Semaine du 08/02 au 12/02

1 Cours

Espaces vectoriels de dimension finie

Famille de vecteurs Familles génératrices. Familles libres/liées. Bases. Base adaptée à une décomposition en somme directe. Cas particulier des familles de $\mathbb{K}^n$ (pivot de Gauss).

Dimension d'un espace vectoriel Théorème de la base incomplète/extraite. Existence de bases. Définition de la dimension. Dans un espace de dimension n une famille génératrice/libre possède au moins/au plus n éléments. Si $\mathcal{B}$ est une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n, alors $\mathcal{B}$ est une base ssi $\mathcal{B}$ est libre ssi $\mathcal{B}$ est génératrice. Base et dimension d'un produit d'espaces vectoriels.

Dimension et sous-espaces vectoriels Si F sous-espace vectoriel de E, alors $\dim \mathrm{F} \leq \dim \mathrm{E}$ avec égalité si et seulement si $\mathrm{F} = \mathrm{E}$. Hyperplans. Dimension d'une somme directe. Existence de supplémentaire en dimension finie. Formule de Grassmann. Caractérisation de la supplémentarité par la dimension. Une somme est directe si et seulement si la somme des dimensions est égale à la dimension de la somme

Rang d'une famille de vecteurs Définition. Si $\mathcal{F}$ est une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n, alors $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $\operatorname{rg} \mathcal{F} = p$ et $\mathcal{F}$ est génératrice si et seulement si $\operatorname{rg} \mathcal{F} = n$. Le rang est invariant par opérations de pivot de Gauss.

2 Méthodes à maîtriser

- Montrer qu'une famille est libre.
- Montrer qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre, liée ou génératrice par pivot de Gauss.
- Déterminer la dimension d'un espace vectoriel en exhibant une base.
- Utiliser la dimension pour montrer qu'une famille libre/génératrice est une base.
- Utiliser la dimension pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont égaux.
- Utiliser la dimension pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.
- Calculer le rang d'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ par pivot de Gauss.
- Utiliser le rang pour montrer qu'une famille est libre ou génératrice.

3 Questions de cours

Hyperplans et droites
Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, H un hyperplan de E et D une droite de E. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{D}$ si et seulement si $\mathrm{D} \not\subset \mathrm{H}$.

Base adaptée à une décomposition en somme directe
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si $(f_1, \dots, f_n)$ et $(g_1, \dots, g_p)$ sont des bases respectives de F et G, alors $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ est une base de $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Existence de supplémentaire
Montrer que tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie possède un supplémentaire dans E.

Centre d'un groupe (retour sur l'interro n°08)
Soit G un groupe et $\mathrm{Z} = \{a \in \mathrm{G},\ \forall x \in \mathrm{G},\ ax = xa\}$. Montrer que Z est un sous-groupe de G.

Retour sur le DS n°06 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel x_n tel que $x_n + \ln(x_n) = n$. Déterminer le sens de variation, la limite et un équivalent de (x_n).