Déterminants

Exercice 1.

1. Soit (i,j) une transposition avec $(i<j)$.
   Montrer que $(i,j)=(i,i+1,\dots,j-1,j)\circ(j-1,j-2,\dots,i+1,i)$.
2. Montrer que toute permutation appartenant à $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme le produit de transpositions de la forme $(k,k+1)$.

Exercice 2.

Montrer que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme un produit de transpositions de la forme $(1,i)$ avec $i\in[\![2,n]\!]$.

Exercice 3.

Déterminer la signature de $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n-1 & n\\ n & n-1 & \dots & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Exercice 4.

Déterminer le centre de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 5.

On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $[\![1,n]\!]$ et on pose $f(\sigma)=\sum_{k=1}^n k\sigma(k)$ pour $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. Déterminer le minimum et le maximum de f sur $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 6.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, on note P_σ la matrice $(\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Montrer que l'application $P:\sigma\in\mathfrak{S}_n\mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. Que vaut ${}^tP_\sigma$?
3. Montrer que $\det(P_\sigma)=\varepsilon(\sigma)$ pour tout $\sigma\in\mathfrak{S}_n$.

Exercice 7.

Soient a et x dans $\mathbb{K}$. Calculer les déterminants suivants,

1. $\Delta_1=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}$
2. $\Delta_2=\begin{vmatrix}x & a & a\\ a & x & a\\ a & a & x\end{vmatrix}$

Exercice 8.

Soit ω une racine cubique de l'unité. Prouver avec un minimum de calcul que

$$\begin{vmatrix}1 & \omega^2 & \omega\\ \omega & 1 & \omega^2\\ \omega^2 & \omega & 1\end{vmatrix}=0$$

Exercice 9.✯

Soient $a,b,c\in\mathbb{K}$. Calculer les déterminants suivants , (on factorisera les expressions obtenues !)

1. $\begin{vmatrix}0 & a & b\\ a & 0 & c\\ b & c & 0\end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ b+c & a+c & a+b\end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix}$
5. $\begin{vmatrix}a+b & b+c & c+a\\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2\\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3\end{vmatrix}$

Exercice 10.

Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix}1 & a & b & ab\\ 1 & a' & b & a'b\\ 1 & a & b' & ab'\\ 1 & a' & b' & a'b'\end{vmatrix}$;
2. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 3\\ 1 & 3 & 6 & 6\\ 1 & 3 & 6 & 10\end{vmatrix}$;
3. $\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 0\end{vmatrix}$;
4. $\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$.

Exercice 11.

Pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on pose $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ et $\mathcal{K} = \{M(a, b),\ (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$.

1. A quelle condition un élément de $\mathcal{K}$ est-il inversible ?
2. Montrer que $\mathcal{K} \setminus \{0\}$ muni de la multiplication est un groupe.

Exercice 12.

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On se donne une base $\mathcal{B}$ de E. Pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on pose

$$f(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), x_2, \dots, x_n) + \cdots + \det(x_1, \dots, x_{n-1}, u(x_n))$$

Montrer que $f = \operatorname{tr}(u) \det_{\mathcal{B}}$.

Exercice 13.★

Calculer, pour tous x réel et n dans $\mathbb{N}^*$, le déterminant de

$$\begin{pmatrix} x & 2 & \cdots & n & 1 \\ 1 & x & & \vdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & n & \vdots \\ \vdots & \vdots & & x & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels. Calculer le déterminant de

$$(\sin(a_i + a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Exercice 15.★

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 2$. Calculer pour $k < n - 1$:

$$\begin{vmatrix} (x+1)^k & 2^k & 3^k & \cdots & n^k \\ (x+2)^k & 3^k & 4^k & \cdots & (n+1)^k \\ \vdots & & & & \vdots \\ (x+n)^k & \cdots & \cdots & \cdots & (2n-1)^k \end{vmatrix}.$$

Exercice 16.

Calculez le déterminant de la matrice $n \times n$ suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

Exercice 17.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k.$$

Calculer, pour tout $n \geqslant 1$, le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} S_1 & \cdots & & & S_1 \\ \vdots & S_2 & \cdots & & S_2 \\ & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & S_{n-1} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_{n-1} & S_n \end{vmatrix}$$

Exercice 18.

