

# RÉDUCTION GÉOMÉTRIQUE

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne un sous-corps de  $\mathbb{C}$ , qui en pratique sera généralement  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 Rappels et compléments

### 1.1 Matrices semblables

#### Définition 1.1 Matrices semblables

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $B$  est **semblable** à  $A$  si et seulement si il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $B = P^{-1}AP$ .

#### Proposition 1.1

La relation de similitude («être semblable à») est une relation d'équivalence.

**REMARQUE.** Si deux matrices sont semblables, l'une est inversible si et seulement si l'autre l'est.

**REMARQUE.** Si  $A$  et  $B$  sont semblables, alors  $A^n$  et  $B^n$  sont semblables pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  si  $A$  est inversible). Plus précisément, s'il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $B = P^{-1}AP$ , alors  $B^n = P^{-1}A^nP$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  si  $A$  est inversible).

### 1.2 Sommes de sous-espaces vectoriels

#### Définition 1.2 Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On appelle **somme** de  $F_1, \dots, F_p$  le sous-espace vectoriel

$$F_1 + \dots + F_p = \sum_{k=1}^p F_k = \left\{ x_1 + \dots + x_p, (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^p F_k \right\}$$

**REMARQUE.** On a  $\sum_{k=1}^n F_k = \text{vect} \left( \bigcup_{k=1}^n F_k \right)$ .  $\sum_{k=1}^n F_k$  est donc le plus petit sous-espace vectoriel contenant  $F_1, \dots, F_n$ .

**REMARQUE.** La somme d'espaces vectoriels est associative : si  $F, G, H$  sont trois sous-espaces vectoriels,

$$F + G + H = (F + G) + H = F + (G + H)$$

#### Définition 1.3 Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On dit que  $F_1, \dots, F_p$  sont en **somme directe** si pour tout  $x \in \sum_{k=1}^p F_k$  il existe un unique  $p$ -uplet  $(x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^p F_k$  tel que  $x = x_1 + \dots + x_p$ .

La somme de  $F_1, \dots, F_p$  est alors notée  $F_1 \oplus \dots \oplus F_p = \bigoplus_{k=1}^p F_k$ .

**Proposition 1.2 Caractérisation d'une somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels**

Soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .  $F_1, \dots, F_p$  sont en somme directe si et seulement si

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^p F_k, x_1 + \dots + x_p = 0_E \implies x_1 = \dots = x_p = 0_E$$

**REMARQUE.** Si des sous-espaces vectoriels sont en somme directe, ils sont deux à deux en somme directe.



**ATTENTION!** La réciproque est fautive. Des espaces vectoriels peuvent être deux à deux en somme directe sans que leur somme soit directe. Par exemple, trois droites distinctes coplanaires ont leurs intersections deux à deux nulles sans pour autant qu'elles soient en somme directe.

**REMARQUE.** Si  $F, G, H$  sont trois sous-espaces vectoriels en somme directe,

$$F \oplus G \oplus H = (F \oplus G) \oplus H = F \oplus (G \oplus H)$$

Ceci signifie en particulier que

- $F$  est en somme directe avec  $G$  et  $F \oplus G$  est en somme directe avec  $H$ ;
- $G$  est en somme directe avec  $H$  et  $G \oplus H$  est en somme directe avec  $F$ .

**Définition 1.4 Projecteurs associés à une décomposition en somme directe**

Soient  $F_1, \dots, F_r$  des sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  tels que  $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$ . On note  $p_i$  le projecteur sur  $F_i$  parallèlement à  $\bigoplus_{j \neq i} F_j$ . La famille  $(p_1, \dots, p_r)$  est appelée famille de projecteurs associée à la décomposition en somme directe  $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$ . On a alors  $\sum_{i=1}^r p_i = \text{Id}_E$ .

**REMARQUE.** On constate également que  $p_i \circ p_j = 0$  pour  $i \neq j$ .

**Proposition 1.3 Base d'une somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels**

Soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels **en somme directe** d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On suppose qu'il existe des bases  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$  de  $F_1, \dots, F_p$ . Alors la famille  $\mathcal{B}$  obtenue par concaténation des bases  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$  est une base de  $\bigoplus_{i=1}^p F_i$ .

$\mathcal{B}$  est dite **base adaptée** à la somme directe  $\bigoplus_{i=1}^p F_i$ .

**Proposition 1.4 Dimension d'une somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels**

Soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel  $E$ . Alors

$$\dim \left( \sum_{k=1}^p F_k \right) \leq \sum_{k=1}^p \dim F_k$$

De plus, l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si  $F_1, \dots, F_p$  sont en somme directe.

