Devoir surveillé n°11 : corrigé

Problème 1 — Polynômes de Bernoulli et fonction ζ

1. On trouve

$$B_1 = X - \frac{1}{2} \qquad B_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}$$

On en déduit que

$$b_1 = -\frac{1}{2} \qquad b_2 = \frac{1}{12}$$

2. Soit un entier $n \geqslant 2$.

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(t)\,dt = \int_0^1 B_{n-1}(t)\,dt = 0$$

car $n-1 \in \mathbb{N}^*$.

3. Tout d'abord, $A_0 = (-1)^0 B_0(1-X) = 1$.
Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n' = -(-1)^n B_n'(1-X) = (-1)^{n-1}B_{n-1}(1-X) = A_{n-1}$$

Enfin, via le changement de variable $u = 1-t$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 A_n(t)\,dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t)\,dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(u)\,du = 0$$

Ces trois conditions définissant de manière la suite (B_n), on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = A_n = (-1)^n B_n(1-X)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **.3**

$$B_{2n+1}(1) = (-1)^{2n+1}B_{2n+1}(0) = -B_{2n+1}(0)$$

Or $2n+1 \geqslant 2$ donc d'après la question **.2**, $B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(0)$. On en déduit que

$$B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1) = 0$$

5. La formule de Taylor de Taylor stipule que

$$B_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!}X^k$$

Par une récurrence évidente, $B_n^{(k)} = B_{n-k}$ lorsque $k \leqslant n$. En particulier, $B_n^{(n)} = B_0 = 1$ de sorte que $B_n^{(k)} = 0$ lorsque $k > n$. Ainsi

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_{n-k}(0)}{k!}X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}X^k$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait d'après la question **.5** que

$$B_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{b_{2n+2-k}}{k!}X^k$$

En évaluant cette égalité en 1, on obtient

$$B_{2n+2}(1) = \sum_{k=0}^{2n+2-k} k!$$

Or $2n+2 \geqslant 2$ donc $\mathrm{B}_{2n+2}(1) = \mathrm{B}_{2n+2}(0) = b_{2n+2}$ d'après la question **.2**. Ainsi

$$b_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{b_{2n+2-k}}{k!}$$

En effectuant le changement d'indice $k \mapsto 2n+2-k$, on en déduit que

$$b_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{b_k}{(2n+2-k)!}$$

Supposons maintenant que $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum_{k=0}^{2n+2} \frac{b_k}{(2n+2-k)!} = b_{2n+2} + b_{2n+1} + \sum_{k=0}^{2n} \frac{b_k}{(2n+2-k)!}$$

Or $b_{2n+1} = \mathrm{B}_{2n+1}(0) = 0$ puisque $n \in \mathbb{N}^*$ d'après la question **.4**. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{b_k}{(2n+2-k)!} = 0$$

On sépare alors les termes d'indices pairs et impairs

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{b_{2k}}{(2n+2-2k)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{2k+1}}{(2n+1-2k)!} = 0$$

A nouveau, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $b_{2k+1} = \mathrm{B}_{2k+1}(0) = 0$ donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{2k+1}}{(2n+1-2k)!} = \frac{b_1}{(2n+1)!} = \frac{1}{2(2n+1)!}$$

Finalement,

$$\frac{1}{2(2n+1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{b_{2k}}{(2n+2-2k)!} = 0$$

En isolant le dernier temre de la somme, on obtient

$$\frac{1}{2(2n+1)!} + \frac{b_{2n}}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{b_{2k}}{(2n+2-2k)!} = 0$$

et donc

$$b_{2n} = \frac{1}{(2n+1)!} - 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{2k}}{(2n+2-2k)!}$$

7. La question **.6** donne pour $n=2$

$$b_4 = \frac{1}{5!} - 2\left(\frac{b_0}{6!} + \frac{b_2}{4!}\right) = \frac{1}{120} - \frac{1}{360} - \frac{1}{144} = \frac{6}{720} - \frac{2}{720} - \frac{5}{720} = -\frac{1}{720}$$

8. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Par une intégration par parties,

$$\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(0)}{\lambda} - \frac{f(1)\cos\lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t$$

On a clairement

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{f(0)}{\lambda} = 0$$

De plus,

$$\left|\frac{f(1)\cos\lambda}{\lambda}\right| \leqslant \frac{|f(1)|}{\lambda}$$

et $\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{|f(1)|}{\lambda} = 0$ donc

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{f(1)\cos\lambda}{\lambda} = 0$$

Enfin, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale,

$$\left|\frac{1}{\lambda}\int_0^1 f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^1 |f(t)\cos(\lambda t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Or $\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ donc

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\int_0^1 f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$$

On en déduit finalement que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^1 f(t)\sin(\lambda t) = 0$$

9. Tout d'abord $t \mapsto t(1-t)$ et $t \mapsto \sin(\pi t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ et la seconde fonction ne s'annule pas sur $]0,1[$. Ainsi φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$. Par ailleurs, $t(1-t) \underset{t\to0}{\sim} t$ et $\sin(\pi t) \underset{t\to0}{\sim} \pi t$ donc $\varphi \underset{0}{\sim} \frac{1}{\pi}$ puis $\lim_0 \varphi = \frac{1}{\pi}$.
Ensuite, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\varphi'(t) = \frac{(1-2t)\sin(\pi t) - t(1-t)\pi\cos(\pi t)}{\sin^2(\pi t)}$$

Or

$$\begin{aligned}
(1-2t)\sin(\pi t) &\underset{t\to0}{=} (1-2t)(\pi t + o(t^2)) \underset{t\to0}{=} \pi t(1-t+o(t)) \\
t(1-t)\pi\cos(\pi t) &\underset{t\to0}{=} \pi t(1-t)(1+o(t)) = \pi t(1-t+o(t))
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(1-2t)\sin(\pi t) - t(1-t)\pi\cos(\pi t) \underset{t\to0}{=} o(t^2)$$

De plus, $\sin^2(\pi t) \underset{t\to0}{\sim} \pi^2 t^2$ donc $\varphi' \underset{0}{=} o(1)$ i.e. $\lim_0 \varphi' = 0$.
On remarque ensuite que pour $t \in]0,1[$, $\varphi(1-t) = \varphi(t)$ et donc que $\varphi'(1-t) = -\varphi'(t)$. On en déduit que $\lim_1 \varphi = \lim_0 \varphi = \frac{1}{\pi}$ et que $\lim_1 \varphi' = -\lim_0 \varphi' = 0$.
Puisque φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ et que φ et φ' admettent des limites finies en 0 et 1, φ peut se prolonger en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

10. Soit $t \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}
\sin(t)\sum_{k=1}^{p}\cos(2k\pi t) &= \sum_{k=1}^{p}\sin(\pi t)\cos(2k\pi t) \\
&= \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2}(\sin(2k\pi t+\pi t) - \sin(2k\pi t - \pi t)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\sin((2k+1)\pi t) - \sin((2k-1)\pi t) \\
&= \frac{1}{2}\big(\sin((2p+1)\pi t) - \sin(\pi t)\big)
\end{aligned}$$

Comme $\sin(\pi t) \neq 0$,

$$\sum_{k=1}^{p}\cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2p+1)\pi t)}{2\sin(\pi t)} - \frac{1}{2}$$

11. Puisque $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1) = 0$, les polynômes X et $1-\mathrm{X}$ divisent P. Etant premiers entre eux, leur produit $\mathrm{X}(1-\mathrm{X})$ divise également P. Il existe donc $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P} = \mathrm{X}(1-\mathrm{X})\mathrm{Q}$.
Remarquons également que pour tout $t \in]0,1[$

$$t(1-t)\sum_{k=1}^{p}\cos(2k\pi t) = t(1-t)\left(\frac{\sin((2p+1)\pi t)}{2\sin(\pi t)} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\varphi(t)\sin((2p+1)t) - \frac{1}{2}t(1-t)$$

