Devoir surveillé n°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 ★★

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n \, \mathrm{d}t$ et $\mathrm{J}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^n \, \mathrm{d}t$.

1. Calculer $\mathrm{I}_0, \mathrm{J}_0, \mathrm{I}_1, \mathrm{J}_1$.

2. Montrer que $\mathrm{I}_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que $\mathrm{I}_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\mathrm{I}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. **a.** Montrer que pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t)$.

b. En déduire que $0 \leq \mathrm{J}_n \leq \frac{\pi^2}{4}(\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Montrer que la suite de terme général $\frac{\mathrm{J}_n}{\mathrm{I}_n}$ converge vers 0.

5. **a.** Montrer que $\mathrm{I}_{n+2} = \frac{1}{2}(n+2)\left((n+1)\mathrm{J}_n - (n+2)\mathrm{J}_{n+2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. En déduire que $\frac{\mathrm{J}_n}{\mathrm{I}_n} - \frac{\mathrm{J}_{n+2}}{\mathrm{I}_{n+2}} = \frac{2}{(n+2)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite de terme général S_n converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2 ★★

Soient $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ et

$$(\mathbf{E}) : (1 - e^{-t})y' + y = e^{-t}.$$

1. En remarquant que $\forall t \in \mathbb{R}$, $1 - e^{-t} = e^{-t}(e^t - 1)$, résoudre l'équation homogène $(\mathbf{E_H})$ sur I.

2. Résoudre $(\mathbf{E})$ sur I.

3. *On cherche à prouver que* $(\mathbf{E})$ *admet une unique solution sur* I *admettant une limite finie en* 0^+.

a. Établir que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $x \leq e^x - 1 \leq xe^x$.

b. En déduire qu'il existe une unique solution de $(\mathbf{E})$ sur I, notée f, admettant en 0^+ une limite finie ℓ. On précisera la valeur de ℓ.

4. *Etude de f sur* I. *On prolonge désormais f en 0 en posant $f(0) = \ell$. Puisque $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \ell = f(0)$, la fonction f ainsi prolongée est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.*

   a. Étudier les variations de f sur I. On précisera la limite de f en $+\infty$.

   b. Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}e^x.$$

   c. En déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

   d. Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3 ★★

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

1. Soit $f \in \mathcal{E}$.

   a. Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.

   b. Démontrer que la fonction f est impaire.

2. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   a. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $xy' - y = kx$ où $k = f'(1)$.

   b. En déduire $f(x)$ en fonction de k pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. On note φ l'unique élément de $\mathcal{E}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\varphi'(1) = 1$.

   a. φ est-elle dérivable en 0 ?

   b. Déterminer les variations et les limites de φ en $+\infty$ et $-\infty$ puis tracer son graphe.

4. On considère $f \in \mathcal{E}$ que l'on suppose seulement continue sur $\mathbb{R}$. On note alors F l'unique primitive de f s'annulant en 0.

   a. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{F}(xy) = x^2\mathrm{F}(y) + \frac{xy^2}{2}f(x)$.

   b. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   c. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.

Exercice 4 ★★

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{sh}(x - t)g(t)\ \mathrm{d}t$$

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer les relations suivantes

$$\mathrm{sh}(a - b) = \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b)$$
$$\mathrm{ch}(a - b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$$

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \int_0^x \mathrm{ch}(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que f est solution de l'équation différentielle $y'' - y = g$.

4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' - y = g$.