ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

Produits scalaires

Exercice 1 ★★

Prouver que les applications suivantes sont des produits scalaires sur E :

1. pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, pour $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts,

$$\Psi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k) ;$$

2. pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, pour $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$(P, Q) \mapsto \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k) ;$$

3. pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$,

$$(P, Q) \mapsto \langle P|Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt ;$$

4. pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = M_n(\mathbb{R})$,

$$\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B) ;$$

5. sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$,

$$(f, g) \mapsto \langle f|g\rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt ;$$

6. sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$,

$$(f, g) \mapsto \langle f|g\rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt.$$

Exercice 2 ★ — Un espace fonctionnel

On définit sur l'espace vectoriel réel E des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$,

$$\langle f|g\rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2. Etablir que $\forall f \in E$,

$$\left(f(1) + \int_0^1 f'(t)dt\right)^2 \leqslant 2\left(f^2(1) + \int_0^1 f'^2(t)dt\right)$$

Inégalités

Exercice 3 ★★ — Inégalité de Ptolémée

Soit E un espace euclidien. On pose $f : \begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \to & E \setminus \{0\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{\|x\|^2} \end{array}$.

1. Montrer que pour $x, y \in E \setminus \{0\}$, $\|f(x) - f(y)\| = \dfrac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|}$.

2. Soient $a, b, c, d \in E$. Montrer que

$$\|a - c\|\|b - d\| \leq \|a - b\|\|c - d\| + \|b - c\|\|a - d\|.$$

Exercice 4 ★★★ — Inégalité d'Hadamard

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et de base orthonormée $\mathcal{B}$. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Montrer que

$$|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

Exercice 5 ★

Soit $n \geqslant 1$. Prouver que

$$\left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right]^2 \leqslant n\left[1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right].$$

Exercice 6 ★ **Immédiat**

Soient $n \geqslant 1$ et $x_1, \dots, x_n > 0$. Prouver que

$$\left[\sum_{k=1}^{n} x_k\right]\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right] \geqslant n^2.$$

Exercice 7 ★★ **Technique**

Soit $n \geqslant 2$. Prouver que

$$\frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2}.$$

Exercice 8

On considère l'ensemble E des fonctions continues et strictement positives sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\inf_{f \in \mathrm{E}}\left(\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right)$$

existe et est atteint.

Exercice 9

Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose $f(a) = 0$. Montrer que

$$\int_a^b f^2(u)du \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u)du.$$

Bases orthonormales

Exercice 10 ★★ **Produit mixte et produit vectoriel**

Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 1$.

1. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E. Montrer que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.

2. En déduire que $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.

3. Soient $x_1, \dots, x_{n-1}$ $n-1$ vecteurs de E. Montrer que l'application

$$x \in \mathrm{E} \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$$

   est une forme linéaire sur E.

4. En déduire qu'il existe un unique vecteur $u \in \mathrm{E}$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \langle u, x \rangle$$

   On appelle u le produit vectoriel des vecteur $x_1, \dots, x_{n-1}$ et on note

$$u = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$$

5. Montrer que l'application

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathrm{E}^{n-1} \mapsto x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$$

   est une application $n-1$-linéaire alternée.

Exercice 11 ★★★

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $\langle ., . \rangle$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2,\ \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)\mathrm{Q}^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$

   est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

2. Donner sans calcul une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Exercice 12 ★★★

Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs non nuls de E tels que

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$$

1. Montrer que
$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \ \langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i \rangle \langle y|e_i \rangle.$$

2. En déduire que
$$\forall x \in \mathrm{E},\ \ x = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i \rangle e_i.$$

3. Etablir que $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 13 ★ **Retour aux polynômes**

Sur l'espace vectoriel réel $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, on définit

$$\langle \mathrm{P}|\mathrm{Q} \rangle = \mathrm{P}(-1)\mathrm{Q}(-1) + \mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0) + \mathrm{P}(1)\mathrm{Q}(1).$$

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

2. Trouver une base orthonormée de E par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt appliqué à la base canonique de E.

3. Trouver une *autre* base orthonormée de E en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange.

Sous-espaces orthogonaux

Exercice 14 ★ **Posé à Centrale**

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout $(f, g) \in \mathrm{E}^2$, on pose

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

1. Prouver $\langle \cdot|\cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. On pose
$$\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E} \mid f(0) = 0\}.$$
   a. Soit $f \in \mathrm{F}^\perp$. Montrer que $f^2 \in \mathrm{F}^\perp$.
   b. Prouver que $\mathrm{F}^\perp = \{0\}$.

3. E est-il de dimension finie ?

Exercice 15 ★★

Montrer que $s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}^\top \end{array} \right.$ est une symétrie orthogonale pour le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire défini par $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^\top \mathrm{B})$ pour $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16 ★★

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

1. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\, f)^\perp$.

