Devoir à la maison ^{o}: corrigé

Problème 1 — Complexes et arithmétique

Partie I – Quelques propriétés élémentaires

1. Il suffit de montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C},+,\times)$. On vérifie donc que $1 = 1 + 0i \in \mathbb{Z}[i]$ et que pour tout $(z,z') \in \mathbb{Z}[i]^2$, $z - z' \in \mathbb{Z}[i]$ et $zz' \in \mathbb{Z}[i]$.

2. Soit u un inversible de $\mathbb{Z}[i]$. Il existe donc $u' \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $uu' = 1$. Soit alors $z \in \mathbb{Z}[i]$. On a $z = uu'z = u(u'z)$ où $u'z$ est un entier de Gauss. Donc u divise z dans $\mathbb{Z}[i]$.

3. **a.** Soit $(z,z') \in \mathbb{Z}[i]^2$. Alors
$$N(zz') = zz'\overline{zz'} = z\bar{z}z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2 = N(z)N(z')$$

b. Soit z un inversible de $\mathbb{Z}[i]$. Il existe donc $z' \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $zz' = 1$. Comme N est multiplicative, $N(z)N(z') = N(zz') = N(1) = 1$. Comme N est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $N(z)$ est un diviseur positif de 1. Or le seul diviseur positif de 1 est 1. Ainsi $N(Z) = 1$.
Réciproquement, soit $z \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $N(z) = 1$. On a donc $z\bar{z} = 1$. Or $\bar{z} \in \mathbb{Z}[i]$, ce qui prouve que z est un inversible de $\mathbb{Z}[i]$.

c. D'après la question précédente, les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont les complexes de la forme $a + ib$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Ce sont donc 1, -1, i et $-i$.

4. **a.** $1 + 2i$ et $1 - 2i$ conviennent puisque $N(1 + 2i) = N(1 - 2i) = 5$.
On a également $2 \pm i$, $1 \pm 4i$, $4 \pm i$, $2 \pm 3i$, $3 \pm 2i$, ...

b. Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $N(z)$ soit un nombre premier. D'abord, z est non inversible puisque $N(z) \neq 1$. Soit $a \in \mathbb{Z}[i]$ un diviseur de z dans $\mathbb{Z}[i]$. Il existe donc $b \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $z = ab$. On a alors $N(z) = N(a)N(b)$ mais comme $N(z)$ est premier, $N(a) = 1$ ou $N(a) = N(z)$.

- Si $N(a) = 1$, alors a est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$ d'après **I.3.b**.
- Si $N(a) = N(z)$, alors $N(b) = 1$ et b est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$. On a alors $a = b^{-1}z$. b^{-1} est également inversible dans $\mathbb{Z}[i]$ et a est donc le produit de z par un inversible de $\mathbb{Z}[i]$.

On en déduit que z est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

5. 5 est premier mais non irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ puisque $5 = (1 - 2i)(1 + 2i)$ et que $N(1 - 2i) = N(1 + 2i) = 5 \neq 1$.
Les nombres premiers 13, 17, ...conviennent également.

Remarque. On peut montrer que tous les nombres premiers congrus à 1 modulo 4 conviennent. ■

6. **a.** p n'est pas irrédutible dans $\mathbb{Z}[i]$ puisque $p = (a - ib)(a + ib)$ et que $N(a - ib) = N(a + ib) = p \neq 1$. Mais d'après la question **I.4.b**, $a + ib$ et $a - ib$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[i]$.

b. Soit p un nombre premier non irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$. Il existe donc z et z' dans $\mathbb{Z}[i]$ tels que $p = zz'$, $N(z) \neq 1$ et $N(z') \neq 1$. On a de plus $N(z)N(z') = N(p) = p^2$. p étant premier, les diviseurs de p^2 sont 1, p et p^2. On a donc les possibilités suivantes :

- $N(z) = 1$ et $N(z') = p^2$;
- $N(z) = p^2$ et $N(z') = 1$;
- $N(z) = N(z') = p$.

Or $N(z) \neq 1$ et $N(z') \neq 1$ donc $N(z) = N(z') = p$. Ainsi $p = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$ est bien la somme de deux carrés d'entiers naturels.

