

APPLICATIONS, FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

Généralités

Solution 1

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x < f(x)$ alors $f(x) \leq f(f(x)) = x$. Contradiction !

Si $x > f(x)$ alors $f(x) \geq f(f(x)) = x$. Contradiction !

Donc $f(x) = x$.

Solution 2

Soit f une telle application (si elle existe). On va montrer par récurrence que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $HR(n)$ l'hypothèse de récurrence : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(k) = k$.

On a $f(0) + f^2(0) + f^3(0) = 3 \times 0 = 0$. Or $f(0), f^2(0)$ et $f^3(0)$ sont des entiers naturels ; en particulier, ils sont positifs. On a donc $f(0) = 0$. Supposons $HR(n)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a $f(n+1) + f^2(n+1) + f^3(n+1) = 3(n+1)$. Supposons par l'absurde que $f(n+1) \neq n+1$. Un des trois entiers $f(n+1), f^2(n+1)$ et $f^3(n+1)$ est nécessairement strictement inférieur à $n+1$. Examinons les trois cas.

- Si $f(n+1) < n+1$. Notons $k = f(n+1)$. Puisque $k \leq n$, $f^2(n+1) = f(k) = k$ en utilisant $HR(n)$. De même, $f^3(n+1) = k$. Ainsi $f(n+1) + f^2(n+1) + f^3(n+1) = 3k < 3(n+1)$, ce qui est impossible.
- Si $f^2(n+1) < n+1$. Notons $k = f^2(n+1)$. Puisque $k \leq n$, $f^3(n+1) = f(k) = k$ en utilisant $HR(n)$. De même, $f^4(n+1) = k$. Ainsi $f^2(n+1) + f^3(n+1) + f^4(n+1) = 3k$. Mais on a également $f^2(n+1) + f^3(n+1) + f^4(n+1) = 3f(n+1)$. Donc $f(n+1) = k$. Mais alors $f(n+1) + f^2(n+1) + f^3(n+1) = 3k < 3(n+1)$, ce qui est impossible.
- Si $f^3(n+1) < n+1$. Notons $k = f^3(n+1)$. Puisque $k \leq n$, $f^4(n+1) = f(k) = k$ en utilisant $HR(n)$. De même, $f^5(n+1) = k$. Ainsi $f^3(n+1) + f^4(n+1) + f^5(n+1) = 3k$. Mais on a également $f^3(n+1) + f^4(n+1) + f^5(n+1) = 3f^2(n+1)$. Donc $f^2(n+1) = k$. Mais alors $f^2(n+1) + f^3(n+1) + f^4(n+1) = 3k$. On a également $f^2(n+1) + f^3(n+1) + f^4(n+1) = 3f(n+1)$ donc $f(n+1) = k$. Finalement, $f(n+1) + f^2(n+1) + f^3(n+1) = 3k < 3(n+1)$, ce qui est impossible.

On a donc nécessairement $f(n+1) = n+1$ et donc $HR(n+1)$ est vraie.

On a donc montré que si f vérifiait la condition de l'énoncé, alors f était nécessairement l'identité. Réciproquement, la fonction identité vérifie bien la condition recherchée.

Solution 3

1. D'après l'énoncé, $f(0 + f(0)) = f(f(0)) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.

2. A nouveau d'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(f(n)) = f(0 + f(n)) = f(f(0)) + f(n) = f(0) + f(n) = f(n)$$

puisque $f(0) = 0$. On a donc $f \circ f = f$.

3. Procédons par double inclusion.

Soit $a \in \text{Im } f$. Il existe donc $b \in \mathbb{N}$ tel que $a = f(b)$. Ainsi $f(a) = f(f(b)) = f(b) = a$ d'après la question précédente. Ainsi $a \in \mathcal{F}$. Ceci prouve que $\text{Im } f \subset \mathcal{F}$.

Soit $a \in \mathcal{F}$. Alors $a = f(a) \in \text{Im } f$. Ceci prouve que $\mathcal{F} \subset \text{Im } f$.

Par double inclusion, $\text{Im } f = \mathcal{F}$.

4. Soit $a \in \mathcal{F}$. Alors $f(a) = a$. Par conséquent

$$f(a+1) = f(1 + f(a)) = f(f(1)) + f(a) = a + f(1) = a + 1$$

car $f(1) = 1$ par hypothèse.

5. Puisque $f(0) = 0, 0 \in \mathcal{F}$ et la question précédente permet de montrer par récurrence tout entier naturel appartient à \mathcal{F} , c'est-à-dire que $\mathcal{F} = \mathbb{N}$. Ceci signifie que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ i.e. $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$.

Injectivité et surjectivité

Solution 4

① Puisque $f_1(1) = f_1(3)$, f_1 n'est pas injective. On a clairement $-1 \notin f_1(\mathbb{R})$ donc f_1 n'est pas surjective.

② Puisque $f_2(4 \pm 2\sqrt{3}) = 1/4$, f_2 n'est pas injective. On a $1 \notin f_2(\mathbb{R})$ donc f_2 n'est pas surjective.

③ Puisque $\forall x \geq 0$,

$$f_3(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{16x+4},$$

la fonction f_3 est injective. Puisque $3/4 \notin f_3(\mathbb{R})$, la fonction f_3 n'est pas surjective.

④ La fonction f_4 est une bijection d'après le cours sur les fonctions usuelles.

⑤ Puisque tout nombre complexe admet au moins une racine cubique, f_5 est surjective. Puisque $f_5(1) = f_5(j)$ et $j \neq 1$, f_5 n'est pas injective.

Solution 5

1. a. On a $\Psi(\emptyset) = (\emptyset \cap A, \emptyset \cap B) = (\emptyset, \emptyset)$.
 b. On a $\Psi(\overline{A \cup B}) = \Psi(\overline{A \cap B}) = (\overline{A \cap B} \cap A, \overline{A \cap B} \cap B) = (\emptyset, \emptyset)$.
 c. Supposons Ψ injective. Comme $\Psi(\emptyset) = \Psi(\overline{A \cup B})$, on en déduit $\overline{A \cup B} = \emptyset$ i.e. $A \cup B = E$.
 Réciproquement, supposons $A \cup B = E$. Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $\Psi(X) = \Psi(Y)$. On a donc $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$.
 Ainsi $(X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$ i.e. $X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B)$. Comme $A \cup B = E$, on en déduit $X = Y$. D'où l'injectivité de Ψ .
2. a. Supposons que (\emptyset, B) admette un antécédent X par Ψ . Alors $X \cap A = \emptyset$ et $X \cap B = B$ i.e. $B \subset X$. Donc $B \cap A = \emptyset$. Réciproquement, si $A \cap B = \emptyset$, $\Psi(B) = (\emptyset, B)$. Ainsi (\emptyset, B) admet un antécédent si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
 b. La question précédente montre que si Ψ est surjective, alors $A \cap B = \emptyset$.
 Supposons $A \cap B = \emptyset$. Soient $(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. On a alors $(X \cup Y) \cap A = (X \cap A) \cup (Y \cap A)$. Comme $X \subset A$, $X \cap A = X$.
 De plus, $A \cap B = \emptyset$ donc $X \cap B = \emptyset$. Ainsi $(X \cup Y) \cap A = X$. De même, $(X \cup Y) \cap B = Y$. D'où $\Psi(X \cup Y) = (X, Y)$. Ainsi Ψ est surjective.

