Séries et familles sommables

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Compléments sur les séries numériques

1.1 Comparaison à une série géométrique

Proposition 1.1 Règle de d'Alembert

Soit (a_n) une suite de **réels strictement positifs** (au moins à partir d'un certain rang).

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, alors $\sum a_n$ converge.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, alors $\sum a_n$ diverge grossièrement.

Exemple 1.1

La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{n!}{n^n}$ converge.

Remarque. On ne peut a priori pas conclure si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ ou si la suite de terme général $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'admet pas de limite.

Exemple 1.2

Posons $a_n = 1$ et $b_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1$ mais $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge tandis que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ converge.

Attention ! Il s'agit bien de **limites** dans l'énoncé de la règle de d'Alembert. Le fait d'avoir $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ou $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ne permet pas de conclure. En prenant $a_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ mais la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ diverge.

Corollaire 1.1

Soit (a_n) une suite de réels non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, alors $\sum a_n$ converge absolument.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, alors $\sum a_n$ diverge grossièrement.

1.2 Séries alternées

Proposition 1.2 Critère spécial des séries alternées

Soit (u_n) une suite monotone (à partir d'un certain rang) et de limite nulle. Alors la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Remarque. Ce critère est utile pour montrer la convergence de série non absolument convergent. Il serait par exemple ridicule d'invoquer ce résultat pour justifier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Il suffit en effet de constater que $\frac{(-1)^n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exemple 1.3

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Exemple 1.4

On souhaite étudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Bien entendu, $\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ converge car elle respecte le critère spécial des séries alternées. Mais on ne peut pas utiliser le théorème de comparaison car il ne s'agit pas là de séries à **termes positifs**.

Néanmoins, comme $\sin u \underset{u\to 0}{=} u + \mathcal{O}(u^3)$,

$$\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge car elle respecte le critère spécial des séries alternées et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ converge également. On en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge en tant que somme de deux séries convergentes.

Exercice 1.1

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Proposition 1.3 Majoration du reste d'une série alternée

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite monotone de limite nulle. On note R_n le reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geq n_0} (-1)^n u_n$ i.e. $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$. Alors pour tout $n \geq n_0 - 1$,

- R_n est du signe de $(-1)^{n+1} u_{n+1}$;
- $|\mathrm{R}_n| \leq |u_{n+1}|$.

Remarque. En français : le reste d'une série vérifiant le critère des séries alternées est du même signe que son premier terme et est majoré en valeur absolue par la valeur absolue de ce premier terme.

Exemple 1.5

Considérons la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ avec $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. D'après le critère spécial des séries alternées, cette série converge. Notons S sa somme et $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

- Alors $\mathrm{S} = \mathrm{R}_0$ donc S est du signe de u_1 et $|\mathrm{S}| \leq |u_1|$. On en déduit que $0 \leq \mathrm{S} \leq u_1 = 1$.
- On peut affiner l'encadrement. En effet, R_1 est du signe de u_2 et $|\mathrm{R}_1| \leq |u_2|$ donc $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \mathrm{R}_1 \leq 0$. Comme $\mathrm{S} = u_1 + \mathrm{R}_1$, $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \mathrm{S} \leq 1$.
- On peut encore aller plus loin. R_2 est du signe de u_3 et $|\mathrm{R}_2| \leq |u_3|$ donc $0 \leq \mathrm{R}_2 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Comme $\mathrm{S} = u_1 + u_2 + \mathrm{R}_2$, $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \mathrm{S} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

1.3 Comparaison série-intégrale

Proposition 1.4

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une application continue par morceaux et décroissante. Alors la série de terme général $\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ converge.

Exemple 1.6 Constante γ d'Euler

Si l'on considère l'application $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x}$, on peut montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
En effet, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) = \ln(n) - \ln(n-1) - \frac{1}{n}$$

La série $\sum \ln(n) - \ln(n-1) - \frac{1}{n}$ converge donc vers un réel C. En termes de sommes partielles,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \sum \ln(k) - \ln(k-1) - \frac{1}{k} = \mathrm{C}$$

On a alors le résultat voulu en posant $\gamma = 1 - \mathrm{C}$.

