

DEVOIR À LA MAISON N°17

- ▶ Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- ▶ Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- ▶ Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 –

Dans tout le problème, E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3.

Partie I –

1. Démontrer que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ont même déterminant.
2. Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels.
On considère l'application w de $\text{Ker } u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.
 - a. Montrer que $\text{Im } w \subset \text{Ker } u^i$.
 - b. En déduire que $\dim(\text{Ker } u^{i+j}) \leq \dim(\text{Ker } u^i) + \dim(\text{Ker } u^j)$.
3. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\text{rg } u = 2$.
 - a. Montrer que $\dim(\text{Ker } u^2) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question I.2.b).
 - b. Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E .
 - c. Écrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.
4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\text{rg } u = 1$.
 - a. Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.
 - b. Justifier l'existence d'un vecteur c de $\text{Ker } u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E .
 - c. Écrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie II –

Soit désormais une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1} .

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

1. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.
2. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.
3. On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
4. On suppose dans cette question que $\text{rg } N = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

a. En utilisant la question I.3, montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire une matrice semblable à la matrice M .

b. Calculer M^3 et déterminer $\text{rg } M$.

c. Montrer que les matrices M et N sont semblables.

d. Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

5. On suppose dans cette question que $\text{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.
Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

6. **Exemple** : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

- a. Montrer que $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2) .
- b. Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E , et écrire la matrice de u dans cette base.
- c. Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

7. Réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?