Espaces vectoriels

Exercice 1.

Vérifier que l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ muni des lois interne et externe suivantes

$$u \boxplus v = uv \quad \text{et} \quad \lambda \boxdot u = u^\lambda,$$

où u et v sont dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2.

L'axe réel dans $\mathbb{C}$ est-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$? du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

Exercice 3.

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les ensembles suivants,

$$F = \left\{(\lambda - 3\mu, 2\lambda + 3\mu, \lambda) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

et

$$G = \left\{(x, y, z) \in E \mid x + 2y = 0\right\}.$$

1. Prouver que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$.

Exercice 4.

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

1. $E_1 = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\right\}$;
2. $E_2 = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid u_n = \mathcal{O}\left(n^2\right)\right\}$;
3. $E_3 = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid u_n \sim \frac{1}{n}\right\}$;
4. $E_4 = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid \exists k \in \mathbb{R} \ , \ u_n \sim \frac{k}{n}\right\}$.

Exercice 5.

Parmi les parties suivantes de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, déterminer celles qui sont des sous-espaces vectoriels,

1. L'ensemble des fonctions telles que $f(1) = 0$;
2. L'ensemble des fonctions telles que $f(0) = 1$;
3. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$;
4. L'ensemble des fonctions monotones ;
5. L'ensemble des fonctions impaires ;
6. L'ensemble des fonctions 2π-périodiques.

Exercice 6.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X, Y deux parties de E. Prouver que

$$\operatorname{vect}(X \cap Y) \subset \operatorname{vect}(X) \cap \operatorname{vect}(Y).$$

Donner un exemple où cette inclusion est *stricte*.

Exercice 7.

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

1. $E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0, \text{ et } x + 3az = 0\right\}$;
2. $E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$;
3. $E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$;
4. $E_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \alpha y + 1 \geqslant 0\right\}$.

Exercice 8.

Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$;
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$;
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0, y = z\}$;
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$;
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy \geqslant 0\}$;
6. $E_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \geqslant 0\}$;
7. $E_7 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(1) = 0\}$;
8. $E_8 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 1\}$;
9. $E_9 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est croissante}\}$.

Exercice 9.

Montrer qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E n'est jamais l'union de deux sous espaces-vectoriels stricts (i.e. distincts de E).

Exercice 10.

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y+z=0$ et G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équations $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer la projection de (x,y,z) sur F (resp. G) parallélement à G (resp. F).

Exercice 11.

Soient $F_1,\dots,F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $F_1,\dots,F_p$ sont en somme directe *si et seulement si*

$$\forall k \in [\![2,p]\!],\ \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k = \{0_E\}$$

Exercice 12.

Soient $F_1,\dots,F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que $F_1+\dots+F_p=E$. Montrer qu'il existe des sous-espace vectoriels $G_1,\dots,G_p$ de E tels que $G_k \subset F_k$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ et $G_1 \oplus \dots \oplus G_p = E$.

Exercice 13.

On note E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites réelles de limite nulle et G l'ensemble des suites réelles constantes.

1. Montrer que E, F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 14.

Soient E l'ensemble des suites réelles constantes, F l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant $u_{n+1}+u_n=0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, G l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant $u_{n+2}+u_n=0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et enfin H l'ensemble des suites réelles périodiques de période 4.

1. Montrer que E, F, G, H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que E, F, G sont inclus dans H.
3. Montrer que $E \oplus F \oplus G = H$.

Exercice 15.

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(0)+f(1)=0\}$ et G l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 16.

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Quelles assertions parmi les suivantes sont vraies en général ?

1. $F \cap G \subset F+G$;
2. $F \cup G \subset F+G$;
3. $F \subset F+G$;
4. $F+F=F$;
5. $F \cup (F \cap G) \subset F+G$;
6. $F+G=G+F$.

Exercice 17.

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Que pensez-vous de la proposition suivante,

$$F+G=F \quad \textit{si et seulement si} \quad F \supset G\ ?$$

2. Que pensez-vous de la proposition suivante,

$$F+G=F+H \implies G=H\,?$$

Exercice 18.⋆

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que

$$F+H=G+H, \quad F \cap H = G \cap H,$$

et $F \subset G$. Prouver que $F=G$.

Exercice 19.⋆

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, P le sous-ensemble de E formé par les fonctions paires et I le sous-ensemble de E formé par les fonctions impaires.

1. Montrer que P et I sont deux sous-espaces supplémentaires dans E.
2. Pour tout $f \in E$, la projection du vecteur f sur P parallèlement à I est appelée *partie paire de* f. On définit de même la *partie impaire de* f. Calculer les parties paire et impaire des fonctions suivantes :le cosinus, le sinus, l'exponentielle, $f : x \mapsto x^4 + x$.

Exercice 20.★★

Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$, et $\mathcal{A}$ l'ensemble des éléments de E s'annulant en 1.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ est également un supplémentaire dans E du sous-espace suivant
$$\mathcal{N} = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}.$$
3. Calculer les projections sur $\mathcal{C}$ parallèlement à $\mathcal{A}$ puis à $\mathcal{N}$ d'une fonction $f \in E$.
4. Donner d'autres exemples de supplémentaires de $\mathcal{C}$ dans E.

Exercice 21.

On note $E = \mathbb{R}^3$ et
$$F = \{(x,y,z) \in E \mid x+y-z=0\}$$
et
$$G = \{(a-b, a+b, a-3b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Etablir que F et G sont des sev de E.
2. Déterminer $F \cap G$.
3. Prouver que $F+G=E$. La somme est-elle directe ?

Exercice 22.★★

Soient A, B et C trois sev d'un $\mathbb{K}$-ev E. On note
$$F = (A\cap B) + (A \cap C), \quad G = A \cap (B + (A\cap C))$$
et $H = A \cap (B+C)$.

1. Montrer que F et G sont des sev de H.
2. Etablir que $F=G$.
3. A-t-on toujours $F=G=H$?

Exercice 23.★★

Soient F, G, F' et G' quatre sev d'un $\mathbb{K}$-ev E tels que $F\cap G = F' \cap G'$. Etablir que
$$(F + (G\cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F.$$

Exercice 24.

On note E l'espace vectoriel réel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient $\mathcal{N}$ et $\mathcal{A}$ les sous-ensembles de E définis par,
$$\mathcal{A} = \{f \in E \mid f \text{ affine}\}$$
et
$$\mathcal{N} = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}.$$

1. Prouver que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}$ sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}$ sont supplémentaires dans E.
3. Déterminer la projection sur $\mathcal{A}$ parallèlement à $\mathcal{N}$ d'une fonction $f \in E$.

> **Remarque.** On rappelle qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est affine *si et seulement si* il existe deux réels a et b tels que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = at+b$.

Exercice 25.

Soit $\mathcal{F} = ((1,-2,1),(2,-3,1),(-1,3,-2))$.

1. Le vecteur $(2,1,3)$ est-il combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F}$?
2. Même question pour le vecteur $(2,5,-7)$.

Exercice 26.★★

Soit $E = \mathbb{R}^\mathbb{R}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$f_n : x \mapsto \cos^n(x) \quad \text{et} \quad g_n : x \mapsto \cos(nx).$$
Montrer que pour tout n positif,
$$\mathrm{vect}(f_k, 0 \leqslant k \leqslant n) = \mathrm{vect}(g_k, 0 \leqslant k \leqslant n).$$

Exercice 27.

Soient $a \in \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^3$ et
$$u = (1,-1,1), \quad v = (0,1,a).$$
Déterminer une condition *nécessaire et suffisante* portant sur a pour que $(1,1,2) \in \mathrm{vect}(u,v)$.