Corrigé TD : Dénombrement

Solution 1.

Plaçons nous sur une planète donné et notons $p_1, \dots, p_n$ les pays et ν_k le nombre de voisins du pays p_k. Evidemment $0 \leqslant \nu_k \leqslant n-1$ pour tout $k = 1, \dots, n$. Supposons par l'absurde que les ν_k sont distincts deux à deux. Alors, quitte à renuméroter les pays, on peut supposer que

$$0 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_n \leqslant n-1\,.$$

Ca devient serré… on a forcément $\nu_1 = 0$ et $\nu_n = n-1$. Or c'est une contradiction car la première égalité signifie que p_1 n'a pas de voisin (c'est une île), tandis que la deuxième égalité dit que tout pays est voisin de p_n.

Solution 2.

1. On a $S(n,n) = n!$ puisque dans le cas $n = m$ les surjections de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,m]\!]$ sont des bijections.
   Si $n < m$ alors il n'existe pas de surjection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,m]\!]$, donc $S(n,m) = 0$.

2. Pour mieux cerner de quoi il s'agit il faut revenir à la version ensembliste de la notion d'application. Une application $X \to Y$ entre deux ensembles X et Y est définie à partir de son graphe qui est un sous-ensemble Γ du produit $X \times Y$ vérifiant la propriété suivante :

   $$(*) \qquad \forall x \in X\ \exists_1\, y \in Y \ :\quad (x,y) \in \Gamma.$$

   On a $S(0,0) = 1$. En effet, on est dans le cas où $X = Y = \varnothing$. Alors $X \times Y = \varnothing$ et le graphe ne peut être que l'ensemble vide ; on parle alors d'application vide. Comme en plus Y est vide la condition de surjectivité est trivialement satisfaite.
   On a $S(n,0)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, on est dans le cas où $X \neq \varnothing$ et $Y = \varnothing$; alors la condition $(*)$ ne peut pas être validée, donc il n'existe pas d'application $X \to Y$.
   Remarquons en passage qu'on a aussi $S(0,m) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, mais pour une autre raison : si $X = \varnothing$ et $Y \neq \varnothing$ alors il existe une application $X \to Y$, à savoir l'application vide, mais elle n'est pas surjective.

3. Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Pour calculer $S(n+1,m)$ nous devons dénombrer les possibilité de construire une application surjective $f : [\![0,n]\!] \to [\![1,m]\!]$. Nous distinguons deux cas pour une telle surjection f.

   - $f^{-1}(\{f(0)\}) \neq \{0\}$. Cela siginfie que 0 n'est pas le seul élément que f envoye sur $f(0)$. Ainsi la restriction

     $$h = f|_{[\![1,n]\!]} \ : \ [\![1,n]\!] \to [\![1,m]\!]\,,\ k \mapsto f(k),$$

     est surjective. Il existe $S(n,m)$ telles surjections h, et il y a m choix possibles pour le nombre $f(0)$. On a alors $mS(n,m)$ possibilités d'obtenir f.
   - $f^{-1}(\{f(0)\}) = \{0\}$. Cela siginfie que f envoye tous les éléments non-nuls sur un image différente de $f(0)$. Alors l'application

     $$g \ : \ [\![1,n]\!] \to [\![1,m]\!] \setminus \{f(0)\}\,,\ k \mapsto f(k),$$

     est bien définie et surjective. Il existe m choix possibles pour $f(0)$, et il existe $S(n,m-1)$ possibilités pour une surjection g comme ci-dessus. On a alors $mS(n,m-1)$ manières différentes d'obtenir f.

   Nous avons donc montré que $S(n+1,m) = m(S(n,m) + S(n,m-1))$.

Solution 3.

1. $21/32$, $\dfrac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}} = \dfrac{21 \times 20}{32 \times 31} = \dfrac{21 \times 5}{8 \times 31} = \dfrac{105}{248}$.

2. $2 \times 10^3 = 2000$, $2 \times 10 \times 9 \times 8 = 1440$,
   $2 \times 10 \times 9 \times 9 = 1620$.

Solution 4.

1. $12^4 = 20736$.
2. $A_{12}^4 = 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11880$.
3. $11^3 \times 4 = 5324$. $\qquad 11 \times 10 \times 9 \times 4 = 3960$.
4. Chaque fois qu'il y a dans l'énoncé « au moins un » il est conseillé de passer par l'événement contraire qui est « aucun». Le nombre de codes sans chiffres est $2^4 = 16$, donc le nombre de codes contenant au moins un chiffre est
$$20736 - 16 = 20720.$$
Un code à caractères distincts contient forcément au moins un chiffre (car il n'y a que deux lettres). Le nombre de codes à caractères distincts et contenant au moins un chiffre est donc 11880 (voir la deuxième question).

5. Le nombre de codes à caractères distincts sans lettre est $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$. Donc le nombre de codes à caractères distincts et contenant au moins une lettre est
$$11880 - 5040 = 6840.$$

Solution 5.

