Devoir à la maison n°07

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Partie I – Etude d'une fonction

1. Puisque $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Puisque cos est continue en 0, $\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$.
Par opérations, $\lim_0 g = 1$.

2. On sait que $\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x^2)$ donc $\frac{\sin x}{x} = 1 + o(x)$. Par ailleurs $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x)$ donc $2 - \cos x = 1 + o(x)$.
On en déduit que $g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x)$.

3. Finalement,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{=} o(1)$$

Ainsi, $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$ donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

4. On calcule la dérivée d'un quotient. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g'(x) = \frac{x\cos x(2 - \cos x) - \sin x(2 - \cos x + x\sin x)}{x^2(2 - \cos x)^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2(2 - \cos x)^2}$$

5. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = -2x\sin x - 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x) - 1 - 2x\sin x$$

Or $x \mapsto \cos(2x) - 1$ est clairement négative sur $[0, \pi]$ et ne s'annule qu'en 0 et π sur cet intervalle. De même, $x \mapsto -2x\sin x$ est clairement négative sur $[0, \pi]$ et ne s'annule également qu'en 0 et π sur cet intervalle. Par conséquent, φ est négative sur $[0, \pi]$ et ne s'annule qu'en 0 et π sur cet intervalle.
On en déduit que φ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.
Puisque $\varphi(0) = 0$, φ est négative sur $[0, \pi]$ et ne s'annule qu'en 0 sur cet intervalle.

6. On rappelle que $g'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2(2-\cos(x))^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. D'après ce qui précède, g' est négative sur $[0, \pi]$ et ne s'annule qu'en 0 sur cet intervalle.
On en déduit que g est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

7. g est clairement continue sur $]0, \pi]$ et continue en 0 par définition. Ainsi elle est continue sur $[0, \pi]$. Comme g est par ailleurs strictement décroissante sur $[0, \pi]$, le théorème de la bijection permet d'affirmer que g induit une bijection de $[0, \pi]$ sur $\mathrm{I} = [g(\pi), g(0)] = [0, 1]$.

Partie II – Etude d'une suite

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que g induit une bijection de $[0, \pi]$ sur $[0, 1]$. Puisque $\frac{1}{n} \in [0, 1]$, $\frac{1}{n}$ admet un unique antécédent par g dans $[0, 1]$.
Autrement dit, l'équation $g(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution sur $[0, \pi]$.

9. Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = h(1/n)$. Comme g est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, h est également strictement décroissante sur $[0, 1]$. Par ailleurs, la suite de terme général $1/n$ est strictement décroissante et à valeurs dans $[0, 1]$.
Il s'ensuit que la suite (x_n) est strictement croissante.

10. Puisque g est continue sur $[0, \pi]$, h est également continue sur $[0, 1]$. Notamment, h est continue en 0. Puisque $\lim_{n\to+\infty} 1/n = 0$ et $x_n = h(1/n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = h(0)$$

Or $g(\pi) = 0$ donc $h(0) = \pi$.
Ainsi (x_n) converge vers π.

11. Posons $u_n = x_n - \pi$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\frac{1}{n} = g(x_n) = g(u_n + \pi) = -\frac{\sin u_n}{(\pi + u_n)(2 + \cos u_n)}$$

Puisque (u_n) converge vers 0,

$$\sin u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad \pi + u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi \qquad 2 + \cos u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3$$

Finalement, $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n}{3\pi}$. Ainsi

$$x_n - \pi = u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3\pi}{n}$$

Partie III – Développement asymptotique

12. Tout d'abord

$$g(\pi + u) = -\frac{\sin u}{(\pi + u)(2 + \cos u)}$$

Or $\sin u \underset{u\to 0}{=} u(1 + o(u))$ et $2 + \cos u = 3 + o(u)$ donc

$$\begin{aligned}
g(\pi + u) &\underset{u\to 0}{=} -u \cdot \frac{1 + o(u)}{(\pi + u)(3 + o(u))} \\
&\underset{u\to 0}{=} -u \cdot \frac{1 + o(u)}{3\pi + 3u + o(u)} \\
&\underset{u\to 0}{=} -u \cdot \frac{1 + o(u)}{3\pi(1 + u/\pi + o(u))} \\
&\underset{u\to 0}{=} -\frac{u}{3\pi}(1 + o(u))\left(1 - \frac{u}{\pi} + o(u)\right) \\
&\underset{u\to 0}{=} -\frac{u}{3\pi}\left(1 - \frac{u}{\pi} + o(u)\right) \\
&\underset{u\to 0}{=} -\frac{u}{3\pi} + \frac{u^2}{3\pi^2} + o(u^2)
\end{aligned}$$

13. On admet que h admet un développement limité à l'ordre 2 en 0. Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$h(t) \underset{t\to 0}{=} a + bt + ct^2 + o(t^2)$$

Posons $t = g(\pi + u)$, alors $t \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$ et la question précédente montre que

$$t \underset{u\to 0}{=} -\frac{u}{3\pi} + \frac{u^2}{3\pi^2} + o(u^2) \qquad t^2 \underset{u\to 0}{=} \frac{u^2}{9\pi^2} + o(u^2)$$

Or, pour $u \in [-\pi, 0]$, $h \circ g(\pi + u) = \pi + u$. Ainsi

$$\pi + u \underset{u\to 0}{=} a - \frac{b}{3\pi}u + \frac{3b + c}{9\pi^2}u^2 + o(u^2)$$

Par unicité du développement limité,

$$a = \pi \qquad -\frac{b}{3\pi} = 1 \qquad \frac{3b+c}{9\pi^2} = 0$$

On en déduit que

$$a = \pi \qquad b = -3\pi \qquad c = 9\pi$$

Finalement,

$$h(t) \underset{t\to 0}{=} \pi - 3\pi t + 9\pi t^2 + o(t^2)$$

14. Puisque $\lim_{n\to+\infty} 1/n = 0$,

$$x_n = h(1/n) \underset{n\to+\infty}{=} \pi - \frac{3\pi}{n} + \frac{9\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$