POLYNÔMES

Divisibilité et division

Exercice 1.

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par le polynôme $X - a$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par le polynôme $(X-a)^2$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par le polynôme $(X-a)(X-b)$.

Exercice 2.

Soient
$$A = X^{100} - X^4 + X - 1 \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 + X + 1.$$
Trouver le reste de la division euclidienne de A par le polynôme B.

Exercice 3.✯

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$. Trouver une condition *nécessaire et suffisante* pour que $(X-1)^2$ divise
$$aX^{n+1} + bX^n + 1.$$
Calculer alors le quotient.

Exercice 4.✯

Soit $n \geqslant 2$. On pose $P_n = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$.

1. Déterminer le reste de P_n dans la division euclidienne par $X - 3$.
2. Déterminer le reste de P_n dans la division euclidienne par $(X-2)^2$.
3. Déterminer le reste de P_n dans la division euclidienne par $(X-2)^2(X-3)^2$.

Exercice 5.

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que B divise A dans $\mathbb{C}[X]$.

1. Justifier que B divise A dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Quels sont les entiers naturels n tels que le polynôme X^2+X+1 divise $X^{2n}+X^n+1$?
3. Pour tout entier naturel n , on pose
$$P_n = (1+X^4)^n - X^4.$$
Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des entiers naturels n tels que X^2+X+1 divise P_n.

Exercice 6.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le reste de la division euclidienne de $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par X^2+1.

Exercice 7.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$P_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1.$$
Déterminer le reste de la division euclidienne de P_n par $(X-1)^3$.

Exercice 8.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que le reste de la division euclidienne de P par $X+1$ est égal à 7 et que le reste de la division euclidienne de P par $X+5$ est égal à 3. Peut-on déterminer le reste de la division euclidienne de P par X^2+6X+5 ?

Exercice 9.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste dans la division euclidienne de
$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \Big(\sin(k\pi/n)X + \cos(k\pi/n)\Big)$$
par X^2+1.

Exercice 10.

Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ le polynôme $P_m = (X+1)^m - X^m - 1$ est il divisible par $Q = X^2+X+1$?

Exercice 11.

1. Le polynôme $(X+1)^{2009} + X^{2009} + 1$ est-il divisible par le polynôme X^2+X+1 ?
2. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ le polynôme X^2+X+1 divise-t-il le polynôme $(X+1)^n + X^n + 1$?

Exercice 12.

On pose $E = \mathbb{R}_4[X]$. Soit $A = X^2+1$ et $F = \{P \in E \mid A \text{ divise } P\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $E = F \oplus \mathbb{R}_1[X]$.
3. Déterminer une base de F.

EXERCICE 13.

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg A \geqslant 1$. On pose $d = \deg A$. On note D l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par A.

1. Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
2. Montrer que D est un projecteur de $\mathbb{K}[X]$.
3. Montrer que $\operatorname{Im} D = \mathbb{K}_{d-1}[X]$.
4. On note $A\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ multiples de A. Déduire de la question précédente que
$$\mathbb{K}[X] = A\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{d-1}[X]$$

EXERCICE 14.

Soient p un nombre premier et $P_n = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ avec $n \geqslant 1$. On suppose que

$$p \nmid a_n, \ \forall 0 \leqslant k \leqslant n-1, \ p \mid a_k \quad \text{et} \quad p^2 \nmid a_0.$$

Montrer que P_n est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Factorisations

EXERCICE 15.✯

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^{2k}$.

1. Montrer que la décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ de P_n s'écrit
$$P_n(X) = \prod_{k=1}^{n-1} (X^2 - 2\cos(k\pi/n)X + 1).$$
2. En déduire que
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/(2n)) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$
3. Calculer la valeur de
$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos(k\pi/n).$$

EXERCICE 16.

Décomposer sur $\mathbb{R}$ les polynômes suivants :

1. $A = X^3 + 1$;
2. $B = X^4 + 1$;
3. $C = X^4 + X^2 + 1$;
4. $D = X^6 + 1$;
5. $E = X^8 + 1$;
6. $F = X^8 + X^4 + 1$;
7. $G = X^4 - X^2 - 12$;
8. $H = X^6 - 1$.

EXERCICE 17.✯

Soit $n \geqslant 1$. Décomposer $X^n + 1$ sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 18.✯

Soit P le polynôme suivant,

$$X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1.$$

1. Vérifier que i est racine multiple de P.
2. En déduire la décomposition de P sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 19.✯

Factoriser en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes :

1. $X^{2n+1} - 1$;
2. $\sum_{k=0}^{2n} X^k$;
3. $1 + X^3 + X^6 + X^9$;

EXERCICE 20.

