Devoir à la maison n°04

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1 ★★

On pose $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}(z) > 0\}$ et $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. On rappelle que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.
Les trois questions sont complètement indépendantes.

1. On définit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-i\} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \dfrac{iz+1}{z+i} \end{cases}$.

a. L'application f est-elle injective ?

b. Montrer que $\operatorname{Im} f = \mathbb{C} \setminus \{i\}$. L'application f est-elle surjective ?

c. Montrer que $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}$.

d. Montrer que f induit une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{D}$.

e. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{U})$.

2. On définit l'application $g : \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow \mathcal{P} \\ z & \longmapsto -\dfrac{1}{z} \end{cases}$.

a. Montrer que l'application g est bien définie, autrement dit que $g(z) \in \mathcal{P}$ pour tout $z \in \mathcal{P}$.

b. Montrer que g est bijective.

3. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit l'application $A_\theta : \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow \mathcal{P} \\ z & \longmapsto \dfrac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta} \end{cases}$.

a. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Vérifier que l'application A_θ est bien définie, autrement dit que pour tout $z \in \mathcal{P}$, $A_\theta(z)$ est bien défini et $A_\theta(z) \in \mathcal{P}$.

b. Que vaut A_0 ?

c. Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $A_\theta \circ A_\varphi = A_{\theta+\varphi}$.

d. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que A_θ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 2 ★★

On souhaite montrer que

$$\forall z \in \mathbb{U},\ \sqrt{3} \leq |1+z| + \left|1-z+z^2\right| \leq \frac{13}{4}$$

On pose pour $z \in \mathbb{U}$,

$$f(z) = |1+z| + \left|1-z+z^2\right|$$

1. On se donne $z \in \mathbb{U}$ et on note θ un de ses arguments. Montrer que

$$f(z) = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| + \left|4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3\right|$$

2. On pose pour $t \in \mathbb{R}$

$$g(t) = 2|t| + \left|4t^2 - 3\right|$$

Déterminer le minimum et le maximum de f sur l'intervalle $[-1, 1]$.

3. En déduire l'inégalité demandée.