + 1 > 0$. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(x) > 0$ et donc T_n n'admet aucune racine réelle.
     - si n est impair, T_n' admet deux racines $x_n = (1/n)^{1/(n-1)}$ et $y_n = -x_n$, et T_n est croissante sur $]-\infty, y_n]$ et sur $[x_n, +\infty[$, décroissante sur $[y_n, x_n]$. n étant impair et différent de 1, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} T_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} T_n(x) = -\infty$, et on a toujours $T_n(x_n) > 0$. On en déduit que T_n admet une unique racine réelle appartenant à $]-\infty, y_n[$.
2. Pour $n = 0$ ou 1 c'est évident.
   Soit $n \geqslant 2$. On sait que T_n est scindé sur $\mathbb{C}$. Cherchons une éventuelle racine double $z \in \mathbb{C}$. Alors z vérifie $T_n(z) = T_n'(z) = 0$. $T_n'(z) = 0 \Rightarrow z^{n-1} = 1/n$, et $T_n(z) = 0 \Rightarrow z = z^n + 1 = zz^{n-1} + 1 = \dfrac{z}{n} + 1$ d'où $z(1 - 1/n) = 1$ i.e $z = \dfrac{n}{n-1}$. Ceci implique $z \in \mathbb{R}$ et $z > 1$, et z n'est donc pas racine de T_n d'après l'étude du 1.
   On en conclut que T_n n'a aucune racine double.

Solution 36.

- Soient $x, y, z \in \mathbb{C}$ vérifiant le système. Notons σ_k les fonctions symétriques élémentaires associées à x, y, z. On a

  $$\sigma_1 = 1,\ \ \sigma_3 = 1,$$

  et puisque

  $$\sigma_2 \ = \ xy + yz + xz = \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

  Mais puisque $\forall z \in \mathbb{U}$, $\frac{1}{z} = \overline{z}$,

  $$\sigma_2 = \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \overline{\sigma_1} = 1.$$

  Les nombres x, y, z sont donc *nécessairement* les racines du polynôme

  $$P = X^3 - X^2 + X - 1 = (X - 1)(X - i)(X + i).$$

- *Réciproquement*, on vérifie facilement que les nombres $1, \pm i$ sont solutions du système de l'énoncé.

Solution 37.

Notons σ_k les fonctions symétriques élémentaires associées à x, y, z. On reprend la notation S_k des sommes de Newton. Le système s'écrit alors

$$S_1 = 1, \;\; S_2 = 9, \;\; \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = 1.$$

On a les relations

$$S_1 = \sigma_1,$$

puis

$$S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

On en déduit sans peine les formules *inverses*,

$$\sigma_1 = S_1,$$

puis

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2).$$

Du fait de cette *inversibilité* des formules, le système de l'énoncé est équivalent à

$$\sigma_1 = 1, \;\; \sigma_2 = -4, \;\; \sigma_3 = \sigma_2 = -4,$$

ie x, y, z sont racines du polynôme

$$P = X^3 - X^2 - 4X + 4 = (X-1)(X-2)(X+2).$$

Solution 38.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Le nombre i n'étant pas racine de P_n,

$$(z+i)^n = (z-i)^n \iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1$$

Ainsi, $P_n(z) = 0$ *si et seulement si*

$$\exists 0 \leqslant k \leqslant n-1 \;,\;\; \frac{z+i}{z-i} = e^{2ik\frac{\pi}{n}}$$

ie $\exists 0 \leqslant k \leqslant n-1$ tel que

$$z(1 - e^{2ik\pi/n}) = -i(1 + e^{2ik\frac{\pi}{n}})$$

c'est-à-dire

$$\exists 1 \leqslant k \leqslant n-1, \;\; z = -i\frac{1+e^{2ik\pi/n}}{1-e^{2ik\pi/n}}$$

où l'on a exclu la valeur $k = 0$ pour laquelle l'équation n'a aucune solution en z. On trouve ainsi toutes les solutions en passant à l'arc moitié, pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\begin{aligned} z_k &= -i\frac{1+e^{2ik\pi/n}}{1-e^{2ik\pi/n}} = -i\frac{2\cos(k\pi/n)e^{ik\pi/n}}{-2i\sin(k\pi/n)e^{ik\pi/n}} \\ &= \operatorname{cotan}(k\pi/n) \end{aligned}$$

Par injectivité de la fonction cotangente sur $]0, \pi[$, on trouve $n-1$ racines distinctes.

2. En utilisant la formule du binôme, on aboutit à

$$\begin{aligned}P_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^{n-k}X^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-i)^{n-k}X^k\\ &= 2inX^{n-1} + 0\cdot X^{n-2} + a_{n-3}X^{n-3} + \cdots\\ &\qquad\cdots + a_1X + i^n - (-i)^n\end{aligned}$$

Ainsi P_n est de degré $n-1$ et de coefficient dominant $2in$; on peut donc écrire (cf. la première question de l'exercice),

$$\begin{aligned}P_n &= 2in\prod_{k=1}^{n-1}(X - \text{cotan}(k\pi/n))\\ &= 2in(X^{n-1} - A_nX^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}B_n)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$-2inA_n = 0,$$

et

$$i^n - (-i)^n = 2i\,\text{Im}(i^n) = 2i\sin(n\pi/2) = 2in(-1)^{n-1}B_n$$

ainsi

$$A_n = 0$$

et

$$B_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(n\pi/2).$$

Solution 39.

1. Exploitons les égalités $P(a) = P(b) = P(c) = 0$ en effectuant la division euclidienne de X^4 par P. On trouve sans peine $X^4 = XP + 2X^2 - 5X$. Ainsi $a^4 = 2a^2 - 5a$, $b^4 = 2b^2 - 5b$ et $c^4 = 2c^2 - 5c$, d'où $S = 2(a^2+b^2+c^2) - 5(a+b+c)$. Notons σ_1, σ_2 et σ_3 les fonctions symétriques d'ordre trois évaluées en a, b et c. Puisque

$$P = (X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - \sigma_1X^2 + \sigma_2X - \sigma_3 = X^3 - 2X + 5,$$

on a $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -2$ et $\sigma_3 = -5$. Or, $\sigma_1^2 = a^2+b^2+c^2+2\sigma_2$, d'où $a^2+b^2+c^2 = (0)^2-2\times(-2) = 4$. Ainsi, $S = 2\times4-5\times0 = 8$.

2. Il suffit de calculer les fonctions symétriques élémentaires en a^2, b^2 et c^2. Notons-les Σ_1, Σ_2 et Σ_3. On a clairement $\Sigma_3 = a^2b^2c^2 = (\sigma_3)^2 = 25$ et on a déjà calculé $\Sigma_1 = a^2+b^2+c^2 = 4$. On conclut en remarquant que

$$\begin{aligned}\sigma_2^2 &= (ab+bc+ac)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2(a^2bc + ab^2c + abc^2)\\ &= \Sigma_2 + 2abc(a+b+c) = \Sigma_2 + 2\sigma_3\sigma_1 = \Sigma_2 + 2\times(-5)\times0 = \Sigma_2\end{aligned}$$

et donc $\Sigma_2 = \sigma_2^2 = 4$. Les nombres a^2, b^2 et c^2 sont donc les racines du polynôme $Q = X^3 - 4X^2 + 4X - 25$.

Solution 40.

En multipliant la seconde équation par xyz, on obtient $xy+yz+zx = 0$. Notons $a = xyz$. En utilisant les relations coefficients/racines d'un polynôme, on peut affirmer que x, y, z sont les racines du polynôme $X^3 - a$. Ce sont donc les racines cubiques de a qui ont toutes le même module.

Solution 41.

1. On a $\sin(n+1)\theta \underset{\theta\to 0}{\sim} (n+1)\theta$ et $\sin\theta \underset{\theta\to 0}{\sim} \theta$. On en déduit que $\lim_{\theta\to 0} f_n(\theta) = n+1$.
Posons $\theta = \pi + h$. Alors $\sin(n+1)\theta = \sin((n+1)\pi + (n+1)h) = (-1)^{n+1}\sin(n+1)h \underset{h\to 0}{\sim} (-1)^{n+1}(n+1)h$ et $\sin\theta = \sin(\pi+h) = -\sin h \underset{h\to 0}{\sim} -h$. On en déduit que $\lim_{\theta\to\pi} f_n(\theta) = (-1)^n(n+1)$.
Ainsi f_n est prolongeable par continuité en 0 et π. Si on note encore Q_n ce prolongement, on a $f_n(0) = (n+1)$ et $f_n(\pi) = (-1)^n(n+1)$.

2. **Unicité** Si P_n et Q_n sont deux polynômes tels que $P_n(x) = Q_n(x) = f_n(\arccos x)$ pour tout $x \in [-1,1]$, alors le polynôme $P_n - Q_n$ admet une infinité de racines ; il est nul i.e. $P_n = Q_n$.
Existence Soit $\theta \in [0,\pi]$. $\sin(n+1)\theta$ est la partie imaginaire de $(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1}$. A l'aide de la formule du binôme de Newton :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} i^k (\sin\theta)^k (\cos\theta)^{n+1-k}$$

Comme i^k est réel pour k pair et imaginaire pur pour k impair, on en déduit que :

$$\sin(n+1)\theta = \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n+1} \binom{n+1}{2k+1}(-1)^k(\sin\theta)^{2k+1}(\cos\theta)^{n-2k}$$

En divisant par $\sin\theta$ pour $\theta \in]0,\pi[$, on obtient :

$$f_n(\theta) = \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n+1} \binom{n+1}{2k+1}(-1)^k(\sin\theta)^{2k}(\cos\theta)^{n-2k}$$

La formule est encore valable pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ par continuité des deux membres de la dernière égalité. On peut également réécrire cette égalité sous la forme :

$$\begin{aligned} f_n(\theta) &= \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n+1} \binom{n+1}{2k+1}(-1)^k(1-\cos^2\theta)^k(\cos\theta)^{n-2k} \\ &= \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n+1} \binom{n+1}{2k+1}(\cos^2\theta - 1)^k(\cos\theta)^{n-2k} \end{aligned}$$

On a alors pour $x \in [-1,1]$:

$$f_n(\arccos x) = \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n+1} \binom{n+1}{2k+1}(x^2-1)^k x^{n-2k}$$

Il suffit donc de prendre $P_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n+1} \binom{2k+1}{n+1}(X^2-1)^k X^{n-2k}$.