Soit $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$.

1. Vérifier que 2 est une racine multiple de P.
2. Déterminer toutes les racines de P.
3. Décomposer P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21.

Soit le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de P ?
3. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 22.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Donner sous forme trigonométrique les racines cubiques de e^{ia}.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z suivante : $z^6 - 2z^3 \cos a + 1 = 0$.
3. Dans cette question, on suppose que $a = \frac{\pi}{2}$.
   a. Représenter graphiquement les solutions de l'équation (E) (unité : 4cm).
   b. Factoriser $z^6 + 1$ sous la forme d'un produit de trois trinômes du second degré à coefficients réels.

Exercice 23.

On considère les polynômes $P = 3X^4 - 9X^3 + 7X^2 - 3X + 2$ et $Q = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$.

1. Décomposez P et Q en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$, puis sur $\mathbb{C}[X]$ (on pourra calculer les valeurs de P et Q en 1 et 2).
2. Déterminer le PPCM et le PGCD des polynômes P et Q.

Exercice 24.

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposez en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme :

$$P = X^{2n} - 2X^n \cos(n\theta) + 1$$

Exercice 25.

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le pgcd de $X^n - 1$ et $X^p - 1$.

Exercice 26.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{Z}[X]^2$ tel que $P \wedge Q = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = P(n) \wedge Q(n)$. Montrer que la suite (u_n) est périodique.

Exercice 27.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé. Exprimer $P \wedge P'$ à l'aide des racines de P et de leurs multiplicités.

Racines

Exercice 28.

Soit $\mathcal{E}$ l'équation $2z^3 - (7 + 2i)z^2 + (11 + i)z - 4 = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ admet une racine réelle que l'on calculera.
2. Résoudre $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 29.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

possède-t-il une racine multiple ?

Exercice 30.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme $P_n = X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1$.
2. En déduire une expression simple de $A_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$.
3. Donner une expression simple de $B_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$.
4. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer $C_n = \prod_{\substack{0 \leqslant k, l \leqslant n-1 \\ k \neq l}} (\omega^k - \omega^l)$.

Exercice 31.

1. Montrer que le polynôme $R = X^3 + X + 1$ admet trois racines complexes distinctes notées a, b, c.
2. Montrer que $a, b, c, -a, -b, -c$ sont six complexes distincts.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q tel que $Q(X^2) = P(X)P(-X)$.
4. En déduire un polynôme de degré 3 ayant pour seules racines a^2, b^2, c^2.

EXERCICE 32.
On cherche les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ de la forme $(X-a)(X-b)$ tels que P divise $P(X^3)$.

1. Déterminer les polynômes P dans le cas où $a = b$.
2. Montrer que si $a \neq b$ et $a^3 \neq b^3$, il existe 6 tels polynômes P dont 4 dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Déterminer les polynômes P dans le cas où $a \neq b$ et $a^3 = b^3$.
4. En déduire que 13 polynômes en tout conviennent dont 7 dans $\mathbb{R}[X]$.

EXERCICE 33.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 34.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ *si et seulement si*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^{\deg(P)}$$

EXERCICE 35.✯
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $T_n = X^n - X + 1$.

1. Déterminer le nombre de racines réelles de T_n.
2. Montrer que T_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}[X]$.

Lien coefficients/racines

EXERCICE 36.✯
Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant :

$$\begin{cases} |x| = |y| = |z| = 1 \\ x + y + z = 1 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

EXERCICE 37.✯
Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \end{cases}$$

EXERCICE 38.✯
Pour $n \geqslant 2$, on pose $P_n = (X+i)^n - (X-i)^n$.

1. Déterminer les racines complexes de P_n.
2. En déduire les valeurs de

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cotan}(k\pi/n) \quad \text{et} \quad B_n = \prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{cotan}(k\pi/n).$$

EXERCICE 39.✯
Soient a, b et c les racines complexes du polynôme $P = X^3 - 2X + 5$.

1. Calculer $S = a^4 + b^4 + c^4$.
2. Trouver un polynôme de degré trois à coefficients entiers dont a^2, b^2 et c^2 sont les racines.

EXERCICE 40.
Soient x, y, z trois complexes non nuls tels que $x + y + z = 0$ et $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$. Montrer que $|x| = |y| = |z|$.

Polynômes

Suites de polynômes

Exercice 41.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \end{array} \right.$.

