Devoir surveillé n° 4

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

Toutes les fonctions entrant en jeu dans cet exercice sont à valeurs réelles.

1. On souhaite résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle suivante :

$$(E) \ : \ \cos(t)z''(t) - 2\sin(t)z'(t) - \cos(t)z(t) = 0$$

a. Soit z une fonction deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $\varphi(t) = \cos(t)z(t)$ pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Exprimer $\varphi''(t)$ en fonction de $z(t)$, $z'(t)$ et $z''(t)$ pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b. En déduire les solutions de (E).

2. On souhaite maintenant résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle suivante :

$$(F) \ : \ (1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$$

a. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]-1, 1[$. On pose $z(t) = y(\sin(t))$ pour $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Exprimer $y(x)$, $y'(x)$ et $y''(x)$ en fonction de $z(\arcsin x)$, $z'(\arcsin x)$ et $z''(\arcsin x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

b. En déduire que y est solution de (F) sur $]-1, 1[$ *si et seulement si* z est solution d'une équation différentielle que l'on précisera. En déduire les solutions de (F).

3. Soit f une solution de (F) sur $]-1, 1[$.

a. Montrer par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in]-1, 1[, \ (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+1)}(x) - (n+1)^2 f^{(n)}(x) = 0$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$. Déterminer une relation de récurrence entre a_{n+2} et a_n à l'aide de la question précédente.

d. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$a_{2p} = \frac{((2p)!)^2}{2^{2p}\,(p!)^2} a_0 \qquad\qquad a_{2p+1} = 2^{2p}\,(p!)^2\,a_1$$

4. On se propose de déterminer plusieurs développements limités à l'aide de la question **3**.

a. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Rappeler la formule de Taylor-Young appliquée à f en 0 à un ordre $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $g : x \in]-1, 1[\mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. Que valent $g(0)$ et $g'(0)$? En remarquant que g est solution de (F), donner le développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de g.

c. Soit $h : x \in]-1,1[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Que valent $h(0)$ et $h'(0)$? En remarquant que h est solution de (F), donner le développement limité à l'ordre $2n$ en 0 de h.

d. Soit $k : x \in]-1,1[\mapsto \arcsin x$. Déduire de la question **4.c** le développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de k.

5. En remarquant que $g = hk$ et en considérant le coefficient de x^{2n+1} dans le développement limité de cette fonction, montrer que

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1}\binom{2p}{p}\binom{2(n-p)}{n-p} = \frac{2^{4n}}{(n+1)\binom{2n+1}{n}}$$

Problème 1 —

Partie I – Etude d'une bijection réciproque

1. Montrer que th induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser.
On note argth sa bijection réciproque.

2. Exprimer la dérivée de th en fonction de th.

3. Montrer que argth est impaire.

4. Justifier que argth est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

5. Déterminer le développement limité de argth à l'ordre 5 en 0.

Partie II – Etude d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle $(E) : \ xy' + 3y = \frac{1}{1-x^2}$.

1. On pose $f(x) = \frac{\operatorname{argth} x - x}{x^3}$ pour tout $x \in I \setminus \{0\}$. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f son prolongement par continuité. Montrer que f est dérivable sur I.

2. Résoudre (E) sur l'intervalle $]0,1[$. En déduire sans justification les solutions de (E) sur l'intervalle $]-1,0[$.

3. Montrer que (E) admet une unique solution sur l'intervalle $]-1,1[$.

Partie III – Etude d'une équation fonctionnelle

L'objectif de cette partie est de déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables en 0 vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = \frac{2f(x)}{1+f(x)^2}$$

1. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.

2. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.

3. Montrer que, si f est solution,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

On pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2}\right)$.

4. Montrer que si f est solution, $-f$ est également solution.

5. Montrer que th est solution du problème posé.

On suppose jusqu'à nouvel ordre que f est solution du problème posé, que $f(0) = 1$ et que f n'est pas constante.

On peut donc considérer $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et on pose $u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
7. Etablir une relation entre u_n et u_{n+1}. En déduire que la suite (u_n) garde un signe constant et étudier son sens de variation suivant le signe de u_0.
8. En utilisant les questions **III.6** et **III.7**, aboutir à une contradiction.
9. Que peut-on dire si l'hypothèse «$f(0) = 1$» est remplacée par l'hypothèse «$f(0) = -1$» ?
10. Que peut-on en conclure ?

On suppose maintenant que f est solution du problème posé et que $f(0) = 0$.

11. En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite du même type que celle considérée précédemmment, montrer que f ne prend pas les valeurs -1 et 1.

On peut alors définir la fonction g telle que $g(x) = \operatorname{argth}(f(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

12. Montrer que $g(2x) = 2g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
13. Justifier que g est dérivable en 0.
14. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$. On pose $v_n = \dfrac{g\left(\frac{x_0}{2^n}\right)}{\frac{x_0}{2^n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
    Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = g'(0)$.
15. Montrer que la suite (v_n) est constante.
16. En déduire que g est linéaire, c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ telle que $g(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On revient maintenant au cas général.

17. Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.