Limite et continuité de fonctions

Exercice 1.

Etudier le comportement en 0 de la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Exercice 2.★

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.

1. Déterminer les limites en $+\infty$ des expressions suivantes :

a. $f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$;

b. $g(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

2. Déterminer la limite en $0+$ de :

$$f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

3. Montrer que

$$h(x) = \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$$

n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante telle que

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - f(x-1)) = 0.$$

Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Exercice 4.

Reconnaître la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{m \to +\infty} |\cos(n!\pi x)|^m.$$

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ croissante telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(2x) - f(x) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\ln x} = 0$.

Exercice 6.

Montrer que toute fonction périodique f qui admet une limite finie en $+\infty$ est constante.

Exercice 7.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ croissante telle que la suite $(f(n))$ diverge vers $+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 8.★

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}.$$

Exercice 9.★

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = \lfloor x \rfloor \sin(\pi x).$$

Exercice 10.

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = (-1)^{E(x)} \left(x - E(x) - \frac{1}{2} \right)$.

Exercice 11.

On note $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en *aucun* point de $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ est continue en 0 (et même dérivable en 0), alors qu'elle est discontinue en tout autre point de $\mathbb{R}$.

Exercice 12.

Soit $f : x \mapsto \left[x(\ln x)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{\ln x}}$.

1. Montrer que f est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

2. Montrer *avec soin* que f est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

3. Montrer que f est prolongable par continuité en 0 et 1.

4. Etudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 13.

Soit f, une application continue, périodique, de période $T > 0$. Démontrer qu'il existe un réel t_0 tel que

$$f(t_0) = f\left(t_0 + \frac{T}{2}\right).$$

Exercice 14.✯

Soit f une fonction rélle définie et continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. On suppose que

$$\forall x \in [0, 7/10], \quad f(x + 3/10) \neq f(x).$$

Montrer que f s'annule au moins 7 fois sur $[0,1]$.

Exercice 15.

Soit f une application réelle, continue sur un segment I telle que $I \subset f(I)$. Montrer qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = t_0$.

Exercice 16.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. une fonction continue. On suppose qu'il existe $l \in [0,1[$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$. Montrer que f possède au moins un point fixe.

Exercice 17.

Soit f une fonction numérique continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$.

Exercice 18.

Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in [0,1]$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$.

Exercice 19.✯✯

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue ayant une limite finie ℓ en $+\infty$. Prouver que f est bornée.

Exercice 20.

Soient f et g continues sur $[0,1]$ telles que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) < g(x).$$

Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) + m < g(x).$$

Exercice 21.

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

Exercice 22.✯

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et

$$f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$$

continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 23.✯

Soit f, une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

Démontrer l'existence d'un nombre réel $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 24.

Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ telle que $I \subset f(I)$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 25.

1. Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(I) \subset I$. Montrer que f admet un point fixe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application lipschitzienne de rapport $0 \leqslant k < 1$. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $f([-M; M]) \subset [-M; M]$.
3. En déduire qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne de rapport $0 \leqslant k < 1$ admet un unique point fixe.

EXERCICE 26.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f$ admette un point fixe. f admet-elle un point fixe ?

EXERCICE 27.

Soit f une fonction continue sur un segment $I = [a, b]$ telle que $I \subset f(I)$.

1. Montrer que f prend les valeurs a et b sur I.
2. En déduire que f admet un point fixe.

EXERCICE 28.

Soit f et g deux applications continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telles que $g \circ f = f \circ g$.

1. Montrer que f admet au moins un point fixe.
2. On note F l'ensemble des points fixes de f. Montrer que F admet un plus grand et un plus petit élément.
3. Montrer que F est stable par g.
4. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

EXERCICE 29.★★

On se propose d'établir la continuité d'une fonction définie implicitement.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction
$$f : [0,2] \longrightarrow [0,1]$$
telle que
$$\forall x \in [0,2], \quad f(x)^5 + f(x) = x.$$
2. Prouver que f est continue.

EXERCICE 30.★★

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue telle que $f \circ f = \mathrm{id}_{[0,1]}$ et $f(0) = 0$.

1. Etablir que f est strictement croissante.
2. En déduire que $f = \mathrm{id}_{[0,1]}$.

EXERCICE 31.★★

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que :

1. f est croissante ;
2. $x > 0 \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante.

Etablir que f est continue.

EXERCICE 32.

Soit f une fonction décroissante et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet un unique point fixe.

EXERCICE 33.★★

Soit f, une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{$*$}$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Vérifier que f est impaire.
3. On pose $a = f(1)$. Calculer par récurrence $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$.
5. On suppose en outre que f est continue en 0.
   a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire que $f(x) = ax$ pour tout réel x par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
6. Déterminer toutes les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $(*)$.

EXERCICE 34.★★

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que
$$\exists a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \; f(ax) = f(x).$$

EXERCICE 35.★★

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que
$$\exists n \in \mathbb{N}, \; \forall x \in \mathbb{R}, \; f(x^n) = f(x).$$

EXERCICE 36.★★

Déterminer les fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) = g(x) + g(y)$$

Exercice 37.

Soit f, une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x)-f(y)| = |x-y|.$$

Pour tout réel x, on pose $g(x) = f(x) - f(0)$.

1. Etablir que f et g sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $(g(x))^2$ pour tout réel x et en calculant $(g(x)-g(y))^2$, démontrer que $g(x)g(y) = xy$ pour tous réels x et y.
3. En déduire l'expression de f.

Exercice 38.

Soit f, une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

1. Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
2. Déterminer f si $f(0) = 0$.
3. On suppose $f(0) \neq 0$.
   a. Démontrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire que, pour tout réel x, $f(x)$ est strictement positif.
   c. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{ax}.$$

Exercice 39.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que $f(2x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 40.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k}$. Montrer que pour $x \neq 0$, $\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \frac{\sin x}{x}$.
2. Rechercher les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que $f(2x) = f(x)\cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 41.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique.

1. Si f admet une limite finie en $+\infty$, montrer que f est constante.
2. Si f est continue non constante, montrer que f admet une plus petite période.
3. Si f est continue, montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 42.

Soit $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue ayant une limite finie en $+\infty$.

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que f admet un minimum ou un maximum absolu mais pas nécessairement les deux.
3. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 43.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$ avec $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 44.

Soit f une application continue sur $\mathbb{R}_+$ admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 45.

Montrer que toute fonction périodique continue sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

Exercice 46.

Soit f une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leqslant a|x| + b.$$