Intégrales à paramètres

Continuité

Solution 1

Posons $\varphi(x,t) = \dfrac{1}{t^x(1+t)}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x,t) \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^x}$ et $\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$ donc l'intégrale définissant f est définie si et seulement si $x < 1$ et $x+1 > 1$ i.e. $0 < x < 1$.

2. Fixons $a \in]-\infty, 1[$.

a. Pour tout $x \in]-\infty, a]$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1]$.

b. Pour tout $t \in]0,1]$, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur $]-\infty, a]$.

c. Pour tout $(x,t) \in]-\infty, a]\times]0,1]$,

$$0 \leq \varphi(x,t) \leq \frac{1}{t^a(t+1)}$$

et $t \mapsto \dfrac{1}{t^a(t+1)}$ est intégrable sur $[0,1]$.

Ainsi g est continue sur $]-\infty, a]$ pour tout $a \in]-\infty, 1[$ et donc sur $]-\infty, 1[$.

3. On va d'abord modifier l'expression de f pour simplifier le raisonnement. Soit $x \in]0,1[$. D'après la relation de Chasles

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$$

En effectuant le changement de variable $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ dans la seconde intégrale :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x}(1+t)} = \mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(1-x)$$

Tout d'abord

$$\mathrm{g}(x) = \int_0^1 \frac{(1+t)-t}{t^x(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{-x}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^{1-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x} - \mathrm{g}(x-1)$$

Comme g est continue en 0 et $\mathrm{g}(0) = \ln(2)$,

$$\mathrm{g}(x) \underset{x\to0^+}{=} \ln(2) + o(1) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{g}(x) \underset{x\to1^-}{=} \frac{1}{1-x} - \ln(2) + o(1)$$

On en déduit que

$$f(x) \underset{x\to1^-}{=} \frac{1}{1-x} + o(1)$$

et, comme $f(x) = f(1-x)$,

$$\underset{x\to0^+}{=} \frac{1}{x} + o(1)$$

Solution 2

- Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, elle y est continue par morceaux. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-ixt}f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-ixt}f(t)$ est clairement continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|f(t)e^{-ixt}| = |f(t)|$ et $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque f l'est.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivation

Solution 3

Posons $\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)\ \mathrm{d}t}{1+t^2}$ et $\mathrm{G}(x) = \int_0^x \frac{\ln(t)\ \mathrm{d}t}{t^2-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarquons déjà que l'intégrale définissant $\mathrm{F}(x)$ est bien définie. Tout d'abord, $\frac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} -\ln(t)$ donc $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2-1}$ est intégrable au voisinage de 0^+. On va maintenant justifier que $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2-1}$ est prolongeable par continuité en 1, pour justifier l'existence de $\mathrm{G}(x)$ pour $x > 1$. En effet,

$$\frac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{t-1}{t^2-1} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{t+1} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{2}$$

Finalement G est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et le théorème fondamental de l'analyse montre alors que $\mathrm{G}'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et que $\mathrm{G}'(1) = \frac{1}{2}$.

Ensuite, nous allons montrer que G est continue en 0. En effet, puisque $\frac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$ et que l'intégrale définissant $\mathrm{G}(x)$ converge, $\mathrm{G}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\int_0^x \ln(t)\ \mathrm{d}t$. Or $\int_0^x \ln(t)\ \mathrm{d}t = x\ln x - x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ de sorte que $\lim_0 \mathrm{G} = 0 = \mathrm{G}(0)$.

On va ensuite montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$. Posons $u(x,t) = \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}$ pour $(x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $u(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ et $u(x,t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$;
- pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto u(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$,
$$|u(x,t)| \leq \frac{\pi/2}{1+t^2}$$
- la fonction $t \mapsto \frac{\pi/2}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (continue sur $\mathbb{R}_+$ et équivalente à $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$).

On peut donc affirmer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
On va maintenant montrer que F est également dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

- pour tout $x \in [a,+\infty[$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $u(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ et $u(x,t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$;
- u admet une dérivée par rapport à sa première variable sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$ et
$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*,\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}$$
- pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto u(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$;
- pour tout $x \in [a,+\infty[$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$,
$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t}{(t^2+a^2)(1+t^2)}$$
- la fonction $t \mapsto \frac{t}{(t^2+a^2)(1+t^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (continue sur $\mathbb{R}_+$ et équivalente à $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ en $+\infty$).

On peut donc affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et donc sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\ \mathrm{d}t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}$$

A l'aide d'une décomposition en éléments simples, pour $x \neq 1$

$$\frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{t}{t^2+x^2} - \frac{t}{t^2+1}\right)$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ \mathrm{F}'(x) = \frac{1}{2(1-x^2)}\left[\ln\left(\frac{t^2+x^2}{1+t^2}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

Ainsi F' et G' coïncident sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et comme elles sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, elles coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, F et G sont égales à une constante près sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, $\lim\limits_0 \mathrm{F} = \mathrm{F}(0) = 0$ puisqu'on a montré que F était continue sur $\mathbb{R}_+$ et donc en 0 et $\lim\limits_0 \mathrm{G} = 0$. La contante en question est donc nulle : F et G coïncident donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution 4

---

1. La linéarité de R provient de la linéarité de l'intégration. La linéarité de S provient de la linéarité de l'intégration et de la dérivation. Soit $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Fixons $a \in \mathbb{R}_+$. L'application $x \mapsto h(x\sin t)$ est clairement continue sur $[0, a]$ pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et l'application $t \mapsto h(x \sin t)$ est clairement continue par morceaux (et même continue) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour tout $x \in [0, a]$. De plus h étant continue sur le segment $[0, a]$, elle est bornée sur $[0, a]$. Il existe donc $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x,t) \in [0,a] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right], |h(x\sin t)| \leq \mathrm{M}$$

La fonction constante égale à M étant clairement intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{R}(h)$ est continue sur $[0, a]$ et, par suite sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Remarquons que $\mathrm{S}(g)(x) = g(0) + x\mathrm{R}(g')(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Comme g' est continue sur $\mathbb{R}_+$, ce qui précède montre que $\mathrm{R}(g')$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donc $\mathrm{S}(g)$ également.

2. On procède par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\sin(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \left[-\sin^{n+1}(t)\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^2(t)\ \mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(1-\sin^2(t))\ \mathrm{d}t \\
&= (n+1)\mathrm{W}_n - (n+1)\mathrm{W}_{n+2}
\end{aligned}$$

Ainsi $(n+2)\mathrm{W}_{n+2} = (n+1)\mathrm{W}_n$.

3. La relation précédente montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)\mathrm{W}_{n+2}\mathrm{W}_{n+1} = (n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n$. La suite de terme général $(n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n$ est donc constante égale à son premier terme $\mathrm{W}_0\mathrm{W}_1 = \frac{\pi}{2}$.
Posons $f_n :\ x \mapsto x^n$. Un calcul évident montre que $\mathrm{R}(f_0) = f_0$ et que $\mathrm{S}(f_0) = f_0$, ainsi $\mathrm{S}\circ\mathrm{R}(f_0) = f_0$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. Un calcul non moins évident montre que $\mathrm{R}(f_n) = \frac{2}{\pi}\mathrm{W}_n f_n$ et $\mathrm{S}(f_n) = n\mathrm{W}_{n-1}f_n$. Ainsi $\mathrm{S}\circ\mathrm{R}(f_n) = n\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n-1}\frac{2}{\pi}f_n = f_n$ puisque $n\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
Comme toute fonction polynomiale est combinaison linéaire des f_n, on obtient par linéarité de $\mathrm{S}\circ\mathrm{R}$, $\mathrm{S}\circ\mathrm{R}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$ pour tout polynôme P.

4. Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Montrons que $\mathrm{R}(g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \mapsto g(x\sin t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, a]$ de dérivée $x \mapsto \sin(t)g'(x\sin t)$. Pour tout $x \in [0, a]$, $t \mapsto g(x\sin t)$ et $t \mapsto \sin(t)g'(x\sin t)$ sont continues par morceaux (et même continues) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Enfin, g' est continue sur le segment $[0, a]$, elle y est bornée. Il existe donc $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x,t) \in [0,a] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right], |\sin(t)g'(x\sin t)| \leq \mathrm{M}\sin(t)$$

Comme $t \mapsto \in (t)$ est clairement intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut conclure que $R(g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, a]$ et par suite sur $\mathbb{R}_+$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ R(g)'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) g'(x \sin t)\ dt$$

Fixons $x \in \mathbb{R}_+$. On notera $\|\cdot\|_{[0,x]}$ la norme uniforme sur $[0, x]$. Par inégalité triangulaire

$$|S \circ R(g)(x)| \leq |R(g)(0)| + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} |R(g)'(x \sin t)|\ dt \leq |R(g)(0)| + x\frac{\pi}{2}\|R(g)'\|_{[0,x]}$$

Mais pour tout $y \in [0, x]$

$$|R(g)'(y)| = \left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) g'(y \sin t)\ dt\right| \leq \frac{2}{\pi}\|g'\|_{[0,x]} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\ dt = \frac{2}{\pi}\|g'\|_{[0,x]}$$

Ainsi

$$\|R(g)'\|_{[0,x]} \leq \frac{2}{\pi}\|g'\|_{[0,x]}$$

puis

$$|S \circ R(g)(x)| \leq |g(0)| + x\|g'\|_{[0,x]}$$

D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (Q_n) de polynômes convergeant uniformément vers g' sur $[0, x]$. On pose alors $P_n(x) = g(0) + \int_0^x Q_n(t)\ dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. La suite (P_n) est également une suite de polynômes. On peut appliquer l'inégalité précédente à $g - P_n$, ce qui donne

$$|S \circ R(g - P_n)(x)| \leq |(g - P_n)(0)| + x\|(g - P_n)'\|_{[0,x]}$$

ou encore, par linéarité de $S \circ R$, de l'évaluation en 0 et de la dérivation

$$|S \circ R(g) - S \circ R(P_n)(x)| \leq |g(0) - P_n(0)| + x\|g' - P_n'\|_{[0,x]}$$

et finalement

$$|S \circ R(g) - P_n(x)| \leq x\|g' - Q_n\|_{[0,x]}$$

car $S \circ R(P_n) = P_n$ d'après la question précédente et car $P_n' = Q_n$ et $P_n(0) = g(0)$ par construction des P_n. Puisque (Q_n) converge uniformément vers g' sur $[0, x]$, $\lim_{n\to+\infty} \|g' - Q_n\|_{[0,x]} = 0$. Ceci montre que

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = S \circ R(g)(x)$$

Enfin comme Q_n converge uniformément vers g' sur $[0, x]$,

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = g(0) + \lim_{n\to+\infty} \int_0^x Q_n(t)\ dt = g(0) + \int_0^x g'(t)\ dt = g(x)$$

Par unicité de la limite, $S \circ R(g)(x) = g(x)$. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $S \circ R(g) = g$.

Solution 5

---

1. Posons $\varphi(x, t) = \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t)$ pour $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Remarquons déjà que φ est bien définie puisque $\cos^2$ et $\sin^2$ sont positives et ne s'annulent pas simultanément. Pour la même raison, $x \mapsto \varphi(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = \frac{2x \sin^2 t}{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t}$$

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $a \leq b$.

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] = \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)\right| \leq \frac{2b \sin^2 t}{\cos^2 t + a^2 \sin^2 t}$$

et $t \mapsto \dfrac{2b \sin^2 t}{\cos^2 t + a^2 \sin^2 t}$ est évidemment intégrable sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par conséquent, f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et par extension sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x\sin^2 t\ dt}{\cos^2 t + x^2\sin^2 t} = 2x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t\ dt}{\cos^2 t + x^2\sin^2 t}$$

Via le changement de variable $u = \tan t$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t\ dt}{\cos^2 t + x^2\sin^2 t} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2\ du}{(1+x^2u^2)(1+u^2)}$$

Lorsque $x \neq 1$,

$$\frac{u^2}{(1+x^2u^2)(1+u^2)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+x^2u^2}\right)$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\},\ f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2x}\right) = \frac{\pi}{x+1}$$

Par continuité de f', cette égalité est en fait vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. On en déduit l'existence d'une constante C telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \mathrm{C} + \pi\ln(x+1)$$

Or $f(1) = 0$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \pi\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Solution 6

1. Posons $f(x,t) = \dfrac{e^{-tx}}{t+1}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ donc $x \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{te^{-tx}}{t+1}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ donc $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Donnons-nous $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-ta}$$

  et $t \mapsto e^{-ta}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ donc de classe $\mathcal{C}^1$ syr $\mathbb{R}_+^*$.

2. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{t+1}\ dt$$

Notamment

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ -g'(x) + g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ dt = \frac{1}{x}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Effectuons le changement de variable $u = xt$:

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u+x}\ du = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+\frac{u}{x}}\ du$$

De plus,

$$\forall u \in \mathbb{R}_+,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-u}}{1+\frac{u}{x}} = e^{-u}$$

et

$$\forall(u,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^*,\ \left|\frac{e^{-u}}{1+\frac{u}{x}}\right|\leq e^{-u}$$

Comme $u\mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée de sorte que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{1+\frac{u}{x}}\,\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}e^{-u}\,\mathrm{d}u=1$$

On en déduit que $g(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x}$.

Remarque. On peut aussi intégrer par parties pour $x>0$:

$$\begin{aligned}xg(x)&=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-tx}}{1+t}\,\mathrm{d}t\\&=-\left[\frac{e^{-tx}}{1+t}\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\\&=1-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or pour tout $x>0$,

$$0\leq\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\leq\int_0^{+\infty}e^{-tx}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t=0$$

puis

$$\lim_{x\to+\infty}xg(x)=1$$

ou encore

$$g(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x}$$

Solution 7

1. Tout d'abord, F est clairement paire puisque cos l'est.
Posons $f:(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\mapsto\frac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{t\to0^+}f(x,t)=\frac{x^2}{2}$ car $\cos u\underset{u\to0}{=}1-\frac{u^2}{2}+o(u^2)$. Ainsi $t\mapsto f(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0. Par ailleurs, comme cos est bornée, $f(x,t)\underset{t\to+\infty}{=}\mathcal{O}\left(\frac{e^{-t}}{t^2}\right)$. A fortiori, $f(x,t)\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F(x)$ est bien défini. La fonction F est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. Puisque $|\sin'|=|\cos|\leq1$, sin est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ en vertu du théorème des accroissements finis. Notamment, pour tout $u\in\mathbb{R}$, $|\sin(u)-\sin(0)|\leq|u-0|$ i.e. $|\sin u|\leq|u|$.

3. Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial^2f}{\partial x^2}(x,t)=\cos(xt)e^{-t}$. De plus,

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\ \left|\frac{\partial^2f}{\partial x^2}(x,t)\right|=|\cos(xt)e^{-t}|\leq e^{-t}$$

et $t\mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F''(x)=\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On peut remarquer que $F''(x)$ est la partie réelle de

$$\int_0^{+\infty} e^{ixt}e^{-t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{1-ix} = \frac{1+ix}{1+x^2}$$

Ainsi $F''(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. On aurait aussi pu procéder à une double intégration par parties.

Remarquons que

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\ \mathrm{d}t$$

En particulier, $F'(0) = 0$.

Remarque. On aurait aussi pu remarquer que F étant paire, F' est impaire et donc $F'(0) = 0$.

Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \arctan x + F'(0) = \arctan(x)$$

Enfin, on a clairement $F(0) = 0$ et

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) &= F(0) + \int_0^x \arctan(t)\ \mathrm{d}t \\
&= [t\arctan t]_0^x - \int_0^x \frac{t\ \mathrm{d}t}{1+t^2} \qquad \text{par intégration par parties} \\
&= x\arctan x - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^x \\
&= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)
\end{aligned}$$

Solution 8

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème fondamental de l'analyse. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-x^2}$$

Posons $\varphi : (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1] \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$. Pour tout $t \in [0,1]$, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1]$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$.

$$\forall (x,t) \in [0,1]\times\mathbb{R},\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2$$

et $t \mapsto 2$ est évidemment intégrable sur $[0,1]$. Ainsi g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\ \mathrm{d}t$$

On en déduit que $f^2 + g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in [0,1],\ (f^2+g)'(x) = 2f'(x)f(x) + g'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\ \mathrm{d}t - 2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\ \mathrm{d}t$$

En effectuant le changement de vatiable $u = tx$,

$$x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\ \mathrm{d}t = \int_0^x e^{-x^2}e^{-u^2}\ \mathrm{d}u = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$$

Par conséquent, $(f^2+g)'$ est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ de sorte que f^2+g est constante sur $\mathbb{R}$. Enfin,

$$(f^2+g)(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

donc f^2+g est constante égale à $\frac{\pi}{4}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Il est clair que

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1],\ 0 \leq \varphi(x,t) \leq e^{-x^2}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}$$

On en déduit que $\lim\limits_{+\infty} g = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{+\infty} f^2 = \frac{\pi}{4}$. Comme f est clairement à valeurs positives sur $\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{+\infty} f = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Autrement dit,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Solution 9

Dans la suite, on pose $\varphi(x,t) = \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$.

1. **a.**
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|\varphi(x,t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (c'est la dérivée de arctan qui admet une limite finie en $+\infty$).

Ainsi f est continue (et a fortiori définie) sur $\mathbb{R}_+$.

b. Fixons $a \in \mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $x \in [a,+\infty[$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la domination précédente.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$.
- Pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-\frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}\right| = \frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq e^{-xt^2} \leq e^{-at^2}$$

et $t \mapsto e^{-at^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ($e^{-at^2} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$).

Par conséquent, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$ et donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. **a.** On peut de plus affirmer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t = f(x) - \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$$

Via le changement de variable $u = t\sqrt{x}$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

d'après le résultat admis. Ainsi f est bien solution de l'équation différentielle $y' - y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

b. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière de (E) de la forme $x \mapsto \varphi(x)e^x$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (variation de la constante). On aboutit à $\varphi'(x)e^x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$ ou encore $\varphi'(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$. Comme $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 0^+ et on peut donc choisir $\varphi(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Ainsi les solutions de (E) sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^x + e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \lambda e^x - \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Comme f est continue en 0 et comme $f(0) = \frac{\pi}{2}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \frac{\pi}{2} e^x - \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

On peut éventuellement rajouter que par le changement de variable $u = \sqrt{t}$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi}{2} e^x - \sqrt{\pi} e^x \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

Et comme $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{\pi} e^x \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

Remarque. Cette expression finale n'est pas forcément «meilleure» que l'expression initiale...

Solution 10

Posons $g(x,t) = \frac{1-e^{tx}}{t} e^{-t}$. On a $g(x,t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -x$. Ainsi $\int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Si $x > 0$, $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{(x-1)t}t$. Or $\int_1^{+\infty} e^{(x-1)t}t\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x < 1$.

Si $x < 0$, $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{t}$. Or $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-t}\right)$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

On en déduit que $\int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x < 1$. Le domaine de définition de F est donc $]-\infty, 1[$.

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\forall u \geq 0, |e^u - 1| \leq ue^u$$
$$\forall u \leq 0, |e^u - 1| \leq -u$$

Soient $a < 0$ et $b \in]0,1[$. Remarquons que g est continue sur $[a,b] \times]0,+\infty[$. En utilisant les inégalités précédentes, on déduit les majorations suivantes.

- Si $x \in [0,b]$, $|g(x,t)| \leq xe^{(x-1)t} \leq be^{(b-1)t}$ pour tout $t \in]0,+\infty[$.
- Si $x \in [a,0]$, $|g(x,t)| \leq -xe^{-t} \leq -ae^{-t}$ pour tout $t \in]0,+\infty[$.

Si on pose $\varphi(t) = \max(be^{(b-1)t}, -ae^{-t})$, on a donc $|g(x,t)| \leq \varphi(t)$ pour $(x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[$ et φ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car $b-1<0$.

Par ailleurs, g est dérivable par rapport à sa première variable et $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -e^{(x-1)t}$. $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue sur $[a,b] \times]0,+\infty[$. De plus, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{(b-1)t}$ pour $(x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[$ et $t \mapsto e^{(b-1)t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car $b-1<0$.

Par conséquent, on peut utiliser le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre : F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et par suite sur $]-\infty,1[$. De plus,

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{(x-1)t}\,dt = \frac{1}{x-1}$$

Comme on a clairement $F(0) = 0$, on peut donc affirmer que $F(x) = \ln(1-x)$ pour tout $x \in]-\infty,1[$.

