

SEMAINE DU 01/10 AU 05/10

1 Cours

Complexes

Corps des nombres complexes Partie réelle, partie imaginaire, module, conjugué et interprétation géométrique.

Groupe \mathbb{U} des nombres complexes de module 1 Définition, notation $e^{i\theta}$, relations d'Euler, argument et interprétation géométrique, racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité et d'un complexe non nul.

Equations du second degré Racines carrées d'un complexe, résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes. Sommes et produits de racines d'une équation du second degré.

2 Méthodes à maîtriser

- ▶ $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z, z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z.$
- ▶ $z \in \mathbb{U} \iff \bar{z} = \frac{1}{z}.$
- ▶ $z \in \mathbb{R} \iff \arg z \equiv 0[\pi], z \in i\mathbb{R} \iff \arg z \equiv \frac{\pi}{2}[\pi].$
- ▶ Extraction de racines $n^{\text{èmes}}$ via module et argument.
- ▶ Extraction de racines carrées, résolution d'équations du second degré à coefficients dans \mathbb{C} .
- ▶ Méthode de l'arc-moitié pour factoriser $e^{i\theta_1} \pm e^{i\theta_2}$ où $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$.

3 Questions de cours

- ▶ Démontrer l'inégalité triangulaire :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

- ▶ Résoudre une équation du second degré à coefficients dans \mathbb{C} au choix de l'examineur.
- ▶ **Banque CCP Exo 84** Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$.
- ▶ **Banque CCP Exo 89** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.