Devoir surveillé n°02 : corrigé

Problème 1 — Formule de Vandermonde

1. Evident.

2. On remarque que

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!k+n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}=\binom{n+1}{k}$$

3. **Initialisation :** Soit $(m,p)\in\mathbb{N}^2$.

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{0}{k}\binom{m}{p-k}=\binom{0}{0}\binom{m}{p}=\binom{m}{p}$$

car $\binom{0}{k}=0$ lorsque $k>0$ avec les conventions adoptées. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$. Soit $(m,p)\in\mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p}\binom{n+1}{k}\binom{m}{p-k}&=\sum_{k=0}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)\binom{m}{p-k}\\
&=\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}+\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k-1}\binom{m}{p-k}\\
&=\binom{m+n}{p}+\sum_{k=1}^{p}\binom{n}{k-1}\binom{m}{p-k} && \text{d'après } \mathcal{P}_n \text{ et car } \binom{n}{-1}=0 \text{ par convention}\\
&=\binom{m+n}{p}+\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}\binom{m}{p-1-k} && \text{par changement d'indice}\\
&=\binom{m+n}{p}+\binom{m+n}{p-1} && \text{d'après } \mathcal{P}_n\\
&=\binom{m+n+1}{p}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

4. Lorsque $p=m=n$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{2n}{n}$$

Par symétrie des coefficients binomiaux, on obtient le résultat voulu.

5. En effectuant le changement d'indice $\ell=n-k$, on obtient

$$S_n=\sum_{\ell=0}^{n}(n-\ell)\binom{n}{n-\ell}^2=n\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}^2-\sum_{\ell=0}^{n}\ell\binom{n}{\ell}^2=n\binom{2n}{n}-S_n$$

Ainsi $S_n=\dfrac{1}{2}n\dbinom{2n}{n}$.

6. Supposons n impair. La question précédente montre $2S_n=n\binom{2n}{n}$. Comme n est impair, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $n=2p+1$. Ainsi $2S_n=(2p+1)\binom{2n}{n}$ ou encore $\binom{2n}{n}=2\left(S_n-p\binom{2n}{n}\right)$. Comme S_n et $\binom{2n}{n}$ sont entiers, $\binom{2n}{n}$ est pair.

SOLUTION 1.

1. On utilise une formule de factorisation.

$$s = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Or

$$\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

et on a donc bien $s = 2p$.

2. En utilisant la formule de duplication du sinus,

$$p\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$$

Or

$$\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Ainsi

$$p\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Or $\frac{2\pi}{5}$ n'est pas un multiple entier de π donc $p\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \neq 0$, ce qui permet d'affirmer que $p = -\frac{1}{4}$ et donc $s = -\frac{1}{2}$.

3. Puisque $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ ont pour somme $s = -\frac{1}{2}$ et pour produit $p = -\frac{1}{4}$, ils sont racines du trinôme $X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$. Ces racines sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Comme $\frac{2\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ et donc

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

REMARQUE. On aurait aussi pu remarquer que

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(2\times\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$$

Ainsi

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = s = -\frac{1}{2}$$

ou encore

$$2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \frac{1}{2} = 0$$

Ainsi $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine du trinôme $2X^2 + X - \frac{1}{2}$. Ces racines sont à nouveau $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Comme précédemment, on invoque que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ pour en déduire que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Puis

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = s - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

■

SOLUTION 2.

1. On trouve $S_0 = \binom{0}{0} = 1$, $S_1 = \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 3$ et $S_2 = \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \binom{2}{0} + \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 7$.

2. D'après la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$$

La suite (2^n) étant géométrique,

$$\sum_{k=0}^{n}2^k=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1$$

3. On procède comme indiqué dans l'énoncé. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$S_n=\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}$$

D'après la question précédente,

$$S_n=\sum_{j=0}^{n}2^j=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1$$

Solution 3.

$$\begin{aligned}&\begin{cases}x+y-z=1\\x+my-z=1\\x+y+mz=m\end{cases}\\ \iff&\begin{cases}x+y-z=1\\(m-1)y=0 & L_2\leftarrow L_2-L_1\\(m+1)z=m-1 & L_3\leftarrow L_3-L_1\end{cases}\end{aligned}$$

Il y a alors plusieurs cas à traiter.

Cas $m=1$

$$\begin{aligned}(\mathcal{S})&\iff\begin{cases}x+y-z=1\\2z=0\end{cases}\\&\iff\begin{cases}x+y=1\\z=0\end{cases}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\{(1-y,y,0),\ y\in\mathbb{R}\}=(1,0,0)+\mathbb{R}(-1,1,0)$$

Cas $m=-1$

$$(\mathcal{S})\iff\begin{cases}x+y-z=1\\-2y=0\\0=-2\end{cases}$$

Le système n'a donc pas de solution.

Cas $m\notin\{-1,1\}$

$$(\mathcal{S})\iff\begin{cases}x=\dfrac{2m}{m+1}\\y=0\\z=\dfrac{m-1}{m+1}\end{cases}$$

Le système $(\mathcal{S})$ admet donc le triplet $\left(\frac{2m}{m+1},0,\frac{m-1}{m+1}\right)$ pour unique solution.

Solution 4.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4k(k+1)}\right) = \sin\frac{\pi}{4k}\cos\frac{1}{4(k+1)} - \cos\frac{\pi}{4k}\sin\frac{1}{4(k+1)}$$

puis

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4k(k+1)}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4k}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4(k+1)}\right)} = \tan\frac{\pi}{4k} - \tan\frac{\pi}{4(k+1)}$$

Par télescopage,

$$u_n = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4(n+1)}\right) = 1 - \tan\left(\frac{\pi}{4(n+1)}\right)$$

2. On en déduit $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.