

FONCTIONS VECTORIELLES

Continuité

Solution 1

1. En considérant sa dérivée, on montre que l'application $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - x$ est décroissante sur \mathbb{R}_- et croissante sur \mathbb{R}_+ . Elle admet donc un minimum en 0. Puisque $\varphi(0) = 1$, φ est strictement positive sur \mathbb{R} et en particulier, ne s'annule pas sur \mathbb{R} . L'exponentielle n'admet donc pas de point fixe sur \mathbb{R} .

2. On sait que $\tan x \sim x$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$ puis $\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{x}{\tan x}\right) = e$. De même, $\sin x \sim x$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e - 1$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \pm\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} = 0$ puis $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\frac{x}{\tan x}} = 1$. Puisque $x \mapsto \frac{x}{\sin x}$ est continue en $\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 1 - \frac{\pi}{2}$.

3. Tout d'abord, $e - 1 > 0$ car $e \geq 2$ et $1 - \frac{\pi}{2} < 0$ car $\pi \geq 3$.

Puisque \tan ne s'annule pas sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, $x \mapsto \frac{x}{\tan x}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Puisque $x \mapsto e^x$ est continue sur \mathbb{R} , $x \mapsto \exp\left(\frac{x}{\tan x}\right)$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Comme \sin ne s'annule pas sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, $x \mapsto \frac{x}{\sin x}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Ainsi f est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ comme différence de deux fonctions continues sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Puisque $\lim_0 f > 0$ et $\lim_{\frac{\pi}{2}} f < 0$, f s'annule sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ en vertu du théorème des valeurs intermédiaires. Il existe donc $b \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $f(b) = 0$.

4. Tout d'abord,

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b) = e^a (1 + i \tan b) \cos b = e^a \left(1 + i \frac{b}{a}\right) \cos b = \frac{e^a \cos b}{a} (a + ib) = \frac{e^a \cos b}{a} z$$

Puisque $f(b) = 0$, $e^a = \frac{b}{\sin b}$. Ainsi

$$\frac{e^a \cos b}{a} = \frac{b}{a \tan b} = 1$$

D'où $e^z = z$.

Solution 2

f est bijective puisque c'est une involution. Puisqu'elle est continue sur l'intervalle \mathbb{R}_+ , elle y est strictement monotone. Si f était strictement décroissante, on aurait $f(x) \leq f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, ce qui contredirait la surjectivité de f . Ainsi f est strictement croissante.

Soit alors $x \in \mathbb{R}_+$. Supposons que $f(x) \neq x$. On a donc $f(x) > x$ ou $f(x) < x$. Si $f(x) > x$, alors $f \circ f(x) > f(x)$ par stricte croissance de f et donc $x > f(x)$, ce qui est contradictoire. De même, si $f(x) < x$, $f \circ f(x) < f(x)$ par stricte croissance de f et donc $x < f(x)$, ce qui est à nouveau contradictoire. Ainsi $f(x) = x$.

On peut alors conclure que $f = \text{Id}_{\mathbb{R}_+}$.

Solution 3

Comme D est un hyperplan affine de \mathbb{R}^2 , il existe une forme linéaire φ sur \mathbb{R}^2 et un réel α tels que $\forall x \in \mathbb{R}^2, x \in D \iff \varphi(x) = \alpha$. L'application $\varphi \circ f$ est continue sur I et, quitte à échanger a et b , on peut supposer $\varphi \circ f(a) > \alpha$ et $\varphi \circ f(b) < \alpha$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in I$ tel que $\varphi \circ f(c) = \alpha$ i.e. $f(c) \in D$.

Solution 4

1. De l'inclusion $I \subset f(I)$, on déduit l'existence de c et d appartenant à $[a, b]$ tels que $f(c) = a$ et $f(d) = b$. f prend donc les valeurs a et b sur I .
2. Notons g l'application définie par $g(t) = f(t) - t$ pour $t \in [a, b]$. Nous avons $g(c) = f(c) - c = a - c \leq 0$ et $g(d) = f(d) - d = b - d \geq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [c, d]$ tel que $g(t_0) = 0$, c'est-à-dire $f(t_0) = t_0$. f admet donc un point fixe sur I .

Solution 5

Soit $g : x \mapsto f(x) - x$.

Puisque f est décroissante, f admet une limite finie ou une limite égale à $-\infty$ en $+\infty$. Dans les deux cas, $\lim_{+\infty} g = -\infty$.

De même, f admet une limite finie ou une limite égale à $+\infty$ en $-\infty$. Dans les deux cas, $\lim_{-\infty} g = +\infty$.

Comme g est continue, g s'annule sur \mathbb{R} d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

De plus, g est strictement décroissante donc injective. Elle s'annule donc exactement une fois, ce qui prouve que f admet un unique point fixe.

Dérivabilité

Solution 6

Soit M une telle application. Tout d'abord,

$$M(0) = M(0 + 0) = M(0)^2$$

Donc $M(0)$ est une matrice de projecteur.

De plus, pour $(t, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$\frac{M(t+h) - M(t)}{h} = \frac{(M(h) - M(0))M(t)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} M'(0)M(t)$$

Donc M est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M'(t) = M'(0)M(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De même,

$$\frac{M(t+h) - M(t)}{h} = \frac{M(t)(M(h) - M(0))}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} M(t)M'(0)$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M'(t) = M(t)M'(0)$.

Posons $A = M'(0)$ et considérons alors l'application $N : t \mapsto M(t) \exp(-tA)$. Comme le produit matriciel est bilinéaire, N est également dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall t \in \mathbb{R}, N'(t) = M'(t) \exp(-tA) - M(t)A \exp(-tA) = 0$$

On en déduit que N est constante égale à $N(0) = M(0)$. Par conséquent, $M(t) = M(0) \exp(tA)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Ce qui précède montre également que $M(t)$ et A commutent pour tout $t \in \mathbb{R}$. Notamment $M(0)$ et A commutent.

