Devoir à la maison n°08 : corrigé

Problème 1 — Dérivation sur un anneau

Partie I –

1. Clairement, $[a,b]+[b,a]=0$.

2. Soit $(a,b,c)\in A^3$.

$$\begin{aligned}[a,b+c]&=a\times(b+c)-(b+c)\times a\\&=a\times b+a\times c-b\times a-c\times a\qquad\text{par distributivité de }\times\text{ sur }+\\&=a\times b-b\times a+a\times c-c\times a\\&=[a,b]+[a,c]\end{aligned}$$

3. Soit $(a,b,c)\in A^3$.

$$\begin{aligned}[a,[b,c]]&=[a,b\times c-c\times b]\\&=[a,b\times c]-[a,c\times b]\\&=a\times b\times c-b\times c\times a-a\times c\times b+c\times b\times a\\ [b,[c,a]]&=[b,c\times a-a\times c]\\&=[b,c\times a]-[b,a\times c]\\&=b\times c\times a-c\times a\times b-b\times a\times c+a\times c\times b\\ [c,[a,b]]&=[c,a\times b-b\times a]\\&=[c,a\times b]-[c,b\times a]\\&=c\times a\times b-a\times b\times c-c\times b\times a+b\times a\times c\end{aligned}$$

On trouve bien après simplification

$$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0$$

4. Pour tout $x\in A$,

$$\begin{aligned}d_0(x)&=[0,x]=0\times x-x\times 0\\d_1(x)&=[1,x]=1\times x-x\times 1=x-x=0\end{aligned}$$

Donc d_0 et d_1 sont nulles sur A.

Soit $a\in A$. Pour tout $(x,y)\in A^2$,

$$\begin{aligned}d_a(x+y)&=[a,x+y]=[a,x]+[a,y]=d_a(x)+d_a(y)\\d_a(x\times y)&=[a,x\times y]=a\times x\times y-x\times y\times a\\&=a\times x\times y-x\times a\times y+x\times a\times y-x\times y\times a\\&=(a\times x-x\times a)\times y+x\times(a\times y-y\times a)\\&=[a,x]\times y+x\times[a,y]\\&=d_a(x)\times y+x\times d_a(y)\end{aligned}$$

Ainsi d_a est bien une dérivation de A.

Partie II –

1. D'une part, $\delta(0) = \delta(0+0) = \delta(0) + \delta(0)$ donc $\delta(0) = 0$.
D'autre part, $\delta(1 \times 1) = \delta(1) \times 1 + 1 \times \delta(1) = \delta(1) + \delta(1)$ donc $\delta(1) = 0$.

2.

3. Puisque

$$0 = \delta(1) = \delta(a \times a^{-1}) = \delta(a) \times a^{-1} + a \times \delta(a^{-}1)$$

il s'ensuit que

$$a \times \delta(a^{-1}) = -\delta(a) \times a^{-1}$$

puis

$$\delta(a^{-1}) = a^{-1} \times (-\delta(a) \times a^{-1}) = -a^{-1} \times \delta(a) \times a^{-1}$$

4. **a.** Clairement, $D_\delta \subset A$.
D'après la question **II.1**, $\delta(1) = 0$ donc $1 \in D_\delta$.
Soit $(x, y) \in D_\delta$. Alors

$$\delta(x - y) = \delta(x) - \delta(y) = 0 - 0 = 0$$

donc $x - y \in D_\delta$. De même,

$$\delta(x \times y) = \delta(x) \times y + x \times \delta(y) = 0 \times y + x \times 0 = 0 + 0 = 0$$

donc $x \times y \in D_\delta$.
Ceci prouve que D_δ est un sous-anneau de A.

Remarque. On pouvait aussi remarquer que δ était un endomorphisme du groupe $(A, +)$ et qu'alors $D_\delta = \operatorname{Ker} \delta$. Ainsi D_δ est un sous-groupe de A. Il reste alors à montrer que $1 \in D_\delta$ et que D_δ est stable par $\times$. ■

b. On a déjà montré que D_δ était un sous-anneau de A. Il suffit donc de prouver que D_δ est stable par inversion. Soit donc a un élément non nul de D_δ. Puisque A est un corps, a est inversible et, d'après la question **II.3**,

$$\delta(a^{-1}) = a^{-1} \times \delta(a) \times a^{-1} = a^{-1} \times 0 \times a^{-1} = 0$$

donc $a^{-1} \in D_\delta$.
D_δ est donc un sous-corps de A.

