Équations différentielles

Exercice 1.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y' + \text{th}(t)y = \text{sh}(t).$$

Exercice 2.

Résoudre sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$ l'équation

$$y' - \tan(t)y = \frac{1}{1+\cos(t)}.$$

Exercice 3.

Résoudre sur $]-\infty, 1[$ l'équation :

$$(1-x)^2 y' = (2-x)y.$$

Exercice 4.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :

$$z' + \text{th}(t)z = t\,\text{th}(t).$$

Trouver l'unique solution z_1 vérifiant la condition initiale $z_1(0) = 1$.

Exercice 5.

Soit (E) l'équation :

$$y' + \frac{\sin(x)}{2-\cos(x)}y = 2\sin(x).$$

1. Résoudre (E_H).
2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme

$$x \mapsto a\cos(x) + b$$

avec a et b réel.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'unique solution de (E), notée h, vérifiant la condition initiale $h(0) = 1$.

Exercice 6.

Résoudre sur $I =]0, \pi[$ l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) \ : \ y' + \text{cotan}(t)y = \cos^2(t).$$

Exercice 7.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' - y = \arctan(e^x)$
2. $y' + y = \arctan(e^x)$

Exercice 8.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations

1. $y' + 2y = te^{-t}$
2. $y' + 2y = e^{-2t}$

Exercice 9.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y' + y = t\cos(t).$$

Exercice 10.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y' - y = e^t + e^{2t}.$$

Exercice 11.

On considère l'équation $(\mathbf{E}) \ : \ y' - \ln(x)y = x^x$.

1. Calculer en intégrant par parties les primitives de $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Résoudre $(\mathbf{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 12.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(\mathbf{E_1}) \ : \ y' + 3y = \sin(x)$;
2. $(\mathbf{E_2}) \ : \ y' - 3y = e^{-x}(1-x^3)$;
3. $(\mathbf{E_3}) \ : \ y''' - y'' = x$.

Exercice 13.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(\mathbf{E}) \ : \ y' + xy = x^2 + 1$ sachant qu'elle admet une solution particulière polynomiale.

EXERCICE 14.

Résoudre les équations suivantes

1. $y' + y = x$;
2. $y' + y = e^{-x}$;
3. $y' + y = xe^{-x}$;
4. $y' + y = x^2e^{-x}$;
5. $y' + y = e^{2x}$;
6. $y' + y = e^{-x} + e^{2x}$;
7. $y' + y = \sin(x)$;
8. $y' + y = \cos(x)e^{x}$.

EXERCICE 15.

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants

1. $y' + 2xy = e^{x-x^2}, \quad y(0) = 0$;
2. $x^2y' + y = 0, \quad y(0) = 1$;
3. $x^3y' - 2y = 0, \quad y(1) = 1$.

EXERCICE 16.

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ l'équation

$$|x|y' + (x-1)y = x^2.$$

EXERCICE 17.

Résoudre l'équation

$$|x(x-1)|y' + y = x^2$$

sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

EXERCICE 18.

Résoudre l'équation différentielle :

$$(1+t^2)x' - x = 1$$

EXERCICE 19.

Soit a et b deux fonction impaires continues sur $\mathbb{R}$. Soit f une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$. Montrer que f est paire.

EXERCICE 20.

Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$, a et b deux fonctions continues et T-périodiques sur $\mathbb{R}$ et f une solution de l'équation différentielle (E) : $y' + ay = b$. Montrer que f est T-périodique *si et seulement si* $f(0) = f(T)$.

EXERCICE 21.

Résoudre sur $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ puis $]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(1-x^2)y' - xy = 1$$

EXERCICE 22.

On considère l'équation différentielle suivante :
$(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1$.

1. Trouver une solution polynomiale.
2. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la solution vérifiant la condition initiale $y(1) = 1$.

EXERCICE 23.

Calculer les solutions (réelles) des équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' - 3y = t^2e^t$
2. $y'' + 4y' + 3y = te^{-2t}$
3. $y'' + 4y' + 3y = \cos(3t)$
4. $y'' + 3y' + 2y = \sin(t)$
5. $y'' - 4y' + 4y = e^{-t}$
6. $y'' - 2y' + y = \cos(2t)$
7. $y'' + 5y' + 4y = te^{-t}$
8. $y'' + y = \cos(t)$
9. $y'' - 6y' + 9y = (t+1)e^{-3t}$
10. $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}\cos(t)$

EXERCICE 24.

Deux problèmes de Cauchy.

1. Déterminer l'unique fonction f, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de
$$y'' + 4y' + 4y = e^{-3t}$$
pour la condition initiale $f(0) = 0, f'(0) = 1$.
2. Déterminer l'unique fonction g, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de
$$y'' + 5y' + 4y = e^{-t}$$
pour la condition initiale $g(0) = 0, g'(0) = 1$.

EXERCICE 25.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\sin(x).$$

Exercice 26.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(\mathbf{E})\ :\ y'' + 4y = \sin^2(t).$$

Exercice 27.

