Devoir surveillé n°08

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2y-2z, x+y-2z, x-y) \end{cases}$. On notera $\mathrm{Id} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

1. **a.** Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
   b. Déterminer des bases et les dimensions de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$. f est-il injectif, surjectif, bijectif ?
   c. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.
   d. Soit p le projecteur sur $\operatorname{Im} f$ parallélement à $\operatorname{Ker} f$. Calculer $p((x,y,z))$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2. Déterminer $f^2((x,y,z))$ et $f^3((x,y,z))$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. En déduire que $f^3 - f^2 - 2f = 0$.

3. Soit $q = -\frac{1}{2}\left(f^2 - f - 2\,\mathrm{Id}\right)$.
   a. Montrer que q est un projecteur.
   b. Calculer $q \circ f$ et $f \circ q$.
   c. Montrer que $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} f$ et que $\operatorname{Im} q = \operatorname{Ker} f$.
   d. En déduire que $p + q = \mathrm{Id}$.

4. Soient $r = \frac{1}{6}\left(f^2 + f\right)$ et $s = \frac{1}{3}\left(f^2 - 2f\right)$.
   a. Montrer que r et s sont des projecteurs.
   b. Vérifier que $r \circ s = s \circ r = 0$.
   c. Montrer que $f \circ r = r \circ f = 2r$ et que $f \circ s = s \circ f = -s$.
   d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = 2^n r + (-1)^n s$.
   e. En déduire l'expression de $f^n(x,y,z)$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Soient (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n \end{cases}$$

   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_n, y_n, z_n) = f^n((x_0, y_0, z_0))$.
   b. En déduire les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0, z_0 et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des applications continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout élément f de $\mathscr{E}$, on note $\mathrm{U}(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{U}(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Soit $f \in \mathscr{E}$, T-périodique ($\mathrm{T} > 0$). Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \int_a^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est T-périodique, alors il en est de même de f'. Montrer que la réciproque est fausse.
3. Soit $f \in \mathscr{E}$. Montrer que $\mathrm{U}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que U est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.
5. Justifier que si $f \in \operatorname{Ker}\mathrm{U}$, alors
   (i) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$;
   (ii) f est périodique de période 1.
6. Le noyau de U est-il l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{E}$ périodiques de période 1 telles que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$?
7. L'endomorphisme U est-il injectif ? surjectif ?
8. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f_a : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{at}$.
   a. Déterminer $\mathrm{F}_a = \mathrm{U}(f_a)$.
   b. Soit la fonction $g : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. On note encore g son prolongement. Dresser le tableau de variations de g.
   c. Montrer que pour tout réel λ strictement positif, l'endomorphisme $\mathrm{U} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ n'est pas injectif.

Exercice 3.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension d. On se donne un endomorphisme f de E et un vecteur non nul $x \in \mathrm{E}$. On définit alors une suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pose alors $\mathrm{E}_x = \operatorname{vect}(x_n,\ n \in \mathbb{N})$.

1. Montrer que E_x est stable par f.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant x et stable par f. Montrer que $\mathrm{E}_x \subset \mathrm{F}$.

3. Soit p le plus grand entier naturel non nul tel que $(x_0, \dots, x_{p-1})$ est une famille libre.

  a. Justifier l'existence d'un tel entier p.

  b. Montrer qu'il existe des réels $a_0, \dots, a_{p-1}$ tels que $x_p = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x_k$.

  c. On note $\mathrm{F}_x = \operatorname{vect}(x_0, \dots, x_{p-1})$. Montrer que F_x est stable par f.

  d. En déduire que $\mathrm{E}_x = \mathrm{F}_x$ et que $(x_0, \dots, x_{p-1})$ est une base de E_x.

4. On note g l'endomorphisme de E_x induit par f. Montrer que $(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_x}, g, g^2, \dots, g^{p-1})$ est une famille libre de $\mathscr{L}(\mathrm{E}_x)$.

5. En déduire que $g^p = \sum_{k=0}^{p-1} a_k g^k$.