

DEVOIR SURVEILLÉ N°11

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 —

Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel non nul.

La transposée d'une matrice M sera notée tM .

On rappelle des résultats aux matrices définies par blocs. Si $A, B, C, D, A', B', C', D'$ sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut effectuer des produits par blocs

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} AA' + BC' & AB' + BD' \\ \hline CA' + DC' & CB' + DD' \end{array} \right)$$

De plus la transposée de la matrice définie par blocs $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$ est $\left(\begin{array}{c|c} {}^tA & {}^tC \\ \hline {}^tB & {}^tD \end{array} \right)$.

On note respectivement 0_n et I_n la matrice nulle et la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie I – Matrices symplectiques

On note J la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par $J = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & -I_n \\ \hline I_n & 0_n \end{array} \right)$. On note

$$\mathcal{SP}_{2n} = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}), {}^tMJM = J\}$$

1. Calculer J^2 et tJ en fonction de I_{2n} et J . En déduire que J est inversible et identifier son inverse.
2. Vérifier que $J \in \mathcal{SP}_{2n}$ et que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$K(\alpha) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & \alpha I_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array} \right) \in \mathcal{SP}_{2n}$$

3. Montrer que pour tout $U \in GL_n(\mathbb{R})$,

$$L_U = \left(\begin{array}{c|c} U & 0_n \\ \hline 0_n & {}^tU^{-1} \end{array} \right) \in \mathcal{SP}_{2n}$$

4. Si $M \in \mathcal{SP}_{2n}$, préciser les valeurs possibles de $\det(M)$.

5. Montrer que le produit de deux éléments de \mathcal{SP}_{2n} est un élément de \mathcal{SP}_{2n} .
6. Montrer qu'un élément de \mathcal{SP}_{2n} est inversible et que son inverse appartient à \mathcal{SP}_{2n} .
7. Montrer que si $M \in \mathcal{SP}_{2n}$, alors ${}^tM \in \mathcal{SP}_{2n}$.
8. Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$ avec $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^4$. Déterminer des relations sur A, B, C, D caractérisant l'appartenance de M à \mathcal{SP}_{2n} .
9. Dans cette question uniquement, on considère que $n = 1$. Montrer que

$$\mathcal{SP}_2 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \det(M) = 1\}$$

Partie II – Centre de \mathcal{SP}_{2n}

On s'intéresse ici au centre \mathcal{Z} de \mathcal{SP}_{2n} , c'est-à-dire

$$\mathcal{Z} = \{M \in \mathcal{SP}_{2n}, \forall N \in \mathcal{SP}_{2n}, MN = NM\}$$

10. Justifier que I_{2n} et $-I_{2n}$ appartiennent à \mathcal{Z} .

Réciproquement, soit $M \in \mathcal{Z}$ de la forme $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$ avec $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^4$.

11. En utilisant $L = \left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array} \right)$ et sa transposée, montrer que $B = C = 0_n$ et $A = D$.

12. Justifier que A est inversible.

13. Soit $U \in GL_n(\mathbb{R})$. En utilisant $L_U = \left(\begin{array}{c|c} U & 0_n \\ \hline 0_n & {}^tU^{-1} \end{array} \right)$, montrer que A commute avec toute matrice $U \in GL_n(\mathbb{R})$.

14. On note $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier que A commute avec les matrices $I_n + E_{i,j}$ puis que $A \in \{I_n, -I_n\}$.
En déduire que $\mathcal{Z} = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$.

Partie III – Déterminant d'une matrice symplectique

Dans cette partie, on se donne $M \in \mathcal{SP}_{2n}$ que l'on décompose à nouveau sous forme de matrices blocs $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$ avec $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^4$.

15. On suppose dans cette question que D est *inversible*. Justifier qu'il existe quatre matrices Q, U, V, W de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & Q \\ \hline 0_n & I_n \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} U & 0_n \\ \hline V & W \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

16. On suppose encore D inversible. En utilisant la question I.8, montrer que BD^{-1} est symétrique, puis que

$$\det(M) = \det({}^tAD - {}^tCB) = 1$$

On suppose dans tout le reste de cette partie que D est *non inversible* et on cherche à nouveau à calculer le déterminant de M .

17. Montrer que $\text{Ker } B \cap \text{Ker } D = \{0\}$.

18. Montrer que l'application

$$(U, V) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \mapsto \langle U, V \rangle = {}^tUV$$

définit un produit scalaire sur l'ensemble des matrices colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans la suite, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de ce produit scalaire.

19. On se donne $(P, Q) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que tPQ soit symétrique. On suppose qu'il existe deux réels *distincts* s_1 et s_2 et deux matrices colonnes *non nulles* V_1 et V_2 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$(Q - s_1P)V_1 = (Q - s_2P)V_2 = 0$$

Montrer que le produit scalaire $\langle QV_1, QV_2 \rangle$ est nul.

20. On suppose qu'il existe des réels non nuls s_1, \dots, s_m distincts deux à deux et des matrices colonnes non nulles V_1, \dots, V_m de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, (D - s_iB)V_i = 0$$

Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $DV_i \neq 0$ et que la famille (DV_1, \dots, DV_m) est libre.

21. En déduire qu'il existe α tel que $D - \alpha B$ soit inversible.

22. En utilisant les matrices $K(\alpha)$ de la question I.2, montrer que $\det(M) = 1$.

23. Donner une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de déterminant 1 non symplectique.