Révisions d'algèbre linéaire

Applications linéaires

Solution 1

1. Soit $x \in \mathrm{K}_p$. Alors $u^p(x) = 0_\mathrm{E}$ et donc $u^{p+1}(x) = u(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E}$. Donc $x \in \mathrm{K}_{p+1}$. On en déduit que $\mathrm{K}_p \in \mathrm{K}_{p+1}$.
Soit $y \in \mathrm{I}_{p+1}$. Il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = u^{p+1}(x) = u^p(u(x))$. Donc $y \in \mathrm{I}_p$. On en déduit que $\mathrm{I}_{p+1} \in \mathrm{I}_p$.

2. Comme u est injectif, u^p est également injectif pour tout $p \in \mathbb{N}$. Donc $\mathrm{K}_p = \{0\}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, u^p est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie donc également surjectif. On en déduit $\mathrm{I}_p = \mathrm{E}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

3. **a.** Notons $\mathrm{A} = \{p \in \mathbb{N} \mid \mathrm{K}_p = \mathrm{K}_{p+1}\}$. Si on suppose A vide, on a donc $\mathrm{K}_p \subsetneq \mathrm{K}_{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.La suite $(\dim \mathrm{K}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc une suite strictement croissante d'entiers. Mais cette suite est majorée par n. Il y a donc contradiction. A est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$: elle admet un plus petit élément r. De plus, pour $p < r$, on a $\mathrm{K}_p \subsetneq \mathrm{K}_{p+1}$ donc $\dim \mathrm{K}_p + 1 \leq \dim \mathrm{K}_{p+1}$. En additionnant ces inégalités pour k variant de 0 à $r-1$, on obtient : $\dim \mathrm{K}_0 + r \leq \dim \mathrm{K}_r$. Or $\dim \mathrm{K}_0 = 0$ et $\dim \mathrm{K}_r \leq n$ donc $r \leq n$.

   b. Par le théorème du rang on a donc, $\dim \mathrm{I}_r = \dim \mathrm{I}_{r+1}$. Or $\mathrm{I}_r \subset \mathrm{I}_{r+1}$ donc $\mathrm{I}_r = \mathrm{I}_{r+1}$.
   Soit l'hypothèse de récurrence $\mathrm{HR}(p)$: $\mathrm{K}_r = \mathrm{K}_{r+p}$.
   HR(0) est clairement vérifiée. Supposons $\mathrm{HR}(p)$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathrm{K}_{r+p+1}$. Alors $u^{r+p+1}(x) = u^{r+1}(u^p(x)) = 0_\mathrm{E}$. Donc $u^p(x) \in \operatorname{Ker} u^{r+1} = \operatorname{Ker} u^r$. Donc $u^r(u^p(x)) = 0_\mathrm{E}$. D'où $x \in \mathrm{K}_{r+p} = \mathrm{K}_r$ d'après $\mathrm{HR}(p)$.
   Ainsi $\mathrm{HR}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   On a clairement $\mathrm{I}_{r+p} \subset \mathrm{I}_r$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Comme $\mathrm{K}_r = \mathrm{K}_{r+p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, le théorème du rang nous donne : $\dim \mathrm{I}_{r+p} = \dim \mathrm{I}_r$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. On a donc $\mathrm{I}_r = \mathrm{I}_{r+p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

   c. D'après le théorème du rang, on a $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{K}_r + \dim \mathrm{I}_r$. Il nous suffit de prouver que $\mathrm{I}_r \cap \mathrm{K}_r = \{0_\mathrm{E}\}$.
   Soit donc $x \in \mathrm{I}_r \cap \mathrm{K}_r$. On a donc $u^r(x) = 0_\mathrm{E}$ et il existe $y \in \mathrm{E}$ tel que $x = u^r(y)$. On a alors $u^{2r}(y) = 0_\mathrm{E}$. D'où $y \in \mathrm{K}_{2r} = \mathrm{K}_{r+r} = \mathrm{K}_r$ d'après la question **3.b**. Donc $x = u^r(y) = 0_\mathrm{E}$.

4. Considérons et $u : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}' \end{array}\right.$. On a $\mathrm{K}_p = \mathbb{K}_{p-1}[\mathrm{X}]$. La suite (K_p) est donc une suite strictement croissante (pour l'inclusion) d'espaces vectoriels.

Solution 2

1. En utilisant le fait que $p \circ q = q \circ p$, $p^2 = p$ et $q^2 = q$, on a :
$$\begin{aligned}(p\circ q)^2 &= p\circ q\circ p\circ q = p\circ p\circ p\circ q\circ q = p\circ q \\ (p+q-p\circ q)^2 &= (p+q)^2 + (p\circ q)^2 - (p+q)\circ p\circ q - p\circ q\circ(p+q) \\ &= p^2+q^2+p\circ q+q\circ p+p\circ q-p^2\circ q-q\circ p\circ q-p\circ q\circ p-p\circ q^2 = p+q-p\circ q\end{aligned}$$

2. Soit $x \in \operatorname{Ker}(p\circ q)$. On pose $u = x - p(x)$ et $v = p(x)$. On a alors $p(u) = p(x) - p^2(x) = 0$ car $p = p^2$ et $q(v) = q\circ p(x) = p\circ q(x)$ car $x \in \operatorname{Ker} p\circ q$. Donc $x = u + v \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$. Ainsi $\operatorname{Ker}(p\circ q) \subset \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.
Soit $x \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$. Il existe donc $u \in \operatorname{Ker} p$ et $v \in \operatorname{Ker} q$ tels que $x = u + v$. On a alors $p\circ q(x) = p\circ q(u) + p\circ q(v) = q\circ p(u) + p\circ q(v) = 0$ car $u \in \operatorname{Ker} p$ et $v \in \operatorname{Ker} q$. Ainsi $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker}(p\circ q)$.
On a $\operatorname{Im}(p\circ q) \subset \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im}(p\circ q) = \operatorname{Im}(q\circ p) \subset \operatorname{Im} q$ donc $\operatorname{Im}(p\circ q) \subset \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.
Soit $y \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$. Alors $q(y) = y$ car $y \in \operatorname{Im} q$ puis $p\circ q(y) = p(y) = y$ car $y \in \operatorname{Im} p$. Donc $y \in \operatorname{Im} p\circ q$. Ainsi $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im}(p\circ q)$.

3. On a toujours $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker}(p+q-p\circ q)$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(p+q-p\circ q)$. On a donc $p(x)+q(x) = p\circ q(x)$. En composant par p, on obtient $p(x) = 0$. En composant par q, on obtient $q(x) = 0$. Donc $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$. Ainsi $\operatorname{Ker}(p+q-p\circ q) \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.
On a toujours $\operatorname{Im}(p+q-p\circ q) \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. Soit $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. Il existe donc $u \in \operatorname{Im} p$ et $v \operatorname{Im} q$ tels que $x = u + v$. On a alors $p(x) = p(u)+p(v) = u+p(v)$ car $u \in \operatorname{Im} p$, $q(x) = q(u)+q(v) = q(u)+v$ car $v \in \operatorname{Im} q$ et $p\circ q(x) = q\circ p(u)+p\circ q(v) = q(u)+p(v)$ pour les mêmes raisons. Donc $(p+q-p\circ q)(x) = u+v = x$. Donc $x \in \operatorname{Im}(p+q-p\circ q)$. Ainsi $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im}(p+q-p\circ q)$.

Solution 3

On vérifie aisément que $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s^2 = \mathrm{Id}_E$. s est donc une symétrie. De plus, $\mathcal{P} = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ est l'ensemble des applications paires tandis que $\mathcal{I} = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ est l'ensemble $\mathcal{P}$ des applications paires. s est la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ parallélement à $\mathcal{I}$.

Solution 4

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$. On a d'une part :

$$f(\lambda x + \mu y) = \varphi(\lambda x + \mu y)$$

et d'autre part :

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu g(y) = (\lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y))u$$

Comme on a $u \neq 0_E$, on en déduit $\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$. Ainsi u est bien une forme linéaire sur E.
De plus, pour tout $x \in E$,

$$f^2(x) = f(\varphi(x)u) = \varphi(x)f(u) = \varphi(x)\varphi(u)u = \varphi(u)\varphi(x)u = \varphi(u)f(x)$$

Le scalaire λ recherché est donc $g(u)$.