1.4 Sommation des relations de comparaison

Proposition 1.5

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques. On suppose de plus que (v_n) est **à termes positifs** à partir d'un certain rang.

Domination On suppose que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

Négligeabilité On suppose que $u_n = o(v_n)$.

- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

Equivalence On suppose que $u_n \sim v_n$.

- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.
- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge et $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

ATTENTION ! Il est essentiel que la suite de référence soit de signe constant à partir d'un certain rang.

REMARQUE. Dans les cas de convergence, les résultats restent vrais même si les sommes partielles débutent à un indice non nul.

Lemme de Césaro

Soit (u_n) est une suite numérique convergente de limite ℓ. Posons $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (suite des moyennes).

- Si $\ell \neq 0$, $u_n \sim \ell$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell$ diverge. Ainsi $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} \ell = (n+1)\ell$ i.e. $v_n \sim \ell$. Donc (v_n) converge vers ℓ.
- Si $\ell = 0$, $u_n = o(1)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1$ diverge. Ainsi $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right)$ i.e. $v_n = o(1)$. Donc (v_n) converge vers 0.

Dans les deux cas, (v_n) est de même limite que (u_n).

Exercice 1.2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Déterminer la limite de (u_n).
2. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la suite de terme général $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ converge vers un réel non nul.
3. En déduire un équivalent puis un développement asymptotique à deux termes de (u_n).

2 Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé

2.1 Définitions

Définition 2.1 Série

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. On appelle **série de terme général** u_n la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geq n_0}$ où

$$\forall n \geq n_0,\ \mathrm{S}_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

Cette série est noté $\sum_{n\geq n_0} u_n$ ou plus simplement $\sum u_n$ s'il n'y a pas ambiguïté sur le premier terme.
Pour $n \geq n_0$, S_n est appelée **somme partielle de rang** n de cette série.

Remarque. Une série est donc un cas particulier de suite.

Exemple 2.1

On appelle série télescopique toute série dont le terme général est de la forme $u_n = v_n - v_{n-1}$. La somme partielle de rang n de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est $v_n - v_0$.

2.2 Nature et somme d'une série

Définition 2.2 Convergence et divergence

On dit qu'une série à valeurs dans un espace vectoriel normé converge (resp. diverge) si la suite de ses sommes partielles converge (resp. diverge).

Remarque. En dimension infinie, la convergence/divergence peut dépendre de la norme, ce qui n'est pas le cas en dimension finie puisque toutes les normes sont alors équivalentes.

Remarque. La convergence d'une série ne dépend pas du premier rang i.e. les séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_1} u_n$ sont de même nature.

Définition 2.3 Somme d'une série

Si la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge, la limite de la suite des sommes partielles est appelée **somme** de la série et est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Remarque. On a donc $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

Attention ! La notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ n'a de sens que si la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge. Il faut donc prouver la convergence de la série **avant** d'employer cette notation.

Proposition 2.1 Lien suite/série

La série $\sum(u_n - u_{n-1})$ et la suite (u_n) sont de même nature (i.e. elles convergent toutes les deux ou elles divergent toutes les deux).

De plus, si (u_n) converge vers une limite l, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - u_{n-1} = l - u_{n_0-1}$.

2.3 Divergence grossière

Proposition 2.2

Soit $\sum u_n$ une série convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé. Alors la suite (u_n) converge vers 0.

Attention ! La réciproque est absolument fausse. Par exemple, la suite de terme général $\frac{1}{n}$ converge vers 0 tandis que la série harmonique diverge.

Définition 2.4 Divergence grossière

Une série $\sum u_n$ est dite **grossièrement divergente** lorsque la suite (u_n) ne converge pas vers 0.

Exemple 2.2

Si $|q| \geq 1$, la série $\sum q^n$ diverge grossièrement.

La série $\sum \frac{1}{n}$ ne diverge pas grossièrement.

