Calcul différentiel

Dans tout ce chapitre,

- E, F, G, H désignent des $\mathbb{R}$**-espaces vectoriels de dimensions finies** ;
- $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ désignent des **ouverts** respectifs de E et F.

1 Différentiabilité

1.1 Dérivabilité selon un vecteur

Définition 1.1 Dérivée selon un vecteur

Soient $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$, $a \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathrm{E}$. On dit que f est **dérivable en a selon le vecteur** v si l'application $\varphi_{a,v} : t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0. Dans ce cas, on appelle **dérivée de f en a selon le vecteur** v le vecteur $\varphi'_{a,v}(0)$, que l'on note $\mathrm{D}_v f(a)$.

Remarque. Si on note $(f_1, \dots, f_n)$ les coordonnées de $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ dans une base $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ de F (i.e. $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ g$), alors f est dérivable en a selon le vecteur v si et seulement si les f_i le sont. De plus,

$$\mathrm{D}_v f(a) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_v f_i(a) \mathbf{f}_i$$

Exemple 1.1

L'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, 2xy)$ est dérivable en tout point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ selon tout vecteur $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et

$$\mathrm{D}_{(u,v)} f(a, b) = 2(au + bv, av + bu)$$

Définition 1.2 Dérivées partielles dans une base

Soient $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ une base de E, $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ et $a \in \mathcal{U}$. On appelle **dérivées partielles** de f dans la base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ les applications $\mathrm{D}_{\mathbf{e}_j} f$ **si elles sont définies**. On les note $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ou $\partial_j f$.

Remarque. Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}^p$ et qu'on ne précise pas la base dans laquelle on considère les dérivées partielles, c'est qu'on considère implicitement la **base canonique** de $\mathbb{R}^p$.

Remarque. Si on note $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ les coordonnées de $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ dans une base $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ de F (i.e. $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ g$), alors g admet des dérivées partielles en a dans la base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ si et seulement si c'est également le cas pour les f_i. De plus,

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ \partial_j f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_j f_i(a) \mathbf{f}_i$$

Remarque. Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, les variables d'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{F}$ sont notées plus volontiers x et y que x_1 et x_2. Les dérivées partielles dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ seront alors notées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ plutôt que $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ ou $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$.

De même, si $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, les dérivées partielles dans la base canonique seront plutôt notées $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Méthode **Calculer des dérivées partielles**

Lorsque $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^n$, il est très aisé de calculer des dérivées partielles dans la base canonique. Il suffit de dériver chaque composante de la fonction par rapport à une variable les autres étant fixées.
Autrement dit, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ est la dérivée de l'application $x_j \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$.

Exemple 1.2

L'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, 2xy)$ admet des dérivées partielles dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ en tout point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 2(a, b) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 2(b, a)$$

Exemple 1.3

On pose $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y^2 > 0\}$. L'application $f : (x, y, z) \in \mathcal{U} \mapsto (\ln(x + y^2), e^{xz})$ admet des dérivées partielles sur $\mathcal{U}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \left(\frac{1}{x + y^2}, ze^{xz}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \left(\frac{2y}{x + y^2}, 0\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (0, xe^{xz})$$

Exemple 1.4

Les applications $\pi_i : (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mapsto x_i$ admettent des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^p$ et

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_p) = \delta_{i,j}$$

Attention ! Une fonction peut admettre des dérivées partielles sans être continue.

Exemple 1.5

Considérons la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

- Par opérations, f admet clairement des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$$

  donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

- Par contre, f n'est pas continue en $(0, 0)$ puisque, par exemple,

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ f(t, t) = \frac{1}{2}$$

  Ainsi $(t, t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} (0, 0)$ mais $f(t, t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} \neq f(0, 0)$.

ATTENTION ! Une fonction peut même admettre des dérivées directionnelles selon tout vecteur sans être continue.

Exemple 1.6

Considérons la fonction

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas continue en $(0,0)$.

- Par opérations, f admet clairement des dérivées directionnelles selon tout vecteur en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Soit $u = (h,k)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \ \frac{f(tu)-f(0,0)}{t} = \frac{hk^2}{h^2+t^2k^4} \xrightarrow[t\to 0]{} \begin{cases} \dfrac{k^2}{h} & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

  Donc f admet bien une dérivée directionnelle selon le vecteur u en $(0,0)$.

- Par contre, f n'est pas continue en $(0,0)$ puisque, par exemple,

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \ f(t^2,t) = \frac{1}{2}$$

  Ainsi $(t^2,t) \xrightarrow[t\to 0]{} (0,0)$ mais $f(t^2,t) \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2} \neq f(0,0)$.

1.2 Différentiabilité

Notation 1.1 Négligeabilité

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. On suppose que $0_\mathrm{E} \in \mathcal{U}$. Ecrire que $f(h) \underset{h\to 0_\mathrm{E}}{=} o(h)$ signifie que $\lim\limits_{h\to 0_\mathrm{E}} \dfrac{f(h)}{\|h\|} = 0_\mathrm{F}$.

REMARQUE. Les normes que l'on choisit sur E et F n'importent pas car toutes les normes sur un espace de dimension finie sont équivalentes.

Définition 1.3 Développement limité à l'ordre 1

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. Une écriture du type

$$f(a+h) \underset{h\to 0_\mathrm{E}}{=} c + \mathrm{L}(h) + o(h)$$

avec $c \in \mathrm{F}$ et $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ s'appelle un **développement limité** de f à l'ordre 1 en a. Si un tel développement limité existe, il est unique i.e. le vecteur c et l'application linéaire L sont uniques.

REMARQUE. Ceci signifie que

$$\lim_{h\to 0_\mathrm{E}} \frac{f(a+h)-c-\mathrm{L}(h)}{\|h\|} = 0_\mathrm{F}$$

Définition 1.4 Différentiabilité en un point

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. On dit que f est **différentiable** en $a \in \mathcal{U}$ si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas, il existe une unique application linéaire $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ telle que

$$f(a+h) \underset{h \to 0_{\mathrm{E}}}{=} f(a) + \mathrm{L}(h) + o(h)$$

Cette application linéaire s'appelle la **différentielle** de f en a et se note $\mathrm{d}f(a)$.

Remarque. La différentielle de f en a est également appelée l'**application linéaire tangente** à f en a.

Remarque. Par souci de lisibilité, l'image d'un vecteur v par la différentielle de f en a se notera $\mathrm{d}f(a) \cdot v$ plutôt que $\mathrm{d}f(a)(v)$.

