Devoir à la maison $^{\text{o}}$: corrigé

Solution 1.

1. La suite nulle est clairement p-périodique.
Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(a, b) \in F_p^2$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$(\lambda a + \mu b)_{n+p} = \lambda a_{n+p} + \mu b_{n+p} = \lambda a_n + \mu b_n = (\lambda a + \mu b)_n$$
Ainsi $\lambda a + \mu b \in F_p$.
Ceci prouve que F_p est un sous-espace vectoriel de E.

2. Les suites $u^0, \dots, u^{p-1}$ sont clairement p-périodiques.
Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k = 0$. En évaluant cette égalité de suites aux rangs $0, \dots, p-1$, on trouve $\lambda_0 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$. Ceci prouve que la famille $(u^0, \dots, u^{p-1})$ est libre.
Soit $a \in F_p$. Alors $a = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k$. Ceci prouve que la famille $(u^0, \dots, u^{p-1})$ engendre F_p.
Finalement, la famille $(u^0, \dots, u^{p-1})$ est une base de F_p de sorte que $\dim F_p = p$.

3. La suite u est clairement 3-périodique. De plus, $j^3 = \bar{j}^3 = 1$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$v_{n+3} = j^n j^3 = j^n = v_n$$
$$w_{n+3} = \bar{j}^n \bar{j}^3 = \bar{j}^n = w_n$$
Ainsi v et w sont 3-périodiques.
Par conséquent, u, v et w appartiennent à F_3.

4. Montrons que (u, v, w) est libre. Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\lambda u + \mu v + \nu w = 0_E$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\lambda + \mu j^n + \nu \bar{j}^n = 0$$
En évaluant cette égalité pour $n \in \{0, 1, 2\}$, on obtient en tenant compte du fait que $j^2 = \bar{j}$
$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \lambda + \mu j + \nu \bar{j} = 0 \\ \lambda + \mu \bar{j} + \nu j = 0 \end{cases}$$
Puisque $1 + j + \bar{j} = 0$, on obtient en sommant ces trois égalités $3\lambda = 0$ i.e. $\lambda = 0$.
On a également
$$(\lambda + \mu + \nu) + j(\lambda + \mu j + \nu \bar{j}) + \bar{j}(\lambda + \mu \bar{j} + \nu j) = 0$$
ce qui équivaut à
$$(1 + j + \bar{j})\lambda + \mu(1 + j^2 + \bar{j}^2) + \nu(1 + j\bar{j} + \bar{j}j) = 0$$
Or $1 + j + \bar{j} = 0$, $1 + j^2 + \bar{j}^2 = 1 + \bar{j} + j = 0$ et $1 + j\bar{j} + \bar{j}j = 1 + 2|j|^2 = 3$, ce qui fournit $3\nu = 0$ et donc $\nu = 0$.
On a enfin
$$(\lambda + \mu + \nu) + \bar{j}(\lambda + \mu j + \nu \bar{j}) + j(\lambda + \mu \bar{j} + \nu j) = 0$$
ce qui équivaut à
$$(1 + \bar{j} + j)\lambda + \mu(1 + \bar{j}j + j\bar{j}) + \nu(1 + \bar{j}^2 + j^2) = 0$$
Or $1 + \bar{j} + j = 0$, $1 + \bar{j}j + j\bar{j} = 1 + 2|j|^2 = 3$ et $1 + \bar{j}^2 + j^2 = 1 + j + \bar{j} = 0$, ce qui fournit $3\mu = 0$ et donc $\mu = 0$.
Il en résulte que la famille (u, v, w) est libre. Puisqu'elle comporte 3 éléments et que $\dim F_3 = 3$, (u, v, w) est une base de F_3.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, puisque $n + 3 \equiv n[3]$, les restes des divions euclidiennes de $n + 3$ et n par 3 sont identiques i.e. $t_{n+3} = t_n$. Ceci prouve que t est 3-périodique i.e. $t \in F_3$.

