

# DEVOIR À LA MAISON N°02

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1 – D'après Petites Mines 2002

### Partie I –

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(0) = 1$  et  $f(t) = \frac{\arctan t}{t}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$ .

- I.1** Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et paire.
- I.2** Donner le développement limité de  $f$  à l'ordre 1 en 0. En déduire que  $f$  est dérivable en 0 et donner  $f'(0)$ .
- I.3** Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $f'(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$ .
- I.4** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du = -\frac{1}{2}t^2 f'(t)$$

En déduire le sens de variation de  $f$ .

- I.5** Tracer la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé (unité : 2cm). On précisera les éventuelles branches infinies.

### Partie II –

Soit  $\phi$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\phi(0) = 1$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\phi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ .

- II.1** Montrer que  $\phi$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et paire.
- II.2** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \leq \phi(x) \leq 1$ . On pourra commencer par supposer  $x > 0$ .
- II.3** Montrer que  $\phi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\phi'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - \phi(x))$ .  
Montrer que  $\phi$  est dérivable en 0 avec  $\phi'(0) = 0$ . Donner les variations de  $\phi$ .
- II.4** Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$ . En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$ .
- II.5** Tracer la courbe représentative de  $\phi$  dans un repère orthonormé (unité : 2cm). On précisera les éventuelles branches infinies.

**Partie III –**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $u_{n+1} = \phi(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**III.1** Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$ .

**III.2** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$|\phi'(x)| \leq \frac{1}{x}(1 - f(x)) = \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

On pourra utiliser les questions **II.2** et **II.3**.

En déduire que  $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  puis que cette inégalité reste vraie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**III.3** Montrer que l'équation  $\phi(x) = x$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ . On note  $\alpha$  cette solution. Montrer que  $\alpha \in ]0, 1]$ .

**III.4** Prouver que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ .

En déduire que  $(u_n)$  est convergente et préciser sa limite.

**Partie IV –**

On considère l'équation différentielle  $x^2 y' + xy = \arctan(x)$ .

**IV.1** Résoudre cette équation différentielle sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

**IV.2** Montrer que  $\phi$  est l'unique solution de cette équation différentielle sur  $\mathbb{R}$ .