Partie II – Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}[i]$

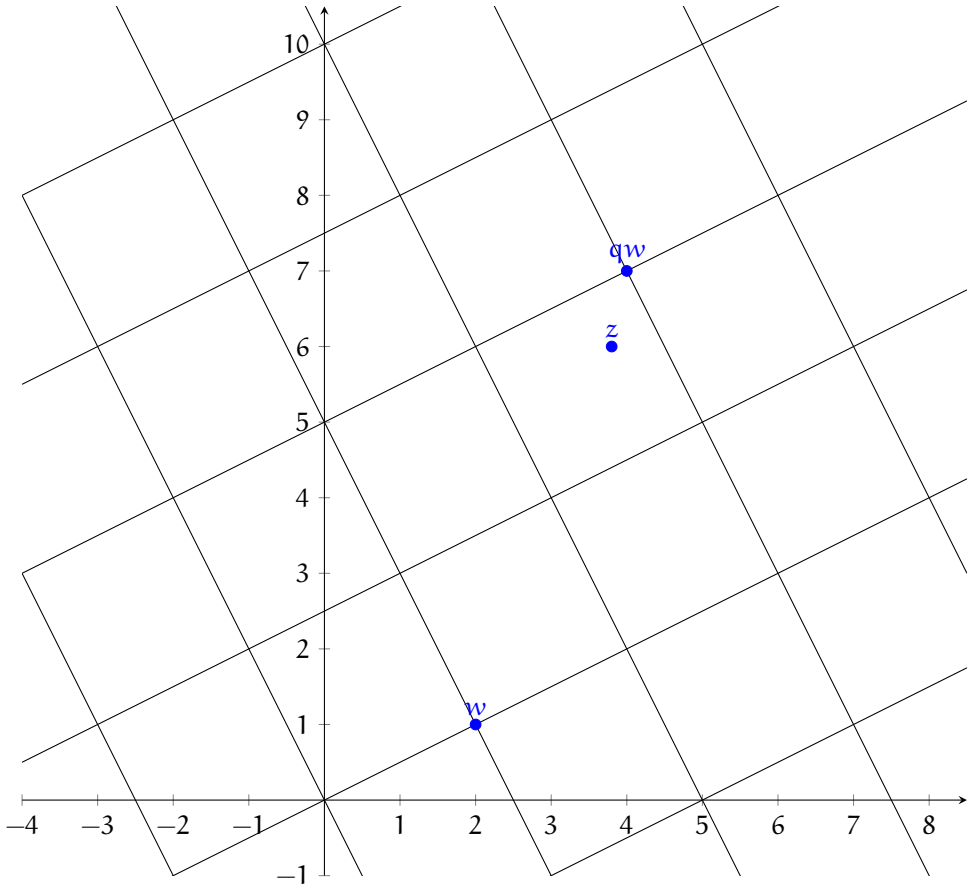
1. **a.** Soit z un entier de Gauss non nul et non inversible. L'ensemble $\mathcal{D}$ des diviseurs non inversibles de z dans $\mathbb{Z}[i]$ est non vide puisqu'il contient z. Comme la norme est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{D}$ possède un élément w de norme minimale.
Supposons w non irréductible. Il existe donc $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $w = ab$, $N(a) \neq 1$ et $N(b) \neq 1$. b ne peut être nul sinon z le serait également. Ainsi $N(b) > 1$. Par conséquent, $N(a) < N(w)$ et a est un diviseur non inversible de w donc de z, ce qui contredit la définition de w.

b. On définit l'hypothèse de récurrence suivante :

$HR(n)$: «tout entier de Gauss non nul et non inversible de norme inférieure ou égale à n peut s'écrire comme un produit d'entiers de Gauss irréductible.»

$HR(1)$ est vraie puisque tous les entiers de Gauss de norme inférieure ou égale à 1 sont soit nuls (norme égale à 0) soit inversibles (norme égale à 1).
Supposons que $HR(n)$ soit vraie pour un entier $n \geqslant 1$. Soit z un entier de Gauss de norme $n+1$. Comme $n+1 \geqslant 2$, z n'est ni nul ni inversible. D'après la question précédente, il admet un diviseur irréductible w. Il existe donc d tel que $z = dw$.
Si d est inversible, on montre facilement que dw est irréductible et z s'écrit bien comme le «produit» d'*un* facteur irréductible.
Supposons maintenant d non inversible. On a $d \neq 0$ puisque $z \neq 0$. On a $N(w) > 1$ puisque w n'est ni nul ni irréductible. Ainsi $N(d) < N(z)$ i.e. $N(d) \leqslant n$. On applique $HR(n)$ à d qui s'écrit donc comme le produit de facteurs irréductibles. Comme $z = dw$ avec w irréductible, z s'écrit également comme le produit de facteurs irréductibles.

2. Les complexes de la forme qw où $q \in \mathbb{Z}[i]$ sont des entiers de Gauss dont les images dans le plan complexe sont les points du réseau représenté sur la figure suivante. Il s'agit donc de choisir un point qw de ce réseau suffisamment proche de z pour que



$N(z - qw) < N(q)$. Ceci est possible puisque pour tout point du plan, il existe un point du réseau à une distance inférieure à la demi-diagonale d'une maille du réseau $|q|\frac{\sqrt{2}}{2}$.
En effet, posons $\frac{z}{w} = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (on a en fait $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$). Il existe des entiers a et b tels que $|x - a| \leqslant \frac{1}{2}$ et $|y - b| \leqslant \frac{1}{2}$ (si la partie fractionnaire de x est inférieure à $\frac{1}{2}$, on prend pour a la partie entière de x, sinon on prend pour a la partie entière de $x + 1$; on procède de même pour b). On pose alors $q = a + ib$ et $r = z - qw$. Alors

$$0 \leqslant N(r) = N(w)\left|\frac{z}{w} - q\right|^2 = N(w)\left(|x-a|^2 + |y-b|^2\right) \leqslant \frac{1}{2}N(w) < N(w)$$