6. Comme (u, v, w) est une base de F_3, il existe un unique triplet $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$ tel que $t = \lambda u + \mu v + \nu w$. En particulier

$$\begin{cases} \lambda u_0 + \mu v_0 + \nu w_0 = t_0 \\ \lambda u_1 + \mu v_1 + \nu w_1 = t_1 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 + \nu w_2 = t_2 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \lambda + \mu j + \nu \bar{j} = 1 \\ \lambda + \mu \bar{j} + \nu j = 2 \end{cases}$$

En sommant ces trois égalités, on obtient $3\lambda = 3$ et donc $\lambda = 1$.
On a également

$$(\lambda + \mu + \nu) + j(\lambda + \mu j + \nu \bar{j}) + \bar{j}(\lambda + \mu \bar{j} + \nu j) = j + 2\bar{j}$$

En raisonnant comme à la question **4**, on obtient $3\nu = j + 2\bar{j}$ i.e. $\nu = \frac{1}{3}(j + 2\bar{j})$.
On a enfin

$$(\lambda + \mu + \nu) + \bar{j}(\lambda + \mu j + \nu \bar{j}) + j(\lambda + \mu \bar{j} + \nu j) = \bar{j} + 2j$$

En raisonnant comme à la question **4**, on obtient $3\mu = \bar{j} + 2j$ i.e. $\mu = \frac{1}{3}(\bar{j} + 2j)$.
Les coordonnées de t dans la base (u, v, w) sont donc $\left(1, \frac{1}{3}(\bar{j} + 2j), \frac{1}{3}(j + 2\bar{j})\right)$.

7. Soit $a \in F_3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+6} = a_{(n+3)+3} = a_{n+3} = a_n$$

Ainsi $a \in F_6$. On a donc prouvé que $F_3 \subset F_6$.

8. Remarquons que $(-j)^6 = j^6 = (j^3)^2 = 1$. On en déduit également que $(-\bar{j})^6 = \overline{(-j)^6} = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x_{n+6} &= (-1)^{n+6} = (-1)^n(-1)^6 = (-1)^n = x_n \qquad \text{car 6 est pair} \\ y_{n+6} &= (-j)^{n+6} = (-j)^n(-j)^6 = (-j)^n = y_n \\ z_{n+6} &= (-\bar{j})^{n+6} = (-\bar{j})^n(-\bar{j})^6 = (-\bar{j})^n = z_n \end{aligned}$$

Ainsi x, y et z sont 6-périodiques.
Par conséquent, x, y et z appartiennent à F_6. Comme $G = \text{vect}(x, y, z)$, $G \subset F_6$.

9. Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\lambda x + \mu y + \nu z = 0_E$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda + \mu(-j)^n + \nu(-\bar{j})^n = 0$$

En évaluant cette égalité pour $n \in \{0, 1, 2\}$, on obtient en tenant compte du fait que $j^2 = \bar{j}$

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ -\lambda - \mu j - \nu \bar{j} = 0 \\ \lambda + \mu \bar{j} + \nu j = 0 \end{cases}$$

On a d'abord

$$(\lambda + \mu + \nu) - (-\lambda - \mu j - \nu \bar{j}) + (\lambda + \mu \bar{j} + \nu j) = 0$$

et donc $3\lambda = 0$ i.e. $\lambda = 0$ car $1 + j + \bar{j} = 0$.
On a également

$$(\lambda + \mu + \nu) - j(-\lambda - \mu j - \nu \bar{j}) + \bar{j}(\lambda + \mu \bar{j} + \nu j) = 0$$

ce qui équivaut à

$$(1 + j + \bar{j})\lambda + \mu(1 + j^2 + \bar{j}^2) + \nu(1 + j\bar{j} + \bar{j}j) = 0$$

Or $1 + j + \bar{j} = 0$, $1 + j^2 + \bar{j}^2 = 1 + \bar{j} + j = 0$ et $1 + j\bar{j} + \bar{j}j = 1 + 2|j|^2 = 3$, ce qui fournit $3\nu = 0$ et donc $\nu = 0$.
On a enfin

$$(\lambda + \mu + \nu) - \bar{j}(-\lambda - \mu j - \nu \bar{j}) + j(\lambda + \mu \bar{j} + \nu j) = 0$$

ce qui équivaut à

$$(1 + \bar{j} + j)\lambda + \mu(1 + \bar{j}j + j\bar{j}) + \nu(1 + \bar{j}^2 + j^2) = 0$$

Or $1 + \bar{j} + j = 0$, $1 + \bar{j}j + j\bar{j} = 1 + 2|j|^2 = 3$ et $1 + \bar{j}^2 + j^2 = 1 + j + \bar{j} = 0$, ce qui fournit $3\mu = 0$ et donc $\mu = 0$.
Il en résulte que la famille (x, y, z) est libre. Comme (x, y, z) engendre G, c'est une base de G et $\dim G = 3$.

