Semaine du 15/02 au 19/02

1 Cours

Espaces vectoriels de dimension finie

Famille de vecteurs Familles génératrices. Familles libres/liées. Bases. Base adaptée à une décomposition en somme directe. Cas particulier des familles de $\mathbb{K}^n$ (pivot de Gauss).

Dimension d'un espace vectoriel Théorème de la base incomplète/extraite. Existence de bases. Définition de la dimension. Dans un espace de dimension n une famille génératrice/libre possède au moins/au plus n éléments. Si $\mathcal{B}$ est une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n, alors $\mathcal{B}$ est une base ssi $\mathcal{B}$ est libre ssi $\mathcal{B}$ est génératrice.

Dimension et sous-espaces vectoriels Si F sous-espace vectoriel de E, alors $\dim F \leqslant \dim E$ avec égalité **si et seulement si** $F = E$. Hyperplans. Dimension d'une somme directe. Existence de supplémentaire en dimension finie. Formule de Grassmann. Caractérisation de la supplémentarité par la dimension. Une somme est directe **si et seulement si** la somme des dimensions est égale à la dimension de la somme

Rang d'une famille de vecteurs Définition. Si $\mathcal{F}$ est une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n, alors $\mathcal{F}$ est libre **si et seulement si** $\operatorname{rg} \mathcal{F} = p$ et $\mathcal{F}$ est génératrice **si et seulement si** $\operatorname{rg} \mathcal{F} = n$. Le rang est invariant par opérations de pivot de Gauss.

Applications linéaires

Définition et premières propriétés Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'une forme linéaire. Exemples en géométrie, dans les espaces de fonctions, dans les espaces de suites et dans les $\mathbb{K}^n$. Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$. Structure d'anneau de $\mathcal{L}(E)$.

Isomorphismes Définition d'un isomorphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme. Définition d'un automorphisme et groupe linéaire $\mathsf{GL}(E)$.

Images directe et réciproque par une application linéaire L'image directe ou réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel. Noyau et image d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le noyau et l'image. Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base.

Image d'une famille de vecteurs L'image d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image. Une application linéaire est injective/surjective/bijective **si et seulement si** l'image d'une base est une famille libre/une famille génératrice/une base.

Formes linéaires et hyperplans Formes coordonnées. Définition d'un hyperplan comme noyau de forme linéaire non nulle. Lien entre hyperplans et droites vectorielles.

2 Méthodes à maîtriser

- Montrer qu'une famille est libre.
- Montrer qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre, liée ou génératrice par pivot de Gauss.
- Déterminer la dimension d'un espace vectoriel en exhibant une base.
- Utiliser la dimension pour montrer qu'une famille libre/génératrice est une base.
- Utiliser la dimension pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont égaux.
- Utiliser la dimension pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.
- Utiliser le rang pour montrer qu'une famille est libre ou génératrice.
- Montrer qu'une application est linéaire.
- Calculer avec des endomorphismes comme dans tout anneau **non commutatif** et **non intègre**.
- Savoir déterminer le noyau et l'image d'applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.
- Utiliser le noyau ou l'image d'une application linéaire pour prouver son injectivité ou sa surjectivité.
- Les équivalences $x \in \operatorname{Ker} f \iff f(x) = 0$ et $y \in \operatorname{Im} f \iff \exists x,\ y = f(x)$ doivent être automatiques.

3 Questions de cours

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \iff \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \iff E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$.
- Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrer que f est injective **si et seulement si** $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre et que f est surjective **si et seulement si** $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ engendre F.
- Montrer que si H et D sont respectivement un hyperplan et une droite vectorielle d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $D \not\subset H$, alors $E = H \oplus D$.