Devoir à la maison n° 14 : corrigé

Problème 1 — Dérivation et polynômes

Partie I –

1. On a $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Par suite, en prenant $\ell = 1$, f est continue en 0.

2. Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto x$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.
Puisque $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x)$ et $\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x^2)$, $x\cos x - \sin x \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$.
Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$. D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

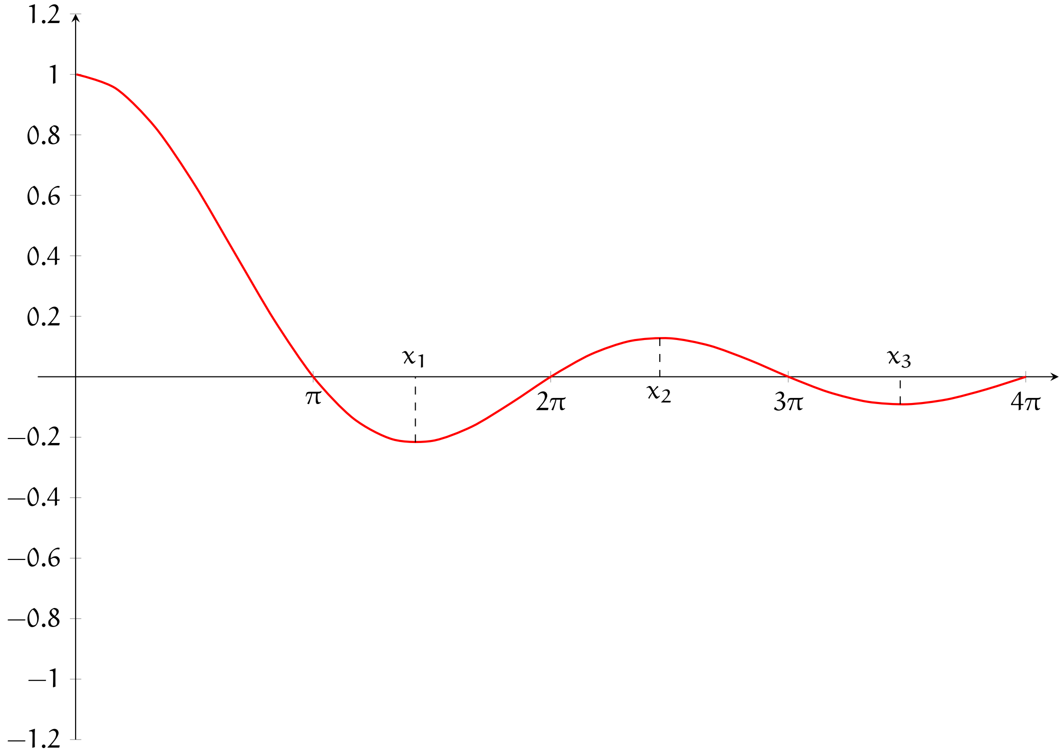
> **Remarque.** Si on n'a pas encore vu le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, on montre d'abord que f est dérivable en 0. En effet
> $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin x - x}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x}{6}$$
> En particulier, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ de sorte que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$. Puisque $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 = f'(0)$, f' est bien continue en 0. Finalement, on retrouve le fait que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. Soit $\varphi : x \mapsto x\cos x - \sin x$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = -x\sin x$. Ainsi φ' est de signe constant sur I_n et ne s'annule qu'aux bornes de I_n. Il s'ensuit que φ est strictement monotone sur I_n.
Sur I_n, φ est continue et strictement monotone donc établit une bijection de I_n dans $\varphi(I_n)$ qui est un intervalle. Or $\varphi(n\pi)\varphi((n+1)\pi) = -n(n+1)\pi^2 < 0$. Donc $0 \in \varphi(I_n)$ et il existe un unique réel x_n dans I_n tel que $\varphi(x_n) = 0$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n\pi \leqslant x_n \leqslant n\pi + \pi$ d'où $1 \leqslant \frac{x_n}{n\pi} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$. Le théorème des gendarmes prouve alors que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$ ce qui donne $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$.
Or φ est strictement décroissante sur I_0 et $\varphi(0) = 0$. Donc f' est négative sur I_0 et ne s'annule qu'en 0. Donc f est strictement décroissante sur I_0.
Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. Sur I_{2n}, φ est strictement décroissante et s'annule en x_{2n}. Donc f est strictement croissante sur $[2n\pi, x_{2n}]$ et strictement décroissante sur $[x_{2n}, (2n+1)\pi]$.
De même, sur I_{2n-1}, φ est strictement croissante et s'annule en x_{2n-1}. Donc f est strictement décroissante sur $[(2n-1)\pi, x_{2n-1}]$ et strictement croissante sur $[x_{2n-1}, 2n\pi]$.

6. La courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisse $n\pi$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.



Partie II –

1. Le calcul donne $g''(x) = \dfrac{-(x^2-2)\sin x - 2x\cos x}{x^3}$ pour tout $x > 0$.

2.

n	0	1	2
P_n	1	X	X^2-2
Q_n	0	1	$2X$

3. En dérivant la relation donnée par l'énoncé, on a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) = &\frac{P_n'(x)\sin^{(n)}(x) + P_n(x)\sin^{(n+1)}(x) + Q_n'(x)\sin^{(n+1)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+2)}(x)}{x^{n+1}} \\ &-(n+1)\frac{P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

comme $\sin^{(n)}(x) = -\sin^{(n+2)}(x)$, on obtient :

$$g^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)\sin^{(n+1)}(x) + Q_{n+1}(x)\sin^{(n+2)}(x)}{x^{n+2}}$$

avec

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= XP_n + XQ_n' - (n+1)Q_n \\ Q_{n+1} &= XQ_n - XP_n' + (n+1)P_n \end{aligned}$$

4. On isole le cas $n = 0$. $P_0 = 1$ donc P_0 est à coefficients entiers, de degré 0, de coefficient dominant 1 et pair. $Q_0 = 0$ donc Q_0 à coefficients entiers, de degré $-\infty$. Cela n'a pas de sens de parler de son coefficient dominant et il est aussi bien pair qu'impair.
Traitons maintenant le cas $n \geqslant 1$. Soit $\mathcal{H}_n$ la propriété :

P_n est de degré n de coefficient dominant 1, Q_n est de degré $n-1$ et de coefficient dominant n, P_n et Q_n sont à coefficients entiers, P_n a la parité de n, Q_n a la parité opposée de celle de n.

$\mathcal{H}_1$ est vraie. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors P_n, Q_n, P'_n et Q'_n sont à coefficients entiers donc P_{n+1} et Q_{n+1} aussi.
De plus, XP_n est de degré $n+1$ de coefficient dominant 1 et XQ'_n et Q_n sont de degré strictement inférieur à $n+1$ donc P_{n+1} est de degré $n+1$ de coefficient dominant 1.
Par ailleurs, XQ_n, XP'_n et $(n+1)P_n$ sont de degré n de coefficients dominants respectifs n, n et $n+1$ donc Q_{n+1} est degré n de coefficient dominant $n+1$.
Enfin, P_n a la parité de n et Q_n a la parité opposée à celle de n donc XP_n, XQ'_n sont de la parité opposée à celle de n donc de la parité de $n+1$ tandis que XQ_n et XP'_n sont de la parité de n donc de la parité opposée à celle de $n+1$. On en déduit que P_{n+1} a la parité de $n+1$ tandis que Q_{n+1} a la parité opposée à celle de $n+1$.
Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Ainsi $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. On a $P_3 = XP_2 + XQ'_2 - 3Q_2 = X^3 - 6X$ et $Q_3 = XQ_2 - XP'_2 + 3P_2 = 3X^2 - 6$.

6. Soit $\alpha_k = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $\beta_k = 2k\pi$. Comme pour tout $x > 0$, on a $U(x)\sin(x) + V(x)\cos(x) = 0$, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $U(\alpha_k) = 0$ et $V(\beta_k) = 0$. U et V admettent une infinité de racines donc sont égaux au polynôme nul.

7. En dérivant $n+1$ fois l'égalité, $xg(x) = \sin x$, on obtient pour tout $x > 0$,

$$xg^{(n+1)}(x) + (n+1)g^{(n)}(x) = \sin^{(n+1)}(x)$$

d'où en reportant les formules donnant $g^{(n)}(x)$ et $g^{(n+1)}(x)$:

$$(P_{n+1}(x) + (n+1)Q_n(x) - x^n)\sin^{(n+1)}(x) + ((n+1)P_n(x) - Q_{n+1}(x))\sin^{(n)}(x) = 0$$

Puisque à n fixé, l'une des expressions $\sin^{(n+1)}(x)$ ou $\sin^{(n)}(x)$ vaut $\pm\sin(x)$ tandis que l'autre vaut $\pm\cos x$, on peut appliquer le résultat de la question précédente et on a donc :

$$P_{n+1} + (n+1)Q_n - X^{n+1} = 0 \qquad\qquad (n+1)P_n - Q_{n+1} = 0$$

8. En reportant $Q_{n+1} = (n+1)P_n$ dans la définition de Q_{n+1}, on a $X(Q_n - P'_n) = 0$ ce qui donne $Q_n = P'_n$ par intégrité de $\mathbb{R}[X]$.
On a donc $P_{n+1} = X^{n+1} - (n+1)Q_n = XP_n + XP''_n - (n+1)Q_n$ ce qui donne $P_n + P''_n = X^n$ à nouveau par intégrité de $\mathbb{R}[X]$.
P_n est donc solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}_n : y'' + y = x^n$.

9. Si T est un polynôme non nul de degré p, $T + T''$ est aussi de degré p et non nul (car le degré de T'' est strictement inférieur à celui de T). Cela montre que Ψ est injectif et que si T appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, $\Psi(T)$ aussi.
Donc Ψ_n est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, cela implique que Ψ_n est bijectif.
Si Q est un polynôme quelconque, il existe un entier p tel que Q appartienne à $\mathbb{R}_p[X]$. Comme Ψ_p est bijectif, il existe P tel que $\Psi_p(P) = Q$. Donc P est un antécédent de Q par Ψ : Ψ est surjectif et comme Ψ est injectif, Ψ est bijectif.

10. Notons $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$. On a

$$\begin{aligned} P_n + P''_n &= \sum_{k=0}^{n} b_k X^k + \sum_{k=0}^{n} k(k-1)b_k X^k \\ &= b_n X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}(b_k + (k+2)(k+1)b_{k+2})X^k = X^n \end{aligned}$$

Par suite $b_n = 1$, $b_{n-1} = 0$ et pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, $b_k = -(k+2)(k+1)b_{k+2}$.
Cela donne pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $b_{n-2k} = (-1)^k \dfrac{n!}{(n-2k)!}$ et $b_{n-2k+1} = 0$.
Finalement $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^{n-2k}$ avec $a_k = (-1)^k \dfrac{n!}{(n-2k)!}$.

11. Les solutions de $y'' + y = x^n$ sont la somme d'une solution particulière de cette équation et de la solution générale de $y'' + y = 0$.
P_n étant solution particulière, les solutions sont donc les fonctions du type : $x \mapsto P_n(x) + \lambda\cos x + \mu\sin x$, λ et μ étant deux réels.