

DEVOIR SURVEILLÉ N°04 : CORRIGÉ

SOLUTION 1.

1. Tout d'abord,

$$\tan(\arctan a - \arctan b) = \frac{\tan(\arctan a) - \tan(\arctan b)}{1 + \tan(\arctan a) \tan(\arctan b)} = \frac{a - b}{1 + ab}$$

De plus a et b sont positifs donc $\arctan a$ et $\arctan b$ appartiennent à $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi $\arctan a - \arctan b$ appartient à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On en déduit que

$$\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a - b}{1 + ab}\right)$$

2. C'est une simple application de la question précédente. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\arctan(k+1) - \arctan(k-1) = \arctan\left(\frac{(k+1) - (k-1)}{1 + (k+1)(k-1)}\right) = \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right)$$

3. La question précédente permet de faire apparaître un télescopage.

$$u_n = \sum_{k=1}^n \arctan(k+1) - \arctan(k-1) = \arctan(n+1) + \arctan(n) - \arctan(1) - \arctan(0) = \arctan(n+1) + \arctan(n) - \frac{\pi}{4}$$

Puisque $\lim_{+\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3\pi}{4}$$

SOLUTION 2.

1. Soit θ un argument de $a + ib$ (il en existe puisque $a + ib \neq 0$). Alors $\cos \theta = \frac{a}{|a+ib|}$ et $\sin \theta = \frac{b}{|a+ib|}$. Ainsi

$$\tan \theta = \frac{b}{a} = \tan(\arctan \frac{b}{a})$$

puis

$$\theta \equiv \arctan \frac{b}{a} [\pi]$$

2. Il s'agit d'un simple calcul. En utilisant la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned} (5+i)^4 &= \binom{4}{0} 5^4 i^0 + \binom{4}{1} 5^3 i + \binom{4}{2} 5^2 i^2 + \binom{4}{3} 5 i^3 + \binom{4}{4} i^4 \\ &= 5^4 + 4 \cdot 5^3 i - 6 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 i + 1 \\ &= 625 + 500i - 150 - 20i + 1 \\ &= 476 + 480i \\ &= 2 \cdot (1+i) \cdot (239+i) \end{aligned}$$

3. Puisque $(5+i)^4 = 2 \cdot (1+i) \cdot (239+i)$,

$$\arg((5+i)^4) \equiv \arg(2 \cdot (1+i) \cdot (239+i)) [2\pi]$$

ou encore

$$4 \arg(5+i) \equiv \arg(1+i) + \arg(239+i) [2\pi]$$

A fortiori

$$4 \arg(5+i) \equiv \arg(1+i) + \arg(239+i) [\pi]$$

D'après la première question,

$$\arg(5+i) \equiv \arctan \frac{1}{5}[\pi]$$

donc

$$4 \arg(5+i) \equiv 4 \arctan \frac{1}{5}[4\pi]$$

et a fortiori

$$4 \arg(5+i) \equiv 4 \arctan \frac{1}{5}[\pi]$$

Toujours d'après la première question,

$$\arg(239+i) \equiv \arctan \frac{1}{239}[\pi]$$

Enfin

$$\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

donc a fortiori

$$\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$$

Finalement

$$4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$$

4. Puisque $0 < \frac{1}{5} < \frac{\sqrt{3}}{3}$, $0 < \arctan \frac{1}{5} < \frac{\pi}{6}$ par stricte croissance de \arctan . De même, $0 < \arctan \frac{1}{239} < \frac{\pi}{2}$. Ainsi

$$-\frac{\pi}{2} < 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) < 4 \cdot \frac{\pi}{6}$$

A fortiori

$$\frac{\pi}{4} - \pi < 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) < \frac{\pi}{4} + \pi$$

5. Posons $x = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$. D'après la question 3, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Mais d'après la question 4, $\frac{\pi}{4} - \pi < x < \frac{\pi}{4} + \pi$ i.e. $-1 < k < 1$. Or k est entier donc $k = 0$ puis $x = \frac{\pi}{4}$.

SOLUTION 3.

1. a.

