Devoir à la maison n°02 : corrigé

Solution 1.

1. Si k est un multiple de n, $\omega^r = 1$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk} = n$.

   Si k n'est pas un multiple de n, $\omega^r \neq 1$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk} = \frac{1-\omega^{rn}}{1-\omega^r} = 0$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\phi(k+n) = \omega^{(k+n)^2} = \omega^{k^2}\omega^{2kn}\omega^{n^2} = \omega^{k^2} = \phi(k)$.

3. On a $G = \sum_{k=0}^{n-1} \phi(k)$. Comme ϕ est n-périodique, la somme reste la même si on somme sur n entiers consécutifs. On a donc $G = \sum_{k=j}^{j+n-1} \omega^{k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+j)^2}$.

4. Puisque $\omega \in \mathbb{U}$, $\overline{\omega} = \frac{1}{\omega}$. On en déduit que $\overline{G} = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-j^2}$.

$$G\overline{G} = G\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-j^2} = \sum_{j=0}^{n-1} G\omega^{-j^2}$$

   Mais en utilisant la question précédente

$$\begin{aligned}
G\overline{G} &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+j)^2}\omega^{-j^2} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}\omega^{2kj} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{2kj}
\end{aligned}$$

   Puisque n est impair, $2k$ est un multiple de n *si et seulement si* k est lui-même un multiple de n. Or $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc $2k$ est un multiple de n *si et seulement si* $k = 0$. En utilisant la première question, on en déduit que $G\overline{G} = n$ puis $|G| = \sqrt{n}$.

Solution 2.

1. On trouve $S_0 = \binom{0}{0} = 1$, $S_1 = \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 3$ et $S_2 = \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \binom{2}{0} + \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 7$.

2. D'après la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

   La suite (2^n) étant géométrique,

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1$$

3. On procède comme indiqué dans l'énoncé. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}$$

D'après la question précédente,

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} 2^j = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1$$

Solution 3.

1. Clairement, $P_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!$.

2. P_n est le produit des entiers pairs compris entre 1 et $2n$ tandis que Q_n est le produit des entiers impairs compris entre 1 et $2n$. Il en résulte que $P_n Q_n$ est le produit de tous les entiers compris entre 1 et $2n$. Ainsi $P_n Q_n = (2n)!$.

3. On en déduit que $Q_n = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.