1. $\binom{32}{8} = 10518300$.
2. $\binom{8}{3}\binom{24}{5} = 2380224$.
3. « Au moins trois piques» signifie que le nombre de piques est dans $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Il est alors plus court de passer par le contraire : le nombre de piques est dans $\{0, 1, 2\}$.
Pas de pique : $\binom{24}{8} = 735471$, $\qquad$ un pique : $\binom{8}{1}\binom{24}{7} = 2768832$. $\qquad$ deux piques : $\binom{8}{2}\binom{24}{6} = 3768688$,
Donc le nombre de mains avec au moins trois piques est
$$10518300 - 735471 - 2768832 - 3768688 = 3245309.$$

4. Notons X le nombre de rois et Y le nombre de piques dans la main. On cherche le cardinal de $\{X \geqslant 1\} \cap \{Y \geqslant 1\}$. Encore une fois, le passage au contraire nous aidera. D'après la formule de Morgan on a
$$\overline{\{X \geqslant 1\} \cap \{Y \geqslant 1\}} = \{X = 0\} \cup \{Y = 0\}.$$
On calcule
$$\left|\{X = 0\} \cup \{Y = 0\}\right| = \left|\{X = 0\}\right| + \left|\{Y = 0\}\right| - \left|\{X = Y = 0\}\right| = \binom{28}{8} + \binom{24}{8} - \binom{21}{8} = 3640086.$$
Donc le nombre recherché est $10518300 - 3640086 = 6878214$.

Solution 6.

1. Notons E l'ensemble des k-uplets vérifiant la condition demandée et $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1, n]\!]$. Soit ϕ : $\left\{\begin{array}{ccc} [\![1, n]\!]^k & \longrightarrow & \mathcal{P}([\![1, n]\!]) \\ (i_1, \dots, i_k) & \longmapsto & \{i_1, \dots, i_k\} \end{array}\right.$. ϕ induit une bijection de E sur $\mathcal{P}_k$. On a donc $\operatorname{card} E = \binom{n}{k}$ si $k \geqslant n$ et $\operatorname{card} E = 0$ sinon.

2. Soit $p \in [\![1,k]\!]$. On note F l'ensemble des k-uplets vérifiant la condition demandée et F_p l'ensemble des k-uplets $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ de F tels que $\operatorname{card}(\phi((i_1,\dots,i_k))) = p$. Pour un tel k-uplet, dans la sérié d'inégalités $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_k$, $k-p$ inégalités parmi les $k-1$ seront en fait des égalités. Pour définir un élément de F_p, il suffit donc de se donner un élément de $\mathcal{P}_p$ et la place des égalités parmi les inégalités. On en déduit donc que $\operatorname{card} F_p = \binom{n}{p}\binom{k-1}{k-p}$. Les F_p pour $p \in [\![1,k]\!]$ forment une partition de F. Ainsi $\operatorname{card} F = \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \binom{n}{p}\binom{k-1}{k-p}$.
Soit X un ensemble à $n+k-1$ éléments et A une partie à n éléments de X. Notons $\mathcal{X}_k$ l'ensemble des parties à k éléments de X et $\mathcal{X}_{k,p}$ l'ensemble des parties à k éléments de X qui comportent p éléments dans A. Remarquons que $\mathcal{X}_{k,0} = \varnothing$. Les $\mathcal{X}_{k,p}$ pour $p \in [\![1,k]\!]$ forment donc une partition de $\mathcal{X}_k$. On a évidemment $\operatorname{card} \mathcal{X}_k = \binom{n+k-1}{k}$. De plus, $\operatorname{card} \mathcal{X}_{k,p} = \binom{n}{p}\binom{k-1}{k-p}$ (on choisit p éléments dans A et $k-p$ éléments dans $X \setminus A$). On a donc $\displaystyle\sum_{p=1}^{k} \binom{n}{p}\binom{k-1}{k-p} = \binom{n+k-1}{k}$.
Ainsi $\operatorname{card} F = \binom{n+k-1}{k}$.

Solution 7.

1. Se donner $f \in \mathcal{S}_{p,n}$ revient à se donner $f(1) < f(2) < \dots < f(p)$ dans $[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire une partie à p éléments de $[\![1,n]\!]$ puisqu'il n'y a qu'une seule façon de ranger par ordre strictement croissant les éléments d'une partie de $[\![1,n]\!]$. Ainsi $\operatorname{card} \mathcal{S}_{p,n} = \binom{n}{p}$ si $p \geqslant n$ et $\operatorname{card} \mathcal{S}_{p,n} = 0$ sinon.

2. Soient $x \in [\![1,p-1]\!]$. Alors $g(x+1) - g(x) = f(x+1) - f(x) + 1 > 0$ car $f(x+1) \geqslant f(x)$. Ainsi g est strictement croissante.
Pour tout $x \in [\![1,p]\!]$, on a $1 \leqslant x \leqslant p$ et $1 \leqslant f(x) \leqslant n$ donc $1 \leqslant f(x) + x - 1 \leqslant n + p - 1$.