Mais comme les fonctions $t \mapsto t(1-t)\sum_{k=1}^{p}\cos(2k\pi t)$ et $t \mapsto \frac{1}{2}\varphi(t)\sin((2p+1)t) - \frac{1}{2}t(1-t)$ sont continues sur $[0,1]$, l'égalité est en fait valide pour tout $t \in [0,1]$.
Soit maintenant $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p}\int_0^1 \mathrm{P}(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1\left(\sum_{k=1}^{p}\cos(2k\pi t)\right)t(1-t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\big(\varphi(t)\mathrm{Q}(t)\sin((2p+1)t) - t(1-t)\mathrm{Q}(t)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{Q}(t)\sin((2p+1)t\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or comme $t \mapsto \varphi(t)\mathrm{Q}(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$,

$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^1 \varphi(t)\mathrm{Q}(t)\sin((2p+1)t\,\mathrm{d}t = 0$$

d'après la question **.8**.
On en déduit donc que

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} \int_0^1 \mathrm{P}(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$$

12. On rappelle que $\mathrm{B}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{X}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{X} + \frac{1}{12}$ (question **.1**). On en déduit que

$$\mathrm{I}_{k,1} = \int_0^1 \mathrm{B}_2(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 t^2\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^1 t\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12}\int_0^1 \cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t$$

On calcule successivement à l'aide d'intégrations par parties

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2k\pi}\,[\sin(2k\pi t)]_0^1 \\
&= 0 \\
\int_0^1 t\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2k\pi}\,[t\sin(2k\pi t)]_0^1 - \frac{1}{2k\pi}\int_0^1 \sin(2k\pi t) \\
&= \frac{1}{(2k\pi)^2}\,[\cos(2k\pi t)]_0^1 \\
&= 0 \\
\int_0^1 t^2\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2k\pi}\left[t^2\sin(2k\pi t)\right]_0^1 - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 t\sin(2k\pi t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2(k\pi)^2}\,[t\cos(2k\pi t)]_0^1 - \frac{1}{2(k\pi)^2}\int_0^1 \cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2(k\pi)^2}
\end{aligned}$$

On en déduit finalement que

$$\mathrm{I}_{k,1} = \frac{1}{(2k\pi)^2}$$

13. Soit un entier $n \geqslant 2$. On procède à des intégrations par parties successives.

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{k,n} &= \int_0^1 \mathrm{B}_{2n}(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2k\pi}\,[\mathrm{B}_{2n}(t)\sin(2k\pi t)]_0^1 - \frac{1}{2k\pi}\int_0^1 \mathrm{B}_{2n}'(t)\sin(2k\pi t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2k\pi}\int_0^1 \mathrm{B}_{2n-1}(t)\sin(2k\pi t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(2k\pi)^2}\,[\mathrm{B}_{2n-1}(t)\cos(2k\pi t)]_0^1 - \frac{1}{(2k\pi)^2}\int_0^1 \mathrm{B}_{2n-1}'(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{(2k\pi)^2}\int_0^1 \mathrm{B}_{2n-2}(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } \mathrm{B}_{2n-1}(0) = \mathrm{B}_{2n-1}(1)\ (2n-1 \geqslant 2 \text{ car } n \geqslant 2) \\
&= -\frac{1}{(2k\pi)^2}\mathrm{I}_{k,n-1}
\end{aligned}$$

La suite $(\mathrm{I}_{k,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{(2k\pi)^2}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_{k,n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n-2}}\mathrm{I}_{k,1} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^n}$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $n \geqslant 2$ et $b_{2n} = \mathrm{B}_{2n}(0) = \mathrm{B}_{2n}(1)$ d'après la question **.2**. Le polynôme $\mathrm{B}_{2n} - b_{2n}$ s'annule donc en 0 et 1. La question **.11** montre que

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} \int_0^1 (\mathrm{B}_{2n}(t) - b_{2n})\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^1 (\mathrm{B}_{2n}(t) - b_{2n})\,\mathrm{d}t$$