2.4 Reste d'une série convergente

Définition 2.5 Reste d'une série convergente

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé. Pour tout $n \geq n_0$, la série $\sum_{k \geq n+1} u_k$ est convergente et on appelle sa somme le **reste de rang** n de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$. Autrement dit, le reste de rang n de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Proposition 2.3

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé. Alors pour tout $n \geq n_0$

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Remarque. Si on note S_n la somme partielle de rang n, R_n le reste de rang n et S la somme de la série, on a donc $S_n + R_n = S$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 2.3

Lorsque $|q| < 1$, le reste de rang n de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ est $\frac{q^{n+1}}{1-q}$.

Corollaire 2.1

La suite des restes d'une série convergente converge vers 0.

2.5 Opérations sur les séries

La proposition suivante n'est qu'une conséquence de la linéarité de la limite.

Proposition 2.4 Linéarité de la somme

Soient $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ deux séries convergentes à valeurs dans un espace vectoriel normé et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors la série $\sum_{n\geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et

$$\sum_{n\geq n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n\geq n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n\geq n_0}^{+\infty} v_n$$

Remarque. En termes plus savants, les séries numériques convergentes forment un espace vectoriel et l'application qui à une série convergente associe sa somme est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Attention ! La réciproque est fausse en général. Par exemple, si $\sum (u_n + v_n)$ converge, on ne peut rien dire de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ (prendre par exemple, $u_n = -v_n = 2^n$).

On évitera à tout prix d'écrire des égalités du type $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ **avant** d'avoir prouvé la convergence des séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$.

2.6 Absolue convergence

Définition 2.6 Absolue convergence

Une série $\sum u_n$ à valeurs dans un espace vectoriel normé est dite **absolument convergente** si $\sum \|u_n\|$ converge.

Remarque. A nouveau, en dimension inifine, l'absolue convergence peut dépendre de la norme.

Exemple 2.4

On munit $\mathbb{R}[X]$ des normes $N : P \mapsto \max_{t\in[0,1]} |P(t)|$ et $N' : P \mapsto \int_0^1 |P(t)| \, dt$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{X^n}{n}$ converge absolument pour N' mais pas pour N. En effet, $N(X^n/n) = \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge tandis que $N'(X^n/n) = \frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

Théorème 2.1

Une série absolument convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé de **dimension finie** est convergente. Dans ce cas, $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$.

Attention ! La réciproque est fausse. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge tandis que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Exemple 2.5

Si $\|.\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ vérifie $\|\mathrm{A}\| < 1$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}^n$ est absolument convergente, $\mathrm{I}_p - \mathrm{A}$ est inversible et $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}^n = (\mathrm{I}_p - \mathrm{A})^{-1}$.

Exemple 2.6

Si $\|.\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ et si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ vérifie $\|u\| < 1$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u^n$ est absolument convergente, $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - u$ est inversible et $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n = (\mathrm{Id}_\mathrm{E} - u)^{-1}$.

Attention ! Le fait que l'espace vectoriel normé considéré soit de **dimension finie** est important. Si ce n'est pas le cas, une série peut converger absolument sans être convergente.

Exemple 2.7

Munissons $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de la norme

$$\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \mapsto \|\mathrm{P}\| = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

Puisque $\left\|\frac{\mathrm{X}^n}{(n+1)^2}\right\| = \frac{1}{(n+1)^2}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathrm{X}^n}{(n+1)^2}$ converge absolument. Supposons qu'elle converge vers un polynôme $\mathrm{P} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \mathrm{X}^p$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|\mathrm{P} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{X}^k}{(k+1)^2}\right\| = 0$$

Fixons $p \in \mathbb{N}$. Par définition de la norme $\|\cdot\|$, pour tout $n \geq p$

$$\left|a_p - \frac{1}{(p+1)^2}\right| \leq \left\|\mathrm{P} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{X}^k}{(k+1)^2}\right\|$$

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $a_p = \frac{1}{(p+1)^2}$. Par conséquent, la suite (a_p) n'est pas presque nulle, ce qui est impossible car P est un polynôme.

3 Familles sommables

3.1 Ensembles dénombrables

Définition 3.1 Ensemble dénombrable

Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Proposition 3.1

Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Exemple 3.1

L'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs sont dénombrables.

