Espaces vectoriels de dimension finie

1 Familles de vecteurs

1.1 Opérations sur une famille engendrant un sous-espace vectoriel

Lemme 1.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A et B deux parties de E. Alors

$$\operatorname{vect}(A) = \operatorname{vect}(B) \iff A \subset \operatorname{vect}(B) \text{ ET } B \subset \operatorname{vect}(A)$$

Proposition 1.1

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Alors $\operatorname{vect}(u_i)_{i\in I}$ n'est pas modifié si on effectue les opérations suivantes sur la famille $(u_i)_{i\in I}$:

(i) permutation des u_i ;

(ii) multiplication de l'un des u_i par un scalaire non nul ;

(iii) ajout à l'un des u_i une combinaison linéaire des autres vecteurs ;

(iv) suppression d'un u_i combinaison linéaire des autres vecteurs (notamment les u_i nuls) ;

(v) adjonction d'un vecteur combinaison linéaire des u_i.

Définition 1.1 Pivot de Gauss

Les opérations (i), (ii), (iii) de la proposition précédente seront appelées opérations du pivot de Gauss.

Exercice 1.1

Soient $a = (1, 2, 1)$, $b = (1, 3, 2)$, $c = (1, 1, 0)$ et $d = (3, 8, 5)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\operatorname{vect}(a, b) = \operatorname{vect}(c, d)$.

1.2 Familles génératrices

Définition 1.2 Famille génératrice

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_i)_{i\in I} \in E^I$. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une *famille génératrice* de E ou encore qu'elle *engendre* E si tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des u_i, autrement dit si $\operatorname{vect}(u_i)_{i\in I} = E$.

Remarque. L'espace vectoriel $\{0\}$ admet la famille vide pour famille génératrice puisqu'on a vu que $\operatorname{vect}(\varnothing) = \{0\}$. ■

Exemple 1.1

Trois vecteurs non coplanaires de l'espace engendre l'espace vectoriel.

Exemple 1.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0 \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Alors $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ engendre $\mathbb{K}^n$.

Exemple 1.3

La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.
La famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 1.2

Une famille génératrice reste génératrice si :

(i) on effectue les opérations du pivot de Gauss ;

(ii) on lui ajoute un vecteur (i.e. une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice) ;

(iii) on lui enlève un vecteur qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille (notamment un vecteur nul).

Méthode **Montrer qu'une famille est génératrice**

Pour montrer qu'une famille finie $(u_1, \dots, u_n)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est génératrice, on se donne $x \in E$ et on montre qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$.
Pour montrer qu'une famille infinie $(u_i)_{i \in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est génératrice, on se donne $x \in E$ et on montre qu'il existe $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ (famille presque nulle) telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$.

1.3 Familles libres, familles liées

Définition 1.3 Famille libre, famille liée (cas d'une famille finie)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, \dots, u_n \in E$. On dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est *libre* ou encore que les u_i sont *linéairement indépendants* si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E \implies \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est *liée* ou encore que les u_i sont *linéairement dépendants*. De manière équivalente, la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée *si et seulement si* l'un des u_i est combinaison linéaire des autres.

Remarque. La famille vide $\varnothing$ est toujours une famille libre.
Une famille qui contient le vecteur nul est liée.
Une famille qui contient plusieurs fois le même vecteur est liée. ■

Attention ! Le contraire de «libre» n'est pas «génératrice» mais «liée».

Méthode **Montrer qu'une famille est libre**

Pour montrer qu'une famille $(u_1, \dots, u_n)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est libre, on se donne $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$ et on montre que tous les λ_i sont nuls.

Exemple 1.4

Une famille à un vecteur est libre *si et seulement si* ce vecteur est non nul.
Une famille à deux vecteurs est libre *si et seulement si* ces deux vecteurs sont non colinéaires.
Une famille à trois vecteurs est libre *si et seulement si* ces trois vecteurs sont non coplanaires.

Exemple 1.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0 \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Alors $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$.

Exemple 1.6

La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Attention ! Quand on considère une famille de fonctions $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^I$, dire que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$ signifie que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) = 0$ *pour tout* $x \in I$ (le premier zéro désigne la fonction nulle et le second désigne le zéro de $\mathbb{R}$).

