Matrices

Solution 1.

On obtient après tout calcul,

$$\begin{pmatrix} -1-i & 1+2i \\ -5 & 8-5i \\ -2 & i \end{pmatrix}.$$

Solution 2.

D'après la formule définissant le produit matriciel,

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}.$$

Or,

$$(a+d)M = \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$M^2+(a+d)M+(ad-bc)\mathbb{I}_2 = \mathbb{O}_2.$$

Solution 3.

Notons, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, S_k la somme des coefficients de la k-ième colonne de A. D'après la formule définissant le produit matriciel,

$$UA = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \end{pmatrix}$$

De même, puisque $S_1+\dots+S_n = \sigma(A)$, on a

$$UAU = \begin{pmatrix} \sigma(A) & \sigma(A) & \dots & \sigma(A) \\ \sigma(A) & \sigma(A) & \dots & \sigma(A) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma(A) & \sigma(A) & \dots & \sigma(A) \end{pmatrix}$$

ainsi ,

$$UAU = \sigma(A)U.$$

Solution 4.

On a

$$A(B-A-\mathbb{I}_n) = \mathbb{I}_n$$

ainsi A est-elle inversible d'inverse $B - A - \mathbb{I}_n$ et donc

$$A(B - A - \mathbb{I}_n) = (B - A - \mathbb{I}_n)A$$

d'où $AB = BA$.

Solution 5.

Notons

$$C = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \text{ et } D = (d_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

- *Calcul de* C : pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on a
$$c_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j} = 2j.$$

- *Calcul de* D : pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on a

$$\begin{aligned} d_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} (i+k)(k-j) \\ &= (i-j) \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k^2 - ij \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= (i-j) \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - nij \end{aligned}$$

Solution 6.

On vérifie facilement que pour $x, y \in \mathbb{R}$, $M(x)M(y) = M(x+y)$. On a en particulier pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M(x)M(-x) = M(0) = I_3$, ce qui prouve que $M(x)$ est inversible. Ainsi $G \subset GL_3(\mathbb{R})$.
Vérifions que G est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$:

- $I_3 = M(0) \in G$;
- pour $x, y \in \mathbb{R}$, $M(x)M(y) = M(x+y) \in G$;
- pour $x \in \mathbb{R}$, $M(x)^{-1} = M(-x) \in G$.

Ceci prouve que G est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$. De plus, l'application $M : x \mapsto M(x)$ est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(G, \times)$ puisque $M(x)M(y) = M(x+y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. M est surjectif par définition de G. De plus, $M(x) = I_3$ implique $x = 0$, ce qui prouve que M est injectif. Ainsi M est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(G, \times)$.

Solution 7.

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!]$. Alors

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} \geqslant 0$$

comme somme de termes positifs.

Soit $j \in [\![1, q]\!]$. La somme des coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne de AB est :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(AB)_{ij} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kj}\\ &= \sum_{k=1}^{p}\left(B_{kj}\sum_{i=1}^{n}A_{ik}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{p}B_{kj} \qquad \text{car } \sum_{i=1}^{n}A_{ik}=1\\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi AB est stochastique.

Solution 8.

1. Posons

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que $A = I_3 + J$. On remarque que $J^3 = 0$ et que J et I_3 commutent. On a donc, d'après la formule du binôme,

$$A^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$

Puisque

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on a,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2+n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Posons

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que $A = aI_3 + bJ$. On remarque que $J^2 = 0$ et que bJ et aI_3 commutent. On a donc, d'après la formule du binôme,

$$A^n = a^nI_3 + na^{n-1}bJ.$$

Ainsi, pour $n \geqslant 2$,

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

3. Grâce aux formules d'addition trigonométriques, on prouve sans peine par récurrence sur n que

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

Remarque. A est une matrice de rotation vectorielle plane , ce qui rend le calcul de A^n banal… ■

4. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 14 & -10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},$$

ainsi, par un calcul sans difficulté,

$$A^2 - 5A + 6I_2 = 0.$$

On remarque que le polynôme

$$P = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$$

est annulateur de la matrice A. Effectuons la division euclidienne de X^n par $P \neq 0$. Il existe un polynôme réel Q et deux réels a_n, b_n tels que

$$X^n = PQ + a_n X + b_n.$$

Après évaluation en 2 et 3 , on obtient le système

$$\begin{cases} 2^n & = & 2a_n & + & b_n \\ 3^n & = & 3a_n & + & b_n \end{cases},$$

d'où

$$a_n = 3^n - 2^n \quad \text{et} \quad b_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n.$$

On a donc

$$\begin{aligned} A^n &= a_n A + b_n I_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ 2 \cdot 3^n - 2^{n+1} & 2 \cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Solution 9.

Notons

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Le système se traduit par l'égalité matricielle

$$X_{n+1} = MX_n,$$

où l'on a posé

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, par une récurrence immédiate,

$$\forall n \geqslant 0 \ , \ X_n = M^n X_0.$$

Notons $U = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$ de sorte que

$$M = U - I_3.$$

Puisque $U^2 = 3U$, on a

$$(M + I_3)^2 = 3(M + I_3),$$

c'est-à-dire $M^2 - M - 2I_3$. Le polynôme

$$P = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$$

est annulateur de la matrice M. Effectuons la division euclidienne de X^n par $P \neq 0$. Il existe un polynôme réel Q et deux réels a_n, b_n tels que

$$X^n = PQ + a_n X + b_n.$$

Après évaluation en -1 et 2, on obtient le système

$$\begin{cases} 2^n &= 2a_n + b_n \\ (-1)^n &= -a_n + b_n \end{cases},$$

d'où

$$a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}.$$

On a donc $M^n = a_n M + b_n I_3$, d'où l'expression de M^n ,

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{2^n+2(-1)^n}{3} & \frac{2^n-(-1)^n}{3} & \frac{2^n-(-1)^n}{3} \\ \frac{2^n-(-1)^n}{3} & \frac{2^n+2(-1)^n}{3} & \frac{2^n-(-1)^n}{3} \\ \frac{2^n-(-1)^n}{3} & \frac{2^n-(-1)^n}{3} & \frac{2^n+2(-1)^n}{3} \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{cases} u_n &= \frac{2^n+2(-1)^n}{3}u_0 + \frac{2^n-(-1)^n}{3}v_0 + \frac{2^n-(-1)^n}{3}w_0 \\ v_n &= \frac{2^n-(-1)^n}{3}u_0 + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}v_0 + \frac{2^n-(-1)^n}{3}w_0 \\ w_n &= \frac{2^n-(-1)^n}{3}u_0 + \frac{2^n-(-1)^n}{3}v_0 + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}w_0 \end{cases}$$

Solution 10.

Le polynôme

$$P = X^3 - X^2 - 4X + 4 = (X-1)(X-2)(X+2)$$

est annulateur de la matrice A. Effectuons la division euclidienne de X^n par $P \neq 0$. Il existe un polynôme réel Q et trois réels a_n, b_n, c_n tels que

$$X^n = PQ + a_n X^2 + b_n X + c_n.$$

Après évaluation en ± 2 et 1, on obtient le système

$$\begin{cases} 1 &= a_n + b_n + c_n \\ 2^n &= 4a_n + 2b_n + c_n \\ (-2)^n &= 4a_n - 2b_n + c_n \end{cases},$$

d'où

$$\begin{cases} a_n &= \dfrac{-1 + 2^n - 2^{n-2}\left[1 + (-1)^{n+1}\right]}{3} \\ b_n &= \left[1 + (-1)^{n+1}\right]2^{n-2} \\ c_n &= \dfrac{4 - 2^n - 2^{n-1}\left[1 + (-1)^{n+1}\right]}{3} \end{cases},$$

et

$$A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathbb{I}_p.$$

Solution 11.

1. On a $A^2 = I_3$,
$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et $B^3 = I_3$. On en déduit les calculs suivants :
   - *Puissances de* A : si n est pair $A^n = I_3$, sinon $A^n = A$.
   - *Puissances de* B : si $n \equiv 0\,[3]$, $B^n = I_3$; si $n \equiv 1\,[3]$, $B^n = B$; si $n \equiv 2\,[3]$, $B^n = B^2$.
2. On a
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
puis
$$AB^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B^2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution 12.

Posons
$$I = I_3 \text{ et } K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
de sorte que $M = bI + aK$. Comme I et K commutent, on peut appliquer la formule du binôme :
$$M^n = (bI + aK)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} a^\ell b^{n-\ell} K^\ell.$$
On prouve par une récurrence immédiate que, pour tout entier $m \geqslant 1$, on a :
$$K^m = \begin{pmatrix} 2^{m-1} & 0 & 2^{m-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{m-1} & 0 & 2^{m-1} \end{pmatrix}.$$
En notant
$$s = \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} a^\ell b^{n-\ell} 2^{\ell-1},$$
on aboutit donc à :
$$M^n = \begin{pmatrix} s + b^n & 0 & s \\ 0 & b^n & 0 \\ s & 0 & s + b^n \end{pmatrix}.$$

On conclut en appliquant à nouveau la formule du binôme :

$$\begin{aligned} s &= \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} a^\ell b^{n-\ell} 2^{\ell-1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} a^\ell b^{n-\ell} 2^\ell - b^n \right) \\ &= \frac{(b+2a)^n - b^n}{2}. \end{aligned}$$

Solution 13.

Notons $B_k = A^k + A^{-k}$. On a l'égalité suivante en termes de fractions rationnelles :

$$X^{k+2} + X^{-(k+2)} = \left(X^{k+1} + X^{-(k+1)}\right)(X + X^{-1}) - (X^k + X^{-k})$$

On peut tout à fait substituer la matrice A à X, ce qui donne $B_{k+2} = B_{k+1}B_1 - B_k = B_{k+1} - B_k$ puisque $B_1 = I_n$. Quitte à raisonner coefficient par coefficient, on peut appliquer les résultats connus sur les suites récurrentes linéaires d'ordre deux pour affirmer qu'il existe $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ B_k = r^n(\cos(k\theta)C + \sin(k\theta)D)$$

où $re^{\pm i\theta}$ sont les racines complexes conjuguées de $X^2 - X + 1$. On trouve facilement $r = 1$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$. On a de plus $B_0 = 2I_n$ et $B_1 = I_n$. Les matrices C et D sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} C = 2I_n \\ \frac{1}{2}C + \frac{\sqrt{3}}{2}D = I_n \end{cases}$$

On obtient $C = 2I_n$ et $D = 0$. On a donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k + A^{-k} = 2\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) I_n$$

Solution 14.

1. **a.** On pose $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $E = \operatorname{vect}(U, V, W)$. Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La famille (U, V, W) est libre : c'est donc une base de E et $\dim E = 3$.

   b. E est un sous-espace vectoriel de E donc un sous-groupe additif de E. De plus, Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure. Enfin, $I_2 \in E$. E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc un anneau.

   Cet anneau n'est pas commutatif : considérer par exemple les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   c. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont les produits des coefficients diagonaux des deux matrices : on en déduit que le produit de deux éléments G est un élément de G. De plus, une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont non nuls est inversible et les coefficients diagonaux de l'inverse sont les inverses des coefficients diagonaux : on en déduit que tout élément de G admet un inverse dans G. Ainsi G est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ donc un groupe.

2. Considérons dans un premier temps le cas $a = b$. Alors $A = aI_2 + C$ avec $C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme aI_2 et C commutent, la formule du binôme de Newton donne :

$$A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} C^k$$

On a $C^k = 0$ pour $k \geqslant 2$ donc pour $p \geqslant 1$, $A^p = \begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1}c \\ 0 & a^p \end{pmatrix}$ et bien entendu, $A^0 = I_2$.

Considérons maintenant le cas $a \neq b$. Alors, à l'aide des résultats sur les matrices triangulaires supérieures énoncés plus haut, on peut affirmer que $A^p = \begin{pmatrix} a^p & c_p \\ 0 & b^p \end{pmatrix}$ où c_p est un réel. En considérant que $M^{p+1} = M^p.M = M.M^p$, on obtient $c_{p+1} = a^p c + bc_p = ac_p + b^p c$. On obtient donc $c_p = c\dfrac{b^p - a^p}{b-a}$. Ainsi $A^p = \begin{pmatrix} a^p & c\frac{b^p-a^p}{b-a} \\ 0 & b^p \end{pmatrix}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

3. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| e^x - \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[0,x]} e^t = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \max(1, e^x)$$

car exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|x|^n}{n!} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{x^p}{p!} = e^x$.

De plus, $\sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{px^{p-1}}{p!} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{x^p}{p}$. On en déduit qu'on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{px^{p-1}}{p!} = e^x$.

Considérons dans un premier temps le cas $a = b$. En raisonnant coefficient par coefficient et en utilisant ce qui précède, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{A^p}{p!} = \begin{pmatrix} e^a & e^a c \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$.

Considérons maitenant le cas $a \neq b$. En raisonnant à nouveau coefficient par coefficient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{A^p}{p!} = \begin{pmatrix} e^a & \frac{e^b - e^a}{b-a} c \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$.

4. $f(0_2) = I_2 \neq 0_2$ donc f n'est pas linéaire. Soient $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix}$ des éléments de E tels que $f(A) = f(A')$. Comme la fonction exp est injective (sur $\mathbb{R}$), $a = a'$ et $b = b'$. On en déduit ensuite $c = c'$. Par conséquent, $A = A'$ ce qui prouve l'injectivité de f.

f n'est pas surjective, il suffit de considérer un élément de E dont l'un des éléments diagonaux est négatif, il ne peut admettre d'antécédent par f.

Il est clair que tout élément de E admet une image par f dans G donc $\operatorname{Im} f \subset G$. Réciproquement soit $B = \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix} \in G$. Par conséquent $a' > 0$ et $b' > 0$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in E$.

Cas $a' \neq b'$ **:** Si $f(A) = B$ alors nécessairement $a \neq b$.

$$f(A) = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^a = a' \\ e^b = b' \\ dC\dfrac{e^b - e^a}{b-a} = c' \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \ln a' \\ b = \ln b' \\ dC = c'\dfrac{\ln b' - \ln a'}{b' - a'} \end{cases}$$

Cas $a' = b'$ **:**

$$f(A) = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^a = a' \\ ce^a = c' \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \ln a' \\ dC = \dfrac{c'}{a'} \end{cases}$$

Ainsi tout élément de G admet un antécédent par f dans E, ce qui prouve que $G \subset \operatorname{Im} f$. Finalement $G = \operatorname{Im} f$.

Solution 15.

Première méthode Le calcul de M^2 donne $M^2 = M + 2I$ i.e. $M^2 - M - 2I = 0$. Soit R_n le reste de la division euclidienne de X^n par $P = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$. R_n est de degré 1 donc de la forme $a_n X + b_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Comme -1 et 2 sont racines de P, on trouve $-a_n + b_n = (-1)^n$ et $2a_n + b_n = 2^n$. Il vient $a_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$ et $b_n = \dfrac{2^n + 2.(-1)^n}{3}$. On a alors $M^n = a_n M + b_n I$.

Deuxième méthode En calculant les premières puissances de M, on est amené à faire l'hypothèse de récurrence suivante :

$\mathrm{HR}(n)$: M^n est de la forme $a_n I + b_n M$.