10. Tout d'abord, $F_3 \subset F_6$ d'après la question **7** et $G \subset F_6$ d'après la question **8**.
Ensuite $\dim F_6 = \dim F_3 + \dim G = 6$.
Montrons que $F_3 \cap G = \{0_E\}$. Soit donc $a \in F_3 \cap G$. Puisque $a \in G$, il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$ tel que $a = \lambda x + \mu y + \nu z$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \lambda(-1)^n + \mu(-j)^n + \nu(-\bar{j})^n$$

De plus, $a \in F_3$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+3} = a_n$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$-\lambda(-1)^n - \mu(-j)^n - \nu(-\bar{j})^n = \lambda(-1)^n + \mu(-j)^n + \nu(-\bar{j})^n$$

et donc

$$\lambda(-1)^n + \mu(-j)^n + \nu(-\bar{j})^n = 0$$

En évaluant cette égalité pour $n \in \{0, 1, 2\}$, on obtient

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ -\lambda - \mu j - \nu \bar{j} = 0 \\ \lambda + \mu \bar{j} + \nu j = 0 \end{cases}$$

On a déjà résolu le même système à la question **9**. On a à nouveau $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0)$. Ainsi a est nulle.
On a donc $\dim F_6 = \dim F_3 + \dim G$ et F_3 et G sont en somme directe : ceci suffit pour conclure que F_3 et G sont supplémentaires dans F_6.

11. Tout d'abord, u et x sont bien des éléments de F_2 puisque ce sont clairement des suites 2-périodiques. Comme $u_0 = x_0 = 1$ et $u_1 = -x_1 = 1$, les suites u et x sont clairement non colinéaires. La famille (u, x) est donc libre. De plus, $\dim F_2 = 2$ donc (u, x) est une base de F_2.

12. Tout d'abord

$$F_2 + H = \text{vect}(u, x) + \text{vect}(v, w, y, z) = \text{vect}(u, v, w, x, y, z) = \text{vect}(u, v, w) + \text{vect}(x, y, z) = F_3 + G = F_6$$

grâce à la question **10**.
Comme (u, v, w) et (x, y, z) sont des bases respectives de F_3 et G et que $F_6 = F_3 \oplus G$, (u, v, w, x, y, z) est une base de F_6. En particulier, c'est une famille libre. Comme la famille (v, w, y, z) est une sous-famille de cette famille, elle est également libre. Enfin, (v, w, y, z) engendre H donc c'est une base de H. On peut donc affirmer que $\dim H = 4$. On a alors $\dim F_6 = \dim F_2 + \dim H$.
On a donc $\dim F_6 = \dim F_2 + \dim H$ et $F_6 = F_2 + H$: ceci suffit pour conclure que F_2 et H sont supplémentaires dans F_6.

Solution 2.

1. Les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{F})$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{G})$ sont les fonctions $x \mapsto \left(\mu \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \nu \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) e^{-\frac{x}{2}}$ avec $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$.

2. Soit $y \in F$. Alors $y' = y$ et donc $y'' = y' = y$ puis $y''' = y' = y$. Ainsi $y \in E$. D'où $F \subset E$.
Soit $y \in G$. Alors $y'' + y' + y = 0$ puis $y''' + y'' + y' = 0$. En soustrayant la première relation à la deuxième, on obtient $y''' - y = 0$ d'où $y \in E$. Ainsi $G \subset E$.

3. On peut par exemple montrer que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. La fonction nulle est clairement solution de $(\mathcal{E})$ donc appartient à E.
Soient y_1 et y_2 deux vecteurs de E, autrement dit deux solutions de $(\mathcal{E})$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)''' - (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1(y_1''' - y_1) + \lambda_2(y_2''' - y_2) = 0$$

Ainsi $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in E$, ce qui prouve que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
En ce qui concerne F et G, on pourrait également montrer qu'ils contiennent la fonction nulle et qu'ils sont stables par combinaison linéaire mais la question **1** montre que $F = \text{vect}(f_1)$ et $G = \text{vect}(f_2, f_3)$ avec $f_1 : x \mapsto e^x$, $f_2 : x \mapsto \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$ et $f_3 : x \mapsto \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$. De plus, F et G sont inclus dans E donc ce sont bien des sous-espaces vectoriels de E.

