# Ensembles

Sans rentrer dans les détails, on appelle *ensemble* une collection d'objets. Ces objets sont appelés les *éléments* de l'ensemble.

## 1 Appartenance et inclusion

**Définition 1.1**

L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé *ensemble vide* et est noté $\varnothing$. Un ensemble à un élément est appelé un *singleton*, un ensemble à deux éléments est une *paire*.

**Définition 1.2 Appartenance**

On dit que $x$ *appartient* à un ensemble $E$ si $x$ est un élément de $E$ et on note alors $x \in E$.

**Décrire un ensemble**

- Un ensemble est dit défini *en extension* lorsqu'il est défini par l'énumération de ses éléments. Par exemple, $A = \{1,3,5,7\}$.
- Un ensemble est dit défini *en compréhension* lorsqu'il est défini par une propriété caractéristique de ses éléments. Par exemple, l'ensemble des entiers naturels pairs est $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k, n = 2k\}$. Autrement dit, l'ensemble des entiers naturels pairs est l'ensemble des entiers $n$ pour lesquels il existe un entier naturel $k$ tel que $n = 2k$.
- Un ensemble peut être défini à l'aide d'un autre ensemble. Par exemple, l'ensemble des entiers naturels pairs peut se noter $\{2k, k \in \mathbb{N}\}$. Autrement dit, l'ensemble des entiers naturels pairs est l'ensemble des entiers de la forme $2k$ lorsque $k$ parcourt $\mathbb{N}$.

**Remarque.** De manière plus concise, l'ensemble des entiers naturels pairs se note aussi $2\mathbb{N}$. ■

**Attention !** Quand on décrit un ensemble en compréhension, on donne d'abord les éléments puis la condition qu'ils vérifient. Par exemple, la notation $\{n = 2k\}$ pour désigner l'ensemble des entiers naturels pairs n'a *AUCUN SENS*. Au mieux pourrait-on voir cet «ensemble» comme un ensemble d'équations.

**Exemple 1.1**

L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 1-périodiques peut se noter $\left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)\right\}$. Là encore, des notations du style $\left\{f(x+1) = f(x)\right\}$ ou $\left\{f(x+1) = f(x),\ x \in \mathbb{R}\right\}$ ou encore $\left\{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)\right\}$ n'ont *AUCUN SENS*.

**Définition 1.3 Inclusion**

On dit qu'un ensemble $E$ est *inclus* dans un ensemble $F$ si tout élément de $E$ est un élément de $F$ et on note alors $E \subset F$. De manière plus concise,

$$(E \subset F) \iff (\forall x, x \in E \implies x \in F)$$

**Exemple 1.2**

On a la suite d'inclusion bien connue : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

**ATTENTION !** Attention à ne pas confondre appartenance et inclusion.

- On a bien $0 \in \mathbb{N}$ mais $0 \not\subset \mathbb{N}$. Néanmoins, $\{0\} \subset \mathbb{N}$.
- On a bien $\{-1,0,1\} \subset \mathbb{Z}$ mais $\{-1,0,1\} \notin \mathbb{Z}$.

Un élément peut appartenir à un ensemble mais ne peut pas être inclus dans un ensemble. Un ensemble peut être inclus dans un ensemble mais ne peut pas appartenir à un ensemble (à moins qu'il s'agisse d'un ensemble d'ensembles ...).

**Définition 1.4 Partie**

On appelle partie d'un ensemble E tout ensemble F inclus dans E. L'ensemble des parties de E se note $\mathscr{P}(\mathrm{E})$.

**Exercice 1.1**

Énumérer les parties de l'ensemble $\{1,2,3\}$.

**Définition 1.5 Egalité**

On dit que deux ensembles E et F sont *égaux* si tout élément de E est un élément de F et réciproquement. On note alors $\mathrm{E}=\mathrm{F}$. De manière plus concise,

$$(\mathrm{E}=\mathrm{F}) \iff (\forall x, x \in \mathrm{E} \iff x \in \mathrm{F})$$

**Proposition 1.1**

Soient E et F deux ensembles alors $\mathrm{E}=\mathrm{F}$ *si et seulement si* $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$ et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.

## Méthode Inclusion et égalité en pratique

- Pour montrer que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$, on montre que tout élément de E est un élément de F. On rédige donc de la manière suivante :
  «Soit $x \in \mathrm{E}$. Montrons que $x \in \mathrm{F}$».
- Pour montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, on peut soit montrer que $x \in \mathrm{E}$ *si et seulement si* $x \in \mathrm{F}$ en raisonnant par équivalence, soit procéder par *double inclusion* en montrant que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$ et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. Dans ce cas, la rédaction se fait en deux étapes :
  - «Soit $x \in \mathrm{E}$. Montrons que $x \in \mathrm{F}$».
  - «Soit $x \in \mathrm{F}$. Montrons que $x \in \mathrm{E}$».

On peut également raisonner directement sur les ensembles sans considérer les éléments.

