Rayon de convergence

Exercice 1 ★★

Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ des séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n$. On suppose de plus que $a_n b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathrm{R} = \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$.

Exercice 2 ★★★ **Règle de Cauchy**

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.

Exercice 3 ★★★

Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \frac{a_n}{\sum_{k=0}^n a_k}$. Comparer les rayons des séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$.

Exercice 4 ★★ **Mines-Ponts MP 2016**

Soit $q > 0$, on pose $a_n = q^{\sqrt{n}}$ si n est un carré d'entier et $a_n = 0$ sinon. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$.

Exercice 5 ★ **Règle de d'Alembert**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1. $\sum \frac{(-1)^n z^n}{\sqrt{n}}$
2. $\sum 2^n \ln(n) z^n$
3. $\sum \binom{2n}{n} z^n$
4. $\sum (n + 2^n i) z^n$

Exercice 6 ★★

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1. $\sum \cos(n) z^n$
2. $\sum \frac{\sin n}{n} z^n$
3. $\sum \tan\left(\frac{n\pi}{7}\right) z^n$
4. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} d_n z^n$ où d_n est le nombre de diviseurs positifs de n
5. $\sum a_n z^n$ où a_n est la $n^{\text{ème}}$ décimale de π

Exercice 7 ★★ **Séries lacunaires**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1. $\sum z^{n^2}$
2. $\sum 2^n z^{2^n}$
3. $\sum \frac{n^n}{n!} z^{3n}$

Etude au bord du disque de convergence

Exercice 8 ★★ **CCP MP**

On note $f(x)$ la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Y a-t-il convergence en R et $-\mathrm{R}$?
3. Déterminer $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.
4. Montrer que $\lim_{x\to 1^-} (1-x) f(x) = 0$.

Exercice 9 ★★ **CCP MP 2018**

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\beta}$ et $b_n = \frac{1}{r_n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum b_n x^n$.
2. Étudier la convergence de la série pour $x = \mathrm{R}$ et $x = -\mathrm{R}$.

Exercice 10 ★★★

Soit (a_n) une suite de premier terme $a_0 > 0$ et telle que $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.
2. Étudier la convergence au bord de l'intervalle de convergence.

Exercice 11 ★★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \ln(n) x^n$.

   On note $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^n$.

2. Montrer que
$$\forall x \in]-1, 1[,\ \mathrm{S}(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$$
3. En déduire que
$$\lim_{x\to 1} \mathrm{S}(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
4. Déterminer $\lim_{x\to 1} \mathrm{S}(x)$.

Exercice 12 ★★ **CCP MP**

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la limite de (a_n).
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
3. Déterminer le domaine de définition de $x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   On pourra déterminer la limite de $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$.

Calcul de sommes de séries entières

Exercice 13 ★

Prouver la convergence et calculer la somme de la série suivante $\sum_{n\geq 0} (n+1)3^{-n}$.

Exercice 14 ★★★ **ENS (non PSI) PC 2019**

On pose E l'ensemble des suites à valeurs réelles de limite nulle et
$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
Montrer que :
$$\forall a \in \mathrm{E}, \exists \varphi(a) \in \mathrm{E}, \forall x \in]0, 1[,\ f_{\varphi(a)}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{f_a(t)}{1-t}\, \mathrm{d}t$$

Exercice 15 ★★

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$.

1. Déterminer la limite de la suite (a_n).
2. Quel est le sens de variation de (a_n) ?
3. Déterminer une relation simple entre a_n et a_{n+2}. En déduire un équivalent de (a_n).
4. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
5. Déterminer $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

Exercice 16 ★★

Déterminer le rayon de convergence et la somme de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) x^n$.

Exercice 17 ★★ **CCP MP 2018**

1. Montrer que arctan est développable en série entière sur $]-1, 1[$.
2. On considère la série entière $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(2k-1)} x^{2k+1}$. Donner son rayon de convergence R. On note $f(x)$ la somme.
3. Donner une expression simple de f' et de f.
4. Que peut-on dire de la convergence sur $[-R, R]$?
5. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$.

Exercice 18 ★★★ **Mines-Ponts MP 2018**

On note $a_n = \int_0^1 \frac{dt}{(2+t^2)^{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$.
2. Calculer la somme de cette série entière sur son domaine de convergence.

Exercice 19 ★ **Petites Mines PC 2017**

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+4n-1}{n+2} x^n$.

Exercice 20 ★★

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.
2. Déterminer $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

Equations différentielles

Exercice 21 ★★

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{sh}(\arcsin x)$.

1. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par f.
2. En déduire que f est développable en série entière en 0 et déterminer ce développement en série entière.

Exercice 22 ★★

Soit $f : x \in]-1,1[\mapsto \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Montrer que f vérifie une équation différentielle d'ordre un.
2. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et déterminer ce développement en série entière.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Exercice 23 ★★★

On considère la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ dont on note $\mathrm{S}(x)$ la somme.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Montrer que S est solution sur son intervalle de convergence de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}): \qquad x(x-4)y' + (x+2)y = 2$$

3. Résoudre l'équation homogène $(\mathcal{E}_{\mathrm{H}})$ associée à $(\mathcal{E})$ sur $]0,4[$.
4. Vérifier que $x \mapsto 2\arctan\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right) - 2\sqrt{\frac{4-x}{x}}$ est une primitive de $x \mapsto \frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x}}$ sur $]0,4[$.
5. En déduire $\mathrm{S}(x)$ pour $x \in]0,4[$.
6. Calculer $\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

Exercice 24 ★★

On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2}$$

1. Montrer que la suite (a_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$.
3. Déterminer la somme $\mathrm{S}(x)$ de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ à l'aide d'une équation différentielle.
4. En déduire que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e}$.