**REMARQUE.** Soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Pour montrer que  $E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$ , il suffit de montrer que  $F_1, \dots, F_p$  sont en somme directe et que  $\sum_{k=1}^p \dim F_k = \dim E$ .

### Proposition 1.5

Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $E_1, \dots, E_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$ .

Soient  $(u_1, \dots, u_p) \in \prod_{k=1}^p \mathcal{L}(E_k, F)$ . Il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $u|_{E_k} = u_k$  pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

### Exemple 1.1

Soit  $H$  un hyperplan de  $E$  et  $a \in E \setminus H$ . Il existe une unique forme linéaire sur  $E$  tel que  $\text{Ker } \varphi = H$  et  $\varphi(a) = 1$ .

## 1.3 Matrices définies par blocs

### Matrices définies par blocs

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$  et  $D \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ . On peut définir une matrice  $M \in \mathcal{M}_{n+p,q+r}(\mathbb{K})$  à l'aide de ces quatre matrices de la façon suivante :

$$M = \left( \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array} \right)$$

### Produit de matrices définies par blocs

Le produit de deux matrices définies par blocs s'effectue de la manière suivante :

$$\left( \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} E & G \\ \hline F & H \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} AE + CF & AG + CH \\ \hline BE + DF & BG + DH \end{array} \right)$$



**ATTENTION !** Il faut bien évidemment que les différentes matrices soient de taille compatible :

- le nombre de **colonnes** de  $A$  et  $B$  doit être le nombre de **lignes** de  $E$  et  $G$  ;
- le nombre de **colonnes** de  $C$  et  $D$  doit être le nombre de **lignes** de  $F$  et  $H$ .

**REMARQUE.** La transposée de la matrice  $\left( \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array} \right)$  est la matrice  $\left( \begin{array}{c|c} A^T & B^T \\ \hline C^T & D^T \end{array} \right)$ .

**Définition 1.5 Matrices triangulaires par blocs**

On dit qu'une matrice carrée  $A$  est **triangulaire supérieure par blocs** s'il existe une famille de matrices  $(A_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq r}$  de tailles «adéquates» telle que

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,r} \\ 0 & A_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{r-1,r} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{r,r} \end{pmatrix}$$

On dit qu'une matrice carrée  $A$  est **triangulaire inférieure par blocs** s'il existe une famille de matrices  $(A_{i,j})_{1 \leq j \leq i \leq r}$  de tailles «adéquates» telle que

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{r,1} & \cdots & A_{r,r-1} & A_{r,r} \end{pmatrix}$$

**Définition 1.6 Matrices diagonales par blocs**

On dit qu'une matrice carrée  $A$  est diagonale par blocs s'il existe des matrices carrées  $A_1, \dots, A_r$  telles que

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

**Proposition 1.6 Déterminants par blocs**

Le déterminant d'une matrice **triangulaire par blocs** (et a fortiori **diagonale par blocs**) est le produit des déterminants des blocs diagonaux.



**ATTENTION !** En général  $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$ .

**Transvections par blocs**

On appelle transvection par blocs une opération transformant une matrice  $\left( \begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right)$  en une matrice  $\left( \begin{array}{c|c} A & B + \lambda A \end{array} \right)$  (si  $A$  et  $B$  ont le même nombre de colonnes) ou une matrice  $\left( \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right)$  en une matrice  $\left( \begin{array}{c} A \\ B + \lambda A \end{array} \right)$  (si  $A$  et  $B$  ont le même nombre de lignes).

**REMARQUE.** La première opération correspond à la multiplication à droite par une matrice du type  $\left( \begin{array}{c|c} I_p & \lambda I_p \\ \hline 0 & I_p \end{array} \right)$  et la seconde à la multiplication à gauche par une matrice du type  $\left( \begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline \lambda I_p & I_p \end{array} \right)$ .

**Proposition 1.7**

Le déterminant d'une matrice carrée est invariant par transvection par blocs.

**1.4 Sous-espaces stables****Définition 1.7 Sous-espace stable**

Soient  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On dit que  $F$  est stable par  $u$  si  $u(F) \subset F$ .

**REMARQUE.** Si  $F$  est un sous-espace stable par  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $u$  induit un endomorphisme  $u_F$  de  $F$ .

**Exercice 1.1**

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  qui commutent i.e.  $u \circ v = v \circ u$ . Montrer que si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ , alors  $v(F)$  est également stable par  $u$ .

**Définition 1.8 Base adaptée à un sous-espace vectoriel**

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On dit qu'une base de  $E$  est adaptée à  $F$  si ses premiers éléments forment une base de  $F$ .

