

# DEVOIR SURVEILLÉ N°3 : CORRIGÉ

## Problème 1 —

### Partie I – Étude d'une application

- Il s'agit de déterminer les solutions éventuelles de l'équation  $f(z) = i$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}^*$ . Cette équation équivaut à  $z^2 - iz + 1 = 0$  qui est une équation du second degré dont le discriminant est égal à  $-5 = (i\sqrt{5})^2$ . Les solutions de cette équation sont donc  $\frac{i(1+\sqrt{5})}{2}$  et  $\frac{i(1-\sqrt{5})}{2}$  qui sont donc également les antécédents de  $i$  par  $f$ .
- On vient de voir que  $i$  admettait deux antécédents par  $f$  :  $f$  n'est donc pas injective.
- Soit  $Z \in \mathbb{C}$ . On s'intéresse à l'équation (E) :  $f(z) = Z$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ . Celle-ci équivaut à  $z^2 - zZ + 1 = 0$ . Il s'agit d'une équation du second degré dont 0 n'est manifestement pas solution. Cette dernière équation admet donc toujours au moins une solution non nulle donc  $Z$  admet au moins un antécédent par  $f$ . L'application  $f$  est donc surjective.

- Puisque  $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$ ,

$$f(\mathbb{U}) = \{f(e^{i\theta}), \theta \in \mathbb{R}\} = \{e^{i\theta} + e^{-i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\} = \{2\cos\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$$

Puisque  $\text{Im}(\cos) = [-1, 1]$ ,  $f(\mathbb{U}) = [-2, 2]$ .

- Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ . Alors

$$\begin{aligned} z \in f^{-1}(\mathbb{R}) &\iff f(z) \in \mathbb{R} \\ &\iff f(z) = \overline{f(z)} \\ &\iff z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \\ &\iff z - \bar{z} - \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}} = 0 \\ &\iff (z - \bar{z}) \left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) = 0 \\ &\iff \bar{z} = z \text{ ou } |z| = 1 \\ &\iff z \in \mathbb{R}^* \text{ ou } z \in \mathbb{U} \end{aligned}$$

Ainsi  $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}$ .

- On étudie pour cela l'application  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x + \frac{1}{x} \end{cases}$ .  $\varphi$  est clairement dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ . On en déduit le tableau de variations suivant.

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		+	0	-	
Variations de $\varphi$		$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	$-\infty$		$-\infty$	$2$	$+\infty$

Les variations de  $\varphi$  montrent que  $\text{Im}(\varphi) \subset ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ . Mais la continuité de  $\varphi$  montre via le théorème des valeurs intermédiaires que  $\varphi$  prend toutes les valeurs dans  $] -\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ . Il en résulte que  $f(\mathbb{R}^*) = \text{Im}(\varphi) = ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ .

7. Soit  $Z \in f(D)$ . Il existe donc  $z \in D$  tel que  $Z = f(z)$ . Il s'agit maintenant de montrer que  $f(z) \notin [-2, 2]$ . On peut raisonner par l'absurde. Supposons que  $f(z) \in [-2, 2]$ . A fortiori,  $f(z) \in \mathbb{R}$  i.e.  $z \in f^{-1}(\mathbb{R})$ . D'après la question I.5,  $z \in \mathbb{R}$  ou  $z \in \mathbb{U}$ . Or on ne peut avoir  $z \in \mathbb{U}$  puisque  $z \in D$ . C'est donc que  $z \in \mathbb{R}$ . Mais alors  $f(z) \in f(\mathbb{R}) = ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ . Or  $f(z) \in [-2, 2]$  donc  $f(z) = -2$  ou  $f(z) = 2$ . Les variations de  $\varphi$  nous disent alors que  $z = -1$  ou  $z = 1$ , ce qui est à nouveau impossible puisque  $z \in D$ . On en conclut par l'absurde que  $f(z) \notin [-2, 2]$ . Ainsi on a bien  $f(D) \subset \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ .
8. Soit  $Z \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ . On rappelle que les antécédents de  $Z$  par  $f$  sont les solutions de l'équation  $z^2 - Zz + 1 = 0$ . Cette équation du second degré admet pour discriminant  $Z^2 - 4$  qui est non nul puisque  $Z \notin \{-2, 2\}$ . Elle admet donc deux solutions. Ainsi  $Z$  admet exactement deux antécédents par  $f$  dans  $\mathbb{C}^*$ . Notons  $\alpha$  et  $\beta$  les deux antécédents de  $Z$  par  $f$ . Puisqu'ils sont solutions de l'équation  $z^2 - Zz + 1 = 0$ ,  $\alpha\beta = 1$ .
9. On reprend les notations de la question précédente. Il s'agit maintenant de voir qu'un seul des deux antécédents de  $Z$  par  $f$  appartient à  $D$ . Puisque  $\alpha\beta = 1$ , on a également  $|\alpha||\beta| = 1$ . On ne peut avoir  $|\alpha| = 1$  ou  $|\beta| = 1$  puisqu'alors  $Z = f(\alpha) = f(\beta)$  appartiendrait à  $f(\mathbb{U}) = [-2, 2]$ . Ainsi  $\alpha$  et  $\beta$  sont de module distincts de 1. Puisque  $|\alpha||\beta| = 1$ , l'un de ces deux modules est strictement inférieur à 1 et l'autre est strictement supérieur à 1. Un seul de ces deux complexes appartient donc à  $D$  (ils sont évidemment tous deux de module non nul puisqu'ils appartiennent à  $\mathbb{C}^*$ ). Ainsi  $Z$  admet un unique antécédent dans  $D$  par  $f$ . Ceci prouve que  $f$  induit une bijection de  $D$  sur  $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ .

## Partie II – Un petit peu d'exponentielle complexe

1. On a déjà vu que les antécédents de  $i$  par  $f$  étaient  $\frac{i(1+\sqrt{5})}{2}$  et  $\frac{i(1-\sqrt{5})}{2}$ . Les antécédents de  $i$  par  $g$  sont donc les antécédents de ces deux nombres par la fonction exponentielle. Les formes exponentielles de ces deux nombres sont

$$\frac{i(1+\sqrt{5})}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} \quad \frac{i(1-\sqrt{5})}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot e^{\frac{-i\pi}{2}}$$

On en déduit que leurs antécédents par l'exponentielle sont les complexes

$$\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \text{ et } \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

où  $k \in \mathbb{Z}$ . Il s'agit donc également des antécédents de  $i$  par  $g$ .

2.

$$g(i\mathbb{R}) = \{g(i\theta), \theta \in \mathbb{R}\} = \{2 \cos \theta, \theta \in \mathbb{R}\} = [-2, 2]$$

3. On sait que  $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ . Ainsi  $g(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_+^*)$ . Les variations de la fonction  $\varphi$  étudiées à la question I.6 montrent que  $f(\mathbb{R}_+^*) = [2, +\infty[$ .

## Partie III – Une suite d'applications

1. Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) &= z\varphi_1(z) - \varphi_0(z) = z^2 - 2 \\ \varphi_3(z) &= z\varphi_2(z) - \varphi_1(z) = z^3 - 3z \\ \varphi_4(z) &= z\varphi_3(z) - \varphi_2(z) = z^4 - 4z^2 + 2 \end{aligned}$$

2. Les solutions de l'équation  $\varphi_2(z) = 0$  sont clairement  $-\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2}$ .  
 De même, les solutions de l'équation  $\varphi_3(z) = 0$  sont  $0, -\sqrt{3}$  et  $\sqrt{3}$ .  
 L'équation  $\varphi_4(z) = 0$  est une équation bicarrée. On la résout classiquement en effectuant le changement de variable  $Z = z^2$ . Les solutions de l'équation  $Z^2 - 4Z + 2 = 0$  sont  $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$  et  $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ . On en déduit que les solutions de l'équation  $\varphi_4(z) = 0$  sont

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}, -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}, \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}, -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

3. On note  $P_n$  l'assertion

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \varphi_n(f(z)) = f(z^n)$$

Puisque pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $\varphi_0(z) = 2$  et  $f(z^0) = f(1) = 2$ ,  $P_0$  est vraie. De même, pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $\varphi_1(f(z)) = z + \frac{1}{z}$  et  $f(z^1) = z + \frac{1}{z}$  donc  $P_1$  est vraie.

Supposons  $P_n$  et  $P_{n+1}$  vraies pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Alors pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_{n+2}(f(z)) &= f(z)\varphi_{n+1}(f(z)) - \varphi_n(f(z)) \\ &= f(z)f(z^{n+1}) - f(z^n) \\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \\ &= z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}} = f(z^{n+2}) \end{aligned}$$

Ainsi  $P_{n+2}$  est vraie.

Par récurrence double,  $P_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

4. L'équation  $f(z^n) = 0$  équivaut à  $z^{2n} = -1$ . L'ensemble des solutions de cette équation est donc l'ensemble des racines  $2n^{\text{èmes}}$  de  $-1$ , c'est-à-dire

$$A_n = \left\{ e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}, k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket \right\}$$

5. Remarquons que pour  $\omega \in A_n$ ,

$$\varphi_n(f(\omega)) = f(\omega^n) = 0$$

Donc les  $f(\omega)$  pour  $\omega \in A_n$  sont des solutions de l'équation  $\varphi_n(z) = 0$ . Via une formule d'Euler, ceci signifie que les réels  $2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$  pour  $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$  sont des solutions de l'équation  $\varphi_n(z) = 0$ .

Réciproquement, soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  une solution de l'équation  $\varphi_n(z) = 0$ . Puisque  $f$  est surjective, il existe donc  $\omega \in \mathbb{C}^*$  tel que  $\alpha = f(\omega)$ . Alors  $f(\omega^n) = \varphi_n(f(\omega)) = f(\omega^n) = 0$  de sorte que  $\omega$  est solution de l'équation  $f(z^n) = 0$ . Il existe donc  $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$  tel que  $\alpha = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}$ . Mais alors  $\alpha = f(\omega) = 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ .

Finalement l'ensemble des solutions de l'équations  $\varphi_n(z) = 0$  est

$$B_n = \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket \right\}$$

On peut remarquer que certains éléments de  $B_n$  figurent en double dans la description précédente. En effet,

$$B_n = \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \cup \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket n, 2n-1 \rrbracket \right\}$$

On montre alors que les deux ensembles de cette union sont égaux.

$$\begin{aligned}
 \left\{ 2 \cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right), k \in \llbracket n, 2n-1 \rrbracket \right\} &= \left\{ 2 \cos \left( \frac{(2(k+n)+1)\pi}{2n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\
 &\quad \text{via le "changement d'indice" } k \rightarrow k+n \\
 &= \left\{ 2 \cos \left( \pi + \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\
 &= \left\{ -2 \cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\
 &= \left\{ -2 \cos \left( \frac{(2(n-1-k)+1)\pi}{2n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\
 &\quad \text{via le "changement d'indice" } k \rightarrow n-1-k \\
 &= \left\{ -2 \cos \left( \pi - \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\
 &= \left\{ 2 \cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}
 \end{aligned}$$

Finalement, on peut affirmer que

$$B_n = \left\{ 2 \cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\frac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$  et  $\cos$  est injective sur  $[0, \pi]$  puisqu'elle y est strictement décroissante. Les réels  $2 \cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)$  pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  sont donc deux à deux distincts. Le nombre de solutions de l'équation  $\varphi_n(z) = 0$  est donc  $n$ .

**REMARQUE.** Le lecteur cultivé aura remarqué que les fonctions  $\varphi_n$  sont reliées aux *polynômes de Tchebychev*. ■

### SOLUTION 1.

1. a. L'équation  $X^2 - zX - \frac{p}{3} = 0$  est une équation du second degré donc elle admet deux solutions complexes  $u$  et  $v$  éventuellement confondues. Les liens entre coefficients et racines d'une équation du second degré nous disent alors que  $u + v = z$  et  $uv = -\frac{p}{3}$ .

- b. Tout d'abord

$$u^3 v^3 = \left( -\frac{p}{3} \right)^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Ensuite

$$u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3u^2v - 3uv^2 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) = z^3 + pz = -q$$

puisque  $z$  est solution de (E).

- c. D'après le cours,  $u^3$  et  $v^3$  sont solutions de l'équation  $X^2 - (u^3 + v^3)X + u^3 v^3 = 0$ , c'est-à-dire de l'équation (E').
- d. On utilise le fait que  $u^3 + v^3 = -q$  et  $uv = -\frac{p}{3}$ .

$$\begin{aligned}
 (ju + j^2v)^3 + p(ju + j^2v) + q &= u^3 + 3ju^2v + 3j^2uv^2 + v^3 + p(ju + j^2v) + q \\
 &= 3uv(ju + j^2v) + p(ju + j^2v) \quad \text{car } u^3 + v^3 = -q \\
 &= 0 \quad \text{car } uv = -\frac{p}{3} \\
 (j^2u + jv)^3 + p(j^2u + jv) + q &= u^3 + 3j^2u^2v + 3juv^2 + v^3 + p(j^2u + jv) + q \\
 &= 3uv(j^2u + jv) + p(j^2u + jv) \quad \text{car } u^3 + v^3 = -q \\
 &= 0 \quad \text{car } uv = -\frac{p}{3}
 \end{aligned}$$

Ainsi  $ju + j^2v$  et  $j^2u + jv$  sont bien solutions de (E).

2. Avec les notations de l'énoncé  $p = -3i$  et  $q = 1 - i$ . L'équation  $(E')$  est alors

$$X^2 + (1 - i)X - i = 0$$

Son discriminant est  $(1 - i)^2 + 4i = 2i$ . Une racine carrée de ce discriminant est  $1 + i$ . Les solutions de  $(E')$  sont alors  $-1$  et  $i$ . Une racine cubique de  $-1$  est  $u = -1$  et une racine cubique de  $i$  est  $v = -i$  et on a bien  $uv = i = -\frac{p}{3}$ . Les solutions de  $(E)$  sont donc

$$\begin{aligned} u + v &= -1 - i \\ ju + j^2v &= -j - j^2i = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)(1 + i) \\ j^2u + jv &= -j^2 - ji = \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)(1 + i) \end{aligned}$$