

DEVOIR À LA MAISON N°11

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 – E3A MP 2020

Questions de cours

- 1 On considère le trinôme du second degré à coefficients complexes $aX^2 + bX + c$ dont on note s_1 et s_2 les racines.
Donner, sans démonstration, les expressions de $\sigma_1 = s_1 + s_2$ et de $\sigma_2 = s_1 s_2$ à l'aide des coefficients a, b et c .
- 2 Soient a et b deux réels et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}, u_1 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On note r_1 et r_2 les racines dans \mathbb{C} de l'équation caractéristique associée à cette suite.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_n en fonction de r_1, r_2 et n .

On sera amené à distinguer trois cas et il n'est pas demandé d'exprimer les constantes qui apparaissent en fonction de u_0 et de u_1 .

Exercice

On note \mathcal{C} l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ indexées par \mathbb{Z} telles que les sous-suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

On admettra que l'ensemble E des suites réelles indexées par \mathbb{Z} est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

L'endomorphisme identité de l'espace E sera noté Id_E .

On définit les applications S et T de \mathcal{C} dans E par :

$$\forall x \in \mathcal{C}, S(x) = z, \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, z_n = x_{-n}$$

et

$$\forall x \in \mathcal{C}, T(x) = y, \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$$

- 3 Donner un exemple de suite non constante, élément de \mathcal{C} .
- 4 Montrer que \mathcal{C} est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E .
- 5 Prouver que si une suite x est dans \mathcal{C} , elle est bornée.
- 6 Montrer que T est un endomorphisme de \mathcal{C} . On admettra qu'il en est de même de S .
- 7 Soient $F = \{x \in \mathcal{C}, \forall n \in \mathbb{Z}, x_n = x_{-n}\}$ et $G = \{x \in \mathcal{C}, \forall n \in \mathbb{Z}, x_n = -x_{-n}\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de \mathcal{C} .

8 Étude de l'endomorphisme S

Prouver que S est une symétrie de \mathcal{C} dont on précisera les éléments caractéristiques.

9 Étude de l'endomorphisme T

On rappelle qu'une suite x est dans \mathcal{C} lorsque les deux sous-suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.

9.a Soit λ un réel. Montrer que si $\lambda \notin \{-2, 2\}$, $\text{Ker}(T - \lambda \text{Id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}$ où $0_{\mathcal{C}}$ désigne le vecteur nul de \mathcal{C} .

On pourra utiliser les questions de cours.

9.b L'endomorphisme T est-il injectif ?

9.c Déterminer $\text{Ker}(T - 2 \text{Id}_{\mathcal{C}})$ et $\text{Ker}(T + 2 \text{Id}_{\mathcal{C}})$.

9.d Déterminer alors l'ensemble de toutes les valeurs propres de l'endomorphisme T.

10 On munit \mathcal{C} de la norme infinie : si $x \in \mathcal{C}$, $\|x\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|$.

Soit N l'application qui, à tout élément x de \mathcal{C} , associe $N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$.

10.a Vérifier que, pour tout x de \mathcal{C} , $N(x)$ existe.

10.b Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur l'espace \mathcal{C} .

10.c Montrer que S est une isométrie de l'espace vectoriel normé (\mathcal{C}, N) . Est-elle continue ?

10.d Prouver que, dans cet espace normé, les sous-espaces vectoriels F et G sont des fermés.

10.e Les deux normes $\|\cdot\|_{\infty}$ et N sont-elles équivalentes ?