

# DEVOIR SURVEILLÉ N°02

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Solution 1

1.

$$S_n + T_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i+j}{i+j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1 = n^2$$

2. En échangeant les noms des indices  $i$  et  $j$ ,

$$S_n = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{j}{i+j}$$

En intervertissant l'ordre de sommation, on obtient bien  $S_n = T_n$ . Puisque  $S_n + T_n = n^2$ , on a donc  $S_n = T_n = \frac{n^2}{2}$ .

## Solution 2

1. On trouve

$a_0 = 1$	$a_1 = 1$	$a_2 = 2$	$a_3 = 5$	$a_4 = 14$
$S_0 = 1$	$S_1 = 2$	$S_2 = 5$	$S_3 = 14$	$S_4 = 42$

On remarque que  $S_n = a_{n+1}$  pour  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On effectue le changement d'indice  $l = n - k$  de sorte que

$$T_n = \sum_{l=0}^n (n-l)a_{n-l}a_l = \sum_{k=0}^n (n-k)a_k a_{n-k}$$

Ainsi

$$2T_n = \sum_{k=0}^n k a_k a_{n-k} + \sum_{k=0}^n (n-k) a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^n (k+n-k) a_k a_{n-k} = n S_n$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$(n+2)a_{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n!^2} = \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!^2} = 2(2n+1)a_n$$

4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} S_{n+1} + T_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k a_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} k a_k a_{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (k+1) a_k a_{n+1-k} \\ &= a_0 a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1) a_k a_{n+1-k} \\ &= a_{n+1} + \sum_{k=0}^n (k+2) a_{k+1} a_{n-k} \end{aligned}$$

Or pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(k+2)a_{k+1} = 2(2k+1)a_k$  d'après la question 3 donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} + T_{n+1} &= a_{n+1} + 2 \sum_{k=0}^n (2k+1)a_k a_{n-k} \\ &= a_{n+1} + 4 \sum_{k=0}^n k a_k a_{n-k} + 2 \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \\ &= a_{n+1} + 4T_n + 2S_n \end{aligned}$$

Or on a vu à la question 2 que  $2T_n = nS_n$  donc

$$S_{n+1} + T_{n+1} = a_{n+1} + 2nS_n + 2S_n = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

D'après la question 2,  $2T_{n+1} = (n+1)S_{n+1}$  donc

$$S_{n+1} + T_{n+1} = S_{n+1} + \frac{n+1}{2}S_{n+1} = \frac{n+3}{2}S_{n+1}$$

On en déduit que

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

5. D'après la question 1,  $S_0 = a_1 = 1$ .

Supposons maintenant que  $S_n = a_{n+1}$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la question précédente,  $\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$ . Or on a supposé que  $S_n = a_{n+1}$  donc

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} = (2n+3)a_{n+1}$$

Or d'après la question 3,  $(n+3)a_{n+2} = 2(2n+3)a_{n+1}$  donc

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = \frac{n+3}{2}a_{n+2}$$

puis  $S_{n+1} = a_{n+2}$  puisque  $\frac{n+3}{2} \neq 0$ .

Par récurrence,  $S_n = a_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

6. Tout d'abord  $a_0 = 1$  est un entier naturel. Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $a_0, a_1, \dots, a_n$  soient des entiers naturels. Alors  $S_n$  est également un entier naturel en tant que somme de produits de ces derniers entiers naturels. Puisque  $a_{n+1} = S_n$ ,  $a_{n+1}$  est également un entier naturel. Par récurrence forte,  $a_n$  est donc un entier naturel pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Solution 3

1. C'est une application directe de la formule du binôme de Newton.

$$\sum_{j=0}^q \binom{q}{j} = \sum_{j=0}^q \binom{q}{j} 1^j 1^{q-j} = (1+1)^q = 2^q$$

2. Après simplifications des différentes factorielles, on obtient :

$$\frac{\binom{n}{k} \binom{k}{p}}{\binom{n}{p}} = \frac{(n-p)!}{(n-k)!(k-p)!} = \binom{n-p}{k-p}$$

3. D'après la question précédente

$$\sum_{k=p}^n \binom{n}{k} \binom{k}{p} = \binom{n}{p} \sum_{k=p}^n \binom{n-p}{k-p}$$