Partie III –

1. **a.** Soit $(x, y) \in E^2$. Alors

$$\begin{aligned}
(\delta_1 + \delta_2)(x + y) &= \delta_1(x + y) + \delta_2(x + y) = \delta_1(x) + \delta_1(y) + \delta_2(x) + \delta_2(y) \\
&= \delta_1(x) + \delta_2(x) + \delta_1(y) + \delta_2(y) \\
&= (\delta_1 + \delta_2)(x) + (\delta_1 + \delta_2)(y) \\
(\delta_1 + \delta_2)(x \times y) &= \delta_1(x \times y) + \delta_2(x \times y) \\
&= \delta_1(x) \times y + x \times \delta_1(y) + \delta_2(x) \times y + x \times \delta_2(y) \\
&= \delta_1(x) \times y + \delta_2(x) \times y + x \times \delta_1(y) + x \times \delta_2(y) \\
&= (\delta_1(x) + \delta_2(x)) \times y + x \times (\delta_1(y) + \delta_2(y)) \\
&= (\delta_1 + \delta_2)(x) \times y + x \times (\delta_1 + \delta_2)(y)
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $\delta_1 + \delta_2$ est une dérivation.

b. Soit $(x,y) \in E^2$. Alors

$$\begin{aligned}
[\delta_1,\delta_2](x+y) &= \delta_1 \circ \delta_2(x+y) - \delta_2 \circ \delta_1(x+y) \\
&= \delta_1(\delta_2(x+y)) - \delta_2(\delta_1(x+y)) \\
&= \delta_1(\delta_2(x)+\delta_2(y)) - \delta_2(\delta_1(x)+\delta_1(y)) \\
&= \delta_1(\delta_2(x)) + \delta_1(\delta_2(y)) - \delta_2(\delta_1(x)) - \delta_2(\delta_1(y)) \\
&= \delta_1(\delta_2(x)) - \delta_2(\delta_1(x)) + \delta_1(\delta_2(y)) - \delta_2(\delta_1(y)) \\
&= \delta_1 \circ \delta_2(x) - \delta_2 \circ \delta_1(x) + \delta_1 \circ \delta_2(y) - \delta_2 \circ \delta_1(y) \\
&= (\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1)(x) + (\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1)(y) \\
&= [\delta_1,\delta_2](x) + [\delta_1,\delta_2](y) \\
[\delta_1,\delta_2](x\times y) &= \delta_1 \circ \delta_2(x\times y) - \delta_2 \circ \delta_1(x\times y) \\
&= \delta_1(\delta_2(x\times y)) - \delta_2(\delta_1(x\times y)) \\
&= \delta_1(\delta_2(x)\times y + x\times\delta_2(y)) - \delta_2(\delta_1(x)\times y + x\times\delta_1(y)) \\
&= \delta_1(\delta_2(x)\times y) + \delta_1(x\times\delta_2(y)) - \delta_2(\delta_1(x)\times y) - \delta_2(x\times\delta_1(y)) \\
&= \delta_1(\delta_2(x))\times y + \delta_2(x)\times\delta_1(y) + \delta_1(x)\times\delta_2(y) + x\times\delta_1(\delta_2(y)) \\
&\qquad - \delta_2(\delta_1(x))\times y - \delta_1(x)\times\delta_2(y) - \delta_2(x)\times\delta_1(y) - x\times\delta_2(\delta_1(y)) \\
&= \delta_1(\delta_2(x))\times y - \delta_2(\delta_1(x))\times y + x\times\delta_1(\delta_2(y)) - x\times\delta_2(\delta_1(y)) \\
&= (\delta_1(\delta_2(x)) - \delta_2(\delta_1(x)))\times y + x\times(\delta_1(\delta_2(y)) - \delta_2(\delta_1(y))) \\
&= (\delta_1 \circ \delta_2(x) - \delta_2 \circ \delta_1(x))\times y + x\times(\delta_1 \circ \delta_2(y) - \delta_2 \circ \delta_1(y)) \\
&= (\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1)(x)\times y + x\times(\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1)(y) \\
&= [\delta_1,\delta_2](x)\times y + x\times[\delta_1,\delta_2](y)
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $[\delta_1,\delta_2]$ est une dérivation de A.

2. **a.** Pour tout $x \in A$,

$$\begin{aligned}
[\delta, d_a](x) &= (\delta \circ d_a - d_a \circ \delta)(x) \\
&= \delta \circ d_a(x) - d_a \circ \delta(x) \\
&= \delta(d_a(x)) - d_a(\delta(x)) \\
&= \delta(a\times x - x\times a) - (a\times\delta(x) - \delta(x)\times a) \\
&= \delta(a\times x) - \delta(x\times a) - a\times\delta(x) + \delta(x)\times a \\
&= \delta(a)\times x + a\times\delta(x) - \delta(x)\times a - x\times\delta(a) - a\times\delta(x) + \delta(x)\times a \\
&= \delta(a)\times x - x\times\delta(a) \\
&= [\delta(a), x] = d_{\delta(a)}(x)
\end{aligned}$$

