

EXERCICE 1.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application croissante telle que $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$. Prouver que $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

EXERCICE 2.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Déterminer les ensembles suivants :

- | | |
|-------------------------|--------------------------------|
| 1. $f(\mathbb{R})$; | 6. $f^{-1}([-4, 4])$; |
| 2. $f([-3, 2])$; | 7. $f^{-1}(f([0, 1]))$; |
| 3. $f([-3, 3])$; | 8. $f(f^{-1}([-1, 4]))$; |
| 4. $f^{-1}([9, 10])$; | 9. $f(f^{-1}(\mathbb{R}_-))$. |
| 5. $f^{-1}([-5, -3])$; | |

EXERCICE 3.

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f_1(x) = |x - 2|$;
2. $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f_2(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$;
3. $f_3 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f_3(x) = \frac{3x+1}{4x+1}$;
4. $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$;
5. $f_5 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto x^3$.

EXERCICE 4.

Montrer que la fonction définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = 2xe^x$$

réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un ensemble à déterminer.

EXERCICE 5.

Soient E un ensemble, A et B deux parties *fixées* de E , et Ψ l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par

$$\forall X \subset E, \quad \Psi(X) = (X \cap A, X \cap B).$$

1. *Etude de l'injectivité de Ψ .*

- a. Calculer $\Psi(\emptyset)$.
- b. Calculer $\Psi(\overline{A \cup B})$.
- c. Prouver que Ψ est injective *si et seulement si* $A \cup B = E$.

2. *Etude de la surjectivité de Ψ .*

- a. Le couple (\emptyset, B) admet-il un antécédent par Ψ ?
- b. Déterminer une condition *nécessaire et suffisante* sur A, B et E pour que Ψ soit surjective.

EXERCICE 6.

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$\begin{cases} f(n) = n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ f(n) = \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Etudier l'injectivité et la surjectivité de f .

EXERCICE 7.★★

Soient f et g deux applications d'un ensemble E dans lui-même, telles que $g \circ f \circ g = f$ et $f \circ g \circ f = g$.

1. On suppose que f est injective. Démontrer que f et g sont bijectives.
2. On suppose que g est surjective. Démontrer que f et g sont bijectives.

EXERCICE 8.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que la restriction de f à $[1, +\infty[$ est une bijection sur un intervalle de \mathbb{R} à préciser.

EXERCICE 9.

Soit f l'application de \mathbb{C}^* dans \mathbb{C} définie par $f(z) = \frac{1}{z}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. On considère les ensembles $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$ et $F = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\right\}$.
 - a. Si on identifie \mathbb{C} au plan, donner la nature géométrique de E et F , et donner leurs équations cartésiennes.
 - b. Vérifier que $f(E \setminus \{0\}) \subset F$.
 - c. Montrer que f induit une bijection de $E \setminus \{0\}$ sur F .

EXERCICE 10.

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image de l'ensemble I par la fonction f :

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $I = [-5, 1[$ et $f(x) = \frac{5x-2}{1-x}$. 2. $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et $f(x) = \frac{5x^2-1}{1-x}$. 3. $I = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$ et $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$. | <ol style="list-style-type: none"> 4. $I =]1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$. 5. $I =]-\pi, \pi[\setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ et $f(x) = \tan x$. |
|---|---|

EXERCICE 11.

On considère la fonction réelle définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ et \mathcal{C} sa courbe représentative. Montrer que le point $(1, 0)$ est le seul point de la courbe où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

EXERCICE 12.

Soit E un ensemble non vide et A et B deux parties de E .

1. Montrer que si $A \cap B = \emptyset$, alors pour toute partie X de E

$$(X \cup A) \cap (X \cup B) = X$$

2. Soit l'application $f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E)^2 \\ X & \longmapsto & (X \cup A, X \cup B) \end{cases}$.
 - a. Montrer que f n'est pas surjective.
 - b. Montrer que f est injective *si et seulement si* $A \cap B = \emptyset$.

EXERCICE 13.

Déterminer les applications $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n$.

EXERCICE 14.

Soit $f : E \rightarrow F$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E , $f^{-1}(f(A)) = A$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F , $f(f^{-1}(B)) = B$.

EXERCICE 15.

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application injective, telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n$.

EXERCICE 16.

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{\alpha}z + 1 \neq 0$, on pose $f(z) = \frac{z + \alpha}{\overline{\alpha}z + 1}$.

1. Montrer que f est définie sur \mathbb{U} .
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{\alpha}z + 1 \neq 0$. Montrer que $z \in \mathbb{U}$ *si et seulement si* $f(z) \in \mathbb{U}$.
3. Montrer que f induit une bijection de \mathbb{U} sur \mathbb{U} .

EXERCICE 17.

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé direct. A est le point d'affixe 2. On définit une application $\mathcal{T} : \mathcal{P} \setminus \{A\} \rightarrow \mathcal{P}$ qui au point d'affixe z associe le point d'affixe $f(z) = 2z + 3 + \frac{6}{z-2}$.