**Proposition 1.8 Matrice et stabilité**

Soient  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  est adaptée à  $F$  si et seulement si la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est triangulaire par blocs. Plus précisément, en notant  $n = \dim E$  et  $p = \dim F$ , il existe  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$  telles que  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ . On peut remarquer que  $A$  est la matrice de l'endomorphisme de  $F$  induit par  $u$  dans la base formée des  $p$  premiers vecteurs de  $\mathcal{B}$ .

**1.5 Endomorphismes nilpotents et matrices nilpotentes****Définition 1.9 Endomorphisme nilpotent**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel. On dit que  $u$  est **nilpotent** s'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^p = 0$ . Le plus petit entier  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^p = 0$  est appelé l'**indice de nilpotence** de  $u$ .

**Définition 1.10 Matrice nilpotente**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est **nilpotente** s'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^p = 0$ . Le plus petit entier  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^p = 0$  est appelé l'**indice de nilpotence** de  $A$ .

**Exemple 1.2**

Toute matrice triangulaire stricte est nilpotente d'indice de nilpotence inférieure ou égale à sa taille.

**Exemple 1.3**

Soit  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $J$  est nilpotente d'indice  $n$ .

## 2 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

### 2.1 Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme

**Proposition 2.1 Droite stable**

Soient  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et  $x \in E$ . La droite  $\text{vect}(x)$  est stable par  $u$  si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u(x) = \lambda x$ .

**Définition 2.1 Valeur propre et vecteur propre d'un endomorphisme**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

- On dit qu'un vecteur **non nul**  $x \in E$  est un **vecteur propre** de  $u$  s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u(x) = \lambda x$ .
- On dit qu'un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre** de  $u$  s'il existe  $x \in E$  **non nul** tel que  $u(x) = \lambda x$ .

Dans chacun de ces deux cas, on dit que  $x$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .



**ATTENTION !** Un vecteur propre est forcément **non nul**.

**Exemple 2.1**

Soit  $D$  l'endomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  qui à une application associe sa dérivée. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , l'application  $x \mapsto e^{\lambda x}$  est un vecteur propre de  $D$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**Exemple 2.2**

Si  $x$  est un vecteur propre de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors c'est également un vecteur propre de  $u^n$  associé à la valeur propre  $\lambda^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (et pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  si  $u$  est un automorphisme).

**Exemple 2.3**

L'unique valeur propre d'un endomorphisme nilpotent est 0.

**Définition 2.2 Spectre d'un endomorphisme**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**. On appelle **spectre** de  $u$ , noté  $\text{Sp}(u)$ , l'ensemble des valeurs propres de  $u$ .

**REMARQUE.** Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\lambda \in \text{Sp}(u)$ ;
- $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$ ;
- $\det(u - \lambda \text{Id}_E) = 0$ .

#### Exemple 2.4

0 est une valeur propre d'un endomorphisme  $u$  si et seulement si celui-ci est non injectif.

#### Définition 2.3 Sous-espace propre d'un endomorphisme

Soient  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ . Le sous-espace vectoriel  $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$  est appelé **sous-espace propre** de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . C'est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre  $\lambda$  et du vecteur nul.

**REMARQUE.** Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est le noyau.

**REMARQUE.** Si  $\lambda$  n'est pas une valeur propre de  $u$ , on peut convenir que  $E_\lambda(u) = \{0_E\}$ .

#### Exemple 2.5

Considérons l'endomorphisme  $T$  de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  qui à la suite  $(u_n)$  associe la suite  $(u_{n+2})$ .  
Pour  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ,  $E_\lambda(T) = \text{vect}((\alpha^n), ((-\alpha)^n))$  où  $\alpha$  est une racine carrée de  $\lambda$ .

#### Proposition 2.2

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un même espace vectoriel qui commutent. Alors tout sous-espace propre de  $u$  est stable par  $v$ .

#### Méthode Déterminer les éléments propres d'un endomorphisme

Pour déterminer les éléments propres d'un endomorphisme  $u$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , on recherche les scalaires  $\lambda \in \mathbb{K}$  tels que l'équation  $u(x) = \lambda x$  possède des solutions non nulles. Lesdites solutions sont alors les vecteurs propres associés à la valeur propre  $\lambda$ .

#### Exercice 2.1 ★★

Soit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$  défini par  $\varphi(P) = XP'$  pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Déterminer les éléments propres de  $\varphi$ .

## 2.2 Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'une matrice carrée

**Définition 2.4 Valeur propre et vecteur propre d'une matrice carrée**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- On dit qu'une matrice colonne **non nulle**  $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  est un **vecteur propre** de  $A$  s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $AX = \lambda X$ .
- On dit qu'un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre** de  $A$  s'il existe  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  non nulle tel que  $AX = \lambda X$ .