On a $\deg(X^2-1)^k X^{n-2k} = n$ et $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n+1} \binom{n+1}{2k+1} \neq 0$ donc $\deg P_n = n$.
Soit $x \in [-1,1]$. On a alors :

$$P_n(-x) = f_n(\arccos(-x)) = f_n(\pi - \arccos x) = (-1)^n f_n(\arccos x) = (-1)^n P_n(x)$$

Les polynômes $P_n(-X)$ et $(-1)^n P_n(X)$ coïncident sur $[-1,1]$; ils sont égaux. On en déduit que P_n a la parité de n.

3. $P_n(1) = f_n(\arccos 1) = f_n(0) = (n+1)$.
$P_n(-1) = f_n(\arccos -1) = f_n(\pi) = (-1)^n(n+1)$.
$P_n(0) = f_n(\arccos 0) = f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.
Pour $x \in]-1,1[$, $P_n'(x) = -\dfrac{f_n'(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ donc $P_n'(0) = -f_n'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Or pour $\theta \in]0,\pi[$,

$$f_n'(\theta) = \frac{(n+1)\cos(n+1)\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin(n+1)\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

donc $f_n'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (n+1)\cos(n+1)\frac{\pi}{2}$.

- Si n est pair, $P_n'(0) = -f_n'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
- Si n est impair, $P_n'(0) = -f_n'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (n+1)(-1)^{\frac{n-1}{2}}$.

4. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $|f_n(\theta)| \leqslant n$ pour tout $\theta \in [0, \pi]$. C'est évidemment vrai pour $n = 1$. Supposons le vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$f_{n+1}(\theta) = \frac{\sin n\theta \cos\theta + \sin\theta \cos n\theta}{\sin\theta} = f_n(\theta)\cos\theta + \cos n\theta$$

cette égalité étant encore vraie pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ par continuité. Par conséquent,

$$|f_{n+1}(\theta)| \leqslant |f_n(\theta)||\cos\theta| + |\cos n\theta| \leqslant n+1$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. L'hypothèse de récurrence est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme $P_n(x) = f_{n+1}(\arccos x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$, on en déduit que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|P_n(x)| \leqslant n+1$, ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Soit $\theta \in [0, \pi]$. On connaît son formulaire de trigonométrie (formules de factorisation) : $\sin(n+2)\theta + \sin n\theta = 2\sin(n+1)\theta\cos\theta$. On en déduit que $f_{n+1}(\theta) + f_{n-1}(\theta) = 2f_n(\theta)\cos\theta$ (on utilise la continuité pour la validité de cette égalité en 0 et π). D'où $P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = 2xP_n(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$. On peut alors passer à une égalité entre polynômes : $P_{n+1} + P_{n-1} = 2XP_n$.

6. $f_n = P_n \circ \cos$ donc f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Faisons comme l'indique l'énoncé. On obtient $\sin\theta f_n'' + 2\cos\theta f_n' - \sin\theta f_n = -(n+1)^2\sin(n+1)\theta$ i.e. $f_n'' + 2\cot\theta f' + n(n+2)f = 0$. f_n est donc solution de l'équation différentielle $y'' + 2\cot\theta y' + n(n+2)y = 0$.

7. On a $f_n(\theta) = P_n(\cos\theta)$ pour $\theta \in [0, \pi]$. Donc $f_n'(\theta) = -P_n'(\cos\theta)\sin\theta$ et $f_n''(\theta) = P_n''(\cos\theta)\sin^2\theta - P_n'(\cos\theta)\cos\theta$. Comme f_n est solution de $y'' + 2\cot\theta y' + n(n+2)y = 0$, on a $P_n''(\cos\theta)\sin^2\theta - 3P_n'(\cos\theta)\cos\theta + n(n+2)P_n(\cos\theta)$. Donc, en posant $x = \cos\theta$:

$$(1-x^2)P_n''(x) - 3xP_n'(x) + n(n+2)P_n(x) = 0$$

Cette égalité est vraie pour $x \in [-1, 1]$ et donc pour $x \in \mathbb{R}$ toujours avec le même argument. On en déduit que P_n est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0$.

8. On a $P' = \sum_{k=0}^{n} ka_kX^{k-1}$ donc $3XP' = \sum_{k=0}^{n} 3ka_kX^k$.
On a $P'' = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_kX^{k-2}$ donc

$$(1-X^2)P'' = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_kX^{k-2} - \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_kX^k = \sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)a_{k+2}X^k - \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_kX^k$$

On déduit de l'équation différentielle vérifiée par P_n que

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 3ka_k + n(n+2)a_k = 0$$

On obtient après simplification :

$$a_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+2)}{(k+2)(k+1)}a_k$$

- Si n est pair, posons $n = 2p$. On sait que P_n est pair donc les coefficients d'indice impair sont nuls. Par récurrence

$$\begin{aligned} a_{2k} &= (-1)^k a_0 \prod_{l=0}^{k-1} \frac{(2p-2l)(2p+2l+2)}{(2l+2)(2l+1)} = (-1)^k a_0 \frac{\left(2^k\prod_{l=0}^{k-1}(p-l)\right)\left(2^k\prod_{l=0}^{k-1}(p+l+1)\right)}{(2k)!} \\ &= (-1)^k a_0 \frac{2^{2k}\prod_{l=p-k+1}^{p+k} l}{(2k)!} = (-1)^k a_0 \frac{(p+k)!}{(p-k)!(2k)!} = (-1)^k 2^{2k}\binom{p+k}{2k}a_0 \end{aligned}$$

Or $a_0 = P_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} = (-1)^p$. D'où $a_{2k} = (-1)^{p+k}2^{2k}\binom{p+k}{2k}$.

- Si n est impair, posons $n = 2p+1$. On sait que P_n est impair donc les coefficients d'indice pair sont nuls. Par récurrence,

$$
\begin{aligned}
a_{2k+1} &= (-1)^k a_1 \prod_{l=0}^{k-1} \frac{(2p-2l)(2p+2l+4)}{(2l+3)(2l+2)} = (-1)^k a_1 \frac{\left(2^k \prod_{l=0}^{k-1}(p-l)\right)\left(2^k \prod_{l=0}^{k-1}(p+l+2)\right)}{(2k+1)!} \\
&= (-1)^k a_1 \frac{2^{2k}\prod_{l=p-k+1}^{p+k+1} l}{(p+1)(2k+1)!} = (-1)^k a_1 \frac{2^{2k}(p+k+1)!}{(p+1)(p-k)!(2k+1)!} = (-1)^k a_1 \frac{2^{2k}}{p+1}\binom{p+k+1}{2k+1}
\end{aligned}
$$

Or $a_1 = P_n'(0) = (n+1)(-1)^{\frac{n-1}{2}} = 2(p+1)(-1)^p$. D'où $a_{2k+1} = (-1)^{p+k}2^{2k+1}\binom{p+k+1}{2k+1}$.

Solution 42.

1. Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ tel que $\Phi(P) = P(X+1)+P(X)$. Il est clair que $\deg \Phi(X^n) = n$. L'image de la base canonique de$\mathbb{K}[X]$ est donc une base de $\mathbb{K}[X]$. Par conséquent, Φ est un isomorphisme. Le polynôme X^n admet donc un unique antécédent P_n par Φ qui vérifie donc la condition de l'énoncé.

2. Si on dérive la relation $P_n(X+1)+P_n(X) = 2X^n$, on obtient $P_n'(X+1)+P_n'(X) = 2nX^{n-1}$. De plus, $P_{n-1}(X+1)+P_{n-1}(X) = X^{n-1}$. Par conséquent, $\Phi(P_n') = \Phi(nP_{n-1})$. Comme Φ est injectif, $P'n = nP_{n-1}$.

3. La famille $(2X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. La famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est l'image réciproque de cette base par l'isomorphisme Φ, c'est donc aussi une base de $\mathbb{K}[X]$.

4. On a $\Phi(P_n) = 2X^n$ donc $\Phi(P_n(X+1)) = 2(X+1)^n$. Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\Phi(P_n(X+1)) &= \sum_{k=0}^{n} 2\binom{n}{k}X^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Phi(P_k) \\
&= \Phi\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_k\right)
\end{aligned}
$$

   Comme Φ est un isomorphisme, on en déduit :

$$P_n(X+1) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_k$$

5. Posons $Q_n(X) = P_n(1-X)$. Alors

$$\Phi(Q_n) = Q_n(X+1)+Q_n(X) = P_n(-X)+P_n(1-X)$$

   Par ailleurs, en substituant $-X$ à X dans la relation

$$P_n(X+1)+P_n(X) = 2X^n$$

   on obtient :

$$P_n(1-X)+P_n(-X) = 2(-1)^nX^n = (-1)^n\Phi(P_n)$$

   Comme Φ est injectif, on a donc $Q_n = (-1)^nP_n$ i.e. $P_n(1-X) = (-1)^nP_n(X)$.

Solution 43.

1. Procédons en deux temps.

- Puisque $\forall P \in \mathbb{R}[X]$,
$$\deg(P) = \deg(P(X+1)) \leqslant n,$$
on a $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
- Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $W = \Delta(P + \lambda Q)$. On a alors,
$$\begin{aligned} W &= (P+\lambda Q)(X+1) - (P+\lambda Q)(X) \\ &= P(X+1) + \lambda Q(X+1) - P(X) - \lambda Q(X) \\ &= \Delta(P) + \lambda \Delta(Q) \end{aligned}$$

2. On remarque que $\forall k \leqslant n$,
$$\deg(\Gamma_k) = k.$$
La famille $(\Gamma_0, \dots, \Gamma_n)$ est étagée en degré, il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Séparons les cas $k = 0$ et $k > 0$.

