SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Suites de fonctions

Exercice 1 ★★★ ENS MP 2010

Soient $d \in \mathbb{N}$ et (P_n) une suite de polynômes de $\mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) (P_n) converge dans $\mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$.

(ii) (P_n) converge simplement sur $[0,1]$.

(iii) (P_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 2 ★★★

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $p \in \mathbb{N}$. On considère une suite (P_n) de fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à p qui converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f.
Montrer que f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à p et que (P_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Exercice 3 ★

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f^{(n)})$ des dérivées successives converge uniformément vers une fonction φ sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de φ ?

Exercice 4 ★★ CCP MP

On pose $f_n : x \mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$.

2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ où $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$?

3. Soit g continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\mathrm{g}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{g}(0)$$

Exercice 5 ★★★★ Théorème de Dini

1. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur $[a,b]$, alors la convergence est uniforme.

2. Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes, réelles et continues sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur $[a,b]$, alors la convergence est uniforme.

Exercice 6 ★★

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.
Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}^1 x^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7

Soit $f : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & 2x(1-x) \end{cases}$. On définit la suite de fonctions (f_n) par $f_0 = \mathrm{Id}_{[0,1]}$ et $f_{n+1} = f \circ f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de la suite (f_n).

Exercice 8 ★★

Soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 ★★★

Soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin^n(x)\cos(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 ★★★

Soit (P_n) la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

- $P_0(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$;
- $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x)^2)$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$.

2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

3. En déduire que la suite (P_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exercice 11 ★★

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction f à déterminer.

2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 12 ★

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n : x \in [0,1] \mapsto n^\alpha x^n(1-x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier la convergence simple et uniforme de (f_n) sur $[0,1]$.

Séries de fonctions

Exercice 13 ★★

On note $S(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{nx^{2n-1}}{1-x^{2n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de S.

2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

3. Étudier les variations de S sur D.

4. Étudier les limites de S aux bornes de D.

Exercice 14 ★★ **Mines-Ponts PC**

On pose $f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{\sqrt{k+x}}\right) - 2\sqrt{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la convergence de simple $\sum_{n\geq 1} f_{n+1} - f_n$.

2. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Calculer $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 15 ★★★

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de limite nulle. On pose $f_n : x \mapsto \sin nx$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} a_n f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 ★★★★

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. On pose $f_n : x \mapsto \sin nx$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} a_n f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la suite (na_n) converge vers 0.

Exercice 17 ★★★ **Mines-Télécom MP 2018**

1. Déterminer l'ensemble de définition de la série de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$. Donner un équivalent simple de f en 0.

2. Mêmes questions avec $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$.

Exercice 18 ★★ **Mines-Télécom MP 2017**

On définit la suite de fonctions (g_n) de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par $g_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ g_{n+1}(x) = \int_0^x g_n(1-t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|g_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|g_{n-1}\|_\infty$.

2. On pose $\mathrm{G} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.
   Montrer que G est bien définie sur $[0,1]$ et déterminer une équation différentielle vérifiée par G.

3. En déduire l'expression de G.

Exercice 19 **Banque Mines-Ponts MP 2019**

1. Existe-t-il une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = k$?

2. Existe-t-il une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = \frac{1}{k^2}$?

Exercice 20 **CCINP (ou CCP) PC 2019**

Soit $t \in \mathbb{R}$ et on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+e^{nt})$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

2. Montrer que $\lim_{t\to-\infty} f(t) = \ln(2)$.

3. Montrer que $\lim_{t\to 0^-} f(t) = +\infty$.

Exercice 21 **CCINP (ou CCP) MP 2019**

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

1. Pour $t \in]0,1[$, écrire $\frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ comme somme de série $\sum_{n\geq 0} u_n(t)$, où les u_n sont des fonctions puissances.

2. Déterminer la nature de la série $\sum \int_0^1 |u_n(t)|\,\mathrm{d}t$. Que peut-on en déduire ?

3. Soit $\mathrm{S_N}(t) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n(t)$. Démontrer

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \int_0^1 \mathrm{S_N}(t)\,\mathrm{d}t$$

4. En déduire

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$$

5. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 22 ★

Soit $\alpha > 0$. On pose $f_n : x \mapsto e^{-n^\alpha x}$ et $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. Étudier la continuité de f.

3. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 23 ★★★ **Arts et Métiers PSI**

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit (f_n) la suite de fonctions définies par $f_0 = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [a,b],\ f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\, \mathrm{d}t$$

1. Déterminer la nature de la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ sur $[a,b]$.

2. On note F la somme de cette série. Montrer que

$$\forall x \in [a,b],\ \mathrm{F}(x) = f(x) + e^x \int_a^x e^{-t} f(t)\, \mathrm{d}t$$

Exercice 24 ★

Soit $\alpha > 0$. On pose $f_n : x \mapsto e^{-n^\alpha x}$ et $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. Étudier la continuité de f.

3. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 25 **Centrale MP**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : x \mapsto x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2. On note g la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. On pose $f : x \mapsto g(x) - \ln(x)$. Montrer que f vérifie les trois conditions suivantes :

(i) $f(1) = 0$.

(ii) f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$;

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x+1) - f(x) = \ln(x)$;

4. Réciproquement, soit f vérifiant les trois conditions de la question précédente. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} x\ln(n) + \ln(n!) - \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k)$$

Séries alernées

Exercice 26 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2018**

Soit (λ_n) une suite strictement croissante de réels strictement positifs de limite $+\infty$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_n(x) = (-1)^n e^{-\lambda_n x}$$

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Etudier sa convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. On pose $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(t)\, \mathrm{d}t$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$$

Exercice 27 ★★ **CCINP (ou CCP) PC 2017**

On considère pour $x > 0$ la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

1. f est-elle bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$?

2. Montrer que
$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$

3. Montrer que
$$\forall x > 0,\ 2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$$

4. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

5. Déterminer un équivalent de f en 0^+.

6. Montrer que :
$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 28 ★★ **Fonction ζ alternée**

On considère la fonction $\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de S.

2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{D}$,
$$2\mathrm{S}(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n(x)$$
avec $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+1)^x}$.

4. En déduire la limite de S en 0^+.

Exercice 29 **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

2. À l'aide du critère spécial des séries alternées, trouver la monotonie de S.

3. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{S}(x+1) + \mathrm{S}(x) = \frac{1}{x}$$
puis en déduire un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ pour x qui tend vers 0.

Exercice 30 ★★★

On pose $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$ pour $x > 0$.

1. Justifier que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Étudier la limite de S en $+\infty$.

3. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Approximations

Exercice 31 ★★★

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f(t)t^k\,\mathrm{d}t = 0$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 32 ★★★ **Lemme de Riemann-Lebesgue**

On considère un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et un espace vectoriel normé de dimension finie E.

1. Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans E. Montrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b e^{i\lambda t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

2. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans E. Montrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b e^{i\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

3. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans E. Montrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$