Semaine du 07/03 au 11/03

1 Cours

Probabilités

Univers probabilisé Tribu. Stabilité par passage au complémentaire, intersection et union finie ou dénombrable. Espace probabilisable. Probabilité sur un espace probabilisable. Si Ω est fini ou dénombrable, une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)$ s'identifie, via la formule $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$ à une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs sommable de somme 1. Continuité croissante/décroissante. Si (A_n) est une suite d'événements, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$. Evénements négligeables/presque sûrs. Une union finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable. Probabilité conditionnelle. Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formule de Bayes. Evénéments indépendants.

Variables aléatoires Définition d'une variable aléatoire. Loi d'une variable aléatoire. Lois usuelles : loi géométrique, loi de Poisson (plus les lois usuelles de première année). Caractérisation de la loi géométrique comme une loi sans mémoire. Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : si $\mathrm{X}_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et $np_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. Couples de variables aléatoires : loi conjointe, loi marginale, loi conditionnelle. Variables aléatoire sindépendantes. Lemme des coalitions.

Espérance, variance, covariance Définition de l'espérance. Espérance des lois usuelles. Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire. Formule de transfert. Espérance d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes. Moment d'une variable aléatoire. Les variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 sur un même espace probabilisé forment un espace vectoriel. Une variable aléatoire admettant un momemnt d'ordre 2 est d'espérance finie. Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y admettent un moment d'ordre 2, $\mathbb{E}(\mathrm{XY})^2 \leq \mathbb{E}(\mathrm{X}^2)\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2)$. Variance et écart-type : $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{E}((\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}))^2)$. Formule de König-Huygens : $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) - \mathbb{E}(\mathrm{X})^2$. $\mathbb{V}(a\mathrm{X} + b) = a^2\mathbb{V}(\mathrm{X})$. Variance des lois usuelles. Covariance : $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathbb{E}((\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}))(\mathrm{Y} - \mathbb{E}(\mathrm{Y}))) = \mathbb{E}(\mathrm{XY}) - \mathbb{E}(\mathrm{X})\mathbb{E}(\mathrm{Y})$. Covariance de deux variables aléatoires indépendantes. Variance d'une somme, cas de variables aléatoires deux à deux indépendantes (théorème de Pythagore). Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres.

Fonctions génératrices Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. Fonctions génératrices des lois usuelles. Deux variables aléatoires ont même loi si et seulement si elles ont même fonction génératrice. Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ admet une espérance si et seulement si $\mathrm{G_X}$ est dérivable en 1 et, dans ce cas, $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}'_\mathrm{X}(1)$. Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $\mathrm{G_X}$ est deux fois dérivable en 1 et, dans ce cas, $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}''_\mathrm{X}(1) + \mathrm{G}'_\mathrm{X}(1) - \mathrm{G}'_\mathrm{X}(1)^2$. Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

Intégrales à paramètres

Passage à la limite Théorème de convergence dominée : cas discret et cas continu. Théorème d'intégration terme à terme.

2 Méthodes à maîtriser

- Savoir récupérer les lois marginales à partir de la loi conjointe.
- Reconnaître un cas concret de loi géométrique : temps d'attente du premier succès lors d'une répétion d'épreuves de Bernoulli indépendantes.
- Partitionner un événement pour en calculer la probabilité.
- Appliquer la formule des probabilités totales : bien souvent, les énoncés donnent des probabilités conditionelles.
- Appliquer la formule de transfert pour calculer l'espérance de $f(\mathrm{X})$: seule la loi de X est nécessaire, pas besoin de la loi de $f(\mathrm{X})$.
- Calculer une variance : appliquer la formule de transfert pour calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X}^2)$.
- Utiliser les fonctions génératrices pour déterminer une loi. Exemple classique : somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson.
- Utiliser les fonctions génératrices pour calculer l'espérance et la variance.
- Utiliser le théorème de convergence dominée pour déterminer la limite d'une suite d'intégrales (dans le cas où on ne peut pas appliquer le théorème pour les suites de fonctions convergeant uniformément sur un segment).
- Exprimer une intégrale sous forme d'une somme de série : écrire l'intégrande sous forme d'une somme de série de fonctions (typiquement à l'aide d'un développement en série entière) et appliquer le théorème d'intégration terme à terme (dans le cas où on ne peut appliquer le théorème pour les séries de fonctions convergeant uniformément sur un segment).

3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 19, 25, 26, 27, 49, 50, 96, 103, 110