INTERROGATION ÉCRITE N°14

NOM : Prénom : Note :

1. Soit $x_0, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer que l'application $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \mapsto \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(x_k)\mathrm{Q}(x_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

2. Montrer que le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

3. On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire usuel et on note $\mathrm{F} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + z = y + t = 0\right\}$. Déterminer des bases orthonormales de F et $\mathrm{F}^{\perp}$.

4. Justifier que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

5. Calculer la signature de la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. On justifiera sa réponse.

6. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer le déterminant $\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ sous forme *factorisée*. On précisera les opérations effectuées.