Semaine du 01/03 au 05/03

1 Cours

Applications linéaires

Définition et premières propriétés Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'une forme linéaire. Exemples en géométrie, dans les espaces de fonctions, dans les espaces de suites et dans les $\mathbb{K}^n$. Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Structure d'anneau de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Isomorphismes Définition d'un isomorphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme. Définition d'un automorphisme et groupe linéaire GL(E).

Images directe et réciproque par une application linéaire L'image directe ou réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel. Noyau et image d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le noyau et l'image. Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base. Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et si $\mathrm{E} = \mathrm{S} \bigoplus \operatorname{Ker} f$, alors f induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Ker} f$.

Image d'une famille de vecteurs L'image d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image. Une application linéaire est injective/surjective/bijective si et seulement si l'image d'une base est une famille libre/une famille génératrice/une base.

Applications linéaires en dimension finie En dimension finie, deux espaces sont de même dimension si et seulement si ils sont isomorphes. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le rang. Si f est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de **même** dimension **finie**, alors f bijective $\iff$ f injective $\iff$ f surjective. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme. Si E et F sont de même dimension finie, $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est bijective si et seulement si il existe $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_\mathrm{F}$ **ou** $g \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

2 Méthodes à maîtriser

- Calculer avec des endomorphismes comme dans tout anneau **non commutatif** et **non intègre**.
- Utiliser le noyau ou l'image d'une application linéaire pour prouver son injectivité ou sa surjectivité.
- Lorsque $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, les équivalences
  - $x \in \operatorname{Ker} f \iff f(x) = 0_\mathrm{F}$;
  - $y \in \operatorname{Im} f \iff \exists x \in \mathrm{E},\ y = f(x)$;

  doivent être automatiques.
- Utiliser la dimension pour faciliter la preuve de la bijectivité (injectivité + espaces d'arrivée et de départ de même dimension)
- Utiliser le théorème du rang pour passer de résultats sur le noyau à des résultats sur l'image et vice-versa.

3 Questions de cours

BCCP 01

1. On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Montrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini de $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

BCCP 42

1. Résoudre l'équation différentielle (H) : $2xy' - 3y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Résoudre l'équation différentielle (E) : $2xy' - 3y = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}_+$?

BCCP 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\arctan x)$.

BCCP 56

On pose pour $x \in]1,+\infty[$, $\mathrm{H}(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1. Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en 1.
3. En utilisant cette fonction u, montrer que H admet une limite finie en 1^+.

BCCP 62

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 - f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})$.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

BCCP 64

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. Démontrer que : $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f \implies \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2 \iff \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.
   (b) Démontrer que : $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2 \implies \mathrm{E} = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$.

BCCP 89

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. On se donne $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $\mathrm{S} = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

BCCP 94

1. Enoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{N}$. Montrer que $(a \mid c \text{ ET } b \mid c) \iff ab \mid c$.
3. On considère le système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} x \equiv 6[17] \\ x \equiv 4[15] \end{cases}$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de $(\mathcal{S})$ dans $\mathbb{Z}$.
   (b) Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système $(\mathcal{S})$.

Endomorphisme nilpotent Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E. Montrer que $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$.

Equation complexe Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $(z-i)^n = (z+i)^n$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction tan.

Développements limités usuels Donner sans preuve des développements limités usuels au choix de l'examinateur.

Equations diophantiennes linéaires Résoudre une équation diophantienne du type $ax + by = c$ au choix de l'examinateur.

Equations du second degré Résoudre une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$ au choix de l'examinateur.

Exponentielle complexe Résoudre une équation du type $e^z = a$ au choix de l'examinateur.

Extraction de racines Résoudre une équation du type $z^n = a$ au choix de l'examinateur.