Semaine du 04/01 au 08/01

1 Cours

Suites numériques

Généralités Définition d'une suite. Modes de définition : explicite ou par récurrence. Vocabulaire : suites constantes, stationnaires, majorées, minorées bornées, croissantes, décroissantes, monotones. Suites classiques : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2.

Limite d'une suite Définition. Unicité. Vocabulaire : convergence et divergence. Toute suite de limite strictement positive est minorée par un réel strictement positif à partir d'un certain rang. Toute suite convergente est bornée. Suites extraites. Si une suite admet une limite, alors toute suite extraite admet la même limite. Si les suites des termes de rangs pairs et de rangs impairs admettent la même limite, alors la suite admet également cette limite.

Théorème d'existence de limites Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration. Théorème de la limite monotone. Suites adjacentes : définition et convergence. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

2 Méthodes à maîtriser

- Déterminer le sens de variation d'une suite : signe de $u_{n+1} - u_n$ ou position de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1 si les u_n sont **tous strictement positifs**.
- Prouver qu'une suite n'admet pas de limite en exhibant deux suites extraites de limites différentes.
- Déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 via l'équation caractéristique.
- Montrer qu'une suite monotone converge ou diverge (raisonnement par l'absurde).
- Montrer que deux suites sont adjacentes.

3 Questions de cours

- Donner la définition de l'adjacence de de suites réelles. Montrer que deux suites adjacentes convergent vers la même limite.
- Montrer qu'une suite croissante et majorée converge et qu'une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- En admettant que $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$, montrer qu'il existe $\gamma \in [0, 1]$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

- Soit $a \in]1, +\infty[$. Montrer que $a^n \underset{n \to +\infty}{=} o(n!)$.