

DEVOIR SURVEILLÉ N°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 L'application $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto \text{tr}(u)$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{L}(E)$. \mathcal{T} est donc un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$ en tant que noyau de cette forme linéaire non nulle.

2 Φ est bilinéaire par bilinéarité de la composition des endomorphismes. De plus, pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\Phi(v, u) = -\Phi(u, v)$ donc Φ est antisymétrique.

3 On sait que $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$. Ainsi pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $uP(u) - P(u)u = 0$ de sorte que $\mathbb{K}[u] \subset \text{Ker } \Phi_u$. A fortiori,

$$\text{vect}(\text{Id}, u, \dots, u^{n-1}) \subset \mathbb{K}[u] \subset \text{Ker } \Phi_u$$

Puisque u n'est pas une homothétie, la famille (Id, u) est libre. Ainsi

$$\dim \text{Ker } \Phi_u \geq \text{rg}(\text{Id}, u, \dots, u^{n-1}) \geq \text{rg}(\text{Id}, u) = 2$$

4 Soit $v \in \text{Ker } \Phi_u$. Alors v commute avec u . D'après le cours, tout sous-espace propre de u est alors stable par v .

5 Pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$,

$$\text{tr}(\Phi(u, v)) = \text{tr}(uv) - \text{tr}(vu) = 0$$

par propriété de la trace. Ainsi $\text{Im } \Phi \subset \mathcal{T}$.

Puisque $\text{tr}(\text{Id}) = n \neq 0$, $\text{Id} \notin \mathcal{T}$. A fortiori, $\text{Id} \notin \text{Im } \Phi$ i.e. il n'existe pas de couple $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $[u, v] = \text{Id}$. D'après le théorème du rang et la question 3,

$$\dim \text{Im } \Phi_u = \dim \mathcal{L}(E) - \dim \text{Ker } \Phi_u \leq n^2 - 2$$

Or \mathcal{T} est un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$ d'après la question 1 donc $\dim \mathcal{T} = n^2 - 1$. On ne peut donc pas avoir $\text{Im } \Phi_u = \mathcal{T}$.

6 6.a Supposons que u soit une homothétie. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \text{Id}$. Alors, pour tout $x \in E$, $(x, u(x)) = (x, \lambda x)$ est évidemment liée.

Supposons que pour tout $x \in E$, $(x, u(x))$ soit liée. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i + e_j) = \lambda(e_i + e_j)$. Mais on a également $u(e_i + e_j) = u(e_i) + u(e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$ d'où $\lambda_i = \lambda_j = \lambda$ par liberté de (e_i, e_j) . Finalement, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i) = \lambda e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque (e_1, \dots, e_n) est une base de E , $u = \lambda \text{Id}$ et u est une homothétie.

6.b Supposons que u soit une homothétie. Alors il est clair que pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v = v \circ u = \lambda v$ en notant λ le rapport de l'homothétie u . Ainsi $\text{Ker } \Phi_u = \mathcal{L}(E)$.

Réciproquement, supposons que $\text{Ker } \Phi_u = \mathcal{L}(E)$. Soit $x \in E$. Notons p un projecteur sur $\text{vect}(x)$. Alors $u(x) = u \circ p(x) = p \circ u(x) \in \text{vect}(x)$ donc $(x, u(x))$ est liée. D'après la question précédente, u est une homothétie.

7 7.a Notons

$$\mathcal{P}_k : \Phi_u^k(v) = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} u^{k-p} v u^p$$

Initialisation. $\Phi_u^0(v) = v$ et $\sum_{p=0}^0 (-1)^0 \binom{0}{p} u^{0-p} v u^p = \binom{0}{0} v = v$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité. Supposons \mathcal{P}_k vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
 \Phi_u^{k+1}(v) &= \Phi_u(\Phi_u^k(v)) \\
 &= u \left(\sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{k}{p} u^{k-p} v u^p \right) - \left(\sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{k}{p} u^{k-p} v u^p \right) u \\
 &= \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{k}{p} u^{k+1-p} v u^p + \sum_{p=0}^k (-1)^{p+1} \binom{k}{p} u^{k-p} v u^{p+1} \\
 &= \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{k}{p} u^{k+1-p} v u^p - \sum_{p=1}^{k+1} (-1)^p \binom{k}{p-1} u^{k+1-p} v u^p \quad \text{par changement d'indice} \\
 &= \sum_{p=0}^{k+1} (-1)^p \binom{k}{p} u^{k+1-p} v u^p - \sum_{p=0}^{k+1} (-1)^p \binom{k}{p-1} u^{k+1-p} v u^p \quad \text{car } \binom{k}{k+1} = \binom{k}{-1} = 0 \\
 &= \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^p \left(\binom{k}{p} + \binom{k}{p-1} \right) u^{k+1-p} v u^p \\
 &= \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^p \binom{k+1}{p} u^{k+1-p} v u^p \quad \text{d'après la relation du triangle de Pascal}
 \end{aligned}$$