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sh} x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow e^x - e^{-x} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{2x} + e^x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (e^x)^2 + e^x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $X^2 + X - 1 = 0$ sont $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Puisque $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq 0$ et que l'exponentielle est strictement positive, l'unique solution de l'équation initiale est $\alpha = \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

b. En remarquant que $\operatorname{sh} \alpha = -\frac{1}{2}$

$$f(\alpha) = \operatorname{ch}^2 \alpha + \operatorname{sh} \alpha = 1 + \operatorname{sh}^2 \alpha + \operatorname{sh} \alpha = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

c. Comme ch est dérivable sur \mathbb{R} , ch^2 l'est aussi. De plus, sh est dérivable sur \mathbb{R} donc $f = \operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = \operatorname{ch} x (2 \operatorname{sh} x + 1)$$

La fonction sh étant strictement croissante sur \mathbb{R} , on en déduit que

$$\blacktriangleright \forall x < \alpha, 2 \operatorname{sh} x + 1 < 0,$$

► $\forall x > \alpha, 2 \operatorname{sh} x + 1 > 0$.

Bien évidemment ch est strictement positive sur \mathbb{R} . D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Signe de f'	$-$	0	$+$
Variations de f	$+\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$

REMARQUE. On obtient facilement la limite de f en $+\infty$ puisque $\lim_{+\infty} \operatorname{ch} = \lim_{+\infty} \operatorname{sh} = +\infty$. Pour déterminer la limite en $-\infty$, on peut remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \operatorname{ch}^2 x \left(1 + \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch} x} \right)$$

Puisque $\lim_{-\infty} \operatorname{th} = 1$ et $\lim_{-\infty} \operatorname{ch} = +\infty$, $\lim_{+\infty} 1 + \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch} x} = 1$ puis $\lim_{+\infty} f = +\infty$. ■

- d. Puisque f est décroissante sur $] -\infty, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha, +\infty[$, $f(x) \geq f(\alpha)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

REMARQUE. On n'utilise en aucun cas la continuité de f ni un quelconque théorème des valeurs intermédiaires. ■

Puisque $f(\alpha) = \frac{3}{4} > 0$, on a a fortiori $f > 0$ sur \mathbb{R} .

2. a. sh est dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} et \exp est dérivable sur \mathbb{R} . Par conséquent $x \mapsto e^{\operatorname{sh} x}$ est dérivable sur \mathbb{R} . Puisque $x \mapsto x + 1$ est évidemment dérivable sur \mathbb{R} , g l'est également. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = e^{\operatorname{sh} x} \operatorname{ch} x - 1$$

- b. Comme dans la question 2.a, $x \mapsto e^{\operatorname{sh} x}$ est dérivable sur \mathbb{R} . ch est également dérivable sur \mathbb{R} donc g' l'est également.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g''(x) = e^{\operatorname{sh} x} \operatorname{ch}^2 x + e^{\operatorname{sh} x} \operatorname{sh} x = e^{\operatorname{sh} x} f(x)$$

- c. Puisque $f > 0$ sur \mathbb{R} , $g'' > 0$ sur \mathbb{R} . g' est donc strictement croissante sur \mathbb{R} . De plus, $g'(0) = 0$ donc $g'(x) < 0$ pour $x < 0$ et $g'(x) > 0$ pour $x > 0$. On en déduit que g est strictement décroissante sur \mathbb{R}_- et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . Comme $g(0) = 0$, $g \geq 0$ sur \mathbb{R} .
- d. Soit $x \in [0, 1]$. D'après la question 2.c, $g(x) \geq 0$ et donc $e^{\operatorname{sh} x} \geq 1 + x$. Mais on a également $g(-x) \geq 0$ i.e. $e^{-\operatorname{sh} x} \geq 1 - x$ puisque sh est impaire. Or $1 - x > 0$, donc on obtient en passant à l'inverse

$$\frac{1}{1-x} \geq \frac{1}{e^{-\operatorname{sh} x}} = e^{\operatorname{sh} x}$$

Les deux inégalités obtenues nous donnent l'encadrement

$$1 + x \leq e^{\operatorname{sh} x} \leq \frac{1}{1-x}$$

- a. Pour tout $k \in \llbracket n, np \rrbracket$,

$$0 \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$$

et a fortiori $\frac{1}{k} \in [0, 1]$. On peut donc utiliser la question 2.d pour affirmer que pour tout $k \in \llbracket n, np \rrbracket$

$$1 + \frac{1}{k} \leq \exp\left(\operatorname{sh} \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{k}}$$

ou encore

$$\frac{k+1}{k} \leq \exp\left(\operatorname{sh} \frac{1}{k}\right) \leq \frac{k}{k-1}$$

b. Puisque l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$e^{S_n} = \prod_{k=n}^{np} \exp\left(\operatorname{sh} \frac{1}{k}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. D'après la question 2.b, pour tout $k \in \llbracket n, np \rrbracket$,

$$\frac{k+1}{k} \leq e^{\operatorname{sh} \frac{1}{k}} \leq \frac{k}{k-1}$$

On peut multiplier membre à membre ces inégalités puisque tous les membres sont positifs de sorte que

$$\prod_{k=n}^{np} \frac{k+1}{k} \leq \prod_{k=n}^{np} \exp\left(\operatorname{sh} \frac{1}{k}\right) \leq \prod_{k=n}^{np} \frac{k}{k-1}$$

Le membre central n'est autre que e^{S_n} et par télescopage, le membre de gauche est $\frac{np+1}{n}$ tandis que celui de droite est $\frac{np}{n-1}$. On en déduit bien que

$$\frac{np+1}{n} \leq e^{S_n} \leq \frac{np}{n-1}$$

c. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{np+1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{np}{n-1} = p$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{S_n} = p$. Par continuité de \ln , (S_n) converge vers $\ln(p)$.

SOLUTION 4.

1. Puisque ch est paire, f est impaire.
2. L'application $\varphi: x \mapsto \operatorname{th}(x) - \frac{1}{x}$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* (différence d'une fonction strictement croissante et d'une fonction strictement décroissante). De plus, $\lim_{0^+} \varphi = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \varphi = 1$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, φ s'annule une unique fois sur \mathbb{R}_+^* . L'équation $\operatorname{th} x = \frac{1}{x}$ admet donc une unique solution sur \mathbb{R}_+^* .
3. Par définition, $\operatorname{th} \alpha = 1/\alpha$. Par ailleurs, $f(1/\alpha) = \frac{\operatorname{ch} \alpha}{\alpha}$. Mais

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha} = 1 - \operatorname{th}^2 \alpha = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}$$

Comme $\operatorname{ch} \alpha$ et α sont positifs,

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

Enfin

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

4. Tout d'abord, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch}(1/x) = \operatorname{ch}(0) = 1$ donc

$$\lim_{+\infty} f = +\infty$$

Ensuite, en posant $u = \frac{1}{x}$, $u \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ et

$$f(x) = \frac{\operatorname{ch} u}{u} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^u}{u} + \frac{e^{-u}}{u} \right)$$

Par croissances comparées, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$ et par opérations, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{-u}}{u} = 0$. Finalement, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} u}{u} = +\infty$ et donc

$$\lim_{0^+} f = +\infty$$

5. f est clairement dérivable sur \mathbb{R}_+^* (essentiellement car ch l'est sur \mathbb{R}) et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or on a vu que φ était strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* et que $\varphi(\alpha) = 0$ donc $\varphi(1/x) > 0$ pour $x < 1/\alpha$ et $\varphi(1/x) < 0$ pour $x > 1/\alpha$. Comme ch est strictement positive sur \mathbb{R} , on en déduit le signe de f' sur \mathbb{R}_+^* et donc le tableau de variations suivant.

x	0	$1/\alpha$	$+\infty$	
Signe de f'		-	0	+
Variations de f		$+\infty$	\searrow $\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ \nearrow	$+\infty$

6. Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(x)}{x} = \text{ch}(1/x)$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Par ailleurs,

$$f(x) - x = x \left(\text{ch}\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right)$$

Or, comme ch est dérivable en 0,

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{ch } u - 1}{u} = \text{ch}'(0) = \text{sh}(0) = 0$$

puis, en posant $u = 1/x$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\text{ch}\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) = 0$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$ de sorte que la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = x$.

7. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) - x = x \left(\text{ch}\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right)$$

Or $\text{ch } u > 1$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$ donc $f(x) - x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. La courbe de f est donc au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur \mathbb{R}_+^* .

8. On utilise le fait que f est impaire : sa courbe est donc symétrique par rapport à l'origine.