Exercice 1.2

Montrer que la famille $(\sin, \cos)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Définition 1.4 Famille libre, famille liée (cas d'une famille quelconque)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_i)_{i \in I} \in E^I$. On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est *libre* ou encore que les u_i sont *linéairement indépendants* si

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \ \sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0_E \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est *liée* ou encore que les u_i sont *linéairement dépendants*. De manière équivalente, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est liée *si et seulement si* l'un des u_i est combinaison linéaire des autres.

Remarque. Pour montrer qu'une famille infinie est libre, il est donc équivalent de montrer que toute sous-famille finie de cette famille est libre. ■

Remarque. Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille libre et si $(\lambda_i)_{i \in I}$ et $(\mu_i)_{i \in I}$ sont deux familles presque nulles de scalaires telles que $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = \sum_{i \in I} \mu_i u_i$, alors $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $i \in I$. ■

Exemple 1.7

La famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 1.3

Une famille libre reste libre si :

(i) on effectue les opérations du pivot de Gauss ;

(ii) on lui enlève un vecteur (une sous-famille d'une famille libre est libre) ;

(iii) on lui ajoute un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

Une famille liée reste liée si :

(i) on effectue les opérations du pivot de Gauss ;

(ii) on lui ajoute un vecteur (i.e. une sur-famille d'une famille liée est liée) ;

(iii) on lui enlève un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille ;

1.4 Bases

Définition 1.5 Base

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_i)_{i\in I} \in E^I$. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une *base* de E si elle est à la fois génératrice de E et libre.

Remarque. La famille vide est une base de l'espace vectoriel nul. ■

Exemple 1.8

Une famille de trois vecteurs non coplanaires de l'espace est une base de l'espace vectoriel géométrique.

Exemple 1.9

$(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exemple 1.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0 \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Alors $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$. On l'appelle la *base canonique* de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Exemple 1.11

La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On l'appelle la *base canonique* de $\mathbb{K}_n[X]$.
La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Attention ! Il n'y a pas unicité de la base pour un espace vectoriel donné.

Définition 1.6 Coordonnées dans une base finie

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit $x \in E$. On appelle *coordonnées* de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ l'unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

Définition 1.7 Coordonnées dans une base quelconque

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit $x \in E$. On appelle *coordonnées* de x dans la base $(e_i)_{i\in I}$ l'unique famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.

Proposition 1.4 Base d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels en somme directe d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose qu'il existe une base $\mathcal{F}$ de F et une base $\mathcal{G}$ de G. Alors la famille $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation des bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est une base de $F \oplus G$.
$\mathcal{B}$ est dite *base adaptée* à la somme directe $F \oplus G$.

Attention ! Il est essentiel que F et G soient en somme directe. En effet, dans $\mathbb{R}^3$, soit P le plan vectoriel d'équation $x = 0$ et Q le plan vectoriel d'équation $y = 0$. Il est clair que $((0,1,0),(0,0,1))$ est une base de P et que $((1,0,0),(0,0,1))$ est une base Q. Or P et Q ne sont pas en somme directe puisque $P \cap Q$ est la droite vectorielle d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Et on voit bien que $((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0),(0,0,1))$ n'est pas une base puisqu'elle contient deux fois le même vecteur.

Proposition 1.5 Base d'une somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soient $F_1,\dots,F_p$ des sous-espaces vectoriels en somme directe d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose qu'il existe des bases $\mathcal{F}_1,\dots,\mathcal{F}_p$ de $F_1,\dots,F_p$. Alors la famille $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation des bases $\mathcal{F}_1,\dots,\mathcal{F}_p$ est une base de $\bigoplus_{i=1}^p F_i$.
$\mathcal{B}$ est dite *base adaptée* à la somme directe $\bigoplus_{i=1}^p F_i$.

Proposition 1.6 Base d'un produit de deux espaces vectoriels (cas de bases finies)

Soient E et F deux espaces vectoriels. On suppose que E et F admettent des bases respectives $(e_1,\dots,e_n)$ et $(f_1,\dots,f_p)$. Alors la famille $((e_1,0_F),\dots,(e_n,0_F),(0_E,f_1),\dots,(0_E,f_p))$ est une base de $E \times F$.

Proposition 1.7 Base d'un produit de deux espaces vectoriels (cas de bases quelconques)

Soient E et F deux espaces vectoriels. On suppose que E et F admettent des bases respectives $(e_i)_{i\in I}$ et $(f_j)_{j\in J}$. Alors la concaténation des familles $(e_i,0_F)_{i\in I}$ et $(0_E,f_j)_{j\in J}$ est une base de $E \times F$.

Proposition 1.8 Base d'un produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels (cas de base finies)

Soient $E_1,\dots,E_p$ des espaces vectoriels. On suppose que $E_1,\dots,E_p$ admettent des base respectives $(e_1^1,\dots,e_{n_1}^1),\dots,(e_1^p,\dots,e_{n_p}^p)$. Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ et tout $i \in [\![1,n_k]\!]$, on pose $f_i^k = (0_{E_1},\dots,0_{E_{i-1}},e_i^k,0_{E_{i+1}},\dots,0_{E_p})$. Alors la concaténation des familles $(f_1^1,\dots,f_{n_1}^1),\dots,(f_1^p,\dots,f_{n_p}^p)$ est une base de $\prod_{k=1}^p E_p$.

Proposition 1.9 Base d'un produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels (cas de bases quelconques)

Soient $E_1,\dots,E_p$ des espaces vectoriels. On suppose que $E_1,\dots,E_p$ admettent des base respectives $(e_i^1)_{i\in I_1},\dots,(e_i^p)_{i\in I_p}$. Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ et tout $i \in I_k$, on pose $f_i^k = (0_{E_1},\dots,0_{E_{i-1}},e_i^k,0_{E_{i+1}},\dots,0_{E_p})$. Alors la concaténation des familles $(f_i^1)_{i\in I_1},\dots,(f_i^p)_{i\in I_p}$ est une base de $\prod_{k=1}^p E_p$.

1.5 Cas particulier de $\mathbb{K}^n$

Définition 1.8 Famille échelonnée de vecteurs de $\mathbb{K}^n$

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on note a_i (resp. b_i) le nombre de zéros initiaux (resp. terminaux) dans le vecteur u_i. On dit que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est *échelonnée* si une des suites finies $(a_1, \dots, a_n)$ ou $(b_1, \dots, b_n)$ est strictement monotone.

Exemple 1.12

Les vecteurs $(2, 3, 1, 2)$, $(-2, 1, 0, 0)$ et $(1, 0, 0, 0)$ forment une famille échelonnée de $\mathbb{R}^4$.
Les vecteurs $(3, 2, 1, -1)$, $(0, 2, -1, 4)$, $(0, 0, 2, 3)$ et $(0, 0, 0, 0)$ forment une famille échelonnée de $\mathbb{R}^4$.

Proposition 1.10 Liberté d'une famille échelonnée

Une famille échelonnée de $\mathbb{K}^n$ est libre *si et seulement si* elle ne comporte pas le vecteur nul.

Proposition 1.11

Toute famille de $\mathbb{K}^n$ peut être transformée à l'aide des opérations du pivot de Gauss en une famille échelonnée.

Méthode **Montrer qu'une famille de $\mathbb{K}^n$ est libre ou liée**

Il suffit d'écrire la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la famille et de se ramener à une famille échelonnée en utilisant le pivot de Gauss sur les *colonnes*. Si le vecteur nul apparaît, c'est que la famille est liée. Sinon, elle est libre.

Exemple 1.13

Montrer que la famille $((1, 2, 1), (1, 3, 2), (1, 1, 0))$ est liée.
Montrer que la famille $((2, 1, 3, 4), (1, 3, 2, 0), (2, 3, 1, -1))$ est libre.

Méthode **Déterminer une base d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$**

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

- Si F est donné sous forme cartésienne (i.e. à l'aide d'un système d'équations linéaires), la méthode «mettre sous forme d'un vect» vu dans le chapitre *Espaces vectoriels* fournit une base de F.
- Si F est donné sous forme paramétrique (i.e. à l'aide d'une famille génératrice), la méthode du pivot de Gauss fournit une base de F après suppression des éventuels vecteurs nuls.

2 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 2.1 Dimension finie

On dit qu'un espace vectoriel est de *dimension finie* s'il possède une famille génératrice finie.

Exemple 2.1

Pour $n \geqslant 1$, $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie puisque sa base canonique est une famille génératrice finie.

Exemple 2.2

$\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie. En effet, supposons qu'il admette une famille génératrice finie $(P_1, \dots, P_n)$. Posons $d = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \deg P_i$. Alors X^{d+1} n'est pas une combinaison linéaire des P_i.

2.1 Existence de bases

Théorème 2.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{L}$ une famille libre finie de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E. Alors on peut compléter $\mathcal{L}$ en une base de E en lui ajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$.