La récurrence est facile et nous donne de plus les relations de récurrence $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Un calcul rapide nous montre que les suites (a_n) et (b_n) vérifient la relation de récurrence $u_{n+2} - u_{n+1} + 2b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme caractéristique associé à cette relation de récurrence est $P = X^2 - X + 2 = (X+1)(X-2)$. Ainsi a_n et b_n sont de la forme $\lambda(-1)^n + \mu 2^n$. Comme $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, on trouve λ et μ dans les deux cas puis $a_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$ et $b_n = \dfrac{2^n + 2.(-1)^n}{3}$.

Solution 16.

Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un vecteur colonne *non nul*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

tel que $AX = 0$. Soit $i_0 \leqslant n$ tel que $|x_{i_0}| > 0$ soit le maximum des $|x_i|, i \leqslant n$. Puisque $AX = 0$, on a en particulier

$$-a_{i_0,i_0} x_{i_0} = \sum_{j \neq i_0}^{n} a_{i_0,j} x_j.$$

Or , d'après l'inégalité triangulaire ,

$$\Big| \sum_{j \neq i_0}^{n} a_{i_0,j} x_j \Big| \leqslant \sum_{j=1, j \neq i_0}^{n} |a_{i_0,j}||x_j|,$$

et , par définition de i_0 ,

$$\sum_{j \neq i_0}^{n} |a_{i_0,j}||x_j| \leqslant \Big(\sum_{j \neq i_0}^{n} |a_{i_0,j}| \Big) |x_{i_0}|$$

d'où

$$|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| \leqslant \Big(\sum_{j \neq i_0}^{n} |a_{i_0,j}| \Big) |x_{i_0}|$$

et puisque $|x_{i_0}| \neq 0$,

$$|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0}^{n} |a_{i_0,j}|$$

ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé.

Solution 17.

▶ $\mathfrak{U}_n$ est non vide car contient la matrice I_n.

- $\mathfrak{U}_n$ est stable par le produit matriciel. Soient M et N dans $\mathfrak{U}_n$. Pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on

$$(MN)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (M)_{i,k}(N)_{k,j}.$$

  - Si $j < i$, on a $(M)_{i,k} = 0$ pour tout $k < i$ et $(N)_{k,j} = 0$ pour tout $k > j$. Ainsi, pour tout k, $(M)_{i,k}(N)_{k,j} = 0$. la matrice MN est donc triangulaire suppérieure.
  - Si $i = j$, on peut reprendre les mêmes arguments : $(M)_{i,k} = 0$ pour tout $k < i$ et $(N)_{k,i} = 0$ pour tout $k > i$. Ainsi, pour tout $k \neq i$, $(M)_{i,k}(N)_{k,j} = 0$. De plus, $(M)_{i,i}(N)_{i,i} = 1 \times 1 = 1$. On a donc $MN \in \mathfrak{U}_n$.

- $\mathfrak{U}_n$ est stable par passage à l'inverse. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dans $\mathfrak{U}_n$. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs colonnes de taille n tels que $MX = Y$. Cette égalité équivaut au système suivant,

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n-1 \ , \ x_i + \sum_{j=i+1}^{n} m_{i,j}x_j = y_i \ \text{ et } \ x_n = y_n.$$

  Ainsi, $x_n = y_n$, puis

$$x_{n-1} = y_{n-1} - m_{n-1,n}x_n = y_{n-1} - m_{n-1,n}y_n.$$

  Par une récurrence finie, on prouve alors sans peine que x_{n-k} peut s'écrire sous la forme

$$x_{n-k} = y_{n-k} + \sum_{j=n-k+1}^{n} n_{n-k,j}y_j,$$

  avec les $n_{k,\ell}$ dans $\mathbb{R}$. On a donc prouvé que $Y = MX$ équivaut à $X = NY$ avec $N = (n_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale : M est inversible et son inverse N appartient à $\mathfrak{U}_n$.

- $\mathfrak{U}_n$ est donc un sous-groupe de T_n^+.

Solution 18.

On pivote en colonnes sur la matrice $\left(\dfrac{A}{\mathbb{I}_4}\right)$ de manière à ramener la partie supérieure à $\mathbb{I}_4$. La partie inférieure sera alors A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -9 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) C_1 \leftrightarrow C_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -9 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{lcl} C_2 & \leftarrow & C_2 + C_1 \\ C_4 & \leftarrow & C_4 - C_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -9 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) C_2 \leftrightarrow C_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -8 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \begin{array}{lcl} C_3 & \leftarrow & C_3 + 9C_2 \\ C_4 & \leftarrow & C_4 - 3C_2 \end{array}$$

Ainsi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Solution 19.

1. Comme ${}^tA_n = -A_n$, $\det(A_n) = (-1)^n \det(A_n)$. Comme n est impair, $\det(A_n) = 0$ et A_n n'est pas inversible.

2. On procède par pivot de Gauss : on effectue les mêmes opérations sur les lignes de A_n et I_n. Commençons par effectuer les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$ pour i variant de 1 à n. Ainsi A_n est transformé en :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice I_n est transformée en :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deux cas se présentent alors :

- Si n est impair, on effectue l'opération $L_n \leftarrow L_1 + L_3 + \dots + L_{n-2}$ et A_n est alors transformée en une matrice dont la dernière ligne est nulle. A_n n'est donc pas inversible.
- Si n est pair, on effectue l'opération $L_n \leftarrow L_1 + L_3 + \dots + L_{n-1}$. Ainsi A_n est transformée en :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice I_n est transformée en :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On effectue enfin les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$ pour i variant de $n-1$ à 1. A_n est alors transformée en I_n et I_n est transformée en

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ -1 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution 20.

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$. On va effectuer les mêmes opérations sur les lignes de A_n et I_n.

On effectue d'abord les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ pour i variant de n à 2. A_n est alors transformée en la matrice triangulaire supérieure où tous les coefficients de la partie triangulaire supérieure sont égaux à 1 et I_n est tranformée en la matrice avec une diagonale de 1, une sous-diagonale de -1 et des 0 ailleurs.
On effectue ensuite les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$ pour i variant de 1 à $n-1$. A est transformée en I_n et I_n est transformée en la matrice B_n formée d'une diagonale de 2, d'une sous-diagonale et d'une sur-diagonale de -1 et de zéros partout ailleurs. Ceci prouve que A_n est inversible d'inverse B_n.

Solution 21.

Dans tout ce qui suit, on notera les vecteurs colonnes

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

et

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. La première ligne de A_1 étant nulle, A_1 n'est pas inversible. Un vecteur colonne X appartient à $\mathrm{Ker}(A_1)$ *si et seulement si*

$$-x_1 + x_2 = 0 \text{ et } -2x_3 = 0,$$

ie X est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } x_1 \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\mathrm{Ker}(A_1) = \mathrm{vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{vect}(e_2 + e_3).$$

Puisque les deux premières colonnes de A_1 sont colinéaires à e_2 et la dernière à e_3, on a

$$\mathrm{Im}(A_1) = \mathrm{vect}(e_2, e_3) \ \text{ et } \ \mathrm{rg}(A_1) = 2.$$

2. Appliquons la méthode du pivot de Gauss...

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

par $L_1 \leftarrow -L_2$ et $L_2 \leftarrow L_1$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

puis, en effectuant $L_3 \leftrightarrow L_3 + L_1$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

continuons par $L_3 \leftarrow (-L_3 + L_2)/3$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right]$$

puis $L_1 \leftrightarrow L_1 + L_2 + L_3$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right]$$

La matrice A_2 est donc inversible d'inverse

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

3. La dernière ligne de A_3 étant la différence des deux premières, les lignes de la matrice forment une famille liée de $\mathbb{R}^3$ et A_3 n'est donc pas inversible. Un vecteur colonne X appartient à $\mathrm{Ker}(A_3)$ *si et seulement si*

$$-x_1 + x_2 = 0 \ \text{ et } \ 2x_3 = 0,$$

ie X est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \text{ avec } x_1 \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\mathrm{Ker}(A_3) = \mathrm{vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{vect}(e_2 + e_3).$$

Puisque les deux premières colonnes de A_1 sont égales, on a

$$\mathrm{Im}(A_3) = \mathrm{vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{vect}(e_1 + e_3, -e_2 + e_3),$$

et $\mathrm{rg}(A_3) = 2$.

4. La deuxième ligne de A_4 étant nulle, A_4 n'est pas inversible. Un vecteur colonne X appartient à $\mathrm{Ker}(A_4)$ *si et seulement si* $2x_1 - x_3 = 0$, ie X est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}, \text{ avec } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\mathrm{Ker}(A_4) = \mathrm{vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{vect}(e_1 + 2e_3, e_2).$$

Puisque toutes les colonnes de A_4 sont colinéaires à la dernière, on a

$$\mathrm{Im}(A_4) = \mathrm{vect}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{vect}(e_3 - e_1),$$

et $\mathrm{rg}(A_4) = 1$.

5. La dernière ligne de A_5 étant égale à la première, les lignes de la matrice forment une famille liée de $\mathbb{R}^3$ et A_5 n'est donc pas inversible. Un vecteur colonne X appartient à $\mathrm{Ker}(A_5)$ *si et seulement si*

$$-x_1 = 0 \text{ et } -x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

ie X est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \text{ avec } x_2 \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\mathrm{Ker}(A_5) = \mathrm{vect}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{vect}(e_2 - e_3).$$

Puisque les deux dernières colonnes de A_5 sont égales mais non colinéaires à la première, on a

$$\mathrm{Im}(A_5) = \mathrm{vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{vect}(e_1 + e_2 + e_3, e_2),$$

et $\mathrm{rg}(A_5) = 2$.

6. Les première et troisième lignes de A_6 étant nulles, A_6 n'est donc pas inversible. Un vecteur colonne X appartient à $\mathrm{Ker}(A_6)$ *si et seulement si* $x_1 - x_2 - x_3 = 0$, ie X est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \text{ avec } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\mathrm{Ker}(A_6) = \mathrm{vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{vect}(e_1 + e_3, e_2 - e_3).$$

Puisque toutes les colonnes de A_6 sont colinéaires à la première, on a

$$\mathrm{Im}(A_6) = \mathrm{vect}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{vect}(e_2),$$

et $\mathrm{rg}(A_6) = 1$.

7. La deuxième ligne de A_7 étant nulle, A_7 n'est pas inversible. Un vecteur colonne X appartient à $\mathrm{Ker}(A_7)$ *si et seulement si* $-x_2 = 0$ et $-2x_1 = 0$, ie X est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } x_3 \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\mathrm{Ker}(A_7) = \mathrm{vect}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{vect}(e_3).$$

Puisque la dernière colonne de A_7 est nulle et les deux autres non-colinéaires, on a

$$\mathrm{Im}(A_7) = \mathrm{vect}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{vect}(e_1, e_3),$$

et $\mathrm{rg}(A_7) = 2$.

8. Appliquons la méthode du pivot de Gauss...

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

par $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

puis, en effectuant $L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Un vecteur X appartient donc à $\mathrm{Ker}(A_8)$ *si et seulement si*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_2 + 2x_3 = 0,$$

ie X est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } x_3 \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\mathrm{Ker}(A_8) = \mathrm{vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{vect}(e_1 - 2e_2 + e_3).$$

Puisque les deux premières colonnes de A_8 ne sont pas colinéaires, on a

$$\mathrm{Im}(A_8) = \mathrm{vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right],$$

donc $\mathrm{Im}(A_8) = \mathrm{vect}(e_1 + e_2 + 5e_3, e_1 + 3e_2 + 3e_3)$, et $\mathrm{rg}(A_8) = 2$.

Solution 22.

1. Il est clair que le carré de la matrice vaut l'identité : est donc inversible et égale à son propre inverse.

2. Notons M la matrice de l'énoncé et U la matrice $(1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Puisque $M + I_n = U$ et que $U^2 = nU$, on a

$$(M + I_n)^2 = n(M + I_n),$$

ie $M^2 + (2-n)M = (n-1)I_n$. Ainsi,

$$M\left(\frac{M}{n-1} - \frac{n-2}{n-1}I_n\right) = I_n.$$

La matrice M est donc inversible d'inverse

$$M^{-1} = \frac{M}{n-1} - \frac{n-2}{n-1}I_n = \frac{U}{n-1} - I_n.$$

Solution 23.

1. On a clairement

$$(\mathbb{I}_n - A)(\mathbb{I}_n + A) = (\mathbb{I}_n + A)(\mathbb{I}_n - A),$$

d'où après multiplication à droite et à gauche par l'inverse de $\mathbb{I}_n + A$,

$$(\mathbb{I}_n + A)^{-1}(\mathbb{I}_n - A) = (\mathbb{I}_n - A)(\mathbb{I}_n - A)^{-1}.$$

2. Soient X, Y deux vecteurs colonnes de taille n. D'après la question précédente , on a

$$(\mathbb{I}_n + B)X = Y$$

si et seulement si

$$X + (\mathbb{I}_n + A)^{-1}(\mathbb{I}_n - A)X = Y.$$

Puisque $\mathbb{I}_n + A$ est inversible , ceci est encore équivalent à ,

$$(\mathbb{I}_n + A)X + (\mathbb{I}_n - A)X = (\mathbb{I}_n + A)Y,$$

c'est-à-dire

$$X = \frac{\mathbb{I}_n + A}{2}Y.$$

La matrice $\mathbb{I}_n + B$ est donc inversible d'inverse

$$\frac{\mathbb{I}_n + A}{2}.$$

Solution 24.

1. En effectuant *successivement* sur A les opérations

$$L_k \longleftarrow L_k - L_{k+1}$$

pour k variant de 1 à $n-1$, on *transforme* la matrice en I_n. La matrice est donc inversible et son inverse d'obtient en effectuant la même séquence d'opérations sur I_n, on a donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Une méthode d'inversion avec polynômes.*

a. D'après la définition du produit matriciel, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$, J^k est la matrice dont tous les cœfficients sont nuls sauf ceux de la $k+1$-ième diagonale qui valent 1.

b. La matrice J est nilpotente d'indice n (ie $J^n = 0$ et $J^{n-1} \neq 0$). On a

$$A = I_n + J + \ldots + J^{n-1}.$$

c. Posons

$$P(X) = 1 + X + \ldots + X^n.$$

On a $A = P'(J)$. On remarque que

$$(1-X)P(X) = 1 - X^{n+1}.$$

Ainsi , en subsituant J à X dans cette égalité polynomiale,

$$(I_n - J)P(J) = I_n$$

donc $(I_n - J)A = I_n$ et A est inversible d'inverse

$$I_n - J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 25.

Effectuons des pivots en miroir :

1. En avant :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

On obtient par $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -17 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

par $L_2 \leftarrow L_2/-7$ et $L_3 \leftarrow -L_3/11$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/7 & 2/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/11 & -1/11 \end{array}\right]$$

Effectuons alors $L_2 \leftarrow L_2 - (3/7)L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & -8/11 & 4/11 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 & -17/77 & 3/77 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/11 & -1/11 \end{array}\right]$$

et finalement, par $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/7 & -5/77 & 19/77 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 & -17/77 & 3/77 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/11 & -1/11 \end{array}\right].$$

Ainsi la matrice est inversible et son inverse vaut

$$\begin{pmatrix} 1/7 & -5/77 & 19/77 \\ 2/7 & -17/77 & 3/77 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \end{pmatrix}.$$

2. Let's pivot !

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

On obtient en échangeant L_1 et L_2 :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

par $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 11 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

puis $L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -9 & 1 \end{array}\right]$$

puis $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 6L_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -30 & 55 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -20 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -9 & 1 \end{array}\right]$$

et finalement, par $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -19 & 35 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -20 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -9 & 1 \end{array}\right].$$

Ainsi la matrice est inversible d'inverse

$$\begin{pmatrix} -19 & 35 & -4 \\ 11 & -20 & 2 \\ 5 & -9 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Kein problem...