1. Montrer que la fonction f_n est prolongeable par continuité en 0 et π. On notera encore f_n ce prolongement. Que valent alors $f_n(0)$ et $f_n(\pi)$?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme P_n tel que $\forall x \in [-1,1]$, $P_n(x) = f_n(\arccos x)$. On déterminera le degré et la parité de P_n en fonction de n.
3. Déterminer les valeurs de $P_n(1)$, $P_n(-1)$, $P_n(0)$, $P_n'(0)$.
4. Montrer que $|P_n(x)| \leqslant n+1$ pour tout $x \in [-1,1]$.
5. Etablir que les polynômes P_n vérifient la relation de récurrence : $P_{n+1} + P_{n-1} = 2XP_n$.
6. Justifier que f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\pi]$. En dérivant deux fois l'identité $\sin\theta\, f_n(\theta) = \sin(n+1)\theta$, déterminer une équation différentielle linéaire homogène que vérifie f_n.
7. En déduire une équation différentielle linéaire homogène que vérifie P_n.
8. On note $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Déduire de la question précédente une relation de récurrence entre a_{k+2} et a_k. Expliciter les a_k (on pourra distinguer le cas n pair et le cas n impair).

Exercice 42.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique P_n tel que $P_n(X+1) + P_n(X) = 2X^n$.
2. Trouver une relation entre P_n' et P_{n-1}.
3. Montrer que $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ et décomposer $P_n(X+1)$ sur cette base.
4. Montrer que $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.

Exercice 43.★★

Soient $n \in \mathbb{N}$ et Δ l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$P \longmapsto P(X+1) - P(X).$$

On pose $\Gamma_0 = 1$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\Gamma_k(X) = X(X-1)\dots(X-k+1).$$

On note Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Vérifier que $\Delta_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Montrer que $\mathcal{B}_n = (\Gamma_0, \dots, \Gamma_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Exprimer, pour tout $k \leqslant n$, $\Delta_n(\Gamma_k)$ dans la base $\mathcal{B}_n$. En déduire $\mathrm{Im}(\Delta_n)$ et $\mathrm{Ker}(\Delta_n)$.
4. Calculer, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $(\Delta_n)^\ell$. En déduire que Δ_n est nilpotent d'indice $n+1$.
5. Prouver que $\forall\, Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$P(X+1) - P(X) = Q(X).$$
Y-a-t-il unicité de P ?
6. Déterminer trois polynômes P_i, $i \in \{1,2,3\}$, tels que
$$\forall i\ ,\ \ P_i(X+1) - P_i(X) = X^i.$$
7. En déduire la valeur des sommes suivantes,
$$S_n = 1 + \dots + n\ ,\ \ T_n = 1^2 + \dots + n^2 \ \text{ et } \ U_n = 1^3 + \dots + n^3.$$

EXERCICE 44.

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $P_0 = 1$, $P_1 = X$, et

$$\forall n \geqslant 1 \quad P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}\,.$$

1. Calculer P_2, P_3 et P_4.
2. Montrer que $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$ pour tout $n \geqslant 0$. En déduire que P_n est pair si n est pair, et impair sinon.
3. Montrer que $\deg P_n = n$, et déterminer le coefficient dominant de P_n.
4. **a.** Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel x, on a $\cos(nx) = P_n\big(\cos(x)\big)$.

   b. En déduire que P_n admet les n racines distinctes suivantes : $\{\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$.

EXERCICE 45.

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - 2$, et

$$\forall n \geqslant 2 \quad P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}\,.$$

1. Calculer P_3 et P_4.
2. Montrer que P_n est de même parité que n.
3. Montrer que $\deg P_n = n$, et déterminer le coefficient dominant de P_n.
4. Calculer $P_n(0)$ (on distinguera selon la parité de n).
5. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$X^n + \frac{1}{X^n} = P_n\left(X + \frac{1}{X}\right).$$

6. Grâce à ce qui précède, factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

   a) $Q_1 = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 3X + 1$.

   b) $Q_2 = X^6 + X^5 - 9X^4 + 2X^3 - 9X^2 + X + 1$.

EXERCICE 46.★

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = (1+X)^n - (1-X)^n$.