3. Notons ψ l'application qui à une fonction f de $\mathcal{S}_{p,n}$ associe la fonction g de $\mathcal{S}_{p,n+p-1}$ définie comme dans la question précédente.
Montrons que ψ est injective. Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_{p,n}$ telles que $\psi(f_1) = \psi(f_2)$. Alors pour tout $x \in [\![1,p]\!]$, $f_1(x)+x-1 = f_2(x)+x-1$ et donc $f_1(x) = f_2(x)$. Ainsi $f_1 = f_2$.
Montrons que ψ est surjective. Soit $g \in \mathcal{S}_{p,n+p-1}$. Pour $x \in [\![1,p]\!]$, posons $f(x) = g(x) - x + 1$. On va vérfier que $f \in \mathcal{C}_{p,n}$ et ainsi on aura $\psi(f) = g$.
Montrons que f est croissante. Soient $x \in [\![1,p-1]\!]$. Alors $f(x+1)-f(x) = g(x+1)-g(x)-1$. Comme g est strictement croissante à valeurs entières $g(x+1) - g(x) \geqslant 1$. Donc $f(x+1) - f(x) \geqslant 0$.
Montrons que f est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. On a $f(1) = g(1) - 1 + 1 = g(1) \geqslant 1$ et $f(p) = g(p) - p + 1 \leqslant n + p - 1 - p + 1 = n$ car g est à valeurs dans $[\![1,n+p-1]\!]$. Comme f est croissante, pour tout $x \in [\![1,p]\!]$, $1 \leqslant f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(p) \leqslant n$.
$\psi : \mathcal{C}_{p,n} \to \mathcal{S}_{p,n+p-1}$ est injective et surjective donc bijective. On en déduit que $\operatorname{card} \mathcal{C}_{p,n} = \operatorname{card} \mathcal{S}_{p,n+p-1}$.

4. **a.** Notons $E_{p,n}$ l'ensemble des n-uplets recherchés. On définit l'application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{rcl} E_{p,n} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{p,n} \\ (u_1,\dots,u_p) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} [\![1,p]\!] & \longrightarrow & [\![1,n+1]\!] \\ x & \longmapsto & 1 + \sum_{i=1}^{x} u_i \end{array} \right. \end{array} \right.$$

ϕ est bien définie :

- comme les u_i sont positifs, $\phi(u_1,\dots,u_p)$ est bien une application croissante ;
- comme $u_1 + \dots + u_p \leqslant n$, cette application est bien à valeurs dans $[\![1,n+1]\!]$.

Montrons que ϕ est bijective.

- Injectivité : Soient $(u_1,\dots,u_p)$ et $(v_1,\dots,v_p)$ des éléments de $E_{p,n}$ tels que $\phi(u_1,\dots,u_p) = \phi(v_1,\dots,v_p)$. Notons $f = \phi(u_1,\dots,u_p) = \phi(v_1,\dots,v_p)$. On a alors $f(1) = u_1 = v_1$ et $f(x) - f(x-1) = u_x = v_x$ pour $x \in [\![2,p]\!]$. D'où $(u_1,\dots,u_p) = (v_1,\dots,v_p)$.
- Surjectivité : Soit $f \in \mathcal{C}_{p,n}$. On pose $u_1 = f(1)$ et $u_x = f(x) - f(x-1)$ pour $x \in [\![2,p]\!]$. Les u_i ainsi définis sont des entiers naturels car f est croissante. On a $u_1 + \dots + u_p = f(p)$ par télescopage et $f(p) \leqslant n$. Donc $(u_1,\dots,u_p) \in E_{p,n}$. Enfin, on a bien $\phi(u_1,\dots,u_p) = f$ puisque $\forall x \in [\![1,p]\!]$, $\sum_{i=1}^{x} u_i = f(x)$ par télescopage à nouveau.

On en déduit $\operatorname{card} E_{p,n} = \operatorname{card} \mathcal{C}_{p,n+1} = \binom{n+p}{p}$.

b. Notons $F_{p,n}$ l'ensemble des éléments recherchés. On remarque que $F_{p,n} = E_{p,n} \setminus E_{p,n-1}$. Comme $E_{p,n-1} \subset E_{p,n}$, on a $\operatorname{card} F_{p,n} = \operatorname{card} E_{p,n} - \operatorname{card} E_{p,n-1} = \binom{n+p}{p} - \binom{n+p-1}{p} = \binom{n+p-1}{p-1}$.

Solution 8.

1. Notons E_1 l'ensemble des couples (X, Y) tels que $X \cap Y = \varnothing$. Le choix d'un tel couple (X, Y) revient au choix de k éléments de X parmi les n éléments de E et au choix de l éléments de Y parmi les $n-k$ éléments restants. Ainsi

$$\begin{aligned}\operatorname{card} E_1 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n\end{aligned}$$

2. Notons E_2 l'ensemble des couples (X, Y) tels que $X \cup Y = E$. Comme $X \cup Y = E$ équivaut à $\overline{X} \cap \overline{Y} = \varnothing$ et que $(X, Y) \mapsto (\overline{X}, \overline{Y})$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)^2$ dans lui-même, $\operatorname{card} E_1 = \operatorname{card} E_2 = 3^n$.