Ainsi $[\delta, d_a] = d_{\delta(a)}$.

b. Puisque d_a est une dérivation d'après la question **I.4.a**, on peut utiliser la question **III.2.a** pour affirmer que

$$[d_a, d_b] = d_{d_a(b)} = d_{[a,b]}$$

3. **a.** On formule l'hypothèse de récurrence suivante

$$\mathrm{HR}(n): \qquad \forall x \in A\ d_a^n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} \times x \times a^k$$

Initialisation : D'une part

$$d_a^0(x) = \mathrm{Id}_A(x) = x$$

et d'autre part

$$\sum_{k=0}^{0} (-1)^k \binom{0}{k} a^{-k} \times x \times a^k = (-1)^0 a^0 \times x \times a^0 = 1 \times x \times 1 = x$$

Ainsi HR(0) est vraie.

Hérédité : Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $x \in A$

$$\begin{aligned}
d_a^{n+1}(x) &= d_a^n(d_a(x)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} \times d_a(x) \times a^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} \times (a \times x - x \times a) \times a^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n+1-k} \times x \times a^k - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} \times x \times a^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n+1-k} \times x \times a^k - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} \times x \times a^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n+1-k} \times x \times a^k + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} \times x \times a^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n+1-k} \times x \times a^k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} \times x \times a^k \\
&\quad + (-1)^0 \binom{n}{0} a^{n+1} \times x \times a^0 + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} a^0 \times x \times a^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} \times x \times a^k \\
&\quad + (-1)^0 \binom{n+1}{0} a^{n+1} \times x \times a^0 + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} a^0 \times x \times a^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} \times x \times a^k \\
&\quad + (-1)^0 \binom{n+1}{0} a^{n+1} \times x \times a^0 + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} a^0 \times x \times a^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} \times x \times a^k
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{HR}(n+1)$ est vraie. **Conclusion :** $\mathrm{HR}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. D'après la question précédente,

$$\forall x \in A,\ d_a^{2m-1}(x) = \sum_{k=0}^{2m-1} \binom{n}{k} a^{2m-1-k} \times x \times a^k$$

Lorsque $k \in [\![m, 2m-1]\!]$, alors $a^k = 0$ et lorsque $k \in [\![0, m-1]\!]$, $2m-1-k \in [\![m, 2m-1]\!]$ donc $a^{2m-1-k} = 0$. Tous les termes de la somme précédente sont donc nuls. Ainsi

$$\forall x \in A,\ d_a^{2m-1}(x) = 0$$

Ainsi d_a^{2m-1} est l'application nulle, c'est-à-dire que d_a est nilpotente.

4. On formule l'hypothèse de récurrence suivante

$$\mathrm{HR}(n) : \qquad \delta^n(a \times b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^k(a) \times \delta^{n-k}(b)$$

Remarquons déjà que

$$\forall (a,b) \in A^2,\ \delta^0(a \times b) = \mathrm{Id}_A(a \times b) = a \times b = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} \delta^k(a) \times \delta^{0-k}(b)$$

Ainsi $\mathrm{HR}(0)$ est-elle vraie.
Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\delta^{n+1}(a \times b) &= \delta(\delta^n(a \times b)) \\
&= \delta\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^k(a) \times \delta^{n-k}(b)\right) \\
&= \sum_{k=0} \binom{n}{k} \delta(\delta^k(a) \times \delta^{n-k}(b)) \\
&\qquad \text{d'après la première propriété des dérivations} \\
&= \sum_{k=0} \binom{n}{k} \left(\delta^{k+1}(a) \times \delta^{n-k}(b) + \delta^k(a) \times \delta^{n-k+1}(b)\right) \\
&\qquad \text{d'après la seconde propriété des dérivations} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^{k+1}(a) \times \delta^{n-k}(b) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^k(a) \times \delta^{n+1-k}(b) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \delta^k(a) \times \delta^{n+1-k}(b) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^k(a) \times \delta^{n+1-k}(b) \\
&\qquad \text{par changement d'indice} \\
&= \binom{n}{n} \delta^{n+1}(a) \times \delta^0(b) + \binom{n}{0} \delta^0(a) \times \delta^{n+1}(b) + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) \delta^k(a) \times \delta^{n+1-k}(b) \\
&= \binom{n+1}{n+1} \delta^{n+1}(a) \times \delta^0(b) + \binom{n+1}{0} \delta^0(a) \times \delta^{n+1}(b) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \delta^k(a) \times \delta^{n+1-k}(b) \\
&\qquad \text{via la relation de Pascal et car } \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1 \text{ et } \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1 \\
&\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \delta^k(a) \times \delta^{n+1-k}(b)
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{HR}(n+1)$ est vraie.
Finalement, $\mathrm{HR}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.