

DEVOIR À LA MAISON N°13

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

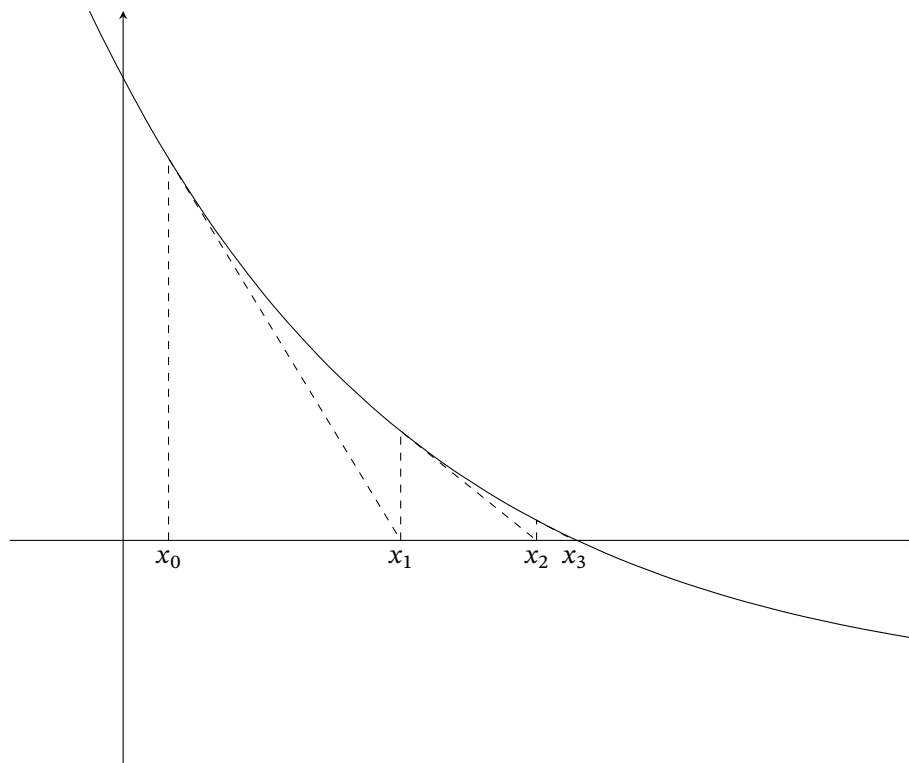
Problème 1

Partie I – Description de la méthode de Newton

1. La fonction f est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $[a, b]$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés. Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence et l'unicité de $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.
2. a. Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse u est $y = f'(u)(x - u) + f(u)$. Cette droite coupe l'axe des abscisses en un point d'ordonnée nulle, donc son abscisse x vérifie

$$x = u - \frac{f(u)}{f'(u)}$$

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} est l'abscisse de l'intersection de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_n avec l'axe des abscisses.



3. a. Puisque f est dérivable sur I et que f' est dérivable et ne s'annule pas sur I , la fonction g est dérivable sur I et pour tout $x \in I$

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

- b. Puisque $f' < 0$ sur I , f est décroissante sur I . De plus, $f(c) = 0$ donc f est positive sur $[a, c]$ et négative sur $[c, b]$. Enfin, $f'' \geq 0$ sur I . On en déduit que $g' \leq 0$ sur $[a, c]$ et $g' \geq 0$ sur $[c, b]$. Ainsi g est croissante sur $[a, c]$ puis décroissante sur $[c, b]$.
- c. Par croissance de g sur $[a, c]$, pour tout $x \in [a, c]$

$$g(a) \leq g(x) \leq g(c)$$

Or $g(a) = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \geq a$ car $f(a) > 0$ et $f'(a) < 0$ et $g(c) = c$ car $f(c) = 0$. Ainsi pour tout $x \in [a, c]$, $g(x) \in [a, c]$. Autrement dit, $g([a, c]) \subset [a, c]$.

- d. Une récurrence simple montre que $x_n \in [a, c]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II – Convergence de la méthode de Newton

1. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} - x_n = g(x_n) - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \geq 0$$

car $f'(x_n) < 0$ et $f(x_n) \geq 0$ puisque $x_n \in [a, c]$. Ainsi (x_n) est croissante.

- b. On a vu que (x_n) est à valeurs dans $[a, c]$ donc en particulier elle est majorée par c . Puisque (x_n) est croissante, elle converge. Puisque g est continue, (x_n) converge vers un point fixe de g i.e. un zéro de f . Puisque c est l'unique zéro de f sur I , (x_n) converge vers c .

2. Étude du type de convergence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- a. $|f'|$ est strictement positive et continue sur le segment I . Elle est donc minorée par une constante strictement positive m .
De plus, f'' est continue sur le segment I : elle y est donc bornée. D'où l'existence de M .
- b. La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur I . L'inégalité de Taylor-Lagrange donne, pour tout $x \in I$

$$|f(c) - f(x) - (c - x)f'(x)| \leq M \frac{(c - x)^2}{2}$$

En utilisant la question précédente, on obtient :

$$\left| \frac{f(c) - f(x)}{f'(x)} - (c - x) \right| \leq \frac{(c - x)^2}{2} \times \frac{M}{m}$$

soit

$$|g(x) - c| \leq \frac{(c - x)^2}{2} \times \frac{M}{m}$$

- c. Comme $x_n - c \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K|x_N - c| < 1$.
Prouvons par récurrence que pour tout $n \geq N$,

$$|x_n - c| \leq K^{2^{n-N}-1} |x_N - c|^{2^{n-N}}$$

Cette propriété est vraie au rang $n = N$ (c'est une égalité). Supposons la vraie à un certain rang $n \geq N$. D'après la question précédente :

$$|x_{n+1} - c| = |g(x_n) - c| \leq K(x_n - c)^2$$

En appliquant notre hypothèse de récurrence, on obtient :

$$|x_{n+1} - c| \leq K^{2^{n+1-N}-1} |x_N - c|^{2^{n+1-N}}$$

et la propriété est vérifiée au rang $n + 1$. On conclut en utilisant le principe de récurrence.

Il suffit alors de prendre $C = \frac{1}{K}$ et $k = (K|x_N - c|)^{2^{-N}}$. Comme $0 < K|x_N - c| < 1$, on a bien $0 < k < 1$.

- d. Pour tout $n \geq N$:

$$\frac{|x_n - c|}{q^n} \leq \frac{Ck^{2^n}}{q^n}$$

De plus,

$$\ln\left(\frac{Ck^{2^n}}{q^n}\right) = \ln C + 2^n \ln k - n \ln q \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^n \ln k \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{car } k \in]0, 1[$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_n - c|}{q^n} = 0$ et $x_n - c = o(q^n)$.