

# DEVOIR SURVEILLÉ N°15

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1

1  $T_n(\mathbb{K})$  et  $T_n^+(\mathbb{K})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  stables par produit donc ce sont des sous-algèbres de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

2  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{K})$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{K})$  mais  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin S_2(\mathbb{K})$ . Par conséquent  $S_2(\mathbb{K})$  n'est pas une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in A_2(\mathbb{K})$  mais  $C^2 = -I_2 \notin A_2(\mathbb{K})$  donc  $A_2(\mathbb{K})$  n'est pas une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

3  $A_n = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{K})$  et  $B_n = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{K})$  mais  $A_n B_n = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin S_n(\mathbb{K})$  donc  $S_n(\mathbb{K})$  n'est pas une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$C_n = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A_n(\mathbb{K})$  mais  $C_n^2 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin A_n(\mathbb{K})$  donc  $A_n(\mathbb{K})$  n'est pas une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

4 Facile.

5 Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  adaptée à  $F$ . Alors  $u \in \mathcal{A}_F$  si et seulement si  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est de la forme  $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$  où  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,

$B \in \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ . Comme l'application  $\text{mat}_{\mathcal{B}}$  est un isomorphisme,  $\mathcal{A}_F$  est isomorphe à l'espace vectoriel

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \right\}$$

Ainsi

$$\dim \mathcal{A}_F = \dim \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) + \dim \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{K}) + \dim \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) = p^2 + p(n-p) + (n-p)^2 = n^2 - pn + p^2$$

6 Remarquons que

$$n^2 - pn + p^2 = \left(p - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{3n^2}{4}$$

Ainsi  $n^2 - pn + p^2$  est maximum quand  $p = 1$  ou  $p = n - 1$  et ce maximum vaut  $n^2 - n + 1$ .

7 Facile.

8  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  appartient à  $\Gamma(\mathbb{R})$  mais n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  car son polynôme caractéristique  $X^2 + 1$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ .  $\Gamma(\mathbb{R})$  n'est donc pas une sous-algèbre diagonalisable de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

9 A nouveau, le polynôme caractéristique de  $K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est  $X^2 + 1$ , qui est scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}$ . Il existe

donc une matrice diagonale  $D$  et une matrice inversible  $P$  telles que  $D = P^{-1}KP$ . Soit alors  $M \in \Gamma(\mathbb{C})$ . Il existe donc  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $M = aI_2 + bK$ . Alors  $P^{-1}MP = aI_2 + bD$  est bien diagonale.  $\Gamma(\mathbb{C})$  est donc une sous-algèbre diagonalisable de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

**10** Clairement,  $J = J(0, 1, 0, \dots, 0) = J(e_2)$ .

Pour tout  $j \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$ ,  $\varphi^2(e_j) = e_{j+2}$ ,  $\varphi^2(e_{n-1}) = e_1$  et  $\varphi^2(e_n) = e_2$ . Ainsi  $J^2 = I_2$  si  $n = 2$  et  $J^2 = J(0, 0, 1, 0, \dots, 0) = J(e_3)$  si  $n \geq 3$ .

**11** Soit  $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ . Alors

- si  $j+k \leq n$ , alors  $\varphi^k(e_j) = e_{j+k}$  ;
- si  $j+k > n$ , alors

$$\varphi^k(e_j) = \varphi^{k-n+j-1} \circ \varphi \circ \varphi^{n-j}(e_j) = \varphi^{k-n+j-1} \circ \varphi(e_n) = \varphi^{k-n+j+1}(e_1) = e_{j+k-n}$$

Ainsi  $J^k = J(e_{k+1})$ .

De plus,

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi^n(e_j) = \varphi^{j-1} \circ \varphi \circ \varphi^{n-j}(e_j) = \varphi^{j-1} \circ \varphi(e_n) = \varphi^{j-1}(e_1) = e_j$$

Donc  $J^n = I_n$ .

