

DEVOIR À LA MAISON N°07

- ▶ Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- ▶ Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- ▶ Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 —

On note \mathcal{E} l'ensemble des fonctions f continues sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

1. Soit $f \in \mathcal{E}$.
 - a. Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
 - b. Démontrer que la fonction f est impaire.
2. On suppose que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .
 - a. Montrer que f est solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle $xy' - y = kx$ où k est une constante dépendant de f que l'on précisera.
 - b. En déduire $f(x)$ en fonction de k pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. On note φ l'unique élément de \mathcal{E} dérivable sur \mathbb{R}_+^* vérifiant $\varphi'(1) = 1$.
 - a. φ est-elle dérivable en 0 ?
 - b. Déterminer les variations et les limites de φ en $+\infty$ et $-\infty$ puis tracer son graphe.
4. On considère $f \in \mathcal{E}$ que l'on suppose seulement continue sur \mathbb{R} . On note alors F l'unique primitive de f s'annulant en 0.
 - a. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(xy) = x^2F(y) + \frac{xy^2}{2}f(x)$.
 - b. En déduire que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .
 - c. Déterminer l'ensemble \mathcal{E} .

EXERCICE 1.

Toutes les fonctions entrant en jeu dans cet exercice sont à valeurs réelles.

1. On souhaite résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \cos(t)z''(t) - 2\sin(t)z'(t) - \cos(t)z(t) = 0$$

- a. Soit z une fonction deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $\varphi(t) = \cos(t)z(t)$ pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Exprimer $\varphi''(t)$ en fonction de $z(t)$, $z'(t)$ et $z''(t)$ pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- b. En déduire les solutions de (E).

2. On souhaite maintenant résoudre sur $] -1, 1[$ l'équation différentielle suivante :

$$(F) : (1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$$

a. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $] -1, 1[$. On pose $z(t) = y(\sin(t))$ pour $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Exprimer $y(x)$, $y'(x)$ et $y''(x)$ en fonction de $z(\arcsin x)$, $z'(\arcsin x)$ et $z''(\arcsin x)$ pour tout $x \in] -1, 1[$.

b. En déduire que y est solution de (F) sur $] -1, 1[$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle que l'on précisera. En déduire les solutions de (F).

3. Soit f une solution de (F) sur $] -1, 1[$.

a. Montrer par récurrence que f est de classe \mathcal{C}^∞ .

b. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in] -1, 1[, (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+1)}(x) - (n+1)^2f^{(n)}(x) = 0$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$. Déterminer une relation de récurrence entre a_{n+2} et a_n à l'aide de la question précédente.

d. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$a_{2p} = \frac{((2p)!)^2}{2^{2p}(p!)^2} a_0 \qquad a_{2p+1} = 2^{2p}(p!)^2 a_1$$

4. On se propose de déterminer plusieurs développements limités à l'aide de la question 3.

a. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ . Rappeler la formule de Taylor-Young appliquée à f en 0 à un ordre $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $g : x \in] -1, 1[\mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. Que valent $g(0)$ et $g'(0)$? En remarquant que g est solution de (F), donner le développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de g .

c. Soit $h : x \in] -1, 1[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Que valent $h(0)$ et $h'(0)$? En remarquant que h est solution de (F), donner le développement limité à l'ordre $2n$ en 0 de h .

d. Soit $k : x \in] -1, 1[\mapsto \arcsin x$. Déduire de la question 4.c le développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de k .

5. En remarquant que $g = hk$ et en considérant le coefficient de x^{2n+1} dans le développement limité de cette fonction, montrer que

$$\sum_{p=0}^n \frac{1}{2p+1} \binom{2p}{p} \binom{2(n-p)}{n-p} = \frac{2^{4n}}{(n+1) \binom{2n+1}{n}}$$