Devoir surveillé n°08 : corrigé

Problème 1 — Dérivation et polynômes

Partie I –

1. On a $\lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Par suite, en prenant $\ell = 1$, f est continue en 0.

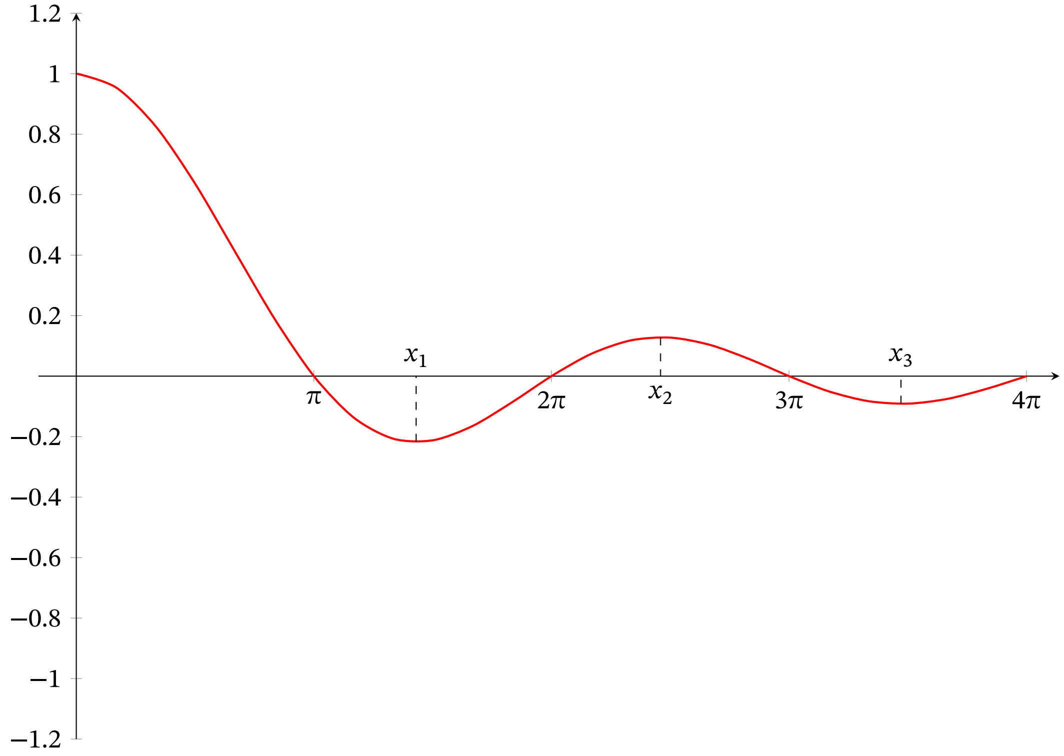
2. Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto x$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.
Puisque $\cos x \underset{x\to0}{=} 1 + o(x)$ et $\sin x \underset{x\to0}{=} x + o(x^2)$, $x\cos x - \sin x \underset{x\to0}{=} o(x^2)$.
Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{x\to0^+} f'(x) = 0$. D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
Remarque. Si on n'a pas encore vu le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, on montre d'abord que f est dérivable en 0. En effet
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin x - x}{x^2} \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x}{6}$$
En particulier, $\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ de sorte que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$. Puisque $\lim_{x\to0^+} f'(x) = 0 = f'(0)$, f' est bien continue en 0. Finalement, on retrouve le fait que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. Soit $\varphi : x \mapsto x\cos x - \sin x$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = -x\sin x$. Ainsi φ' est de signe constant sur I_n et ne s'annule qu'aux bornes de I_n. Il s'ensuit que φ est strictement monotone sur I_n.
Sur I_n, φ est continue et strictement monotone donc établit une bijection de I_n dans $\varphi(\mathrm{I}_n)$ qui est un intervalle. Or $\varphi(n\pi)\varphi((n+1)\pi) = -n(n+1)\pi^2 < 0$. Donc $0 \in \varphi(\mathrm{I}_n)$ et il existe un unique réel x_n dans I_n tel que $\varphi(x_n) = 0$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n\pi \le x_n \le n\pi + \pi$ d'où $1 \le \frac{x_n}{n\pi} \le 1 + \frac{1}{n}$. Le théorème des gendarmes prouve alors que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$ ce qui donne $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$.
Or φ est strictement décroissante sur I_0 et $\varphi(0) = 0$. Donc f' est négative sur I_0 et ne s'annule qu'en 0. Donc f est strictement décroissante sur I_0.
Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. Sur I_{2n}, φ est strictement décroissante et s'annule en x_{2n}. Donc f est strictement croissante sur $[2n\pi, x_{2n}]$ et strictement décroissante sur $[x_{2n}, (2n+1)\pi]$.
De même, sur I_{2n-1}, φ est strictement croissante et s'annule en x_{2n-1}. Donc f est strictement décroissante sur $[(2n-1)\pi, x_{2n-1}]$ et strictement croissante sur $[x_{2n-1}, 2n\pi]$.

6. La courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisse $n\pi$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.



Partie II –

1. Le calcul donne $g''(x) = \dfrac{-(x^2-2)\sin x - 2x\cos x}{x^3}$ pour tout $x > 0$.

2.

n	0	1	2
P_n	1	X	$X^2 - 2$
Q_n	0	1	2X

3. En dérivant la relation donnée par l'énoncé, on a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) = &\frac{P_n'(x)\sin^{(n)}(x) + P_n(x)\sin^{(n+1)}(x) + Q_n'(x)\sin^{(n+1)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+2)}(x)}{x^{n+1}} \\ &- (n+1)\frac{P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

comme $\sin^{(n)}(x) = -\sin^{(n+2)}(x)$, on obtient :

$$g^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)\sin^{(n+1)}(x) + Q_{n+1}(x)\sin^{(n+2)}(x)}{x^{n+2}}$$

avec

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= XP_n + XQ_n' - (n+1)Q_n \\ Q_{n+1} &= XQ_n - XP_n' + (n+1)P_n \end{aligned}$$

4. On isole le cas $n = 0$. $P_0 = 1$ donc P_0 est à coefficients entiers, de degré 0, de coefficient dominant 1 et pair. $Q_0 = 0$ donc Q_0 à coefficients entiers, de degré $-\infty$. Cela n'a pas de sens de parler de son coefficient dominant et il est aussi bien pair qu'impair.
Traitons maintenant le cas $n \geq 1$. Soit $\mathcal{H}_n$ la propriété :

P_n est de degré n de coefficient dominant 1, Q_n est de degré $n-1$ et de coefficient dominant n, P_n et Q_n sont à coefficients entiers, P_n a la parité de n, Q_n a la parité opposée de celle de n.

$\mathcal{H}_1$ est vraie. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors P_n, Q_n, P_n' et Q_n' sont à coefficients entiers donc P_{n+1} et Q_{n+1} aussi.
De plus, XP_n est de degré $n+1$ de coefficient dominant 1 et XQ_n' et Q_n sont de degré strictement inférieur à $n+1$ donc P_{n+1} est de degré $n+1$ de coefficient dominant 1.
Par ailleurs, XQ_n, XP_n' et $(n+1)\mathrm{P}_n$ sont de degré n de coefficients dominants respectifs n, n et $n+1$ donc Q_{n+1} est degré n de coefficient dominant $n+1$.
Enfin, P_n a la parité de n et Q_n a la parité opposée à celle de n donc XP_n, XQ_n' sont de la parité opposée à celle de n donc de la parité de $n+1$ tandis que XQ_n et XP_n' sont de la parité de n donc de la parité opposée à celle de $n+1$.
On en déduit que P_{n+1} a la parité de $n+1$ tandis que Q_{n+1} a la parité opposée à celle de $n+1$.
Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Ainsi $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. On a $\mathrm{P}_3 = \mathrm{XP}_2 + \mathrm{XQ}_2' - 3\mathrm{Q}_2 = \mathrm{X}^3 - 6\mathrm{X}$ et $\mathrm{Q}_3 = \mathrm{XQ}_2 - \mathrm{XP}_2' + 3\mathrm{P}_2 = 3\mathrm{X}^2 - 6$.

6. Soit $\alpha_k = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $\beta_k = 2k\pi$. Comme pour tout $x > 0$, on a $\mathrm{U}(x)\sin(x) + \mathrm{V}(x)\cos(x) = 0$, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{U}(\alpha_k) = 0$ et $\mathrm{V}(\beta_k) = 0$. U et V admettent une infinité de racines donc sont égaux au polynôme nul.

7. En dérivant $n+1$ fois l'égalité, $xg(x) = \sin x$, on obtient pour tout $x > 0$,

$$xg^{(n+1)}(x) + (n+1)g^{(n)}(x) = \sin^{(n+1)}(x)$$

d'où en reportant les formules donnant $g^{(n)}(x)$ et $g^{(n+1)}(x)$:

$$(\mathrm{P}_{n+1}(x) + (n+1)\mathrm{Q}_n(x) - x^n)\sin^{(n+1)}(x) + ((n+1)\mathrm{P}_n(x) - \mathrm{Q}_{n+1}(x))\sin^{(n)}(x) = 0$$

Puisque à n fixé, l'une des expressions $\sin^{(n+1)}(x)$ ou $\sin^{(n)}(x)$ vaut $\pm\sin(x)$ tandis que l'autre vaut $\pm\cos x$, on peut appliquer le résultat de la question précédente et on a donc :

$$\mathrm{P}_{n+1} + (n+1)\mathrm{Q}_n - \mathrm{X}^{n+1} = 0 \qquad\qquad (n+1)\mathrm{P}_n - \mathrm{Q}_{n+1} = 0$$

8. En reportant $\mathrm{Q}_{n+1} = (n+1)\mathrm{P}_n$ dans la définition de Q_{n+1}, on a $\mathrm{X}(\mathrm{Q}_n - \mathrm{P}_n') = 0$ ce qui donne $\mathrm{Q}_n = \mathrm{P}_n'$ par intégrité de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
On a donc $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{X}^{n+1} - (n+1)\mathrm{Q}_n = \mathrm{XP}_n + \mathrm{XP}_n'' - (n+1)\mathrm{Q}_n$ ce qui donne $\mathrm{P}_n + \mathrm{P}_n'' = \mathrm{X}^n$ à nouveau par intégrité de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
P_n est donc solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}_n : y'' + y = x^n$.

9. Si T est un polynôme non nul de degré p, $\mathrm{T} + \mathrm{T}''$ est aussi de degré p et non nul (car le degré de T'' est strictement inférieur à celui de T). Cela montre que Ψ est injectif et que si T appartient à $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\Psi(\mathrm{T})$ aussi.
Donc Ψ_n est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Comme $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est de dimension finie, cela implique que Ψ_n est bijectif.
Si Q est un polynôme quelconque, il existe un entier p tel que Q appartienne à $\mathbb{R}_p[\mathrm{X}]$. Comme Ψ_p est bijectif, il existe P tel que $\Psi_p(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$. Donc P est un antécédent de Q par Ψ : Ψ est surjectif et comme Ψ est injectif, Ψ est bijectif.

10. Notons $\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} b_k\mathrm{X}^k$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n + \mathrm{P}_n'' &= \sum_{k=0}^{n} b_k\mathrm{X}^k + \sum_{k=0}^{n} k(k-1)b_k\mathrm{X}^k\\ &= b_n\mathrm{X}^n + b_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}(b_k + (k+2)(k+1)b_{k+2})\mathrm{X}^k = \mathrm{X}^n\end{aligned}$$

Par suite $b_n = 1$, $b_{n-1} = 0$ et pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, $b_k = -(k+2)(k+1)b_{k+2}$.
Cela donne pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $b_{n-2k} = (-1)^k\dfrac{n!}{(n-2k)!}$ et $b_{n-2k+1} = 0$.
Finalement $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{p} a_k\mathrm{X}^{n-2k}$ avec $a_k = (-1)^k\dfrac{n!}{(n-2k)!}$.

11. Les solutions de $y'' + y = x^n$ sont la somme d'une solution particulière de cette équation et de la solution générale de $y'' + y = 0$.
P_n étant solution particulière, les solutions sont donc les fonctions du type : $x \mapsto \mathrm{P}_n(x) + \lambda\cos x + \mu\sin x$, λ et μ étant deux réels.

Solution 1

1. On a $\dim(F \oplus H) = \dim F + \dim H = n$ et $\dim(G \oplus H) = \dim G + \dim H = n$. D'où $\dim F = \dim G = n - \dim H$.

2. F admet un supplémentaire dans E qui est également un supplémentaire de G puisque $F = G$.

3. **a.** Puisque $\dim F = \dim G = n - 1$, on ne peut avoir $F \subset G$ sinon on aurait $F = G$. De même, on ne peut avoir $G \subset F$. Il existe donc $u \in F \setminus G$ et $v \in G \setminus F$.

   b. Supposons que $w \in F$. Alors $v = w - u \in F$ ce qui n'est pas. Supposons que $w \in G$, alors $u = w - v \in G$, ce qui n'est pas. Ainsi $w \notin F \cup G$.