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projecteur commutant avec A . Par conséquent, M_0 et $\exp(tA)$ commutent pour tout $t \in \mathbb{R}$. Posons $M : t \mapsto M_0 \exp(tA)$.

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, M(s)M(t) = M_0 \exp(sA)M_0 \exp(tA) = M_0^2 \exp(sA) \exp(tA) = M_0 \exp((s+t)A) = M(s+t)$$

Finalement, les applications recherchées sont les applications $t \mapsto M_0 \exp(tA)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projecteur commutant avec A .

Solution 7

Supposons que A^\top possède nécessairement une valeur propre λ strictement positive. Notons u un vecteur propre associé. Posons $\varphi(t) = u^\top x(t)$. Comme $\ell : y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto u^\top y$ est une forme linéaire, φ est également de classe \mathcal{C}^1 et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = u^\top x'(t) = u^\top Ax(t) = (A^\top u)^\top x(t) = \lambda u^\top x(t) = \lambda \varphi(t)$$

Ainsi $\varphi(t) = \varphi(0)e^{\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Mais comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$. On ne peut avoir $\varphi(0) \neq 0$ sinon $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \pm\infty$ puisque $\lambda > 0$. Ainsi $\varphi(0) = 0$ puis $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ou encore $\ell(x(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Si A^\top ne possède aucune valeur propre strictement positive, on peut néanmoins affirmer que A^\top possède une valeur propre complexe λ non réelle de partie réelle strictement positive car $\operatorname{tr}(A^\top) = \operatorname{tr}(A) > 0$. On note à nouveau u un vecteur propre associé.



ATTENTION! u est un vecteur à coefficients complexes donc on va devoir raisonner un peu différemment que dans le cas précédent.

Comme précédemment, $\varphi(t) = \varphi(0)e^{\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. A nouveau, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$ car $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$. Si $\varphi(0) \neq 0$, $|\varphi(t)| = |\varphi(0)|e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\varphi(0) = 0$ puis $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On ne peut plus poser $\lambda : y \mapsto u^\top y$ car λ serait alors à valeurs dans \mathbb{C} et ne serait pas une forme linéaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Néanmoins, il existe $(v, w) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ tel que $u = v + iw$. Comme $u^\top x(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et que x est à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $v^\top x(t) = w^\top x(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On peut donc poser au choix $\lambda : y \mapsto v^\top y$ ou $\lambda : y \mapsto w^\top y$.

Solution 8

1. En développant par rapport à la dernière ligne,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Delta(x) = (f(b)g(x) - g(b)f(x)) - (f(a)g(x) - g(a)f(x)) + (f(a)g(b) - g(a)f(b))$$

Comme f et g sont continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, Δ l'est également. De plus,

$$\forall x \in]a, b[, \Delta'(x) = (f(b)g'(x) - g(b)f'(x)) - (f(a)g'(x) - g(a)f'(x)) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$$

2. Par caractère alterné du déterminant, $\Delta(a) = \Delta(b) = 0$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle : il existe $c \in]a, b[$ tel que $\Delta'(c) = 0$ i.e. $(g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c)$.

Solution 9

Remarquons déjà que $f(0) = f(2 \times 0) = 2f(0)$ et donc $f(0) = 0_E$.

On montre alors aisément par récurrence que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{f(x)}{2^n}$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x/2^n) - f(0)}{x/2^n - 0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(0)$$

Ainsi $f(x) = xf'(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (déjà montré pour $x = 0$) : f est bien linéaire.

Solution 10

1. Comme A commute avec B , on montre sans peine que A commute avec B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ puis que A commute avec $P(B)$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ i.e. A commute avec tout élément de $\mathbb{K}[B]$. On propose alors deux méthodes pour conclure.

Première méthode. Posons $S_p = \sum_{k=0}^p \frac{B^k}{k!} \in \mathbb{K}[B]$. Alors $AS_p = S_pA$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Comme les applications $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AX$ et $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto XA$ sont des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, elles sont continues. Puisque $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_p = \exp(B)$, on obtient en passant à la limite $A \exp(B) = \exp(B)A$.

Deuxième méthode. $\mathbb{K}[B]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie. Ainsi $\mathbb{K}[B]$ est fermé. Notamment, $\exp(B) = \lim_{p \rightarrow +\infty} S_p \in \mathbb{K}[B]$. On en déduit que A commute avec $\exp(B)$.

2. Les applications $t \mapsto \exp(t(A+B))$, $t \mapsto \exp(-tB)$ et $t \mapsto \exp(-tA)$ sont dérivables de dérivées respectives $t \mapsto (A+B)\exp(t(A+B))$, $t \mapsto -B\exp(-tB)$ et $t \mapsto -A\exp(-tA)$. Comme l'application $(M, N, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3 \mapsto MNP$ est trilineaire, φ est dérivable et

$$\forall t \in [0, 1], \varphi'(t) = (A+B)\exp(t(A+B))\exp(-tA)\exp(-tB) - \exp(t(A+B))B\exp(-tB)\exp(-tA) - \exp(t(A+B))\exp(-tB)A\exp(-tA)$$

Il est clair que B commute avec $t(A+B)$ et que A commute avec $-tB$ et $t(A+B)$ donc la question précédente montre que

$$\forall t \in [0, 1], \varphi'(t) = (A+B)\exp(t(A+B))\exp(-tA)\exp(-tB) - A\exp(t(A+B))\exp(-tA)\exp(-tB) - B\exp(t(A+B))\exp(-tA)\exp(-tB) = 0$$

3. φ est donc constante sur l'intervalle $[0, 1]$. En particulier,

$$\exp(A+B)\exp(-B)\exp(-A) = \varphi(1) = \varphi(0) = I_n$$

En prenant $B = 0$ qui commute bien avec A , on obtient $\exp(A)\exp(-A) = I_n$ et donc également $\exp(-A)\exp(A) = I_n$. De la même manière, $\exp(-B)\exp(B) = I_n$. En multipliant à droite par l'égalité $\exp(A+B)\exp(-B)\exp(-A) = \varphi(1) = I_n$ par $\exp(A)\exp(B)$, on obtient alors le résultat voulu.

