Devoir à la maison n°16

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1 ★

Soient p et q deux entiers naturels non nuls. Soient

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{p} a_k \mathrm{X}^k \qquad\qquad \mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{q} b_k \mathrm{X}^k$$

deux polynômes de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. Le résultant des polynômes P et Q est le nombre complexe noté $\mathrm{Res}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ défini par le déterminant suivant :

$$\mathrm{Res}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \begin{vmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_p & & a_1 & b_q & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & a_p & & & b_q \end{vmatrix}$$

C'est un déterminant de taille $(q+p)$ dont les q premières colonnes représentent les coefficients de P et p dernières colonnes représentent les coefficients de Q, les positions non remplies étant des zéros.
Par exemple, si $\mathrm{P} = 1 + 2\mathrm{X} + 3\mathrm{X}^2$ et $\mathrm{Q} = 4 + 5\mathrm{X} + 6\mathrm{X}^2 + 7\mathrm{X}^3$,

$$\mathrm{Res}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

La matrice servant à définir $\mathrm{Res}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ pourra être notée $\mathrm{M}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}$ i.e. $\mathrm{Res}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \det \mathrm{M}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}$.
On note $\mathrm{E} = \mathbb{C}_{q-1}[\mathrm{X}] \times \mathbb{C}_{p-1}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{F} = \mathbb{C}_{p+q-1}[\mathrm{X}]$. Soit u l'application de E vers F définie par $u(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{PA} + \mathrm{QB}$.

1. **a.** Vérifier que u est bien à valeurs dans F et démontrer que u est une application linéaire.

   b. Si on suppose que u est bijective, démontrer que P et Q sont premiers entre eux.

   c. Si on suppose que P et Q sont premiers entre eux, déterminer $\mathrm{Ker}\, u$ et en déduire que u est bijective.

2. On note $\mathcal{B} = \big((1,0), (\mathrm{X}, 0), \dots, (\mathrm{X}^{q-1}, 0), (0, 1), (0, \mathrm{X}), \dots, (0, \mathrm{X}^{p-1})\big)$ une base de E et $(1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^{p+q-1})$ la base canonique de F.

a. Déterminer la matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

b. Démontrer que $\mathrm{Res}(P, Q) \neq 0$ si et seulement si P et Q sont premiers entre eux (donc $\mathrm{Res}(P, Q) = 0$ si et seulement si P et Q ont une racine complexe commune).

3. **a.** Démontrer que $P \in \mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $\mathrm{Res}(P, P') = 0$.

b. Application : déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme X^3+aX+b admette une racine multiple.