Corrigé TD : Dénombrement, probabilités

Solution 1.

Plaçons nous sur une planète donné et notons $p_1,\dots,p_n$ les pays et v_k le nombre de voisins du pays p_k. Evidemment $0 \leqslant v_k \leqslant n-1$ pour tout $k=1,\dots,n$. Supposons par l'absurde que les v_k sont distincts deux à deux. Alors, quitte à renuméroter les pays, on peut supposer que

$$0 \leqslant v_1 < v_2 < \cdots < v_n \leqslant n-1\,.$$

Ca devient serré... on a forcément $v_1=0$ et $v_n=n-1$. Or c'est une contradiction car la première égalité signifie que p_1 n'a pas de voisin (c'est une île), tandis que la deuxième égalité dit que tout pays est voisin de p_n.

Solution 2.

1. On a $\mathrm{S}(n,n)=n!$ puisque dans le cas $n=m$ les surjections de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,m]\!]$ sont des bijections.
   Si $n<m$ alors il n'existe pas de surjection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,m]\!]$, donc $\mathrm{S}(n,m)=0$.

2. Pour mieux cerner de quoi il s'agit il faut revenir à la version ensembliste de la notion d'application. Une application $\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ entre deux ensembles X et Y est définie à partir de son graphe qui est un sous-ensemble Γ du produit $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ vérifiant la propriété suivante :

   $$(*) \qquad \forall\, x\in\mathrm{X}\,\exists_1\, y\in\mathrm{Y} : \quad (x,y)\in\Gamma.$$

   On a $\mathrm{S}(0,0)=1$. En effet, on est dans le cas où $\mathrm{X}=\mathrm{Y}=\varnothing$. Alors $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}=\varnothing$ et le graphe ne peut être que l'ensemble vide ; on parle alors d'application vide. Comme en plus Y est vide la condition de surjectivité est trivialement satisfaite.
   On a $\mathrm{S}(n,0)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. En effet, on est dans le cas où $\mathrm{X}\neq\varnothing$ et $\mathrm{Y}=\varnothing$; alors la condition $(*)$ ne peut pas être validée, donc il n'existe pas d'application $\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$.
   Remarquons en passage qu'on a aussi $\mathrm{S}(0,m)=0$ pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, mais pour une autre raison : si $\mathrm{X}=\varnothing$ et $\mathrm{Y}\neq\varnothing$ alors il existe une application $\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$, à savoir l'application vide, mais elle n'est pas surjective.

3. Soit $(n,m)\in\mathbb{N}^2$. Pour calculer $\mathrm{S}(n+1,m)$ nous devons dénombrer les possibilité de construire une application surjective $f:[\![0,n]\!]\to[\![1,m]\!]$. Nous distinguons deux cas pour une telle surjection f.

   - $f^{-1}(\{f(0)\})\neq\{0\}$. Cela siginfie que 0 n'est pas le seul élément que f envoye sur $f(0)$. Ainsi la restriction

     $$h=f|_{[\![1,n]\!]} : [\![1,n]\!]\to[\![1,m]\!]\,,\ k\mapsto f(k),$$

     est surjective. Il existe $\mathrm{S}(n,m)$ telles surjections h, et il y a m choix possibles pour le nombre $f(0)$. On a alors $m\mathrm{S}(n,m)$ possibilités d'obtenir f.
   - $f^{-1}(\{f(0)\})=\{0\}$. Cela siginfie que f envoye tous les éléments non-nuls sur un image différente de $f(0)$. Alors l'application

     $$g : [\![1,n]\!]\to[\![1,m]\!]\setminus\{f(0)\}\,,\ k\mapsto f(k),$$

     est bien définie et surjective. Il existe m choix possibles pour $f(0)$, et il existe $\mathrm{S}(n,m-1)$ possibilités pour une surjection g comme ci-dessus. On a alors $m\mathrm{S}(n,m-1)$ manières différentes d'obtenir f.

   Nous avons donc montré que $\mathrm{S}(n+1,m)=m(\mathrm{S}(n,m)+\mathrm{S}(n,m-1))$.

Solution 3.

1. $21/32$, $\dfrac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}}=\dfrac{21\times20}{32\times31}=\dfrac{21\times5}{8\times31}=\dfrac{105}{248}$.

2. $2\times10^3=2000$, $2\times10\times9\times8=1440$,
   $2\times10\times9\times9=1620$.

SOLUTION 4.

1. $12^4 = 20736$.
2. $A_{12}^4 = 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11880$.
3. $11^3 \times 4 = 5324$. $\qquad 11 \times 10 \times 9 \times 4 = 3960$.
4. Chaque fois qu'il y a dans l'énoncé « au moins un » il est conseillé de passer par l'événement contraire qui est « aucun». Le nombre de codes sans chiffres est $2^4 = 16$, donc le nombre de codes contenant au moins un chiffre est
$$20736 - 16 = 20720.$$
Un code à caractères distincts contient forcément au moins un chiffre (car il n'y a que deux lettres). Le nombre de codes à caractères distincts et contenant au moins un chiffre est donc 11880 (voir la deuxième question).

5. Le nombre de codes à caractères distincts sans lettre est $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$. Donc le nombre de codes à caractères distincts et contenant au moins une lettre est
$$11880 - 5040 = 6840.$$

SOLUTION 5.

1. $\binom{32}{8} = 10518300$.
2. $\binom{8}{3}\binom{24}{5} = 2380224$.
3. « Au moins trois piques» signifie que le nombre de piques est dans $\{3,4,5,6,7,8\}$. Il est alors plus court de passer par le contraire : le nombre de piques est dans $\{0,1,2\}$.
Pas de pique : $\binom{24}{8} = 735471$, $\qquad$ un pique : $\binom{8}{1}\binom{24}{7} = 2768832$. $\qquad$ deux piques : $\binom{8}{2}\binom{24}{6} = 3768688$,
Donc le nombre de mains avec au moins trois piques est
$$10518300 - 735471 - 2768832 - 3768688 = 3245309.$$
4. Notons X le nombre de rois et Y le nombre de piques dans la main. On cherche le cardinal de $\{X \geqslant 1\} \cap \{Y \geqslant 1\}$. Encore une fois, le passage au contraire nous aidera. D'après la formule de Morgan on a
$$\overline{\{X \geqslant 1\} \cap \{Y \geqslant 1\}} = \{X = 0\} \cup \{Y = 0\}.$$
On calcule
$$\left|\{X = 0\} \cup \{Y = 0\}\right| = \left|\{X = 0\}\right| + \left|\{Y = 0\}\right| - \left|\{X = Y = 0\}\right| = \binom{28}{8} + \binom{24}{8} - \binom{21}{8} = 3640086.$$
Donc le nombre recherché est $10518300 - 3640086 = 6878214$.

SOLUTION 6.

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale *si et seulement si* la famille de ses vecteurs colonnes est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. En particulier, chaque vecteur colonne doit être unitaire. Comme on recherche des matrices à coefficients entiers, chacune des colonnes possède un seul coefficient non nul égal à ± 1. Notons $\sigma(i)$ la position du seul coefficient non nul de la $i^{\text{ème}}$ colonne. Comme les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux, $i \neq j \Rightarrow \sigma(i) \neq \sigma(j)$. Autrement dit, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Il y a donc $n!$ façons de placer les coefficients non nuls dans la matrice. Comme chacun de ces coefficients peut être égal à± 1, on en déduit que le cardinal de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est $2^n n!$.

SOLUTION 7.

1. Notons E l'ensemble des k-uplets vérifiant la condition demandée et $\mathscr{P}_k$ l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1,n]\!]$. Soit ϕ : $\left\{\begin{array}{ccc} [\![1,n]\!]^k & \longrightarrow & \mathscr{P}([\![1,n]\!]) \\ (i_1,\dots,i_k) & \longmapsto & \{i_1,\dots,i_k\}\end{array}\right.$. ϕ induit une bijection de E sur $\mathscr{P}_k$. On a donc $\operatorname{card} E = \binom{n}{k}$ si $k \geqslant n$ et $\operatorname{card} E = 0$ sinon.

2. Soit $p \in [\![1,k]\!]$. On note F l'ensemble des k-uplets vérifiant la condition demandée et F_p l'ensemble des k-uplets $(i_1,i_2,\dots,i_k)$ de F tels que $\operatorname{card}\big(\phi((i_1,\dots,i_k))\big) = p$. Pour un tel k-uplet, dans la sérié d'inégalités $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_k$, $k-p$ inégalités parmi les $k-1$ seront en fait des égalités. Pour définir un élément de F_p, il suffit donc de se donner un élément de $\mathscr{P}_p$ et la place des égalités parmi les inégalités. On en déduit donc que $\operatorname{card} F_p = \binom{n}{p}\binom{k-1}{k-p}$. Les F_p pour $p \in [\![1,k]\!]$ forment une partition de F. Ainsi $\operatorname{card} F = \displaystyle\sum_{p=1}^{k}\binom{n}{p}\binom{k-1}{k-p}$.
Soit X un ensemble à $n+k-1$ éléments et A une partie à n éléments de X. Notons $\mathscr{X}_k$ l'ensemble des parties à k éléments de X et $\mathscr{X}_{k,p}$ l'ensemble des parties à k éléments de X qui comportent p éléments dans A. Remarquons que $\mathscr{X}_{k,0} = \varnothing$. Les $\mathscr{X}_{k,p}$ pour $p \in [\![1,k]\!]$ forment donc une partition de $\mathscr{X}_k$. On a évidemment $\operatorname{card} \mathscr{X}_k = \binom{n+k-1}{k}$. De plus, $\operatorname{card} \mathscr{X}_{k,p} = \binom{n}{p}\binom{k-1}{k-p}$ (on choisit p éléments dans A et $k-p$ éléments dans $X \setminus A$). On a donc $\displaystyle\sum_{p=1}^{k}\binom{n}{p}\binom{k-1}{k-p} = \binom{n+k-1}{k}$.
Ainsi $\operatorname{card} F = \binom{n+k-1}{k}$.

Solution 8.

1. Se donner $f \in \mathscr{S}_{p,n}$ revient à se donner $f(1) < f(2) < \cdots < f(p)$ dans $[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire une partie à p éléments de $[\![1,n]\!]$ puisqu'il n'y a qu'une seule façon de ranger par ordre strictement croissant les éléments d'une partie de $[\![1,n]\!]$. Ainsi $\operatorname{card} \mathscr{S}_{p,n} = \binom{n}{p}$ si $p \geqslant n$ et $\operatorname{card} \mathscr{S}_{p,n} = 0$ sinon.

2. Soient $x \in [\![1,p-1]\!]$. Alors $g(x+1) - g(x) = f(x+1) - f(x) + 1 > 0$ car $f(x+1) \geqslant f(x)$. Ainsi g est strictement croissante.
Pour tout $x \in [\![1,p]\!]$, on a $1 \leqslant x \leqslant p$ et $1 \leqslant f(x) \leqslant n$ donc $1 \leqslant f(x) + x - 1 \leqslant n + p - 1$.

3. Notons ψ l'application qui à une fonction f de $\mathscr{S}_{p,n}$ associe la fonction g de $\mathscr{S}_{p,n+p-1}$ définie comme dans la question précédente.
Montrons que ψ est injective. Soient $f_1, f_2 \in \mathscr{C}_{p,n}$ telles que $\psi(f_1) = \psi(f_2)$. Alors pour tout $x \in [\![1,p]\!]$, $f_1(x) + x - 1 = f_2(x) + x - 1$ et donc $f_1(x) = f_2(x)$. Ainsi $f_1 = f_2$.
Montrons que ψ est surjective. Soit $g \in \mathscr{S}_{p,n+p-1}$. Pour $x \in [\![1,p]\!]$, posons $f(x) = g(x) - x + 1$. On va vérfier que $f \in \mathscr{C}_{p,n}$ et ainsi on aura $\psi(f) = g$.
Montrons que f est croissante. Soient $x \in [\![1,p-1]\!]$. Alors $f(x+1) - f(x) = g(x+1) - g(x) - 1$. Comme g est strictement croissante à valeurs entières $g(x+1) - g(x) \geqslant 1$. Donc $f(x+1) - f(x) \geqslant 0$.
Montrons que f est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. On a $f(1) = g(1) - 1 + 1 = g(1) \geqslant 1$ et $f(p) = g(p) - p + 1 \leqslant n + p - 1 - p + 1 = n$ car g est à valeurs dans $[\![1,n+p-1]\!]$. Comme f est croissante, pour tout $x \in [\![1,p]\!]$, $1 \leqslant f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(p) \leqslant n$.
$\psi : \mathscr{C}_{p,n} \to \mathscr{S}_{p,n+p-1}$ est injective et surjective donc bijective. On en déduit que $\operatorname{card} \mathscr{C}_{p,n} = \operatorname{card} \mathscr{S}_{p,n+p-1}$.

4. **a.** Notons $E_{p,n}$ l'ensemble des n-uplets recherchés. On définit l'application

$$\phi : \left\{\begin{array}{ccc} E_{p,n} & \longrightarrow & \mathscr{C}_{p,n} \\ (u_1,\dots,u_p) & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ccc} [\![1,p]\!] & \longrightarrow & [\![1,n+1]\!] \\ x & \longmapsto & 1 + \sum_{i=1}^{x} u_i \end{array}\right.\end{array}\right.$$

ϕ est bien définie :

- comme les u_i sont positifs, $\phi(u_1,\dots,u_p)$ est bien une application croissante ;
- comme $u_1 + \cdots + u_p \leqslant n$, cette application est bien à valeurs dans $[\![1,n+1]\!]$.

Montrons que ϕ est bijective.

- Injectivité : Soient $(u_1,\dots,u_p)$ et $(v_1,\dots,v_p)$ des éléments de $E_{p,n}$ tels que $\phi(u_1,\dots,u_p) = \phi(v_1,\dots,v_p)$. Notons $f = \phi(u_1,\dots,u_p) = \phi(v_1,\dots,v_p)$. On a alors $f(1) = u_1 = v_1$ et $f(x) - f(x-1) = u_x = v_x$ pour $x \in [\![2,p]\!]$. D'où $(u_1,\dots,u_p) = (v_1,\dots,v_p)$.
- Surjectivité : Soit $f \in \mathscr{C}_{p,n}$. On pose $u_1 = f(1)$ et $u_x = f(x) - f(x-1)$ pour $x \in [\![2,p]\!]$. Les u_i ainsi définis sont des entiers naturels car f est croissante. On a $u_1 + \cdots + u_p = f(p)$ par télescopage et $f(p) \leqslant n$. Donc $(u_1,\dots,u_p) \in E_{p,n}$. Enfin, on a bien $\phi(u_1,\dots,u_p) = f$ puisque $\forall x \in [\![1,p]\!]$, $\sum_{i=1}^{x} u_i = f(x)$ par télescopage à nouveau.

On en déduit $\operatorname{card} E_{p,n} = \operatorname{card} \mathscr{C}_{p,n+1} = \binom{n+p}{p}$.

b. Notons $F_{p,n}$ l'ensemble des éléments recherchés. On remarque que $F_{p,n} = E_{p,n} \setminus E_{p,n-1}$. Comme $E_{p,n-1} \subset E_{p,n}$, on a $\operatorname{card} F_{p,n} = \operatorname{card} E_{p,n} - \operatorname{card} E_{p,n-1} = \binom{n+p}{p} - \binom{n+p-1}{p} = \binom{n+p-1}{p-1}$.

Solution 9.

1. Notons E_1 l'ensemble des couples (X, Y) tels que $X \cap Y = \varnothing$. Le choix d'un tel couple (X, Y) revient au choix de k éléments de X parmi les n éléments de E et au choix de l éléments de Y parmi les $n-k$ éléments restants. Ainsi
$$\begin{aligned}\operatorname{card} E_1 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n\end{aligned}$$

2. Notons E_2 l'ensemble des couples (X, Y) tels que $X \cup Y = E$. Comme $X \cup Y = E$ équivaut à $\overline{X} \cap \overline{Y} = \varnothing$ et que $(X, Y) \mapsto (\overline{X}, \overline{Y})$ est une bijection de $\mathscr{P}(E)^2$ dans lui-même, $\operatorname{card} E_1 = \operatorname{card} E_2 = 3^n$.

3. Notons E_3 l'ensemble des couples (X, Y) formant une partition de E. Le choix d'un tel couple (X, Y) revient au choix de k éléments de X parmi les n éléments de E et des $n-k$ éléments restants pour Y. Ainsi
$$\operatorname{card} E_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

4. Notons E_4 l'ensemble des triplets (X, Y, Z) tels que $X \cup Y = Z$. Le choix d'un triplet (X, Y, Z) de E_4 revient au choix de i éléments de Z parmi les n éléments de E puis au choix d'un couple (X, Y) tel que $X \cup Y = Z$. On a vu qu'il existe 3^i choix possibles pour un tel couple (X, Y). Ainsi
$$\operatorname{card} E_4 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 3^i = (1+3)^n = 4^n$$
On peut même faire plus simple : le choix d'un triplet (X, Y, Z) tel que $X \cup Y = Z$ revient au choix d'un couple (X, Y) puisqu'une fois que celui-ci est choisi Z est déterminé de manière unique. Ainsi
$$\operatorname{card} E_4 = (\operatorname{card} \mathscr{P}(E))^2 = (2^n)^2 = 2^{2n}$$

Solution 10.

Soit E un ensemble à $2n$ éléments et (E_1, E_2) une partition de E avec $\operatorname{card} E_1 = \operatorname{card} E_2 = n$. Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des parties de E à n éléments et, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\mathscr{E}_k$ l'ensemble des parties de E à n élémnents possédant eaxctement k éléments dans $\mathscr{E}_1$. Il est clair que $(\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_1, \dots, \mathscr{E}_n)$ est une partition de $\mathscr{E}$. Se donner un élément de $\mathscr{E}_k$ revient à se donner une partie à k éléments de E_1 et une partie à $n-k$ éléments de E_2. On en déduit que $\operatorname{card} \mathscr{E}_k = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ par symétrie des coefficients binomiaux. On sait que $\operatorname{card} \mathscr{E} = \binom{2n}{n}$. Comme $(\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_1, \dots, \mathscr{E}_n)$ est une partition de $\mathscr{E}$, on en déduit que $\operatorname{card} \mathscr{E} = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card} \mathscr{E}_k$ puis la formule demandée.

Solution 11.

Comme trois de ces cordes ne sont jamais concourantes, il suffit de dénombrer le nombre de points d'intersection de ces cordes deux à deux. Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des combinaisons de 4 points parmi $A_1, \dots, A_n$ de $\mathscr{C}$. Pour $E \in \mathscr{E}$, notons $\mathscr{C}_E$ l'ensemble des paires de cordes dont les extrémités sont des points de E. La famille $(\mathscr{C}_{\mathrm{E}})_{\mathrm{E}\in\mathscr{E}}$ est une partition de l'ensemble des paires de cordes d'extrémités $\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_n$. Il suffit alors de remarquer que si l'on se donne 4 points parmi $\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_n$, parmi les 6 cordes formées 4 points, seules deux d'entre elles se coupent à l'intérieur du cercle (le quadrilatère non croisé formé par ces 4 points est convexe). Le nombre de points recherché est donc$\binom{n}{4}$.

Solution 12.

Notons $k = \operatorname{card}\{x_1,\dots,x_n\}$ et $\{x_1,\dots,x_n\} = \{a_1,\dots,a_k\}$ (les a_i sont sans doublon). Notons enfin $\mathrm{A}_i = \{j \in [\![1,n]\!] \mid x_j = a_i\}$ pour $i \in [\![1,k]\!]$. On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\operatorname{card}\mathrm{A}_i = n$. Supposons que moins de p nombres parmi $x_1,\dots,x_n$ soient égaux. On a donc $\operatorname{card}\mathrm{A}_i \leqslant p$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$. D'où $n \leqslant pk$. Or on sait que $n \geqslant p^2+1$ donc $pk \geqslant p^2+1$ puis $k > p$. Ceci signifie qu'il existe au moins $p+1$ nombres deux à deux distincts parmi $x_1,\dots,x_n$.

Solution 13.

1. On a clairement $\nu_n(\mathbb{N}^*) = n$ et donc $\delta_n(\mathbb{N}^*) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $\delta_n(\mathbb{N}^*) = 1$.
2. Comme E est fini, il admet un plus grand élément. Posons $\mathrm{N} = \max \mathrm{E}$. Pour $n \geqslant \mathrm{N}$, $\nu_n(\mathrm{E}) = \mathrm{N}$ et donc $\delta_n(\mathrm{E}) = \frac{\mathrm{N}}{n}$. On en déduit que $\delta(\mathrm{E}) = 0$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\nu_{2k}(2\mathbb{N}) = k$ et $\nu_{2k+1}(2\mathbb{N}) = k+1$. Par conséquent, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{2} \leqslant \nu_n(2\mathbb{N}) \leqslant \frac{n+1}{2}$ et donc $\frac{1}{2} \leqslant \delta_n(2\mathbb{N}) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$. Par encadrement, $\delta(2\mathbb{N}) = \frac{1}{2}$.
4. Les carrés compris entre 1 sont de la forme k^2 avec $1 \leqslant k^2 \leqslant n$ i.e. $1 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}$. On a donc $\nu_n(\mathrm{C}) = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$. On en déduit l'encadrement $\frac{\sqrt{n}-1}{n} < \delta_n(\mathrm{C}) \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n}$. Par encadrement, $\delta(\mathrm{C}) = 0$.
5. On a $\mathrm{A} \cap [\![1,2^{2n}]\!] = \bigcup_{k=0}^{n-1}]\!]2^{2k},2^{2k+1}]\!]$. Comme $\operatorname{card}\left(]\!]2^{2k},2^{2k+1}]\!]\right) = 2^{2k}$,
$$\nu_{2^{2n}}(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{2k} = \frac{2^{2n}-1}{3}$$
On a également $\mathrm{A} \cap [\![1,2^{2n+1}]\!] = \bigcup_{k=0}^{n}]\!]2^{2k},2^{2k+1}]\!]$. Donc
$$\nu_{2^{2n+1}}(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{n} 2^{2k} = \frac{2^{2(n+1)}-1}{3}$$
On a donc $\delta_{2^{2n}}(\mathrm{A}) = \frac{2^{2n}-1}{3.2^{2n}}$ et $\delta_{2^{2n+1}}(\mathrm{A}) = \frac{2^{2n+2}-1}{3.2^{2n+1}}$. On en déduit que les suites $(\delta_{2^{2n}}(\mathrm{A}))$ et $(\delta_{2^{2n+1}}(\mathrm{A}))$ convergent respectivement vers $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Comme ce sont des suites extraites de $(\delta_n(\mathrm{A}))$, cette suite ne converge pas. Ainsi A n'a pas de densité.
6. Remarquons qu'il existe 9^k entiers à k chiffres ne comportant pas de zéro dans leur écriture décimale. On en déduit que pour $p \geqslant 1$, $\nu_{10^p} = \sum_{k=1}^{p} 9^k = \frac{9^{p+1}-1}{8}$. Soit n un entier et posons $p = \lfloor\log_{10} n\rfloor + 1$ de sorte que $n \leqslant 10^p$. On a donc
$$0 \leqslant \nu_n(\mathrm{D}) \leqslant \frac{9^{p+1}-1}{8} \leqslant \frac{9^{\log_{10}(n)+2}-1}{8} = \frac{81n^{\log_{10}(9)}-1}{8}$$
Par conséquent
$$0 \leqslant \delta_n(\mathrm{D}) \leqslant \frac{81n^{\log_{10}(9)}-1}{8n}$$
Comme $\log_{10}(9) < 1$, on a par encadrement $\delta(\mathrm{D}) = 0$.

