

## Convergences

### Exercice 1 ★★

On pose  $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+x^4 \sin^2 x}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $u_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1+(x+n\pi)^4 \sin^2 x}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Encadrer les termes de la suite  $(u_n)$  à l'aide des termes de la suite  $(v_n)$  où

$$v_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1+(n\pi)^4 \sin^2 x}$$

3. Calculer explicitement  $v_n$  et en déduire un équivalent de  $u_n$ .
4. En déduire la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4 \sin^2 x}$ .

### Exercice 2 ★★★★★

Mines MP 2016

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré supérieur ou égal à 2.

1. Déterminer la nature de l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} \cos(P(x)) \, dx$ .
2. Déterminer la nature de l'intégrale  $J = \int_0^{+\infty} |\cos(P(x))| \, dx$ .
3. Déterminer le signe de  $I$  lorsque  $P = X^2$ .

### Exercice 3 ★★

Les intégrales suivantes convergent-elles ?

$$1. \int_0^1 \ln t \, dt$$

$$2. \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$$

$$3. \int_0^{+\infty} x \sin(x) e^{-x} \, dx$$

$$4. \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} \, dt$$

$$5. \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$$

$$6. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1} \, dt$$

$$7. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \, dx$$

### Exercice 4 ★★

Intégrales de Bertrand

1. Pour quelles valeurs des réels  $\alpha$  et  $\beta$  l'intégrale  $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$  converge-t-elle ?
2. Même question pour l'intégrale  $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ .

### Exercice 5 ★★★

Centrale-Supélec MP 2021

On considère  $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx$ .

1. Montrer l'existence de  $I$ .
2. Montrer  $I < 0$ .

### Exercice 6 ★★★

1. Montrer que  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$  converge.
2. Déterminer la nature de  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} dx$ .

### Exercice 7 ★★★

Pour quelles valeurs du réel  $\alpha$  l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$  converge-t-elle ?

### Exercice 8 ★★★

X-ESPCI PC 2013

Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $(f')^2$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ . Montrer qu'il en est de même pour  $g : t \mapsto \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2$ .

### Exercice 9 ★★

Non convergence absolue de l'intégrale de Dirichlet

Montrer que  $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

## Théorie

### Exercice 10 ★★★★★

1. Soit  $f$  une application continue par morceaux de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  admettant une limite  $\ell$  en  $+\infty$  et telle que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge. Montrer que  $\ell = 0$ .
2. Soit  $f$  une application uniformément continue de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  telle que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge. Montrer que  $\lim_{+\infty} f = 0$ .

### Exercice 11 ★★★★★

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lipschitzienne telle que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge. Montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ .

### Exercice 12 ★★★★★

Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $f$  et  $f''$  soit de carré intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $f'$  est également de carré intégrable sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right) \left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)$$

### Exercice 13 ★★★

Banque Mines-Ponts PSI 2021

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

1. Prouver que  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge si et seulement si la suite  $n \mapsto \int_0^n f(t) dt$  converge et que dans ces conditions :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(t) dt$$

2. Que se passe-t-il si on enlève l'hypothèse  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  ?

## Calculs

### Exercice 14 ★★★

Convergence et calcul de  $\int_0^{+\infty} e^{-a^2 t^2 - \frac{b^2}{t^2}} dt$  où  $a, b > 0$ . On admettra que  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{2\pi}$ .

**Exercice 15 ★★★**

$n$  désigne un entier naturel et  $\alpha$  un réel strictement supérieur à  $-1$ . On pose

$$I_n(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}}$$

1. Justifier que cette intégrale est bien définie.
2. Calculer  $I_0(0)$ . Posant  $t = \sqrt{\frac{1+\alpha x}{1-x}}$ , calculer  $I_0(\alpha)$ . Montrer que la fonction  $\alpha \mapsto I_0(\alpha)$  est continue en 0.
3. En dérivant  $x^n \sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}$  trouver une relation de récurrence entre  $I_{n-1}(\alpha)$ ,  $I_n(\alpha)$  et  $I_{n+1}(\alpha)$ . En déduire les valeurs de  $I_n(0)$  et  $I_n(1)$ .

**Exercice 16 ★★**

Convergence et calcul de

$$I = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

**Exercice 17 ★★★**

**X MP 2010**

Déterminer

$$\sup_{x>0} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2 + t^2} dt$$

**Exercice 18 ★★★**

1. Pour quelles valeurs de  $a \in \mathbb{R}$  l'intégrale  $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^a)}$  converge-t-elle ?
2. On pose  $J(a) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^a)}$ . Montrer que  $I(a) = J(a) + J(-a)$ .
3. En déduire la valeur de  $I(a)$ .

**Exercice 19 ★★**

**CCP MP**

1. Déterminer le domaine de définition  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2 + t^2} dt$ .
2. Calculer  $F(1)$ .
3. Calculer  $F(x)$  pour tout  $x$  dans le domaine de définition de  $f$ .

**Exercice 20 ★★★**

**Intégrale de Dirichlet**

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  converge.
2. On pose pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t) \sin(2nt)}{\sin(t)} dt \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t} dt$$

Justifier que  $u_n$  et  $v_n$  sont bien définies.

3. En calculant  $u_{n+1} - u_n$ , montrer que la suite  $(u_n)$  est constante et préciser sa valeur.
4. Soit  $\varphi$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un segment  $[a, b]$ . Par une intégration par parties, montrer que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b h(t) \sin(\lambda t) dt = 0$ .
5. Montrer que la fonction  $h : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{\cos t}{\sin t}$  est prolongeable en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
6. Calculer la limite de la suite  $(u_n - v_n)$  puis celle de  $(v_n)$ .
7. En déduire la valeur de  $I$ .