- On a clairement $\Delta(\Gamma_0) = 0$.
- Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,
$$\begin{aligned} \Delta(\Gamma_k) &= (X+1)X\cdots(X-k+3)(X-k+2) \\ &\qquad - X\cdots(X-k+2)(X-k+1) \\ &= (X+1-X+k-1)X\cdots(X-k+2) \end{aligned}$$
ainsi $\Delta(\Gamma_k) = k\Gamma_{k-1}$.
- D'après les calculs précédents,
$$\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathrm{vect}(\Delta_n(\Gamma_0), \dots, \Delta_n(\Gamma_n)) = \mathrm{vect}(\Gamma_0, \dots, \Gamma_{n-1})$$
et ainsi, d'après la question **2.**,
$$\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X].$$
- D'après le théorème du rang,
$$\dim(\mathrm{Ker}(\Delta_n)) = 1,$$
or $\mathrm{vect}(\Gamma_0) \subset \mathrm{Ker}(\Delta_n)$, on a donc
$$\mathrm{Ker}(\Delta_n) = \mathrm{vect}(\Gamma_0) = \mathbb{R}_0[X].$$

4. Soient $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. On a
$$\Delta_n^\ell(\Gamma_0) = 0,$$
puis , pour $k \geqslant \ell$,
$$\Delta_n^\ell(\Gamma_k) = \frac{k!}{(k-\ell)!}\Gamma_{k-\ell},$$
et dans le cas contraire,
$$\Delta_n^\ell(\Gamma_k) = 0.$$
En particulier,
$$(\Delta_n)^{n+1} = 0$$
mais $(\Delta_n)^n \neq 0$. L'endomorphisme Δ_n est donc nilpotent d'indice $n+1$.

5. Notons Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par
$$P \longmapsto P(X+1) - P.$$
Le cas $Q = 0$ étant banal, supposons
$$n = \deg(Q) \geqslant 0.$$
Puisque l'égalité de l'énoncé est équivalente à $\Delta(P) = Q$ et que $\mathrm{Im}(\Delta_{n+1}) = \mathbb{R}_n[X]$, il existe une solution P_0. Un polynôme P est une autre solution *si et seulement si*
$$\Delta(P) = \Delta(P_0),$$

ie
$$\Delta(P - P_0) = 0,$$
soit encore
$$P - P_0 \in \operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X].$$
Les solutions sont donc de la forme
$$P + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Remarque. L'égalité $\operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$ se démontre en reprenant point par point l'argument exposé à la question **3.** pour calculer le noyau de Δ_n. ■

6. Calculons de proche en proche...

- Puisque
$$\Delta(\Gamma_2/2) = \Gamma_1 = X,$$
$P_1 = \Gamma_2/2$ convient.
- De même,
$$X^2 = \Gamma_2 + \Gamma_1 = \Delta(\Gamma_2/2 + \Gamma_1/3),$$
donc $P_2 = \Gamma_2/2 + \Gamma_1/3$ convient.
- On a ,
$$X^3 = \Gamma_3 + 3\Gamma_2 + \Gamma_1 = \Delta(\Gamma_4/4 + \Gamma_3 + \Gamma_2/2),$$
ainsi $P_3 = \Gamma_4/4 + \Gamma_3 + \Gamma_2/2$ convient.

7. Pout tout $i \in \{1, 2, 3\}$,
$$S_n^i = P_i(n+1)$$
(il s'agit d'un simple telescopage !). On aboutit à
$$S_n^1 = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \quad S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
et
$$S_i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Remarque. L'esprit (qu'il faut retenir !) de cette fin d'exercice, est que les calculs liés à Δ (ici un calcul d'antécédent), « se font bien» dans la base des Γ_k plutôt que dans la base canonique ! *Il faut* donc travailler dans cette base... ■

Solution 44.

Solution 45.

1. On a $P_3 = X(X^2 - 2) - X = X^3 - 3X$, puis $P_4 = X(X^3 - 3X) - (X^2 - 2) = X^4 - 4X^2 + 2$.
2. Récurrence double classique.
3. Le coefficient dominant de P_n est égal à 1.
4. On prouve par une nouvelle récurrence double que $P_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si n est impair} \\ 2.(-1)^p & \text{si } n = 2p \end{cases}$.
5. Notons $\mathcal{P}(n)$ l'énoncé : $\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad z^n + \frac{1}{z^n} = P_n\left(z + \frac{1}{z}\right)$.
On raisonne par récurrence double :

- Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a bien-sûr $P_1\left(z+\frac{1}{z}\right) = z + \frac{1}{z}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vrai.
  D'autre part, $P_2\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} - 2 = z^2 + \frac{1}{z^2}$, donc $\mathcal{P}(2)$ est vrai également.
- Supposons que $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ sont vrais pour un entier $n \geqslant 2$ donné et montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.
  On calcule $P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ grâce à la relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_{n-1}, puis on applique les hypothèses de récurrence :

$$\begin{aligned}
P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right) &= \left(z+\frac{1}{z}\right)P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) - P_{n-1}\left(z+\frac{1}{z}\right)\\
&= \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right) - \left(z^{n-1}+\frac{1}{z^{n-1}}\right)\\
&= z^{n+1} + \frac{1}{z^{n-1}} + z^{n-1} + \frac{1}{z^{n+1}} - z^{n-1} - \frac{1}{z^{n-1}}\\
&= z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\ ,
\end{aligned}$$

  ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai, ce qui achève la preuve.

6. **a.** On remarque que $Q_1 = X^2R_1(Y)$ en posant $R_1 = P_2 - 3P_1 + 4 = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ et $Y = X + 1/X$. On en conclut par ce qui précède que z est racine de Q_1 si et seulement si $z + \frac{1}{z}$ est égal à 1 ou 2. On doit donc résoudre trois équations de la forme $z + \frac{1}{z} = \alpha$, qui sont du second degré : $z + \frac{1}{z} = \alpha \iff z^2 - \alpha z + 1 = 0$. Pour $\alpha = 1$, on obtient deux racines complexes $-j$ et $-j^2$ et pour $\alpha = 2$ une racine double : 1. On en conclut que $Q_1 = (X-1)^2(X^2 - X + 1)$.

b. On obtient de même que $Q_2 = X^3R_2(Y)$ avec $R = 2 + P_3 + P_2 - 9P_1 = 2 + X^3 - 3X + X^2 - 2 - 9X = X^3 + X^2 - 12X = X(X^2 + X - 12)$ et $Y = X + 1/X$.
Les racines de R_2 sont donc 0 et les deux solutions de $X^2 + X - 12 = 0$, qui sont 3 et -4.

- Pour $\alpha = 0$, l'équation $z^2 + 1 = 0$ admet les deux solutions complexes i et $-i$.
- Pour $\alpha = 3$, l'équation $z^2 - 3z + 1 = 0$ admet les deux solutions réelles $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
- Pour $\alpha = -4$, l'équation $z^2 + 4z + 1 = 0$ admet les deux solutions réelles $-2+\sqrt{3}$ et $-2-\sqrt{3}$.

En conclusion Q_2 admet les 6 racines complexes suivantes :

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ \frac{3-\sqrt{5}}{2},\ -2+\sqrt{3},\ -2-\sqrt{3},\ i,\ -i\ .$$

Ces six racines sont toutes simples car $\deg Q_2 = 6$, et comme le coefficient dominant de Q_2 est 1, la factorisation de Q_2 dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$Q_2 = \left(X - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X+2-\sqrt{3}\right)\left(X+2+\sqrt{3}\right)(X-i)(X+i)\ .$$

On regroupe $(X-i)$ avec $(X+i)$ pour obtenir le polynôme à coefficients réels X^2+1, d'où la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$:

$$Q = \left(X - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X+2-\sqrt{3}\right)\left(X+2+\sqrt{3}\right)(X^2+1)\ .$$

Solution 46.

1. On calcule sans peine les premiers polynômes de cette suite :

$$P_1 = 2X, \quad P_2 = 4X, \quad P_3 = 2X^3 + 6X, \quad P_4 = 8X^3 + 8X\,.$$

2. On vérifie directement que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(-x) = (1-x)^n - (1+x)^n = -P_n(x)\ .$$

3. On développe $(1+X)^n$ et $(1-X)^n$ par la formule du binôme :

$$\begin{aligned}
(1+X)^n &= X^n + nX^{n-1} + \ldots + nX + 1\\
(1-X)^n &= (-1)^nX^n + n(-1)^{n-1}X^{n-1} + \ldots - nX + 1
\end{aligned}$$

On en déduit que le coefficient de X^n dans P_n est $1-(-1)^n$, tandis que celui de X^{n-1} est $n\Big(1-(-1)^{n-1}\Big)$. On en conclut que :

- si n est impair, le coefficient de X^n vaut $2 \neq 0$, et donc $\deg P_n = n$.
- si n est pair, le coefficient de X^n est nul, mais celui de X^{n-1} est $2n \neq 0$, donc $\deg P_n = n-1$.

4. On vérifie que $P_n(0) = 1^n - 1^n = 0$: cela prouve que 0 est racine de P_n, ce qui est équivalent au fait que X divise P_n.

5. **a.** On remarque que 1 n'est pas racine de P_n puisque $P_n(1) = 2^n \neq 0$, donc si on cherche à résoudre $P_n(z) = 0$, on peut supposer $z \neq 1$ et donc diviser par $(z-1)^n$: $P_n(z) = 0 \iff (1+z)^n = (1-z)^n \iff \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1$.

b. D'après le cours, on sait que $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1 \iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $\frac{1+z}{1-z} = \omega_k$, en posant $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Or $\frac{1+z}{1-z} = \omega_k \iff z(1+\omega_k) = \omega_k - 1$.
Il faut donc faire une discussion selon que $\omega_k = -1$ ou non :

- Si $\omega_k = -1$, l'équation $z(1+\omega_k) = \omega_k - 1$ équivaut à $0 = -2$, et est donc impossible.
- Si $\omega_k \neq -1$, $z(1+\omega_k) = \omega_k - 1 \iff z = \frac{\omega_k - 1}{1+\omega_k}$.
  En utilisant les techniques habituelles, cette dernière expression se simplifie en :

$$\frac{\omega_k - 1}{1+\omega_k} = i\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) .$$

Or on sait que $\omega_k = -1$ est possible si et seulement si n est pair et $k = \frac{n}{2}$.

D'où la conclusion :

- Si n est impair, P_n admet les n racines $\left\{i\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right), 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$.
- Si n est pair, P_n admet les $n-1$ racines $\left\{i\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right), 0 \leqslant k \leqslant n-1 \text{ et } k \neq \frac{n}{2}\right\}$.

Dans les deux cas on retrouve la racine réelle 0 en prenant $k = 0$ (on savait depuis la question **4** que 0 était racine), et c'est la seule racine réelle, puisque pour tout $0 < k \leqslant n-1$ tel que, de plus, $k \neq \frac{n}{2}$ dans le cas où n est pair, on a $\frac{k\pi}{n} \in]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$, d'où $\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \neq 0$.
Donc pour tout $n \geqslant 1$, P_n admet une unique racine réelle.

6. Posons $z_k = i\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour simplifier.

- **1er cas :** n est impair, c'est-à-dire de la forme $n = 2q+1$ pour un certain $q \in \mathbb{N}$.
  Puisque P_n est de degré n et admet les n racines distinctes $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$, celles-ci sont toutes simples, et la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est -en n'oubliant pas le coefficient dominant qui vaut 2 (cf question **3**) - est la suivante :

$$P_n = 2\prod_{k=0}^{2q}(X - z_k) .$$

On a vu que la seule racine réelle de P_n est $z_0 = 0$, donc, pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on met à part le terme $X - z_0 = X$, et on regroupe chaque autre racine z_k avec sa racine conjuguée $\overline{z_k} = -i\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, puis on utilise la relation :

$$(X - z_k)(X - \overline{z_k}) = X^2 + \tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) .$$

Grâce à la propriété $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$, on remarque que

$$\overline{z_k} = i\tan\left(\pi - \frac{k\pi}{n}\right) = i\tan\left(\frac{(n-k)\pi}{n}\right) = z_{n-k} . \tag{1}$$

Ainsi on regroupe z_1 avec $z_{n-1} = z_{2q}$, z_2 avec z_{2q-1} et ainsi de suite jusqu'à z_q avec $z_{n-q} = z_{q+1}$, pour obtenir finalement :

$$\begin{aligned} P &= 2X\prod_{k=1}^{q}(X - z_k)(X - z_{n-k}) \\ &= 2X\prod_{k=1}^{q}\left(X^2 + \tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

- **2ème cas :** n est pair, c'est-à-dire de la forme $n = 2q$ pour un certain $q \geqslant 1$.
  Ici P_n est de degré $n-1 = 2q-1$ et admet les $n-1$ racines $\{z_0, \dots, z_{q-1}, z_{q+1}, \dots, z_{n-1}\}$, qui sont donc toutes des racines simples. Comme le coefficient dominant est $2n = 4q$ (cf question **3**), la factorisation de P_n dans $\mathbb{C}[X]$ est donc :
  $$P_n = 4q \prod_{k=0}^{q-1}(X - z_k) \prod_{k=q+1}^{2q-1}(X - z_k).$$
  On regroupe à nouveau z_k avec z_{n-k} pour tout $1 \leqslant k \leqslant q-1$, d'où la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$:
  $$P_n = 4qX \prod_{k=1}^{q-1}\left(X^2 + \tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

Solution 47.

1. L'application ψ est linéaire puisque, pour tout réel a, l'évaluation $P \longmapsto P(a)$ est linéaire.

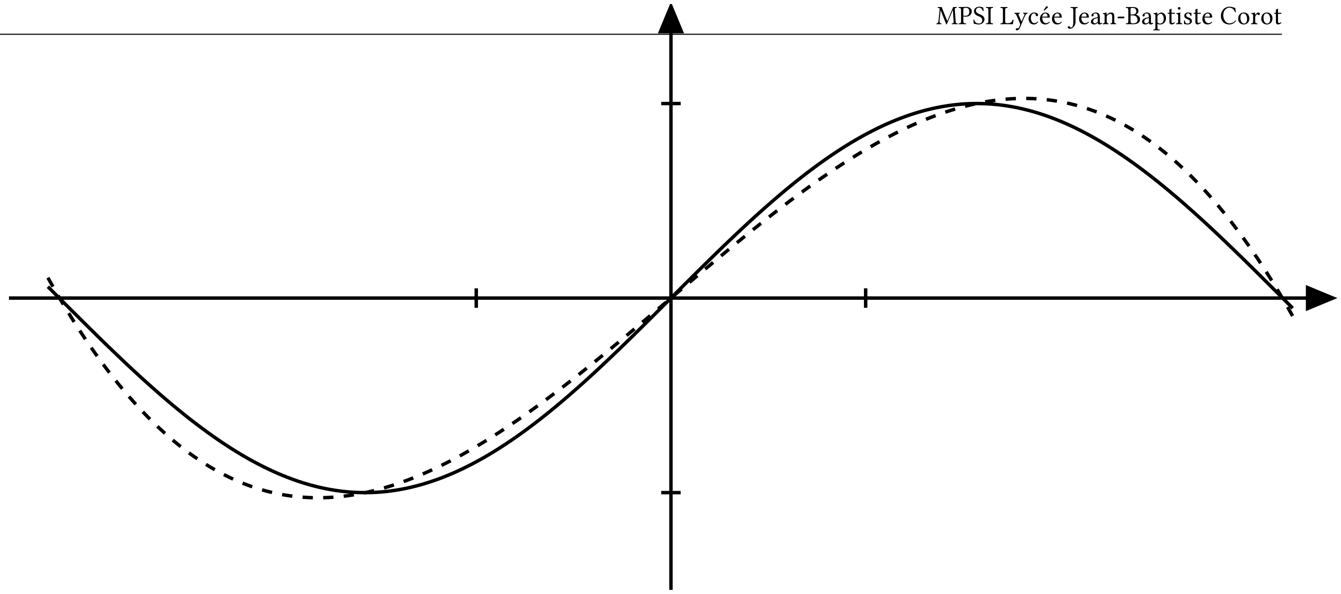
- ▶ Puisque
  $$\dim(\mathbb{R}^{n+1}) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1,$$
  ψ est un isomorphisme *si et seulement si* ψ est injectif.
- ▶ Soit $P \in \text{Ker}(\psi)$. On a alors,
  $$\forall k \leqslant n, \;\; P(a_k) = 0,$$
  le polynôme P est de degré inférieur ou égal à n et admet $n+1$ racines, il est donc nul. Ainsi le noyau de ψ est-il réduit à zéro.

2. Notons $(e_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. La condition de l'énoncé est équivalente à
$$\forall i \leqslant n, \;\; \psi(L_i) = e_i.$$
L'application ψ étant un isomorphisme, ce système d'équations admet une unique solution donnée par,
$$\forall i \leqslant n, \;\; L_i = \psi^{-1}(e_i).$$

3. Essayons d'être efficaces !

- ▶ $\mathcal{B}$ est l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ par l'isomorphisme ψ^{-1}, il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- ▶ Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. La famille $\mathcal{B}$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que
  $$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k.$$
  Puisque
  $$\forall 0 \leqslant j, i \leqslant n \;\;, \;\; L_j(a_i) = \delta_{i,j}.$$
  on obtient facilement $\forall i \leqslant n$,
  $$\alpha_i = P(a_i).$$

Remarque. Soient $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ et $n+1$ points $a_0, \dots, a_n$ du segment $[a, b]$. La recherche d'un polynôme P interpolant f aux points a_k, ie tel que
$$\forall k \leqslant n, P(a_k) = f(a_k),$$
débouche naturellement sur la définition et l'étude les polynômes interpolateurs de Lagrange : le polynôme
$$P = \sum_{k=0}^{n} f(a_i) L_i$$
est une solution évidente au problème. Voici par exemple, tracé en pointillé le graphe sur $[-\pi, \pi]$ du polynôme interpolateur du sinus aux points $\pm\pi, 0$ et $\pm\frac{\pi}{2}$.



■

4. Les polynômes définis pour tout $i \leqslant n$ par

$$\Lambda_i = \prod_{j \neq i} \left(\frac{X - \alpha_j}{a_i - a_j} \right) \in \mathbb{R}_n[X]$$

vérifient

$$\forall 0 \leqslant j, i \leqslant n \ , \ \Lambda_j(a_i) = \delta_{i,j},$$

donc d'après la question **2.**, pour tout $i \leqslant n$,

$$L_i = \prod_{j \neq i} \left(\frac{X - \alpha_j}{a_i - a_j} \right).$$

Solution 48.

1. Tout d'abord les L_i sont bien de degré inférieur ou égal à n (ils sont même de degré n exactement). De plus, $L_i(x_j)$ vaut 1 si $j = i$ et 0 sinon. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ n réels tels que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0$. En évaluant en chacun des x_i, on trouve $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ainsi la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est libre. Elle comporte $n+1$ éléments et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On a $P(x_i) = x_i^k$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$. Le polynôme $P - X^k$ admet donc au moins $n+1$ racines distinctes et $\deg(P - X^k) \leqslant n$. Donc $P - X^k$ est nul i.e. $P = X^k$.

Solution 49.

1. On trouve $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$ et $P_3 = \frac{5}{2}X^3 - \frac{3}{2}X$.

2. On a $\deg Q_n = n \deg(X^2 - 1) = 2n$. Ainsi $\deg P_n = \deg Q_n - n = n$.

3. Comme Q_n est pair, sa dérivée $n^{\text{ème}}$ P_n est paire si n est pair et impaire si n est impair.
Si n est impair, P_n est impair : on a donc $P_n(0) = 0$.
Si n est pair, P_n est pair donc P_n' est impair : on a donc $P_n'(0) = 0$.

4. Via la formule du binôme

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^{2k}$$

La formule de Taylor en 0 donne également

$$Q_n = \sum_{l=0}^{2n} \frac{Q_n^{(l)}(0)}{l!} X^l$$

Supposons n pair. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. En identifiant les coefficients de X^n dans ces deux expressions, on obtient

$$\frac{Q^{(n)}(0)}{n!} = \binom{2p}{p} (-1)^p$$

puis

$$P_n(0) = \frac{(-1)^p \binom{2p}{p}}{2^{2p}} = \frac{(-1)^p (2p)!}{2^{2p} (p!)^2}$$

Supposons n impair. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$. En identifiant les coefficients de X^{n+1} dans les deux expressions précédentes, on obtient

$$\frac{Q^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = \binom{2p+1}{p+1} (-1)^p$$

puis

$$P_n'(0) = \frac{(2p+2)(-1)^p \binom{2p+1}{p+1}}{2^{2p+1}} = \frac{(-1)^p (2p+1)!}{2^{2p} (p!)^2}$$

5. **a.** Pour $n \geqslant 1$, on a $Q_n' = 2nX(X^2-1)^{n-1}$ et donc $(X^2-1)Q_n' = 2nX(X^2-1)^n = 2nXQ_n$. On vérifie que cette égalité est encore valable pour $n = 0$ puisque $Q_0 = 1$.

b. On utilise la formule de Leibniz. Comme les dérivées de $X^2 - 1$ sont nulles à partir de l'ordre 3 et que celles de X sont nulles à partir de l'ordre 2, on a

$$\binom{n+1}{0}(X^2-1)Q_n^{(n+2)} + 2\binom{n+1}{1}XQ_n^{(n+1)} + 2\binom{n+1}{2}Q_n^{(n)} = 2n\binom{n+1}{0}XQ_n^{(n+1)} + 2n\binom{n+1}{1}Q_n^{(n)}$$

