Espaces vectoriels

Solution 1

1. La loi $+$ est définie par
$$\left\{\begin{array}{rcl}(\mathbb{R}^n)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ ((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) & \longmapsto & (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\end{array}\right.$$
La loi $\cdot$ est définie par
$$\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\lambda,(x_1,\dots,x_n)) & \longmapsto & (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)\end{array}\right.$$
Le vecteur nul est le n-uplet $(0,\dots,0)$.

2. La loi $+$ est définie par
$$\left\{\begin{array}{rcl}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ (f,g) & \longmapsto & (x\in\mathbb{R}\mapsto f(x)+g(x))\end{array}\right.$$
La loi $\cdot$ est définie par
$$\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ (\lambda,f) & \longmapsto & (x\in\mathbb{R}\mapsto \lambda f(x))\end{array}\right.$$
Le vecteur nul est l'application nulle sur $\mathbb{R}$ i.e. $x\in\mathbb{R}\mapsto 0$.

3. La loi $+$ est définie par
$$\left\{\begin{array}{rcl}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ ((u_n)_{n\in\mathbb{N}},(v_n)_{n\in\mathbb{N}}) & \longmapsto & (u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{array}\right.$$
La loi $\cdot$ est définie par
$$\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (\lambda,(u_n)_{n\in\mathbb{N}}) & \longmapsto & (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{array}\right.$$
Le vecteur nul est la suite nulle i.e. $(0)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. La loi $+$ est définie par
$$\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (z_1,z_2) & \longmapsto & z_1+z_2\end{array}\right.$$
La loi $\cdot$ est définie par
$$\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R}\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\lambda,z) & \longmapsto & \lambda z\end{array}\right.$$
Le vecteur nul est le complexe nul.

Solution 2

D'abord constatons que pour tous $u,v\in\mathbb{R}_+^*$ et $\lambda\in\mathbb{R}$,
$$u\boxplus v = uv > 0 \quad\text{et}\quad \lambda\boxdot u = u^\lambda = e^{\lambda\ln(u)} > 0,$$
donc les lois interne et externe sont bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Vérifions *ensuite* les huit règles de la définition.

▶ *Commutativité* : $u\boxplus v = uv = vu = v\boxplus u$.

▶ *Associativité* :
$$u\boxplus(v\boxplus w) = u(vw) = (uv)w = (u\boxplus v)\boxplus w.$$

▶ Le vecteur nul est le nombre $1\in\mathbb{R}_+^*$.

▶ Le vecteur opposé de $u\in\mathbb{R}_+^*$ est u^{-1}.

▶ $1\boxdot u = u^1 = u$.

▶ $\lambda\boxdot(\mu\boxdot u) = \lambda\boxdot u^\mu = (u^\mu)^\lambda = u^{\mu\lambda} = u^{\lambda\mu} = (\lambda\mu)\boxdot u$.

▶ $(\lambda+\mu)\boxdot u = u^{\lambda+\mu} = u^\lambda u^\mu = u^\lambda\boxplus u^\mu = \lambda\boxdot u\boxplus\mu\boxdot u$.

▶ $\lambda\boxdot(u\boxplus v) = (uv)^\lambda = u^\lambda v^\lambda = u^\lambda\boxplus v^\lambda = \lambda\boxdot u\boxplus\lambda\boxdot v$.

Solution 3

1. Appliquons la caractérisation paramétrique des sev.

   ▶ Puisque pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$$(\lambda - 3\mu, 2\lambda + 3\mu, \lambda) = \lambda u_1 + \mu u_2$$
   où $u_1 = (1, 2, 1)$ et $u_2 = (-3, 3, 0)$, $\mathrm{F} = \mathrm{vect}(u_1, u_2)$ et il s'agit donc d'un sous-espace de E.

   ▶ De même, $\mathrm{G} = \{(x, x, z) \in \mathrm{E},\ \ (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$, ainsi $\mathrm{G} = \mathrm{vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, 1, 0)$ et $v_2 = (0, 0, 1)$, et G est un sous-espace vectoriel de E.

2. Un triplet (x, y, z) appartient à $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que
$$x = \lambda - 3\mu, \quad y = 2\lambda + 3\mu, \quad z = \lambda \ \text{ et } \ x + 2y = 0,$$
   c'est-à-dire si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$x = 6\lambda \quad y = -3\lambda, \quad z = \lambda.$$
   En posant $w = (6, -3, 1)$, l'intersection $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ est la droite $\mathrm{vect}(w)$.

Solution 4

▶ Puisque $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$, $\mathrm{vect}(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}) \subset \mathrm{vect}(\mathrm{X})$. De même, $\mathrm{vect}(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}) \subset \mathrm{vect}(\mathrm{Y})$ et donc
$$\mathrm{vect}(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}) \subset \mathrm{vect}(\mathrm{X}) \cap \mathrm{vect}(\mathrm{Y}).$$

▶ Dans le cas particulier où $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, posons respectivement $\mathrm{X} = \{(0, 1)\}$ et $\mathrm{Y} = \{(0, 2)\}$, on a $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \varnothing$ donc
$$\mathrm{vect}(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}) = \{(0, 0)\} \neq \{0\} \times \mathbb{R} = \mathrm{vect}(\mathrm{X}) \cap \mathrm{vect}(\mathrm{Y}).$$

Solution 5

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels stricts de E.

- Si $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$, alors $\mathrm{F} \cup \mathrm{G} = \mathrm{G} \neq \mathrm{E}$. De même, si $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}$, alors $\mathrm{F} \cup \mathrm{G} = \mathrm{F} \neq \mathrm{E}$.
- Supposons alors $\mathrm{F} \not\subset \mathrm{G}$ et $\mathrm{G} \not\subset \mathrm{F}$. Il existe donc $f \in \mathrm{F} \setminus \mathrm{G}$ et $g \in \mathrm{G} \setminus \mathrm{F}$. Posons $x = f + g$. Si x appartenait à F, on aurait $g = x - f \in \mathrm{F}$ et si x appartenait à G, on aurait $f = x - g \in \mathrm{G}$: on aboutit à une contradiction dans les deux cas et $x \notin \mathrm{F} \cup \mathrm{G}$.

