

DEVOIR SURVEILLÉ N°06

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

1. Supposons X ouvert. On sait que $X \subset \bar{X}$ donc $\overset{\circ}{X} \subset \overset{\circ}{\bar{X}} = \alpha(X)$. Comme X est ouvert, $\overset{\circ}{X} = X$ donc $X \subset \alpha(X)$.
Supposons X fermé. On sait que $\overset{\circ}{X} \subset X$ donc $\beta(X) = \bar{\overset{\circ}{X}} \subset \bar{X}$. Comme X est fermé, $\bar{X} = X$ donc $\beta(X) \subset X$.
2. Comme $\alpha(X)$ est ouvert en tant qu'intérieur, la question précédente permet d'affirmer que $\alpha(X) \subset \alpha(\alpha(X))$. Comme \bar{X} est fermé, la question précédente permet d'affirmer que $\beta(\bar{X}) \subset \bar{X}$ ou encore $\overline{\alpha(X)} \subset \bar{X}$. Par conséquent, $\overline{\alpha(X)} \subset \bar{X}$ ou encore $\alpha(\alpha(X)) \subset \alpha(X)$. Par double inclusion, $\alpha(\alpha(X)) = \alpha(X)$.
Comme $\beta(X)$ est fermé en tant qu'adhérence, la question précédente permet d'affirmer que $\beta(\beta(X)) \subset \beta(X)$. Comme $\overset{\circ}{X}$ est ouvert, la question précédente permet d'affirmer que $\overset{\circ}{X} \subset \alpha(\overset{\circ}{X})$ ou encore $\overset{\circ}{X} \subset \beta(\overset{\circ}{X})$. Par conséquent, $\overset{\circ}{X} \subset \beta(\overset{\circ}{X})$ ou encore $\beta(X) \subset \beta(\beta(X))$. Par double inclusion, $\beta(\beta(X)) = \beta(X)$.
3. On sait que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} donc $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. On sait également que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} donc $\bar{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ puis $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$.
4. Posons $X =]0, 1[\cup]1, 2[\cup \{3\} \cup ([4, 5] \cap \mathbb{Q})$. Alors, en utilisant la question précédente,

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{X} &=]0, 1[\cup]1, 2[\\ \bar{X} &= [0, 2] \cup \{3\} \cup [4, 5] \\ \alpha(X) &=]0, 2[\cup]4, 5[\\ \beta(X) &= [0, 2] \\ \alpha(\overset{\circ}{X}) &=]0, 2[\\ \beta(\bar{X}) &= [0, 2] \cup [4, 5]\end{aligned}$$

5. D'une part, $A \cap B \subset A$ donc $\overline{A \cap B} \subset \bar{A}$. D'autre part, $A \cap B \subset B$ donc $\overline{A \cap B} \subset \bar{B}$. Finalement, $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$. Prenons $A = \{0\} \cup]1, 2]$ et $B =]0, 1[$. Alors

$$\begin{aligned}A \cap \bar{B} &= (\{0\} \cup]1, 2]) \cap [0, 1] = \{0\} \\ \overline{A \cap B} &= \emptyset \\ \bar{A} \cap \bar{B} &= (\{0\} \cup [1, 2]) \cap [0, 1] = \{0, 1\}\end{aligned}$$

Avec le même exemple, A n'est pas ouvert et on a bien $A \cap \bar{B} \not\subset \overline{A \cap B}$.

Solution 2

1. Posons $M_p = \frac{1}{p} I_n$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. La suite (M_p) est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$ et converge vers la matrice nulle qui n'est pas inversible. Par caractérisation séquentielle, $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas fermé.
2. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul. Ainsi $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$. Le singleton $\{0\}$ est fermé donc $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est ouvert. Comme l'application \det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

