

## Equations différentielles linéaires d'ordre 1

### EXERCICE 1.

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation

$$y' + \operatorname{th}(t)y = \operatorname{sh}(t).$$

### EXERCICE 2.

Résoudre sur  $I = ]-\pi/2, \pi/2[$  l'équation

$$y' - \tan(t)y = \frac{1}{1 + \cos(t)}.$$

### EXERCICE 3.

Résoudre sur  $] -\infty, 1[$  l'équation :

$$(1-x)^2 y' = (2-x)y.$$

### EXERCICE 4.

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$z' + \operatorname{th}(t)z = t \operatorname{th}(t).$$

Trouver l'unique solution  $z_1$  vérifiant la condition initiale  $z_1(0) = 1$ .

### EXERCICE 5.

Soit (E) l'équation :

$$y' + \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)} y = 2 \sin(x).$$

1. Résoudre  $(E_H)$ .
2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme

$$x \mapsto a \cos(x) + b$$

avec  $a$  et  $b$  réel.

3. Résoudre (E) sur  $\mathbb{R}$  et déterminer l'unique solution de (E), notée  $h$ , vérifiant la condition initiale  $h(0) = 1$ .

### EXERCICE 6.

Résoudre sur  $I = ]0, \pi[$  l'équation différentielle

$$(E) : y' + \cotan(t)y = \cos^2(t).$$

### EXERCICE 7.

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

$$1. \quad y' - y = \arctan(e^x)$$

$$2. \quad y' + y = \arctan(e^x)$$

### EXERCICE 8.

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations

$$1. \quad y' + 2y = t e^{-t}$$

$$2. \quad y' + 2y = e^{-2t}$$

### EXERCICE 9.

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation

$$y' + y = t \cos(t).$$

### EXERCICE 10.

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation

$$y' - y = e^t + e^{2t}.$$

### EXERCICE 11.

On considère l'équation (E) :  $y' - \ln(x)y = x^x$ .

1. Calculer en intégrant par parties les primitives de  $x \mapsto \ln(x)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Résoudre (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

### EXERCICE 12.

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$1. \quad (E_1) : y' + 3y = \sin(x);$$

$$2. \quad (E_2) : y' - 3y = e^{-x}(1 - x^3);$$

$$3. \quad (E_3) : y''' - y'' = x.$$

### EXERCICE 13.

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation (E) :  $y' + x y = x^2 + 1$  sachant qu'elle admet une solution particulière polynomiale.

**EXERCICE 14.**

Résoudre les équations suivantes

1.  $y' + y = x$  ;
2.  $y' + y = e^{-x}$  ;
3.  $y' + y = x e^{-x}$  ;
4.  $y' + y = x^2 e^{-x}$  ;
5.  $y' + y = e^{2x}$  ;
6.  $y' + y = e^{-x} + e^{2x}$  ;
7.  $y' + y = \sin(x)$  ;
8.  $y' + y = \cos(x) e^x$  .

**EXERCICE 15.**

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants

1.  $y' + 2xy = e^{x-x^2}$ ,  $y(0) = 0$  ;
2.  $x^2 y' + y = 0$ ,  $y(0) = 1$  ;
3.  $x^3 y' - 2y = 0$ ,  $y(1) = 1$ .

**EXERCICE 16.**Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$  l'équation

$$|x|y' + (x-1)y = x^2.$$

**EXERCICE 17.**

Résoudre l'équation

$$|x(x-1)|y' - y = x^2$$

sur  $] -\infty, 0[$ ,  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ .**EXERCICE 18.**

Résoudre l'équation différentielle :

$$(1+t^2)x' - x = 1$$

**EXERCICE 19.**

Soit  $a$  et  $b$  deux fonction impaires continues sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $f$  une solution de l'équation différentielle  $y' + ay = b$ . Montrer que  $f$  est paire.

**EXERCICE 20.**

Soient  $T \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $a$  et  $b$  deux fonctions continues et  $T$ -périodiques sur  $\mathbb{R}$  et  $f$  une solution de l'équation différentielle (E) :  $y' + ay = b$ . Montrer que  $f$  est  $T$ -périodique *si et seulement si*  $f(0) = f(T)$ .

