

DEVOIR SURVEILLÉ N° 5 : CORRIGÉ

Problème 1 — Petites Mines 2009

Partie I – Étude d'une fonction

1. f est dérivable sur \mathbb{R} par opérations arithmétiques sur des fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3(1 - 2x^2)e^{-2x^2}$$

On en déduit que f est

- strictement décroissante sur $] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$;
- strictement croissante sur $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$;
- strictement décroissante sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty [$.

Pour tout $x \neq 0$, $xe^{-x^2} = \frac{x^2 e^{-x^2}}{x}$. Par croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$$

via le changement de variables $X = x^2$. A fortiori

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x^2} = 0$$

Puis, par opérations

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	-1	$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	-1	

En particulier, \mathcal{C}_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Puisque $f(-x) + f(x) = -2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, \mathcal{C}_f est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0, -1)$.

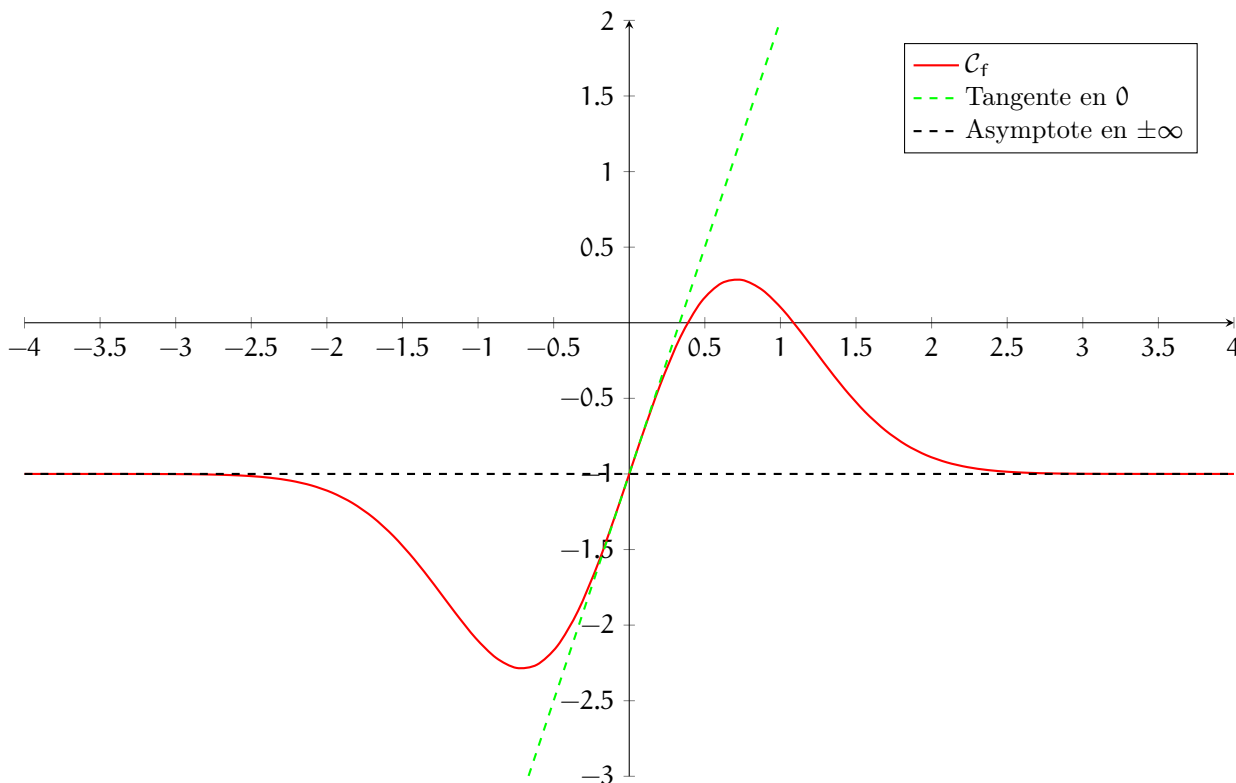
2. Puisque $f(0) = -1$ et $f'(0) = 3$, \mathcal{C}_f admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = 3x - 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - (3x - 1) = 3x(e^{-x^2} - 1)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} - 1 \leq 0$ car $-x^2 \leq 0$ et par croissance de \exp sur \mathbb{R} . Ainsi $f(x) - (3x - 1) \leq 0$ pour $x \geq 0$ et $f(x) - (3x - 1) \geq 0$ pour $x \leq 0$. On en déduit que \mathcal{C}_f est au-dessus de sa tangente à gauche de 0 et au-dessous de celle-ci à droite de 0. \mathcal{C}_f admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