3. Si M n'admet pas de valeurs propres strictement positives, alors $\chi_M(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On peut alors choisir $\rho > 0$ de manière arbitraire. Pour tout $\lambda \in]0, \rho[$, $\chi_M(\lambda) \neq 0$ i.e. $M - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{R})$.
 Si M admet des valeurs propres strictement positives, on note ρ la plus petite d'entre elles. A nouveau, pour tout $\lambda \in]0, \rho[$, $\chi_M(\lambda) \neq 0$ i.e. $M - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{R})$.
 Posons alors $M_p = M - \frac{\rho}{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. La suite (M_p) converge vers M et, d'après ce qui précède, est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$. Par caractérisation séquentielle, $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Comme $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une suite (A_p) de matrices inversibles convergeant vers A . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda I_n - BA_p = A_p^{-1}(\lambda I_n - A_p B)A_p$ donc $\lambda I_n - BA_p$ et $\lambda I_n - A_p B$ sont semblables : elles ont donc même déterminant i.e. $\det(\lambda I_n - BA_p) = \det(\lambda I_n - A_p B)$. Mais $\lim_{p \rightarrow +\infty} \lambda I_n - BA_p = \lambda I_n - BA$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \lambda I_n - A_p B = \lambda I_n - AB$. Comme \det est continue, on obtient par caractérisation séquentielle, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \det(\lambda I_n - BA_p) = \det(\lambda I_n - BA)$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \det(\lambda I_n - A_p B) = \det(\lambda I_n - AB)$. Par unicité de la limite, $\det(\lambda I_n - BA) = \det(\lambda I_n - AB)$ i.e. $\chi_{BA}(\lambda) = \chi_{AB}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Si on considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $AB = 0$ donc $\pi_{AB} = X$ mais $BA = B \neq 0$ donc $\pi_{BA} \neq X = \pi_{AB}$.

5. Si on pose $A = I_n$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-1} \end{array} \right)$, alors $\det(A) = 1$ et $\det(B) = -1$. Notamment, A et B appartiennent à $GL_n(\mathbb{R})$.

Si $GL_n(\mathbb{R})$ était connexe par arcs, $\det(GL_n(\mathbb{R}))$ serait un connexe par arcs de \mathbb{R} , c'est-à-dire un intervalle, car \det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mais, d'après ce qui précède, cet intervalle contiendrait -1 et 1 et donc également 0 . Ceci est absurde puisque les matrices inversibles sont de déterminants non nuls. Ainsi $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Solution 3

1. Tout d'abord, $u_n(0) = 0$ donc $\sum u_n(0)$ converge.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x^2}$ donc $\sum u_n(x)$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

La série $\sum u_n$ converge donc simplement sur \mathbb{R} .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors u_n est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{(1 + nx^2) - 2nx^2}{(1 + nx^2)^2} = \frac{1 - nx^2}{n(1 + nx^2)^2}$$

On en déduit les variations de u_n sur \mathbb{R}_+ .

| | | | |
|-----------|---|--|-----------|
| x | 0 | $\frac{1}{\sqrt{n}}$ | $+\infty$ |
| $u'_n(x)$ | | <div> <div>+</div> <div>0</div> <div>-</div> </div> | |
| $u_n(x)$ | 0 | <div> $u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ </div> | 0 |

Comme u_n est impaire et positive sur \mathbb{R}_+ ,

$$\|u_n\|_\infty = u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

On en déduit que $\sum \|u_n\|_\infty$ converge i.e. $\sum u_n$ converge normalement sur \mathbb{R} .

A fortiori, $\sum u_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} et les fonctions u_n sont toutes continues sur \mathbb{R} donc S est continue sur \mathbb{R} .

3. Les fonctions u_n sont toutes de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . On a déjà montré que $\sum u_n$ convergeait simplement sur \mathbb{R} . Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, par inégalité triangulaire,

$$|u'_n(x)| \leq \frac{1 + nx^2}{n(1 + nx^2)^2} = \frac{1}{n(1 + nx^2)} \leq \frac{1}{n(1 + na^2)}$$

Ainsi

$$\|u'_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{1}{n(1 + na^2)}$$

Comme $\frac{1}{n(1 + na^2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 a^2}$, $\sum \frac{1}{n(1 + na^2)}$ converge par comparaison à une série de Riemann puis $\sum \|u'_n\|_{\infty, [a, +\infty[}$ converge. Ainsi $\sum u'_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$. Ceci étant valable pour tout $a > 0$, S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . Mais comme S est impaire, S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Posons $\alpha_N = \frac{1}{\sqrt{N}}$. Soit $x \in]0, \alpha_N]$. Pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$0 < 1 + nx^2 \leq 1 + Nx^2 \leq 2$$

donc

$$\frac{u_n(x)}{x} \geq \frac{1}{2n}$$

Ainsi

$$\frac{S_N(x)}{x} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

Comme les u_n sont positives sur \mathbb{R}_+ ,

$$\forall x \in]0, \alpha_N], \frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_N(x)}{x} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

Mais comme les fonctions $x \mapsto \frac{S(x)}{x}$ et $x \mapsto \frac{S_N(x)}{x}$ sont impaires, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |x| \leq \alpha_N$,

$$\frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_N(x)}{x} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

On sait que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$. Fixons $M \in \mathbb{R}_+$. Il existe alors N tel que $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq M$. Mais alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $|x| \leq \alpha_N$, $\frac{S(x)}{x} \geq M$. Par définition de la limite, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{S(x)}{x} = +\infty$.

Comme $S(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x) - S(0)}{x - 0} = +\infty$. La fonction S n'est donc pas dérivable en 0. On peut cependant affirmer que la courbe de S admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

Solution 4

1. Soit $x \in J$. Puisque $x > 0$, la suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{1+nx}}$ est décroissante et de limite nulle. D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum f_n(x)$ converge. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur J .

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_{\infty, J} = \sup_{x \in J} \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série à termes positifs divergente donc $\sum \|f_n\|_{\infty, J}$ diverge également. Autrement dit, $\sum f_n$ ne converge pas normalement.

3. Comme la série $\sum f_n$ converge simplement sur J , il suffit de montrer que la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle sur J . Posons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$. D'après le critère spécial des séries alternées,

$$\forall x \in J, |R_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Ainsi

$$\|R_n\|_{\infty, J} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, J} = 0$ i.e. (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur J . Par conséquent, $\sum f_n$ converge uniformément sur J .

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0 = 1$. Comme $\sum f_n$ converge uniformément sur $J = [1, +\infty[$, on peut utiliser le théorème d'interversion série/limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n = 1$$

5. a. Il s'agit à nouveau du critère spécial des séries alternées.

b. Remarquons que

$$\forall x \in J, \varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right)$$

Remarquons que

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right| = \frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{\sqrt{1+nx} - \sqrt{nx}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{(\sqrt{1+nx} + \sqrt{nx})\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} \leq \frac{1}{2(nx)^{3/2}}$$

Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in J, \left| \varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2(nx)^{3/2}} = \frac{K}{x^{3/2}}$$

en posant $K = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. On en déduit bien que

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Solution 5

1. a. **Première méthode.** D'après le théorème du rang $\dim \text{Ker}(p) + \dim \text{Im}(p) = \dim E$. Soit $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$. Alors $p(x) = 0_E$ et il existe $a \in E$ tel que $x = p(a)$. Ainsi $p^2(a) = p(x) = 0_E$. Mais comme $p^2 = p$, $x = p(a) = p^2(a) = 0_E$. Par conséquent, $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0_E\}$. On en déduit que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.

Deuxième méthode. Comme $X \wedge (X - 1) = 1$ et $X(X - 1)$ annule p , le lemme des noyaux donne

$$E = \text{Ker}(p^2 - p) = \text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$$

Comme $(p - \text{Id}_E) \circ p = 0$, $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$. On sait de plus que $\dim E = \dim \text{Ker}(p) + \dim \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ et le théorème du rang donne $\dim E = \dim \text{Ker}(p) + \dim \text{Im}(p)$ donc $\dim \text{Ker}(p - \text{Id}_E) = \dim \text{Im}(p)$ puis $\text{Ker}(p - \text{Id}_E) = \text{Im}(p)$ grâce à l'inclusion précédente. On en déduit que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.

- b. Dans une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$, la matrice de p est $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ où $r = \text{rg}(p)$. On en déduit que $\text{tr}(p) = r = \text{rg}(p)$.

- c. Si $\text{rg}(u) = \text{tr}(u)$, u n'est pas nécessairement un projecteur. Considérons par exemple l'endomorphisme u de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il est clair que $\text{tr}(A) = \text{rg}(A) = 2$ donc $\text{tr}(u) = \text{rg}(u)$ mais

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq A \text{ donc } u^2 \neq u \text{ et } u \text{ n'est pas un projecteur.}$$

2. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\text{rg}(A) = 1$ et A est diagonale donc diagonalisable.