Dans chacun de ces deux cas, on dit que  $X$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**REMARQUE.** Un vecteur propre est forcément **non nul**.

**Exemple 2.6**

0 est une valeur propre d'une matrice carrée si et seulement si elle est non inversible.

**Exemple 2.7**

Soit  $D$  une matrice diagonale de coefficients diagonaux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . En notant  $(E_1, \dots, E_n)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $E_k$  est un vecteur propre de  $D$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$ .

**Exemple 2.8**

Si  $X$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors c'est également un vecteur propre de  $A^n$  associé à la valeur propre  $\lambda^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (et pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  si  $A$  est inversible).

**Exemple 2.9**

L'unique valeur propre d'une matrice carrée nilpotente est 0.

**Définition 2.5 Spectre d'une matrice carrée**

Soit  $A$  une matrice carrée. On appelle **spectre** de  $A$ , noté  $\text{Sp}(A)$ , l'ensemble des valeurs propres de  $A$ .

**Définition 2.6 Sous-espace propre d'une matrice carrée**

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Le sous-espace vectoriel  $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$  est appelé **sous-espace propre** de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . C'est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre  $\lambda$  et de la matrice colonne nulle.

**REMARQUE.** Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est le noyau.

**REMARQUE.** Si  $\lambda$  n'est pas une valeur propre de  $A$ , on peut convenir que  $E_\lambda(A) = \{0\}$ .



**Proposition 2.3 Lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice**

Soient  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie et  $A$  sa matrice dans une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Alors

- (i)  $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(A)$ ;
- (ii)  $x \in E$  est un vecteur propre de  $u$  si et seulement si  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(x)$  est un vecteur propre de  $A$ ;
- (iii) Pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u) = \text{Sp}(A)$ , l'isomorphisme  $\begin{cases} E & \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto \text{mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{cases}$  induit un isomorphisme de  $E_{\lambda}(u)$  sur  $E_{\lambda}(A)$ .

**Proposition 2.4**

Deux matrices semblables ont même spectre.



**ATTENTION !** La réciproque est fausse. Par exemple, le spectre de  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  est  $\{0\}$  mais ces deux matrices ne sont évidemment pas semblables.

**Proposition 2.5 Spectre et sous-corps**

Si  $\mathbb{K}$  est un sous-corps d'un corps  $\mathbb{L}$  et si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{L}}(A)$ .



**ATTENTION !** L'inclusion peut être stricte. Par exemple, la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  peut être considérée comme une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ou  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . On peut vérifier que  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$  et que  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, +i\}$ .

**2.3 Propriétés des sous-espaces propres****Proposition 2.6**

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée est directe.

**Corollaire 2.1**

Une famille de vecteurs propres d'un endomorphisme associés à des valeurs propres distinctes est libre.

**Corollaire 2.2 Cardinal d'un spectre**

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**  $n$  ou d'une matrice carrée de taille  $n$  est un ensemble **fini** de cardinal inférieur ou égal à  $n$ .

**Proposition 2.7**

Soient deux endomorphismes d'un même espace vectoriel qui commutent. Alors tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

## 2.4 Polynôme caractéristique

### Définition 2.7 Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Le polynôme  $\chi_A = \det(XI_n - A)$  de  $\mathbb{K}[X]$  est appelé **polynôme caractéristique** de  $A$ .

### Exemple 2.10

Le polynôme caractéristique de  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  est  $(X-1)(X-4) - 2 \times 3 = X^2 - 5X - 2$ .

### Exemple 2.11 Matrice compagnon

Soient  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ . Alors en développant par rapport à la dernière colonne,

$$\chi_A = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

**REMARQUE.** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\chi_A = \chi_{A^T}$ .

### Proposition 2.8 Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice triangulaire de coefficients diagonaux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Alors  $\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ .

**REMARQUE.** C'est a fortiori vrai pour les matrices diagonales.

**REMARQUE.** On peut montrer que le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des polynômes caractéristiques des blocs triangulaires.

### Proposition 2.9 Similitude et polynôme caractéristique

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.



**ATTENTION!** La réciproque est fausse. Par exemple, les matrices  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ont même polynôme caractéristique mais ne sont évidemment pas semblables.

### Définition 2.8 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de **dimension finie**. Le polynôme  $\chi_u = \det(X \text{Id}_E - u)$  de  $\mathbb{K}[X]$  est appelé **polynôme caractéristique** de  $u$ .

**REMARQUE.** Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  admet pour matrice  $M$  dans une base de  $E$ , alors  $\chi_u = \chi_M$ .