4. On a facilement

$$y_1' - y_1 = (y''' + y'' + y') - (y'' + y' + y) = y''' - y = 0$$

donc $y_1 \in F$.
De même,

$$y_2'' + y_2' + y_2 = (2y'' - y''' - y^{(4)}) + (2y' - y'' - y''') + (2y - y' - y'') = 2y + y' - 2y''' - y^{(4)} = 2(y - y''') + (y - y''')' = 0$$

donc $y_2 \in F$.

5. Soit $y \in F \cap G$. Puisque $y \in F$, $y' = y$ puis $y'' = y' = y$. On en déduit que $y'' + y' + y = 3y$. Or $y'' + y' + y = 0$ car $y \in G$. Il vient alors $y = 0$. On a donc prouvé que $F \cap G = \{0\}$.
Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $F + G \subset E$. Soit $y \in E$ et définissons y_1 et y_2 comme à la question **4**. On remarque que $y = \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2$. Or $y_1 \in F$ donc $\frac{1}{3}y_1 \in F$ car F est un sous-espace vectoriel. De même, $y_2 \in G$ donc $\frac{1}{3}y_2 \in G$ car G est un sous-espace vectoriel. On a donc $y \in F + G$, ce qui montre que $E \subset F + G$. Par double inclusion, $E = F + G$.
On peut donc conclure que $E = F \oplus G$.

6. On a vu à la question **3** que $F = \text{vect}(f_1)$. Comme f_1 est non nulle, (f_1) est une base de F et donc $\dim F = 1$.
On a vu également que $G = \text{vect}(f_2, f_3)$. Montrons que la famille (f_2, f_3) est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda f_2 + \mu f_3 = 0$. En particulier, $\lambda f_2(0) + \mu f_3(0) = 0$, ce qui donne $\lambda = 0$. Il reste alors $\mu f_3 = 0$. En particulier, $\mu f_3\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0$, ce qui donne $\mu = 0$. La famille (f_2, f_3) est libre : c'est donc une base de G. On en déduit que $\dim G = 2$.

7. Tout d'abord, $\dim E = \dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G = 3$. De plus, (f_1) est une base de F, (f_2, f_3) est une base de G et $E = F \oplus G$ donc (f_1, f_2, f_3) est une base de E.

8. Puisque (f_1, f_2, f_3) est une base de E, les éléments de E i.e. les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les fonctions de la forme $\lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3$ avec $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ ou de manière plus explicite les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} + \nu \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

avec $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.

9. Posons $y : x \mapsto P(x)e^x$ où P est une fontion polynomiale. Après calcul, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'''(x) = P'''(x)e^x + 3P''(x)e^x + 3P'(x)e^x + P(x)e^x$$

Ainsi y est solution de $(\mathcal{E}')$ *si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'''(x)e^x + 3P''(x)e^x + 3P'(x)e^x = xe^x$$

Comme l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, ceci équivaut à

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'''(x) + 3P''(x) + 3P'(x) = x$$

En considérant les degrés des deux membres de cette égalité, on s'aperçoit que P doit être un polynôme de degré 2. Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2 + bx + c$. En reportant dans la dernière égalité, on obtient que y est solution *si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 6a + 6ax + 3b = x$$

Pour que y soit solution, il suffit donc de choisir (a, b) tel que $\begin{cases} 6a + 3b = 0 \\ 6a = 1 \end{cases}$. Ce système fournit $a = \frac{1}{6}$ et $b = -\frac{1}{3}$. On choisit évidemment $c = 0$.
Ainsi une solution particulière de $(\mathcal{E}')$ est $x \mapsto \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x\right) e^x$.

10. Comme l'équation différentielle $(\mathcal{E}')$ est linéaire, la solution générale de $(\mathcal{E}')$ est la somme d'une solution particulière de $(\mathcal{E}')$ et de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée à $(\mathcal{E}')$, à savoir l'équation différentielle $(\mathcal{E})$. Les solutions de $(\mathcal{E}')$ sont donc les fonctions

$$x \mapsto \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x\right) e^x + \lambda e^x + \mu \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} + \nu \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

avec $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.