Déterminer les solutions *à valeurs complexes* des équations suivantes :

1. $y'' + y' + y = 0$
2. $y'' - 2iy' - y = 0$
3. $y'' - iy' + 2y = 0$
4. $y'' + 4y' + 4y = 0$

Exercice 28.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les problèmes de Cauchy suivants :

1. $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0$
2. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 1$
3. $y'' - 3y' + 2y = x, \quad y(0) = y'(0) = 1$
4. $y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 1$

Exercice 29.

Résoudre l' équations suivante

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x).$$

Exercice 30.

Résoudre les équations suivantes

1. $y'' - 3y' + 2y = x$;
2. $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$;
3. $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$;
4. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$;
5. $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{ch}(x)$.

Exercice 31.

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - (1+i)y' - 2(1+i)y = 0$.
2. Donner l'unique solution f vérifiant $f(0) = f'(0) = 1$.

Exercice 32.

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f + f'' \geqslant 0$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$$

Exercice 33.

On considère l'équation différentielle dont on recherche les solutions à valeurs *réelles*

$$(\mathbf{E}) : y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin(x)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à $(\mathbf{E})$.
2. Déterminer une solution particulière de $(\mathbf{E})$.
3. Résoudre l'équation $(\mathbf{E})$.
4. Déterminer l'unique solution f de $(\mathbf{E})$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

Exercice 34.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)g(t)\,dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(t-x)g(t)\,dt$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = g$.

Exercice 35.

Soient $\omega \in \mathbb{R}$, $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x' & = & -y & + & \sin(\omega t) \\ y' & = & x & - & \cos(\omega t) \end{array}\right.$$

1. Soit $z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$t \longmapsto x(t) + iy(t).$$

   Justifier la dérivabilité de z et montrer que z vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.
2. Déterminer x et y.

Exercice 36.

On souhaite résoudre l'équation

$$(\mathbf{E})\ :\ x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x^2}$$

sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

1. Soient $y : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $Y(t) = y(e^t)$.
  - **a.** Calculer les dérivées y, y' et y'' en fonction de Y, Y' et Y''.
  - **b.** En déduire que y est solution de $(\mathbf{E})$ *si et seulement si* Y est solution d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants $(\mathbf{E}')$ que l'on précisera.

2. Résoudre $(\mathbf{E}')$ sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire les solutions de $(\mathbf{E})$ sur I.

4. Montrer qu'il existe une unique solution y de $(\mathbf{E})$ sur I telle que $y(1) = y'(1) = 0$.

Exercice 37.

Résoudre l'équation

$$y^2 + x^2 - 2yy' = 0$$

en effectuant le changement de fonction $z = y^2$.

Exercice 38.

Résoudre l'équation

$$y' = e^{x+y}$$

en posant $z = e^{-y}$.

Exercice 39.

Soit $(\mathbf{E})$ l'équation $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0$.

1. Etablir qu'une *éventuelle* solution polynomiale et non nulle de $(\mathbf{E})$ est nécessairement de degré deux.

2. Trouver une solution polynomiale et non nulle p de $(\mathbf{E})$.

3. Justifier qu'une fonction y deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme $y = p \times z$ où z est une fonction deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

4. Montrer qu'une fonction $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable est solution de $(\mathbf{E})$ *si et seulement si* la fonction $Z = z'$ (où z est définie comme à la question précédente) est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre un $(\mathbf{E}')$ à préciser.

5. Résoudre $(\mathbf{E})$.

Exercice 40.

Soient $I =]1, +\infty[$ et $(\mathbf{E})$ l'équation

$$(\mathbf{E})\ :\ -t^2y' + ty = y^2.$$

1. Soit y une fonction ne s'annulant pas sur I. Prouver que y est solution de $(\mathbf{E})$ *si et seulement si* $z = \frac{1}{y}$ est solution sur I d'une équation différentielle $(\mathbf{E}')$ linéaire d'ordre un.

2. Résoudre $(\mathbf{E}')$ sur I.

3. En déduire les solutions de $(\mathbf{E})$ ne s'annulant pas sur l'intervalle I.

Exercice 41.

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(\mathsf{E}) :\ x^2y'' - xy' - 3y = x^4$$

1.
  - **a.** Montrer que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ *si et seulement si* $g : t \mapsto f(e^t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.
  - **b.** En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.
  - **a.** Montrer que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ *si et seulement si* $g : t \mapsto f(-e^t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.
  - **b.** En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.

3. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Équations différentielles

Exercice 42.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche l'ensemble S_α des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f'(x) = -f(\alpha - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une telle fonction est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Montrer que les éléments de S_α sont solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
3. Conclure.

Exercice 43.

Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x)$$

Exercice 44.

Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -f(-x)$$

Exercice 45.

Déterminer les applications f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = xe^{-x}$$

Exercice 46.

Déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 1.$$

Exercice 47.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x^2y' - y = 0$.

Exercice 48.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$.

Exercice 49.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy' - y = x$.

Exercice 50.

On considère l'équation différentielle $(E) : xy'' - y' - x^3y = 0$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ en effectuant le changement de variable $t = x^2$.
2. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 51.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) :\ ty' + (1-t)y = e^{2t}$.

Exercice 52.

Résoudre $y'y^4 = \frac{1}{1+x^2}$.