Solution 6

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$f(2m) = 2m, \quad f(2m+1) = m+1.$$

Ainsi $f(2) = f(3) = 2$ donc f n'est pas injective. En revanche, $f(0) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$n = f(2n-1).$$

L'application f est donc surjective.

Solution 7

1. Par distributivité de \cap sur \cup , on a :

$$(X \cup A) \cap (X \cup B) = (X \cap X) \cup (X \cap A) \cup (X \cap B) \cup (A \cap B)$$

Or $X \cap X = X$, $X \cap A \subset X$, $X \cap B \subset X$ et $A \cap B = \emptyset$. Donc $(X \cup A) \cap (X \cup B) = X$.

2. a. Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset X \cup A$ et $B \subset X \cup B$. Si $A \neq \emptyset$ ou $B \neq \emptyset$, alors (\emptyset, \emptyset) n'admet pas d'antécédent par f . Si $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$, alors $f(X) = (X, X)$. Puisque $E \neq \emptyset$, (\emptyset, E) n'admet pas d'antécédent par f . Dans les deux cas, f n'est pas surjective.
 b. Supposons que $A \cap B = \emptyset$. Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $f(X) = f(Y)$. On a donc $X \cup A = Y \cup A$ et $X \cup B = Y \cup B$. Par conséquent, $(X \cup A) \cap (X \cup B) = (Y \cup A) \cap (Y \cup B)$. En utilisant la première question, on a donc $X = Y$. Ceci prouve que f est injective.
 Supposons que f soit injective. On a $f(A \cap B) = f(\emptyset) = (A, B)$. Par injectivité de f , on en déduit que $A \cap B = \emptyset$.

Solution 8

On a $f(0) \geq 0$. Or $f(0) \in \mathbb{N}$ donc $f(0) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f(k) = k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Notons $k = f(n+1)$. D'après l'énoncé, $k \leq n+1$. Si $k < n+1$, alors $f(k) = k$ par hypothèse de récurrence et donc $f(n+1) = f(k)$, ce qui contredit l'injectivité de f . Ainsi $f(n+1) = n+1$.

Par récurrence forte, $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 9

1. Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $|\bar{\alpha}z| = |\bar{\alpha}| \neq 1$. On ne peut donc avoir $\bar{\alpha}z = -1$ sinon on aurait $|\bar{\alpha}z| = |-1| = 1$. Ceci prouve que $\bar{\alpha}z + 1 \neq 0$ et donc que f est définie sur \mathbb{U} .

2. On peut écrire les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \iff |f(z)| = 1 \\
 & \iff |z + \alpha| = |\bar{\alpha}z + 1| \\
 & \iff |z + \alpha|^2 = |\bar{\alpha}z + 1|^2 \\
 & \iff (z + \alpha)(\bar{z} + \bar{\alpha}) = (\bar{\alpha}z + 1)(\alpha\bar{z} + 1) \\
 & \iff |z|^2 + |\alpha|^2 + \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z = |\alpha|^2|z|^2 + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + 1 \\
 & \iff (1 - |\alpha|^2)|z|^2 = 1 - |\alpha|^2 \\
 & \iff |z|^2 = 1 \qquad \text{car } 1 - |\alpha|^2 \neq 0 \\
 & \iff |z| = 1
 \end{aligned}$$

On a donc bien montré que $z \in \mathbb{U} \iff f(z) \in \mathbb{U}$.

3. Tout d'abord, d'après la question précédente, $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Soit $Z \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $\bar{\alpha}z + 1 \neq 0$. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
 & Z = f(z) \\
 & \iff Z = \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1} \\
 & \iff Z(\bar{\alpha}z + 1) = z + \alpha \\
 & \iff z(Z\bar{\alpha} - 1) = \alpha - Z
 \end{aligned}$$

Puisque $Z \in \mathbb{U}$, on prouve comme à la première question que $Z\bar{\alpha} - 1 \neq 0$. L'équation $f(z) = Z$ d'inconnue z admet une unique solution. De plus, si z est solution de cette équation, $f(z) = Z \in \mathbb{U}$ et d'après la question précédente $z \in \mathbb{U}$.

Ceci prouve que f induit une bijection de \mathbb{U} sur \mathbb{U} .

Solution 10

Supposons f injective. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On sait déjà que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Montrons alors que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Soit donc $y \in f(A) \cap f(B)$. Il existe donc $(a, b) \in A \times B$ tel que $y = f(a) = f(b)$. Mais par injectivité de f , $a = b$ de sorte que $a = b \in A \cap B$. On en déduit que $y \in f(A \cap B)$. On a donc bien montré que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ puis, par double inclusion, que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Supposons maintenant que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Posons $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$. Alors $f(A) = \{f(x_1)\}$ et $f(B) = \{f(x_2)\}$. Puisque $f(x_1) = f(x_2)$, $f(A) = f(B)$. Ainsi $f(A) \cap f(B) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\}$. En particulier, $f(A) \cap f(B)$ est non vide. Puisque $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, $f(A \cap B)$ est également non vide. Il s'ensuit que $A \cap B$ est non vide et donc que $x_1 = x_2$. Ceci prouve l'injectivité de f .

Solution 11

1. Puisque $f = g \circ f \circ g$ est injective, g l'est également.

Remarquons maintenant que $f \circ g \circ f \circ f \circ g = f$. Soit alors $y \in E$. Alors $f(y) = f \circ g \circ f \circ f \circ g(y)$ mais comme f est injective, $y = g \circ f \circ f \circ g(y)$. Ainsi y admet un antécédent par g , à savoir $f \circ f \circ g(y)$. f est donc surjective.

Par conséquent, $g \circ f \circ g$ est surjective et donc g l'est également.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $g(x_1) = g(x_2)$. Puisque f est surjective, il existe $(y_1, y_2) \in E^2$ tel que $x_1 = f(y_1)$ et $x_2 = f(y_2)$. Alors $g \circ f(y_1) = g \circ f(y_2)$ puis $f \circ g \circ f(y_1) = f \circ g \circ f(y_2)$ i.e. $g(y_1) = g(y_2)$. Par conséquent, $g \circ f \circ g(y_1) = g \circ f \circ g(y_2)$ i.e. $f(y_1) = f(y_2)$ ou encore $x_1 = x_2$. Ainsi g est injective.