   c. Soit $x \in F \cap H$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda w = \lambda(u + v)$. Si $\lambda \neq 0$, alors $v = \frac{1}{\lambda}x - u \in F$, ce qui n'est pas. Ainsi $\lambda = 0$ et $x = 0_E$. Ainsi $F \cap H = \{0_E\}$.
   Puisque $w \notin F \cup G$, $w \neq 0_E$ donc $\dim H = 1$. Ainsi $\dim F + \dim H = (n - 1) + 1 = n$, ce qui permet de conclure que $F \oplus H = E$.
   Soit $x \in G \cap H$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda w = \lambda(u + v)$. Si $\lambda \neq 0$, alors $u = \frac{1}{\lambda}x - v \in G$, ce qui n'est pas. Ainsi $\lambda = 0$ et $x = 0_E$. Ainsi $G \cap H = \{0_E\}$. Puisque $\dim G + \dim H = (n - 1) + 1 = n$, $G \oplus H = E$.
   H est donc un supplémentaire commun de F et G dans E.

4. **a.** $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F : il admet donc un supplémentaire F' dans F. De même, $F \cap G$ étant un sous-espace vectoriel de G, il admet un supplémentaire G' dans G.

   b. Puisque $F \neq G$, $F \cap G \subsetneq F$ et donc $\dim F \cap G < \dim F$. Puisque $F = (F \cap G) \oplus F'$, $\dim F' = \dim F - \dim F \cap G > 0$.
   De même, $\dim G' = \dim G - \dim F \cap G = \dim F - \dim F \cap G = \dim F'$.
   Soit $x \in F' \cap G'$. Comme $F' \subset F$ et $G' \subset G$, $x \in F \cap G$. Ainsi $x \in (F \cap G) \cap F' = \{0_E\}$ puisque $F \cap G$ et F' sont en somme directe. D'où $F' \cap G' = \{0_E\}$.

   c. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i = 0_E$. On a donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = -\sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i \in F' \cap G' = \{0_E\}$. Ainsi $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = 0_E$.
   Comme la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre, on en déduit que les λ_i sont nuls. Ceci prouve la liberté de $(h_1, \dots, h_p)$.

   d. Comme la famille $(h_1, \dots, h_p)$ est libre et génératrice de H', c'est une base de H'. Ainsi $\dim H' = p$.
   Soit $x \in F \cap H'$. Il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(f_i + g_i)$. On a donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i = x - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i \in (F \cap G) \cap G' = \{0_E\}$. Comme la famille $(g_1, \dots, g_p)$ est libre, on en déduit que les λ_i sont nuls puis que x est nul. Ainsi $F \cap H' = \{0_E\}$.
   On démontre de même que $G \cap H' = \{0_E\}$.

   e. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $h_i = f_i + g_i \in F + G$. Ainsi $H' \subset F + G$. Donc $F \oplus H' \subset F + G$. De plus, $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G = \dim F + \dim G' = \dim F + p = \dim(F \oplus H')$. Ainsi $F \oplus H' = F + G$.
   On démontre de même que $G \oplus H' = F + G$.

   f. $H' \subset F + G$ donc $\{0_E\} \subset H' \cap H'' \subset (F + G) \cap H'' = \{0_E\}$ puisque H'' est en somme directe avec $F + G$. D'où $H' \cap H'' = \{0_E\}$.

   g. Soit $x \in F \cap H$. Il existe donc $h' \in H'$ et $h'' \in H''$ tel que $x = h' + h''$. Donc $h'' = x - h'$. Or $x \in F \subset F + G$ et $h' \in H' \subset F + G$ donc $h'' \in H'' \cap (F + G) = \{0_E\}$. D'où $x = h' \in H' \cap F = \{0_E\}$. Ainsi $F \cap H = \{0_E\}$.
   De plus, $\dim(F \oplus H) = \dim F + \dim H = \dim F + \dim H' + \dim H'' = \dim(F + G) + \dim H'' = n = \dim E$.
   On en déduit que $F \oplus H = E$.
   En échangeant le rôle de F et G, on démontre de même que $G \oplus H = E$.

Solution 2

1. On vérifie que
$$f \circ (2f - \mathrm{Id}_E) = f \circ (2f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_E$$
Ainsi $f \in GL(E)$ et $f^{-1} = 2f - \mathrm{Id}_E$.

2. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \operatorname{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$. Comme $x \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, $f(x) = x$ et comme $x \in \operatorname{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$, $f(x) = -\frac{1}{2}x$. Par conséquent, $x = -\frac{1}{2}x$ puis $x = 0_E$. Ainsi $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \operatorname{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) = \{0_E\}$.
Ensuite, il est clair que
$$\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \subset E$$

Réciproquement, soit $x \in \mathrm{E}$. Posons $y = \frac{1}{3}(x + 2f(x))$ et $z = \frac{2}{3}(x - f(x))$. On a bien $x = y + z$. De plus, tenant compte du fait que $f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_\mathrm{E})$,

$$f(y) = \frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3}f^2(x) = \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}(f + \mathrm{Id}_\mathrm{E})(x) = \frac{1}{3}(x + 2f(x)) = y$$
$$f(z) = \frac{2}{3}f(x) - \frac{2}{3}f^2(x) = \frac{2}{3}f(x) - \frac{1}{3}(f + \mathrm{Id}_\mathrm{E})(x) = \frac{1}{3}(f(x) - x) = -\frac{1}{2}z$$

Par conséquent, $y \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ et $z \in \operatorname{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_\mathrm{E}\right)$. Ceci prouve que

$$\mathrm{E} \subset \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \oplus \operatorname{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_\mathrm{E}\right)$$

Par double inclusion,

$$\mathrm{E} = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \oplus \operatorname{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_\mathrm{E}\right)$$

3. On a clairement

$$\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_\mathrm{E}\right) \circ (f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = f^2 - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0$$

On en déduit notamment que

$$\operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \subset \operatorname{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_\mathrm{E}\right)$$

D'après le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{E} = \dim \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) + \dim \operatorname{Ker} \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$$

Mais d'après la question précédente,

$$\dim \mathrm{E} = \dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) + \dim \operatorname{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_\mathrm{E}\right)$$

On en déduit que

$$\dim \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \dim \operatorname{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_\mathrm{E}\right)$$

Puisqu'on a déjà l'inclusion

$$\operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \subset \operatorname{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_\mathrm{E}\right)$$

on peut en déduire l'égalité

$$\operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \operatorname{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_\mathrm{E}\right)$$

4. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda f + \mu \mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0$. Supposons $\lambda \neq 0$. Alors $f = k\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ avec $k = -\frac{\mu}{\lambda}$. Mais alors $f^2 = k^2 \mathrm{Id}_\mathrm{E}$. Or $f^2 = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ donc $k^2 \mathrm{Id}_\mathrm{E} = \frac{k}{2}\mathrm{Id}_\mathrm{E} + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_\mathrm{E}$. Or $\mathrm{Id}_\mathrm{E} \neq 0$ donc $k^2 = \frac{k}{2} + \frac{1}{2}$ puis $k = 1$ ou $k = -\frac{1}{2}$. Mais ceci est impossible car $f \neq \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et $f \neq -\frac{1}{2}\mathrm{Id}_\mathrm{E}$. On en déduit donc que $\lambda = 0$. Or $\lambda f + \mu \mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0$ donc $\mu \mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0$ puis $\mu = 0$ car $\mathrm{Id}_\mathrm{E} \neq 0$. Ainsi $\lambda = \mu = 0$. On en déduit que la famille $(f, \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ est bien libre.

5. L'unicité du couple (a_n, b_n) provient de la liberté de la famille $(f, \mathrm{Id}_\mathrm{E})$.
On prouve l'existence par récurrence. Tout d'abord

$$f^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E} = a_0 f + b_0 \mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
Supposons qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$f^n = a_n f + b_n \mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

Alors, en composant par f,

$$f^{n+1} = a_n f^2 + b_n f = \frac{a_n}{2}(f + \mathrm{Id}_\mathrm{E}) + b_n f = \left(\frac{a_n}{2} + b_n\right) f + \frac{a_n}{2}\mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

On a donc bien

$$f^{n+1} = a_{n+1} f + b_{n+1} \mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

en posant

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + b_n \qquad\qquad b_{n+1} = \frac{a_n}{2}$$

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe bien $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$f^n = a_n f + b_n \operatorname{Id}_E$$

et on a également prouvé que

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + b_n \qquad\qquad b_{n+1} = \frac{a_n}{2}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{2} + b_{n+1} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$$
$$b_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{2} = \frac{a_n}{4} + \frac{b_n}{2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$$

7. On peut clairement choisir

$$a_0 = 0 \qquad b_0 = 1 \qquad a_1 = 1 \qquad b_1 = 0$$

Par ailleurs, le polynôme caractéristique associé à la relation de récurrence suivie par les suites (a_n) et (b_n) est $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$. Ses racines sont 1 et $-\frac{1}{2}$. Il existe donc des réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n \qquad\qquad b_n = \gamma + \delta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1 permettent de trouver

$$\alpha = \frac{2}{3} \qquad \beta = -\frac{2}{3} \qquad \gamma = \frac{1}{3} \qquad \delta = \frac{2}{3}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \qquad\qquad b_n = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

8. Puisque $-\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Par opérations, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}$.