Solution 6

1. E_1 est un sev de $\mathbb{R}^3$ car $\mathrm{E}_1 = \mathrm{vect}((1, -1, 0), (0, 0, 1))$.
2. E_2 n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$ car n'est stable par l'addition. $(0, 1, 0)$ et $(1, 0, 0)$ appartiennent à E_2 mais $(0, 1, 0) + (1, 0, 0) = (1, 1, 0) \notin \mathrm{E}_2$.
3. E_3 est un sev de $\mathbb{R}^4$ car $\mathrm{E}_3 = \mathrm{vect}((0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.
4. E_4 n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$ car ne contient pas le vecteur nul.
5. E_5 n'est pas un sev car n'est pas stable pas l'addition. $(3, -3)$ et $(0, -1)$ appartiennent à E_5 mais $(3, -3) + (0, -1) = (3, -4) \notin \mathrm{E}_2$.
6. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$x^2 + xy + y^2 = (x + y/2) + 3y^2/4 \geq 0$$
   Ainsi $\mathrm{E}_6 = \mathbb{R}^2$ est un sev de $\mathbb{R}^2$.

Solution 7

$\mathbb{R}$ contient 0 et est stable par combinaison linéaire à coefficients *réels* : c'est donc un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Mais $\mathbb{R}$ n'est évidemment pas stable par combinaison linéaire à coefficients complexes : ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Solution 8

1. La fonction nulle s'annule en 1 et toute combinaison linéaire de fonctions s'annulant en 1 s'annule également en 1. E_1 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. E_2 ne contient pas la fonction nulle : E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
3. Par exemple, $\exp \in E_3$ mais $-\exp \notin E_3$ donc E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
4. Cette fois, $-\exp \in E_4$ mais $\exp \notin E_4$ donc E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
5. $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x^3$ appartiennent à E_5 mais $h = f - g \notin E_5$ puisque $h(0) = h(1) = 0 < h(1/2) = 3/8$. Ainsi E_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
6. La fonction nulle est bien paire et si f et g sont deux fonctions paires, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$$
Donc $\lambda f + \mu g$ est paire et E_6 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
7. La fonction nulle est bien impaire et si f et g sont deux fonctions impaires, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = -\lambda f(x) - \mu g(x) = -(\lambda f + \mu g)(x)$$
Donc $\lambda f + \mu g$ est impaire et E_7 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
8. La fonction nulle est bien 2π-périodique et si f et g sont deux fonctions 2π-périodiques, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda f + \mu g)(x + 2\pi) = \lambda f(x + 2\pi) + \mu g(x + 2\pi) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$$
Donc $\lambda f + \mu g$ est 2π-périodique et E_8 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
9. Les fonctions indicatrices $\mathbb{1}\mathbb{Z}$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}\sqrt{3}}$ sont bien périodiques (de périodes respectives 1 et $\sqrt{3}$). Supposons que leur somme $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}} + \mathbb{1}_{\mathbb{Z}\sqrt{3}}$ le soit également. Alors il existerait un réel T non nul tel que $(\mathbb{1}_{\mathbb{Z}} + \mathbb{1}_{\mathbb{Z}\sqrt{3}})(T) = (\mathbb{1}_{\mathbb{Z}} + \mathbb{1}_{\mathbb{Z}\sqrt{3}})(0) = 2$. Puisque les fonctions indicatrices sont à valeurs dans $\{0, 1\}$, on aurait nécessairement $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(T) = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}\sqrt{3}}(T) = 1$ i.e. $T \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}\sqrt{3}$. Il existerait donc deux entiers non nuls p et q tels que $T = p = q\sqrt{3}$ et donc $\sqrt{3} = p/q$ serait rationnel. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}} + \mathbb{1}_{\mathbb{Z}\sqrt{3}}$ n'est donc pas périodique : E_9 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Solution 9

1. La suite nulle est convergente et une combinaison linéaire de suites convergentes l'est encore. E_1 est donc un sous-espace vectoriel de E.
2. Les suites de termes généraux $(-1)^n$ et $(-1)^{n+1}$ divergent mais leur somme est la suite nulle qui converge. E_2 n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.
3. La suite nulle est constante et une combinaison linéaire de suites constantes l'est encore. E_3 est donc un sous-espace vectoriel de E.
4. La suite nulle est bornée. Soit $(u, v, \lambda, \mu) \in E_4^2 \times \mathbb{R}^2$. Il existe des constantes réelles positives K et L telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq K$ et $|v_n| \leq L$. Alors
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda||u_n| + |\mu||v_n| \leq |\lambda|K + |\mu|L$$
La suite $\lambda u + \mu v$ est donc bornée. E_4 est bien un sous-espace vectoriel de E.
5. La suite nulle est de limite nulle et une combinaison linéaire de suites de limite nulle l'est encore. E_5 est donc un sous-espace vectoriel de E.
6. La suite nulle est évidemment dominée par la suite de terme général n^2. Soit $(u, v, \lambda, \mu) \in E_6^2 \times \mathbb{R}^2$. Les suites de termes généraux $\frac{u_n}{n^2}$ et $\frac{v_n}{n^2}$ sont donc bornées. La question précédente montre que la suite de terme général $\frac{\lambda u_n + \mu v_n}{n^2}$ est également bornée. Ainsi $\lambda u + \mu v \in E_6$ et E_6 est bien un sous-espace vectoriel de E.

7. La suite nulle n'appartient pas à E_7 donc E_7 ne peut être un sous-espace vectoriel de E.

8. Notons u et v les suites de termes généraux respectifs $\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n}$ (les termes de rang 0 étant choisis arbitrairement). u et v appartiennent bien à E_8 mais $u-v \notin E_8$. E_8 n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.