On n'a pas unicité de q et r. Choisissons par exemple $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et $w = 1$. Les couples (q, r) suivants conviennent :

$$\left(0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right), \left(1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right), \left(i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right), \left(1 + i, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

3. Soit $(z, w) \in \mathbb{Z}[i]^2$.
Supposons qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $uz + vw = 1$. Soit d un diviseur commun de z et w dans $\mathbb{Z}[i]$. d divise alors $uz + vw = 1$. Ainsi d est inversible (les inversibles sont exactement les diviseurs de 1).
Supposons maintenant que z et w sont premiers entre eux. Soit $A = \{uz + vw \mid u, v \in \mathbb{Z}[i]\}$. $A \setminus \{0\}$ est non vide et possède donc un élément m de norme minimale.
Écrivons la «division euclidienne» de z par m : il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $z = mq + r$ et $N(r) < N(m)$. Comme $m, z \in A$, $r = z - mq \in A$. Par minimalité de m, $r = 0$ et m divise z. On démontre de la même façon que m divise w. Ainsi m est un diviseur commun de z et w ; il est inversible.
Or $m \in A$, donc il existe $u_0, v_0 \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $u_0 z + v_0 w = m$. En posant $u = m^{-1}u_0$ et $v = v^{-1}v_0$, on a bien $uz + vw = 1$.

4. Si c est inversible, alors c^3 l'est également. On en déduit que a et b sont également inversibles puisque $(c^3)^{-1}ab = 1$. Or tous les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont des cubes : $1 = 1^3$, $-1 = (-1)^3$, $i = (-i)^3$ et $-i = i^3$.
Supposons maintenant c non inversible. On écrit une décomposition en facteurs premiers de c, $c = \prod_{i=1}^{r} p_i$. Ainsi $c^3 = \prod_{i=1}^{r} p_i^3$.
Comme a et b n'ont pas de diviseur premier commun, il existe une partition de $[\![1, r]\!]$ en deux parties I et J telles que pour $i \in I$, p_i divise a et pour $i \in J$, p_i divise b. D'après l'unicité de la décomposition en facteurs premiers et quitte à mettre tous les facteurs inversibles en facteur, il existe des inversibles u et v tels que $a = u\prod_{i\in I} p_i^3$ et $b = v\prod_{i\in J} p_i^3$ (si l'une des parties I et J est vide, on convient qu'un produit indexé sur l'ensemble vide vaut 1). On a vu que tout inversible est un cube dans $\mathbb{Z}[i]$, c'est donc le cas de u et v, ce qui achève de prouver que a et b sont des cubes dans $\mathbb{Z}[i]$.

Partie III – Résolution de l'équation $y^3 = x^2 + 1$

1. Si x est pair, $x^2 + 1 \equiv 1[4]$. Si x est impair, $x^2 + 1 \equiv 2[4]$.
Si $y \equiv 0[4]$, $y^3 \equiv 0[4]$. Si $y \equiv 1[4]$, $y^3 \equiv 1[4]$. Si $y \equiv 2[4]$, $y^3 \equiv 0[4]$. Si $y \equiv 3[4]$, $y^3 \equiv 3[4]$.
On n'a jamais $y^3 \equiv 2[4]$; on en déduit que x ne peut qu'être pair.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = 2k$. Soit d un diviseur commun de $x + i$ et $x - i$. Comme $(-i)(x + i) + i(x - i) = 2$, d divise 2 dans $\mathbb{Z}[i]$. Donc $N(d)$ divise $N(2) = 4$. Par ailleurs, $N(d)$ divise $N(x + i) = 1 + 4k^2$. Ainsi $N(d)$ divise 1 i.e. $N(d) = 1$, ce qui prouve que d est inversible.
Les seuls diviseurs communs de $x + i$ et $x - i$ sont les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$; $x + i$ et $x - i$ sont premiers entre eux.

3. Tout d'abord $x^2 + 1 > 0$ donc $y \neq 0$. Comme $y^3 = (x + i)(x - i)$ et que $x + i$ et $x - i$ sont premiers entre eux, $x + i$ et $x - i$ sont des cubes d'éléments de $\mathbb{Z}[i]$ d'après la question **II.4**.

4. D'après la question précédente, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x + i = (a + ib)^3$. En passant à la partie imaginaire, on a notamment $b^2(3a - b) = 1$. On a donc $b = 3a - b = \pm 1$. On ne peut avoir $b = 1$, sinon on aurait $3a = 2$ avec a entier, ce qui est impossible. C'est donc que $b = -1$ et $a = 0$. On a donc $x = (a + ib)^3 - i = (-i)^3 - i = 0$. Il vient alors $y = 1$.
L'unique couple de solutions entières de l'équation $y^3 = x^2 + 1$ est donc le couple $(x, y) = (0, 1)$.