CONVEXITÉ

Inégalités

Exercice 1 ★

Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

Exercice 2 ★

1. Montrer que $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x \ln x$ est convexe.
2. En déduire que pour tout $x \in]0,1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 3 ★★★ **Inégalité de Jensen**

Soit f continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que $\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln(f(t))\,\mathrm{d}t \leq \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
2. Application : calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_1^n \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \mathrm{d}t$.

Exercice 4 ★★★★ **ENS PC 2010**

Soient $n \geq 3$ et Γ un cercle. Parmi les polygones convexes à n côtés inscrits dans Γ, montrer que ce sont les polygones réguliers qui maximisent l'aire.

Exercice 5 ★★★ **Inégalité de Jensen**

Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et φ une fonction continue et convexe sur $f([a,b])$. Montrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 6 ★★★ **X MP**

Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ continue et concave telle que $f(0) = 1$. Montrer que

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

Exercice 7 ★★★

Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. On pose

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k \qquad \mathrm{G}_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \qquad \mathrm{H}_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}$$

Montrer que $\mathrm{H}_n \leq \mathrm{G}_n \leq \mathrm{A}_n$.

Exercice 8 ★★

1. Etudier la convexité de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \ln(1+e^x)$.
2. Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que
$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right)^{\frac{1}{n}}$$
3. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels strictement positifs. Montrer que
$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n a_k + b_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 9 ★★★ **Inégalités de Hölder et Minkowski**

Soient p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

1. Prouver l'inégalité de Young,

$$\forall (u;v)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ uv \leq \frac{u^p}{p}+\frac{u^q}{q}$$

2. Soient $x_1,\dots,x_n$ et $y_1,\dots,y_n$ des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité de Hölder,

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

3. Soient $p>1$, $x_1,\dots,x_n$ et $y_1,\dots,y_n$ des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité de Minkowski,

$$\left(\sum_{k=1}^n (x_k+y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^n y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Théorie

Exercice 10 ★★★★ **X MP**

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a\leq b$, $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est convexe.

Exercice 11 ★★★

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et $\mathrm{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \mathrm{F}(y)-\mathrm{F}(x)\geq(y-x)f(x)$$

1. Montrer que f est croissante et que F est convexe.
2. Montrer que F est une primitive de f.

Exercice 12 ★★★ **Convexité entière**

Soit $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ une application vérifiant :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ f(n)\geq\frac{f(n+1)+f(n-1)}{2}$$

On suppose de plus que f est minorée. Montrer que f est constante.

Exercice 13 ★★★★ **ENS MP 2010**

Soit f une fonction positive sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction g convexe sur $\mathbb{R}$ telle que pour toute fonction h convexe sur $\mathbb{R}$ telle que $h\geq f$, on ait $h\leq g$.

Exercice 14 ★★★★ **ENS Ulm/Lyon/Cachan MP 2001**

Pour $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, on note

$$\mathrm{E}_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y>f(x)\}$$

l'épigraphe de f.
Soient $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$.

1. Montrer qu'il existe une unique application $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ telle que $\mathrm{E}_h=\mathrm{E}_f+\mathrm{E}_g$.
2. On suppose f et g convexes. Montrer que h est convexe.
3. Montrer que f et g peuvent être de classe $\mathcal{C}^\infty$ sans que h le soit.

Exercice 15 ★★★ **X-ENS 2017 PC**

Que peut-on dire d'une application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe et impaire ?

Exercice 16 ★★★ **Fonctions convexes majorées**

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. Prouver que f est constante.
2. Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. A-t-on la même conclusion qu'à la question précédente ?

Divers

Exercice 17 ★★

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que $f \geq 0$ sur $[a, b]$ et on souhaite montrer qu'il n'existe qu'une solution non nulle de l'équation différentielle $y'' - fy = g$ s'annulant en a et b.
Soient donc φ_1 et φ_2 deux solutions de l'équation différentielle $y'' - fy = g$ s'annulant en a et b.

1. Montrer que $(\varphi_1 - \varphi_2)^2$ est convexe.

2. En déduire que $\varphi_1 = \varphi_2$.

Exercice 18 ★★

Soient f une application convexe sur un intervalle I, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ une série à termes positifs convergente de somme 1 et (x_n) une suite d'éléments de I. Montrer que si les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n f(x_n)$ convergent, alors

$$f\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(x_n)$$

Exercice 19 ★★ TPE

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ convexe sur $[0, 2\pi]$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$