Devoir à la maison n°10

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose dans cette question que F et G admettent un supplémentaire commun dans E i.e. qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$. Montrer que $\dim F = \dim G$.

> **On cherche maintenant à prouver la réciproque, c'est-à-dire que si** $\dim F = \dim G$**, alors** F **et** G **admettent un supplémentaire commun dans** E.

2. Montrer que si $F = G$, alors F et G admettent un supplémentaire commun dans E.

> **On suppose maintenant** $F \neq G$ **dans toute la fin de l'exercice.**

3. On suppose dans cette question que F et G sont deux hyperplans de E.

- **a.** Justifier l'existence de deux vecteurs $u \in F$ et $v \in G$ tels que $u \notin G$ et $v \notin F$.
- **b.** On pose $w = u + v$. Montrer que $w \notin F \cup G$.
- **c.** Montrer que $H = \operatorname{vect}(w)$ est un supplémentaire commun de F et G dans E.

4. Dans cette question, on suppose seulement $\dim F = \dim G$.

- **a.** Justifier l'existence de deux sous-espaces vectoriels F' et G' de E tels que $(F \cap G) \oplus F' = F$ et $(F \cap G) \oplus G' = G$.
- **b.** Montrer que $\dim F' = \dim G' > 0$ et que $F' \cap G' = \{0_E\}$.
- **c.** On pose $p = \dim F' = \dim G'$. Soient $(f_1, \dots, f_p)$ et $(g_1, \dots, g_p)$ des bases respectives de F' et G'. On pose $h_i = f_i + g_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. Montrer que la famille $(h_1, \dots, h_p)$ est libre.
- **d.** On pose $H' = \operatorname{vect}(h_1, \dots, h_p)$. Que vaut $\dim H'$? Montrer que $H' \cap F = H' \cap G = \{0_E\}$.
- **e.** En déduire que $F + G = F \oplus H' = G \oplus H'$.
- **f.** Soit H'' un supplémentaire de $F + G$ dans E. Montrer que $H' \cap H'' = \{0_E\}$.
- **g.** On pose $H = H' \oplus H''$. Montrer que H est un supplémentaire commun de F et G dans E.

Exercice 2.

On note E l'ensemble des suites complexes, c'est-à-dire $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On admet que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note F_p l'ensemble des suites complexes périodiques de période p.
On pose enfin $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que F_p est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, on note u^k la suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv k[p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est une base de F_p. En déduire la dimension de F_p.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = 1 \qquad v_n = j^n \qquad w_n = \overline{j}^n$$

Montrer que les suites u, v et w appartiennent à F_3.

4. Montrer que (u, v, w) est une base de F_3.

5. Soit $t \in E$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, t_n est le reste de la division euclidienne de n par 3. Montrer que $t \in F_3$.

6. Déterminer les coordonnées de t dans la base (u, v, w).

7. Montrer que $F_3 \subset F_6$.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$x_n = (-1)^n \qquad y_n = (-j)^n \qquad z_n = (-\overline{j})^n$$

et $G = \operatorname{vect}(x, y, z)$. Montrer que $G \subset F_6$.

9. Montrer que la famille (x, y, z) est libre. En déduire la dimension de G.

10. Montrer que $F_6 = F_3 \oplus G$.

11. Montrer que (u, x) est une base de F_2.

12. On pose $H = \operatorname{vect}(v, w, y, z)$. Montrer que $F_6 = F_2 \oplus H$.