Solution 11

Notons \mathcal{B} une base de \mathbb{R}^2 et posons $\varphi(t) = \det_{\mathcal{B}}(f(t), f(b) - f(a))$. Comme f est continue sur $[a, b]$ (resp. dérivable sur $]a, b[$) et $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \det(x, f(b) - f(a))$ est linéaire, φ est continue sur $[a, b]$ (resp. dérivable sur $]a, b[$). De plus,

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \det_{\mathcal{B}}(f(b), f(b) - f(a)) - \det_{\mathcal{B}}(f(a), f(b) - f(a)) = \det_{\mathcal{B}}(f(b) - f(a), f(b) - f(a)) = 0$$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or

$$\forall t \in]a, b[, \varphi'(t) = \det_{\mathcal{B}}(f'(t), f(b) - f(a))$$

donc

$$\varphi'(c) = \det_{\mathcal{B}}(f'(c), f(b) - f(a)) = 0$$

donc $f'(c)$ est colinéaire à $f(b) - f(a)$.

Solution 12

1. Soit $u : t \in I \mapsto f(t) \wedge f'(t)$. Comme le produit vectoriel est bilinéaire et que f et f' sont de classe \mathcal{C}^1 sur I , u est de classe \mathcal{C}^1 sur I et

$$\forall t \in I, u'(t) = f'(t) \wedge f'(t) + f(t) \wedge f''(t) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

car $f'(t)$ est colinéaire avec lui-même de même et $f''(t)$ est colinéaire avec $f(t)$. On en déduit que u est constante sur I . Comme $(f(t_0), f'(t_0))$ est libre, $u(t_0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Pour tout $t \in I$, $f(t)$ est orthogonal à $u(t) = u(t_0)$. Ainsi f est à valeurs dans le plan vectoriel admettant $u(t_0)$ comme vecteur normal.

2. Notons \mathcal{B} une base orthonormale du plan précédent. Alors l'aire $A(t)$ du triangle défini dans l'énoncé et $A(t) = \frac{1}{2} \det_{\mathcal{B}}(f(t), f'(t))$. Comme $\det_{\mathcal{B}}$ est bilinéaire, on montre comme précédemment que A est de classe \mathcal{C}_1 sur I et que

$$\forall t \in I, A'(t) = \frac{1}{2} \det_{\mathcal{B}}(f'(t), f'(t)) + \det_{\mathcal{B}}(f(t), f''(t)) = 0$$

pour les mêmes raisons que précédemment. Ainsi A est constante sur I .

Solution 13

Notons $C_1(t), \dots, C_n(t)$ les colonnes de $A(t)$. En notant \mathcal{B} la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\forall t \in I, \varphi(t) = \det_{\mathcal{B}}(C_1(t), \dots, C_n(t))$$

Comme A est de classe \mathcal{C}^1 sur I , les C_i le sont également et, par multilinéarité de $\det_{\mathcal{B}}$, φ l'est aussi. De plus,

$$\forall t \in I, \varphi'(t) = \det_{\mathcal{B}}(C'_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)) + \dots + \det_{\mathcal{B}}(C_1(t), \dots, C_{n-1}(t), C'_n(t))$$

En notant $B_j(t)$ la matrice $A(t)$ dans laquelle on a remplacé la $j^{\text{ème}}$ colonne par $C'_j(t)$, on a donc

$$\forall t \in I, \varphi'(t) = \sum_{j=1}^n \det(B_j(t))$$

En développant $\det(B_j(t))$ par rapport à sa $j^{\text{ème}}$ colonne,

$$\forall t \in I, \det(B_j(t)) = \sum_{i=1}^n (A'(t))_{i,j} \text{com}(A(t))_{i,j}$$

Ainsi

$$\forall t \in I, \varphi'(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (A'(t))_{i,j} \text{com}(A(t))_{i,j} = \text{tr}(\text{com}(A(t))^T A'(t))$$

Solution 14

1. Soit $HR(n)$ l'hypothèse de récurrence :

«Il existe un polynôme P_{n-1} tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}$.»

$HR(1)$ est vraie : il suffit de prendre $P_0 = 1$.

Supposons $HR(n)$ pour un certain $n \geq 1$. Alors pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P'_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n} - \frac{2nxP_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{(1+x^2)P'_{n-1}(x) - 2nxP_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Il suffit donc de prendre $P_n = (1+X^2)P'_{n-1} - 2nXP_{n-1}$.

Par récurrence, $HR(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Si P_{n-1} et Q_{n-1} sont deux polynômes vérifiant la condition de l'énoncé, alors ils coïncident sur \mathbb{R} . Ils sont donc égaux. D'où l'unicité.

2. Commençons par la parité. Soit $HR(n)$ l'hypothèse de récurrence :

« P_n a la parité de n .»

$HR(0)$ est vraie puisque $P_0 = 0$ est pair. Supposons $HR(n-1)$ pour un certain $n \geq 1$.

- Si n est pair, $n-1$ est impair donc P_{n-1} est impair d'après $HR(n-1)$. Mais alors P'_{n-1} et XP_{n-1} sont pairs. Or $P_n = (1+X^2)P'_{n-1} - 2nXP_{n-1}$ donc P_n est pair.
- Si n est impair, $n-1$ est pair donc P_{n-1} est pair d'après $HR(n-1)$. Mais alors P'_{n-1} et XP_{n-1} sont impairs. Or $P_n = (1+X^2)P'_{n-1} - 2nXP_{n-1}$ donc P_n est impair.

