

# DEVOIR SURVEILLÉ N°01

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1

### Partie I – Définition et étude de la fonction dilogarithme

1.  $f$  est clairement de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, 1[$ . Il suffit donc de prouver que  $f$  et  $f'$  admettent des limites finies en 0.

Comme  $\ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t$ ,  $\lim_0 f = 1$ .

Un calcul facile donne

$$\forall t \in ] -\infty, 0[ \cup ]0, 1[, f'(t) = \frac{1}{t(1-t)} + \frac{\ln(1-t)}{t^2}$$

Or

$$\frac{1}{1-t} \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + t + o(t)$$

et

$$\ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{=} -t - \frac{t^2}{2} + o(t)$$

donc

$$f'(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} + o(1)$$

ou encore  $\lim_0 f' = \frac{1}{2}$ .

On peut donc prolonger  $f$  en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -\infty, 1[$ .

2. Il faut montrer que  $L$  admet une limite finie en 1, autrement dit que l'intégrale  $\int_0^1 f(t) dt$  converge. Or  $f(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} -\ln(1-t)$ . Par croissances comparées,  $f(t) \underset{t \rightarrow 1}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$  donc  $f$  est intégrable sur  $[0, 1[$  par comparaison à une intégrale de Riemann convergente. Par conséquent,  $\int_0^1 f(t) dt$  converge et  $L$  admet bien une limite finie en 1 :  $L$  est donc prolongeable par continuité en 1.
3. D'après le théorème fondamental de l'analyse,  $L$  est une primitive de  $f$  sur  $] -\infty, 1[$ .  $L$  est donc dérivable sur cet intervalle et  $L' = f$ .
4. Pour  $t \in ]0, 1[$ ,  $\ln(1-t) < 0$  donc  $f(t) > 0$ . Pour  $t \in ] -\infty, 0[$ ,  $\ln(1-t) > 0$  donc  $f(t) > 0$ . De plus,  $f(0) = 1 > 0$ . Ainsi  $L' = f$  est strictement positive sur  $] -\infty, 1[$  :  $L$  est donc strictement croissante sur  $] -\infty, 1[$ .
5. Puisque  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \ln(1-t) = +\infty$ ,  $\frac{1}{t} \underset{t \rightarrow -\infty}{=} o(f(t))$ . Or  $\int_{-1}^{-\infty} \frac{dt}{t}$  diverge et  $f$  est positive. On en déduit donc que  $\int_0^{-\infty} f(t) dt$  diverge. Par conséquent,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$ .

### Partie II – Relations fonctionnelles et valeurs particulières

6. a. On pose  $u = -\ln(1-t)$  i.e.  $t = 1 - e^{-u}$ .  $u \mapsto 1 - e^{-u}$  est une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  strictement croissante de  $[0, +\infty[$  sur  $[0, 1[$ . De plus,  $\frac{dt}{du} = e^{-u}$  donc

$$L(1) = \int_0^1 \frac{-\ln(1-t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u}{1 - e^{-u}} \cdot e^{-u} du = \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1} du$$

- b. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Par croissances comparées,  $xe^{-kx} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1/x^2)$  donc l'intégrale définissant  $I_k$  converge.

Par intégration par parties,

$$I_k = -\frac{1}{k} [xe^{-kx}]_0^{+\infty} + \frac{1}{k} \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx$$

L'intégration par parties est légitime car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-kx} = 0$  donc le crochet converge. De plus,

$$I_k = \frac{1}{k} \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = -\frac{1}{k^2} [e^{-kx}]_0^{+\infty} = \frac{1}{k^2}$$

- c. Par convexité de  $\exp$ ,  $e^x \geq 1+x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ou encore  $x \leq e^x - 1$ . Puisque  $e^x - 1 > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $0 \leq \frac{x}{e^x - 1} \leq 1$ .

- d. Comme somme (finie) linéaire d'intégrales convergentes

$$\sum_{k=1}^n I_k = \int_0^{+\infty} x \sum_{k=1}^n e^{-kx} dx = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}(1-e^{-nx})}{1-e^{-x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x(1-e^{-nx})}{e^x - 1} dx$$

Par conséquent,

$$L(1) - \sum_{k=1}^n I_k = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{e^x - 1} dx$$

D'après la question précédente

$$0 \leq L(1) - \sum_{k=1}^n I_k \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx = \frac{1}{n}$$

- e. En passant à la limite dans la question précédente,

$$L(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n I_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

7. a. Posons  $\varphi : x \mapsto L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$ . Comme  $L$  est dérivable sur  $] -1, 1[$ ,  $\varphi$  l'est également et

$$\forall x \in ] -1, 1[, \varphi'(x) = L'(x) - L'(-x) - xL'(x^2) = f(x) - f(-x) - 2xf(x^2)$$

Notamment,  $\varphi'(0) = 0$  et pour tout  $x \in ] -1, 0[ \cup ]0, 1[$ ,

$$\varphi'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} + x \cdot \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} = \frac{-\ln((1-x)(1+x)) + \ln(1-x^2)}{x} = 0$$

Ainsi  $\varphi'$  est nulle sur  $] -1, 1[$  et donc  $\varphi$  est constante sur  $] -1, 1[$ . Par ailleurs,  $L$  est continue sur  $[-1, 1]$  donc  $\varphi$  l'est également. Par continuité,  $\varphi$  est constante sur  $[-1, 1]$ . Or  $\varphi(0) = 0$  car  $L(0) = 0$  donc  $\varphi$  est nulle sur  $[-1, 1]$ . Par conséquent,

$$\forall x \in [-1, 1], L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)$$

- b. En prenant  $x = 1$ , on obtient

$$L(1) + L(-1) = \frac{1}{2}L(1)$$

donc

$$L(-1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{\pi^2}{12}$$

8. a. On raisonne comme à la question précédente en posant  $\psi : x \mapsto L(x) + L(1-x) + \ln(x) \ln(1-x)$ . A nouveau,  $\psi$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et

$$\forall x \in ]0, 1[, \psi'(x) = L'(x) - L'(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = f(x) - f(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = 0$$

Ainsi  $\psi$  est constante sur  $]0, 1[$ . On note  $C$  cette constante.

Par continuité de  $L$  en 0 et 1,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) + L(1-x) = L(0) + L(1) = \frac{\pi^2}{6}$$

De plus,  $\ln(x) \ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -x \ln(x)$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) \ln(1-x) = 0$  par croissances comparées. On en déduit que  $\lim_0 \psi = \frac{\pi^2}{6} = C$ .

b. En prenant  $x = \frac{1}{2}$ ,

$$2L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

donc

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \ln^2(2)$$

### Partie III – Une équation différentielle

On considère les équations différentielles

$$\mathcal{E} : xy'' + y' = \frac{1}{1-x}$$

et

$$\mathcal{E}' : xz' + z = \frac{1}{1-x}$$

9. Les solutions sur  $]0, 1[$  de l'équation homogène  $xz' + z = 0$  sont les fonctions  $x \mapsto \frac{\lambda}{x}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On vérifie que  $f$  est une solution particulière de  $\mathcal{E}'$  sur  $]0, 1[$ . Les solutions de  $\mathcal{E}'$  sur  $]0, 1[$  sont donc les fonctions  $x \mapsto f(x) + \frac{\lambda}{x}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On montre de la même manière que les solutions de  $\mathcal{E}'$  sur  $] -\infty, 1[$  sont de cette forme.

10. Via le changement de variable  $z = y'$ , on montre que les solutions de  $\mathcal{E}$  sur  $]0, 1[$  sont les primitives des solutions de  $\mathcal{E}'$  sur cet intervalle, c'est-à-dire les fonctions de la forme

$$x \mapsto L(x) + \lambda \ln(x) + \mu \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

De la même manière les solutions de  $\mathcal{E}$  sur  $] -\infty, 1[$  sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto L(x) + \lambda \ln(-x) + \mu \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

11. Soit  $g$  une éventuelle solution de  $\mathcal{E}$  sur  $] -\infty, 1[$ . Il existe donc  $(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$  tel que

$$\forall x \in ]0, 1[, g(x) = L(x) + \lambda_1 \ln(x) + \mu_1$$

$$\forall x \in ] -\infty, 1[, g(x) = L(x) + \lambda_2 \ln(x) + \mu_2$$

Comme  $g$  doit être deux fois dérivable en 0 et a fortiori continue en 0,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Le même argument de continuité montre alors que  $\mu_1 = \mu_2$ . Il existe donc  $\mu \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in ] -\infty, 1[, g(x) = L(x) + \mu$$

Réciproquement, soit  $\mu \in \mathbb{R}$ . Ce qui précède montre que  $g : x \mapsto L(x) + \mu$  est bien solution de  $\mathcal{E}$  sur  $] -\infty, 1[$  et sur  $]0, 1[$ . On a donc

$$\forall x \in ] -\infty, 0[ \cup ]0, 1[, xg''(x) + g'(x) = \frac{1}{1-x}$$

Mais  $L$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -\infty, 1[$  et  $L' = f$ . Or  $f$  est elle-même de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -\infty, 1[$  donc  $L$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $] -\infty, 1[$ . Notamment,  $g''$  et  $g'$  sont continues en 0 de même que  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  donc

$$\forall x \in ] -\infty, 1[, xg''(x) + g'(x) = \frac{1}{1-x}$$

et  $g$  est bien solution de  $\mathcal{E}$  sur  $] -\infty, 1[$ .