Ainsi \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

Conclusion. Par récurrence, \mathcal{P}_k est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

7.b Supposons u nilpotent et notons q son indice de nilpotence. Alors, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$,

$$\Phi_u^{2q-1}(v) = \sum_{p=0}^{q-1} (-1)^p \binom{2q-1}{p} u^{2q-1-p} v u^p + \sum_{p=q}^{2q-1} (-1)^p \binom{2q-1}{p} u^{2q-1-p} v u^p$$

Si $p \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$, $2q-1-p \geq q$ et $u^{2q-1-p} = 0$ tandis que si $p \in \llbracket q, 2q-1 \rrbracket$, $u^p = 0$. On en déduit que

$$\forall v \in \mathcal{L}(E), \Phi_u^{2q-1}(v) = 0$$

i.e. $\Phi_u^{2q-1} = 0$ et Φ_u est nilpotent.

8 Supposons que u soit une homothétie de rapport λ . Alors $\text{tr}(u) = \lambda \text{tr}(\text{Id}) = n\lambda$. Puisque $\text{tr}(u) = 0$, $\lambda = 0$, puis $u = \lambda \text{Id}_E = 0$. Or on a supposé $u \neq 0$ donc u ne peut être une homothétie.

9 Il suffit d'appliquer **6.a**.

10 On pose $e_2 = u(e_1)$. Comme la famille (e_1, e_2) est libre, on peut la compléter en une base (e_1, e_2, \dots, e_n) de E . La matrice de u dans cette base est bien de la forme $\begin{pmatrix} 0 & X^T \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$ avec $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})^2$ et $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. On peut même

préciser que $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

11 11.a Le spectre de U étant fini, on peut choisir $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \text{Sp}(U)$. Alors $\text{Ker}(U - \alpha I_{n-1}) = \{0\}$ et $U - \alpha I_{n-1}$ est inversible.

11.b Un calcul par blocs donne

$$U'V' - V'U' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha R^T \\ US & UV \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & R^T U \\ \alpha S & VU \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha R^T - R^T U \\ US - \alpha S & UV - VU \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$A = U'V' - V'U' \iff \begin{cases} X^T = \alpha R^T - R^T U \\ Y = US - \alpha S \end{cases} \iff \begin{cases} X^T = -R^T (U - \alpha I_{n-1}) \\ Y = (U - \alpha I_{n-1})S \end{cases}$$

12 On a déjà montré à la question 5 que $\text{Im } \Phi \subset \mathcal{J}$. On va montrer l'inclusion réciproque par récurrence sur $n = \dim E$.
Initialisation. Supposons que $\dim E = 1$. Soit $u \in \mathcal{J}$. Comme $\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2 = 1$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \text{Id}$. Mais $\text{tr}(u) = \lambda = 0$ donc $u = 0$. On peut alors affirmer que $u = 0 = \Phi(0, 0) \in \text{Im } \Phi$ d'où l'inclusion $\text{Im } \Phi \subset \mathcal{J}$.

