Devoir surveillé n°10

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 —

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n \geqslant n_0} a_n$ une série à termes réels. Dans le cas où cette série converge, on note R_n le reste de rang n de cette série, c'est-à-dire $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.

On souhaite étudier la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} R_n$ dans plusieurs cas.

Partie I – Cas d'une série géométrique

On se donne $q \in \mathbb{R}$ et on pose $a_n = q^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (on a donc $n_0 = 0$).

1. Pour quelles valeurs de q la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ convergent-elle ? On suppose cette condition vérifiée dans la suite de cette partie.

2. Exprimer R_n en fonction de q et n.

3. En déduire que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} R_n$ converge et calculer sa somme.

Partie II – Cas d'une série de Riemann

On se donne dans cette partie $\alpha \in \mathbb{R}$ et on pose $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (on a donc $n_0 = 1$).

4. Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$ converge-t-elle ? On suppose cette condition vérifiée dans la suite de cette partie.

5. A l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que $R_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}}$.

6. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} R_n$ converge.

Partie III – Cas de la série harmonique alternée

Dans cette partie, on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (on a donc $n_0 = 1$). On note également S_n la somme partielle de rang n de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$, c'est-à-dire $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

7. Calculer $\int_0^1 x^n \, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

8. En déduire que $S_n = -\ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx$.

9. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$.

10. Exprimer R_n à l'aide d'une intégrale puis, à l'aide d'une intégration par parties, déterminer deux constantes réelles α et β telles que $\alpha > 1$ et $R_n \underset{n \to +\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}\beta}{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

11. En déduire la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} R_n$.

Problème 2 —

Partie I –

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et préciser sa dimension.

2. Montrer que $\mathcal{A}$ est un anneau commutatif.

3. On pose $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que (I_3, M, M^2) est une base de $\mathcal{A}$.

4. Exprimer M^3 en fonction de I_3 et M.

Partie II –

On définit une suite (u_n) par $u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = 4$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+1} - 4u_n$.

1. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_k, b_k, c_k tels que $M^k = \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k & c_k \\ 0 & -c_k & b_k \end{pmatrix}$.

2. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (a_k) et deux relations de récurrence liant les suites (b_k) et (c_k).

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on appelle z_k le nombre complexe $z_k = b_k + ic_k$. Exprimer z_{k+1} en fonction de z_k et montrer que $b_k = \mathrm{Re}\left((1+i)^k\right)$.

4. Retrouver ce dernier résultat en trouvant une relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par la suite (b_k).

5. Montrer que la suite (u_n) est à valeurs entières.

6. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{tr}(M^n)$.

7. Soit p un nombre premier. On rappelle que pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$ et que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, p divise $a^p - a$ (petit théorème de Fermat).
Montrer que p divise u_p.