**Exercice 1.2** **Médiatrice**

Soient A et B deux points du plan. Montrer que l'ensemble des points du plan équidistants de A et B est la droite orthogonale au segment [AB] en son milieu.

**Exercice 1.3**

Soient $\mathrm{A}=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x-y=1\}$ et $\mathrm{B}=\{(t+1,2t+1),\ t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

## 2 Opérations sur les ensembles

**Définition 2.1 Intersection, union**

Soient A et B deux ensembles.

- On appelle *intersection* de A et B l'ensemble noté $A \cap B$ des éléments qui sont à la fois dans A et dans B. De manière plus concise,
$$(x \in A \cap B) \iff (x \in A \text{ ET } x \in B)$$
- On appelle *union* de A et B l'ensemble noté $A \cup B$ des éléments qui sont dans A ou dans B. De manière plus concise,
$$(x \in A \cup B) \iff (x \in A \text{ OU } x \in B)$$

**Définition 2.2 Intersection et union d'une famille d'ensembles**

Ces définitions se généralisent à plus de deux ensembles. En effet, soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles.

- On appelle *intersection* des $A_i$, notée $\bigcap_{i \in I} A_i$ l'ensemble des éléments qui sont dans *tous* les $A_i$. De manière plus concise,
$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff (\forall i \in I, x \in A_i)$$
- On appelle *union* des $A_i$, notée $\bigcup_{i \in I} A_i$ l'ensemble des éléments qui sont dans *au moins un* des $A_i$. De manière plus concise,
$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff (\exists i \in I, x \in A_i)$$

**Exercice 2.1**

Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0, 1[$ et que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right[ = [0, 1]$.

**Proposition 2.1 Distributivité de l'intersection et de l'union l'une sur l'autre**

Soient A, B, C trois ensembles. Alors

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Cette propriété se généralise à une famille infinie d'ensembles :

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i) \quad \text{et} \quad A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$$

**Définition 2.3 Différence, complémentaire**

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

- On appelle différence de B dans A, notée $A \setminus B$, l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas des éléments de B. De manière plus concise,
$$x \in A \setminus B \iff (x \in A \text{ ET } x \notin B)$$
- On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble $E \setminus A$ et on le note $\complement_E A$, ou $A^c$ ou $\bar{A}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble de référence E. De manière plus concise,
$$x \in \bar{A} \iff x \notin A$$

**Remarque.**

- Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Alors $A \cap \bar{A} = \varnothing$ et $A \cup \bar{A} = E$.
- Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Alors $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

■

**Proposition 2.2**

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Alors
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
Là aussi, ces propriétés se généralisent à des familles d'ensembles. Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Alors
$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i$$

**Remarque.** Si on traduit en français :

- le complémentaire de l'intersection est l'union des complémentaires ;
- le complémentaire de l'union est l'intersection des complémentaires.

■

**Lien entre logique et ensembles**

| **Logique** | **Ensembles** | **Lien** |
|---|---|---|
| Implication | Inclusion | $(A \subset B) \iff (x \in A \implies x \in B)$ |
| Équivalence | Égalité | $(A = B) \iff (x \in A \iff x \in B)$ |
| Conjonction | Intersection | $x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ ET } x \in B)$ |
| Disjonction | Union | $x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ OU } x \in B)$ |
| Négation | Complémentaire | $x \in \bar{A} \iff x \notin A \iff \text{NON}(x \in A)$ |

**Définition 2.4 Partition**

Soient E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On dit que cette famille est une *partition* de E si

(i) $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$ ;

(ii) $\bigcup_{i\in I} A_i = E$ ;

(iii) les $A_i$ sont deux à deux disjoints i.e. $\forall (i,j) \in I^2$, $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$.

**Exemple 2.1**

$2\mathbb{Z}$ et $2\mathbb{Z}+1$ forment une partition de $\mathbb{Z}$.

# 3 Produit cartésien

**Définition 3.1 Produit cartésien**

Soient $E_1, E_2, \dots E_n$ $n$ ensembles. On appelle *produit cartésien* des ensembles $E_i$, noté $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ l'ensemble des $n$-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où $x_i \in E_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, le produit cartésien se note $E^n$.

**Exemple 3.1**

$\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples $(x,y)$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

**Définition 3.2 $n$-uplet**

On appelle $n$-uplet tout élément d'un produit cartésien de $n$ ensembles. Un 2-uplet s'appelle aussi un *couple*, un 3-uplet un *triplet*, etc.…

**Remarque.** L'ensemble des $n$-uplets d'éléments d'un ensemble E est tout simplement $E^n$. ■

**Remarque.** Dans une proposition avec quantificateurs,

➢ $\forall x \in E, \forall y \in F$ signifie la même chose que $\forall (x,y) \in E \times F$ ;

➢ $\exists x \in E, \exists y \in F$ signifie la même chose que $\exists (x,y) \in E \times F$

■

**Exercice 3.1**

Soit $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Exprimer $\complement_{E^2} A \times B$ en fonction de E, $A^c$ et $B^c$.