Solution 10

1. On sait que

$$(x,y,z) \in F \cap G \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

Par pivot de Gauss

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ -2y+z=0 \\ -2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Ainsi $F \cap G = \{(0,0,0)\}$ et F et G sont en somme directe.
On a

$$F = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} = \{(x,y,-x-y),(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$$

et

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+2z = x+y-z=0\} = \left\{\left(-\frac{1}{2}z, \frac{3}{2}z, z\right), z \in \mathbb{R}\right\} = \text{vect}((-1,3,2))$$

Posons $U=(1,0,-1)$, $V=(0,1,-1)$, $W=(-1,3,2)$. On a donc $F+G = \text{vect}(U,V,W)$. Soit $X=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} X \in F+G &\iff \exists(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3, X = \lambda U + \mu V + \nu W \\ &\iff \exists(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \lambda - \nu = x \\ \mu + 3\nu = y \\ -\lambda - \mu + 2\nu = z \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système admet pour unique solution $\left(\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z, -\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y-\frac{3}{4}z, \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z\right)$. Ceci prouve que $E = F+G$.

Remarque. L'unicité de la solution montre même l'unicité de la décomposition d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G : il était en fait inutile de vérifier que F et G étaient en somme directe.

2. Le projeté de $X=(x,y,z)$ sur F parallélement à G est

$$\lambda U + \mu V = \left(\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z, -\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y-\frac{3}{4}z, -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right)$$

et le projeté de $X=(x,y,z)$ sur G parallélement à F est

$$\nu W = \left(-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}y-\frac{1}{4}z, \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}y+\frac{3}{4}z, \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right)$$

Solution 11

Première version
On fait l'hypothèse de récurrence suivante

HR(n) : $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe si et seulement si

$$\forall k \in [\![2,n]\!], \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k = \{0_E\}$$

HR(1) est évidemment vraie puisque $[\![2,1]\!] = \varnothing$.
Supposons HR($n-1$) vraie pour un certain $n \in [\![2,p]\!]$.

- Supposons que $F_1, \dots, F_n$ soient en somme directe. Alors, $F_1, \dots, F_{n-1}$ sont en somme directe. D'après HR$(n-1)$

$$\forall k \in [\![2, n-1]\!],\ \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k = \{0_E\}$$

Il suffit donc de prouver que $\left(\sum_{j=1}^{n-1} F_j\right) \cap F_n = \{0_E\}$. Soit donc $x \in \left(\sum_{j=1}^{n-1} F_j\right) \cap F_n$. Alors $x \in F_n$ et il existe $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \prod_{j=1}^{n-1} F_j$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_{n-1}$. Mais alors $x_1 + \cdots + x_{n-1} - x = 0_E$ et $x_1 + \cdots + x_{n-1} - x \in \sum_{j=1}^{n} F_j$. Puisque $F_1, \dots, F_n = 0_E$, alors $x_1 = \cdots = x_{p-1} = 0_E$ et surtout $x = 0_E$. On a donc bien $\left(\sum_{j=1}^{n-1} F_j\right) \cap F_n = \{0_E\}$.

- Supposons que

$$\forall k \in [\![2, n]\!],\ \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k = \{0_E\}$$

et montrons que $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe. On a a fortiori

$$\forall k \in [\![2, n-1]\!],\ \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k = \{0_E\}$$

donc $F_1, \dots, F_{n-1}$ sont en somme directe d'après HR$(n-1)$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{j=1}^{n} F_j$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 0_E$. Alors $x_1 + \cdots + x_{n-1} = -x_n \in \left(\sum_{j=1}^{n-1} F_j\right) \cap F_n = \{0_E\}$. Ainsi $x_n = 0_E$ et $x_1 + \cdots + x_{n-1} = 0_E$. Mais comme $F_1, \dots, F_{n-1}$ sont en somme directe, $x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0_E$. Finalement $x_1 = \cdots = x_n = 0_E$ et $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe.

On a donc prouvé que HR(n) est vraie.
Par récurrence finie, HR(p) est vraie et on a le résultat demandé.

Seconde version
Supposons que $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe. Soit $k \in [\![2, p]\!]$.
Soit $x \in \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k$. Alors $x \in F_k$ et il existe $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in \prod_{j=1}^{k-1} F_j$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_{k-1}$. Ainsi $x_1 + \cdots + x_{k-1} - x = 0_E$ et $x_1 + \cdots + x_{k-1} - x \in \sum_{j=1}^{k} F_j$. Mais comme $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe, $F_1, \dots, F_k$ le sont également. Ainsi $x_1 = \cdots = x_{k-1} = 0_E$ et surtout $x = 0_E$. Ceci prouve que $\left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k = \{0_E\}$.
Supposons que

$$\forall k \in [\![2, p]\!],\ \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k = \{0_E\}$$

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^{p} F_k$ tel que $\sum_{k=1}^{p} x_k = 0_E$. On fait l'hypothèse de récurrence suivante

$$\text{HR}(k) :\ \forall j \in [\![k+1, p]\!], x_j = 0_E$$

HR(p) est vraie puisque $[\![p+1, p]\!] = \emptyset$.
Supposons HR(k) vraie pour un certain $k \in [\![1, p]\!]$. Alors $\sum_{j=1}^{k} x_k = 0_E$. Ainsi $\sum_{j=1}^{k-1} x_j = -x_k \in \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k$ donc $x_k = 0_E$ et HR$(k-1)$ est vraie.
Par récurrence descendante finie, HR(0) est vraie i.e. $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0_E$, ce qui prouve que $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe.

