

1 Cours

Polynômes

Polynômes à une indéterminée à coefficients dans \mathbb{K} Définitions : polynôme à coefficients dans \mathbb{K} , ensemble $\mathbb{K}[X]$. Deux polynômes sont égaux **si et seulement si** leurs coefficients sont égaux. Polynômes pairs, impairs. $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau intègre commutatif. $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel. Base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Degré d'un polynôme. Degré d'une combinaison linéaire, d'un produit. Définition de $\mathbb{K}_n[X]$. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Famille de polynômes à degrés échelonnés. Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine d'un polynôme. Cas des polynômes pairs/impairs et des polynômes à coefficients réels. Polynôme dérivé. La dérivation est linéaire. Formule de Leibniz. Formule de Taylor.

Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ Relation de divisibilité. Division euclidienne. Algorithme de division euclidienne. Un polynôme P admet a pour racine **si et seulement si** il est divisible par $X - a$. Existence et unicité d'un PGCD unitaire ou nul. Algorithme d'Euclide pour les polynômes. Théorème de Bézout. Polynômes premiers entre eux. Lemme de Gauss. Un polynôme de degré n admet au plus n racines. Polynômes interpolateurs de Lagrange. Existence et unicité d'un PPCM unitaire ou nul.

Racines multiples Définition. Un polynôme de degré n admet au plus n racines comptées avec multiplicité. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les dérivées successives.

Factorisation Polynômes irréductibles. Définition et décomposition en facteurs irréductibles. Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$. Polynôme scindé. Un polynôme est scindé **si et seulement si** il possède autant de racines comptées avec multiplicité que son degré. Lien coefficients/racines.

Fractions rationnelles

Corps des fractions rationnelles Définition. Opérations. Degré. Dérivation. $\mathbb{K}(X)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel et un corps.

Fonctions rationnelles, zéros et pôles Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle. Zéros et pôles d'une fraction rationnelle. Multiplicité d'un zéro ou d'un pôle.

Décomposition en éléments simples Partie entière. Décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} . Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ où P est scindé.

2 Méthodes à maîtriser

- ▶ Pour résoudre des équations d'inconnue polynomiale, chercher dans un premier temps à déterminer le degré du polynôme inconnu.
- ▶ Déterminer le reste d'une division euclidienne (utiliser les racines du diviseur).
- ▶ Montrer qu'un polynôme est nul en montrant qu'il admet une infinité de racines.
- ▶ Caractériser la multiplicité d'une racine via les dérivées successives.
- ▶ Passer de la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$ à celle sur $\mathbb{R}[X]$ (regrouper les racines conjuguées).
- ▶ Utiliser la parité et le fait qu'un polynôme est à coefficients réels pour obtenir de nouvelles racines à partir d'une racine donnée.
- ▶ Savoir résoudre des équations polynomiales de degré 2 à coefficients complexes.
- ▶ Savoir déterminer des racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe.
- ▶ Résoudre des systèmes polynomiaux symétriques en les inconnues.
- ▶ Exprimer une somme et un produit de racines à l'aide des coefficients du polynôme.
- ▶ Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle irréductible $F = P/Q$:
 - Calculer la partie entière.
 - Factoriser le dénominateur en produit de facteurs irréductibles.
 - Écrire la décomposition en éléments simples à l'aide de coefficients inconnus.
 - Déterminer des coefficients ou des relations entre ceux-ci :
 - Le coefficient associé à un pôle simple a et $P(a)/Q'(a)$;
 - Évaluer $(X - a)^p F$ en un pôle a (DES dans \mathbb{C}) ou $(X^2 + aX + b)^p F$ en un racine de $X^2 + aX + b$ (DES dans \mathbb{R});
 - Utiliser le fait que $F \in \mathbb{R}(X)$: les coefficients de la DES dans \mathbb{C} sont conjugués;

- Utiliser la parité éventuelle de la fraction rationnelle ;
 - Utiliser la limite de $x F(x)$ quand x tend vers $+\infty$;
 - Évaluer en des valeurs particulières.
- Simplifier par télescopage de somme du type $\sum F(k)$ où F est une fraction rationnelle via une DES.
- Calculer une intégrale du type $\int F(t) dt$ où F est une fraction rationnelle via une DES.

3 Questions de cours

BCCP 85 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

- (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $((X-a)^k)_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - (b) Soit $r \in \mathbb{N}$. En déduire que a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

BCCP 87 Soient a_0, \dots, a_n des réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme P tel que $\deg P \leq n$ et $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Expliciter ce polynôme P , que l'on notera L_k lorsque $b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.
3. Prouver que pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.

BCCP 90 Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés d'un corps \mathbb{K} .

1. Montrer que $\Phi: \begin{cases} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. On note e_1, e_2, e_3 la base canonique de \mathbb{K}^3 et on pose $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$.
 - (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
 - (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .
 - (c) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .
3. On se place dans \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1)$, $B(1, 3)$ et $C(2, 1)$. Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A , B et C .

Retour sur \mathbb{U}_n

Factoriser $X^n - 1$ en produits de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. En déduire la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X^n - 1}$.