Corollaire 2.1 Existence de bases

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède une base finie.

Corollaire 2.2 Théorème de la base incomplète/extraite

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

(i) On peut compléter toute famille libre finie de E en une base de E.

(ii) On peut extraire de toute famille génératrice finie de E une base de E.

Exemple 2.3

Soit $F = \operatorname{vect}((1, -5, 7), (2, 6, 8), (3, 1, 15), (1, 11, 1))$. Alors $((1, -5, 7), (2, 6, 8))$ est une base de F.

Remarque. Si on admet l'axiome du choix, les théorèmes précédents restent vraie en dimension infinie quitte à considérer des familles infinies. ■

2.2 Définition de la dimension

Lemme 2.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possédant une famille génératrice à n vecteurs. Alors toute famille libre de E comporte au plus n vecteurs.

Théorème 2.2 Dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont même nombre d'éléments. On appelle cet entier la *dimension* de E (sur $\mathbb{K}$) et on le note $\dim E$.

Remarque. La dimension de l'espace nul est 0. ■

Remarque. On appelle *droite vectorielle* un espace vectoriel de dimension 1 et *plan vectoriel* un espace vectoriel de dimension 2. ■

Méthode **Déterminer la dimension d'un espace vectoriel**

Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, il suffit de déterminer *une* base de E. Son nombre d'éléments donnera la dimension.

Exemple 2.4

- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 est une droite vectorielle.
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants est un plan vectoriel.

Exemple 2.5

- L'ensemble des suites réelles vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constantes est un plan vectoriel.

Exemple 2.6

- $\dim \mathbb{K}^n = n$.
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$.
- $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

Remarque. Un ensemble E peut être muni d'une structure d'espace vectoriel pour différents corps de base. La dimension peut alors différer suivant le corps de base. En cas d'ambiguïté, la dimension d'un espace vectoriel E pour le corps de base $\mathbb{K}$ est notée $\dim_{\mathbb{K}} E$. ■

Exemple 2.7

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Exercice 2.1

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que E peut être muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel et montrer que $\dim_{\mathbb{R}} E = 2\dim_{\mathbb{C}} E$.

Corollaire 2.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

(i) Toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.

(ii) Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs.

(iii) Toute famille possédant strictement plus de n vecteurs est liée.

Attention ! Les réciproques sont fausses.

- Une famille d'un espace vectoriel de dimension n possédant moins de n vecteurs n'est pas forcément libre.

- ◇ Une famille d'un espace vectoriel de dimension n possédant plus de n vecteurs n'est pas forcément génératrice.
- ◇ Une famille liée peut possèder n vecteurs ou moins.

Corollaire 2.4

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une famille de n vecteurs. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E ;

(ii) $\mathcal{B}$ est une famille libre de E ;

(iii) $\mathcal{B}$ est une base de E.

Méthode **Prouver qu'une famille est une base en dimension finie**

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une famille à n vecteurs. Pour prouver que $\mathcal{B}$ est une base de E, pas besoin de prouver que $\mathcal{B}$ est génératrice *et* libre. Le théorème précédent nous dit qu'il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est génératrice *ou* libre (en pratique, on montre plus souvent la liberté). Le travail est donc divisé par deux si on connaît la dimension de l'espace vectoriel.

Exemple 2.8

La famille $((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 2.1 Dimension d'un produit

Soient $E_1,\dots,E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\prod_{k=1}^{p} E_k$ est de dimension finie et $\dim\left(\prod_{k=1}^{p} E_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim E_k$.

3 Dimension et sous-espaces vectoriels

3.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition 3.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie E. Alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$. De plus, $\dim F = \dim E$ *si et seulement si* $E = F$.

Exemple 3.1

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont le sous-espace nul, les droites vectorielles et $\mathbb{R}^2$.
Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont le sous-espace nul, les droites vectorielles, les plans vectoriels et $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3.2 Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1

Soit (E) l'équation différentielle $y' + ay = 0$ où $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$ de dimension 1.

Exemple 3.3 Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants

Soient $(a, b) \in^2$ et (E) l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ de dimension 2.

Exemple 3.4 Récurrences linéaires homogènes

Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2.

Méthode **Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Pour montrer que $F = G$, il suffit de montrer que $F \subset G$ (ou $G \subset F$) et que $\dim F = \dim G$. Travail divisé par deux.

Exercice 3.1

Soient $a = (1, 2, 1)$, $b = (1, 3, 2)$, $c = (1, 1, 0)$ et $d = (3, 8, 5)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\operatorname{vect}(a, b) = \operatorname{vect}(c, d)$.

Définition 3.1 Hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension n. On appelle *hyperplan* de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

3.2 Dimension d'une somme

Proposition 3.2 Existence d'un supplémentaire

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors F possède *un* supplémentaire dans E.

Attention ! On rappelle qu'il n'y a pas unicité du supplémentaire.

Remarque. Si on admet l'axiome du choix, l'existence d'un supplémentaire est également garantie en dimension infinie. ■

Proposition 3.3 Dimension d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie en somme directe d'un espace vectoriel E. Alors $F \oplus G$ est de dimension finie et $\dim F \oplus G = \dim F + \dim G$.

Proposition 3.4 Formule de Grassmann

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Alors $F + G$ est de dimension finie et

$$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

Exercice 3.2

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Corollaire 3.1 Caractérisation d'une somme directe

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Alors F et G sont en somme directe *si et seulement si* $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$.

Corollaire 3.2 Caractérisation de la supplémentarité

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E. Alors F et G sont supplémentaires *si et seulement si* *au moins deux* des trois assertions suivantes sont vraies :

(i) $\dim F + \dim G = \dim E$.

(ii) $F \cap G = \{0_E\}$.

(iii) $F + G = E$.

Méthode **Prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E. Si on connaît les dimensions de E, F et G, pour prouver que F et G sont supplémentaires dans E, il suffit de vérifier que $\dim F + \dim G = \dim E$ et de montrer, *au choix*, que $F \cap G = \{0_E\}$ *ou* $F + G = E$ (en pratique, on montre plus souvent que la somme est directe). Travail divisé par deux grâce à la dimension.

Exercice 3.3

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$ et $G = \operatorname{vect}((0, 1, 0))$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition 3.5 Dimension d'une somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Alors

$$\dim\left(\sum_{k=1}^{p} F_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim F_k$$

De plus, l'inégalité précédente est une égalité *si et seulement si* $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe.

Remarque. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Pour montrer que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$, il suffit de montrer que $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe et que $\sum_{k=1}^{p} \dim F_k = \dim E$. ■

4 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 4.1 Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie). Soit $\mathcal{F}$ une famille *finie* de vecteurs de E. Alors $\operatorname{vect}(\mathcal{F})$ est de dimension finie et sa dimension est appelée le *rang* de $\mathcal{F}$ noté $\operatorname{rg} \mathcal{F}$.

Proposition 4.1

Le rang d'une famille finie de vecteurs est invariant par opérations de pivot de Gauss sur cette famille.

Remarque. Si $\mathcal{F}$ est une famille de p vecteurs, alors $\operatorname{rg} \mathcal{F} \leqslant p$.
Si E est de dimension finie n, $\operatorname{rg} \mathcal{F} \leqslant n$.
Si ces deux conditions sont réunies, on a donc $\operatorname{rg} \mathcal{F} \leqslant \min(n, p)$. ■

Exercice 4.1

Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux familles finies d'un espace vectoriels E de dimension finie. Montrer que :

$$\max(\operatorname{rg} \mathcal{F}_1, \operatorname{rg} \mathcal{F}_2) \leqslant \operatorname{rg}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \leqslant \operatorname{rg} \mathcal{F}_1 + \operatorname{rg} \mathcal{F}_2$$

Proposition 4.2 Rang, liberté, génération

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de p vecteurs d'un espace vectoriel E.
Alors $\operatorname{rg} \mathcal{F} = \operatorname{card} \mathcal{F}$ *si et seulement si* $\mathcal{F}$ est libre.
Si de plus E est de dimension finie, $\operatorname{rg} \mathcal{F} = \dim E$ *si et seulement si* $\mathcal{F}$ engendre E.

Méthode **Rang d'une famille de $\mathbb{K}^n$**

Soit $\mathcal{F}$ une famille de $\mathbb{K}^n$. On applique la méthode du pivot de Gauss pour déterminer une base de $\operatorname{vect}(\mathcal{F})$. Son cardinal est est le rang de $\mathcal{F}$.

Exercice 4.2

Déterminer le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$((1, 2, -3, 0), (-4, -6, 12, 2), (-3, -6, 12, 3), (-2, -4, 6, 0), (-2, -2, 3, 1))$$