Devoir à la maison n°15

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Partie I – Lemme préliminaire

I.1 Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors $Y^\top Y = \sum_{k=1}^{p} y_k^2$. Une somme de termes positifs étant nulle ssi chacun des termes est nul,

$$\begin{aligned} Y^\top Y = 0 &\iff \forall k \in [\![1, p]\!],\ y_k^2 = 0 \\ &\iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ y_k = 0 \\ &\iff Y = 0 \end{aligned}$$

I.2 **I.2.a** Soit $X \in \operatorname{Ker} A$. Alors $AX = 0$ donc $A^\top AX = 0$ et donc $X \in \operatorname{Ker} A^\top A$. D'où $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^\top A$.

I.2.b Soit $X \in \operatorname{Ker} A^\top A$. Alors $X^\top A^\top AX = 0$ i.e. $Y^\top Y = 0$ avec $Y = AX$. D'après la question **I.1**, $Y = 0$ i.e. $AX = 0$ d'où $X \in \operatorname{Ker} A$. Finalement $\operatorname{Ker} A^\top A \subset \operatorname{Ker} A$.

I.2.c Par double inclusion, $\operatorname{Ker} A^\top A = \operatorname{Ker} A$. D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg}(A) = p - \dim \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{rg}\left(A^\top A\right) = p - \dim \operatorname{Ker} A^\top A$. Ainsi $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\left(A^\top A\right)$.

Partie II – Déterminants de Gram

II.1 Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormale,

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ x_j = \sum_{i=1}^{n} \langle x_j, e_i \rangle e_i$$

On en déduit que

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!],\ A_{ij} = \langle x_j, e_i \rangle$$

Puisque $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormale

$$\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{k=1}^{p} \langle x_i, e_k \rangle \langle x_i, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{p} A_{ki} A_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \left(A^\top\right)_{ik} A_{kj} = \left(A^\top A\right)_{ij}$$

Ainsi $G(x_1, \dots, x_n) = A^\top A$.

II.2 Tout d'abord,

$$\begin{aligned} \det G(x_1, \dots, x_n) = 0 &\iff \det(A^\top A) = 0 \\ &\iff A^\top A \notin GL_n(\mathbb{R}) \\ &\iff \operatorname{rg}(A^\top A) < n \\ &\iff \operatorname{rg}(A) < n \text{ d'après la question } \textbf{I.2.c} \\ &\iff (x_1, \dots, x_n) \text{ est liée} \end{aligned}$$

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, on a $\det \mathrm{G}(x_1, \dots, x_n) = 0$ donc a fortiori, $\det \mathrm{G}(x_1, \dots, x_n) \geq 0$.
Supposons maintenant $(x_1, \dots, x_n)$ libre. Alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de F et donc $n = p$. En particulier, A est une matrice carrée. Alors

$$\det \mathrm{G}(x_1, \dots, x_n) = \det(\mathrm{A}^\top \mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}^\top)\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A})^2 \geq 0$$

Remarque. On a même dans ce cas $\det \mathrm{G}(x_1, \dots, x_n) > 0$.

Attention ! Il faut s'assurer que A est une matrice *carrée* pour affirmer que $\det(\mathrm{A}^\top \mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}^\top)\det(\mathrm{A})$.

II.3 **II.3.a** On note y la projection orthogonale de x sur F (qui est bien définie car F est de dimension finie) et on pose $z = y - x$. On a bien $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{F}$ et $y \in \mathrm{F}^\perp$.

II.3.b Puisque $z \in \mathrm{F}^\perp$, $\langle z, e_k \rangle = 0$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$. Par bilinéarité du produit scalaire

$$\det \mathrm{G}(e_1, \dots, e_p, x) = \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, e_p \rangle & \langle e_1, y \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle e_p, e_1 \rangle & \dots & \langle e_p, e_p \rangle & \langle e_p, y \rangle \\ \langle y, e_1 \rangle & \dots & \langle y, e_p \rangle & \|x\|^2\rangle \end{vmatrix}$$