Matrices

Solution 5

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$. On va effectuer les mêmes opérations sur les lignes de A_n et I_n.

On effectue d'abord les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ pour i variant de n à 2. A_n est alors transformée en la matrice triangulaire supérieure où tous les coefficients de la partie triangulaire supérieure sont égaux à 1 et I_n est tranformée en la matrice avec une diagonale de 1, une sous-diagonale de -1 et des 0 ailleurs.
On effectue ensuite les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$ pour i variant de 1 à $n-1$. A est transformée en I_n et I_n est transformée en la matrice B_n formée d'une diagonale de 2, d'une sous-diagonale et d'une sur-diagonale de -1 et de zéros partout ailleurs. Ceci prouve que A_n est inversible d'inverse B_n.

Solution 6

1. Les applications $P \mapsto P(X+a)$ pour $a \in \mathbb{R}$ sont linéaires. Donc f est bien linéaire comme somme d'applications linéaires.
   De plus, $\deg P(X+a) = \deg P$ pour $a \in \mathbb{R}$. Donc $\deg f(P) \leq \max(\deg P(X+1), \deg P(X-1), \deg P) = \deg(P)$.
   Ainsi f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Des calculs élémentaires donnent ;

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 & f(X^2) &= (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2 = 2 \\ f(X) &= (X+2) + X - 2(X+1) = 0 & f(X^3) &= (X+2)^3 + X^3 - 2(X+1)^3 = 6X + 6 \end{aligned}$$

   La matrice de f dans la base canonique est donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il est alors clair que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f = \mathrm{vect}(1, X)$.

3. Posons $P_3 = X^2$, $P_4 = X^3$, $P_1 = f(X^2) = 2$ et $P_2 = f(X^3) = 6X + 6$. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ car c'est une famille de quatre polynômes à degrés échelonnés. P_1 et P_2 appartiennent au noyau de f. Il est alors clair que la matrice de f dans la base (P_1, P_2, P_3, P_4) est de la forme voulue.

Solution 7

---

1. Il est clair que f est bien à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. f est linéaire par linéarité de la trace et bilinéarité du produit matriciel. f est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. f est une symétrie si et seulement si $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Or

$$\begin{aligned} f^2(\mathrm{X}) &= \mathrm{X} + \mathrm{tr}(\mathrm{AX})\mathrm{B} + \mathrm{tr}\left(\mathrm{A}(\mathrm{X} + \mathrm{tr}(\mathrm{AX})\mathrm{B})\right)\mathrm{B} = \mathrm{X} + \mathrm{tr}(\mathrm{AX})\mathrm{B} + \mathrm{tr}\left(\mathrm{AX} + \mathrm{tr}(\mathrm{AX})\mathrm{AB}\right)\mathrm{B} \\ &= \mathrm{X} + (2\,\mathrm{tr}(\mathrm{AX}) + \mathrm{tr}(\mathrm{AX})\,\mathrm{tr}(\mathrm{AB}))\,\mathrm{B} = \mathrm{X} + \mathrm{tr}(\mathrm{AX})(2 + \mathrm{tr}(\mathrm{AB}))\mathrm{B} \end{aligned}$$

Ainsi f est une symétrie si et seulement si $\mathrm{tr}(\mathrm{AX})(2 + \mathrm{tr}(\mathrm{AB}))\mathrm{B} = 0$ pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est réalisée :

- $\mathrm{B} = 0$;
- $\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = -2$;
- $\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(\mathrm{AX}) = 0$ ce qui équivaut à $\mathrm{A} = 0$ (prendre pour X les éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Si $\mathrm{A} = 0$ ou $\mathrm{B} = 0$, alors $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ donc la base de f est $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et sa direction est le sous-espace nul.
Supposons maintenant $\mathrm{A} \neq 0$ et $\mathrm{B} \neq 0$; on a donc $\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = -2$. La base de f est $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})})$. Or

$$\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) \iff \mathrm{tr}(\mathrm{AX})\mathrm{B} = 0 \iff \mathrm{tr}(\mathrm{AX}) = 0 \text{ car } \mathrm{B} \neq 0$$

