ESPACES VECTORIELS

Axiomes

EXERCICE 1.

Préciser pour chacun des triplets suivants les lois $+$ et $\cdot$ qui les munissent d'une structure d'espace vectoriel ainsi que le vecteur nul.

1. $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$
2. $(\mathbb{R}^\mathbb{R}, +, \cdot)$
3. $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, +, \cdot)$
4. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

EXERCICE 2.

Vérifier que l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ muni des lois interne et externe suivantes

$$u \boxplus v = uv \quad \text{et} \quad \lambda \boxdot u = u^\lambda,$$

où u et v sont dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Sous-espaces vectoriels

EXERCICE 3.

L'axe réel dans $\mathbb{C}$ est-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$? du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

EXERCICE 4.

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les ensembles suivants,

$$F = \left\{(\lambda - 3\mu, 2\lambda + 3\mu, \lambda) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

et

$$G = \left\{(x, y, z) \in E \mid x + 2y = 0\right\}.$$

1. Prouver que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$.

EXERCICE 5.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X, Y deux parties de E. Prouver que

$$\operatorname{vect}(X \cap Y) \subset \operatorname{vect}(X) \cap \operatorname{vect}(Y).$$

Donner un exemple où cette inclusion est *stricte*.

EXERCICE 6.

Montrer qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E n'est jamais l'union de deux sous espaces-vectoriels stricts (i.e. distincts de E).

EXERCICE 7.

1. $E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
2. $E_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
3. $E_3 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0, y = z\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$?
4. $E_4 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
5. $E_5 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy \geqslant 0\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
6. $E_6 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \geqslant 0\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

EXERCICE 8.

$\mathbb{R}$ est-il un sous-espace du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$? du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

EXERCICE 9.

Parmi les parties suivantes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, déterminer celles qui en sont des sous-espaces vectoriels.

1. $E_1 = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f(1) = 0\right\}$.
2. $E_2 = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f(0) = 1\right\}$.
3. L'ensemble E_3 des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. L'ensemble E_4 des fonctions décroissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
5. L'ensemble E_5 des fonctions monotones de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
6. L'ensemble E_6 des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
7. L'ensemble E_7 des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
8. L'ensemble E_8 des fonctions 2π-périodiques.
9. L'ensemble E_9 des fonctions périodiques.

EXERCICE 10.

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1. L'ensemble E_1 des suites réelles convergentes.
2. L'ensemble E_2 des suites réelles divergentes.
3. L'ensemble E_3 des suites réelles constantes.
4. L'ensemble E_4 des suites réelles bornées.
5. L'ensemble E_5 des suites réelles de limite nulle.
6. $E_6 = \left\{u \in E \mid u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(n^2\right)\right\}$.
7. $E_7 = \left\{u \in E \mid u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\right\}$.
8. $E_8 = \left\{u \in E \mid \exists \alpha \in \mathbb{R},\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n}\right\}$.

Sommes de sous-espaces vectoriels

EXERCICE 11.

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$ et G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équations $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer la projection de (x, y, z) sur F (resp. G) parallélement à G (resp. F).

EXERCICE 12.

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe *si et seulement si*

$$\forall k \in [\![2, p]\!],\ \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k = \{0_E\}$$

EXERCICE 13.

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que $F_1 + \dots + F_p = E$. Montrer qu'il existe des sous-espace vectoriels $G_1, \dots, G_p$ de E tels que $G_k \subset F_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ et $G_1 \oplus \dots \oplus G_p = E$.

EXERCICE 14.

On note E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites réelles de limite nulle et G l'ensemble des suites réelles constantes.

1. Montrer que E, F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

EXERCICE 15.

Soient E l'ensemble des suites réelles constantes, F l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant $u_{n+1} + u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, G l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant $u_{n+2} + u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et enfin H l'ensemble des suites réelles périodiques de période 4.

1. Montrer que E, F, G, H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que E, F, G sont inclus dans H.
3. Montrer que $E \oplus F \oplus G = H$.

EXERCICE 16.

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(0) + f(1) = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

EXERCICE 17.

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(\mathscr{E}):\ y'''-y=0 \qquad (\mathscr{F}):\ y''+y'+y=0 \qquad (\mathscr{G}):\ y'-y=0$$

On note E, F et G les ensembles respectifs des solutions *à valeurs réelles* de $(\mathscr{E})$, $(\mathscr{F})$ et $(\mathscr{G})$. Les solutions de $(\mathscr{E})$, $(\mathscr{F})$ et $(\mathscr{G})$ sont toutes de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, ce qu'on ne demande pas de montrer. On note $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Montrer que $F\subset E$ et $G\subset E$.
3. Donner les solutions des équations différentielles $(\mathscr{F})$ et $(\mathscr{G})$.
4. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et donner pour chacun une famille génératrice.
5. a. Soit $y\in E$. On pose $y_1=2y-y'-y''$ et $y_2=y+y'+y''$. Montrer que $y_1\in F$ et $y_2\in G$.
   b. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
6. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$.

EXERCICE 18.

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Quelles assertions parmi les suivantes sont vraies en général ?