**EXERCICE 21.**Résoudre sur  $] -\infty, -1[$ ,  $] -1, 1[$  puis  $]1, +\infty[$  l'équation différentielle

$$(1-x^2)y' - xy = 1$$

**EXERCICE 22.**Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation différentielle  $xy' - \alpha y = 0$ . Déterminer l'unique solution  $f$  vérifiant  $f(1) = 1$ .
2. Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation différentielle  $xy' - \alpha y = f$ . Déterminer l'unique solution  $g$  vérifiant  $g(1) = 0$ .
3. On définit par récurrence une suite de fonctions  $(u_n)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  de la manière suivante :
  - $u_0 = f$  ;
  - pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1}$  est l'unique solution de l'équation différentielle  $xy' - \alpha y = u_n$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  valant 0 en 1.

**REMARQUE.** On a donc  $u_1 = g$ . ■Déterminer par récurrence  $u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .**EXERCICE 23.**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + f'(x) = 0$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**EXERCICE 24.**

On considère l'équation différentielle suivante :  
 $(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1$ .

1. Trouver une solution polynomiale.
2. En déduire l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$ .
3. Déterminer la solution vérifiant la condition initiale  $y(1) = 1$ .

## Equations différentielles linéaires d'ordre 2

### EXERCICE 25.

Calculer les solutions (réelles) des équations différentielles suivantes :

- |                                 |                                       |
|---------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $y'' - 2y' - 3y = t^2 e^t$   | 6. $y'' - 2y' + y = \cos(2t)$         |
| 2. $y'' + 4y' + 3y = t e^{-2t}$ | 7. $y'' + 5y' + 4y = t e^{-t}$        |
| 3. $y'' + 4y' + 3y = \cos(3t)$  | 8. $y'' + y = \cos(t)$                |
| 4. $y'' + 3y' + 2y = \sin(t)$   | 9. $y'' - 6y' + 9y = (t+1)e^{-3t}$    |
| 5. $y'' - 4y' + 4y = e^{-t}$    | 10. $y'' - 2y' + 2y = e^{-t} \cos(t)$ |

### EXERCICE 26.

Deux problèmes de Cauchy.

1. Déterminer l'unique fonction  $f$ , deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , solution de

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-3t}$$

pour la condition initiale  $f(0) = 0, f'(0) = 1$ .

2. Déterminer l'unique fonction  $g$ , deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , solution de

$$y'' + 5y' + 4y = e^{-t}$$

pour la condition initiale  $g(0) = 0, g'(0) = 1$ .

### EXERCICE 27.

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \sin(x).$$

### EXERCICE 28.

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 4y = \sin^2(t).$$

### EXERCICE 29.

Déterminer les solutions à valeurs complexes des équations suivantes :

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| 1. $y'' + y' + y = 0$   | 3. $y'' - iy' + 2y = 0$ |
| 2. $y'' - 2iy' - y = 0$ | 4. $y'' + 4y' + 4y = 0$ |

### EXERCICE 30.

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les problèmes de Cauchy suivants :

- $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0$
- $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
- $y'' - 3y' + 2y = x, \quad y(0) = y'(0) = 1$
- $y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

### EXERCICE 31.

Résoudre l'équation suivante

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x).$$

### EXERCICE 32.

Résoudre les équations suivantes

- $y'' - 3y' + 2y = x;$
- $y'' - 3y' + 2y = e^{2x};$
- $y'' - 3y' + 2y = e^{2x};$
- $y'' - 3y' + 2y = x e^x;$
- $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{ch}(x).$

### EXERCICE 33.

- Résoudre l'équation différentielle  $y'' - (1-i)y' - 2(1+i)y = 0$ .
- Donner l'unique solution  $f$  vérifiant  $f(0) = f'(0) = 1$ .

### EXERCICE 34.

Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f + f'' \geq 0$ . Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x + \pi) \geq 0$$

**EXERCICE 35.**

On considère l'équation différentielle dont on recherche les solutions à valeurs *réelles*

$$(E) : y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin(x)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Déterminer une solution particulière de (E).
3. Résoudre l'équation (E).
4. Déterminer l'unique solution  $f$  de (E) telle que  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 2$ .

**EXERCICE 36.**

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t) dt$ .

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t) dt$ .
2. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y'' + y = g$ .
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle  $y'' + y = g$ .