Solution 14.

1. Evident puisque, pour $x \in \mathrm{E}$, $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x)=1$ si $x \in \mathrm{A}$ et $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x)=0$ sinon.

2. Soit $x \in \mathrm{E}$. Si $x \in \mathrm{A}$, alors $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x)=1$. De plus, x appartient également à tous les A_i donc $\mathbb{1}_{\mathrm{A}_i}(x)=1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. On a donc $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x)-\mathbb{1}_{\mathrm{A}_i}(x))=0$ puisque tous les facteurs sont nuls.
Si $x \notin \mathrm{A}$, alors $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x)=0$. De plus, il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $x \notin \mathrm{A}_{i_0}$. On a donc $\mathbb{1}_{\mathrm{A}_{i_0}}(x)=0$. Ainsi $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x)-\mathbb{1}_{\mathrm{A}_{i_0}}(x)=0$ et donc $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x)-\mathbb{1}_{\mathrm{A}_i}(x))=0$ car l'un des facteurs est nul.
Finalement, $\prod_{i=1}^{n}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x)-\mathbb{1}_{\mathrm{A}_i}(x))=0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

3. En utilisant le fait que $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}^k=\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient en développant

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}}-\mathbb{1}_{\mathrm{A}_i}) &= \mathbb{1}_{\mathrm{A}}+\sum_{k=1}(-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\prod_{j=1}^{k}\mathbb{1}_{\mathrm{A}_{i_j}}\\ &= \mathbb{1}_{\mathrm{A}}+\sum_{k=1}(-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbb{1}_{\bigcap_{j=1}^{k}\mathrm{A}_{i_j}}\end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}}-\mathbb{1}_{\mathrm{A}_i})=0$, on a :

$$\mathbb{1}_{\mathrm{A}}=\sum_{k=1}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbb{1}_{\bigcap_{j=1}^{k}\mathrm{A}_{i_j}}$$

puis

$$\begin{aligned}\sum_{x\in\mathrm{A}}\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x) &= \sum_{x\in\mathrm{A}}\sum_{k=1}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbb{1}_{\bigcap_{j=1}^{k}\mathrm{A}_{i_j}}(x)\\ &= \sum_{k=1}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\sum_{x\in\mathrm{A}}\mathbb{1}_{\bigcap_{j=1}^{k}\mathrm{A}_{i_j}}(x)\end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser la première question pour aboutir à la relation demandée.

Solution 15.

Le nombre recherché est le nombre de façons d'ordonner les n éléments de l'ensemble autrement dit le nombre de permutations de cet ensemble, à savoir $n!$.

Solution 16.

Soient E un ensemble de cardinal $n+m$, F et G deux parties de cardinaux respectifs n et m formant une partition de m.
Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des parties de E à r éléments. Pour $k \in [\![0,r]\!]$, on note $\mathscr{A}_k$ l'ensemble des parties de E possédant k éléments dans F et donc $r-k$ éléments dans G. Les $\mathscr{A}_k$ pour $k \in [\![0,r$ forment clairement une partition de $\mathscr{A}$ de sorte que $\operatorname{card}\mathscr{A}=\sum_{k=0}^{r}\operatorname{card}\mathscr{A}_k$.
D'une part, $\operatorname{card}\mathscr{A}=\binom{n+m}{r}$. D'autre part, choisir un élément de $\mathscr{A}_k$ revient à choisir une partie de F à k éléments et une partie de G à $n-k$ éléments. Il s'ensuit que $\operatorname{card}\mathscr{A}_k=\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$. On obtient bien la formule demandée.

Solution 17.

Notons $x_1,\dots,x_n$ ces n entiers. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, posons $\mathrm{S}_k=\sum_{p=1}^{k}x_k$ et notons r_k le reste de la division euclidienne de S_k par n. Les n entiers $r_1,\dots,r_n$ appartiennent à $[\![0,n-1]\!]$.

- S'il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $r_k=0$, alors S_k est divisible par n.

- Sinon les n entiers $r_1, \dots, r_n$ appartiennent à $[\![1, n-1]\!]$. D'après le principe de Dirichlet, il existe deux entiers k et l de $[\![1, n]\!]$ tels que $k < l$ et $r_k = r_l$. Alors $S_l - S_k = \sum_{p=k+1}^{l} x_k$ est divisible apar n.

Remarque. On a même prouvé que si on a préalablement ordonné les n entiers de manière quelconque, on peut trouver une somme d'entiers consécutifs (au sens de l'ordre choisi) divisible par n. ■

Solution 18.

1. On introduit les intervalles $I_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. Puisque $I_0, \dots, I_{n-1}$ forment une partition de $[0, 1[$ et que les réels $\delta_0, \dots, \delta_n$ sont tous dans $[0, 1[$, chacun des $n+1$ réels $\delta_0, \dots, \delta_n$ appartient à un des n intervalles $I_0, \dots, I_{n-1}$. D'après le principe des tiroirs, deux de ces réels appartiennent au même intervalle. Autrement dit il existe deux entiers k et l de $[\![0, n]\!]$ tels que $k < l$ et un entier $m \in [\![0, n-1]\!]$ tel que δ_k et δ_l appartiennent à I_m. Ainsi, $\frac{m}{n} \leqslant \delta_k < \frac{m+1}{n}$ et $\frac{m}{n} \leqslant \delta_l < \frac{m+1}{n}$ puis $-\frac{1}{n} < \delta_l - \delta_k < \frac{1}{n}$ i.e. $|\delta_l - \delta_k| < \frac{1}{n}$. On a alors le résultat voulu en posant $q = l - k$ et $p = \lfloor lx \rfloor - \lfloor kx \rfloor$.

2. **a.** Notons $\mathscr{D}$ l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$. $\mathscr{D}$ est non vide puisqu'il contient le couple, $(\lfloor x \rfloor, 1)$.
Supposons que $\mathscr{D}$ soit fini. Notons $m = \min_{(p,q)\in\mathscr{D}} \left|x - \frac{p}{q}\right|$. m est bien défini car $\mathscr{D}$ est non vide et fini. De plus, $m > 0$ car x est irrationnel. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \leqslant m$. D'après la question précédente, il existe un couple $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $s \leqslant n$ et $\left|x - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{ns}$. Puisque $s \geqslant 1$,
$$\left|x - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{ns} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant m$$
donc $(r, s) \notin \mathscr{D}$.
De plus, $s \leqslant n$ donc
$$\left|x - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{ns} \leqslant \frac{1}{s^2}$$
donc $(r, s) \in \mathscr{D}$ d'où une contradiction.

   b. Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des entiers $p \in \mathbb{Z}$ tels qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$. Pour $p \in \mathscr{E}$, notons $\mathscr{D}_p$ l'ensemble des entiers $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$. On a $\mathscr{D} = \bigcup_{p\in\mathscr{E}} \{p\} \times \mathscr{D}_p$. Supposons que $\mathscr{E}$ soit fini. Puisque $\mathscr{D}$ est infini, il existe un entier $p \in \mathscr{E}$ tel que $\mathscr{D}_p$ soit infini. En particulier, on peut construire une suite strictement croissante (q_n) d'éléments de $\mathscr{D}_p$. Puisque (q_n) est à valeurs entières, (q_n) diverge vers $+\infty$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|x - \frac{p}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$ donc, par passage à la limite, $|x| \leqslant 0$ i.e. $x = 0$, ce qui est absurde car x est irrationnel.
Ainsi $\mathscr{E}$ est infini.

3. **a.** Supposons $l > 0$. Alors (u_n) est minorée par un réel $m > 0$ à partir d'un certain rang. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n \sin n} \geqslant m$ pour tout $n \geqslant N$. Ainsi $0 \leqslant \sin n \leqslant \frac{1}{nm}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc la suite $(\sin n)$ converge vers 0 ce qui est classiquement faux.
En considérant la suite $(-u_n)$, on montre de même qu'on ne peut avoir $l < 0$.
On en conclut que $l = 0$.

   b. Comme l'ensemble $\mathscr{E}$ est infini, on peut trouver une suite strictement croissante (p_n) à valeurs dans $\mathscr{E}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $q_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left|\pi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$ i.e. $|q_n\pi - p_n| < \frac{1}{q_n}$. Remarquons en particulier que $q_n\pi > p_n - \frac{1}{q_n} \leqslant p_n - 1$. Ainsi (q_n) diverge également vers $+\infty$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = \pi$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$|\sin(p_n)| = |\sin(q_n\pi - p_n)| \leqslant |q_n\pi - p_n| < \frac{1}{q_n}$$
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{p_n}| > \frac{q_n}{p_n}$. Comme (u_{p_n}) est une suite extraite de (u_n), on obtient $0 \leqslant \pi$ par passage à la limite d'où la contradiction.
Par conséquent, la suite (u_n) n'admet pas de limite.

Solution 19.

Première solution
Numérotons dans un premier temps les 10 trinômes. Il y a $\binom{30}{3}$ façons de choisir les élèves du trinôme 1, puis $\binom{27}{3}$ façons de choisir les élèves du trinôme 2, ...et enfin $\binom{3}{3}$ façons de choisir les élèves du trinôme 10. Le nombre de façons de répartir les élèves dans les trinômes 1 à 10 est donc

$$\prod_{k=1}^{10}\binom{3}{3k} = \prod_{k=1}^{10}\frac{3k!}{3!(3(k-1))!} = \frac{30!}{(3!)^{10}}$$

Mais l'énoncé ne fait pas mention d'un ordre ou d'une numérotation des trinômes : on divise donc le nombre trouvé par 10!. Le nombre recherché est donc $\frac{30!}{(3!)^{10}10!}$.

Seconde solution
On peut répartir les élèves en trinômes en se donnant une liste des élèves dans un ordre quelconque puis en groupant les trois premiers, puis les trois suivants, ...Il existe 30! liste de 30 élèves. Mais une liste étant donnée, une permutation des 3 élèves d'un même groupe ou une permutation des 10 groupes donne une liste qui fournit la même répartition en trinômes. Il existe donc $(3!)^{10}10!$ listes fournissant la même répartition en trinômes. Le nombre recherché est donc à nouveau $\frac{30!}{(3!)^{10}10!}$.

Solution 20.

Il existe évidemment 5! anagrammes du mot «MATHS».

Pour former une anagramme du mot «MOTO», il faut déjà placer le «M» et le «T» : il y a 4×3 façons de le faire. Les deux dernières lettres à placer sont forcément des «O» : il n'y a donc pas de choix à effectuer. Il existe donc 12 anagrammes du mot «MOTO».

Pour former une anagramme du mot «DODO», il faut déjà placer les deux «D» : il suffit de choisir deux places parmi les quatre possibles autrement dit $\binom{4}{2}$ possibilités. Les deux dernières lettres à placer sont forcément des «O» : il n'y a donc pas de choix à effectuer. Il existe donc 6 anagrammes du mot «DODO».

Pour former une anagramme du mot «ANAGRAMME», il faut déjà placer les trois «A» : il suffit de choisir trois places parmi les neuf possibles autrement dit $\binom{9}{3}$ possibilités. On place ensuite les deux «M» : il suffit de choisir deux places parmi les six restantes autrement dit $\binom{6}{2}$ possibilités. On place ensuite les quatre lettres «N», «G», «R», «E» aux quatres places restantes : il y a 4! façons de le faire. Il existe en tout $\binom{9}{3}\binom{6}{2}4! = \frac{9!}{3!2!} = 30240$ anagrammes du mot «ANAGRAMME».

Le mot «ANTICONSTITUTIONNELLEMENT» comporte 25 lettres dont 5 «N», 5 «T», 3 «I», 2 «O», 3 «E», 2 «L», toutes les autres lettres n'apparaissant qu'une fois. Le nombre d'anagrammes du mot «ANTICONSTITUTIONNELLEMENT» est donc $\frac{25!}{(5!)^2(3!)^2(2!)^2} = 7480328917501440000$

Solution 21.

1. n^m
2. $n!$
3. C'est le nombre de $n-1$-arrangements autrement dit $n!$
4. Soit A un ensemble à n éléments et B un ensemble à $n-1$ éléments. Remarquons que si f est une surjection de A sur B, un élément de B aura deux antécédents dans A et les autres un seul.
   Se donner une surjection de A sur B, c'est donc se donner la paire d'éléments de A ayant la même image ($\binom{n}{2}$ possibilité) puis se donner l'image de cette paire et les images des $n-2$ éléments restants ($(n-1)!$ possibilités). Le nombre de surjection de A sur B est donc $\binom{n}{2}(n-1)! = \frac{n!(n-1)}{2}$.

Solution 22.

Notons $C_1, \dots, C_k$ les classes d'équivalences et $n_1, \dots, n_k$ leurs cardinaux respectifs. Puisque les classes d'équivalence forment une partition de E, $n=\sum_{j=1}^{k} n_j$. De plus, $G=\bigcup_{j=1}^{k} C_j^2$, l'union étant disjointe. Ainsi $p=\sum_{j=1}^{k} n_j^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$n^2=\left(\sum_{j=1}^{k} 1\times n_j\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{k} 1^2\right)\left(\sum_{j=1}^{k} n_j^2\right)=kp$$

Solution 23.

1. Notons R la matrice $(r_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]$, $a_{i,j}\equiv r_{i,j}[2]$. Par compatibilité de la relation de congruence avec la somme et le produit,

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}\equiv\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} r_{\sigma(i),i}[2]$$

   Autrement dit $\det A\equiv\det B[2]$.

2. Clairement, $\mathrm{card}(\mathscr{M})=9!$.

3. D'après la première question, l'application qui à $M\in\Omega$ associe la matrice constituée des restes des divisions euclidiennes des coefficients de A par 2 a pour image Δ. De plus, chaque élément de Δ a 5·!4! antécédents par cette application (5! façons de placer les chiffres impairs et 4! façons de placer les chiffres pairs). D'après le lemme des bergers, $\mathrm{card}(\Omega)=5!\cdot 4!\,\mathrm{card}(\Delta)$.

4. **a.** Il y a trois façons de placer la colonne de 1. Une fois cette colonne placée, les deux 1 restants ne peuvent appartenir à la même colonne sinon on aurait une colonne de 0 et donc un déterminant nul (non impair). Les deux 1 restants ne peuvent être situés sur la même ligne sinon les deux colonnes où ils figurent seraient égales et donc le déterminant serait nul. Il y a donc $3\times 2=6$ façons de placer les deux 1 restants. Les matrices obtenues sont bien de déterminants impairs puisque par échange de lignes et de colonnes, leurs déterminants sont égaux au signe près à $\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1$. On en déduit que $\mathrm{card}(K_1)=3\times 6=18$.

   b. Il y a $\binom{3}{2}=3$ façons de choisir les deux colonnes possédant un unique 0. Dans ces deux colonnes, les zéros ne peuvent figurer sur la même ligne sinon les deux colonnes sont égales et le déterminant est nul. Il y a donc $3\times 2=6$ façons de placer les 0 dans ces deux colonnes. Il y a enfin 3 façons de placer le 1 restant dans la colonne restante. Les matrices ainsi obtenues sont bien de déterminants impairs puisque par échange de lignes et de colonnes, leurs déterminants sont égaux au signe près à $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1$. On en déduit que $\mathrm{card}(K_2)=3\times 6\times 3=18=54$.

   c. Les deux ensembles dénombrés dans les deux questions précédentes sont disjoints puisqu'une matrice de Δ possédant une colonne avec trois coefficients égaux à 1 a forcément une colonne avec plus deux deux coefficients égaux à 0. Ces deux ensembles sont également de réunion Δ puisqu'une matrice de Δ qui ne contient aucune colonne avec trois coeffiients égaux à 1 a forcément deux colonnes avec exactement un coefficient égal à 0. Ces deux ensembles forment donc une partition de Δ de sorte que $\mathrm{card}(\Delta)=K_1+K_2=72$.

   d. Finalement, $\mathrm{card}(\Omega)=72\cdot 5!\cdot 4!$.

5. Implicitement, on suppose que la probabilité est uniforme sur $\mathscr{M}$.

$$p=\frac{\mathrm{card}(\Omega)}{\mathrm{card}(\mathscr{M})}=\frac{72\cdot 5!\cdot 4!}{9!}=\frac{4}{7}$$

Solution 24.

Remarquons qu'un mot ne comportant pas deux fois la même lettre possède au plus n lettres. De plus, il y a $\frac{n!}{(n-k)!}$ mots de k lettres ne comportant pas deux fois la même lettre. Ainsi

$$\mathrm{M}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

De plus,

$$n!e = n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer que

$$0 \leqslant n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < 1$$

L'inégalité de gauche est évidente. Posons

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Remarquons que

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1+k)!}$$

et que pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{(n+1+k)!} < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(n+1)^k}$$

Comme la série géométrique $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)^k}$ converge (en effet, $0 \leqslant \frac{1}{n+1} < 1$), on peut écrire

$$\mathrm{R}_n < \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n \cdot n!}$$

Ainsi

$$n!\mathrm{R}_n < \frac{1}{n} \leqslant 1$$

ce qui permet de conclure.

Solution 25.

1. **a.** Une permutation de E_n à n points fixes est l'identité donc $\mathrm{S}_{n,n} = 1$.
   Si une permutation a $n-1$ points fixes, le dernier point de E_n est nécessairement un point fixe. Une permutation ne peut donc avoir exactement $n-1$ points fixes $\mathrm{S}_{n,0} = 0$.

   b. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, notons $\mathfrak{S}_{n,k}$ la partie de $\mathfrak{S}_n$ formée des permutations ayant exactement k points fixes. La famille $\left(\mathfrak{S}_{n,k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une partition de $\mathfrak{S}_n$. Puisque $\operatorname{card} \mathfrak{S}_{n,k} = \mathrm{S}_{n,k}$ et que $\operatorname{card} \mathfrak{S}_n = n!$, on en déduit la formule demandée.

   a. Se donner un élément de $\mathfrak{S}_{n,k}$, c'est se donner k points fixes dans E_n, autrement dit une partie à k éléments de E_n, et une permutation sans point fixe des $n-k$ éléments restants. Comme il y a $\binom{n}{k}$ parties à k éléments de E_n et qu'il y a ω_{n-k} permutations sans point fixe d'un ensemble à $n-k$ éléments, on en déduit $\mathrm{S}_{n,k} = \binom{n}{k}\omega_{n-k}$.

   b. En utilisant les deux questions précédentes :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n-k}\binom{n}{k}}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}_{n,k} = 1$$

c. Notons HR(n) l'égalité à démontrer. HR(0) est clairement vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons HR(k) vraie pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. En utilisant la question précédente

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a alors :

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{p=0}^{n-k} \frac{(-1)^p}{p!}$$

On effectue le changement d'indice $q = p + k$ dans la deuxième somme :

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=k}^{n} \frac{(-1)^{q-k}}{k!(q-k)!}$$

On intervertit les deux sommes :

$$\begin{aligned}\frac{\omega_n}{n!} &= 1 - \sum_{q=1}^{n} \sum_{k=1}^{q} \frac{(-1)^q(-1)^k}{k!(q-k)!} \\ &= 1 - \sum_{q=1}^{n} \frac{(-1)^q}{q!} \sum_{k=1}^{q} (-1)^k \binom{q}{k}\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{q} (-1)^k \binom{q}{k} = \left(\sum_{k=0}^{q} (-1)^k \binom{q}{k}\right) - 1 = (1-1)^q - 1 = -1$ car $q \geqslant 1$. On a donc

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 + \sum_{q=1}^{n} \frac{(-1)^q}{q!} = \sum_{q=0}^{n} \frac{(-1)^q}{q!}$$

Ainsi HR(n) est vraie. Par récurrence forte, HR(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle sur $[-1, 0]$, on obtient :

$$\left| e^{-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sup_{[-1,0]} \exp = \frac{1}{(n+1)!}$$

En passant à la limite, on a donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\omega_n}{n!} = \frac{1}{e}$.

Solution 26.

Choisir un k-cycle de $\mathfrak{S}_n$ consiste à :

- choisir le support du k-cycle, c'est-à-dire k éléments parmi n ;
- ordonner ces k éléments : $k!$ possibilités ;
- tenir compte qu'un cycle est invariant par permutation circulaire des éléments de son support : k possibilités.

On en déduit que le nombre de k cycles de $\mathfrak{S}_n$ est

$$\frac{\binom{n}{k} k!}{k} = (k-1)! \binom{n}{k} = \frac{n!}{k(n-k)!}$$

Solution 27.

La probabilité recherchée est $\frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{8}{10} = \frac{4}{55}$.

Solution 28.

1. Les coordonnées du point M_n sont $(1,1)$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Puisque $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_k$

$$v_k = \frac{1}{E(X)} \sum_{j=1}^{k} p_j x_j \leqslant \frac{1}{E(X)} \sum_{j=1}^{k} p_j x_k = \frac{u_k x_k}{E(X)}$$

Puisque $x_k \leqslant x_{k+1} \leqslant n$

$$1 - v_k = \frac{1}{E(X)} \sum_{j=k+1} p_j x_j \geqslant \frac{1}{E(X)} \sum_{j=k+1} p_j x_k = \frac{(1-u_k)x_k}{E(X)}$$

On en déduit que

$$(1-u_k)v_k \leqslant \frac{(1-u_k)u_k x_k}{E(X)} \leqslant u_k(1-v_k)$$

et donc que $v_k \leqslant u_k$, ce qui signifie que M_k est au-dessous de la première bissectrice.