Solution 11

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0,\pi]$. Remarquons que $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = (x-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta$. Cette dernière expression est positive et ne s'annule que si $x = \cos\theta$ et $\sin\theta = 0$ i.e. $\theta \in \{0,\pi\}$ et $x \in \{-1,1\}$. Le domaine de définition de f est donc $D = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

2. Soit $x \in D \setminus \{0\}$. Remarquons déjà que $1/x \in D$. De plus,

$$f(x) = \int_0^{\pi} \ln\left(x^2\left(1 - \frac{1}{x}\cos\theta + \frac{1}{x^2}\right)\right)d\theta = \int_0^{\pi} 2\ln|x|\,d\theta + \int_0^{\pi}\left(1 - \frac{1}{x}\cos\theta + \frac{1}{x^2}\right)d\theta = 2\pi\ln|x| + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

3. Posons $h(x,\theta) = \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)$ pour $x \in]-1,1[\times [0,\pi]$.
Soit $0, a \in [0,1[$. Pour tout $x \in [-a,a]$, $\theta \mapsto h(x,\theta)$ est continue sur le segment $[0,\pi]$ donc intégrable sur ce segment. Pour tout $\frac{\partial h}{\partial x} : (x,\theta) \mapsto \frac{2x - 2\cos\theta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$ est définie et continue sur le compact $[-a,a] \times [0,\pi]$. Elle y est notamment bornée. Il existe donc $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x,\theta) \in [-a,a] \times [0,\pi],\ \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,\theta)\right| \leq K$$

Enfin, la fonction constante $\theta \mapsto K$ est évidemment intégrable sur $[0,\pi]$. D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]$. Ceci étant valable pour tout $a \in [0,1[$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

4. Soit $x \in]-1,1[$. D'après la question précédente,

$$f'(x) = \int_0^{\pi} \frac{2(x-\cos\theta)}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}\,d\theta$$

On obtient la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{2(x-\cos\theta)}{x^2 - 2x\cos\theta + 1} = \frac{2(x-\cos\theta)}{(x-e^{i\theta})(x-e^{-i\theta})} = \frac{1}{x-e^{i\theta}} + \frac{1}{x-e^{-i\theta}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{x-e^{i\theta}} + \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{x-e^{-i\theta}} \\ &= \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{x-e^{i\theta}} + \int_{-\pi}^{0} \frac{d\theta}{x-e^{i\theta}} \qquad \text{par le changement de variable } \theta \mapsto -\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{x-e^{i\theta}} \end{aligned}$$

Alors, pour tout $\theta \in [-\pi,\pi]$,

$$\frac{1}{x-e^{i\theta}} = -\frac{e^{-i\theta}}{1-xe^{-i\theta}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-i(n+1)\theta}$$

car $|xe^{-i\theta}| = |x| < 1$. Comme la série $\sum |x|^n$ converge, en posant $f_n : \theta \mapsto x^n e^{-i(n+1)\theta}$, la série $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[-\pi, \pi]$. On peut donc appliquer le théorème d'interversion série/intégrale de sorte que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{x - e^{i\theta}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} x^n e^{-i(n+1)\theta} \,\mathrm{d}\theta = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n+1)\theta} \,\mathrm{d}\theta = 0$$

car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n+1)\theta} \,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{e^{-i(n+1)\theta}}{-i(n+1)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

5. D'après la question précédente, f est constante sur $]-1, 1[$. Or $f(0) = 0$. Donc f est nulle sur $]-1, 1[$. De plus, si $|x| > 1$, alors $1/x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$ et d'après la seconde question, $f(x) = 2\pi \ln |x|$. Pour récapituler,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ 2\pi \ln |x| & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Solution 12

Dans la suite, on posera $f(x, t) = \dfrac{\arctan(xt)}{t(1 + t^2)}$.

1. arctan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |\arctan'(t)| = \frac{1}{1 + t^2} \leq 1$$

Ainsi arctan est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall u \in \mathbb{R},\ |\arctan(u)| = |\arctan(u) - \arctan(0)| \leq |u - 0| = |u|$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
De plus, $\arctan(u) \underset{u \to 0^+}{\sim} u$ donc

$$\lim_{t \to 0^+} f(x, t) = x$$

Ainsi $t \mapsto f(x, t)$ est prolongeable par continuité en 0^+.
Enfin, arctan est bornée sur $\mathbb{R}$ donc

$$f(x, t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^3}\right)$$

On en déduit que $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Par conséquent, F est définie sur $\mathbb{R}$.

3. On utilise le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- D'après la première question

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ |f(x, t)| \leq \frac{|x|}{1 + t^2}$$

  Notamment, si on fixe $a \in \mathbb{R}$,

$$\forall (x, t) \in [-a, a] \times \mathbb{R}_+^*,\ |f(x, t)| \leq \frac{a}{1 + t^2}$$

  et $t \mapsto \dfrac{a}{1 + t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (elle admet comme primitive $a \arctan$ qui admet une limite finie en 0 et $+\infty$).

On en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}$.

4. On utilise le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$
donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Enfin
$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$
et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

5. D'après la question précédente,
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$
Pour $x^2 \neq 1$,
$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{x^2(1+t^2)-(1+x^2t^2)}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)$$
On en déduit que
$$\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{x^2-1}\left(x^2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+x^2t^2} - \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right) = \frac{1}{x^2-1}\left(x\left[\arctan(xt)\right]_0^{+\infty} - \left[\arctan(t)\right]_0^{+\infty}\right)$$
On en déduit que
$$\mathrm{F}'(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2(1+x)} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \\ \frac{\pi}{2(1-x)} & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* \setminus \{-1\} \end{cases}$$
Par continuité de F′ sur $\mathbb{R}$,
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}'(x) = \frac{\pi}{2(1+|x|)}$$

6. Comme $\mathrm{F}(0) = 0$, on en déduit que
$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2}\ln(1-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Convergence dominée

Solution 13

Posons $f_n : t \mapsto \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Alors $\ln(1+t^2/n) \underset{n\to+\infty}{=} t^2/n + o(1/n)$. Ainsi $-n\ln(1+t^2/n) \underset{n\to+\infty}{=} -t^2 + o(1)$. Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} -n\ln(1+t^2/n) = -t^2$.
En passant, à l'exponentielle, $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t^2}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement vers $t \mapsto e^{-t^2}$.
Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+x)^n \geq 1+nx$ (utiliser la formule du binôme par exemple). Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $(1+t^2/n)^n \geq 1+t^2$ puis $0 \leq f_n(t) \leq \frac{1}{1+t^2}$. Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Ainsi
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$$

Solution 14

---

1. Posons pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x,t) = \dfrac{t \ln t}{(1+t^2)^x}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0 (de limite nulle) et $\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^{2x-1}}$.
Si $x > 1$, alors $2x-1 > 1$ et en prenant $\alpha \in]1, 2x-1[$, $\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} \dfrac{1}{t^\alpha}$ donc $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ par critère de comparaison.
Si $x \geq 1$, $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(\varphi(x,t))$ donc $t \mapsto \varphi(x,t)$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ par critère de comparaison.
En conclusion, le domaine de définition de f est $]1,+\infty[$.