**12** On a clairement

$$\forall (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$$

**13** D'après la question précédente,

$$\mathcal{A} = \text{vect}(I_n, J, \dots, J^{n-1})$$

donc  $\mathcal{A}$  est bien un espace vectoriel et  $(I_n, J, \dots, J^{n-1})$  en est une famille génératrice.

De plus, si  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$  vérifie  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = 0$ , alors  $J(a_0, \dots, a_{n-1}) = 0$  et donc  $(a_0, \dots, a_{n-1}) = (0, \dots, 0)$ . La famille  $(I_n, J, \dots, J^{n-1})$  est donc libre : c'est une base de  $\mathcal{A}$ .

**14** Si  $M$  commute avec tout élément de  $\mathcal{A}$ , alors  $M$  commute avec  $J \in \mathcal{A}$ .

Si  $M$  commute avec  $J$ , on montre par récurrence que  $M$  commute avec toutes les puissances de  $J$ . Par bilinéarité du produit matriciel,  $M$  commute avec toutes les combinaisons linéaires de ces puissances i.e. avec tout élément de  $\mathcal{A}$ .

**15** Remarquons qu'en fait,  $\mathcal{A} = \mathbb{R}[J]$ . L'inclusion  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}[J]$  est claire. Inversement, si l'on se donne  $M \in \mathbb{R}[J]$ , il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $M = P(J)$ . Notons  $Q$  et  $R$  le quotient et le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X^n - 1$ . Alors  $P = (X^n - 1)Q + R$  puis  $P(J) = (J^n - I_n)Q(J) + R(J) = R(J) \in \mathcal{A}$  car  $\deg J \leq n-1$ .

D'après le cours,  $\mathcal{A} = \mathbb{R}[J]$  est alors une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**16** On développe  $\chi_J$  par rapport à sa dernière colonne

$$\begin{aligned} \chi_J &= \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & X & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\ &= X \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & X & \ddots & \vdots & \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & X & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix} + (-1)^n \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & X & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & X \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= X \cdot X^{n-1} + (-1)^n \cdots (-1)^{n-1} = X^n - 1 \end{aligned}$$

**17**  $X^n - 1$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$  donc  $J$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**18** Si  $n = 2$ ,  $\chi_J = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{R}$  donc  $J$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Si  $n \geq 3$ ,  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$  est une racine non réelle de  $\chi_J$  donc  $\chi_J$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$  et  $J$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**19** Les racines de  $\chi_J$  sont les  $\omega^k$  pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Puisque toutes ces racines sont simples, leurs sous-espaces propres

associés sont de dimension 1. On vérifie que  $U_k = \begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $J$  associé à la valeur propre  $\omega^k$ .

Ainsi pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $E_{\omega^k}(J) = \text{vect}(U_k)$ .

**20**  $\mathcal{A}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui est lui-même un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  donc  $\mathcal{A}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  donc est stable par produit. Ainsi  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**21** Comme  $J$  est diagonalisable, il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  diagonale telle que  $P^{-1}JP = D$ . Alors pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $P^{-1}J^kP = D^k$ . Soit  $A \in \mathcal{A}$ . Il existe  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$ . Alors  $P^{-1}AP = \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k$  est diagonale.

**22** Avec les notations de l'énoncé,  $J(a_0, \dots, a_{n-1}) = Q(J)$ . Avec les notations de la question précédente,  $D = \text{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$  donc

$$P^{-1}J(a_0, \dots, a_{n-1})P = \text{diag}(Q(1), Q(\omega), \dots, Q(\omega^{n-1}))$$

On en déduit que

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(J(a_0, \dots, a_{n-1})) = \{Q(1), Q(\omega), \dots, Q(\omega^{n-1})\}$$

**23** Classique.

**24**  $r = \dim \mathcal{A}^\perp = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathcal{A} = n^2 - d$ .

**25** Evident.

**26** Soit  $N \in \mathcal{A}$  et  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Alors

$$\forall M \in \mathcal{A}, \langle M \mid N^\top A_i \rangle = \text{tr}(M^\top N^\top A_i) = \text{tr}((NM)^\top A_i) = \langle NM \mid A_i \rangle = 0$$

car  $NM \in \mathcal{A}$  (stabilité de  $\mathcal{A}$  par produit) et  $A_i \in \mathcal{A}^\perp$ . Ainsi  $N^\top A_i \in \mathcal{A}^\perp$ .