Or on sait que

$$\int_0^1 B_{2n}(t)\cos(2k\pi t) = I_{k,n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}} \qquad \int_0^1 B_{2n}(t)\,dt = 0$$
$$\int_0^1 b_{2n}\cos(2k\pi t)\,dt = \frac{b_{2n}}{2k\pi}\left[\sin(2k\pi t)\right]_0^1 = 0 \qquad \int_0^1 b_{2n}\,dt = b_{2n}$$

On en déduit que

$$\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}} = \frac{b_{2n}}{2}$$

ou encore que

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}} = \frac{b_{2n}}{2}$$

et enfin que

$$\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}b_{2n}}{2}$$

15. On obtient

$$\zeta(2) = \frac{(2\pi)^2 b_2}{2} = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\zeta(4) = -\frac{(2\pi)^4 b_4}{2} = \frac{\pi^4}{90}$$

Solution 1.

1. En convenant que $A_{n_0-1} = 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k &= \sum_{k=n_0}^{n}(A_k - A_{k-1})B_k\\ &= \sum_{k=n_0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=n_0}^{n} A_{k-1}B_k\\ &= \sum_{k=n_0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=n_0-1}^{n-1} A_k B_{k+1}\\ &= A_n B_n + \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k(B_k - B_{k+1})\\ &= A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k\end{aligned}$$

2. **a.** La série $\sum b_n$, autrement dit la série $\sum B_{n+1} - B_n$, est une série télescopique. Elle est donc de même nature que la suite (B_n), c'est-à-dire convergente.

b. Tout d'abord, (A_n) est bornée donc $A_n B_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(B_n)$. Puisque (B_n) converge vers 0, il en est de même de la suite $(A_n B_n)$.
Ensuite, la suite (B_n) étant décroissante, la série $\sum b_n$ est une série à termes de signe constant. Or $A_n b_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(b_n)$ et la série $\sum b_n$ converge donc la série $\sum A_n b_n$ converge. On en déduit que la suite de ses sommes partielles converge. La suite de terme général $\sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$ converge donc.
D'après la question **1**, la suite de terme général $\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k$ converge donc en tant que somme de deux suites convergentes. Puisque $\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k$ est la somme de partielle de rang n de la série $\sum a_n B_n$, la série $\sum a_n B_n$ converge également.

c. Posons $a_n = (-1)^n$ pour $n \geqslant n_0$. Alors A_n vaut 0, -1 ou 1 suivant la parité de n ou n_0. En particulier, la suite (A_n) est bornée et on peut donc appliquer le résultat de la question précédente. La série $\sum(-1)^n B_n$ converge donc.

3. **a.** Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique.

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ki\theta} = e^{i\theta}\frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1} = e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

b. **Cas $\alpha \leqslant 0$.** La suite de terme général $\frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0. En effet, $\left|\frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}\right| = n^{-\alpha} \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Cas $\alpha > 1$. La série $\sum \frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}$ converge absolument. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge puisque $\alpha > 1$.
Cas $0 < \alpha \leqslant 1$. On utilise les résultats précédents avec $n_0 = 1$, $a_n = e^{in\theta}$ et $B_n = \frac{1}{n}$. D'après la question **3.a**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|A_n| = \left|e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}} \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$$

La suite (A_n) est donc bornée. La suite (B_n) est clairement décroissante de limite nulle. La question **2.b** permet alors d'affirmer que la série $\sum a_n B_n$ i.e. la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$, converge. Cette série ne converge pas absolument puisque $\left|\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$ et que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ne converge pas ($\alpha \leqslant 1$).

4. Rappelons que pour tout $n \geqslant n_0$

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$$

La suite (B_n) converge vers 0 et (A_n) est bornée donc $\lim_{n\to+\infty} A_n B_n = 0$.
Puisque (A_n) est bornée, $A_n b_n = \mathcal{O}(|b_n|)$. Or la série $\sum |b_n|$ converge car $\sum_{n\geqslant n_0} b_n$ est absolument convergente. De plus, la série $\sum |b_n|$ est à termes positifs donc la série $\sum A_n b_n$ converge (absolument). Ainsi la suite de terme général $\sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$ converge.
Il s'ensuit que la suite de terme général $\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k$ converge également i.e. que la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n B_n$ converge.