Autrement dit

$$(X^2-1)Q_n^{(n+2)} + 2(n+1)XQ_n^{(n+1)} + n(n+1)Q_n^{(n)} = 2nXQ_n^{(n+1)} + 2n(n+1)Q_n^{(n)}$$

ou encore

$$(X^2-1)Q_n^{(n+2)} + 2XQ_n^{(n+1)} = n(n+1)Q_n^{(n)}$$

Par définition de P_n, on a donc

$$(X^2-1)P_n'' + 2XP_n' = n(n+1)P_n$$

6. **a.** $Q_n = (X-1)^n(X+1)^n$ ce qui prouve que 1 et -1 sont des racines de Q_n de multiplicité n. On a donc $Q_n^{(k)}(\pm 1) = 0$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

b. On fait l'hypothèse de récurrence $\mathrm{HR}(k)$ suivante :

$Q_n^{(k)}$ possède au moins k racines distinctes dans l'intervalle $]-1, 1[$

$\mathrm{HR}(0)$ est vraie puisque les seules racines de Q_n sont -1 et 1 (pas de racine du tout si $n = 0$).
Supposons que $\mathrm{HR}(k)$ soit vraie pour un certain $k \in [\![0, n-1]\!]$. Posons $\alpha_0 = -1$, $\alpha_{k+1} = 1$ et α_i pour $1 \leqslant i \leqslant k$ k racines distinctes de $Q_n^{(k)}$ dans l'intervalle $]-1, 1[$ rangées dans l'ordre croissant. D'après la question précédente, $Q_n^{(k)}$ s'annule en α_0 et α_{k+1}. De plus, $Q_n^{(k)}$ s'annule en les α_i pour $1 \leqslant i \leqslant k$. Comme Q_n est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de Rolle entre α_i et α_{i+1} pour $0 \leqslant i \leqslant k$. Ceci prouve que la dérivée de $Q_n^{(k)}$, à savoir $Q_n^{(k+1)}$ s'annule $k+1$ fois.
Par récurrence finie, $Q_n^{(n)}$ et donc P_n possède au moins n racines dans l'intervalle $]-1, 1[$. Comme $\deg P_n = n$, P_n possède au plus n racines réelles. On en déduit que P_n possède exactement n racines réelles toutes situées dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Solution 50.

On montre par récurrence sur n que la famille $\left((X-a)^k(X-b)^{n-k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre.
La famille (1) est bien libre puisque 1 est non nul.
Supposons avoir prouvé que la famille $\left((X-a)^k(X-b)^{n-k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre pour un certain $n\in\mathbb{N}$. Soient $\lambda_0,\dots,\lambda_{n+1}\in\mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^{n+1}\lambda_k(X-a)^k(X-b)^{n+1-k}$. En évaluant en a, on trouve $\lambda_{n+1}(a-b)^{n+1}=0$ et donc $\lambda_{n+1}=0$ puisque $a\neq b$. On en déduit $(X-b)\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(X-a)^k(X-b)^{n-k}=0$. Par intégrité de $\mathbb{K}[X]$, on a $\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(X-a)^k(X-b)^{n-k}=0$. Or la famille $\left((X-a)^k(X-b)^{n-k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre par hypothèse de récurrence. Ainsi $\lambda_k=0$ pour $0\leqslant k\leqslant n$. Finalement la famille $\left((X-a)^k(X-b)^{n+1-k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ est libre.
Par récurrence, $\left((X-a)^k(X-b)^{n-k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left((X-a)^k(X-b)^{n-k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est donc une famille libre de $n+1$ polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$. Or $\dim\mathbb{K}_n[X]=n+1$ donc, cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Solution 51.

L'application f est clairement un endomorphisme de E. Soit $P\in E$. Posons $Q=f(P)$. Pour tout entier $k\leqslant n$,

$$Q^{(k)}=P^{(k)}-P^{(k+1)},$$

ainsi, par telescopage,

$$\sum_{k=0}^{n}Q^{(k)}=P^{(0)}-P^{(n+1)}.$$

Et puisque $\deg(P)\leqslant n$, $P^{(n+1)}=0$. On a donc

$$P=\sum_{k=0}^{n}Q^{(k)},$$

ce qui prouve que f est un isomorphisme d'inverse

$$f^{-1}:Q\mapsto\sum_{k=0}^{n}Q^{(k)}.$$

Solution 52.

1. L'application ϕ est clairement linéaire. On a, pour tout $k\leqslant n$:

$$\begin{aligned}\phi(X^k)&=(X+1)X^k-X(X+1)^k\\&=X^{k+1}+X^k-X\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}X^i\\&=(1-k)X^k-\sum_{i=0}^{k-2}\binom{k}{i}X^{i+1}\end{aligned}$$

avec la convention $\sum_{\varnothing}=0$. Ainsi

$$\forall k\leqslant n,\ \ \phi(X^k)\in E_n$$

ainsi $\phi\in\mathcal{L}(E_n)$.

2. Un polynôme P de E_n appartient à $\mathrm{Ker}(\phi)$ *si et seulement si*

$$XP(X+1) = (X+1)P(X).$$

En particulier, $P(0) = 0$ donc P est de la forme $P = XQ$ avec

$$X(X+1)Q(X+1) = (X+1)XQ,$$

i.e. $Q(X+1) = Q(X)$, ce qui équivaut à Q constant. Ainsi :

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{vect}(X).$$

3. Comme ϕ est un endomorphisme non injectif (car son noyau est non nul, voir la question précédente) du $\mathbb{K}$-ev E_n de dimension finie, ϕ n'est pas surjectif.

Solution 53.

1. Puisque $\deg U_p = p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

2. On constate que $\Delta U_0 = 0$. Pour $p \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\Delta U_p &= \frac{(X+1)X\dots(X-p+2)}{p!} - \frac{X(X-1)\dots(X-p+1)}{p!}\\ &= \frac{X(X-1)\dots(X-p+2)\left[(X+1)-(X-p+1)\right]}{p!}\\ &= \frac{X(X-1)\dots(X-p+2)}{(p-1)!} = U_{p-1}\end{aligned}$$

Par une récurrence évidente, on a donc $\Delta^n U_p = U_{p-n}$ si $n \leqslant p$ et $\Delta^n U_p = U_{p-n}$ si $n > p$.

3. Il suffit de vérifier que la formule est vraie pour les éléments de la base (U_p). Remarquons tout d'abord que, pour $p \geqslant 1$, $U_p(0) = 0$. Le polynôme U_n est de degré n et pour $k < n$, $\Delta^k(U_n) = U_{n-k}$ et $U_{n-k}(0) = 0$ car $n-k \geqslant 1$. Par ailleurs, $\Delta^n(U_n) = U_0 = 1$. La formule est donc vraie pour tous les U_n et, ceux-ci formant une base, elle est vraie pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

4. Montrons tout d'abord que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $U_p(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Soit donc $p \in \mathbb{N}$. Pour $0 \leqslant k \leqslant p-1$, $U_p(k) = 0$. Pour $k \geqslant p$, $U_p(k) = \binom{k}{p}$. Enfin pour $k < 0$,

$$\begin{aligned}U_p(k) &= \frac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!}\\ &= (-1)^p\frac{(-k)(-k+1)\dots(-k+p-1)}{p!}\\ &= \binom{-k+p-1}{p}\end{aligned}$$

Ainsi $U_p(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ et si les composantes d'un polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ dans la base (U_p) sont entières, alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
Réciproquement, soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n tel que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. On écrit P sous la forme $P = \sum_{p=0}^{n} \lambda_p U_p$. Alors $P(0) = \lambda_0$ donc $\lambda_0 \in \mathbb{Z}$.
Soit $1 \leqslant k \leqslant n$. Supposons avoir prouvé que $\lambda_p \in \mathbb{Z}$ pour $0 \leqslant p \leqslant k-1$. Comme $U_p(k) = 0$ pour $p > k$ et que $U_k(k) = 1$, on a $P(k) = \sum_{p=0}^{k-1} \lambda_p U_p(k) + \lambda_k$. Ainsi $\lambda_k \in \mathbb{Z}$. Par récurrence finie, on montre donc que tous les λ_p sont entiers.

5. Si f est polynomiale, notons n son dégré. En utilisant par exemple la formule donnant la décomposition de f dans la base (U_p), on obtient $\Delta^{n+1} f = 0$.
Pour la réciproque, prouvons d'abord un lemme préliminaire. Notons encore Δ l'endomorphisme de $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ qui à f associe $x \mapsto f(x+1) - f(x)$ et montrons que $\mathrm{Ker}\,\Delta$ est formé des fonctions constantes. Soit $f \in \mathrm{Ker}\,\Delta$. Par récurrence, on a donc $f(x) = f(0)$ pour tout

$x \in \mathbb{Z}$.
Démontrons maintenant un deuxième lemme. Soit $f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ telle qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $\Delta f = P$ et montrons qu'alors f est polynomiale. On peut écrire $P = \sum_{p=0}^{n} \lambda_p U_p$. Posons $Q = \sum_{p=0}^{n} \lambda_p U_{p+1}$. On a alors $\Delta(f - Q) = 0$ donc f et Q diffèrent d'une constante et f est polynomiale.
Par une récurrence descendante finie sur k, on prouve que $\Delta^k f$ est polynomiale pour k variant de n à 0. Pour $k = 0$, on obtient le résultat voulu.

Solution 54.

1. *Prouvons que l'application* φ_n *est un endomorphisme de l'espace vectoriel* E_n.

   ▶ Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $W = \varphi_n(\lambda P + Q)$. On a alors,

$$\begin{aligned}
W &= (X-a)((\lambda P+Q)' + (\lambda P+Q)(a)) \\
&\qquad - 2((\lambda P+Q) - (\lambda P+Q)(a)) \\
&\qquad \text{(par définition de } \varphi_n\text{)} \\
&= (X-a)(\lambda P' + Q' + \lambda P(a) + Q(a)) \\
&\qquad - 2(\lambda P + Q - \lambda P(a) - Q(a)) \\
&\qquad \text{(par linéarité de la dérivation et de l'évaluation)} \\
&= \lambda((X-a)(P' + P(a)) - 2(P - P(a))) \\
&\qquad + ((X-a)(Q' + Q(a)) - 2(Q - Q(a))) \\
&\qquad \text{(cf. calculs dans l'algèbre } \mathbb{R}[X]\text{)} \\
&= \lambda\varphi_n(P) + \varphi_n(Q) \\
&\qquad \text{(par définition de } \varphi_n\text{)}
\end{aligned}$$

   ▶ Il reste à vérifier que E_n est stable par φ_n, c'est-à-dire que $\varphi_n(E_n) \subset E_n$. Soit $P \in E_n$. On a alors

$$\deg((X-a)(P' + P(a))) \leqslant n$$

   et $\deg(-2(P - P(a))) \leqslant n$, donc

$$\deg(\varphi_n(P)) \leqslant n$$

   et ainsi $\varphi_n(P) \in E_n$.