### Méthode Déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Pour déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il suffit de déterminer la matrice de cet endomorphisme dans une base de  $E$  et de calculer le polynôme caractéristique de cette matrice.

#### Exemple 2.12

Soit  $r$  la rotation d'angle  $\theta$  du plan euclidien orienté. La matrice de  $r$  dans une base orthonormée directe est  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

On en déduit que  $\chi_r = (X - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = X^2 - 2 \cos \theta + 1$ .

### Proposition 2.10 Spectre et polynôme caractéristique

- (i) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\text{Sp}(A)$  est l'ensemble des racines de  $\chi_A$ .
- (ii) Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de  $E$  de **dimension finie**. Alors  $\text{Sp}(u)$  est l'ensemble des racines de  $\chi_u$ .



**ATTENTION !** Le corps de base peut avoir son importance. Par exemple, si  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , alors  $\chi_A = X^2 + 1$ . Ainsi  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$  tandis que  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, +i\}$ .

#### Exemple 2.13

Le spectre d'une matrice triangulaire est donc l'ensemble des coefficients diagonaux de cette matrice.

#### Exemple 2.14

Toute matrice carrée réelle de taille impaire possède une valeur propre réelle.  
De même, tout endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension impaire possède une valeur propre réelle.

#### Exemple 2.15

Si  $A$  est une matrice carrée **réelle**, les valeurs propres **complexes** de  $A$  sont conjuguées deux à deux.

**REMARQUE.** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\text{Sp}(A^T) = \text{Sp}(A)$ . En effet,  $\chi_A = \chi_{A^T}$ .

### Méthode Déterminer les éléments propres d'une matrice

Pour déterminer les éléments propres d'une matrice  $M$ , il suffit de

1. calculer  $\chi_M$ ;
2. déterminer les racines de  $\chi_M$ , ce qui fournit  $\text{Sp}(M)$ ;
3. pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ , résoudre l'équation  $MX = \lambda X$ , ce qui fournit  $E_\lambda(M)$ .

**Méthode Déterminer les éléments propres d'un endomorphisme**

Pour déterminer les éléments propres d'un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel  $E$  de **dimension finie**, il suffit de

1. déterminer la matrice  $M$  de  $u$  dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ ;
2. déterminer les éléments propres de  $M$ .

On sait alors que  $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(M)$  et l'isomorphisme  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k e_k \in E$  permet de récupérer le sous-espace propre  $E_\lambda(u)$  à partir du sous-espace propre  $E_\lambda(M)$ .

**Exercice 2.2**

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  défini par  $\varphi(P) = (X+1)P' - P$  pour tout  $P \in \mathbb{R}_3[X]$ .

**Proposition 2.11 Degré et coefficients du polynôme caractéristique**

- (i) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\chi_A$  est un polynôme unitaire de degré  $n$ . De plus, le coefficient constant de  $\chi_A$  est  $(-1)^n \det(A)$  et le coefficient du monôme de degré  $n-1$  est  $-\text{tr}(A)$ .
- (ii) Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de **dimension finie**. Alors  $\chi_u$  est un polynôme unitaire de degré  $n$ . De plus, le coefficient constant de  $\chi_u$  est  $(-1)^n \det(u)$  et le coefficient du monôme de degré  $n-1$  est  $-\text{tr}(u)$ .

**Exemple 2.16**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors  $u$  est un automorphisme si et seulement si  $\chi_u(0) \neq 0$  i.e. si et seulement si le coefficient constant de  $\chi_u$  est non nul.

On en déduit que dans ce cas, il existe un polynôme  $P$  tel que  $u^{-1} = P(u)$ . Plus précisément,  $P = \frac{\chi_u(0) - \chi_u}{\chi_u(0)X}$ .

**Exemple 2.17**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $A$  est inversible si et seulement si  $\chi_A(0) \neq 0$  i.e. si et seulement si le coefficient constant de  $\chi_A$  est non nul.

On en déduit que dans ce cas, il existe un polynôme  $P$  tel que  $A^{-1} = P(A)$ . Plus précisément,  $P = \frac{\chi_A(0) - \chi_A}{\chi_A(0)X}$ .

**Exemple 2.18**

Si  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , alors  $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$ .

**Proposition 2.12 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit**

Soient  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . Si on note  $u|_F$  l'endomorphisme de  $F$  induit par  $u$ , alors  $\chi_{u|_F}$  divise  $\chi_u$ .