**Exercice 21 ★★★**

TPE-EIVP PSI 2017

Soit  $a > 1$ , Soit  $f$  une fonction continue sur  $[1, +\infty[$  admettant une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ .

1. Montrer que pour tout  $x$  dans  $[1, +\infty[$  :

$$\int_1^x \frac{f(at) - f(t)}{t} dt = \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} dt - \int_1^a \frac{f(t)}{t} dt$$

2. En déduire que  $\int_1^{+\infty} \frac{f(at) - f(t)}{t} dt$  converge et la calculer en fonction de  $\int_1^a \frac{f(t)}{t} dt$  et de  $\ell$ .

**Exercice 22 ★★**

On pose  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ .

1. Justifier que l'intégrale définissant  $I$  converge.

2. Montrer que  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$ .

3. Montrer que  $2I = \int_0^{\pi} \ln(\sin t) dt$ .

4. En déduire la valeur de  $I$ .

**Exercice 23 ★★★**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs. Convergence et calcul de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$$

**Exercice 24 ★★**

Existence et calcul de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$$

**Comportements asymptotiques****Exercice 25 ★★★**

Centrale PSI

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+$ . On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi(x) = f(x) + \int_0^x f(t) dt$$

On suppose que  $\varphi$  admet une limite finie en  $+\infty$ . Montrer que  $f$  admet pour limite 0 en  $+\infty$ .

**Exercice 26 ★★★★★**

Mines-Ponts MP 2016

- Soient  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re}(a) > 0$  et  $f$  de classe  $\mathcal{C}_1$  sur  $\mathbb{R}_+$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  telle que  $\lim_{+\infty} f' + af = 0$ . Montrer que  $\lim_{+\infty} f = 0$ .
- Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  telle que  $\lim_{+\infty} f'' + f' + f = 0$ . Montrer que  $\lim_{+\infty} f = 0$ .
- Généraliser.

**Exercice 27 ★★★**

Centrale MP 2018

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$  continue de carré intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . On pose  $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ .

- Déterminer la limite de  $g$  en 0.
- Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
- Montrer que  $g$  est de carré intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 28 ★★★**

Déterminer un équivalent simple de  $F : x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$  au voisinage de  $+\infty$ .

**Exercice 29 ★★★**

1. Montrer que  $f : t \mapsto e^{-t^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. Déterminer un équivalent de  $g : x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$  au voisinage de  $+\infty$ .

**Exercice 30 ★★★**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + f'(x) = 0$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**Exercice 31 ★★★****Banque Mines-Ponts PSI 2021**

Soit  $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ .

1. Montrer que  $f$  est définie sur  $I = ]0, +\infty[$ .
2. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $I$  et déterminer  $f'$ .
3. Déterminer un équivalent de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
4. Montrer que  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  est définie et la calculer.

**Exercice 32 ★★****Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2017**

On pose pour tout  $x$  non nul,

$$F(x) = \int_x^{7x} \frac{1 - e^{-t}}{t^2} dt$$

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .

**Exercice 33 ★**

Déterminer des équivalents de

1.  $\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ;
2.  $\int_x^{+\infty} \frac{\text{th } t}{t^2} dt$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ;
3.  $\int_x^1 \frac{e^t}{t^3} dt$  lorsque  $x$  tend vers  $0^+$  ;
4.  $\int_0^x \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} dt$  lorsque  $x$  tend vers  $0^+$ .

**Suites d'intégrales****Exercice 34 ★★★****CCP MP 2018**

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $\pi$ -périodique vérifiant

$$\int_0^\pi f(t) dt = 0$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$u_n = \int_0^\pi f(t)e^{-t/n} dt \quad v_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t/n} dt$$

1. Justifier que  $u_n$  et  $v_n$  sont bien définis pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Justifier qu'il existe une suite  $(a_n)$ , que l'on précisera, telle que  $v_n = a_n u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3. Montrer que  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\pi}$ .
4. Montrer que  $(u_n)$  converge vers 0. Montrer que  $(v_n)$  converge et préciser sa limite.

### Exercice 35 ★★

Soit  $f_n : t \mapsto \cos(2nt) \ln(\sin t)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Justifier que  $f_n$  est intégrable sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$ .
2. On pose alors  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt$  et  $J_n = 2nI_n$ . Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$J_n = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \sin(2nt) dt$$

3. Calculer  $J_{n+1} - J_n$  et en déduire la valeur de  $J_n$  puis celle de  $I_n$ .

### Exercice 36 ★★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^1 (t \ln(t))^n dt$ . Montrer que cette intégrale converge. Donner sa valeur.

### Exercice 37 ★

On pose  $I_n = \int_0^1 \ln^n(x) dx$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Justifier que  $I_n$  converge.
2. Déterminer une relation de récurrence suivie par la suite  $(I_n)$ .
3. En déduire la valeur de  $I_n$ .

## Fonctions définies par des intégrales

### Exercice 38 ★★

Fonction  $\Gamma$

On pose  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

1. Déterminer le domaine de définition de  $\Gamma$ .

2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

3. Déterminer  $\Gamma(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Exercice 39 ★★

Fonction B d'Euler

On pose  $B : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ .

1. Montrer que B est définie sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ .

2. Montrer que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, B(x, y) = B(y, x)$$

3. Montrer que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$$

4. Calculer  $B(n+1, p+1)$  pour tout  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ .