

EXERCICE 1.

- Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe $4\sqrt{2}(-1+i)$.
- Trois nombres complexes ont pour produit $4\sqrt{2}(-1+i)$. Leurs modules sont en progression géométrique de raison 2 et leurs arguments sont en progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$. On note z_1 , z_2 et z_3 ces trois nombres, où la numérotation respecte l'ordre des modules. Sachant que z_1 a un argument compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π , déterminer le module et un argument de chacun des trois nombres z_1 , z_2 et z_3 .
- Construire les images M_1 , M_2 et M_3 des nombres complexes z_1 , z_2 et z_3 dans le plan complexe.

EXERCICE 2.

On note $j = e^{2i\pi/3}$.

- Calculer j^3 , $1+j+j^2$, $1+j^2+j^4$, j^{-1} et \bar{j} en fonction de j .
- Simplifier l'expression

$$\frac{1+j}{(1-i)^2} + \frac{1-j}{(1+i)^2}.$$

EXERCICE 3.

Voici quelques calculs pour se délier les doigts...

- Représenter sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$\frac{2-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i}, \quad \frac{(2+i)(3+2i)}{2-i}, \quad \frac{3+4i}{(2+3i)(4+i)}.$$

- On considère les nombres complexes

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}+i}.$$

Représenter sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{|l|l|l|} \hline \text{a. } z_1 + z_2 & \text{c. } z_1/z_2 & \text{e. } z_1^3 + z_2^3 \\ \hline \text{b. } z_1 z_2 & \text{d. } z_1^2 + z_2^2 & \\ \hline \end{array}$$

EXERCICE 4.

Voici un peu d'entraînement...

- On pose $z_1 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1+i$.
 - Représenter le quotient z_1/z_2 sous forme polaire.
 - En déduire les valeurs de $\cos(7\pi/12)$ et de $\sin(7\pi/12)$.
- En précisant pour quelles valeurs des réels x et y , elles ont un sens, mettre sous forme polaire les expressions suivantes :

$$\begin{array}{|l|l|} \hline \text{a. } 1 + \sin x - i \cos x & \text{d. } \frac{e^{ix} + e^{iy}}{1 + e^{i(x+y)}} \\ \hline \text{b. } \frac{1}{1 + i \tan x} & \\ \hline \text{c. } \frac{1 + \cos x + i \sin x}{1 - \cos x - i \sin x} & \text{e. } \frac{(1 - i\sqrt{3})(\cos x + i \sin x)}{\cos x + \sin x + i(\cos x - \sin x)} \\ \hline \end{array}$$

EXERCICE 5.★

Voici quelques calculs de puissances.

- Pour tout entier naturel n , simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{|l|l|} \hline \text{a. } \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \right)^n & \text{c. } \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i} \right)^n \\ \hline \text{b. } \frac{(1-i)^n - \sqrt{2}^n}{(1+i)^n - \sqrt{2}^n} & \text{d. } (1 + \cos \theta + i \sin \theta)^n \\ \hline & \text{e. } \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{i} \\ \hline \end{array}$$

- Pour quelles valeurs de l'entier relatif n le nombre complexe $(\sqrt{3}+i)^n$ appartient-il à \mathbb{R}_+ ? Pour quelles valeurs est-il imaginaire pur ?

EXERCICE 6.★

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $z_\theta = -\sin(2\theta) + 2i \cos^2(\theta)$.

- Déterminer le module et un argument de z_θ . On discutera en fonction des valeurs de θ .
- Déterminer l'ensemble des nombres réels θ tels que $|z_\theta| = |z_\theta - 1|$.

EXERCICE 7.

Soit

$$v = \frac{\sqrt{3}+i}{i-1}.$$

Ecrire v^{2002} sous forme polaire puis sous forme algébrique.

EXERCICE 8.

On pose $\omega = \sqrt{3} + i$. Déterminer $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega^n \in \mathbb{R}$. Même question avec $\omega^n \in i\mathbb{R}$.

EXERCICE 9.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

1. Montrer que $\frac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur *si et seulement si* $z \in \mathbb{U}$.
2. Montrer que $\frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U}$ *si et seulement si* z est imaginaire pur.

EXERCICE 10.

1. Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| \leq 1$. Montrer que $|u| \leq |2-u|$ et qu'il y a égalité *si et seulement si* $u = 1$.

On définit une suite *complexe* (z_n) par son premier terme z_0 et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n}{2 - z_n}$$

On suppose $|z_0| \leq 1$.

2. Que peut-on dire de la suite (z_n) lorsque $z_0 = 0$? Justifier.
3. Même question lorsque $z_0 = 1$.
4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \leq 1$.
5. En déduire que la suite $(|z_n|)$ est décroissante.

Dans la suite, on suppose $z_0 \neq 1$.

6. Montrer que $|z_1| < 1$.
7. On pose $q = \frac{1}{2-|z_1|}$. Montrer que $|z_{n+1}| \leq q|z_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
8. En déduire par récurrence que $|z_n| \leq q^{n-1}|z_1|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
9. Quelle est la limite de la suite $(|z_n|)$?

EXERCICE 11.★

Soient a et b de module 1 tels que $a \neq \pm b$.

1. Prouver que $\frac{1+ab}{a+b} \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b} \in i\mathbb{R}.$$

EXERCICE 12.★

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ de module 1. Montrer que

$$|a+b+c| = |ab+bc+ac|.$$

EXERCICE 13.★

Déterminer les nombres complexes z tels que z , $1/z$ et $1+z$ soient de même module.

EXERCICE 14.★

Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1 tels que $a \neq c$. Montrer que

$$\frac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2} \in \mathbb{R}_+.$$

EXERCICE 15.

Dans tout l'exercice, le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct \mathcal{R} .

1. Déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les nombres complexes z , $1/z$ et $1+z$ aient même module.
2. Déterminer les nombres complexes tels que

$$|z-1| = |\bar{z}+1|.$$

Interprétation géométrique?

3. Déterminer le lieu des points du plan dont l'afixe z vérifie

$$|(1+i)\bar{z}-2i|=2.$$

EXERCICE 16.

Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer que $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.

EXERCICE 17.★

Soient $\mathcal{E} = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ et $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par

$$\forall z \in \mathcal{E}, \quad f(z) = \frac{z+i}{z-2i}.$$

Déterminer les ensembles suivants :

1. $\mathcal{E}_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathbb{R} \right\};$
2. $\mathcal{E}_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in i\mathbb{R} \right\};$
3. $\mathcal{E}_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(f(z)) = \pi/2 \right\}.$

EXERCICE 18.★

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes

$$1. \operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0 \quad \left| \quad 2. \operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0 \quad \left| \quad 3. \operatorname{Re}(z^3) = \operatorname{Im}(z^3)\right.\right.$$

EXERCICE 19.

Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{C} :

$$\begin{array}{ll} 1. z^2 + (5-2i)z + 5-5i = 0; & 5. z^6 + (2i-1)z^3 - 1-i = 0; \\ 2. z^2 + (-3+i)z + 4-3i = 0; & 6. z^4 - z^3 - z + 1 = 0; \\ 3. z^2 - (9-2i)z + 26 = 0; & 7. z^4 + 2 - i\sqrt{12} = 0. \\ 4. z^4 + (3-6i)z^2 + 2(16-63i) = 0; & \end{array}$$

EXERCICE 20.★

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$1. z^2 = \bar{z}; \quad \left| \quad 2. z^3 = \bar{z}; \quad \left| \quad 3. z^2 = 27\bar{z}.\right.\right.$$

EXERCICE 21.★

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^2 + 8|z| - 3 = 0.$$

EXERCICE 22.

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. (3+i)z^2 - (8+6i)z + 25+5i = 0; & 4. (1-5i)z^2 - (20+4i)z + 61+7i = 0; \\ 2. iz^2 + (4i-3)z + i-5 = 0; & \\ 3. z^2 - 5z + 4 + 10i = 0; & 5. z^6 - 2\cos(\theta)z^3 + 1 = 0, \text{ où } \theta \in \mathbb{R}. \end{array}$$

EXERCICE 23.

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$1. z^5 = 16\bar{z}; \quad \left| \quad 2. 2\bar{z} - 3z = 2 + 3i.\right.$$

EXERCICE 24.

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes

$$\begin{array}{ll} 1. 2z + 3\bar{z} = 1; & 3. z^2 = -\bar{z}^2; \\ 2. z^2 = \bar{z}; & 4. z^4 = \frac{1}{\bar{z}}. \end{array}$$

EXERCICE 25.

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes

$$1. (z+i)^3 + iz^3 = 0; \quad \left| \quad 2. z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0.\right.$$

EXERCICE 26.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i$.

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ a une unique solution imaginaire pure que l'on déterminera.
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$.
3. Etudier dans le plan complexe la nature du triangle ayant pour sommets les images des trois racines de cette équation.

EXERCICE 27.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. Montrer que $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i \cotan \frac{\theta}{2}$ où $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$.
2. Résoudre l'équation $(z-1)^5 = (z+1)^5$. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction \cotan .

EXERCICE 28.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq 0[2\pi]$. Montrer que $\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = i \cotan \frac{\theta}{2}$ où $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$.
2. Résoudre de deux façons l'équation $(z - 1)^5 = (z + 1)^5$. En déduire les valeurs de $\cotan \frac{\pi}{5}$, $\cotan \frac{2\pi}{5}$, $\cotan \frac{3\pi}{5}$ et $\cotan \frac{4\pi}{5}$.

EXERCICE 29.

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

1. Déterminer une équation du second degré dont les racines sont α et β .
2. En déduire $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.
3. En déduire $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\sin \frac{\pi}{5}$.

EXERCICE 30.

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{11}}$ ainsi que

$$S = \omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9 \quad T = \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$$

1. a. Montrer que $\sin \frac{6\pi}{11} + \sin \frac{18\pi}{11} > 0$. En déduire que $\text{Im}(S) > 0$.
b. Montrer que $S + T = -1$ et $ST = 3$.
c. En déduire une équation du second degré dont sont solutions S et T puis les valeurs de S et T .
2. a. Montrer que $\omega - \omega^{10} = 2i \sin \frac{2\pi}{11}$.
b. Montrer que $\frac{1 - \omega^3}{1 + \omega^3} = -i \tan \frac{3\pi}{11}$.
c. Montrer que $\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = \frac{1 - \omega^3}{1 + \omega^3}$.
d. En déduire que $\tan \frac{3\pi}{11} + 4 \sin \frac{2\pi}{11} = i(T - S) = \sqrt{11}$.

EXERCICE 31.★

En linéarisant $\sin^4 x$, calculer une expression simple de la somme

$$\sin^4 \left(\frac{\pi}{8} \right) + \sin^4 \left(\frac{3\pi}{8} \right) + \sin^4 \left(\frac{5\pi}{8} \right) + \sin^4 \left(\frac{7\pi}{8} \right).$$

EXERCICE 32.★

Soient α et β , deux nombres réels. Simplifier les sommes

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(\alpha + k\beta),$$

$$S'_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(\alpha + k\beta),$$

$$S''_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cos(\alpha + k\beta).$$

EXERCICE 33.★

Soit α , un nombre réel tel que $\cos \alpha \neq 0$. On pose

$$R_n = \sum_{k=0}^n \frac{\cos k\alpha}{\cos^k \alpha} \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{k=0}^n \frac{\sin k\alpha}{\cos^k \alpha}.$$

Calculer $R_n + iI_n$ et en déduire des expressions simplifiées de R_n et de I_n .

EXERCICE 34.

Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \frac{\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \dots + \cos((2n+1)x)}{\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x) + \dots + \sin((2n+1)x)}.$$

EXERCICE 35.

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $\alpha = \omega + \frac{1}{\omega}$.

1. Montrer que $\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} + 1 + \omega + \omega^2 = 0$.
2. En déduire que α est solution d'une équation du second degré que l'on précisera.
3. En déduire la valeur de $\cos \left(\frac{2\pi}{5} \right)$ puis de $\sin \left(\frac{2\pi}{5} \right)$.

EXERCICE 36.★

Soit ω une racine septième de l'unité distincte de 1. Simplifier le nombre

$$\alpha = \frac{\omega}{1 + \omega^2} + \frac{\omega^2}{1 + \omega^4} + \frac{\omega^3}{1 + \omega^6}.$$

EXERCICE 37.

Etablir par un calcul que $\operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}$ équivaut à

$$\left| \frac{z}{z-1} \right| < 1.$$

Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

EXERCICE 38.★

Soit λ un nombre réel irrationnel. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\lambda\pi} \right| \leq \frac{1}{|\sin(\lambda\pi)|}.$$

EXERCICE 39.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$1 + z + \dots + z^{n-1} - nz^n = 0.$$

Montrer que $|z| \leq 1$.

EXERCICE 40.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Montrer que

$$\left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}.$$

EXERCICE 41.★

Prouver que

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, |a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|.$$

étudier les cas d'égalité.

EXERCICE 42.★

Soient $n \geq 2$ et z_1, z_2, \dots, z_n appartenant à \mathbb{C}^* . Prouver que

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|,$$

avec égalité *si et seulement si*

$$\arg(z_1) = \arg(z_2) = \dots = \arg(z_n).$$

EXERCICE 43.

Soient A, B, C, D quatre points du plan distincts deux à deux. On suppose de plus A, B, C non alignés et on introduit le cercle \mathcal{C} de centre O circonscrit au triangle ABC.

On choisit un repère orthonormé du plan de centre O tel que \mathcal{C} ait pour rayon 1. On note a, b, c, d les affixes respectifs de A, B, C, D.

On pose enfin $Z = \frac{d - a}{c - a} \frac{c - b}{d - b}$.

1. Dans cette question, on suppose que D appartient à \mathcal{C} .

a. Justifier que $\bar{a} = \frac{1}{a}$, $\bar{b} = \frac{1}{b}$, $\bar{c} = \frac{1}{c}$, $\bar{d} = \frac{1}{d}$.

b. Montrer que Z est un réel.

c. En déduire que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})[\pi]$.

2. Réciproquement, on suppose que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})[\pi]$ et on veut montrer que D appartient à \mathcal{C} .

a. Que peut-on dire de Z ?

b. Exprimer d en fonction de a, b, c, Z.

c. Calculer \bar{d} et en déduire que D appartient à \mathcal{C} .

EXERCICE 44.★

Déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe z tels que les points d'affixes 1, z et z^3 soient alignés.

EXERCICE 45.★

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que les points d'affixes respectives z, iz et z^2 soient alignés.

EXERCICE 46.★

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé direct \mathcal{R} . Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan \mathcal{P} tels que les points d'affixes respectives 1, z^2 et z^4 soient alignés.

EXERCICE 47.★★

Déterminer les points M(z) du plan \mathcal{P} tels que $\left(\frac{z}{z-1} \right)^4 \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 48.★★

Soient A, B, C trois points deux à deux distincts d'affixes a, b, c .

1. Prouver que ABC est un triangle équilatéral direct *si et seulement si*

$$a + jb + j^2c = 0,$$

et équilatéral indirect *si et seulement si*

$$a + jc + j^2b = 0.$$

2. Prouver que ABC est un triangle équilatéral *si et seulement si*

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$

EXERCICE 49.★

On se place dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $M_1M_2M_3$ un triangle inscrit dans un cercle de centre O . On note z_k l'affixe de M_k .

1. Montrer que l'orthocentre H du triangle $M_1M_2M_3$ a pour affixe

$$h = z_1 + z_2 + z_3.$$

2. En déduire que le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un vrai triangle sont alignés.

EXERCICE 50.★

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$1. e^z + e^{-z} = 1; \quad | \quad 2. e^z + e^{-z} = 2i.$$

EXERCICE 51.

Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles définies par $x_0 = 1, y_0 = 0$ et par $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n - x_n \end{cases}$. On pose $z_n = x_n + iy_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer z_0, z_1, z_2 et z_3 .
2. Montrer que (z_n) est une suite géométrique. On donnera sa raison sous forme trigonométrique.

3. Exprimer $A_n = \sum_{k=0}^n z_k, B_n = \sum_{k=0}^n x_k, C_n = \sum_{k=0}^n y_k$ en fonction de n .

EXERCICE 52.★

Simplifier la somme

$$S_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-3)^k \binom{n}{2k}.$$

EXERCICE 53.★

Pour tout entier naturel n , on pose

$$S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k}, \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+1},$$

et $S_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+2}.$

1. Calculer $S_1 + S_2 + S_3$, puis $S_1 + jS_2 + j^2S_3$ et $S_1 + j^2S_2 + j^4S_3$.
2. En déduire les valeurs de S_1, S_2 et S_3 .