

# ENSEMBLES

Sans rentrer dans les détails, on appelle **ensemble** une collection d'objets. Ces objets sont appelés les **éléments** de l'ensemble.

## 1 Appartenance et inclusion

### Définition 1.1

L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé **ensemble vide** et est noté  $\emptyset$ . Un ensemble à un élément est appelé un **singleton**, un ensemble à deux éléments est une **paire**.

### Définition 1.2 Appartenance

On dit que  $x$  **appartient** à un ensemble  $E$  si  $x$  est un élément de  $E$  et on note alors  $x \in E$ .

### Décrire un ensemble

- Un ensemble est dit défini **en extension** lorsqu'il est défini par l'énumération de ses éléments. Par exemple,  $A = \{1, 3, 5, 7\}$ .
- Un ensemble est dit défini **en compréhension** lorsqu'il est défini par une propriété caractéristique de ses éléments. Par exemple, l'ensemble des entiers naturels pairs est  $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k, n = 2k\}$ . Autrement dit, l'ensemble des entiers naturels pairs est l'ensemble des entiers  $n$  pour lesquels il existe un entier naturel  $k$  tel que  $n = 2k$ .
- Un ensemble peut être défini à l'aide d'un autre ensemble. Par exemple, l'ensemble des entiers naturels pairs peut se noter  $\{2k, k \in \mathbb{N}\}$ . Autrement dit, l'ensemble des entiers naturels pairs est l'ensemble des entiers de la forme  $2k$  lorsque  $k$  parcourt  $\mathbb{N}$ .

**REMARQUE.** De manière plus concise, l'ensemble des entiers naturels pairs se note aussi  $2\mathbb{N}$ .



**ATTENTION!** Quand on décrit un ensemble en compréhension, on donne d'abord les éléments puis la condition qu'ils vérifient. Par exemple, la notation  $\{n = 2k\}$  pour désigner l'ensemble des entiers naturels pairs n'a **AUCUN SENS**. Au mieux pourrait-on voir cet «ensemble» comme un ensemble d'équations.

### Exemple 1.1

L'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  1-périodiques peut se noter  $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)\}$ . Là encore, des notations du style  $\{f(x+1) = f(x)\}$  ou  $\{f(x+1) = f(x), x \in \mathbb{R}\}$  ou encore  $\{\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)\}$  n'ont **AUCUN SENS**.

### Définition 1.3 Inclusion

On dit qu'un ensemble  $E$  est **inclus** dans un ensemble  $F$  si tout élément de  $E$  est un élément de  $F$  et on note alors  $E \subset F$ . De manière plus concise,

$$(E \subset F) \iff (\forall x, x \in E \implies x \in F)$$

**Exemple 1.2**

On a la suite d'inclusion bien connue :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .



**ATTENTION !** Attention à ne pas confondre appartenance et inclusion.

- On a bien  $0 \in \mathbb{N}$  mais  $0 \notin \mathbb{N}$ . Néanmoins,  $\{0\} \subset \mathbb{N}$ .
- On a bien  $\{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{Z}$  mais  $\{-1, 0, 1\} \notin \mathbb{Z}$ .

Un élément peut appartenir à un ensemble mais ne peut pas être inclus dans un ensemble. Un ensemble peut être inclus dans un ensemble mais ne peut pas appartenir à un ensemble (à moins qu'il s'agisse d'un ensemble d'ensembles ...).

**Définition 1.4 Partie**

On appelle partie d'un ensemble  $E$  tout ensemble  $F$  inclus dans  $E$ . L'ensemble des parties de  $E$  se note  $\mathcal{P}(E)$ .

**Exercice 1.1**

Énumérer les parties de l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ .

**Définition 1.5 Égalité**

On dit que deux ensembles  $E$  et  $F$  sont **égaux** si tout élément de  $E$  est un élément de  $F$  et réciproquement. On note alors  $E = F$ . De manière plus concise,

$$(E = F) \iff (\forall x, x \in E \iff x \in F)$$

**Proposition 1.1**

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles alors  $E = F$  si et seulement si  $E \subset F$  et  $F \subset E$ .

**Méthode** Inclusion et égalité en pratique

- Pour montrer que  $E \subset F$ , on montre que tout élément de  $E$  est un élément de  $F$ . On rédige donc de la manière suivante :  
«Soit  $x \in E$ . Montrons que  $x \in F$ ».
- Pour montrer que  $E = F$ , on peut soit montrer que  $x \in E$  si et seulement si  $x \in F$  en raisonnant par équivalence, soit procéder par **double inclusion** en montrant que  $E \subset F$  et  $F \subset E$ . Dans ce cas, la rédaction se fait en deux étapes :
  - «Soit  $x \in E$ . Montrons que  $x \in F$ ».
  - «Soit  $x \in F$ . Montrons que  $x \in E$ ».

On peut également raisonner directement sur les ensembles sans considérer les éléments.

**Exercice 1.2****Médiatrice**

Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan. Montrer que l'ensemble des points du plan équidistants de  $A$  et  $B$  est la droite orthogonale au segment  $[AB]$  en son milieu.

**Exercice 1.3**

Soient  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x - y = 1\}$  et  $B = \{(t + 1, 2t + 1), t \in \mathbb{R}\}$ . Montrer que  $A = B$ .