Solution 12

Cette équation du second degré admet toujours au moins une solution forcément distincte de 2 (on vérifie aisément que 2 n'est pas solution). Ceci prouve que f est surjective et donc \mathcal{T} également. De plus, le discriminant de cette équation est $1 - 4Z + Z^2$ n'est pas nul pour $Z = 1$ par exemple. Ceci prouve que 1 admet deux antécédents par f . Ainsi f n'est pas injective et \mathcal{T} ne l'est pas non plus.

4. Notons g la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f'(x) = 2 - \frac{6}{(x-2)^2} = \frac{2(x^2-4x+1)}{(x-2)^2}$.

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{3}$	2	$2 + \sqrt{3}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	-	
Variations de f					

Par double inclusion, $\mathcal{T}^{-1}([BC]) = \mathcal{C}$.

Solution 13

1. Puisque $f(0) = f(2i\pi) = 2$, f n'est pas injective. Soit $Z \in \mathbb{C}$. L'équation $f(z) = Z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ équivaut à $u^2 - Zu + 1 = 0$ en posant $u = e^z$. Cette équation du second degré possède toujours au moins une solution complexe. De plus, cette solution n'est pas nulle (on vérifie aisément que 0 n'est pas solution). Puisque tout complexe non nul admet un antécédent par l'exponentielle, l'équation $f(z) = Z$ admet une solution. L'application f est donc surjective.
On vérifie sans peine que la restriction de f à \mathbb{R} est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . Puisque $f(0) = 2$ et $\lim_{+\infty} f|_{\mathbb{R}} = +\infty$, $f(\mathbb{R}_+) = [2, +\infty[$. Par parité de $f|_{\mathbb{R}}$, on a également $f(\mathbb{R}_-) = [2, +\infty[$. Finalement, $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+) = f(\mathbb{R}_-) \cup f(\mathbb{R}_+) = [2, +\infty[$.
Via une relation d'Euler, $f(i\mathbb{R}) = 2\cos(\mathbb{R}) = [-2, 2]$.
2. Puisque $f(0) = f(2i\pi) = 0$, f n'est pas injective. Soit $Z \in \mathbb{C}$. L'équation $f(z) = Z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ équivaut à $u^2 - Zu - 1 = 0$ en posant $u = e^z$. Cette équation du second degré possède toujours au moins une solution complexe. De plus, cette solution n'est pas nulle (on vérifie aisément que 0 n'est pas solution). Puisque tout complexe non nul admet un antécédent par l'exponentielle, l'équation $f(z) = Z$ admet une solution. L'application f est donc surjective. On vérifie sans peine que la restriction de f à \mathbb{R} est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} . Puisque $\lim_{-\infty} f|_{\mathbb{R}} = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f|_{\mathbb{R}} = +\infty$, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Via une relation d'Euler, $f(i\mathbb{R}) = 2i\sin(\mathbb{R}) = \{i\lambda, \lambda \in [-2, 2]\}$.

Solution 14

Montrons que f est surjective. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Notons m le plus grand entier naturel tel que 2^m divise N . Alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N = 2^m k$. De plus, k est nécessairement impair, sinon 2^{m+1} diviserait N , ce qui contredirait la définition de m . Ainsi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2n + 1$ et alors $N = f(m, n)$.

Montrons maintenant que f est injective. Soit donc $(k, l, m, n) \in \mathbb{N}^4$ tel que $f(k, l) = f(m, n)$. Ainsi $2^k(2l + 1) = 2^m(2n + 1)$. Puisque 2^k et $2n + 1$ sont premiers entre eux, le lemme de Gauss permet d'affirmer que 2^k divise 2^m . On montre de même que 2^m divise 2^k . Ainsi $2^m = 2^k$ puis $m = k$ puisque $2 \neq 1$. On en déduit ensuite que $2l + 1 = 2n + 1$ et donc que $l = n$. Finalement, $(k, l) = (m, n)$.

Images directes et réciproques

Solution 15

1. $f(I) = \left[-\frac{27}{6}, +\infty\right[$.
2. $f(I) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
3. $f(I) =]-\infty, -1]$.
4. $f(I) = [0; +\infty[$.
5. $f(I) = \mathbb{R}$.

Solution 16

1. Supposons que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$. Soient $x, y \in E$ tel que $f(x) = f(y)$. On a alors $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$ et $f^{-1}(f(\{y\})) = \{y\}$. Mais $f(\{x\}) = f(\{y\})$ donc $\{x\} = \{y\}$ i.e. $x = y$. Ainsi f est injective.
Supposons que f soit injective. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On a toujours $A \subset f^{-1}(f(A))$ puisque les éléments de A ont leurs images dans $f(A)$. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. On a donc $f(x) \in f(A)$. Il existe donc $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Par injectivité de f , $x = a$ et donc $x \in A$. Donc $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
2. Supposons que pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) = B$. En particulier, $f(f^{-1}(F)) = F$. Comme $f^{-1}(F) \subset E$, $F = f(f^{-1}(F)) \subset f(E) \subset F$. Donc $f(E) = F$ et f est surjective.
Supposons que f soit surjective. Soit $B \in \mathcal{P}(F)$. On a toujours $f(f^{-1}(B)) \subset B$ puisque $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des éléments de E qui ont leurs images dans B . Soit $y \in B$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On a donc $x \in f^{-1}(B)$ et $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Donc $B \subset f(f^{-1}(B))$.

Solution 17

Il suffit de lire le tableau de variation de la fonction $x \mapsto x^2 \dots$

1. $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$;
2. $f([-3, 2]) = [0, 9]$;
3. $f([-3, 3]) = [0, 9]$;
4. $f^{-1}([9, 10]) = [-\sqrt{10}, -\sqrt{9}] \cup [\sqrt{9}, \sqrt{10}]$;
5. $f^{-1}([-5, -3]) = \emptyset$;
6. $f^{-1}([-4, 4]) =]-2, 2[$;
7. $f^{-1}(f([0, 1])) = [-1, 1]$;
8. $f(f^{-1}([-1, 4])) = [0, 4]$;
9. $f(f^{-1}(\mathbb{R}_-)) = \{0\}$.

Solution 18

1. f est injective mais pas surjective.
2.
 - a. E est le cercle de centre le point d'affixe 1 et de rayon 1. Son équation cartésienne est donc $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ou encore $x^2 - 2x + y^2 = 0$.
 F est la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.
 - b. Soit $z = x + iy \in E \setminus \{0\}$. On a donc $x^2 + y^2 = 2x$. Or $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$. Donc $\operatorname{Re}(f(z)) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$. Donc $f(z) \in F$.
 Ainsi $f(E \setminus \{0\}) \subset F$.
 - c. La restriction de f à $E \setminus \{0\}$ est injective comme restriction d'une application injective.
 Tirons partie du fait que $f \circ f(z) = z$. Montrons que $f(F) \subset E \setminus \{0\}$. Soit $z = \frac{1}{2} + iy \in F$. Alors $f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\frac{1}{2} - iy}{\frac{1}{4} + y^2} = \frac{2}{1+4y^2} - \frac{4iy}{1+4y^2} = x' + iy'$. On vérifie que (x', y') vérifie l'équation du cercle E . De plus, $\frac{1}{z} \neq 0$ donc $f(z) \in E \setminus \{0\}$.
 Ceci signifie que tout élément de F admet un antécédent (égal à $f(z)$ puisque $f \circ f(z) = z$) dans $E \setminus \{0\}$. L'application de $E \setminus \{0\}$ dans F induite par f est donc surjective.