2. La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est étagée en degré, il s'agit donc d'une famille libre de E_n. Puisqu'elle comporte

$$n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$$

   vecteurs, c'est une base de E_n.

3. On a clairement $\varphi(P_0) = \varphi(P_1) = \varphi(P_2) = 0$. De plus, pour tout $k \geqslant 3$,

$$\begin{aligned}
\varphi(P_k) &= (X-a)k(X-a)^{k-1} - 2(X-a)^k \\
&= (k-2)(X-a)^k = (k-2)P_k
\end{aligned}$$

4. Ainsi ,

$$\mathrm{Im}(\varphi_n) = \mathrm{vect}(\varphi(P_0), \dots \varphi(P_n)) = \mathrm{vect}(P_3, \dots, P_n)$$

   et $\mathrm{rg}(\varphi_n) = n - 2$. De plus

$$\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{vect}(P_0, P_1, P_2) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_n)$$

   et d'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_n)) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X]).$$

   On a donc $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \mathbb{R}_2[X]$.

5. On a
$$\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \mathrm{vect}(P_0, P_1, P_2)$$
et
$$\mathrm{Im}(\varphi_n) = \mathrm{vect}(P_3, \dots, P_n)$$
et puisque $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E_n,
$$E_n = \mathrm{Im}(\varphi_n) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi_n).$$

6. Etant un endomorphisme de E_n, φ_n est un projecteur *si et seulement si*
$$\varphi_n \circ \varphi_n = \varphi_n.$$
C'est-à-dire,
$$\forall P \in E_n \ , \ \varphi_n(P) = (\varphi_n \circ \varphi_n)(P)$$
ce qui est équivalent à
$$\forall 0 \leqslant k \leqslant n \ , \ \varphi(P_k) = (\varphi \circ \varphi)(P_k).$$
D'après les calculs entrepris à la question **2.**,
$$\forall 0 \leqslant k \leqslant 2 \ , \ \varphi(P_k) = (\varphi \circ \varphi)(P_k) = 0,$$
et
$$\varphi(P_3) = P_3 = (\varphi \circ \varphi)(P_3).$$
De plus, $\forall k \geqslant 4$,
$$\varphi(P_k) \ = \ (k-2)P_k \neq (\varphi \circ \varphi)(P_k) = (k-2)^2 P_k$$
car $(k-2)^2 \neq k-2$ et $P_k \neq 0$. L'endomorphisme φ_n est donc un projecteur *si et seulement si* $n = 3$.

Solution 55.

1. On a clairement $\varphi(1) = 1$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme,
$$\begin{aligned}
\varphi(X^k) &= \frac{X^k + (X+1)^k}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(X^k + \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} X^l\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(X^k + X^k + \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} X^l\right) \\
&= X^k + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} X^l
\end{aligned}$$
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg(\varphi(X^k)) = k$ et le coefficient dominant de $\varphi(X^k)$ vaut 1.

2. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = \frac{(\lambda P + \mu Q)(X) + (\lambda P + \mu Q)(X+1)}{2} = \frac{\lambda P(X) + \mu Q(X) + \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1)}{2}$$
par linéarité de la composition. Ainsi,
$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda \frac{P(X) + P(X+1)}{2} + \mu \frac{Q(X) + Q(X+1)}{2} = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$$
L'application φ est donc linéaire.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par φ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, $(\varphi(1), \dots, \varphi(X^n))$ est bien une famille de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ à degrés étagés (et donc libre) d'après la première question. Puisqu'elle comporte $n+1$ éléments, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Il s'ensuit que l'image de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ par φ est une base de $\mathbb{R}[X]$, ce qui prouve que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

4. *Étude d'une suite de polynômes.*

a. U_n est l'unique antécédent de $\frac{X^n}{n!}$ par la bijection φ.

b. Il est clair que $U_0 = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $U_n(X+1) + U_n(X) = \frac{2X^n}{n!}$, on obtient après évaluation en 0, $U_n(1) + U_n(0) = 0$.
En dérivant l'égalité polynomiale précédente, on aboutit à,

$$U_n'(X+1) + U_n'(X) = \frac{2nX^{n-1}}{n!} = \frac{2X^{n-1}}{(n-1)!} = U_{n-1}(X+1) + U_{n-1}(X)$$

ou encore $\varphi(U_n') = \varphi(U_{n-1})$. Par injectivité de φ, $U_n' = U_{n-1}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\varphi(V_n) = \frac{(-1)^n(U_n(1-X) + U_n(1-(X+1)))}{2} = \frac{(-1)^n(U_n(1-X) + U_n(-X))}{2} = (-1)^n\frac{(-X)^n}{n!} = \frac{X^n}{n!} = \varphi(U_n)$$

Par injectivité de φ, $V_n = U_n$ i.e. $U_n(1-X) = (-1)^n U_n(X)$.

Solution 56.

- Le polynôme nul est une solution évidente de l'équation.
- Soit P une solution non nulle de l'équation. Notons $d \geqslant 0$ son degré. Puisque $P(X^2)$ est de degré $2d$ et $(X^2+1)P$, on a *nécessairement*

$$2d = d + 2,$$

ie $d = 2$.

- Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et

$$P = aX^2 + bX + c.$$

Après tout calcul, P est solution *si et seulement si*

$$b = 0, \quad c = -a.$$

En notant $\Gamma = X^2 - 1$, l'ensemble des solutions est la droite vectorielle

$$\text{vect}(\Gamma).$$

Solution 57.

Soit P un tel polynôme et $Q = P - P(0)$. On prouve sans peine que $Q(X+1) = Q(X)$ et $Q(0) = 0$. On en déduit par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = 0$. Le polynôme Q admet donc une infinité de racines : $Q = 0$ et donc P est constant. Réciproquement, il est clair qu'un polynôme P constant vérifie $P(X+1) = P(X)$.

Solution 58.

- Il est clair que le seul polynôme constant solution de l'équation est le polynôme nul.

- Soit P une solution non constante de l'équation. Notons d son degré. Puisque $(P')^2$ est de degré $2d-2$ et $4P$ de degré d , on a *nécessairement*
$$2d-2=d,$$
c'est-à-dire $d=2$.

- Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et
$$P = aX^2 + bX + c.$$
Après tout calcul , P est solution *si et seulement si*
$$a^2 = a,\ \ ab = b,\ \ 4c = b^2.$$
C'est-à-dire
$$a = b = 0 = c$$
ou
$$a = 1.$$

- Les solutions sont donc le polynôme nul et ceux de la forme
$$X^2 + bX + \frac{b^2}{4},\ \ b \in \mathbb{R}.$$

Solution 59.

1. **a.** Soit $d \in \mathbb{N}$, le degré de P :
$$P = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0.$$
Alors le degré de XP est égal à $d+1$ et le degré de $P(X^2)$ à $2d$:
$$P(X^2) = a_d X^{2d} + \cdots + a_1 X^2 + a_0.$$
Par conséquent, $2d = d+1$, donc $d = 1$. Le polynôme P possède donc une unique racine complexe.
   b. En substituant 0 à X, on trouve $P(0) = 0$, ce qui montre que 0 est *la* racine de P, donc il existe un réel α (non nul) tel que $P = \alpha X$.

2. Tout polynôme de la forme αX, avec $\alpha \in \mathbb{C}$ (éventuellement nul), convient à l'évidence. D'après la première question, il n'y a pas d'autre solution.

   Remarque. Il faut acquérir le réflexe d'étudier spontanément le degré, le coefficient dominant, les racines d'un polynôme vérifiant une telle équation : c'est ainsi qu'on trouvera (en général…) assez de conditions nécessaires pour caractériser les solutions. ■

Solution 60.

- Le polynôme nul est clairement solution.

- Il n' y a pas de solution de degré zéro ou un.

- Recherchons le degré n d'une éventuelle solution non nulle P de l'équation. D'après ce qui précède, on peut supposer $n \geqslant 2$. Comme le degré de $P'P''$ vaut $n-1+n-2 = 2n-3$, l'équation $P'P'' = 18P$ impose
$$2n-3 = n,$$
ie $n = 3$.

Soit
$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d \quad \text{avec } a \neq 0.$$
P est solution de $P'P'' = 18P$ *si et seulement si*
$$\begin{aligned} 18aX^3 + 18bX^2 + 18cX + 18d &= (3aX^2 + 2bX + c)(6aX + 2b) \\ &= (18a^2)X^3 + (18ab)X^2 + (4b^2 + 6ac)X + (2bc) \end{aligned}$$
c'est-à-dire *si et seulement si*
$$\begin{cases} 18a &= 18a^2 \\ 18b &= 18ab \\ 18c &= 4b^2 + 6ac \\ 18d &= 2bc \end{cases}$$
Comme $a \neq 0$, on en déduit que ce système équivaut à
$$c = \frac{b^2}{3}, \quad d = \frac{b^3}{27}.$$
Les solutions sont donc le polynôme nul et les poluynômes P de la forme
$$P = X^3 + bX^2 + \frac{b^2}{3}X + \frac{b^3}{27}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Solution 61.

1. Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ tel que $\Phi(P) = P(X+1) + P(X)$. Il est clair que $\deg \Phi(X^n) = n$. L'image de la base canonique de$\mathbb{K}[X]$ est donc une base de $\mathbb{K}[X]$. Par conséquent, Φ est un isomorphisme. Le polynôme X^n admet donc un unique antécédent P_n par Φ qui vérifie donc la condition de l'énoncé.

2. Si on dérive la relation $P_n(X+1) + P_n(X) = 2X^n$, on obtient $P_n'(X+1) + P_n'(X) = 2nX^{n-1}$. De plus, $P_{n-1}(X+1) + P_{n-1}(X) = X^{n-1}$. Par conséquent, $\Phi(P_n') = \Phi(nP_{n-1})$. Comme Φ est injectif, $P'n = nP_{n-1}$.