Proposition 3.2

Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement si il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Exercice 3.1

Soit A un ensemble. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) A est dénombrable ;

(ii) il existe une injection de A dans un ensemble dénombrable ;

(iii) il existe une surjection d'un ensemble dénombrable sur A.

Proposition 3.3 Opération sur les ensembles dénombrables

- Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Corollaire 3.1

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Proposition 3.4

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

3.2 Familles sommables

Définition 3.2 Famille sommable de réels positifs

Soit J un ensemble **dénombrable** et $(u_j)_{j\in\mathrm{J}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathrm{J}}$ une famille de réels **positifs**. Notons $\mathcal{P}_f(\mathrm{J})$ l'ensemble des parties finies de J.
On dit que la famille $(u_j)_{j\in\mathrm{J}}$ est **sommable** si l'ensemble $\left\{\sum_{j\in\mathrm{K}} u_j,\ \mathrm{K}\in\mathcal{P}_f(\mathrm{J})\right\}$ est majoré. Dans ce cas, définit la somme de la famille $(u_j)_{j\in\mathrm{J}}$ par

$$\sum_{j\in\mathrm{J}} u_j = \sup\left\{\sum_{j\in\mathrm{K}} u_j,\ \mathrm{K}\in\mathcal{P}_f(\mathrm{J})\right\}$$

Remarque. Autrement dit, une famille est sommable si les sommes de ses sous-familles finies sont majorées.

Remarque. Toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.

Exemple 3.2

Soit $q\in[0,1[$. La famille $\left(q^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. En effet, si J est une partie finie de $\mathbb{Z}$, il existe $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$ tel que $\mathrm{J}\subset[\![-\mathrm{N},\mathrm{N}]\!]$. Alors

$$\sum_{n\in\mathrm{J}} q^{|n|} \leq \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} q^{|n|} = 1+2q\frac{1-q^{\mathrm{N}}}{1-q} \leq 1+\frac{2q}{1-q} = \frac{1+q}{1-q}$$

La somme de la famille $\left(q^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est $\frac{1+q}{1-q}$ puisque

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} q^{|n|} = \frac{1+q}{1-q}$$

Exemple 3.3

La famille $\left(\frac{1}{pq}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ n'est pas sommable. En effet, posons $\mathrm{J}_\mathrm{N} = [\![1,\mathrm{N}]\!]^2$ pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum_{(p,q)\in\mathrm{J}_\mathrm{N}} \frac{1}{pq} = \left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n}\right)^2 \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

puisque la série harmonique diverge vers $+\infty$.

Définition 3.3 Famille sommable de réels

Soient J un ensemble **dénombrable** et $(u_j)_{j\in\mathrm{J}} \in \mathbb{R}^{\mathrm{J}}$ une famille de réels. On dit que la famille $(u_j)_{j\in\mathrm{J}}$ est sommable si la famille $(|u_j|)_{j\in\mathrm{J}}$ l'est.

Rappel Parties positive et négative d'un réel

Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $x^+ = \max(0,x)$ et $x^- = \max(0,-x)$. Alors $x = x^- x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Proposition 3.5

La famille $(u_j)_{j\in\mathrm{J}} \in \mathbb{R}^{\mathrm{J}}$ est sommable si et seulement si les familles $(u_j^+)_{j\in\mathrm{J}}$ et $(u_j^-)_{j\in\mathrm{J}}$ sont sommables.

Définition 3.4 Somme d'une famille de réels

Soit $(u_j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^J$ une famille sommable. On définit la somme de la famille $(u_j)_{j\in J}$ en posant

$$\sum_{j\in J} u_j = \sum_{j\in J} u_j^+ - \sum_{j\in J} u_j^-$$

Définition 3.5 Famille sommable de complexes

Soient J un ensemble **dénombrable** et $(u_j)_{j\in J} \in \mathbb{C}^J$ une famille de complexes. On dit que la famille $(u_j)_{j\in J}$ est sommable si la famille $(|u_j|)_{j\in J}$ l'est.

