Devoir surveillé n°01

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 Tout d'abord, $t \mapsto \ln(\sin t)$ est continue sur $]0,1]$. De plus, pour tout $t \in]0,\pi/2]$,

$$\ln(\sin t) = \ln t + \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)$$

Puisque $\sin t \underset{t\to 0^+}{\sim} t$, $\lim_{t\to 0^+} \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) = 0$. De plus, $\lim_{t\to 0^+} \ln t = -\infty$ donc $\ln(\sin t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \ln t$. Par croissances comparées, $\ln(t) \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$ donc $\ln(\sin t) \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$. Comme $1/2 < 1$, $t \mapsto \ln(\sin t)$ est intégrable sur $]0,1]$. En particulier, l'intégrale L converge.

2 Par le changement de variable $u = \pi - t$,

$$\mathrm{L} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\pi-u))\,\mathrm{d}u = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{J}$$

Par le changement de variable, $u = \pi/2 - t$,

$$\mathrm{L} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\sin(\pi/2-u))\,\mathrm{d}u = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{K}$$

3

$$\mathrm{K}+\mathrm{L} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1/2) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi\ln 2}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $u = 2t$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u$$

Via la relation de Chasles, on obtient finalement

$$\mathrm{K}+\mathrm{L} = \frac{\pi\ln 2}{2} + \frac{1}{2}(\mathrm{L}+\mathrm{J})$$

4 Puisque $\mathrm{J}=\mathrm{K}=\mathrm{L}$, on obtient $\mathrm{J}=\mathrm{K}=\mathrm{L}=\frac{\pi\ln 2}{2}$.

5 Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Pour tout $t \in [0,\pi/2]$, $\sin t \in [0,1]$ donc $\sin^y(t) \le \sin^x(t)$ puis, par croissance de l'intégrale, $\mathrm{W}(y) \le \mathrm{W}(x)$. La fonction W est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

6 **6.a** La fonction $\varphi\colon t \mapsto e^{-at}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|\varphi'(t)| = ae^{-at} \le a$. La fonction φ est donc a-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\varphi(x)-\varphi(y)| \le a|x-y|$$

ou encore

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |e^{-ax}-e^{-ay}| \le a|x-y|$$

6.b Soit $(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2$. Par inégalité triangulaire,

$$|\mathrm{W}(x)-\mathrm{W}(y)| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin^x(t)-\sin^y(t)|\,\mathrm{d}t$$

Or pour $t\in]0,\pi/2]$,

$$|\sin^x(t)-\sin^y(t)| = \left|e^{x\ln(\sin t)}-e^{y\ln(\sin t)}\right|$$

donc en posant $a=-\ln(\sin t)\in\mathbb{R}_+$ dans la question précédente, on obtient

$$|\sin^x(t)-\sin^y(t)| \leq -\ln(\sin t)|x-y|$$

Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$|\mathrm{W}(x)-\mathrm{W}(y)| \leq -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)|x-y|\,\mathrm{d}t = \mathrm{L}|x-y| = \frac{\pi\ln 2}{2}|x-y|$$

6.c La question précédente montre que W est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. Elle est notamment continue sur $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{7}$ Les applications $\sin^{x+1}$ et $-\cos$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$ de dérivées respectives $(x+1)\cos\sin^x$ et $\sin$ donc, par intégration par parties

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}(x+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{x+1}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\left[\sin^{x+1}(t)\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (x+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (x+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t \\
&= (x+1)(\mathrm{W}(x)-\mathrm{W}(x+2))
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{W}(x+2)=\dfrac{x+1}{x+2}\mathrm{W}(x)$.

$\boxed{8}$ **8.a** Soit $x\in\mathbb{R}_+$. D'après la question précédente,

$$g(x+1)=(x+2)\mathrm{W}(x+2)\mathrm{W}(x+1)=(x+1)\mathrm{W}(x)\mathrm{W}(x+1)=g(x)$$

Notamment, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g(n+1)=g(n)$ donc $g(n)=g(0)=\dfrac{\pi}{2}$.

8.b Soit $(n,x)\in\mathbb{N}\times[0,1]$. Puisque $n\leq n+x\leq n+1$, on obtient par décroissance de W : $\mathrm{W}(n+1)\leq\mathrm{W}(n+x)\leq\mathrm{W}(n)$. Pour les mêmes raisons, $\mathrm{W}(n+2)\leq\mathrm{W}(n+1+x)\leq\mathrm{W}(n+1)$. On peut multiplier membre à membre ces deux suites d'inégalités car tous leurs membres sont positifs. On obtient alors

$$\mathrm{W}(n+1)\mathrm{W}(n+2)\leq\mathrm{W}(n+x)\mathrm{W}(n+1+x)\leq\mathrm{W}(n)\mathrm{W}(n+1)$$

