Semaine du 29/03 au 02/04

1 Cours

Limite et continuité de fonctions

Limite d'une fonction Définition. Unicité de la limite. Toute fonction admettant une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est bornée au voisinage de a. Limite à gauche et à droite. Lien entre limite à gauche et à droite et limite simple.

Propriétés des limites Opérations sur les limites. Caractérisation séquentielle de la limite. Passage à la limite.

Théorèmes d'existence de limite Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration. Théorème de la limite monotone.

Continuité ponctuelle Définition. Continuité à gauche et à droite. Prolongement par continuité. Caractérisation séquentielle de la continuité. Opérations sur la continuité ponctuelle.

Continuité sur un intervalle Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle. Théorème des valeurs intermédiaires. L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle. Théorème de la bijection. Une fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone. La bijection réciproque d'une fonction continue sur un intervalle est continue. Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. L'image d'un segment par une application continue est un segment.

Continuité uniforme Définition. Continuité uniforme implique continuité. Théorème de Heine. Fonctions lipschitziennes : définition et uniforme continuité.

Limite et continuité des fonctions à valeurs complexes Une fonction à valeurs complexes f admet pour limite $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ admettent pour limites respectives $\operatorname{Re}(l)$ et $\operatorname{Im}(l)$. Une fonction f à valeurs complexes est continue si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour montrer qu'une fonction continue f admet un point fixe, on montre que $x \mapsto f(x) - x$ s'annule.
- Pour montrer qu'une fonction continue s'annule, il suffit de prouver qu'elle prend une valeur positive et une valeur négative.
- Équations fonctionnelles.

3 Questions de cours

BCCP 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\arctan x)$.

BCCP 56

On considère la fonction H définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\mathrm{H}(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$$

1. Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en 1.
3. En utilisant la fonction u de la question 2, calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

Retour sur le DS n°08

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_\mathrm{E})$, $f \neq \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et $f \neq -\frac{1}{2}\mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

1. Montrer que la famille $(f, \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ est un famille libre de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) tel que $f^n = a_n f + b_n \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.
3. Déterminer a_n et b_n en fonction de n.

Retour sur le DS n°08

Soit $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(x)\sin^{(n)}(x) + \mathrm{Q}_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}}$$

2. Soient U et V deux polynômes tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{U}(x)\sin(x) + \mathrm{V}(x)\cos(x) = 0$. Montrer que U et V sont tous deux égaux au polynôme nul.
3. En dérivant $n+1$ fois la relation $xg(x) = \sin(x)$, déterminer deux relations liant P_n, P_{n+1}, Q_n et Q_{n+1}.
4. En déduire que $\mathrm{P}_n' = \mathrm{Q}_n$ puis que $\mathrm{P}_n + \mathrm{P}_n'' = \mathrm{X}^n$.