Devoir surveillé n° 3 : corrigé

Solution 1.

1. $f(z)$ est défini *si et seulement si* $e^z + e^{-z} \neq 0$. Or

$$e^z + e^{-z} = 0 \iff e^{2z} = -1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 2z = (2k+1)i\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = i\frac{\pi}{2} + ik\pi$$

Donc $f(z)$ est défini pour $z \notin i\frac{\pi}{2} + i\pi\mathbb{Z}$.

2. $f(z) = 0$ équivaut à $e^z - e^{-z} = 0$. Or

$$e^z - e^{-z} = 0 \iff e^{2z} = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 2z = 2ik\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = ik\pi$$

L'ensemble des solutions est donc $i\pi\mathbb{Z}$.

3. Posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
|f(z)| < 1 &\iff \left|e^z - e^{-z}\right|^2 < \left|e^z + e^{-z}\right|^2 \\
&\iff \left(e^z - e^{-z}\right)\overline{\left(e^z - e^{-z}\right)} < \left(e^z + e^{-z}\right)\overline{\left(e^z + e^{-z}\right)} \\
&\iff \left(e^z - e^{-z}\right)\left(e^{\overline{z}} - e^{-\overline{z}}\right) < \left(e^z + e^{-z}\right)\left(e^{\overline{z}} + e^{-\overline{z}}\right) \\
&\iff -e^{z-\overline{z}} - e^{\overline{z}-z} < e^{z-\overline{z}} + e^{\overline{z}-z} \\
&\iff e^{2iy} + e^{-2iy} > 0 \\
&\iff \cos(2y) > 0
\end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} |\operatorname{Im} z| < \dfrac{\pi}{2} \\ |f(z)| < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |y| < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos(2y) > 0 \end{cases} \iff |y| < \dfrac{\pi}{4}.$

4. Soit $z \in \Delta$. D'après la question précédente, $|f(z)| < 1$ i.e. $f(z) \in \mathcal{D}$. Ainsi tout élément de Δ a pour image par f un élément de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire que $f(\Delta) \subset \mathcal{D}$.

5. **Existence :** Puisque Z est non nul, Z possède des arguments. De plus, les arguments de Z étant égaux à un multiple de 2π près, il existe un argument θ de Z appartenant à $]-\pi, \pi]$. On ne peut avoir $\theta = \pi$ sans quoi Z serait un réel négatif. Considérons également le module r de Z, qui est strictement positif puisque Z est non nul. On peut alors poser $z = \ln r + i\theta$ de sorte que $e^z = Z$ et $\operatorname{Im}(z) = \theta \in]-\pi, \pi[$.
Unicité : Supposons qu'il existe deux complexes z et z' tels que $e^z = e^{z'} = Z$ et les réels $\operatorname{Im}(z)$ et $\operatorname{Im}(z')$ soient dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$. Puisque $e^z = e^{z'}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z' = z + 2ik\pi$. En partiulier, $\operatorname{Im}(z') - \operatorname{Im}(z) = 2k\pi$. Mais comme les réels $\operatorname{Im}(z)$ et $\operatorname{Im}(z')$ soient dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$, $-2\pi < \operatorname{Im}(z') - \operatorname{Im}(z) < 2\pi$, de sorte que $-1 < k < 1$. Puisque k est entier k est nul puis $z' = z$.

6. Remarquons que

$$\frac{1+u}{1-u} = \frac{(1+u)(1-\overline{u})}{|1-u|^2} = \frac{1 - |u|^2 + 2i\operatorname{Im}(u)}{|1-u|^2}$$

On en déduit que si $\frac{1+u}{1-u} \in \mathbb{R}_-$, alors $1 - |u|^2 \leqslant 0$ i.e. $|u| \geqslant 1$. Par contraposition, si $u \in \mathcal{D}$, $\frac{1+u}{1-u} \notin \mathbb{R}_-$.