3. Notons E_3 l'ensemble des couples (X, Y) formant une partition de E. Le choix d'un tel couple (X, Y) revient au choix de k éléments de X parmi les n éléments de E et des $n-k$ éléments restants pour Y. Ainsi

$$\operatorname{card} E_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

4. Notons E_4 l'ensemble des triplets (X, Y, Z) tels que $X \cup Y = Z$. Le choix d'un triplet (X, Y, Z) de E_4 revient au choix de i éléments de Z parmi les n éléments de E puis au choix d'un couple (X, Y) tel que $X \cup Y = Z$. On a vu qu'il existe 3^i choix possibles pour un tel couple (X, Y). Ainsi

$$\operatorname{card} E_4 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 3^i = (1+3)^n = 4^n$$

On peut même faire plus simple : le choix d'un triplet (X, Y, Z) tel que $X \cup Y = Z$ revient au choix d'un couple (X, Y) puisqu'une fois que celui-ci est choisi Z est déterminé de manière unique. Ainsi

$$\operatorname{card} E_4 = (\operatorname{card} \mathcal{P}(E))^2 = (2^n)^2 = 2^{2n}$$

Solution 9.

Soit E un ensemble à $2n$ éléments et (E_1, E_2) une partition de E avec $\operatorname{card} E_1 = \operatorname{card} E_2 = n$. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties de E à n éléments et, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des parties de E à n élémnents possédant eaxctement k éléments dans $\mathcal{E}_1$. Il est clair que $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ est une partition de $\mathcal{E}$. Se donner un élément de $\mathcal{E}_k$ revient à se donner une partie à k éléments de E_1 et une partie à $n-k$ éléments de E_2. On en déduit que $\operatorname{card} \mathcal{E}_k = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ par symétrie des coefficients binomiaux. On sait que $\operatorname{card} \mathcal{E} = \binom{2n}{n}$. Comme $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ est une partition de $\mathcal{E}$, on en déduit que $\operatorname{card} \mathcal{E} = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card} \mathcal{E}_k$ puis la formule demandée.

Solution 10.

Comme trois de ces cordes ne sont jamais concourantes, il suffit de dénombrer le nombre de points d'intersection de ces cordes deux à deux. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des combinaisons de 4 points parmi $A_1, \dots, A_n$ de $\mathcal{C}$. Pour $E \in \mathcal{E}$, notons $\mathcal{C}_E$ l'ensemble des paires de cordes dont les extrémités sont des points de E. La famille $(\mathcal{C}_E)_{E \in \mathcal{E}}$ est une partition de l'ensemble des paires de cordes d'extrémités $A_1, \dots, A_n$.

Il suffit alors de remarquer que si l'on se donne 4 points parmi $A_1, \dots, A_n$, parmi les 6 cordes formées 4 points, seules deux d'entre elles se coupent à l'intérieur du cercle (le quadrilatère non croisé formé par ces 4 points est convexe). Le nombre de points recherché est donc $\binom{n}{4}$.

Solution 11.

Notons $k = \operatorname{card}\{x_1, \dots, x_n\}$ et $\{x_1, \dots, x_n\} = \{a_1, \dots, a_k\}$ (les a_i sont sans doublon). Notons enfin $A_i = \{j \in [\![1, n]\!] \mid x_j = a_i\}$ pour $i \in [\![1, k]\!]$. On a $\sum_{i=1}^{k} \operatorname{card} A_i = n$. Supposons que moins de p nombres parmi $x_1, \dots, x_n$ soient égaux. On a donc $\operatorname{card} A_i \leqslant p$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$. D'où $n \leqslant pk$. Or on sait que $n \geqslant p^2 + 1$ donc $pk \geqslant p^2 + 1$ puis $k > p$. Ceci signifie qu'il existe au moins $p + 1$ nombres deux à deux distincts parmi $x_1, \dots, x_n$.

Solution 12.

1. On a clairement $\nu_n(\mathbb{N}^*) = n$ et donc $\delta_n(\mathbb{N}^*) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $\delta_n(\mathbb{N}^*) = 1$.
2. Comme E est fini, il admet un plus grand élément. Posons $N = \max E$. Pour $n \geqslant N$, $\nu_n(E) = N$ et donc $\delta_n(E) = \frac{N}{n}$. On en déduit que $\delta(E) = 0$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\nu_{2k}(2\mathbb{N}) = k$ et $\nu_{2k+1}(2\mathbb{N}) = k + 1$. Par conséquent, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{2} \leqslant \nu_n(2\mathbb{N}) \leqslant \frac{n+1}{2}$ et donc $\frac{1}{2} \leqslant \delta_n(2\mathbb{N}) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$. Par encadrement, $\delta(2\mathbb{N}) = \frac{1}{2}$.
4. Les carrés compris entre 1 sont de la forme k^2 avec $1 \leqslant k^2 \leqslant n$ i.e. $1 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}$. On a donc $\nu_n(C) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. On en déduit l'encadrement $\frac{\sqrt{n}-1}{n} < \delta_n(C) \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n}$. Par encadrement, $\delta(C) = 0$.
5. On a $A \cap [\![1, 2^{2n}]\!] = \bigcup_{k=0}^{n-1}]\!]2^{2k}, 2^{2k+1}]\!]$. Comme $\operatorname{card}\left(]\!]2^{2k}, 2^{2k+1}]\!]\right) = 2^{2k}$,
$$\nu_{2^{2n}}(A) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{2k} = \frac{2^{2n} - 1}{3}$$
On a également $A \cap [\![1, 2^{2n+1}]\!] = \bigcup_{k=0}^{n}]\!]2^{2k}, 2^{2k+1}]\!]$. Donc
$$\nu_{2^{2n+1}}(A) = \sum_{k=0}^{n} 2^{2k} = \frac{2^{2(n+1)} - 1}{3}$$
On a donc $\delta_{2^{2n}}(A) = \frac{2^{2n}-1}{3.2^{2n}}$ et $\delta_{2^{2n+1}}(A) = \frac{2^{2n+2}-1}{3.2^{2n+1}}$. On en déduit que les suites $(\delta_{2^{2n}}(A))$ et $(\delta_{2^{2n+1}}(A))$ convergent respectivement vers $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Comme ce sont des suites extraites de $(\delta_n(A))$, cette suite ne converge pas. Ainsi A n'a pas de densité.
6. Remarquons qu'il existe 9^k entiers à k chiffres ne comportant pas de zéro dans leur écriture décimale. On en déduit que pour $p \geqslant 1$, $\nu_{10^p} = \sum_{k=1}^{p} 9^k = \frac{9^{p+1}-1}{8}$. Soit n un entier et posons $p = \lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$ de sorte que $n \leqslant 10^p$. On a donc
$$0 \leqslant \nu_n(D) \leqslant \frac{9^{p+1} - 1}{8} \leqslant \frac{9^{\log_{10}(n)+2} - 1}{8} = \frac{81n^{\log_{10}(9)} - 1}{8}$$
Par conséquent
$$0 \leqslant \delta_n(D) \leqslant \frac{81n^{\log_{10}(9)} - 1}{8n}$$
Comme $\log_{10}(9) < 1$, on a par encadrement $\delta(D) = 0$.