2. On effectue le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$

$$f(2) = \int_0^{+\infty} \frac{t \ln t \, \mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$$
$$= -\int_0^{+\infty} \frac{\ln u \, \mathrm{d}u}{u^3\left(1+\frac{1}{u^2}\right)^2} \qquad = -\int_0^{+\infty} \frac{u \ln u \, \mathrm{d}u}{(1+u)^2} = -f(2)$$

Ainsi $f(2) = 0$.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x,t) = 0$$

De plus,

$$\forall (x,t) \in [1,+\infty[\times \mathbb{R}_+^*, \ |\varphi(x,t)| \leq \frac{t|\ln t|}{(1+t^2)^2} = \psi(t)$$

et ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la première question. En vertu du théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Solution 15

Posons $\varphi_n(x) = e^x\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$ pour $x \in [0,n]$. φ_n est dérivable sur $[0,n]$ et

$$\forall x \in [0,n], \ \varphi_n'(x) = -\frac{xe^x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} \leq 0$$

Ainsi φ_n est décroissante sur $[0,n]$. Comme $\varphi_n(0) = 1$,

$$\forall x \in [0,n], \ 0 \leq \varphi_n(x) \leq e^{-x}$$

Posons $f_n(x) = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. La suite (f_n) converge simplement vers $x \mapsto e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la majoration précédente permet d'appliquer le théorème de convergence dominée. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x} \, \mathrm{d}x = 1$$

Solution 16

Posons $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 nf(t)e^{-nt} \, \mathrm{d}t$. Via le changement de variable $u = nt$,

$$\mathrm{I}_n = \int_0^n f(u/n)e^{-u} \, \mathrm{d}u$$

Posons $g_n(u) = f(u/n)\mathbb{1}_{[0,n](u)}$ pour $u \in \mathbb{R}_+$. Alors $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(u) \, \mathrm{d}u$. De plus, (g_n) converge simplement vers la fonction $u \mapsto f(0)e^{-u}$.
Enfin, f est continue sur le segment $[0,1]$ donc bornée sur ce segment. En posant $\mathrm{M} = \max\limits_{[0,1]} |f|$,

$$\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+, \ |g_n(u)| \leq \mathrm{M}e^{-u}$$

et $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème de convergence dominée permet alors d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} f(0)e^{-u}\, \mathrm{d}u = f(0)$$

Solution 17

---

1. Soit $x \in \pi\mathbb{Z}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 0$.
Soit maintenant $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Alors $|\cos x| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\cos^n x = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Finalement la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

2. Posons $x_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
D'une part, $n\sin(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'autre part, $\cos^n(x_n) = e^{n\ln(\cos(1/n))}$ et

$$\ln(\cos(1/n)) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(1 + o(1/n)) = \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n))$$

de sorte que $\cos^n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = 1 \neq 0$ donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément.
Soit maintenant $a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Alors pour tout $x \in \left[a, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$|f_n(x)| \leq n\cos^n(a)\sin(a)$$

donc

$$|f_n|_\infty \leq n\cos^n(a)\sin(a)$$

(c'est même une égalité) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n| = 0$ puisque $0 \leq \cos a < 1$. Ainsi (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\left[a, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

3. **Méthode n°1**
Remarquons tout d'abord que f_n est positive et que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\, \mathrm{d}t = -\frac{n}{n+1}\left[\cos^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{n}{n+1}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme g est continue en 0, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|g(x) - g(0)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \in [0, \alpha]$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\, \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\, \mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)|g(t) - g(0)|\, \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{\alpha} f_n(t)|g(t) - g(0)|\, \mathrm{d}t + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)|g(t) - g(0)|\, \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{\alpha} f_n(t)\varepsilon\, \mathrm{d}t + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\|g - g(0)\|_\infty\, \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\varepsilon\, \mathrm{d}t + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\|g - g(0)\|_\infty\, \mathrm{d}t \\
&\leq \frac{n\varepsilon}{2(n+1)} + \|g - g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\, \mathrm{d}t \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|g - g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Comme (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur le segment $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, $\lim_{n\to+\infty} \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,dt = 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $\|g - g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,dt \leq \varepsilon$. On en déduit que pour $n \geq N$,

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\,dt\right| \leq \varepsilon$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\,dt = 0$$

Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\,dt = \frac{ng(0)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(0)$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,dt = g(0)$$

Méthode n°2
L'application $t \mapsto \cos^{n+1} t$ est bijective de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$, strictement décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ donc, par changement de variable

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,dt = \frac{n}{n+1} \int_0^1 f(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))\,du$$

La fonction $u \mapsto f(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))$ converge simplement sur $]0, 1]$ vers la fonction constante égale à $f(0)$ car f est continue en 0. De plus, f est bornée $[0, 1]$ donc $u \mapsto f(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))$ est dominée par une constante (clairement intégrable sur le segment $[0, 1]$). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(\sqrt[n+1]{u})\,du = \int_0^1 f(0)\,du = f(0)$$

On en conclut immédiatement que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,dt = g(0)$$

Solution 18

On pose $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ dans la suite.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3n}}$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et u_n est bien définie.
   La fonction f_0 est constante égale à 1. Elle n'est évidemment pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc u_0 n'est pas définie.

2. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| = f_n \leq f_1$ et f_1 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc (u_n) converge vers 0 d'après le théorème de convergence dominée.

3. La suite (f_n) est décroissante donc la suite (u_n) l'est aussi. De plus (u_n) converge vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.
   Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$-\frac{1}{2+t^3} = \frac{-\frac{1}{1+t^3}}{1+\frac{1}{1+t^3}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(1+t^3)^k} + \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(1+t^3)^{n+1}}}{1+\frac{1}{1+t^3}}$$

Ainsi

$$\left|\int_0^{+\infty} -\frac{dt}{2+t^3} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|-\frac{1}{2+t^3} - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(1+t^3)^k}\right| dt = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{(1+t^3)^{n+1}}}{1+\frac{1}{1+t^3}} dt \leq u_{n+1}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$, on en déduit que

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k = -\int_0^{+\infty}\frac{dt}{2+t^3}$$

4. On effectue d'abord le changement de variable $u = t/\sqrt[3]{2}$. Alors

$$S = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^3}$$

On décompose en éléments simples : il existe $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$F(X) = \frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta X+\gamma}{X^2-X+1}$$

Alors $\alpha = ((X+1)F(X))(-1) = \frac{1}{3}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = 0 = \alpha+\beta$ donc $\beta = -\frac{1}{3}$. Enfin, $F(0) = \alpha+\gamma = 1$ donc $\gamma = \frac{2}{3}$. Ainsi

$$F(X) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} - \frac{X-2}{X^2+X+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2X-1}{X^2-X+1}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(X-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^3} = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}}\right)\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty}$$

Or $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}} = 1$ (utiliser un équivalent) donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^3} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Finalement, $S = \dfrac{\pi\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{3}}$.