Remarque. Si on note $(f_1, \dots, f_n)$ les coordonnées de $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ dans une base $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ de F (i.e. $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ g$), alors f différentiable en a si et seulement si les f_i le sont. De plus,

$$\forall v \in \mathrm{E},\ \mathrm{d}f(a) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{d}f_i(a) \cdot v) \mathbf{f}_i$$

Exemple 1.7

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, 2xy)$ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2,\ f((a, b) + (h, k)) = f(a, b) + 2(ah + bk, bh + ak) + (h^2 + k^2, 2hk)$$

L'application

$$\mathrm{L} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (h, k) & \longmapsto & 2(ah + bk, bh + ak) \end{array} \right.$$

est bien linéaire et

$$(h^2 + k^2, 2hk) \underset{(h,k) \to (0,0)}{=} o((h, k))$$

En effet, si l'on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme définie par $\|(u, v)\| = |u| + |v|$

$$\|(h^2 + k^2, 2hk)\| = (|h| + |k|)^2 = \|(h, k)\|^2$$

de sorte que

$$\frac{\|(h^2 + k^2, 2hk)\|}{\|(h, k)\|} = \|(h, k)\| \underset{(h,k) \to (0,0)}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que f est différentiable en (a, b) et que $\mathrm{d}f(a, b)$ est l'endomorphisme $(h, k) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 2(ah + bk, bh + ak)$.

Exemple 1.8 Différentielle de l'inversion matricielle

On considère l'application $f : \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^{-1}$. On va montrer que f est différentiable sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle.
Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 tel que $\mathrm{M}+\mathrm{H}$ est inversible pour tout $\mathrm{H} \in \mathcal{V}$. Remarquons maintenant que

$$f(\mathrm{M}+\mathrm{H}) - f(\mathrm{M}) = (\mathrm{M}+\mathrm{H})^{-1} - \mathrm{M}^{-1} = (\mathrm{M}+\mathrm{H})^{-1}(\mathrm{I}_n - (\mathrm{M}+\mathrm{H})\mathrm{M}^{-1}) = -(\mathrm{M}+\mathrm{H})^{-1}\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1}$$

puis

$$\begin{aligned} f(\mathrm{M}+\mathrm{H}) - f(\mathrm{M}) + \mathrm{M}^{-1}\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1} &= \mathrm{M}^{-1}\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1} - (\mathrm{M}+\mathrm{H})^{-1}\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1} \\ &= (\mathrm{M}+\mathrm{H})^{-1}((\mathrm{M}+\mathrm{H})\mathrm{M}^{-1} - \mathrm{I}_n)\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1} \\ &= f(\mathrm{M}+\mathrm{H})(\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1})^2 \end{aligned}$$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$ de sorte que

$$\|f(\mathrm{M}+\mathrm{H})(\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1})^2\| \leq \|f(\mathrm{M}+\mathrm{H})\|\|\mathrm{M}^{-1}\|^2\|\mathrm{H}\|^2$$

puis pour $\mathrm{H} \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$,

$$\frac{\|f(\mathrm{M}+\mathrm{H})(\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1})^2\|}{\|\mathrm{H}\|} \leq \|f(\mathrm{M}+\mathrm{H})\|\|\mathrm{M}^{-1}\|^2\|\mathrm{H}\|$$

A l'aide de la formule de la comatrice, on montre que f est continue sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ donc $\lim\limits_{\mathrm{H}\to 0} f(\mathrm{M}+\mathrm{H}) = f(\mathrm{M})$ puis $\lim\limits_{\mathrm{H}\to 0} \|f(\mathrm{M}+\mathrm{H})\| = \|f(\mathrm{M})\|$. On en déduit que

$$\lim_{\mathrm{H}\to 0} \frac{\|f(\mathrm{M}+\mathrm{H})(\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1})^2\|}{\|\mathrm{H}\|} = 0$$

ou encore

$$f(\mathrm{M}+\mathrm{H})(\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1})^2 \underset{\mathrm{H}\to 0}{=} o(\mathrm{H})$$

Finalement,

$$f(\mathrm{M}+\mathrm{H}) \underset{\mathrm{H}\to 0}{=} f(\mathrm{M}) - \mathrm{M}^{-1}\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1} + o(\mathrm{H})$$

L'application $\mathrm{H} \mapsto -\mathrm{M}^{-1}\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1}$ est clairement linéaire : f est donc différentiable en M et $\mathrm{d}f(\mathrm{M})$ est l'application $\mathrm{H} \mapsto -\mathrm{M}^{-1}\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1}$.

Proposition 1.1

Si $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ est **différentiable** en $a \in \mathcal{U}$, alors

- f est **continue** en a ;
- f admet des dérivées en a selon tout vecteur $v \in \mathrm{E}$;
- $\forall v \in \mathrm{E},\ \mathrm{d}f(a)\cdot v = \mathrm{D}_v f(a)$.

Méthode **Calcul de la différentielle**

Si on sait **a priori** qu'une application f est différentiable, on peut calculer sa différentielle à l'aide de ses dérivées directionnelles. En effet, $\mathrm{d}f(a)\cdot h = \varphi'_{a,h}(0)$ avec $\varphi_{a,h} : t \mapsto f(a+th)$.

Exemple 1.9 Différentielle de l'inversion matricielle

On anticipe un peu sur la suite du chapitre pour montrer que $f : \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^{-1}$ est différentiable sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. D'après la formule de la comatrice, $\mathrm{M}^{-1} = \dfrac{\mathrm{com}(\mathrm{M})^{\mathsf{T}}}{\det(\mathrm{M})}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Or le déterminant et les coefficients de la comatrice sont polynomiaux en les coefficients de M donc $\mathrm{M} \mapsto \det(\mathrm{M})$ et $\mathrm{com}(\mathrm{M})^{\mathsf{T}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme det ne s'annule pas sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et a fortiori différentiable sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Fixons alors $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert, $\varphi_{\mathrm{M},\mathrm{H}} : t \in \mathbb{R} \mapsto (\mathrm{M} + t\mathrm{H})^{-1}$ est définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de 0. Posons également, $\psi_{\mathrm{M},\mathrm{H}} : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{M} + t\mathrm{H}$ de sorte que

$$\forall t \in \mathcal{V},\ \psi_{\mathrm{M},\mathrm{H}}(t)\varphi_{\mathrm{M},\mathrm{H}}(t) = \mathrm{I}_n$$

Comme f est différentiable en M, $\varphi_{\mathrm{M},\mathrm{H}}$ est dérivable en 0. L'application affine $\psi_{\mathrm{M},\mathrm{H}}$ l'est également. On en déduit que

$$\psi'_{\mathrm{M},\mathrm{H}}(0)\varphi_{\mathrm{M},\mathrm{H}}(0) + \psi_{\mathrm{M},\mathrm{H}}(0)\varphi'_{\mathrm{M},\mathrm{H}}(0) = \mathrm{I}_n$$

ou encore

$$\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1} + \mathrm{M}\left(\mathrm{d}f(\mathrm{M}) \cdot \mathrm{H}\right) = 0$$

Par conséquent, $\mathrm{d}f(\mathrm{M}) \cdot \mathrm{H} = -\mathrm{M}^{-1}\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1}$.

