Devoir à la maison n°09

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1.

L'objet de cet exercice est de prouver les solutions entières de l'équation :

$$x^2+y^2=z^2 \tag{E}$$

sont (à une permutation près de x et y) les triplets (x,y,z) de la forme :

$$x=d(u^2-v^2) \qquad y=2duv \qquad z=d(u^2+v^2)$$

où d,u,v sont des entiers.

1. S'assurer que les solutions avancées vérifient bien l'équation (E).

2. Soit (x,y,z) un triplet d'entiers solution de l'équation (E). On suppose x, y et z premiers entre eux dans leur ensemble et strictement positifs.

a. Montrer que x, y et z sont premiers entre eux deux à deux.

b. Montrer que x et y sont de parités distinctes. En déduire la parité de z.

3. On reprend les hypothèses de la question précédente et on suppose de plus x impair et y pair.

a. Montrer que le pgcd de $z+x$ et $z-x$ est 2.

b. Il existe donc $(a,b,c)\in(\mathbb{N}^*)^3$ tel que

$$y=2a \qquad z+x=2b \qquad z-x=2c$$

Montrer que b et c sont des carrés d'entiers naturels non nuls.

4. Conclure.

Exercice 2.

Soient $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$ et $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$.

1. Montrer que le système $(\mathscr{S})\begin{cases}x\equiv a[m]\\x\equiv b[n]\end{cases}$ d'inconnue $x\in\mathbb{Z}$ admet une solution *si et seulement si* $a\equiv b[m\wedge n]$.

2. On suppose que $a\equiv b[m\wedge n]$ et on note x_0 une solution particulière de $(\mathscr{S})$. Montrer que $(\mathscr{S}) \iff x\equiv x_0[m\vee n]$.

3. En déduire les solutions du système $\begin{cases}x\equiv 4[10]\\x\equiv 2[8]\end{cases}$.