Solution 13.

1. Evident puisque, pour $x \in E$, $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon.

2. Soit $x \in E$. Si $x \in A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 1$. De plus, x appartient également à tous les A_i donc $\mathbb{1}_{A_i}(x) = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On a donc $\prod_{i=1}^{n}(\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_{A_i}(x)) = 0$ puisque tous les facteurs sont nuls.
Si $x \notin A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$. De plus, il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $x \notin A_{i_0}$. On a donc $\mathbb{1}_{A_{i_0}}(x) = 0$. Ainsi $\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_{A_{i_0}}(x) = 0$ et donc $\prod_{i=1}^{n}(\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_{A_i}(x)) = 0$ car l'un des facteurs est nul.
Finalement, $\prod_{i=1}^{n}(\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_{A_i}(x)) = 0$ pour tout $x \in E$.

3. En utilisant le fait que $\mathbb{1}_A^k = \mathbb{1}_A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient en développant

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_i}) &= \mathbb{1}_A + \sum_{k=1}(-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} \mathbb{1}_{A_{i_j}} \\ &= \mathbb{1}_A + \sum_{k=1}(-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \mathbb{1}_{\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}}\end{aligned}$$

Puisque $\prod_{i=1}^{n}(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_i}) = 0$, on a :

$$\mathbb{1}_A = \sum_{k=1}(-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \mathbb{1}_{\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}}$$

puis

$$\begin{aligned}\sum_{x \in A} \mathbb{1}_A(x) &= \sum_{x \in A} \sum_{k=1}(-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \mathbb{1}_{\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}}(x) \\ &= \sum_{k=1}(-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \sum_{x \in A} \mathbb{1}_{\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}}(x)\end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser la première question pour aboutir à la relation demandée.

Solution 14.

Le nombre recherché est le nombre de façons d'ordonner les n éléments de l'ensemble autrement dit le nombre de permutations de cet ensemble, à savoir $n!$.

Solution 15.

Soient E un ensemble de cardinal $n + m$, F et G deux parties de cardinaux respectifs n et m formant une partition de m.
Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de E à r éléments. Pour $k \in [\![0, r]\!]$, on note $\mathcal{A}_k$ l'ensemble des parties de E possédant k éléments dans F et donc $r - k$ éléments dans G. Les pour $k \in [\![0, r$ forment clairement une partition de $\mathcal{A}$ de sorte que $\operatorname{card} \mathcal{A} = \sum_{k=0}^{r} \operatorname{card} \mathcal{A}_k$.
D'une part, $\operatorname{card} \mathcal{A} = \binom{n+m}{r}$. D'autre part, choisir un élément de $\mathcal{A}_k$ revient à choisir une partie de F à k éléments et une partie de G à $n - k$ éléments. Il s'ensuit que $\operatorname{card} \mathcal{A}_k = \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$. On obtient bien la formule demandée.

Solution 16.

Notons $x_1, \dots, x_n$ ces n entiers. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, posons $S_k = \sum_{p=1}^{k} x_k$ et notons r_k le reste de la division euclidienne de S_k par n. Les n entiers $r_1, \dots, r_n$ appartiennent à $[\![0, n-1]\!]$.

- S'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $r_k = 0$, alors S_k est divisible par n.

- Sinon les n entiers $r_1, \dots, r_n$ appartiennent à $[\![1, n-1]\!]$. D'après le principe de Dirichlet, il existe deux entiers k et l de $[\![1, n]\!]$ tels que $k < l$ et $r_k = r_l$. Alors $S_l - S_k = \sum_{p=k+1}^{l} x_k$ est divisible apar n.