Hérédité. Supposons avoir prouvé l'inclusion souhaitée lorsque E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n - 1 \in \mathbb{N}^*$ et considérons maintenant un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n . Soit à nouveau $u \in \mathcal{J}$. Si u est une homothétie, on peut encore affirmer que $u = 0 = \Phi(0, 0) \in \text{Im } \Phi$. Sinon, la question 10 permet d'affirmer qu'il existe une base \mathcal{B} de

E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & X^T \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$. Quitte à raisonner en termes d'endomorphismes canoniquement associés,

l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer l'existence de $(U, V) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})^2$ tel que $A_1 = UV - VU$. On choisit alors $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $U - \alpha I_{n-1}$ soit inversible (cf. question 11.a) et on pose $R = -((U - \alpha I_{n-1})^{-1})^T X$, $S = (U - \alpha I_{n-1})^{-1} Y$,

$U' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $V' = \begin{pmatrix} 0 & R^T \\ S & V \end{pmatrix}$. On vérifie alors que $X^T = -R^T(U - \alpha I_{n-1})$ et $Y = (U - \alpha I_{n-1})S$. La question 11.b

montre alors que $A = U'V' - V'U'$. En notant u' et v' les endomorphismes de E dont les matrices dans la base \mathcal{B} sont U' et V' , on a donc $u = u'v' - v'u' = \Phi(u', v') \in \text{Im } \Phi$. D'où $\mathcal{J} \subset \text{Im } \Phi$.

Conclusion. On a prouvé par récurrence que $\mathcal{J} \subset \text{Im } \Phi$ quelle que soit la dimension $n \in \mathbb{N}^*$ de E .

Par double inclusion, $\text{Im } \Phi = \mathcal{J}$.

13 La famille $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est l'image réciproque de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par l'isomorphisme

$$\begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{cases}$$

On en déduit que $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

14 Soit $(i, j, k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$.

$$\forall m \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_{i,j}u_{k,l}(e_m) = u_{i,j}(\delta_{l,m}e_k) = \delta_{l,m}\delta_{j,k}e_i = \delta_{j,k}u_{i,l}(e_m)$$

On en déduit que

$$u_{i,j}u_{k,l} = \delta_{j,k}u_{i,l}$$

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Puisque $u = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l}u_{k,l}$,

$$\begin{aligned} \Phi_u(u_{i,j}) &= uu_{i,j} - u_{i,j}u \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l}u_{k,l}u_{i,j} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l}u_{i,j}u_{k,l} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l}\delta_{l,i}u_{k,j} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l}\delta_{j,k}u_{i,l} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{k,i}u_{k,j} - \sum_{l=1}^n a_{j,l}u_{i,l} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{k,i}u_{k,j} - \sum_{k=1}^n a_{j,k}u_{i,k} \end{aligned}$$

15 D'après la question précédente, les coefficients diagonaux de la matrice de Φ_u dans la base $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont les $a_{i,i} - a_{j,j}$ pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Ainsi

$$\text{tr}(\Phi_u) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,i} - a_{j,j} = n \sum_{i=1}^n a_{i,i} - n \sum_{j=1}^n a_{j,j} = 0$$

16.a Remarquons qu'avec les notations précédentes, $a_{i,j} = \delta_{i,j}\mu_i$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. D'après la question 14, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$\Phi_u(u_{i,j}) = \sum_{k=1}^n a_{k,i}u_{k,j} - \sum_{k=1}^n a_{j,k}u_{i,k} = \sum_{k=1}^n \delta_{k,i}\mu_k u_{k,j} - \sum_{k=1}^n \delta_{j,k}\mu_j u_{i,k} = \mu_i u_{i,j} - \mu_j u_{i,j} = (\mu_i - \mu_j)u_{i,j}$$

16.b D'après la question précédente et la question 13, la famille $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de vecteurs propres de Φ_u . On en déduit que Φ_u est diagonalisable et que

$$\text{Sp}(\Phi_u) = \{\mu_i - \mu_j, (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2\} = \{\lambda - \mu, (\lambda, \mu) \in \text{Sp}(u)^2\}$$

17 Soit $v \in \text{Ker } \Phi_u$. Alors d'après la question 4,

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, v(E_{\lambda_i}(u)) \subset E_{\lambda_i}(u)$$

Réciproquement, soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v(E_{\lambda_i}(u)) \subset E_{\lambda_i}(u)$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Fixons $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $x \in E_{\lambda_i}(u)$. D'une part, $vu(x) = v(\lambda_i x) = \lambda_i v(x)$ car $x \in E_{\lambda_i}(u)$ et d'autre part, $uv(x) = \lambda_i(x)$ car $v(x) \in E_{\lambda_i}(u)$. Ainsi $vu(x) = uv(x)$.

Comme u est diagonalisable, $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$ de sorte que $uv = vu$ i.e. $v \in \text{Ker } \Phi_u$.