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Permutons les lignes L_1 et L_3 et multiplions la nouvelle première ligne par -1 :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Effectuons $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

et par $L_3 \leftarrow -(L_3 - 2L_1)/3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right]$$

et par $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right]$$

et finalement $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right]$$

ainsi la matrice est inversible et son inverse vaut :

$$\begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

4. Pivotons.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Effectuons les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow -L_3 + L1$, $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

puis $L_3 \leftarrow (L_3 + L_2)/3$ et $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 11 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

et par $L_4 \leftarrow (L_4 - 5L_3)/11$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/33 & -1/33 & -5/33 & 1/11 \end{array}\right]$$

puis $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_4$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_4$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 17/33 & 4/33 & 20/33 & -4/11 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 46/33 & -28/33 & 25/33 & -5/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/33 & -1/33 & -5/33 & 1/11 \end{array}\right]$$

et $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -16/33 & 37/33 & -13/33 & -4/11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/11 & 9/11 & -10/11 & -5/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/33 & -1/33 & -5/33 & 1/11 \end{array}\right]$$

et finalement $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2/33 & -17/33 & 47/33 & 6/11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/11 & 9/11 & -10/11 & -5/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/33 & -1/33 & -5/33 & 1/11 \end{array}\right]$$

donc la matrice est inversible d'inverse :

$$\begin{pmatrix} 2/33 & -17/33 & 47/33 & 6/11 \\ -3/11 & 9/11 & -10/11 & -5/11 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 4/33 & -1/33 & -5/33 & 1/11 \end{pmatrix}.$$

Solution 26.

1. Un calcul donne $A^3 - A = 4\mathbb{I}_3$.
2. On a
$$A \times \frac{1}{4}(A^2 - \mathbb{I}_3) = \mathbb{I}_3,$$
ainsi A est inversible et
$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - \mathbb{I}_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution 27.

1. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
On a clairement
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(e_1, e_2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{vect}(e_3).$$
2. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. On a
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
On a clairement
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(e_1 + e2 + e_3, -e_1 + e_2 - e_3) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(f) = \{0\}.$$
3. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (1)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$. On a
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$
On a clairement
$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{vect}(3e_1 + e_2, -2e_1 + e_3).$$

4. Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On a

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a clairement

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{vect}(1, 2X, 3X^2) = \mathbb{R}_2[X]$$

et

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{vect}(1) = \mathbb{R}_0[X].$$

Solution 28.

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- Après tout calcul, on trouve
$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{vect}(e_1 + e_2 + e_3).$$
- De même,
$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{vect}(2e_1 - e_2 - e_3, -e_1 + 2e_2 - e_3).$$
- Comme $A^2 = A$, f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

Solution 29.

Pour trouver des bases de l'image et du noyau, on pivote en colonnes sur la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 11 & 22 \\ 1 & 7 & 7 & 14 \\ \hline 1 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} C_2 & \leftarrow & 11C_2 + 7C_1 \\ C_4 & \leftarrow & 11C_4 + 3C_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 7 & -7 & -11 \\ 0 & 11 & -11 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} C_3 & \leftarrow & C_3 - C_2 \\ C_4 & \leftarrow & C_4 - 2C_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 7 & -7 & -1 \\ 0 & 11 & -11 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C_4 \leftarrow \frac{C_4}{11}$$

Par conséquent, $((-7, -11, 1), (-1, -2, 1))$ est une base de $\operatorname{Ker} A$ et $((-11, 0, 1), (0, 11, 7))$ est une base de $\operatorname{Im} A$.

Pour trouver des systèmes d'équations cartésiennes de l'image et du noyau, on pivote en lignes sur la matrice suivante :

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} -11 & 7 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} -11 & 7 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 77 & 14 & 1 & 0 & 11 \end{array}\right) L_3 \leftarrow 11L_3 + L_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} -11 & 7 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7 & 11 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2$$

Ainsi un système d'équations cartésiennes minimal de $\operatorname{Ker} A$ est

$$\begin{cases} -11x + 7y + \phantom{11z+{}} 3t = 0 \\ \phantom{-11x+{}} y + 11z + 2t = 0 \end{cases}$$

et une équation cartésienne de $\operatorname{Im} A$ est

$$x - 7y + 11z = 0$$

Solution 30.

Notons c_1, c_2, c_3 et c_4 les colonnes de A. On remarque que $c_3 = 0$ et que $c_4 = -2c_1$. En fin c_2 et c_1 ne sont pas proportionnelles donc (c_1, c_2) est une base de $\operatorname{Im} A$.
Notons (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{K}^4$. Comme $c_3 = 0$, on a $e_3 \in \operatorname{Ker} f$. Comme $2c_1 + c_4 = 0$, on a $2e_1 + e_4 \in \operatorname{Ker} f$. Les vecteurs e_3 et $2e_1 + e_4$ ne sont pas proportionnels et, d'après le théorème du rang, $\operatorname{Ker} A$ est de dimension 2. Ainsi $(e_3, 2e_1 + e_4)$ est une base de $\operatorname{Ker} A$.

Solution 31.

Déterminons le rang de A par la méthode du pivot de Gauss...

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Effectuons la permutation $L_1 \iff L_2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

puis $L_2 \iff L_2 - 2L_1$, $L_3 \iff L_3 - aL_1$ et $L_4 \iff L_4 - 4L_1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1+a & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

et $L_3 \iff L_3 - 2L_2$, $L_4 \iff L_4 - 3L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5+a & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que les deux dernières lignes de cette matrices sont liées *si et seulement si*

$$\begin{vmatrix} -5+a & -5 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -5a + 10 = 0,$$

ie $a = 2$.

- *Cas 1* : $a \neq 2$. Le rang vaut 4.
- *Cas 2* : $a = 2$. Le rang vaut 3.

Solution 32.

1. Comme $\dim(\mathrm{Im}(M)) = 1$, il existe un vecteur colonne non nul U tel que $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{vect}(U)$. Pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, il existe $v_j \in \mathbb{R}$ tel que la j-ième colonne de M soit égale à $v_j U$. En notant V le vecteur colonne de composantes $v_1, \dots, v_n$, on a bien $M = U^t V$.
2. Pour tout $n \geqslant 2$, par associativité du produit matriciel :

$$M^n = U({}^tVU)^{n-1}\,{}^tV.$$

Or ${}^tVU$ est la matrice de taille 1 égale à $(\mathrm{tr}(M))$. Ainsi :

$$\forall n \geqslant 2, \quad M^n = (\mathrm{tr}(M))^{n-1} M.$$

3. D'après le calcul précédent, une matrice M de rang 1 est une matrice de projection *si et seulement si* $\mathrm{tr}(M) = 1$.
4. D'après ce qui précède, une matrice M de rang 1 est nilpotente *si et seulement si* $\mathrm{tr}(M) = 0$.

Solution 33.

Soit $X \in \mathrm{Ker}\, A$. On a donc $AX = 0$ puis ${}^tAAX = 0$ donc $X \in \mathrm{Ker}\, {}^tAA$. Ainsi $\mathrm{Ker}\, A \subset \mathrm{Ker}\, {}^tAA$.
Soit maintenant $X \in \mathrm{Ker}\, {}^tAA$. On a donc ${}^tAAX = 0$ puis ${}^tX^tAAX = 0$. Notons $Y = AX$. Ainsi ${}^tYY = 0$. Or ${}^tYY$ est la somme des carrés des composantes de Y donc $Y = 0$ i.e. $AX = 0$. D'où $X \in \mathrm{Ker}\, A$. Ainsi $\mathrm{Ker}\, {}^tAA \subset \mathrm{Ker}\, A$.
Finalement, $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, {}^tAA$ et $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, {}^tAA$ via le théorème du rang (A et ${}^tAA$ ont le même nombre de colonnes). En changeant A en ${}^tA$, on a également $\mathrm{rg}\, {}^tA = \mathrm{rg}\, A^tA$. Or $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, {}^tA$. Ainsi $\mathrm{rg}\, {}^tAA = \mathrm{rg}\, A^tA = \mathrm{rg}\, A$.

Solution 34.

1. Supposons qu'il existe $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $f(A) = 0$. Alors pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = f(MA^{-1}A) = f(MA^{-1})f(A) = 0$, ce qui contredit le fait que f est non constamment nulle.
2. **a.** Soit A_i diagonale, dont les $r+1$ premiers éléments diagonaux valent 1, à l'exception du $i^{\text{ème}}$ nul, ainsi que tous les autres éléments diagonaux (ceci a du sens car $r < n$). Le rang de A_i est clairement égal à r qui est le rang de A : A_i est donc équivalente à A ; par ailleurs, $\prod_{k=1}^{r+1} A_k = 0$.

b. $f(0) = f(0 \times 0) = f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. On ne peut avoir $f(0) = 1$ sinon pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = f(M)f(0) = f(M \times 0) = f(0) = 1$, ce qui contredit le fait que f n'est pas constamment égale à 1. Ainsi $f(A_1)...f(A_{r+1}) = f(0) = 0$; l'un des $f(A_i)$ est donc nul. Or il existe des matrices inversibles P et Q telles que $A = PA_iQ$, ce qui donne $f(A) = 0$.

3. Ainsi, f est nulle sur les matrices non inversibles, et par ailleurs induit un morphisme de groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}^*$. Exemple : le déterminant (qu'on peut composer avec un morphisme de $\mathbb{R}^*$ dans lui-même, par exemple $x \mapsto x^k$, $k \in \mathbb{Z}^*$...)

Solution 35.

On a $U \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$ donc $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \geqslant 1$. Ainsi $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n$. Donc $\operatorname{rg} {}^t(A - \lambda I_n) < n$ i.e. $\operatorname{rg}({}^tA - \lambda I_n) < n$. Par conséquent, $\dim \operatorname{Ker}({}^tA - \lambda I_n) \geqslant 1$. Ainsi il existe $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que ${}^tAV = \lambda V$.

Solution 36.

Supposons $\operatorname{rg}(M) = r$. Il existe donc des matrices $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $M = PJ_rQ$ avec $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Notons $X_1, \dots, X_n$ les colonnes de P et $Y_1, \dots, Y_n$ les colonnes de ${}^tQ$. On vérifie alors que $M = X_1 {}^tY_1 + \dots + X_r {}^tY_r$. Les colonnes de P et ${}^tQ$ forment des familles libres puisque ces matrices sont inversibles. A fortiori, les sous-familles $(X_1, \dots, X_r)$ et $(Y_1, \dots, Y_r)$ sont libres.
Réciproquement soient $(X_1, \dots, X_r)$ et $(Y_1, \dots, Y_r)$ deux familles libres de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On peut les compléter respectivement en des bases $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Notons P la matrice de $GL_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont $X_1, \dots, X_n$ et Q la matrice de $GL_n(\mathbb{K})$ dont les lignes sont ${}^tY_1, \dots, {}^tY_n$. Puisque $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont des bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, les matrices P et Q sont inversibles. On vérifie que $M = PJ_rQ$ de sorte que M est de rang r.

Solution 37.

Notons

$$P = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & \mathbb{O}_n \\ -\mathbb{I}_n & \mathbb{I}_n \end{pmatrix}$$

et

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & -\mathbb{I}_n \\ \mathbb{O}_n & \mathbb{I}_n \end{pmatrix}.$$

Un calcul par bloc élémentaire aboutit à

$$N = PMQ = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O}_n \\ \mathbb{O}_n & B \end{pmatrix}.$$

Les matrices P et Q étant triangulaires sans coefficients nuls sur la diagonales, elles sont inversibles et le rang de M est donc égal à celui de N. Puisque les espaces vectoriels engendrés respectivement par les n premières colonnes et les n dernières colonnes de N sont en somme directe (cf. les blocs de zéros sur la diagonale « montante» de N) et de dimensions respectives $\operatorname{rg}(A)$ et $\operatorname{rg}(B)$, le rang de N vaut le rang de A plus celui de B.

Solution 38.

Supposons que A et B soient inversibles et posons $N = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & C' \\ \hline 0 & B^{-1} \end{array}\right)$ avec $C' = -A^{-1}CB^{-1}$. On vérifie alors que $MN = I_{n+p}$ donc M est inversible d'inverse N.
Supposons M inversible. Posons $M^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A' & C' \\ \hline D' & B' \end{array}\right)$ avec $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $D' \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Puisque

$MM^{-1} = I_{n,p}$, on obtient $\begin{cases} AA' + CD' = I_n \\ AC' + CB' = 0 \\ BD' = 0 \\ BB' = I_p \end{cases}$. Puisque $BB' = I_p$, B est inversible. Mais alors la relation $BD' = 0$ entraîne $D = 0$, qui elle-même entraîne $AA' = I_n$. A et B sont bien inversibles (et on obtient à nouveau le fait que M^{-1} est de la forme donnée dans l'énoncé).

Remarque. Bien évidemment, on peut généraliser le résultat par récurrence à des matrices triangulaires par blocs à plus de deux blocs diagonaux.
Par transposition, le résultat est également valable pour des matrices triangulaires par blocs inférieures. ■

Solution 39.

1. Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in \mathcal{G}$ avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$. Puisque $ME = EM = M$, un calcul par blocs donne $B = 0$, $C = 0$ et $D = 0$.

   Soit M' l'inverse de M dans $\mathcal{G}$. D'après ce qui précède, M' est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ avec $A' \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$. Or $MM' = E$ donc $AA' = I_r$, ce qui prouve que A est inversible.

   Il suffit alors de vérifier que l'application qui à $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{G}$ associe A est un morphisme de groupes de $\mathcal{G}$ dans $GL_r(\mathbb{K})$.

   Ce morphisme est clairement injectif donc $\mathcal{G}$ est isomorphe à un sous-groupe de $GL_r(\mathbb{K})$.

2. On sait que $E^2 = E$ donc E est une matrice de projecteur. Elle est donc semblable à une matrice $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ avec $r \in [\![1, n]\!]$ (E ne peut être nulle sinon $\mathcal{G} = \{0\}$). Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $E = P^{-1}J_rP$. L'application qui à $M \in \mathcal{G}$ associe PMP^{-1} induit un isomorphisme de groupes de $\mathcal{G}$ sur un groupe $\mathcal{G}'$ d'élément neutre J_r. La question précédente montre que $\mathcal{G}'$ est isomorphe à un sous-groupe de $GL_r(\mathbb{K})$ et donc $\mathcal{G}$ également.

Solution 40.