Définition 1.5 Différentiabilité sur un ouvert

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. On dit que f est **différentiable** sur $\mathcal{U}$ si f est diiférentiable en tout point de $\mathcal{U}$. L'application

$$\mathrm{d}f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \\ a & \longmapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}\right.$$

s'appelle la **différentielle** de f sur $\mathcal{U}$.

Proposition 1.2 Cas particuliers

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$.

- Si f est **constante** sur $\mathcal{U}$, alors f est différentiable sur $\mathcal{U}$ et $\mathrm{d}f$ est **nulle** sur $\mathcal{U}$.
- Si f est la restriction à $\mathcal{U}$ d'une **application linéaire** de E dans F, alors f est différentiable sur $\mathcal{U}$ et $\mathrm{d}f = f$.
- Si $\mathcal{U}$ est un intervalle ouvert de $\mathrm{E} = \mathbb{R}$, alors f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ si et seulement si f est dérivable en a et, dans ce cas, $f'(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot 1$.

Exemple 1.10

Les applications $\pi_i : (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mapsto x_i$ sont différentiables sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathrm{d}\pi_i = \pi_i$.

1.3 Lien avec les dérivées partielles

Proposition 1.3 Lien entre différentielle et dérivées partielles

Soient $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ une base de E et $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. Si f est **différentiable** en a, alors f admet des **dérivées partielles** en a dans la base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ et

$$\forall v \in \mathrm{E},\ \mathrm{d}f(a) \cdot v = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a) \mathbf{e}_j^*(v)$$

ou plus simplement

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a) \mathbf{e}_j^*$$

Remarque. On en déduit un lien entre les dérivées directionnelles et les dérivées partielles si la fonction est **différentiable**. En effet

$$\forall v \in \mathrm{E},\ \mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot v = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a) \mathbf{e}_j^*(v)$$

Exemple 1.11

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, 2xy)$ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a vu que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 2(a, b) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 2(b, a)$$

Comme f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{d}f(a, b) \cdot (h, k) = 2h(a, b) + 2k(b, a) = 2(ah + bk, bh + ak)$$

Attention ! Une fonction peut-être continue et admettre des dérivées selon tout vecteur sans pour autant être différentiable.

Exemple 1.12

Considérons la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

- Par opérations, f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Par ailleurs, on a classiquement $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ donc

  $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},\ |f(x, y)| \leq \frac{1}{2}|y|$$

  On en déduit que

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

  donc f est continue en $(0, 0)$.

- Par opérations, f admet clairement des dérivées directionnelles selon tout vecteur en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Soit $u = (h, k)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Alors

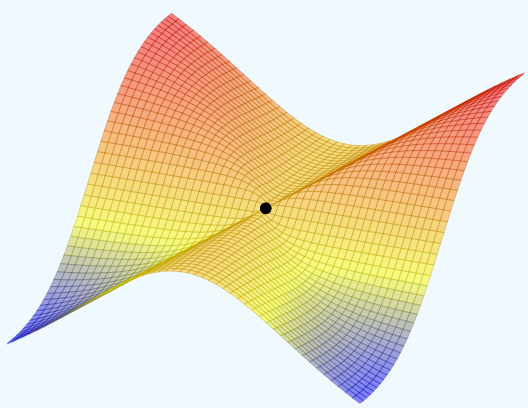
  $$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(tu) - f(0, 0)}{t} = f(h, k) = f(u)$$

  Ainsi f admet une dérivée en $(0, 0)$ selon le vecteur u et $\mathrm{D}_u f(0, 0) = f(u)$.

- Si f était différentiable en $(0, 0)$, alors on aurait

  $$\forall u = (h, k) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{D}_u f(0, 0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = h\mathrm{D}_{(1,0)} f(0, 0) + k\mathrm{D}_{(0,1)} f(0, 0) = 0$$

  Mais, par exemple, $\mathrm{D}_{(1,1)} f(0, 0) = \frac{1}{2} \neq (0, 0)$.



Proposition 1.4 Matrice d'une différentielle dans un couple de bases

Soient $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ une base de E, $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ une base de F et $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. Notons $(f_1, \dots, f_n)$ les coordonnées de f dans la base $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ (i.e. $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ \mathrm{g}$).
Si f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$, alors la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ est $\left(\partial_j f_i(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Définition 1.6 Matrice jacobienne

Supposons $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{F} = \mathbb{R}^p$. Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ est différentiable en a, la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ s'appelle la **matrice jacobienne** de f en a.

Exemple 1.13

L'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, xy)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Sa matrice jacobienne en un point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix}$.

Exemple 1.14

On pose $\mathcal{U} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y^2 > 0\right\}$. L'application $f : (x, y, z) \in \mathcal{U} \mapsto (\ln(x + y^2), e^{xz})$ est différentiable sur $\mathcal{U}$. Sa matrice jacobienne en un point $(x, y, z) \in \mathcal{U}$ est $\begin{pmatrix} \frac{1}{x+y^2} & \frac{2y}{x+y^2} & 0 \\ ze^{xz} & 0 & xe^{xz} \end{pmatrix}$.

2 Opérations sur les fonctions différentiables

Proposition 2.1 Combinaison linéaire

Soient $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. Si f et g sont différentiables en $a \in \mathcal{U}$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda\ \mathrm{d}f(a) + \mu\ \mathrm{d}g(a)$.

Proposition 2.2

Soient $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$, $g : \mathcal{U} \to \mathrm{G}$ et $\mathrm{B} : \mathrm{F} \times \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ une application **bilinéaire**. Si f et g sont différentiables en $a \in \mathcal{U}$, alors $\mathrm{B}(f, g)$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(\mathrm{B}(f, g))(a) = \mathrm{B}(\mathrm{d}f(a), g(a)) + \mathrm{B}(f(a), \mathrm{d}g(a))$.