Produit de Cauchy

Exercice 25 ★★ **Centrale PC**

On pose $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{H}_n x^n$.

Exercice 26 ★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$$

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n$.

1. On suppose que $\mathrm{R} = \frac{1}{4}$. Montrer que

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[\setminus\{0\},\ \mathrm{S}(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

2. En déduire u_n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Justifier qu'on a bien $\mathrm{R} = \frac{1}{4}$.

Exercice 27 ★★★ **Nombre d'involutions**

On rappelle qu'une involution d'un ensemble E est une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. On note I_n le nombre d'involutions de $[\![1, n]\!]$. On convient que $\mathrm{I}_0 = 1$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n-1} + (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$$

2. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\mathrm{I}_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1. On note $\mathrm{S}(x)$ sa somme.
3. Montrer que

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \mathrm{S}'(x) = (1+x)\mathrm{S}(x)$$

4. En déduire une expression de $\mathrm{S}(x)$ puis de I_n.

Développements en série entière

Exercice 28 ★★★★ **ENS MP 2011**

Soit K un corps fini et $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de K[X]. On pose

$$\zeta(t) = \prod_{\mathrm{P}\in\mathcal{P}} \frac{1}{1 - t^{\deg \mathrm{P}}}$$

1. Montrer que ζ est défini sur un intervalle du type $[0, t_0[$.
2. Montrer que ζ est développable en série entière au voisinage à droite de 0 et déterminer son développement.

Exercice 29 ★★★ **Nombres de Bell**

On pose $f(x) = e^{e^x}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est développable en série entière en 0 et donner les coefficients A_n de ce développement comme sommes de séries.

Exercice 30 ★★

Déterminer le développement en série entière en 0 de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx)\, dt$.

Exercice 31 ★★

Déterminer le développement en série entière en 0 de $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Exercice 32 ★★

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Développer en série entière $f(x) = \frac{\sin(\theta)}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1}$.

Exercice 33 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Développer en série entière $f : x \mapsto \ln(1 - \sqrt{2}x + x^2)$.

Exercice 34 ★★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, lorsque c'est possible : $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+n^2ix}$.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g n'est pas développable en série entière.

Exercice 35 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Développer en séries entières les fonctions suivantes au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence :

1. $f(z) = \dfrac{1}{6z^2 - 5z + 1}$, $z \in \mathbb{C}$
2. $g(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{1-x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$
3. $h(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$

Divers

Exercice 36 ★★★★ **X MP 2010**

Caractériser les suites $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ soit le développement en série entière en 0 d'une fraction rationnelle.

Exercice 37 ★★★ **Mines-Ponts MP 2017**

1. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q tel que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Q}(z) = e^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}(n) z^n}{n!}$$

   On notera ce polynôme $u(\mathrm{P})$.

2. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.
3. Déterminer les éléments propres de u.

Exercice 38 ★★★ **Centrale MP 2018**

Soit $(a_n)_{n\geq 2}$ une suite de réels. On pose $\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$ et on suppose que

$$f : z \mapsto z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$$

est définie et injective sur D.

1. Montrer que $\forall z \in \mathrm{D},\ z \in \mathbb{R} \iff f(z) \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\forall z \in \mathrm{D},\ \mathrm{Im}(z) > 0 \iff \mathrm{Im}(f(z)) > 0$.
3. Soient $r \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer en fonction de r et n l'intégrale

$$\mathrm{I}_n(r) = \int_0^\pi \mathrm{Im}(f(re^{i\theta}))\sin(n\theta)\ \mathrm{d}\theta$$

4. En remarquant que $|\sin(n\theta)| \leq n\sin(\theta)$ pour $\theta \in [0,\pi]$, montrer que $|a_n| \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 39 ★★★ **Mines-Ponts MP 2017**

E est un ensemble à n éléments. On appelle *dérangement* une permutation de E sans point fixe. On note D_n le nombre de dérangements de E. On pose $\mathrm{D}_0 = 1$.

1. Montrer l'égalité $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{D}_k$.

On définit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{D}_n}{n!} x^n$.

2. Justifier que f est définie sur $]-1,1[$.

3. Montrer que pour x dans $]-1,1[$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

4. En déduire l'égalité $\mathrm{D}_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

5. Montrer que, lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, D_n est la partie entière de $\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$.

Exercice 40 **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2019**

On cherche à résoudre l'équation

$$(\mathrm{E}) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(x) = 1 + \int_0^x u\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t$$

avec $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1. Soit la suite (u_n) de fonctions définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t$$

Montrer par récurrence que,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers une certaine fonction u.

2. Montrer que u est solution de (E).

3. Donner les fonctions développables en série entière dont la restriction à $\mathbb{R}_+$ est solution de (E).

Exercice 41 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(t) = \dfrac{(t^2-1)^{n+1}}{n+1}$.

1. Donner le domaine de convergence D de $\sum f_n$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.
3. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.
4. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.
5. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(t^2-1)^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}t$?
6. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 42 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2018**

Soit $(z_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls qui converge vers 0.

1. Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R, telle que $\forall p \in \mathbb{N},\ f(z_p) = 0$.
   Montrer que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Que dire de deux séries entières f et g de même rayon de convergence et telles que $f(z_p) = g(z_p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$?