Exercice 17 ★★

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E.

1. Montrer que $\mathrm{F} \subset \mathrm{G} \implies \mathrm{G}^\perp \subset \mathrm{F}^\perp$ et que, si F et G sont de dimension finie, $\mathrm{G}^\perp \subset \mathrm{F}^\perp \implies \mathrm{F} \subset \mathrm{G}$.

2. Montrer que $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp = \mathrm{F}^\perp \cap \mathrm{G}^\perp$.

3. Montrer que $\mathrm{F}^\perp + \mathrm{G}^\perp \subset (\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^\perp$ et que, si E est de dimension finie, $(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^\perp = \mathrm{F}^\perp + \mathrm{G}^\perp$.

Projecteurs orthogonaux

Exercice 18 ★★

Soit u un vecteur unitaire d'un espace euclidien E. On note U le vecteur colonne représentant u dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{vect}(u)$ dans $\mathcal{B}$.

Exercice 19 ★★ **Caractérisations des projections orthogonales**

Soient E un espace euclidien et p une projection de E. Etablir l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1. p est orthogonale ;
2. $\forall x, y \in \mathrm{E},\ \langle p(x)|y\rangle = \langle x|p(y)\rangle$;
3. $\forall x \in \mathrm{E},\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 20 ★ **Calcul d'une projection orthogonale**

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire usuel. Donner la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel F d'équations,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Optimisation

Exercice 21 ★ **Un calcul de distance**

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ muni de sa structure euclidienne canonique (ie la base canonique est orthonormée). On note F le sous-espace vectoriel de E des polynômes s'annulant en 1.

1. Déterminer une base de F.
2. Calculer $\delta = \inf_{\mathrm{P}\in\mathrm{F}} \|\mathrm{X} - \mathrm{P}\|$.

Exercice 22 ★★★

Calculer le minimum de $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & \displaystyle\int_0^{\pi} (\sin x - ax^2 - bx)^2\,\mathrm{d}x \end{array}$.

Exercice 23 ★★★

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) du produit scalaire $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \mapsto \mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{Y}$. On se donne $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. On pose $\mathrm{E} = \left\{\|\mathrm{AX}-\mathrm{B}\|^2,\ \mathrm{X} \in c\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right\}$ et $\mathrm{K} = \inf \mathrm{E}$.

1. Justifier l'existence de K.
2. On considère le système linéaire $(\mathcal{S}) :\ \mathrm{AX} = \mathrm{B}$. On appelle *pseudo-solution* de $\mathcal{S}$ tout élément Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|\mathrm{AY}-\mathrm{B}\|^2 = \mathrm{K}$. Montrer que si $(\mathcal{S})$ admet une solution, les pseudo-solutions de $(\mathcal{S})$ sont les solutions de $(\mathcal{S})$.
3. On associe à $(\mathcal{S})$ le système $(\mathcal{S}') :\ \mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{AX} = \mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{B}$. Montrer qu'un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si il est solution de $(\mathcal{S}')$.
4. Montrer que $\mathrm{rg}\,\mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{A} = \mathrm{rg}\,\mathrm{A}$.
5. Montrer que si $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = n$, $(\mathcal{S})$ admet une unique pseudo-solution.

Exercice 24 ★★★ **ENS MP 2010**

Soient E un espace euclidien et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E. Pour $x \in \mathrm{E}$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^{p} \|x - x_i\|^2$. Montrer que f atteint son minimum en un unique point que l'on précisera.

Exercice 25 ★★★

Soient E un espace euclidien et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E. Pour $x \in \mathrm{E}$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^{p} \|x - x_i\|^2$. Montrer que f atteint son minimum en $m = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_i$.

Automorphismes orthogonaux

Exercice 26 ★ **Un premier exemple**

Soient E un espace euclidien orienté de dimension trois muni d'une base orthonormée directe

$$\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

On note f la rotation d'axe $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. Calculer la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 27 ★ **Calculs dans $O_3(\mathbb{R})$**

Soient E un plan vectoriel euclidien orienté, r une rotation de E et s une réflexion. Calculer $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$.

Exercice 28 ★

Déterminer la nature et les caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique vaut

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 29 ★★★

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Prouver l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1. $\langle x|y\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle u(x)|u(y)\rangle = 0$;
2. $\exists k \geqslant 0,\ \forall x \in \mathrm{E},\ \|u(x)\| = k\|x\|$;
3. u est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Exercice 30 ★★★

Soient H et K deux hyperplans d'un espace euclidien E. On note s_{H} et s_{K} les réflexions par rapport à H et K. Montrer que s_{H} et s_{K} commutent si et seulement si $\mathrm{H} = \mathrm{K}$ ou $\mathrm{H}^\perp \subset \mathrm{K}$.