**27** L'application  $T: \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^\top \end{cases}$  est un automorphisme (c'est une symétrie) donc induit un isomorphisme de  $\mathcal{A}$  sur  $T(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^\top$ . Notamment,  $\mathcal{A}^\top$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\dim \mathcal{A}^\top = \dim \mathcal{A}$ . Soit  $(A, B) \in \mathcal{A}^\top$ . Il existe donc  $(M, N) \in \mathcal{A}^2$  tel que  $A = M^\top$  et  $B = N^\top$ . Alors  $AB = M^\top N^\top = (NM)^\top$ . Or  $NM \in \mathcal{A}$  car  $\mathcal{A}$  est stable par produit. Ainsi  $AB \in \mathcal{A}^\top$  et  $\mathcal{A}^\top$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**28** Soit  $A \in \mathcal{A}^\top$ . Il existe donc  $M \in \mathcal{A}$  tel que  $A = M^\top$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $AA_iX = M^\top A_iX$ . Or d'après la question **26**,  $M^\top A_i \in \mathcal{A}^\top = \text{vect}(A_1, \dots, A_r)$ . Ainsi  $AA_iX \in \text{vect}(A_1X, \dots, A_rX) = F$ . Comme  $(A_1X, \dots, A_rX)$  engendre  $F$ ,  $F$  est stable par l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ .

**29** Si  $r \geq n$ , alors  $d = n^2 - r \leq r^2 - n < n^2 - n + 1$ .

Supposons maintenant  $r \leq n-1$ . On peut choisir  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que  $A_1X \neq 0$  car  $A_1 \neq 0$  en tant que vecteur d'une base. Ainsi  $\dim F \geq 1$ . De plus,  $F$  est engendré par les  $r$  vecteurs  $A_1X, \dots, A_rX$  donc  $\dim F \leq r \leq n-1$ .

Notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble des endomorphismes canoniquement associés aux éléments de  $\mathcal{A}^\top$ . Alors  $\mathcal{E}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$  de même dimension que  $\mathcal{A}^\top$ . De plus,  $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_F$  où  $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \mid u(F) \subset F\}$ . Donc, en notant  $p = \dim F$ , on a d'après la question **5**

$$d = \dim \mathcal{A}^\top = \dim \mathcal{E} \leq \dim \mathcal{A}_F = n^2 - np + p^2$$

Mais comme  $1 \leq p \leq n-1$ ,  $d \leq n^2 - n + 1$  d'après la question **6**.

Enfin, l'ensemble des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$  avec  $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de dimension  $n^2 - n + 1$ . Ainsi la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est bien  $n^2 - n + 1$ .

**30** Si  $n = 1$ , alors toute matrice nilpotente est nulle (son indice de nilpotence vaut nécessairement 1). Ainsi  $\mathcal{A} = \{0\}$  est trivialement trigonalisable.

**31** Supposons que les seuls sous-espaces de  $E$  stables par tous les éléments de  $\mathcal{A}$  sont  $\{0\}$  et  $E$ . Alors  $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$  d'après le théorème de Burnside. Ceci n'est pas possible car  $\mathcal{A}$  ne contient que des éléments nilpotents. On en déduit qu'il existe un sous-espace vectoriel  $V$  de  $E$  distinct de  $\{0\}$  et  $E$  stable par tous les éléments de  $\mathcal{A}$ .