c'est-à-dire

$$\frac{g(n+1)}{n+2}\leq\frac{g(x+n)}{x+n+1}\leq\frac{g(n)}{n+1}$$

Or on a vu dans les questions précédentes que $g(n)=g(n+1)=\dfrac{\pi}{2}$ et que g était 1-périodique de sorte que $g(x+n)=g(x)$. Ainsi

$$\frac{\pi}{2(n+2)}\leq\frac{g(x)}{x+n+1}\leq\frac{\pi}{2}(n+1)$$

puis

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x+n+1}{n+2}\leq g(x)\leq\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x+n+1}{n+1}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x+n+1}{n+2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x+n+1}{n+1}=1$, on obtient $g(x)=\dfrac{\pi}{2}$.
g est donc constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$ sur $[0,1]$. Comme g est 1-périodique, g est constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

8.c Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par décroissance de W, on a donc bien $W(x+2) \leq W(x+1) \leq W(x)$. Ceci également que $\frac{x+1}{x+2}W(x) \leq W(x+1) \leq W(x)$. Or $W(x) > 0$ comme intégrale d'une fonction continue, positive et non constamment nulle sur $[0, \pi/2]$. Il s'ensuit que

$$\frac{x+1}{x+2} \leq \frac{W(x+1)}{W(x)} \leq 1$$

Par encadrement, on obtient donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{W(x+1)}{W(x)} = 1$, c'est-à-dire $W(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} W(x)$.

8.d On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(x+1)W(x+1)W(x) = g(x) = \frac{\pi}{2}$. D'après la question précédente, $(x+1)W(x+1)W(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} xW(x)^2$. Ainsi $xW(x)^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$. Or W est positive sur $\mathbb{R}_+$ donc $W(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

9 **9.a** Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $u > -x$. Par concavité de ln, $\ln\left(1+\frac{u}{x}\right) \leq \frac{u}{x}$ puis $x\ln\left(1+\frac{u}{x}\right) \leq u$. Par croissance de l'exponentielle, on obtient alors $\left(1+\frac{u}{x}\right)^x \leq e^u$.

9.b Soit $x \geq 1$. On remarque que pour $t \in [0, \sqrt{x}[$, $-t^2 > -x$. D'après la question précédente,

$$\forall t \in [0, \sqrt{x}],\ \left(1-\frac{t^2}{x}\right)^x \leq e^{-t^2}$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\int_0^{\sqrt{x}} \left(1-\frac{t^2}{x}\right)^x \mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$$

De la même manière,

$$\forall t \in [0, \sqrt{x}],\ \left(1+\frac{t^2}{x}\right)^x \leq e^{t^2}$$

donc, par décroissance de la fonction inverse,

$$\forall t \in [0, \sqrt{x}],\ e^{-t^2} \leq \left(1+\frac{t^2}{x}\right)^{-x}$$

puis, par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{x}} \left(1+\frac{t^2}{x}\right)^{-x} \mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{x}\right)^{-x} \mathrm{d}t$$

Cette dernière intégrale converge car $\left(1+\frac{t^2}{x}\right)^{-x} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{2x}}\right)$ et $2x \geq 2 > 1$.

9.c On effectue le changement de variable $t = \sqrt{x}\cos u$ dans la première intégrale :

$$\int_0^{\sqrt{x}} \left(1-\frac{t^2}{x}\right)^x \mathrm{d}t = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-\cos^2 u)^x \sqrt{x}\sin u\ \mathrm{d}u = \sqrt{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x+1}(u)\ \mathrm{d}u = \sqrt{x}W(2x+1)$$

La deuxième intégrale étant généralisée, on vérifie que $u \mapsto \sqrt{x}\frac{\cos u}{\sin u}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $]0, \pi/2]$ sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée est $u \mapsto -\frac{\sqrt{x}}{\sin^2 u}$. Ainsi

$$\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{x}\right)^{-x} \mathrm{d}t = -\sqrt{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(1+\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}\right)^{-x} \frac{\mathrm{d}u}{\sin^2 u} = \sqrt{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-2}(u)\ \mathrm{d}y = \sqrt{x}W(2x-2)$$

Ainsi

$$\sqrt{x}W(2x+1) \leq \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t \leq \sqrt{x}W(2x-2)$$

9.d On a vu précédement que $W(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$. Ainsi

$$W(2x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} W(2x-2) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

puis

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}W(2x+1) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}W(2x-2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Ceci signifie que l'intégrale G converge et que $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$\boxed{10}$ **10.a** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Comme indiqué dans l'énoncé, $W(x+2) \le W(x+1) \le W(x)$. En divisant par $W(x) > 0$, $\frac{W(x+2)}{W(x)} \le h(x) \le 1$ ou encore $\frac{x+1}{x+2} \le h(x) \le 1$ i.e. $0 \le h(x) \le \frac{1}{x+2}$.