**2 Opérations sur les ensembles****Définition 2.1 Intersection, union**

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles.

- On appelle **intersection** de  $A$  et  $B$  l'ensemble noté  $A \cap B$  des éléments qui sont à la fois dans  $A$  et dans  $B$ . De manière plus concise,

$$(x \in A \cap B) \iff (x \in A \text{ ET } x \in B)$$

- On appelle **union** de  $A$  et  $B$  l'ensemble noté  $A \cup B$  des éléments qui sont dans  $A$  ou dans  $B$ . De manière plus concise,

$$(x \in A \cup B) \iff (x \in A \text{ OU } x \in B)$$

**Définition 2.2 Intersection et union d'une famille d'ensembles**

Ces définitions se généralisent à plus de deux ensembles. En effet, soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'ensembles.

- On appelle **intersection** des  $A_i$ , notée  $\bigcap_{i \in I} A_i$  l'ensemble des éléments qui sont dans **tous** les  $A_i$ . De manière plus concise,

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff (\forall i \in I, x \in A_i)$$

- On appelle **union** des  $A_i$ , notée  $\bigcup_{i \in I} A_i$  l'ensemble des éléments qui sont dans **au moins un** des  $A_i$ . De manière plus concise,

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff (\exists i \in I, x \in A_i)$$

**Exercice 2.1**

Montrer que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0, 1[$  et que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right] = [0, 1]$ .

**Proposition 2.1 Distributivité de l'intersection et de l'union l'une sur l'autre**

Soient  $A, B, C$  trois ensembles. Alors

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Cette propriété se généralise à une famille infinie d'ensembles :

$$A \cap \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i) \quad \text{et} \quad A \cup \left( \bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$$

**Définition 2.3 Différence, complémentaire**

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ .

- On appelle différence de  $B$  dans  $A$ , notée  $A \setminus B$ , l'ensemble des éléments de  $A$  qui ne sont pas des éléments de  $B$ . De manière plus concise,

$$x \in A \setminus B \iff (x \in A \text{ ET } x \notin B)$$

- On appelle complémentaire de  $A$  dans  $E$  l'ensemble  $E \setminus A$  et on le note  ${}_{\mathcal{C}_E}A$ , ou  $A^c$  ou  $\bar{A}$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble de référence  $E$ . De manière plus concise,

$$x \in \bar{A} \iff x \notin A$$

**REMARQUE.**

- Soit  $A \in \mathcal{P}(E)$ . Alors  $A \cap \bar{A} = \emptyset$  et  $A \cup \bar{A} = E$ .
- Soit  $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ . Alors  $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ .

**Proposition 2.2**

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ . Alors

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Là aussi, ces propriétés se généralisent à des familles d'ensembles. Soient  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'ensembles. Alors

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i$$

**REMARQUE.** Si on traduit en français :

- le complémentaire de l'intersection est l'union des complémentaires ;
- le complémentaire de l'union est l'intersection des complémentaires.

**Lien entre logique et ensembles**

Logique	Ensembles	Lien
Implication	Inclusion	$(A \subset B) \iff (x \in A \implies x \in B)$
Équivalence	Égalité	$(A = B) \iff (x \in A \iff x \in B)$
Conjonction	Intersection	$x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ ET } x \in B)$
Disjonction	Union	$x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ OU } x \in B)$
Négation	Complémentaire	$x \in \bar{A} \iff x \notin A \iff \text{NON}(x \in A)$

**Définition 2.4 Partition**

Soient  $E$  un ensemble et  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $E$ . On dit que cette famille est une **partition** de  $E$  si

- (i)  $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$ ;
- (ii)  $\bigcup_{i \in I} A_i = E$ ;
- (iii) les  $A_i$  sont deux à deux disjoints i.e.  $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ .

**Exemple 2.1**

$2\mathbb{Z}$  et  $2\mathbb{Z} + 1$  forment une partition de  $\mathbb{Z}$ .

### 3 Produit cartésien

**Définition 3.1 Produit cartésien**

Soient  $E_1, E_2, \dots, E_n$   $n$  ensembles. On appelle **produit cartésien** des ensembles  $E_i$ , noté  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  l'ensemble des  $n$ -uplets  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  où  $x_i \in E_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ .  
Si  $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$ , le produit cartésien se note  $E^n$ .

**Exemple 3.1**

$\mathbb{R}^2$  est l'ensemble des couples  $(x, y)$  où  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ .

**Définition 3.2  $n$ -uplet**

On appelle  $n$ -uplet tout élément d'un produit cartésien de  $n$  ensembles. Un 2-uplet s'appelle aussi un **couple**, un 3-uplet un **triplet**, etc....

**REMARQUE.** L'ensemble des  $n$ -uplets d'éléments d'un ensemble  $E$  est tout simplement  $E^n$ .

**REMARQUE.** Dans une proposition avec quantificateurs,

- $\forall x \in E, \forall y \in F$  signifie la même chose que  $\forall (x, y) \in E \times F$ ;
- $\exists x \in E, \exists y \in F$  signifie la même chose que  $\exists (x, y) \in E \times F$

**Exercice 3.1**

Soit  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ . Exprimer  $\mathbb{C}_{E^2} A \times B$  en fonction de  $E, A^c$  et  $B^c$ .