Remarque. De manière plus claire,

$$\forall h \in \mathrm{E},\ \mathrm{d}(\mathrm{B}(f, g))(a) \cdot h = \mathrm{B}(\mathrm{d}f(a) \cdot h, g(a)) + \mathrm{B}(f(a), \mathrm{d}g(a) \cdot h)$$

Exemple 2.1

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E. Posons $\varphi(x) = \langle f(x), x\rangle$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Comme f et Id_E sont différentiables sur E en tant qu'applications linéaires, φ est également différentiable sur E car le produit scalaire est bilinéaire. De plus, $\mathrm{d}f = f$ et $\mathrm{d}\,\mathrm{Id}_\mathrm{E} = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ de sorte que

$$\forall (x, h) \in \mathrm{E}^2,\ \mathrm{d}\varphi(x) \cdot h = \langle f(h), x\rangle + \langle f(x), h\rangle$$

Proposition 2.3 Composition

Soient $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathcal{V} \to \mathrm{G}$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Si f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)$.

Remarque. Soient $\mathcal{E}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une base de F et $\mathcal{G}$ une base de G. Si A est la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ et B est la matrice de $\mathrm{d}g(f(a))$ dans les bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, alors BA est la matrice de $\mathrm{d}(g\circ f)(a)$ dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$.

Corollaire 2.1 Dérivée le long d'un arc

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\gamma : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ telles que $\gamma(\mathrm{I}) \subset \mathcal{U}$. Si γ est dérivable en $t \in \mathrm{I}$ et f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et $(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

Exemple 2.2 Dérivée le long d'une droite

Si $\gamma(t) = x + th$, alors $(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot h = \mathrm{D}_h f(\gamma(t))$.

Exemple 2.3

Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}^p$ et $\gamma = (x_1, \dots, x_p)$, alors

$$(f\circ\gamma)'(t) = \sum_{j=1}^{p} x_j'(t) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))$$

Corollaire 2.2 Dérivées partielles d'une composée

Soient $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathcal{V} \to \mathrm{G}$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. On note $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ les dérivées partielles de f dans une base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ de E et $\frac{\partial g}{\partial y_i}$ les dérivées partielles de g dans une base $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ de F. Si f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ et si g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ admet des dérivées partielles en a dans la base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ et

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ \partial_j(g\circ f)(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i g(f(a)) \partial_j f_i(a)$$

où $(f_1, \dots, f_n)$ désignent les coordonnées de f dans la base $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ (i.e. $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ f$).

Méthode **Règle de la chaîne**

Soient $x_1, \dots, x_n$ sont des fonctions différentiables sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et f est une fonction différentiable sur un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$. On suppose de plus que $(x_1, \dots, x_n)(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Alors

$$\forall j \in [\![1, m]\!],\ \frac{\partial f}{\partial u_j}(u_1, \dots, u_m) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m)) \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(u_1, \dots, u_m)$$

où on considère les dérivées partielles dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$.
Par abus de notation, on pourra tout simplement écrire

$$\forall j \in [\![1, m]\!],\ \frac{\partial f}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$$

à condition de bien comprendre ce que l'on manipule.

Exemple 2.4 Coordonnées polaires

Soit f différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On pose

$$\forall (r,\theta)\in\mathbb{R}^2,\ g(r,\theta)=f(x(r,\theta),y(r,\theta))$$

avec

$$x(r,\theta)=r\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y(\theta)=r\sin\theta$$

D'après la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)&=\frac{\partial f}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta))\frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta))\frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta)\\&=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta))+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta))\\\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)&=\frac{\partial f}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta))\frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta))\frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta)\\&=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta))+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta))\end{aligned}$$

Inversement, pour $r\neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta))&=\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\\\frac{\partial f}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta))&=\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\end{aligned}$$

3 Cas des applications numériques

On suppose dans ce paragraphe que $\mathrm{F}=\mathbb{R}$.

3.1 Gradient

Théorème 3.1 Théorème de représentation de Riesz

Soit E un espace euclidien. Pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un unique vecteur $a\in\mathrm{E}$ tel que

$$\forall x\in\mathrm{E},\ \varphi(x)=\langle a,x\rangle$$

De manière plus condensée, l'application

$$\left\{\begin{array}{lcl}\mathrm{E}&\longrightarrow&\mathrm{E}^*\\a&\longmapsto&(x\in\mathrm{E}\mapsto\langle a,x\rangle)\end{array}\right.$$

est un isomorphisme.

Définition 3.1 Gradient

On suppose que E est un espace euclidien. Soit $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$. Si f est différentiable en $a\in\mathcal{U}$, on appelle **gradient** de f en a, l'unique vecteur $\nabla f(a)$ de E tel que

$$\forall v\in\mathrm{E},\ \mathrm{d}f(a)\cdot v=\langle\nabla f(a),v\rangle$$

Remarque. On peut toujours munir un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie d'une structure d'espace euclidien. En effet, si

$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ est une base de E, l'application

$$(x, y) \in \mathrm{E}^2 \mapsto \sum_{k=1}^{p} \mathbf{e}_k^*(x)\mathbf{e}_k^*(y)$$

est un produit scalaire. De plus, $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ est alors une base orthonormale pour ce produit scalaire.

Exemple 3.1 Gradient du carré de la norme

Soit E un espace euclidien. Posons $f : x \in \mathrm{E} \mapsto \|x\|^2$. Fixons $a \in \mathrm{E}$.

$$\forall h \in \mathrm{E},\ f(a+h) = f(a) + 2\langle a, h\rangle + \|h\|^2$$

donc

$$f(a+h) \underset{h \to 0_{\mathrm{E}}}{=} f(a) + 2\langle a, h\rangle + o(h)$$

Ainsi f est différentiable en a et $\nabla f(a) = 2a$.

Proposition 3.1 Coordonnées du gradient dans une base orthonormale

On suppose que E est un espace euclidien. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \mathcal{U}$. Les coordonnées de $\nabla f(a)$ dans une **base orthonormale** $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ de E sont les dérivées partielles de f dans cette base :

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a)\mathbf{e}_j$$

Remarque. Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}^p$ est muni de son produit scalaire usuel, la base canonique est orthonormale. Par conséquent, si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in \mathcal{U}$, alors

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right)_{1 \le j \le n}$$

Interprétation géométrique du gradient

Si $\nabla f(a) \neq 0_{\mathrm{E}}$, $\nabla f(a)$ est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale. Il suffit en effet de remarquer que pour tout vecteur v unitaire

$$\mathrm{D}_v f(a) = \langle \nabla f(a), v\rangle \le \|\nabla f(a)\|\,\|v\| = \|\nabla f(a)\|$$

avec égalité si et seulement si v et $\nabla f(a)$ sont colinéaires et de même sens (inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité).