Proposition 3.6

La famille $(u_j)_{j\in J} \in \mathbb{C}^J$ est sommable si et seulement si les familles $(\mathrm{Re}(u_j))_{j\in J}$ et $(\mathrm{Im}(u_j))_{j\in J}$ sont sommables.

Définition 3.6 Somme d'une famille de complexes

Soit $(u_j)_{j\in J} \in \mathbb{C}^J$ une famille sommable. On définit la somme de la famille $(u_j)_{j\in J}$ en posant

$$\sum_{j\in J} u_j = \sum_{j\in J} \mathrm{Re}(u_j) + i \sum_{j\in J} \mathrm{Im}(u_j)$$

Exemple 3.4

Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. Alors la famille $\left(q^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable de somme $\frac{1+q}{1-q}$.

Proposition 3.7 Linéarité de la somme

Soient J un ensemble dénombrable ainsi que $(u_j)_{j\in J}$ et $(v_j)_{j\in J}$ deux familles de complexes. Si les familles $(u_j)_{j\in J}$ et $(v_j)_{j\in J}$ sont sommables, alors pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$,

- la famille $(\lambda u_j + \mu v_j)_{j\in J}$ est sommable ;
- $\displaystyle\sum_{j\in J} \lambda u_j + \mu v_j = \lambda \sum_{j\in I} v_j + \mu \sum_{j\in J} v_j$.

Proposition 3.8 Lien entre série et famille sommable

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique. La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument. Dans ce cas, la somme de la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Remarque. Dans le cadre des séries, la notation $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ peut être ambiguë puisqu'elle peut donc désigner à la fois une série (i.e. la suite des sommes partielles) et la somme de la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 3.9 Sommation par paquets

Soient $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition d'un ensemble dénombrable J et $(u_j)_{j\in\mathrm{J}} \in \mathbb{K}^{\mathrm{J}}$. Alors la famille $(u_j)_{j\in\mathrm{J}}$ est sommable si et seulement si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_j)_{j\in\mathrm{J}_n}$ est sommable ;
- la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j\in\mathrm{J}_n} |u_j|\right)$ converge ;

Dans ce cas,

- la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j\in\mathrm{J}_n} u_j\right)$ converge ;
- $\sum_{j\in\mathrm{J}} u_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j\in\mathrm{J}_n} u_j\right)$.

Exemple 3.5 Produit de deux familles sommables

Soient $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(v_j)_{j\in\mathrm{J}}$ deux familles sommables où I et J sont deux ensembles dénombrables. Il existe donc une bijection φ de $\mathbb{N}$ dans I. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{J}_n = \{\varphi(n)\} \times \mathrm{J}$.

- On vérifie que $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i v_j)_{(i,j)\in\mathrm{J}_n}$ est sommable puisque la famille $(u_{\varphi(n)} v_j)_{j\in\mathrm{J}}$ l'est et
$$\mathrm{S}_n = \sum_{(i,j)\in\mathrm{J}_n} |u_i v_j| = |u_{\varphi(n)}| \sum_{j\in\mathrm{J}} |v_j| = \mathrm{S}|u_{\varphi(n)}|$$
en posant $\mathrm{S} = |\sum_{j\in\mathrm{J}} |v_j|$.
- La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{S}_n$ converge car la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_{\varphi(n)}|$ converge.

Le théorème de sommation par paquets permet alors d'affirmer que la famille $(u_i v_j)_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ est sommable. De plus,
$$\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} u_i v_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{(i,j)\in\mathrm{J}_n} u_i v_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j\in\mathrm{J}} u_{\varphi(n)} v_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j\in\mathrm{J}} v_j\right) u_{\varphi(n)} = \left(\sum_{j\in\mathrm{J}} v_j\right) \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = \left(\sum_{j\in\mathrm{J}} v_j\right)\left(\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i\right)$$

Remarque. Par récurrence, le résultat précédent s'étend à un produit de plus de deux familles sommables.