Solution 2.

1. La famille $(1, i)$ engendre clairement $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Comme i n'est pas réel, $(1, i)$ est libre. Ainsi $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

2. Posons $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\mathcal{F} = \operatorname{vect}(I, J)$. On vérifie aisément que (I, J) est libre. Ainsi (I, J) est une base de $\mathcal{F}$ de sorte que $\dim \mathcal{F} = 2$.

3. Les applications Re et Im sont clairement linéaires si l'on considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La linéarité de Φ s'en déduit immédiatement.
Comme $\dim \mathbb{C} = \dim \mathcal{F} = 2$, il suffit de vérifier l'injectivité de Φ pour prouver que Φ est un isomorphisme. Soit donc $z \in \operatorname{Ker} \Phi$. Ainsi $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$ puis $z = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$ et Φ est injective. Φ est donc bien un isomorphisme.

4. Calcul bête et méchant.

5. Il suffit de raisonner par récurrence sur n. Fixons $z \in \mathbb{C}$. Alors $\Phi(z^0) = \Phi(1) = I = \Phi(z)^0$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Phi(z^n) = \Phi(z)^n$. Alors

$$\begin{aligned}
\Phi(z^{n+1}) &= \Phi(z^n \cdot z) \\
&= \Phi(z^n)\Phi(z) && \text{d'après la question précédente} \\
&= \Phi(z)^n \Phi(z) && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \Phi(z^{n+1})
\end{aligned}$$

On peut donc affirmer que $\Phi(z^n) = \Phi(z)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Il est clair que $\Phi(e^{i\theta}) = R(\theta)$. Ainsi $e^{i\theta} = \Phi^{-1} \circ R(\theta)$.

7. Fixons $\theta \in \mathbb{R}$. D'après les questions précédentes,

$$R(\theta)R(-\theta) = \Phi(e^{i\theta})\Phi(e^{-i\theta}) = \Phi(e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta}) = \Phi(1) = I$$

Ainsi $R(\theta)$ est inversible et $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$.

8. Fixons $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions précédentes,

$$\mathrm{R}(\theta)^n = \Phi(e^{i\theta})^n = \Phi((e^{i\theta})^n) = \Phi(e^{in\theta}) = \mathrm{R}(n\theta)$$

De plus

$$\mathrm{R}(\theta)^{-n} = (\mathrm{R}(\theta)^{-1})^n = \mathrm{R}(-\theta)^n = \mathrm{R}(-n\theta)$$

On peut donc affirmer que $\mathrm{R}(\theta)^n = \mathrm{R}(n\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Solution 3.

1. On trouve évidemment $\mathrm{J}^2 = \mathrm{I}$. On en déduit que $\mathrm{J}^n = \mathrm{I}$ si n est pair et que $\mathrm{J}^n = \mathrm{J}$ si n est impair.

2. On remarque que

$$\mathrm{S}_n + \mathrm{T}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = (a+b)^n$$
$$\mathrm{S}_n - \mathrm{T}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k = (a-b)^n$$

Ainsi

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{2}\left((a+b)^n + (b-a)^n\right)$$
$$\mathrm{T}_n = \frac{1}{2}\left((a+b)^n - (a-b)^n\right)$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $\mathrm{M} = a\mathrm{I} + b\mathrm{J}$. Comme I et J commutent,

$$\mathrm{M}^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \mathrm{J}^k$$

D'après la première question,

$$\mathrm{M}^n = \mathrm{S}_n\mathrm{I} + \mathrm{T}_n\mathrm{J} = \begin{pmatrix} \mathrm{S}_n & \mathrm{T}_n \\ \mathrm{T}_n & \mathrm{S}_n \end{pmatrix}$$