Remarque. On a même prouvé que si on a préalablement ordonné les n entiers de manière quelconque, on peut trouver une somme d'entiers consécutifs (au sens de l'ordre choisi) divisible par n. ■

Solution 17.

1. On introduit les intervalles $I_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. Puisque $I_0, \dots, I_{n-1}$ forment une partition de $[0, 1[$ et que les réels $\delta_0, \dots, \delta_n$ sont tous dans $[0, 1[$, chacun des $n+1$ réels $\delta_0, \dots, \delta_n$ appartient à un des n intervalles $I_0, \dots, I_{n-1}$. D'après le principe des tiroirs, deux de ces réels appartiennent au même intervalle. Autrement dit il existe deux entiers k et l de $[\![0, n]\!]$ tels que $k < l$ et un entier $m \in [\![0, n-1]\!]$ tel que δ_k et δ_l appartiennent à I_m. Ainsi, $\frac{m}{n} \leqslant \delta_k < \frac{m+1}{n}$ et $\frac{m}{n} \leqslant \delta_l < \frac{m+1}{n}$ puis $-\frac{1}{n} < \delta_l - \delta_k < \frac{1}{n}$ i.e. $|\delta_l - \delta_k| < \frac{1}{n}$. On a alors le résultat voulu en posant $q = l - k$ et $p = \lfloor lx \rfloor - \lfloor kx \rfloor$.

2. **a.** Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$. $\mathcal{D}$ est non vide puisqu'il contient le couple, $(\lfloor x \rfloor, 1)$. Supposons que $\mathcal{D}$ soit fini. Notons $m = \min_{(p,q) \in \mathcal{D}} \left|x - \frac{p}{q}\right|$. m est bien défini car $\mathcal{D}$ est non vide et fini. De plus, $m > 0$ car x est irrationnel. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \leqslant m$. D'après la question précédente, il existe un couple $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $s \leqslant n$ et $\left|x - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{ns}$. Puisque $s \geqslant 1$,
$$\left|x - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{ns} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant m$$
donc $(r, s) \notin \mathcal{D}$.
De plus, $s \leqslant n$ donc
$$\left|x - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{ns} \leqslant \frac{1}{s^2}$$
donc $(r, s) \in \mathcal{D}$ d'où une contradiction.

   b. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des entiers $p \in \mathbb{Z}$ tels qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$. Pour $p \in \mathcal{E}$, notons $\mathcal{D}_p$ l'ensemble des entiers $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$. On a $\mathcal{D} = \bigcup_{p \in \mathcal{E}} \{p\} \times \mathcal{D}_p$. Supposons que $\mathcal{E}$ soit fini. Puisque $\mathcal{D}$ est infini, il existe un entier $p \in \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{D}_p$ soit infini. En particulier, on peut construire une suite strictement croissante (q_n) d'éléments de $\mathcal{D}_p$. Puisque (q_n) est à valeurs entières, (q_n) diverge vers $+\infty$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|x - \frac{p}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$ donc, par passage à la limite, $|x| \leqslant 0$ i.e. $x = 0$, ce qui est absurde car x est irrationnel.
Ainsi $\mathcal{E}$ est infini.

3. **a.** Supposons $l > 0$. Alors (u_n) est minorée par un réel $m > 0$ à partir d'un certain rang. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n \sin n} \geqslant m$ pour tout $n \geqslant N$. Ainsi $0 \leqslant \sin n \leqslant \frac{1}{nm}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc la suite $(\sin n)$ converge vers 0 ce qui est classiquement faux.
En considérant la suite $(-u_n)$, on montre de même qu'on ne peut avoir $l < 0$.
On en conclut que $l = 0$.

   b. Comme l'ensemble $\mathcal{E}$ est infini, on peut trouver une suite strictement croissante (p_n) à valeurs dans $\mathcal{E}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $q_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left|\pi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$ i.e. $|q_n\pi - p_n| < \frac{1}{q_n}$. Remarquons en particulier que $q_n\pi > p_n - \frac{1}{q_n} \leqslant p_n - 1$. Ainsi (q_n) diverge également vers $+\infty$ et donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{p_n}{q_n} = \pi$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$|\sin(p_n)| = |\sin(q_n\pi - p_n)| \leqslant |q_n\pi - p_n| < \frac{1}{q_n}$$
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{p_n}| > \frac{q_n}{p_n}$. Comme (u_{p_n}) est une suite extraite de (u_n), on obtient $0 \leqslant \pi$ par passage à la limite d'où la contradiction.
Par conséquent, la suite (u_n) n'admet pas de limite.

Solution 18.

Première solution
Numérotons dans un premier temps les 10 trinômes. Il y a $\binom{30}{3}$ façons de choisir les élèves du trinôme 1, puis $\binom{27}{3}$ façons de choisir les élèves du trinôme 2, ...et enfin $\binom{3}{3}$ façons de choisir les élèves du trinôme 10. Le nombre de façons de répartir les élèves dans les trinômes 1 à 10 est donc

$$\prod_{k=1}^{10}\binom{3}{3k} = \prod_{k=1}^{10}\frac{3k!}{3!(3(k-1))!} = \frac{30!}{(3!)^{10}}$$

Mais l'énoncé ne fait pas mention d'un ordre ou d'une numérotation des trinômes : on divise donc le nombre trouvé par 10!. Le nombre recherché est donc $\frac{30!}{(3!)^{10}10!}$.

