# Devoir à la maison n° 1 : corrigé

## Problème 1 — D'après Baccalauréat S 1996 Japon

### Partie I – Position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

**1.** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \ln x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$. $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - x - 1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}$$

**2.** On trouve sans difficulté $\varphi(1) = 0$. La question précédente montre que $\varphi'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ donc que $\varphi$ est décroissante sur cet intervalle. On en déduit que $\varphi$ est positive sur $]0,1]$ et négative sur $[1,+\infty[$ autrement dit que $f \geqslant g$ sur $]0,1]$ et que $f \leqslant g$ sur $[1,+\infty[$. Ainsi $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]0,1]$ et en-dessous sur $[1,+\infty[$.

### Partie II – Calcul d'intégrales

**1.** Puisque $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$. On en déduit que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$,

$$I(a) = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}a^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{15} - \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}a^{\frac{5}{2}}$$

**2.** $\psi$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\psi'(x) = 2x\ln x + x = -2g(x) + x$$

On en déduit qu'une primitive de $g$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\psi(x)$. Finalement, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$,

$$J(a) = \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{2}\psi(a)$$

**3.** Posons $u = \frac{1}{x}$ de sorte que $u \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$. Alors

$$\psi(x) = \frac{1}{u^2}\ln\frac{1}{u} = -\frac{1}{u}\frac{\ln u}{u}$$

On sait que $\lim_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ et $\lim_{u\to+\infty} \frac{1}{u} = 0$ donc $\lim_{x\to 0^+} \psi(x) = 0$.

**4.** Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$,

$$I(a) - J(a) = \frac{4}{15} - \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}a^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}\psi(a)$$

On déduit de la question précédente que

$$\lim_{a\to 0^+} I(a) - J(a) = \frac{4}{15} - \frac{1}{4} = \frac{1}{60}$$

### Partie III – Résolution approchée d'une équation

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = -\ln x - 1$ donc $g$ est strictement croissante sur $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ puis strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.
D'une part, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$ (en effectuant le changement de variable $u = \frac{1}{x}$), donc la croissance de $g$ sur $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ implique que $g$ est positive sur $\left]0, \frac{1}{e}\right]$. Ainsi l'équation $g(x) = -24$ n'admet pas de solution sur $\left]0, \frac{1}{e}\right]$.
D'autre part, $g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \geqslant -24$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. Comme $g$ est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$, l'équation $g(x) = -24$ admet une unique solution sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.
Finalement, l'équation $g(x) = -24$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Enfin, $g(9) = -9\ln 9 \geqslant -24$ et $g(11) = -11\ln 11 \leqslant -24$ donc $\alpha \in [9, 11]$.

2. **a.** $h$ est clairement décroissante sur $[9, 11]$ donc pour tout $x \in [9, 11]$

$$10 \leqslant h(11) \leqslant h(x) \leqslant h(9) \leqslant 11$$

donc $h(x) \in [9, 11]$.

**b.** $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$,

$$h'(x) = -\frac{24}{x(\ln x)^2}$$

Pour tout $t \in [9, 11]$,

$$0 < 9 \leqslant t \qquad \text{et} \qquad 0 < \ln 9 \leqslant \ln t$$

donc

$$0 < \frac{24}{t(\ln t)^2} \leqslant \frac{24}{9(\ln 9)}^2 = K$$

On en déduit que $|h'(t)| \leqslant K$ pour tout $t \in [0, 9]$.

**c.** Soit $x \in [9, 11]$.

- Supposons $x \geqslant \alpha$. Pour tout $t \in [\alpha, x]$
$$-K \leqslant h'(t) \leqslant K$$
donc en intégrant
$$-\int_\alpha^x K\,dt \leqslant \int_\alpha^x h'(t)\,dt \leqslant \int_\alpha^x K\,dt$$
puis
$$-K(x-\alpha) \leqslant h(x) - h(\alpha) \leqslant K(x-\alpha)$$
d'où
$$|h(x) - h(\alpha)| \leqslant K|x-\alpha|$$
- Supposons $x \leqslant \alpha$. Pour tout $t \in [\alpha, x]$
$$-K \leqslant h'(t) \leqslant K$$
donc en intégrant
$$-\int_x^\alpha K\,dt \leqslant \int_x^\alpha h'(t)\,dt \leqslant \int_x^\alpha K\,dt$$
puis
$$-K(\alpha-x) \leqslant h(\alpha) - h(x) \leqslant K(\alpha-x)$$
d'où
$$|h(x) - h(\alpha)| \leqslant K|x-\alpha|$$

3. **a.** Tout d'abord, $u_0 \in [9, 11]$. Supposons que $u_n \in [9, 11]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'après la question **III.2.a**, $u_{n+1} = h(u_n) \in [9, 11]$. Par récurrence, $u_n \in [9, 11]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question **III.2.c**,

$$|h(u_n) - h(\alpha)| \leqslant K|u_n - \alpha|$$

On en déduit le résultat voulu puisque $h(u_n) = u_{n+1}$ et $h(\alpha) = \alpha$.

**b.** Puisque $u_0$ et $\alpha$ appartiennent à l'intervalle $[9, 11]$, $|u_0 - \alpha| \leqslant 2 = 2K^0$. Supposons que $|u_n - \alpha| \leqslant 2K^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant K|u_n - \alpha| \leqslant 2K^n.K = 2K^{n+1}$$

Par récurrence, $|u_n - \alpha| \leqslant 2K^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On vérifie que $K \in [0, 1[$ donc $\lim_{n\to+\infty} 2K^n = 0$ puis $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

**c.** On peut proposer l'algorithme suivant.

$u \leftarrow 9$
$K \leftarrow \frac{2}{3(\ln 3)^2}$
$p \leftarrow 2$
**Tant que** $p > \varepsilon$ **Faire**
  $p \leftarrow K \times p$
  $u \leftarrow \frac{24}{\ln u}$
**Fin Tant que**
**Renvoyer** $u$

On peut également proposer la fonction Python suivante prenant la précision en argument.

```
from math import log

def suite(eps):
    u=9
    p=2
    K=2/(3*log(3)**2)
    while p>eps:
        p=p*K
        u=24/log(u)
    return u
```

On a alors accès à l'approximation demandée en arrondissant à $10^{-2}$ près le résultat de `suite(0.005)`. On trouve $\alpha \approx 10,29$.