Devoir surveillé n°01 : corrigé

Solution 1

Notons $\mathcal{P}_n$: «$(1+x)^n \geq 1+nx$». $\mathcal{P}_0$ est clairement vraie. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour n certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $(1+x)^n \geq 1+nx$. Or $1+x \geq 0$ donc

$$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

ou encore

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 2

Posons pour $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{P}_n : 1 \leq u_n \leq n^2$$

Initialisation. Puisque $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies.
Hérédité. Supposons que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 &\leq u_n \leq n^2 \\ 1 &\leq u_{n+1} \leq (n+1)^2 \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$1+\frac{2}{n+2} \leq u_{n+2} \leq (n+1)^2+\frac{2n^2}{n+2}$$

En particulier, il est clair que $u_{n+2} \geq 1$. Reste à montrer que

$$(n+1)^2+\frac{2n^2}{n+2} \leq (n+2)^2$$

Calculons donc la différence suivante :

$$\begin{aligned} (n+2)^2-\left[(n+1)^2+\frac{2n^2}{n+2}\right] &= 2n+3-\frac{2n^2}{n+2} \\ &= \frac{(2n+3)(n+2)-2n^2}{n+2} \\ &= \frac{5n+6}{n+2} \geq 0 \end{aligned}$$

On a donc bien montré que

$$(n+1)^2+\frac{2n^2}{n+2} \leq (n+2)^2$$

et par conséquent que

$$u_{n+2} \leq (n+2)^2$$

$\mathcal{P}_{n+2}$ est donc vraie.
Conclusion. Par récurrence double, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution 3

Tout d'abord, $u_0 = 1 = 0!$ et $u_1 = 1 = 1!$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = n!$ et $u_{n+1} = (n+1)!$. Alors

$$u_{n+2} = (n+1)(n!+(n+1)!) = (n+1)(n!+n!(n+1)) = (n+1)n!(n+2) = (n+2)!$$

Par récurrence double, $u_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 4

On raisonne par l'absurde. Supposons que $\sqrt{n^2+1}$ soit un entier. Il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n^2+1} = k$. Ainsi $n^2+1 = k^2$ ou encore $(k-n)(k+n) = 1$. Comme k et n sont deux entiers naturels, on a nécessairement $k-n = k+n = 1$. Notamment

$$2n = (k+n) - (k-n) = 1 - 1 = 0$$

et donc $n = 0$, ce qui contredit l'énoncé. Ainsi $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

Solution 5

1. D'après l'énoncé, $f(0)^2 = f(0)$ donc $f(0) \in \{0, 1\}$. De plus, $f(0)f(1) = f(0) + 1$ donc on ne peut avoir $f(0) = 0$. Ainsi $f(0) = 1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$f(x)f(0) = f(0) + x + 0$$
donc
$$f(x) = x + 1$$
3. Réciproquement, si $f(x) = x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x)f(y) = (x+1)(y+1) = xy + 1 + x + y = f(xy) + x + y$$
On en déduit que l'unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$
est la fonction $x \mapsto x + 1$.

Solution 6

1. Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Remarquons que
$$d_2(x,y) = \left|\frac{y-x}{(x+1)(y+1)}\right| = \frac{|y-x|}{(x+1)(y+1)}$$
Ainsi il est clair que $d_2(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$.
2. Soit $(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3$. Posons
$$\mathrm{X} = \frac{x}{x+1} \qquad \mathrm{Y} = \frac{y}{y+1} \qquad \mathrm{Z} = \frac{z}{z+1}$$
Puisque $\mathrm{X} - \mathrm{Z} = \mathrm{X} - \mathrm{Y} + \mathrm{Y} - \mathrm{Z}$, d'après l'inégalité triangulaire,
$$|\mathrm{X} - \mathrm{Z}| \le |\mathrm{X} - \mathrm{Y}| + |\mathrm{Y} - \mathrm{Z}|$$
c'est-à-dire
$$d_2(x,z) \le d_2(x,y) + d_2(y,z)$$
3. Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. On rappelle que
$$d_2(x,y) = \frac{|y-x|}{(x+1)(y+1)} = \frac{d_1(x,y)}{(1+x)(1+y)}$$
Or $x \ge 0$ et $y \ge 0$ donc $1 + x \ge 1$ et $1 + y \ge 1$. Par conséquent, $(1+x)(1+y) \ge 1$ donc
$$d_2(x,y) \le d_1(x,y)$$
4. Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un tel λ. Notamment, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$d_1(x,0) \le \lambda d_2(x,0)$$
c'est-à-dire
$$x \le \lambda \frac{x}{x+1}$$
Notamment, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$
$$\lambda \ge x + 1$$
ce qui est évidemment absurde. Il n'existe donc pas de réel λ tel que
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ d_1(x,y) \le \lambda d_2(x,y)$$

