Devoir à la maison n° 1 : corrigé

Problème 1 — D'après Bac C 1993

Partie I – Étude et courbe représentative de f

1. **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car ln et $x \mapsto \sqrt{x}$ le sont et car $x \mapsto \sqrt{x}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Un calcul rapide fournit

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $]0, e^2]$ et strictement décroissante sur $[e^2, +\infty[$.

c. On sait que $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0^+$ donc, par opérations,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

Puisque $X = \sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que $\frac{\ln X}{X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

2. **a.** Puisque $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$, $\mathcal{T}$ admet pour équation $y = x - 1$.

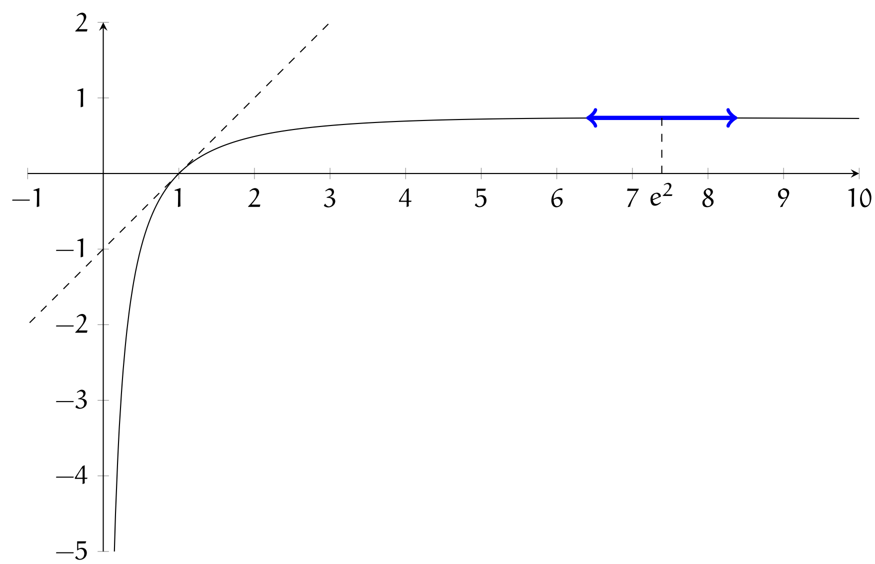
b. Tout d'abord, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = \frac{2-\ln x - 2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x)$ est du signe de $2 - \ln x - 2x\sqrt{x}$. Or $x \mapsto 2 - \ln x - 2x\sqrt{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule en 1 donc, g' est strictement positive sur $]0, 1]$ et strictement négative sur $[1, +\infty[$.

c. Il s'ensuit que g est strictement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Puisque $g(1) = 0$, g est négative sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule qu'en 1.
On en déduit que $\mathcal{C}$ est au-dessous de $\mathcal{T}$ et que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ ne s'intersectent qu'au point de coordonnées $(1, 0)$.

3. Puisque $f'(e^2) = 0$, $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale en le point de coordonnées $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$.
La question **I.1.c** montre que $\mathcal{C}$ admet pour asymptotes les axes de coordonnées.



Partie II – Étude de deux suites

1. **a.** On a vu à la question**I.1.b** que f était décroissante sur $[e^2, +\infty[$. Or $e^2 \leqslant 8$ donc f est décroissante sur $[8, +\infty[$. En particulier, f est décroissante sur $[k, k+1]$ puisque $k \geqslant 8$. On en déduit que

$$\forall t \in [k, k+1],\ f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$$

En intégrant sur $[k, k+1]$, on obtient par croissance de l'intégrale :

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k)$$

b. Soit n un entier supérieur ou égal à 8. D'après la question précédente

$$\sum_{k=8}^{n} f(k+1) \leqslant \sum_{k=8}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=8}^{n} f(k)$$

La relation de Chasles pour les intégrales montre que

$$\sum_{k=8}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,dt = \int_8^{n+1} f(t)\,dt$$

et un changement d'indice montre que

$$\sum_{k=8}^{n} f(k+1) = \sum_{k=9}^{n+1} f(k) = u_{n+1} - f(8)$$

On obtient donc bien :

$$u_{n+1} - f(8) \leqslant \int_8^{n+1} f(t)\,dt \leqslant u_n$$

c. Soit n un entier supérieur ou égal à 8. Puisque $\ln$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[8, n+1]$, une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_8^{n+1} f(t)\,dt \\
&= \left[2\ln t\sqrt{t}\right]_8^{n+1} - \int_8^{n+1} \frac{2\sqrt{t}}{t}\,dt \\
&= 2\ln(n+1)\sqrt{n+1} - 12\ln(2)\sqrt{2} - \int_8^{n+1} \frac{2}{\sqrt{t}}\,dt \\
&= 2\ln(n+1)\sqrt{n+1} - 12\ln(2)\sqrt{2} - \left[4\sqrt{t}\right]_8^{n+1}\,dt \\
&= 2\ln(n+1)\sqrt{n+1} - 4\sqrt{n+1} - 12\ln(2)\sqrt{2} + 8\sqrt{2}
\end{aligned}$$

d. Remarquons que

$$I_n = \sqrt{n+1}\,(2\ln(n+1) - 4) + 8\sqrt{2} - 12\ln(2)\sqrt{2}$$

Par opérations, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} = +\infty$. Puisque $I_n \leqslant u_n$ pour tout entier $n \geqslant 8$, le théorème de minoration permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. **a.** Les variations de f montrent que f est positive sur $[1, +\infty[$. Ainsi pour tout entier $n \geqslant 8$, $u_{n+1} - u_n = f(n+1) \geqslant 0$, ce qui prouve que (u_n) est croissante.

b. On a vu à la question **II.1.b** que pour tout entier $n \geqslant 8$

$$u_{n+1} - f(8) \leqslant I_n \leqslant u_n$$

Puisque (u_n) est croissante, on a a fortiori pour tout entier $n \geqslant 8$

$$u_n - f(8) \leqslant I_n \leqslant u_n$$

ce qui équivaut à

$$0 \leqslant v_n \leqslant f(8)$$

La suite (v_n) est donc bien bornée.

c. Pour tout entier $n \geqslant 8$,

$$v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) - (I_{n+1} - I_n) = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt$$

Or on a vu à la question **II.1.a** que pour tout entier $n \geqslant 8$

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n)$$

donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$, ce qui prouve que la suite (v_n) est décroissante. Puisqu'elle est bornée donc minorée d'après la question **II.2.b**, la suite (v_n) converge d'après le théorème de la limite monotone vers une limite $l \in \mathbb{R}$.
De plus, pour tout entier $n \geqslant 8$, $0 \leqslant v_n \leqslant f(8)$ donc $0 \leqslant l \leqslant f(8)$ par passage à la limite. On trouve que $0,735$ est une valeur approchée de l à 10^{-3} près. A fortiori, $f(8) \leqslant 0,74$ et donc $0 \leqslant l \leqslant 0,74$.

Solution 1.

1. Il existe $\binom{6}{2}$ issues possibles à ce tirage. La variable aléatoire X est à valeurs dans $\{0,1,2\}$.

- L'événement $X = 0$ correspond à tirer les deux boules parmi les quatre rouges. On en déduit que

$$P(X=0) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{5}$$

- L'événement $X = 1$ correspond à tirer une boule parmi les deux noires et une boule parmi les quatre rouges. On en déduit que

$$P(X=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{8}{15}$$

- L'événement $X = 2$ correspond à tirer les deux boules parmi les deux noires. On en déduit que

$$P(X=2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{15}$$

2. La variable aléatoire Y est encore à valeurs dans $\{0,1,2\}$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= P(Y=0|X=0)P(X=0) + P(Y=0|X=1)P(X=1) + P(Y=0|X=2)P(X=2) \\
&= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \times \frac{2}{5} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}} \times \frac{8}{15} + 1 \times \frac{1}{15} \\
&= \frac{2}{5} \\
P(Y=1) &= P(Y=1|X=0)P(X=0) + P(Y=1|X=1)P(X=1) + P(Y=1|X=2)P(X=2) \\
&= \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} \times \frac{2}{5} + \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} \times \frac{8}{15} + 0 \times \frac{1}{15} \\
&= \frac{8}{15} \\
P(Y=2) &= P(Y=2|X=0)P(X=0) + P(Y=2|X=1)P(X=1) + P(Y=2|X=2)P(X=2) \\
&= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \times \frac{2}{5} + 0 \times \frac{8}{15} + 0 \times \frac{1}{15} \\
&= \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

3. On utilise la formule de Bayes

$$P(X=1|Y=1) = \frac{P(Y=1|X=1)P(X=1)}{P(Y=1)}$$

Or $P(Y=1) = P(X=1)$ et on a vu à la question précédente que

$$P(Y=1|X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}$$

Ainsi la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire au premier tirage sachant que l'on a tiré une seule boule noire au second tirage est $\frac{1}{5}$.

4. La probabilité recherchée est :

$$P(X=1,Y=1)+P(X=0,Y=2) = P(Y=1|X=1)P(X=1)+P(Y=2|X=0)P(X=0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} \times \frac{8}{15} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$$

Solution 2.

1. Le discriminant de cette équation est $-\frac{9}{25} = \left(\frac{3i}{5}\right)^2$. On en déduit que les racines de l'équation sont

$$z_1 = \frac{1+3i}{10} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{1-3i}{10}$$

2. La fonction tan est strictement croissante et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, $\tan(0) = 0$ et $\lim_{\frac{\pi}{2}^-} = +\infty$ donc le théorème des valeurs intermédiaires justifie l'existence d'un unique réel $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\theta = 3$.

3.

$$\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{10\cos\theta} = \frac{1}{10} + \frac{i\tan\theta}{10} = z_1$$
$$\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{10\cos\theta} = \frac{1}{10} - \frac{i\tan\theta}{10} = z_2$$

4. On peut aussi écrire

$$z_1 = \frac{e^{i\theta}}{10\cos\theta} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{e^{-i\theta}}{10\cos\theta}$$

de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \frac{e^{in\theta}}{10^n\cos^n\theta} + \frac{e^{-in\theta}}{10^n\cos^n\theta} = \frac{2\cos(n\theta)}{10^n\cos^n\theta}$$

en utilisant une relation d'Euler. Ceci prouve bien que v_n est un nombre réel.

5. On sait que $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1+\tan^2\theta = 10$ donc $\cos^2\theta = \frac{1}{10}$. Puisque $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\theta \geqslant 0$ de sorte que $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ou encore $10\cos\theta = \sqrt{10}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \frac{2\cos(n\theta)}{\sqrt{10}^n}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$|v_n| \leqslant \frac{2}{\sqrt{10}^n}$$

Puisque $\sqrt{10} > 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{10}^n} = 0$. Le théorème des gendarmes garantit alors la convergence de la suite (v_n) vers 0.