Supposons A inversible. Posons $N = \left(\begin{array}{c|c} I_n & -A^{-1}C \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$. Alors $MN = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$. Puisque N est inversible, $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} MN$. Or $\operatorname{rg}(MN) = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$, soit en considérant le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes ou les lignes de MP, soit en introduisant $(P_1, Q_1) \in GL_n(\mathbb{K})^2$ et $(P_2, Q_2) \in GL_p(\mathbb{K})^2$ tels que $P_1AQ_1 = J_{n,n,r}$ et $P_2BQ_2 = J_{p,p,r}$: alors $P(MN)Q = \left(\begin{array}{c|c} J_{n,n,r} & 0 \\ \hline 0 & J_{p,p,r} \end{array}\right)$ où P et Q sont respectivement les matrices inversibles $\left(\begin{array}{c|c} P_1 & 0 \\ \hline 0 & P_2 \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c|c} Q_1 & 0 \\ \hline 0 & Q_2 \end{array}\right)$.

Si A n'est plus supposée inversible, le résultat tombe. Il suffit par exemple de prendre A et B nulles et C non nulle.

Solution 41.

On sait qu'il existe $(P_1, Q_1, P_2, Q_2) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}) \times GL_q(\mathbb{K}) \times GL_r(\mathbb{K})$ tel que $P_1AQ_1 = J_{n,p,s_1}$ et $P_2BQ_2 = J_{q,r,s_2}$ où $s_1 = \operatorname{rg}(A)$ et $s_2 = \operatorname{rg}(B)$. En posant $P = \left(\begin{array}{c|c} P_1 & 0_{n,q} \\ \hline 0_{q,n} & P_2 \end{array}\right)$ et $Q = \left(\begin{array}{c|c} Q_1 & 0_{p,r} \\ \hline 0_{r,p} & Q_2 \end{array}\right)$, on a $PMQ = \left(\begin{array}{c|c} J_{n,p,s_1} & 0_{n,r} \\ \hline 0_{q,p} & J_{q,r,s_2} \end{array}\right)$. Il est clair que $\operatorname{rg}(PMQ) = s_1 + s_2$. On montre facilement que P et Q sont inversibles : il suffit de vérifier que $\left(\begin{array}{c|c} P_1^{-1} & 0_{n,q} \\ \hline 0_{q,n} & P_2^{-1} \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c|c} Q_1^{-1} & 0_{p,r} \\ \hline 0_{r,p} & Q_2^{-1} \end{array}\right)$

sont leurs inverses respectifs. Ainsi $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(PMQ) = s_1 + s_2 = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$.

Solution 42.

1. Les vecteurs u et v n'étant pas colinéaires, $\mathcal{B}$ est libre. Comme $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. On a bien-sûr
$$\mathrm{mat}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Appliquons la méthode du pivot de Gauss pour inverser P...
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
Par l'opération $L_2 \leftrightarrow (-L_2 + L_1)/2$,
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right]$$
puis, en effectuant $L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2$,
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right].$$
L'inverse de $\mathrm{mat}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$ vaut donc
$$\mathrm{mat}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Solution 43.

1. On a bien-sûr
$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
2. Appliquons la méthode du pivot de Gauss...
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
par $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$,
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
puis, en effectuant $L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2$,
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$
La famille $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est donc libre. Puisque $\dim(E) = 3$, $\mathcal{B}'$ est une base de E.

3. On a

$$P = \mathrm{mat}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inversons P par la méthode du pivot de Gauss...

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

par $L_1 \leftrightarrow L_2$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

puis, en effectuant $L_3 \leftrightarrow L_3 + L_1$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

continuons par $L_3 \leftarrow (L_3 + L_2)/2$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

puis, en effectuant $L_2 \leftrightarrow -L_2 + L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right].$$

L'inverse de P vaut donc

$$P^{-1} = \mathrm{mat}(\mathcal{B}' \to \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

4. On a, après tout calcul,

$$f(f_1) = (-1, 2, 1)\ ,\ f(f_2) = (-2, -1, -3)\ ,\ f(f_3) = (1, 1, 2).$$

En résolvant u système voire en tâtonnant un peu, on trouve sans peine que

$$f(f_1) = f_1 + 2f_2 + f_3\ ,\ f(f_2) = 2f_1 - f_2 - 3f_3,$$

et $f(f_3) = -f_1 + f_2 + 2f_3$. D'où

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. D'après la formule du changement de base, on a

$$M = PM'P^{-1}.$$

Solution 44.

1. Après des calculs élémentaires, on trouve

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{vect}((-3,-2,1,0),(-2,-1,0,1))$$

puis

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{vect}((1,1,-1,1),(2,-1,1,0))$$

et

$$\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \operatorname{vect}((1,1,-1,1)).$$

2. Par un pivot de Gauss élémentaire, on trouve

$$\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$$

ainsi $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

3. Après tout calcul,

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{F}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 45.

1. Comme $A, P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\deg(AP) \leqslant 4$. Ainsi $\deg(AP)'' \leqslant 2$ i.e. $f(P) \in E$.

2. $f(1) = 2c$, $f(X) = 2b + 6cX$, $f(X^2) = 2a + 6bX + 12cX^2$. Ainsi $M = \begin{pmatrix} 2c & 2b & 2a \\ 0 & 6c & 6b \\ 0 & 0 & 12c \end{pmatrix}$.

3. $\det M = 144c^3$. Ainsi M est inversible *si et seulement si* $c \neq 0$ i.e. $\deg A = 2$.

4. On a alors $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$. Ainsi $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$. On sait que les coefficients diagonaux d'un produit de matrice triangulaire sont les produits des coefficients diagonaux. De plus, on voit sur quelques exemples que les coefficients de la surdiagonale de M sont nuls. On est donc amené à formuler l'hypothèse de recurrence $\operatorname{HR}(n)$ suivante : $M^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & a_n \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}$. $\operatorname{HR}(0)$ est évidemment vraie. On suppose $\operatorname{HR}(n)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. $M^{n+1} = M^n.M$. Comm M^n et M sont triangulaires supérieures, M^{n+1} est triangulaire supérieure et les coefficients diagonaux de M^{n+1} sont $2^{n+1}, 6^{n+1}$ et 12^{n+1}. On s'aperçoit également que les coefficients de la surdiagonale de M^{n+1} sont nuls. M^{n+1} est bien de la forme annoncé et on obtient en plus, $a_{n+1} = 2^{n+1} + 12a_n = 2a_n + 2.12^n$. Ainsi $a_n = \frac{12^n - 2^n}{5}$. Donc $\operatorname{HR}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on obtient en sus une expression de a_n en fonction de n. Par conséquent,

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & \frac{12^n - 2^n}{5} \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}$$

La formule devrait être vraie pour n négatif. Prenons donc $n = -1$ dans la formule précédente. On vérifie que la matrice ainsi obtenue est bien l'inverse de M. Ainsi

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Solution 46.

1. Les applications $P \mapsto P(X+a)$ pour $a \in \mathbb{R}$ sont linéaires. Donc f est bien linéaire comme somme d'applications linéaires.
De plus, $\deg P(X+a) = \deg P$ pour $a \in \mathbb{R}$. Donc $\deg f(P) \leqslant \max(\deg P(X+1), \deg P(X-1), \deg P) = \deg(P)$.
Ainsi f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Des calculs élémentaires donnent ;

$$f(1) = 0 \qquad f(X^2) = (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2 = 2$$
$$f(X) = (X+2) + X - 2(X+1) = 0 \qquad f(X^3) = (X+2)^3 + X^3 - 2(X+1)^3 = 6X + 6$$

La matrice de f dans la base canonique est donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il est alors clair que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(1, X)$.

3. Posons $P_3 = X^2$, $P_4 = X^3$, $P_1 = f(X^2) = 2$ et $P_2 = f(X^3) = 6X + 6$. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ car c'est une famille de quatre polynômes à degrés échelonnés. P_1 et P_2 appartiennent au noyau de f. Il est alors clair que la matrice de f dans la base (P_1, P_2, P_3, P_4) est de la forme voulue.

Solution 47.

1. Il est clair que f est bien à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. f est linéaire par linéarité de la trace et bilinéarité du produit matriciel. f est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. f est une symétrie *si et seulement si* $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Or

$$\begin{aligned} f^2(X) &= X + \operatorname{tr}(AX)B + \operatorname{tr}\left(A(X + \operatorname{tr}(AX)B)\right)B = X + \operatorname{tr}(AX)B + \operatorname{tr}\left(AX + \operatorname{tr}(AX)AB\right)B \\ &= X + \left(2\operatorname{tr}(AX) + \operatorname{tr}(AX)\operatorname{tr}(AB)\right)B = X + \operatorname{tr}(AX)(2 + \operatorname{tr}(AB))B \end{aligned}$$

Ainsi f est une symétrie *si et seulement si* $\operatorname{tr}(AX)(2 + \operatorname{tr}(AB))B = 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire *si et seulement si* l'une des trois conditions suivantes est réalisée :

- $B = 0$;
- $\operatorname{tr}(AB) = -2$;
- $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AX) = 0$ ce qui équivaut à $A = 0$ (prendre pour X les éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Si $A = 0$ ou $B = 0$, alors $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ donc la base de f est $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et sa direction est le sous-espace nul.
Supposons maintenant $A \neq 0$ et $B \neq 0$; on a donc $\operatorname{tr}(AB) = -2$. La base de f est $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})})$. Or

$$X \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) \iff \operatorname{tr}(AX)B = 0 \iff \operatorname{tr}(AX) = 0 \text{ car } B \neq 0$$

La direction de f est $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})})$. Soit $X \in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})})$. Alors $2X = \operatorname{tr}(AX)B$ et donc $X \in \operatorname{vect}(B)$. Réciproquement soit $X \in \operatorname{vect}(B)$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X = \lambda B$. Alors $f(X) = \lambda B + \lambda \operatorname{tr}(AB)B = -\lambda B = -X$ car $\operatorname{tr}(AB) = -2$. Donc $f(X) = -X$. La base de f est donc le noyau de la forme linéaire $X \mapsto \operatorname{tr}(AX)$ non nulle car $A \neq 0$: c'est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La direction de f est $\operatorname{vect}(B)$: c'est une droite vectorielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution 48.

Supposons que n soit pair et qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice de f dans la base soit $A = \left(\begin{array}{c|c} 0_p & I_p \\ \hline 0_p & 0_p \end{array}\right)$.
Un calcul par blocs montre que $A^2 = 0$ et donc $f^2 = 0$. Par conséquent, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Par ailleurs, il est clair que $\operatorname{rg} A = p$ et donc $\operatorname{rg} f = p$. Mais d'après le théorème du rang, $\dim E = \operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f$ donc $\dim \operatorname{Ker} f = p = \dim \operatorname{Im} f$. Mais puisqu'on a déjà $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$, on peut conclure que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.
Supposons maintenant que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$. Le théorème du rang assure alors que n est pair et que $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f = p$ où $n = 2p$. Soit $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base d'un supplémentaire S de $\operatorname{Ker} f$ dans E. Posons $e_i = f(e_{p+i})$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Puisque f induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} f$ et que $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de S, $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et donc de $\operatorname{Ker} f$. Récapitulons : $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$, $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de S et $E = \operatorname{Ker} f \oplus S$ donc $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. Il est alors clair que la matrice de f dans cette base est de la forme voulue.

Solution 49.

1. Soient P et Q dans E_n et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T_n(P + \lambda Q) &= (nX + 1)(P + \lambda Q) + (1 - X^2)(P + \lambda Q)' \\ &= (nX + 1)(P + \lambda Q) + (1 - X^2)(P' + \lambda Q') \\ &= (nX + 1)P + (1 - X^2)P' + \\ &\qquad \lambda[(nX + 1)Q + (1 - X^2)Q'] \\ &= T_n(P) + \lambda T_n(Q) \end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation et du produit. Vérifions quele degré de $T_n(P)$ est inférieur ou égal à n lorsque $P \in E_n$. §Un tel polynôme s'écrit

$$P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k,$$

et donc

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k p_k X^{k-1}\ .$$

Le polynôme $(1 + nX)P$ est donc de degré au plus $n + 1$ et le cœfficient de X^{n+1} dans ce polynôme vaut $np_n X^{n+1}$. De même, le polynôme $(1 - X^2)P'$ est donc de degré au plus $n + 1$ et le cœfficient de X^{n+1} dans ce polynôme vaut $np_n X^{n+1}$. Par différence, $T_n(P)$ est de degré au plus n.

2. On a, pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\begin{aligned} T_n(X^k) &= (nX + 1)X^k + (1 - X^2)kX^{k-1} \\ &= kX^{k-1} + X^k + (n - k)X^{k+1} \end{aligned}$$

On a donc

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 1 & 2 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & n-1 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & n-2 & \ddots & n-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 1 & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Lorsque $n = 3$, on a

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminons le noyau de M_3 par la méthode du pivot de Gauss...

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

par $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

puis $L_3 \leftarrow (L_3 + L_2)/3$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Un vecteur

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

appartient donc à $\text{Ker}(M_3)$ *si et seulement si*

$$x_1 + x_2 = -x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = 0,$$

ie X est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \text{ avec } x_1 \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\text{Ker}(M_3) = \text{vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right],$$

et donc

$$\text{Ker}(T_3) = \text{vect}(1 - X - X^2 + X^3).$$

D'après le théorème du rang, $\text{rg}(M_3) = 3$. Les trois premières colonnes de M_n formant manifestement une famille libre, on a

$$\text{Im}(M_3) = \text{vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right],$$

et donc

$$\text{Im}(T_3) = \text{vect}(1 + 3X, 1 + X + 2X^2, 2X + X^2 + X^3).$$

Solution 50.

1. Soient $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après la structure d'algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \varphi_A(M+\lambda N) &= A(\lambda M + N) \\ &= A(\lambda M) + AN \\ &= \lambda AM + AN \\ &= \lambda\varphi_A(M) + \varphi_A(N) \end{aligned}$$

ainsi φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Une matrice

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

appartient à $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$ *si et seulement si*

$$\varphi_A(M) = \begin{pmatrix} 2z-2y & -2x-3y+2t \\ 2x+3z-2t & 2y-2z \end{pmatrix} = 0,$$

ie

$$z - y = 2x + 3z - 2t = 0.$$

Les éléments du noyau de φ_A sont donc les matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} t - \frac{3}{2}z & z \\ z & t \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème du rang, l'image de φ_A est de dimension 2. Puisque qu'elle est engendrée par l'image de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que

$$\varphi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\varphi_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

forment une famille libre, une base de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$ est

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right).$$

3. Le commutant de A est égal au noyau de φ_A. Or, d'après les calculs précédents, une matrice M appartient à $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$ *si et seulement si* il existe deux réels t et z tels que

$$M = t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution 51.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Puisque P' est alors de degré au plus un, $f(P)$ est de degré au plus deux donc appartient à $\mathbb{R}_2[X]$. L'application f est clairement linéaire par linéarité de la dérivation sur $\mathbb{R}_2[X]$: on a bien $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

2. On a clairement

$$f(1) = 1\ ,\ f(X) = 1 + X\ ,\ f(X^2) = 2X + X^2.$$

Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice M étant clairement de rang 3, f est un automorphisme de E. Inversons M par la méthode du pivot de Gauss...