**Définition 2.9 Multiplicité d'une valeur propre**

- (i) Soient  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ . On appelle **multiplicité** de la valeur propre  $\lambda$ , notée  $m_\lambda(u)$ , la multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine du polynôme caractéristique  $\chi_u$ .
- (ii) Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $A$ . On appelle **multiplicité** de la valeur propre  $\lambda$ , notée  $m_\lambda(A)$ , la multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine du polynôme caractéristique  $\chi_A$ .

**REMARQUE.** On peut convenir qu'une valeur propre de multiplicité nulle n'est tout simplement pas une valeur propre.

**REMARQUE.** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , alors  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda(A) = n$ .

De même, si  $u$  est un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie, alors  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m_\lambda(u) = \dim E$ .

**Proposition 2.13**

- (i) Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ ,  $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$ .
- (ii) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ ,  $1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m_\lambda(A)$ .

### 3 Diagonalisabilité

#### 3.1 Endomorphisme diagonalisable

**Définition 3.1 Endomorphisme diagonalisable**

Un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel  $E$  de **dimension finie** est dit **diagonalisable** s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.

Dans ce cas, les coefficients diagonaux de cette matrice sont les valeurs propres de  $u$ , chaque valeur propre apparaissant autant de fois que sa multiplicité dans  $\chi_u$ .

**Exemple 3.1**

Une homothétie, un projecteur ou une symétrie d'un espace vectoriel de dimension finie sont diagonalisables.



**ATTENTION !** La diagonalisabilité peut dépendre du corps de base. L'endomorphisme  $\begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & iz \end{cases}$  est diagonalisable en tant qu'endomorphisme du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  mais ne l'est pas en tant qu'endomorphisme du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ .

**Exemple 3.2**

Si  $u$  est un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie possédant une unique valeur propre  $\lambda$ , alors  $u = \lambda \text{Id}_E$ .

**Proposition 3.1**

Un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel  $E$  de **dimension finie** est diagonalisable si et seulement si il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

**Proposition 3.2 Diagonalisabilité et sous-espaces propres**

Un endomorphisme  $u$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de **dimension finie** est diagonalisable si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :

- (i)  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ ;
- (ii)  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$ ;
- (iii)  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ ,  $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u)$ .

**Exercice 3.1**

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. On suppose  $u$  diagonalisable. Montrer que  $u$  et  $v$  commutent si et seulement si tout sous-espace propre de  $u$  est stable par  $v$ .

**Proposition 3.3**

Un endomorphisme  $u$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de **dimension finie**  $n \in \mathbb{N}^*$  est diagonalisable si une des deux conditions équivalentes suivantes est réalisée :

- (i)  $u$  possède  $n$  valeurs propres distinctes ;
- (ii)  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  à racines simples.



**ATTENTION !** Il s'agit d'une condition suffisante mais pas nécessaire. Par exemple, si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 2, alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda \text{Id}_E$  est diagonalisable mais possède  $\lambda$  comme unique valeur propre et son polynôme caractéristique  $(X - \lambda)^n$  admet  $\lambda$  comme racine de multiplicité  $n$ .

**Exemple 3.3**

La matrice de l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  défini par  $u(P) = XP' - P''$  est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont  $0, 1, \dots, n$ . Son polynôme caractéristique est  $\prod_{k=0}^n (X - k)$  qui est scindé à racines simples. Ainsi  $u$  est diagonalisable.

**Décomposition spectrale**

Soit  $u$  un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Notons  $(p_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(u)}$  la famille de projecteurs associée à la décomposition en somme directe  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ . Alors  $u = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda p_\lambda$ . Cette écriture s'appelle la décomposition spectrale de  $u$ .

### 3.2 Matrice diagonalisable

#### Définition 3.2 Matrice diagonalisable

On dit qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.

Dans ce cas, les coefficients diagonaux de cette matrice diagonale sont les valeurs propres de  $A$ , chaque valeur propre apparaissant autant de fois que sa multiplicité dans  $\chi_A$ .

#### Proposition 3.4

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  qui lui est canoniquement associé est diagonalisable.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie est diagonalisable si et seulement si sa matrice dans une base de  $E$  est diagonalisable.



**ATTENTION !** La diagonalisabilité peut dépendre du corps de base. Par exemple,  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est diagonalisable en tant que matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  mais ne l'est pas en tant que matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

#### Proposition 3.5

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable si et seulement si il existe une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  formée de vecteurs propres de  $A$ .

#### Proposition 3.6 Diagonalisabilité et sous-espace propre

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :

- (i)  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_\lambda(A)$ ;
- (ii)  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = n$ ;
- (iii)  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ ,  $\dim E_\lambda(A) = m_\lambda(A)$ .

