Interrogation écrite n°05

NOM : Prénom : Note :

1. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de $X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
   Les racines complexes de $X^4 + 1$ *sont les racines quatrièmes de* -1. *Ainsi*
   $$X^4 + 1 = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$
   ∎

2. Donner la liste des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.
   On cherche donc les éléments de $[\![0, 20]\!]$ *premiers avec* 21. *Ainsi*
   $$(\mathbb{Z}/21\mathbb{Z})^\times = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$$
   ∎

3. Soit $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$. Déterminer le polynôme minimal de u.
   Il est clair que $u^{n+1} = 0$ *donc* π_u *divise* X^{n+1}. *Mais* $u^n \neq 0$ *donc* $\pi_u = X^{n+1}$. ∎

4. Calculer $\varphi(360)$ où φ désigne l'indicatrice d'Euler.

   Puisque $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$,
$$\varphi(360) = 360\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 96$$
∎

5. Déterminer les matrices $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{M}^2 - 3\mathrm{M} + 2\mathrm{I}_n = 0$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 2n$.

   Soit M *une telle matrice. Comme* $\mathrm{X}^2-3\mathrm{X}+2 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$ *annule* M, M *est diagonalisable et* $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) \subset \{1,2\}$*. En notant* m_1 *et* m_2 *les multiplicités respectives des valeurs propres* 1 *et* 2*, on a donc* $m_1+m_2 = n$ *et* $m_1+2m_2 = 2n$*. On en déduit que* $m_1 = 0$ *et* $m_2 = n$*. Ainsi* $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) = \{2\}$*. Comme* M *est diagonalisable,* M *est donc semblable à* $2\mathrm{I}_n$ *et finalement* $\mathrm{M} = 2\mathrm{I}_n$*. Réciproquement,* $2\mathrm{I}_n$ *convient.* ∎

6. Déterminer le polynôme minimal de la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   On remarque que $\mathrm{A}^2 = 3\mathrm{A}$ *donc* $\mathrm{X}^2-3\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-3)$ *est un polynôme annulateur de* A*. Ainsi* π_A *divise* $\mathrm{X}(\mathrm{X}-3)$*. Par conséquent,* $\pi_\mathrm{A} = \mathrm{X}$ *ou* $\pi_\mathrm{A} = \mathrm{X}-3$ *ou* $\pi_\mathrm{A} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-3)$*. Mais comme* $\mathrm{A} \neq 0$, $\pi_\mathrm{A} \neq \mathrm{X}$ *et comme* $\mathrm{A} \neq 3\mathrm{I}_3$, $\pi_\mathrm{A} \neq \mathrm{X}-3$*. Par conséquent,* $\pi_\mathrm{A} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-3)$. ∎