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

par $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

puis, en effectuant $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

L'inverse de M vaut donc

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Notons U le vecteur colonne des coordonnées du polynôme $P = f^{-1}(1 + X + X^2)$ dans la base canonique de E. Puisque le vecteur colonne des coordonnées de $1 + X + X^2$ dans la base canonique de E est

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on a $U = M^{-1}V$, c'est-à-dire

$$U = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc $P = 2 - X + X^2$.

Solution 52.

1. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Il est clair que $\mathrm{rg}(f) = 2$ avec

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{vect}(e_1) \ \text{ et } \ \mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(e_1, e_2 + e_3).$$

2. On a clairement

$$A^2 = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{vect}(e_1, e_2) \ \text{ et } \ \mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{vect}(3e_1 + e_2 + e_3).$$

3. On a

$$\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) = 2 \text{ et } \dim(\mathrm{Im}(f^2)) = 1$$

et $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{vect}(3e_1 + e_2 + e_3)$ avec

$$3e_1 + e_2 + e_3 \notin \mathrm{vect}(e_1, e_2) = \mathrm{Ker}(f^2)$$

donc $\mathrm{Ker}(f^2) \cap \mathrm{Im}(f^2) = \{0\}$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Solution 53.

1. Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, tout λ dans $\mathbb{R}$, on a

$$f(P + \lambda Q) = X(P(X) + \lambda Q(x)) = XP(X) + \lambda XQ(X) = f(P) + \lambda f(Q)$$

d'après les règles de calculs dans l'algèbre $\mathbb{R}[X]$. La dérivation est linéaire d'après le cours, ainsi g est linéaire. Comme

$$h(1) = 1 \text{ mais } h(2 \times 1) = 2 \neq 2h(1) = 2,$$

h n'est pas linéaire.

2. L'application f est clairement injective car $XP(X) = 0$ équivaut par intégrité de $\mathbb{R}[X]$ à $P = 0$, d'où $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. En revenche, f n'est pas surjective car

$$\mathrm{Im}(f) = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\} \neq \mathbb{R}[X].$$

L'application g est surjective car tout polynôme admet un polynôme primitif d'après le cours. En revenche, g n'est pas injective car

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X] \neq \{0\}.$$

On a

$$\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 1 \text{ et } \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0.$$

3. Puisque

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \deg(f(P)) = 1 + \deg(P) \leqslant n + 1,$$

et

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \deg(g(P)) \leqslant \deg(P) \leqslant n,$$

on a

$$\mathrm{Im}(f_n) \subset \mathbb{R}_{n+1}[X] \text{ et } \mathrm{Im}(g_n) \subset \mathbb{R}_n[X]$$

4. Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$f_n(X^k) = X^{k+1} \text{ et } g_n(X^k) = kX^{k-1},$$

avec la convention $g_n(X^0) = 0$. Ainsi

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_{n+1}}(f_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_n}(g_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Les matrices de f_n et g_n calculées précédemment sont respectivement clairement de rang n et $n-1$. Ainsi,

$$\mathrm{rg}(f_n) = n \text{ et } \mathrm{rg}(g_n) = n-1.$$

Solution 54.

1. Soient P, Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)(X+1) + (P+\lambda Q)(X-1) - 2(P+\lambda Q)(X) \\ &= P(X+1) + \lambda Q(X+1) + P(X-1) + \lambda Q(X-1) - 2P(X) - 2\lambda Q(X) \\ &= P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) + \lambda(Q(X+1) + Q(X-1) - 2Q(X)) \\ &= f(P) + \lambda f(Q) \end{aligned}$$

Ainsi f est linéaire. On remarque que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\deg(f(P)) \leqslant \max(P(X+1), P(X-1), P(X)) = \deg(P) \leqslant n.$$

Ainsi $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$f(X^k) = (X+1)^k + (X-1)^k - 2X^k = \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell}(1+(-1)^\ell)X^{k-\ell}$$

avec la convention $\sum_\varnothing = 0$. Ainsi, pour $n = 3$, on obtient

$$\mathrm{mat}_{(1,\dots,X^3)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour n entier naturel non nul quelconque, on a

$$\mathrm{mat}_{(1,\dots,X^n)}(f) = A = (a_{\ell,k})_{1\leqslant \ell,k \leqslant n+1}$$

avec A triangulaire supérieure stricte définie par

$$\forall 1 \leqslant \ell < k \leqslant n+1,\ \ a_{\ell,k} = \binom{k-1}{k-\ell}(1+(-1))^{k-\ell}).$$

3. D'après les calculs précédents, pour tout $n \geqslant 3$,

- Les deux premières colonnes de A sont nulles et les autres forment une famille libre en tant que système de vecteurs-colonnes échelonné. Ainsi
$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X] \text{ et } \mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(1, X, \dots, X^{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X].$$
- On a clairement
$$\mathrm{rg}(f) = n-1 \text{ et } \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2.$$

4. Soient $Q \in \mathrm{Im}(f)$: il existe $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P_0) = Q$. Pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n, on a $f(P) = Q$ *si et seulement si*

$$f(P) = f(P_0)$$

ie $P - P_0 \in \mathrm{Ker}(f)$. Or,

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_1[X] = \mathrm{vect}(1, X).$$

Ainsi $f(P) = Q$ *si et seulement si* il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$P = P_0 + a + bX.$$

Comme le système

$$\begin{cases} P(0) &= P_0(0) + a &= 0 \\ P'(0) &= P_0'(0) + b &= 0 \end{cases}$$

admet l'unique solution $(a, b) = -(P(0), P'(0))$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(P) = Q \quad \text{et} \quad P(0) = P'(0) = 0.$$

Solution 55.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On a

$$M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Après tout calcul, on obtient
   - $\text{Ker}(L) = \text{vect}(3e_1 - e_2 + e_3)$, de dimension un.
   - $\text{Im}(L) = \text{vect}(e_1 + e_3, 2e_1 + e_2 + e_3)$, de dimension deux.
   - $\text{Ker}(L) \cap \text{Im}(L) = \{0\} = \text{vect}(\varnothing)$, de dimension nulle.

3. La matrice de L^2 dans $\mathcal{B}$ vaut

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Celle de L^3 vaut

$$M^3 = 3M.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \text{mat}_{\mathcal{B}}(L^{16}) &= M^{16} = M^{3\times5+1} \\ &= (M^3)^5M = (3M)^5M \\ &= 3^5M^{2\times3} = 3^5(3M)^2 \\ &= 3^{5+2}M^2 = 3^7M^2 \end{aligned}$$

Solution 56.

1. Pour toutes matrices M et M' et pour tous scalaires λ et μ, on a $\Phi(\lambda M + \mu M') = A(\lambda M + \mu M') = \lambda AM + \mu AM' = \lambda\Phi(M) + \mu\Phi(M')$, donc Φ est linéaire.

2. On vérifie facilement que A est inversible , donc on peut définir l'application Ψ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $\Psi(M) = A^{-1}M$. Ψ est linéaire pour la même raison que Φ, et pour tout matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on a $\Psi(\Phi(M)) = A^{-1}AM = M$ et $\Phi(\Psi(M)) = AA^{-1}M = M$, donc Φ est un isomorphisme d'application inverse $\Phi^{-1} = \Psi$.

3. Avec les notations du cours, la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est constituée des quatre matrices $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule les images de ces quatre matrices par Φ, et on les décompose dans cette même base :

$$\begin{aligned} \Phi(E_{1,1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + 3E_{2,1},\ \Phi(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = E_{1,2} + 3E_{2,2} \\ \Phi(E_{2,1}) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{1,1} + 4E_{2,1},\ \Phi(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2E_{1,2} + 4E_{2,2}\,. \end{aligned}$$

On en déduit la matrice de Φ dans cette base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Solution 57.

1. On vérifie sans difficulté que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$, ce qui prouve la linéarité de ϕ.
Par ailleurs, si P est de degré inférieur ou égal à 3, alors $P(X+1)$ l'est aussi et donc $\phi(P)$ aussi : ainsi on a bien $\phi(\mathbb{R}_3[X]) \subset \mathbb{R}_3[X]$, et ϕ est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. On calcule les images des quatre polynômes $1, X, X^2$ et X^3 de la base $\mathcal{B}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} \phi(1) &=& 1+1 &=& 2 \\ \phi(X) &=& X+1+X &=& 2X+1 \\ \phi(X^2) &=& (X+1)^2 + X^2 &=& 2X^2+2X+1 \\ \phi(X^3) &=& (X+1)^3 + X^3 &=& 2X^3+3X^2+3X+1 \end{array} \right.$$

On en déduit donc : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. **a.** M est une matrice triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc elle est inversible. Pour calculer son inverse, on fixe $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ et on résout le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &=& y_1 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 &=& y_2 \\ 2x_3 + 3x_4 &=& y_3 \\ 2x_4 &=& y_4 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 &=& \frac{1}{2}(y_1 - x_2 - x_3 - x_4) \\ x_2 &=& \frac{1}{2}(y_2 - 2x_3 - x_4) \\ x_3 &=& \frac{1}{2}(y_3 - 3x_4) \\ x_4 &=& \frac{1}{2}y_4 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 &=& \frac{1}{2}(y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{4}y_4) \\ x_2 &=& \frac{1}{2}(y_2 - y_3) \\ x_3 = &=& \frac{1}{2}(y_3 - \frac{3}{2}y_4) \\ x_4 &=& \frac{1}{2}y_4 \end{array} \right.$$

Ceci montre que $M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Puisque la matrice M de ϕ dans $\mathcal{B}$ est inversible, ϕ est bijective, donc c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. De plus on sait que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi^{-1}) = M^{-1}$.

4. Notons P_0 le polynôme $4X^3-2X^2+X-1$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a $P(X+1)+P(X) = 4X^3-2X^2+X-1 \iff \phi(P) = P_0 \iff P = \phi^{-1}(P_0)$; l'équation admet donc l'unique solution $\phi^{-1}(P_0)$, dont on calcule les coefficients en passant par M^{-1} :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\phi^{-1}(P_0)\right) = M^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi l'unique solution cherchée est $2X^3-4X^2+\frac{3}{2}X-\frac{1}{4}$.

Solution 58.

1. **a.** Notons (H) l'hypothèse que $\forall x \in \mathbb{R},\ axe^x+bxe^{-x}+ce^x+de^{-x} = 0$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} bxe^{-x}+de^{-x} = 0$, donc en prenant la limite en $+\infty$, on déduit de (H) que $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+c)e^x = 0$. Si $a \neq 0$, on sait qu'au voisinage de $+\infty$, $(ax+c)e^x \sim axe^x$. Or si $a > 0$, (resp. $a < 0$,) on a $\lim\limits_{x\to+\infty} axe^x = +\infty$ (resp. $-\infty$), ce qui est contradictoire avec $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+c)e^x = 0$. On en conclut que $a = 0$, et il reste donc $\lim\limits_{x\to+\infty} ce^x = 0$, qui implique de même que $c = 0$.

b. Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $ag_1+bg_2+cg_3+dg_4 = 0$. Ceci équivaut à l'hypothèse (H) de la question précédente. On a vu qu'alors $a = c = 0$, donc il reste $bg_2+dg_4 = 0$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R},\ (bx+d)e^{-x} = 0$, ce qui équivaut à $\forall x \in \mathbb{R},\ bx+d = 0$ (puisque $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Avec $x = 0$ on obtient $d = 0$, puis en prenant par exemple $x = 1$ on a aussi $b = 0$. Finalement $a = b = c = d = 0$, ce qui prouve que (g_1,g_2,g_3,g_4) est une famille libre. De plus c'est par définition une famille génératrice de F. On en conclut que c'est une base de F, et donc $\dim F = 4$.

2. **a.** g_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_1'(x) = xe^x+e^x = g_1(x)+g_3(x)$, donc $g_1' = g_1+g_3 \in F$. De même, g_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_2'(x) = -xe^{-x}+e^{-x} = -g_2(x)+g_4(x)$, donc $g_2' = -g_2+g_4 \in F$.

b. Puisque la famille (g_1,g_2,g_1',g_2') est de cardinal 4 et que $\dim F = 4$, il suffit de montrer que c'est une famille libre. Soit $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ quatre réels tels que $\alpha g_1+\beta g_2+\gamma g_1'+\delta g_2' = 0$. Ceci équivaut à $(\alpha+\gamma)g_1+(\beta-\delta)g_2+\gamma g_3+\delta g_4 = 0$. Puisque la famille (g_1,g_2,g_3,g_4) est libre, cela implique que $\alpha+\gamma = \beta-\delta = \gamma = \delta = 0$, d'où $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Ainsi la famille (g_1,g_2,g_1',g_2') est libre et est donc une base de F.
On a vu que $g_1' = g_1+g_3$ (resp. $g_2' = -g_2+g_4$) donc les coordonnées de g_1' (resp. g_2') dans $\mathcal{B}_1$ sont $(1,0,1,0)$ (resp. $(0,-1,0,1)$). On en déduit donc que la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. **a.** Soient f et g deux fonctions de F et soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Par définition, on a $\varphi(\lambda f+\mu g) = (\lambda f+\mu g)' = \lambda f'+\mu g' = \lambda\varphi(f)+\mu\varphi(g)$. On en conclut que φ est linéaire.
Puisque $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{vect}\big(\varphi(g_1),\varphi(g_2),\varphi(g_3),\varphi(g_4)\big)$, il suffit de montrer que $\varphi(g_i) \in F$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant 4$ pour conclure que φ est un endomorphisme de F.
On a déjà vu que $\varphi(g_1) = g_1' \in F$ et $\varphi(g_2) = g_2' \in F$. Par ailleurs, on a immédiatement $\varphi(g_3) = g_3 \in F$ et $\varphi(g_4) = -g_4 \in F$, d'où la conclusion.

b. On a déja calculé les coordonnées de $\varphi(g_1) = g_1'$ et $\varphi(g_2) = g_2'$ dans la base $\mathcal{B}_1$. Celles de $\varphi(g_3) = g_3$ sont $(0,0,1,0)$ et celles de $\varphi(g_4) = -g_4$ sont $(0,0,0,-1)$. On en déduit que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c. Puisque M est triangulaire inférieure avec que des éléments non nuls sur la diagonale, on sait que c'est une matrice inversible, ce qui implique que φ est un automorphisme de F.

d. On applique la formule de changement de base : $N = P^{-1}MP$. Le calcul P^{-1} s'obtient très aisément par résolution d'un système triangulaire (ou par opérations élémentaires sur P et I_4 en parallèle). On obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit finalement que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On sait sans aucun calcul que N est inversible, puisque c'est la matrice de l'automorphisme φ dans la base $\mathcal{B}_2$.

Solution 59.

1. Un grand classique...

- Puisque $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ contient la matrice nulle , $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \neq \varnothing$. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$${}^t(A + \lambda B) = {}^tA + \lambda {}^tB = A + \lambda B$$

Ainsi $A + \lambda B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On prouve de même que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Notons $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Etablissons que la famille

$$(E_{i,j} + E_{j,i})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$$

est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice symétrique. On a

$$\begin{aligned} M &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}E_{i,j} \\ &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} m_{i,j}E_{i,j} + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} m_{i,j}E_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}E_{i,i} \\ &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} m_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_{i,i}}{2} 2E_{i,i} \end{aligned}$$

La famille est donc génératrice. En reprenant ces calculs, il est clair que

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \lambda_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_{i,i}}{2} 2\lambda_{i,i} = 0$$

équivaut à $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 0$ ie $\lambda_{i,j} = 0$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. La famille est donc également libre : c'est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui est donc de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

- On prouve de même que la famille

$$(E_{i,j} - E_{j,i})_{1\leqslant j<i\leqslant n}$$

est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. La dimension de cet espace vaut donc $\frac{n(n-1)}{2}$.

2. Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On a alors , pour tous indices $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$M_{i,j} = M_{j,i} = -M_{i,j}$$

donc $M_{i,j} = 0$. Ainsi $M = 0$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons

$$S = \frac{M + {}^tM}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - {}^tM}{2}.$$

On a clairement $M = S + A$, $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, d'où

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

Remarque. Puisque la somme des dimensions des deux sev étudiés vaut $n^2 = \dim(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))$, la seule égalité $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$ suffit pour établir le caractère direct de leur somme. Nous avons explicité ci-dessus les deux projections associées dans la mesure où elles sont à connaître par cœur et rendent parfois de bien grands services ! ■

Solution 60.

1. Notons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a clairement

$$E = \text{vect}(A, B, C)$$

donc E est un sev de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. Comme (A, B, C) est clairement libre, on a $\dim(E) = 3$. Comme

$$A^2 = A, \quad B^2 = B, \quad C^2 = A, \quad AB = BA = 0,$$

$$AC = CA = C, \quad BC = CB = 0,$$

E est stable par produit.

2. Soient a, b et c dans $\mathbb{R}$. Posons

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}.$$

- *Si* $a \neq \pm c$ *et* $b \neq 0$, on a $\text{rg}(M(a, b, c)) = 3$.
- *Si* $a = \pm c$, $c \neq 0$ *et* $b \neq 0$, on a $\text{rg}(M(a, b, c)) = 2$.
- *Si* $a = c = 0$ *et* $b \neq 0$, on a $\text{rg}(M(a, b, c)) = 1$.
- *Si* $a = \pm c$, $c \neq 0$ *et* $b = 0$, on a $\text{rg}(M(a, b, c)) = 1$.
- *Si* $a = b = c = 0$, on a $\text{rg}(M(a, b, c)) = 0$.

3. Dans le cas où $M(a,b,c)$ est de rang trois, on a

$$M(a,b,c)^{-1} = \begin{pmatrix} a/(a^2-c^2) & 0 & -c/(a^2-c^2) \\ 0 & 1/b & 0 \\ -c/(a^2-c^2) & 0 & a/(a^2-c^2) \end{pmatrix}.$$

4. Après tout calcul...

- *Une base de matrices inversibles :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- *Une base de matrices de rang* 1 *:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 61.

F est un sous espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ donc

$$\dim(F) \in \{0,\dots,4\}.$$

Comme $F \neq \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ on a aussi $\dim(F) \neq 4$. D'autre part les matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

appartiennent à F et sont linéairement indépendantes. En effet, si

$$\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0$$

alors

$$\begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \beta & -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est à dire

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Donc $\dim(F) \geqslant 3$ c'est à dire $\dim(F) = 3$. Enfin

$$(M_1, M_2, M_3)$$

est une famille libre de trois vecteurs dans F qui est un espace de dimension 3. C'est donc une base de F.

Solution 62.

1. Notons $U = {}^t(1, \dots, 1)$. Si $M \in \mathcal{M}$, alors
$$MU = {}^tMU = s(M)U$$
Réciproquement, s'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que
$$MU = {}^tMU = \alpha U$$
c'est que $M \in \mathcal{M}$ et que $s(M) = \alpha$.
Si $(M, N) \in \mathcal{M}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors
$$MU = {}^tMU = s(M)U \text{ et } NU = {}^tNU = s(N)U$$
Il s'ensuit que
$$(\lambda M + \mu N)U = {}^t(\lambda M + \mu N)U = (\lambda s(M) + \mu s(N))U$$
Par conséquent,
$$\lambda M + \mu N \in \mathcal{M} \text{ et } s(\lambda M + \mu N) = \lambda s(M) + \mu s(N)$$
On a aussi
$$MNU = s(M)s(N)U \text{ et } {}^t(MN)U = s(M)s(N)U$$
Ainsi $MN \in \mathcal{M}$ et $s(MN) = s(M)s(N)$.
On a donc bien prouvé que $\mathcal{M}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et que s est un morphisme d'algèbres.

2. Soit $M \in \mathcal{M}$ inversible. Remarquons tout d'abord que $s(M) \neq 0$ sinon U serait un vecteur non nul du noyau de M. On multiplie à gauche par M^{-1} l'identité $MU = s(M)U$ et on obtient $M^{-1}U = \frac{1}{s(M)}U$. De même, en multipliant à gauche par ${}^tM^{-1}$ l'identité ${}^tMU = s(M)U$, on obtient ${}^tM^{-1}U = \frac{1}{s(M)}U$. Ceci prouve que $M^{-1} \in \mathcal{M}$ et que $s(M^{-1}) = \frac{1}{s(M)}$.

3. Soit $M \in \mathcal{M}$. On a $M = P + Q$ avec $P = \frac{M + {}^tM}{2}$ symétrique et $Q = \frac{M - {}^tM}{2}$ antisymétrique. On a aussi
$$PU = {}^tPU = s(M)U \text{ et } QU = {}^tQU = 0.$$
Donc P et Q sont magiques. On sait enfin que les sous-espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques sont en somme directe donc a fortiori $\mathcal{M}_s$ et $\mathcal{M}_a$. On a donc bien $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s \oplus \mathcal{M}_a$.

4. Soit $M \in \mathcal{M}$. Comme on a $MU = s(M)U$, $\mathcal{K} = \operatorname{vect}((1, \dots, 1))$ est stable par ϕ_M. De plus, $\mathcal{H} = \operatorname{Ker} \psi$ où ψ est la forme linéaire canoniquement associée au vecteur ligne ${}^tU$. Comme ${}^tUM = s(M){}^tU$, on a donc $\psi \circ \phi_M = s(M)\psi$ de sorte que le noyau $\mathcal{H}$ de ψ est stable par ϕ_M.
Réciproquement, on suppose que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont stables par ϕ_M. Comme $\mathcal{K} = \operatorname{vect}((1, \dots, 1))$, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $MU = \alpha U$. Comme $\mathcal{H} = \operatorname{Ker} \psi$ est stable par ϕ_M, on a $\operatorname{Ker} \psi \circ \phi_M \subset \operatorname{Ker} \psi$ et donc il existe $\beta \in \mathbb{K}$ tel que $\psi \circ \phi_M = \beta\psi$ de sorte que ${}^tMU = \beta U$. Mais alors
$$\operatorname{tr}(MU{}^tU) = \alpha \operatorname{tr}(U{}^tU) = n\alpha$$
et
$$\operatorname{tr}({}^tMU{}^tU) = \beta \operatorname{tr}(U{}^tU) = n\beta.$$
De plus,
$$\operatorname{tr}(MU{}^tU) = \operatorname{tr}(U{}^tUM) = \operatorname{tr}({}^tMU{}^tU).$$
Donc $n\alpha = n\beta$ et $\alpha = \beta$. Ainsi $M \in \mathcal{M}$.

5. L'application linéaire suivante :
$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{H}) \times \mathcal{L}(\mathcal{K}) \\ M & \longmapsto & (\phi_{M|\mathcal{H}}, \phi_{M|\mathcal{K}}) \end{array}$$
est bien définie puisque $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont stables par ϕ_M pour $M \in \mathcal{M}$. Si on se donne 2 endomorphismes de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{K}$, on définit bien un unique endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ puisque $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$. La matrice de cet endomorphisme dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est un élément de $\mathcal{M}$ d'après la question précédente. Φ est donc un isomorphisme et $\dim \mathcal{M} = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$.

Solution 63.

1. Le fait que Δ_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ provient de la linéarité de la transposition et de la linéarité de la trace.
Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$. On a alors $M + {}^tM = 0$. De plus, les éléments diagonaux de M sont nuls donc $\operatorname{tr}(M) = 0$. Ainsi $M + {}^tM = \operatorname{tr}(M)A = 0$ donc $M \in \Delta_A$. D'où $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \subset \Delta_A$.

2. Soit $M \in \Delta_A$. On a donc $\operatorname{tr}(M + {}^tM) = \operatorname{tr}(\operatorname{tr}(M)A)$. Par linéarité de la trace, ceci équivaut à $\operatorname{tr}(M) + \operatorname{tr}({}^tM) = \operatorname{tr}(M)\operatorname{tr}(A)$. Or $\operatorname{tr}({}^tM) = \operatorname{tr}(M)$ donc $2\operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(M)$. Puisque $\operatorname{tr}(A) \neq 2$, $\operatorname{tr}(M) = 0$ et finalement $M + {}^tM = 0$ i.e. $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$. Ainsi $\Delta_A \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$. L'inclusion réciproque ayant été prouvé à la première question, $\Delta_A = \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

3. Soit $M \in \Delta_A$. Remarquons que ${}^t(M + {}^tM) = M + {}^tM$ donc $\operatorname{tr}(M){}^tA = \operatorname{tr}(M)A$. Comme $A \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$, ${}^tA \neq A$ donc $\operatorname{tr}(M) = 0$. On a alors $M + {}^tM = 0$ et donc $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$. On a donc à nouveau $\Delta_A = \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ et $Q \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ telles que $M = P + Q$. On a déjà vu que $Q \in \Delta_A$ donc $M \in \Delta_A$ *si et seulement si* $P \in \Delta_A$. Autrement dit, il suffit de déterminer $\Delta_A \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ et on aura $\Delta_A = \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \oplus (\Delta_A \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{C}))$ (la somme est directe car $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ sont en somme directe).
Soit $M \in \Delta_A \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$. Comme ${}^tM = M$ on a donc $2M = \operatorname{tr}(M)A$ et donc $M \in \operatorname{vect}(A)$. Réciproquement soit $M \in \operatorname{vect}(A)$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $M = \lambda A$. Alors $M + {}^tM = 2\lambda A$ car ${}^tA = A$ par hypothèse. D'autre part, $\operatorname{tr}(M) = \lambda\operatorname{tr}(A) = 2\lambda$. On a donc bien $M + {}^tM = \operatorname{tr}(M)A$ et $M \in \Delta_A$. Ainsi $\Delta_A \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{C}) = \operatorname{vect}(A)$.
On a donc $\Delta_A = \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \oplus \operatorname{vect}(A)$.

Solution 64.

1. On a également
$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
Ainsi $\mathcal{E} = \operatorname{vect}(I_2, J)$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathcal{E}$ est donc bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La famille (I_2, J) étant libre, $\dim \mathcal{E} = 2$.

2. Par linéarité des parties réelle et imaginaire, M est linéaire. De plus, $z \in \operatorname{Ker} M \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = 0 \\ \operatorname{Im}(z) = 0 \end{cases} \iff z = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} M = \{0\}$ et M est injective. De plus, M est surjective par définition de $\mathcal{E}$.

   Remarque. On aurait pu utiliser la dimension. ■

3. $\mathcal{E}$ est un sous-groupe de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en tant que sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On vérifie que $M(1) = I_2$ et que pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $M(z_1)M(z_2) = M(z_2)M(z_1) = M(z_1z_2)$. Ceci prouve que $\mathcal{E}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est que M est un morphisme d'anneaux. Comme M est bijective d'après la question précédente, M est bien un isomorphisme d'anneaux.

4. On sait que $M(z) = 0 \iff z = 0$. De plus, pour $z \neq 0$, $M(z)M\left(z^{-1}\right) = M\left(z^{-1}\right)M(z) = I_2$. Ceci prouve que tout élément non nul de $\mathcal{E}$ est inversible. $\mathcal{E}$ est bien un corps.

5. Comme M est un isomorphisme d'anneaux
$$M(z)^4 = I_2 \iff M\left(z^4\right) = M(1) \iff z^4 = 1 \iff z \in \{1, -1, i, -i\}$$
Les solutions de l'équation sont donc $M(1) = I_2$, $M(-1) = -I_2$, $M(i) = J$ et $M(-i) = -J$.

6. Comme M est un isomorphisme d'anneaux et que $\mathcal{F} = M(\mathbb{Z}[i])$ avec $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$, il suffit de montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau. Or on montre classiquement que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
$N(a,b)$ est inversible dans $\mathcal{F}$ *si et seulement si* $a + ib$ est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$. Or on montre encore classiquement que les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont $1, -1, i, -i$ (considérer l'application $a + ib \mapsto a^2 + b^2$). Les inversibles de $\mathcal{F}$ sont donc I_2, $-I_2$, J et $-J$.

Solution 65.

1. **a.** L'application $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}(M) \end{array}\right.$ est une forme linéaire non nulle. Comme $\mathcal{N}_n = \mathrm{Ker}\,\varphi$, $\mathcal{N}_n$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n^2-1.

   b. Soit $M \in \mathcal{L}_n$. Il existe donc $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $M = [A,B]$. Alors $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$ et donc $M \in \mathcal{N}_n$. On a donc $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{N}_n$.

2. **a.** Soient D une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de diagonale nulle et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à D. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $M = P^{-1}DP$. Alors
$$\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(P^{-1}DP) = \mathrm{tr}(PP^{-1}D) = \mathrm{tr}(D) = 0$$
et $M \in \mathcal{N}_n$.

   b. On raisonne par récurrence sur n.
Pour $n=1$, il n'y a rien à faire puisque la seule matrice de $\mathcal{N}_1$ est la matrice nulle.
Supposons le résultat établi pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathcal{N}_{n+1}$. On montre d'abord que M est semblable à une matrice dont le coefficient sur la première ligne et la première colonne est nul. Pour cela, notons f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^{n+1}$ canoniquement associé à M. Si f est une homothétie, alors son rapport est nécessairement nul puisque $\mathrm{tr}(M) = 0$. Ainsi $M = 0$ et il n'y a rien à faire. Sinon on montre classiquement qu'il existe $x \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que la famille $(x, f(x))$ soit libre. On complète cette famille en une base de $\mathbb{K}^{n+1}$. On note M' la matrice de f dans cette base. Alors M et M' sont bien semblables et M' est bien de la forme voulue. On a donc $M' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \cdots * \\ \hline * & \\ \vdots & M'' \\ * & \end{array}\right)$. Puisque M et M' sont semblables, $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(M') = 0$. On en déduit $\mathrm{tr}(M'') = 0$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à M''. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}M''P$ soit une matrice de diagonale nulle. Posons alors $P' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & P \\ 0 & \end{array}\right)$. On a $P'^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & P^{-1} \\ 0 & \end{array}\right)$ et un calcul par blocs montre que $P'^{-1}M'P' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \cdots * \\ \hline * & \\ \vdots & D \\ * & \end{array}\right)$. Ainsi M' est semblable à une matrice de diagonale nulle. Par transitivité de la relation de similitude, M l'est également.

   c. Soit $M \in \mathcal{N}_n$. D'après la question précédente, il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de diagonale nulle semblable à M. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ des scalaires distincts deux à deux. On note D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Enfin, on définit une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en posant $B_{ij} = \begin{cases} \frac{A_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On vérifie que $A = DB - BD$. Comme M est semblable à A, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $M = P^{-1}AP$ ou encore
$$M = (P^{-1}DP)(P^{-1}BP) - (P^{-1}BP)(P^{-1}DP)$$
Ainsi $M \in \mathcal{L}_n$.