Fonctions indicatrices

Solution 19

1. On sait que $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{1}_{A \Delta B} &= \mathbb{1}_{(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})} \\
 &= \mathbb{1}_{A \cap \bar{B}} + \mathbb{1}_{B \cap \bar{A}} - \mathbb{1}_{A \cap \bar{B} \cap B \cap \bar{A}} \\
 &= \mathbb{1}_{A \cap \bar{B}} + \mathbb{1}_{B \cap \bar{A}} \quad \text{car } A \cap \bar{B} \cap B \cap \bar{A} = \emptyset \\
 &= \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B) + \mathbb{1}_B(1 - \mathbb{1}_A) \\
 &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B
 \end{aligned}$$

2. On pourrait raisonner directement sur les ensembles mais il est peut-être plus simple de raisonner sur les fonctions indicatrices.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{1}_{(A \cap B) \Delta (A \cap C)} &= (\mathbb{1}_{A \cap B} - \mathbb{1}_{A \cap C})^2 \\
 &= (\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C)^2 \\
 &= (\mathbb{1}_A)^2 (\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C)^2 \\
 &= \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{B \Delta C} \\
 &= \mathbb{1}_{A \cap (B \Delta C)}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

3. Raisonnons à nouveau sur les fonctions indicatrices.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{1}_{(A \Delta B) \Delta C} &= (\mathbb{1}_{A \Delta B} - \mathbb{1}_C)^2 \\
 &= \mathbb{1}_{A \Delta B}^2 + \mathbb{1}_C^2 - 2\mathbb{1}_{A \Delta B} \mathbb{1}_C \\
 &= \mathbb{1}_{A \Delta B} + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_{A \Delta B} \mathbb{1}_C \\
 &= (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2 + \mathbb{1}_C - 2(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2 \mathbb{1}_C \\
 &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B) \mathbb{1}_C \\
 &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C + \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C) + 4\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C
 \end{aligned}$$

La dernière expression est invariante par permutation de A, B et C. Par conséquent,

$$\mathbb{1}_{(A \Delta B) \Delta C} = \mathbb{1}_{(B \Delta C) \Delta A}$$

Finalement, $(A \Delta B) \Delta C = (B \Delta C) \Delta A = A \Delta (B \Delta C)$.

Solution 20

- On trouve sans difficulté que $\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C$ et $\mathbb{1}_Y = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C + \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C$.
- $X = Y \Leftrightarrow \mathbb{1}_X = \mathbb{1}_Y \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C \Leftrightarrow \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_C) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{1}_{A \setminus C} = 0 \Leftrightarrow A \setminus C = \emptyset \Leftrightarrow A \subset C$.

Calcul de limites

Solution 21

- Généralement pour calculer des limites faisant intervenir des sommes racines carrées, il est utile de faire intervenir “l’expression conjuguées” :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Les racines au numérateur ont “disparu” en utilisant l’identité $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$. Appliquons ceci : pour tout $x > -1$, on a

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = \frac{2x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

et donc

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}.$$

Il est alors clair que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$$

par les opérations usuelles sur les limites.

2. On reconduis la même méthode.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} \\
 &= \frac{(\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m})(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\
 &= \frac{1+x^m - (1-x^m)}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\
 &= \frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\
 &= \frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}}
 \end{aligned}$$

Et nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} = 1.$$

Donc l'étude de la limite de f en 0 est la même que celle de la fonction $x \mapsto x^{m-n}$.

Distinguons plusieurs pour la limite de f en 0.

- Si $m > n$ alors x^{m-n} et donc $f(x)$ tend vers 0.
- Si $m = n$ alors x^{m-n} et $f(x)$ vers 1.
- Si $m < n$ alors $x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}} = \frac{1}{x^k}$ avec $k = n - m$ un exposant positif. Si k est pair alors les limites à droite et à gauche de $\frac{1}{x^k}$ sont $+\infty$. Pour k impair la limite à droite vaut $+\infty$ et la limite à gauche vaut $-\infty$. Conclusion pour $k = n - m > 0$ pair, la limite de f en 0 vaut $+\infty$ et pour $k = n - m > 0$ impair f n'a pas de limite en 0 car les limites à droite et à gauche ne sont pas égales.

3. On a, pour tout $x \neq 0$,

$$\sqrt{1+x+x^2} - 1 = \frac{x+x^2}{\sqrt{1+x+x^2} + 1}$$

et donc

$$\frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2} - 1) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2} + 1}$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2} - 1) = \frac{1}{2}$$

par les opérations usuelles sur les limites.

Solution 22

1. La limite à droite vaut +2, la limite à gauche -2 donc il n'y a pas de limite au point 2.

2. Comme

$$\forall x \neq 0, \frac{x^2 + 2|x|}{x} = x + 2\text{signe de } x$$

avec $x \mapsto 2\text{signe de } x$ bornée, on trouve $-\infty$.

3. Comme

$$\forall x \neq 2, \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x+2}{x-1},$$

On trouve 4.

4. Comme

$$\frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{(2 \sin(x/2) \cos(x/2))^2}{2 \cos^2(x/2)} = 2 \sin^2(x/2),$$

on trouve 2.

5. Pour $x > -1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} &= \frac{x - x^2}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}}, \end{aligned}$$

on trouve ainsi $\frac{1}{2}$.

6. Comme pour $x > -5$, on a

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = \frac{2}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}},$$

on trouve 0.

7. En utilisant que $a^3 - 1 = (a-1)(1+a+a^2)$ pour $a = \sqrt[3]{1+x^2}$, on obtient pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} = \frac{1}{1+a+a^2}.$$

On trouve donc $\frac{1}{3}$.

8. L'énoncé n'a de sens que pour $n \geq 1$. Pour $x \neq 1$, on a

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

Ainsi, on trouve $\frac{1}{n}$.

Dérivabilité

Solution 23

- Si f est paire, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. En dérivant cette relation, on obtient que $-f'(-x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit, f' est impaire. On prouve de la même manière que f' est paire lorsque f est impaire. Par récurrence, on prouve alors que, si f est paire, $f^{(n)}$ a la parité de n et que, si f est impaire, $f^{(n)}$ a la parité contraire de celle de n .
- Soit T une période de f . Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$. En dérivant cette relation, on obtient que $f'(x+T) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit, f' est également périodique de période T . Par récurrence, on prouve que $f^{(n)}$ est périodique de période T .