1. Étudier l'injectivité et la surjectivité de \mathcal{T} .
2. Déterminer l'ensemble des points de \mathcal{P} invariants par \mathcal{T} .
3. Deux points m et m' de $\mathcal{P} \setminus \{A\}$ sont dits associés s'ils ont la même image par \mathcal{T} . Montrer que les points m et m' , d'affixes respectifs z et z' , sont associés *si et seulement si* $z = z'$ ou $(z-2)(z'-2) = 3$.
4. On note \mathcal{E} l'axe réel privé du point A . Déterminer l'ensemble $\mathcal{T}(\mathcal{E})$.
5. Soient B et C les points d'affixes $7-4\sqrt{3}$ et $7+4\sqrt{3}$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{T}^{-1}([BC])$.

EXERCICE 18.

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On définit la *différence symétrique* de A et B par :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$,

$$\mathbb{1}_{A \Delta B} = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2.$$

2. Montrer que $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$,

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

3. Montrer que $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

EXERCICE 19.

Soient A, B, C trois ensembles. On pose $X = A \cup (B \cap C)$ et $Y = (A \cup B) \cap C$.

1. Déterminer les fonctions indicatrices de X et Y en fonction de celles de A , B et C .
2. En déduire à quelle condition nécessaire et suffisante (portant sur A et C) les ensembles X et Y sont égaux.

EXERCICE 20. ★★

Soit $f : x \mapsto \sqrt{|x^2 - 1|}$. Etudier la fonction f , puis représenter f graphiquement. On précisera les tangentes remarquables ainsi que les asymptotes.

EXERCICE 21.

Voici un peu d'entraînement sur la méthode de la quantité conjuguée.

1. Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1.$$

2. Soient m, n des entiers positifs. Etudier

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}.$$

3. Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\sqrt{1+x+x^2} - 1) = \frac{1}{2}.$$

EXERCICE 22.

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

<ol style="list-style-type: none"> 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 x }{x};$ 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2 x }{x};$ 3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2};$ 4. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)};$ 	<ol style="list-style-type: none"> 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x};$ 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3};$ 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2};$ 8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1}.$
---	--

EXERCICE 23.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 - 3x$.
2. *Sans calculs*, tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x+2) - 1 \quad h : x \in \mathbb{R} \mapsto 2f\left(\frac{x}{2}\right) \quad i : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}f(2x-2) + 1$$

EXERCICE 24.

Soit f une application dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1. Si f est paire ou impaire, que peut-on dire de la parité de f' , de $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$?
2. Si f est périodique, que peut-on dire de la périodicité de f' , de $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$?

EXERCICE 25.

Etudier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

<ol style="list-style-type: none"> 1. $f : x \mapsto \sqrt{x^4 - x^2}$ 2. $g : x \mapsto e^{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ 	<ol style="list-style-type: none"> 3. $h : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2 - 1} - 1)$ 4. $i : x \mapsto \ln(1 - \sqrt{\cos x})$
--	---

EXERCICE 26.

Etudier les fonctions suivantes. On précisera également leurs images.

<ol style="list-style-type: none"> 1. $f : x \mapsto x^x$ 2. $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ 	<ol style="list-style-type: none"> 3. $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ 4. $f : x \mapsto \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x$
--	--

EXERCICE 27.

Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$$x \leq \frac{2}{3} \sin x + \frac{1}{3} \tan x$$

EXERCICE 28.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{8 \sin x - \sin(2x)}{6} \leq x$$

EXERCICE 29.

Soient $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Calculer $f(-1 - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire sans justification une symétrie de \mathcal{C}_f .
3. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} . Calculer sa dérivée. En déduire les variations de f que l'on présentera dans un tableau de variations. On précisera les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Montrer que \mathcal{C}_f admet une asymptote oblique en $+\infty$ dont on déterminera une équation. En déduire sans calcul que \mathcal{C}_f admet également une asymptote oblique en $-\infty$ dont on précisera une équation.
5. Préciser la position de \mathcal{C}_f par rapport à ses asymptotes.
6. Tracer \mathcal{C}_f . On fera figurer les asymptotes et les tangentes remarquables.

EXERCICE 30.

On considère la fonction réelle $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{2x-1}$.

1. Étudiez f , déterminez ses éventuelles asymptotes, puis tracez la courbe \mathcal{C}_f .
2. Prouvez que \mathcal{C}_f possède un centre de symétrie.

EXERCICE 31.

Les fonctions suivantes sont-elles majorées, minorées, bornées ? Justifier.

- | | |
|---|---|
| 1. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \sin x$ | 3. $h : x \in \mathbb{R} \mapsto (1 + \sin x) \ln(1 + x^2)$ |
| 2. $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2 \sin x + 3 \cos x^2}{1 + e^x}$ | 4. $i : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2} \sin x$ |

EXERCICE 32.

Les fonctions suivantes admettent-elles un minimum ou un maximum ?

- | | |
|---|---|
| 1. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2}$ | 3. $h : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-x} \sqrt{x}$. |
| 2. $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\ln x}{x}$ | 4. $i : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x + \frac{a}{x}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$ |

EXERCICE 33.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

EXERCICE 34.★

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall x \neq \pm 1$,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} - \frac{b}{1-x}.$$

2. Calculer la dérivée n -ième sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

EXERCICE 35.★

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée n -ième de

$$x \mapsto e^{x \cos(\alpha)} \cos(x \sin(\alpha)).$$