7. Montrons que tout élément de $\mathcal{D}$ admet un unique antécédent dans Δ. Soit $u \in \mathcal{D}$ et $z \in \mathbb{C}$. On a facilement $f(z) = u \iff e^{2z} = \frac{1+u}{1-u}$. D'après la question **6**, $\frac{1+u}{1-u} \notin \mathbb{R}_-$. D'après la question **5**, cette équation admet une unique solution telle que $\operatorname{Im}(2z) \in]-\pi, \pi[$ i.e. $\operatorname{Im}(z) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Notons encore z cette solution. Comme on a également $|f(z)| < 1$, la question **3** montre que $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4}$ i.e. $z \in \Delta$. L'équation $f(z) = u$ admet donc une unique solution dans Δ.
Puisqu'on a également montré que $f(\Delta) \subset \mathcal{D}$, f réalise bien une bijection de Δ sur $\mathcal{D}$.

Solution 2.

1. **a.** Soit $(z, z') \in (\mathbb{C} \setminus \{-i\})^2$ tel que $f(z) = f(z')$. Alors $\frac{iz+1}{z+i} = \frac{iz'+1}{z'+i}$ donc $(iz+1)(z'+i) = (iz'+1)(z+i)$. En développant, on obtient $izz' + z' - z + i = izz' + z - z' + i$ puis $z = z'$ donc f est injective.

b. Soit $Z \in \mathrm{Im} f$. Il existe donc $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ tel que $Z = f(z)$. Supposons $Z = i$. Alors $\frac{iz+1}{z+i} = i$ puis $iz + 1 = i(z + i) = iz - i$, ce qui est absurde. Ainsi $Z \neq i$ de sorte que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Réciproquement, soit $Z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Posons $z = \frac{1-iZ}{Z-i}$. Alors $z(Z - i) = 1 - iZ$ puis $Z(z + i) = iz + 1$. En particulier, $z \neq -i$ puisqu'alors on aurait $0 = i \times (-1) + 1 = 2$. Ainsi $Z = \frac{iz+1}{z+i} = f(z)$ de sorte que $Z \in \mathrm{Im}\, f$. Par conséquent, $\mathbb{C} \setminus \{i\} \subset \mathrm{Im}\, f$.
Par double inclusion, $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{C} \setminus \{i\}$. En particulier, f n'est pas surjective puisque $\mathrm{Im}\, f \neq \mathbb{C}$.

c. Soit $Z \in f(\mathcal{P})$. Il existe donc $z \in \mathcal{P}$ tel que $Z = f(z)$. Remarquons alors que

$$\begin{aligned}
|iz+1|^2 - |z+i|^2 &= (iz+1)\overline{iz+1} - (z+i)\overline{z+i} \\
&= (iz+1)(-i\overline{z}+1) - (z+i)(\overline{z}-i) \\
&= (z\overline{z} + iz - i\overline{z} + 1) - (z\overline{z} - iz + i\overline{z} + 1) \\
&= 2i(z - \overline{z}) = -4\,\mathrm{Im}(z) < 0
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$|Z| = |f(z)| = \frac{|iz+1|}{|z+i|} < 1$$

Ceci signifie que $Z \in \mathcal{D}$. Finalement, $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}$.

d. Soit $Z \in \mathcal{D}$. Alors $Z \neq i$ donc Z admet un unique antécédent z par f par injectivité de f. On a déjà montré à la question **1.b** que cet unique antécédent était $z = \frac{1-iZ}{Z-i}$. Il s'agit alors de montrer que $z \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(z) &= \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1-iZ}{Z-i} - \overline{\left(\frac{1-iZ}{Z-i}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1-iZ}{Z-i} - \frac{1+i\overline{Z}}{\overline{Z}+i}\right) \\
&= \frac{1}{2i} \cdot \frac{(1-iZ)(\overline{Z}+i) - (1+i\overline{Z})(Z-i)}{(Z-i)(\overline{Z}+i)} \\
&= \frac{1}{2i} \cdot \frac{\left(Z+\overline{Z}+i-iZ\overline{Z}\right) - \left(Z+\overline{Z}-i+iZ\overline{Z}\right)}{(Z-i)\overline{Z-i}} \\
&= \frac{1}{2i} \cdot \frac{2i - 2iZ\overline{Z}}{|Z-i|^2} = \frac{1-|Z|^2}{|Z-i|^2}
\end{aligned}$$