Exemple 3.2

Considérons l'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$. f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel de sorte que la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est orthonormale. Alors

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = (2x, 2y)$$

On peut retrouver la différentielle de f.

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2,\ \ \mathrm{d}f(x, y) \cdot (h, k) = \langle \nabla f(x, y), (h, k)\rangle = 2(xh + yk)$$

Exemple 3.3 Gradient et différentielle du déterminant

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\top B)$ et on considère l'application $\det : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(M)$. Cette application est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car polynomiale en les coefficients de la matrice.
Fixons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En développant le $\det(M)$ par rapport à sa $j^{\text{ème}}$ colonne, on obtient

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,j} \operatorname{com}(M)_{i,j}$$

On en déduit notamment que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \partial_{(i,j)} \det(M) = \operatorname{com}(M)_{i,j}$$

où les $\partial_{(i,j)} \det$ désignent les dérivées partielles de det dans la base canonique $(E_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme cette base est orthonormée,

$$\nabla \det(M) = \sum_{1\le i,j\le n} \operatorname{com}(M)_{i,j} E_{i,j} = \operatorname{com}(M)$$

On peut alors retrouver la différentielle du déterminant :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ d(\det)(M) \cdot H = \langle \nabla \det(M), H \rangle = \operatorname{tr}(\operatorname{com}(M)^\top H)$$

Exemple 3.4 Gradient en coordonnées polaires

Soit f différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On pose

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^2,\ g(r,\theta) = f(x(r,\theta), y(r,\theta))$$

avec

$$x(r,\theta) = r\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y(\theta) = r\sin\theta$$

On a montré précédemment que, pour $r \neq 0$,

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(x(r,\theta), y(r,\theta)) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(x(r,\theta), y(r,\theta))$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(x(r,\theta), y(r,\theta)) + \cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(x(r,\theta), y(r,\theta))$$

En notant R la matrice de rotation d'angle θ, on a donc

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) \\ \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = R^{-1} \nabla f(x(r,\theta), y(r,\theta))$$

Ainsi en posant

$$\mathbf{u}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{v}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

les coordonnées de $\nabla f(x(r,\theta), y(r,\theta))$ dans la base orthonormé $(\mathbf{u}_\theta, \mathbf{v}_\theta)$ sont

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta), \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\right)$$

Exercice 3.1

Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. On pose $\varphi\colon x \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\} \mapsto \dfrac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2}$.

1. Justifier que φ admet un maximum sur la sphère unité de E et en déduire que φ admet un maximum sur l'ouvert $\mathrm{E}\setminus\{0_{\mathrm{E}}\}$.
2. On note u un vecteur où φ admet son maximum. En considérant le gradient de φ, montrer que u est un vecteur propre de f.

3.2 Point critique

Définition 3.2 Point critique

Soit $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Si f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$, on dit que a est un **point critique** de f si $\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathrm{E}^*}$.

Remarque. a est un point critique de f si et seulement si toutes les dérivées partielles de f en a sont nulles.

Remarque. Si E est un espace euclidien (on peut toujours le supposer), a est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(a) = 0_{\mathrm{E}}$.

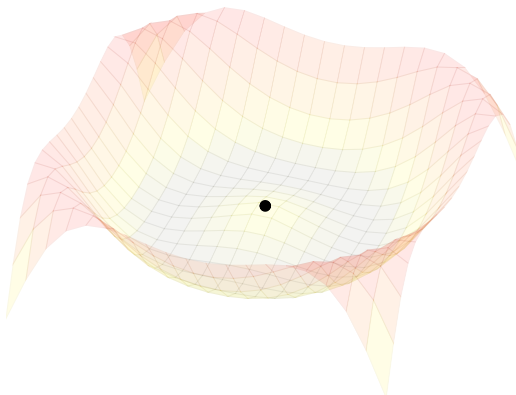
Exemple 3.5

Soit $f\colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$. Puisque $\nabla f(x, y) = 2(x, y)$, l'unique point critique de f est $(0, 0)$.

Rappel **Extremum local**

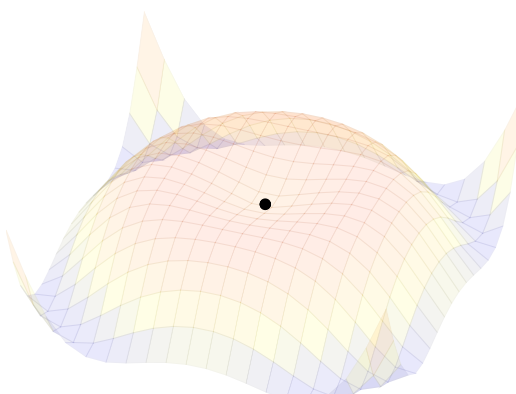
On dit que $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ admet un **maximum local** en $a \in \mathrm{D}$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

- $\mathrm{B}(a, \varepsilon) \subset \mathrm{D}$;
- $\forall x \in \mathrm{B}(a, \varepsilon),\ f(x) \leq f(a)$.



On dit que $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ admet un **minimum local** en $a \in \mathrm{D}$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

- $\mathrm{B}(a, \varepsilon) \subset \mathrm{D}$;
- $\forall x \in \mathrm{B}(a, \varepsilon),\ f(x) \geq f(a)$.



Si D est **ouvert**, il existe toujours $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(a, \varepsilon) \subset \mathrm{D}$. De manière générale, on ne parle d'extremum local en $a \in \mathrm{D}$ que si a est un point **intérieur** à D.

Proposition 3.2 Condition nécessaire d'existence d'un extremum local

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \mathcal{U}$. Si f est différentiable en a et admet un **extremum local** en a, alors a est un **point critique** de f.

Attention ! La réciproque est fausse. Considérons $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$. Alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \nabla f(x, y) = 2(x, -y)$$

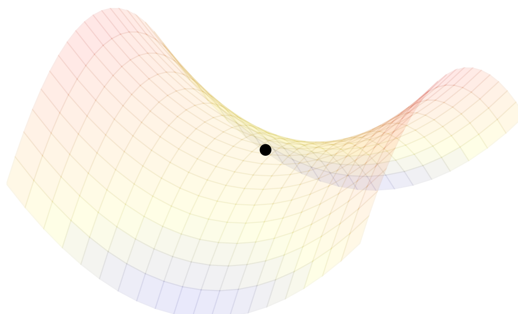
Ainsi $(0,0)$ est bien l'unique point critique de f. Cepdendant

$$\forall \varepsilon > 0,\ f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > 0 = f(0,0)$$

donc f n'admet pas de maximum local en $(0,0)$ et

$$\forall \varepsilon > 0,\ f(0, \varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0 = f(0,0)$$

donc f n'admet pas non plus de minimum local en $(0,0)$.
La fonction f n'admet donc pas d'extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$ (et donc pas non plus d'extrema globaux) comme la représentation graphique suivante permet de s'en convaincre.



Méthode **Recherche d'extrema locaux**

1. On recherche les points critiques.
2. Pour chaque point critique a, on étudie le signe de $f(x) - f(a)$ pour x au voisinage de a. Pour simplifier, on pose généralement $u = x - a$ et on étudie le signe de $f(a+u) - f(a)$ pour u au voisinage de 0_E.

Exemple 3.6

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

Ce système équivaut à

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système i.e. l'unique point critique de f est $(0,3)$. Pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(0+u, 3+v) - f(0,3) = u^2 + uv + v^2 = \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 \geq 0$$

Ainsi f admet un minimum local (et même global) en $(0,3)$.

Méthode **Recherche d'extrema globaux**

Soit D une partie de E (non nécessairement ouverte). Les extrema globaux d'une fonction f à valeurs réelles sur un domaine D sont

- soit atteints sur $\mathrm{D} \setminus \mathring{\mathrm{D}}$;
- soit atteints sur $\mathring{\mathrm{D}}$, auquel cas ce sont des extrema locaux et donc **nécessairement** atteints en des points critiques de f.

Exemple 3.7

On recherche les extrema globaux de $f \mapsto xy(1-x-y)$ sur

$$\mathrm{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\right\}$$

- Tout d'abord, D est compact et f est continue donc f admet bien un minimum global et un maximum global sur D.
- On remarque d'abord que f est nulle sur la frontière de D (puisqu'alors $x=0$, $y=0$ ou $x+y=1$). De plus, f est clairement positive sur D donc $\min\limits_{\mathrm{D}} f = 0$ et ce minimum est atteint en tout point de D.
- Recherchons les points critiques de f sur $\mathring{\mathrm{D}}$. On résout le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

qui équivaut à

$$\begin{cases} y(1-2x-y) = 0 \\ x(1-x-2y) = 0 \end{cases}$$

Puisque l'on se situe sur la frontière de D, $x > 0$ et $y > 0$ donc le système équivaut à

$$\begin{cases} 1-2x-y = 0 \\ 1-x-2y = 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $(1/3, 1/3)$ qui appartient bien à D. Comme $f(1/3,1/3) > 0$, le maximum de f ne peut être atteint sur la frontière de D. Ce maximum global est donc un maximum local qui ne peut être atteint qu'en l'unique point critique $(1/3,1/3)$ de f sur $\mathring{\mathrm{D}}$. On en déduit que $\max\limits_{\mathrm{D}} f = f(1/3,1/3) = 1/27$.

4 Tangence et orthogonalité

4.1 Vecteurs tangents

Définition 4.1 Vecteur tangent à une partie

Soient X une partie de E et $\in$ X. On dit que $v \in \mathrm{E}$ est **tangent** à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma : \,]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathrm{X}$ dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

Remarque. Si $x \in \mathring{\mathrm{X}}$, alors tout vecteur est tangent à X en x. Soit $v \in \mathrm{E}$. Comme $x \in \mathrm{X}$, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x,r) \subset \mathrm{X}$. Posons $\varepsilon = \dfrac{r}{\|v\|+1}$. Alors $\gamma : \,]-\varepsilon, \varepsilon[\mapsto x + tv$ est bien à valeurs dans $\mathrm{B}(x,r) \subset \mathrm{X}$, $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

Exemple 4.1 Vecteurs tangents à la sphère unité

On suppose que E est un espace euclidien. Soit $S = \{x \in E,\ \|x\| = 1\}$. Soit $x \in S$ et v un vecteur orthogonal à x.

- Posons $\varepsilon = \dfrac{\|x\|}{\|v\|+1}$. Alors,

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[,\ \|x+tv\| \geq \|x\| - |t|\|v\| > |x| - \varepsilon\|v\| = \frac{\|x\|}{\|v\|+1} \geq 0$$

  donc $\gamma : t \mapsto \dfrac{x+tv}{\|x+tv\|}$ est bien défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ à valeurs dans S.

- Comme $\|x\| = 1$, $\gamma(0) = x$.

- Comme $\|x\| = 1$ et $\langle x, v\rangle = 0$, $\|x+tv\| = \sqrt{1+t^2\|v\|^2}$. L'application $\varphi : t \mapsto x+tv$ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = v$ et l'application $\psi : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2\|v\|^2}}$ est également dérivable en 0 et $\psi'(0) = 0$. Par opérations, γ est dérivable en 0 et

$$\gamma'(0) = \varphi(0)\psi'(0) + \varphi'(0)\psi(0) = v$$

Ainsi v est bien tangent à S en x.

Proposition 4.1 Cas du graphe d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable sur Ω. Notons X le graphe de f, c'est-à-dire

$$X = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^3$$

Alors pour tout $(x_0, y_0) \in \Omega$, l'ensemble des vecteurs tangents à X en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est le plan vectoriel

$$\left\{(v, D_v f(x_0, y_0)),\ v \in \mathbb{R}^2\right\} = \operatorname{vect}\left(\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right), \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\right)$$

Plan tangent

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable sur Ω. L'ensemble des vecteurs tangents en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (avec $(x_0, y_0) \in \Omega$) au graphe de f est le plan vectoriel

$$P = \operatorname{vect}\left(\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right), \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\right)$$

On appelle **plan affine tangent** en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ au graphe de f le plan affine $\mathcal{P} = (x_0, y_0, z_0) + P$. On obtient une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in \mathcal{P} &\iff (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \in \operatorname{vect}\left(\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right), \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\right) \\
&\iff \begin{vmatrix} x - x_0 & 1 & 0 \\ y - y_0 & 0 & 1 \\ z - f(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

On peut également remarquer que $\mathcal{P}$ est le plan passant par (x_0, y_0, z_0) et de vecteur normal $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$.