Solution 7

On raisonne par équivalence.

$$
\begin{aligned}
& (1-\lambda)\sqrt{x}+\lambda\sqrt{y} \leq \sqrt{(1-\lambda)x+\lambda y} \\
\iff & \left[(1-\lambda)\sqrt{x}+\lambda\sqrt{y}\right]^2 \leq (1-\lambda)x+\lambda y \qquad \text{car tous les membres de l'inégalité précédente sont positifs} \\
\iff & (1-\lambda)^2x+\lambda^2y+2(1-\lambda)\lambda\sqrt{x}\sqrt{y} \leq (1-\lambda)x+\lambda y \\
\iff & 0 \leq \left[(1-\lambda)-(1-\lambda)^2\right]x+\left[\lambda-\lambda^2\right]y-2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x}\sqrt{y} \\
\iff & 0 \leq \lambda(1-\lambda)x+\lambda(1-\lambda)y-2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x}\sqrt{y} \\
\iff & 0 \leq \lambda(1-\lambda)\left[x+y-2\sqrt{x}\sqrt{y}\right] \\
\iff & 0 \leq \lambda(1-\lambda)(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2
\end{aligned}
$$

La dernière inégalité est vraie car $\lambda \geq 0$ et $1-\lambda \geq 0$ donc la première l'est également par équivalence.

Solution 8

1.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}\setminus(\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) &= \mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}\cap\mathrm{C}} \\
&= \mathrm{A}\cap(\overline{\mathrm{B}}\cup\overline{\mathrm{C}}) \\
&= (\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})\cup(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{C}}) \qquad \text{par distributivité de l'intersection sur l'union} \\
&= (\mathrm{A}\setminus\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}\setminus\mathrm{C})
\end{aligned}
$$

2. D'une part,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}\setminus(\mathrm{B}\cup\mathrm{C}) &= \mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}\cup\mathrm{C}} \\
&= \mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}\cap\overline{\mathrm{C}}
\end{aligned}
$$

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{A}\setminus\mathrm{B})\cap(\mathrm{A}\setminus\mathrm{C}) &= (\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})\cap(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{C}}) \\
&= (\mathrm{A}\cap\mathrm{A})\cap\overline{\mathrm{B}}\cap\overline{\mathrm{C}} \\
&= \mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}\cap\overline{\mathrm{C}}
\end{aligned}
$$

Ainsi $\mathrm{A}\setminus(\mathrm{B}\cup\mathrm{C}) = (\mathrm{A}\setminus\mathrm{B})\cap(\mathrm{A}\setminus\mathrm{C})$.

3. D'une part,

$$
\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\setminus\mathrm{C}) = \mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{C}}
$$

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\setminus(\mathrm{A}\cap\mathrm{C}) &= \mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{A}\cap\mathrm{C}} \\
&= \mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap(\overline{\mathrm{A}}\cup\overline{\mathrm{C}}) \\
&= (\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{A}})\cup(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{C}}) \qquad \text{par distributivité de l'union sur l'intersectuion} \\
&= \varnothing\cup(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{C}}) \qquad \text{car } \mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{A}}=\varnothing \\
&= \mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{C}}
\end{aligned}
$$

Ainsi $\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\setminus\mathrm{C}) = (\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\setminus(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})$.

4. Si on prend $\mathrm{A}=\mathrm{B}=\mathrm{C}$,

$$
\begin{gathered}
\mathrm{A}\cup(\mathrm{B}\setminus\mathrm{C}) = \mathrm{A}\cup\varnothing = \mathrm{A} \\
(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\setminus(\mathrm{A}\cup\mathrm{C}) = \mathrm{A}\setminus\mathrm{A} = \varnothing
\end{gathered}
$$

Notamment, si A est non vide (ce qui est possible dès que E est non vide), $\mathrm{A}\cup(\mathrm{B}\setminus\mathrm{C}) \neq (\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\setminus(\mathrm{A}\cup\mathrm{C})$.