Or $Z \in \mathcal{D}$ donc $|Z| < 1$ de sorte que $\mathrm{Im}(z) > 0$ i.e. $z \in \mathcal{P}$. On a donc prouvé que tout élément de $\mathcal{D}$ admettait un unique antécédent par f dans $\mathcal{P}$. Puisqu'on sait également que $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}$, f induit une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{D}$.

e. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Alors

$$\begin{aligned}
& z \in f^{-1}(\mathbb{U}) \\
\iff\quad & f(z) \in \mathbb{U} \\
\iff\quad & f(z)\overline{f(z)} = 1 \\
\iff\quad & \frac{iz+1}{z+i} \cdot \frac{-i\overline{z}+1}{\overline{z}-i} = 1 \\
\iff\quad & (iz+1)(-i\overline{z}+1) = (z+i)(\overline{z}-i) \\
\iff\quad & z\overline{z} + iz - i\overline{z} + 1 = z\overline{z} + i\overline{z} - iz + 1 \\
\iff\quad & z = \overline{z} \\
\iff\quad & z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ainsi $f^{-1}(\mathbb{U}) = \mathbb{R}$.

2. **a.** Soit $z \in \mathcal{P}$.

$$\mathrm{Im}(g(z)) = \frac{1}{2i}(g(z) - \overline{g(z)}) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{z - \overline{z}}{2i|z|^2} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|^2} > 0$$

donc $g(z) \in \mathcal{P}$. L'application g est par conséquent bien définie.

b. Il suffit de vérifier que g est une involution. En effet, pour tout $z \in \mathcal{P}$, $g(g(z)) = z$ donc $g \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$. Puisque g est une involution, elle est bijective.

3. **a.** Soit $z \in \mathcal{P}$. Supposons $z\sin\theta + \cos\theta = 0$. Alors $\mathrm{Im}(z\sin\theta+\cos\theta) = 0$ et donc $\sin\theta \cdot \mathrm{Im}(z) = 0$. Puisque $\mathrm{Im}(z) > 0$, $\sin\theta = 0$. Or $z\sin\theta + \cos\theta = 0$ donc $\cos\theta = 0$. On a donc $\sin\theta = \cos\theta = 0$, ce qui est absurde puisque $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Finalement $z\sin\theta + \cos\theta \neq 0$, ce qui prouve que $A_\theta(z)$ est bien défini.
Montrons maintenant que $A_\theta(z) \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(A_\theta(z)) &= \frac{1}{2i}\left(A_\theta(z) - \overline{A_\theta(z)}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta+\cos\theta} - \frac{\overline{z}\cos\theta - \sin\theta}{\overline{z}\sin\theta+\cos\theta}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\cdot\frac{(z\cos\theta-\sin\theta)(\overline{z}\sin\theta+\cos\theta)-(\overline{z}\cos\theta-\sin\theta)(z\sin\theta+\cos\theta)}{|z\sin\theta+\cos\theta|^2}\\
&= \frac{1}{2i}\cdot\frac{(z\overline{z}\cos\theta\sin\theta + z\cos^2\theta - \overline{z}\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta)-(z\overline{z}\cos\theta\sin\theta - z\sin^2\theta + \overline{z}\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta)}{|z\sin\theta+\cos\theta|^2}\\
&= \frac{1}{2i}\cdot\frac{z(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-\overline{z}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{|z\sin\theta+\cos\theta|^2}\\
&= \frac{z-\overline{z}}{2i|z\sin\theta+\cos\theta|^2} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z\sin\theta+\cos\theta|^2}
\end{aligned}$$

Or $z \in \mathcal{P}$ donc $\mathrm{Im}(z) > 0$. Ainsi $\mathrm{Im}(A_\theta(z)) > 0$ i.e. $A_\theta(z) \in \mathcal{P}$.

b. On vérifie immédiatement que $A_0(z) = z$ pour tout $z \in \mathcal{P}$. Autrement dit, $A_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$.