1. Calculer P_1, P_2, P_3, P_4.
2. Montrer que P_n est impair.
3. Quel est le coefficient de X^n dans P_n ? Même question avec X^{n-1}.
   En déduire que le degré de P_n est égal à n (respectivement $n-1$) lorsque n est impair (respectivement pair).
4. Montrer que P_n est divisible par X.
5. **a.** Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est racine de P_n si et seulement si $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1$, et en déduire les racines complexes de P_n (on distinguera les cas n pair et n impair).
   Combien de ses racines sont réelles ?
6. Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ (on distinguera à nouveau les cas n pair et n impair).

Familles de Polynômes

EXERCICE 47.★★

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres réels deux à deux distincts. Soit ψ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$P \longmapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)).$$

1. Prouver que ψ est un isomorphisme.
2. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $(L_0, \dots, L_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que
$$\forall 0 \leqslant j, i \leqslant n \ , \ L_j(a_i) = \delta_{i,j}.$$
3. Justifier que $\mathcal{B} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Quelles sont les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans la base $\mathcal{B}$? Justifier la présence du mot *interpolateur* dans le titre de l'exercice.
4. Expliciter les polynômes $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ sous forme de produits.

EXERCICE 48.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $x_0, \dots, x_n$ n réels distincts. On définit pour $0 \leqslant i \leqslant n$ les polynômes

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

1. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $P = \sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i$.

EXERCICE 49.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Q_n = (X^2-1)^n$ et $P_n = \frac{1}{2^n n!} Q_n^{(n)}$. On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

1. Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3.
2. Quel est le degré de P_n ?
3. Montrer que P_n a la parité de n. En déduire $P_n(0)$ pour n impair et $P_n'(0)$ pour n pair.
4. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $P_n(0)$ pour n pair et $P_n'(0)$ pour n impair. On exprimera les résultats à l'aide de factorielles.
5. **a.** Vérifier que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (X^2-1)Q_n' = 2nXQ_n$$
   b. En dérivant $n+1$ fois cette relation, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (X^2-1)P_n'' + 2XP_n' = n(n+1)P_n$$
6. **a.** Montrer que $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.
   b. En appliquant le théorème de Rolle et à l'aide d'une récurrence, montrer que P_n admet exactement n racines réelles distinctes dans $]-1, 1[$.

EXERCICE 50.

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$. Montrer que la famille $\left((X-a)^k (X-b)^{n-k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Applications linéaires et polynômes

EXERCICE 51.★

Soient $n \geqslant 0$ et f définie sur $E = \mathbb{K}_n[X]$ par $f(P) = P - P'$. Prouver que $f \in GL(E)$ et expliciter f^{-1}.

EXERCICE 52.★

Soient $n \in \mathbb{N}$ et ϕ l'application définie sur l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ par

$$\phi : P \longmapsto \phi(P) = (X+1)P(X) - XP(X+1).$$

1. ϕ définit-il un endomorphisme de E_n ?
2. Déterminer le noyau de ϕ.
3. ϕ est-il surjectif ?

EXERCICE 53.

On note $U_0 = 1$, $U_p = \frac{X(X-1)\dots(X-p+1)}{p!}$ pour $p \geqslant 1$ et $\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$.

1. Montrer que $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
2. Calculer $\Delta^n(U_p)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que tout $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n peut s'écrire
$$P = P(0) + (\Delta P)(0)U_1 + \dots + (\Delta^n P)(0)U_n$$
4. Montrer que, pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ *si et seulement si* les coordonnées de P dans la base $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ sont entières.
5. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Montrer que f est polynomiale *si et seulement si* $\exists n \in \mathbb{N}, \Delta^n f = 0$.

Exercice 54.
Soient $n \geqslant 3$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$, $a \in \mathbb{R}$ et φ_n l'application définie sur E_n par,

$$\varphi_n(P) = (X-a)(P'(X)+P'(a)) - 2(P(X)-P(a)).$$

1. Vérifier que $\varphi_n \in \mathcal{L}(E_n)$.
2. On pose $P_k = (X-a)^k$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Justifier que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E_n.
3. Calculer $\varphi_n(P_k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. On distinguera les cas $k \leqslant 2$ et $k \geqslant 3$.
4. En déduire les sous-espaces $\mathrm{Im}(\varphi_n)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi_n)$. Quel est le rang de φ_n ?
5. Prouver que $E_n = \mathrm{Ker}(\varphi_n) \oplus \mathrm{Im}(\varphi_n)$.
6. Pour quelles valeurs de $n \geqslant 3$ l'endomorphisme φ_n est-il un projecteur de E_n ?