SOLUTION 66.

Notons $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symplectiques de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. On a clairement $I_{2n} \in \mathcal{S}_n$.
On vérifie que ${}^tJ = -J$ et un calcul par blocs montre que $J^2 = -I_{2n}$.
Soient $M, N \in \mathcal{S}_n$. Alors
$${}^t(MN)J(MN) = {}^tN({}^tMJM)N = {}^tNJN = J$$
donc $MN \in \mathcal{S}_n$.
Soit $M \in \mathcal{S}_n$. On a alors
$$(J\,{}^tMJ)M = J({}^tMJM) = J^2 = -I_{2n}$$

Ceci prouve que M est inversible d'inverse $M^{-1} = -J^tMJ$. On vérifie que $M^{-1} \in \mathcal{S}_n$. En effet :

$$^tM^{-1}JM^{-1} = (-^tJM^tJ)JM^{-1} = JM(-J^2)M^{-1} = JMM^{-1} = J$$

Solution 67.

Soient $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Pour $X = E_{i,j}$, on obtient

$$\operatorname{tr}(AX) = a_{j,i} = \operatorname{tr}(BX) = b_{j,i}.$$

Ainsi $A = B$.

Solution 68.

1. Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a évidemment $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(e_1 + e_2)$. Donc $(e_1 + e_2)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
De pus, $(x, y) \in \operatorname{Ker} f$ *si et seulement si* $x + y = 0$. Donc $(e_1 - e_2)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. Le noyau de f est non nul donc f n'est pas inversible et A non plus.
3. On a $X(X + I_2) = A$. Or un produit de matrices est inversible. A n'étant pas inversible, on a X ou $X + I_2$ non inversible.
4. **a.** On a $A = X(X + I_2) = (X + I_2)X$.
On a donc $f = \phi \circ (\phi + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} \phi$.
On a donc également $f = (\phi + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) \circ \phi$ donc $\operatorname{Ker} \phi \subset \operatorname{Ker} f$.
b. Comme X n'est pas inversible, ϕ n'est pas injective et $\dim \operatorname{Ker} \phi \geqslant 1$. Or $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ donc d'après la question précédente $\dim \operatorname{Ker} \phi = 1$ et $\operatorname{Ker} \phi = \operatorname{Ker} f$.
Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{rg} \phi = 1$. Et on sait que $\operatorname{rg} f = 1$. Donc d'après la question précédente, $\operatorname{Im} \phi = \operatorname{Im} f$.
c. Notons $u = e_1 + e_2$ et $v = e_1 - e_2$. On a $f(v) = \phi(v) = 0$ car v est un vecteur de base de $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} \phi$.
On a $f(u) = (2, 2) = 2u$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(u) = \lambda u$ car $\phi(u) \in \operatorname{Im} \phi = \operatorname{Im} f$.
En posant $x = \frac{\lambda}{2}$, on a $\phi(u) = xf(u)$ et $\phi(v) = xf(v)$. Comme (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$, $\phi = xf$. On a alors également $X = xA$. En reportant dans l'équation, on trouve $2x^2 + x - 1 = 0$ et donc $x = -1$ ou $x = \frac{1}{2}$ et donc $X = -A$ ou $X = \frac{1}{2}A$.
5. Y n'est donc pas inversible. L'équation initiale donne $Y^2 + Y = A$. En se reportant au cas précédent, on aboutit à $Y = -A$ ou $Y = \frac{1}{2}A$ i.e. $X = A - I_2$ ou $X = -\frac{1}{2}A - I_2$.
6. On a vu qu'une solution X était nécessairement dans $\left\{-A, \frac{1}{2}A, A - I_2, -\frac{1}{2}A - I_2\right\}$. On vérifie également que toutes ces matrices sont bien solutions. On en déduit que les solutions sont

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Solution 69.

1. Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} XY \subset \operatorname{Im} X$. Or $\operatorname{rg} A = 1$ donc $\operatorname{rg} X \geqslant 1$. De plus, $\operatorname{Ker} Y \subset \operatorname{Ker} XY = \operatorname{Ker} A$. Comme $\operatorname{rg} A = 1$, $\dim \operatorname{Ker} A = 1$. Donc $\dim \operatorname{Ker} Y \leqslant 1$.
Comme $YX = 0$, $\operatorname{Im} X \subset \operatorname{Ker} Y$. Or on a montré que $\dim \operatorname{Ker} Y \leqslant 1$ donc $\operatorname{rg} X \leqslant 1$. Finalement, $\operatorname{rg} X = 1$ et $\operatorname{rg} Y = 1$.

2. On a $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} X$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} X = 1$ donc $\operatorname{Im} X = \operatorname{Im} A$. Or $\operatorname{Im} A = \operatorname{vect}(e_1)$ où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Donc A est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec a et b non tous deux nuls.

   Par ailleurs, $\operatorname{Im} X \subset \operatorname{Ker} Y$ et $\operatorname{rg} X = \dim \operatorname{Ker} Y = 1$ donc $\operatorname{Im} X = \operatorname{Ker} Y$. Y est donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$ avec c et d non tous deux nuls.

3. La condition $XY = A$ donne $ac + bd = 1$. Réciproquement, si a, b, c, d sont 4 réels tels que $ac + bd = 1$, le couple de matrices $(X, Y) = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \right)$ est bien solution du système.

Solution 70.

Remarquons d'abord que si X est une solution, alors $\operatorname{tr}(X) + \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(A) = 0$ i.e. $\operatorname{tr}(X)(\operatorname{tr}(A) + 1) = 0$ par linéarité de la trace. On est donc amené à distinguer deux cas.

Cas $\operatorname{tr}(A) \neq -1$ Si X est solution, on a $\operatorname{tr}(X) = 0$ d'après ce qui précède. Mais alors $X = 0$. On vérifie que 0 est bien solution de l'équation.

Cas $\operatorname{tr}(A) = -1$ Si X est solution, alors X est de la forme $X = \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Réciproquement si $X = \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $X + \operatorname{tr}(X)A = \lambda A + \lambda \operatorname{tr}(A) A = 0$ donc X est bien solution.

Récapitulons : si $\operatorname{tr}(A) \neq -1$, la seule solution est la solution nulle ; si $\operatorname{tr}(A) = -1$, l'ensemble des solutions est $\operatorname{vect}(A)$.

Solution 71.

Par la méthode du pivot de Gauss...

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ -2 & -3 & 3 & b \\ 1 & 1 & -2 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b+2a \\ 0 & -1 & -1 & c-a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b+2a \\ 0 & 0 & 0 & a+b+c \end{pmatrix}$$

Le système de l'énoncé est donc équivalent au système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & a \\ & & y & + & z & = & b+2a \\ & & & & 0 & = & a+b+c \end{array} \right.$$

qui admet une solution *si et seulement si* $a + b + c = 0$. Géométriquement cela signifie qu'un point de $\mathbb{R}^3$ est une image par l'application

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ dZ \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ -2x - 3y + 3z \\ x + y - 2z \end{pmatrix}$$

si et seulement si il est dans le plan d'équation $x+y+z=0$.
Dans ce cas le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & a \\ & & y & + & z & = & a-c \end{array}\right.$$

qu'on résoud en remontant du bas vers le haut. On trouve

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c-a+3z \\ a-c-z \\ dZ \end{pmatrix} \qquad \text{où } z \in \mathbb{R}.$$

Ainsi l'ensemble de solutions est une droite $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^3$, à savoir

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 2c-a \\ a-c \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 72.

1. Pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -3 & 17 \\ 5 & -3 & 8 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{llll} & & ^{-3} & ^{-5} \\ |2 & \leftarrow & + & \\ |2 & \leftarrow & & + \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 7 & -18 & 46 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lll} & & \\ & & \\ |7 & \leftarrow & + \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 7 & -18 & 46 \\ 0 & 0 & -46 & 46 \end{pmatrix}$$

Le système initial est donc équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & 4z & = & -4 \\ & & 7y & - & 18z & = & 46 \\ & & & - & 46z & = & 46 \end{array}\right.$$

qu'on résout facilement en commençant par le bas. On trouve l'unique solution $(2,4,-1)$.

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 6 & -11 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ + \\ 02 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -9 & -1 \\ 0 & 5 & -9 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \\ + \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le système initial est donc équivalent à un système dont une équation est $0x + 0y + 0z = -1$, ou encore $0 = -1$. Il n'y a pas de (x, y, z) vérifiant cette équation. Par conséquence le système n'a pas de solution.

Remarque. On aurait déjà pu le voir une étape plus tôt, car elle contient les équations contradictoires $5y - 9 = -1$ et $5y - 9 = -2$.
■

3. On commence par une permutation de lignes pour obtenir un pivot en haut à gauche.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -5 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ \\ + \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3 \\ + \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système initial est donc équivalent au système

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ \phantom{x + {}} 2y - z = -2 \\ \phantom{x + 2y - {}} 0 = 0. \end{cases}$$

La dernière équation est vérifiée pour tout choix de (x, y, z). Elle est donc superflue et peut être omise. En résout les deux équations restantes.

$$\begin{cases} x = 2 - y - z = 2 - y - (2 + 2y) = -3y \\ z = 2 + 2y. \end{cases}$$

Le système admet donc une unfinité de solutions, à savoir tous les triplets $(-3y, y, 2 + 2y)$ avec $y \in \mathbb{R}$. L'ensemble de solutions s'écrit aussi comme

$$\{(0, 0, 2) + y(-3, 1, 2) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

ou encore,

$$(0, 0, 2) + \mathbb{R}(-3, 1, 2).$$

Il s'agit de la droite passant par le point $(0, 0, 2)$ est dirigée par le vecteur $(-3, 1, 2)$.

4. On commence par une permutation de lignes puisque le pivot le plus simple à manipuler est 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \\ 2 & -3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & -1 & 18 & -6 \\ 0 & -1 & 9 & -1 \\ 0 & -5 & 22 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & -1 & 18 & -6 \\ 0 & 0 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & -68 & 31 \end{pmatrix}$$

La troisième équation donne $z = -5/9$ tandis que la quatrième donne $z = -68/31 \neq -5/9$. Par conséquence le système n'a pas de solution.

Solution 73.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} (1-m)y + (1-m^2)z = 1 - m^3 & L_1 \leftarrow L_1 - mL_3 \\ (m-1)y + (1-m)z = m - m^2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} (2-m-m^2)z = (1+m-m^2-m^3) & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ (m-1)y + (1-m)z = m - m^2 \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Les racines de $m^2 + m - 2$ sont 1 et -2. On distingue donc trois cas.

- Si $m = 1$, alors le système équivaut à $x + y + z = 1$. L'ensemble des solutions est donc
$$\left\{(1-y-z, y, z),\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
- Si $m = -2$, alors le système n'a clairement pas de solution.
- Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, alors on trouve successivement
$$\begin{aligned} z &= \frac{m^3 + m^2 - m - 1}{m^2 + m - 2} = \frac{(m+1)^2}{m+2} \\ y &= \frac{m - m^2}{m-1} + z = \frac{1}{m+2} \\ x &= m^2 - y - mz = -\frac{m+1}{m+2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc le singleton

$$\left\{\left(-\frac{m+1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{(m+1)^2}{m+2}\right)\right\}$$

Solution 74.

Notons $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On rappelle que pour tout $(i,j,k,l) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^4$, $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Alors $E_{ii} - E_{jj} = E_{ij}E_{ji} - E_{ji}E_{ij}$ et donc $f(E_{ii}) = f(E_{jj})$. On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(E_{ii}) = \lambda$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
Soit à nouveau $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Alors $E_{ij} = E_{i1}E_{1j} - E_{1j}E_{i1}$. On en déduit que $f(E_{ij}) = 0$.
Finalement,

- $f(E_{ii}) = \lambda = \lambda\,\mathrm{tr}(E_{ii})$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$;
- $f(E_{ij}) = 0 = \lambda\,\mathrm{tr}(E_{ij})$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

Les formes linéaires f et $\lambda\,\mathrm{tr}$ coïncident sur la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: elles sont donc égales.

Solution 75.

1. Comme $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = H_1 + H_2$, tout élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ – en particulier Id – peut s'écrire comme la somme d'un élément de H_1 et d'un élément de H_2.

2. On compose l'identité $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}$ par p_1 une fois à gauche et une fois à droite pour obtenir :
$$p_1^2 + p_1 \circ p_2 = p_1 \qquad\qquad p_1^2 + p_2 \circ p_1 = p_1$$
On additionne ces deux égalités de sorte que
$$2p_1^2 + p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = 2p_1$$
Mais comme $p_1 \in H_1$ et $p_2 \in H_2$, $p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = 0$. Ainsi $2p_1^2 = 2p_1$ et finalement $p_1^2 = p_1$. Donc p_1 est un projecteur.
Quitte à échanger p_1 et p_2, on démontre de même que p_2 est un projecteur.

3. Soit $f \in H_1$. On a donc $f \circ p_2 + p_2 \circ f = 0$. Comme p_2 est un projecteur, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de p_2 est $P_2 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_r \end{array}\right)$ où $r = \mathrm{rg}\, p_2$. Notons $F = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ la matrice de f dans cette même base $\mathcal{B}$ avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$. On a donc $FP_2 + P_2F = 0$, ce qui entraîne $A = B = C = 0$. Par conséquent, $F = \left(\begin{array}{c|c} 0_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & D \end{array}\right)$. Notons Φ l'isomorphisme qui associe à un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. On a donc $\Phi(H_1) \subset G$ où G est le sous-espace vectoriel des matrices de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 0_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & D \end{array}\right)$ où $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$. Par conséquent $\dim H_1 \leqslant \dim G$. Or $\dim G = (n-r)^2$. Ainsi $\dim H_1 \leqslant (n-r)^2 = (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2$.
On prouve de la même manière que $\dim H_2 \leqslant (n - \mathrm{rg}\, p_1)^2$.

4. Comme $H_1 \oplus H_2 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\dim H_1 + \dim H_2 = n^2$. On déduit de la question précédente que
$$n^2 \leqslant (n - \mathrm{rg}\, p_1)^2 + (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2$$
Comme $n - \mathrm{rg}\, p_1 \geqslant 0$ et $n - \mathrm{rg}\, p_2 \geqslant 0$,
$$(n - \mathrm{rg}\, p_1)^2 + (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2 \leqslant [(n - \mathrm{rg}\, p_1) + (n - \mathrm{rg}\, p_2)]^2 = [2n - (\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2)]^2$$

On sait que $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}$. Donc $\mathrm{rg}(p_1+p_2) = n$. Or c'est un exercice classique que de montrer que $\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2 \geqslant \mathrm{rg}(p_1+p_2)$. On en déduit que $\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2 \geqslant n$. De plus $\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2 \leqslant 2n$ donc

$$[2n - (\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2)]^2 \leqslant n^2$$

Finalement,

$$n^2 \leqslant (n - \mathrm{rg}\, p_1)^2 + (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2 \leqslant [2n - (\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2)]^2 \leqslant n^2$$

On en déduit que $[2n - (\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2)]^2 = n^2$ i.e. $\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2 = n$ et que $n^2 = (n - \mathrm{rg}\, p_1)^2 + (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2$. Notons $r = \mathrm{rg}\, p_1$. On a alors $n^2 = (n-r)^2 + r^2$ i.e. $r(n-r) = 0$. Deux cas se présentent.

- Si $r = 0$, alors $p_1 = 0$ et donc $p_2 = \mathrm{Id}$. On a alors $\dim H_1 \leqslant (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2 = 0$. Donc $H_1 = \{0\}$. Par conséquent $H_2 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
- Si $r = n$, alors $p_1 = \mathrm{Id}$. On a alors $\dim H_2 \leqslant (n - \mathrm{rg}\, p_1)^2 = 0$. Donc $H_2 = \{0\}$. Par conséquent $H_1 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Réciproquement, on vérifie que ces deux couples (H_1, H_2) vérifient bien les hypothèses de l'énoncé.

Solution 76.

Puisque $\mathrm{Im}\, p_k \subset E$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{k=1}^n \mathrm{Im}\, p_k \subset E$. De plus, $E = \mathrm{Im}\, \mathrm{Id}_E = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^n p_k\right) \subset \sum_{k=1}^n \mathrm{Im}\, p_k$. Par double inclusion, $\sum_{k=1}^n \mathrm{Im}\, p_k = E$.
Montrons maintenant que la somme est directe. Les p_k étant des projecteurs, $\mathrm{rg}\, p_k = \mathrm{tr}(p_k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. De plus, $\sum_{k=1}^n p_k = \mathrm{Id}_E$ donc, par linéarité de la trace $\sum_{k=1}^n \mathrm{tr}(p_k) = \mathrm{tr}(\mathrm{Id}_E)$ ou encore $\sum_{k=1}^n \mathrm{rg}(p_k) = \dim E$. C'est donc que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}\, p_1, \dots, \mathrm{Im}\, p_n$ sont en somme directe.

Solution 77.

- **Solution 1**
Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ dans E. On définit l'application linéaire

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}\, \Phi & \longrightarrow & \mathcal{L}(S, \mathrm{Im}\, v) \\ g & \longmapsto & g_{|S}^{|\mathrm{Im}\, v} \end{array}$$

Cette application est bien définie car, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Im}(v \circ f \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v$. Montrons que c'est un isomorphisme.
Soit $g \in \mathrm{Ker}\, \Psi$. Puisque $g \in \mathrm{Im}\, \Phi$, il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g = v \circ f \circ u$. Comme $g \in \mathrm{Ker}\, \Psi$, $g_{|S} = 0$. Mais on a aussi évidemment $g_{|\,\mathrm{Ker}\, u} = 0$. Puisque $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus S$, $g = 0$ et Ψ est injective.
On sait que u induit un isomorphisme $\tilde{u}$ de S sur $\mathrm{Im}\, u$. De même, v induit un isomorphisme $\tilde{v}$ de T sur $\mathrm{Im}\, v$ où T est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, v$ dans E. Soit $\tilde{g} \in \mathrm{Im}\, \Psi$. On définit f de la manière suivante : $f(x) = \tilde{v}^{-1} \circ \tilde{g} \circ \tilde{u}^{-1}(x)$ pour $x \in \mathrm{Im}\, u$ et $f = 0$ sur un supplémentaire quelconque de $\mathrm{Im}\, u$. On a alors bien $\Psi(v \circ f \circ u) = \tilde{g}$, ce qui montre que Ψ est surjective.
Par conséquent, $\mathrm{rg}\, \Phi = \dim \mathcal{L}(S, \mathrm{Im}\, v) = \mathrm{rg}\, u\, \mathrm{rg}\, v$.

- **Solution 2**
Notons S un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, u$ dans E et T un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, v$ dans E. On pose

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{L}(E), S \subset \mathrm{Ker}\, f, \mathrm{Im}\, f \subset T\}.$$

On vérifie que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Montrons que Φ induit un isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $\mathrm{Im}\, \Phi$.
Soit $f \in \mathcal{F} \cap \mathrm{Ker}\, \Phi$. Par définition de $\mathcal{F}$, $f_{|S} = 0$. De plus, $v \circ f \circ u = 0$ signifie que $f(\mathrm{Im}\, u) \subset \mathrm{Ker}\, v$. Mais, par définition de $\mathcal{F}$, $\mathrm{Im}\, f \subset T$. Donc $f(\mathrm{Im}\, u) \subset \mathrm{Ker}\, v \cap T = \{0\}$. D'où $f_{|\,\mathrm{Im}\, u} = 0$. Comme $E = S \oplus \mathrm{Im}\, u$, $f = 0$ et la restriction de Φ à $\mathcal{F}$ est injective.
Montrons que $\Phi(\mathcal{F}) = \mathrm{Im}\, \Phi$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Notons π_1 la projection de E sur $\mathrm{Im}\, u$ parallèlement à S et π_2 la projection de E sur T parallèlement à $\mathrm{Ker}\, v$. On vérifie que $\pi_2 \circ f \circ \pi_1 \in \mathcal{F}$. De plus, $\pi_1 \circ u = u$ et $v \circ \pi_2 = v$. Donc $v \circ (\pi_2 \circ f \circ \pi_1) \circ u = v \circ f \circ u$ i.e. $\Phi(\pi_2 \circ f \circ \pi_1) = \Phi(f)$.
Ainsi Φ induit un isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $\mathrm{Im}\, \Phi$ et donc $\mathrm{rg}\, \Phi = \dim \mathcal{F}$. Or $\mathcal{F}$ est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathrm{Im}\, u, T)$. De plus, v induit un isomorphisme de T sur $\mathrm{Im}\, v$ donc $\dim T = \mathrm{rg}\, v$. Ainsi $\mathrm{rg}\, \Phi = \dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{L}(\mathrm{Im}\, u, T) = \mathrm{rg}\, u\, \mathrm{rg}\, v$.

► **Solution 3**
Commençons par montrer le lemme suivant : si $w \in \mathcal{L}(E)$ est de rang p alors il existe deux bases (e_i) et (ε_i) de E telles que

$$\operatorname{mat}_{(e_i),(\varepsilon_i)}(w) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_{p,n-p} \\ \mathbb{O}_{n-p,p} & \mathbb{O}_{p,p} \end{pmatrix}$$

où n est la dimension de E. En effet, soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} w$. On se donne une base $(e_1, \dots, e_p)$ de S et une base $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ de $\operatorname{Ker} v$. Posons $\varepsilon_i = w(e_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. Comme w induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} w$, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une base de $\operatorname{Im} w$ qu'on complète en une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E. La matrice de w dans ces bases est bien de la forme voulue.
Notons $p = \operatorname{rg} u$ et $q = \operatorname{rg} v$. Notons $(e_i), (\varepsilon_i)$ et $(e'_i), (\varepsilon'_i)$ les bases définies dans le lemme correspondant respectivement à u et v. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \operatorname{mat}_{(\varepsilon_i),(e'_i)}(f)$. Alors $\operatorname{mat}_{(e_i),(\varepsilon'_i)}(v \circ f \circ u)$ est la sous-matrice de M $(m_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant q}$. Ainsi $\operatorname{Im} \Phi$ est isomorphe à $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et est donc de dimension $pq = \operatorname{rg} u \operatorname{rg} v$.

Solution 78.

1. f est linéaire essentiellement grâce à la $\mathbb{R}$-linéarité de la conjugaison. On a $f(1) = 1$ et $f(i) = -2 - i$. La famille $(f(1), f(i))$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 $\mathbb{C}$: c'est donc une base. f transforme donc une base de $\mathbb{C}$ en une base de $\mathbb{C}$: c'est un automorphisme de $\mathbb{C}$.

2. On cherche donc e_1 et e_2 dans $\mathbb{C}$ tels que

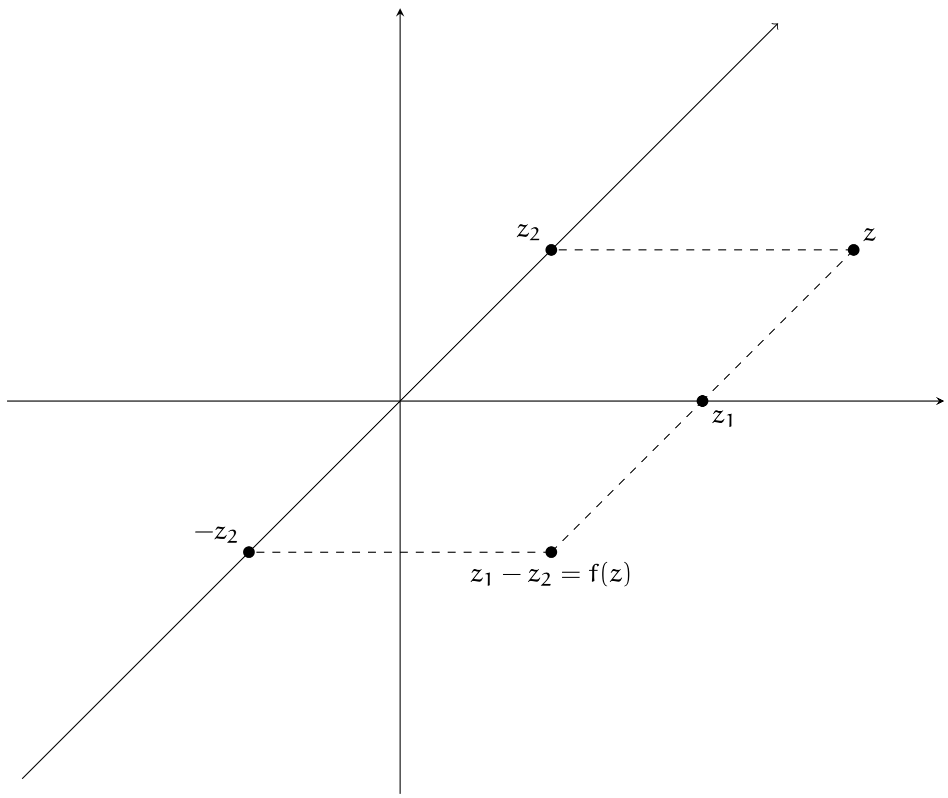
$$f(e_1) = e_1 \quad \text{et} \quad f(e_2) = -e_2$$

On a donc à résoudre :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} ie_1 + (1-i)\overline{e_1} = e_1 \\ ie_2 + (1-i)\overline{e_2} = -e_2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} i(e_1 - \overline{e_1}) - (e_1 - \overline{e_1}) = 0 \\ i(e_2 - \overline{e_2}) + (e_2 + \overline{e_2}) = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} -2\operatorname{Im}(e_1) - 2i\operatorname{Im}(e_1) = 0 \\ -2\operatorname{Im}(e_2) + 2\operatorname{Re}(e_2) = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \operatorname{Im}(e_1) = 0 \\ \operatorname{Re}(e_2) = \operatorname{Im}(e_2) \end{cases}
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $e_1 = 1$ (on l'avait en fait déjà trouvé à la première question) et $e_2 = 1 + i$. On vérifie que (e_1, e_2) est bien une base de $\mathbb{C}$.

3. La question précédente montre que f est une symétrie par rapport à $\operatorname{vect}(e_1)$ parallèlement à $\operatorname{vect}(e_2)$.



Solution 79.

1. Il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a \sin + b \cos + c \operatorname{sh} + d \operatorname{ch} = 0$. On évalue cette identité en 0 et on trouve $b + d = 0$. On dérive puis on évalue en 0 et on trouve $a + c = 0$. On dérive deux fois puis on évalue en 0 et on trouve $-b + d = 0$. On dérive trois fois puis on évalue en 0 et on trouve $-a + c = 0$. On a alors nécessairement $a = b = c = d = 0$. La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de F par définition de F : c'est une base de F.

2. $D(\sin) = \cos \in F$, $D(\cos) = -\sin \in F$, $D(\operatorname{sh}) = \operatorname{ch} \in F$ et $D(\operatorname{ch}) = \operatorname{sh} \in F$. Ainsi $D(\mathcal{B}) \subset F$. Comme $\mathcal{B}$ engendre F, on a par linéarité de D : $D(F) \subset F$.

3. D'après la question précédente $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Posons $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a donc $M = \left(\begin{array}{c|c} J & 0_2 \\ \hline 0_2 & K \end{array}\right)$.
   Notons I_2 la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$.
   On a $J^2 = -I$ donc $J^3 = -J$ et $J^4 = I_2$. On en déduit que $J^n = I_2$ si $n \equiv 0[4]$, $J^n = J$ si $n \equiv 1[4]$, $J^n = -I_2$ si $n \equiv 2[4]$, $J^n = -J$ si $n \equiv 3[4]$.
   On a également $K^2 = I_2$. On en déduit que $K^n = I_2$ si $n \equiv 0[2]$ et $K^n = K$ si $n \equiv 1[2]$.
   Un calcul par blocs donne $M^n = \left(\begin{array}{c|c} J^n & 0_2 \\ \hline 0_2 & K^n \end{array}\right)$. Donc $M^n = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0_2 \\ \hline 0_2 & I_2 \end{array}\right)$ si $n \equiv 0[4]$, $M^n = \left(\begin{array}{c|c} J & 0_2 \\ \hline 0_2 & K \end{array}\right)$ si $n \equiv 1[4]$, $M^n = \left(\begin{array}{c|c} -I_2 & 0_2 \\ \hline 0_2 & I_2 \end{array}\right)$ si $n \equiv 2[4]$ et $M^n = \left(\begin{array}{c|c} -J & 0_2 \\ \hline 0_2 & K \end{array}\right)$ si $n \equiv 3[4]$.

4. La question précédente montre que $M^4 = I_4$ où I_4 est la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Ainsi M est inversible d'inverse $M^{-1} = M^3$.
   Par conséquent, d est inversible est la matrice de d^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ est $M^{-1} = M^3 = \left(\begin{array}{c|c} -J & 0_2 \\ \hline 0_2 & K \end{array}\right)$.

5. La matrice de $d - \mathrm{Id}$ dans la base $\mathcal{B}$ est $M - I_4$. On voit facilement que $\mathrm{Im}(M - I_4) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$. De plus, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M - I_4)$. Or $\dim \mathrm{Ker}(M - I_4) = 1$ donc ce vecteur engendre $\mathrm{Ker}(M - I_4)$. On en déduit que $\mathrm{Im}(d - \mathrm{Id}) = \mathrm{vect}(-\sin + \cos, -\sin - \cos, \mathrm{ch} - \mathrm{sh})$ et que $\mathrm{Ker}(d - \mathrm{Id}) = \mathrm{vect}(\mathrm{ch} + \mathrm{sh})$. Remarquons que $\mathrm{ch} - \mathrm{sh}$ est la fonction $\frac{1}{\exp}$ et que $\mathrm{ch} + \mathrm{sh}$ est la fonction exp.

6. On a $g \circ f = d^2 - \mathrm{Id}$. La matrice de $g \circ f$ est donc $M^2 - I_4 = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. On a clairement $\mathrm{Im}\, g \circ f = \mathrm{vect}(\sin, \cos)$ et $\mathrm{Ker}\, g \circ f = \mathrm{vect}(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$.