Semaine du 24/04 au 01/05

1 Cours

Séries numériques

Généralités Définition, sommes partielles. Nature d'une série, somme. Si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) converge vers 0. Divergence grossière. Nature et somme d'une série géométrique. Reste d'une série convergente. Opérations sur les séries.

Comparaison à une intégrale Encadrement de $\sum f(n)$ où f est monotone. Nature d'une série de Riemann.

Séries à termes positifs Une série à terme positif converge ou diverge vers $+\infty$. Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, lien entre la convergence ou la divergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Absolue convergence. La convergence absolue implique la convergence. Relations de comparaison : lien entre domination/négligeabilité/équivalence et convergence/divergence des séries.

Développement décimal Existence et unicité d'un développement décimal propre.

2 Méthodes à maîtriser

- Établir la convergence d'une série et calculer sa somme par télescopage.
- Utiliser une décomposition en éléments simples pour déterminer par télescopage la somme d'une série $\sum \mathrm{F}(n)$ où F est une fraction rationnelle.
- Comparer la somme partielle ou le reste d'une série à une intégrale.
- Déterminer un équivalent de la somme partielle d'une série divergente ou du reste d'une série convergente par comparaison à une intégrale.
- Comparer à une série de Riemann ou une série géométrique pour déterminer la nature d'une série.

3 Questions de cours

- **BCCP 05**

  1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
     (a) Cas $\alpha \geqslant 0$.
     En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.
     (b) Cas $\alpha > 0$.
     Étudier la nature de la série. Indication : on pourra utiliser la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.
  2. Déterminer la nature de la série
  $$\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$$

  Remarque. Dans le corrigé «officiel», le cas $\alpha > 0$ est traité à l'aide d'un théorème qui n'est pas au programme de première année. Mais ce cas a été traité en classe «à la main» via la méthode des rectangles lors de l'étude des séries de Bertrand (hors-programme, je le rappelle). ■

- **BCCP 07**

  1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs. On suppose que (u_n) et (v_n) sont non nulles à partir d'un certain rang. Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
  2. Etudier la convergence de la série
  $$\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + i)\ln(n)\sin(1/n)}{\sqrt{n+3}-1}$$

- **Constante γ d'Euler**

  1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1)$ converge.
  2. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que
  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

- **Série exponentielle** Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ converge et que sa somme vaut e^x à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- **Equivalent d'une somme partielle** A l'aide d'une comparaison série/ntégrale, déterminer un équivalent de la somme partielle de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- **Equivalent d'un reste** A l'aide d'une comparaison série/intégrale, déterminer un équivalent du reste de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

  Remarque. J'autorise les étudiants à utiliser des intégrales impropres (i.e. à borne infinie). ■
- **Série alternée** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n u_n$ converge.