Soient a, b et c, trois nombres complexes. On considère la matrice carrée de taille n

$$A = \begin{pmatrix} c & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & c \end{pmatrix}$$

et on note J, la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. On suppose que $a \neq b$.
   - **a.** Par des opérations sur les colonnes, démontrer que $x \mapsto \det(A + xJ)$ est une fonction affine.
   - **b.** En donnant à x deux valeurs convenables, calculer $\det(A+xJ)$ pour tout $x \in \mathbb{C}$.
2. Comment calculer $\det(A)$ lorsque $a = b$?

Exercice 19.

Calculer le déterminant

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & x \end{vmatrix}.$$

Exercice 20.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & \dots & 1 \\ 1 & n & \dots & 2 \\ \vdots & & & \vdots \\ n-1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}.$$

Exercice 21.

Caculer le déterminant de la matrice $\left(\binom{n+i}{j}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant p}$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$.

Exercice 22.

Calculer le déterminant de taille $n \geqslant 2$ suivant :

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

Exercice 23.

Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 24.

Calculer le déterminant d'ordre n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

On explicitera les opérations sur les lignes et les colonnes effectuées le cas échéant.

Exercice 25.

Calculer en établissant une relation de récurrence le déterminant d'ordre n suivant.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) \\ 1 & (0) & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 26.

Calculer le déterminant de taille n

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

EXERCICE 27.

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $a_1, \dots, a_n$ des complexes et $P = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$.

Calculer $D(x) = \begin{vmatrix} \frac{P(x)}{x-a_1} & \frac{P(x)}{x-a_2} & \dots & \frac{P(x)}{x-a_n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$ pour $x \in \mathbb{C}$.

EXERCICE 28.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.. Montrer que le polynôme $P = X^n - X + 1$ admet n racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

2. On note $z_1, \dots, z_n$ les racines de P. Calculer le déterminant de la matrice $A = (1 + \delta_{ij} z_i)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

EXERCICE 29.★★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des complexes tels que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_i + b_j \neq 0$. On pose alors $D_n = \det\left(\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right)$.

1. Que peut-on dire de D_n lorsque deux des a_i ou deux des b_j sont égaux ?

2. On suppose maintenant les a_i (resp. les b_j) distincts deux à deux.
   Dans le déterminant définissant D_n, on remplace a_n par X et on note $F(X)$ le déterminant obtenu. Montrer que F est une fraction rationnelle d'indéterminée X. Que peut-on dire de son degré ?

3. Justifier que F peut s'écrire sous la forme

$$F(X) = \frac{P(X)}{\prod_{j=1}^{n}(X + b_j)}$$

   Que peut-on dire du degré de P ?

4. Déterminer $n - 1$ racines de P. En déduire une expression de D_n en fonction des a_i et des b_j.

EXERCICE 30.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

EXERCICE 31.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice carrée de taille n dont le coefficient en position (i, j) vaut $\begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et on pose $D_n = \det(A_n)$.

1. Ecrire les matrices A_3, A_4 et A_5.

2. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (D_n).

3. En déduire D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 32.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ défini par

$$P \longmapsto P + P'.$$

Calculer $\det(f)$. Que peut-on déduire ?

EXERCICE 33.

Soient E un espace vectoriel de dimension n et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de F et G. Calculer le déterminant de la projection sur F parallèlement à G et de la symétrie par rapport à F parallèlement à G en fonction des dimensions de F et G.

EXERCICE 34.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Soit p un projecteur de E. Que vaut $\det p$?

2. Soit s une symétrie de E. Que vaut $\det s$?

3. Application : On considère f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui à une matrice associe sa transposée. Que vaut $\det f$?

EXERCICE 35.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $m_A : \left\{\begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}\right.$.

1. Justifier que m_A est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\det m_A = (\det A)^2$.
3. Généraliser en dimension quelconque.

EXERCICE 36.

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit une application u_σ : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n & \longrightarrow & \mathbb{R}_n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \end{array}\right.$.

1. Montrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $u_\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
2. Pour $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, que vaut $u_\sigma \circ u_\tau$?
3. En déduire que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, u_σ est un automorphisme et que U : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ \sigma & \longmapsto & u_{\sigma^{-1}} \end{array}\right.$ est un morphisme de groupes.
4. Calculer $\det(u_\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

EXERCICE 37.