Solution 24

- $x \mapsto x^4 - x^2$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Ainsi f est dérivable sur $]1, +\infty[$. Par parité, f est également dérivable sur $] -\infty, -1[$.
 f n'est pas définie sur $] -1, 1[$ donc pas dérivable sur $] -1, 1[$.
 Pour $x > 1$, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$. Ainsi f n'est pas dérivable en 1. Par parité, f n'est pas dérivable en -1 .
 Pour tout $x \in] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - x^2}}$$

2. • $x \mapsto x^2 + x + 1$ est dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$
 • $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$ à valeurs dans \mathbb{R}
 • $x \mapsto e^x$ est dérivable sur \mathbb{R}

Ainsi g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} e^{\sqrt{x^2+x+1}}$$

3. • $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable sur $]\sqrt{2}, +\infty[$ à valeurs dans $]1, +\infty[$.
 • $x \mapsto \sqrt{x} - 1$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R}_+^*
 • $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^*

Ainsi h est dérivable sur $]\sqrt{2}, +\infty[$. Par parité, h est également dérivable sur $] - \infty, -\sqrt{2}[$.

h n'est pas définie sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ donc pas dérivable sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Pour tout $x \in] - \infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$,

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}-1} \times \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{x^2-1-\sqrt{x^2-1}}$$

4. Tout d'abord i est 2π -périodique et paire donc on peut se contenter d'étudier la dérivabilité sur $[0, \pi]$. Sur cet intervalle, i n'est définie que sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

- \cos est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ à valeurs dans $]0, 1[$
- $x \mapsto 1 - \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, 1[$ à valeurs dans $]0, 1[$
- $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0, 1[$

Ainsi i est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, posons $h = \frac{\pi}{2} - x$ de sorte que

$$\frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = -\frac{\ln(1 - \sqrt{\sin h})}{h} = \frac{\ln(1 - \sqrt{\sin h})}{-\sqrt{\sin h}} \sqrt{\frac{\sin h}{h}} \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 - \sqrt{\sin h})}{-\sqrt{\sin h}} \sqrt{\frac{\sin h}{h}} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Ainsi i n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{2}$.

Par parité et périodicité, i est dérivable sur $A = \left(-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}\right] + 2\pi\mathbb{Z}$ et pour tout $x \in A$

$$i'(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{\cos x}} \times \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} = \frac{\sin x}{2(\sqrt{\cos x} - \cos x)}$$

Solution 25

1. On prouve après mise au même dénominateur et identification des coefficients que

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}.$$

2. On prouve par une récurrence sans difficulté que

$$x \mapsto \frac{1}{1+x}$$

est de classe \mathcal{C}^n sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, et que sur cet ensemble,

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

On en déduit que la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et que sur cet ensemble,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

La fonction f est donc de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, et sur cet ensemble,

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{n+1}}.$$

Solution 26

Comme x et α sont réels,

$$\begin{aligned} e^{x \cos(\alpha)} \cos(x \sin(\alpha)) &= \Re(e^{x \cos(\alpha)} e^{ix \sin(\alpha)}) \\ &= \Re(e^{xe^{i\alpha}}) \end{aligned}$$

Par conséquent,

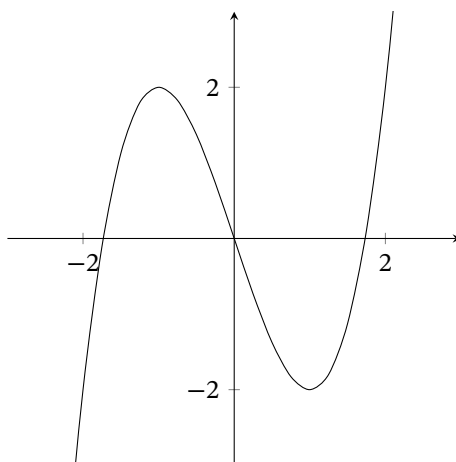
$$\begin{aligned} \frac{d^n e^{x \cos(\alpha)} \cos(x \sin(\alpha))}{dx^n} &= \Re\left(\frac{d^n e^{xe^{i\alpha}}}{dx^n}\right) \\ &= \Re(e^{in\alpha} e^{xe^{i\alpha}}) \\ &= e^{x \cos(\alpha)} \cos(n\alpha + x \sin(\alpha)). \end{aligned}$$

Etude de fonctions

Solution 27

1. L'étude ne pose aucun problème.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	



2.

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{C}_f \\
 & \Leftrightarrow y = f(x) \\
 & \Leftrightarrow y + 1 = f((x - 2) + 2) - 1 \\
 & \Leftrightarrow y + 1 = g(x - 2) \\
 & \Leftrightarrow (x - 2, y + 1) \in \mathcal{C}_g
 \end{aligned}$$

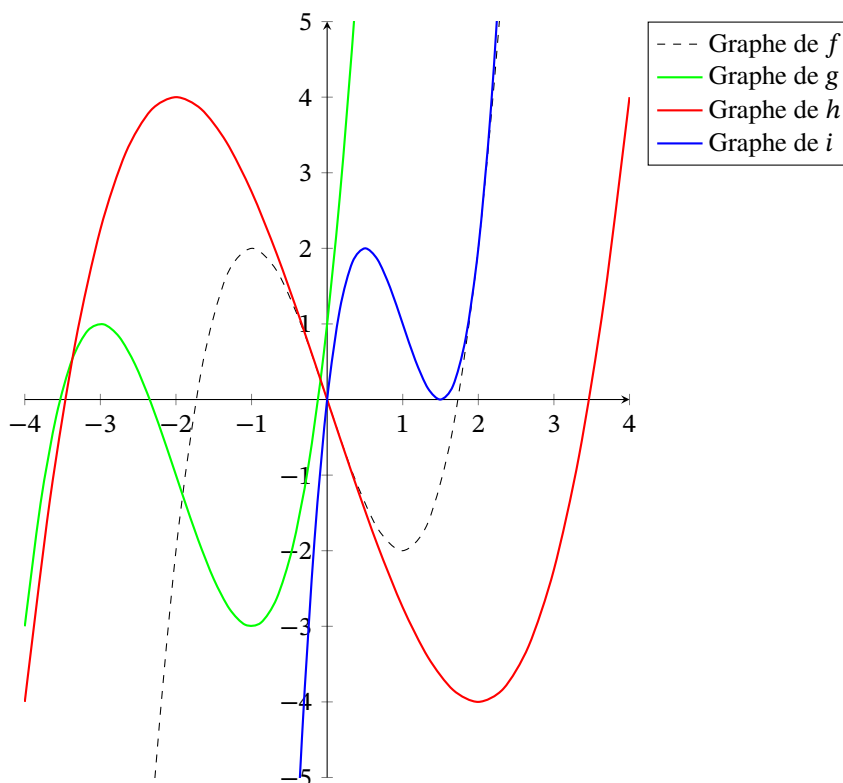
La courbe représentative de g est l'image de celle de f par une translation de vecteur de coordonnées $(-2, 1)$.

