

# PRIMITIVES ET INTÉGRALES

Les fonctions de ce chapitre sont des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes.

## 1 Primitives

### 1.1 Définition

#### Définition 1.1 Primitive

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . On appelle *primitive* de  $f$  sur  $I$  toute fonction définie sur  $I$  dont la dérivée vaut  $f$ .

#### Exemple 1.1

Une primitive de  $\tan$  sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  est  $t \mapsto -\ln(\cos t)$ .

**REMARQUE.** Une primitive est toujours dérivable donc continue. ■

#### Proposition 1.1 Linéarité

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  et  $F$  et  $G$  deux primitives respectivement de  $f$  et  $g$  sur  $I$ . Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Alors  $\lambda F + \mu G$  est une primitive de  $\lambda f + \mu g$ .

#### Exercice 1.1

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  de primitive  $F$  sur  $\mathbb{R}$ . Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Déterminer à l'aide de  $F$  une primitive de  $x \mapsto f(x+a)$  et de  $x \mapsto f(\lambda x)$ .

#### Proposition 1.2

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors les primitives de  $f$  sont les fonctions de la forme  $F + C$  où  $C$  est une constante.



**ATTENTION!** Il est important de considérer une fonction continue sur un *intervalle*. Les fonctions  $f_1$  :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln|x| \end{cases} \text{ et } f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \ln|x| - 1 & \text{si } x < 0 \\ \ln|x| + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad \text{admettent toutes deux pour dérivée la fonction inverse}$$

mais elles ne diffèrent pas d'une constante ( $f_2 - f_1 = -1$  sur  $\mathbb{R}_-^*$  et  $f_2 - f_1 = 1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ). En effet,  $\mathbb{R}^*$  n'est pas un intervalle mais la réunion de deux intervalles (d'où les deux constantes différentes).

#### Exercice 1.2

Déterminer des primitives de  $x \mapsto e^x \cos(2x)$  et  $x \mapsto e^x \sin(2x)$  par passage en complexes.

On admet pour l'instant le théorème suivant.

#### Théorème 1.1 Théorème fondamental de l'analyse

Soient  $f$  une fonction continue sur  $I$  et  $a \in I$ . Alors  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est dérivable sur  $I$  et  $F' = f$ .  
Autrement dit,  $F$  est l'unique primitive de  $f$  sur  $I$  s'annulant en  $a$ .



**ATTENTION!** Il ressort des deux résultats précédents qu'une fonction continue sur un intervalle admet toujours une infinité de primitives sur cet intervalle. On prendra donc garde à ne jamais écrire des phrases du type «Soit F la primitive de  $f$ » mais plutôt «Soit F *une* primitive de  $f$ ».

### Corollaire 1.1 Calcul d'intégrale

Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . Pour  $(a, b) \in I^2$

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

La quantité  $F(b) - F(a)$  se note souvent  $[F(t)]_{t=a}^{t=b}$ .

**REMARQUE.** On a en particulier  $\int_a^b C dt = C(b - a)$ . ■

### Exercice 1.3

**Banal**

Etablir la dérivabilité puis calculer la dérivée de la fonction  $\psi$  définie par

$$x \mapsto \int_{e^{-x}}^{e^x} \sqrt{1 + \ln^2(t)} dt.$$

### Exercice 1.4

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ .

### Exercice 1.5

Montrer que si  $f$  est une fonction continue et  $T$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ , alors pour tout  $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

## 1.2 Primitives usuelles

La connaissance des dérivées des fonctions usuelles permet de déterminer des primitives des fonctions usuelles.