La direction de f est $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})})$. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})})$. Alors $2\mathrm{X} = \mathrm{tr}(\mathrm{AX})\mathrm{B}$ et donc $\mathrm{X} \in \mathrm{vect}(\mathrm{B})$. Réciproquement soit $\mathrm{X} \in \mathrm{vect}(\mathrm{B})$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{X} = \lambda\mathrm{B}$. Alors $f(\mathrm{X}) = \lambda\mathrm{B} + \lambda\,\mathrm{tr}(\mathrm{AB})\mathrm{B} = -\lambda\mathrm{B} = -\mathrm{X}$ car $\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = -2$. Donc $f(\mathrm{X}) = -\mathrm{X}$.
La base de f est donc le noyau de la forme linéaire $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{AX})$ non nulle car $\mathrm{A} \neq 0$: c'est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La direction de f est $\mathrm{vect}(\mathrm{B})$: c'est une droite vectorielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution 8

Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$. On a donc $\mathrm{AX} = 0$ puis $\mathrm{A}^\top\mathrm{AX} = 0$ donc $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$. Ainsi $\mathrm{Ker}\,\mathrm{A} \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$.
Soit maintenant $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$. On a donc $\mathrm{A}^\top\mathrm{AX} = 0$ puis $\mathrm{X}^\top\mathrm{A}^\top\mathrm{AX} = 0$. Notons $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$. Ainsi $\mathrm{Y}^\top\mathrm{Y} = 0$. Or $\mathrm{Y}^\top\mathrm{Y}$ est la somme des carrés des composantes de Y donc $\mathrm{Y} = 0$ i.e. $\mathrm{AX} = 0$. D'où $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$. Ainsi $\mathrm{Ker}\,\mathrm{A}^\top\mathrm{A} \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$.
Finalement, $\mathrm{Ker}\,\mathrm{A} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$ et $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = \mathrm{rg}\,\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$ via le théorème du rang (A et $\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$ ont le même nombre de colonnes). En changeant A en $\mathrm{A}^\top$, on a également $\mathrm{rg}\,\mathrm{A}^\top = \mathrm{rg}\,\mathrm{AA}^\top$. Or $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = \mathrm{rg}\,\mathrm{A}^\top$. Ainsi $\mathrm{rg}\,\mathrm{A}^\top\mathrm{A} = \mathrm{rg}\,\mathrm{AA}^\top = \mathrm{rg}\,\mathrm{A}$.

Solution 9

Première méthode Le calcul de M^2 donne $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M} + 2\mathrm{I}$ i.e. $\mathrm{M}^2 - \mathrm{M} - 2\mathrm{I} = 0$. Soit R_n le reste de la division euclidienne de X^n par $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 2 = (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-2)$. R_n est de degré 1 donc de la forme $a_n\mathrm{X} + b_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Comme -1 et 2 sont racines de P, on trouve $-a_n + b_n = (-1)^n$ et $2a_n + b_n = 2^n$. Il vient $a_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$ et $b_n = \dfrac{2^n + 2.(-1)^n}{3}$. On a alors $\mathrm{M}^n = a_n\mathrm{M} + b_n\mathrm{I}$.

Deuxième méthode En calculant les premières puissances de M, on est amené à faire l'hypothèse de récurrence suivante :

HR(n) : M^n est de la forme $a_n\mathrm{I} + b_n\mathrm{M}$.

La récurrence est facile et nous donne de plus les relations de récurrence $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Un calcul rapide nous montre que les suites (a_n) et (b_n) vérifient la relation de récurrence $u_{n+2} - u_{n+1} + 2b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme caractéristique associé à cette relation de récurrence est $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 2 = (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-2)$. Ainsi a_n et b_n sont de la forme $\lambda(-1)^n + \mu 2^n$. Comme $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, on trouve λ et μ dans les deux cas puis $a_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$ et $b_n = \dfrac{2^n + 2.(-1)^n}{3}$.