Posons $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\text{rg}(B) = 1$. On a clairement $\chi_B = X^3$. Si B était diagonalisable, π_B serait scindé à racines simples mais, comme π_B divise χ_B , on aurait $\pi_B = X$ puis $B = 0$, ce qui n'est pas. Ainsi B n'est pas diagonalisable.

3. a. Soit S un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E . Comme $\text{rg } u = 1$, $\dim \text{Ker } u = n - 1$ d'après le théorème du rang et $\dim S = 1$. Dans une base adaptée à la décomposition $E = \text{Ker } u \oplus S$, la matrice de u est bien de la forme voulue.

- b. On notera $m_\lambda(u)$ la multiplicité d'une valeur propre λ dans χ_u et $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ .

Remarquons que $\chi_u = X^{n-1}(X - a_n)$. Si $\text{tr}(u) = a_n = 0$, alors $\chi_u = X^n$ et u n'est pas diagonalisable $m_0(u) = n \neq n - 1 = \dim \text{Ker}(u) = \dim E_0(u)$.

Supposons que $\text{tr}(u) = a_n \neq 0$. Comme $\chi_u = X^{n-1}(X - a_n)$, $\text{Sp}(u) = \{0, a_n\}$. De plus, $m_0(u) = \dim E_0(u) = n - 1$ et $1 \leq \dim E_{a_n}(u) \leq m_{a_n}(u) = 1$ donc $\dim E_{a_n}(u) = m_{a_n}(u) = 1$. Ainsi u est diagonalisable.

Finalement, u est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}(u) \neq 0$.

- c. Puisque $\text{tr}(u) = 1 \neq 0$, u est diagonalisable d'après la question précédente. Ceci signifie que π_u est scindé à racines simples. De plus, $\chi_u = X^{n-1}(X - 1)$ donc $\text{Sp}(u) = \{0, 1\}$. On en déduit que $\pi_u = X(X - 1)$. Comme π_u annule u , $u^2 = u$ et u est un projecteur.

- d. Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A . On vérifie que $A^2 = A$ donc $u^2 = u$ et u est un projecteur. De plus, $\text{Ker } A = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\text{Im } A = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ donc u est le projecteur sur $\text{vect}((1, 1, 1))$ parallèlement à $\text{vect}((1, -1, 0), (1, 0, 1))$.

Solution 6

1. a. On vérifie que $U^2 = V^2 = I_4$ donc $u^2 = v^2 = \text{Id}$. De même, $UV = -VU$ donc $u \circ v = -v \circ u$.
- b. On trouve $\text{tr}(u) = \text{tr}(U) = \text{tr}(v) = \text{tr}(V) = 0$. De plus $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ annule u et v donc u et v sont diagonalisables et $\text{Sp}(u)$ et $\text{Sp}(v)$ sont inclus dans $\{-1, 1\}$. Comme u est diagonalisable, $1 \times \dim E_1(u) + (-1) \times \dim E_{-1}(u) = \text{tr}(u) = 0$ et $\dim E_1(u) + \dim E_{-1}(u) = 4$ donc $\dim E_1(u) = \dim E_{-1}(u) = 2$. Pour les mêmes raisons, $\dim E_1(v) = \dim E_{-1}(v) = 2$.
- c. On calcule

$$\dim E_1(U) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

donc $E_1(u) = \text{vect}(e_1, e_2)$ avec $e_1 = b_2$ et $e_2 = 3b_1 - 2b_3 - b_4$.

On pourrait vérifier par le calcul que (e_3, e_4) est bien une base de $E_{-1}(u)$. Mais plus simplement, comme $u \circ v = -v \circ u$,

$$\begin{aligned} u(e_3) &= u \circ v(e_1) = -v \circ u(e_1) = -v(e_1) = -e_3 \\ u(e_4) &= u \circ v(e_2) = -v \circ u(e_2) = -v(e_2) = -e_4 \end{aligned}$$

Ainsi e_3 et e_4 appartiennent à $E_{-1}(u)$. De plus, v est un isomorphisme en tant que symétrie donc (e_3, e_4) est libre en tant qu'image de la famille libre (e_1, e_2) par v . Comme $\dim E_{-1}(u) = 2$, (e_3, e_4) est une base de $E_{-1}(u)$.

