Trigonométrie

1 Congruence

Définition 1.1 Congruence

Soient a, b et m trois réels. On dit que a et b sont *congrus modulo* m s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + km$. On note alors $a \equiv b[m]$.

Remarque. En pratique, on a souvent $m = r\pi$ avec $r \in \mathbb{Q}$. ■

Exemple 1.1

$\frac{3\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Proposition 1.1 Propriétés de la congruence

Réflexivité Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $a \equiv a[m]$.

Symétrie Soit $(a, b, m) \in \mathbb{R}^3$. Alors $a \equiv b[m] \iff b \equiv a[m]$.

Transitivité Soit $(a, b, c, m) \in \mathbb{R}^4$. Si $a \equiv b[m]$ et $b \equiv c[m]$, alors $a \equiv c[m]$.

Somme Soit $(a, b, c, d, m) \in \mathbb{R}^5$. Si $a \equiv b[m]$ et $c \equiv d[m]$, alors $a + c \equiv b + d[m]$.

Multiplication/division Soit $(a, b, m) \in \mathbb{R}^3$ et $k \in \mathbb{R}^*$. Alors $a \equiv b[m] \iff ka \equiv kb[km]$.

Projection Soit $(a, b, m) \in \mathbb{R}^3$ et $k \in \mathbb{N}$. Si $a \equiv b[km]$, alors $a \equiv b[m]$.

Attention ! Si $a \equiv b[m]$ et $c \equiv d[m]$, on n'a pas nécessairement $ac \equiv bd[m]$.

Exemple 1.2

Si $a \equiv b[2\pi]$, alors $a \equiv b[\pi]$ mais la réciproque est fausse.

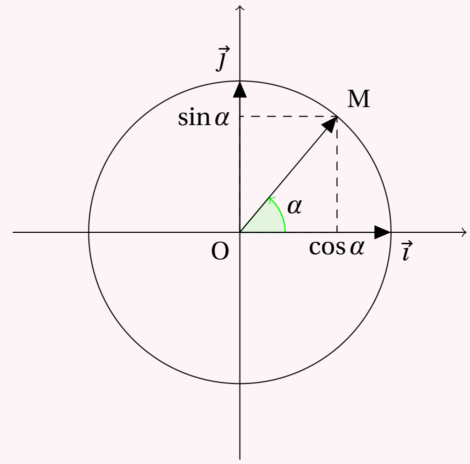
Exercice 1.1

1. Déterminer un réel $\alpha \in]-\pi, \pi]$ tel que $\frac{251\pi}{4} \equiv \alpha[2\pi]$.
2. Déterminer un réel $\beta \in [0, \pi[$ tel que $-\frac{37\pi}{3} \equiv \beta[\pi]$.

2 Fonctions trigonométriques

Définition 2.1 Cercle trigonométrique et fonctions trigonométriques

On suppose le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On appelle cercle trigonométrique le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ les cordonnées de l'unique point M de $\mathscr{C}$ tel que $(\vec{\imath}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}) \equiv \alpha[2\pi]$.