Donc $HR(n)$ est vraie. Par récurrence, $HR(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Occupons-nous maintenant du degré et du coefficient dominant. Soit $HR(n)$ l'hypothèse de récurrence :

« $\deg P_n = n$ et le coefficient dominant de P_n est $(n+1)!$ si n est pair, $-(n+1)!$ si n est impair.»

$HR(0)$ est vraie puisque $P_0 = 1$. Supposons $HR(n-1)$ pour un certain $n \geq 1$. On a donc $\deg P_{n-1} = n-1$.

- Si n est pair, $n-1$ est impair et le coefficient dominant de P_{n-1} est $-n!$. On a $\deg P'_{n-1} = n-2$ (éventuellement $-\infty$ si $n=1$) et le coefficient dominant de P'_{n-1} est $-(n-1)n!$ (pas de coefficient dominant si $n=1$). Donc $\deg(1+X^2)P'_{n-1} = n$ (éventuellement $-\infty$ si $n=1$) et le coefficient dominant de $(1+X^2)P'_{n-1}$ est $-(n-1)n!$ (pas de coefficient dominant si $n=1$). De même, $\deg 2nXP_{n-1} = n$ et le coefficient dominant de $2nXP_{n-1}$ est $-2nn!$. Puisque $-(n-1)n! + 2nn! = (n+1)! \neq 0$, on en déduit que $\deg P_n = n$ et que le coefficient dominant de P_n est $(n+1)!$.
- Si n est impair, $n-1$ est pair et le coefficient dominant de P_{n-1} est $n!$. On a $\deg P'_{n-1} = n-2$ (éventuellement $-\infty$ si $n=1$) et le coefficient dominant de P'_{n-1} est $(n-1)n!$ (pas de coefficient dominant si $n=1$). Donc $\deg(1+X^2)P'_{n-1} = n$ (éventuellement $-\infty$ si $n=1$) et le coefficient dominant de $(1+X^2)P'_{n-1}$ est $(n-1)n!$ (pas de coefficient dominant si $n=1$). De même, $\deg 2nXP_{n-1} = n$ et le coefficient dominant de $2nXP_{n-1}$ est $2nn!$. Puisque $(n-1)n! - 2nn! = -(n+1)! \neq 0$, on en déduit que $\deg P_n = n$ et que le coefficient dominant de P_n est $-(n+1)!$.

Ainsi $HR(n)$ est vraie. Par conséquent, $HR(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Comme $\deg P_{n-1} = n-1 < 2n$ pour $n \geq 1$, $P_{n-1}(x) = o((1+x^2)^n)$ quand $x \rightarrow \pm\infty$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

4. Remarquons tout d'abord que les zéros de $f^{(n)}$ sont les zéros de P_{n-1} . Soit $HR(n)$ l'hypothèse de récurrence :

« $f^{(n)}$ s'annule au moins $n-1$ fois.»

$HR(1)$ est évidemment vraie. Supposons $HR(n)$ pour un certain $n \geq 1$. Si $n=1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(2)}(x) = 0$, donc $f^{(2)}$ s'annule au moins une fois sur \mathbb{R} d'après une généralisation classique du théorème de Rolle. Si $n > 1$, $f^{(n)}$ possède au moins $n-1$ zéros que nous noterons $x_1 < \dots < x_{n-1}$. En appliquant le théorème de Rolle à $f^{(n)}$ sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, on montre que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. En appliquant la même généralisation du théorème de Rolle à $f^{(n)}$ sur les intervalles $] -\infty, x_1[$ et $]x_{n-1}, +\infty[$, on montre que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles $] -\infty, x_1[$ et $]x_{n-1}, +\infty[$. On fait le compte : on a montré que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins n fois. Ainsi $HR(n)$ est vraie. Par récurrence $HR(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$. Comme les zéros de $f^{(n+1)}$ sont les zéros de P_n , on a prouvé que P_n admet au moins n racines réelles distinctes. Comme $\deg P_n = n$, P_n admet au plus n racines comptées avec multiplicité. On en déduit que toutes les racines de P_n sont réelles et simples.

Solution 15

1. On note $HR(n)$ la propriété à démontrer.

$HR(0)$ est vraie en posant $P_0 = 1$. Supposons $HR(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2n}}$$

En dérivant, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n+1)}(t) = \frac{(t^2 P_n'(t) - 2nt P_n(t) + P_n(t))e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2(n+1)}}$$

En posant $P_{n+1} = X^2 P_n' - 2nX P_n + P_n$, on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n+1)}(t) = \frac{P_{n+1}(t)e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2(n+1)}}$$

Ainsi $HR(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, $HR(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Notons g la restriction de f à \mathbb{R}^* . g est clairement de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* par opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^∞ .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow 0^+} g^{(n)}(t) = 0$ et on a évidemment $\lim_{t \rightarrow 0^-} g^{(n)}(t) = 0$ puisque $g^{(n)}$ est nulle sur \mathbb{R}^* . Ainsi

$\lim_{t \rightarrow 0} g^{(n)}(t) = 0$. Ceci prouve que g est prolongeable par continuité en 0 en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Mais puisque f est continue en 0 (étudier les limites en 0^+ et 0^-), $f = g$ et donc f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Solution 16

Notons a et b les abscisses respectives de A et B. Pour simplifier, nous supposons $a < b$. Le fait que B soit sur la tangente à \mathcal{C} en A se traduit par :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) \text{ ou encore } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a)$$

De même, on cherche donc un point M d'abscisse c vérifiant :

$$f(a) = f(c) + f'(c)(a - c)$$

Définissons une fonction g sur I par $\begin{cases} g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{pour } x \in I \setminus \{a\} \\ g(a) = f'(a) \end{cases}$. g est continue sur $]a, b]$ comme quotient de fonctions continues

dont le dénominateur ne s'annule pas. Comme f est dérivable en a , g est continue en a . g est donc continue sur $[a, b]$. De plus, g est dérivable sur $]a, b[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Enfin, $g(b) = g(a) = f'(a)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or pour $x \in]a, b[$, $g'(x) = \frac{f'(x)(x - a) - f(x) + f(a)}{(x - a)^2}$. On a donc

$$f'(c)(c - a) - f(c) + f(a) = 0$$

ce qui est bien l'égalité annoncée plus haut.

Intégration

Solution 17

1. Comme $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or $\|A\| < 1$ donc la série géométrique $\sum_{k \in \mathbb{N}} \|A\|^k$ converge. Par majoration, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \|A^k\|$ converge également i.e. la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} A^k$ converge absolument. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, la

série $\sum_{k \in \mathbb{N}} A^k$ converge. L'endomorphisme $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AX$ est continu puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie. Ceci nous permet d'affirmer que

$$A \sum_{k=0}^{+\infty} A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} A^{k+1}$$

puis que

$$(I_n - A) \sum_{k=0}^{+\infty} A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k - \sum_{k=0}^{+\infty} A^{k+1} = I_n$$

donc $I_n - A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$.

2. Remarquons déjà que $z \neq 0$ puisque $|z| > \|A\| \geq 0$. Remarquons alors que $zI_n - A = z\left(I_n - \frac{1}{z}A\right)$ et que $\left\|\frac{1}{z}A\right\| = \frac{\|A\|}{|z|} < 1$. D'après la question précédente, $I_n - \frac{1}{z}A$ est inversible et

$$\left(I_n - \frac{1}{z}A\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{z^k}$$

Comme $zI_n - A = z\left(I_n - \frac{1}{z}A\right)$, $zI_n - A$ est également inversible et

$$(zI_n - A)^{-1} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{z^{k+1}}$$

3. D'après la question précédente,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\theta})^{k+1} (re^{i\theta} I_n - A)^{-1} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\theta})^{k+1} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{r^{p+1} e^{i(p+1)\theta}} d\theta = r^k \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{r^p} e^{i(k-p)\theta} d\theta$$

Posons $u_p : \theta \mapsto \frac{A^p}{r^p} e^{i(k-p)\theta}$. Alors $\|u_p\|_{\infty} = \frac{\|A^p\|}{r^p} \leq \left(\frac{\|A\|}{r}\right)^p$ donc la série $\sum_{p \in \mathbb{N}} u_p$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[-\pi, \pi]$. Par interversion série/intégrale,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{r^p} e^{i(k-p)\theta} d\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A^p}{r^p} e^{i(k-p)\theta} d\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{r^p} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-p)\theta} d\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{r^p} \cdot 2\pi \delta_{k,p} = 2\pi \frac{A^k}{r^k}$$

On en déduit le résultat voulu.

4. Posons $\chi_A = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$. Alors

$$\begin{aligned} \chi_A(A) &= \sum_{k=0}^n \alpha_k A^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\theta})^{k+1} (re^{i\theta} I_n - A)^{-1} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} re^{i\theta} \sum_{k=0}^n \alpha_k re^{ik\theta} (re^{i\theta} I_n - A)^{-1} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} re^{i\theta} \chi_A(re^{i\theta}) (re^{i\theta} I_n - A)^{-1} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} re^{i\theta} \det(re^{i\theta} I_n - A) (re^{i\theta} I_n - A)^{-1} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} re^{i\theta} \text{com}(re^{i\theta} - A)^{\top} d\theta \end{aligned}$$

d'après la formule de la comatrice.

5. Remarquons que chaque coefficient de $\text{com}(re^{i\theta} - A)^\top$ est un polynôme en $re^{i\theta}$. Ainsi les coefficients de $re^{i\theta} \text{com}(re^{i\theta} - A)^\top$ sont des polynômes en $re^{i\theta}$ de coefficients constants nuls. Leur intégrale sur $[-\pi, \pi]$ est donc nulle. On en déduit que $\chi_A(A) = 0$.

Solution 18

1. Pour simplifier, posons $M = \max_{t \in [a, b]} \|f'(t)\|$. Par inégalité triangulaire,

$$\left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| \, dt$$

De plus,

$$\forall t \in [a, b], f(t) = f(a) + \int_a^t f'(u) \, du = \int_a^t f'(u) \, du$$

A nouveau par inégalité triangulaire,

$$\forall t \in [a, b], \|f(t)\| \leq \int_a^t \|f'(u)\| \, du \leq M(t - a)$$

En reprenant ce qui précède

$$\left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\| \leq \int_a^b M(t - a) \, dt = \frac{M(b - a)^2}{2}$$

2. D'après la relation de Chasles,

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) \, dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t) \, dt$$

Par inégalité triangulaire,

$$\left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\| \leq \left\| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) \, dt \right\| + \left\| \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t) \, dt \right\| \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} \|f(t)\| \, dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \|f(t)\| \, dt$$

D'une part

$$\forall t \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right], f(t) = f(a) + \int_a^t f'(u) \, du = \int_a^t f'(u) \, du$$

donc

$$\forall t \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right], \|f(t)\| \leq \int_a^t \|f'(u)\| \, du \leq M(t - a)$$

puis

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \|f(t)\| \, dt \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(t - a) \, dt = \frac{M(b - a)^2}{8}$$

D'autre part

$$\forall t \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right], f(t) = f(b) - \int_t^b f'(u) \, du = - \int_t^b f'(u) \, du$$

donc

$$\forall t \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right], \|f(t)\| \leq \int_t^b \|f'(u)\| \, du \leq M(b - t)$$

puis

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b \|f(t)\| \, dt \leq \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b - t) \, dt = \frac{M(b - a)^2}{8}$$

On en déduit finalement que

$$\left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\| \leq 2 \cdot \frac{M(b - a)^2}{8} = \frac{M(b - a)^2}{4}$$

Sommes de Riemann

Solution 19

On peut écrire $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k(n-k)} = n^2 \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)}$. On reconnaît une somme de Riemann.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} \, dx$$

On met le trinôme sous la racine sous forme canonique :

$$I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1 - (2x-1)^2} \, dx$$

Effectuons le changement de variables $u = 2x - 1$:

$$I = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} \, du$$

Or $\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} \, du$ est l'aire du demi-disque unité et vaut donc $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que $I = \frac{\pi}{8}$ puis que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{8} n^2$.

