# Devoir à la maison n°11

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

## Problème 1 – E3A MP 2020

### Questions de cours

**1** On considère le trinôme du second degré à coefficients complexes $a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ dont on note $s_1$ et $s_2$ les racines.
Donner, sans démonstration, les expressions de $\sigma_1 = s_1 + s_2$ et de $\sigma_2 = s_1 s_2$ à l'aide des coefficients $a, b$ et $c$.

**2** Soient $a$ et $b$ deux réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On note $r_1$ et $r_2$ les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation caractéristique associée à cette suite.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $u_n$ en fonction de $r_1$, $r_2$ et $n$.
On sera amené à distinguer trois cas et il n'est pas demandé d'exprimer les constantes qui apparaissent en fonction de $u_0$ et de $u_1$.

### Exercice

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$ telles que les sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
On admettra que l'ensemble E des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
L'endomorphisme identité de l'espace E sera noté $\mathrm{Id}_\mathrm{E}$.
On définit les applications S et T de $\mathcal{C}$ dans E par :

$$\forall x \in \mathcal{C},\ \mathrm{S}(x) = z, \qquad \text{avec} \qquad \forall n \in \mathbb{Z},\ z_n = x_{-n}$$

et

$$\forall x \in \mathcal{C},\ \mathrm{T}(x) = y, \qquad \text{avec} \qquad \forall n \in \mathbb{Z},\ y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$$

**3** Donner un exemple de suite non constante, élément de $\mathcal{C}$.

**4** Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.

**5** Prouver que si une suite $x$ est dans $\mathcal{C}$, elle est bornée.

**6** Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{C}$. On admettra qu'il en est de même de S.

**7** Soient $\mathrm{F} = \{x \in \mathcal{C}, \forall n \in \mathbb{Z},\ x_n = x_{-n}\}$ et $\mathrm{G} = \{x \in \mathcal{C}, \forall n \in \mathbb{Z},\ x_n = -x_{-n}\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}$.

**8** Étude de l'endomorphisme S
Prouver que S est une symétrie de $\mathcal{C}$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

**9** Etude de l'endomorphisme T
On rappelle qu'une suite $x$ est dans $\mathcal{C}$ lorsque les deux sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

**9.a** Soit $\lambda$ un réel. Montrer que si $\lambda \notin \{-2, 2\}$, $\mathrm{Ker}(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}$ où $0_{\mathcal{C}}$ désigne le vecteur nul de $\mathcal{C}$.
On pourra utiliser les questions de cours.

**9.b** L'endomorphisme T est-il injectif ?

**9.c** Déterminer $\mathrm{Ker}(\mathrm{T} - 2\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{T} + 2\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$.

**9.d** Déterminer alors l'ensemble de toutes les valeurs propres de l'endomorphisme T.

**10** On munit $\mathcal{C}$ de la norme infinie : si $x \in \mathcal{C}$, $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$.

Soit N l'application qui, à tout élément $x$ de $\mathcal{C}$, associe $\mathrm{N}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$.

**10.a** Vérifier que, pour tout $x$ de $\mathcal{C}$, $\mathrm{N}(x)$ existe.

**10.b** Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur l'espace $\mathcal{C}$.

**10.c** Montrer que S est une isométrie de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}, \mathrm{N})$. Est-elle continue ?

**10.d** Prouver que, dans cet espace normé, les sous-espaces vectoriels F et G sont des fermés.

**10.e** Les deux normes $\|\ \|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?