Devoir à la maison n°03

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1.

On expose dans cet exercice la méthode de Cardan pour la résolution des équations du troisième degré.
On montre aisément par un changement de variable que toute équation du troisième degré est équivalente à une équation de la forme suivante

$$(\mathrm{E}): \mathrm{X}^3 + p\mathrm{X} + q = 0 \qquad \text{avec } (p,q) \in \mathbb{C}^2$$

Nous allons maintenant tenter de résoudre l'équation (E).

1. Soit z une solution éventuelle de l'équation (E).

   a. Justifier l'existence de deux complexes u et v tels que $u+v=z$ et $uv=-\frac{p}{3}$.

   b. Calculer u^3v^3 en fonction de p et u^3+v^3 en fonction de q. Pour le calcul de u^3+v^3, on pourra commencer par développer $(u+v)^3$.

   c. En déduire que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation

$$(\mathrm{E}'): \mathrm{X}^2 + q\mathrm{X} - \frac{p^3}{27} = 0$$

   d. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Vérifier que $ju + j^2v$ et $j^2u + jv$ sont également solutions de l'équation (E).

2. On en déduit donc la méthode suivante pour résoudre l'équation (E) :

   - On forme l'équation (E′) dont on calcule les solutions.
   - On extrait des racines cubiques u et v de ces deux solutions vérifiant $uv=-\frac{p}{3}$.
   - Les solutions de (E) sont alors les complexes $u+v$, $ju+j^2v$, j^2u+jv.

   Appliquer cette méthode à la résolution de l'équation

$$\mathrm{X}^3 - 3i\mathrm{X} + 1 - i = 0$$

   On donnera les solutions sous forme algébrique.

Exercice 2.

L'exponentielle complexe admet-elle des points fixes ? Autrement dit, existe-t-il des complexes z tels que $e^z = z$?