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{C}_f \\
 & \Leftrightarrow y = f(x) \\
 & \Leftrightarrow 2y = 2f\left(\frac{2x}{2}\right) \\
 & \Leftrightarrow 2y = h(2x) \\
 & \Leftrightarrow (2x, 2y) \in \mathcal{C}_h
 \end{aligned}$$

La courbe représentative de h est l'image de celle de f par une homothétie de centre l'origine et de rapport 2.

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{C}_f \\
 & \Leftrightarrow y = f(x) \\
 & \Leftrightarrow \frac{1}{2}y + 1 = \frac{1}{2}f\left(2\left(\frac{x}{2} + 1\right) - 2\right) + 1 \\
 & \Leftrightarrow \frac{1}{2}y + 1 = i\left(\frac{x}{2} + 1\right) \\
 & \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} + 1, \frac{1}{2}y + 1\right) \in \mathcal{C}_i
 \end{aligned}$$

La courbe représentative de i est l'image de celle de f par une homothétie de centre l'origine et de rapport $\frac{1}{2}$ suivie d'une translation de vecteur de coordonnées $(1, 1)$.

**Solution 28**

Il est équivalent de montrer que l'équation $f'(x) = 1$ admet 1 pour unique solution. On calcule pour $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

Par conséquent, $f'(x) = 1 \Leftrightarrow x^3 + 2 \ln x - 1 = 0$. Posons $g(x) = x^3 + 2 \ln x - 1$ pour $x > 0$. On a facilement :

$$\forall x > 0, g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} > 0$$

Par conséquent, g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$. De plus, $g(1) = 0$ donc la seule solution de l'équation $f'(x) = 1$ est 1.

Solution 29

Posons $f(x) = x \ln x$ pour $x > 0$. f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 + \ln x$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0, e^{-1}]$ et strictement croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$. De plus, $\lim_0^+ f = 0$ donc $f(x) < 0 < 1$ pour $x \in]0, e^{-1}]$. Ainsi l'équation $f(x) = 1$ n'admet pas de solution sur $]0, e^{-1}]$. Enfin, f est continue et strictement croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$, $f(e^{-1}) = -e^{-1}$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, donc f induit une bijection de $[e^{-1}, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$. Comme $1 > -e^{-1}$, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $[e^{-1}, +\infty[$. En conclusion, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur \mathbb{R}_+^* .

Solution 30

La fonction f est un produit de fonctions strictement croissantes et strictement positives sur $]0, 1[$, f est donc strictement croissante sur cet intervalle ; f étant de plus continue, elle réalise une bijection de $]0, 1[$ sur l'intervalle $[f(0), f(1)] = [0, 2e]$.

Solution 31

1. f n'est ni injective, ni surjective.
2. f est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]0, \frac{1}{2}]$.

Solution 32

f est clairement définie sur \mathbb{R} . On remarque également que f est paire.

Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

D'abord, $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable sur $] -\infty, -1[$ à valeurs dans \mathbb{R}_+^* , $x \mapsto |x|$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Il s'ensuit que $x \mapsto \sqrt{|x^2 - 1|}$ est dérivable sur $] -\infty, -1[$.

De même, $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R}_+^* , $x \mapsto |x|$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Il s'ensuit que $x \mapsto \sqrt{|x^2 - 1|}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$.

Enfin, $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable sur $] -1, 1[$ à valeurs dans \mathbb{R}_-^* , $x \mapsto |x|$ est dérivable sur \mathbb{R}_-^* à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Il s'ensuit que $x \mapsto \sqrt{|x^2 - 1|}$ est dérivable sur $] -1, 1[$.

Finalement, f est bien dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Pour tout $x \in] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ et donc

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Pour tout $x \in] -1, 1[$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ et donc

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

f est donc décroissante sur $[0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$. Par parité, f est croissante sur $[-1, 0]$ et décroissante sur $] -\infty, -1]$. De plus, la courbe représentative de f admet une tangente horizontale en le point d'abscisse 0.

Pour $x \in [0, 1[$,

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -\infty$$

et pour $x \in]1, +\infty[$,

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$$

La courbe représentative de f admet donc une tangente verticale au point d'abscisse 1. Par parité, elle admet également une tangente verticale au point d'abscisse -1.

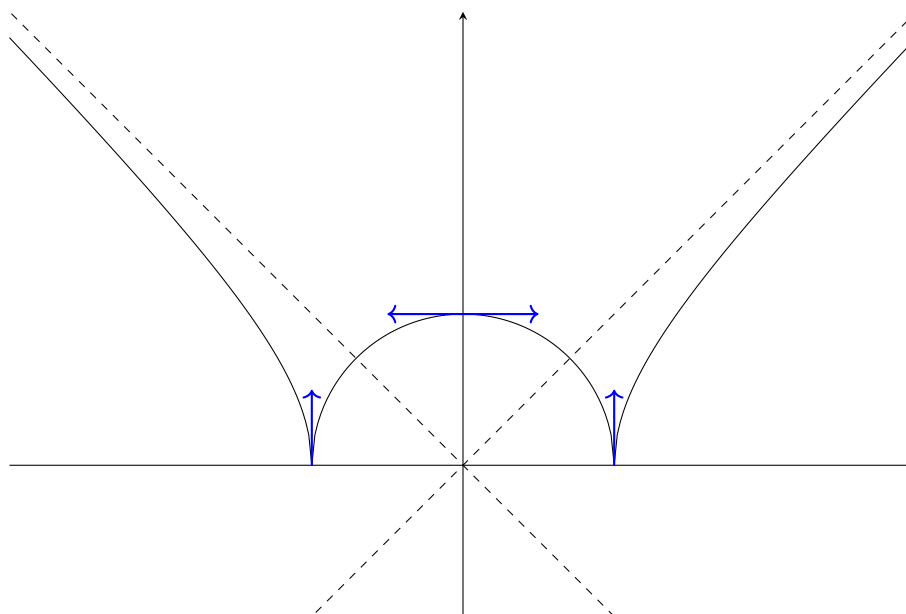
Pour $x \geq 1$

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

et

$$f(x) - x = -\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x$ pour asymptote en $+\infty$ et est située en-dessous de celle-ci sur $[1, +\infty[$. Par parité, elle admet la droite d'équation $y = -x$ pour asymptote en $-\infty$ et elle est également située en-dessous de celle-ci sur $] -\infty, -1]$. On en déduit le tracé suivant.



Solution 33

1. Par définition, $x^x = e^{x \ln x}$ donc f est définie sur \mathbb{R}_+^* .

$x \mapsto x \ln x$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle et \exp est dérivable sur \mathbb{R} donc, par composition, f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = (\ln x + 1)x^x$. Ainsi f' est positive sur $]0, \frac{1}{e}]$ et négative sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$.

