

DEVOIR À LA MAISON N°3

Problème 1 –

Partie I –

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} strictement monotone telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

On pose $c = f(1)$.

1. Déterminer $f(0)$ et montrer que $c \neq 0$. Dans la suite, on pose $g = \frac{1}{c}f$.

2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \quad \text{et} \quad g(x - y) = g(x) - g(y)$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = n$.

4. Montrer que g est une fonction impaire et en déduire que $g(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

5. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $g(r) = r$.

6. Montrer que g est strictement croissante.

7. Montrer que $g(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On pourra raisonner par l'absurde et admettre qu'il existe toujours un rationnel strictement compris entre deux réels distincts.

8. En déduire f .

Partie II –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se propose de déterminer les applications f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} strictement monotones telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + f(y)) = f(x) + y^n$$

Dans la suite, f désigne une telle application.

1. Justifier que f est injective.

2. Montrer que $f(0) = 0$.

3. Montrer que $f(f(y)) = y^n$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

4. On suppose $n = 1$ dans cette question.

a. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

b. Justifier qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = cx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c. Conclure.

5. On suppose maintenant $n > 1$.

a. En déduire que n ne peut être pair. On suppose donc n impair dans la suite.

b. Montrer que $f \circ f$ est bijective. En déduire que f l'est également.

c. Montrer que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

d. En déduire une contradiction.

e. Conclure.