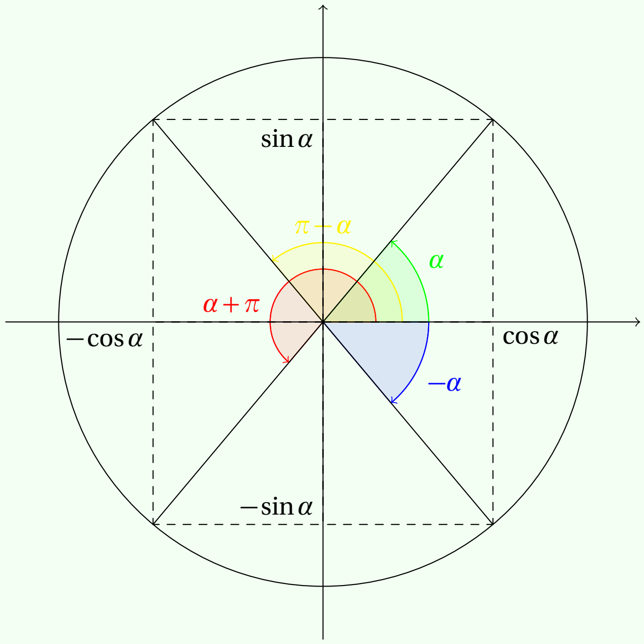


Proposition 2.1 Périodicité

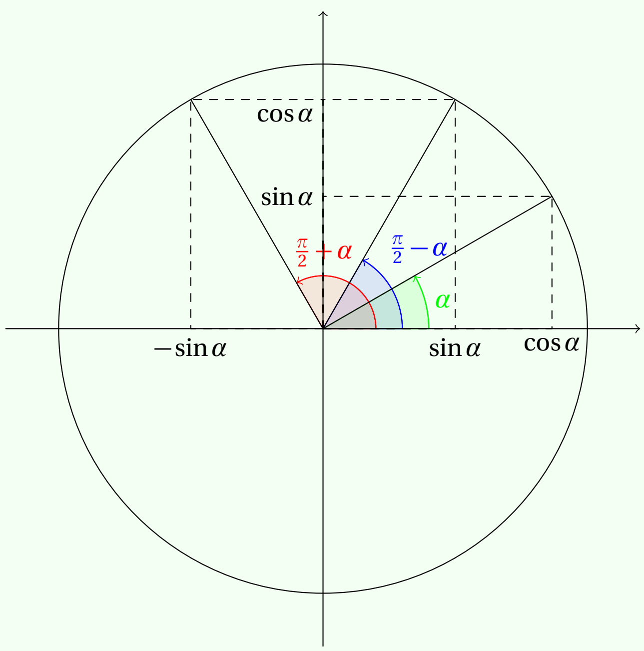
Les fonctions sin et cos sont 2π-périodiques :

$$\forall(\alpha, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \begin{cases} \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha) \end{cases}$$

Proposition 2.2 Symétries



$$\cos(-\alpha)=\cos(\alpha) \qquad \sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$$
$$\cos(\alpha+\pi)=-\cos(\alpha) \qquad \sin(\alpha+\pi)=-\sin(\alpha)$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha) \qquad \sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin(\alpha) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos(\alpha)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin(\alpha) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin(\alpha)$$

Corollaire 2.1 Parité

Les fonctions cos et sin sont donc respectivement paire et impaire.

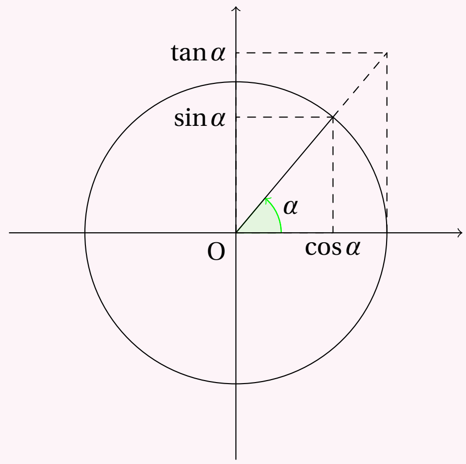
Remarque. On retiendra en particulier que pour tout $(\alpha,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$,

$$\cos(\alpha+n\pi)=(-1)^n\cos(\alpha) \qquad \sin(\alpha+n\pi)=(-1)^n\sin\alpha$$

On a alors évidement $\cos(n\pi)=(-1)^n$ et $\sin(n\pi)=0$. ■

Définition 2.2 La fonction tangente

Soit α un réel non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π.
On pose $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.



Proposition 2.3 Ensemble de définition, périodicité et parité

La fonction tan est définie sur $\mathrm{I} = \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.
Elle est π-périodique :

$$\forall(\alpha, k) \in \mathrm{I} \times \mathbb{Z},\ \tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$$

La fonction tan est impaire.

Angles usuels

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0

Exercice 2.1

Calculer les quantités suivantes :

$$\cos\frac{217\pi}{6} \qquad \sin\frac{2351\pi}{4} \qquad \tan\frac{15548\pi}{3}$$

La fonction cotangente

Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on pose $\cot(\alpha) = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
La fonction cot est également π-périodique.
Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot(\alpha) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$$

3 Formules usuelles

Proposition 3.1 Formules d'addition et de soustraction

Quand ces expressions ont un sens

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Corollaire 3.1 Formules de linéarisation

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \qquad \sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \qquad \cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$$

Corollaire 3.2 Formules de duplication

Quand ces expressions ont un sens

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \qquad \sin 2a = 2 \sin a \cos a \qquad \tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$
$$= 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Corollaire 3.3 Formules de factorisation

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \qquad \sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$
$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \qquad \sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

Proposition 3.2 Paramétrage rationnel du cercle trigonométrique

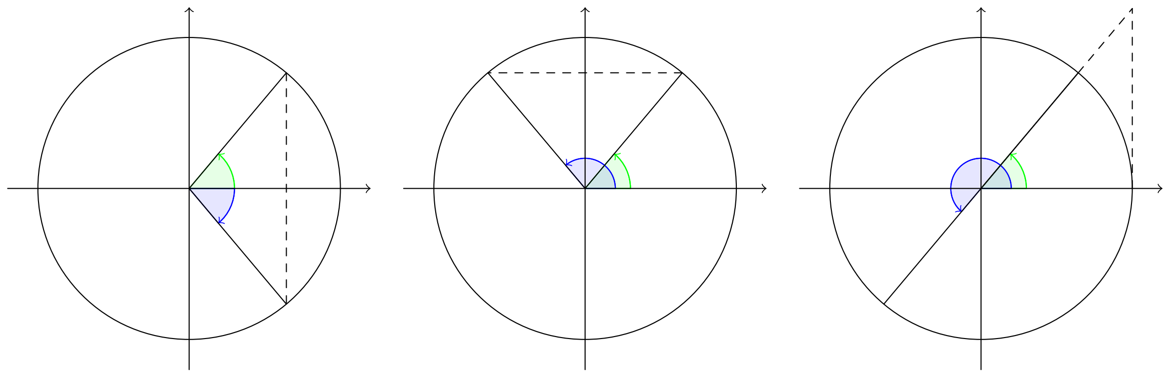
Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$ et $t = \tan\frac{\theta}{2}$. Alors

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

Remarque. On parle de paramétrage *rationnel* puisque les coordonnées de tout point du cercle trigonométrique (excepté le point d'angle polaire π) s'expriment comme une fraction rationnelle (i.e. un quotient de polynômes) de la variable t. ■

4 Equations et inéquations trigonométriques

Equations trigonométriques



$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv b[2\pi] \\ \text{ou} \\ a \equiv -b[2\pi] \end{cases} \qquad \sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv b[2\pi] \\ \text{ou} \\ a \equiv \pi - b[2\pi] \end{cases} \qquad \tan a = \tan b \Leftrightarrow a \equiv b[\pi]$$

Remarque. Il est inutile d'apprendre par coeur les résultats précédents. La simple observation du cercle trigonométrique permet de les retrouver. ■

Exemple 4.1

Les solutions de l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ sont les réels de la forme $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des solutions est donc $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\right)$.
Les solutions de l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont les réels de la forme $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des solutions est donc $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi\mathbb{Z}\right)$.
Les solutions de l'équation $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ sont les réels de la forme $-\frac{\pi}{6}+k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des solutions est donc $-\frac{\pi}{6}+\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 4.1

Résoudre de deux manières différentes l'équation $\cos(x) = \sin(2x)$.

Inéquations trigonométriques

La simple visualisation du cercle trigonométrique permet de résoudre des inéquations trigonométriques.

Exemple 4.2

L'ensemble des solutions de l'équation $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ est $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi\right]$ ou encore $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]+2\pi\mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ est $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right[$ ou encore $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[+2\pi\mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $\tan x \geqslant -1$ est $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ ou encore $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 4.2

Résoudre l'inéquation $\cos x + \cos 3x \geqslant 0$.