Solution 12

On pose $G_1 = F_1$ et pour tout $k \in [\![2, p$, on choisit un supplémentaire G_k de $(F_1 + \cdots + F_{k-1}) \cap F_k$ dans F_k (son existence est garantie puisque E est de dimension finie).
Par construction, $G_k \subset F_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.
On va maintenant montrer que $G_1 + \cdots + G_p = E$ par récurrence. On formule donc l'hypothèse de récurrence suivante

$$\text{HR}(k) : G_1 + \cdots + G_k = F_1 + \cdots + F_k$$

HR(1) est clairement vraie. Supposons HR$(k-1)$ vraie pour un certain $k \in [\![2, p]\!]$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} F_j &= \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) + F_k \\
&= \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k + G_k && \text{par définition de } G_k \\
&= \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) + G_k && \text{car } \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k \subset \sum_{j=1}^{k-1} F_j \\
&= \left(\sum_{j=1}^{k-1} G_j\right) + G_k && \text{d'après HR}(k-1) \\
&= \sum_{j=1}^{k} G_j
\end{aligned}$$

Ainsi HR(k) est vraie.
Par récurrence finie, HR(p) est vraie.
Montrons maintenant que la somme $G_1 + \cdots + G_p$ est directe. Soit $(x_1, \dots, x_p) \in G_1 \times \cdots \times G_p$ tel que $x_1 + \cdots + x_p = 0_E$. On formule l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\text{HR}(k) : \forall j \in [\![k+1, p]\!],\ x_j = 0_E$$

HR(p) est vraie puisque $[\![p+1, p]\!] = \varnothing$.
Supposons maintenant HR(k) vraie pour un certain $k \in [\![2, p]\!]$. Alors $\sum_{j=1}^{k} x_k = 0_E$. Ainsi $\sum_{j=1}^{k-1} x_j = -x_k \in \left(\sum_{j=1}^{k-1} G_j\right) \cap G_k$. Or d'après ce qui précède, $\sum_{j=1}^{k-1} G_j = \sum_{j=1}^{k-1} F_j$ donc $x_k \in \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap G_k$. Mais puisque $G_k \subset F_k$, on a également $x_k \in \left(\left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k\right) \cap G_k$. Or G_k est un supplémentaire de $\left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k$ dans F_k donc $\left(\left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k\right) \cap G_k = \{0_E\}$. Ainsi $x_k = 0_E$ et HR$(k-1)$ est vraie.
Par récurrence descendante finie, HR(1) est vraie i.e. $x_1 = \cdots = x_p = 0_E$ donc la somme $G_1 + \cdots + G_p$ est directe.

Solution 13

---

1. Tout d'abord E, F, G sont inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   Ensuite, la suite nulle appartient à chacun des ensembles E, F, G car elle est convergente, de limite nulle et constante.
   Enfin, une combinaison linéaire de suite convergentes (resp. de limite nulle, resp. constante) est convergente (resp. de limite nulle, resp. constante).
   Ainsi, E, F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Une suite constante de limite nulle est nulle donc $F \cap G = \{(0)\}$.
   Une suite de limite nulle ou constante est convergente donc F et G sont inclus dans E. Par conséquent $F + G \subset E$.
   Soit $(u_n) \in E$: (u_n) est donc une suite convergente. Notons l sa limite. Posons $v_n = u_n - l$ et $w_n = l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a clairement $(v_n) \in F$ et $(w_n) \in G$ donc $E \subset F + G$.
   Par double inclusion, $E = F + G$ puis $E = F \oplus G$ puisque $F \cap G = \{(0)\}$.

Solution 14

---

1. On peut prouver facilement que E, F, G, H sont stables par combinaison linéaire mais on peut également déterminer des parties génératrices de E, F, G, H.
   $E = \text{vect}((1)_{n\in\mathbb{N}})$ donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   $F = \text{vect}(((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}})$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   $G = \text{vect}\left(\left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Une suite constante est clairement 4-périodique donc $E \subset H$.
   Soit $(u_n) \in F$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} = u_n$ donc (u_n) est 2-périodique et a fortiori 4 périodique. Ainsi $F \subset H$.
   Soit $(u_n) \in G$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+4} = -u_{n+2} = u_n$ donc (u_n) est 4-périodique. Ainsi $G \subset H$.

3. Soit $((u_n), (v_n), (w_n)) \in E \times F \times G$ tel que $(u_n) + (v_n) + (w_n) = (0)$. On a ainsi

- $u_n + v_n + w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- $u_{n+1} + v_{n+1} + w_{n+1} = 0$ i.e. $u_n - v_n + w_{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- $u_{n+2} + v_{n+2} + w_{n+2} = 0$ i.e. $u_n + v_n - w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- $u_{n+3} + v_{n+3} + w_{n+3} = 0$ i.e. $u_n - v_n - w_{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En additionnant d'une part la première et la troisième égalité et d'autre part la seconde et la quatrième égalité, on obtient $u_n + v_n = 0$ et $u_n - v_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $u_n = w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis que $w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. E, F, G sont bien en somme directe. On aurait pu utiliser les suites engendrant E, F, G pour arriver au même résultat.
Puisque E, F, G sont inclus dans H, alors $\mathrm{E} + \mathrm{F} + \mathrm{G} \subset \mathrm{H}$. Soit maintenant $(z_n) \in \mathrm{H}$.
Analyse : On suppose qu'il existe $((u_n), (v_n), (w_n)) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F} \times \mathrm{G}$ tel que $z_n = u_n + v_n + w_n$. En particulier,

$$\begin{cases} u_0 + v_0 + w_0 = z_0 \\ u_0 - v_0 + w_1 = z_1 \\ u_0 + v_0 - w_0 = z_2 \\ u_0 - v_0 - w_1 = z_3 \end{cases}$$

On trouve aisément

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{z_0 + z_1 + z_2 + z_3}{4} \\ v_0 = \dfrac{z_0 - z_1 + z_2 - z_3}{4} \\ w_0 = \dfrac{z_0 - z_2}{2} \\ w_1 = \dfrac{z_1 - z_3}{2} \end{cases}$$