Puisque $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$. De plus, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		<div><div>-</div><div>0</div><div>+</div></div>	
$f(x)$	1	<div><div></div><div>$e^{-\frac{1}{e}}$</div><div></div></div>	$+\infty$

Enfin, $\frac{f(x)}{x} = e^{(x-1) \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc le graphe de f admet une branche parabolique de direction (Oy).

On laisse au lecteur de tracer le graphe de f .

Le tableau de variations nous apprend que $\text{Im } f = [e^{-\frac{1}{e}}, +\infty[$.

2. f est définie sur \mathbb{R}_+^* et dérivable sur cet intervalle comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ donc f' est positive sur $]0, e]$ et négative sur $[e, +\infty[$.

On a sans problème $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$. Par croissances comparées, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. En particulier, le graphe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	e	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			$\frac{1}{e}$	0

On a clairement $\text{Im } f = \left]-\infty, \frac{1}{e}\right]$.

3. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \geq 0$, f est définie sur \mathbb{R} . f est clairement paire donc il suffit de procéder à une étude sur \mathbb{R}_+ . $x \mapsto 1 + x^2$ est dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}_+^* donc f est dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

On a clairement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$

On a clairement $\text{Im } f = [1, +\infty[$.

4. f est clairement définie sur \mathbb{R} . De plus, f est impaire et 2π -périodique donc on peut l'étudier sur $[0, \pi]$. f est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout $x \in [0, \pi]$, $f'(x) = \cos(x) - \cos(3x) = 2 \sin(2x) \sin(x)$. Comme \sin est positive sur $[0, \pi]$, $f'(x)$ est du signe de $\sin(2x)$ pour $x \in [0, \pi]$. f' est donc positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et négative sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π		
$f'(x)$	0	+	0	-	0
$f(x)$	0	$\frac{4}{3}$	0		

On trace ensuite le graphe de f sur $[0, \pi]$ qu'on complète par une symétrie par rapport à l'origine puis par 2π -périodicité.

On a clairement $f([0, \pi]) = \left[0, \frac{4}{3}\right]$ puis $f([-\pi, \pi]) = \left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$ car f est impaire et finalement $\text{Im } f = \left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$ par 2π -périodicité.

Solution 34

1. Le discriminant du trinôme $x \mapsto x^2 + x + 1$ est strictement négatif donc $x \mapsto x^2 + x + 1$ est positif sur \mathbb{R} . Ceci prouve que f est définie sur \mathbb{R} .
2. On trouve $f(-1-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que \mathcal{C}_f admet la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ comme axe de symétrie.

3. $x \mapsto x^2 + x + 1$ est dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$ donc f est dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

Ainsi f est décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

De plus, $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$

4. Pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Puis pour tout $x > 0$,

$$f(x) - x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \frac{1}{2}$. \mathcal{C}_f admet donc pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$.

Par symétrie, la droite d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote à \mathcal{C}_f en $-\infty$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

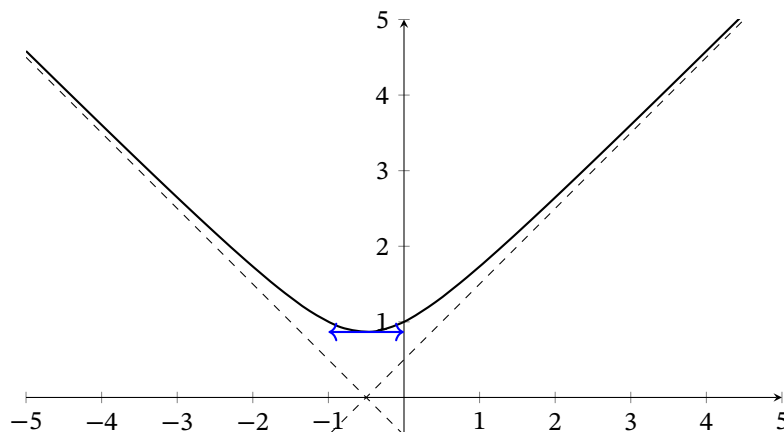
$$\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} = \left|x+\frac{1}{2}\right|$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \geq x + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(x) \geq -x - \frac{1}{2}$$

On en déduit que \mathcal{C}_f est au-dessus de ses asymptotes.

- 6.



Solution 35

Soit $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^n \ln x$. f_n est clairement dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'_n(x) = nx^{n-1} \ln x + x^{n-1} = x^{n-1} (n \ln x + 1)$$

Par croissance comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$ et, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \ln x = +\infty$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	$e^{-\frac{1}{n}}$	$+\infty$
$f'_n(x)$		0	
$f_n(x)$	0	$-\frac{1}{ne}$	$+\infty$

Si $-\frac{1}{ne} > -\frac{1}{n^2}$, autrement dit si $n < e$, les variations de f_n montrent que l'équation $f_n(x) = -\frac{1}{n^2}$ ne peut avoir de solution.

On ne peut avoir $-\frac{1}{ne} = -\frac{1}{n^2}$ car e n'est pas un entier.

Enfin, si $-\frac{1}{ne} < -\frac{1}{n^2}$, autrement dit, si $n > e$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires montre que l'équation $f_n(x) = -\frac{1}{n^2}$ admet une solution sur $]0, e^{-\frac{1}{n}}[$ et une solution sur $]e^{-\frac{1}{n}}, +\infty[$. En effet, f_n est continue et strictement monotone sur ces deux intervalles et

$$\lim_{0^+} f_n > -\frac{1}{n^2} > f_n(e^{-\frac{1}{n}}) \text{ et } f_n(e^{-\frac{1}{n}}) < -\frac{1}{n^2} < \lim_{+\infty} f_n.$$

En conclusion, l'équation $f_n(x) = -\frac{1}{n^2}$ admet deux solutions si $n \geq 3$ et aucune si $n \leq 2$.

Solution 36

Posons $f_k : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - 1 - kx$. f_k est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_k(x) = e^x - k$.

Par somme, $\lim_{-\infty} f_k = +\infty$ et par croissances comparées, $\lim_{+\infty} f_k = +\infty$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\ln k$	$+\infty$
$f'_k(x)$		0	
$f_k(x)$	$+\infty$	$k - 1 - k \ln k$	$+\infty$

La question est alors de connaître le signe de $k - 1 - k \ln k$. Pour cela, on étudie la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x \ln x - x + 1$. g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \ln x$. On en déduit que g est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$. Puisque $g(1) = 0$, $g(k) > 0$ pour tout $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

Si $k \neq 1$, on a donc $k - 1 - k \ln k = -g(k) < 0$. Puisque f_k est continue et strictement monotone sur $]0, \ln k[$ et sur $] \ln k, +\infty[$ et que $\lim_{-\infty} f_k = \lim_{+\infty} f_k = +\infty$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que l'équation $f_k(x) = 0$ admet une unique solution sur chacun de ces deux intervalles et donc deux solutions en tout.

Si $k = 1$, les variations de f_1 montrent que l'équation $f_1(x) = 0$ admet une unique solution (à savoir 0).

