INTERROGATION ÉCRITE ^{o}15

NOM : Prénom : Note :

1. Montrer que l'application $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2 \mapsto \langle A, B \rangle = \mathrm{tr}({}^t AB)$ est un produit scalaire.

2. On pose $f_1 : x \in [0, 2\pi] \mapsto 1$, $f_2 : x \in [0, 2\pi] \mapsto \cos x$, $f_3 = x \in [0, 2\pi] \mapsto \sin x$ et $E = \mathrm{vect}(f_1, f_2, f_3)$. On munit E du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\ dt$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base orthogonale de E.

3. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont-elles équivalentes ? semblables ? Justifier.

4. Calculer la signature de la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On justifiera sa réponse.

5. Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}$. On précisera les opérations effectuées.