Synthèse : Soit

- (u_n) la suite constante égale à $\frac{z_0+z_1+z_2+z_3}{4}$
- (v_n) la suite de premier terme $v_0 = \frac{z_0-z_1+z_2-z_3}{4}$ et vérifiant $v_{n+1} + v_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- (w_n) la suite de premiers termes $w_0 = \frac{z_0-z_2}{2}$ et $w_1 = \frac{z_1-z_3}{2}$ vérifiant $w_{n+2} + w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On vérifie alors que

$$\begin{cases} u_0 + v_0 + w_0 = z_0 \\ u_1 + v_1 + w_1 = z_1 \\ u_2 + v_2 + w_2 = z_2 \\ u_3 + v_3 + w_3 = z_3 \end{cases}$$

Puisque $(u_n), (v_n), (w_n)$ et (z_n) sont 4-périodiques, on peut affirmer que $u_n+v_n+w_n = z_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ i.e. $(z_n) = (u_n)+(v_n)+(w_n)$.
Ainsi $\mathrm{H} \subset \mathrm{E} + \mathrm{F} + \mathrm{G}$.
Par double inclusion, $\mathrm{E} + \mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{H}$ et E, F, G étant en somme directe, $\mathrm{E} \oplus \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{H}$.

Solution 15

---

1. On a $\mathrm{G} = \mathrm{vect}(\bar{1})$ où $\bar{1}$ désigne la fonction constante égale à 1 donc G est un sous-espace vectoriel de E.
Clairement, la fonction nulle appartient à F. Soient $(f, g) \in \mathrm{F}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$(\lambda f + \mu g)(0) + (\lambda f + \mu g)(1) = \lambda(f(0) + f(1)) + \mu(g(0) + g(1)) = 0$$

donc $\lambda f + \mu g \in \mathrm{F}$. Ainsi F est un sous-espaces vectoriel de E.

2. Soit $f \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. Puisque $f \in \mathrm{G}$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(0) + f(1) = 2c$. Or $f \in \mathrm{F}$ donc $f(0) + f(1) = 0$ d'où $c = 0$. Ainsi f est nulle et $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{\bar{0}\}$.
Soit maintenant $h \in \mathrm{E}$. Notons g la fonction constante égale à $\frac{h(0)+h(1)}{2}$ et $f = g - h$. On a bien $h = f + g$, $g \in \mathrm{G}$ et

$$f(0) + f(1) = \frac{h(0) + h(1)}{2} - h(0) + \frac{h(0) + h(1)}{2} - h(1) = 0$$

donc $f \in \mathrm{F}$. Il s'ensuit que $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$.
Comme F et G sont en somme directe, $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Solution 16

1. Puisque toutes les solutions de $(\mathcal{E})$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\mathrm{E} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La fonction nulle est clairement solution de $(\mathcal{E})$ donc appartient à E. Soient $(y_1, y_2) \in \mathrm{E}^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors
$$(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)''' - (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1(y_1''' - y_1) + \lambda_2(y_2''' - y_2) = 0$$
donc $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in \mathrm{E}$.
E est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2. Soit $y \in \mathrm{F}$. Alors $y'' + y' + y = 0$. Puisque y est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on obtient en dérivant la relation précédente, $y''' + y'' + y' = 0$. En soustrayant ces deux relations, on obtient $y''' - y = 0$ de sorte que $y \in \mathrm{E}$. Ainsi $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.
Soit $y \in \mathrm{G}$. Alors $y' = y$. En dérivant, on obtient $y'' = y' = y$. En dérivant à nouveau, on obtient $y''' = y' = y$. Ainsi $y \in \mathrm{E}$. Finalement, $\mathrm{G} \subset \mathrm{E}$.

3. Le polynôme caractéristique associé à $(\mathcal{F})$ est $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$ dont les racines sont $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de $(\mathcal{F})$ sont donc les fontions
$$t \mapsto \left(\lambda \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} + \mu \sin \frac{t\sqrt{3}}{2}\right) e^{-\frac{t}{2}} \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$
En posant $f_1 : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{t\sqrt{3}}{2}$ et $f_2 : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{t\sqrt{3}}{2}$, on a donc $\mathrm{F} = \mathrm{vect}(f_1, f_2)$ de sorte que (f_1, f_2) est une famille génératrice de F.
Les solutions de $(\mathcal{G})$ sont les fonctions $t \mapsto \nu e^t$ avec $\nu \in \mathbb{R}$. Ainsi $\mathrm{G} = \mathrm{vect}(f_3)$ en posant $f_3 : t \mapsto e^t$. Ainsi (f_3) est une famille génératrice de G.

4. **a.** Puisque $y \in \mathrm{E}$, $y''' = y$ et donc $y^{(4)} = y'$. Ainsi
$$\begin{aligned} y_1'' + y_1' + y_1 &= (2y - y' - y'')'' + (2y - y' - y'')' + (2y - y' - y'') \\ &= (2y'' - y''' - y^{(4)}) + (2y' - y'' - y''') + (2y - y' - y'') \\ &= (2y'' - y - y') + (2y' - y'' - y) + (2y - y' - y'') = 0 \end{aligned}$$
donc $y_1 \in \mathrm{F}$. De plus
$$y_2' = (y + y' + y'')' = y' + y'' + y''' = y' + y'' + y = y_2$$
donc $y_2 \in \mathrm{G}$.

   b. Soit $y \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. Puisque $y \in \mathrm{G}$, $y' = y$ donc $y'' = y' = y$. Or $y'' + y' + y = 0$ car $y \in \mathrm{F}$ donc $3y = 0$ puis $y = 0$. Finalement $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$.
Puisque $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{G} \subset \mathrm{E}$, $\mathrm{F} + \mathrm{G} \subset \mathrm{E}$. Soit maintenant $y \in \mathrm{E}$. Posons $y_1 = 2y - y' - y''$ et $y_2 = y + y' + y''$. On a vu que $y_1 \in \mathrm{F}$ et $y_2 \in \mathrm{G}$. Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels, $\frac{1}{3}y_1 \in \mathrm{F}$ et $\frac{1}{3}y_2 \in \mathrm{G}$. Puisque $y = \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2$, $y \in \mathrm{F} + \mathrm{G}$. Ainsi $\mathrm{E} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$. Par double inclusion, $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$.
Mais puisque $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$, $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. Ainsi F et G sont supplémentaires dans E.

5. On déduit de la question précédente que
$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{vect}(f_1, f_2) + \mathrm{vect}(f_3) = \mathrm{vect}(f_1, f_2, f_3)$$
Autrement dit, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les combinaisons linéaires de f_1, f_2 et f_3, c'est-à-dire les fonctions
$$t \mapsto \left(\lambda \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} + \mu \sin \frac{t\sqrt{3}}{2}\right) e^{-\frac{t}{2}} + \nu e^t \text{ avec } (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$$

Solution 17

1. On a $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} \subset \mathrm{F} = \mathrm{F} + \{0\} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$ car, en tant que sev de E, G contient 0.

2. On a $\mathrm{F} = \mathrm{F} + \{0\} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$ et $\mathrm{G} = \{0\} + \mathrm{G} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$ car tout sev de E contient 0. On a donc aussi $\mathrm{F} \cup \mathrm{G} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$.

3. On a $F = F + \{0\} \subset F + G$ car, en tant que sev de E, G contient 0.

4. On a $F = F + \{0\} \subset F + F$ car, en tant que sev de E, F contient 0. Réciproquement, F étant stable par combinaison linéaire, $F + F \subset F$. On a donc $F = F + F$.

5. Comme $F \cap G \subset F$, on a $F \cup (F \cap G) = F$ donc, d'après le **3.**, $F \cup (F \cap G) \subset F + G$.

6. Comme l'addition d'un ev est toujours commutative, on a clairement $F + G = G + F$.

Solution 18

---

1. Raisonnons en deux temps.

▶ Supposons que $F + G = F$. Comme $0 \in F$ (car F est un sev de E), on a $G = \{0\} + G \subset F + G = F$.

▶ Réciproquement, supposons que $G \subset F$. On a alors $F + G \subset F + F = F$.

2. Cette application est fausse ! Par exemple, si $E = \mathbb{R}^2$ et que F, G et H sont des droites vectorielles distinctes de E, on a $F+G = F+H = E$ mais H et G ne pas comparables par la relation d'inclusion :on n'a ni $G \subset H$, ni $H \subset G$.

Solution 19

Il suffit de prouver que $G \subset F$. Soit $g \in G$. Puisque $0 \in H$, il existe $f \in H$ et $h \in H$ tel que $g = f + h$. On a donc $h = g - f \in G$ et $h \in H$, ainsi $h \in G \cap H = F \cap G$ d'où $h \in F$ puis $g = f + h \in F$. On a donc prouvé que $G \subset F$.

Solution 20

---

1. P et I sont deux ensembles non vides de E (ils contiennent tous deux la fonction nulle) et clairement stables par combinaison linéaire : ce sont deux sous-espaces vectoriels de E.

▶ Puisque que la seule fonction paire et impaire est la fonction nulle, $P \cap I = \{0\}$.

▶ Soit $f \in E$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

On a clairement $f = f_p + f_i$, $f_p \in P$ et $f_i \in I$ donc $E \subset P \oplus I$ et puisque l'inclusion réciproque est banale, $E = I \oplus P$.

Remarque. Les formules de f_p et f_i s'obtiennent naturellement par Analyse-synthèse.

2. Il est clair que le cosinus est de partie impaire nulle et le sinus de partie paire nulle. D'après les formules précédentes, les parties paires et impaires de l'exponentielle valent respectivement ,

$$x \mapsto \text{ch}(x) \quad \text{et} \quad x \mapsto \text{sh}(x).$$

Il est immédiat que les parties paires et impaires de la fonction $x \mapsto x^4 + x$ valent respectivement

$$x \mapsto x^4 \quad \text{et} \quad x \mapsto x.$$

Solution 21

---

1. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ sont deux ensembles non vides de E (ils contiennent tous deux la fonction nulle) et clairement stables par combinaison linéaire : ce sont deux sous-espaces vectoriels de E.

▶ Puisque que la seule fonction constante sur $[0, 1]$ s'annulant en 1 est la fonction nulle, $\mathcal{C} \cap \mathcal{A} = \{0\}$.

▶ Soit $f \in E$. Pour tout $x \in [0, 1]$, posons

$$c(x) = f(1) \quad \text{et} \quad a(x) = f(x) - f(1).$$

On a clairement $f = a + c$, $a \in \mathcal{A}$ et $c \in \mathcal{C}$ donc $E \subset \mathcal{C} \oplus \mathcal{A}$ et puisque l'inclusion réciproque est banale, $E = \mathcal{C} \oplus \mathcal{A}$.

Remarque. Les formules de c et a s'obtiennent naturellement par Analyse-synthèse.

2. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{N}$ sont deux ensembles non vides de E (ils contiennent tous deux la fonction nulle) et clairement stables par combinaison linéaire : ce sont deux sous-espaces vectoriels de E.

▶ Puisque que la seule fonction constante sur $[0,1]$ d'intégrale nulle sur ce segment est la fonction nulle, $\mathcal{C} \cap \mathcal{N} = \{0\}$.

▶ Soit $f \in \mathrm{E}$. Pour tout $x \in [0,1]$, posons

$$c(x) = \int_0^1 f(t)dt \text{ et } n(x) = f(x) - \int_0^1 f(t)dt.$$

On a clairement $f = n + c$, $n \in \mathcal{N}$ et $c \in \mathcal{C}$ donc $\mathrm{E} \subset \mathcal{C} \oplus \mathcal{N}$ et puisque l'inclusion réciproque est triviale, $\mathrm{E} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{N}$.

Remarque. Les formules de c et a s'obtiennent naturellement par Analyse-synthèse.

3. Il suffit de reprendre les calculs précédents ;la projection de $f \in \mathrm{E}$ sur $\mathcal{C}$ parallèlement à $\mathcal{A}$ est

$$x \mapsto f(1).$$

la projection de $f \in \mathrm{E}$ sur $\mathcal{C}$ parallèlement à $\mathcal{N}$ est

$$x \mapsto \int_0^1 f(t)dt.$$

4. Rappelons encore une fois qu'en toute généralité un sous-espace F strict d'un espace vectoriel E (ie $\mathrm{F} \neq \mathrm{E}$) admet une infinité de supplémentaires. Par exemple, dans cet exercice, on a prouvé que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{A}$ sont des supplémentaires de $\mathcal{C}$ dans E. On trouver une infinité de supplémentaires de $\mathcal{C}$ dans E : les sous-espaces $\mathcal{N}_u$ et $\mathcal{A}_u$ définis par tout $u \in]0,u]$ par

$$\mathcal{N}_u = \left\{ f \in \mathrm{E} \;\middle|\; \int_0^u f(t)dt = 0 \right\}$$

et

$$\mathcal{A}_u = \{ f \in \mathrm{E} \mid f(u) = 0 \}.$$

Solution 22

1. On a $\mathrm{X} \in \mathrm{F}$ si et seulement si $\exists\, x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathrm{X} = (x, y, x+y) = x(1,0,1) + y(0,1,1).$$

Ainsi $\mathrm{F} = \mathrm{vect}((1,0,1),(0,1,1))$ et F est un sous-espace vectoriel de E. De même, un vecteur X appartient à G si et seulement si $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathrm{X} = (a-b, a+b, a-3b) = a(1,1,1) + b(-1,1,-3).$$

Ainsi $\mathrm{G} = \mathrm{vect}((1,1,1),(-1,1,-3))$ et G est un sous-espace vectoriel de E.

2. Un vecteur X appartient à $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ si et seulement si il est de la forme $\mathrm{X} = (a-b, a+b, a-3b)$ où a et b sont deux nombres réels vérifiant

$$(a-b) + (a+b) - (a-3b) = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a = -3b.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{F} \cap \mathrm{G} &= \{(-4b, -2b, -6b) \mid b \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{vect}((-4,-2,-6)) = \mathrm{vect}((2,1,3)) \end{aligned}$$

3. Puisque $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} \neq \{0\}$, la somme $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ n'est pas directe.

Solution 23

1. Puisque les intersections et les sommes de sev de E sont des sev de E, F et G sont des sev de E. Il reste à vérifier que $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$ et $\mathrm{G} \subset \mathrm{H}$.

▶ Comme $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{C} \subset \mathrm{A}$, on a
$$\mathrm{F} \subset \mathrm{A} + \mathrm{A} = \mathrm{A}.$$
De plus, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{C} \subset \mathrm{C}$ et donc
$$\mathrm{F} \subset \mathrm{B} + \mathrm{C}$$
et ainsi $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = \mathrm{H}$.

▶ Comme $\mathrm{A} \cap \mathrm{C} \subset \mathrm{C}$, on a
$$\mathrm{B} + (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) \subset \mathrm{B} + \mathrm{C}$$
et donc
$$\mathrm{G} = \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} + (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})) \subset \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = \mathrm{H}.$$

2. Procédons par double inclusion.

▶ Comme $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{C} \subset \mathrm{A}$, on a
$$\mathrm{F} \subset \mathrm{A} + \mathrm{A} = \mathrm{A}$$
mias aussi
$$\mathrm{F} \subset \mathrm{B} + (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}).$$
Ainsi $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} + (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})) = \mathrm{G}$.

▶ Soit $u \in \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} + (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}))$: il existe $a \in \mathrm{A}$, $b \in \mathrm{B}$ et $a' \in \mathrm{A} \cap \mathrm{C}$ tels que
$$u = a = b + a'.$$
On a donc $b = a - a' \in \mathrm{A}$ en tant que somme de deux vecteurs du sev A de E. Comme $b \in \mathrm{B}$, on a
$$u = b + a' \in (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}).$$

3. Non ! Par exemple, lorsque $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ et F, G, H sont des droites vectorielles deux à deux distinctes de E, on a :
$$\mathrm{F} = \mathrm{G} = \{0\} \text{ mais } \mathrm{H} = \mathrm{A} \neq \{0\}.$$

Solution 24

Raisonnons par double inclusion.

▶ Comme
$$\mathrm{F} \subset \mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{F}') \text{ et } \mathrm{F} \subset \mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{G}'),$$
on a
$$\mathrm{F} \subset (\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{F}')) \cap (\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{G}')).$$

▶ *Réciproquement*, soit
$$u \in (\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{F}')) \cap (\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{G}')).$$
Il existe alors f_1, f_2 dans F, $f' \in \mathrm{G} \cap \mathrm{F}'$ et $g \in \mathrm{G} \cap \mathrm{G}'$ tels que
$$u = f_1 + f' = f_2 + g.$$
On a donc
$$f' - g = f_2 - f_1 \in \mathrm{F}$$
mais aussi $f' - g \in \mathrm{G}$ en tant que somme de deux vecteurs du sev G de E. On a donc
$$f' - g \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \mathrm{F}' \cap \mathrm{G}' \subset \mathrm{G}'$$
d'où $f' \in \mathrm{G}'$ en tant que somme de deux vecteurs du sev G′ de E. On a donc
$$f' \in \mathrm{F}' \cap \mathrm{G}' = \mathrm{F} \cap \mathrm{G} \subset \mathrm{F}$$

et ainsi :

$$u = f_1 + f' \in \mathrm{F}$$

en tant que somme de deux vecteurs du sev F de E. On a donc prouvé que

$$(\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{F}')) \cap (\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{G}')) \subset \mathrm{F}.$$

Solution 25

1. $\mathcal{N}$ et $\mathcal{A}$ sont deux ensembles non vides de E (ils contiennent tous deux la fonction nulle) et clairement stables par combinaison linéaire : ce sont deux sous-espaces vectoriels de E.

