

NOM :

Prénom :

Note :

1. Justifier que $x \mapsto \arctan x$ est développable en série entière et donner le rayon de convergence de cette série entière.

On sait que $\sum (-1)^n x^{2n}$ est de rayon de convergence 1 (série géométrique) et que

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

On peut primitiver terme à terme cette série entière sur l'intervalle ouvert de convergence

$$\forall x \in]-1, 1[, \arctan(x) = \arctan(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

et on sait que le développement en série entière est de même rayon de convergence que le précédent, à savoir 1. ■

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n \cos(n) z^n$.

Notons R le rayon de convergence recherché. On sait que $\sum n \cos(n) z^n$ est de même rayon de convergence que $\sum \cos(n) z^n$. Or $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée donc $R \geq 1$. Mais elle ne converge pas vers 0 donc $R \leq 1$. Finalement $R = 1$. ■

3. On lance une infinité de fois une pièce équilibrée, les lancers étant supposés indépendants. Déterminer rigoureusement la probabilité de n'obtenir que des «face».

Notons F_n l'événement «on a obtenu un face au $n^{\text{ème}}$ lancer». L'événement dont on recherche la probabilité est $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$. Posons

$A_n = \bigcap_{k=1}^n F_k$. Alors $A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ et la suite (A_n) est clairement décroissante. Ainsi, par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Par indépendance des événements F_n ,

$$\mathbb{P}(A_n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(F_k) = \frac{1}{2^n}$$

On en déduit que $\mathbb{P}(A) = 0$. ■

4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p . On suppose $\frac{1}{2} < p \leq 1$. Justifier que $Y = 2^X$ admet une espérance finie et la calculer.

D'après la formule de transfert, Y admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum 2^n \mathbb{P}(X = n)$ converge. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n \mathbb{P}(X = n) = 2^n q^{n-1} p = 2(2q)^{n-1} p$ avec $0 \leq q = 1 - p < \frac{1}{2}$. Ainsi $0 \leq 2q < 1$ donc la série géométrique $\sum 2(2q)^{n-1} p$ converge. D'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2p(2q)^{n-1} = 2p \sum_{n=0}^{+\infty} (2q)^n = \frac{2p}{1-2q} = \frac{2p}{2p-1}$$

■

5. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est la probabilité que X soit paire ?

$$\mathbb{P}(X \in 2\mathbb{N}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X = 2n\}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = e^{-\lambda} \text{ch}(\lambda) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}$$

■

6. On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$. Justifier que f est définie et continue sur $] -1, 1[$.

Le rayon de convergence de $\sum \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$ est 1 (en utilisant la règle de d'Alembert par exemple). On sait donc que f est définie et continue sur $] -1, 1[$.

Soit $x \in [0, 1]$. La suite de terme général $\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ est décroissante et de limite nulle donc $\sum \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées. En posant $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$, $\sum f_n$ converge simplement vers f sur $[0, 1]$ donc f est définie sur $[0, 1]$ et donc finalement sur $] -1, 1[$. Toujours d'après le critère spécial des séries alternées,

$$\forall x \in [0, 1], \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

puis, en posant $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$,

$$\|R_n\|_{\infty, [0, 1]} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, [0, 1]} = 0$ i.e. (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$. On en déduit que $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$. Comme chaque f_n est continue sur $[0, 1]$, f est continue sur $[0, 1]$. Finalement, f est définie et continue sur $] -1, 1[$.

■