2. **a.** La courbe de Lorenz est incluse dans le triangle de sommets les points de coordonnées $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. L'aire de la portion de plan comprise entre la courbe de Lorenz et la première bissectrice est donc inférieure à l'aire de ce triangle qui vaut $\frac{1}{2}$. On en déduit que $I(X) \in [0,1]$.

   b. Puisque la courbe de Lorenz est située sous la première bissectrice, I(X) est le double de la différence entre

   - d'une part, l'aire de la portion de plan comprise entre la première bissectrice, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$
   - et d'autre part, l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe de Lorenz, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$.

   Cette seconde aire est la somme d'aire de trapèzes. On trouve donc

$$I(X) = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k(v_{k-1} + v_k)$$

3. **a.** Dans ce cas, $n = 2$. On a également $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $p_1 = 1 - p$, $p_2 = 1$. Ainsi $v_0 = 0$, $v_1 = 0$ et $v_2 = 1$. La formule de la question précédente donne $I(X) = 1 - p$.

   b. Dans ce cas $x_j = j$ et $p_j = \frac{1}{n}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On a donc $u_k = \frac{k}{n}$ et $v_k = \frac{k(k+1)}{n(n+1)}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. La formule de la question précédente donne

$$I(X) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{(k-1)k}{n(n+1)} + \frac{k(k+1)}{n(n+1)}\right) = 1 - \frac{2}{n^2(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 - \frac{2n+1}{3n} = \frac{n-1}{3n}$$

4. D'après la formule de transfert

$$E(|X_1 - X_2|) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |x_i - x_j| P(X_1 = x_i \cap X_2 = x_j) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |x_i - x_j| P(X_1 = x_i) P(X_2 = x_j)$$

car X_1 et X_2 sont indépendantes. De plus, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ donc

$$\begin{aligned}
E(|X_1 - X_2|) &= 2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(x_j - x_i)p_i p_j \\
&= 2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_j p_i p_j - 2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_i p_i p_j \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=i}^{n} x_j p_j - 2\sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=1}^{j} x_i p_i \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} p_i (E(X) - \sum_{j=1}^{i-1} x_j p_j) - 2\sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=1}^{j} x_i p_i \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} p_i (E(X) - E(X)v_{i-1}) - 2\sum_{j=1}^{n} p_j E(X) v_j \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} p_k E(X) - 2\sum_{k=1}^{n} E(X) p_k v_{k-1} - 2\sum_{k=1}^{n} E(X) p_k v_k \\
&= 2E(X)\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k (v_{k-1} + v_k)\right) = 2E(X)I(X)
\end{aligned}$$

Par conséquent, $I(X) = \dfrac{E(|X_1 - X_2|)}{2E(X)}$.

Solution 29.

1. Pas de difficultés.
2. $P(E) = 18/36, P(F) = 11/36, P(G) = 4/36, P(E\cap F) = 6/36, P(F\cap G) = 2/36, P(E\cup F) = 1 - P(\overline{E\cup F}) = 1 - 13/36 = 23/36$.
3. $P(F\cup G) = 13/36, P(\overline{E}\cup\overline{F}) = 1 - 6/36 = 30/36, P(\overline{F}\cap\overline{G}) = 1 - 13/36 = 23/36$.

Solution 30.

Notons n le nombre de billets achetés et pn la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant parmi eux. (En particulier $p_0 = 0$, $p_{999} = p_{1000} = 1$ et $(p_n)_{n\in[\![0,100]\!]}$ est une suite croissante.) Par l'habituel passage au contraire on a

$$\begin{aligned}
1 - p_n &= \frac{\binom{998}{n}}{\binom{1000}{n}} \\
&= \frac{998!}{n!(998-n)!} \times \frac{n!(1000-n)!}{1000!} \\
&= \frac{(1000-n)(999-n)}{1000\times 999}.
\end{aligned}$$

Ainsi on trouve que

$$\begin{aligned}
p_n \geqslant \frac{1}{2} &\iff \frac{(1000-n)(999-n)}{1000\times 999} \leqslant \frac{1}{2} \\
&\iff n^2 - 1999n + 1000\times 999 \leqslant 500\times 900 \\
&\iff n^2 - 1999n + 500\times 999 \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Ce trinôme est négatif entre ses deux racines qu'on obtient par un calcul de discriminant : l'une est proche de 292.75 et l'autre supérieure à 1000. Donc il faut acheter au moins 293 billets.

Solution 31.

Les sommes en question sont

$$\begin{aligned}9 &= 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4\\ &= 2+3+4 = 2+2+5 = 3+3+3,\\ 10 &= 1+3+6 = 1+4+5 = 2+4+4\\ &= 2+5+3 = 2+2+6 = 3+3+4.\end{aligned}$$

Mais elles n'ont pas toutes la même probabilité. En fait lancer trois dés revient à lancer un dé trois fois, en tenant compte de l'ordre. Donc une somme avec tous chiffres égaux, comme $3+3+3$, a probabilité $1/216$, tandis qu'une somme avec exactement deux chiffres égaux a probabilité $3/216$ et, enfin, une somme de trois chiffres distincts a probabilité $6/216$. Ainsi on trouve

$$\begin{aligned}P(9) &= \frac{6+6+3+6+3+1}{216} = \frac{25}{216},\\ P(10) &= \frac{6+6+3+6+3+3}{216} = \frac{27}{216}.\end{aligned}$$

La différence est tellement faible que le prince de Toscane l'a certainemnt pas trouvée empiriquement mais par le calcul !

Solution 32.

Notons A_1 et A_2 les évènements considérés (dans l'ordre de l'énoncé). On trouve facilement : $P(A_1) = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0.52 > P(A_2) = 1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0.49$.

Solution 33.

1. On vérifie facilement que la probabilité d'avoir exactement un 6 vaut $\frac{5}{72}+\frac{10}{36}=\frac{25}{72}$.
2. La probabilité de n'avoir aucun 6 vaut $\left(\frac{5}{6}\right)^3$, donc celle d'obtenir au moins un 6 vaut $1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}$.
3. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant 6$, notons A_i l'évènement « on obtient au moins deux fois le numéro i ». Ces évènements étant disjoints et équiprobables, la probabilité cherchée est clairement : $p = \sum_{i=1}^{6} P(A_i) = 6P(A_6)$. Or d'après les questions précédentes, on déduit que $P(A_6) = \frac{91}{216}-\frac{25}{72}=\frac{91-75}{216}=\frac{16}{216}=\frac{2}{27}$. On en conclut que la probabilité d'obtenir au moins deux faces identiques vaut :

$$p = 6\times\frac{2}{27}=\frac{4}{9}\ .$$

Solution 34.

On obtient facilement que la probabilité que tous les élèves de la classe soient nés à des dates différentes est $\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{365}\right)$. Il s'ensuit que la probabilité cherchée est :

$$p_n = 1-\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{365}\right).$$

Application numérique : on trouve $p_{22} \simeq 0.476, p_{23} \simeq 0.507$. La probabilité dépasse 0.5 à partir de 23 élèves. Par ailleurs on trouve $p_{50} \simeq 0.970$.

Solution 35.

1. a. $\frac{2}{9}$.

   b. $\frac{4}{9}$.

2. $\frac{\binom{5}{2}\binom{10}{3}}{\binom{15}{5}} = \frac{10\times 120}{3003} =\simeq 0.4$.

Solution 36.

Soit n le nombre de lancers.

1. La probabilité d'obtenir au moins un six est $1-(5/6)^n$. On cherche donc le plus petit $n\in\mathbb{N}$ tel que

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geqslant 0.9$$

ou encore

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leqslant 0.1$$

On trouve (soit en essayant différentes valeurs avec la calculatrice, soit avec le logarithme) que $n = 13$.

2. La probabilité d'obtenir au moins deux six est

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

On doit résoudre l'inégalité

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n + \frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \leqslant 0.1$$

ou encore

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(1+\frac{n}{5}\right) \leqslant 0.1$$

On ne peut pas isoler n qui figure à l'exposant et « en bas». Soit on essaye avec la calculatrice, soit on trace la courbe de la fonction $x\mapsto\left(\frac{5}{6}\right)^x\left(1+\frac{x}{5}\right)$ grâce à un logiciel, puis on regarde où sa courbe passe en-dessous de la droite $y = 0.1$ et on obtient $n = 22$.

Solution 37.

1. $\frac{\binom{8}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{8\times 7\times 6}{32\times 31\times 30} = \frac{7}{4\times 31\times 5} = \frac{7}{620}$

2. $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{32}{3}} = \dfrac{4\times3\times2}{32\times31\times30} = \dfrac{1}{8\times31\times5} = \dfrac{1}{1240}$

3. $\dfrac{\binom{8}{2}\binom{8}{1}}{\binom{32}{3}} = \dfrac{8\times7\times8\times3}{32\times31\times30} = \dfrac{7}{31\times5} = \dfrac{7}{155}$

Solution 38.

1. $1-\dfrac{1}{\binom{7}{3}} = 1-\dfrac{3\times2\times1}{7\times6\times5} = \dfrac{34}{35}$

2. $1-\dfrac{\binom{3}{3}+\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = 1-\dfrac{5\times3\times2}{7\times6\times5} = \dfrac{6}{7}$

3. Notons X le nombre de boules blanches tirées. Alors X suit une loi binomiale, plus précisément $X\sim\mathcal{B}\left(3,\frac{4}{7}\right)$. On en déduit :

$$\begin{aligned}P(X\geqslant2) &= P(X=2)+P(X=3)\\ &= \binom{3}{2}\left(\frac{4}{7}\right)^2\frac{3}{7}+\binom{3}{3}\left(\frac{4}{7}\right)^3\\ &= \frac{4^2}{7^3}(3\times3+4) = \frac{16\times13}{7^3} = \frac{208}{343}.\end{aligned}$$

Remarquons que le passage au contraire est

$$P(X\geqslant2) = 1-P(X=0)-P(X=1),$$

ce qui donnerait le même résultat mais n'est pas plus rapide.

Solution 39.

1. Il y a $5!$ arrangements possibles, dont $2!$ donnent BETTY. La probabilité est donc $2!/5! = 1/60$.

2. Il y a $8!$ arrangements possibles, dont $3!^2$ donnent COCORICO. La probabilité est donc

$$\frac{3!^2}{8!} = \frac{1}{8\times7\times5\times4} = \frac{1}{56\times20} = \frac{1}{1120}.$$

Solution 40.

Notons G_k l'événement « le k-ième malade guérit», $k=1,2,3$. Ces trois événements étant indépendants on a :

$$\begin{aligned}&P(G_1\cap G_2\cap G_3\cap) = P(G_1)P(G_2)P(G_2) = 0.95^3\approx0.86\\ &P(\overline{G}_1\cap\overline{G}_2\cap\overline{G}_3\cap) = P(\overline{G}_1)P(\overline{G}_2)P(\overline{G}_2) = 0.05^3 = 1.25\times10^{-4}\\ &P(\text{« au moins un reste malade»}) = 1-P(G_1\cap G_2\cap G_3)\approx1-0.86 = 0.14\end{aligned}$$

Solution 41.

Notons n le nombre de billets achetés et pn la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant parmi eux. (En particulier $p_0 = 0$, $p_{999} = p_{1000} = 1$ et $(p_n)_{n\in[\![0,100]\!]}$ est une suite croissante.) Par l'habituel passage au contraire on a

$$\begin{aligned}1-p_n &= \frac{\binom{998}{n}}{\binom{1000}{n}}\\ &= \frac{998!}{n!(998-n)!}\times\frac{n!(1000-n)!}{1000!}\\ &= \frac{(1000-n)(999-n)}{1000\times 999}.\end{aligned}$$

Ainsi on trouve que

$$\begin{aligned}p_n \geqslant \frac{1}{2} &\iff \frac{(1000-n)(999-n)}{1000\times 999} \leqslant \frac{1}{2}\\ &\iff n^2-1999n+1000\times 999 \leqslant 500\times 900\\ &\iff n^2-1999n+500\times 999 \leqslant 0.\end{aligned}$$

Ce trinôme est négatif entre ses deux racines qu'on obtient par un calcul de discriminant : l'une est proche de 292.75 et l'autre supérieure à 1000. Donc il faut acheter au moins 293 billets.

Solution 42.

L'événement A est l'événement contraire de l'événement «la famille n'a que des enfants de même sexe», ce dernier événement étant l'union disjointe des événements «la famille a n garçons» et «la famille a n filles». On en déduit que

$$P(A) = 1-2\times\frac{1}{2^n} = 1-2^{1-n}$$

L'événement B est la réunion disjointe des événements «la famille n'a aucune fille» et «la famille a exactement une fille». On en déduit que

$$P(B) = \frac{1}{2^n}+\binom{n}{1}\frac{1}{2^n} = (n+1)2^{-n}$$

L'événement $A\cap B$ est l'événement «la famille a une unique fille». Ainsi

$$P(A\cap B) = \binom{n}{1}\frac{1}{2^n} = n2^{-n}$$

Les événements A et B sont indépendants *si et seulement si* $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ autrement dit *si et seulement si*

$$(1-2^{1-n})(n+1)2^{-n} = n2^{-n}$$

ou encore, après simplification,

$$2^n-2n-2 = 0$$

Soit $f : t\in\mathbb{R}\mapsto 2^t-2t-2$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f' : t\mapsto 2^t\ln 2-2$. f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f'(2) = 4\ln 2-2 > 0$. Ainsi f' est strictement positive sur $[2,+\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $[2,+\infty[$. Puisque $f(3) = 0$, f s'annule uniquement en 3 sur $[2,+\infty[$, ce qui prouve que A et B sont indépendants *si et seulement si* $n = 3$.

Solution 43.

On note A =«b+r=7», B = «b=4» et C = «$|b-r|$ est pair». On vérifie facilement que A et B sont indépendants, B et C aussi, mais pas A et C car $A\cap C = \varnothing$ donc $P(A\cap C) = 0 \neq P(A)P(C)$.

Solution 44.

On vérifie sans problème que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{C}) = \dfrac{1}{2}$ et que $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) = \dfrac{1}{4}$, donc A, B et C sont deux à deux indépendants.
En revanche, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) = \dfrac{1}{4} \neq \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{C})$, donc A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Solution 45.

1. $\mathrm{P}\big(\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})\big) = \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{C}) - \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\Big(\mathrm{P}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{C}) - \mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})\Big) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})$.
2. $1 - \mathrm{P}(\mathrm{B}\cup\mathrm{C}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{C}}) > 0$.

Solution 46.

$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{A}_i\Big) = 1 - \mathrm{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{\mathrm{A}_i}\Big) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_i})$ (car les évènements $(\overline{\mathrm{A}_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont mutuellement indépendants), c'est-à-dire : $\mathrm{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{A}_i\Big) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$.
Application : On pose A_i : « la personne a un accident à la i-ième expérience ». Par hypothèse, les $(\mathrm{A}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont mutuellement indépendants, et $\mathrm{P}(\mathrm{A}_i) = p$ pour tout $i \in \{1,\cdots,n\}$. En appliquant ce qui précède, on obtient que la probabilité qu'elle ait au moins un accident est $\mathrm{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{A}_i\Big) = 1-(1-p)^n$.

Solution 47.

Notons $\mathrm{A}_{n,j}$ l'évènement « l'erreur numéro j n'est pas corrigée à l'issue de la n-ième lecture », pour tout $1 \leqslant j \leqslant 4$.

1. A chaque lecture, il y a une probabilité 2/3 que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée, et comme les relectures sont indépendantes, on obtient $\mathrm{P}(\mathrm{A}_{n,1}) = (2/3)^n$.
2. On cherche $\mathrm{P}(\mathrm{B}_n)$ où $\mathrm{B}_n = \bigcap_{j=1}^{4}\overline{\mathrm{A}_{n,j}}$. Puisque les évènements $(\mathrm{A}_{n,j})_{1\leqslant j\leqslant 4}$ sont mutuellement indépendants, on a $\mathrm{P}(\mathrm{B}_n) = \prod_{j=1}^{4}\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_{n,j}})$.
   Or pour chaque j, on a $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_{n,j}}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_{n,1}}) = 1-(2/3)^n$. Ainsi $\mathrm{P}(\mathrm{B}_n) = (1-(2/3)^n)^4$. On en déduit :
   $$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{B}_n) \geqslant 0.9 &\iff 1-(2/3)^n \geqslant (0.9)^{1/4}\\ &\iff (2/3)^n \leqslant 1-(0.9)^{1/4}\\ &\iff n\ln(2/3) \leqslant \ln(1-(0.9)^{1/4})\\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(1-(0.9)^{1/4})}{\ln(2/3)} \approx 9.002\end{aligned}$$
   (Attention dans la dernière équivalence à ne pas oublier que $\ln(2/3) < 0$ et donc à changer le sens de l'inégalité !)
   En conclusion, il faut au moins dix relectures.

Solution 48.

Notons X le nombre de bonnes réponses.

1. Si la personne devine au hasard, alors X suit la loi $\mathscr{B}(10, 0.5)$. La probabilité recherchée est donc

$$P(X \geqslant 7) = \sum_{k=7}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 2^{-10}\left(\frac{10\times 9\times 8}{1\times 2\times 3} + \frac{10\times 9}{1\times 2} + 10 + 1\right) = \frac{176}{1024} = \frac{11}{64} \approx 0.172.$$

2. Dans ce cas $X \sim \mathscr{B}(10, \frac{1}{3})$ et

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 7) &= \sum_{k=7}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k} = 3^{-10}\left(\frac{10\times 9\times 8\times 2^3}{1\times 2\times 3} + \frac{10\times 9\times 2^2}{1\times 2} + 10\times 2 + 1\right) \\ &= \frac{1161}{3^{10}} = \frac{43}{3^7} \approx 0.02. \end{aligned}$$

Solution 49.

Notons S l'état d'ébriété et T le résultat positif du test. On a $P(T|S) = 0.95$ et $P(\overline{T}|\overline{S}) = 0.96$. On calcule la probabilité recherchée avec le formule de Bayes.

$$\begin{aligned} P(S|T) &= \frac{P(T|S)P(S)}{P(T|S)P(S) + P(T|\overline{S})P(\overline{S})} \\ &= \frac{0.95\times 0.02}{0.95\times 0.02 + 0.04\times 0.98} \approx 0.33 \end{aligned}$$

Alternative : On trouve le même résultat avec un tableau à double-entrée.

	S	$\overline{S}$	
T			
$\overline{T}$			
	0.02	0.98	1

On le remplit avec les données de l'énoncé :

	S	$\overline{S}$	
T	0.95×0.02	0.04×0.98	
$\overline{T}$	0.05×0.02	0.96×0.98	
	0.02	0.98	1

On trouve

$$\begin{aligned} P(S|T) &= \frac{P(S\cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{0.95\times 0.02}{0.95\times 0.02 + 0.04\times 0.98} \approx 0.33 \end{aligned}$$

Cela démystifie le formule de Bayes...

Solution 50.

Notons M l'évènement «être Malade» et T l'événement « le test est positif». On sait que $P(M) = 0.005$, $P(T|M) = 0.9$, $P(\overline{T}|\overline{M}) = 0.85$. On cherche ici $P(M|T)$. Pour cela on applique la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P(M|T) &= \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M) + P(T|\overline{M})P(\overline{M})} \\ &= \frac{0.9\times 0.005}{0.9\times 0.005 + 0.15\times 0.995} = 0.029. \end{aligned}$$

Solution 51.

Soit A l'évènement « il pleut» et B l'évènement « le baromètre prédit la pluie». On sait que $P(A) = 0.4$, $P(\overline{A}) = 0.6$, $P(\overline{B}|A) = 0.1$ et $P(B|\overline{A}) = 0.2$. On obtient avec la formule de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})} = \frac{0.9 \times 0.4}{0.9 \times 0.4 + 0.2 \times 0.6} = 0.75$$
$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(\overline{B}|A)P(A)}{P(\overline{B}|A)P(A) + P(\overline{B}|\overline{A})P(\overline{A})} = \frac{0.1 \times 0.4}{0.1 \times 0.4 + 0.8 \times 0.6} = \frac{1}{13} \approx 0.077.$$

Solution 52.

1. Notons S l'événement « un colis se perd».

$$\begin{aligned} P(S) &= P_A(S)P(A) + P_B(S)P(B) + P_C(S)P(C) \\ &= 0.01 \times \frac{3}{4} + \times \frac{1}{8} + 0.03 \times \frac{1}{8} \\ &= 0.0075 + 0.0025 + 0.00175 = 0.01375 \end{aligned}$$

2. On trouve

$$\begin{aligned} P_S(A) &= \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P_A(S)P(A)}{P(S)} \\ &= \frac{0.0075}{0.01375} \approx 0.545 \end{aligned}$$

Même si le transporteur A peut se vanter d'être plus fiable que ses concurrents, la probabilité qu'on vient de calculer est très élévée. Cela s'explique par le fait que A transporte beaucoup plus de colies que les autres.

Solution 53.

Au total il y a 6^3 résultats équiprobables lorsqu'on lance trois dés. Parmi eux $6 \times 5 \times 4$ sont à chiffres distincts. Parmi ces derniers $3 \times (5 \times 4)$ contiennent un 1. Ainsi la probabilité recherchée est

$$\frac{3 \times 5 \times 4}{6 \times 5 \times 4} = \frac{1}{2}.$$

Solution 54.

On définit les événement suivants.

AR La boule tirée dans l'urne A est rouge.

AV La boule tirée dans l'urne A est verte.

X Les deux boules tirées dans l'urne B sont rouges.

La probabilité recherchée est $P(AV|X)$. D'après la formule de Bayes

$$P(AV|X) = \frac{P(X|AV)P(AV)}{P(X|AV)P(AV) + P(X|AR)P(AR)}$$

Il est clair que $P(AV) = \frac{3}{5}$ et $P(AR) = \frac{2}{5}$.
Par ailleurs, $P(X|AV)$ est la probabilité de tirer successivement et sans remise deux boules rouges dans une urne contenant trois boules rouges et trois boules vertes. Autrement dit, $P(X|AV) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.
De même, $P(X|AR)$ est la probabilité de tirer successivement et sans remise deux boules rouges dans une urne contenant quatre boules rouges et deux boules vertes. Autrement dit, $P(X|AR) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.
Après calcul, on trouve $P(AV|X) = \frac{3}{7}$.

Solution 55.

On note ER l'événement «la face exposée est rouge» et CB l'événement «la face cachée est blanche». On note RR l'événement «la carte tirée est celle aux deux faces rouges», BB l'événement «la carte tirée est celle aux deux faces blanches» et RB l'événement «la carte tirée est celle aux faces rouge et blanche».
On cherche à calculer $P(CB|ER)$. Par définition, $P(CB|ER) = \frac{P(CB \cap ER)}{P(ER)}$.
Tout d'abord

$$P(ER) = P(ER|RR)P(RR) + P(ER|BB)P(BB) + P(ER|RB)P(ER) = 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

De même

$$P(CB \cap ER) = P(CB \cap ER|RR)P(RR) + P(CB \cap ER|BB)P(BB) + P(CB \cap ER|RB)P(ER) = 0 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Ainsi la probabilité recherchée est

$$P(CB|ER) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Solution 56.

On notera :

- A l'événement le «composant provient de la chaîne A» ;
- B l'événement le «composant provient de la chaîne B» ;
- D l'événement le «composant est défectueux».

1. On cherche $P(D)$. D'après la formule des probabilités totales

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) = \frac{2}{100} \times \frac{30}{50} + \frac{4}{100} \times \frac{20}{50} = \frac{7}{250} = 0,028$$

   Autrement dit le composant est défectueux avec un probabilité de $2,8\%$.

2. On cherche $P(B|D)$. D'après la formule de Bayes

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \frac{\frac{4}{100} \times \frac{20}{50}}{\frac{7}{250}} = \frac{4}{7}$$

   Autrement dit, si le composant est défectueux, il y 4 chances sur 7 qu'il provienne de la chaîne B.

Solution 57.

Pour $k \in [\![1,7]\!]$, on note E_k l'événement «le parapluie se trouve au $k^{\text{ème}}$ étage. On note A l'événement «le parapluie ne se trouve pas dans l'immeuble». On cherche à calculer $P\left(E_7 | \cap_{k=1}^{6} \overline{E_k}\right)$.
Or $\cap_{k=1}^{6} \overline{E_k} = E_7 \cup A$. Finalement la probabilité recherchée est également, $P(E_7 | E_7 \cup A)$. Par définition

$$P(E_7 | E_7 \cup A) = \frac{P(E_7 \cap (E_7 \cup A))}{P(E_7 \cup A)}$$

Or $E_7 \cap (E_7 \cup A) = E_7$ car les événements E_7 et A sont incompatibles. Ainsi la probabilité recherchée est $\dfrac{P(E_7)}{P(E_7 \cup A)}$. Puisque les événements E_7 et A sont incompatibles,

$$P(E_7 \cup A) = P(E_7) + P(A) = \frac{p}{7} + 1 - p = 1 - \frac{6p}{7}$$

La probabilité recherchée est donc

$$\frac{\frac{p}{7}}{1 - \frac{6p}{7}} = \frac{p}{7 - 6p}$$

Solution 58.

On notera U_k l'événement «l'urne choisie est l'urne numéro k» et B l'événement la boule tirée est blanche.

1. On recherche donc P(B). D'après la formule des probabilités totales,

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B|U_k)P(U_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2n}$$

2. On recherche $P(U_k|B)$. Par définition

$$P(U_k|B) = \frac{P(B \cap U_k)}{P(B)} = \frac{P(B|U_k)P(U_k)}{P(B)} = \frac{\frac{k}{n} \times \frac{1}{n}}{\frac{n+1}{2n}} = \frac{2k}{n(n+1)}$$

Solution 59.

On notera A_n l'événement «le buveur ne boit pas le $n^{\text{ème}}$ jour. L'énoncé signifie que $P(A_{n+1}|A_n) = 0,4$ et $P(A_{n+1}|\overline{A_n}) = 0,8$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose de plus que le buveur ne boit pas le premier jour, autrement dit $P(A_1) = 1$.

1. Pour simplifier, posons $p_n = P(A_n)$. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|\overline{A_n})P(\overline{A_n}) = 0,4p_n + 0,8(1 - p_n) = 0,8 - 0,4p_n$$

2. La suite (p_n) est arithmético-géométrique. On introduit l'unique solution p de l'équation $x = 0,8 - 0,4x$ autrement dit $p = \frac{4}{7}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_{n+1} - p = (0,8 - 0,4p_n) - (0,8 - 0,4p) = -0,4(p_n - p)$$

Une récurrence évidente montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_n - p = (-0,4)^{n-1}(p_1 - p)$$

Autrement dit

$$p_n = \frac{2}{7} + \left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1} \frac{5}{7}$$

3. Puisque $\left|-\frac{2}{5}\right| < 1$, $\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{7}$.

Solution 60.

On note E l'événement «l'étudiant a préparé l'examen», X le nombre de bonnes réponses obtenues par l'étudiant et R l'événement «l'étudiant a réussi l'examen».

1. La variable X conditionnée par l'événement E suit une loi binomiale de paramètre $0,8$. Ainsi

$$\mathrm{P}(\mathrm{R}|\mathrm{E}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 8|\mathrm{E}) = \sum_{k=8}^{15} \binom{15}{k} (0,8)^k (0,2)^{15-k} = \frac{30388191232}{30517578125} \approx 0,996$$

La variable X conditionnée par l'événement $\overline{\mathrm{E}}$ suit une loi binomiale de paramètre $\frac{1}{3}$. Ainsi

$$\mathrm{P}(\mathrm{R}|\overline{\mathrm{E}}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 8|\overline{\mathrm{E}}) = \sum_{k=8}^{15} \binom{15}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{15-k} = \frac{422009}{4782969} \approx 0,088$$

D'après la formule des probabilités totales

$$\mathrm{P}(\mathrm{R}) = \mathrm{P}(\mathrm{R}|\mathrm{E})\mathrm{P}(\mathrm{E}) + \mathrm{P}(\mathrm{R}|\overline{\mathrm{E}})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{E}}) = \frac{30388191232}{30517578125} \times \frac{7}{10} + \frac{422009}{4782969} \times \frac{3}{10} = \frac{352018838093984677}{486548767089843750} \approx 0,724$$

2. Par définition

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}|\overline{\mathrm{R}}) = \frac{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{R}}|\mathrm{E})\mathrm{P}(\mathrm{E})}{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{R}})} = \frac{(1-\mathrm{P}(\mathrm{R}|\mathrm{E}))\mathrm{P}(\mathrm{E})}{1-\mathrm{P}(\mathrm{R})} = \frac{1443991495859073}{134529928995859073} \approx 0,011$$

A bon entendeur, salut !

Solution 61.

1. **a.** Le père et la mère jouent des rôles symétriques.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=1,\mathrm{M}=1) &= 1\\
\mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=2,\mathrm{M}=2) &= \frac{1}{4}\\
\mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=3,\mathrm{M}=3) &= 0\\
\mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=1,\mathrm{M}=2) = \mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=2,\mathrm{M}=1) &= \frac{1}{2}\\
\mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=1,\mathrm{M}=3) = \mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=3,\mathrm{M}=1) &= 0\\
\mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=2,\mathrm{M}=3) = \mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=3,\mathrm{M}=2) &= 0
\end{aligned}$$

b. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}=1) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=i,\mathrm{M}=j)\mathrm{P}(\mathrm{F}=i,\mathrm{M}=j)$$

Les mariages étant supposés aléatoires, $\mathrm{P}(\mathrm{F}=i,\mathrm{M}=j) = \mathrm{P}(\mathrm{F}=i)\mathrm{P}(\mathrm{M}=j) = u_i u_j$. Ainsi

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}=1) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=i,\mathrm{M}=j) u_i u_j$$

A l'aide de la question précédente, on trouve

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}=1) = u_1^2 + \frac{1}{4}u_2^2 + \frac{1}{2}u_1 u_2 = \left(u_1 + \frac{u_2}{2}\right)^2$$

En échangeant les rôles des gènes a et A, on obtient

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}=3) = \left(u_3 + \frac{u_2}{2}\right)^2$$

c. On a évidemment $q_1 = \theta^2$.
Puisque $u_1 + u_2 + u_3 = 1$,

$$q_3 = \left(u_3 + \frac{u_2}{2}\right)^2 = \left(1 - u_1 - \frac{u_2}{2}\right)^2 = (1-\theta)^2$$

Enfin

$$q_2 = 1 - q_1 - q_3 = 1 - \theta^2 - (1-\theta)^2 = 2\theta(1-\theta)$$

d. A la seconde génération, la nouvelle valeur du paramètre θ est $q_1 + \frac{q_2}{2} = \theta^2 + \theta(1-\theta) = \theta$. Autrement dit, θ reste inchangé au cours des générations. Les proportions des divers génotypes restent donc constantes au cours des générations.

2. **a.** Pour $j \in \{1,2,3\}$, la loi de N_j est la loi binomiale $\mathscr{B}(n, q_j)$. On a donc $\mathrm{E}(\mathrm{N}_j) = nq_j$ et $\mathrm{V}(\mathrm{N}_j) = nq_j(1-q_j)$.

b.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2) &= \frac{1}{2}(\mathrm{V}(\mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2) - \mathrm{V}(\mathrm{N}_1) - \mathrm{V}(\mathrm{N}_3)) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{V}(n - \mathrm{N}_3) - \mathrm{V}(\mathrm{N}_1) - \mathrm{V}(\mathrm{N}_2)) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{V}(\mathrm{N}_3) - \mathrm{V}(\mathrm{N}_1) - \mathrm{V}(\mathrm{N}_2)) \\
&= \frac{n}{2}\left(q_3(1-q_3) - q_1(1-q_1) - q_2(1-q_2)\right)
\end{aligned}$$

Or on sait que $q_3 = 1 - q_1 - q_2$ ce qui permet d'obtenir

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2) = -nq_1q_2$$

c. Par linéarité

$$\mathrm{E}(\theta_n) = \frac{1}{n}\mathrm{E}(\mathrm{N}_1) + \frac{1}{2n}\mathrm{E}(\mathrm{N}_2) = q_1 + \frac{q_2}{2} = \theta^2 + \theta(1-\theta) = \theta$$

d.

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\theta_n) &= \frac{1}{n^2}\left(\mathrm{V}(\mathrm{N}_1) + \frac{1}{4}\mathrm{V}(\mathrm{N}_2) + \mathrm{Cov}(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(q_1(1-q_1) + \frac{1}{4}q_2(1-q_2) - q_1q_2\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\theta^2(1-\theta^2) + \frac{1}{2}\theta(1-\theta)(1-2\theta(1-\theta)) - 2\theta^3(1-\theta)\right) \\
&= \frac{\theta(1-\theta)}{2n}
\end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{V}(\theta_n) = 0$.

Solution 62.

1. S suit évidemment la loi $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$.
2. La loi de F conditionnée par l'événement $\mathrm{S} = s$ est la loi $\mathscr{B}\left(s, \frac{1}{2}\right)$.
3. F est clairement à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Soit donc $k \in [\![0, n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathrm{P}(\mathrm{F} = k) = \sum_{s=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{F} = k | \mathrm{S} = s)\mathrm{P}(\mathrm{S} = s)$$

Il est clair que $\mathrm{P}(\mathrm{F}=k|\mathrm{S}=s)=0$ pour $s<k$ donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{F}=k) &= \sum_{s=k}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{F}=k|\mathrm{S}=s)\mathrm{P}(\mathrm{S}=s) \\
&= \sum_{s=k}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^s \binom{s}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^s \left(\frac{5}{6}\right)^{n-s} \binom{n}{s} \\
&= \sum_{s=k}^{n} \frac{5^{n-s}}{2^s 6^n} \binom{s}{k}\binom{n}{s} \\
&= \sum_{s=k}^{n} \frac{5^{n-s}}{2^s 6^n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k} \\
&= \binom{n}{k} \sum_{s=0}^{n-k} \frac{5^{n-s-k}}{2^{s+k} 6^n} \binom{n-k}{s} \\
&= \binom{n}{k} \frac{5^n}{10^k 6^n} \sum_{s=0}^{n-k} \frac{1}{10^s} \binom{n-k}{s}
\end{aligned}$$

En appliquant la formule du binôme

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{F}=k) &= \binom{n}{k} \frac{5^n}{10^k 6^n} \left(1+\frac{1}{10}\right)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} \frac{5^n 11^{n-k}}{10^n 6^n} \\
&= \binom{n}{k} \frac{11^{n-k}}{12^n} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{12}\right)^k \left(\frac{11}{12}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que F suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{12}\right)$.

Solution 63.

1. A et M sont indépendants *si et seulement si* l'une des trois égalités équivalentes est vérifiée :

$$\mathrm{P}(\mathrm{M}) = \mathrm{P}(\mathrm{M}|\mathrm{A}), \qquad \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{M}),$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{M})\mathrm{P}(\mathrm{A}).$$

Nous allons utiliser la première égalité comme critère.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\mathrm{M}) = \frac{1}{10}, \\
&\mathrm{P}(\mathrm{M}|\mathrm{A}) = \frac{20}{20+182} = \frac{10}{101} \approx \frac{1}{10} = \mathrm{P}(\mathrm{M}), \\
&\mathrm{P}(\mathrm{M}|\mathrm{B}) = \frac{80}{80+160} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{10} = \mathrm{P}(\mathrm{M}), \\
&\mathrm{P}(\mathrm{M}|\mathrm{C}) = \frac{50}{50+50} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{10} = \mathrm{P}(\mathrm{M}).
\end{aligned}$$

La maladie M est indépendante du symptome A. En revanche, elle est beaucoup plus fréquente chez les personnes ayant le symptome B et de même pour le symptome C ; ainsi elle est dépendante de ces symptomes. On pourra donc dire que B et C (mais pas A) indiquent une éventuelle présence de la maladie.

2. Il y a $240+100-10=330$ personnes qui ont les symptomes B ou C. Donc 670 n'ont ni B ni C.
En formalisme :

$$\begin{aligned}\left|\overline{B}\cap\overline{C}\right| &= \left|\overline{B\cup C}\right| = 1000-|B\cup C|\\ &= 1000-|B|-|C|+|B\cap C|\\ &= 1000-240-100+10=670.\end{aligned}$$

Solution 64.

Notons N_k l'événement «tirer une boule noire au $k^{\text{ème}}$ tirage. D'après la formule des probabilités totales

$$P(N_3)=P(N_3|N_1\cap N_2)P(N_1\cap N_2)+P(N_3|\overline{N_1}\cap N_2)P(\overline{N_1}\cap N_2)+P(N_3|N_1\cap\overline{N_2})P(N_1\cap\overline{N_2})+P(N_3|\overline{N_1}\cap\overline{N_2})P(\overline{N_1}\cap\overline{N_2})$$

Or

$$\begin{aligned}
P(N_3|N_1\cap N_2)&=0 & P(N_1\cap N_2)&=P(N_2|N_1)P(N_1)=\frac{1}{9}\times\frac{2}{10}=\frac{1}{45}\\
P(N_3|\overline{N_1}\cap N_2)&=\frac{1}{8} & P(\overline{N_1}\cap N_2)&=P(N_2|\overline{N_1})P(\overline{N_1})=\frac{2}{9}\times\frac{8}{10}=\frac{8}{45}\\
P(N_3|N_1\cap\overline{N_2})&=\frac{1}{8} & P(N_1\cap\overline{N_2})&=P(\overline{N_2}|N_1)P(N_1)=\frac{8}{9}\times\frac{2}{10}=\frac{8}{45}\\
P(N_3|\overline{N_1}\cap\overline{N_2})&=\frac{2}{8}=\frac{1}{4} & P(\overline{N_1}\cap\overline{N_2})&=P(\overline{N_2}|\overline{N_1})P(\overline{N_1})=\frac{7}{9}\times\frac{8}{10}=\frac{28}{45}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$P(N_3)=0\times\frac{1}{45}+\frac{1}{8}\times\frac{8}{45}+\frac{1}{8}\times\frac{8}{45}+\frac{1}{4}\times\frac{28}{45}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$$

Solution 65.

Notons D la variable aléatoire correspondant au chiffre obtenu avec le dé. On utilise à plusieurs reprises la formule des probabilités totales.

Remarquons que $P(X=0|D=k)=0$ dès que $k>3$. Ainsi

$$\begin{aligned}P(X=0)&=P(X=0|D=1)P(D=1)+P(X=0|D=2)P(D=2)+P(X=0|D=3)P(D=3)\\
&=\frac{\binom{3}{1}}{\binom{6}{1}}\times\frac{1}{6}+\frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{\binom{6}{3}}\times\frac{1}{6}\\
&=\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{120}=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

Remarquons que $P(X=1|D=k)=0$ dès que $k>4$. Ainsi

$$\begin{aligned}P(X=1)&=P(X=1|D=1)P(D=1)+P(X=1|D=2)P(D=2)+P(X=1|D=3)P(D=3)+P(X=1|D=4)P(D=4)\\
&=\frac{\binom{3}{1}}{\binom{6}{1}}\times\frac{1}{6}+\frac{\binom{3}{1}^2}{\binom{6}{2}}\times\frac{1}{6}+\frac{\binom{3}{1}\binom{3}{2}}{\binom{6}{3}}\times\frac{1}{6}+\frac{\binom{3}{1}}{\binom{6}{4}}\times\frac{1}{6}\\
&=\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{3}{40}+\frac{1}{30}=\frac{7}{24}\end{aligned}$$

Remarquons que $P(X=2|D=k)=0$ dès que $k>5$ ou $k<2$. Ainsi

$$\begin{aligned}P(X=2)&=P(X=2|D=2)P(D=2)+P(X=2|D=3)P(D=3)+P(X=2|D=4)P(D=4)+P(X=2|D=5)P(D=5)\\
&=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}\times\frac{1}{6}+\frac{\binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{6}{3}}\times\frac{1}{6}+\frac{\binom{3}{2}^2}{\binom{6}{4}}\times\frac{1}{6}+\frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{5}}\times\frac{1}{6}\\
&=\frac{1}{30}+\frac{3}{40}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{7}{24}\end{aligned}$$

Remarquons que $P(X=3|D=k)=0$ dès que $k<3$. Ainsi

$$\begin{aligned}P(X=3) &= P(X=3|D=3)P(D=3)+P(X=3|D=4)P(D=4)+P(X=3|D=5)P(D=5)+P(X=3|D=6)P(D=6)\\ &= \frac{1}{\binom{6}{3}}\times\frac{1}{6}+\frac{\binom{3}{1}}{\binom{6}{4}}\times\frac{1}{6}+\frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{5}}\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{6}\\ &= \frac{1}{120}+\frac{1}{30}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{7}{24}\end{aligned}$$

Remarque. On aurait bien entendu pu utiliser le fait que $\sum_{k=0}^{3}P(X=k)=1$ pour calculer $P(X=3)$ après avoir calculé $P(X=0)$, $P(X=1)$ et $P(X=2)$. ■

Solution 66.

1. X et Y sont à valeurs dans $⟦1,n⟧$. On utilise la formule des probabilités totales. Pour $k\in\mathbb{N}^*$

$$P(Y=k)=\sum_{l=1}^{n}P(Y=k|X=l)P(X=l)=\sum_{l=k}^{n}P(Y=k|X=l)P(X=l)=\sum_{l=k}^{n}\frac{1}{ln}=\frac{1}{n}\sum_{l=k}^{n}\frac{1}{l}$$

2. Il s'agit de procéder à une interversion de sommation.

$$\begin{aligned}E(Y) &= \sum_{k=1}^{n}kP(Y=k)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=k}^{n}\frac{k}{l}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n}\frac{k}{l}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\frac{k}{l}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{l+1}{2}\\ &= \frac{n+3}{4}\end{aligned}$$

3. On a clairement $E(Y)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n}{4}$.

Solution 67.

1. Il existe $\binom{6}{2}$ issues possibles à ce tirage. La variable aléatoire X est à valeurs dans $\{0,1,2\}$.

   - L'événement $X=0$ correspond à tirer les deux boules parmi les quatre rouges. On en déduit que

$$P(X=0)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}=\frac{2}{5}$$

   - L'événement $X=1$ correspond à tirer une boule parmi les deux noires et une boule parmi les quatre rouges. On en déduit que

$$P(X=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}}=\frac{8}{15}$$

- L'événement $X=2$ correspond à tirer les deux boules parmi les deux noires. On en déduit que

$$P(X=2)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}}=\frac{1}{15}$$

2. La variable aléatoire Y est encore à valeurs dans $\{0,1,2\}$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(Y=0)&=P(Y=0|X=0)P(X=0)+P(Y=0|X=1)P(X=1)+P(Y=0|X=2)P(X=2)\\
&=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}\times\frac{2}{5}+\frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}}\times\frac{8}{15}+1\times\frac{1}{15}\\
&=\frac{2}{5}\\
P(Y=1)&=P(Y=1|X=0)P(X=0)+P(Y=1|X=1)P(X=1)+P(Y=1|X=2)P(X=2)\\
&=\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}}\times\frac{2}{5}+\frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}}\times\frac{8}{15}+0\times\frac{1}{15}\\
&=\frac{8}{15}\\
P(Y=2)&=P(Y=2|X=0)P(X=0)+P(Y=2|X=1)P(X=1)+P(Y=2|X=2)P(X=2)\\
&=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}\times\frac{2}{5}+0\times\frac{8}{15}+0\times\frac{1}{15}\\
&=\frac{1}{15}
\end{aligned}$$

3. On utilise la formule de Bayes

$$P(X=1|Y=1)=\frac{P(Y=1|X=1)P(X=1)}{P(Y=1)}$$

Or $P(Y=1)=P(X=1)$ et on a vu à la question précédente que

$$P(Y=1|X=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}}=\frac{1}{2}$$

Ainsi la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire au premier tirage sachant que l'on a tiré une seule boule noire au second tirage est $\frac{1}{5}$.

4. La probabilité recherchée est :

$$P(X=1,Y=1)+P(X=0,Y=2)=P(Y=1|X=1)P(X=1)+P(Y=2|X=0)P(X=0)=\frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}}\times\frac{8}{15}+\frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{3}$$

Solution 68.

En appliquant la formule de Bayes, on trouve que la probabilité que ce soit une fausse alerte vaut $\frac{1}{23}$

Solution 69.

On vérifie que $P_{\overline{V}}(M)=\frac{1}{9}>\frac{1}{12}=P_V(M)$ donc le vaccin est légèrement efficace.

Solution 70.

1. $\alpha = \dfrac{2}{n(n+1)}$.
2. $\dfrac{6k(n+1-k)}{n(n+1)(n+2)}$

Solution 71.

1. **a.** Soit $n \geq 1$. On calcule $p_{n+1} = \mathrm{P}(\mathrm{A}_{n+1})$ par la formule des probabilités totales avec le système complet $(\mathrm{A}_n, \overline{\mathrm{A}_n})$:

$$p_{n+1} \quad = \quad \mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1})\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) + \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_n}}(\mathrm{A}_{n+1})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_n}) = \mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1})p_n + \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_n}}(\mathrm{A}_{n+1})(1-p_n)\,.$$

D'après les hypothèses, $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$ est la probabilité pour, qu'ayant effectué le n-ième tirage dans l'urne U_1, celui-ci donne une boule blanche, c'est-à-dire $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B}_n)$. Puisque la proportion de boules blanches dans l'urne U_1 est $\frac{5}{6}$, on a $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B}_n) = \frac{5}{6}$, d'où $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) = \frac{5}{6}$.
De même, $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_n}}(\mathrm{A}_{n+1})$ est la probabilité pour, qu'ayant effectué le n-ième tirage dans l'urne U_2, celui-ci donne une boule noire, c'est-à-dire $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_n}}(\overline{\mathrm{B}_n})$. La proportion de boules noires dans l'urne U_2 est de $\frac{4}{6}$, donc $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_n}}(\mathrm{A}_{n+1}) = \frac{4}{6}$.
Finalement on obtient la formule de récurrence suivante :

$$\forall n \geq 1, \quad p_{n+1} = \frac{5}{6}p_n + \frac{4}{6}(1-p_n) = \frac{1}{6}p_n + \frac{4}{6}\,. \tag{1}$$

b. La relation (1) prouve que $(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmético-géométrique. La fonction associée $x \mapsto \frac{1}{6}x + \frac{4}{6}$ admet l'unique point fixe $\ell = \frac{4}{5}$. On sait alors que $(p_n - \ell)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $\frac{1}{6}$, d'où l'on tire $p_n - \ell = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}(p_1 - \ell)$ pour tout $n \geq 1$. Comme on choisit au hasard l'urne dans laquelle s'effectue le premier tirage, on a $p_1 = \frac{1}{2}$, et on obtient finalement : $\forall n \geq 1, \quad p_n = \frac{4}{5} - \frac{3}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$.

c. Puisque $\left|\frac{1}{6}\right| < 1$, on en déduit que $(p_n)_{n\geq 1}$ est convergente de limite $\ell = \frac{4}{5}$.

2. **a.** Soit $n \geq 1$. On calcule $q_n = \mathrm{P}(\mathrm{B}_n)$ en appliquant à nouveau la formule des probabilités totales avec le système complet $(\mathrm{A}_n, \overline{\mathrm{A}_n})$:

$$\begin{aligned} q_n &= \mathrm{P}(\mathrm{B}_n) = \mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B}_n)\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) + \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_n}}(\mathrm{B}_n)\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_n}) \\ &= \frac{5}{6}p_n + \frac{2}{6}(1-p_n) = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

(on a déjà vu que $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B}_n) = \frac{5}{6}$, et $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_n}}(\mathrm{B}_n) = 1 - \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_n}}(\overline{\mathrm{B}_n}) = \frac{2}{6}$).

b. Puisque $(p_n)_{n\geq 1}$ est convergente de limite $\frac{4}{5}$, on en déduit que $(q_n)_{n\geq 1}$ est convergente de limite $\ell' = \frac{1}{2}\frac{4}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$.

Solution 72.

Les trois tirages étant indépendants on trouve

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{4} = \frac{11}{24},$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=3) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4} = \frac{1}{24}, \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}=2) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

Bien sûr, on peut aussi calculer la dernière probabilité par

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \neq 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{11}{24} - \frac{1}{24} = \frac{1}{6}.$$

Solution 73.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}$$
$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \mathrm{E}(\mathrm{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}$$
$$\sigma(\mathrm{X}) = \frac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}}$$

Solution 74.

1. On note T la variable aléatoire désignant le chiffre obtenu par Tom et J la variable aléatoire désignant le chiffre obtenu par Jerry. Les variables aléatoires T et J sont indépendantes puisque les deux lancers sont indépendants.
   a. La probabilité que Tom gagne est
   $$\mathrm{P}(\mathrm{T}=3,\mathrm{J}=2) = \mathrm{P}(\mathrm{T}=3)\mathrm{P}(\mathrm{J}=2) = 1 \times \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
   b. La probabilité que Tom gagne est
   $$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{T}=2,\mathrm{J}=1)+\mathrm{P}(\mathrm{T}=6,\mathrm{J}=1)+\mathrm{P}(\mathrm{T}=6,\mathrm{J}=5) &= \mathrm{P}(\mathrm{T}=2)\mathrm{P}(\mathrm{J}=1)+\mathrm{P}(\mathrm{T}=6)\mathrm{P}(\mathrm{J}=1)+\mathrm{P}(\mathrm{T}=6)\mathrm{P}(\mathrm{J}=5)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$
   c. La probabilité que Tom gagne est
   $$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{T}=1,\mathrm{J}=0)+\mathrm{P}(\mathrm{T}=5,\mathrm{J}=4)+\mathrm{P}(\mathrm{T}=5,\mathrm{J}=0) &= \mathrm{P}(\mathrm{T}=1)\mathrm{P}(\mathrm{J}=0)+\mathrm{P}(\mathrm{T}=5)\mathrm{P}(\mathrm{J}=4)+\mathrm{P}(\mathrm{T}=5)\mathrm{P}(\mathrm{J}=0)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$
   d. La probabilité que Tom gagne est
   $$\mathrm{P}(\mathrm{T}=4,\mathrm{J}=3) = \mathrm{P}(\mathrm{T}=4)\mathrm{P}(\mathrm{J}=3) = 1 \times \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
2. **a.** On suppose que le deuxième joueur est en mesure de déterminer le dé lui donnant la plus forte probabilité de jouer (le choix du dé n'est donc pas fait au hasard).
   La question précédente montre que quelque soit le choix du dé du premier joueur le second joueur peut choisir un dé qui lui donne une probabilité plus grande de gagner.
   - Si le premier joueur choisit le dé A, il suffit que le second joueur choisisse le dé D.
   - Si le premier joueur choisit le dé B, il suffit que le second joueur choisisse le dé A.
   - Si le premier joueur choisit le dé C, il suffit que le second joueur choisisse le dé B.
   - Si le premier joueur choisit le dé D, il suffit que le second joueur choisisse le dé C.

   Il vaut donc mieux jouer en deuxième, autrement dit à la place de Jerry.

   b. Tout d'abord, résumons la probabilité que Tom gagne suivant les différents choix de dés dans le tableau suivant.

Tom \ Jerry	A	B	C	D
A		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$
C	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$
D	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	

La question est assez ambiguë. On supposera qu'une fois que Tom a choisi son dé, Jerry choisira le dé qui donne à Tom la plus faible probabilité de gagner et que Tom soit au courant de la stratégie de Jerry.
Tom choisira donc les dés A ou B pour s'assurer une probabilité de gagner d'au moins $\frac{1}{3}$ de gagner. En effet, le choix des dés C ou D permet à Jerry de choisir un dé donnant une probabilité à Tom de gagner égale à $\frac{1}{4}$. Ainsi Tom choisira le dé A et Jerry le dé D ou Tom le dé B et Jerry le dé A. Dans les deux cas, l'espérance du gain de Tom est

$$\frac{1}{3}\times\alpha+\frac{2}{3}\times(-1)=\frac{\alpha-2}{3}$$

Tom n'acceptera donc de jouer que si $\alpha\geqslant 2$.

3. Notons T la variable aléatoire correspondant au résultat obtenu par Tom et J la variable aléatoire correspondant au résultat obtenu par Jerry.
Si Tom sélectionne les dés A et B, alors Jerry joue avec les dés C et D. Dans ce cas, T est à valeurs dans $\{5,9\}$ et J est à valeurs dans $\{1,5,9\}$. La probabilité que Tom gagne (on exclut le match nul) est

$$P(T=5,J=1)+P(T=9,J=1)+P(T=9,J=5)=P(T=5)P(J=1)+P(T=9)P(J=1)+P(T=9)P(J=5)$$

De plus

$$\begin{aligned}P(T=5)&=P(T1=3)P(T2=2)=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\\P(T=9)&=P(T1=3)P(T2=6)=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\\P(J=1)&=P(J1=1)P(J2=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\\P(J=5)&=P(J1=1)P(J2=4)+P(J1=5)P(J2=0)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

La probabilité que Tom gagne est donc

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{9}$$

Tom a donc plus de chance de gagner que Jerry en sélectionnant les dés A et B. Il vaut donc mieux être à la place de Tom.

Solution 75.

1. Soit $k\in[\![0,2^n-1]\!]$. Il existe un unique n-uplet $(x_0,\dots,x_{n-1})\in\{0,1\}^n$ tel que

Solution 76.

1. **a.** Y et Z sont clairement à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. Soit $k\in]\!]1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}P(Y=k)&=P\left(X_1\in[\![1,k-1]\!],X_2=k\right)+P\left(X_1=k,X_2\in[\![1,k-1]\!]\right)+P(X_1=k,X_2=k)\\&=P(X_1\in[\![1,k-1]\!])P(X_2=k)+P(X_1=k)P(X_2\in[\![1,k-1]\!])+P(X_1=k)P(X_2=k)\qquad\text{par indépendance de }X_1\text{ et }X_2\\&=\frac{k-1}{n}\times\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\times\frac{k-1}{n}+\frac{1}{n^2}=\frac{2k-1}{n^2}\\P(Z=k)&=P\left(X_1\in[\![k+1,n]\!],X_2=k\right)+P\left(X_1=k,X_2\in[\![k+1,n]\!]\right)+P(X_1=k,X_2=k)\\&=P(X_1\in[\![k+1,n]\!])P(X_2=k)+P(X_1=k)P(X_2\in[\![k+1,n]\!])+P(X_1=k)P(X_2=k)\qquad\text{par indépendance de }X_1\text{ et }X_2\\&=\frac{n-k}{n}\times\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\times\frac{n-k}{n}+\frac{1}{n^2}=\frac{2n-2k+1}{n^2}\end{aligned}$$

b. Calculons d'abord les espérances.

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y})=\sum_{k=1}^{n}k\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}2k^2-k=\frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}-\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$$
$$\mathrm{E}(\mathrm{Z})=\sum_{k=1}^{n}k\mathrm{P}(\mathrm{Z}=k)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}2nk-2k^2+k=\frac{1}{n^2}\left(n^2(n+1)-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

Remarque. On peut aussi déterminer E(Z) plus simplement en remarquant que $\mathrm{Y}+\mathrm{Z}=\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2$ et donc, par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}(\mathrm{Y})+\mathrm{E}(\mathrm{Z})=\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)+\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)$. Or on a évidemment $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)=\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)=\frac{n+1}{2}$. ■

Calculons maintenant les variances. Tout d'abord

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}^2)=\sum_{k=1}^{n}k^2\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}2k^3-k^2=\frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n}$$
$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}^2)=\sum_{k=1}^{n}k^2\mathrm{P}(\mathrm{Z}=k)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}2nk^2-2k^3+k^2=\frac{(n+1)(n^2+n+1)}{6n}$$

On en déduit

$$\mathrm{V}(\mathrm{Y})=\mathrm{E}(\mathrm{Y}^2)-\mathrm{E}(\mathrm{Y})^2=\frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n}-\left(\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}\right)^2=\frac{(n-1)(n+1)(2n^2+1)}{36n^2}$$
$$\mathrm{V}(\mathrm{Z})=\mathrm{E}(\mathrm{Z}^2)-\mathrm{E}(\mathrm{Z})^2=\frac{(n+1)(n^2+n+1)}{6n}-\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\right)^2=\frac{(n-1)(n+1)(2n^2+1)}{36n^2}$$

c. On a facilement

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y})\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2n}{3}\qquad\qquad \mathrm{E}(\mathrm{Z})\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n}{3}$$
$$\mathrm{V}(\mathrm{Y})\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^2}{18}\qquad\qquad \mathrm{V}(\mathrm{Z})\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^2}{18}$$

d. Dans le cas particulier $n=1$, Y et Z sont indépendantes puisque $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=1,\mathrm{Z}=1)=1=\mathrm{P}(\mathrm{Y}=1)\mathrm{P}(\mathrm{Z}=1)$.
Supposons maintenant $n\geqslant 2$. Soit $(k,l)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $k<l$. Alors $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k,\mathrm{Z}=l)=0$ puisque $\mathrm{Y}\geqslant\mathrm{Z}$. Mais $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)\mathrm{P}(\mathrm{Z}=l)\neq 0$ d'après la question **1.a**. On en déduit que Y et Z ne sont pas indépendantes.

Remarque. On peut aussi remarquer que $\mathrm{V}(\mathrm{Y}+\mathrm{Z})\neq\mathrm{V}(\mathrm{Y})+\mathrm{V}(\mathrm{Z})$ en remarquant que $\mathrm{V}(\mathrm{Y}+\mathrm{Z})=\mathrm{V}(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2)=\mathrm{V}(\mathrm{X}_1)+\mathrm{V}(\mathrm{X}_2)$. Or on a facilement $\mathrm{V}(\mathrm{X}_1)=\mathrm{V}(\mathrm{X}_2)=\frac{(n+1)(n-1)}{12}$. ■

2. **a.** A nouveau, Y et Z sont bien à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Par indépendance mutuelle de $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_p$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}\leqslant k)=\mathrm{P}(\mathrm{X}_1\leqslant k,\dots,\mathrm{X}_p\leqslant k)=\prod_{j=1}^{p}\mathrm{P}(\mathrm{X}_j\leqslant k)=\left(\frac{k}{n}\right)^p$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}\geqslant k)=\mathrm{P}(\mathrm{X}_1\geqslant k,\dots,\mathrm{X}_p\geqslant k)=\prod_{j=1}^{p}\mathrm{P}(\mathrm{X}_j\geqslant k)=\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^p$$

On a alors

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)=\mathrm{P}(\mathrm{Y}\leqslant k)-\mathrm{P}(\mathrm{Y}\leqslant k-1)=\left(\frac{k}{n}\right)^p-\left(\frac{k-1}{n}\right)^p$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}=k)=\mathrm{P}(\mathrm{Z}\geqslant k)-\mathrm{P}(\mathrm{Z}\geqslant k+1)=\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^p-\left(\frac{n-k}{n}\right)^p$$

b.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{Y}) &= \sum_{k=1}^{n} k\left[\left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{k}{n}\right)^p - \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{k-1}{n}\right)^p \\
&= n + \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{k}{n}\right)^p - \sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{k-1}{n}\right)^p \\
&= n + \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{k}{n}\right)^p - \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\left(\frac{k}{n}\right)^p \\
&= n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p \\
\mathrm{E}(\mathrm{Z}) &= \sum_{k=1}^{n} k\left[\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^p - \left(\frac{n-k}{n}\right)^p\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^p - \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{n-k}{n}\right)^p \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^p - \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{n-k}{n}\right)^p \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\left(\frac{n-k}{n}\right)^p - \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{n-k}{n}\right)^p \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^p \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p
\end{aligned}$$

Remarque. Pour le calcul de E(Z), on aurait aussi pu remarquer via le changement d'indice $l = n-k+1$ que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{Z}) &= \sum_{k=1}^{n} k\left[\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^p - \left(\frac{n-k}{n}\right)^p\right] \\
&= \sum_{l=1}^{n} (n+1-l)\left[\left(\frac{l}{n}\right)^p - \left(\frac{l-1}{n}\right)^p\right] \\
&= (n+1)\sum_{l=1}^{n} \left[\left(\frac{l}{n}\right)^p - \left(\frac{l-1}{n}\right)^p\right] - \sum_{l=1}^{n} l\left[\left(\frac{l}{n}\right)^p - \left(\frac{l-1}{n}\right)^p\right] \\
&= n+1-\mathrm{E}(\mathrm{Y}) \qquad \text{par télescopage dans la première somme} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p
\end{aligned}$$

■

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $0 < \frac{k}{n} < 1$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^p = 0$.
Par opération sur les limites, il vient

$$\lim_{p\to+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{Y}) = n \qquad\qquad \lim_{p\to+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{Y}) = 1$$

Ceci est bien cohérent avec l'intuition.

c. Posons $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$. D'après le théorème sur les sommes de Riemann

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathrm{S}_n = \int_0^1 t^p \, dt = \frac{1}{p+1}$$

ou encore $S_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{p+1}+o(n)$. On en déduit

$$E(Y) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{np}{p+1}+o(n) \qquad E(Z) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{p+1}+o(n)$$

ou encore

$$E(Y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{np}{p+1} \qquad E(Z) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{p+1}$$

Remarque. On est passé par des petits o pour pouvoir effectuer des additions. ■

Solution 77.

On note X le nombre d'essais effectués avant de trouver la bonne clé.

1. Puisque chaque clé a a priori la même probabilité d'être la bonne clé, le nombre moyen d'essais est

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}$$

2. A chaque tentative, le concierge choisit la bonne clé avec une probabilité égale à $\frac{1}{n}$ et une mauvaise clé avec une probabilité de $1-\frac{1}{n}$. Il s'ensuit que pour $k\in\mathbb{N}^*$

$$P(X=k) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}$$

Le nombre moyen d'essais est donc

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n} = \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\frac{1}{\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2} = n$$

Solution 78.

1. La probabilité d'ouvrir la boîte gauche vide et qu'il reste r allumettes dans la boîte droite, est la probabilité d'avoir choisi N fois la boîte gauche et $N-r$ fois la boîte droite pendant les $2N-r$ premiers choix et d'avoir choisi la dernière fois la boîte gauche c'est-à-dire

$$\binom{2N-r}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^N\left(\frac{1}{2}\right)^{N-r}\times\frac{1}{2} = \frac{\binom{2N-r}{N}}{2^{2N-r+1}}$$

Puisque les boîtes gauche et droite jouent des rôles symétriques, la probabilité d'ouvrir la boîte droite vide et qu'il reste r allumettes dans la boîte gauche est la même. Finalement

$$\mu_{r,N} = 2\frac{\binom{2N-r}{N}}{2^{2N-r+1}} = \frac{\binom{2N-r}{N}}{2^{2N-r}}$$

2. On a $\mu_{0,N} = \frac{\binom{2N}{N}}{2^{2N}}$. En utilisant la formule de Stirling, on obtient $\mu_{0,N} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{N\pi}}$.

3. Soient $N\in\mathbb{N}$ et $r\in[\![0,N]\!]$.

$$\begin{aligned}(2N+2)\mu_{r+1,N+1} &= 2(N+1)\frac{\binom{2(N+1)-(r+1)}{N+1}}{2^{2(N+1)-(r+1)}}\\ &= \frac{(N+1)\binom{2N+1-r}{N+1}}{2^{2N-r}}\\ &= \frac{(2N+1-r)\binom{2N-r}{N}}{2^{2N-r}}\\ &= (2N+1-r)\mu_{r,N}\end{aligned}$$

4. Si on note X_N la variable aléatoire correspondant au nombre d'allumettes restantes, E_N est l'espérance de X_N, c'est-à-dire que

$$E_N = \sum_{r=0}^{N} r\mu_{r,N}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, pour tout $r \in [\![0, N]\!]$

$$r\mu_{r,N} = (2N+1)\mu_{r,N} - (2N+2)\mu_{r+1,N+1}$$

donc

$$\sum_{r=0}^{N} r\mu_{r,N} = (2N+1)\sum_{r=0}^{N}\mu_{r,N} - 2(N+1)\sum_{r=0}^{N}\mu_{r+1,N+1}$$

ou encore en changeant d'indice dans la dernière somme

$$E_N = (2N+1)\sum_{r=0}^{N}\mu_{r,N} - 2(N+1)\sum_{r=1}^{N+1}\mu_{r,N+1}$$

Mais le nombre d'allumettes restantes est un entier compris entre 0 et N (dans le cas où il y a N allumettes dans chaque boîte au départ) donc $\sum_{r=0}^{N}\mu_{r,N} = 1$. Pour la même raison, $\sum_{r=0}^{N+1}\mu_{r,N+1} = 1$. On en déduit

$$E_N = (2N+1) - 2(N+1)(1-\mu_{0,N+1})$$

Or $\mu_{0,N+1} = \frac{\binom{2N+2}{N+1}}{2^{2N+2}}$ donc

$$\begin{aligned}
E_N &= \frac{(N+1)\binom{2N+2}{N+1}}{2^{2N+1}} - 1\\
&= \frac{(2N+2)\binom{2N+1}{N}}{2^{2N+1}} - 1\\
&= \frac{(N+1)\binom{2N+1}{N}}{2^{2N}} - 1\\
&= \frac{(N+1)\binom{2N+1}{2N+1-N}}{2^{2N}} - 1\\
&= \frac{(N+1)\binom{2N+1}{N+1}}{2^{2N}} - 1\\
&= \frac{(2N+1)\binom{2N}{N}}{2^{2N}} - 1
\end{aligned}$$

5. En utilisant à nouveau la formule de Stirling, on obtient $E_N \underset{N\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{N}{\pi}}$.

6. Notons Y_N la variable correspondant au nombre d'allumettes utilisées. On a évidemment $X_N + Y_N = 2N$. F_N est l'espérance de Y_N, c'est-à-dire

$$F_N = E(Y_N) = E(2N - X_N) = 2N - E_N = 2N + 1 - \frac{2N+1}{2^{2N}}\binom{2N}{N} = (2N+1)\left(1 - \frac{\binom{2N}{N}}{2^{2N}}\right)$$

Solution 79.

1. U suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{u}{b}\right)$. Son espérance est $\frac{nu}{b}$ et sa variance est $\frac{nu}{b}\left(1-\frac{u}{b}\right)$.
De même, D et T suivent respectivement les lois binomiales $\mathscr{B}\left(n, \frac{d}{b}\right)$ et $\mathscr{B}\left(n, \frac{t}{b}\right)$.

2. On peut par exemple remarquer que $P(U = n) \neq 0$ et $P(D = n) \neq 0$ tandis que $P(U = n, D = n) = 0$. Ainsi $P(U = n, D = n) \neq P(U = n)P(D = n)$, ce qui prouve que U et D ne sont pas indépendantes.

3. Puisque $\mathrm{U}+\mathrm{D}+\mathrm{T}=n$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{U}+\mathrm{D}=k)=\mathrm{P}(\mathrm{T}=n-k)$$

On en déduit aisément que $\mathrm{U}+\mathrm{D}$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, 1-\frac{t}{b}\right)$.
De plus,

$$\mathrm{E}(\mathrm{U}+\mathrm{D})=\mathrm{E}(n-\mathrm{T})=n-\mathrm{E}(\mathrm{T})=n-\frac{nt}{b}=\frac{n(b-t)}{b}$$

Enfin,

$$\mathrm{V}(\mathrm{U}+\mathrm{D})=\mathrm{V}(n-\mathrm{T})=\mathrm{V}(\mathrm{T})=\frac{nt}{b}\left(1-\frac{t}{b}\right)$$

4. On sait que

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{U}, \mathrm{D})=\frac{1}{2}(\mathrm{V}(\mathrm{U}+\mathrm{D})-\mathrm{V}(\mathrm{U})-\mathrm{V}(\mathrm{D}))$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\mathrm{U}, \mathrm{D}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{nt}{b}\left(1-\frac{t}{b}\right)-\frac{nu}{b}\left(1-\frac{u}{b}\right)-\frac{nd}{b}\left(1-\frac{d}{b}\right)\right) \\
&= \frac{n}{2b^2}(t(b-t)-u(b-u)-d(b-d)) \\
&= \frac{n}{2b^2}((b-u-d)(u+d)-u(b-u)-d(b-d)) \\
&= -\frac{-nud}{b^2}
\end{aligned}$$

Solution 80.

1. **a.** Notons comme d'habitude Ω l'univers associé à l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé. On a bien-sûr $\mathrm{X}(\Omega)=\{1, \cdots, n+1\}$. Si pour tout entier $i \in \{1, \cdots, n\}$, on note A_i l'évènement « le i-ième candidat réussit le test », on voit que pout tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, on a $\{\mathrm{X}=k\}=\overline{\mathrm{A}_1} \cap \ldots \cap \overline{\mathrm{A}_{k-1}} \cap \mathrm{A}_k$. D'après la formule des probabilités composées, on a donc :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_1})\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_1}}(\overline{\mathrm{A}_2}) \ldots \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_1} \cap \ldots \cap \overline{\mathrm{A}_{k-2}}}(\overline{\mathrm{A}_{k-1}})\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_1} \cap \ldots \cap \overline{\mathrm{A}_{k-1}}}(\mathrm{A}_k).$$

Pour chaque entier $j \in \{1, \cdots, k-1\}$, $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_1} \cap \ldots \cap \overline{\mathrm{A}_{j-1}}}(\overline{\mathrm{A}_j})$ est juste la probabilité que le j-ième candidat rate son test (car il ne le passe que si les j-1 candidats précédents ont échoué), et vaut donc $1-p=q$. On a de même $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_1} \cap \ldots \cap \overline{\mathrm{A}_{k-1}}}(\mathrm{A}_k)=p$, d'où la formule :

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad \mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=q^{k-1}p. \tag{2}$$

Enfin, $\{\mathrm{X}=n+1\}=\overline{\mathrm{A}_1} \cap \ldots \cap \overline{\mathrm{A}_n}$. En appliquant une nouvelle fois la formule des probabilités composées, on obtient de la même manière que :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=n+1)=q^n. \tag{3}$$

(2) et (3) donnent bien la loi de X.

b. En se rappelant de la formule :

$$\forall x \neq 1, \quad \sum_{k=0}^{n} x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \tag{4}$$

on obtient (puisque $p \neq 0$ donc $q \neq 1$) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) &= \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}p+q^n=p\sum_{k=0}^{n-1} q^k+q^n \\
&= p\frac{1-q^n}{1-q}+q^n=1-q^n+q^n=1
\end{aligned}$$

2. **a.** En dérivant les deux fonctions dans la formule (4), on obtient l'identité :

$$\forall x \neq 1, \quad \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}. \tag{5}$$

b. Puisqu'ici $X(\Omega) = \{1, \cdots, n+1\}$, on a par définition $E(X) = \sum_{k=1}^{n+1} kP(X = k)$. Compte-tenu de ce qu'on a vu en **1.a** et de (5), on obtient :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} kpq^{k-1} + (n+1)q^n = p\frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2} + (n+1)q^n \\ &= \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1 + (n+1)q^n(1-q)}{1-q} \quad (\text{car } p = 1-q) \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

3. Notons A l'évènement « l'un des n candidats est recruté ». On voit que $A = \{1 \leqslant X \leqslant n\}$, en d'autres termes $\overline{A} = \{X = n+1\}$. Ainsi $P(A) \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(\overline{A}) \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(X = n+1) \leqslant \frac{1}{2}$. Puisque $P(X = n+1) = q^n$, on obtient :

$$P(A) \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow q^n \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow q \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \Leftrightarrow p \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}.$$

Avec $n = 4$ (resp. $n = 10$), on obtient (en arrondissant à trois chiffres après la virgule) la condition $p \geqslant 0.159$ (resp. $p \geqslant 0.067$).

Solution 81.

1. On vérifie aisément que $X_1(\Omega) = \{-1, 1\}$, $X_2(\Omega) = \{-2, 0, 2\}$, et $X_3(\Omega) = \{-3, -1, 1, 3\}$.

2. Soit $n \geq 1$. Notons D_n le nombre de déplacements vers la droite du mobile entre les instants 0 et $n-1$. D_n peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 (cas où le mobile se déplace les n fois à gauche) et n (cas où le mobile se déplace les n fois à droite). Or si $D_n = k$, on a $X_n = k - (n-k) = 2k - n$, d'où le résultat :

$$X_n(\Omega) = \{2k - n, 0 \leqslant k \leqslant n\} = \{-n, -n+2, \dots, n-2, n\}.$$

3. Fixons $k \in \{0, \dots, n\}$. Avec les notations qui précèdent, l'évènement $\{X_n = 2k - n\}$ est égal à $\{D_n = k\}$. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les k déplacements vers la droite parmi les n, et, ce choix effectué, la probabilité qu'il y ait eu ces k déplacements vers la droite et $n-k$ déplacements vers la gauche aux instants restants est $p^k q^{n-k}$. On en déduit que $P(X_n = 2k - n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

4. **a.** On a en fait $Y_n = D_n$ avec les notations précédentes, puisque $Y_n = k \Longleftrightarrow X_n = 2k - n \Longleftrightarrow D_n = k$. Ainsi $Y_n(\Omega) = D_n(\Omega) = \{0, \dots, n\}$ et

$$\forall 0 \leqslant k \leqslant n, \quad P(Y_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

La loi de Y_n est donc la loi binomiale de paramètres n et p. On sait alors que $E(Y_n) = np$ et $V(Y_n) = npq$.

b. Puisque $X_n = 2Y_n - n$, on en déduit que $E(X_n) = 2E(Y_n) - n = n(2p-1)$ et que $V(X_n) = 2^2 V(Y_n) = 4npq$.

c. La limite de $E(X_n)$ dépend du signe de $2p - 1$:

$$\begin{cases} \text{si} \quad 0 < p < \frac{1}{2}, & \lim_{n \to +\infty} E(X_n) = -\infty \\ \text{si} \quad p = \frac{1}{2}, & \lim_{n \to +\infty} E(X_n) = 0 \\ \text{si} \quad \frac{1}{2} < p < 1, & \lim_{n \to +\infty} E(X_n) = +\infty \end{cases}$$

Notons que dans le cas $p = \frac{1}{2}$, la variable X_n est centrée pour tout n : la position moyenne du mobile reste toujours 0, ce qui n'est pas étonnant puisqu'à chaque déplacement il a autant de chances d'aller à droite qu'à gauche.
Puisque $0 < p < 1$, on a $pq = p(1-p) > 0$, donc $\lim_{n \to +\infty} V(X_n) = +\infty$.
Ainsi pour toute valeur de $p \in]0, 1[$, la dispersion de X_n par rapport à sa moyenne tend vers l'infini, ce qui traduit le fait que plus n est grand plus il est difficile de prédire la position qu'aura le mobile au bout de n déplacements.

Solution 82.

1. Numérotons les boules rouges de 1 à 5, les blanches de 6 à 10 et les bleues de 11 à 16. L'ensemble Ω des tirages possibles est alors l'ensemble des 4-listes d'éléments distincts de $\{1,\cdots,16\}$:
$$\Omega = \left\{(n_1,n_2,n_3,n_4)\in\mathbb{N}_{16}^4 \ / \ n_i \text{ distincts 2 à 2}\right\}.$$
(n_i correspondant au numéro de la i-ème boule tirée).
Le cardinal de Ω est par définition $A_{16}^4 = 16.15.14.13 = 43680$. Comme le tirage s'effectue au hasard, la probabilité est uniforme sur Ω : chaque 4-liste a la même probabilité $\frac{1}{43680}$.
La variable aléatoire X peut prendre les valeurs $0,1,2,3$ ou 4. Pour chaque $k\in\{0,\dots,4\}$, on dénombre les cas favorables à l'évènement $\{X=k\}$:
   - les tirages favorables appartenant à $\{X=0\}$ sont les 4-listes d'éléments distincts de $\{6,\dots,16\}$ (tirages de boules blanches ou bleues uniquement), il y en a donc $A_{11}^4 = 11.10.9.8 = 7920$. Ainsi :
$$P(X=0) = \frac{A_{11}^4}{43680} = \frac{7920}{43680} = \frac{33}{182}.$$
   - pour qu'un tirage appartienne à $\{X=1\}$, il y a $\binom{5}{1}=5$ faççons de choisir le numéro de la boule rouge tirée, puis 4 façons de choisir le rang d'apparition de cette boule rouge, et $A_{11}^3 = 11.10.9$ façons de compléter le tirage avec 3 boules blanches ou bleues. Ainsi :
$$P(X=1) = \frac{\binom{5}{1}.4.A_{11}^3}{43680} = \frac{19800}{43680} = \frac{165}{364}.$$
   - pour qu'un tirage appartienne à $\{X=2\}$, il y a $\binom{5}{2}$ façons de choisir les numéros des deux boules rouges tirées, puis A_4^2 façons de choisir les rangs d'apparition de ces boules rouges, et $A_{11}^2 = 11.10$ façons de compléter le tirage avec 2 boules blanches ou bleues. Ainsi
$$P(X=2) = \frac{\binom{5}{2}.A_4^2.A_{11}^2}{43680} = \frac{13200}{43680} = \frac{55}{182}.$$
   - par le même raisonnement on obtient aisément :
$$\left\{\begin{array}{lcl} P(X=3) & = & \dfrac{\binom{5}{3}.A_4^3.A_{11}^1}{43680} = \dfrac{2640}{43680} = \dfrac{11}{182} \\ P(X=4) & = & \dfrac{\binom{5}{4}.A_4^4}{43680} = \dfrac{120}{43680} = \dfrac{1}{364} \end{array}\right.$$

   Remarque : La formule générale pour $P(X=k)$ est donc :
$$\forall\, 0\leqslant k\leqslant 4,\quad P(X=k) = \frac{\binom{5}{k}.A_4^k.A_{11}^{4-k}}{43680}.$$
On peut aussi exprimer ce résultat avec des coefficients binômiaux ; en effet $43680 = A_{16}^4 = 4!\times\binom{16}{4}$ et
$$A_4^k.A_{11}^{4-k} \quad = \quad \frac{4!}{(4-k)!}\times\frac{11!}{(11-4+k)!} = 4!\times\binom{11}{4-k},$$
d'où finalement, en simplifiant en haut et en bas par $4!$:
$$\forall\, 0\leqslant k\leqslant 4,\quad P(X=k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{11}{4-k}}{\binom{16}{4}}.$$
On aurait pu trouver directement cette formule si on avait considéré le résultat d'un tirage comme une partie de 4 éléments parmi 16 (sans attribuer de numéros aux boules, ni tenir compte de l'ordre des tirages).

   Connaissant les $P(X=k)$ pour $0\leqslant k\leqslant 4$ (penser à vérifier qu'on a bien qu'on a bien $\sum_{k=0}^{4} P(X=k)=1$), on en déduit l'espérance :
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{4} kP(X=k) = 1\cdot\frac{165}{364} + 2\cdot\frac{55}{182} + 3.\frac{11}{182} + 4.\frac{1}{364} \\ &= \frac{455}{364} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

2. On a toujours $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
Dénombrons les cas favorables à $\{Y = k\}$ pour $0 \leqslant k \leqslant 4$ fixé :
d'abord il y a $\binom{4}{k}$ façons de fixer les k tirages où on obtient une boule rouge parmi les 4 tirages en tout. Ensuite, puisqu'à chaque tirage on a la même probabilité $\frac{5}{16}$ (resp. $\frac{11}{16}$) de tirer une boule rouge (resp. blanche ou bleue), la probabilité de tirer une boule rouge (resp. blanche ou bleue) à chacun des k (resp. $4-k$) tirages fixés précédemment vaut $\left(\frac{5}{16}\right)^k$ (resp. $\left(\frac{11}{16}\right)^{4-k}$).
On en conclut que :

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant 4, \quad P(Y = k) = \binom{4}{k} . \left(\frac{5}{16}\right)^k . \left(\frac{11}{16}\right)^{4-k}.$$

On en déduit alors l'espérance de Y en écrivant que $k\binom{4}{k} = 4\binom{3}{k-1}$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant 4$, puis en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{4} k\binom{4}{k} . \left(\frac{5}{16}\right)^k . \left(\frac{11}{16}\right)^{4-k} \\ &= 4.\frac{5}{16} \sum_{k=1}^{4} \binom{3}{k-1} \left(\frac{5}{16}\right)^{k-1} \left(\frac{11}{16}\right)^{3-(k-1)} \\ &= 4.\frac{5}{16} \sum_{j=0}^{3} \binom{3}{j} \left(\frac{5}{16}\right)^{j} \left(\frac{11}{16}\right)^{3-j} = \frac{5}{4}\left(\frac{5}{16} + \frac{11}{16}\right)^3 = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Solution 83.

1. X_n est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Soit donc $k \in [\![0, n]\!]$.
Se donner une application de E_n à k points fixes revient à

- choisir les k points fixes parmi les n éléments de $[\![1, n]\!]$ soit $\binom{n}{k}$ possibilités ;
- choisir pour chacun des $n-k$ éléments restants une image autre que lui-même soit $(n-1)^{n-k}$ possibilités.

On en déduit qu'il existe $\binom{n}{k}(n-1)^{n-k}$ applications de E_n ayant exactement k points fixes. Puisque $\operatorname{card} E_n = n^n$,

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{(n-1)^{n-k}}{n^n}$$

2. D'après la question précédente pour $n \geqslant k$

$$P(X_n = k) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{(n-1)^{n-k}}{n^n}$$

ou encore

$$P(X_n = k) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k k!} \frac{(n-1)^{n-k}}{n^{n-k}}$$

On a clairement $n(n-1)\dots(n-k+1) \sim n^k$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k k!} = \frac{1}{k!}$$

De plus,

$$\frac{(n-1)^{n-k}}{n^{n-k}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} = \exp\left((n-k)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$$

Or $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$ donc $\lim_{n \to +\infty} (n-k)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1$ puis

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n-1)^{n-k}}{n^{n-k}} = e^{-1}$$

Finalement

$$\lim_{n \to +\infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}$$

SOLUTION 84.

1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{Y}) &= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k) \\
&= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\left(\mathrm{P}(\mathrm{Y}>k-1)-\mathrm{P}(\mathrm{Y}>k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\mathrm{P}(\mathrm{Y}>k-1)-\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}(\mathrm{Y}>k) \\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}(k+1)\mathrm{P}(\mathrm{Y}>k)-\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\mathrm{P}(\mathrm{Y}>k) \qquad \text{par changement d'indice} \\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}(k+1)\mathrm{P}(\mathrm{Y}>k)-\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} k\mathrm{P}(\mathrm{Y}>k) \\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\mathrm{P}(\mathrm{Y}>k)-\mathrm{N}\mathrm{P}(\mathrm{Y}>\mathrm{N}) \\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\mathrm{P}(\mathrm{Y}>k) \qquad \text{car } \mathrm{P}(\mathrm{Y}>n)=0
\end{aligned}$$

2. **a.** Soit $k \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{T}_n \leqslant k)=\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 \leqslant k, \mathrm{X}_2 \leqslant k, \dots, \mathrm{X}_n \leqslant k)=\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 \leqslant k)\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 \leqslant k)\dots\mathrm{P}(\mathrm{X}_n \leqslant k)$$

car les variables $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes. Mais comme chacune de ces variables suit la loi uniforme sur $[\![1,\mathrm{N}]\!]$

$$\mathrm{P}(\mathrm{T}_n \leqslant k)=\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n$$

b. Pour tout $k \in [\![,\mathrm{N}]\!]$

$$\mathrm{P}(\mathrm{T}_n = k)=\mathrm{P}(\mathrm{T}_n \leqslant k)-\mathrm{P}(\mathrm{T}_n \leqslant k-1)=\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n-\left(\frac{k-1}{\mathrm{N}}\right)^n$$

c.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{T}_n) &= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\left(\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n-\left(\frac{k-1}{\mathrm{N}}\right)^n\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n-\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\left(\frac{k-1}{\mathrm{N}}\right)^n \\
&= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n-\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}(k+1)\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} k\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n-\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}(k+1)\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n \\
&= \mathrm{N}-a_n(\mathrm{N})
\end{aligned}$$

3. **a.** Soit $k \in [\![0,\mathrm{N}-1]\!]$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}_n > k)=\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 > k, \mathrm{X}_2 > k, \dots, \mathrm{X}_n > k)=\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 > k)\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 > k)\dots\mathrm{P}(\mathrm{X}_n > k)$$

car les variables $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes. Mais comme chacune de ces variables suit la loi uniforme sur $[\![1,\mathrm{N}]\!]$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}_n > k)=\left(\frac{\mathrm{N}-k}{\mathrm{N}}\right)^n$$

b. En utilisant la première question

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}_n) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \left(\frac{\mathrm{N}-k}{\mathrm{N}}\right)^n = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n$$

via un changement d'indice. Autrement dit, $\mathrm{E}(\mathrm{Z}_n) = 1 + a_n(\mathrm{N})$.

4. a. Pour $k \in [\![1, \mathrm{N}-1]\!]$, $0 \leqslant \frac{k}{\mathrm{N}} < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n = 0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} a_n(\mathrm{N}) = 0$. Or $\mathrm{E}(\mathrm{T}_n) = \mathrm{N} - a_n(\mathrm{N})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{T}_n) = \mathrm{N}$.

b. Par linéarité, $\mathrm{E}(\mathrm{S}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{T}_n) + \mathrm{E}(\mathrm{Z}_n) - 1 = \mathrm{N}$ en utilisant les questions précédentes.

Solution 85.

Posons $\mathrm{X} = \mathbb{1}_\mathrm{A} + 2\mathbb{1}_\mathrm{B}$. Alors $\mathrm{X}(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. On a

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0) = \mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}) - \mathrm{P}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{5}{12}$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1) = \mathrm{P}(\mathbb{1}_\mathrm{A} = 0, \mathbb{1}_\mathrm{B} = 1) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{4}$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2) = \mathrm{P}(\mathbb{1}_\mathrm{A} = 0, \mathbb{1}_\mathrm{B} = 1) = \mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{12}$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=3) = \mathrm{P}(\mathbb{1}_\mathrm{A} = 1, \mathbb{1}_\mathrm{B} = 1) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{4}$$

Remarque. On vérifie que $\sum_{k=0}^{3} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = 1$. ■

On en déduit

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{3} k\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \frac{7}{6}$$
$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \mathrm{E}(\mathrm{X})^2 = \sum_{k=0}^{3} k^2\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{53}{36}$$

Solution 86.

Puisque le rang d'apparition des boules rouges ne dépend que du placement des boules rouges, on peut prendre comme univers l'ensemble des combinaisons des r places parmi N.

Fixons $n \in [\![1, r]\!]$. Remarquons que X_n est à valeurs dans $[\![n, \mathrm{N}-r+n]\!]$ puisqu'il y a $n-1$ boules rouges avant la $n^{\text{ème}}$ et $r-n$ après.

Fixons donc $k \in [\![n, \mathrm{N}-r+n]\!]$ et dénombrons les combinaisons faisant apparaître la $n^{\text{ème}}$ boule en $k^{\text{ème}}$ position. Choisir une telle combinaison revient à placer $n-1$ boules parmi les $k-1$ places précédant la $k^{\text{ème}}$ et $r-n$ parmi les $\mathrm{N}-k$ places lui succédant. Il existe donc $\binom{k-1}{n-1}\binom{\mathrm{N}-k}{r-n}$ combinaisons faisant apparaître la $n^{\text{ème}}$ boule en $k^{\text{ème}}$ position.

Puisqu'il existe $\binom{\mathrm{N}}{r}$ combinaisons de r places parmi N et que tous les tirages sont implicitement équiprobables

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}\binom{\mathrm{N}-k}{r-n}}{\binom{\mathrm{N}}{r}}$$

Solution 87.

Remarquons tout d'abord que X est à valeurs dans $\{1, 2, 3, 4\}$.

On a clairement $\mathrm{card}(\mathrm{X}=1) = 6$.

Se donner une issue de l'événement $\mathrm{X}=2$ consiste à :

1. choisir deux numéros : $\binom{6}{2}$ possibilités ;
2. choisir combien de fois chacun des numéros apparaîtra autrement dit à écrire 4 comme somme de deux entiers naturels non nuls (4=1+3=2+2=3+1) : 3 possibilités.

Ainsi $\operatorname{card}(X=2) = 3\binom{6}{2} = 45$.

De même, se donner une issue de l'événement $X=3$ consiste à :

1. choisir deux numéros : $\binom{6}{3}$ possibilités ;
2. choisir combien de fois chacun des numéros apparaîtra autrement dit à écrire 4 comme somme de trois entiers naturels non nuls (4=1+1+2=1+2+1=2+1+1) : 3 possibilités.

Ainsi $\operatorname{card}(X=3) = 3\binom{6}{3} = 60$.

Enfin, on a clairement $\operatorname{card}(X=4) = \binom{6}{4} = 15$.

Puisque $(X=k)_{1\leqslant k\leqslant 4}$ est un système complet d'événements, $\operatorname{card}(\Omega) = \sum_{k=1}^{4} \operatorname{card}(X=k) = 126$ puis

$$P(X=1) = \frac{\operatorname{card}(X=1)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{1}{21} \qquad P(X=2) = \frac{\operatorname{card}(X=2)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{5}{14} \qquad P(X=3) = \frac{\operatorname{card}(X=3)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{10}{21} \qquad P(X=4) = \frac{\operatorname{card}(X=4)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{5}{42}$$

Il vient alors

$$E(X) = \sum_{k=1}^{4} kP(X=k) = 1\times\frac{1}{21} + 2\times\frac{5}{14} + 3\times\frac{10}{21} + 4\times\frac{5}{42} = \frac{8}{3}$$

et enfin

$$V(X) = \sum_{k=1}^{4} k^2 P(X=k) - E(X)^2 = 1\times\frac{1}{21} + 4\times\frac{5}{14} + 9\times\frac{10}{21} + 16\times\frac{5}{42} - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{23}{3} - \frac{64}{9} = \frac{5}{9}$$

Solution 88.

1. X suit évidemment la loi binomiale de paramètres n et $\frac{N_1}{N}$. Classiquement, $E(X) = \frac{nN_1}{N}$ et $V(X) = \frac{nN_1N_2}{N^2}$.
2. L'univers Ω de l'expérience aléatoire est formé des n-arrangements de N boules. Ainsi $\operatorname{card}(\Omega) = \frac{N!}{(N-n)!}$.
   Y est à valeurs dans $[\![\max(0, n-N_2), \min(n, N_1)]\!]$. Soit k dans cet ensemble. Se donner une issue de l'événement $Y=k$ consiste à choisir les emplacements des k boules blanches ($\binom{n}{k}$ possibilités) puis à se donner un k-arrangement des N_1 boules blanches et un $(n-k)$-arrangement des N_2 boules blanches. Ainsi

   $$\operatorname{card}(Y=k) = \binom{n}{k}\frac{N_1!}{(N_1-k)!}\frac{N_2!}{(N_2-n+k)!} = n!\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$$

   puis

   $$P(Y=k) = \frac{\operatorname{card}(Y=k)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{n!\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\frac{N!}{(N-n)!}} = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

   On peut calculer l'espérance et la variance de Y à l'aide de formules sur les coefficients binomiaux mais les calculs s'avèrent fastidieux et longs. On va adopter une méthode plus astucieuse.
   Notons $\mathscr{B}$ l'ensemble des boules blanches et pour $b\in\mathscr{B}$, Y_b la variable aléatoire valant 1 si la boule b a été tirée au cours des n tirages et 0 sinon. Il est clair que $Y = \sum_{b\in\mathscr{B}} Y_b$. Ainsi $E(Y) = \sum_{b\in\mathscr{B}} E(Y_b)$. Or pour tout $b\in\mathscr{B}$, Y_b est une variable de Bernoulli dont le paramètre p est la probabilité $P(Y=1)$ dans le cas où N_1 vaut 1. Autrement dit $p = \frac{n}{N}$. Ainsi

   $$E(Y) = \sum_{b\in\mathscr{B}} \frac{n}{N} = \frac{nN_1}{N}$$

   Si $N=1$, on a évidemment $V(Y)=0$. Supposons donc $n\geqslant 2$.
   Soit $b\in\mathscr{B}$. Y_b étant une variable de Bernoulli, $V(Y_b) = p(1-p) = \frac{n(N-n)}{N^2}$.

Soit $(b_1, b_2) \in \mathscr{B}^2$ tel que $b_1 \neq b_2$. Alors $\mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_{b_1}, \mathrm{Y}_{b_2}) = \mathrm{E}(\mathrm{Y}_{b_1}\mathrm{Y}_{b_2}) - \mathrm{E}(\mathrm{Y}_{b_1})\mathrm{E}(\mathrm{Y}_{b_2})$. Mais $\mathrm{Y}_{b_1}\mathrm{Y}_{b_2}$ est à nouveau une variable de Bernoulli dont le paramètre est la probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=2)$ lorsque N_1 vaut 2. On en déduit

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_{b_1}, \mathrm{Y}_{b_2}) = \frac{n(n-1)}{\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)} - \left(\frac{n}{\mathrm{N}}\right)^2 = -\frac{n(\mathrm{N}-n)}{\mathrm{N}^2(\mathrm{N}-1)}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\mathrm{Y}) &= \mathrm{V}(\sum_{b\in\mathscr{B}} \mathrm{Y}_b) \\
&= \sum_{b\in\mathscr{B}} \mathrm{V}(\mathrm{Y}_b) + \sum_{(b_1,b_2)\in\mathscr{B}^2, b_1\neq b_2} \mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_{b_1}, \mathrm{Y}_{b_2}) \\
&= \frac{\mathrm{N}_1 n(\mathrm{N}-n)}{\mathrm{N}^2} - \frac{\mathrm{N}_1(\mathrm{N}_1-1)n(\mathrm{N}-n)}{\mathrm{N}^2(\mathrm{N}-1)} \\
&= \frac{\mathrm{N}_1 n(\mathrm{N}-n)(\mathrm{N}-1) - \mathrm{N}1(\mathrm{N}_1-1)n(\mathrm{N}-n)}{\mathrm{N}^2(\mathrm{N}-1)} \\
&= \frac{\mathrm{N}_1 n(\mathrm{N}-n)(\mathrm{N}-\mathrm{N}_1)}{\mathrm{N}^2(\mathrm{N}-1)} \\
&= \frac{\mathrm{N}_1}{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{N}_2}{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{N}-n}{\mathrm{N}-1}
\end{aligned}$$

3. L'univers Ω de l'expérience aléatoire est formé des n-combinaisons de N boules. Ainsi $\mathrm{card}(\Omega) = \binom{\mathrm{N}}{n}$.
Z est encore à valeurs dans $[\![\max(0, n-\mathrm{N}_2), \min(n, \mathrm{N}_1)]\!]$. Soit k dans cet ensemble. Se donner une issue de l'événement $\mathrm{Z} = k$ correspond à choisir k boules parmi les N_1 boules blanches et $n-k$ boules parmi les N_2 boules noires. Ainsi

$$\mathrm{card}(\mathrm{Z}=k) = \binom{\mathrm{N}_1}{k}\binom{\mathrm{N}_2}{n-k}$$

puis

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}=k) = \frac{\mathrm{card}(\mathrm{Z}=k)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{\binom{\mathrm{N}_1}{k}\binom{\mathrm{N}_2}{n-k}}{\binom{\mathrm{N}}{n}}$$

Z suit donc la même loi que Y et a donc même espérance et même variance.

Remarque. La loi de Y et Z s'appelle la *loi hypergéométrique de paramètres* n, N *et* $\frac{\mathrm{N}_1}{\mathrm{N}}$. ■

Solution 89.

Pour $1 \leqslant i \leqslant 6$, notons p_i (resp. q_i) la probabilité d'obtenir i en lançant le premier (resp. le deuxième) dé. De même, pour $2 \leqslant i \leqslant 12$, notons r_i la probabilité d'obtenir i en lançant deux dés. On a la relation suivante : $r_k = \sum_{i+j=k} p_i q_j$.

Notons $\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{6} p_i \mathrm{X}^{i-1}$, $\mathrm{Q} = \sum_{i=1}^{6} q_i \mathrm{X}^{i-1}$ et $\mathrm{R} = \sum_{i=2}^{12} q_i \mathrm{X}^{i-2}$. La relation précédente signifie que $\mathrm{R} = \mathrm{PQ}$. S'il y avait équiprobabilité sur les sommes, on aurait $r_i = \frac{1}{11}$ pour $2 \leqslant i \leqslant 12$ i.e. $\mathrm{R} = \frac{1}{11}\sum_{i=0}^{10} \mathrm{X}^i$.

Les racines de R sont les racines $11^{\text{èmes}}$ de l'unité privées de 1. Aucune de ces racines n'est réelle. De plus, $\deg \mathrm{P} \leqslant 5$ et $\deg \mathrm{Q} \leqslant 5$. Puisque $\deg \mathrm{R} = \deg \mathrm{PQ} = 10$, $\deg \mathrm{P} = \deg \mathrm{Q} = 5$. Puisque 5 est impair, les polynômes P et Q admettent chacun au moins une racine réelle en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, d'où une contradiction.
Il est donc impossible de piper deux dés de manière à avoir équiprobabilité sur les sommes.

Solution 90.

Si $n = 0$, la réponse est évidemment affirmative. Supposons maintenant $n \geqslant 1$.
Supposons qu'il existe deux variables aléatoires indépendantes A et B à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ dont la somme $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$ suive la loi uniforme

sur $[\![0,2n]\!]$. Posons $a_k = \mathrm{P}(\mathrm{A}=k)$ et $b_k = \mathrm{P}(\mathrm{B}=k)$ pour $k \in [\![0,n]\!]$. De même, posons $c_k = \mathrm{P}(\mathrm{C}=k)$ pour $k \in [\![0,2n]\!]$. On a alors pour tout $k \in [\![0,2n]\!]$

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

Mais puisque $\mathrm{C}=\mathrm{A}+\mathrm{B}$ suit une loi uniforme sur $[\![0,2n]\!]$, $c_k = \frac{1}{2n+1}$ pour tout $k \in [\![0,2n]\!]$. On a donc en particulier $a_0 b_0 = a_n b_n = \frac{1}{2n+1}$. Puisque $n \geqslant 1$

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j \geqslant a_0 b_n + a_n b_0$$

(la somme comporte au moins ces deux termes). Ainsi

$$\frac{1}{2n+1} \geqslant a_0 b_n + a_n b_0$$

En vertu des égalités $a_0 b_0 = a_n b_n = \frac{1}{2n+1}$, les réels a_0, a_n, b_0, b_n sont non nuls et même strictement positifs puisqu'il s'agit de probabilités. On peut donc affirmer que $a_0 b_n + a_n b_0$ est strictement supérieur à $a_0 b_n$ et $a_n b_0$. On a donc $0 \leqslant a_0 b_n < \frac{1}{2n+1}$ et $0 \leqslant a_n b_0 < \frac{1}{2n+1}$. Il s'ensuit que

$$(a_0 b_n)(a_n b_0) < \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Or $(a_0 b_n)(a_n b_0) = (a_0 b_0)(a_n b_n) = \frac{1}{(2n+1)^2}$ d'où une contradiction.
Il n'existe donc pas deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ dont la somme suit une loi uniforme sur $[\![0,2n]\!]$.

Solution 91.

Remarquons tout d'abord que X+Y est à valeurs dans $[\![2,n]\!]$ tandis que Z est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. Puisque X+Y et Z sont indépendantes,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=\mathrm{Z}) = \sum_{k=2}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=k, \mathrm{Z}=k) = \sum_{k=2}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=k)\mathrm{P}(\mathrm{Z}=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=k)$$

De plus, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=k) = \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{P}(\mathrm{X}=j, \mathrm{Y}=k-j) = \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{P}(\mathrm{X}=j)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k-j) = \frac{k-1}{n^2}$$

Ainsi

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=\mathrm{Z}) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n} k-1 = \frac{n-1}{2n^2}$$

Solution 92.

1. X est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \sum_{l=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k, \mathrm{Y}=l) = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi X suit la loi $\mathscr{U}\left([\![0,n]\!]\right)$.
On démontre de même que Y suit la loi $\mathscr{U}\left([\![0,n]\!]\right)$.
$\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ est à valeurs dans $[\![0,2n]\!]$. Soit $k \in [\![0,2n]\!]$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=k) = \sum_{l=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}=l, \mathrm{Y}=k-l)$$

Si $k \leqslant n$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=k)=\sum_{l=0}^{k}\mathrm{P}(\mathrm{X}=l,\mathrm{Y}=k-l)=\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{k+1}{(n+1)^2}$$

Si $k \geqslant n$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=k)=\sum_{l=k-n}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{X}=l,\mathrm{Y}=k-l)=\sum_{l=k-n}^{n}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{2n-k+1}{(n+1)^2}$$

De manière générale, pour tout $k \in [\![0,2n]\!]$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=k)=\frac{(n+1)-|k-n|}{(n+1)^2}$$

2. Les variables X et Y sont indépendantes puisque pour tout $(k,l) \in [\![0,n]\!]^2$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k,\mathrm{Y}=l)=\frac{1}{(n+1)^2}=\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=l)$$

Solution 93.

On calcule dans un premier temps $\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})$. L'événement $\mathrm{X}=\mathrm{Y}$ est la réunion disjointes des événements $(\mathrm{X}=k)\cap(\mathrm{Y}=k)$ pour k décrivant $[\![1,n]\!]$. On en déduit que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}([\mathrm{X}=k]\cap[\mathrm{Y}=k])$$

Or les variables aléatoires X et Y sont indépendantes donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}$$

On en déduit que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\neq\mathrm{Y})=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})=1-\frac{1}{n}$$

Solution 94.

Via la formule de transfert,

$$\mu_r=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)(k-np)^r$$

Puisque pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la série $\sum_{r\in\mathbb{N}}\frac{(k-np)^r x^r}{r!}$ converge (série exponentielle), il en est de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\mu_r x^r}{r!}$ et, de plus,

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\mu_r x^r}{r!}&=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{(k-np)^r x^r}{r!}\\&=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)e^{(k-np)x}\\&=e^{-npx}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k e^{kx}(1-p)^{n-k}\\&=e^{-npx}\left(pe^x+1-p\right)^n=\left[pe^{(1-p)x}+(1-p)e^{-px}\right]^n\end{aligned}$$

Solution 95.

1. D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \mathbb{P}(\mathrm{A}_{n+1}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}_{n+1}|\mathrm{A}_n)\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) + \mathbb{P}(\mathrm{A}_{n+1}|\mathrm{B}_n)\mathrm{P}(\mathrm{B}_n) + \mathbb{P}(\mathrm{A}_{n+1}|\mathrm{C}_n)\mathrm{P}(\mathrm{C}_n)\\
&= 0\times a_n + \frac{3}{4}\times b_n + 0\times c_n = \frac{3}{4}b_n\\
b_{n+1} &= \mathbb{P}(\mathrm{B}_{n+1}) = \mathbb{P}(\mathrm{B}_{n+1}|\mathrm{A}_n)\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) + \mathbb{P}(\mathrm{B}_{n+1}|\mathrm{B}_n)\mathrm{P}(\mathrm{B}_n) + \mathbb{P}(\mathrm{B}_{n+1}|\mathrm{C}_n)\mathrm{P}(\mathrm{C}_n)\\
&= \frac{3}{4}\times a_n + 0\times b_n + 1\times c_n = \frac{3}{4}a_n + c_n\\
c_{n+1} &= \mathbb{P}(\mathrm{C}_{n+1}) = \mathbb{P}(\mathrm{C}_{n+1}|\mathrm{A}_n)\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) + \mathbb{P}(\mathrm{C}_{n+1}|\mathrm{B}_n)\mathrm{P}(\mathrm{B}_n) + \mathbb{P}(\mathrm{C}_{n+1}|\mathrm{C}_n)\mathrm{P}(\mathrm{C}_n)\\
&= \frac{1}{4}\times a_n + \frac{1}{4}\times b_n + 0\times c_n = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n
\end{aligned}$$

2. Il suffit de choisir $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0\\ \frac{3}{4} & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}$.

3. On trouve

$$\mathrm{P}(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{13}{16}\mathrm{X} + \frac{3}{16} = -(\lambda-1)\left(\lambda+\frac{1}{4}\right)\left(\lambda+\frac{3}{4}\right)$$

On peut donc choisir $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$ et $\lambda_3 = -\frac{3}{4}$.

4. On cherche donc une matrice non nulle dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}-\lambda_k\mathrm{I}_3)$ pour chaque $k\in\{1,2,3\}$.

$\mathrm{M}-\lambda_1\mathrm{I}_1 = \mathrm{M}-\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & -1 & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ donc $\mathrm{U}_1 = \begin{pmatrix}12\\16\\7\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M}-\lambda_1\mathrm{I}_3)$.

$\mathrm{M}-\lambda_2\mathrm{I}_3 = \mathrm{M}+\frac{1}{4}\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ donc $\mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M}-\lambda_2\mathrm{I}_3)$.

$\mathrm{M}-\lambda_2\mathrm{I}_3 = \mathrm{M}+\frac{1}{4}\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$ donc $\mathrm{U}_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M}-\lambda_3\mathrm{I}_3)$.

5. Soit P la matrice $(\mathrm{U}_1|\mathrm{U}_2|\mathrm{U}_3)$. Les trois relations $\mathrm{MU}_k = \lambda_k\mathrm{U}_k$ pour $k\in\{1,2,3\}$ peuvent s'écrire matriciellement $\mathrm{MP} = \mathrm{PD}$ avec la matrice P définie à la question précédente et $\mathrm{D} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$. Puisque $\det(\mathrm{P}) = -70 \neq 0$, P est inversible de sorte que $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$.

6. Une récurrence évidente montre que $\mathrm{M}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Or

$$\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^n & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^n & 0\\ 0 & 0 & \left(-\frac{3}{4}\right)^n\end{pmatrix}$$

Par pivot de Gauss, on obtient

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{35} & \frac{1}{35} & \frac{1}{35}\\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{2}{5}\\ \frac{5}{14} & -\frac{9}{14} & \frac{6}{7}\end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\mathrm{M}^n = \begin{pmatrix}
\frac{12}{35}+\frac{3}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\frac{5}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n & \frac{12}{35}+\frac{3}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n-\frac{9}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n & \frac{12}{35}-\frac{6}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\frac{6}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^n\\
\frac{16}{35}-\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n-\frac{5}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n & \frac{16}{35}-\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\frac{9}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n & \frac{16}{35}+\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n-\frac{6}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^n\\
\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n & \frac{1}{5}-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n & \frac{1}{5}+\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n
\end{pmatrix}$$

Puisque $X_n = M^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(\frac{12}{35} + \frac{3}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{5}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right)a_0 + \left(\frac{12}{35} + \frac{3}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{9}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right)b_0 + \left(\frac{12}{35} - \frac{6}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{6}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right)c_0\\
b_n &= \left(\frac{16}{35} - \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{5}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right)a_0 + \left(\frac{16}{35} - \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{9}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right)b_0 + \left(\frac{16}{35} + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{6}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right)c_0\\
c_n &= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)a_0 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)b_0 + \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)c_0
\end{aligned}$$

7. Puisque $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$ et $\left|-\frac{3}{4}\right| < 1$ et que $a_0 + b_0 + c_0 = 1$, les suites (a_n), (b_n), (c_n) convergent respectivement vers $\frac{12}{35}$, $\frac{16}{35}$ et $\frac{1}{5}$.

Solution 96.

1. On a évidemment

$$p_0 = 1 \qquad q_0 = 0 \qquad r_0 = 0 \qquad p_1 = 0 \qquad q_1 = 1 \qquad r_1 = 0$$

2. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= P(X_{n+1} = 0) = P(X_{n+1} = 0|X_n = 0)P(X_n = 0) + P(X_{n+1} = 0|X_n = 1)P(X_n = 1) + P(X_{n+1} = 0|X_n = 2)P(X_n = 2)\\
&= 0 \times p_n + \frac{1}{4} \times q_n + 0 \times r_n = \frac{1}{4}q_n\\
q_{n+1} &= P(X_{n+1} = 1) = P(X_{n+1} = 1|X_n = 0)P(X_n = 0) + P(X_{n+1} = 1|X_n = 1)P(X_n = 1) + P(X_{n+1} = 1|X_n = 2)P(X_n = 2)\\
&= 1 \times p_n + \frac{1}{2} \times q_n + 1 \times r_n = p_n + \frac{1}{2}q_n + r_n\\
r_{n+1} &= P(X_{n+1} = 2) = P(X_{n+1} = 2|X_n = 0)P(X_n = 0) + P(X_{n+1} = 2|X_n = 1)P(X_n = 1) + P(X_{n+1} = 2|X_n = 2)P(X_n = 2)\\
&= 0 \times p_n + \frac{1}{4} \times q_n + 0 \times r_n = \frac{1}{4}q_n
\end{aligned}$$

3. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$q_{n+2} = p_{n+1} + \frac{1}{2}q_{n+1} + r_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{4}q_n = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n$$

4. L'équation caractéristique liée à la relation de récurrence linéaire $q_{n+2} - \frac{1}{2}q_{n+1} - \frac{1}{2}q_n = 0$ est $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} = 0$ dont les racines sont $-\frac{1}{2}$ et 1. Il s'ensuit qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Les conditions initiales $q_0 = 0$ et $q_1 = 1$ fournissent $\lambda = \frac{2}{3}$ et $\mu = -\frac{2}{3}$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$q_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ $p_{n+1} = r_{n+1} = \frac{1}{4}q_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = r_n = \frac{1}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

De plus, on a vu que $p_0 = 1$ et que $r_0 = 0$.

5. Puisque $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n\to+\infty} q_n = \frac{2}{3}$ et $\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1}{6}$.

Solution 97.

1. **Première méthode :**
Soit $(k,l)\in[\![1,n]\!]^2$. Si $k\geqslant l$, $P(X=k,Z=l)=0$. Par contre, si $k<l$,

$$\begin{aligned}P(X=k,Z=l)&=\underbrace{\frac{n-2}{n}}_{1^{\text{er}}\text{ tirage}}\times\underbrace{\frac{n-3}{n-1}}_{2^{\text{e}}\text{ tirage}}\times\cdots\times\underbrace{\frac{n-k}{n-k+2}}_{(k-1)^{\text{e}}\text{ tirage}}\times\underbrace{\frac{2}{n-k+1}}_{k^{\text{e}}\text{ tirage}}\times\underbrace{\frac{n-k-1}{n-k}}_{(k+1)^{\text{e}}\text{ tirage}}\cdots\times\underbrace{\frac{n-l+1}{n-l+2}}_{(l-1)^{\text{e}}\text{ tirage}}\times\underbrace{\frac{1}{n-l+1}}_{l^{\text{e}}\text{ tirage}}\\&=\frac{2}{n(n-1)}\end{aligned}$$

Seconde méthode :
L'univers Ω est l'ensemble des permutations des n boules de sorte que $\operatorname{card}\Omega=n!$.
Soit $(k,l)\in[\![1,n]\!]^2$. Si $k\geqslant l$, $[X=k]\cap[Y=l]$ est impossible donc $P(X=k,Z=l)=0$. Supposons maintenant $k<l$. Se donner une issue de $[X=k]\cap[Y=l]$ revient à se donner une permutation des 2 boules rouges et une permutation des $n-2$ boules rouges. Ainsicard$([X=k]\cap[Y=l])=2!(n-2)!$. Finalement

$$P(X=k,Z=l)=\frac{2!(n-2)!}{n!}=\frac{2}{n(n-1)}$$

2. Soit $l\in[\![1,n]\!]$.

$$P(Z=l)=\sum_{k=1}^{l-1}P(X=k,Z=l)=\frac{2(l-1)}{n(n-1)}$$

Solution 98.

1. La relation est évidente si $a=b$. Supposons maintenant $a+1\leqslant b$. On utilise la relation du triangle de Pascal.

$$\begin{aligned}\sum_{k=a}^{b}\binom{k}{a}&=1+\sum_{k=a+1}^{n}\binom{k}{a}\\&=1+\sum_{k=a+1}^{b}\binom{k+1}{a+1}-\binom{k}{a+1}&&=1+\binom{b+1}{a+1}-\binom{a+1}{a+1}=\binom{b+1}{a+1}\end{aligned}$$

2. Si on note Ω l'univers de l'expérience aléatoire, alors $\operatorname{card}(\Omega)=\binom{N}{n}$.
X est à valeurs dans $[\![n,N]\!]$. Soit donc $k\in[\![n,N]\!]$. Choisir n boules dont le plus grand numéro est k revient à choisir $n-1$ boules parmi celles numérotées de 1 à $k-1$. Ainsi $\operatorname{card}(X=k)=\binom{k-1}{n-1}$ puis $P(X=k)=\frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$.
Y est à valeurs dans $[\![1,N-n+1]\!]$. Soit donc $k\in[\![1,N-n+1]\!]$. Choisir n boules dont le plus petit numéro est k revient à choisir $n-1$ boules parmi celles numérotées de $k+1$ à N. Ainsi $\operatorname{card}(Y=k)=\binom{N-k}{n-1}$ puis $P(Y=k)=\frac{\binom{N-k}{n-1}}{\binom{N}{n}}$.

3. (X,Y) est à valeurs dans $\left\{(i,j)\in[\![1,N]\!]^2,\ i-j\geqslant n-1\right\}$. Soit donc (i,j) dans cet ensemble.
Choisir n boules dont le plus grand numéro est i et le plus petit j revient à choisir $n-2$ boules parmi celles numérotées de $j+1$ à $i-1$. Ainsi $\operatorname{card}([X=i]\cap[y=j])=\binom{i-j-1}{n-2}$ puis $P(X=i,Y=j)=\frac{\binom{i-j-1}{n-2}}{\binom{N}{n}}$.
Remarquons que $X-Y$ est à valeurs dans $[\![n-1,N-1]\!]$. Soit $k\in[\![n-1,N-1]\!]$. Alors

$$P(X-Y=k)=\sum_{j=1}^{N-k}P(X-Y=k,Y=j)=\sum_{j=1}^{N-k}P(X=j+k,Y=j)=\frac{(N-k)\binom{k-1}{n-2}}{\binom{N}{n}}$$

4. Tout d'abord

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} k\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) \\
&= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} k\binom{k-1}{n-1} \\
&= \frac{n}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \binom{k}{n} \\
&= \frac{n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1}}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \\
&= \frac{n(\mathrm{N}+1)}{n+1}
\end{aligned}$$

Pour le calcul de l'espérance de Y, on peut remarquer que $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{N}+1-k)$ pour tout $k \in [\![1, \mathrm{N}-n+1]\!]$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{Y}) &= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-n+1} k\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k) \\
&= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-n+1} k\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{N}+1-k) \\
&= \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} (\mathrm{N}+1-k)\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) \\
&= (\mathrm{N}+1)\sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) - \mathrm{E}(\mathrm{X}) \\
&= \mathrm{N}+1-\frac{n(\mathrm{N}+1)}{n+1} = \frac{\mathrm{N}+1}{n+1}
\end{aligned}$$

5. Tout d'abord

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) &= \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} k^2\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) \\
\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) &= \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} [k(k+1)-k]\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) \\
&= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} k(k+1)\binom{k-1}{n-1} - \mathrm{E}(\mathrm{X}) \\
&= \frac{n(n+1)}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \binom{k+1}{n+1} - \frac{n(\mathrm{N}+1)}{n+1} \\
&= \frac{n(n+1)}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}+1} \binom{k}{n+1} - \frac{n(\mathrm{N}+1)}{n+1} \\
&= \frac{n(n+1)}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \binom{\mathrm{N}+2}{n+2} - \frac{n(\mathrm{N}+1)}{n+1} \\
&= \frac{n(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}+2)}{n+2} - \frac{n(\mathrm{N}+1)}{n+1} \\
&= \frac{(\mathrm{N}n+n+\mathrm{N})(\mathrm{N}+1)n}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Enfin

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2)-\mathrm{E}(\mathrm{X})^2 = \frac{(\mathrm{N}n+n+\mathrm{N})(\mathrm{N}+1)n}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{n(\mathrm{N}+1)}{n+1}\right)^2 = \frac{n(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}-n)}{(n+2)(n+1)^2}$$

En remarquant que $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{N}+1-k)$ pour tout $k\in[\![1,\mathrm{N}-n+1]\!]$ et que $\mathrm{E}(\mathrm{Y})=\mathrm{N}+1-\mathrm{E}(\mathrm{X})$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\mathrm{Y})&=\mathrm{E}(\mathrm{Y}-\mathrm{E}(\mathrm{Y})^2)\\&=\sum_{k=1}^{\mathrm{N}-n+1}(k-\mathrm{E}(\mathrm{Y}))^2\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)\\&=\sum_{k=1}^{\mathrm{N}-n+1}(k-(\mathrm{N}+1)+\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{N}+1-k)\\&=\sum_{k=n}^{\mathrm{N}}(\mathrm{E}(\mathrm{X})-k)^2\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\\&=\mathrm{V}(\mathrm{X})=\frac{(\mathrm{N}n+n+\mathrm{N})(\mathrm{N}+1)n}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

6. Tout d'abord

$$\begin{aligned}\mathrm{E}((\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2)&=\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1}k^2\mathrm{P}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}=k)\\&=\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1}\frac{k^2(\mathrm{N}-k)\binom{k-1}{n-2}}{\binom{\mathrm{N}}{n}}\\&=\frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}}\left(\mathrm{N}\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1}k^2\binom{k-1}{n-2}-\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1}k^3\binom{k-1}{n-2}\right)\end{aligned}$$

Posons $\mathrm{S}_m=\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1}k^m\binom{k-1}{n-2}$. On trouve successivement

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_1&=\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1}k\binom{k-1}{n-2}\\&=(n-1)\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1}\binom{k}{n-1}\\&=(n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_2&=\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1}k^2\binom{k-1}{n-2}\\&=\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1}k(k+1)\binom{k-1}{n-2}-\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1}k\binom{k-1}{n-2}\\&=(n-1)n\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1}\binom{k+1}{n}-\mathrm{S}_1\\&=(n-1)n\sum_{k=n}^{\mathrm{N}}\binom{k}{n}-(n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}\\&=(n-1)n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1}-(n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{k=n-1}^{N-1} k^3\binom{k-1}{n-2}\\
&= \sum_{k=n-1}^{N-1} k(k+1)(k+2)\binom{k-1}{n-2} - 3S_2 - 2S_1\\
&= (n-1)n(n+1)\sum_{k=n-1}^{N-1}\binom{k+2}{n+1} - 3\left((n-1)n\binom{N+1}{n+1} - (n-1)\binom{N}{n}\right) - 2(n-1)\binom{N}{n}\\
&= (n-1)n(n+1)\sum_{k=n+1}^{N+1}\binom{k}{n+1} - 3(n-1)n\binom{N+1}{n+1} + (n-1)\binom{N}{n}\\
&= (n-1)n(n+1)\binom{N+2}{n+2} - 3(n-1)n\binom{N+1}{n+1} + (n-1)\binom{N}{n}
\end{aligned}$$

Il vient enfin

$$\begin{aligned}
E((X-Y)^2) &= \frac{1}{\binom{N}{n}}(NS_2 - S_3)\\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}}\left(N(n-1)n\binom{N+1}{n+1} - N(n-1)\binom{N}{n} - (n-1)n(n+1)\binom{N+2}{n+2} + 3(n-1)n\binom{N+1}{n+1} - (n-1)\binom{N}{n}\right)\\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}}\left((n-1)n(N+3)\binom{N+1}{n+1} - (n-1)(N+1)\binom{N}{n} - (n-1)n(n+1)\binom{N+2}{n+2}\right)\\
&= \frac{(n-1)n(N+3)(N+1)}{n+1} - (n-1)(N+1) - \frac{(n-1)n(N+2)(N+1)}{n+2}\\
&= \frac{(n-1)(N+1)(nN+n-2)}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
V(X-Y) &= E((X-Y)^2) - E(X-Y)^2\\
&= \frac{(n-1)(N+1)(nN+n-2)}{(n+1)(n+2)} - (E(X)-E(Y))^2\\
&= \frac{(n-1)(N+1)(nN+n-2)}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{n(N+1)}{n+1} - \frac{N+1}{n+1}\right)^2\\
&= \frac{2(n-1)(N+1)(N-n)}{(n+1)^2(n+2)}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{2}(V(X)+V(Y)-V(X-Y))\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2(Nn+n+N)(N+1)n}{(n+1)(n+2)} - \frac{2(n-1)(N+1)(N-n)}{(n+1)^2(n+2)}\right)\\
&= \frac{n(n+1)(N+1)(Nn+n+N) - (n-1)(N+1)(N-n)}{(n+1)^2(n+2)}\\
&= \frac{(N+1)(2n^2N+n^3N+2n^2+n^3+N-n)}{(n+1)^2(n+2)}
\end{aligned}$$

Solution 99.

Y_1 et Y_2 sont à valeurs dans F. Soit $y \in F$.

$$\begin{aligned}
P(Y_1 = y) &= E(\mathbb{1}_{Y_1=y}) \\
&= \sum_{(x_1,x_2)\in E^2} \delta_{y,f(x_1,x_2)} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) && \text{par formule de transfert} \\
&= \sum_{(x_1,x_2)\in E^2} \delta_{y,f(x_1,x_2)} P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2) && \text{par indépendance de } (X_1,X_2) \\
&= \sum_{(x_1,x_2)\in E^2} \delta_{y,f(x_2,x_1)} P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2) \\
&= \sum_{(x_2,x_1)\in E^2} \delta_{y,f(x_1,x_2)} P(X_1 = x_2)P(X_2 = x_1) && \text{car } (x_1,x_2) \mapsto (x_2,x_1) \text{ est une involution de } E^2 \\
&= \sum_{(x_2,x_1)\in E^2} \delta_{y,f(x_1,x_2)} P(X_2 = x_1, X_1 = x_2) && \text{par indépendance de } (X_1,X_2) \\
&= E(\mathbb{1}_{Y_2=y}) && \text{par formule de transfert} \\
&= P(Y_2 = y)
\end{aligned}$$

Ceci prouve que Y_1 et Y_2 ont même loi.

Solution 100.

1. **a.** Puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $(X = n)_{n\in\mathbb{N}}$ est us système complet d'événements de sorte que

$$G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$$

b.

$$G'_X = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n)X^{n-1}$$

donc

$$G'_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) = E(X)$$

c.

$$G''_X = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X = n)X^{n-2}$$

donc

$$G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X = n) + \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) - E(X)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P(X = n) - E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2 = V(X)$$

2.

$$
\begin{aligned}
G_X G_Y &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k)\right)X^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n-k)\right)X^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X+Y=n, X=k)\right)X^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(X+Y=n, X=k)\right)X^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X+Y=n)X^n \\
&= G_{X+Y}
\end{aligned}
$$

3.

$$G_X = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}X^k = (pX+1-p)^n$$

On en déduit

$$G'_X = np(pX+1-p)^{n-1} \qquad G''_X = n(n-1)p^2(pX+1-p)^{n-2}$$

donc

$$E(X) = G'_X(1) = np \qquad V(X) = G''_X(1)+G'_X(1)-G'_X(1)^2 = n(n-1)p^2+np-n^2p^2 = np-np^2 = np(1-p)$$

Solution 101.

1. D'après la formule de transfert

$$E(Z) = \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} |i-j|P(X=i, Y=j)$$

Mais les variables X et Y étant indépendantes,

$$E(Z) = \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} |i-j|P(X=i)P(Y=j) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} |i-j|$$

On peut alors découper la somme double

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{Z}) &= \frac{1}{(n+1)^2}\left(\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}|i-j| + \sum_{0\leqslant j<i\leqslant n}|i-j| + \sum_{k=0}^{n}|k-k|\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} j-i\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} j - \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} i\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1} j - \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} i\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)i\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\sum_{j=0}^{n} j^2 - \sum_{i=0}^{n}(n-i)i\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(2\sum_{k=0}^{n} k^2 - n\sum_{k=0}^{n} k\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n^2(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{2n}{n+1}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n}{2}\right)\\
&= \frac{n(n+2)}{3(n+1)}
\end{aligned}$$

2. On remarque que

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}-\mathrm{Z})$$

donc par linéarité de l'espérance

$$\mathrm{E}(\mathrm{T}) = \frac{1}{2}(\mathrm{E}(\mathrm{X})+\mathrm{E}(\mathrm{Y})-\mathrm{E}(\mathrm{Z})) = \frac{1}{2}\left(n - \frac{n(n+2)}{3(n+1)}\right) = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)}$$

3. Puisque $\mathrm{Z}^2 = \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - 2\mathrm{XY}$, on obtient par linéarité de l'espérance

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}^2) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) + \mathrm{E}(\mathrm{Y}^2) - 2\mathrm{E}(\mathrm{XY})$$

Mais les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, $\mathrm{E}(\mathrm{XY}) = \mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})$. Puisqu'elles sont de même loi

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}^2) = 2\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - 2\mathrm{E}(\mathrm{X})^2 = 2\mathrm{V}(\mathrm{X})$$

Remarque. On peut montrer que

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \frac{n(n+2)}{12}$$

■

Solution 102.

D'après la formule de transfert,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\
&= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

Solution 103.

D'après la formule de transfert

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \sum_{0 \leqslant k, l \leqslant n} \frac{1}{k+l+1} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k, \mathrm{Y}=l)$$

X et Y étant indépendantes

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \sum_{0 \leqslant k, l \leqslant n} \frac{1}{k+l+1} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=l) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{0 \leqslant k, l \leqslant n} \frac{1}{k+l+1} \binom{n}{k}\binom{n}{l}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, posons

$$f(t) = \sum_{0 \leqslant k, l \leqslant n} \frac{1}{k+l+1} \binom{n}{k}\binom{n}{l} t^{k+l+1}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = \sum_{0 \leqslant k, l \leqslant n} \binom{n}{k}\binom{n}{l} t^{k+l} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k\right)^2 = (1+t)^{2n}$$

Puisque $f(0) = 0$, on a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{2n+1}\left((1+t)^{2n+1} - 1\right)$$

On en déduit

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \frac{f(1)}{2^{2n}} = \frac{1}{2n+1}\left(2 - \frac{1}{2^{2n}}\right)$$

Solution 104.

D'après la formule de transfert

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \sum_{0 \leqslant k, l \leqslant n} \frac{1}{k+l+1} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k, \mathrm{Y}=l)$$

X et Y étant indépendantes

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \sum_{0 \leqslant k, l \leqslant n} \frac{1}{k+l+1} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=l) = \sum_{0 \leqslant k, l \leqslant n} \frac{1}{k+l+1} \binom{n}{k}\binom{n}{l} p^{k+l}(1-p)^{2n-k-l}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, posons

$$f(t) = \sum_{0 \leqslant k, l \leqslant n} \frac{1}{k+l+1} \binom{n}{k}\binom{n}{l} p^{k+l}(1-p)^{2n-k-l} t^{k+l+1}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = \sum_{0 \leqslant k,l \leqslant n} \binom{n}{k}\binom{n}{l} p^{k+l}(1-p)^{2n-k-l}\, t^{k+l} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\, t^k\right)^2 = (pt+1-p)^{2n}$$

Puisque $f(0)=0$, on a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{(2n+1)p}\left((pt+1-p)^{2n+1} - (1-p)^{2n+1}\right)$$

On en déduit

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = f(1) = \frac{1}{(2n+1)p}\left(1-(1-p)^{2n+1}\right)$$

Solution 105.

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, notons X_k la variable aléatoire valant 1 si la boule numéro k a été tirée lors des n tirages et 0 sinon. Chaque X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$. Puisque $\mathrm{X} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$, on obtient par linéarité de l'espérance

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(\mathrm{X}_k) = n\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right)$$

On montre classiquement que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$. Ainsi $\mathrm{E}(\mathrm{X}) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

Solution 106.

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire qui à une permutation associe 1 si k est un point fixe et 0 sinon. On a donc $\mathrm{X} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$. On détermine ensuite la loi de X_k par dénombrement. Le nombre de permutations fixant k est $(n-1)!$ et comme la probabilité sur S_n est uniforme, $\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Ainsi X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$ de sorte que $\mathbb{E}(\mathrm{X}_k) = \frac{1}{n}$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} \delta(\mathrm{X}_k) = 1$$

Pour le calcul de la variance, il faut prendre garde au fait que les variables aléatoires X_k ne sont pas indépendantes. Néanmoins

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k, \sum_{l=1}^{n} \mathrm{X}_l\right) = \sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} \mathrm{Cov}(\mathrm{X}_k, \mathrm{X}_l) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(\mathrm{X}_k) + \sum_{1 \leqslant k \neq l \leqslant n} \mathrm{Cov}(\mathrm{X}_k, \mathrm{X}_l)$$

Puisque les X_k sont des variables aléatoires de Bernoulli, $\mathbb{V}(\mathrm{X}_k) = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ et pour $k \neq l$,

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_k, \mathrm{X}_l) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_k \mathrm{X}_l) - \mathbb{E}(\mathrm{X}_k)\mathbb{E}(\mathrm{X}_l) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1, \mathrm{X}_l = 1) - \frac{1}{n}^{2}$$

A nouveau, on calcule $\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1, \mathrm{X}_l = 1)$ par dénombrement. Le nombre de permutations pour lesquelles k et l sont fixes est $(n-2)!$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1, \mathrm{X}_l = 1) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$. Ainsi $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_k, \mathrm{X}_l) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$. Finalement,

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \sum_{1 \leqslant k \neq l \leqslant n} \frac{1}{n^2(n-1)} = 1 - \frac{1}{n} + n(n-1)\frac{1}{n^2(n-1)} = 1$$

car $\mathrm{card}\left(\left\{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ k \neq l\right\}\right) = n(n-1)$.

Solution 107.

Par stricte croissance de g, les événement $|X| \geqslant a$ et $g(|X|) \geqslant g(a)$ sont identiques et ont donc même probabilité. D'après l'inégalité de Markov, $P\left(g(|X| \geqslant a\right) \leqslant \frac{E(g(|X|)}{g(a)}$ ce qui permet de conclure.

SOLUTION 108.

Notons F la variable aléatoire qui désigne le nombre de «faces» obtenus avec n lancers. Alors $F \sim \mathscr{B}(n,p)$ avec $p = 1/2$. Donc $E(F) = np = n/2$ et $V(F) = np(1-p) = n/4$.
Notons $X = F/n$ la fréquence des «faces» parmi les n lancers.

$$E(X) = E\left(\frac{F}{n}\right) = \frac{E(F)}{n} = \frac{1}{2},$$
$$V(X) = V\left(\frac{F}{n}\right) = \frac{V(F)}{n^2} = \frac{1}{4n}.$$

D'après l'inégalité de Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Dans notre cas,

$$P(|X - 0,5| > \epsilon) \leqslant \frac{1}{4n\epsilon^2}$$

Par passage au contraire cela s'écrit

$$1 - P(|X - 0,5| \leqslant \epsilon) \leqslant \frac{1}{4n\epsilon^2}$$

ou encore

$$P(|X - 0,5| \leqslant \epsilon) \geqslant 1 - \frac{1}{4n\epsilon^2}$$

En prenant $\varepsilon = 0,05$, on a donc

$$P(0,45 \leqslant X \leqslant 0,55) \geqslant 1 - \frac{100}{n}$$

En prenant $n = 1000$, on a alors bien

$$P(0,45 \leqslant X \leqslant 0,55) \geqslant 0,9$$

SOLUTION 109.

1. $\mathbb{1}_C$ est une variable aléatoire de Bernoulli donc $V(\mathbb{1}_C) = P(\mathbb{1}_C = 1)(1 - P(\mathbb{1}_C = 1)) = P(C)(1 - P(C))$. La fonction $x \mapsto x(1-x)$ admet pour maximum $\frac{1}{4}$ sur $[0,1]$ (atteint en $\frac{1}{2}$). Ainsi $V(\mathbb{1}_C) \leqslant \frac{1}{4}$.

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$|\operatorname{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)| \leqslant \sqrt{V(\mathbb{1}_A)}\sqrt{V(\mathbb{1}_B)} \leqslant \frac{1}{4}$$

3. Tout d'abord,
$$\operatorname{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = E(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B) - E(\mathbb{1}_A)E(\mathbb{1}_B) = E(\mathbb{1}_{A \cap B}) - E(\mathbb{1}_A)E(\mathbb{1}_B) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$$
On en déduit l'inégalité voulue.
Supposons que l'on ait égalité. Alors $V(\mathbb{1}_A) = V(\mathbb{1}_B) = \frac{1}{4}$ et donc $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Il s'ensuit que $P(A \cap B) = 0$ ou $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$.
Réciproquement, si $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = 0$ ou $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$, on a bien égalité.

REMARQUE. Si le seul événement de probabilité nulle est $\varnothing$, on peut montrer que la condition d'égalité équivaut à $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ et $A = B$ ou $A = \overline{B}$. ■