

Eléments propres

Exercice 1 ★★

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $g \circ f$, alors λ est également valeur propre de $f \circ g$.

Exercice 2 ★★★

Soient u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel complexe E de dimension finie supérieure à 1. On suppose qu'il existe a, b complexes tels que $u \circ v = au + bv$. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.

Exercice 3 ★★

Soient u et v deux endomorphismes d'un \mathbb{K} -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) de dimension finie E . Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 4 ★★★

Théorème de Gerschgorin

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont notés $a_{i,j}$. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ et on note D_i le disque de centre $a_{i,i}$ et de rayon R_i . Montrer que toute valeur propre de A appartient à l'un au moins des disques D_i .

Exercice 5 ★★

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\varphi(P) = XP'$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer les éléments propres de φ .

Exercice 6 ★★★

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit l'application $T(f)$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = e^{-x} \int_0^x f(t) e^t dt$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E .
2. Déterminer les valeurs propres de T et les sous-espaces propres associés.

Exercice 7 ★★★

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), f(0) = 0\}$.

1. Soit $f \in E$. Montrer que $\int_0^x \frac{f(t)}{t} dt$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
2. Montrer que l'application Φ qui à $f \in E$ associe la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt$ est un endomorphisme de E .
3. Déterminer les valeurs propres de Φ et les sous-espaces propres associés.

Exercice 8 ★★★

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1. Soit $f \in E$. Montrer que l'application $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ est prolongeable en 0 en une application continue sur \mathbb{R}_+ . On notera ce prolongement $T(f)$.
2. Montrer que T est un endomorphisme de E .
3. Déterminer les valeurs propres de T et les sous-espaces propres associés.

Exercice 9 ★★★

Matrices stochastiques

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_{ij} \geq 0$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et $\sum_{j=1}^n A_{i,j} = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Montrer que $1 \in \text{Sp}(A)$.
2. Montrer que $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A), |\lambda| \leq 1$.

Exercice 10 ★★★

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . A toute application $f \in E$, on associe l'application

$$\Phi(f) : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer les éléments propres de Φ .

Exercice 11 ★★**Mines-Ponts MP 2016**

Soit E un espace euclidien de dimension finie. On considère des vecteurs unitaires a et b de E formant une famille libre.

Réduire l'endomorphisme

$$\phi : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto \langle a | x \rangle a + \langle b | x \rangle b \end{cases}$$

Exercice 12 ★★★

Montrer que l'application $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto X(X+1)P' - nXP$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer ses éléments propres.

Exercice 13 ★★**Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Soit l'endomorphisme

$$u : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto M + \text{tr}(M)I_n \end{cases}$$

Déterminer les valeurs propres de u , ainsi que les espaces propres associés.

Polynôme caractéristique**Exercice 14 ★★★**

Soient u et v deux endomorphismes d'un \mathbb{K} -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) de dimension finie E .

1. On suppose u inversible. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont même polynôme caractéristique.
2. Traiter le cas où u est non inversible.

Exercice 15**Algorithme de Faddeev**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note P le polynôme caractéristique de A . Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $B(\lambda) = \text{com}(\lambda I_n - A)^T$.

1. Montrer qu'il existe des matrices B_0, B_1, \dots, B_{n-1} de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$B(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-1-k} B_k$$

2. Montrer que $P'(\lambda) = \text{tr}(B(\lambda))$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.
3. On pose $P = X^n - \sum_{k=1}^n p_k X^{n-k}$ et $B_n = 0$. Montrer que pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{cases} p_k = \frac{1}{k} \text{tr}(AB_{k-1}) \\ B_k = AB_{k-1} - p_k I_n \end{cases}$$

et préciser B_0 .

4. Montrer que, si A est inversible, $A^{-1} = \frac{1}{p_n} B_{n-1}$.
5. Ecrire un algorithme en PYTHON calculant le polynôme caractéristique d'une matrice donnée et un autre calculant son inverse grâce aux questions précédentes.

Exercice 16 ★★★

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note E_p l'ensemble des «suites» de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ p -périodiques. On note D_p l'endomorphisme de E_p qui à une suite (u_n) associe la suite $(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1})$. Déterminer le coefficient de X dans le polynôme caractéristique de D_p .

Exercice 17 ★★★**Mines-Ponts MP 2018**

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

On suppose qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ de rang $r \geq 1$ tel que $h \circ g = f \circ h$. Montrer que χ_f et χ_g ont un facteur commun de degré r .

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 18 ★★★

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On pose

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n & -A \\ \hline -B & I_p \end{array} \right)$$

En multipliant M à gauche et à droite par des matrices bien choisies, montrer que

$$\lambda^p \chi_{AB}(\lambda) = \lambda^n \chi_{BA}(\lambda)$$

En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ si $n = p$.