Solution 10

Notons $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3, \mathrm{E}_4$ la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4$ les colonnes de A. On a donc $\mathrm{AE}_i = \mathrm{C}_i$ pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$. On remarque que $\mathrm{C}_3 = 0$ et que $\mathrm{C}_4 = -2\mathrm{C}_1$. Enfin, C_2 et C_1 ne sont pas proportionnelles donc $(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)$ est une base de $\mathrm{Im}\,\mathrm{A}$.
Comme $\mathrm{C}_3 = 0$, on a $\mathrm{E}_3 \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$. Comme $2\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_4 = 0$, $2\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_4 \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$. Ainsi $\mathrm{vect}(\mathrm{E}_3, 2\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_4) \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$. D'après le théorème du rang matriciel, $\dim \mathrm{Ker}\,\mathrm{A} = 2$. Donc $\mathrm{Ker}\,\mathrm{A} = \mathrm{vect}(\mathrm{E}_3, 2\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_4)$ et $(\mathrm{E}_3, 2\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_4)$ est une base de $\mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$.

Solution 11

1. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$. Alors $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1-\lambda_2 = 0 \end{cases}$. On trouve sans peine $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ainsi (e_1, e_2, e_3) est libre. Puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On trouve par pivot de Gauss $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Notons D la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
   Première méthode
   Notons X_1, X_2, X_3 les matrices respectives de e_1, e_2, e_3 dans la base canonique. Un calcul donne $AX_1 = X_1$, $AX_2 = 2X_2$ et $AX_3 = 3X_3$. Ainsi $f(e_1) = e_1$, $f(e_2 = 2e_2$ et $f(e_3) = 3e_3$. On en déduit que $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   Seconde méthode

   La formule de changement de base donne $D = P^{-1}AP$. Un calcul montre que $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $A = PDP^{-1}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. Puisque D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$. On trouve alors

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n - 2^n + 1 & -2^n + 1 & 3^n - 2^{n+1} + 1 \\ -3^n + 1 & 1 & -3^n + 1 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

Solution 12

Remarquons d'abord que si X est une solution, alors $\operatorname{tr}(X) + \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(A) = 0$ i.e. $\operatorname{tr}(X)(\operatorname{tr}(A)+1) = 0$ par linéarité de la trace. On est donc amené à distinguer deux cas.

Cas $\operatorname{tr}(A) \neq -1$ Si X est solution, on a $\operatorname{tr}(X) = 0$ d'après ce qui précède. Mais alors $X = 0$. On vérifie que 0 est bien solution de l'équation.

Cas $\operatorname{tr}(A) = -1$ Si X est solution, alors X est de la forme $X = \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Réciproquement si $X = \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $X + \operatorname{tr}(X)A = \lambda A + \lambda \operatorname{tr}(A)A = 0$ donc X est bien solution.

Récapitulons : si $\operatorname{tr}(A) \neq -1$, la seule solution est la solution nulle ; si $\operatorname{tr}(A) = -1$, l'ensemble des solutions est $\operatorname{vect}(A)$.

Solution 13

Remarquons que

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_p & -A^{-1}B \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & S \end{array}\right)$$

Puisque la matrice $\left(\begin{array}{c|c} I_p & -A^{-1}B \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right)$ est clairement inversible, les matrices M et $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & S \end{array}\right)$ ont même rang. Puisque le rang est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les colonnes d'une matrice,

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & S \end{array}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{c} A \\ \hline C \end{array}\right) + \operatorname{rg}\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline S \end{array}\right)$$

Puisque A est inversible et de taille p, $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A \\ \hline C \end{pmatrix} \geq p$. Mais comme cette matrice possède p colonnes, $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A \\ \hline C \end{pmatrix} \leq p$. Finalement, $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A \\ \hline C \end{pmatrix} = p = \operatorname{rg}(A)$.

Puisque le rang d'une matrice est également la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ses lignes, $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 \\ \hline S \end{pmatrix} = \operatorname{rg}(S)$.

On obtient bien $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(S)$.