On effectue le changement d'indice  $j = k - p$  (la contrainte  $p \leq k \leq n$  se transforme en  $0 \leq j \leq n - p$ ), et on conclut en utilisant la première question avec  $q = n - p$  :

$$\sum_{k=p}^n \binom{n}{k} \binom{k}{p} = \binom{n}{p} \sum_{j=0}^{n-p} \binom{n-p}{j} = 2^{n-p} \binom{n}{p}$$

**Solution 4**

1. Supposons qu'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{\alpha}{2^k} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ . Alors  $\alpha \equiv 2^{k-1}\pi[2^k\pi]$ . Il existerait donc  $m \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\alpha = 2^{k-1}\pi + 2^k m\pi = (2^{k-1} + 2^k m)\pi$$

Comme  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $2^{k-1} + 2^k m$  est entier. Ainsi on aurait donc  $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$  et a fortiori  $\alpha \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ , ce qui n'est pas. La somme  $S_n$  est donc bien définie.

2. On sait que

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

On en déduit que

$$\frac{2}{\tan(2x)} = \frac{1 - \tan^2 x}{\tan x} = \frac{1}{\tan x} - \tan x$$

et donc que

$$\frac{1}{\tan(x)} - \frac{2}{\tan(2x)} = \tan(x)$$

Les membres de cette égalité sont définis si

$$x \not\equiv 0[\pi] \quad 2x \not\equiv 0[\pi] \quad x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \quad 2x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

c'est-à-dire si

$$x \not\equiv 0[\pi] \quad x \not\equiv 0[\pi/2] \quad x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \quad x \not\equiv \frac{\pi}{4}[\pi/2]$$

ou, plus simplement, si  $x \not\equiv 0[\pi/4]$ .

3. On veut évidemment appliquer l'égalité précédente à  $x = \alpha/2^k$ . Il faut donc vérifier que pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\alpha/2^k \not\equiv 0[\pi/4]$ . Supposons que  $\alpha/2^k \equiv 0[\pi/4]$ . Alors  $\alpha \equiv 0[2^{k-2}\pi]$ . Comme  $k \geq 1$ , on aurait donc a fortiori  $\alpha \equiv 0[\pi/2]$ , ce qui n'est pas. On est donc en droit d'appliquer l'égalité précédente :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{\tan(\alpha/2^k)}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k \tan(\alpha/2^k)} - \frac{2}{2^k \tan(2\alpha/2^k)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k \tan(\alpha/2^k)} - \frac{1}{2^{k-1} \tan(\alpha/2^{k-1})} \\ &= \frac{1}{2^n \tan(\alpha/2^n)} - \frac{1}{\tan(\alpha)} \end{aligned}$$

4. On sait que  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$  et que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . Or  $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x}$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0$  donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tan(\alpha/2^n)}{\alpha/2^n} = 1$$

ou encore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \tan(\alpha/2^n) = \alpha$$

Comme  $\alpha \neq 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n \tan(\alpha/2^n)} = \frac{1}{\alpha}$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\tan \alpha}$$

**Solution 5**

1. On utilise une formule de factorisation.

$$s = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2 \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{4\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Or

$$\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

et on a donc bien  $s = 2p$ .

**REMARQUE.** On peut également procéder dans «l'autre sens». En effet,

$$p = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{4\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) \right]$$

Or  $\frac{6\pi}{5} = 2\pi - \frac{4\pi}{5}$ , ce qui permet d'obtenir le résultat escompté.

2. En utilisant la formule de duplication du sinus,

$$p \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4} \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$$

Or

$$\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Ainsi

$$p \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4} \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Or  $\frac{2\pi}{5}$  n'est pas un multiple entier de  $\pi$  donc  $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \neq 0$ , ce qui permet d'affirmer que  $p = -\frac{1}{4}$  et donc  $s = -\frac{1}{2}$ .

3. Puisque  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  et  $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$  ont pour somme  $s = -\frac{1}{2}$  et pour produit  $p = -\frac{1}{4}$ , ils sont racines du trinôme  $X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$ .

Ces racines sont  $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$  et  $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ . Comme  $\frac{2\pi}{5} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$  et donc

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

**REMARQUE.** On aurait aussi pu remarquer que

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(2 \times \frac{2\pi}{5}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$$

Ainsi

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = s = -\frac{1}{2}$$

ou encore

$$2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \frac{1}{2} = 0$$

Ainsi  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  est racine du trinôme  $2X^2 + X - \frac{1}{2}$ . Ces racines sont à nouveau  $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$  et  $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ . Comme précédemment, on invoque que  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$  pour en déduire que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Puis

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = s - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$