

# DEVOIR SURVEILLÉ N°10

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1

1. a. Puisque  $A$  est la matrice de  $f$  dans une base,  $\det(f) = \det(A)$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \det(f) &= \begin{vmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{vmatrix} \\ &= -u \begin{vmatrix} 0 & 2v \\ -1 & u \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} v & 0 \\ -1 & u \end{vmatrix} \quad \text{en développant par rapport à la première colonne} \\ &= -u \times 2v + 2 \times uv = 0 \end{aligned}$$

- b. Puisque  $\det(A) = 0$ ,  $A$  n'est pas inversible de sorte que  $\text{rg}(A) < 3$ . Mais les deux premières colonnes de  $A$  sont clairement non colinéaires donc  $\text{rg}(A) \geq 2$ . Ainsi  $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = 2$ . De plus,  $\left( \begin{pmatrix} -u \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $\text{Im}(A)$  et donc  $(-u - 2X, v - X^2)$  est une base de  $\text{Im}(f)$ .

On voit que  $\begin{pmatrix} v \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A)$  donc  $v + uX + X^2 \in \text{Ker}(f)$ . Or, d'après le théorème du rang,  $\dim \text{Ker}(f) = 1$  donc  $(v + uX + X^2)$  est une base de  $\text{Ker}(f)$ .

2. a. A nouveau,

$$\begin{aligned}
 \det(g) &= \begin{vmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3w \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= -9 \begin{vmatrix} 1 & w & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 1 & w \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} && \text{en factorisant par 3 la première et la dernière colonne} \\
 &= -9 \begin{vmatrix} 1 & w & 0 & 0 \\ 0 & -1-w & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 1 & w \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
 &= 9 \begin{vmatrix} 1+w & 2w & 0 \\ 2 & 1 & w \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 9 \left( (1+w) \begin{vmatrix} 1 & w \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2w & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) && \text{en développant par rapport à la première colonne} \\
 &= 9((w+1)^2 - 4w) = 9(w-1)^2
 \end{aligned}$$

Avec les notations de l'énoncé, on a donc  $w_0 = 1$ .

b. Supposons donc  $w = 1$ . Alors

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Puisque  $\det(B) = 0$ ,  $\text{rg}(B) < 4$ . Les trois premières colonnes de B sont clairement linéairement indépendantes

donc  $\text{rg}(B) \geq 3$ . Ainsi  $\text{rg}(g) = \text{rg}(B) = 3$  puis  $\dim \text{Ker}(g) = 1$ . On remarque que  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A)$  donc  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

est une base de  $\text{Ker}(A)$ . Par conséquent,  $(X^3 + 3X^2 + 3X + 1)$  i.e.  $((X+1)^3)$  est une base de  $\text{Ker}(g)$ .

3.  $\varphi$  est clairement linéaire.

Comme  $\deg(Q) = 2$  et  $Q$  est unitaire, il existe  $(u, v) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $Q = X^2 + uX + v$ . Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Alors

$$\varphi(X^k) = 2kX^{k-1}(X^2 + uX + v) - nX^k(2X + u) = 2(k-n)X^{k+1} + u(2k-n)X^k + 2vkX^{k-1}$$

Ainsi pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\deg(\varphi(X^k)) = k+1 \leq n$  et  $\deg(\varphi(X^n)) \leq n$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\varphi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$ . Comme  $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $\varphi$  par linéarité de  $\varphi$ .

Finalement,  $\varphi$  est bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

4. a. D'après la question précédente,

$$\varphi(1) = -2u - 4X \quad \varphi(X) = 2v - 2X^2 \quad \varphi(X^2) = 4vX + 2uX^2$$

La matrice de  $\varphi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  est donc  $2A$ .

b. D'après la question ,

$$\text{Ker}(\varphi) = \text{vect}(X^2 + uX + v) = \text{vect}(Q)$$

5. a. On calcule à nouveau

$$\varphi(1) = -6 - 6X \quad \varphi(X) = 2w - 2X - 4X^2 \quad \varphi(X^2) = 4wX + 2X^2 - 2X^3 \quad \varphi(X^3) = 6wX^2 + 6X^3$$

La matrice de  $\varphi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$  est donc  $2B$ .

- b. Si  $w = 1$ , d'après la question,  $\text{Ker}(\varphi) = \text{vect}((X+1)^3)$ .  
Si  $w \neq 1$ ,  $\det(B) = 9(w-1)^2 \neq 0$  donc  $\varphi$  est bijectif et  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ .

6. On a donc  $Q = (X - \alpha)^2$ .

- a. La famille  $((X - \alpha)^k)_{0 \leq k \leq n}$  est une famille libre de  $\mathbb{R}_n[X]$  car à degrés échelonnés. De plus,  $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$  donc c'est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .  
b. Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$\varphi((X - \alpha)^k) = 2k(X - \alpha)^{k-1}(X - \alpha)^2 - 2n(X - \alpha)^k(X - \alpha) = 2(k - n)(X - \alpha)^{k+1}$$

On en déduit que

$$\text{Im}(\varphi) = \text{vect}((X - \alpha)^{k+1})_{0 \leq k \leq n-1} = \text{vect}((X - \alpha)^k)_{1 \leq k \leq n}$$

Notamment,  $\text{rg}(\varphi) = n$  et  $\dim \text{Ker}(\varphi) = 1$ . Comme  $(X - \alpha)^n \in \text{Ker}(\varphi)$ ,

$$\text{Ker}(\varphi) = \text{vect}((X - \alpha)^n)$$

7. Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Comme indiqué dans l'énoncé

$$\left(\frac{P^2}{Q^n}\right)' = \frac{2P'PQ^n - nP^2Q'Q^{n-1}}{Q^{2n}} = \frac{P\varphi(P)}{Q^{n+1}}$$

Ainsi  $P \in \text{Ker}(\varphi)$  si et seulement si  $\left(\frac{P^2}{Q}\right)' = 0$ , autrement dit si et seulement si  $\frac{P^2}{Q}$  est constante i.e.  $P^2$  et  $Q^n$  sont colinéaires.

8. Supposons d'abord que  $Q$  n'admet aucune racine réelle.  $Q$  est donc irréductible. Supposons que  $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$ . Soit  $P$  un polynôme non nul de  $\text{Ker}(\varphi)$ . Alors, d'après la question 7, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tel que  $P^2 = \lambda Q^n$ . Si  $D$  est un diviseur irréductible unitaire de  $P$ , alors  $D$  divise  $P^2 = \lambda Q^n$  et donc  $Q$ . Ainsi  $D = Q$  car  $Q$  est irréductible et unitaire.  $Q$  est donc le seul diviseur irréductible unitaire de  $P$ . Il existe donc  $\mu \in \mathbb{R}^*$  et  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $P = \mu Q^k$ . Mais alors  $\mu^2 Q^{2k} = P^2 = \lambda Q^n$  puis  $n = 2k$  par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles. Notamment  $n$  est pair et  $\text{Ker}(\varphi) \subset \text{vect}(Q^k)$ . On vérifie aisément que  $Q^k \in \text{Ker}(\varphi)$  donc  $\text{Ker}(\varphi) = \text{vect}(Q^k)$ . On a également montré que si  $n$  est impair, alors  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ .

Supposons maintenant que  $Q$  possède deux racines distinctes  $\alpha$  et  $\beta$  i.e.  $Q = (X - \alpha)(X - \beta)$ . On suppose à nouveau que  $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$  et on se donne un polynôme non nul  $P$  de  $\text{Ker}(\varphi)$ . On peut alors affirmer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tel que  $P^2 = \lambda(X - \alpha)^n(X - \beta)^n$ . On prouve comme précédemment que  $X - \alpha$  et  $X - \beta$  sont les seuls diviseurs irréductibles unitaires de  $P$ . Il existe donc  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  et  $\mu \in \mathbb{R}^*$  tel que  $P = \mu(X - \alpha)^p(X - \beta)^q$ . Par conséquent,  $\mu^2(X - \alpha)^{2p}(X - \beta)^{2q} = P^2 = \lambda(X - \alpha)^n(X - \beta)^n$ . Par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles,  $n = 2p = 2q$ . Notamment  $n$  est pair et  $\text{Ker}(\varphi) = \text{vect}(Q^{n/2})$  comme précédemment. A nouveau,  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$  si  $n$  est impair.

**Solution 1**

1. Posons  $u_n = H_n - \ln(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(n-1) - \ln(n) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(1/n^2)$$

car  $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + \mathcal{O}(x^2)$ . Comme  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge, la série télescopique  $\sum u_n - u_{n-1}$  converge et donc la suite  $(u_n)$  converge.

2. Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} S_{2N} &= \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \quad \text{en séparant termes d'indices pairs et impairs} \\ &= \frac{1}{2} H_N - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \\ &= H_N - \frac{1}{2} H_N - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \\ &= H_N - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \\ &= H_N - \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} \quad \text{en regroupant termes d'indices pairs et impairs} \\ &= H_N - H_{2N} \end{aligned}$$

3. Remarquons que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$S_{3N+3} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{3n+1} &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \frac{1}{3n+2} &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \frac{1}{3n+3} &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

donc  $\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3}$  diverge donc puisque la série à termes positifs  $\sum \frac{1}{n}$  diverge. La suite  $(S_{3n+3})$  diverge donc de même que la suite  $(S_n)$  puisqu'elle en est extraite. Par conséquent, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon_n}{n}$  diverge.

4. D'après la question 1,

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

donc

$$H_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \ln(2) + \gamma + o(1)$$

Finalement,

$$S_{2n} = H_n - H_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\ln(2) + o(1)$$

Donc  $(S_{2n})$  converge vers  $-\ln 2$ . Par ailleurs,  $S_{2n+1} = S_{2n} - \frac{1}{2n+1}$  donc  $(S_{2n+1})$  converge également vers  $-\ln 2$ .

Finalement,  $(S_n)$  converge vers  $-\ln 2$  i.e. la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon_n}{n}$  converge et sa somme vaut  $-\ln 2$ .