Déterminants

Solution 14

---

1. Le déterminant d'une matrice est une somme de produits de coefficients de cette matrice. Comme les coefficients de A et B sont des entiers, $\det A$ et $\det B$ sont également des entiers.
2. On sait que $A \operatorname{com}(A)^\top = (\det A) I_n$ et que $B \operatorname{com}(B)^\top = (\det B) I_n$. Comme $\det A \wedge \det B = 1$, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $u \det A + v \det B = 1$. En posant $U = u \operatorname{com}(A)^\top$ et $V = v \operatorname{com}(B)^\top$, on a donc $AU + BV = I_n$. Les coefficients de $\operatorname{com} A$ et $\operatorname{com} B$ sont, au signe près, des déterminants d'ordre $n-1$ extraits de A et B : ce sont donc des entiers. Ainsi U et V sont à coefficients entiers.

Solution 15

Il y a trois cas.

- Soit $\operatorname{rg}(A) = n$. Alors A est inversible et $\operatorname{com}(A)$ également puisque $\det(A) \neq 0$ et $\left(\frac{1}{\det(A)} A^\top\right) \operatorname{com}(A) = I_n$. Donc $\operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) = n$.
- Soit $\operatorname{rg}(A) < n-1$. Alors toutes les sous-matrices carrées de taille $n-1$ extraites de A sont de déterminant nul. Par conséquent $\operatorname{com}(A) = 0$ et $\operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) = 0$.
- Soit $\operatorname{rg}(A) = n-1$. Alors on peut extraire de A une sous-matrice carrée inversible de taille $n-1$ qui est, au signe près, un cofacteur de A. Ainsi $\operatorname{com}(A) \neq 0$. Puisque $\det(A) = 0$, on a $A^\top \operatorname{com}(A) = \det(A) I_n = 0$. Ainsi $\operatorname{Im}(\operatorname{com}(A)) \subset \operatorname{Ker}(A^\top)$. Puisque $\operatorname{rg}(A^\top) = \operatorname{rg}(A) = n-1$, $\dim \operatorname{Ker}(A^\top) = 1$ via le théorème du rang. Ainsi $\operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) \leq 1$. Puisque $\operatorname{com}(A)$ est non nulle, $\operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) = 1$.

Solution 16

Notons $D_{n,p}$ le déterminant cherché. Suppososons $p \geq 1$. On note $L_0, L_1, \dots, L_p$ les lignes de la matrice et on effectue les opérations :

$$\begin{gathered} L_p \leftarrow L_p - L_{p-1} \\ L_{p-1} \leftarrow L_{p-1} - L_{p-2} \\ \vdots \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_0 \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} D_{n,p} &= \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ 0 & \binom{n}{0} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \binom{n+p-1}{0} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix} \\ &= D_{n,p-1} \end{aligned}$$

en développant par rapport à la première colonne. Par récurrence, $D_{n,p} = D_{n,0} = 1$.

Solution 17

Supposons $n \geq 3$. En développant D_n par rapport à la première ligne, on trouve

$$D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x \begin{vmatrix} x & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

En développant le dernier déterminant par rapport à la première colonne, on aboutit à $D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}$. Le polynôme caractéristique associé à cette relation de récurrence est $X^2 - (1+x^2)X + x^2$ qui a pour discriminant $(1+x^2)^2 - 4x^2 = (1-x^2)^2$. Ses racines sont donc 1 et x^2. On distingue alors deux cas :

Cas $x^2 \neq 1$: Il existe alors $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $D_n = \lambda 1^n + \mu(x^2)^n = \lambda + \mu x^{2n}$. Puisque $D_1 = 1 + x^2$ et $D_2 = (1+x^2)^2 - x^2 = 1 + x^2 + x^4$, on trouve $\lambda = \dfrac{1}{1-x^2}$ et $\mu = \dfrac{x^2}{x^2-1}$. On a donc $D_n = \dfrac{1-x^{2(n+1)}}{1-x^2}$.

Cas $x^2 = 1$: Il existe alors $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $D_n = (\lambda n + \mu)1^n = \lambda n + \mu$. On a $D_1 = 1 + x^2 = 2$ et $D_2 = 1 + x^2 + x^4 = 3$. On trouve $\lambda = 1$ et $\mu = 1$ d'où $D_n = n + 1$.

Remarque. On aurait également pu passer l'expression de D_n pour $x^2 \neq 1$ à la limite quand x tend vers ± 1 puisque D_n est polynomial en x donc continu en x.