Pour récapituler, les solutions de  $\mathcal{E}$  sur  $] -\infty, 1[$  sont exactement les fonctions  $L + \mu$  avec  $\mu \in \mathbb{R}$ .

## Problème 2

Remarquons déjà que dans tout le problème,  $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

1. a. **Etude en  $+\infty$ .** Clairement,  $f(t) = \mathcal{O}(1/t^2)$  donc  $f(2t) = \mathcal{O}(1/t^2)$  puis  $\frac{f(t)-f(2t)}{t} = \mathcal{O}(1/t^3)$ . Puisque  $t \mapsto \frac{1}{t^3}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ ,  $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$  l'est également.

**Etude en  $0^+$ .** Puisque  $\frac{1}{1+u} = 1 + \mathcal{O}(u)$ ,  $f(t) = 1 + \mathcal{O}(t^2)$  puis  $f(2t) = 1 + \mathcal{O}(t^2)$  et enfin  $\frac{f(t)-f(2t)}{t} = \mathcal{O}(t)$ . Comme  $t \mapsto t$  est intégrable sur  $]0, 1]$ ,  $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$  l'est également.

Finalement,  $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  : l'intégrale  $I(f)$  converge (absolument).

- b. Décomposition en éléments simples :

$$\frac{f(t)-f(2t)}{t} = \frac{1}{t(t^2+1)} - \frac{1}{t(4t^2+1)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t} + \frac{4t}{4t^2+1} = \frac{4t}{4t^2+1} - \frac{t}{t^2+1}$$

Une primitive de  $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$  est donc

$$t \mapsto \frac{1}{2} \ln(4t^2+1) - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4t^2+1}{t^2+1}\right)$$

Ainsi

$$I(f) = \frac{1}{2} \left[ \ln\left(\frac{4t^2+1}{t^2+1}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \ln 4 = \ln 2$$

- 2.

$$\frac{f(t)-f(2t)}{t} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{2}{4t^2+1}$$

Ainsi

$$I(f) = [\arctan(t) - \arctan(2t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

3. Remarquons que

$$\frac{f(t)-f(2t)}{t} = \frac{t^2}{t^2+1} - \frac{4t^2}{4t^2+1} = 1 - \frac{1}{t^2+1} - 1 + \frac{1}{4t^2+1} = -\left(\frac{1}{t(t^2+1)} - \frac{1}{t(4t^2+1)}\right)$$

On se ramène donc à la question 1 :  $I(f)$  converge et  $I(f) = -\ln 2$ .

4. Lorsque  $n \geq 3$ ,

$$\frac{f(t)-f(2t)}{t} = \frac{t^{n-1}}{1+t^2} - \frac{2^n t^{n-1}}{1+4t^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4-2^n}{4t^{n-3}}$$

car  $4-2^n \neq 0$ . Or  $n-3 \geq 0$  donc  $t \mapsto t^{n-3}$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . L'intégrale  $I(f)$  diverge.

### Partie II –

5. **Etude en  $+\infty$ .** Par croissances comparées,  $\frac{f(t)-f(2t)}{t} = o(1/t^2)$ . Par conséquent,  $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

**Etude en  $0^+$ .** On sait que  $e^{-t} = 1 - t + o(t)$  et  $e^{-2t} = 1 - 2t + o(t)$  donc  $\frac{f(t)-f(2t)}{t} = 1 + o(1)$  i.e.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)-f(2t)}{t}$ . Ainsi  $f$  est intégrable sur  $]0, 1]$ .

Finalement,  $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  : l'intégrale  $I(f)$  converge (absolument).

6.

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} dt - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du && \text{par le changement de variable } u = 2t \\
&= \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du && \text{via la relation de Chasles} \\
&= \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u} - 1}{u} du + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{du}{u}
\end{aligned}$$

7.  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ . Il suffit de constater que  $\lim_0 h = -1$  pour affirmer que  $h$  est prolongeable en une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .

8. On note  $H$  une primitive du prolongement continu de  $h$  sur  $\mathbb{R}$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(t) - f(2t)}{t} dt = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u} - 1}{u} du + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{du}{u} = H(2\varepsilon) - H(\varepsilon) + \ln 2$$

Comme  $H$  est continue (et même de classe  $\mathcal{C}^1$ ) sur  $\mathbb{R}$  en tant que primitive d'une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H(2\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H(\varepsilon) = H(0)$$

Par conséquent,

$$I(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(t) - f(2t)}{t} dt = \ln 2$$

9. On effectue le changement de variable  $t = -\ln u$ . Celui-ci est valide car  $-\ln$  est une bijection strictement décroissante de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $]0, 1]$  sur  $[0, +\infty[$ . Ainsi

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_1^0 \frac{u - u^2}{-\ln u} \cdot \frac{-du}{u} = \int_0^1 \frac{u - 1}{\ln u} du$$

Ainsi

$$J = I(f) = \ln 2$$