3. La famille $(2X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. La famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est l'image réciproque de cette base par l'isomorphisme Φ, c'est donc aussi une base de $\mathbb{K}[X]$.

4. On a $\Phi(P_n) = 2X^n$ donc $\Phi(P_n(X+1)) = 2(X+1)^n$. Par conséquent,
$$\begin{aligned} \Phi(P_n(X+1)) &= \sum_{k=0}^{n} 2\binom{n}{k} X^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Phi(P_k) \\ &= \Phi\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k\right) \end{aligned}$$
Comme Φ est un isomorphisme, on en déduit :
$$P_n(X+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k$$

5. Posons $Q_n(X) = P_n(1-X)$. Alors
$$\Phi(Q_n) = Q_n(X+1) + Q_n(X) = P_n(-X) + P_n(1-X)$$
Par ailleurs, en substituant $-X$ à X dans la relation
$$P_n(X+1) + P_n(X) = 2X^n$$
on obtient :
$$P_n(1-X) + P_n(-X) = 2(-1)^n X^n = (-1)^n \Phi(P_n)$$
Comme Φ est injectif, on a donc $Q_n = (-1)^n P_n$ i.e. $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.

Solution 62.

Soit P un tel polynôme. En substituant 0 à X dans la condition de l'énoncé, on trouve $P(0) = 0$. Puis en substituant -1 à X, on trouve $P(-1) = 0$. En substituant -2 à X, on trouve $P(-2) = 0$. Enfin, en substituant -3 à X, on trouve $P(-3) = 0$. On ne peut pas aller plus loin. Ainsi P est divisible par $X(X+1)(X+2)(X+3)$. Il existe donc un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = X(X+1)(X+2)(X+3)Q$. La condition de l'énoncé donne $X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)Q(X) = X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)Q(X+1)$ et donc $Q(X) = Q(X+1)$ par intégrité de $\mathbb{R}[X]$. On montre par récurrence que tout entier naturel est racine de $Q - Q(0)$ donc Q est constant. Ainsi P est de la forme $\lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Réciproquement tout polynôme de la forme $\lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifie bien la condition de l'énoncé.

Solution 63.

1. Soit a une racine de P. Alors $P(a^2) = P(a)P(a+1) = 0$ i.e. a^2 est une racine de P. On peut alors montrer par récurrence que a^{2^n} est une racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Comme P est non nul, il possède un nombre fini de racines. Comme $\mathbb{N}$ est infini, l'application $n \mapsto a^{2^n}$ ne peut être injective. Il existe donc des entiers m et n tels que $a^{2^m} = a^{2^n}$. Supposons $m > n$. Comme a est non nul, on peut diviser l'égalité précédente par a^{2^n} ce qui donne $a^{2^m - 2^n} = 1$ avec $2^m - 2^n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi a est une racine de l'unité.

3. On va montrer que P peut admettre une racine nulle. Supposons que P admette une racine nulle. En substituant -1 à X dans l'identité $P(X^2) = P(X)P(X+1)$, on voit que 1 est également racine de P. Donc P est divisible par $X(X-1)$.
Tentons notre chance avec ce polynôme : prenons $P = X(X-1)$. On a bien $P(X^2) = P(X+1)P(X)$ et pourtant 0 est racine de P donc P n'admet pas pour racine que des racines de l'unité.

4. Supposons que P admette une racine ω non nulle et distincte de 1. On sait que $|\omega| = 1$. Mais $P((\omega-1)^2) = P(\omega)P(\omega-1) = 0$ donc $(\omega-1)^2$ est aussi une racine de P. On a donc soit $(\omega-1)^2 = 0$ i.e. $\omega = 1$, ce qui est exclus, soit $\left|(\omega-1)^2\right| = 1$ i.e. $|\omega - 1| = 1$. Le point d'affixe ω est donc sur le cercle unité et sur le cercle de centre le point d'affixe 1 et de rayon 1. Des considérations élémentaires de géométries montrent que $\omega = e^{\pm \frac{i\pi}{3}}$. Mais alors ω^2 est également une racine de P non nulle et distincte de 1 et pourtant $\omega^2 \neq e^{\pm \frac{i\pi}{3}}$. C'est que notre hypothèse de départ était fausse.

5. Le polynôme nul vérifie évidemment la conidtion demandée. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$. D'après ce qui précède, les seules racines possibles de P sont 0 et 1. P est donc de la forme $P = \lambda X^n(X-1)^p$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n, p \in \mathbb{N}$. Alors $P(X^2) = \lambda X^{2n}(X^2-1)^p = \lambda X^{2n}(X-1)^p(X+1)^p$ et $P(X)P(X+1) = \lambda^2 X^{n+p}(X-1)^p(X+1)^n$. L'unicité de la décomposition en facteurs irréductibles montre que $\lambda = \lambda^2$ et donc $\lambda = 1$ et que $p = n$. P est donc de la forme $P = X^n(X-1)^n$.
Réciproquement, soit $P = X^n(X-1)^n$. On vérifie que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.
En conclusion, les seuls polynômes vérifiant la condition demandée sont le polynôme nul et les polynômes du type $X^n(X-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Solution 64.

1. Supposons que 0 soit racine de P. Remarquons que si a est racine de P, alors $(a+1)^2$ l'est également. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (u_n + 1)^2$. On montre par récurrence que $P(u_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montre également par récurrence que les termes de u_n appartiennent à $\mathbb{R}_+$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + u_n + 1 > 0$. La suite (u_n) est donc strictement croissante : elle prend donc une infinité de valeurs. Ceci prouve que P admet une infinité de racines donc P est nul, ce qui est contradictoire avec l'énoncé.

2. Remarquons maintenant que si a est racine de P, alors a^2 l'est également. On peut alors montrer par récurrence que a^{2^n} est une racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme P est non nul, il possède un nombre fini de racines. Comme $\mathbb{N}$ est infini, l'application $n \mapsto a^{2^n}$ ne peut être injective. Il existe donc des entiers m et n tels que $a^{2^m} = a^{2^n}$. Supposons $m > n$. Comme a est non nul d'après la question précédente, on peut diviser l'égalité précédente par a^{2^n} ce qui donne $a^{2^m - 2^n} = 1$ avec $2^m - 2^n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi a est une racine de l'unité et est donc de module 1.

3. On suppose encore P non nul. Soit a une racine éventuelle de P. On a vu que $|a| = 1$. Alors $(a+1)^2$ est également une racine de P donc $\left|(a+1)^2\right| = 1$ i.e. $|a+1| = 1$. Le point d'affixe a est donc sur le cercle unité et sur le cercle de centre le point d'affixe -1 et de rayon 1. Des considérations élémentaires de géométries montrent que $a = j$ ou $a = j^2$. P est donc de la forme $\lambda(X-j)^n(X-j^2)^p$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $n, p \in \mathbb{N}$. Alors

$$P(X^2) = \lambda(X^2-j)^n(X^2-j^2)^p = \lambda(X^2-j^4)^n(X^2-j^2)^p = \lambda(X-j^2)^n(X+j^2)^n(X-j)^p(X+j)^p$$
$$P(X)P(X-1) = \lambda^2(X-j)^n(X-j^2)^p(X-1-j)^n(X-1-j^2)^p = \lambda^2(X-j)^n(X-j^2)^p(X+j^2)^n(X+j)^p$$

Par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles, on obtient $\lambda = \lambda^2$ i.e. $\lambda = 1$ et $n = p$. P est donc de la forme $P = (X-j)^n(X-j^2)^n = (X^2+X+1)^n$.
Réciproquement, soit $P = (X^2+X+1)^n$. On vérifie que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.
En conclusion, les seuls polynômes vérifiant la condition demandée sont le polynôme nul et les polynômes du type $(X^2+X+1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Solution 65.

Soit P un polynôme vérifiant la condition de l'énoncé. Si P est constant, P est nécessairement nul. Si P est non constant, notons n son degré et a son coefficient dominant. Les polynômes P et X^2P'' ont même dégré et leurs coefficients dominants sont respectivement $6a$ et $n(n-1)a$. Comme $a \neq 0$, $n(n-1) = 6$ et donc $n = 3$. Comme X^2 divise P, P est de la forme $aX^3 + bX^2$. En reportant dans l'équation, on obtient $6aX^3 + 6bX^2 = 6aX^3 + 2bX^2$ et donc $b = 0$. Dans les deux cas, P est de la forme aX^3 (avec éventuellement $a = 0$ pour retrouver le polynôme nul).
Réciproquement, on vérifie que les polynômes aX^3 avec $a \in \mathbb{K}$ conviennent.
On en déduit que l'ensemble des polynômes recherchés est $\text{vect}(X^3)$.

Solution 66.

1. **a.** Supposons α racine de P.
Alors $a_0 = \alpha$ est racine de P. Supposons a_n racine de P pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$P(a_{n+1}) = P(a_n^2 + 2a_n) = P((a_n+1)^2 - 1) = P(a_n)P(a_n+2) = 0$$

Ainsi a_{n+1} est racine de P.
Par récurrence, a_n est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. On montre par récurrence que (a_n) est une suite strictement positive. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = a_n^2 + a_n > 0$ donc (a_n) est strictement croissante.

c. Si $\alpha > 0$ est racine de P, la suite (a_n) est strictement croissante et prend donc une infinité de valeurs. Ainsi P admet une infinité de racines, ce qui contredit le fait que P est non nul. P ne peut admettre de racines strictement positives.

2. **a.** Supposons que -1 est racine. Alors

$$P(3) = P((-2)^2 - 1) = P(-3)P(-1) = 0$$

Mais 3 ne peut être racine de P puisque P n'admet pas de racines strictement positives.

b. On a $a_{n+1} + 1 = (a_n+1)^2$. On montre alors par récurrence que $a_n + 1 = (\alpha+1)^{2^n}$.

c. Si $|\alpha+1| = 0$ ou $|\alpha+1| = 1$, la suite (r_n) est constante. Si $0 < |\alpha+1| < 1$, la suite (r_n) est strictement décroissante. Si $|\alpha+1| > 1$, la suite (r_n) est strictement croissante. Ainsi la suite (r_n) est strictement monotone *si et seulement si* $|\alpha+1| \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.

d. Supposons α racine de P.
Si $|\alpha+1| \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, la suite (r_n) est strictement monotone donc injective. A fortiori, la suite (a_n) l'est également. Comme a_n est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$, P admet une infinité de racines, ce qui contredit le fait que P est non nul.
De plus, on ne peut avoir $|\alpha+1| = 0$ puisque -1 n'est pas racine de P.
C'est donc que $|\alpha+1| = 1$.

e. Supposons α racine de P. Alors $P((\alpha-1)^2 - 1) = P(\alpha-2)P(\alpha) = 0$. Ainsi $\alpha^2 - 2\alpha$ est racine de P. D'après la question précédente, $|\alpha^2 - 2\alpha + 1| = 1$ ou encore $|(\alpha-1)^2| = 1$. On en déduit que $|\alpha - 1| = 1$.

