

DEVOIR SURVEILLÉ N°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

1. On a facilement $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $J_0 = \frac{\pi^3}{24}$, $I_1 = 1$. Pour le calcul de J_1 , on intègre deux fois par parties :

$$\begin{aligned} J_1 &= [t^2 \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, dt \\ &= \frac{\pi^2}{4} + 2 [t \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction \cos^n est continue, positive et non constamment nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc son intégrale sur ce segment est strictement positive i.e. $I_n > 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On procède à nouveau à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= [\sin t \cos^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t \, dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^n t \, dt \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité demandée.

4. a. Il est évident que $t \geq 0$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Pour établir l'autre inégalité, il suffit d'utiliser la concavité de la fonction \sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. En effet, sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, le graphe de cette fonction est au-dessus de la corde reliant les points d'abscisse 0 et $\frac{\pi}{2}$. Ainsi pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$ et on en déduit bien la seconde inégalité demandée.

Pour les nouvelles générations qui ignoreront tout de la convexité, on introduit la fonction $f : t \mapsto \frac{\pi}{2} \sin t - t$. f est deux fois dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $f''(t) = -\frac{\pi}{2} \sin t$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi f'' est négative sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et ne s'annule qu'en 0 ce qui prouve la stricte décroissance de f' . On a $f'(0) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0$. f' étant également continue, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires montre que f' s'annule en un unique réel α sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. La décroissance de f' montre que f' est positive sur $[0, \alpha]$ et négative sur $[\alpha, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi f est croissante sur $[0, \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha, \frac{\pi}{2}]$. Puisque $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$, f est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leq J_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi^2}{4} \sin^2 t \cos^n t \, dt = \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^n t \, dt = \frac{\pi^2}{4} (I_n - I_{n+2})$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $I_n > 0$

$$0 \leq \frac{J_n}{I_n} \leq \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{I_{n+2}}{I_n}\right)$$

Or d'après la question 3, $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Par le théorème des gendarmes, $\left(\frac{J_n}{I_n}\right)$ converge vers 0.

5. a. On procède encore une fois à des intégrations par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[t \cos^{n+2} t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{n+1} t \, dt \\ &= (n+2) \left[\frac{t^2}{2} \sin t \cos^{n+1} t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} (\cos^{n+2} t - (n+1) \sin^2 t \cos^n t) \, dt \\ &= -\frac{1}{2}(n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 (\cos^{n+2} t - (n+1)(1 - \cos^2 t) \cos^n t) \, dt \\ &= -\frac{1}{2}(n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 ((n+2) \cos^{n+2} t - (n+1) \cos^n t) \, dt \\ &= \frac{1}{2}(n+2)((n+1)J_n - (n+2)J_{n+2}) \end{aligned}$$

b. En utilisant la question 3

$$\frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{(n+1)J_n}{(n+2)I_{n+2}} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{(n+1)J_n - (n+2)J_{n+2}}{(n+2)I_{n+2}}$$

Mais d'après la question précédente,

$$(n+1)J_n - (n+2)J_{n+2} = \frac{2I_{n+2}}{n+2}$$

donc

$$\frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{2}{(n+2)^2}$$

6. Soit un entier $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{(k+2)^2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{J_k}{I_k} - \frac{J_{k+2}}{I_{k+2}} \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1} - \frac{J_{n-1}}{I_{n-1}} - \frac{J_n}{I_n} \right) \quad \text{par télescopage} \end{aligned}$$

En utilisant la question 4.c, on en déduit que (S_n) converge vers $\frac{1}{2} \left(\frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1} \right) + 1$. En utilisant les résultats de la question 1, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1} \right) + 1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{\pi^3}{24}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{1} \right) + 1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{4} - 2 \right) + 1 = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Ainsi (S_n) converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.

Solution 2

1. Puisque sur I , $1 - e^{-t} = e^{-t}(e^t - 1) \neq 0$, l'équation homogène (E_H) est équivalente à

$$(E) : y' + \frac{e^t}{e^t - 1}y = 0.$$

Comme $e^t - 1 > 0$ sur I , on a $\int \frac{e^t}{e^t - 1} dt = \ln(|e^t - 1|) = \ln(e^t - 1)$, les solutions de (E_H) sur I sont les fonctions de la forme,

$$t \in I \mapsto \frac{\lambda}{e^t - 1}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Appliquons la méthode de la variation de la constante. D'après ce qui précède, les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $t \in I \mapsto \frac{\lambda(t)}{e^t - 1}$ avec λ définie et dérivable sur I et vérifiant

$$\forall t \in I, \quad \frac{\lambda'(t)}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \frac{1}{e^t - 1},$$

ie $\forall t \in I, \lambda'(t) = 1$, ce qui équivaut à $\forall t \in I, \lambda(t) = t + C$, où $C \in \mathbb{R}$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme,

$$t \in I \mapsto \frac{t + C}{e^t - 1} \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

3. Recherche d'une solution admettant une limite finie en 0^+ .

- a. Posons $\phi(x) = e^x - 1 - x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi'(x) = e^x - 1$. Ainsi ϕ' est positive sur \mathbb{R}_+ et ϕ est donc croissante sur \mathbb{R}_+ . Notamment, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\phi(x) \geq \phi(0) = 0$. Ainsi $e^x - 1 \geq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Posons $\psi(x) = e^x - 1 - xe^x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi'(x) = -xe^x$. Ainsi ψ' est négative sur \mathbb{R}_+ et ψ est donc décroissante sur \mathbb{R}_+ . Notamment, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\psi(x) \leq \psi(0) = 0$. Ainsi $e^x - 1 \geq xe^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

- b. D'après l'inégalité obtenue ci-dessus,

$$\forall x > 0, \quad e^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 1} \leq 1.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1$, on obtient en appliquant le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - 1} = 1.$$

Comme les solutions de (E) sont de la forme

$$f_C : I \mapsto f_C(t) = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{C}{e^x - 1} \text{ où } C \in \mathbb{R},$$

f_C admet une limite finie en 0^+ si et seulement si $x \mapsto \frac{C}{e^x - 1}$ en admet également une. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$, la seule solution admettant une limite finie en 0^+ est la fonction $f = f_0 : t \in I \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ et sa limite en 0^+ vaut $\ell = 1$.

4. a. La fonction f est dérivable sur I en tant que quotient de fonctions dérivables sur I et sur cet intervalle,

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}.$$

D'après la question 3.a, $f'(x) \leq 0$ sur I . La fonction est donc décroissante sur cet intervalle. D'après les croissances comparées, f tend vers 0 en $+\infty$. Comme $f(0) = \ell = 1$, la fonction f décroît de 1 à 0 sur I .

- b. Posons $\chi(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\chi'(x) = e^x - 1 - x$. D'après la question 3.a, χ' est positive sur \mathbb{R}_+ et χ est donc croissante sur \mathbb{R}_+ . Notamment, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\chi(x) \geq \chi(0) = 0$. Ainsi $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Posons $\xi(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\xi'(x) = e^x - 1 - xe^x - \frac{x^2}{2}e^x$. D'après la question 3.a, $e^x - 1 - xe^x \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et a fortiori, $\xi'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. ξ' est positive sur \mathbb{R}_+ et ξ est donc décroissante sur \mathbb{R}_+ . Notamment, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\xi(x) \leq \xi(0) = 0$. Ainsi $e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

c. D'après la question 4.b, pour tout $x > 0$,

$$\frac{x}{x + \frac{x^2}{2}e^x} \leq f(x) \leq \frac{x}{x + \frac{x^2}{2}}$$

d'où, comme $f(0) = 1$,

$$\frac{-x^2 e^x / 2}{x + \frac{x^2}{2}e^x} \leq f(x) - f(0) \leq \frac{-x^2 / 2}{x + \frac{x^2}{2}}$$

puis comme $x > 0$,

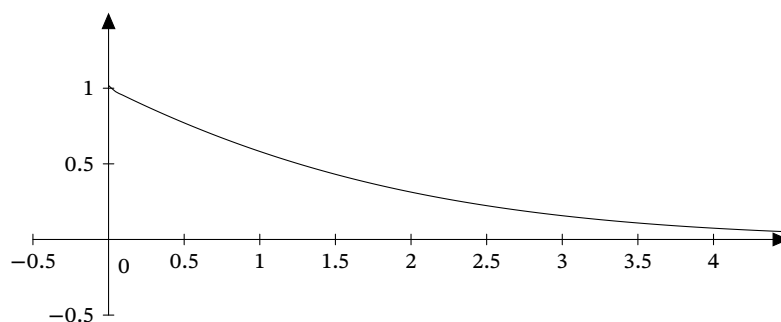
$$\frac{-e^x / 2}{1 + \frac{x}{2}e^x} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \frac{-1/2}{1 + \frac{x}{2}}.$$

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x/2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + xe^x/2) = 1,$$

les deux membres encadrant la valeur du taux d'accroissement de f en 0 au point x tendent vers $-\frac{1}{2}$. On déduit du théorème des gendarmes que ce taux d'accroissement tend également vers $-\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0^+ et donc que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

d. Le tracé découle de l'étude précédente.



Solution 3

1. a. En choisissant $x = y = 0$ dans la relation de l'énoncé, on obtient $f(0) = 0$. En choisissant $x = y = 1$, on obtient $f(1) = 0$. Enfin, en choisissant $x = y = -1$, on obtient $f(-1) = 0$.
 b. On se donne $x \in \mathbb{R}$. En choisissant $y = -1$, on obtient $f(-x) = -f(x)$ puisque $f(-1) = 0$. f est donc bien impaire.
2. a. On dérive la relation de l'énoncé par rapport à y :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad x f'(xy) = x f'(y) + f(x)$$

On fixe alors $y = 1$ de sorte que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x f'(x) - f(x) = x f'(1)$$

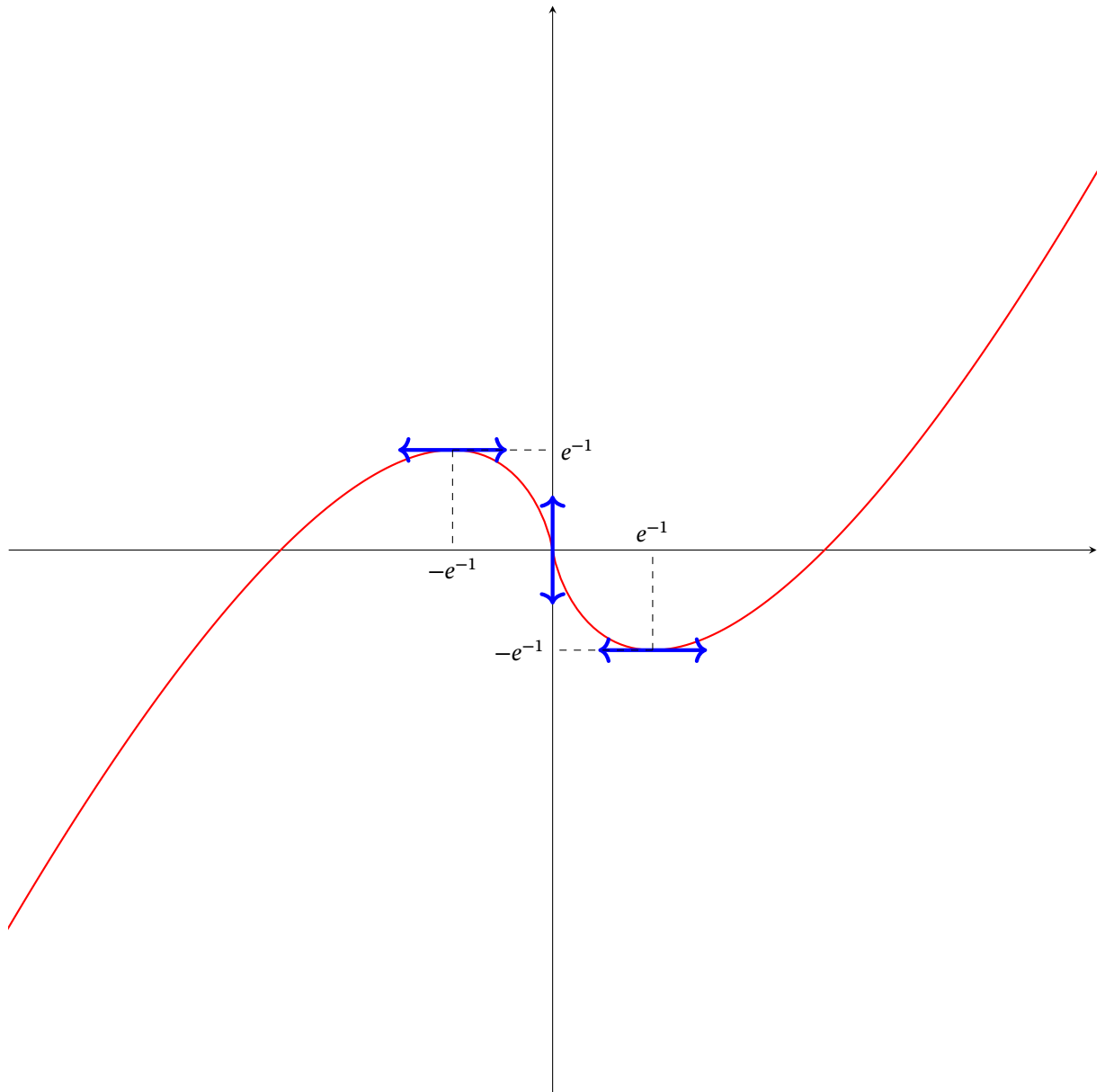
Ainsi f est solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle $xy' - y = kx$ avec $k = f'(1)$.

- b. Les solutions sur \mathbb{R}_+^* de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par variation de la constante, on trouve que $x \mapsto kx \ln(x)$ est solution particulière. Les solutions sur \mathbb{R}_+^* de l'équation avec second membre sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda x + kx \ln(x)$.
 Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x + kx \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Or on sait que $f(1) = 0$, ce qui impose $\lambda = 0$. On en déduit que $f(x) = kx \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est impaire, $f(x) = -f(-x) = kx \ln(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$. Enfin, f est continue en 0 donc $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} kx \ln(x) = 0$ par croissances comparées.

3. a. La question précédente montre que $\varphi(x) = \begin{cases} x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ x \ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \ln x$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$, ce qui prouve que f n'est pas dérivable en 0.

REMARQUE. On prouve de même que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$. On peut en déduire que la courbe de f admet une tangente verticale en son point d'abscisse 0.

- b. On se contente d'étudier f sur \mathbb{R}_+^* puisque f est impaire. On trouve que $f'(x) = \ln(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi f est strictement décroissante sur $]0, 1/e]$ et strictement croissante sur $[1/e, +\infty[$. Par opérations sur les limites, $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
Puisque f est impaire, f est strictement croissante sur $[-1/e, 0[$ et strictement décroissante sur $] -\infty, 1/e]$ et $\lim_{-\infty} f = -\infty$.



4. a. Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

On fixe alors $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(xt) = xf(t) + tf(x)$$

On se donne maintenant $y \in \mathbb{R}$ et on intègre la relation précédente entre 0 et y . Ainsi

$$\int_0^y f(xt) dt = xF(y) + \frac{y^2}{2}f(x)$$

On multiplie cette relation par x :

$$\int_0^y xf(xt) dt = x^2F(y) + \frac{xy^2}{2}f(x)$$

En effectuant le changement de variable $u = xt$ dans la première intégrale, on obtient

$$F(xy) = x^2 F(y) + \frac{xy^2}{2} f(x)$$

- b. En choisissant $y = 1$ dans la relation précédente, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \frac{2}{x} (F(x) - x^2 F(1))$$

Or F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que primitive. Par opérations, f est donc elle-même dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

- c. D'après la question 2, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = kx \ln |x|$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Réciproquement, on vérifie aisément qu'une telle fonction est continue sur \mathbb{R} (seule la continuité en 0 pose éventuellement problème mais $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = 0$). On vérifie également que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

quitte à distinguer les cas où $x = 0$ ou $y = 0$.

On a donc démontré que $\mathcal{E} = \text{vect}(\varphi)$.

Solution 4

1.

$$\begin{aligned} \text{sh}(a) \text{ch}(b) - \text{ch}(a) \text{sh}(b) &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b + e^{-b}}{2} - \frac{e^a + e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{2} \\ &= \frac{e^{a+b} - e^{b-a} + e^{a-b} - e^{-a-b}}{4} - \frac{e^{a+b} - e^{a-b} + e^{b-a} - e^{-a-b}}{4} \\ &= \frac{e^{a-b} - e^{b-a}}{2} = \text{sh}(a - b) \\ \text{ch}(a) \text{ch}(b) - \text{sh}(a) \text{sh}(b) &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b + e^{-b}}{2} - \frac{e^a - e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{2} \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{b-a} + e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} - \frac{e^{a+b} - e^{a-b} - e^{b-a} + e^{-a-b}}{4} \\ &= \frac{e^{a-b} + e^{b-a}}{2} = \text{ch}(a - b) \end{aligned}$$

2. A l'aide de la question précédente et de la linéarité de l'intégrale, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \text{sh}(x) \int_0^x \text{ch}(t)g(t) dt - \text{ch}(x) \int_0^x \text{sh}(t)g(t) dt$$

Les applications $x \mapsto \int_0^x \text{ch}(t)g(t) dt$ et $x \mapsto \int_0^x \text{sh}(t)g(t) dt$ sont de classe \mathcal{C}^1 comme primitives de fonctions continues. Comme sh et ch sont également de classe \mathcal{C}^1 , on en déduit que f est de classe \mathcal{C}^1 et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \text{ch}(x) \int_0^x \text{ch}(t)g(t) dt + \text{sh}(x) \text{ch}(x)g(x) - \text{sh}(x) \int_0^x \text{sh}(t)g(t) dt - \text{ch}(x) \text{sh}(x)g(x) \\ &= \int_0^x (\text{ch}(x) \text{ch}(t) - \text{sh}(x) \text{sh}(t))g(t) dt = \int_0^x \text{ch}(x - t)g(t) dt \end{aligned}$$

3. On a montré à la question précédente que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \text{ch}(x) \int_0^x \text{ch}(t)g(t) dt - \text{sh}(x) \int_0^x \text{sh}(t)g(t) dt$$

On démontre comme à la première question que f' est de classe \mathcal{C}^1 i.e. que f est de classe \mathcal{C}^2 . De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \text{sh}(x) \int_0^x \text{ch}(t)g(t) dt + \text{ch}^2(x)g(x) - \text{ch}(x) \int_0^x \text{sh}(t)g(t) dt - \text{sh}^2(x)g(x) \\ &= \int_0^x (\text{sh}(x) \text{ch}(t) - \text{ch}(x) \text{sh}(t))g(t) dt + (\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x))g(x) \\ &= f(x) + g(x) \end{aligned}$$

Ceci prouve que f est bien solution de l'équation différentielle $y'' - y = g$.

4. Les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda \operatorname{ch}(x) + \mu \operatorname{sh}(x)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Comme f est une solution particulière de $y'' - y = g$, on en déduit que les solutions de $y'' - y = g$ sont $x \mapsto f(x) + \lambda \operatorname{ch}(x) + \mu \operatorname{sh}(x)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.