2. En avant !

   ▶ Soit $f \in \mathcal{A} \cap \mathcal{N}$; f appartient à $\mathcal{A}$ il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b.$$

   Puisque $f \in \mathcal{N}$, $a = f'(0) = 0$ et $b = f(0) = 0$. Donc $f = 0$.

   ▶ Soit $f \in \mathrm{E}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons

   $$a(x) = f'(0)x + f(0)$$

   et

   $$n(x) = f(x) - a(x).$$

   On a clairement $f = a + n$, $a \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathcal{N}$: en effet $n'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$ et $n(0) = f(0) - f(0) = 0$. Ainsi $\mathrm{E} \subset \mathcal{N} \oplus \mathcal{A}$ et , puisque l'inclusion réciproque est triviale , $\mathrm{E} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{A}$.

   Remarque. Les formules de a et n s'obtiennent naturellement par Analyse-synthèse.

3. D'après les calculs précédents , la projection d'une fonction f sur $\mathcal{A}$ parallèlement à $\mathcal{N}$ vaut

   $$x \in \mathbb{R} \mapsto f'(0)x + f(0).$$

Solution 26

On peut répondre aux deux questions à la fois. Un vecteur (x, y, z) est combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F}$ si et seulement si le système suivant admet une solution.

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma = x \\ -2\alpha - 3\beta + 3\gamma = y \\ \alpha + \beta - 2\gamma = z \end{cases}$$

Méthode du pivot de Gauss…

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & x \\ -2 & -3 & 3 & y \\ 1 & 1 & -2 & z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y+2x \\ 0 & -1 & -1 & z-x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y+2x \\ 0 & 0 & 0 & x+y+z \end{pmatrix}$$

Le système admet donc une solution si et seulement si $x + y + z = 0$. Ainsi $(2, 5, -7)$ est combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F}$ tandis que $(2, 1, 3)$ ne l'est pas.

Solution 27

Raisonnons par double inclusion.

▶ Soit $0 \leqslant k \leqslant n$. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f_k(x) = \cos^k(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^k \\
&= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{\ell} e^{(2k-\ell)ix} \\
&= \operatorname{Re}\left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} e^{(2\ell-k)ix}\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{l} g_{2\ell-k}(x)
\end{aligned}$$

Les fonctions g_ℓ étant paires , on a

$$f_k \in \operatorname{vect}(g_0, \dots, g_n)$$

d'où

$$\operatorname{vect}(f_0, \dots, f_n) \subset \operatorname{vect}(g_0, \dots, g_n).$$

▶ *Réciproquement*, soit $0 \leqslant k \leqslant n$. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
g_k(x) = \cos(kx) &= \operatorname{Re}\left(e^{ikx}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left[\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)^k\right] \\
&\operatorname{Re}\left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \sin^\ell(x) i^\ell \cos^{\ell-k}(x)\right)
\end{aligned}$$

d'où ,

$$\begin{aligned}
g_k(x) = \sum_{0\leqslant 2\ell \leqslant k} \binom{k}{2\ell} (-1)^\ell \dots \\
\dots \left(1-\cos^2(x)\right)^\ell \cos^{k-2\ell}(x).
\end{aligned}$$

On remarque alors qu'en posant $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{0\leqslant 2\ell \leqslant k} \binom{k}{2\ell} (-1)^\ell \left(1-x^2\right)^\ell x^{k-2\ell}$$

P est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à n telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(kx) = \mathrm{P}\big(\cos(x)\big).$$

On a montré que

$$g_k \in \operatorname{vect}(f_0, \dots, f_n)$$

d'où

$$\operatorname{vect}(g_0, \dots, g_n) \subset \operatorname{vect}(f_0, \dots, f_n).$$

Remarque. Les lecteurs cultivés auront reconnu les polynômes de Tchebychev et leur problématique inverse, à savoir la linéarisation.

Solution 28

Puisque (u, v) est libre , $w = (1, 1, 2) \in \operatorname{vect}(u, v)$ si et seulement si (u, v, w) est liée. Appliquons la méthode du pivot de Gauss. Notons S le système (u, v, w).

$$\mathrm{S} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1$$

$$S \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2a-1 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$$

S est donc de rang inférieur ou égal à 2 si et seulement si $a = 1/2$. Ainsi $w \in \text{vect}(u, v)$ si et seulement si $a = 1/2$.

Solution 29

Notons à chaque fois E l'espace vectoriel en question.

1. $$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\right\} = \left\{(-y - z, y, z),\ (y, z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \text{vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$$

2. Les racines du polynôme caractéristique $X^2 + 2X + 2$ sont $-1 \pm i$ de sorte que les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$ sont les fonctions $t \mapsto (\lambda \cos t + \mu \sin t)e^{-t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi

$$E = \text{vect}(t \mapsto \cos(t)e^{-t}, t \mapsto \sin(t)e^{-t})$$

3. Les racines du polynôme caractéristique $X^2 + 2X + 2$ sont $-1 \pm i$ de sorte que les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$

Solution 30

Montrons que $c \in \text{vect}(a, b)$. On résout le système résultant de l'équation $a = \lambda b + \mu b$ d'inconnue $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On montre qu'il existe une solution, à savoir $(\lambda, \mu) = (2, -1)$. De même on montre que $d \in \text{vect}(a, b)$. Comme $\text{vect}(a, b)$ est un sous-espace vectoriel, il est stable par commbinaison linéaire donc $\text{vect}(c, d) \subset \text{vect}(a, b)$.
La même méthode permet de montrer l'inclusion réciproque.
Remarque. On peut également remarquer que $\dim \text{vect}(a, b) = \dim \text{vect}(c, d) = 2$ puisque les vecteurs a et b d'une part, et c et d d'autre part, sont colinéaires. A ce moment, une seule des deux inclusions suffit.