Interrogation écrite n°08

NOM : Prénom : Note :

1. Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $f^* \circ f = 0$. Montrer que $f = 0$.

   Pour tout $x \in \mathrm{E}$,
   $$\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x)\rangle = \langle x, f^* \circ f(x)\rangle = \langle x, 0_{\mathrm{E}}\rangle = 0$$
   puis $f(x) = 0_{\mathrm{E}}$. *On en déduit que* $f = 0$. ∎

2. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que $\mathrm{Ker}(u^*) = \mathrm{Im}(u)^\perp$ puis que $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$.

   Soit $x \in \mathrm{E}$. *Alors*
   $$\begin{aligned} & x \in \mathrm{Ker}(u^*) \\ \iff & u^*(x) = 0_{\mathrm{E}} \\ \iff & \forall y \in \mathrm{E},\ \langle u^*(x), y\rangle = 0 \\ \iff & \forall y \in \mathrm{E},\ \langle x, u(y)\rangle = 0 \\ \iff & \forall z \in \mathrm{Im}(u),\ \langle x, z\rangle = 0 \\ \iff & x \in \mathrm{Im}(u)^\perp \end{aligned}$$
   Ainsi $\mathrm{Ker}(u^*) = \mathrm{Im}(u)^\perp$. *En appliquant cette égalité à* u^*, *on obtient* $\mathrm{Ker}((u^*)^*) = \mathrm{Im}(u^*)^\perp$ *i.e.* $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u^*)^\perp$. *Or* E *est de dimension finie donc* $\mathrm{Ker}(u)^\perp = (\mathrm{Im}(u^*)^\perp)^\perp = \mathrm{Im}(u^*)$. ∎

3. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. On suppose que F est stable par $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer que $\mathrm{F}^\perp$ est stable par u^*.

   Soit $x \in \mathrm{F}^\perp$. *Soit* $y \in \mathrm{F}$. *Par définition de l'adjoint,*
   $$\langle u^*(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$
   Or F *est stable par* u *donc* $u(y) \in \mathrm{F}$. *On en déduit que*
   $$\forall y \in \mathrm{F},\ \langle u^*(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = 0$$
   Ainsi $u^*(x) \in \mathrm{F}^\perp$ *de sorte que* $\mathrm{F}^\perp$ *est stable par* u^*. ∎

4. Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée d'un espace euclidien E de dimension 3 ainsi que $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Montrer que u est une rotation.

   Posons $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$. *On vérifie que* $\mathrm{A}^{\mathsf{T}}\mathrm{A} = \mathrm{I}_3$ *et* $\det(\mathrm{A}) = 1$. *Ainsi* $\mathrm{A} \in \mathrm{SO}(3)$ *puis* $u \in \mathrm{SO}(\mathrm{E})$ *car $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de* E. *Comme* $\dim \mathrm{E} = 3$, *u est une rotation.* ∎

5. Montrer que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

   Notons $\mathrm{R} : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. *L'application* R *est continue car* cos *et* sin *le sont. Ainsi* $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ *est connexe par arcs en tant qu'image du connexe par arcs* $\mathbb{R}$ *par l'application continue* R. ∎

6. On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel. On note s la réflexion par rapport au plan P d'équation $x + y + z = 0$. Déterminer la matrice de s dans la base canonique.

   Notons que $a = (1, 1, 1)$ *est un vecteur normal à* P. *Ainsi le projeté orthogonal d'un vecteur u sur* $\mathrm{P}^{\perp}$ *est* $v = \dfrac{\langle u, a\rangle}{\|a\|^2}a = \dfrac{1}{3}\langle u, a\rangle a$ *puis* $s(u) = u - 2v$. *En notant* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$, *on trouve alors*

$$
\begin{aligned}
s(e_1) &= e_1 - \frac{2}{3}\langle e_1, a\rangle a = \frac{1}{3}(1, -2, -2) \\
s(e_2) &= e_2 - \frac{2}{3}\langle e_2, a\rangle a = \frac{1}{3}(-2, 1, -2) \\
s(e_3) &= e_2 - \frac{2}{3}\langle e_3, a\rangle a = \frac{1}{3}(-2, -2, 1)
\end{aligned}
$$

   On en déduit que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(s) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. ∎