On sait que (e_1, e_2) et (e_3, e_4) sont des bases respectives de $E_1(u)$ et $E_{-1}(u)$. Comme u est diagonalisable et $\text{Sp}(u) = \{-1, 1\}$, $E = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$. On en déduit que \mathcal{E} est une base de E . Il est alors clair que

$$\text{mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Par définition, $v(e_1) = e_3$ et $v(e_2) = e_4$. Comme $v^2 = \text{Id}$, $v(e_3) = e_1$ et $v(e_4) = e_2$ donc

$$\text{mat}_{\mathcal{E}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On sait que $\text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u)$ et que tr est linéaire. Comme $u \circ v = v \circ u$, $2 \text{tr}(u \circ v) = 0$ puis $\text{tr}(u \circ v) = 0$.
- 3.

$$\begin{aligned} \text{tr}(u) &= \text{tr}(u \circ v^2) && \text{car } v^2 = \text{Id} \\ &= \text{tr}(v \circ u \circ v) && \text{par propriété de la trace} \\ &= \text{tr}(-u \circ v \circ v) && \text{car } v \circ u = -u \circ v \\ &= -\text{tr}(u \circ v^2) && \text{par linéarité de la trace} \\ &= -\text{tr}(u) \end{aligned}$$

Ainsi $\text{tr}(u) = 0$. De la même manière, $\text{tr}(v) = 0$.

4. Comme $u^2 = \text{Id}$, $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ annule u . Comme $(X - 1) \wedge (X + 1) = 1$, on a d'après le lemme des noyaux :

$$E = \text{Ker}(u^2 - \text{Id}) = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u + \text{Id}) = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$$

Soit $x \in E$. Comme $u^2 = \text{Id}$, $\frac{1}{2}(x + u(x)) \in E_1(u)$ et $\frac{1}{2}(x - u(x)) \in E_{-1}(u)$. De plus, $x = \frac{1}{2}(x + u(x)) + \frac{1}{2}(x - u(x))$.

5. Le polynôme scindé à racines simples $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ annule u donc u est diagonalisable. Notamment, $\text{tr}(u) = \dim E_1(u) - \dim E_{-1}(u)$. Or $\text{tr}(u) = 0$ donc $\dim E_1(u) = \dim E_{-1}(u)$. Enfin, $E = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$ donc $\dim E = 2k$ avec $k = \dim E_1(u) = \dim E_{-1}(u)$. Notamment, la dimension de E est paire.

6. Soit $x \in E_1(u)$. Alors $v(x) = v \circ u(x) = -u \circ v(x)$ donc $v(x) \in E_{-1}(u)$. Ainsi $v(E_1(u)) \subset E_{-1}(u)$. Mais v est un isomorphisme donc $\dim v(E_1(u)) = \dim E_1(u)$. Or on a vu à la question précédente que $\dim E_1(u) = \dim E_{-1}(u)$. Ainsi $v(E_1(u)) \subset E_{-1}(u)$ et $\dim v(E_1(u)) = \dim E_{-1}(u)$ donc $v(E_1(u)) = E_{-1}(u)$.
On prouve de la même manière que $v(E_{-1}(u)) = E_1(u)$.
7. Notons (e_1, \dots, e_k) une base de $E_1(u)$. Posons ensuite $e_{k+i} = v(e_i)$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme v est un isomorphisme, $(e_{k+1}, \dots, e_{2k}) = (v(e_1), \dots, v(e_k))$ est une base de $v(E_1(u)) = E_{-1}(u)$. On sait également que $E = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$ donc $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{2k})$ est une base de E .
Comme (e_1, \dots, e_k) et (e_{k+1}, \dots, e_{2k}) sont des bases respectives de $E_1(u)$ et $E_{-1}(u)$,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_k \end{array} \right)$$

De plus, $v(e_i) = e_{k+i}$ et $v(e_{k+i}) = v^2(e_i) = e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donc

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(v) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_k \\ \hline I_k & 0 \end{array} \right)$$