Semaine du 12/11 au 16/11

1 Cours

Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle, puissances, logarithme Étude générale de ces trois types de fonctions, propriétés algébriques, croissances comparées des fonctions exponentielle, puissances et logarithme.

Fonctions trigonométriques Rappel sur les fonctions trigonométriques. Les formules usuelles de trigonométrie (addition, duplication, factorisation) sont à connaître.

Fonctions trigonométriques réciproques Définition de arcsin, arccos et arctan. Ensembles de départ et d'arrivée. Dérivées. Étude des fonctions. Formules usuelles.

Fonctions hyperboliques Définition et étude de ch, sh et th (les fonctions hyperboliques réciproques ne sont pas au programme).

Primitives et intégrales

Primitives Définition. Théorème fondamental de l'analyse. Application au calcul d'intégral.

Intégrales Linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles, inégalité triangulaire. Une intégrale d'une fonction continue de signe constant est nulle **si et seulement si** cette fonction est nulle.

Méthodes de calcul Intégration par parties. Changement de variable.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour étudier une expression du type $f(x)^{g(x)}$, mettre cette expression sous forme exponentielle $\exp\big(g(x)\ln(f(x))\big)$.
- Savoir utiliser les croissances comparées.
- Connaître les intervalles de validité des identités du type $\arcsin(\sin x) = x$ ou $\sin(\arcsin x) = x$.
- Savoir utiliser l'injectivité des fonctions usuelles sur des intervalles adéquats.
- Savoir établir des identités par dérivation.
- Connaître les graphes de arcsin, arccos, arctan, sh, ch, th pour retrouver parité, dérivées, ensembles de définition, images, ...
- Justifier la dérivabilité et dériver une fonction du type $x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\, dt$.
- Passer éventuellement en complexes pour le calcul d'intégrales et de primitives faisant intervenir les fonctions sin et cos.
- Étudier des suites d'intégrale (sens de variation, limite).
- Faire attention à l'ordre des bornes lorsque l'on parle de positivité ou de croissance de l'intégrale.
- Intégrer par parties.
- Changement de variables.
- Employer les techniques de calcul d'intégrales pour le calcul de primitives.

3 Questions de cours

- Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ telle que $\int_a^b f(t)\,dt = 0$. Montrer que f est nulle sur $[a, b]$.
- Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n e^x}{n!}\,dx$. Déterminer une relation de récurrence liant I_n et I_{n+1}. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$.
- Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$. Déterminer une relation de récurrence liant I_n et I_{n+1}. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$.
- Calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ à l'aide du changement de variable $x = \cos\theta$ ou $x = \sin\theta$.
- Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Déterminer $\lim_{x\to a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)\,dt$.