10.b Soit $x \ge 2$. Alors

$$h(x) = \frac{W(x+1)}{W(x)} = \frac{\frac{x}{x+1}W(x-1)}{\frac{x-1}{x}W(x-2)} = \frac{x^2}{x^2-1}\frac{W(x-1)}{W(x-2)} = \frac{x^2}{x^2-1}h(x-2)$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h(2n) = \frac{4n^2}{4n^2-1}h(2n-2)$. Comme $h(0) = \frac{W(1)}{W(0)} = \frac{2}{\pi}$, on obtient par télescopage

$$h(2n) = h(0)\prod_{k=1}^{n}\frac{h(2k)}{h(2k-2)} = \frac{2}{\pi}\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1} = \frac{r_n}{\pi}$$

On sait que $W(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} W(x)$ donc $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1$. En particulier, $\lim_{n\to+\infty} h(2n) = 1$ puis $\lim_{n\to+\infty} r_n = \pi$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \le 1 - h(x) \le \frac{1}{x+2}$ donc $0 \le 1 - h(2n) \le \frac{1}{2n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou encore $0 \le \pi - r_n \le \frac{\pi}{2(n+1)}$.

10.c On calcule r_n à l'aide d'une boucle.

```
def r(n):
    p = 2
    for k in range(1, n+1):
        p *= (4*k**2) / (4*k**2-1)
    return p
```

```
>>> r(1000)
3.140807746030402
```

$\boxed{11}$ **11.a** Par définition de la suite (r_n),

$$\frac{\pi}{r_n} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2-1}{4k^2} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{4k^2}$$

Par propriété du logarithme,

$$\ln\frac{\pi}{r_n} = \ln\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$$

Or on sait que $\lim_{n\to+\infty} r_n = \pi$ donc la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$ converge (on le sait en fait déjà en utilisant un équivalent du terme général) et

$$0 = \ln\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$$

Finalement

$$\ln\frac{\pi}{r_n} = \ln\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) - \sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) = -\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$$

11.b C'est évident :

$$\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n(n-1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$$

11.c On sait que

$$-\ln\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4n^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

De plus, la suite de terme général $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$ est négative donc, d'après le résultat admis,

$$-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=\frac{1}{4n}$$

car la dernière somme est télescopique et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$. Autrement dit,

$$\ln\frac{\pi}{r_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4n}$$

Posons $\varepsilon_n=\frac{\pi}{r_n}-1$ de sorte que (ε_n) converge vers 0 et

$$\ln\frac{\pi}{r_n}=\ln(1+\varepsilon_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\varepsilon_n$$

Ainsi $\varepsilon_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4n}$ i.e. $\pi-r_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{r_n}{4n}$.

11.d On sait que $\frac{1}{1-u}\underset{u\to0}{=}1+u+\mathcal{O}(u^2)$ donc

$$\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

puis

$$\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

De même, comme $(1-u)^{-2}\underset{u\to0}{=}1+2u+o(u)$,

$$\frac{1}{(n-1)^2}=\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-2}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{n^3}$$

11.e On sait que $\ln(1+u)\underset{u\to0}{=}u+\mathcal{O}(u^2)$ donc

$$-\ln\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{4n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

D'après la question précédente, on peut également écrire

$$-\ln\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

et, comme $\sum\frac{1}{n^3}$ est une série à termes positifs convergente, on a d'après le résultat admis

$$-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{4n}+\mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}\right)$$

A nouveau, d'après le résultat admis et la question précédente,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)^2}-\frac{1}{k^2}=\frac{1}{2n^2}$$

Finalement,

$$\ln \frac{\pi}{r_n} = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{4n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On note à nouveau $\varepsilon_n = \frac{\pi}{r_n} - 1$. Alors

$$\ln \frac{\pi}{r_n} = \ln(1+\varepsilon_n) = \varepsilon_n + \mathcal{O}(\varepsilon_n^2)$$

Or on a vue précédemment que $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}$ donc

$$\ln \frac{\pi}{r_n} = \varepsilon_n + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisqu'on vient de voir que

$$\ln \frac{\pi}{r_n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{4n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

on obtient :

$$\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{4n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi - r_n}{r_n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{4n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ou encore

$$\pi - r_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{r_n}{4n} + \mathcal{O}\left(\frac{r_n}{n^2}\right)$$

Comme (r_n) est convergente donc bornée, on a également

$$\pi - r_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{r_n}{4n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et enfin

$$\left(1 + \frac{1}{4n}\right) r_n \underset{n\to+\infty}{=} \pi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Remarque. L'encadrement obtenu à la question **10.b** permet d'affirmer que $r_n \underset{n\to+\infty}{=} \pi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. Comme $\left(1+\frac{1}{4n}\right) r_n \underset{n\to+\infty}{=} \pi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, on peut raisonnablement penser que la suite $\left(\left(1+\frac{1}{4n}\right) r_n\right)$ converge plus rapidement vers π que la suite (r_n). On peut le constater numériquement en représentant graphiquement ces deux suites.