Exemple 3.6

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. On souhaite montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1-z}$$

La famille $\left(\frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable puisque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$ converge absolument (en utilisant la règle de d'Alembert, par exemple).
Fixons $n \in \mathbb{N}$. En faisant intervenir une série géométrique,

$$\frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose alors $\mathrm{J}_n = \{2^n(2k+1),\ k \in \mathbb{N}\}$. En partitionnant $\mathbb{N}^*$ suivant la valuation 2-adique, on montre que $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^*$. Le théorème de sommation par paquets permet alors d'affirmer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)} = \sum_{j=1}^{+\infty} z^j$$

Ce qui peut encore s'écrire d'après ce qui précède et en reconnaissant dans le second membre la somme d'une série géométrique :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1-z}$$

Proposition 3.10 Invariance par permutation des indices

Soient J un ensemble dénombrable, $(u_j)_{j\in\mathrm{J}} \in \mathbb{K}^\mathrm{J}$ et φ une permutation de J. Alors $(u_j)_{j\in\mathrm{J}}$ est sommable si et seulement si $(u_{\varphi(j)})_{j\in\mathrm{J}}$ l'est également et, dans ce cas,

$$\sum_{j\in\mathrm{J}} u_{\varphi(j)} = \sum_{j\in\mathrm{J}} u_j$$

Attention ! Dans le cadre des séries, cela ne veut pas dire que la somme d'une série convergente est invariante par permutation des indices. Considérons la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. On montre facilement que cette série converge vers $\ln 2$. Considérons la permutation de φ de $\mathbb{N}^*$ telle que $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 2$, $\varphi(3) = 4$, $\varphi(4) = 3$, $\varphi(5) = 6$, $\varphi(6) = 8$, $\varphi(7) = 5$, …(un impair, deux pairs, un impair, deux pairs, …).

3.3 Séries doubles

Proposition 3.11 Interversion de sommes

Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^2}$. La famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{m\in\mathbb{N}} |a_{m,n}|$ converge ;
- la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |a_{m,n}| \right)$ converge.

Dans ce cas, on a la relation suivante dans laquelle la convergence des différentes séries est assurée :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}$$

Attention ! On ne peut pas toujours permuter l'ordre de sommation. Par exemple, en prenant

$$a_{p,q} = \frac{2p+1}{p+q+2} - \frac{p}{p+q+1} - \frac{p+1}{p+q+3}$$

On obtient

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = 1$$

Définition 3.7 Produit de Cauchy

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{l=0}^{n} a_{n-k} b_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 3.12

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ deux séries numériques **absolument convergentes**. Alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ est une série absolument convergente. De plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

Exemple 3.7

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{n!}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{b^n}{n!}$ sont absolument convergentes de sommes respectives e^a et e^b. On vérifie facilement que leur produit de Cauchy est $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(a+b)^n}{n!}$. On en déduit que $e^{a+b} = e^a e^b$.

4 Exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice

Définition 4.1 Exponentielle d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie** et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u^n}{n!}$ converge absolument. Sa somme est appelée **exponentielle** de u et est notée e^u ou $\exp(u)$.

Remarque. L'exponentielle de l'endomrophisme nul de $\mathcal{L}(E)$ est Id_E.

Définition 4.2 Exponentielle d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ converge absolument. Sa somme est appelée **exponentielle** de A et est notée e^A ou $\exp(A)$.

Remarque. L'exponentielle de la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice identité I_n.

Remarque. Si N est une matrice **nilpotente** d'indice d. Alors

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{N^k}{k!}$$

Exercice 4.1 Exponentielle d'une matrice diagonale

Montrer que l'exponentielle d'une matrice diagonale D est une matrice diagonale et que les coefficients diagonaux de exp(D) sont les exponentielles des coefficients diagonaux de D.

Exercice 4.2 Exponentielle d'une matrice triangulaire

Montrer que l'exponentielle d'une matrice triangulaire supérieure / inférieure T est une matrice triangulaire supérieure / inférieure et que les coefficients diagonaux de exp(T) sont les exponentielles des coefficients diagonaux de T.

Exercice 4.3 Exponentielle et similitude

Soit $(A, B, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \times GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Montrer que $\exp(B) = P^{-1}\exp(A)P$.

Exercice 4.4

Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\exp(M) = P(M)$. On pourra au choix utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange ou montrer que $\mathbb{K}[M]$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Méthode **Calcul de l'exponentielle d'une matrice diagonalisable**

Pour calculer l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut chercher, **si possible**, à la diagonaliser. En effet, si $A = PDP^{-1}$, alors $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$ et l'exponentielle d'une matrice diagonale est facile à calculer.

Exemple 4.1 Exponentielle d'une matrice diagonalisable

On souhaite calculer l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = (X-1)(X-4)+2 = X^2-5X+6 = (X-2)(X-3)$$

Comme χ_A est scindé à racines simples, χ_A est diagonalisable. De plus, $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 3\}$ et les sous-espaces propres sont

$$E_2(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \qquad E_3(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. De plus,

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\,\mathrm{com}(P)^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalement

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^2-e^3 & e^2-e^3 \\ 2e^3-2e^2 & 2e^3-e^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.5

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$. Montrer de deux manières différentes que $\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Proposition 4.1 Exponentielle d'une somme

- Soient a et b deux endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ qui **commutent**. Alors $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.
- Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui **commutent**. Alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Remarque. On en déduit notamment que si A et B commutent, exp(A) et exp(B) commutent également.

Attention ! L'hypothèse de commutativité est essentielle. Par exemple, si l'on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient aisément $\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ (A est diagonale) et $\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B est nilpotente). En posant $C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on s'aperçoit facilement que $C^n = C$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $\exp(C) = \begin{pmatrix} 1 & e-1 \\ 0 & e \end{pmatrix}$. On vérifie alors facilement que $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$.

Exemple 4.2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $A = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque en particulier que N est **nilpotente**. Comme I_3 et N commutent, $\exp(A) = \exp(I_3)\exp(N)$. Or $\exp(I_3) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ et $\exp(N) = I_3 + N + \frac{N^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que $\exp(A) = \begin{pmatrix} e & e & e/2 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

Décomposition de Dunford et exponentielle

Un théorème hors-programme affirme que pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable, il existe un endomorphisme diagonalisable d et un endomorphisme nilpotent n qui **commutent** tels que $u = d + n$. Cette écriture s'appelle la **décomposition** de Dunford de u. On a bien évidemment un énoncé similaire pour les matrices.
Si l'on dispose d'une décomposition de Dunford $u = d + n$, alors $\exp(u) = \exp(d)\exp(n)$ et les exponentielles d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent sont simples à calculer.

Exemple 4.3 Exponentielle d'une matrice trigonalisable

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 1 \\ -2 & X-1 & 2 \\ -3 & 1 & X+2 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ 0 & X-1 & 2 \\ X-1 & 1 & X+2 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3-L_1}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ 0 & X-1 & 2 \\ 0 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1)$$

Comme χ_A est scindé, A est trigonalisable. De plus, $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$ et les sous-espaces propres sont

$$E_{-1}(A) = \mathrm{vect}(C_1) \quad \text{avec} \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad E_1(A) = \mathrm{vect}(C_2) \quad \text{avec} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notamment, A n'est pas diagonalisable. On cherche alors C_3 vérifiant $AC_3 = C_3 + C_2$ et on trouve par exemple $C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $A = PTP^{-1}$ en posant $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que $\exp(A) = P\exp(T)P^{-1}$.

Or, d'une part, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et, d'autre part, $T = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. D et N commutent de sorte que

$$\exp(T) = \exp(D)\exp(N) = \exp(D)(I_3 + N) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

Enfin, on trouve

$$\exp(A) = P\exp(T)P^{-1} = \begin{pmatrix} e - e^{-1} & -e & e^{-1} \\ e - e^{-1} & e & e^{-1} - e \\ e - 2e^{-1} & -e & 2e^{-1} \end{pmatrix}$$

Corollaire 4.1 Exponentielle et inversibilité

- Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\exp(a) \in GL(E)$ et $\exp(a)^{-1} = \exp(-a)$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Exercice 4.6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det(\exp(A)) > 0$.
2. On suppose A **antisymétrique**. Montrer que $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4.7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(A) = e^{\operatorname{tr}(A)}$.