**32** Il suffit de choisir une base de  $E$  adaptée à  $V$ .

**33** Comme l'application  $\text{mat}_{\mathcal{B}}$  est linéaire, les applications  $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto A(u)$  et  $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto D(u)$  le sont également. On en déduit que  $\{A(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$  et  $\{D(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$  sont des sous-espaces vectoriels respectifs de  $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$  et  $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ . Soit  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ . Alors

$$\begin{pmatrix} A(u \circ v) & B(u \circ v) \\ 0 & D(u \circ v) \end{pmatrix} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u \circ v) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(v) & B(v) \\ 0 & D(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(u)A(v) & \star \\ 0 & D(u)D(v) \end{pmatrix}$$

Ainsi  $A(u \circ v) = A(u)A(v)$  et  $D(u \circ v) = D(u)D(v)$ . Ceci prouve que  $\{A(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$  et  $\{D(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$  sont stables par produit : ce sont donc des sous-algèbres respectives de  $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$  et  $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ .

Soit  $u \in \mathcal{A}$ . Alors  $u$  est nilpotent i.e. il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $u^p = 0$ . D'après ce qui précède,  $A(u)^p = A(u^p) = A(0) = 0$  et  $D(u)^p = D(u^p) = D(0) = 0$  donc tous les éléments de  $\{A(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$  et  $\{D(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$  sont nilpotents.

**34** Comme  $1 \leq r \leq n-1$  et  $1 \leq s \leq n-1$ , on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux sous-algèbres  $\{A(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$  et  $\{D(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ . Il existe donc  $P \in \text{GL}_r(\mathbb{C})$  et  $Q \in \text{GL}_s(\mathbb{C})$  telles que pour tout  $u \in \mathcal{A}$ ,  $P^{-1}A(u)P$  et  $Q^{-1}D(u)Q$  soient triangulaires supérieures. En posant  $R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ ,  $R \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $R^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$ . Alors pour tout  $u \in \mathcal{A}$ ,

$$R^{-1} \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) R = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1}A(u)P & \star \\ 0 & Q^{-1}D(u)Q \end{pmatrix}$$

donc  $R^{-1} \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) R$  est triangulaire supérieure : l'algèbre  $\mathcal{A}$  est donc trigonalisable.

On conclut alors par récurrence.

**35** Soit  $u \in \mathcal{A}$ . Comme  $u$  est nilpotente, sa seule valeur propre est 0. La seule valeur propre de la matrice triangulaire supérieure  $R^{-1} \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) R$  est donc également 0. La diagonale de cette matrice est donc nulle i.e.  $R^{-1} \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) R \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$ . Si on note  $\mathcal{B}'$  la base de  $E$  telle que  $R = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ , alors la matrice de tout élément de  $\mathcal{A}$  dans la base  $\mathcal{B}'$  appartient à  $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ .

**36** Considérons comme suggéré le sous-espace vectoriel  $F = \{u(x) \mid u \in \mathcal{A}\}$ . Comme  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$ ,  $F$  est stable par tous les éléments de  $\mathcal{A}$ . Comme  $\mathcal{A}$  est irréductible,  $F = \{0\}$  ou  $F = E$ .

Supposons que  $F = \{0\}$ . Alors  $u(x) = 0_E$  pour tout  $u \in \mathcal{A}$ . Ainsi  $\text{vect}(x)$  est stable par tout élément de  $\mathcal{A}$ . Comme  $x \neq 0$ ,  $\text{vect}(x) \neq \{0\}$  et comme  $\dim E \geq 2$ ,  $\text{vect}(x) \neq E$  puisque  $\dim \text{vect}(x) = 1$ . Ceci n'est pas possible car  $\mathcal{A}$  est irréductible.

Ainsi  $F = E$ . Il donc existe  $u \in \mathcal{A}$  tel que  $u(x) = y$ .

**37** Comme  $\text{rg}(v) \geq 2$ , il existe  $(x, y) \in E^2$  tel que  $(v(x), v(y))$  est libre. En particulier,  $v(x) \neq 0$  et d'après la question précédente, il existe  $u \in \mathcal{A}$  tel que  $u \circ v(x) = y$ .