Remarque. On notera l'extrême similitude de cette équation avec l'équation de la tangente au graphe d'une fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un point $(x_0, f(x_0))$, à savoir

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Exemple 4.2

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to x^2 + y^2$. Le plan affine tangent au graphe de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ admet pour équation

$$z = x_0^2 + y_0^2 + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$$

4.2 Lignes de niveau

Définition 4.2 Ligne de niveau

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. On appelle ligne de niveau $k \in \mathbb{R}$ de f l'ensemble

$$\mathrm{E}_k = \{x \in \mathcal{U},\ f(x) = k\}$$

Proposition 4.2 Gradient et ligne de niveau

On suppose E euclidien. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ différentiable. Si X est une ligne de niveau de f, alors les vecteurs tangents à X en $x \in \mathrm{X}$ sont orthogonaux à $\nabla f(x)$.

Exemple 4.3

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Le graphe X de la fonction f, c'est-à-dire l'ensemble $\{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in \Omega\}$, est aussi la ligne de niveau 0 de l'application $g : (x, y, z) \mapsto z - f(x, y)$. Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$ et posons $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathrm{X}$. Alors $\nabla g(x_0, y_0, z_0) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1\right)$ est orthogonal aux vecteurs tangents à X en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. On peut alors retrouver l'équation cartésienne du plan affine tangent à S en M_0 à l'aide de ce vecteur normal.

5 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

5.1 Applications de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 5.1 Application de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si elle est différentiable sur $\mathcal{U}$ et si $\mathrm{d}f$ est continue sur $\mathcal{U}$.

Théorème 5.1 Classe $\mathcal{C}^1$ et dérivées partielles

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si et seulement si

- f admet des dérivées partielles (dans une certaine base de E) en tout point de $\mathcal{U}$;
- ces dérivées partielles sont continues sur $\mathcal{U}$.

Attention ! Une fonction peut-être différentiable sans qu'elle soit de classe $\mathcal{C}^1$. Notamment, les dérivées partielles d'une application différentiable ne sont pas nécessairement continues.

Exemple 5.1

Considérons la fonction

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f est différentiable en $(0,0)$ mais ses dérivées partielles n'y sont pas continues.

- Si l'on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = \|(x,y)\|^2 \sin\left(\frac{1}{\|(x,y)\|^2}\right)$$

  Comme sin est bornée, il est clair que $f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{=} o((x,y))$. Ainsi f est bien différentiable en $(0,0)$ et $\mathrm{d}f(0,0)$ est nulle.

- Tout d'abord, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

  De plus,

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$
$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = y\sin\left(\frac{1}{y^2}\right) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$$

  Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Pourtant,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 2y\sin\left(\frac{1}{y^2}\right) - \frac{2}{y}\cos\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

  donc $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0)$ et $y \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y)$ n'admettent pas de limite en 0 car la fonction $t \mapsto t\sin(1/t^2)$ admet une limite nulle en 0 mais la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}\cos(1/t^2)$ n'admet pas de limite en 0. Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'admettent pas de limite en $(0,0)$. A fortiori, elles n'y sont pas continues.

Proposition 5.1 Intégrale curviligne

Soient $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ et $\gamma : [0,1] \to \mathcal{U}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Alors

$$f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ \mathrm{d}t$$

Corollaire 5.1 Applications constantes

On suppose $\mathcal{U}$ **connexe par arcs**. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. Alors f est constante sur $\mathcal{U}$ si et seulement si $\mathrm{d}f$ est nulle sur $\mathcal{U}$.

5.2 Applications de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$)

On peut définir des dérivées partielles de dérivées partielles.

Définition 5.2 Dérivées partielles d'ordre k

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. On appelle **dérivée partielle d'ordre** k dans une base de E une dérivée partielle de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_{k-1}}}\left(\cdots\left(\frac{\partial f}{\partial x_{j_1}}\right)\right)\right) = \partial_{j_k}\left(\partial_{j_{k-1}}\left(\cdots\left(\partial_{j_1} f\right)\right)\right)$$

que l'on notera plus simplement

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k}\partial x_{j_{k-1}}\cdots\partial x_{j_1}} = \partial_{j_k}\partial_{j_{k-1}}\partial_{j_1} f$$

Remarque. A priori, l'ordre des indices compte. Dans la définition, on dérive d'abord par rapport à la $j_1^{\text{ème}}$ coordonnée, puis par rapport à la $j_2^{\text{ème}}$ coordonnée, …, et enfin par rapport à la $j_k^{\text{ème}}$ coordonnée.

Remarque. $\partial_i(\partial_i f)$ se note plus simplement $\partial_i^2 f$. De manière générale, $\partial_i^k f = \partial_i(\partial_i(\dots(\partial_i f)))$ (k dérivées partielles).

Remarque. $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ se note plus simplement $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. De manière générale, $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\dots\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right)\right)$ (k dérivées partielles).

Exemple 5.2

Soit $f : (x, y) \mapsto xy^3\ln(x^2+y)$ définie sur l'ouvert $\mathcal{U} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y > 0\right\}$. Alors f admet des dérivées partielles dans la base canonique en tout point de $\mathcal{U}$ et

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^3\ln(x^2+y) + \frac{2x^2y^3}{x^2+y}$$
$$\forall (x, y) \in \mathcal{U},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3xy^2\ln(x^2+y) + \frac{xy^3}{x^2+y}$$

Ces dérivées partielles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en tout point de $\mathcal{U}$ et pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{6xy^3}{x^2+y} - \frac{4x^3y^3}{(x^2+y)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x, y) = \frac{6x^2y^2}{x^2+y} - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y)^2} + 3y^2\ln(x^2+y) + \frac{y^3}{x^2+y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x, y) = \frac{6x^2y^2}{x^2+y} - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y)^2} + 3y^2\ln(x^2+y) + \frac{y^3}{x^2+y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6xy\ln(x^2+y) + \frac{6xy^2}{x^2+y} - \frac{xy^3}{(x^2+y)^2}$$

On constate notamment que $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, ce qui n'est pas évident a priori même si ce n'est pas le fruit du hasard...

Définition 5.3 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) sur $\mathcal{U}$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}$ si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 5.3

Toute application polynomiale sur $\mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 5.2 Schwarz

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$. Alors

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ \partial_i\partial_j f = \partial_j\partial_i f$$

Attention ! L'hypothèse que f est de classe $\mathcal{C}^2$ est primordiale.