Solution 20

Les racines de $X^{2n} - 1$ sont les complexes $z_k = e^{i \frac{k\pi}{n}}$ pour $k \in \llbracket -n+1, n \rrbracket$. Mais pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $z_{-k} = \overline{z_k}$ donc

$$X^{2n} - 1 = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} (X-z_k)(X-\overline{z_k}) = (X^2-1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1\right)$$

Notons I l'intégrale à calculer. On a

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(r^2 - 2r \cos \theta + 1) \, d\theta$$

Par parité de cos, on peut affirmer que

$$I = \int_0^{\pi} \ln(r^2 - 2r \cos \theta + 1) \, d\theta$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$S_n = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(r^2 - 2r \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right)$$

Comme $\theta \mapsto \ln(r^2 - 2r \cos \theta + 1)$ est continue sur $[0, \pi]$, la suite (S_n) converge vers I d'après le théorème sur les sommes de Riemann. Mais d'après ce qui précède

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\pi}{n} \ln \left(\prod_{k=0}^{n-1} r^2 - 2r \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right) \\ &= \frac{\pi}{n} \ln \left((r-1)^2 \prod_{k=1}^{n-1} r^2 - 2r \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right) \\ &= \frac{\pi}{n} \ln \left((r-1)^2 \frac{r^{2n}-1}{r^2-1} \right) \\ &= \frac{\pi}{n} \ln \left(\frac{r-1}{r+1} r^{2n} - 1 \right) \\ &= \frac{\pi}{n} \ln(r^{2n}-1) + \frac{\pi}{n} \ln \frac{r-1}{r+1} \end{aligned}$$

Tout d'abord, $\frac{\pi}{n} \ln \frac{r-1}{r+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Puis

$$\frac{\pi}{n} \ln(r^{2n}-1) = 2\pi \ln r + \frac{\pi}{n} \ln \left(1 - \frac{1}{r^{2n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\pi \ln r$$

On en déduit que $I = 2\pi \ln r$.

Solution 21

1. On reconnaît une somme de Riemann. Puisque $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $[0, 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \ln(1+x) \, dx = [(1+x)\ln(1+x) - (1+x)]_0^1 = 2\ln 2 - 1 = \ln(4) - 1$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= \ln(4) + \ln(n) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(k) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \ln(k) \\ &= \ln(4) + \ln(n) - \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k) \\ &= \ln(4) + \ln(n) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k) \\ &= \ln(4) + \ln(n) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{n+k}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n) \\ &= \ln(4) - S_n \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(\ln(u_n))$ converge vers 1. On en déduit que la suite (u_n) converge vers e .

Solution 22

On pense évidemment à une somme de Riemann. On aurait eu directement le résultat si le terme général de la somme avait été $f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k}{n}\right)$ ou $f\left(\frac{k+1}{n}\right)g\left(\frac{k+1}{n}\right)$. L'idée est donc de se ramener à une telle somme. Le fait que g est supposée être de classe \mathcal{C}^1 et non \mathcal{C}^0 donne un indice.

Posons pour commencer

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k+1}{n}\right) \\ T_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k}{n}\right) \\ |S_n - T_n| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \left|g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right| \end{aligned}$$

Comme f est de classe \mathcal{C}^0 sur le segment $[0, 1]$ elle y est bornée. Notons alors M un majorant de $|f|$.

Comme g est de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[0, 1]$, sa dérivée g' y est continue. g' est donc bornée sur le segment $[0, 1]$. En notant K un majorant de $|g'|$, l'inégalité des accroissements finis montre que g est K -lipschitzienne sur $[0, 1]$.

En reprenant l'inégalité précédente, on obtient donc

$$|S_n - T_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{MK}{n} = \frac{MK}{n}$$

ou encore

$$T_n - \frac{MK}{n} \leq S_n \leq T_n + \frac{MK}{n}$$

Or on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \int_0^1 f(t)g(t) \, dt$ d'après le théorème sur les sommes de Riemann appliqué à la fonction continue fg et que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{MK}{n} = 0$ donc le théorème des gendarmes montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 f(t)g(t) \, dt$$

Formules de Taylor

Solution 23

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\left[0, \frac{k}{n^2}\right]$ donc on peut utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour f sur $\left[0, \frac{k}{n^2}\right]$ au premier ordre :

$$\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0)\frac{k}{n^2}\right| \leq \frac{M}{2} \left(\frac{k}{n^2}\right)^2$$

où M est un majorant de $|f''|$ sur $[0, 1]$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$\left|S_n - f'(0) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2}\right| \leq \frac{M}{2} \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^4}$$

Or on sait que $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ainsi

$$\left|S_n - f'(0) \frac{n(n+1)}{2n^2}\right| \leq \frac{M}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4}$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{f'(0)}{2}$.

Solution 24

1. Comme f est nulle sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$, $f^{(n)}(x) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > \frac{1}{2}$. Comme f est \mathcal{C}^∞ , les $f^{(n)}$ sont continues et donc $f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange entre $\frac{1}{2}$ et 0 :

$$\left|f(0) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k k!} f^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2^n n!} \sup_{\left[0; \frac{1}{2}\right]} |f^{(n)}|$$

On a vu précédemment que $f^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Par ailleurs, $\sup_{\left[0; \frac{1}{2}\right]} |f^{(n)}| \leq \sup_{\mathbb{R}_+} |f^{(n)}|$ (on a même égalité). Enfin, $f(0) = 1$ par hypothèse donc on obtient le résultat voulu.