Solution 19

Fixons $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} x^k \sin(\pi x)\, dx = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\sin(\pi x)\, dx$$

Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in [0,1[\mapsto \frac{1-x^n}{1-x}\sin(\pi x)$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \in [0,1[\mapsto \frac{\sin(\pi x)}{1-x}$. De plus, pour tout $x \in [0,1[$,

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq f(x)$$

La fonction f est intégrable sur $[0,1[$: en effet, elle admet une limite finie en 1 puisque $\sin(\pi x) = \sin(\pi(1-x)) \underset{x\to1}{\sim} \pi(1-x)$. Le théorème de convergence dominée permet donc d'affirmer que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}\, dx = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x}\, dx$$

La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge donc et a pour somme $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x}\, dx$.

Solution 20

Comme f est continue en 0,

$$\lim_{n\to+\infty} f(t^n) = \begin{cases} f(0) & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ f(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

De plus, $g : t \mapsto \begin{cases} f(0) & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ f(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$ est continue par morceaux sur $[0,1]$. Enfin, f est continue donc bornée sur le segment $[0,1]$. Il existe donc $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(t)| \leq \mathrm{M}$ pour tout $t \in [0,1]$. Comme $t \mapsto \mathrm{M}$ est évidemment intégrable sur le segment $[0,1]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$

Solution 21

On pose $f_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-t^n}$ et $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction

$$f : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ e^{-1} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Alors f est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f_n(t)| \leq \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

et la fonction $t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Solution 22

1. Tout d'abord, $x \mapsto \dfrac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. De plus, comme $\sin u \underset{u\to0}{\sim} u$, $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} = n^2$. Ainsi $x \mapsto \dfrac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, ce qui justifie que I_n est bien définie.

2. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on effectue le changement de variable linéaire $u = nx$. On obtient

$$\frac{\mathrm{I}_n}{n} = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 u}{n^2 \sin^2(u/n)}\,\mathrm{d}u$$

   Posons

$$f_n : u \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin^2 u}{n^2 \sin^2(u/n)} & \text{si } u \in \left]0, \dfrac{n\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   de sorte que

$$\frac{\mathrm{I}_n}{n} = \int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u$$

   On va maintenant appliquer le théorème de convergence dominée. Soit $u \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant l'équivalent de sin en 0, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(u) = \frac{\sin^2 u}{u^2}$$

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f : u \mapsto \dfrac{\sin^2 u}{u^2}$. De plus, par concavité de sin sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geq \dfrac{2}{\pi}x$ pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que pour $u \in \left]0, \dfrac{n\pi}{2}\right]$,

$$0 \leq f_n(u) \leq \frac{\pi^2}{4} f(u)$$

et cette inégalité est encore valable pour $u > \dfrac{n\pi}{2}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\lim_{u\to 0^+} f(u) = 1$ et $f(u) \underset{u\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, de même que $\dfrac{\pi^2}{4}f$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\frac{\mathrm{I}_n}{n} = \int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u$$

On en déduit automatiquement l'équivalent demandé.

Solution 23

Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. L'application $t \mapsto t^{1/y}$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,1]$ sur $]0,1]$, de dérivée $t \mapsto \dfrac{1}{y}t^{\frac{1}{y}-1}$. Par le changement de variable $x = t^{1/y}$ on obtient donc

$$y\int_0^1 x^y f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 t^{1/y} f(t^{1/y})\,\mathrm{d}t$$

On va appliquer le théorème de convergence dominée.

- Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto t^{1/y} f(t^{1/y})$ est continue sur $]0,1]$.
- Pour tout $t \in]0,1]$, $\lim_{y\to+\infty} t^{1/y} = 1$ de sorte que $\lim_{y\to+\infty} t^{1/y} f(t^{1/y}) = f(1)$ par continuité de f en 1.
- Pour tout $t \in]0,1]$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$,
$$|t^{1/y} f(t^{1/y})| \leq \max_{[0,1]} |f|$$
Ce maximum existe car $|f|$ est continue sur le segment $[0,1]$. De plus, la constante $\max_{[0,1]} |f|$ est évidemment intégrable sur $]0,1]$.

Par théorème de convergence dominée,

$$\lim_{y\to+\infty} y\int_0^1 x^y f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to+\infty}\int_0^1 t^{1/y} f(t^{1/y})\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(1)\,\mathrm{d}t = f(1)$$

Intégration terme à terme

Solution 24

Posons $\varphi(x,t) = e^{-t}\,\mathrm{sh}(x\sqrt{t})$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

1. Remarquons tout d'abord que f est impaire. Soit alors $x \in \mathbb{R}_+$. On prouve aisément que $\lim_{t\to+\infty} e^{-t/2}\,\mathrm{sh}(x\sqrt{t}) = 0$ donc $\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$. A fortiori $\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par conséquent, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et finalement sur $\mathbb{R}$ par imparité.

2. Rappelons que
$$\forall u \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}\,u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
On en déduit que
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,\ \varphi(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}e^{-t}t^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!}$$

Il s'agit maintenant d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme. Posons

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}t^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!}\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties,

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{4n}\mathrm{I}_{n-1}$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{4^n n!}\mathrm{I}_0$$

et à l'aide d'une dernière intégration par parties

$$\mathrm{I}_0 = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

One en déduit que

$$\mathrm{I}_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!}$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum \int_0^{+\infty} \left|\frac{x^{2n+1}e^{-t}t^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!}\right| \mathrm{d}t$ i.e. la série $\sum \mathrm{I}_n x^{2n+1}$ converge en tant que série exponentielle. On en déduit donc via le théorème d'intégration terme à terme que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{I}_n x^{2n+1}$$

3. On peut enfin rajouter que

$$\mathrm{I}_n = \frac{x\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2^{2n}n!} = \frac{x\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{x^2}{4}}$$

Solution 25

---

1. Soit $x \in [-1,1]$. Pour tout $t \in [0,1[$

$$\frac{1-t}{1-xt^3} = (1-t)\sum_{n=0}^{+\infty}(xt^3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-t)x^n t^{3n}$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \left|(1-t)x^n t^{3n}\right| \mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)x^n t^{3n}\,\mathrm{d}t = x^n\left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$$

et $\frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum \int_0^1 \left|(1-t)x^n t^{3n}\right| \mathrm{d}t$ converge. On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

$$\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (1-t)x^n t^{3n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$$

2. En prenant $x = 1$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{1-t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Solution 26