**Primitives usuelles**

- Soit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Une primitive de  $x \mapsto x^\alpha$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est  $x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Une primitive de  $x \mapsto x^n$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ .
- Soit  $n \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1\}$ . Une primitive de  $x \mapsto x^n$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$  est  $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ .
- Une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est  $x \mapsto \ln x$  et une primitive de  $\frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}_-^*$  est  $x \mapsto \ln(-x)$ .
- Soit  $a \in \mathbb{C}^*$ . Une primitive de  $x \mapsto e^{ax}$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \frac{e^{ax}}{a}$ .
- Une primitive de  $x \mapsto \ln x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est  $x \mapsto x \ln x - x$ .
- Une primitive de  $x \mapsto \sin x$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto -\cos x$ .
- Une primitive de  $x \mapsto \cos x$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \sin x$ .
- Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . Une primitive de  $x \mapsto \tan x$  sur  $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$  est  $x \mapsto -\ln |\cos x|$ .
- Une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  sur  $] -1, 1[$  est  $x \mapsto \arcsin x$ .
- Une primitive de  $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  sur  $] -1, 1[$  est  $x \mapsto \arccos x$ .
- Une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \arctan x$ .
- Une primitive de  $x \mapsto \operatorname{sh} x$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \operatorname{ch} x$ .
- Une primitive de  $x \mapsto \operatorname{ch} x$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \operatorname{sh} x$ .
- Une primitive de  $x \mapsto \operatorname{th} x$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x)$ .

**REMARQUE.** Une primitive de  $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  sur  $] -1, 1[$  est également  $x \mapsto -\arcsin x$ . En effet, les fonctions  $\arccos$  et  $-\arcsin$  diffèrent d'une constante, à savoir  $\arccos = \frac{\pi}{2} - \arcsin$ . ■

**REMARQUE.**  $x \mapsto \ln|x|$  est une primitive de  $\frac{1}{x}$  aussi bien sur  $\mathbb{R}_+^*$  que sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

Dans le même ordre d'idée, si  $u$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  ne s'annulant pas sur un intervalle  $I$ , une primitive de  $\frac{u'}{u}$  sur  $I$  est  $x \mapsto \ln|u(x)|$ . ■

**Méthode****Calcul d'une primitive de  $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$  et de  $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$** 

Pour calculer une primitive de  $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$  ou  $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$ , on utilise le fait que ces fonctions sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de  $x \mapsto e^{ax}$  avec  $a = a + ib$ .

Une primitive de  $x \mapsto e^{ax}$  est  $x \mapsto \frac{e^{ax}}{a}$ . La partie réelle et la partie imaginaire de  $x \mapsto \frac{e^{ax}}{a}$  sont donc respectivement des primitives de  $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$  et de  $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$ .

**REMARQUE.** Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ . Une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}$  est  $x \mapsto \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$ .  
Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$  est  $x \mapsto \arcsin \frac{x}{a}$ . ■

**Primitive de**  $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  avec  $a \neq 0$ . On cherche à déterminer une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ .

- Si le trinôme  $aX^2 + bX + c$  admet deux racines réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$  (avec  $r_1 < r_2$ ), on détermine deux réels  $C_1$  et  $C_2$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\}, \frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{C_1}{x - r_1} + \frac{C_2}{x - r_2}$$

Une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$  sur  $] -\infty, r_1[, ]r_1, r_2[, ]r_2, +\infty[$  est alors

$$x \mapsto C_1 \ln|x - r_1| + C_2 \ln|x - r_2|$$

La valeur absolue assure la validité de cette primitive sur chacun des trois intervalles cités.

- Si le trinôme  $aX^2 + bX + c$  admet une racine double  $r$ , alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{r\}, \frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a(x - r)^2}$$

Une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$  sur  $] -\infty, r[$  et  $]r, +\infty[$  est tout simplement

$$x \mapsto -\frac{1}{a(x - r)}$$

- Si le trinôme  $aX^2 + bX + c$  n'admet pas de racine réelle, on le met sous forme canonique

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a[(x + \alpha)^2 + \beta^2]}$$

On a en fait  $\alpha = \frac{b}{2a}$  et  $\beta^2 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$  mais peu importe. Une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$  est alors

$$x \mapsto \frac{1}{a\beta} \arctan \frac{x + \alpha}{\beta}$$

**REMARQUE.** Il est *INUTILE* (et d'ailleurs impossible) de retenir ces résultats par coeur. Seuls les trois cas et les méthodes associées sont à connaître. ■

### Exercice 1.6

Déterminer des primitives de  $x \mapsto \frac{1}{2x^2 + 5x - 3}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{4x^2 + 4x + 1}$  et  $x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}$ .

### Méthode Vérification des primitives

Après avoir déterminé une primitive d'une fonction, on essaiera toujours de vérifier la validité de ses calculs en dérivant la primitive pour voir si on retrouve bien la fonction initiale.

## 2 Intégrales

### 2.1 Propriétés de l'intégrale

#### Proposition 2.1 Propriétés de l'intégrale

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  à valeurs réelles et  $(a, b, c) \in I^3$ .

**Linéarité** Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Alors  $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$ .

**Positivité de l'intégrale** Si  $a \leq b$  et si  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$ , alors  $\int_a^b f(t) dt \geq 0$ .

**Croissance de l'intégrale** Si  $a \leq b$  et si  $f \leq g$  sur  $[a, b]$ , alors  $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ .

**Relation de Chasles**  $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$



**ATTENTION !** Il faut prendre garde à l'ordre des bornes dès qu'on écrit des inégalités avec des intégrales. On essaiera toujours de se ramener au cas  $a \leq b$ .

**REMARQUE.** On rappelle que  $\int_a^a f(t) dt = 0$ .

On rappelle également que  $\int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$ , ce qui est par exemple une conséquence de la relation de Chasles.

■

**REMARQUE.** La variable d'intégration est muette (comme l'indice de sommation dans une somme), c'est-à-dire que  $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$ .

Dans le même registre, une intégrale ne dépend pas de sa variable de sommation mais seulement de ses bornes (et évidemment de la fonction intégrée). ■

#### Exercice 2.1

On pose  $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+e^t} dt$ . Déterminer le sens de variation et la limite de  $(I_n)$ .

#### Exercice 2.2

Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{e^t}{t+1} dt = +\infty$ .

#### Proposition 2.2 Inégalité triangulaire

Soient  $f$  une fonction continue sur  $I$  à valeurs réelles et  $(a, b) \in I^2$ . Si  $a \leq b$ , alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

**REMARQUE.** Si on pense à l'intégrale comme à une somme infinitésimale, ceci n'est que l'analogue de l'inégalité triangulaire pour les sommes. ■

### Exercice 2.3

On pose  $I_n = \int_0^1 \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt$ . Montrer que  $(I_n)$  converge vers 0.

### Exercice 2.4

Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{x^2} \frac{\sin(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}} dt = 0$ .

### Proposition 2.3

Soit  $f$  une fonction *continue* et de *signe constant* sur un intervalle  $[a, b]$  ( $a < b$ ) à valeurs réelles. Alors  $\int_a^b f(t) dt = 0$  si et seulement si  $f$  est nulle sur  $[a, b]$ .

**REMARQUE.** On sait qu'une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chacun des termes est nul. La proposition précédente est l'analogue de ce résultat pour les intégrales. ■

Par contraposition, on a le résultat suivant.

### Corollaire 2.1 Stricte positivité

Soient  $f$  une fonction *continue*, *positive* et *non constamment nulle* sur un intervalle  $[a, b]$  ( $a < b$ ). Alors  $\int_a^b f(t) dt > 0$ .

### Exercice 2.5

Montrer que  $\int_0^\pi \ln(1 + \sin t) dt > 0$ .

## 2.2 Cas des fonctions à valeurs complexes

### Définition 2.1 Intégrale d'une fonction à valeurs complexes

Soient  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  à valeurs complexes et  $(a, b) \in I^2$ . On pose

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$$

**REMARQUE.** On en déduit en particulier que

$$\operatorname{Re} \left( \int_a^b f(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt \quad \operatorname{Im} \left( \int_a^b f(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$$

■

Puisque des inégalités entre complexes n'ont pas de sens, seules les propriétés suivantes de l'intégrale subsistent.

**Proposition 2.4 Propriétés de l'intégrale complexe**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  à valeurs complexes et  $(a, b, c) \in I^3$ .

**Linéarité** Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Alors  $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$ .

**Inégalité triangulaire** Si  $a \leq b$ , alors  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ .

**Relation de Chasles**  $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$



**ATTENTION !** La positivité et la croissance de l'intégrale n'ont plus aucun sens pour des fonctions à valeurs complexes. Dans l'inégalité triangulaire, les valeurs absolues sont à remplacer par des modules.

### 3 Méthodes de calcul

**Définition 3.1 Fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$** 

Une fonction est dite de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle si elle est dérivable sur cet intervalle et si sa dérivée y est continue.

**Exemple 3.1**

arcsin est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, 1[$ .



**ATTENTION !** La condition de continuité n'est pas là pour décorer. On verra plus tard des exemples de fonctions dérivables à dérivées non continues.

#### 3.1 Intégration par parties

La propriété suivante n'est qu'une conséquence de la formule de dérivation d'un produit.

**Proposition 3.1 Intégration par parties**

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$ . Alors pour  $(a, b) \in I^2$

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

**Exercice 3.1**

Calculer  $\int_0^\pi t \cos t dt$ .

**Exercice 3.2**

1. Calculer une primitive de  $\ln$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Calculer une primitive de  $\arctan$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Calculer une primitive de  $\arcsin$  sur  $[-1, 1]$ .

**Exercice 3.3**

Calculer des primitives de  $x \mapsto e^x \cos(2x)$  et  $x \mapsto e^x \sin(2x)$  par double intégration par parties.

**Méthode ALPES**

Lorsqu'on décide d'intégrer par parties un produit, se pose souvent la question de savoir quelle fonction dériver et quelle fonction «primitiver». De manière générale, on dérive par ordre de priorité décroissante :

**A** les Arctangentes, les Arccosinus, les Arcsinus ;

**L** les Logarithmes ;

**P** les Polynômes ;

**E** les Exponentielles ;

**S** les Sinus, les coSinus, les tangentes.

**3.2 Changement de variable****Proposition 3.2 Changement de variable**

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . Soient  $\varphi$  une fonction de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\varphi(I)$ . Soit  $(a, b) \in I^2$ . Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du$$

**Méthode Changement de variable**

On dit qu'on effectue le changement de variable  $t = \varphi(u)$ . Comment alors se souvenir de la formule ?

- On remplace  $t$  par  $\varphi(u)$  dans la fonction à intégrer.
- $\frac{dt}{du} = \varphi'(u)$  donc  $dt = \varphi'(u) du$  et on remplace dans l'intégrale.
- $t$  doit varier entre  $\varphi(a)$  et  $\varphi(b)$  lorsque  $u$  varie entre  $a$  et  $b$ , ce qui nous donne les bornes de l'intégrale en  $u$ .

**Exemple 3.2**

Soit à calculer l'intégrale  $I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$ . On effectue le changement de variable  $t = \sin u$ .

- On a  $dt = \cos u du$ .
- Lorsque  $u$  varie entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ ,  $t$  varie bien entre  $-1$  et  $1$ .

On en déduit

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos u| \cos u du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2u) du = \frac{\pi}{2}$$



**Exercice 3.4**

Calculer par changement de variables une primitive de  $x \mapsto \arctan(e^x)e^x$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 3.5**

Soit  $f$  une fonction continue et paire sur un intervalle  $I$ .

- Montrer que si  $f$  est paire, alors pour tout  $a \in I$ ,

$$\int_{-a}^0 f(t) \, dt = \int_0^a f(t) \, dt \quad \text{et} \quad \int_{-a}^a f(t) \, dt = 2 \int_0^a f(t) \, dt$$

- Montrer que si  $f$  est impaire,

$$\int_{-a}^0 f(t) \, dt = - \int_0^a f(t) \, dt \quad \text{et} \quad \int_{-a}^a f(t) \, dt = 0$$