

# DEVOIR À LA MAISON N°1

## EXERCICE 1.

On considère une suite  $(x_n)$  de réels telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n x_k^3 = \left( \sum_{k=0}^n x_k \right)^2$$

1. Montrer que  $x_0$  ne peut prendre que deux valeurs que l'on précisera.
2. Que peut valoir  $x_1$  ? On distinguera les cas suivant les deux valeurs possibles de  $x_0$ .
3. On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n x_k$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Quelles sont les valeurs possibles de  $S_0$  ?  $S_1$  ?
4. Montrer que, de manière générale, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $S_n = \frac{m(m+1)}{2}$ .

## EXERCICE 2.

On considère une application  $f$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, f(m^2 + n^2) = f(m)^2 + f(n)^2$$

et  $f(1) \neq 0$ .

1. Calculer  $f(0)$  et  $f(1)$ .
2. En déduire successivement  $f(2)$ ,  $f(4)$ ,  $f(5)$ ,  $f(8)$ .
3. Calculer  $f(3)$ ,  $f(9)$ ,  $f(6)$  et  $f(10)$ .
4. Calculer  $f(50)$  et en déduire  $f(7)$ .
5. En décomposant 125 de deux façons comme somme de deux carrés, calculer  $f(11)$ . De même, calculer  $f(12)$  en considérant 145.
6. Que peut-on raisonnablement conjecturer sur la valeur de  $f(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  quelconque ? Prouvez votre conjecture.  
On pourra remarquer que

$$\begin{aligned} (2n+1)^2 + (n-2)^2 &= (2n-1)^2 + (n+2)^2 \\ (2n+2)^2 + (n-4)^2 &= (2n-2)^2 + (n+4)^2 \end{aligned}$$

## EXERCICE 3.

On pose  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  et on considère l'application

$$P: \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto z^3 + \alpha z^2 + \beta z \end{cases}$$

où  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ .

1. Que vaut  $1 + j + j^2$  ?

2. Montrer que  $P(1) + P(j) + P(j^2) = 3$ .
3. On note  $A_0, A_1$  et  $A_2$  les points du plan d'affixes respectifs  $1, j$  et  $j^2$ . On se donne également  $B_1$  et  $B_2$  deux points du plan.  
Montrer qu'il existe  $k \in \{0, 1, 2\}$  tel que  $A_k B_1 \cdot A_k B_2 \geq 1$ .  
On pourra utiliser le fait que le module d'une somme de complexes est toujours inférieur ou égal à la somme des modules de ces complexes (inégalité triangulaire).