---

1. Par intégration par parties, $\mathrm{I}_n = n\mathrm{I}_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\mathrm{I}_0 = 1$, on obtient aisément $\mathrm{I}_n = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\sum a_n$ converge (absolument), la suite (a_n) converge vers 0. A fortiori, elle est bornée. On en déduit que $\frac{a_n}{n!} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n!}\right)$. Comme la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ est de rayon de convergence infini, il en est de même de la série $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{a_n x^n e^{-x}}{n!}\right| \mathrm{d}x = \frac{|a_n|}{n!}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x = |a_n|$$

Comme la série $\sum |a_n|$ converge, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n e^{-x}}{n!} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n e^{-x}}{n!} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Solution 27

1. Puisque $\ln(x)\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x\ln x$, $\lim_{x\to 0} \ln(x)\ln(1-x)$. En posant $u = 1-x$, $\ln(x)\ln(1-x) = \ln(1-u)\ln(u)$. Comme $\lim_{u\to 0} \ln(1-u)\ln(u) = 0$, $\lim_{x\to 1} \ln(x)\ln(1-x) = 0$. Ainsi $x \mapsto \ln(x)\ln(1-x)$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$ donc elle est intégrable sur le segment $[0,1]$: I est bien définie.

2. C'est du cours

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Le rayon de convergence est 1.

3. Pour $x \in]0,1[$,

$$\ln(x)\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \ln(x)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \frac{1}{n}x^n \ln(x)$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$, elle est donc intégrable sur $[0,1]$.

Posons $\mathrm{I}_n = -\int_0^1 x^n \ln(x) \mathrm{d}x$. Par intégration par parties

$$\mathrm{I}_n = -\frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\ln(x)\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}$$

L'intégration par parties est légitimée par le fait que $\lim_{x\to 0} x^{n+1}\ln(x) = \lim_{x\to 1} x^{n+1}\ln(x) = 0$.

Comme $\frac{1}{n}\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}\mathrm{I}_n$ converge. On peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme :

$$\mathrm{I} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$$

4. On procède à une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

Comme la série télescopique $\sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et la série de Riemann converge,

$$\mathrm{I} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Solution 28

1. Posons $\varphi(t) = \dfrac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$. φ est continue sur $]0,1[$.
   De plus, $\varphi(t) \underset{t\to0^+}{\sim} -\ln(t)$ donc $\varphi(t) \underset{t\to0^+}{=} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.
   Par ailleurs, $\varphi(t) \underset{t\to1^-}{\sim} (t-1)\ln(1-t)$ donc $\lim\limits_{t\to1^-} \varphi(t) = 0$.
   Tout ceci montre que φ est intégrable sur $]0,1[$ donc l'intégrale I converge.

2. Pour $t \in]0,1[$,
$$\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{t^n}{n}$$
   donc
$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$$
   avec
$$u_n(t) = -\frac{\ln(t)t^{n-1}}{n}$$
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $u_n(t) \underset{t\to0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$, u_n est intégrable sur $]0,1]$. De plus, u_n est positive sur $]0,1]$ donc
$$\int_0^1 |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t$$
   Par intégration par parties,
$$\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{n}\int_0^1 \ln(t)t^{n-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{n^2}\left[\ln(t)t^n\right]_0^1 + \frac{1}{n^2}\int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^3}$$
   Comme la série $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme et
$$\mathrm{I} = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$$
   On peut confirmer avec Python.

```
>>> from numpy import log
>>> from scipy.integrate import quad
>>> quad(lambda t:log(t)*log(1-t)/t,0,1)[0]
1.2020569031596005
>>> sum([1/n**3 for n in range(1,1001)])
1.2020564036593433
```

Solution 29

1. Remarquons que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq \dfrac{t^n}{1+t} \leq 1$ donc $0 \leq a_n \leq 1$. On en déduit que $\mathrm{R} \geq 1$.

2. Si les u_n sont continues par morceaux sur le segment $[a,b]$ et si la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

3. Soit $x \in]-1,1[$. Posons $u_n : t \in [0,1] \mapsto \frac{(xt)^n}{1+t}$. Pour tout $t \in [0,1]$,

$$|u_n(t)| = \frac{|x|^n t^n}{1+t} \leq |x|^n$$

et la série $\sum |x|^n$ converge donc $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$. Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xt)^n}{1+t}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1-xt)}\, \mathrm{d}t$$

Une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{1}{(1+t)(1-xt)} = \frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{x}{1-xt}\right)$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1+x}\left([\ln(1+t)]_0^1 - [\ln(1-xt)]_0^1\right) = \frac{\ln(2) - \ln(1-x)}{1+x}$$

Remarque. On peut en fait faire différemment de que ce qui est suggéré par l'énoncé. En effet, on remarque que

$$a_n + a_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^n + t^{n+1}}{1+t}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 t^n\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi pour $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Donc, en notant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et en remarquant que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est la primitive nulle en 0 de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, on obtient

$$xf(x) + f(x) - a_0 = -\ln(1-x)$$

et donc

$$f(x) = \frac{\ln(2) - \ln(1-x)}{1+x}$$

puisque $a_0 = \ln(2)$.

Solution 30

1. f est clairement continue sur $]0,1]$. De plus, $f \underset{x \to 0^+}{\sim} (\ln x)^2$. Par croissances comparées, $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}$. Comme $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$, il en est de même de f.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est clairement continue sur $]0,1]$. Comme $u_0(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} (\ln x)^2$, on conclut comme à la question précédente que u_0 est intégrable sur $]0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{0^+} u_n = 0$ donc u_n est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,1]$: elle est donc intégrable sur $]0,1]$. Posons $\mathrm{I}_n = \int_0^1 u_n(x)\, \mathrm{d}x$. Comme $x \mapsto x^{2n+1}\ln(x)^2$ admet une limite nulle en 0^+, on peut intégrer par parties :

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{2n+1}\left[x^{2n+1}(\ln x)^2\right]_0^1 - \frac{2}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\ln(x)\, \mathrm{d}x = -\frac{2}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\ln(x)\, \mathrm{d}x$$

A nouveau, $x \mapsto x^{2n+1}\ln(x)$ admet une limite nulle en 0^+ donc on peut à nouveau intégrer par parties :

$$\mathrm{I}_n = -\frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{2n+1}\left[x^{2n+1}\ln(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\, \mathrm{d}x\right) = \frac{2}{(2n+1)^2}\int_0^1 x^{2n}\, \mathrm{d}x = \frac{2}{(2n+1)^3}$$

3. Remarquons que pour tout $x \in]0,1]$,

$$\frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n(x)$$

Remarquons que u_n est positive sur $[0,1]$ de sorte que $|(-1)^n u_n| = u_n$. On a vu que u_n était intégrable sur $]0,1]$ et que $\mathrm{I}_n = \int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(2n+1)^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \mathrm{I}_n$ converge également. D'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0,1]$ et $\mathrm{I} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

