

DEVOIR À LA MAISON N°13

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 —

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, F un sous-espace de E et G un groupe fini d'automorphismes linéaires de E , de cardinal m , tel que F soit stable par tout élément g de G .

Le produit $u \circ v$ de deux endomorphismes de E sera noté plus simplement uv .

à tout endomorphisme u de E , on associe u^+ défini par :

$$u^+ = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} u g$$

1. Soit $h \in G$. Montrer que l'application $\delta_h : \begin{cases} G & \longrightarrow G \\ g & \longmapsto gh \end{cases}$ est une bijection de G sur G .
2. Montrer que u^+ est un endomorphisme de E commutant avec tout élément h de G .
3. Calculer $(u^+)^+$.
4. Soit p un projecteur de E d'image F . Montrer que F est inclus dans l'image de p^+ .
5. Montrer que, pour tous g et h de G , on a $g^{-1} p g h^{-1} p h = h^{-1} p h$.
6. Montrer que p^+ est un projecteur.
7. Comparer les images de p et de p^+ .
8. Montrer que le noyau de p^+ est un supplémentaire de F dans E stable par tout élément g de G .
9. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E stable par tout g de G admet un supplémentaire stable par tout g de G .