Via le théorème de Pythagore, $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$ donc

$$\det \mathrm{G}(e_1, \dots, e_p, x) = \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, e_p \rangle & \langle e_1, y \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle e_p, e_1 \rangle & \dots & \langle e_p, e_p \rangle & \langle e_p, y \rangle \\ \langle y, e_1 \rangle & \dots & \langle y, e_p \rangle & \|y\|^2 + \|z\|^2\rangle \end{vmatrix}$$

Par linéarité du déterminant par rapport à sa dernière colonne

$$\det \mathrm{G}(e_1, \dots, e_p, x) = \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, e_p \rangle & \langle e_1, y \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle e_p, e_1 \rangle & \dots & \langle e_p, e_p \rangle & \langle e_p, y \rangle \\ \langle y, e_1 \rangle & \dots & \langle y, e_p \rangle & \|y\|^2\rangle \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, e_p \rangle & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle e_p, e_1 \rangle & \dots & \langle e_p, e_p \rangle & 0 \\ \langle y, e_1 \rangle & \dots & \langle y, e_p \rangle & \|z\|^2\rangle \end{vmatrix}$$

En développant le second déterminant par rapport à sa seconde colonne

$$\det \mathrm{G}(e_1, \dots, e_p, x) = \det(e_1, \dots, e_p, y) + \|z\|^2 \det \mathrm{G}(e_1, \dots, e_p)$$

Or $y \in \mathrm{F}$ donc la famille $(e_1, \dots, e_p, y)$ est liée et $\det \mathrm{G}(e_1, \dots, e_p, y) = 0$ d'après la question **II.2**. Ainsi

$$\det \mathrm{G}(e_1, \dots, e_p, x) = \|z\|^2 \det \mathrm{G}(e_1, \dots, e_p)$$

II.3.c On sait que $d(x, \mathrm{F}) = \|x - y\| = \|z\|$ car y est la projection orthogonale de x sur F.
D'après la question **II.3.b**, $\det \mathrm{G}(e_1, \dots, e_p, x) = \|z\|^2 \det \mathrm{G}(e_1, \dots, e_p)$.
Or $(e_1, \dots, e_p)$ est libre donc $\det \mathrm{G}(e_1, \dots, e_p) \neq 0$ d'après la question **II.2**. Ainsi

$$d(x, \mathrm{F})^2 = \|z\|^2 = \frac{\det \mathrm{G}(e_1, \dots, e_p, x)}{\det \mathrm{G}(e_1, \dots, e_p)}$$

Partie III – Applications

III.1 Puisque $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ admet $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ pour base,

$$d(\mathrm{X}^3, \mathbb{R}_2[\mathrm{X}])^2 = \frac{\det \mathrm{G}(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^3)}{\det \mathrm{G}(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)}$$

Or

$$\det G(1, X, X^2) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{2160}$$

$$\det G(1, X, X^2, X^3) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{vmatrix} = \frac{1}{6048000}$$

Ainsi $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 = \frac{1}{2800}$ puis $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \frac{1}{20\sqrt{7}}$.

III.2 En posant $F = \text{vect}(e_1, e_2)$ avec $e_1 : t \in [0, \pi] \mapsto t$ et $e_2 : t \in [0, \pi] \mapsto t^2$,

$$M = d(\sin, F)^2 = \frac{\det G(e_1, e_2, \sin)}{\det G(e_1, e_2)}$$

Or

$$G(e_1, e_2) = \begin{vmatrix} \frac{\pi^3}{3} & \frac{\pi^4}{4} \\ \frac{\pi^4}{4} & \frac{\pi^5}{5} \end{vmatrix} = \frac{\pi^8}{240}$$

$$\det G(e_1, e_2, \sin) = \begin{vmatrix} \frac{\pi^3}{3} & \frac{\pi^4}{4} & \pi \\ \frac{\pi^4}{4} & \frac{\pi^5}{5} & \pi^2 - 4 \\ \pi & \pi^2 - 4 & \frac{\pi}{2} \end{vmatrix} = \frac{\pi^9}{480} - \frac{\pi^7}{30} + \frac{2\pi^5}{3} - \frac{16\pi^3}{3}$$

Ainsi

$$M = \frac{\pi}{2} - \frac{1280}{\pi^5} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{8}{\pi}$$