

# DÉNOMBREMENT

## 1 Ensembles finis et cardinaux

### 1.1 Cardinal d'un ensemble fini

#### Définition 1.1

On dit qu'un ensemble non vide  $E$  est fini s'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et une bijection de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  sur  $E$ . Dans ce cas, l'entier  $n$  est unique et est appelé **cardinal** de  $E$  : on le note  $\text{card } E$ ,  $|E|$  ou encore  $\#E$ .  
Par convention,  $\emptyset$  est fini et  $\text{card } \emptyset = 0$ .

**REMARQUE.** Plus prosaïquement, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.

#### Proposition 1.1

Deux ensembles finis ont même cardinal si et seulement si il existe une bijection de l'un sur l'autre.

#### Méthode Déterminer le cardinal d'un ensemble

Pour déterminer le cardinal d'un ensemble, il suffit de le mettre en bijection avec un ensemble de cardinal connu.

#### Proposition 1.2

Soit  $E$  un ensemble fini et  $A$  une partie de  $E$ . Alors  $A$  est fini et  $\text{card } A \leq \text{card } E$ . Il y a égalité si et seulement si  $A = E$ .

### 1.2 Opération sur les ensembles finis

#### Proposition 1.3

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis. Alors  $E \cup F$  et  $E \cap F$  sont finis et

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card } E + \text{card } F - \text{card}(E \cap F)$$

#### Exercice 1.1

#### Principe d'inclusion-exclusion

Soient  $A_1, \dots, A_n$   $n$  ensembles finis. Montrer que

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{card}\left(\bigcap_{l=1}^k A_{i_l}\right)$$

**Définition 1.2 Partition**

Soit  $E$  un ensemble (pas nécessairement fini) et  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $E$ . On dit que  $(A_i)_{i \in I}$  est une partition de  $E$  si

- les  $A_i$  sont non vides ;
- les  $A_i$  sont disjoints deux à deux ;
- $E = \bigcup_{i \in I} A_i$ .

On note alors  $E = \bigsqcup_{i \in I} A_i$ .

**REMARQUE.** Il arrive de parler de partition même si certaines des parties en question sont vides.

**Proposition 1.4**

Soit  $E$  un ensemble fini et  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  une partition de  $E$ . Alors  $\text{card } E = \sum_{i=1}^n \text{card } A_i$ .

**REMARQUE.** La relation est vraie certaines des parties sont vides.

**Méthode Déterminer le cardinal d'un ensemble**

Pour déterminer le cardinal d'un ensemble, il suffit de le partitionner en parties de cardinaux connus.

**Corollaire 1.1**

Soit  $A$  une partie d'un ensemble fini  $E$ . On note  $\bar{A}$  son complémentaire. Alors

$$\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$$

**Proposition 1.5**

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis. Alors  $E \times F$  et  $F^E$  est fini. De plus,  $\text{card}(E \times F) = \text{card } E \times \text{card } F$ .

On en déduit le résultat suivant par récurrence.

**Corollaire 1.2**

Soient  $E_1, \dots, E_p$  des ensembles finis. Alors

$$\text{card} \left( \prod_{i=1}^p E_i \right) = \prod_{i=1}^p \text{card}(E_i)$$

**Proposition 1.6**

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis. Alors  $F^E$  est fini. De plus,  $\text{card}(F^E) = (\text{card } F)^{\text{card } E}$ .

L'application de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $\{0, 1\}^E$  qui à une partie de  $E$  associe sa fonction indicatrice est clairement bijective. On en déduit la proposition suivante.

### Proposition 1.7

Soit  $E$  un ensemble fini. Alors l'ensemble des parties de  $E$  noté  $\mathcal{P}(E)$  est également fini et  $\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{card } E}$ .

## 1.3 Applications entre ensembles finis

### Proposition 1.8

Soit  $f : E \rightarrow F$ .

- (i) Si  $f$  est injective et  $F$  fini, alors  $E$  est fini et  $\text{card } E \leq \text{card } F$ .
- (ii) Si  $f$  est surjective et  $E$  fini, alors  $F$  est fini et  $\text{card } E \geq \text{card } F$ .

### Corollaire 1.3

Soit  $f : E \rightarrow F$ . Si  $E$  est fini, alors  $\text{Im } f$  est fini et  $\text{card}(\text{Im } f) \leq \text{card } E$ .

### Principe des tiroirs de Dirichlet

Supposons que l'on veuille ranger  $n$  paires de chaussettes dans  $p$  tiroirs. Si  $n > p$ , il est évident qu'un des tiroirs comportera plus d'une paire de chaussettes. On peut formaliser cette remarque de la manière suivante. Si on note  $E$  l'ensemble des paires de chaussettes,  $F$  l'ensemble des tiroirs et  $f$  l'application qui à une paire de chaussettes associe le tiroir dans laquelle elle se trouve, alors la remarque précédente signifie que  $f$  n'est pas injective.

### Exercice 1.2

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On se donne  $n + 1$  réels de l'intervalle  $[0, 1[$ . Montrer que deux d'entre eux sont à une distance strictement inférieure à  $\frac{1}{n}$  l'un de l'autre.

### Proposition 1.9

Soit  $f : E \rightarrow F$  où  $E$  et  $F$  sont des ensembles finis de **même** cardinal. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est bijective ;
- (ii)  $f$  est surjective ;
- (iii)  $f$  est injective.

### Proposition 1.10 Lemme des bergers

Soit  $f : E \rightarrow F$  où  $E$  et  $F$  sont des ensembles finis. On suppose qu'il existe  $r \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{card}(f^{-1}(y)) = r$  pour tout  $y \in F$ . Alors  $\text{card } E = r \text{ card } F$ .

## 2 Listes, arrangements et combinaisons

### 2.1 Listes

#### Définition 2.1 Liste

Soient  $E$  un ensemble fini et  $p \in \mathbb{N}$ . On appelle  **$p$ -liste** d'éléments de  $E$  tout  $p$ -uplet d'éléments de  $E$ .

**REMARQUE.** Une  $p$ -liste est également une application de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  dans  $E$ .

**REMARQUE.** On remarquera que l'**ordre** des éléments compte dans une liste.  $(a, b, c)$  et  $(c, b, a)$  ne désignent pas la même liste.

#### Exemple 2.1

- Le résultat d'un lancer de 3 dés à 6 faces forme une 3-liste de  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ .
- Le tirage successif et **avec remise** de 4 cartes dans un paquet de 52 cartes forme une 4-liste de l'ensemble des 52 cartes.

#### Proposition 2.1 Nombre de listes

Soient  $p$  et  $n$  des entiers naturels. Le nombre de  $p$ -listes d'un ensemble de cardinal  $n$  est  $n^p$ .

#### Exemple 2.2

Le nombre de digicodes formés de 4 chiffres suivis de deux lettres est  $10^4 \times 26^2 = 6760000$ .

### 2.2 Arrangements

#### Définition 2.2 Arrangement

Soient  $E$  un ensemble fini et  $p \in \mathbb{N}$ . On appelle  **$p$ -arrangement** d'éléments de  $E$  tout  $p$ -uplet d'éléments de  $E$  **deux à deux distincts**.

**REMARQUE.** Un  $p$ -arrangement est également une injection de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  dans  $E$ .

**REMARQUE.** On remarquera que l'**ordre** des éléments compte dans un arrangement.  $(a, b, c)$  et  $(c, b, a)$  ne désignent pas le même arrangement.

#### Exemple 2.3

- Un tiercé d'une course de 15 chevaux forme un 3-arrangement de l'ensemble des 15 chevaux.
- Un tirage **sans remise** de 4 cartes dans un jeu de 32 cartes pour lequel l'**ordre compte** forme un 4-arrangement de l'ensemble des 32 cartes.

**Proposition 2.2 Nombre d'injections**

Soient  $E$  et  $F$  des ensembles finis de cardinaux respectifs  $p$  et  $n$ . Le nombre d'injections de  $E$  dans  $F$  est  $\frac{n!}{(n-p)!}$  si  $p \leq n$  et 0 sinon.

**Corollaire 2.1 Nombre d'arrangements**

Soient  $p$  et  $n$  des entiers naturels. Le nombre de  $p$ -arrangements d'un ensemble de cardinal  $n$  est  $\frac{n!}{(n-p)!}$  si  $p \leq n$  et 0 sinon.

**Exemple 2.4**

Le nombre de tiercés possibles dans une course de 15 chevaux est  $\frac{15!}{(15-3)!} = 15 \times 14 \times 13 = 2730$ .

**Rappel Permutation**

On appelle **permutation** d'un ensemble  $E$  toute bijection de  $E$  sur lui-même.

**Corollaire 2.2 Nombre de permutations**

Le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal  $n$  est  $n!$ .

**2.3 Combinaisons****Définition 2.3 Combinaison**

Soient  $E$  un ensemble fini et  $p \in \mathbb{N}$ . On appelle  **$p$ -combinaison** d'éléments de  $E$  toute partie de  $E$  de cardinal  $p$ .

**REMARQUE.** On remarquera que l'ordre des éléments ne compte pas dans une combinaison.  $\{a, b, c\}$  et  $\{c, b, a\}$  désignent la même combinaison.

**Exemple 2.5**

- Une main de 5 cartes d'un jeu de 52 cartes forme une 5-combinaison de l'ensemble des 52 cartes.
- Un trinôme d'une classe forme une 3-combinaison de l'ensemble des élèves de la classe.

**Notation 2.1 Coefficient binomial**

Soit  $(p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ . On note  $\binom{n}{p}$  le nombre de  $p$ -combinaisons (ou de parties à  $p$  éléments) d'un ensemble de cardinal  $n$ .

Si on note  $A_{p,n}$  l'ensemble des  $p$ -arrangements et  $C_{p,n}$  l'ensemble des  $p$ -combinaisons d'un même ensemble de cardinal  $n$ , le lemme des bergers appliqué à l'application  $\begin{cases} A_{p,n} & \longrightarrow C_{p,n} \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto \{x_1, \dots, x_p\} \end{cases}$  fournit le résultat suivant.

**Proposition 2.3 Nombre de combinaisons**

Soit  $(p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ . Alors

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exemple 2.6**

Le nombre de mains de 5 cartes prises dans un jeu de 52 cartes est  $\binom{52}{5} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2598960$ .

**2.4 Preuves combinatoires de relations entre coefficients binomiaux**

Si  $E$  est un ensemble de cardinal  $n$  et  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{P}_k(E)$  l'ensemble des parties de  $E$  de cardinal  $k$ .

**Symétrie des coefficients binomiaux**

Soient  $E$  un ensemble de cardinal  $n$  et  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq k \leq n$ . L'application  $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & \bar{X} \end{array} \right.$  est une involution induisant une bijection de  $\mathcal{P}_k(E)$  sur  $\mathcal{P}_{n-k}(E)$ . On en déduit que  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .

### Relation du triangle de Pascal

Soient  $E$  un ensemble de cardinal  $n + 1$ ,  $x$  un élément fixé de  $E$  et  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq k \leq n$ . On note

$$\mathcal{A} = \{F \in \mathcal{R}_{k+1}(E), x \in F\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \{F \in \mathcal{R}_{k+1}(E), x \notin F\}$$

$\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  forment clairement une partition de  $\mathcal{R}_{k+1}(E)$  de sorte que

$$\binom{n+1}{k+1} = \text{card } \mathcal{A} + \text{card } \mathcal{B}$$

#### Raisonnement élémentaire

Choisir un élément de  $\mathcal{A}$  consiste à choisir une partie de  $E \setminus \{x\}$  de cardinal  $k$  et à lui ajouter  $x$ . Comme  $\text{card}(E \setminus \{x\}) = n$ , il y a  $\binom{n}{k}$  façons de le faire. Ainsi  $\text{card } \mathcal{A} = \binom{n}{k}$ .

Choisir un élément de  $\mathcal{B}$  consiste à choisir une partie de  $E \setminus \{x\}$  de cardinal  $k + 1$ . Comme  $\text{card}(E \setminus \{x\}) = n$ , il y a  $\binom{n}{k+1}$  façons de le faire. Ainsi  $\text{card } \mathcal{B} = \binom{n}{k+1}$ .

On en déduit que  $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ .

#### Raisonnement rigoureux

L'application  $\begin{cases} \mathcal{R}_k(E \setminus \{x\}) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ F & \longmapsto & F \sqcup \{x\} \end{cases}$  est bijective de sorte que

$$\text{card } \mathcal{R}_k(E \setminus \{x\}) = \text{card } \mathcal{A}$$

ou encore  $\text{card } \mathcal{A} = \binom{n}{k}$ . L'application  $\begin{cases} \mathcal{R}_{k+1}(E \setminus \{x\}) & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ F & \longmapsto & F \end{cases}$  est bijective de sorte que

$$\text{card } \mathcal{R}_{k+1}(E \setminus \{x\}) = \text{card } \mathcal{B}$$

ou encore  $\text{card } \mathcal{B} = \binom{n}{k+1}$ .

Finalement,  $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ .

### Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini

Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . Les  $\mathcal{R}_k(E)$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  forment une partition de  $\mathcal{P}(E)$ . On en déduit que

$$\text{card } \mathcal{P}(E) = \sum_{k=0}^n \text{card } \mathcal{R}_k(E)$$

Autrement dit

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

C'est la formule du binôme de Newton appliqué à  $(1 + 1)^n$ .

**Preuve de l'identité**  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ 

Soient  $E$  un ensemble de cardinal  $n \geq 1$  et  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq k \leq n$ . On considère l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{(x, F), x \in F, F \in \mathcal{P}_k(E)\}$$

L'idée consiste à déterminer le cardinal de  $\mathcal{A}$  de deux manières différentes.

**Raisonnement élémentaire**

Choisir un élément  $(x, F)$  de  $\mathcal{A}$  peut se faire de la manière suivante :

- on choisit un élément  $x$  de  $E$  ( $n$  choix possibles) ;
- puis on choisit partie  $F'$  de cardinal  $k - 1$  de  $E \setminus \{x\}$  ( $\binom{n-1}{k-1}$  choix possibles) et on pose  $F = F' \sqcup \{x\}$ .

Ainsi  $\text{card } \mathcal{A} = n \binom{n-1}{k-1}$ .

Mais choisir un élément  $(x, F)$  de  $\mathcal{A}$  peut également se faire de la manière suivante :

- on choisit une partie  $F$  de cardinal  $k$  de  $E$  ( $\binom{n}{k}$  choix possibles) ;
- puis on choisit un élément  $x$  de  $F$  ( $k$  choix possibles).

Ainsi  $\text{card } \mathcal{A} = k \binom{n}{k}$ .

**Raisonnement rigoureux**

Pour  $x \in E$ , notons  $\mathcal{B}_x = \{(x, F), x \in F, F \in \mathcal{P}_k(E)\}$ . Les  $\mathcal{B}_x$  pour  $x \in E$  forment une partition de  $\mathcal{A}$ . Ainsi

$$\text{card } \mathcal{A} = \sum_{x \in E} \text{card } \mathcal{B}_x$$

Or pour tout  $x \in E$ , l'application  $\begin{cases} \mathcal{P}_{k-1}(E \setminus \{x\}) & \longrightarrow & \mathcal{B}_x \\ F & \longmapsto & (x, F \sqcup \{x\}) \end{cases}$  est bijective de sorte que

$$\text{card } \mathcal{P}_{k-1}(E \setminus \{x\}) = \text{card } \mathcal{B}_x$$

ou encore  $\text{card } \mathcal{B}_x = \binom{n-1}{k-1}$ . On en déduit que  $\text{card } \mathcal{A} = n \binom{n-1}{k-1}$ .

Pour  $F \in \mathcal{P}_k(E)$ , posons  $\mathcal{C}_F = \{(x, F), x \in F\}$ . Les  $\mathcal{C}_F$  pour  $F \in \mathcal{P}_k(E)$  forment une partition de  $\mathcal{A}$ . Ainsi

$$\text{card } \mathcal{A} = \sum_{F \in \mathcal{P}_k(E)} \text{card } \mathcal{C}_F$$

Or pour tout  $F \in \mathcal{P}_k(E)$ , l'application  $\begin{cases} F & \longrightarrow & \mathcal{C}_F \\ x & \longmapsto & (x, F) \end{cases}$  est bijective de sorte que

$$\text{card } F = \text{card } \mathcal{C}_F$$

ou encore  $\text{card } \mathcal{C}_F = k$ . On en déduit que  $\text{card } \mathcal{A} = k \binom{n}{k}$ .

**Exercice 2.1**

Donner une preuve combinatoire de l'identité  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ .