

Suites

Exercice 1 ★★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note (E_n) l'équation $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$.

1. Montrer qu'il existe des suites (u_n) et (v_n) telles que, pour n assez grand, u_n et v_n vérifient (E_n) et $0 < u_n < e < v_n$.
2. Montrer que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite
3. Trouver un équivalent de $u_n - \ell$.

Exercice 2

ENSEA

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\cos x = nx$ possède une unique solution $x_n \in [0, 1]$.
2. Déterminer la limite de (x_n) .
3. Etudier la monotonie de (x_n) .
4. Etablir que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
5. Déterminer un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$.

Exercice 3

CCINP (ou CCP) PC 2014

Montrer que $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2} - \sin \left(\frac{k}{n^2} \right) \right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

En déduire la limite de $\sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n^2} \right)$ quand n tend vers $+\infty$.

Polynômes

Exercice 4 ★★

Petites Mines

On cherche les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ de la forme $(X - a)(X - b)$ tels que P divise $P(X^3)$.

1. Déterminer les polynômes P dans le cas où $a = b$.
2. Montrer que si $a \neq b$ et $a^3 \neq b^3$, il existe 6 tels polynômes P dont 4 dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Déterminer les polynômes P dans le cas où $a \neq b$ et $a^3 = b^3$.
4. En déduire que 13 polynômes en tout conviennent dont 7 dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5 ★★

Banque CCP

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposez en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme :

$$P = X^{2n} - 2X^n \cos(n\theta) + 1$$

Exercice 6 ★★★★★

Stabilité

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
3. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Exercice 7 ★★

CCP PC

Soient x, y, z trois complexes non nuls tels que $x + y + z = 0$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Montrer que $|x| = |y| = |z|$.

Exercice 8**CCINP (ou CCP) PC 2019**

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f(z^{n+1}) = f(z)f(z^n) - f(z^{n-1})$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré n et de coefficient dominant un tel que : $\forall z \in \mathbb{C}^*, f(z^n) = P_n(f(z))$. On donnera une expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P_{n-1} .
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le seul polynôme Q vérifiant : $\forall z \in \mathbb{C}^*, f(z^n) = Q(f(z))$ est P_n .
4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On pose $z_k = e^{\frac{i(2k+1)\pi}{2n}}$. Calculer $f(z_k^n)$. Que peut-on en déduire ? Donner une expression des P_n .
5.
 - a. Montrer que $(P_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
 - b. En déduire le coefficient constant de P_n .
6. Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.
7. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

Exercice 9 ★★**Mines-Ponts MP**

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

Exercice 10 ★★**CCINP (ou CCP) MP 2016**

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère la suite de polynômes définie par : $N_0 = 1$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $N_k(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$. On considère l'endomorphisme de E défini par $u(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Déterminer le noyau de u .
2. Montrer que (N_0, \dots, N_n) est une base de E .
3. Calculer $u(N_k)$.
4. Montrer que u est nilpotent. Quel est son indice de nilpotence ?
5. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Montrer qu'il existe un unique $Q \in E$ tel que $u(Q) = P$ et $Q(0) = 0$.

Algèbre générale**Exercice 11 ★★****CCINP (ou CCP) MP 2015**

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif.

1. Rappeler la définition d'un anneau et d'un idéal.
2. Soit I un idéal de A . Montrer que si $1_A \in I$, alors $I = A$.
3. On pose $I_a = \{ax, x \in A\}$. Montrer que I_a est bien un idéal de A .
4. On suppose que A n'est pas l'anneau nul. Montrer que A est un corps si et seulement si les seuls idéaux de A sont $\{0_A\}$ et A .

Exercice 12 ★★★★★**ENS MP 2011**

On s'intéresse aux sous-groupes discrets de $(\mathbb{C}, +)$ et $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \times)$.

1. Donner des exemples de tels sous-groupes.
2. Soit Γ un sous-groupe discret non trivial de $(\mathbb{C}, +)$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\lambda\Gamma = \Gamma$. Montrer que $\lambda^4 = 1$ ou $\lambda^6 = 1$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et Γ le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$. A quelle condition sur λ le sous-groupe Γ est-il discret ?

Exercice 13 ★★**Mines-Ponts MP 2016**

Soit p un nombre premier impair et k un diviseur premier de $2^p - 1$. Montrer que $k \equiv 1[2p]$.

Exercice 14 ★★**Banque Mines-Ponts MP 2021**

Soit G un groupe fini. On suppose que tous les éléments de G sont d'ordre au plus 2. Que peut-on dire du cardinal de G ?

Exercice 15**C.C.E. Mines MP 2015**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On pose pour $h \in \mathbb{R}$, $A(h) = \begin{pmatrix} a^h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $E = \{A(h), h \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que E est un groupe multiplicatif isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.
2. Calculer $\exp(tV)$ avec $V = A'(0)$

Algèbre linéaire**Exercice 16 ★★****CCP MP**

Pour $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, on note S_p l'ensemble des suites réelles u vérifiant :

$$\exists P \in \mathbb{R}_p[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \alpha u_n + P(n)$$

1. Montrer que si $u \in S_p$, P est unique. On notera P_u ce polynôme.
2. Montrer que S_p est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
3. Montrer que l'application $\phi : \begin{cases} S_p & \longrightarrow \mathbb{R}_p[X] \\ u & \longmapsto P_u \end{cases}$ est linéaire et donner une base de son noyau.
4. Quelle est l'image de ϕ ? Donner une base de S_p . On pourra utiliser les polynômes $R_k = (X+1)^p - \alpha X^k$ avec $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$.
5. Application : déterminer le terme général de la suite u définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7$.

Exercice 17 ★★**Mines P' 1995**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E nilpotent d'indice n . On pose

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ g & \longmapsto f \circ g - g \circ f \end{cases}$$

1. Montrer que $\Phi^p(g) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} f^{p-k} \circ g \circ f^k$. En déduire que Φ est nilpotent.
2. Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $b \in \mathcal{L}(E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$. En déduire l'indice de nilpotence de Φ .

Exercice 18 ★★★

Centrale MP

Soient H_1 et H_2 deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (f, g) \in H_1 \times H_2, f \circ g + g \circ f = 0$$

1. Justifier qu'il existe $(p_1, p_2) \in H_1 \times H_2$ tel que $p_1 + p_2 = \text{Id}$.
2. Montrer que p_1 et p_2 sont des projecteurs.
3. Montrer que $\dim H_1 \leq (n - \text{rg } p_2)^2$ et $\dim H_2 \leq (n - \text{rg } p_1)^2$.
4. Quel est le nombre de choix possibles pour le couple (H_1, H_2) ?

Exercice 19 ★★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ avec E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que

$$\dim \text{Ker}(u + v) \leq \dim(\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)) + \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v))$$

Exercice 20 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

Résoudre le système

$$(S): \begin{cases} a^2x + a^3y + az = m \\ a^2x + y + az = m \\ x + ay + a^2z = m \end{cases}$$

Exercice 21 ★

CCP 2010

Soit f l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ associe le polynôme \tilde{P} tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{P}(x) = \int_x^{x+1} P(t) dt$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f induit un endomorphisme f_n de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $\det(f_n)$ en fonction de n .

Exercice 22 ★★★

ENS 2010

On considère l'ensemble des matrices de taille $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\{-1, 1\}$.

1. Combien de coefficients faut-il changer au plus pour rendre une telle matrice inversible ?
2. Combien y a-t-il de telles matrices ? Calculer la moyenne des déterminants au carré de ces matrices.

Exercice 23 ★★★

Centrale MP 2017

On considère une fonction continue f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que pour toute matrice carrée d'ordre $n > 0$ réelle inversible $A = (a_{i,j})$, la matrice $A' = (f(a_{i,j}))$ soit également inversible.

1. Montrer que pour tous réels distincts x et y , la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ est inversible. En déduire que f est injective.
2. On suppose f surjective. En considérant les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ pour x, y, z réels avec $z \neq x + y$ montrer que $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
3. Montrer que f est surjective. Conclure quant à f .

Exercice 24 ★★★

Banque Mines-Ponts MP 2021

$$\text{Soit } (x, y) \in \mathbb{C}^2. \text{ On pose } D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & y & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & y^2 & 2y & 2 \\ x^3 & 3x^2 & y^3 & 3y^2 & 6y \\ x^4 & 4x^3 & y^4 & 4y^3 & 12y^2 \end{vmatrix}.$$

Montrer que $D = 0 \iff x = y$.

Exercice 25 ★★★**Centrale PSI**

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, a_1, \dots, a_n des complexes et $P = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$.

$$\text{Calculer } D(x) = \begin{vmatrix} \frac{P(x)}{x-a_1} & \frac{P(x)}{x-a_2} & \dots & \frac{P(x)}{x-a_n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \text{ pour } x \in \mathbb{C}.$$

Arithmétique**Exercice 26 ★★★****Mines-Ponts MP**

Montrer que si p est un entier premier différent de 2 et 5, alors il divise un des entiers de l'ensemble $\{1, 11, 111, 1111, \dots\}$.

Exercice 27 ★★★**Centrale MP 2012**

Résoudre dans \mathbb{N}^2 l'équation

$$n(n+1)(n+2) = m^2$$

Exercice 28 ★★★**Mines-Ponts MP 2018**

Soient a_1, \dots, a_r des entiers naturels non nuls premiers entre eux deux à deux.

1. On pose pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$,

$$c_i = \prod_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket \setminus \{i\}} a_j$$

Montrer que c_1, \dots, c_r sont premiers entre eux dans leur ensemble.

2. Soit $b \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe un unique uplet $(y, x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, 0 \leq x_k < a_k \quad \text{et} \quad \frac{b}{a_1 \dots a_r} = y + \sum_{k=1}^r \frac{x_k}{a_k}$$

Exercice 29 ★★★★★**X MP 2001**

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv 3[4]$.
2. Soit $p > 2$ un nombre premier. Montrer que $\forall u \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, $u^{\frac{p-1}{2}} = \pm 1$.
3. Combien y a-t-il de $u \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ tels que $u^{\frac{p-1}{2}} = -1$?
4. Montrer que -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $p \equiv 1[4]$.
5. Si $u \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ vérifie $u^{\frac{p-1}{2}} = -1$, que peut-on dire de la structure de l'ensemble K des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ de la forme $\begin{pmatrix} x & yu \\ y & x \end{pmatrix}$ avec $(x, y) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$?

Exercice 30 ★★**Mines-Ponts MP 2012**

Montrer que la somme de deux nombres premiers consécutifs ne peut pas être égal au produit de deux nombres premiers.

Exercice 31 ★★★★★

Centrale-Supélec MP 2015

Soit N une application de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}^+ . On dit que N est une valeur absolue si et seulement si :

- (i) $\forall x \in \mathbb{Q}, N(x) = 0 \iff x = 0$;
- (ii) $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, N(xy) = N(x)N(y)$;
- (iii) $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Une valeur absolue N est dite *ultramétrique* si $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, N(x + y) \leq \max(N(x), N(y))$. N est dite *triviale* si elle est constante sur \mathbb{Q}^* .

Si p est un nombre premier, on note $v_p(n)$ la valuation p -adique définie sur les entiers. On pose par convention $v_p(0) = +\infty$.

1. Soit N une valeur absolue. Déterminer $N(1)$ et $N(-1)$.
2. Soient $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$ où $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ et p un nombre premier. Montrer que $v_p(a) - v_p(b)$ ne dépend que de q . On le notera $v_p(q)$.
3. On définit pour $q \in \mathbb{Q}, |q|_p = p^{-v_p(q)}$. Montrer que $|\cdot|_p$ est une valeur absolue ultramétrique.
4. Soit N une valeur absolue ultramétrique non triviale. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et p premier tels que $N = |\cdot|_p^\alpha$.

Exercice 32 ★★

Mines-Ponts MP 1998

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ et tout entier a impair

$$a^{2^{n-1}} \equiv 1 [2^n]$$

Exercice 33 ★★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

1. Résoudre $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier.
2. Résoudre $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/34\mathbb{Z}$.

Exercice 34 ★★★★★

Centrale-Supélec MP 2019

On pose $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier et impair, $\mathcal{C} = \{x^2, x \in \mathbb{F}_p \setminus \{\bar{0}\}\}$.

1. Que dire de la structure algébrique de \mathbb{F}_p et de \mathcal{C} ?
2. Expliciter \mathcal{C} pour $p = 11$.
3. Soit P un polynôme de degré strictement inférieur à d et à coefficients entiers, avec $d \in \mathbb{N}^*$. Soient $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$ tel que les a_i soient distincts modulo p et tels que p divise les $P(a_i)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, p divise $P(n)$.
4. Montrer que $\mathcal{C} = \left\{x \in \mathbb{F}_p, x^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1}\right\}$.

Exercice 35 ★★★

C.C.E. Mines MP 2015

Soit P un polynôme à coefficients entiers et quatre entiers $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq 4}$ distincts tels que $P(\lambda_i) = 7$ pour i entre 1 et 4. Montrer que l'équation $P(n) = 14$ n'admet pas de solution entière.

Intégrales impropres

Exercice 36 ★★★

Centrale PSI

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R}_+ . On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi(x) = f(x) + \int_0^x f(t) dt$$

On suppose que φ admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f admet pour limite 0 en $+\infty$.

Exercice 37 ★★★★★

Mines-Ponts MP 2016

1. Soient $a \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(a) > 0$ et f de classe \mathcal{C}_1 sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans \mathbb{C} telle que $\lim_{+\infty} f' + af = 0$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.
2. Soit f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans \mathbb{C} telle que $\lim_{+\infty} f'' + f' + f = 0$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.
3. Généraliser.

Exercice 38 ★★★

Centrale MP 2018

Soit $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ continue de carré intégrable sur \mathbb{R}_+ . On pose $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

1. Déterminer la limite de g en 0.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. Montrer que g est de carré intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 39 ★★★

Banque Mines-Ponts PSI 2021

Soit $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que f est définie sur $I =]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable sur I et déterminer f' .
3. Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est définie et la calculer.

Exercice 40 ★★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2017

On pose pour tout x non nul,

$$F(x) = \int_x^{7x} \frac{1 - e^{-t}}{t^2} dt$$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

Exercice 41 ★★★

CCP MP

1. Déterminer le domaine de définition $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2 + t^2} dt$.
2. Calculer $F(1)$.
3. Calculer $F(x)$ pour tout x dans le domaine de définition de f .

Exercice 42 ★★★

TPE-EIVP PSI 2017

Soit $a > 1$, Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$ admettant une limite finie ℓ en $+\infty$.

1. Montrer que pour tout x dans $[1, +\infty[$:

$$\int_1^x \frac{f(at) - f(t)}{t} dt = \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt - \int_1^a \frac{f(t)}{t} dt$$

2. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{f(at) - f(t)}{t} dt$ converge et la calculer en fonction de $\int_1^a \frac{f(t)}{t} dt$ et de ℓ .

Exercice 43 ★★★**CCP MP 2018**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et π -périodique vérifiant

$$\int_0^\pi f(t) dt = 0$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_0^\pi f(t)e^{-t/n} dt \quad v_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t/n} dt$$

1. Justifier que u_n et v_n sont bien définis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Justifier qu'il existe une suite (a_n) , que l'on précisera, telle que $v_n = a_n u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\pi}$.
4. Montrer que (u_n) converge vers 0. Montrer que (v_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 44 ★★**Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (t \ln(t))^n dt$. Montrer que cette intégrale converge.

Donner sa valeur.

Convexité**Exercice 45 ★★****TPE**

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 convexe sur $[0, 2\pi]$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) dt \geq 0$$

Exercice 46**CCINP (ou CCP) MP 2017**

1. Étudier la convexité des fonctions \ln et \exp .
2. Démontrer que pour tout (x_1, \dots, x_n) dans $(\mathbb{R}_+)^n$,

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

3. Démontrer que si S est une matrice réelle symétrique alors :
 $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T S X \geq 0$ si et seulement si $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$.
4. Démontrer que si S est une matrice réelle d'ordre n symétrique à valeurs propres positives, alors $(\det(S))^{1/n} \leq \frac{1}{n} \text{tr}(S)$.
5. Démontrer que pour toute matrice réelle d'ordre n , $\det(M)^2 \leq \left(\frac{1}{n} \text{tr}(M^T M) \right)^n$.

Suites et séries de fonctions**Exercice 47 ★★****CCP MP**

On pose $f_n : x \mapsto n \cos^n(x) \sin(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur \mathbb{R} .
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ où $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$?
3. Soit g continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) g(t) dt = g(0)$$

Exercice 48 ★★

Mines-Ponts PC

On pose $f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+x}} \right) - 2\sqrt{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum_{n \geq 1} f_{n+1} - f_n$.
2. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f de classe \mathcal{C}^1 .
3. Calculer $\int_0^1 f(t) dt$.

Exercice 49 ★★★

Mines-Télécom MP 2018

1. Déterminer l'ensemble de définition de la série de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(nx)}$. Donner un équivalent simple de f en 0.
2. Mêmes questions avec $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}^2(nx)}$.

Exercice 50 ★★

Mines-Télécom MP 2017

On définit la suite de fonctions (g_n) de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} par $g_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], g_{n+1}(x) = \int_0^x g_n(1-t) dt$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|g_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|g_{n-1}\|_\infty$.
2. On pose $G : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.
Montrer que G est bien définie sur $[0, 1]$ et déterminer une équation différentielle vérifiée par G .
3. En déduire l'expression de G .

Exercice 51 ★★★★★

Banque Mines-Ponts MP 2019

1. Existe-t-il une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = k$?
2. Existe-t-il une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = \frac{1}{k^2}$?

Exercice 52

CCINP (ou CCP) PC 2019

Soit $t \in \mathbb{R}$ et on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{nt})$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \ln(2)$.
3. Montrer que $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = +\infty$.

Exercice 53

CCINP (ou CCP) MP 2019

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

1. Pour $t \in]0, 1[$, écrire $\frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ comme somme de série $\sum_{n \geq 0} u_n(t)$, où les u_n sont des fonctions puissances.

2. Déterminer la nature de la série $\sum \int_0^1 |u_n(t)| dt$. Que peut-on en déduire ?

3. Soit $S_N(t) = \sum_{n=0}^N u_n(t)$. Démontrer

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_N(t) dt$$

4. En déduire

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$$

5. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 54 ★★★

Arts et Métiers PSI

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Soit (f_n) la suite de fonctions définies par $f_0 = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [a, b], f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$$

1. Déterminer la nature de la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ sur $[a, b]$.

2. On note F la somme de cette série. Montrer que

$$\forall x \in [a, b], F(x) = f(x) + e^x \int_a^x e^{-t} f(t) dt$$

Exercice 55 ★★★★★

Centrale MP

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : x \mapsto x \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .

2. On note g la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

3. On pose $f : x \mapsto g(x) - \ln(x)$. Montrer que f vérifie les trois conditions suivantes :

(i) $f(1) = 0$.

(ii) f est convexe sur \mathbb{R}_+^* ;

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) - f(x) = \ln(x)$;

4. Réciproquement, soit f vérifiant les trois conditions de la question précédente. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x \ln(n) + \ln(n!) - \sum_{k=0}^n \ln(x+k)$$

Exercice 56 ★★

E3A MP 2019

On rappelle les formules de trigonométrie que l'on pourra utiliser sans les redémontrer

$$2 \cos(p) \cos(q) = \cos(p+q) + \cos(p-q) \quad 2 \sin(p) \cos(q) = \sin(p+q) + \sin(p-q)$$

On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge et a pour somme e^z .

Soit α un réel non nul fixé.

Pour tout entier naturel n , on définit la fonction u_n de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D} de la fonction $C : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur \mathcal{D} .
3. Donner pour tout $x \in \mathcal{D}$ une expression de x à l'aide des fonctions usuelles.
4. Pour tout entier naturel n , on note

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) C(x) dx \quad I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) C(x) dx$$

- a. Calculer J_n puis I_n .
 - b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
5. On pose enfin, lorsque cela existe $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$.
Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S et donner une expression de $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 57 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

1. Etudier la convergence simple de $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ sur \mathbb{R}_+ . On note, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$.
2. La série de fonctions considérée converge-t-elle normalement sur \mathbb{R}_+ ? Converge-t-elle uniformément?
3. Montrer que sa somme est continue sur \mathbb{R}_+ et donner sa limite en $+\infty$.
4. Résoudre $y' - y = -\frac{e^x}{e^x + 1}$ sur $]0, +\infty[$.
5. En déduire l'expression de S à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 58 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2018

Soit (λ_n) une suite strictement croissante de réels strictement positifs de limite $+\infty$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_n(x) = (-1)^n e^{-\lambda_n x}$$

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum f_n$ sur \mathbb{R}_+^* .
2. Etudier sa convergence uniforme sur \mathbb{R}_+^* .
3. On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} S(t) dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$$

Exercice 59 ★★

CCINP (ou CCP) PC 2017

On considère pour $x > 0$ la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

1. f est-elle bien définie et continue sur \mathbb{R}_+^* ?

2. Montrer que

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$

3. Montrer que

$$\forall x > 0, 2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$$

4. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

5. Déterminer un équivalent de f en 0^+ .

6. Montrer que :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

Exercice 60

CCINP (ou CCP) MP 2021

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que S est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

2. À l'aide du critère spécial des séries alternées, trouver la monotonie de S .

3. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$$

puis en déduire un équivalent simple de $S(x)$ pour x qui tend vers 0.

Exercice 61 ★★

E3A PSI 2020

Pour tout entier naturel n , on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$$

1. Déterminer que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur J .

On note alors $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in J$.

2. Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ne converge pas normalement sur J .

3. Etudier alors sa convergence uniforme sur J .

4. Déterminer $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

a. Justifier la convergence de la série $\sum u_n$. On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

b. Montrer que l'on a au voisinage de l'infini :

$$\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Intégrales à paramètres

Exercice 62 ★★

CCP MP

On pose $f_n : x \mapsto n \cos^n(x) \sin(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur \mathbb{R} .
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ où $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$?
3. Soit g continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) g(t) dt = g(0)$$

Exercice 63

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2019

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

1. Pour quelles valeurs de n l'intégrale est-elle définie ?
2. Calculer la limite de la suite (u_n) .
3. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
4. Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge et calculer sa somme S sous la forme d'une intégrale.
5. Calculer S .

Exercice 64

Mines-Télécom MP 2018

Convergence et somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$, où $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$. On pourra travailler sur les sommes partielles de la série.

Exercice 65

Mines-Ponts MP 2018

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t) dt}{1+t^2} = \int_0^x \frac{\ln(t) dt}{t^2-1}$$

Exercice 66

Mines-Ponts MP 2017

A toute fonction $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on associe la fonction $R(h)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, R(h)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x \sin t) dt$$

A toute fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on associe fonction $S(g)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, S(g)(x) = g(0) + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x \sin t) dt$$

1. Montrer que R et S sont des applications linéaires à valeurs dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2. On pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une relation entre W_n et W_{n+2} .
3. Soit P un polynôme. Montrer que $S \circ R(P) = P$.
4. Montrer que pour $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $S \circ R(g) = g$.

Exercice 67

CCP MP

On pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t+1} dt$.

1. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
2. Donner une équation différentielle vérifiée par g sur \mathbb{R}_+^* .
3. Donner un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 68 ★★

Mines Télécom MP 2016

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt$.

1. Montrer que F est définie sur \mathbb{R} et paire.
2. Montrer que $|\sin u| \leq |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et déterminer F'' .
4. Déterminer la fonction F .

Exercice 69 ★★

Centrale MP 2011

Soit $f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ et $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que $f^2 + g$ est constante. Quelle est sa valeur ?
2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 70 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. a. Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .
b. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
2. a. Montrer que f est solution de (E) : $y' - y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$.
b. Déterminer la fonction f .

Exercice 71

Mines-Ponts MP

On définit une fonction f par $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \operatorname{sh}(x\sqrt{t}) dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer ce développement en série entière.
3. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 72 ★

ENSEA/ENSIEH MP 2015

1. Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$$

2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$

Exercice 73 ★

CCINP (ou CCP) PSI 2019

Soit $\sum a_n$ une série complexe absolument convergente.

1. Calculer $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$.
3. Pour x réel, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Exercice 74 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

1. Montrer que $I = \int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx$ est bien définie.
2. Donner la décomposition en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$ et préciser son rayon de convergence.
3. Écrire I comme somme d'une série.
4. Donner la valeur exacte de I sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 75 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt$.

1. Montrer que I converge.
2. Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice 76 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2018

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

1. Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Rappeler le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un segment.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $|x| < R$.

Exercice 77 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2019

1. Montrer l'intégrabilité de $f : x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}$ sur $]0, 1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : x \in]0, 1] \mapsto x^{2n} (\ln x)^2$. Montrer l'intégrabilité de u_n sur $]0, 1]$ et calculer $\int_0^1 u_n(x) dx$.
3. Déterminer une expression de $I = \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx$ sous forme de somme.
4. Soit $\varepsilon > 0$. Proposer une méthode de calcul de I à ε près.

Exercice 78 ★★★

Banque Mines-Ponts MP 2014

On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer des équivalents simples de f aux bornes de son domaine de définition.

Réduction

Exercice 79 ★★

Mines-Ponts MP 2016

Soit E un espace euclidien de dimension finie. On considère des vecteurs unitaires a et b de E formant une famille libre.

Réduire l'endomorphisme

$$\phi : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto \langle a | x \rangle a + \langle b | x \rangle b \end{cases}$$

Exercice 80 ★★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

Soit l'endomorphisme

$$u: \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto M + \text{tr}(M)I_n \end{cases}$$

Déterminer les valeurs propres de u , ainsi que les espaces propres associés.

Exercice 81

X MP 2010

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A\bar{A} = I_n$ si et seulement si il existe $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = S\bar{S}^{-1}$.

Exercice 82 ★

CCP MP 2010

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à spectres disjoints.

1. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.
2. Soit X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX = XB$. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)X = XP(B)$ et en déduire que $X = 0$.
3. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

Exercice 83

ENS MP 2018

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Montrer que les polynômes caractéristiques de A et B sont premiers entre eux si et seulement si il n'existe pas de matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AX = XB$.

Exercice 84 ★★★

Mines-Ponts MP 2018

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.
On suppose qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ de rang $r \geq 1$ tel que $h \circ g = f \circ h$. Montrer que χ_f et χ_g ont un facteur commun de degré r .
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 85 ★★

CCP 2015

Soient E un espace vectoriel de dimension $2n + 1$ et de base (e_1, \dots, e_{2n+1}) ainsi que u l'endomorphisme de E tel que $u(e_1) = e_1 + e_{2n+1}$ et $u(e_i) = e_{i-1} + e_i$ pour tout $i \in \llbracket 2, 2n + 1 \rrbracket$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de u .
2. Montrer que u est inversible et déterminer un polynôme P tel que $u^{-1} = P(u)$.
3. Déterminer les valeurs propres complexes de u .
4. En déduire $\prod_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Exercice 86 ★

TPE MP 2010

Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^3 - M^2 - M - 2I_n = 0$ et $\text{tr}(M) = 0$.

Exercice 87

TPE-EIVP PSI 2017

Soient A, B, C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $C = A + B$, $C^2 = 2A + 3B$, $C^3 = 5A + 6B$. A et B sont-elles diagonalisables ?

Exercice 88 ★★★★★

X MP

Soit M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver le rang minimal et le rang maximal des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + A^T = M$.

Exercice 89

CCP MP 2010

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u = 0$. Montrer que $\text{rg}(u)$ est pair.

Exercice 90 ★★★★★

Mines-Ponts MP 2015

On note $GL_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ inversible et dont l'inverse appartient aussi à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que $(GL_2(\mathbb{Z}), \times)$ est un groupe.
2. Soit G un sous-groupe fini de $GL_2(\mathbb{Z})$. Montrer que pour toute matrice $M \in G$, $M^{12} = I_2$.

Exercice 91 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2019

Soit $n \geq 2$ entier. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = I_n$ et $A \neq \pm I_n$.

1. Montrer que $\text{tr}(A) \equiv n[2]$.
2. Montrer que $|\text{tr}(A)| \leq n - 2$.

Exercice 92 ★★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Étudier la diagonalisabilité de A , et la diagonaliser si possible.
2. Résoudre l'équation $M^2 = A$ pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 93 ★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

On pose : $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. A et B sont-elles semblables ?

Exercice 94 ★★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A s'écrit PDP^{-1} avec $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et D matrice diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. On cherche à résoudre l'équation $X^2 = A$.
Montrer que si X est solution de cette équation alors $P^{-1}XP$ commute avec D puis qu'elle est diagonale.
Résoudre l'équation.

Exercice 95

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2021

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A en fonction de J et J^2 .
2. Calculer le polynôme caractéristique de J . La matrice J est-elle diagonalisable ?
3. Diagonaliser A .

Exercice 96 ★★★★★

D'après Centrale MP

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire dans E stable par u . Le résultat persiste-t-il si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel ?

Exercice 97 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2019

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. On note f et g deux endomorphismes de E et on note A et B leurs matrices dans une même base de E .

- On suppose f et g bijectifs dans cette question.
 - Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
 - Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable, alors $g \circ f$ l'est aussi.
- Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont le même spectre.
 - Donner un exemple de matrices telles que AB soit diagonalisable mais pas BA .

Exercice 98 ★★★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2019

Soient f et g deux endomorphismes d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie E vérifiant $f \circ g = f + g$.

- Montrer que $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ et $\text{Im } f = \text{Im } g$.
- On suppose g diagonalisable. Montrer que f et $f \circ g$ sont aussi diagonalisables et que $\text{Sp}(f \circ g) \subset \mathbb{R} \setminus]0, 4[$.

Exercice 99 ★★

Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X+1)P(X) - XP(X+1)$.

- Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Déterminer les éléments propres de Φ . Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 100 ★

CCP 2018

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$, telle que $\text{rg}(A) = 1$.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 0$.

Exercice 101 ★★

CCP MP 2018

Soient x un nombre réel et E_x l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M + xI_n = 0$.

- Si $x \neq 0$, montrer qu'une matrice $M \in E_x$ est inversible et exprimer son inverse. Quelles sont les matrices inversibles appartenant à E_0 ?
- Pour quelles valeurs de x tous les éléments de E_x sont-ils diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- Déterminer l'ensemble T des traces des éléments de E_{-2} . Quel est son cardinal ?

Exercice 102 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

On considère $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto M + 2M^T \end{cases}$.

- Montrer que f est un endomorphisme.
- Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .
- L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
- Calculer $\text{tr}(f)$ et $\det(f)$.

Exercice 103

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2018

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix}$. Montrer que B est diagonalisable.

Exercice 104 ★★

CCINP (ou CCP) PSI 2021

On définit : $\forall m \in \mathbb{R}, A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres et sous-espaces propres de A_m .
2. Donner les valeurs de m pour lesquelles A_m soit diagonalisable. Même question pour l'inversibilité.
3. Si A_m est diagonalisable, déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 105 ★★

Mines-Télécom MP 2018

Soient A une matrice diagonalisable et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix}$. Montrer que B est diagonalisable.

Exercice 106 ★★

Magistère MP 2017

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB - BA = A$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k B - BA^k = kA^k$.
2. Montrer que A est nilpotente.

Exercice 107 ★★★

Magistère MP 2017

Montrer que l'espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes est égal à celui des matrices de trace nulle.

Exercice 108

CCINP (ou CCP) MP 2021

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n > 1$. On considère f un endomorphisme de E .

1. La condition « f est de rang 1» est-elle suffisante/nécessaire pour que f soit un projecteur ?
2. On suppose f de rang 1 et de trace 1, montrer que f est un projecteur.
3. Construire une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de projecteurs.

Exercice 109

CCINP (ou CCP) MP 2021

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et telle que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ soit libre. Montrer que $\text{tr}(A) = 0$.

Exercice 110

ENS MP 2011

1. Soit A une matrice inversible réelle. Exprimer le polynôme minimal de A^{-1} en fonction de celui de A .
2. Soit A une matrice orthogonale réelle telle que 1 et -1 ne soient pas racines de son polynôme minimal. Montrer que A et A^{-1} ont même polynôme minimal. Montrer que le degré de ce polynôme minimal est pair.

Exercice 111 ★★

CCINP (ou CCP) PSI 2021

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & & & \\ \vdots & (0) & & \\ n & & & \end{pmatrix}$ où $n \geq 3$.

1. Quel est le rang de A ? la dimension du noyau de A ?
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Quelle est la multiplicité de la valeur propre 0 ?
4. Montrer qu'il existe $\lambda \in]1, +\infty[$ tel que $\text{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$.
5. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 3.

Exercice 112 ★★**CCINP (ou CCP) PSI 2021**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Donner le rang de B en fonction du rang de A.
2. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

3. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que B l'est aussi, et donner ses valeurs propres.

Exercice 113 ★★**CCINP (ou CCP) PSI 2021**

On définit : $\forall m \in \mathbb{R}, A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$. Déterminer le polynôme minimal de A_m .

Exercice 114 ★★**CCINP (ou CCP) MP 2021**

On considère un entier $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et telle que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ soit libre. Montrer que $\text{tr}(A) = 0$.

Séries et familles sommables

Exercice 115 ★★**Mines-Télécom MP 2018**

Convergence et somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$, où $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$. On pourra travailler sur les sommes partielles de la série.

Exercice 116 ★★★**X (non PC/PSI) MP 2021**

On pose $u_n = \sum_{k=1}^n k^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$.

Exercice 117 ★★★**CCINP (ou CCP) MP 2021**

1. Donner la définition de la convergence d'une série puis montrer que si $\sum u_n$ converge alors la suite (u_n) tend vers 0.
2. Soit (u_n) une suite décroissante telle que $\sum u_n$ converge.
 - a. On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = \lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Montrer que $\lambda = 0$.
 - b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$.
 - c. Montrer que la série $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge puis montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$.

Exercice 118 ★★**CCINP (ou CCP) PSI 2019**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^n dx$.

1. Calculer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+2}$.
3. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
4. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n I_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 119 ★★★

CCINP (ou CCP) PC 2021

On pose pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n = \prod_{k=2}^n \left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right)$$

et pour tout entier $n \geq 3$,

$$v_n = \ln \left(\frac{nu_n}{(n-1)u_{n-1}} \right)$$

Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} v_n$ converge, puis que la série $\sum_{n \geq 3} u_n$ diverge.

Exercice 120 ★★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in]0, 1]$ tel que

$$\int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t} dt = n$$

On pourra considérer la fonction $x \mapsto \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt$.

2. Étudier la monotonie de (u_n) et sa limite.
3. On pose $v_n = n + \ln u_n$. Montrer que (v_n) converge et exprimer sa limite sous forme d'une intégrale.
4. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 121 ★★★

Banque Mines-Ponts MP 2021

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que :

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, a_n = 2a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Montrer que (a_n) est définie, puis que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{a_n^2}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 122 ★★★

Centrale-Supélec MP 2019

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) = 1$$

1. Montrer que la suite (a_n) converge vers 0 et que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^2$ diverge.
2. On note $S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt = 1$$

3. Montrer que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$.

Exercice 123 ★★★

Banque Mines-Ponts MP 2021

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \ell$$

2. Soient $a > 0, \lambda > 0, \alpha > 1$ et $f : [0, a] \rightarrow [0, a]$ continue admettant un développement asymptotique en 0 de la forme :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \lambda x^\alpha + o(x^\alpha)$$

- a. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que 0 soit le seul point fixe de f dans $[0, \varepsilon]$.
- b. On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in [0, \varepsilon]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) converge vers 0.
- c. Trouver un équivalent de $f(x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}$ quand x tend vers 0.
- d. En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.
- e. Appliquer aux fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$.

Exercice 124 ★★

D'après Mines-Télécom MP 2016

Soit (v_n) une suite telle que $v_n = \frac{\cos(v_{n-1})}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la limite puis un équivalent de v_n . En déduire la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$.
2. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.
3. En déduire la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n v_n$.

Exercice 125 ★★★

Banque Mines-Ponts MP 2021

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos\left(n^2 \pi \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 126 ★★★

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Exercice 127 ★★

CCINP (ou CCP) PC 2019

On pose $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour tout entier $n \geq 2$.

1. Nature de $\sum_{n \geq 2} \ln(1 + a_n)$.
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=2}^n (1 + a_k) \right)$.

Exercice 128 ★★

Constante γ d'Euler

1. Montrer que $\ln(n) - \ln(n-1) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
2. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Exercice 129

Navale PSI 2019

Trouver un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

Exercice 130 ★★★

Banque Mines-Ponts MP 2018

1. Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\int_0^{2\pi} t e^{-int} dt$.
2. Soient I une partie finie de \mathbb{N}^* , $(a_n)_{n \in I}$ et $(b_n)_{n \in I}$ deux suites finies de réels positifs. Montrer que

$$\sum_{(n,m) \in I^2} \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \pi \sqrt{\sum_{n \in I} a_n^2 \sum_{n \in I} b_n^2}$$

3. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites réelles telles que les familles $(a_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soient sommables. Montrer que $\left(\frac{a_n b_m}{n+m} \right)_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et que

$$\sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \pi \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n^2}$$

Séries entières

Exercice 131 ★★

CCP MP

On note $f(x)$ la somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Y a-t-il convergence en R et $-R$?
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.
4. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = 0$.

Exercice 132 ★★

CCP MP 2018

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $r_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\beta}$ et $b_n = \frac{1}{r_n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum b_n x^n$.
2. Étudier la convergence de la série pour $x = R$ et $x = -R$.

Exercice 133 ★★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln(n) x^n$.

On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^n$.

2. Montrer que

$$\forall x \in]-1, 1[, S(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$$

3. En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow 1} S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} S(x)$.

Exercice 134 ★★

CCP MP

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la limite de (a_n) .
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
3. Déterminer le domaine de définition de $x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On pourra déterminer la limite de $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$.

Exercice 135 ★★★★★

X MP 2010

Caractériser les suites $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ soit le développement en série entière en 0 d'une fraction rationnelle.

Exercice 136 ★★★

Mines-Ponts MP 2017

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, Q(z) = e^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n) z^n}{n!}$$

On notera ce polynôme $u(P)$.

2. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
3. Déterminer les éléments propres de u .

Exercice 137 ★★★

Centrale MP 2018

Soit $(a_n)_{n \geq 2}$ une suite de réels. On pose $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ et on suppose que

$$f : z \mapsto z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$$

est définie et injective sur D .

1. Montrer que $\forall z \in D, z \in \mathbb{R} \iff f(z) \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\forall z \in D, \operatorname{Im}(z) > 0 \iff \operatorname{Im}(f(z)) > 0$.
3. Soient $r \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer en fonction de r et n l'intégrale

$$I_n(r) = \int_0^\pi \operatorname{Im}(f(re^{i\theta})) \sin(n\theta) d\theta$$

4. En remarquant que $|\sin(n\theta)| \leq n \sin(\theta)$ pour $\theta \in [0, \pi]$, montrer que $|a_n| \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 138 ★★★

Mines-Ponts MP 2017

E est un ensemble à n éléments. On appelle *dérangement* une permutation de E sans point fixe. On note D_n le nombre de dérangements de E. On pose $D_0 = 1$.

1. Montrer l'égalité $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$.

On définit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$.

2. Justifier que f est définie sur $] -1, 1[$.

3. Montrer que pour x dans $] -1, 1[$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

4. En déduire l'égalité $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

5. Montrer que, lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, D_n est la partie entière de $\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$.

Exercice 139

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2019

On cherche à résoudre l'équation

$$(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, u(x) = 1 + \int_0^x u\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

avec $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1. Soit la suite (u_n) de fonctions définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

Montrer par récurrence que,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers une certaine fonction u .

2. Montrer que u est solution de (E).

3. Donner les fonctions développables en série entière dont la restriction à \mathbb{R}_+ est solution de (E).

Exercice 140 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(t) = \frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{n+1}$.

1. Donner le domaine de convergence D de $\sum f_n$.
2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.
3. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0, 1]$.
4. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0, 1]$.
5. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \int_0^1 \frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{n+1} dt$?
6. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 141 ★★★

Banque Mines-Ponts MP 2018

Soit $(z_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls qui converge vers 0.

1. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R , telle que $\forall p \in \mathbb{N}, f(z_p) = 0$.
Montrer que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Que dire de deux séries entières f et g de même rayon de convergence et telles que $f(z_p) = g(z_p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$?

Exercice 142 ★★★★★

ENS MP 2011

Soit \mathbb{K} un corps fini et \mathcal{P} l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[X]$. On pose

$$\zeta(t) = \prod_{P \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - t^{\deg P}}$$

1. Montrer que ζ est défini sur un intervalle du type $[0, t_0[$.
2. Montrer que ζ est développable en série entière au voisinage à droite de 0 et déterminer son développement.

Exercice 143 ★★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

Développer en série entière $f : x \mapsto \ln(1 - \sqrt{2}x + x^2)$.

Exercice 144 ★★★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, lorsque c'est possible : $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+n^2ix}$.

1. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
2. Montrer que g n'est pas développable en série entière.

Exercice 145 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

Développer en séries entières les fonctions suivantes au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence :

1. $f(z) = \frac{1}{6z^2 - 5z + 1}, z \in \mathbb{C}$
2. $g(x) = \ln\left(\frac{2+x}{1-x}\right), x \in \mathbb{R}$
3. $h(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt, x \in \mathbb{R}$

Exercice 146 ★★

Centrale PC

On pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} H_n x^n$.

Exercice 147 ★★

Mines-Ponts MP 2016

Soit $q > 0$, on pose $a_n = q^{\sqrt{n}}$ si n est un carré d'entier et $a_n = 0$ sinon. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$.

Exercice 148 ★★

CCP MP 2018

1. Montrer que \arctan est développable en série entière sur $] -1, 1[$.
2. On considère la série entière $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(2k-1)} x^{2k+1}$. Donner son rayon de convergence R . On note $f(x)$ la somme.
3. Donner une expression simple de f' et de f .
4. Que peut-on dire de la convergence sur $[-R, R]$?
5. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$.

Exercice 149 ★★★

Mines-Ponts MP 2018

On note $a_n = \int_0^1 \frac{dt}{(2+t^2)^{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$.
2. Calculer la somme de cette série entière sur son domaine de convergence.

Exercice 150 ★

Petites Mines PC 2017

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 + 4n - 1}{n + 2} x^n$.

Probabilités

Exercice 151

Mines-Ponts MP 2018

On considère n ampoules s'allumant aléatoirement de manière indépendante, la probabilité que la i -ème s'allume étant de p_i . On note Y la variable aléatoire donnant le nombre d'ampoules qui sont allumées.

1. Donner l'espérance et la variance de Y .
2. On note $m = \mathbb{E}(Y)$. Déterminer, à m fixé, les p_i tels que $\mathbb{V}(Y)$ soit maximale. Quelle loi suit Y pour de tels p_i ?

Exercice 152 ★★★★★

Centrale MP 2015

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite d'événements quelconques. On suppose que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(E_n)$ converge.

Pour X un ensemble, on note $\mathbb{1}_X$ la fonction indicatrice de X .

1. Soit $Z = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{E_n}$ (on convient que $Z = \infty$ si la série diverge). Montrer que Z est une variable aléatoire. Prouver que Z est une variable aléatoire.
2. Soit

$$F = \{\omega \in \Omega, \omega \text{ appartient à un nombre fini de } E_n\}$$

Prouver que F est un événement et que $\mathbb{P}(F) = 1$.

3. Prouver que Z admet une espérance.

Exercice 153 ★★

CCINP (ou CCP) PC 2017

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de lois géométriques de paramètres p_1 et p_2 . Déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 154 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

Soient X, Y, Z des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$. En déduire $\mathbb{P}(X \leq Y)$.
2. Déterminer la loi de $X + Y$.
3. Calculer $\mathbb{P}(Z > n)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(Z > X + Y)$.

Exercice 155 ★★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

Une urne contient initialement une boule blanche. On effectue un ou plusieurs lancers indépendants d'une pièce équilibrée :

- si on obtient pile, on ajoute une boule noire et on lance à nouveau la pièce ;
- si on obtient face, on tire une boule de l'urne et l'expérience s'arrête.

On note X le numéro du lancer auquel on arrête l'expérience.

1. Déterminer la loi de X .
2. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Exercice 156 ★★★★★

Centrale-Supélec MP 2021

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = X - Y$.

1. Écrire explicitement les lois suivies par X et Y .
2.
 - a. Déterminer la loi conjointe du couple (U, V) puis les lois de U et de V .
 - b. Montrer que U et V sont deux variables aléatoires indépendantes.
3. Réciproquement, on suppose que X et Y sont indépendantes de même loi, et que U et V sont indépendantes telles que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}, \mathbb{P}(\{U = n\} \cap \{V = m\}) \neq 0$$

Montrer que X et Y suivent une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Exercice 157

CCINP (ou CCP) MP 2018

On cherche à obtenir toutes les pièces d'un puzzle de n pièces différentes. On achète chaque semaine une pièce emballée, chaque pièce étant équiprobable. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note Y_k le nombre d'achats à effectuer, sachant qu'on a eu une $(k-1)^{\text{ème}}$ pièce différente, avant d'avoir une $k^{\text{ème}}$ pièce qu'on n'a pas déjà eue.

1.
 - a. Les variables aléatoires Y_k sont-elles mutuellement indépendantes ? Justifier que Y_1 peut s'écrire comme une constante simple.
 - b. Donner la loi de Y_k , pour $k \in \mathbb{N}^*$. Donner l'espérance, puis la variance de Y_k .
2. On note X le nombre d'achats à effectuer avant d'avoir le puzzle complet. Exprimer X en fonction des Y_k . Donner l'espérance de X en fonction de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
3. En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de H_n . En déduire un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$ de l'espérance de X .

Exercice 158

Centrale MP

Peut-on piper deux dés de manière à ce qu'il y ait équiprobabilité sur l'ensemble des sommes possibles obtenues en les lançant simultanément ?

Exercice 159 ★★★★★

Banque Mines-Ponts MP 2018

On note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ pour $s > 1$ et $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Quelle valeur doit prendre $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que la relation $\mathbb{P}(\{n\}) = \lambda n^{-s}$ définisse une loi de probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$?
On considère l'espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ dans la suite.
2. On pose $A_r = r\mathbb{N}^*$ pour $r \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(A_r)$.
3. Montrer que la $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.
4. Montrer que : $\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p} = \{1\}$.
En déduire que $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$.
5. La famille $\left(\frac{1}{p}\right)_{p \in \mathcal{P}}$ est-elle sommable ?

Exercice 160

Mines-Ponts MP 2019

Soit un entier $k \geq 2$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{k}}$.

1. Soit $j \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{\ell=0}^{k-1} \omega^{\ell j}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. Soit X_n la variable aléatoire comptant le nombre de piles.
Montrer que la probabilité que X_n soit divisible par k converge quand n tend vers l'infini et calculer sa limite.

Exercice 161

CCINP (ou CCP) PSI 2021

On dispose d'une urne contenant trois jetons indiscernables numérotés de 1 à 3. On effectue une série de tirages indépendants avec remise d'un jeton. On note :

- Y la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages nécessaires pour avoir deux nombres différents ;
- Z la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages nécessaires pour avoir les trois numéros.

1. Déterminer la loi de Y .
2. Déterminer la loi de $Y - 1$.
3. En déduire $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
4. Déterminer la loi du couple (Y, Z) .
5. En déduire la loi de Z .

Exercice 162

C.C.E. Mines MP 2015

On considère un péage composé de m guichets. On note N la variable aléatoire égale au nombre de voitures utilisant le péage en 1h. N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le choix du guichet se fait de manière aléatoire et indépendamment des autres voitures. On note X la variable aléatoire égale au nombre de voitures ayant pris le guichet n°1.

1. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X = k \mid N = n)$ pour $0 \leq k \leq n$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \frac{1}{n!}$.
3. Donner la loi de X .
4. Espérance et variance de X ?

Exercice 163 ★★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2019

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} .
3. On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
On pose $Y = I_X$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 164

ENS Ulm MPI 2019

On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que le nombre de «piles» soit égal au double du nombre de «faces». Quelle est la probabilité qu'on ne s'arrête jamais ?

Exercice 165 ★★★**CCINP (ou CCP) MP 2018**

- Une urne contient n boules blanches et n boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément n boules de l'urne.
 - Quel est le nombre de tirages possibles ?
 - Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
- Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une unité. Elle peut aller à tout instant, soit à droite, soit à gauche, avec équiprobabilité. On note C_n l'événement : «la puce est en O après n sauts». On donne : $P(C_0) = 1$.
 - Déterminer $P(C_{2n+1})$ et $P(C_{2n})$.
 - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_{2n})$ à l'aide de la formule de Stirling.
- La puce peut à présent se déplacer suivant deux directions (droite, gauche, haut, bas) avec équiprobabilité.
 - Montrer que $P(C_{2n}) = \binom{2n}{n}^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$.
 - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_{2n})$.

Exercice 166**Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2019**

On considère la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 + n + 1}{n!} t^n$.

- Donner le rayon de convergence R de cette série.
- Calculer sa somme $S(t)$ sur $] -R, R[$.
- On se donne une variable aléatoire X telle que, $\forall t \in [-1, 1]$, $G_X(t) = \lambda S(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Que vaut λ ?
 - Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Equations différentielles**Exercice 167 ★★****CCINP (ou CCP) MP 2019**

Résoudre, à l'aide de matrices, le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 3x + 6y \\ y' = -3x - 6y \\ z' = -3x - 6y - 5z \end{cases}$$

Exercice 168 ★★**CCINP (ou CCP) PSI 2021**

Soit le système différentiel $Y'(t) = A(t)Y(t)$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & -2t \\ 4t & 1+3t \end{pmatrix}$.

- Donner les valeurs propres de $A(t)$.
- En déduire qu'il existe P indépendant de t telle que $P^{-1}A(t)P$ soit diagonale.
- Résoudre le système différentiel.

Exercice 169 ★★**TPE-EIVP MP 2014**

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 9x(t) - 5y(t) + 2t \\ y'(t) = 10x(t) - 6y(t) + e^t \end{cases}$$

Exercice 170 ★★**Saint-Cyr PSI 2019**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Donner une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$.

2. Trouver les solutions du système différentiel $X'(t) = AX(t)$, avec $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$.

Exercice 171**CCINP (ou CCP) MP 2013**

On se donne l'équation différentielle $4x^2y'' - 8xy' + 9y = x^2 + 1$.

1. Trouver une solution polynomiale de degré 2 à l'équation.
2. Résoudre l'équation sur \mathbb{R}_+^* . On pourra poser $x = e^t$.
3. Résoudre l'équation sur \mathbb{R}_-^* .

Exercice 172 ★★★**Mines MP 2010**

Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On considère l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. On suppose que q est non constamment nulle au voisinage de $+\infty$ et que l'on dispose d'une solution y strictement positive sur \mathbb{R}_+ et on pose $f = \frac{y'}{y}$.

1. Trouver une équation différentielle vérifiée par f .
2. Montrer que f ne s'annule pas sur \mathbb{R}_+ .
3. Montrer que f est décroissante sur \mathbb{R}_+ puis qu'elle y est strictement positive.
4. Montrer que q est intégrable sur \mathbb{R}_+ et que $\int_{[x, +\infty[} q = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 173 ★★★★★**ENS MP 2010**

Soient q une application continue périodique non identiquement nulle de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+ et f une solution de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. Montrer que f s'annule une infinité de fois sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 174 ★★★**TPE-EIVP MP 2018**

Soient a et b deux fonctions définies et continues sur $[0, 1]$ et à valeurs dans \mathbb{R} . Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

1. On considère f une fonction solution de (E) sur $[0, 1]$ s'annulant une infinité de fois. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = f'(x) = 0$.
2. Déterminer toutes les solutions de (E) s'annulant une infinité de fois sur $[0, 1]$.

Exercice 175 ★★★**Banque Mines-Ponts MP 2019**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr}(A) > 0$, et $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 , telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $x'(t) = Ax(t)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle ℓ , telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\ell(x(t)) = 0$.

Exercice 176 ★★★**Zéros entrelacés**

1. Soient p et q deux fonctions continues sur \mathbb{R} telles que $p \leq q$ sur \mathbb{R} . Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 telles que $u'' + pu = 0$ et $v'' + qv = 0$. On suppose que u s'annule en des réels a et b avec $a < b$ mais qu'elle ne s'annule pas sur $]a, b[$.
 - a. On pose $W = u'v - uv'$. Déterminer W' .
 - b. En déduire que v s'annule sur $[a, b]$.
2. Application. Soient r une fonction continue sur \mathbb{R} , f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} telle que $f'' + rf = 0$ et $M \in \mathbb{R}_+^*$.
 - a. On suppose $r \geq M^2$. Montrer que tout intervalle fermé de longueur $\frac{\pi}{M}$ contient au moins un zéro de f .
 - b. On suppose $r \leq M^2$. On suppose que f s'annule en des réels a et b tels que $a < b$ mais qu'elle ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer que $b - a \geq \frac{\pi}{M}$.

Topologie

Exercice 177

Centrale MP 2018

Soient E un espace vectoriel normé, K un compact de E et $g : K \rightarrow K$ une application 1-lipschitzienne. On cherche à montrer que g est surjective si, et seulement si, c est une isométrie.

1. On commence par supposer g surjective. On considère x et y dans K ainsi que x_n et y_n des antécédents par g^n de x et y respectivement. On note (x', y') une valeur d'adhérence de la suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que $x - y$ est une valeur d'adhérence de la suite $(g^n(x') - g^n(y'))_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(\|g^n(x') - g^n(y')\|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\|x - y\|$. En déduire que g est une isométrie.
3. On suppose maintenant que g est une isométrie. Montrer que g est surjective. Donner un contre-exemple lorsque K est seulement bornée.

Exercice 178

Centrale MP

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

1. Pour un compact K non vide, on pose $\delta(K) = \sup_{(x,y) \in K^2} \|x - y\|$. Montrer que $\delta(K)$ est bien défini. La borne supérieure est-elle atteinte ?
2. Pour $a \in E$, on note \mathcal{S}_a l'ensemble des compacts de E symétriques par rapport à a . Pour B compact de E , on pose

$$T(B) = \left\{ x \in B \mid \forall y \in B, \|x - y\| \leq \frac{1}{2} \delta(B) \right\}$$

Montrer que T induit une application de \mathcal{S}_a dans \mathcal{S}_a .

3. Soit $B_0 \in \mathcal{S}_a$. On pose $B_{n+1} = T(B_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\bigcap_{n \geq 0} B_n$.
4. En déduire que toute isométrie de E conserve les milieux.
Remarque : une isométrie de E est une application $u : E \rightarrow E$ telle que $\|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$ pour tout $(x, y) \in E^2$.

Exercice 179

Mines MP

Soit K une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé et $f : K \rightarrow K$ telle que

$$\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Soit (x_n) une suite de premier terme $x_0 \in K$ et telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (x_n) converge vers l'unique point fixe de f .
3. Donner un contre-exemple en ne supposant plus K compact.

Exercice 180 ★★★

Principe du maximum pour les polynômes (X 2019)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note

$$B = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\} \quad \text{et} \quad S = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

Montrer que

$$\max_{z \in B} |P(z)| = \max_{z \in S} |P(z)|$$

Exercice 181

X MP 2010

Soit A une partie convexe et dense de \mathbb{R}^n . Montrer que $A = \mathbb{R}^n$.

Exercice 182

ENS MP 2010

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

- (i) le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x \mapsto x^{a_n})_{n \geq 0}$ est dense dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$

$$\text{pour la norme } \|\cdot\|_2 : f \mapsto \sqrt{\int_0^1 f^2};$$

- (ii) la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ diverge.

Exercice 183

Mines MP

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que \overline{F} est encore un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit H un hyperplan de E . Montrer que H est fermé ou dense dans E .

Exercice 184 ★★★

CCP MP 2016

Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels distincts ($n \geq 1$). On pose $N(P) = \sum_{k=0}^n |P(\alpha_k)|$. Montrer que N est une norme non euclidienne sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 185 ★★★

CCP MP 2019

Soit E un espace préhilbertien réel muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

On dit qu'une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge *fortement* vers $x \in E$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0$ et que (x_n) converge *faiblement* vers x si $\forall y \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n - x, y \rangle = 0$.

1.
 - a. Montrer que si (x_n) converge faiblement, sa limite est unique.
 - b. Montrer que la convergence forte implique la convergence faible.
2. Montrer que (x_n) converge fortement vers x si et seulement si (x_n) converge faiblement vers x et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = \|x\|$.
3. Montrer que, en dimension finie, ces deux modes de convergence sont équivalents.
4. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 186 ★★★

Centrale PSI 2010

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_{\infty} = \sup_{[0,1]} |f|$ et $\|f\|_2 = \left(\int_{[0,1]} f^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

1. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall f \in E, \|f\|_2 \leq b \|f\|_{\infty}$.
2. Soit V un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall f \in V, \|f\|_{\infty} \leq c \|f\|_2$.
3. Soit V un sous-espace vectoriel de E . On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall f \in V, \|f\|_{\infty} \leq n \|f\|_2$. Montrer que V est de dimension finie et que $\dim V \leq n^2$.

Exercice 187 ★★★

D'après Centrale MP 2006

On note E l'ensemble des fonctions f de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose

$$N_{\infty}(f) = \sup_{[0,1]} |f| \quad N(f) = N_{\infty}(f + f'') \quad N_1(f) = N_{\infty}(f) + N_{\infty}(f'')$$

1. Montrer que N_{∞} , N et N_1 sont des normes sur E .
2. Montrer que N_{∞} n'est équivalente ni à N ni à N_1 .
3. Soit $f \in E$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)(f(t) + f''(t)) dt$$

4. Montrer que N et N_1 sont équivalentes.

Exercice 188 ★★★

TPE-EIVP MP 2012

On pose pour une partie A de \mathbb{R} et $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_A(P) = \sup_{x \in A} |P(x)|$.

A quelle condition nécessaire et suffisante N_A est-elle une norme sur $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 189

CCP 2013

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} que l'on munit de la norme uniforme. On pose

$$A = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0, \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \right\}$$

1. Montrer que A est une partie fermée de E .
2. Montrer que pour tout $f \in A$, $\|f\|_\infty > 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'on peut choisir $\alpha \in]0, 1]$ tel que la fonction

$$f_n : x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{n}\right) x & \text{si } x \leq \alpha \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

appartienne à A .

4. En déduire la distance $d(0, A)$.

Exercice 190 ★★

Petites Mines MP 2016

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On pose

$$O = \{f \in E \mid f(1) > 0\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ f \in E, \int_0^1 f(t) dt \leq 0 \right\}$$

1. Montrer que O est ouvert pour $\|\cdot\|_\infty$.
2. Montrer que F est fermé pour $\|\cdot\|_\infty$ et pour $\|\cdot\|_1$.
3. O est-il ouvert pour $\|\cdot\|_1$?

Exercice 191 ★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$, on pose $\|P\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$. Soit $b \in \mathbb{C}$. On définit l'application $f : P \in E \mapsto P(b)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Etudier la continuité de f et calculer sa norme subordonnée le cas échéant.

Espaces préhilbertiens réels

Exercice 192 ★★★

ENS MP 2010

Montrer que $\Phi : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ qui à une matrice associe sa plus grande valeur propre est une application convexe.

Exercice 193 ★★★

ENS MP 2010

Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de B .

Exercice 194 ★★★★★

Banque Mines-Ponts MP 2021

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

- (i) $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \text{Sp}(A)^2, \lambda + \mu \neq 0$;
- (ii) $\forall B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \exists ! M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), AM + MA = B$.

Exercice 195 ★★★

Banque Mines-Ponts MP 2021

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont les coefficients diagonaux sont nuls et D une matrice diagonale.

Montrer que $S + D$ est semblable à D si, et seulement si, S est nulle.

Exercice 196

CCINP (ou CCP) PC 2019

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M^n = 0$.

1. Montrer que si M est symétrique, alors $M = 0$.
2. Montrer que si $M^T M = M M^T$, alors $M = 0$.

Exercice 197 ★★★

ENS MP

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (e_1, \dots, e_n) une base orthogonale de \mathbb{R}^n .

1. Montrer qu'il existe un vecteur u de \mathbb{R}^n non nul tel que les projetés orthogonaux de e_1, \dots, e_n sur $\text{vect}(u)$ aient la même norme.
2. Montrer que cette norme commune est indépendante du vecteur u choisi et l'exprimer en fonction de $\|e_1\|, \dots, \|e_n\|$.

Exercice 198

CCINP (ou CCP) MP 2021

Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $(P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ est un produit scalaire sur E .
2. Calculer $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Donner une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur F .
5. Montrer que :

$$\forall P \in E, \left| \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \right| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t} dt}$$

Exercice 199 ★★★

ENS MP 2010

Soient E un espace euclidien et x_1, \dots, x_p des vecteurs de E . Pour $x \in E$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^p \|x - x_i\|^2$. Montrer que f atteint son minimum en un unique point que l'on précisera.

Exercice 200 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$. On rappelle que $A_0 = 1$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$.

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer A_n en distinguant deux cas selon la parité de n .
3. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Calculer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

Exercice 201 ★★★★★

ENS MP 2010

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les matrices de $O_n(\mathbb{R})$ laissant stable $(\mathbb{R}_+)^n$.

Exercice 202 ★★

Petites Mines 2009

Soit u une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E . On pose $v = \text{Id}_E - u$. Montrer que $\text{Im } v$ et $\text{Ker } v$ sont orthogonaux et supplémentaires.

Exercice 203 ★★

Mines MP 2011

Soient E un espace euclidien de dimension 3 ainsi que deux éléments f et g de $\text{SO}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que f et g sont soit deux rotations de même axe soit des symétries par rapport à des droites orthogonales entre elles.

Exercice 204 ★★

Banque Mines-Ponts MP 2018

Soit f une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E .

1. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$.
2. En déduire que $(f - \text{Id}_E)^2 = 0 \implies f = \text{Id}_E$.

Exercice 205 ★★★★★

Banque Mines-Ponts MP 2018

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit \mathcal{E} l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T = A^2 + A - I_n$.

On appelle a l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à A .

1. Décrire a si A est symétrique, avec $A \in \mathcal{E}$.
2. Décrire a si on ne suppose plus A symétrique, avec $A \in \mathcal{E}$.

Exercice 206 ★★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$$

1. Montrer que la matrice de u dans une base orthonormale de E est antisymétrique.
2. Montrer que $(\text{Ker } u)^\perp$ est stable par u .
3. Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ avec N inversible.
4. Montrer que le rang de u est pair.

Exercice 207 ★★★

Mines-Ponts MP 2016

Soit E un espace euclidien de dimension finie. On considère des vecteurs unitaires a et b de E formant une famille libre.

Réduire l'endomorphisme

$$\phi: \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b \end{cases}$$

Exercice 208 ★★

CCP MP 2016

Soit (u_1, \dots, u_n) une base de E . On pose $f(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k$ pour $x \in E$.

1. Montrer que f est un endomorphisme auto-adjoint défini positif.
2. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint, défini positif telle que $g^2 = f^{-1}$.
3. Montrer que $(g(u_1), \dots, g(u_n))$ est une base orthonormale de E .

Exercice 209

Soit E un espace euclidien.

1. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que $\text{Ker}(u)^\perp = \text{Im}(u)$.
2. Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer que pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x \rangle = 0 \iff u(x) = 0_E$.
3. Soit $(u, v) \in \mathcal{S}^+(E)^2$.
 - a. Montrer que $u + v \in \mathcal{S}^+(E)$.
 - b. Montrer que $\text{Ker}(u + v) = \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)$.
 - c. Montrer que $\text{Im}(u + v) = \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$.

Exercice 210 ★★★

Soit E un espace euclidien.

1. Soit u un endomorphisme auto-adjoint de E . Montrer que $v = \exp(u)$ est un auto-morphisme auto-adjoint défini positif de E .
2. Soit v un endomorphisme auto-adjoint défini positif de E . Montrer qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint de E tel que $v = \exp(u)$. Cet endomorphisme u est-il unique ?

Calcul différentiel

Exercice 211 ★★★★★

Banque Mines-Ponts MP 2019

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et E^* son dual.

On définit

$$D = \{\varphi \in E^*, \forall (f, g) \in E^2, \varphi(fg) = f(0)\varphi(g) + g(0)\varphi(f)\}$$

1. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de E^* non réduit à 0.
2. Montrer que l'application $a \in \mathbb{R}^n \mapsto (f \in E \mapsto df(0) \cdot a)$ est injective.
3. Donner une base de D .

Indication : On pourra utiliser la relation fondamentale de l'analyse pour $t \in \mathbb{R} \mapsto f(tx)$.

Exercice 212 ★★★

Banque Mines-Ponts MP 2018

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable, telle que $df(x)$ soit injective pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et vérifiant $\|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$, où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n .

Le but de cet exercice est de montrer que f est surjective. On pose pour cela $g: x \mapsto \|f(x) - a\|^2$ où $a \in \mathbb{R}^n$.

1. Justifier que g est différentiable sur \mathbb{R}^n et calculer $dg(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que g admet un minimum sur \mathbb{R}^n .
3. Conclure.

Exercice 213 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2018

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un endomorphisme auto-adjoint f de E dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

1. Montrer que : $\forall h \in E \setminus \{0_E\}, (f(h) | h) > 0$.
2. Soient $u \in E$ fixé et $g: x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) | x) - (u | x)$.
 - a. Montrer que g est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point de E .
 - b. Montrer qu'il existe un unique vecteur $z_0 \in E$ point critique de g .
 - c. Montrer que g admet un minimum global en z_0 .

Exercice 214 ★★

CCP PSI 2015

On considère les ensembles

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$$

et

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < y < 1\}$$

ainsi que la fonction F définie sur K par

$$F(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y(1-x) & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. La fonction F admet-elle des extrema locaux sur T ?
2. La fonction F admet-elle un minimum sur K ? un maximum sur K . Si oui, déterminer leurs valeurs.

Exercice 215 ★★★

Mines-Ponts MP 2018

Soit E un espace euclidien, que l'on munit de sa norme euclidienne, et $f : E \rightarrow E$ différentiable, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $df(x)$ soit injective, et vérifiant $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

Le but de cet exercice est de montrer que f est surjective. On pose pour cela $g : x \in E \mapsto \|f(x) - a\|^2$ où $a \in E$.

1. Pour $x \in E$, calculer $dg(x)$.
2. Montrer que g admet un minimum sur E .
3. Conclure.

Exercice 216 ★★

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy$. Déterminer le minimum et le maximum éventuels de f sur $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$.

Exercice 217 ★★

Etudier les extrema globaux de $f : (x, y) \mapsto 2x - y$ sous la contrainte $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$.

Exercice 218 ★★

CCINP (ou CCP) PSI 2019

Soit la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}$.

1. f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
2. f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 ?
3. Étudier l'existence de dérivées partielles secondes de f en $(0, 0)$.