**EXERCICE 37.**

Soient  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que

$$\begin{cases} x' &= -y + \sin(\omega t) \\ y' &= x - \cos(\omega t) \end{cases}$$

1. Soit  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$t \mapsto x(t) + iy(t).$$

Justifier la dérivabilité de  $z$  et montrer que  $z$  vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

2. Déterminer  $x$  et  $y$ .

**Changement de fonction ou de variable****EXERCICE 38.**

On souhaite résoudre l'équation

$$(E) : x^2 y'' + 3x y' + y = \frac{1}{x^2}$$

sur l'intervalle  $I = ]0, +\infty[$ .

1. Soient  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable et  $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $Y(t) = y(e^t)$ .
  - a. Calculer les dérivées  $y, y'$  et  $y''$  en fonction de  $Y, Y'$  et  $Y''$ .
  - b. En déduire que  $y$  est solution de (E) *si et seulement si*  $Y$  est solution d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants (E') que l'on précisera.
2. Résoudre (E') sur  $\mathbb{R}$ .
3. En déduire les solutions de (E) sur  $I$ .
4. Montrer qu'il existe une unique solution  $y$  de (E) sur  $I$  telle que  $y(1) = y'(1) = 0$ .

**EXERCICE 39.**

Résoudre l'équation

$$y^2 + x^2 - 2y y' = 0$$

en effectuant le changement de fonction  $z = y^2$ .

**EXERCICE 40.**

Résoudre l'équation

$$y' = e^{x+y}$$

en posant  $z = e^{-y}$ .

**EXERCICE 41.**

Soit (E) l'équation  $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0$ .

1. Etablir qu'une *éventuelle* solution polynomiale et non nulle de (E) est nécessairement de degré deux.
2. Trouver une solution polynomiale et non nulle  $p$  de (E).
3. Justifier qu'une fonction  $y$  deux fois dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  peut s'écrire sous la forme  $y = p \times z$  où  $z$  est une fonction deux fois dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
4. Montrer qu'une fonction  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable est solution de (E) *si et seulement si* la fonction  $Z = z'$  (où  $z$  est définie comme à la question précédente) est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre un (E') à préciser.
5. Résoudre (E).

**EXERCICE 42.**

Soient  $I = ]1, +\infty[$  et (E) l'équation

$$(E) : -t^2 y' + t y = y^2.$$

1. Soit  $y$  une fonction ne s'annulant pas sur  $I$ . Prouver que  $y$  est solution de (E) *si et seulement si*  $z = \frac{1}{y}$  est solution sur  $I$  d'une équation différentielle (E') linéaire d'ordre un.
2. Résoudre (E') sur  $I$ .
3. En déduire les solutions de (E) ne s'annulant pas sur l'intervalle  $I$ .

**EXERCICE 43.**

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y'' - x y' - 3y = x^4$$

1. a. Montrer que  $f$  est une solution de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  *si et seulement si*  $g : t \mapsto f(e^t)$  est solution sur  $\mathbb{R}$  d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.  
b. En déduire les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. a. Montrer que  $f$  est une solution de (E) sur  $\mathbb{R}_-^*$  *si et seulement si*  $g : t \mapsto f(-e^t)$  est solution sur  $\mathbb{R}$  d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.  
b. En déduire les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}_-^*$ .
3. Déterminer les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

**Equations fonctionnelles****EXERCICE 44.**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On cherche l'ensemble  $S_\alpha$  des fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifiant  $f'(x) = -f(\alpha - x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer qu'une telle fonction est de classe  $\mathcal{C}^2$ .
2. Montrer que les éléments de  $S_\alpha$  sont solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
3. Conclure.

**EXERCICE 45.**

Déterminer les fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$$

**EXERCICE 46.**

Déterminer les fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f(-x)$$

**EXERCICE 47.**

Déterminer les applications  $f$  dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = x e^{-x}$$

**EXERCICE 48.**

Déterminer les applications  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1.$$

**Problèmes de raccord****EXERCICE 49.**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $x^2 y' - y = 0$ .

**EXERCICE 50.**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$ .

**EXERCICE 51.**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $x y' - y = x$ .

**EXERCICE 52.**

On considère l'équation différentielle (E) :  $x y'' - y' - x^3 y = 0$ .

1. Résoudre (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  en effectuant le changement de variable  $t = x^2$ .
2. En déduire les solutions sur  $\mathbb{R}_-^*$ .
3. Résoudre (E) sur  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 53.**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle (E) :  $t y' + (1 - t)y = e^{2t}$ .