Exercice 55.✯
Soit φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P) = \frac{P(X+1)+P(X)}{2}$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $\varphi(X^k)$.
2. Établir que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. Déduire de ce qui précède que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
4. **a.** Justifier l'existence et l'unicité d'un polynôme U_n tel que $U_n(X+1)+U_n(X) = \dfrac{2X^n}{n!}$.
   b. Démontrer que
   $$U_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n(0)+U_n(1) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n' = U_{n-1}$$
   c. On pose $V_n(X) = (-1)^n U_n(1-X)$. Calculer $\varphi(V_n)$. En déduire que $U_n(1-X) = (-1)^n U_n(X)$.

Equations d'inconnue polynomiale

Exercice 56.✯
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X^2) = (X^2+1)P(X).$$

Exercice 57.✯
Déterminer les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant $P(X+1) = P(X)$.

Exercice 58.
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$(P')^2 = 4P.$$

Exercice 59.
On cherche les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient l'équation

$$P(X^2) = XP(X).$$

1. On suppose que $P \neq 0$.
   a. Quel est le degré de P ?
   b. Quelle est la seule racine possible pour P ?
2. Conclure.

Exercice 60.
Résoudre l'équation $P'P'' = 18P$ où $P \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 61.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique P_n tel que $P_n(X+1)+P_n(X) = 2X^n$.
2. Trouver une relation entre P_n' et P_{n-1}.
3. Montrer que $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ et décomposer $P_n(X+1)$ sur cette base.
4. Montrer que $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.

Exercice 62.
Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

EXERCICE 63.

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non nul tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)\mathrm{P}(\mathrm{X})$.

1. Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, a^{2^n} est une racine P.
2. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine non nulle de P (s'il en existe). Montrer que a est une racine de l'unité.
3. Les racines de P sont-elles toutes nécessairement des racines de l'unité ?
4. En raisonnant par l'absurde, montrer que la seule racine non nulle possible pour P est 1.
5. Déterminer tous les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)\mathrm{P}(\mathrm{X})$.

EXERCICE 64.

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non nul tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{P}(\mathrm{X})\mathrm{P}(\mathrm{X}-1)$.

1. Montrer par l'absurde que 0 n'est pas racine de P.
2. Montrer que les racines de P sont de module 1.
3. En déduire tous les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{P}(\mathrm{X})\mathrm{P}(\mathrm{X}-1)$.

EXERCICE 65.

Déterminer les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $6\mathrm{P} = \mathrm{X}^2\mathrm{P}''$.

EXERCICE 66.

On identifiera les polynômes et leurs fonctions polynomiales associées.
Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non nul vérifiant la relation

$$(*) \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}^2-1) = \mathrm{P}(\mathrm{X}-1)\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$$

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On définit une suite $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par $a_0 = \alpha$ et $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - **a.** Montrer que si α est racine de P, a_n est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - **b.** On suppose $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. (a_n) est alors une suite de réels. Montrer que (a_n) est strictement monotone.
   - **c.** En déduire que P n'admet aucune racine strictement positive.
2.
   - **a.** Montrer que -1 n'est pas racine de P.
   - **b.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $a_n + 1$ en fonction de α et n.
   - **c.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = |a_n + 1|$. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur α la suite (r_n) est-elle strictement monotone ?
   - **d.** En déduire que si α est racine de P, alors $|\alpha + 1| = 1$.
   - **e.** Montrer que si α est racine de P, alors $|\alpha - 1| = 1$.
3. Montrer que si P est non constant, alors P admet 0 pour unique racine.
4. Déterminer tous les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ vérifiant la relation $(*)$.

Divers

EXERCICE 67.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que X^n divise $1 + \mathrm{X} - \mathrm{P}^2$.

EXERCICE 68.

Soient P et Q des polynômes de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n \mathrm{X}^n$ avec (a_n) une suite presque nulle de réels positifs. Montrer que PQ est également de cette forme.

EXERCICE 69.

Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2$.

Exercice 70.

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
3. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Exercice 71.
Existe-t-il $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in [0,1],\ P(x) = \cos x$?

Exercice 72.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que

$$\int_{-1}^{1} P^2(x)\ dx = -i\int_0^{\pi} P^2(e^{i\theta})e^{i\theta}\ d\theta$$

En déduire l'inégalité

$$\int_{-1}^{1} P^2(x)\ dx \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{it})|^2\ dt$$

2. En déduire que si $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, alors

$$\sum_{0 \leqslant k,\ell \leqslant n} \frac{a_k a_\ell}{k+\ell+1} \leqslant \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2$$

Exercice 73.
Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \ P(z) = \overline{z}\ ?$$