2. Soit $n \geq 1$. Supposons $\sup_{\mathbb{R}_+} |f^{(n)}| = 2^n n!$ et posons

$$g(x) = f(x) - (1 - 2x)^n, \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

On a donc $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - (-1)^n 2^n n!$. Montrons par récurrence finie décroissante sur $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ que $g^{(k)}$ est de signe constant sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. D'après notre hypothèse, c'est clair pour $k = n$. Supposons $g^{(k)}$ de signe constant pour un certain k tel que $1 < k \leq n$. Alors $g^{(k-1)}$ est monotone. Or

$$g^{(k-1)}(x) = f^{(k-1)}(x) - \frac{n!}{(n-k+1)!} (1-2x)^{n-k+1}$$

donc $g^{(k-1)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ (puisque $n - k + 1 > 0$). Ainsi $g^{(k-1)}$ est de signe constant sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Donc, par récurrence, g' est de signe constant sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et g est monotone sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Comme $g(0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, g est nulle sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Or $g^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = -(-1)^n 2^n n! \neq 0$. Il y a donc contradiction.

Solution 25

Soit $x \in \left]-\frac{1}{\lambda}; \frac{1}{\lambda}\right[$. L'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et x au rang n donne :

$$|f(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \sup_{[0; x]} |f^{(n)}| \leq |\lambda x|^n < 1.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $f(x) = 0$.

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que f est nulle sur $\left]-\frac{k}{\lambda}; \frac{k}{\lambda}\right[$. On a vu que c'était vrai pour $k = 1$. Supposons-le vrai pour un $k \in \mathbb{N}^*$. Considérons les fonctions :

$$g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f\left(x - \frac{k}{\lambda}\right) \quad \quad x \mapsto f\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)$$

Comme f est nulle sur $\left]-\frac{k}{\lambda}; \frac{k}{\lambda}\right[$ par hypothèse de récurrence et que les $f^{(n)}$ sont continues, on a donc :

$$f^{(n)}\left(-\frac{k}{\lambda}\right) = f^{(n)}\left(\frac{k}{\lambda}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

c'est-à-dire

$$g_1^{(n)}(0) = g_2^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

De plus $\sup_{\mathbb{R}} |g_1^{(n)}| = \sup_{\mathbb{R}} |g_2^{(n)}| = \sup_{\mathbb{R}} |f^{(n)}|$. Donc g_1 et g_2 vérifient les mêmes hypothèses que f : elles sont donc nulles sur $\left]-\frac{1}{\lambda}; \frac{1}{\lambda}\right[$. Par conséquent, f est nulle sur $\left]-\frac{k+1}{\lambda}; \frac{k+1}{\lambda}\right[$.

Par récurrence, f est donc nulle sur tout intervalle $\left]-\frac{k}{\lambda}; \frac{k}{\lambda}\right[$ où $k \in \mathbb{N}^*$: elle est donc nulle sur \mathbb{R} .

Solution 26

On a clairement $\varphi(b) = 0$. On choisit donc A tel que $\varphi(a) = 0$. Il suffit ainsi de choisir A tel que :

$$A \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k - f(b) \quad (*)$$

Comme f est de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$, φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or, pour $x \in]a, b[$:

$$\varphi'(x) = - \sum_{k=0}^n f^{(k+1)}(x) k! (b-x)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} - A \frac{(b-x)^n}{n!}$$

Par télescopage, on obtient :

$$\varphi'(x) = - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n - A \frac{(b-x)^n}{n!}$$

Comme $\varphi'(c) = 0$, on obtient :

$$A + f^{(n+1)}(c) = 0$$

Il suffit alors d'utiliser la relation (*) pour obtenir l'égalité voulue.

Solution 27

1. Soit l'hypothèse de récurrence : $\forall x \in]-1, +\infty[, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$.

Initialisation : Pour tout $x \in]-1, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^0 0!}{(1+x)^0}$. Donc HR(1) est vraie.

Hérédité : On suppose HR(n) vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc pour tout $x \in]-1, +\infty[, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. En dérivant, on obtient

$$\forall x \in]-1, +\infty[, f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Conclusion : HR(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Comme f est de classe \mathcal{C}^∞ , on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1 à un ordre $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Pour $t \in [0, 1]$, $|f^{(n+1)}(t)| \leq n!$ donc

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (1-0)^k \right| \leq n! \frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

On en déduit que

$$|\ln 2 - u_n| \leq \frac{1}{n+1}$$

3. Il est immédiat que (u_n) converge vers $\ln(2)$.

REMARQUE. On peut alors noter $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Solution 28

1. Si $M_0 = 0$, alors f est constamment nulle donc $M_0 = M_1 = M_2 = 0$ et l'inégalité est vérifiée.
Si $M_2 = 0$, alors f est affine. Mais comme f est bornée, f est constante. On a donc $M_1 = 0$ et l'inégalité est encore vérifiée.
2. Comme f est de classe \mathcal{C}^2 , on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre x et $x+h$, ce qui donne le résultat voulu.
3. Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |f'(x)h| &\leq |f'(x)h + f(x) - f(x+h)| + |f(x+h) - f(x)| \\ &\leq \frac{M_2 h^2}{2} + |f(x+h)| + |f(x)| \\ &\leq \frac{M_2 h^2}{2} + 2M_0 \end{aligned}$$

Puisque $h > 0$,

$$|f'(x)| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{2M_0}{h}$$

4. g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(t) = b - \frac{a}{t^2}$. On a donc $g'(t) \leq 0$ pour $0 < t \leq \sqrt{\frac{a}{b}}$ et $g'(t) \geq 0$ pour $t \geq \sqrt{\frac{a}{b}}$. On en déduit que g admet un minimum en $\sqrt{\frac{a}{b}}$ et que celui-ci vaut $g\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right) = 2\sqrt{ab}$.