5. Remarquons que de manière général,  $\frac{1}{n+1} = \int_0^1 x^n dx$ .

a. En particulier,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^N \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} &= \sum_{n=0}^N \int_0^1 (x^{4n} - x^{4n+2}) \, dx \\
 &= \int_0^1 (1-x^2) \sum_{n=0}^N x^{4n} \, dx \\
 &= \int_0^1 (1-x^2) \cdot \frac{1-x^{4N+4}}{1-x^4} \, dx \quad (\text{somme de termes consécutifs d'une suite géométrique}) \\
 &= \int_0^1 \frac{1-x^{4N+4}}{1+x^2} \, dx \quad \text{car } 1-x^4 = (1-x^2)(1+x^2)
 \end{aligned}$$

b. Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^1 \frac{1-x^{4N+4}}{1+x^2} \, dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{x^{4N+4}}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^{4N+4}}{1+x^2} \, dx$$

De plus, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$0 \leq \frac{x^{4N+4}}{1+x^2} \leq x^{4N+4}$$

donc

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{4N+4}}{1+x^2} \, dx \leq \int_0^1 x^{4N+4} \, dx = \frac{1}{4N+5}$$

On en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{4N+4}}{1+x^2} \, dx = 0$$

puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} = \frac{\pi}{4}$$

c. On procède de la même manière.

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^N \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} &= \sum_{n=0}^N \int_0^1 (x^{4n+1} - x^{4n+3}) \, dx \\
 &= \int_0^1 x(1-x^2) \sum_{n=0}^N x^{4n} \, dx \\
 &= \int_0^1 x(1-x^2) \cdot \frac{1-x^{4N+4}}{1-x^4} \, dx \quad (\text{somme de termes consécutifs d'une suite géométrique}) \\
 &= \int_0^1 \frac{x(1-x^{4N+4})}{1+x^2} \, dx \quad \text{car } 1-x^4 = (1-x^2)(1+x^2)
 \end{aligned}$$

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^{4N+4})}{1+x^2} \, dx = \int_0^1 \frac{x \, dx}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{x^{4N+5}}{1+x^2} \, dx$$

D'une part,

$$\int_0^1 \frac{x \, dx}{1+x^2} = \left[ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

D'autre part, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$0 \leq \frac{x^{4N+5}}{1+x^2} \leq x^{4N+5}$$

donc

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{4N+5}}{1+x^2} \, dx \leq \int_0^1 x^{4N+5} \, dx = \frac{1}{4N+6}$$

On en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{4N+5}}{1+x^2} \, dx = 0$$

puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} = \frac{1}{2} \ln 2$$

d. Puisque, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$S_{4N+4} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4}$$

la suite  $(S_{4n})$  converge vers  $S = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$ . Comme

$$S_{4n+1} = S_{4n} + \frac{1}{4n+1} S_{4n+2} = S_{4n} + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+2} S_{4n+3} = S_{4n} + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+3}$$

les suites  $(S_{4n})$ ,  $(S_{4n+1})$ ,  $(S_{4n+2})$ ,  $(S_{4n+3})$  convergent toutes vers  $S$ .

En conclusion,  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon_n}{n}$  converge et sa somme est  $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$ .

6. a. Tout d'abord,

$$\int_0^1 \frac{1+x+x^2}{1+x^3} dx = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^3} dx + \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx$$

D'une part,

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx = \left[ \frac{1}{3} \ln(1+x^3) \right]_0^1 = \frac{1}{3} \ln 2$$

D'autre part, comme  $1+x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^3} dx &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{car arctan est impaire} \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^1 \frac{1+x+x^2}{1+x^3} dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln 2$$

**b.** En raisonnant comme précédemment

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^N \frac{1}{6n+1} - \frac{1}{6n+4} &= \int_0^1 (1-x^3) \frac{1-x^{6N+6}}{1-x^6} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1-x^{6N+6}}{1+x^3} dx \\
 &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} \\
 \sum_{n=0}^N \frac{1}{6n+2} - \frac{1}{6n+5} &= \int_0^1 x(1-x^3) \frac{1-x^{6N+6}}{1-x^6} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x(1-x^{6N+6})}{1+x^3} dx \\
 &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^3} \\
 \sum_{n=0}^N \frac{1}{6n+3} - \frac{1}{6n+6} &= \int_0^1 x^2(1-x^3) \frac{1-x^{6N+6}}{1-x^6} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^2(1-x^{6N+6})}{1+x^3} dx \\
 &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^3}
 \end{aligned}$$

En sommant les relations précédentes, on en déduit que  $(S_{6n+6})$  converge vers  $\int_0^1 \frac{1+x+x^2}{1+x^3} dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln 2$  de même que  $(S_{6n})$ . Comme précédemment, on montre que  $(S_{6n})$ ,  $(S_{6n+1})$ ,  $(S_{6n+2})$ ,  $(S_{6n+3})$ ,  $(S_{6n+4})$ ,  $(S_{6n+5})$  convergent toutes vers cette limite donc  $(S_n)$  également.

En conclusion,  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon_n}{n}$  converge et sa somme est  $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln 2$ .