3. Si P est non constant, P admet au moins une racine. Notons à nouveau α une racine de P. D'après ce qui précède, $|\alpha-1| = |\alpha+1| = 1$. Le point d'affixe α est donc sur les cercles de rayon 1 et de centres respectifs les points d'affixe -1 et 1. Ainsi $\alpha = 0$. La seule racine de P est donc 0.

4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation $(*)$.
Si P est constant, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P = \lambda$. La relation $(*)$ implique $\lambda = \lambda^2$ i.e. $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.
Si P est non constant, ce qui prècède montre que P admet 0 pour unique racine. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P = \lambda X^n$. En raisonnant sur les coefficients dominants dans la relation $(*)$, on a nécessairement $\lambda = \lambda^2$ et donc $\lambda = 1$ puisque $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Ainsi $P = X^n$.
Réciproquement, on constate que le polynôme nul et les polynômes X^n pour $n \in \mathbb{N}$ (on retrouve le polynôme 1 pour $n = 0$) vérifient bien la relation $(*)$.
Les polynômes recherchés sont donc exactement le polynôme nul et les polynômes X^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution 67.

Si $n = 0$, on prend P quelconque. Si $n = 1$, on prend $P = 1$. On suppose maintenant $n \geqslant 2$.
Notons $P(x)$ la partie régulière du développement limité à l'ordre $n-1$ de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0. P est donc un polynôme et $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^{n-1})$. Comme $P \underset{x\to 0}{=} \mathcal{O}(1)$, on a donc également $1+x \underset{x\to 0}{=} P(x)^2 + o(x^{n-1})$. Effectuons la division euclidienne de P^2 par X^n : il existe deux polynômes Q et R tels que $P^2 = X^n Q + R$ avec $\deg R < n$. On a alors $1+x \underset{x\to 0}{=} R(x) + x^n Q(x) + o(x^{n-1}) = R(x) + o(x^{n-1})$. Par unicité du développement limité, on a $1 + X = R$ (c'est ici qu'on utilise l'hypothèse $n \geqslant 2$). Donc $1 + X = P^2 - X^n Q$. Ainsi X^n divise $1 + X - P^2$.

Solution 68.

Puisque le coefficient du monôme de degré n du polynôme P est $\frac{P^{(n)}(0)}{n!}$, un polynôme P est de la forme donnée dans l'énoncé *si et seulement si* $(-1)^n P^{(n)}(0) \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soient donc P et Q deux polynômes de la forme donnée dans l'énoncé. On a donc $(-1)^n P^{(n)}(0) \geqslant 0$ et $(-1)^n Q^{(n)}(0) \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par la formule de Leibniz

$$(-1)^n (PQ)^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k P^{(k)}(0) (-1)^{(n-k)} Q^{(n-k)} 0 \geqslant 0$$

Solution 69.

On a $(1+X)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k$ et $(1-X)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k X^k$ par la formule du binôme de Newton. Le coefficient de X^n dans $(1+X)^n(1-X)^n$ est donc

$$\sum_{p+q=n} \binom{n}{p} (-1)^q \binom{n}{q} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2$$

en utilisant la symétrie des coefficients binomiaux pour la dernière égalité.
Mais comme $(1+X)^n(1-X)^n = (1-X^2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k X^2 k$, on en déduit que ce coefficient vaut 0 si n est impair et $(-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}}$ si n est pair.
Remarque. On aurait pu montrer directement la nullité de la somme de l'énoncé dans le cas où n est impair en effectuant le changement d'indice $l = n - k$ et en exploitant la symétrie des coefficients binomiaux. ■

Solution 70.

1. Soit P un tel polynôme. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \overline{P(x)} = \overline{P}(x)$. Les polynômes P et $\overline{P}$ coïncident sur $\mathbb{R}$ qui est infini donc il sont égaux. Ainsi $P = \overline{P}$ i.e. $P \in \mathbb{R}[X]$.
Réciproquement tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

2. Soit P un tel polynôme. P est forcément non nul : notons $n = \deg P$. Alors pour tout $z \in \mathbb{U}$, $P(z)\overline{P(z)} = 1$ ou encore $P(z)\overline{P}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$. On en déduit que pour tout $z \in \mathbb{U}$, $P(z)z^n\overline{P}\left(\frac{1}{z}\right) = z^n$. Posons $Q = X^n\overline{P}\left(\frac{1}{X}\right)$. Q est bien un polynôme et pour tout $z \in \mathbb{U}$, $P(z)Q(z) = z^n$. Comme $\mathbb{U}$ est infini, $PQ = X^n$. Ainsi P divise X^n et $\deg P = n$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $P = \lambda X^n$. Mais la condition $P(\mathbb{U}) \subset (\mathbb{U})$ impose alors $\lambda \in \mathbb{U}$.
Réciproquement, tout polynôme de la forme λX^n avec $\lambda \in \mathbb{U}$ et $n \in \mathbb{N}$ convient.

3. Soit P un tel polynôme et posons $P = \sum_{k=0}^n a_kX^k$ avec $a_0, \dots, a_n$ dans $\mathbb{C}$ a priori. Soient $x_0, \dots, x_n$ des rationnels distincts deux à deux. Posons $y_k = P(x_k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Notons $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $M = \left(x_i^j\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$. Ainsi $MA = Y$. M est une matrice de Vandermonde inversible puisque les x_k sont distincts deux à deux. Comme M est à coefficients dans $\mathbb{Q}$, M^{-1} l'est également. Enfin, Y est aussi à coefficients dans $\mathbb{Q}$ par hypothèse et finalement $A = M^{-1}Y$ est à coefficients rationnels. Ainsi $P \in \mathbb{Q}[X]$.
Réciproquement tout polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ convient évidemment.

Remarque. La preuve qui précède est valable pour tout sous-corps de $\mathbb{C}$ (et pas seulement pour $\mathbb{Q}$). En effet, tout sous-corps de $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{Q}$ et est donc infini : on peut toujours trouver $n+1$ scalaires $x_0, \dots, x_n$ distincts deux à deux dans ce sous-corps quelque soit $n \in \mathbb{N}$. ■

Solution 71.

Supposons que ce soit le cas. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{(n)}(0) = \cos^{(n)}(0)$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{(2n)}(0) = \cos^{(2n)}(0) = (-1)^n \neq 0$. Ceci est impossible puisque pour $2n > \deg P$, $P^{(2n)} = 0$.

Solution 72.

1. Posons $P = \sum_{k=0}^n a_kX^k$. Alors
$$P^2 = \sum_{0 \leqslant k,\ell \leqslant n} a_ka_\ell X^{k+l}$$
Par linéarité de l'intégrale
$$\int_{-1}^1 P^2(x)\ dx = \sum_{0 \leqslant k,\ell \leqslant n} a_ka_\ell \int_{-1}^1 x^{k+l}\ dx = \sum_{0 \leqslant k,\ell \leqslant n} \frac{a_ka_\ell(1-(-1)^{k+\ell+1})}{k+\ell+1}$$
et également
$$\int_0^\pi P^2(e^{i\theta})e^{i\theta}\ d\theta = \sum_{0 \leqslant k,\ell \leqslant n} a_ka_\ell \int_0^\pi e^{i(k+\ell+1)\theta}\ d\theta = \sum_{0 \leqslant k,\ell \leqslant n} \frac{a_ka_\ell((-1)^{k+\ell+1}-1)}{i(k+\ell+1)}$$
On en déduit immédiatement l'égalité annoncée.
Ensuite, par inégalité triangulaire,
$$\left|\int_{-1}^1 P^2(x)\ dx\right| \leqslant \int_0^\pi |P^2(e^{i\theta})e^{i\theta}|\ d\theta$$
La première intégrale étant positive, on obtient donc
$$\int_{-1}^1 P^2(x)\ dx \leqslant \int_0^\pi |P(e^{it})|^2\ dt$$

Le changement de variable $t \mapsto -t$ donne alors

$$\int_0^\pi |P(e^{it})|^2 \, dt = \int_{-\pi}^0 |P(e^{-it})|^2 \, dt$$

Mais comme P est à coefficients réelles, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(e^{-it}) = P(\overline{e^{it}}) = \overline{P(e^{it})}$ de sorte que $|P(e^{it})| = |P(e^{-it})|$. Finalement,

$$\int_0^\pi |P(e^{it})|^2 \, dt = \int_{-\pi}^0 |P(e^{it})|^2 \, dt$$

et donc, via Chasles,

$$\int_0^\pi |P(e^{it})|^2 \, dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi |P(e^{it})|^2 \, dt$$

On a donc bien l'inégalité annoncée.

2. Comme vu précédemment, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|P(t)|^2 = P(e^{it})P(e^{-it}) = \sum_{0 \leqslant k,\ell \leqslant n} a_k a_\ell e^{i((k-l)t)}$$

Or il est clair que pour $(k,l) \in [\![0,n]\!]^2$, $\int_{-\pi}^\pi e^{i((k-l)t)} \, dt = 2\pi\delta_{k,\ell}$. Ainsi

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi |P(e^{it})|^2 \, dt = \pi \sum_{k=0}^n a_k^2$$

Enfin, puisque P^2 est à valeurs positives

$$\int_0^1 P^2(x) \, dx \leqslant \int_{-1}^1 P^2(x) \, dx$$

Un calcul similaire à celui effectué dans la question précédente montre que

$$\int_0^1 P^2(x) \, dx = \sum_{0 \leqslant k,\ell \leqslant n} \frac{a_k a_\ell}{k+\ell+1}$$

ce qui fournit bien l'inégalité voulue.

Solution 73.

Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'untel polynôme P. On aurait alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x.$$

Le polynôme $P - X$ admettrait alors une infinité de racines (tous les réels !) et serait donc nul. Ainsi, on aurait $P = X$. Il est clair que c'est absurde car $P(i) = i \neq -i$.