4. Notons S_n et R_n la somme partielle et le reste de rang n de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$. Cette série vérifie de manière évidente le critère spécial des séries alternées donc

$$|\mathrm{I} - \mathrm{S}_n| = |\mathrm{R}_n| \leq \frac{2}{(2(n+1)+1)^3} = \frac{2}{(2n+3)^3}$$

Pour que S_n soit une valeur approchée de I à ε près, il suffit donc de choisir n tel que $\frac{2}{(2n+3)^3} \leq \varepsilon$ i.e. $2n+3 \geq \sqrt[3]{2/\varepsilon}$ ou encore $n \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2/\varepsilon} - 3\right)$.

```
>>> from scipy.integrate import quad
>>> from numpy import log, ceil, abs
>>> I=quad(lambda x:log(x)**2/(1+x**2),0,1)[0]
>>> def valeur(eps):
...     n=int(ceil(((2/eps)**(1/3)-3)/2))
...     return sum([2*(-1)**k/(2*k+1)**3 for k in range(n+1)])
...
>>> for eps in (.1,.01,.001,.0001,.00001):
...     abs(I-valeur(eps))
...
0.06210770748126082
0.004033633407186876
0.0005564157597381936
4.52107128525725e-05
5.116153757978026e-06
```

Solution 31

L'idée est de faire apparaître le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. C'est impossible en l'état puisque $e^t \geq 1$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. Néanmoins

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{t}{e^t-1} = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} te^{-t}e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}$$

Ceci est valide puisque $0 < e^t < 1$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$. On cherche alors à appliquer le théorème d'intégration terme à terme. Pour cela, posons $f_n : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto te^{-nt}$. On vient de voir que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ convergeait simplement vers la fonction $f : t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, les f_n sont bien continues (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, par intégration par parties

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{n}\left[te^{-nt}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

puisque

$$\lim_{t\to0} te^{-nt} = \lim_{n\to+\infty} te^{-nt} = 0$$

Remarquons que cette intégration par parties justifie a posteriori l'intégrabilité de f_n puisque $t \mapsto e^{-nt}$ est évidemment intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $|f_n| = f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a donc la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$, ce qui permet d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$$

ou encore

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{e^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Solution 32

Montrons d'abord que l'intégrale de l'énoncé converge. Posons $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{e^t-1}$. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\lim_0 f = 1$ en utilisant des équivalents usuels et $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-t})$ et a fortiori $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Tout ceci prouve que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

L'idée est de faire apparaître le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. C'est impossible en l'état puisque $e^t \geq 1$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. Néanmoins

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\sin(t)}{e^t-1} = \frac{\sin(t)e^{-t}}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(t)e^{-t}e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t)e^{-nt}$$

Ceci est valide puisque $0 < e^t < 1$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $f_n : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sin(t)e^{-nt}$. Pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t-1}\,dt - \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} f_n(t)\,dt &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} f_n(t)\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1-e^{-t}} e^{-(\mathrm{N}+1)t\,dt} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t-1} e^{-\mathrm{N}t}\,dt\end{aligned}$$

Par double intégration par parties, on montre classiquement que

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \frac{1}{n^2+1}$$

Finalement, en notant I l'intégrale de l'énoncé

$$\left|\mathrm{I} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^2+1}\right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{e^t-1} e^{-\mathrm{N}t}\,dt$$

Par inégalités de concavité/convexité, $e^t - 1 \geq t$ et $|\sin t| \leq t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{e^t-1} e^{-\mathrm{N}t}\,dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{N}t}\,dt = \frac{1}{\mathrm{N}}$$

On en déduit que

$$\left|\mathrm{I} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^2+1}\right| \leq \frac{1}{\mathrm{N}}$$

puis que

$$\mathrm{I} = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Divers

Solution 33

Posons $\varphi(x,t) = \frac{1}{t^x(1+t)}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^x}$ et $\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$ donc l'intégrale définissant f est définie si et seulement si $x < 1$ et $x+1 > 1$ i.e. $0 < x < 1$.

2. On va d'abord modifier l'expression de f pour simplifier le raisonnement. Soit $x \in]0,1[$. D'après la relation de Chasles

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$$

En effectuant le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$ dans la seconde intégrale :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x}(1+t)}$$

Posons

$$g : x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$$

Alors g est définie sur $[0,1[$ et

$$\forall x \in]0,1[,\ f(x) = g(x) + g(1-x)$$

On va donc étudier les limites de g en 0^+ et 1^-.

$$g(x) = \int_0^1 \frac{(1+t)-t}{t^x(1+t)}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 t^{-x}\ \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^{1-x}}{1+t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{1-x} - \int_0^1 \frac{t^{1-x}}{1+t}\ \mathrm{d}t$$

Par ailleurs, puisque $1-x > 0$

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{1-x}}{1+t}\ \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(2)$$

donc

$$g(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}$$

Enfin, on vérifie aisément que g est croissante et positive donc bornée au voisinage de 0. On en déduit que

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}$$

et, comme $f(x) = f(1-x)$,

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$

Solution 34

1. Puisque $\frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x-1 > -1$ i.e. $x > 0$. Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par intégration par parties,

$$f(x) = \frac{1}{x}\left[\frac{t^x}{1+t}\right]_0^1 + \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{t^x}{(1+t)^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{t^x}{(1+t)^2}\ \mathrm{d}t$$

Par ailleurs,

$$\forall t \in [0,1],\ 0 \leq \frac{t^x}{(1+t)^2} \leq t^x$$

donc

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t)^2} \leq \int_0^1 t^x\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}$$

puis

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^x}{(1+t)^2}\,dt = 0$$

On en déduit que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

ou encore

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

3. Remarquons que

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}(1+t-t)}{1+t}\,dt = \int_0^1 t^{x-1}\,dt - \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt = \frac{1}{x} - \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in [0,1]$

$$0 \leq \frac{t^x}{1+t} \leq \frac{1}{1+t}$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(2)$$

En particulier,

$$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt \underset{x\to0^+}{=} \mathcal{O}(1)$$

Ainsi, comme $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x} = +\infty$,

$$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$

Solution 35

1. Soit $p > \alpha$. Par définition de la borne inférieure, il existe $q \in]\alpha, p[$ tel que $f(t)e^{-qt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $f(t)e^{-pt} \underset{t\to0^+}{\sim} f(t)e^{-qt}$ et $f(t)e^{-pt} \underset{t\to+\infty}{=} o\big(f(t)e^{-pt}\big)$, $t \mapsto e^{-pt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, $\mathrm{F}(p)$ est bien définie.

2. On montre d'abord le résultat lorsque $\ell = 0$.

3. Soit $p > 0$. Alors, par le changement de variable $u = pt$,

$$p\mathrm{F}(p) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{p}\right)e^{-u}\,du$$

- Pour tout $p \in]0, +\infty[$, $u \mapsto f\left(\frac{u}{p}\right)e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{p\to+\infty} f\left(\frac{u}{p}\right) = \ell$.