REMARQUE. Si l'on remarque que $f_k(0) = 0$, on peut se passer de l'étude de la fonction g .

Si $k > 1$, alors $\ln k > 0$ i.e. $0 \in]-\infty, \ln k[$. Comme f_k est strictement décroissante sur $] -\infty, \ln k[$, f_k ne s'annule qu'en 0 sur cet intervalle. De plus, la stricte décroissance de f_k sur cet intervalle nous apprend que $f(\ln k) < f(0) = 0$. On applique alors le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur $] \ln k, +\infty[$ pour affirmer que f_k ne s'annule qu'une fois sur cet intervalle.

Dans le cas où $k < 1$, on procède de manière similaire. La stricte croissance de f_k sur l'intervalle $] \ln k, +\infty[$ montre à nouveau que f_k ne s'annule qu'en 0 sur cet intervalle et le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires montre que f_k s'annule une unique fois sur $] -\infty, \ln k[$.

Solution 37

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$.

Variations. Après un petit calcul on trouve

$$f'(x) = \frac{2(x-2)(x+1)}{2x-1}.$$

Par l'étude du signe de f' on déduit que f est strictement croissante sur $] - \infty, -1]$ et sur $[2, \infty[$, et strictement décroissante sur $[-1, 1/2[$ et sur $]1/2, 2]$.

Asymptotes. On a

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} |f(x)| = \infty.$$

Cela montre que f possède une asymptote verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$.

Pour trouver des asymptotes non-verticales on remarque que le terme dominant de $f(x)$ est $\frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$. On cherche donc $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (x/2 + b)) = 0.$$

On calcule

$$\begin{aligned} f(x) - (x/2 + b) &= \frac{(x+1)^2 - (x/2 + b)(2x-1)}{2x-1} \\ &= \frac{(5/2 - 2b)x + 1 + b}{2x-1}. \end{aligned}$$

Pour avoir (*) il faut donc prendre $b = 5/4$. Ainsi la droite d'équation

$$y = x/2 + 5/4$$

est une asymptote ∞ , et aussi en $-\infty$.

Voici une méthode plus systématique pour obtenir cette asymptote. La fonction f est une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes). On procède donc à la division polynomiale du numérateur $x^2 + 2x + 1$ par le dénominateur $2x - 1$:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \\ 2x - 1 \overline{) x^2 + 2x + 1} \\ \underline{-x^2 + \frac{1}{2}x} \\ \frac{5}{2}x + 1 \\ \underline{-\frac{5}{2}x + \frac{5}{4}} \\ \frac{9}{4} \end{array}$$

Le reste est $\frac{9}{4}$ et le quotient est $\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$. Autrement dit,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{2x - 1} = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} + \frac{9/4}{2x - 1}.$$

En faisant tendre x vers l'infini dans cette expression on retrouve l'asymptote.

2. On soupçonne que le point d'intersection I des deux asymptotes est un centre de symétrie de la courbe \mathcal{C}_f . Prouvons-le !

On constate que la courbe \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à I si et seulement si la « fonction décalée » g définie par

$$g(x) = f(x + x_I) - y_I$$

est impaire. Les coordonnées de I étant $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ on a

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} = \frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}{2x} - \frac{3}{2} = \frac{x^2 + \frac{9}{4}}{2x}.$$

La fonction g est clairement impaire, et ainsi \mathcal{C}_f est bien symétrique par rapport au point I.

Inégalités

Solution 38

Posons $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x + x$.

f' est elle-même dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 1 - \cos x \geq 0$.

f' est donc croissante sur \mathbb{R} . Puisque $f'(0) = 0$, f' est négative sur \mathbb{R}_- et positive sur \mathbb{R}_+ .

On en déduit que f est décroissante sur \mathbb{R}_- et croissante sur \mathbb{R}_+ . Puisque $f(0) = 0$, f est positive sur \mathbb{R} et on en déduit l'inégalité demandée.

Solution 39

On pose $f(x) = 2 \sin x + \tan x - 3x$. Il suffit donc de montrer que f est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

f est clairement dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f'(x) = \frac{2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = \frac{(\cos x - 1)^2 (2 \cos x + 1)}{\cos^2 x}$$

Ainsi $f' \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et f est donc croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Puisque $f(0) = 0$, f est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on en déduit l'inégalité demandée.

Solution 40

On étudie la fonction $f : x \mapsto 6x - 8 \sin x + \sin 2x$. f est clairement dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 6 - 8 \cos 2x + 2 \cos 2x = 4 \cos^2 x - 8 \cos x + 4 = 4(\cos x - 1)^2 \geq 0$$

Ainsi f est croissante sur \mathbb{R} . Puisque $f(0) = 0$, f est positive sur \mathbb{R}_+ et on en déduit l'inégalité demandée.

Minorant, majorant, minimum, maximum

Solution 41

1. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = e^{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc f n'est pas majorée sur \mathbb{R} . Elle n'est donc pas bornée sur \mathbb{R} a fortiori.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -e^{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

donc f n'est pas minorée sur \mathbb{R} .

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \frac{|2 \sin x + 3 \cos x^2|}{|1 + e^x|} \\ &= \frac{|2 \sin x + 3 \cos x^2|}{1 + e^x} \\ &\leq |2 \sin x + 3 \cos x^2| && \text{car } e^x \geq 0 \\ &\leq 2|\sin x| + 3|\cos x^2| && \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq 5 \end{aligned}$$

Ainsi g est bornée sur \mathbb{R} donc majorée et minorée sur \mathbb{R} .

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \sin x \geq 0$ et $\ln(1 + x^2) \geq 0$ donc $h(x) \geq 0$. Ainsi h est minorée sur \mathbb{R} .
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$h\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 2 \ln\left(1 + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^2\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc h n'est pas majorée sur \mathbb{R} .

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|i(x)| = e^{-x^2} |\sin x|$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} \leq 1$ et $|\sin x| \leq 1$ donc $|i(x)| \leq 1$. Ainsi i est bornée sur \mathbb{R} .

Solution 42

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 1$ et $f(0) = 1$ donc f admet un maximum en 0 valant 1. Si m est un minorant de f , alors $m \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Or f ne prend pas de valeurs négatives donc f n'admet pas de minimum sur \mathbb{R} .
2. Une étude de fonction montre que g admet un maximum en e valant $\frac{1}{e}$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, f n'est pas minorée et n'admet donc pas de minimum sur \mathbb{R} .
3. h est clairement positive et $h(0) = 0$ donc h admet un minimum en 0 valant 0. Une étude de fonction montre que h admet un maximum en $\frac{1}{2}$ valant $\frac{1}{\sqrt{2e}}$.
4. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} i(x) = +\infty$ ou encore $\lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = +\infty$ donc i n'est pas majorée sur \mathbb{R} : elle n'y admet donc pas de maximum.
De plus, i est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $i'(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$.
On en déduit que i admet un minimum en \sqrt{a} valant $2\sqrt{a}$.