18 Si $v \in \text{Ker } \Phi_u$, v laisse stable les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ d'après la question précédente et induit donc des endomorphismes $v_{E_{\lambda_i}(u)}$ de ces sous-espaces propres. On peut donc définir l'application

$$\Psi : \begin{cases} \text{Ker } \Phi_u & \longrightarrow \prod_{i=1}^p \mathcal{L}(E_{\lambda_i}(u)) \\ v & \longmapsto (v_{E_{\lambda_i}(u)})_{1 \leq i \leq p} \end{cases}$$

Cette application est clairement linéaire. Comme u est diagonalisable, $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$ et un théorème du cours affirme

alors que pour tout $(v_1, \dots, v_p) \in \prod_{i=1}^p \mathcal{L}(E_{\lambda_i}(u))$, il existe un unique $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $v_{E_{\lambda_i}(u)} = v_i$. De plus, d'après la question précédente, cet unique endomorphisme v appartient à $\text{Ker } \Phi_u$. L'application Ψ est donc bijective ; c'est un isomorphisme.

On en déduit que

$$\dim \text{Ker } \Phi_u = \dim \left(\prod_{i=1}^p \mathcal{L}(E_{\lambda_i}(u)) \right) = \sum_{i=1}^p \dim \mathcal{L}(E_{\lambda_i}(u)) = \sum_{i=1}^p m_i^2$$

D'après le théorème du rang

$$\text{rg } \Phi_u = \dim \mathcal{L}(E) - \dim \text{Ker } \Phi_u = n^2 - \sum_{i=1}^p m_i^2$$

19 Si u à n valeurs propres distinctes, alors $p = n$ et $m_i = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On en déduit que $\dim \text{Ker } \Phi_u = n$.

Comme u est diagonalisable, le polynôme minimal π_u de u est scindé à racines simples i.e. $\pi_u = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$.

Comme $\deg \pi_u = n$, on sait alors que $(\text{Id}, u, \dots, u^{n-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$. Notamment, $\mathbb{K}[u] = \text{vect}(\text{Id}, u, \dots, u^{n-1})$ est de dimension n . Or on a vu à la question 3 que $\text{vect}(\text{Id}, u, \dots, u^{n-1}) \subset \text{Ker } \Phi_u$. Comme $\text{rg}(\text{Id}, u, \dots, u^{n-1}) = \dim \text{Ker } \Phi_u = n$, $\text{Ker } \Phi_u = \text{vect}(\text{Id}, u, \dots, u^{n-1})$.

20 Comme u n'est pas une homothétie, la question 6.a donne l'existence de $e \in E$ tel que $(e, u(e))$ est libre. Or $\dim E = 2$ donc $(e, u(e))$ est une base de E .

Soit $v \in \text{Ker } \Phi_u$. Comme $(e, u(e))$ est une base de E , il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $v(e) = \alpha e + \beta u(e) = (\alpha \text{Id} + \beta u)(e)$. Mais comme u et v commutent, $v(u(e)) = u(v(e)) = \alpha u(e) + \beta u^2(e) = (\alpha \text{Id} + \beta u)(u(e))$. Ainsi les endomorphismes v et $\alpha \text{Id} + \beta u$ coïncident sur la base $(e, u(e))$ de E : ils sont égaux. On en déduit que $\text{Ker } \Phi_u \subset \text{vect}(\text{Id}, u)$. L'inclusion précédente ayant déjà été montrée, $\text{Ker } \Phi_u = \text{vect}(\text{Id}, u)$.

21 Comme u n'est pas une homothétie, la famille (Id, u) est libre. Ainsi, d'après la question précédente, $\dim \text{Ker } \Phi_u = \text{rg}(\text{Id}, u) = 2$. 0 est donc une valeur propre de u de multiplicité au moins égale à 2. On en déduit que le polynôme caractéristique de Φ_u est de la forme $X^2(X^2 + \alpha X + \beta)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Mais $\alpha = -\text{tr}(\Phi_u) = 0$ d'après la question 15 donc le polynôme caractéristique de Φ_u est $X^2(X^2 + \beta)$.

22 Si $\beta = 0$, la multiplicité de la valeur propre 0 vaut 4 tandis que la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 i.e. $\text{Ker } \Phi_u$ vaut 2. Φ_u n'est pas diagonalisable.

23 Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Puisque $\beta \neq 0$, $-\beta$ admet deux racines carrées complexes distinctes et opposés λ et $-\lambda$. Ainsi $\chi_{\Phi_u} = X^2(X - \lambda)(X + \lambda)$. Alors $\text{Sp}(\Phi_u) = \{0, \lambda, -\lambda\}$. On a vu que $\dim E_0(\Phi_u) = \dim \text{Ker } \Phi_u = 2$ et $\dim E_\lambda(\Phi_u) = \dim E_{-\lambda}(\Phi_u) = 1$ puisque λ et $-\lambda$ sont des racines simples du polynôme caractéristique de Φ_u . Finalement les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres associées : Φ_u est diagonalisable.

Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si $\beta > 0$, χ_{Φ_u} n'est pas scindé sur \mathbb{R} de sorte que Φ_u n'est pas diagonalisable. Si $\beta < 0$, on peut répéter le même raisonnement que dans le cas complexe : Φ_u est diagonalisable.

24 24.a Il suffit de se reporter à la question précédente.

24.b Puisque $\Phi_u(v) = \lambda v$, $uv - vu = \lambda v$. Si v était inversible, on aurait $u - vu v^{-1} = \lambda \text{Id}$ puis $\lambda \text{tr}(\text{Id}) = \text{tr}(u) - \text{tr}(vu v^{-1}) = 0$, ce qui est impossible puisque $\lambda \neq 0$. Ainsi v n'est pas inversible.

De même, $\lambda \text{tr}(v) = \text{tr}(uv) - \text{tr}(vu) = 0$ donc $\text{tr}(v) = 0$ puisque $\lambda \neq 0$. Comme $\dim E = 2$, $\chi_v = X^2 - \text{tr}(v)X + \det(v)$. Or $\text{tr}(v) = 0$ et $\det(v) = 0$ car v n'est pas inversible. Ainsi $\chi_v = X^2$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $v^2 = 0$.

24.c Si $(e, v(e))$ est une base de E , alors $v(e) \neq 0$ i.e. $e \notin \text{Ker } v$. Réciproquement soit $e \in E \setminus \text{Ker } v$ (ceci est possible car $v \neq 0$). Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\alpha e + \beta v(e) = 0$. En appliquant v , on obtient $\alpha v(e) = 0$ puisque $v^2 = 0$. Ainsi $\alpha = 0$ car $v(e) \neq 0$. On en déduit que $\beta v(e) = 0$ et donc $\beta = 0$ pour la même raison. Ainsi $(e, v(e))$ est libre et est donc une base de E puisque $\dim E = 2$. Finalement, $(e, v(e))$ est une base de E pour tout $e \in E \setminus \text{Ker } v$.

Comme $(e, v(e))$ est une base de E , il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $u(e) = \alpha e + \beta v(e)$. De plus,

$$u(v(e)) = uv(e) = vu(e) + \lambda v(e) = \alpha v(e) + \beta v^2(e) + \lambda v(e) = (\alpha + \lambda)v(e)$$

La matrice de u dans la base $(e, v(e))$ est alors $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha + \lambda \end{pmatrix}$, qui est bien triangulaire inférieure. On en déduit que $\chi_u = (X - \alpha)(X - (\alpha + \lambda))$. De plus, $\text{tr}(u) = \alpha + (\alpha + \lambda) = 2\alpha + \lambda$ de sorte que $\alpha = \frac{\text{tr}(u) - \lambda}{2}$ puis $\chi_u = \left(X - \frac{\text{tr}(u) - \lambda}{2}\right)\left(X - \frac{\text{tr}(u) + \lambda}{2}\right)$. On en déduit que $\text{Sp}(u) = \left\{\frac{\text{tr}(u) - \lambda}{2}, \frac{\text{tr}(u) + \lambda}{2}\right\}$.

24.d Puisque $\lambda \neq 0$, χ_u est simplement scindé donc u est diagonalisable.