c. Soit $z \in \mathcal{P}$. Alors

$$\begin{aligned}
A_\theta(A_\varphi(z)) &= \frac{A_\varphi(z)\cos\theta - \sin\theta}{A_\varphi(z)\sin\theta+\cos\theta}\\
&= \frac{\frac{z\cos\varphi-\sin\varphi}{z\sin\varphi+\cos\varphi}\cdot\cos\theta - \sin\theta}{\frac{z\cos\varphi-\sin\varphi}{z\sin\varphi+\cos\varphi}\cdot\sin\theta + \cos\theta}\\
&= \frac{(z\cos\varphi-\sin\varphi)\cos\theta - (z\sin\varphi+\cos\varphi)\sin\theta}{(z\cos\varphi-\sin\varphi)\sin\theta + (z\sin\varphi+\cos\varphi)\cos\theta}\\
&= \frac{z(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) - (\sin\varphi\cos\theta+\cos\varphi\sin\theta)}{z(\cos\varphi\sin\theta+\sin\varphi\cos\theta)+\cos\varphi\cos\theta-\sin\varphi\sin\theta}\\
&= \frac{z\cos(\theta+\varphi)-\sin(\theta+\varphi)}{z\sin(\theta+\varphi)+\cos(\theta+\varphi)}\\
&= A_{\theta+\varphi}(z)
\end{aligned}$$

On en déduit que $A_\theta \circ A_\varphi = A_{\theta+\varphi}$.

d. Il suffit de remarquer

$$A_\theta \circ A_{-\theta} = A_{-\theta}\circ A_\theta = A_{\theta-\theta} = A_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$$

Ainsi A_θ est bijective et $A_\theta^{-1} = A_{-\theta}$.

Solution 3.

1. Les points A et B sont confondus *si et seulement si* $z = 1$.
Les points A et C sont confondus *si et seulement si* $z^2 = 1$ i.e. $z = 1$ ou $z = -1$.
Les points A et D sont confondus *si et seulement si* $z^3 = 1$ i.e. $z = 1$, $z = j$ ou $z = j^2$.
Les points B et C sont confondus *si et seulement si* $z^2 = z$ i.e. $z = 0$ ou $z = 1$.
Les points B et D sont confondus *si et seulement si* $z^3 = z$ i.e. $z = 0$, $z = -1$ ou $z = 1$.
Les points C et D sont confondus *si et seulement si* $z^3 = z^2$ i.e. $z = 0$ ou $z = 1$.
Ainsi les points A, B, C, D sont deux à deux distincts *si et seulement si* $z \notin \{0, 1, -1, j, j^2\}$.

2. $ABCD$ est un parallélogramme *si et seulement si* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire *si et seulement si* $z - 1 = z^2 - z^3$ ou encore $-z^3 + z^2 - z + 1 = 0$. Puisque $z \neq -1$, $-z^3+z^2-z+1 = \frac{(-z)^4-1}{-z-1} = -\frac{z^4-1}{z-1}$. Ainsi $ABCD$ est un parallélogramme *si et seulement si* $z^4 = 1$. Puisque les racines quatrièmes de l'unité sont $1, i, -1, -i$ et que $z \notin \{-1, 1\}$, $ABCD$ est un parallélogramme *si et seulement si* $z = i$ ou $z = -i$.
Si $z = i$, A, B, C, D sont les points d'affixes respectifs $1, i, -1, -i$ donc $ABCD$ est un carré.
Si $z = -i$, A, B, C, D sont les points d'affixes respectifs $1, -i, -1, i$ donc $ABCD$ est à nouveau un carré.

3. Le triangle ABC est rectangle isocèle en A *si et seulement si* $AB = AC$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. En termes d'affixes, ABC est rectangle isocèle en A *si et seulement si* $\begin{cases} |z-1| = |z^2-1| \\ \arg \dfrac{z^2-1}{z-1} \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} \left|\dfrac{z^2-1}{z-1}\right| = 1 \\ \arg \dfrac{z^2-1}{z-1} \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$. Puisque $\frac{z^2-1}{z-1} = z+1$, ceci équivaut à $\begin{cases} |z+1| = 1 \\ \arg(z+1) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$ ou encore $z+1 = \pm i$.
   Finalement, ABC est rectangle isocèle en A *si et seulement si* $z = -1 \pm i$.
4. On sait que $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$. Le triangle ABD est rectangle isocèle en A *si et seulement si* $AB = AD$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. En termes d'affixes, ABD est rectangle isocèle en A *si et seulement si* $\begin{cases} |z-1| = |z^3-1| \\ \arg \dfrac{z^3-1}{z-1} \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} \left|\dfrac{z^3-1}{z-1}\right| = 1 \\ \arg \dfrac{z^3-1}{z-1} \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$. Puisque $\frac{z^3-1}{z-1} = z^2+z+1$, ceci équivaut à $\begin{cases} |z^2+z+1| = 1 \\ \arg(z^2+z+1) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$ ou encore $z^2+z+1 = \pm i$.
   Finalement, ABC est rectangle isocèle en A *si et seulement si* z est solution d'une des deux équations (E_1) : $Z^2+Z+1+i = 0$ ou (E_2) : $Z^2+Z+1-i = 0$.
   Le discriminant de (E_1) est $-3-4i = (1-2i)^2$. Les solutions de (E_1) sont donc $\frac{-1+(1-2i)}{2} = -i$ et $\frac{-1-(1-2i)}{2} = -1+i$.
   Puisque les coefficients de l'équation (E_2) sont les conjugués de ceux de l'équation (E_1), les solutions de (E_2) sont les conjuguées de celles de l'équation (E_1), c'est-à-dire i et $-1-i$.
   Le triangle ABD est rectangle isocèle en A *si et seulement si* $z \in \{i, -i, 1+i, 1-i\}$.

SOLUTION 4.

Supposons f injective. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On sait déjà que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Montrons alors que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Soit donc $y \in f(A) \cap f(B)$. Il existe donc $(a, b) \in A \times B$ tel que $y = f(a) = f(b)$. Mais par injectivité de f, $a = b$ de sorte que $a = b \in A \cap B$. On en déduit que $y \in f(A \cap B)$. On a donc bien montré que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ puis, par double inclusion, que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
Supposons maintenant que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Posons $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$. Alors $f(A) = \{f(x_1)\}$ et $f(B) = \{f(x_2)\}$. Puisque $f(x_1) = f(x_2)$, $f(A) = f(B)$. Ainsi $f(A) \cap f(B) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\}$. En particulier, $f(A) \cap f(B)$ est non vide. Puisque $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, $f(A \cap B)$ est également non vide. Il s'ensuit que $A \cap B$ est non vide et donc que $x_1 = x_2$. Ceci prouve l'injectivité de f.

SOLUTION 5.

1. D'après l'énoncé, $f(0 + f(0)) = f(f(0)) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.
2. A nouveau d'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$f(f(n)) = f(0 + f(n)) = f(f(0)) + f(n) = f(0) + f(n) = f(n)$$
   puisque $f(0) = 0$. On a donc $f \circ f = f$.
3. Procédons par double inclusion.
   Soit $a \in \operatorname{Im} f$. Il existe donc $b \in \mathbb{N}$ tel que $a = f(b)$. Ainsi $f(a) = f(f(b)) = f(b) = a$ d'après la question précédente. Ainsi $a \in \mathcal{F}$. Ceci prouve que $\operatorname{Im} f \subset \mathcal{F}$.
   Soit $a \in \mathcal{F}$. Alors $a = f(a) \in \operatorname{Im} f$. Ceci prouve que $\mathcal{F} \subset \operatorname{Im} f$.
   Par double inclusion, $\operatorname{Im} f = \mathcal{F}$.
4. Soit $a \in \mathcal{F}$. Alors $f(a) = a$. Par conséquent
$$f(a + 1) = f(1 + f(a)) = f(f(1)) + f(a) = a + f(1) = a + 1$$
   car $f(1) = 1$ par hypothèse.
5. Puisque $f(0) = 0$, $0 \in \mathcal{F}$ et la question précédente permet de montrer par récurrence tout entier naturel appartient à $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que $\mathcal{F} = \mathbb{N}$. Ceci signifie que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ i.e. $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.