Interrogation écrite n°09

NOM : Prénom : Note :

1. On pose $a_n = \frac{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$.

   On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ *donc* (a_n) *est à valeurs dans* $[0, 1[$. *Notamment* (a_n) *est bornée et* $\mathrm{R} \geq 1$. *De plus,* $a_{3n+1} = \frac{1}{3}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *donc* (a_n) *ne converge pas vers* 0 *de sorte que* $\mathrm{R} \leq 1$. *Finalement,* $\mathrm{R} = 1$. ∎

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \binom{2n}{n} z^{2n}$.

   On applique la règle de d'Alembert. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\frac{\left|\binom{2(n+1)}{n+1} z^{2(n+1)}\right|}{\left|\binom{2n}{n} z^{2n}\right|} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|z|^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 4|z|^2$$

   Si $|z| < \frac{1}{2}$, *alors* $4|z|^2 < 1$ *et* $\sum \binom{2n}{n} z^{2n}$ *converge. Si* $|z| > \frac{1}{2}$, *alors* $4|z|^2 > 1$ *et* $\sum \binom{2n}{n} z^{2n}$ *diverge. Le rayon de convergence recherché est donc* $\frac{1}{2}$. ∎

3. Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

   Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} x^{2n}$ *vaut* 1 *et*

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

   Par primitivisation, le rayon de convergence de la série entière vaut également 1 *et*

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)$$

   En effet, la constante d'intégration est nulle puisque les deux membres sont nuls en 0. ∎

4. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

   La série entière $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ *admet pour rayon de convergence* 1 *et pour somme* $\ln(1+x)$. *De plus,* $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *converge en vertu du critère spécial des séries alternées. On en déduit via le théorème de convergence radiale d'Abel que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \ln(2)$$

∎

5. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{H}_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$ où $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   On sait que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

   Par produit de Cauchy, on peut affirmer que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$-\frac{\ln(1-x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \times 1 \right) x^n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{H}_n x^n$$

∎

6. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 x^n$.

   Le rayon de convergence de $\sum n^2 x^n$ *est le même que celui de* $\sum x^n$, *c'est-à-dire* 1. *On obtient par dérivations successives*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

   Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1)+n)\, x^n = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^n + x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$$

∎