#### Proposition 3.7

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable si une des deux conditions équivalentes suivantes est réalisée :

- (i)  $A$  possède  $n$  valeurs propres distinctes ;
- (ii)  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  à racines simples.



**ATTENTION !** Il s'agit d'une condition suffisante mais pas nécessaire. Par exemple, si  $n \geq 2$ , alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda I_n$  est diagonalisable mais possède  $\lambda$  comme unique valeur propre et son polynôme caractéristique  $(X - \lambda)^n$  admet  $\lambda$  comme racine de multiplicité  $n$ .

**Méthode** Diagonalisation d'une matrice

Diagonaliser une matrice diagonalisable  $A$  consiste à trouver une matrice diagonale  $D$  et une matrice inversible  $P$  telles que  $A = PDP^{-1}$ . La marche à suivre est la suivante.

1. Déterminer les valeurs propres de  $A$  et des bases des sous-espaces propres associés.
2. Former la matrice  $P$  dont les colonnes sont les vecteurs des bases des différents sous-espaces propres.
3. Former la matrice diagonale  $D$  constituée des valeurs propres de  $A$ , chaque colonne de  $D$  contenant la valeur propre associée à la colonne correspondante de  $P$ .

**Exemple 3.4**

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -32 & -2 & 14 & -21 & 92 & -69 \\ 6 & 3 & 6 & -32 & 2 & 28 \\ 36 & 12 & 35 & -184 & 8 & 164 \\ 3 & 2 & 8 & -36 & 12 & 23 \\ -15 & -2 & 0 & 17 & 29 & -43 \\ 3 & 0 & -2 & 5 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$

On trouve  $\chi_A = X^6 - 5X^5 + 2X^4 + 10X^3 - 7X^2 - 5X + 4$ . On en déduit que  $\text{Sp}(A) = \{4, -1, 1\}$ . On trouve successivement

$$E_4(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad E_{-1}(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 59 \\ 11 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad E_1(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

On en déduit que  $A = PDP^{-1}$  avec

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 59 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 11 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -7 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

**Calcul de puissance**

Si  $A$  est une matrice carrée diagonalisable, alors il existe une matrice  $D$  diagonale et une matrice  $P$  inversible telles que  $A = PDP^{-1}$ . On a alors  $A^n = PD^nP^{-1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (et même pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  si  $A$  est inversible). Puisque  $D$  est diagonale, le calcul de ses puissances est aisé.

**Exercice 3.2 Commutant**

Soit  $M$  une matrice diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont distinctes deux à deux. Déterminer le commutant de  $M$ , c'est-à-dire l'ensemble des matrices commutant avec  $M$ .



## 4 Trigonalisabilité

### 4.1 Endomorphisme trigonalisable

#### Définition 4.1 Endomorphisme trigonalisable

Un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel  $E$  de **dimension finie** est dit **trigonalisable** s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure.

Dans ce cas, les coefficients diagonaux de cette matrice sont les valeurs propres de  $u$ , chaque valeur propre apparaissant autant de fois que sa multiplicité dans  $\chi_u$ .

**REMARQUE.** On a une définition équivalente en remplaçant «triangulaire supérieure» par «triangulaire inférieure» (il suffit d'inverser l'ordre des vecteurs de la base).

**REMARQUE.** Un endomorphisme diagonalisable est a fortiori trigonalisable.

#### Proposition 4.1 Trigonalisabilité, déterminant et trace

Soit  $u$  un endomorphisme trigonalisable d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} m_{\lambda}(u) \lambda \qquad \det(u) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \lambda^{m_{\lambda}(u)}$$

Autrement dit, la trace et le déterminant sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres **comptées** avec multiplicité.

**REMARQUE.** C'est a fortiori vrai pour les endomorphismes diagonalisables.

#### Proposition 4.2 Trigonalisabilité et polynôme caractéristique

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors  $u$  est trigonalisable si et seulement si  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .



**ATTENTION !** La trigonalisabilité peut donc dépendre du corps de base.

#### Corollaire 4.1

Tout endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.

### 4.2 Matrice trigonalisable

#### Définition 4.2 Matrice trigonalisable

On dit qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Dans ce cas, les coefficients diagonaux de cette matrice triangulaire supérieure sont les valeurs propres de  $A$ , chaque valeur propre apparaissant autant de fois que sa multiplicité dans  $\chi_A$ .

**REMARQUE.** Une matrice diagonalisable est a fortiori trigonalisable.

**Proposition 4.3**

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  qui lui est canoniquement associé est trigonalisable.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie est trigonalisable si et seulement si sa matrice dans une base de  $E$  est trigonalisable.