Exercice 19 ★★**CCP 2015**

Soient E un espace vectoriel de dimension $2n + 1$ et de base (e_1, \dots, e_{2n+1}) ainsi que u l'endomorphisme de E tel que $u(e_1) = e_1 + e_{2n+1}$ et $u(e_i) = e_{i-1} + e_i$ pour tout $i \in \llbracket 2, 2n + 1 \rrbracket$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de u .
2. Montrer que u est inversible et déterminer un polynôme P tel que $u^{-1} = P(u)$.
3. Déterminer les valeurs propres complexes de u .
4. En déduire $\prod_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Exercice 20 ★★**Matrice compagnon**

Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$. Déterminer le polynôme

caractéristique de A .

Diagonalisation**Exercice 21**

Calculer la trace de l'endomorphisme $\Phi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto M^T \end{cases}$.

Exercice 22 ★★★

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose u diagonalisable.

Montrer que u et v commutent si et seulement si tout sous-espace propre de u est stable par v .

Exercice 23 ★★★

Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que le commutant de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)^2$.

Exercice 24 ★★**Calcul d'un commutant**

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer le commutant de A .

Exercice 25 ★★★

Soient u un endomorphisme diagonalisable d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E . On pose $G = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} F \cap E_\lambda(u)$. Montrer que G est stable par u .
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Montrer que $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} F \cap E_\lambda(u)$.
3. Montrer que les sous-espaces vectoriels de E stables par u sont exactement les sous-espaces vectoriels de la forme $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} F_\lambda$ où pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, F_λ est un sous-espace vectoriel de $E_\lambda(u)$.

Exercice 26 ★★★★★**Mines-Ponts MP 2015**

On note $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ inversible et dont l'inverse appartient aussi à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que $(\text{GL}_2(\mathbb{Z}), \times)$ est un groupe.
2. Soit G un sous-groupe fini de $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$. Montrer que pour toute matrice $M \in G$, $M^{12} = I_2$.

Exercice 27 ★★**CCINP (ou CCP) MP 2019**

Soit $n \geq 2$ entier. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = I_n$ et $A \neq \pm I_n$.

1. Montrer que $\text{tr}(A) \equiv n[2]$.
2. Montrer que $|\text{tr}(A)| \leq n - 2$.

Exercice 28 ★★**Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Étudier la diagonalisabilité de A , et la diagonaliser si possible.
2. Résoudre l'équation $M^2 = A$ pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 29 ★★**Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A s'écrit PDP^{-1} avec $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ et D matrice diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. On cherche à résoudre l'équation $X^2 = A$.
Montrer que si X est solution de cette équation alors $P^{-1}XP$ commute avec D puis qu'elle est diagonale.
Résoudre l'équation.

Exercice 30**Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2021**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A en fonction de J et J^2 .
2. Calculer le polynôme caractéristique de J . La matrice J est-elle diagonalisable ?
3. Diagonaliser A .

Exercice 31 ★★

Soient $a \in \mathbb{K}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par $u(P) = (X - a)P'$ pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Déterminer les éléments propres de u . u est-il diagonalisable ?

Exercice 32 ★★

Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X + 1)P(X) - XP(X + 1)$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer les éléments propres de Φ . Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 33 ★**CCP 2018**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$, telle que $\text{rg}(A) = 1$.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 0$.

Exercice 34 ★★**CCINP (ou CCP) MP 2021**

On considère $f: \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M + 2M^T \end{cases}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. Calculer $\text{tr}(f)$ et $\det(f)$.

Exercice 35 ★

Etudier la diagonalisabilité sur \mathbb{R} des matrices réelles suivantes :

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

3.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

2.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

4.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 36 ★★★

Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie E tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v diagonalisent dans une base commune.

Exercice 37 ★★★

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E stable par u .

Exercice 38 ★★**CCINP (ou CCP) MP 2019**

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. On note f et g deux endomorphismes de E et on note A et B leurs matrices dans une même base de E .

1. On suppose f et g bijectifs dans cette question.
 - a. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
 - b. Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable, alors $g \circ f$ l'est aussi.
2.
 - a. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont le même spectre.
 - b. Donner un exemple de matrices telles que AB soit diagonalisable mais pas BA .

Exercice 39 ★★★**Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2019**

Soient f et g deux endomorphismes d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie E vérifiant $f \circ g = f + g$.

1. Montrer que $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ et $\text{Im } f = \text{Im } g$.
2. On suppose g diagonalisable. Montrer que f et $f \circ g$ sont aussi diagonalisables et que $\text{Sp}(f \circ g) \subset \mathbb{R} \setminus]0, 4[$.

Trigonalisation**Exercice 40****X MP 2010**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\overline{A}A = I_n$ si et seulement si il existe $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = S\overline{S}^{-1}$.

Exercice 41**X PC 2010**

Déterminer les matrices de $\text{GL}_3(\mathbb{C})$ semblables à leur inverse.

Exercice 42 ★**CCP MP 2010**

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à spectres disjoints.

1. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.
2. Soit X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX = XB$. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)X = XP(B)$ et en déduire que $X = 0$.
3. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.