Interrogation écrite n°04

NOM : Prénom : Note :

---

1. Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation $2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0$.

   Soit $: x \in \mathbb{R} \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$. f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-19	$\nearrow$	$+\infty$

   Comme f est continue et strictement monotone sur chacun des intervalles $]-\infty, -1]$, $[-1, 2]$ et $[2, +\infty[$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones permet d'affirmer que f s'annule exactement trois fois sur $\mathbb{R}$. L'équation $2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0$ admet donc exactement trois solutions.

2. Montrer que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \ln(e^x + 1) - x$ induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble à déterminer.

   $x \mapsto e^x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]1, +\infty[$ et ln est dérivable sur $]1, +\infty[$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition. De plus,

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - 1 = -\frac{1}{e^x + 1} < 0$$

   Ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{-\infty} \exp = 0$, $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$. De plus,

   $$f(x) = \ln(e^x(1 + e^{-x})) - x = \ln(1 + e^{-x})$$

   donc $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. Comme f est également continue sur $\mathbb{R}$, elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après le théorème de la bijection.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x+1$.

   On introduit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - x - 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$. Ainsi f' est-elle négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet donc un minimum en 0. Or $f(0) = 0$ donc f est bien positive sur $\mathbb{R}$, ce qui fournit le résultat attendu.

4. Déterminer le minimum et le maximum éventuels de la fonction $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = x(2\ln(x)+1)$. Ainsi f' est-elle négative sur $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$ et positive sur $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$. La fonction f est donc décroissante sur $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$ et croissante sur $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$. Elle admet donc un minimum en $e^{-\frac{1}{2}}$ est celui-ci vaut $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}$. Enfin, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ par opérations donc f n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Etudier la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (variations et limites).

   Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Comme ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est également dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Enfin, exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}}$$

   Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées, $\lim\limits_{+\infty} f = 1$. Enfin, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ par opérations donc $\lim\limits_{0^+} f = 0$. On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
Variations de f	$\Vert$ 0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1