**Proposition 4.4 Trigonalisabilité, déterminant et trace**

Soit  $A$  une matrice carrée trigonalisable. Alors

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} m_{\lambda}(A)\lambda \qquad \det(A) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \lambda^{m_{\lambda}(A)}$$

Autrement dit, la trace et le déterminant sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres **comptées** avec multiplicité.

**REMARQUE.** C'est a fortiori vrai pour les matrices diagonalisables.

**Proposition 4.5 Trigonalisabilité et polynôme caractéristique**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $A$  est trigonalisable si et seulement si  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .



**ATTENTION !** La trigonalisabilité peut donc dépendre du corps de base.

**Exemple 4.1**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice trigonalisable et  $\operatorname{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ . Alors pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $A^p$  est trigonalisable et  $\operatorname{Sp}(A^p) = \{\lambda_1^p, \dots, \lambda_r^p\}$ .

**Corollaire 4.2**

Toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable.

**Méthode Trigonalisation d'une matrice**

Il s'agit essentiellement de remarquer que si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  admet pour polynôme caractéristique  $\chi_A = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} (X - \lambda)^{m_{\lambda}(A)}$  alors

- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)^{m_{\lambda}(A)}$  d'après le lemme des noyaux (cf. plus loin);
- la suite  $(\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)^k)$  est croissante pour l'inclusion.

L'algorithme suivant fournit alors une matrice  $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$  et une matrice  $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$  telles que  $A = PTP^{-1}$ . On remarque que  $T$  peut alors s'écrire  $T = D + T'$  avec  $D$  diagonale et  $T'$  triangulaire stricte et que  $D$  et  $T'$  **commutent**.

**Algorithme 1** Trigonalisation d'une matrice**Données :** Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  trigonalisable**Résultat :** Une matrice  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  et une matrice  $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$  telles que  $A = PTP^{-1}$ .Déterminer  $\text{Sp}(A)$ **Pour**  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  **Faire**Déterminer une base  $\mathcal{B}_\lambda$  de  $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$  $k \leftarrow 1$ **Tant que**  $\dim \text{Ker}(A - \lambda I_n)^k < m_\lambda(A)$  **Faire**Ajouter des vecteurs à  $\mathcal{B}_\lambda$  la transformer en une base de  $\text{Ker}(A - \lambda I_n)^k$  $k \leftarrow k + 1$ **Fin Tant que****Fin Pour**Poser  $\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \mathcal{B}_\lambda$ Former la matrice  $P$  dont les colonnes sont les vecteurs de  $\mathcal{B}$ Former la matrice  $T$  dont les colonnes sont constituées des coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  des produits de  $A$  par les vecteurs de  $\mathcal{B}$ **Exemple 4.2**

Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ . On trouve  $\chi_A = (X + 2)(X - 1)^2$ . On calcule ensuite

$$\text{Ker}(A + 2I_3) = \text{vect}(C_1)$$

$$\text{Ker}(A - I_3) = \text{vect}(C_2)$$

$$\text{Ker}(A - I_3)^2 = \text{vect}(C_2, C_3)$$

avec

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$AC_1 = -2C_1$$

$$AC_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_2$$

$$AC_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -C_2 + C_3$$

On en déduit qu'en posant  $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , on a  $A = PTP^{-1}$ .

**Exemple 4.3**

Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . On trouve  $\chi_A = (X + 1)^3$  de sorte que  $\text{Sp}(A) = \{-1\}$ . On calcule ensuite

$$\text{Ker}(A + I_3) = \text{vect}(C_1) \quad \text{Ker}(A + I_3)^2 = \text{vect}(C_1, C_2) \quad \text{Ker}(A + I_3)^3 = \text{vect}(C_1, C_2, C_3)$$

avec

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$AC_1 = -C_1 \quad AC_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 - C_2 \quad AC_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = -C_1 - 2C_2 - C_3$$

On en déduit qu'en posant  $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , on a  $A = PTP^{-1}$ .

**Proposition 4.6 Trigonalisabilité et nilpotence**

- (i) Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est nilpotent si et seulement si il est trigonalisable et admet 0 comme unique valeur propre.
- (ii) Une matrice carrée est nilpotente si et seulement si elle est trigonalisable et admet 0 comme unique valeur propre.

**REMARQUE.** Un endomorphisme nilpotent est nilpotent si et seulement si il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire stricte.

Une matrice est nilpotente si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire stricte.

**Exemple 4.4**

Une matrice nilpotente et diagonalisable est nulle.

**Proposition 4.7 Majoration de l'indice de nilpotence**

- (i) L'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie est inférieur ou égal à  $\dim E$ .
- (ii) L'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inférieur ou égal à  $n$ .