

## 1 Cours

### Développements limités

**Définitions et propriétés** Définition du développement limité d'une fonction. Unicité du développement limité. Une fonction est équivalente au monôme non nul de plus bas degré d'un DL (s'il existe). Lien avec la continuité (existence d'un DL d'ordre 0) et la dérivabilité (existence d'un DL d'ordre 1). DL et parité : le DL en 0 d'une fonction paire (resp. impaire) ne comporte que des puissances paires (resp. impaires).

### Intégration et dérivation des DL, formule de Taylor-Young

- Intégration : si  $f$  admet un  $DL_n(a)$ , alors toute primitive  $F$  de  $f$  admet un  $DL_{n+1}(a)$  et le DL de  $F$  s'obtient en intégrant terme à terme celui de  $f$ .
- Taylor-Young : Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un voisinage de  $a$ , alors  $f$  admet un  $DL_n(a)$  donné par la formule de Taylor-Young.

**Développements limités usuels**  $\frac{1}{1 \pm x}$ ,  $e^x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\arctan x$ ,  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$  en 0.

**Calculs sur les DL** Somme, produit, composition, inverse, quotient.

**Application à l'étude de courbes** Tangentes, asymptotes et positions locales relatives. Condition nécessaire/suffisante sur les coefficients d'un DL d'ordre 2 pour l'existence d'un extremum local.

### Nombres réels

**Approximations d'un réel** Ensembles de nombres :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . Partie entière. Approximations décimales. Densité dans  $\mathbb{R}$ . Caractérisation séquentielle de la densité.  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sont denses dans  $\mathbb{R}$ .

**Relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$**  Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure d'une partie de  $\mathbb{R}$ . Théorème de la borne supérieure. Caractérisation séquentielle de la borne inférieure et de la borne supérieure. Droite réelle achevée  $\overline{\mathbb{R}}$ . Borne supérieure et inférieure dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . Applications à valeurs dans  $\mathbb{R}$  : majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure.

**Intervalles de  $\mathbb{R}$**  Définition générale.

## 2 Méthodes à maîtriser

- Mettre les développements limités sous forme normalisée pour calculer des produits de DL.
- N'additionner que des développements limités de même ordre.
- Déterminer les ordres auxquels il faut développer les différentes composantes d'une expression pour obtenir un DL d'ordre donné de cette expression.
- Se ramener en 0 par changement de variable.
- Justifier la continuité (ou la prolongeabilité par continuité) et la dérivabilité à l'aide de DL.
- Déterminer des tangentes et des asymptotes à l'aide de DL et placer localement la courbe par rapport à son asymptote ou sa tangente.
- Déterminer le maximum/minimum  $M$  d'une partie  $\mathcal{A}$  :
  - ◊  $M$  est un majorant/minorant de  $\mathcal{A}$  ;
  - ◊  $M \in \mathcal{A}$ .
- Déterminer la borne supérieure/inférieure  $M$  d'une partie  $\mathcal{A}$  :
  - $M$  est un majorant/minorant de  $\mathcal{A}$  ;
  - puis au choix :
    - \* si  $M \in \mathcal{A}$ ,  $M$  est un maximum/minimum donc a fortiori une borne supérieure/inférieure ;
    - \* tout majorant/minorant de  $\mathcal{A}$  est minoré/majoré par  $M$  ;
    - \* il existe une suite d'éléments de  $\mathcal{A}$  convergeant vers  $M$ .
- Caractérisation de la partie entière :

$$n = [x] \iff x - 1 < n \leq x \iff n \leq x < n + 1$$

### 3 Questions de cours

#### Retour sur le DS n°05

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

1. Déterminer  $f(0)$ ,  $f(1)$  et  $f(-1)$ .
2. Montrer que  $f$  est impaire.
3. Montrer que  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation différentielle  $xy' - y = kx$  où  $k = f'(1)$ .
4. En déduire  $f(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

#### Sommes trigonométriques (révision)

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer  $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$  et  $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$ .

#### Sommes doubles (révision)

Calculer  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$  et  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$ .

**Intégrales de Wallis (à nouveau)** On pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. En déduire des expressions de  $I_{2n}$  et  $I_{2n+1}$  à l'aide de factorielles.

**Equation complexe (révision)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Résoudre l'équation  $(z - i)^n = (z + i)^n$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ . On exprimera les solutions à l'aide de la fonction  $\tan$ .