Soit f l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $\tilde{P}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tilde{P}(x) = \int_x^{x+1} P(t)\,dt$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f induit un endomorphisme f_n de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $\det(f_n)$ en fonction de n.

EXERCICE 38.

Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$, on note $A \otimes B$ la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ définie par blocs de la manière suivante : $A \otimes B = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}B & a_{12}B \\ \hline a_{21}B & a_{22}B \end{array}\right)$.

1. Soit $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^4$. Montrer que $(A \otimes B).(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.
2. Calculer $\det(I_2 \otimes B)$, $\det(A \otimes I_2)$ et $\det(A \otimes B)$ en fonction de $\det A$ et $\det B$.
3. A quelle condition nécessaire et suffisante $A \otimes B$ est-elle inversible ? Quel est alors son inverse ?

EXERCICE 39.★★

Soient $n \geqslant 1$, A, B, C et D quatre matrices réelles de taille n. Soit M la matrice réelle de taille $2n$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

On suppose que C et D commutent. Prouver que

$$\det(M) = \det(AD - CB).$$

EXERCICE 40.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 de base (e_1, e_2, e_3) et u l'endomorphisme de E défini par

$$\begin{aligned} u(e_1) &= 4e_1 + e_2 + 4e_3 \\ u(e_2) &= -2e_1 + e_2 - 4e_3 \\ u(e_3) &= -e_1 - e_2 + e_3 \end{aligned}$$

1. Écrire la matrice A de u dans la base (e_1, e_2, e_3).
2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $V(\lambda) = \det(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$. Calculer $V(\lambda)$ sous forme factorisée pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
   En déduire que V possède trois racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ telles que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Préciser $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
3. Vérifier que pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$, $\operatorname{Ker}(u - \lambda_k \operatorname{Id}_E)$ est de dimension 1 et en donner un vecteur directeur f_k.
4. Justifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de E et donner la matrice D de u dans cette base.
5. Déterminer une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Expliciter P^{-1}.
6. En déduire la matrice de u^n dans la base (e_1, e_2, e_3) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 41.

Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique réelle est toujours positif.

EXERCICE 42.

On pose, pour $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^tA.
2. On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Prouver que

$$|\det(A)| \leqslant 1.$$

EXERCICE 43.

Discuter et résoudre le système $\begin{cases} x - \lambda y + \lambda^2 z = \lambda \\ \lambda x - \lambda^2 y + \lambda z = 1 \\ \lambda x + y - \lambda^2 z = 1 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 44.

Soit $A \in GL(n, \mathbb{K})$, $n > 1$. Montrer que $\text{com}(\text{com}(A)) = \det(A)^{n-2}A$.

EXERCICE 45.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que $\det A, \det B \in \mathbb{Z}$.
2. On suppose que $\det A$ et $\det B$ sont premiers entre eux. Montrer qu'il existe deux matrices $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_n$.

EXERCICE 46.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner le rang de $\text{com}(A)$ en fonction de celui de A. On pourra distinguer les cas $\text{rg}\, A = n$, $\text{rg}\, A < n - 1$ et $\text{rg}\, A = n - 1$.

EXERCICE 47.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 48.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}\, f \oplus \text{Im}\, f$.
2. A partir de maintenant, on suppose f non nul.
   - **a.** Justifier l'existence d'un vecteur non nul u de $\text{Im}\, f$.
   - **b.** Montrer que $f^2(u) = -u$.
   - **c.** Montrer que la famille $(u, f(u))$ est libre. Que peut-on en déduire sur $\text{rg}\, f$?
3. On suppose que $\text{rg}\, f = 3$.
   - **a.** Montrer que $f^2 = -\text{Id}$. Aboutir à une contradiction en considérant le déterminant de f^2.
   - **b.** Que peut-on en conclure sur les dimensions de $\text{Im}\, f$ et $\text{Ker}\, f$?
4. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 49.

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients sont donnés par $a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. On note K la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Exprimer K^n en fonction de K.
2. En déduire deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = u_n A + v_n I_p$.
3. On note X le vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont toutes les composantes sont égales à 1. Déterminer la limite de $A^n X$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.
5. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I_p)$. Montrer que χ admet deux zéros distincts λ_1 et λ_2. Que vaut $(A - \lambda_1 I_p)(A - \lambda_2 I_p)$?