5. L'inégalité

$$|f'(x)| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{2M_0}{h}$$

étant valable pour tout $h > 0$, elle est notamment valable pour h minimisant le membre de droite. Il suffit alors d'appliquer la question précédente avec $a = 2M_0$ et $b = \frac{M_2}{2}$. On en déduit que

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{2M_0 \times \frac{M_2}{2}} = 2\sqrt{M_0 M_2}$$

Cette dernière inégalité étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a par passage à la borne supérieure :

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$$

Solution 29

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de Taylor avec reste intégral assure que $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$. En effectuant le changement de variable $t = xu$, on obtient

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du$$

Comme $f^{(n+1)}$ est positive,

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du$$

De même,

$$R_n(r) = \frac{r^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ru) du$$

Mais $f^{(n+1)}$ est croissante sur I puisque $f^{(n+2)}$ est positive sur I . Ainsi puisque $x < r$, $f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(ru)$ pour tout $u \in [0, 1]$ puis

$$\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du \leq \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ru) du$$

On en déduit l'inégalité demandée.

2. Soit $x \in I$. Il existe $r \in]0, R[$ tel que $|x| < r$. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}} R_n(r)$$

D'une part, l'expression intégrale de $R_n(r)$ montre que $R_n(r) \geq 0$. D'autre part, $f(r) = S_n(r) + R_n(r)$ et $S_n(r) \geq 0$ en tant que somme de termes positifs. Ainsi $R_n(r) \leq f(r)$. La suite $(R_n(r))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée. Puisque $|x| < r$, $\frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}} R_n(r) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit que $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ i.e. $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Solution 30

Soit $k \in [0, n]$. f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\left[0, \frac{k}{n^2}\right]$ donc on peut utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour f sur $\left[0, \frac{k}{n^2}\right]$ au premier ordre :

$$\left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0) \frac{k}{n^2} \right| \leq \frac{M}{2} \left(\frac{k}{n^2}\right)^2$$

où M est un majorant de $|f''|$ sur $[0, 1]$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$\left| S_n - f'(0) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} \right| \leq \frac{M}{2} \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^4}$$

Or on sait que $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ainsi

$$\left| S_n - f'(0) \frac{n(n+1)}{2n^2} \right| \leq \frac{M}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4}$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{f'(0)}{2}$.

Solution 31

1. Il est clair que $\lim_0 g = 0$. g est donc prolongeable par continuité en 0.

2. g est dérivable sur $]0, 1]$ et pour tout $x \in]0, 1]$,

$$g'(x) = 1 + \ln(x)$$

Ainsi g' est strictement négative sur $]0, e^{-1}[$, s'annule en e^{-1} et est strictement positive sur $]e^{-1}, 1]$.
 g est donc strictement décroissante sur $[0, e^{-1}]$ et strictement croissante sur $[e^{-1}, 1]$.

3. Tout d'abord, $-g(x) - x = -x(\ln x + 1) \geq 0$ pour tout $x \in]0, e^{-1}]$. En particulier, $-g(t_0) \geq t_0$. On a évidemment $t_0 \leq t_n \leq e^{-1}$ pour $n = 0$. Supposons que ce soit vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de $-g$ sur $[0, e^{-1}]$, $-g(t_0) \leq -g(t_n) \leq -g(e^{-1})$ donc a fortiori $t_0 \leq t_{n+1} \leq e^{-1}$. On a donc bien montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, t_0 \leq t_n \leq e^{-1}$$

4. Fixons $x \in [t_0, e^{-1}]$. Comme g est de classe \mathcal{C}^2 (et même \mathcal{C}^∞) sur $[x, e^{-1}]$, on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.

$$|g(x) - g(e^{-1}) - g'(e^{-1})(x - e^{-1})| \leq \frac{|x - e^{-1}|^2 \max_{[x, e^{-1}]} |g''|}{2}$$

Or $g'(e^{-1}) = 1 + \ln(e^{-1}) = 0$ et

$$\max_{[x, e^{-1}]} |g''| = \max_{t \in [x, e^{-1}]} \frac{1}{t} = \frac{1}{x \leq \frac{1}{t_0}}$$

On en déduit que

$$|g(x) - g(e^{-1})| \leq \frac{|x - e^{-1}|^2}{2t_0}$$

5. D'après la question précédente,

$$|t_1 - e^{-1}| = |g(t_0) - g(e^{-1})| \leq \frac{|t_0 - e^{-1}|^2}{2t_0} = \frac{(e^{-1} - t_0)^2}{2t_0}$$

Donc l'inégalité à établir est vraie lorsque $n = 1$.

Supposons qu'elle le soit pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$|t_{n+1} - e^{-1}| = |g(t_n) - g(e^{-1})| \leq \frac{|t_n - e^{-1}|^2}{2t_0} \leq \frac{1}{2t_0} \left(2t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0} \right)^{2^n} \right)^2 = 2t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0} \right)^{2^{n+1}}$$

Par récurrence, l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Remarquons que

$$\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0} = \frac{e^{-1}}{2t_0} - \frac{1}{2}$$

Puisque $t_0 \in \left] \frac{e^{-1}}{3}, e^{-1} \right[$,

$$\frac{1}{2} < \frac{e^{-1}}{2t_0} < \frac{3}{2}$$

Ainsi

$$0 < \frac{e^{-1} - t_0}{2t_0} < 1$$

Posons $q = \frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}$. La suite géométrique (q^n) converge donc vers 0. Sa suite extraite (q^{2^n}) converge également vers 0. Puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |t_n - e^{-1}| \leq 2t_0 q^n$$

la suite (t_n) converge vers e^{-1} .