# Interrogation écrite n°12

NOM : Prénom : Note :

1. Décomposer en éléments simples $F = \dfrac{1}{(X^2-1)^2}$.

   Remarquons que la partie entière de F est évidemment nulle et que $F = \dfrac{1}{(X-1)^2(X+1)^2}$. Il existe donc $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

   $$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2}$$

   Par parité de F, $c = -a$ et $d = b$. Par ailleurs, $b = ((X-1)^2F)(1) = \dfrac{1}{4}$. En évaluant en 0, on obtient

   $$1 = -a + b + c + d$$

   On en déduit

   $$a = -\frac{1}{4} \qquad b = \frac{1}{4} \qquad c = \frac{1}{4} \qquad d = \frac{1}{4}$$

2. Décomposer en éléments simples $F = \dfrac{X}{X^4-1}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

   La partie entière de F est clairement nulle. Puisque $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$, il existe donc $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

   $$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

   D'abord, $a = \dfrac{X(1)}{(X^4-1)'(1)} = \dfrac{1}{4}$. Par imparité de F, $b = a = \dfrac{1}{4}$. Enfin, $((X^2+1)F)(i) = -\dfrac{i}{2} = ci + d$ donc $c = -\dfrac{1}{2}$ et $d = 0$.

3. Soient $a, b, c$ les racines complexes du polynôme $P = X^3 - 2X^2 + 5X - 3$. On ne cherchera pas à déterminer ces racines. Calculer $S = a^2 + b^2 + c^2$.

   Remarquons que

   $$S = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$$

   D'après les liens coefficients/racines, $a+b+c = 2$ et $ab+bc+ca = 5$. Ainsi $S = -6$.

4. Montrer que toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est bornée sur $\mathbb{R}$.

   Notons T une période de $f$. Puisque $f$ est continue sur le segment $[0, T]$, elle y est bornée. Par T-périodicité, $f$ est également bornée sur $\mathbb{R}$.

5. Montrer que l'équation $x\cos(x) = \sin(x)$ admet une unique solution sur l'intervalle $I_n = [n\pi, (n+1)\pi]$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

   Voir la correction du DS ad hoc.