25 Soit $i \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$. On sait que $\Phi_u(v_i) = \beta_i v_i$ i.e. $uv_i - v_i u = \beta_i v_i$.

$$u(v_i(x)) = \beta_i v_i(x) + v_i(u(x)) = \beta_i v_i(x) + v_i(\lambda x) = (\lambda + \beta_i)v_i(x)$$

26 L'application Ψ est clairement linéaire (évaluation). Soit $y \in E$. Comme $x \neq 0$, on peut compléter x en une base de E . On sait alors qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v(x) = y$ et prenant des valeurs arbitraires (par exemple nulles) en les autres vecteurs de la base. Ceci prouve que Ψ est surjective.

27 Ψ est une application linéaire surjective et $(v_i)_{1 \leq i \leq n^2}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ donc $(\Psi(v_i))_{1 \leq i \leq n^2} = (v_i(x))_{1 \leq i \leq n^2}$ est une famille génératrice de E . On peut extraire de cette famille génératrice une base de E . D'après la question **25**, les vecteurs de cette base sont des vecteurs propres de u , qui est donc diagonalisable.

28 **28.a** Puisque $v \in E_\lambda(\Phi_u)$, $uv - vu = \lambda v$. Soit $x \in \mathbb{K}$.

$$v(x \text{Id} - u) = xv - vu = xv + \lambda v - uv = ((x + \lambda) \text{Id} - u)v$$

28.b D'après la question précédente,

$$\det(v) \det(x \text{Id} - u) = \det((x + \lambda) \text{Id} - u) \det v$$

Ainsi si $\det(v) \neq 0$,

$$\det(x \text{Id} - u) = \det((x + \lambda) \text{Id} - u)$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{K}, P_u(x) = P_u(x + \lambda)$$

28.c On en déduit notamment que $P_u(k\lambda) = P_u(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k\lambda$ est une racine du polynôme $Q = P_u - P_u(0)$. Comme $\lambda \neq 0$, Q possède une infinité de racines. Par conséquent, $Q = 0$ puis P_u est constant. C'est absurde puisque $\deg P_u = n > 0$. On adonc montré par l'absurde que $\det(v) = 0$ i.e. v n'est pas inversible.

29 Tout d'abord, $\Phi_u(v) = \lambda v$. Supposons que $\Phi_u(v^k) = k\lambda v^k$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\Phi(v^{k+1}) = uv^{k+1} - v^{k+1}u = (uv^k - v^k u)v + v^k(uv - vu) = \Phi_u(v^k)v + v^k\Phi_u(v) = k\lambda v^k + \lambda v^{k+1} = (k+1)\lambda v^{k+1}$$

On a donc montré par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_u(v^k) = k\lambda v^k$.

Si $v^p \neq 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, v^p est un vecteur propre de Φ_u associé à la valeur propre $p\lambda$.

30 Si $v^p \neq 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, alors $p\lambda$ est valeur propre de Φ_u pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Comme $\lambda \neq 0$, Φ_u posséderait une infinité de valeurs propres, ce qui est exclu. On en déduit qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $v^p = 0$ i.e. v est nilpotent. On sait alors que l'indice de nilpotence de v est majoré par $n = \dim E$ donc $v^n = 0$.

31 Comme \mathcal{B} possède $n = \dim E$ éléments, il suffit de montrer que \mathcal{B} est libre pour affirmer que c'est une base de E . Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k v^k(e)$. Supposons qu'il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $\alpha_k = 0$. On peut alors définir $p = \min\{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \alpha_k \neq 0\}$. Alors

$$\sum_{k=p}^{n-1} \alpha_k v^k(e) = 0$$

En appliquant v^{n-1-p} à cette égalité, on obtient

$$\sum_{k=p}^{n-1} \alpha_k v^{n-1-p+k}(e) = 0$$

Pour $k \geq p+1$, $n-1-p+k \geq n$ donc $v^{n-1-p-k} = 0$ de sorte que l'égalité précédente donne $\alpha_p v^{n-1}(e) = 0$. Or $v^{n-1}(e) \neq 0$ donc $\alpha_p = 0$, ce qui est contredit la définition de p . On a donc montré par l'absurde que $\alpha_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Ainsi \mathcal{B} est libre et est donc une base de E .