Exemple 5.4

Soit en effet

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Tout d'abord, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe en $(x, y) \neq (0, 0)$ par opérations et en $(0, 0)$ (taux d'accroissement). De plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \qquad \text{si } (x, y) \neq (0, 0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$$

Comme $f(x, y) = -f(y, x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe également en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x) = -\frac{x(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2 + y^2)^2} \qquad \text{si } (x, y) \neq (0, 0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

A l'aide de taux d'acroissement, on montre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ existent et que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = -1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} = 1$$

Ainsi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$$

Le théorème de Schwarz permet en particulier d'affirmer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Opérateurs différentiels

Hormis le gradient, on peut définir d'autres opérateurs différentiels.

- Si $f = (f_1, \dots, f_n)$ est un **champ de vecteurs** différentiable, autrement dit une application différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, on peut définir sa **divergence** :

$$\mathbf{div}\, f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i$$

  Par exemple, si $\vec{\mathrm{E}} = (\mathrm{E}_x, \mathrm{E}_y, \mathrm{E}_z)$ est un champ électrique,

$$\mathbf{div}\, \vec{\mathrm{E}} = \frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial z}$$

- Si $f = (f_x, f_y, f_z)$ est un champ de vecteurs différentiable de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, on peut définir son **rotationnel** :

$$\mathbf{rot}\, f = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right)$$

- Si f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, on peut définir son **laplacien** :

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f$$

  Par exemple, si $\mathrm{V} = (\mathrm{V}_x, \mathrm{V}_y, \mathrm{V}_z)$ est un potentiel,

$$\Delta \mathrm{V} = \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z^2}$$

Exercice 5.1

1. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathbf{div}(\nabla f) = \Delta f$$

2. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathbf{rot}(\nabla f) = 0$$

3. Soit $f = (f_x, f_y, f_z)$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\, f) = \nabla(\mathbf{div}\, f) - \Delta f_x - \Delta f_y - \Delta f_z$$

5.3 Opérations

Proposition 5.2 Combinaison linéaire

Soient $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$.

Proposition 5.3

Soient $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$, $g : \mathcal{U} \to \mathrm{G}$ et $\mathrm{B} : \mathrm{F} \times \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ une application **bilinéaire**. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$, alors $\mathrm{B}(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$.

Proposition 5.4 Composition

Soient $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathcal{V} \to \mathrm{G}$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$ et g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{V}$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$.

6 Equations aux dérivées partielles

Equations aux dérivées partielles

On appelle **équation aux dérivées partielles** ou, de manière abrégée, EDP une équation dont l'inconnue est une fonction et qui fait intervenir des dérivées partielles de cette fonction. Citons quelques exemples classiques en physique.

- $\boxed{\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$ est une EDP d'inconnue $y(x, t)$. On l'appelle l'**équation des ondes** à une dimension ou encore **équation des cordes vibrantes**. La fonction $y(x, t)$ représente la position verticale du point d'abscisse x d'une corde vibrante à l'instant t par rapport à sa position au repos.
- $\boxed{\dfrac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial t^2} = \alpha \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}}$ est une EDP d'inconnue $\mathrm{T}(x, t)$. On l'appelle l'**équation de la chaleur**. La fonction $\mathrm{T}(x, t)$ représente la température au point d'abscisse x à l'instant T dans un milieu unidimensionnel dans lequel la chaleur se propage par conduction.

Résoudre une EDP sur un ouvert $\mathcal{U}$ signifie rechercher toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$ (si l'EDP fait intervenir que des dérivées partielles d'ordre au plus k) vérifiant l'équation.

Exemple 6.1

Les solutions sur $\mathbb{R}^2$ de $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ sont les fonctions $(x, y) \mapsto \mathrm{C}(y)$ où C est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 6.2

Les solutions sur $\mathbb{R}^2$ de $\dfrac{\partial f}{\partial y} = xy$ sont les fonctions $(x, y) \mapsto \dfrac{1}{2}xy^2 + \mathrm{C}(x)$ où C est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 6.3 Changement de variables affine

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'EDP

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

en procédant au changement de variables

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x + 2y \end{cases}$$

On introduit une fonction g telle que $f(x, y) = g(u, v) = g(x + y, x + 2y)$. Dans ce qui suit, on s'autorise quelques abus de notations. Via la règle de la chaîne

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v}$$

Ainsi l'EDP initiale équivaut à

$$\frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

Les solutions de cette équations sont les fonctions

$$(u, v) \mapsto \mathrm{C}(v)$$

avec C de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que les solutions de l'EDP initiale sont les fonctions

$$(x, y) \mapsto \mathrm{C}(x + 2y)$$

avec C de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 6.4 Passage en coordonnées polaires

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'EDP

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2$$

en passant en coordonnées polaires.
On effectue le changement de variables

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

On introduit une fonction g telle que

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

D'après la règle de la chaîne,

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

Par conséquent

$$r\frac{\partial g}{\partial r} = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

L'EDP initiale équivaut donc à l'EDP

$$r\frac{\partial g}{\partial r} = r^2 \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{\partial g}{\partial r} = r$$

Les solutions de cette EDP sont les fonctions $(r, \theta) \mapsto \frac{1}{2}r^2 + \mathrm{C}(\theta)$ avec C de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Puisque $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\theta = \arctan(y/x)$. Ainsi les solutions de l'EDP initiale sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sont les fonctions

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \mathrm{C}(\arctan(y/x))$$

avec C de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exemple 6.5

Les solutions sur $\mathbb{R}^2$ de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ sont les fonctions $(x, y) \mapsto \mathrm{C}(x) + \mathrm{D}(y)$ où C et D sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Résolution de l'équation des ondes à une dimension

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'EDP $\boxed{\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$ (avec $c \neq 0$). Pour cela, on procède au changement de variable $\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}$ i.e. on cherche donc y de classe $\mathcal{C}^2$ sous la forme $y(x,t) = g(u,v) = g(x-ct, x+ct)$. Les expressions des dérivées partielles premières s'obtiennent par la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial v} = -c\frac{\partial g}{\partial u} + c\frac{\partial g}{\partial v} \end{aligned}$$

On en déduit les dérivées partielles secondes (on utilise le théorème de Schwarz) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -c\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\right) + c\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right) = c^2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) \end{aligned}$$

L'équation initiale équivaut donc à $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$. On a vu précédemment que les solutions de cette EDP étaient les fonctions $(u,v) \mapsto \mathrm{C}(u) + \mathrm{D}(v)$ avec C, D de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'EDP initiale sont donc les fonctions $(x,y) \mapsto \mathrm{C}(x-ct) + \mathrm{D}(x+ct)$ avec C, D de classe $\mathcal{C}^2$. Les deux termes correspondent à des ondes se propageant avec la même célérité mais en sens inverse.