Exercice 31 ★★

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

1. Trouver les $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que
$$\forall u, v \in \mathrm{E},\ f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$$
2. Trouver les $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que
$$\forall u, v \in \mathrm{E},\ f(u \wedge v) = -f(u) \wedge f(v)$$

Exercice 32 ★★

Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 33 ★★★

Soit E un espace euclidien de dimension 2.

1. On sait que la matrice d'une réflexion de E dans une base orthonormée est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Quelle est l'interprétation géométrique de θ ?
2. Déterminer une condition portant sur l'angle entre leurs axes pour que la *somme* de deux réflexions soit encore une réflexion.

Exercice 34 ★★ **Petites Mines 2009**

Soit u un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E. On pose $v = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - u$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont orthogonaux et supplémentaires.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, u^k est un automorphisme orthogonal.

Exercice 35 ★★

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ engendré par la famille (e_1, e_2, e_3) où

$$e_1 : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad e_2 : t \mapsto \cos(2\pi t) \qquad e_3 : t \mapsto \sin(2\pi t)$$

1. Montrer que $\Phi : (f, g) \mapsto 2\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E.
3. Pour tout réel x, on définit l'application τ_x qui à tout élément f de E associe g tel que
$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(x - t)$$
   - **a.** Montrer que τ_x est un endomorphisme de E. Donner sa matrice relativement à $\mathcal{B}$.
   - **b.** Montrer que τ_x est un automorphisme orthogonal de E.
   - **c.** Caractériser géométriquement τ_x.

Exercice 36 ★★★

Soit E un espace euclidien et f une application de E dans E (non supposée linéaire) telle que
$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$
Montrer que f est la composée d'une translation et d'un automorphisme orthogonal.

Exercice 37 ★

Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On note A la matrice de f dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E. Montrer que f est une symétrie orthogonale si et seulement si A est une matrice orthogonale symétrique.

Matrices orthogonales

Exercice 38 ★★

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

Exercice 39 ★★★

Soit $\mathrm{O} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right)$ une matrice orthogonale réelle de taille n où A et D sont deux blocs carrés de tailles respectives p et q. Montrer que $(\det \mathrm{A})^2 = (\det \mathrm{D})^2$.

Exercice 40 ★

Soient A et B les matrices, dans deux bases orthonormales, d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^\top \mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{B}^\top \mathrm{B})$.

Exercice 41 ★★

1. Soit X une matrice colonne réelle de taille n. Montrer que $\mathrm{X}^\top \mathrm{X} \in \mathbb{R}_+$ et que $\mathrm{X}^\top \mathrm{X} = 0$ implique $\mathrm{X} = 0$.
2. Soit M une matrice antisymétrique réelle de taille n. Montrer que $\mathrm{I}_n + \mathrm{M}$ est inversible.
3. On pose $\mathrm{A} = (\mathrm{I}_n - \mathrm{M})(\mathrm{I}_n + \mathrm{M})^{-1}$. Montrer que A est orthogonale.

Exercice 42 ★★★

Soient $n \in \mathbb{N}\setminus\{0, 1, 2\}$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{com}(\mathrm{A})$ si et seulement si $\mathrm{A} = 0$ ou $\mathrm{A} \in \mathrm{SO}(n)$.

Familles de vecteurs

Exercice 43 ★★★ **Déterminants de Gram**

Soit E un espace euclidien. A une famille $(x_1, \dots, x_p)$ de p vecteurs de E, on associe la matrice $G_p(x_1, \dots, x_p) = ((x_i|x_j))_{1\leq i,j\leq p}$.

1. Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est liée si et seulement si $\det G_p(x_1, \dots, x_p) = 0$.
2. On suppose maintenant que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre et on note $F = \operatorname{vect}(x_1, \dots, x_p)$
   - **a.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F et $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$. Montrer que $G_p(x_1, \dots, x_p) = A^{\mathsf{T}}A$.
   - **b.** En déduire que $\det G_p(x_1, \dots, x_p) > 0$.
3. Soit $x \in E$. On note π la projection orthogonale sur F.
   - **a.** Montrer que $\det G_{p+1}(x, x_1, \dots, x_p) = \det G_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p)$.
   - **b.** Montrer que
$$d(x, F)^2 = \frac{\det G_{p+1}(x, x_1, \dots, x_p)}{\det G_p(x_1, \dots, x_p)}$$

Exercice 44 ★★★

Soient E un espace euclidien, p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E tels que

$$\forall i, j \in [\![1, p]\!],\ i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle < 0$$

1. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i x_i = 0$. On pose $I = \{i \in [\![1, p-1]\!] \mid \alpha_i > 0\}$ et $J = \{j \in [\![1, p-1]\!] \mid \alpha_j < 0\}$. En considérant $u = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i$ et $v = \sum_{j\in J} \alpha_j x_j$, montrer que l'un des ensembles I ou J est vide (on convient qu'une somme indexée sur l'ensemble vide est nulle).
2. Montrer que I et J sont vides.
3. En déduire que la famille $(x_1, \dots, x_{p-1})$ est libre.