La matrice de v dans la base \mathcal{B} est $V = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & 0 \\ & & I_{n-1} & \vdots \\ & & & 0 \end{array} \right).$

32 32.a Pour alléger les notations, posons $e_k = v^k(e)$. Ainsi $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_{n-1})$, $v(e_k) = e_{k+1}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ en convenant que $e_n = 0$. Par définition, $w_0(e_k) = k\lambda e_k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et également pour $k = n$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$(w_0 v - v w_0)(e_k) = w_0(v(e_k)) - v(w_0(e_k)) = w_0(e_{k+1}) - k\lambda v(e_k) = (k+1)\lambda e_{k+1} - k\lambda e_{k+1} = \lambda e_{k+1} = \lambda v(e_k)$$

Les endomorphismes $w_0 v - v w_0$ et λv coïncident sur la base \mathcal{B} : ils sont égaux. Ainsi $w_0 \in \mathcal{A}$.

32.b Soit $w \in \mathcal{L}(E)$. Alors $w \in \mathcal{A} \iff \Phi_v(w - w_0) = 0$. Ainsi $\mathcal{A} = w_0 + \text{Ker } \Phi_v$ est bien un sous-espace affine de direction $\text{Ker } \Phi_v$.

32.c Montrons que $(\text{Id}, v, \dots, v^{n-1})$ est une base de $\text{Ker } \Phi_v$.

Tout d'abord, on a déjà vu que $\text{vect}(\text{Id}, v, \dots, v^{n-1}) \subset \text{Ker } \Phi_v$. Comme v est nilpotent d'indice n , son polynôme minimal est X^n de sorte que $(\text{Id}, v, \dots, v^{n-1})$ est libre. Il reste donc seulement à montrer que $\text{Ker } \Phi_v \subset \text{vect}(\text{Id}, v, \dots, v^{n-1})$.

Soit $w \in \text{Ker } \Phi_v$. Comme $(e, v(e), \dots, v^{n-1}(e))$ est une base de E , il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $w(e) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k v^k(e)$.

Comme $w \in \text{Ker } \Phi_v$, w commute avec v et donc avec toutes les puissances de v . Notamment, pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$w(v^j(e)) = v^j(w(e)) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k v^{k+j}(e) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k v^k \right) (v^j(e))$$

Les endomorphismes w et $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k v^k$ coïncident sur la base \mathcal{B} : ils sont donc égaux. On en déduit que $\text{Ker } \Phi_v \subset \text{vect}(\text{Id}, v, \dots, v^{n-1})$.

On en conclut donc bien que $(\text{Id}, v, \dots, v^{n-1})$ est une base de $\text{Ker } \Phi_v$. Notamment, $\dim \text{Ker } \Phi_v = n$.

33 Comme $u \in \mathcal{A}$, il existe $w \in \text{Ker } \Phi_v$ tel que $u = w_0 + w$. D'après la question précédente, la matrice de W dans la base \mathcal{B} est de la forme

$$W = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k V^k = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix}$$

Comme la matrice de w_0 dans la base \mathcal{B} est $\text{diag}(0, \lambda, 2\lambda, \dots, (n-1)\lambda)$, la matrice de u dans la base \mathcal{B} est de la forme

$$U = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k V^k = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 + \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 + (n-1)\lambda \end{pmatrix}$$

34 Notons $\mathcal{B}' = (e_0, \dots, e_{n-1})$. Alors $u(e_k) = (\alpha + k\lambda)e_k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Dans ce qui suit, on convient que $e_n = 0$ et que $E_{\alpha+n\lambda}(u) = \{0\}$. Alors

$$\begin{aligned}
 v \in E_\lambda(\Phi_u) &\iff uv - vu = \lambda v \\
 &\iff \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, uv(e_k) - vu(e_k) = \lambda v(e_k) \\
 &\iff \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, uv(e_k) = (\alpha + (k+1)\lambda)v(e_k) \\
 &\iff \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, v(e_k) \in E_{\alpha+(k+1)\lambda}(u) \\
 &\iff \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, v(e_k) \in \text{vect}(e_{k+1})
 \end{aligned}$$

Ceci équivaut à $v(e_{n-1}) = 0$ et à l'existence pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, d'un scalaire $c_k \in \mathbb{K}$ tel que $v(e_k) = c_k e_{k+1}$. Les éléments de $E_{\Phi_u}(\lambda)$ sont donc les endomorphismes de E dont la matrice dans la base \mathcal{B}' est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c_0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & c_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre $E_{\Phi_u}(\lambda)$ est donc de dimension $n-1$.