Seconde solution
On peut répartir les élèves en trinômes en se donnant une liste des élèves dans un ordre quelconque puis en groupant les trois premiers, puis les trois suivants, ...Il existe 30! liste de 30 élèves. Mais une liste étant donnée, une permutation des 3 élèves d'un même groupe ou une permutation des 10 groupes donne une liste qui fournit la même répartition en trinômes. Il existe donc $(3!)^{10}10!$ listes fournissant la même répartition en trinômes. Le nombre recherché est donc à nouveau $\frac{30!}{(3!)^{10}10!}$.

Solution 19.

Il existe évidemment 5! anagrammes du mot «MATHS».

Pour former une anagramme du mot «MOTO», il faut déjà placer le «M» et le «T» : il y a 4×3 façons de le faire. Les deux dernières lettres à placer sont forcément des «O» : il n'y a donc pas de choix à effectuer. Il existe donc 12 anagrammes du mot «MOTO».

Pour former une anagramme du mot «DODO», il faut déjà placer les deux «D» : il suffit de choisir deux places parmi les quatre possibles autrement dit $\binom{4}{2}$ possibilités. Les deux dernières lettres à placer sont forcément des «O» : il n'y a donc pas de choix à effectuer. Il existe donc 6 anagrammes du mot «DODO».

Pour former une anagramme du mot «ANAGRAMME», il faut déjà placer les trois «A» : il suffit de choisir trois places parmi les neuf possibles autrement dit $\binom{9}{3}$ possibilités. On place ensuite les deux «M» : il suffit de choisir deux places parmi les six restantes autrement dit $\binom{6}{2}$ possibilités. On place ensuite les quatre lettres «N», «G», «R», «E» aux quatres places restantes : il y a 4! façons de le faire. Il existe en tout $\binom{9}{3}\binom{6}{2}4! = \frac{9!}{3!2!} = 30240$ anagrammes du mot «ANAGRAMME».

Le mot «ANTICONSTITUTIONNELLEMENT» comporte 25 lettres dont 5 «N», 5 «T», 3 «I», 2 «O», 3 «E», 2 «L», toutes les autres lettres n'apparaissant qu'une fois. Le nombre d'anagrammes du mot «ANTICONSTITUTIONNELLEMENT» est donc $\frac{25!}{(5!)^2(3!)^2(2!)^2} = 7480328917501440000$.

Solution 20.

1. n^m

2. $n!$

3. C'est le nombre de $n-1$-arrangements autrement dit $n!$

4. Soit A un ensemble à n éléments et B un ensemble à $n-1$ éléments. Remarquons que si f est une surjection de A sur B, un élément de B aura deux antécédents dans A et les autres un seul.
   Se donner une surjection de A sur B, c'est donc se donner la paire d'éléments de A ayant la même image ($\binom{n}{2}$ possibilité) puis se donner l'image de cette paire et les images des $n-2$ éléments restants ($(n-1)!$ possibilités). Le nombre de surjection de A sur B est donc $\binom{n}{2}(n-1)! = \frac{n!(n-1)}{2}$.

Solution 21.

Notons $C_1, \dots, C_k$ les classes d'équivalences et $n_1, \dots, n_k$ leurs cardinaux respectifs. Puisque les classes d'équivalence forment une partition de E, $n = \sum_{j=1}^{k} n_j$. De plus, $G = \bigcup_{j=1}^{k} C_j^2$, l'union étant disjointe. Ainsi $p = \sum_{j=1}^{k} n_j^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$n^2 = \left(\sum_{j=1}^{k} 1 \times n_j\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{k} 1^2\right)\left(\sum_{j=1}^{k} n_j^2\right) = kp$$

Solution 22.

1. Notons R la matrice $(r_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} \equiv r_{i,j}[2]$. Par compatibilité de la relation de congruence avec la somme et le produit,
$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \equiv \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} r_{\sigma(i),i}[2]$$
Autrement dit $\det A \equiv \det B[2]$.

2. Clairement, $\operatorname{card}(\mathcal{M}) = 9!$.

3. D'après la première question, l'application qui à $M \in \Omega$ associe la matrice constituée des restes des divisions euclidiennes des coefficients de A par 2 a pour image Δ. De plus, chaque élément de Δ a $5 \cdot !4!$ antécédents par cette application (5! façons de placer les chiffres impairs et 4! façons de placer les chiffres pairs). D'après le lemme des bergers, $\operatorname{card}(\Omega) = 5! \cdot 4! \operatorname{card}(\Delta)$.

4. **a.** Il y a trois façons de placer la colonne de 1. Une fois cette colonne placée, les deux 1 restants ne peuvent appartenir à la même colonne sinon on aurait une colonne de 0 et donc un déterminant nul (non impair). Les deux 1 restants ne peuvent être situés sur la même ligne sinon les deux colonnes où ils figurent seraient égales et donc le déterminant serait nul. Il y a donc $3 \times 2 = 6$ façons de placer les deux 1 restants. Les matrices obtenues sont bien de déterminants impairs puisque par échange de lignes et de colonnes, leurs déterminants sont égaux au signe près à $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. On en déduit que $\operatorname{card}(K_1) = 3 \times 6 = 18$.

   b. Il y a $\binom{3}{2} = 3$ façons de choisir les deux colonnes possédant un unique 0. Dans ces deux colonnes, les zéros ne peuvent figurer sur la même ligne sinon les deux colonnes sont égales et le déterminant est nul. Il y a donc $3 \times 2 = 6$ façons de placer les 0 dans ces deux colonnes. Il y a enfin 3 façons de placer le 1 restant dans la colonne restante. Les matrices ainsi obtenues sont bien de déterminants impairs puisque par échange de lignes et de colonnes, leurs déterminants sont égaux au signe près à $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. On en déduit que $\operatorname{card}(K_2) = 3 \times 6 \times 3 = 18 = 54$.

   c. Les deux ensembles dénombrés dans les deux questions précédentes sont disjoints puisqu'une matrice de Δ possédant une colonne avec trois coefficients égaux à 1 a forcément une colonne avec plus deux deux coefficients égaux à 0. Ces deux ensembles sont également de réunion Δ puisqu'une matrice de Δ qui ne contient aucune colonne avec trois coeffiients égaux à 1 a forcément deux colonnes avec exactement un coefficient égal à 0. Ces deux ensembles forment donc une partition de Δ de sorte que $\operatorname{card}(\Delta) = K_1 + K_2 = 72$.

   d. Finalement, $\operatorname{card}(\Omega) = 72 \cdot 5! \cdot 4!$.

5. Implicitement, on suppose que la probabilité est uniforme sur $\mathcal{M}$.
$$p = \frac{\operatorname{card}(\Omega)}{\operatorname{card}(\mathcal{M})} = \frac{72 \cdot 5! \cdot 4!}{9!} = \frac{4}{7}$$

Solution 23.

1. **a.** Une permutation de E_n à n points fixes est l'identité donc $S_{n,n} = 1$.
Si une permutation a $n-1$ points fixes, le dernier point de E_n est nécessairement un point fixe. Une permutation ne peut donc avoir exactement $n-1$ points fixes $S_{n,0} = 0$.

b. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, notons $\mathfrak{S}_{n,k}$ la partie de $\mathfrak{S}_n$ formée des permutations ayant exactement k points fixes. La famille $(\mathfrak{S}_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une partition de $\mathfrak{S}_n$. Puisque $\operatorname{card} \mathfrak{S}_{n,k} = S_{n,k}$ et que $\operatorname{card} \mathfrak{S}_n = n!$, on en déduit la formule demandée.

a. Se donner un élément de $\mathfrak{S}_{n,k}$, c'est se donner k points fixes dans E_n, autrement dit une partie à k éléments de E_n, et une permutation sans point fixe des $n-k$ éléments restants. Comme il y a $\binom{n}{k}$ parties à k éléments de E_n et qu'il y a ω_{n-k} permutations sans point fixe d'un ensemble à $n-k$ éléments, on en déduit $S_{n,k} = \binom{n}{k}\omega_{n-k}$.

b. En utilisant les deux questions précédentes :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n-k}\binom{n}{k}}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} S_{n,k} = 1$$

c. Notons $\mathrm{HR}(n)$ l'égalité à démontrer. $\mathrm{HR}(0)$ est clairement vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\mathrm{HR}(k)$ vraie pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. En utilisant la question précédente

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a alors :

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{p=0}^{n-k} \frac{(-1)^p}{p!}$$

On effectue le changement d'indice $q = p + k$ dans la deuxième somme :

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=k}^{n} \frac{(-1)^{q-k}}{k!(q-k)!}$$

On intervertit les deux sommes :

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_n}{n!} &= 1 - \sum_{q=1}^{n} \sum_{k=1}^{q} \frac{(-1)^q(-1)^k}{k!(q-k)!} \\
&= 1 - \sum_{q=1}^{n} \frac{(-1)^q}{q!} \sum_{k=1}^{q} (-1)^k \binom{q}{k}
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{q} (-1)^k \binom{q}{k} = \left(\sum_{k=0}^{q} (-1)^k \binom{q}{k}\right) - 1 = (1-1)^q - 1 = -1$ car $q \geqslant 1$. On a donc

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 + \sum_{q=1}^{n} \frac{(-1)^q}{q!} = \sum_{q=0}^{n} \frac{(-1)^q}{q!}$$

Ainsi $\mathrm{HR}(n)$ est vraie. Par récurrence forte, $\mathrm{HR}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle sur $[-1, 0]$, on obtient :

$$\left| e^{-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sup_{[-1,0]} \exp = \frac{1}{(n+1)!}$$

En passant à la limite, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\omega_n}{n!} = \frac{1}{e}$.

Solution 24.

Choisir un k-cycle de $\mathfrak{S}_n$ consiste à :

- choisir le support du k-cycle, c'est-à-dire k éléments parmi n ;
- ordonner ces k éléments : $k!$ possibilités ;
- tenir compte qu'un cycle est invariant par permutation circulaire des éléments de son support : k possibilités.

On en déduit que le nombre de k cycles de $\mathfrak{S}_n$ est

$$\frac{\binom{n}{k}k!}{k} = (k-1)!\binom{n}{k} = \frac{n!}{k(n-k)!}$$