# Devoir à la maison n°17

- Le devoir devra être rédigé sur des copies doubles.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

#### Problème 1

Soit  $(T_n)$  la suite de polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  définie par  $T_0=1,\,T_1=X$  et pour tout  $n\in\mathbb{N}$ 

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

## Partie I – Étude de la suite $(T_n)$

- 1. Déterminer les polynômes  $T_2$  et  $T_3$ .
- **2.** Déterminer le degré, la parité et le coefficient dominant de  $T_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- **3.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que la famille  $(T_0, ..., T_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- **4.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$T_n(\cos x) = \cos nx$$

**5.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que les racines de  $T_n$  sont exactement les réels  $\cos(x_k)$  avec  $x_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$  pour  $k \in [1, n]$ .

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

## Partie II – Étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

On associe à tout couple (P, Q) de polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  l'intégrale suivante :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{\pi} P(\cos x) Q(\cos x) dx$$

On confondra polynôme et fonction polynomiale associée.

- **1.** Montrer que l'application  $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$  définit une produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ . Dans toute la suite,  $\mathbb{R}[X]$  est muni du produit scalaire  $\langle ., . \rangle$ .
- **2.** Montrer que la famille  $(T_0, ..., T_n)$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- **3.** Justifier que  $T_n$  est orthogonal à  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

#### Partie III – Calcul exact d'une intégrale

On associe à tout polynôme P de  $\mathbb{R}[X]$  l'intégale et la somme suivantes :

$$I(P) = \int_0^{\pi} P(\cos x) dx$$

$$S_n(P) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} P(\cos x_k)$$

- 1. a. Montrer que  $I(T_p) = S_n(T_p)$  pour tout  $p \in [0, n-1]$ .
  - **b.** En déduire que pour tout  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ,  $I(P) = S_n(P)$ .
- 2. Soit  $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ . On note respectivement Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par  $T_n$ .
  - **a.** Montrer que  $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .
  - **b.** En déduire que I(P) = I(R).
  - **c.** En déduire que  $I(P) = S_n(P)$ .
- **3.** A-t-on toujours  $I(P) = S_n(P)$  lorsque deg  $P \ge 2n$ ?

#### Partie IV – Calcul approché d'une intégrale

A toute fonction f continue sur [-1,1], on associe l'intégrale et la somme suivantes :

$$I(f) = \int_0^{\pi} f(\cos x) dx$$
 
$$S_n(f) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\cos x_k)$$

1. Montrer que  $\lim_{n \to +\infty} S_n(f) = I(f)$ . On pourra remarquer (après l'avoir justifié) que

$$S_n(f) = \frac{\pi}{n} \left( \sum_{k=1}^{2n} f\left(\cos\frac{k\pi}{2n}\right) - \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right) \right)$$

- **2.** Soit  $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ . On définit une application f par  $f(t) = \ln(a^2 2at + 1)$ .
  - **a.** Montrer que f est continue sur [-1, 1].
  - **b.** Écrire la décomposition en facteurs irréductibles de  $X^{2n} + 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$  à l'aide des réels  $x_1, \dots, x_n$ .
  - **c.** En déduire que  $S_n(f) = \frac{\pi}{n} \ln (a^{2n} + 1)$ .
  - **d.** En déduire la valeur de I(f) suivant les valeurs de a.
  - e. Donner un équivalent de  $S_n(f) I(f)$  lorsque n tend vers  $+\infty$ . On distinguera deux cas suivant les valeurs de a.