Exercice 45 ★★★ **Déterminants de Gram**

Soit E un espace euclidien. A toute famille $(x_1, \dots, x_p)$ de p vecteurs de E, on associe la matrice $G(x_1, \dots, x_p) = \left(\langle x_i, x_j \rangle\right)_{1\leq i,j\leq p}$.

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $F = \operatorname{vect}(x_1, \dots, x_p)$. On note $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$. Montrer que $G(x_1, \dots, x_p) = A^{\mathsf{T}}A$.
2. En déduire que $\det G(x_1, \dots, x_p) \geq 0$ et que $(x_1, \dots, x_p)$ est liée si et seulement si $\det G(x_1, \dots, x_p) = 0$.
3. On se donne $x \in E$. Montrer que
$$\det G(x_1, \dots, x_p, x) = d(x, F)^2 \det G(x_1, \dots, x_p)$$

Exercice 46 ★★★

On pose $Q_n = (1 - X^2)^n = (1 + X)^n(1 - X)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On notera $\varphi(P, Q) = \langle P, Q \rangle$ par la suite.
2. Soit n et k deux entiers tels que $0 \leq k < n$. Montrer que $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$.
3. On pose $P_n = Q_n^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Endomorphismes remarquables

Exercice 47 ★★

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Une application $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ est dite *antisymétrique* si

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle x, u(y)\rangle + \langle y, u(x)\rangle = 0$$

On note A(E) l'ensemble des applications antisymétriques de E.
Remarque. Rien à voir avec les applications *multilinéaires* antisymétriques !

1. Soit $u \in \mathrm{A}(\mathrm{E})$. Montrer que u est linéaire.
2. Soit $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$. Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
   (i) u est linéaire et $\forall x \in \mathrm{E}, \langle u(x), x\rangle = 0$;
   (ii) u est antisymétrique ;
   (iii) u est linéaire et sa matrice dans une base orthonormée est antisymétrique.
3. Montrer que A(E) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.
4. Soit $u \in \mathrm{A}(\mathrm{E})$. Montrer que $\operatorname{Im} u$ est l'orthogonal de $\operatorname{Ker} u$.
5. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u alors $\mathrm{F}^\perp$ est également stable par u.

Exercice 48 ★★

Soient E un espace euclidien, p une projection orthogonale et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Montrer que la matrice A de p dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique.

Exercice 49 ★★★

Montrer que le rang d'une matrice antisymétrique réelle est pair.

Exercice 50 ★★

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \ \langle u(x)|x\rangle = 0.$$

Montrer que

$$(\operatorname{Ker}(u))^\perp = \operatorname{Im}(u).$$

Exercice 51 ★★

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit (a, b) une famille libre de E. Soit f l'application

$$x \longmapsto \langle a|x\rangle b + \langle b|x\rangle a.$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et que
$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ \ \langle f(x)|y\rangle = \langle x|f(y)\rangle.$$
2. Déterminer le noyau et le rang de f.
3. On pose $\mathrm{F} = \operatorname{Im}(f)$.
   a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E stable par f et en donner une base.
   b. Déterminer la matrice de l'endomorphisme g induit par f sur F dans cette base.

Exercice 52 ★★★ **Endomorphismes 1-lipschitziens**

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \ \|u(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Etablir que

$$\mathrm{E} = \operatorname{Ker}(u - id_{\mathrm{E}}) \oplus \operatorname{Im}(u - id_{\mathrm{E}}).$$

Divers

Exercice 53 ★★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On travaille dans l'espace des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $|\operatorname{tr}(A)| \leq \sqrt{n}\|A\|$.
3. **a.** Quel est l'orthogonal de l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques ?

   b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer la distance de A à $S_n(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients de A ?
4. Soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|UA\| = \|AU\| = \|A\|$.
5. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Exercice 54 ★★★

Soit E un espace euclidien de dimension n et $u_1, \dots, u_{n+1}$ des vecteurs non nuls de E faisant un angle constant α_n (non nul) deux à deux. Que vaut α_n ?

Exercice 55 ★★★

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{rg}(A^\top A) = \operatorname{rg}(AA^\top) = \operatorname{rg} A$.

Exercice 56 ★★★

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant
$$\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$
pour $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$.
2. On pose $F = \operatorname{vect}(1 + X^n, n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que $F^\perp = \{0\}$. Conclusion ?