$\text{Im } v$  est clairement stable par  $v \circ u$  donc  $v \circ u$  induit un endomorphisme  $w$  de  $\text{Im } v$ . Comme  $\text{Im } v$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel,  $w$  admet au moins une valeur propre  $\lambda$ . Ainsi  $\text{rg}(w - \lambda \text{Id}_{\text{Im } v}) < \dim \text{Im } v = \text{rg}(v)$ . Or

$$\text{Im}(w - \lambda \text{Id}_{\text{Im } v}) = (w - \lambda \text{Id}_{\text{Im } v})(\text{Im } v) = \text{Im}(v \circ u \circ v - \lambda v)$$

donc

$$\text{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) = \text{rg}(w - \lambda \text{Id}_{\text{Im } v}) < \text{rg}(v)$$

Enfin,  $v \circ u \circ v(x) - \lambda v(x) = v(y) - \lambda v(x) \neq 0$  car  $(v(x), v(y))$  est libre. Ainsi  $\text{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) > 0$ .

**38** Soit  $v$  un élément non nul de  $\mathcal{A}$  de rang minimal. Supposons que  $\text{rg}(v) \geq 2$ . En choisissant  $u$  et  $\lambda$  comme dans la question précédente,  $v \circ u \circ v - \lambda v$  n'est pas nul (son rang est strictement positif) et  $\text{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \text{rg}(v)$ . Mais comme  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$ ,  $v \circ u \circ v - \lambda v \in \mathcal{A}$ . Ceci contredit la minimalité du rang de  $v$ . Ainsi  $\text{rg}(v) \leq 1$  mais comme  $v \neq 0$ ,  $\text{rg}(v) = 1$ .

**39** Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Comme  $u_0(\varepsilon_1) \neq 0$ , il existe  $v_i \in \mathcal{A}$  tel que  $v_i(u_0(\varepsilon_1)) = \varepsilon_i$  d'après la question 36. On pose alors  $u_i = v_i \circ u_0$ . Comme  $u_i(\varepsilon_k) = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$  et  $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i \neq 0$ ,  $\text{rg}(u_i) = 1$ . De plus,  $u_i \in \mathcal{A}$  car  $(u_i, u_0) \in \mathcal{A}^2$  et  $\mathcal{A}$  est stable par composition.

**40** Dans ce qui suit, on note  $(\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*)$  la base duale de  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ .

Soit  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Posons

$$F = \{x \in E, \forall u \in \mathcal{A}, \varepsilon_1^*(u(x)) = 0\}$$

Alors  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $\mathcal{A}$ . Comme  $\mathcal{A}$  est irréductible,  $F = \{0\}$  ou  $F = E$ . Supposons que  $F = E$ . Alors  $\text{Ker } \varepsilon_1^*$  est un sous-espace strict de  $E$  stable par tout élément de  $\mathcal{A}$ , ce qui est exclu. Ainsi  $F = \{0\}$ .

Notons  $\varphi_i : u \in \mathcal{A} \mapsto \varepsilon_1^*(u(\varepsilon_i))$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrons que  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est libre. Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n x_i \varphi_i = 0$ . Alors pour tout  $u \in \mathcal{A}$ ,  $\varepsilon_1^* \circ u \left( \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i \right) = 0$  donc  $\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i \in F = \{0\}$ . Ainsi  $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$  car  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  est libre. Notons  $\Psi : u \in \mathcal{A} \mapsto (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u))$ . Alors  $\text{rg } \Psi = \text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = n$  (raisonner matriciellement au besoin). Ainsi  $\Psi$  est surjective. Notamment, il existe  $w_j \in \mathcal{A}$  tel que  $\Psi(w_j) = e_j$  où  $(e_1, \dots, e_n)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ . Ceci signifie que  $\varepsilon_1^*(w_j(\varepsilon_i)) = \delta_{i,j}$ . Posons  $f_{i,j} = u_i \circ w_j \in \mathcal{A}$ . Alors  $f_{i,j}(\varepsilon_j) = \varepsilon_i$  et  $f_{i,j}(\varepsilon_k) = 0$  pour  $k \neq j$ . On vérifie que la famille  $(f_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  est une famille libre de  $n^2$  éléments de  $\mathcal{L}(E)$ . C'est donc une base de  $\mathcal{L}(E)$  formée d'éléments de  $\mathcal{A}$ . Ainsi  $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ .