

# DEVOIR SURVEILLÉ N°08

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1

**1** **1.a**  $\ln$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0$  donc  $\ln$  est concave sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**1.b** Si l'un des  $a_i$  est nul, l'inégalité est triviale. Sinon, par concavité de  $\ln$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(a_i) \leq \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right)$$

On obtient alors l'inégalité voulue par croissance de  $\exp$ .

**2** **2.a** Soit  $s \in \mathcal{S}(E)$ . Alors il existe une base orthonormée de  $E$  formée de vecteurs propres de  $s$ .

Soit  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Alors il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $P^T S P$  soit diagonale.

**2.b** On calcule  $\chi_S = X^2$ . Ainsi  $\text{Sp}(S) = \{0\}$ . Si  $S$  était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle donc nulle.  $S$  n'est donc pas diagonalisable.

**3** **3.a** Comme  $\beta$  est une base orthonormée,  $x = \sum_{i=1}^n \langle x | \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$ . Alors  $s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x | \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$ . Comme  $\beta$  est orthonormée,

$$R_s(x) = \langle s(x) | x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x | \varepsilon_i \rangle^2$$

**3.b** Soit  $x \in \mathcal{S}(0, 1)$ . Alors  $\|x\|^2 \sum_{i=1}^n \langle x | \varepsilon_i \rangle^2 = 1$ . Comme  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_1 \langle x | \varepsilon_i \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x | \varepsilon_i \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_n \langle x | \varepsilon_i \rangle^2$$

ou encore

$$\lambda_1 \leq R_s(x) \leq \lambda_n$$

**4** Notons  $s$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base  $\beta$  est  $S$ . On sait que  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et que  $\beta$  est orthonormée donc  $s \in \mathcal{S}(E)$ . De plus,  $\text{Sp}(s) = \text{Sp}(S) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ .

Comme  $\beta$  est orthonormée,  $s_{i,j} = \langle s(\varepsilon_j) | \varepsilon_i \rangle$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Comme la base  $\beta$  est normée,  $\varepsilon_i \in \mathcal{S}(0, 1)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . D'après la question précédente,  $R_s(\varepsilon_i) = \langle s(\varepsilon_i) | \varepsilon_i \rangle \in [\lambda_1, \lambda_n]$  ou encore

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n$$

**5** L'application  $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T M - I_n$  est polynomiale en les coefficients de  $M$  donc continue.

On peut aussi remarquer que, comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de dimension finie, l'application linéaire  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et l'application bilinéaire  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$  sont continues. Ainsi l'application  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T M$  est continue comme composée des applications continues  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (M^T, M)$  et  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ . L'application  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto I_n$  est constante donc continue. Par différence,  $\varphi$  est continue.

**6** On sait que les colonnes de  $A$  sont toutes de norme 1 i.e.

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1$$

Comme les  $a_{i,j}^2$  sont positifs, on en déduit que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, |a_{i,j}| \leq 1$$

**7** Le singleton  $\{0\}$  est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Ainsi  $O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{0\})$  est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

D'après la question précédente,  $O_n(\mathbb{R})$  est borné. Comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de dimension finie,  $O_n(\mathbb{R})$  est compact car fermé et borné.

**8** **8.a** D'après le théorème spectral, il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  tel que  $S = P\Delta P^T = P\Delta P^{-1}$ . Par propriété de la trace,

$$T(A) = \text{tr}(AS) = \text{tr}(AP\Delta P^{-1}) = \text{tr}(P^{-1}AP\Delta)$$

Comme  $O_n(\mathbb{R})$  est un groupe,  $B = P^{-1}AP \in O_n(\mathbb{R})$ .

**8.b**  $T$  est une forme linéaire sur l'espace vectoriel de dimension finie  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Ainsi  $T$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Comme  $O_n(\mathbb{R})$  est compact,  $T$  admet un maximum  $t$  sur  $O_n(\mathbb{R})$ .

**8.c** Si on note  $B = (b_{i,j})$ ,

$$T(A) = \text{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^n b_{i,i} \lambda_i$$

Mais comme  $B$  est orthogonale,  $b_{i,i} \leq 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Enfin, les  $\lambda_i$  sont positifs car  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  donc

$$T(A) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(S)$$

Ainsi  $\text{tr}(S)$  est un majorant de  $T$  sur  $O_n(\mathbb{R})$ . De plus,  $T(I_n) = \text{tr}(S)$  et  $I_n \in O_n(\mathbb{R})$  donc  $t = \text{tr}(S)$ .

**9** Comme  $S$  est diagonalisable,  $\det(S) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$  et  $\text{tr}(S) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ . Comme les  $\lambda_i$  sont positifs, d'après la question **1.b**,

$$\left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

ou encore

$$\det(S)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \text{tr}(S)$$

Par croissance de la fonction  $x \mapsto x^n$  sur  $\mathbb{R}_+$ , on obtient

$$\det(S) \leq \left( \frac{1}{n} \text{tr}(S) \right)^n$$

**10** Tout d'abord,

$$S_\alpha^T = D^T S^T D = D^T S D = S_\alpha$$

car  $S$  est symétrique. Ainsi  $S_\alpha$  est également symétrique.

Pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$$X^T S_\alpha X = (DX)^T S (DX) \geq 0$$

car  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . On en déduit que  $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

Enfin,

$$\text{tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 s_{i,i}$$

**11** Par propriété du déterminant

$$\det(S_\alpha) = \det(S) \det(D)^2 = \det(S) \prod_{i=1}^n \alpha_i^2 = \frac{\det(S)}{\prod_{i=1}^n s_{i,i}}$$

La question précédente montre que  $\text{tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 s_{i,i} = n$ . On applique l'inégalité de la question 9 à  $S_\alpha$  et on obtient

$$\frac{\det(S)}{\prod_{i=1}^n s_{i,i}} \leq 1$$

ou encore

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}$$

**12** Comme  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ,  $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$  et les coefficients diagonaux de  $S$  sont positifs d'après la question 4. Les coefficients diagonaux de  $S_\varepsilon$  sont alors strictement positifs puisque  $\varepsilon > 0$ . On peut alors appliquer la question précédente à  $S_\varepsilon$ .

$$\det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon)$$

Comme  $S_\varepsilon$  est encore diagonalisable de valeurs propres  $\lambda_1 + \varepsilon, \dots, \lambda_n + \varepsilon$ , ceci équivaut à

$$\prod_{i=1}^n (\lambda_i + \varepsilon) \leq \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon)$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient bien par passage à la limite

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}$$

**13** On vérifie aisément que  $B$  est symétrique car  $A$  l'est. Comme  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ,  $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ . De plus,  $B = \Omega^\top A \Omega = \Omega^{-1} A \Omega$  car  $\Omega$  est orthogonale. Ainsi  $B$  est semblable à  $A$  de sorte que  $\text{Sp}(B) = \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ . On en déduit que  $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . On sait que  $\det(\Omega) = 1$  car  $\Omega \in \text{O}_n(\mathbb{R})$  donc, par propriété du déterminant,

$$\det(B) = \det(\Omega)^2 \det(A) = 1$$

car  $A \in \mathcal{U}$ . Ainsi  $B \in \mathcal{U}$ .

Enfin, par propriété de la trace,

$$\text{tr}(AS) = \text{tr}(A\Omega\Delta\Omega^\top) = \text{tr}(\Omega^\top A\Omega\Delta) = \text{tr}(B\Delta)$$

**14** La question précédente montre l'inclusion  $\{\text{tr}(AS), A \in \mathcal{U}\} \subset \{\text{tr}(B\Delta), B \in \mathcal{U}\}$ .

Inversement, si on se donne  $B \in \mathcal{U}$  et si l'on pose  $A = \Omega B \Omega^\top$ , on vérifie que  $A \in \mathcal{U}$  et que  $\text{tr}(AS) = \text{tr}(B\Delta)$ , ce qui donne l'inclusion réciproque.

Par double inclusion,  $\{\text{tr}(AS), A \in \mathcal{U}\} = \{\text{tr}(B\Delta), B \in \mathcal{U}\}$ .

Comme  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ,  $\lambda_i > 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . D'après la question 4, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $b_{i,i} \geq \min \text{Sp}(B) > 0$  car  $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Ainsi

$$\forall B \in \mathcal{U}, \text{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i} > 0$$

L'ensemble  $\{\text{tr}(AS), A \in \mathcal{U}\} = \{\text{tr}(B\Delta), B \in \mathcal{U}\}$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et minorée : il admet donc une borne inférieure.

**15** On a montré à la question précédente que

$$\forall B \in \mathcal{U}, \text{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i}$$

et on a vu que les  $\lambda_i b_{i,i}$  étaient positifs. On peut donc appliquer la question 1.b pour affirmer que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i} \geq \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i} \right)^{1/n}$$

ou encore

$$\text{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i} \geq n \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} \left( \prod_{i=1}^n b_{i,i} \right)^{1/n}$$

**16** Comme  $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , on peut appliquer l'inégalité d'Hadamard :

$$\prod_{i=1}^n b_{i,i} \geq \det(B) = 1$$

puisque  $B \in \mathcal{U}$ . En combinant avec l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$$\mathrm{tr}(B\Delta) \geq n \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} = n \det(S)^{1/n}$$

**17** Il est clair que  $D \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . De plus,

$$\det(D) = \prod_{k=1}^n \mu_k = \frac{\det(S)}{\prod_{k=1}^n \lambda_k} = 1$$

donc  $D \in \mathcal{U}$ . Enfin,

$$\mathrm{tr}(D\Delta) = \sum_{k=1}^n \mu_k \lambda^k = n \det(S)^{1/n}$$

On en déduit que  $m = n \det(S)^{1/n}$  (cette borne inférieure est en fait un minimum).