1. $F\cap G\subset F+G$;
2. $F\cup G\subset F+G$;
3. $F\subset F+G$;
4. $F+F=F$;
5. $F\cup(F\cap G)\subset F+G$;
6. $F+G=G+F$.

EXERCICE 19.

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Que pensez-vous de la proposition suivante,

$$F+G=F \text{ si et seulement si } F\supset G\ ?$$

2. Que pensez-vous de la proposition suivante,

$$F+G=F+H \implies G=H\ ?$$

EXERCICE 20.★

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que

$$F+H=G+H,\quad F\cap H=G\cap H,$$

et $F\subset G$. Prouver que $F=G$.

EXERCICE 21.★

On note $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, P le sous-ensemble de E formé par les fonctions paires et I le sous-ensemble de E formé par les fonctions impaires.

1. Montrer que P et I sont deux sous-espaces supplémentaires dans E.
2. Pour tout $f\in E$, la projection du vecteur f sur P parallèlement à I est appelée *partie paire de* f. On définit de même la *partie impaire de* f. Calculer les parties paire et impaire des fonctions suivantes :le cosinus, le sinus, l'exponentielle, $f : x\mapsto x^4+x$.

EXERCICE 22.★★

Soient $E=\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$, et $\mathscr{A}$ l'ensemble des éléments de E s'annulant en 1.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{A}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
2. Montrer que $\mathscr{C}$ est également un supplémentaire dans E du sous-espace suivant

$$\mathscr{N}=\left\{ f\in E \mid \int_0^1 f(t)dt=0 \right\}.$$

3. Calculer les projections sur $\mathscr{C}$ parallèlement à $\mathscr{A}$ puis à $\mathscr{N}$ d'une fonction $f\in E$.
4. Donner d'autres exemples de supplémentaires de $\mathscr{C}$ dans E.

EXERCICE 23.

On note $E=\mathbb{R}^3$ et

$$F=\left\{(x,y,z)\in E \mid x+y-z=0\right\}$$

et

$$G=\left\{(a-b,a+b,a-3b)\mid a,b\in\mathbb{R}\right\}.$$

1. Etablir que F et G sont des sev de E.
2. Déterminer $F\cap G$.
3. Prouver que $F+G=E$. La somme est-elle directe ?

EXERCICE 24.★★

Soient A, B et C trois sev d'un $\mathbb{K}$-ev E. On note

$$\mathrm{F} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}), \quad \mathrm{G} = \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} + (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}))$$

et $\mathrm{H} = \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} + \mathrm{C})$.

1. Montrer que F et G sont des sev de H.
2. Etablir que $\mathrm{F} = \mathrm{G}$.
3. A-t-on toujours $\mathrm{F} = \mathrm{G} = \mathrm{H}$?

EXERCICE 25.★★

Soient $\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{F}'$ et G' quatre sev d'un $\mathbb{K}$-ev E tels que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \mathrm{F}' \cap \mathrm{G}'$. Etablir que

$$(\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{F}')) \cap (\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{G}')) = \mathrm{F}.$$

EXERCICE 26.

On note E l'espace vectoriel réel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient $\mathscr{N}$ et $\mathscr{A}$ les sous-ensembles de E définis par,

$$\mathscr{A} = \{f \in \mathrm{E} \mid f \text{ affine}\}$$

et

$$\mathscr{N} = \{f \in \mathrm{E} \mid f(0) = f'(0) = 0\}.$$

1. Prouver que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{N}$ sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{N}$ sont supplémentaires dans E.
3. Déterminer la projection sur $\mathscr{A}$ parallèlement à $\mathscr{N}$ d'une fonction $f \in \mathrm{E}$.

   REMARQUE. On rappelle qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est affine *si et seulement si* il existe deux réels a et b tels que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = at + b$. ■

Familles de vecteurs

EXERCICE 27.

Soit $\mathscr{F} = ((1,-2,1),(2,-3,1),(-1,3,-2))$.

1. Le vecteur $(2,1,3)$ est-il combinaison linéaire de la famille $\mathscr{F}$?
2. Même question pour le vecteur $(2,5,-7)$.

EXERCICE 28.★★

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n : x \mapsto \cos^n(x) \quad \text{et} \quad g_n : x \mapsto \cos(nx).$$

Montrer que pour tout n positif,

$$\mathrm{vect}(f_k, 0 \leqslant k \leqslant n) = \mathrm{vect}(g_k, 0 \leqslant k \leqslant n).$$

EXERCICE 29.

Soient $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et

$$u = (1,-1,1), \quad v = (0,1,a).$$

Déterminer une condition *nécessaire et suffisante* portant sur a pour que $(1,1,2) \in \mathrm{vect}(u,v)$.

EXERCICE 30.

Donner une famille génératrice des espaces vectoriels suivants.

1. Le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$.
2. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$.
3. Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites (u_n) à valeurs complexes vérifiant $u_{n+2} + (2-3i)u_{n+1} - (5+i)u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 31.

On définit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants

$$a = (1,2,-3) \qquad b = (3,2,-2) \qquad c = (-1,2,-4) \qquad c = (-6,-8,11)$$

Montrer que $\mathrm{vect}(a,b) = \mathrm{vect}(c,d)$.