3.



4. a. f étant de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , elle admet un développement limité à tout ordre en 0.
 b. On sait que $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. On en déduit que

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

puis que

$$f(x) = -1 + 3x - 3x^3 + \frac{3}{2}x^5 + o(x^5)$$

Partie II – Étude d’une équation différentielle

1. L’équation différentielle H_n est $xy' - (n - 2x^2)y = 0$. Sur \mathbb{R}^* , elle équivaut à $y' - \left(\frac{n}{x} - 2x\right)y = 0$. Une primitive de $x \mapsto \frac{n}{x} - 2x$ sur \mathbb{R}_+^* est $x \mapsto n \ln(x) - x^2$. Les solutions de H_n sur \mathbb{R}_+^* sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda x^n e^{-x^2}$ où λ décrit \mathbb{R} . Une primitive de $x \mapsto \frac{n}{x} - 2x$ sur \mathbb{R}_-^* est $x \mapsto n \ln(-x) - x^2$. Les solutions de H_n sur \mathbb{R}_-^* sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda(-x)^n e^{-x^2}$ où λ décrit \mathbb{R} ou, de manière plus simple, les fonctions $x \mapsto \lambda x^n e^{-x^2}$ où λ décrit encore \mathbb{R} .
2. La fonction constante égale à -1 étant clairement une solution particulière de E_n sur \mathbb{R} . On en déduit que les solutions de E_n sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* sont les fonctions $x \mapsto -1 + \lambda x^n e^{-x^2}$.
3. Supposons dans un premier temps $n = 1$. Soit y une solution de E_1 sur \mathbb{R} . Comme y est solution de E_1 sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* , il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$y(x) = \begin{cases} -1 + \lambda x e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -1 + \mu x e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La continuité de y en 0 impose $y(0) = -1$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lambda \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \mu$$

La dérivabilité de y en 0 impose donc $\lambda = \mu$. On a donc $y(x) = \lambda x e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Réciproquement pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \mapsto -1 + \lambda x e^{-x^2}$ est de classe \mathcal{C}^1 et solution de E_1 sur \mathbb{R} .

Les solutions de E_1 sur \mathbb{R} sont donc les fonctions $x \mapsto -1 + \lambda x e^{-x^2}$ où λ décrit \mathbb{R} .

Supposons maintenant $n \geq 2$. Comme précédemment toute solution y de E_n sur \mathbb{R} est nécessairement de la forme

$$y(x) = \begin{cases} -1 + \lambda x^n e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -1 + \mu x^n e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Réciproquement, si y est de la forme précédente, elle est bien solution de E_n sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* , elle est bien de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* , elle est continue en 0 puisque $\lim_{0^+} y = \lim_{0^-} y = 0 = y(0)$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y'(x) = 0$$

donc y est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} en vertu du théorème de prolongement \mathcal{C}^1 .

REMARQUE. Si on ne connaît pas encore le théorème de prolongement \mathcal{C}^1 , on procède «à la main». On constate que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = 0$$

donc y est dérivable en 0 et $y'(0) = 0$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y'(x) = 0 = y'(0)$$

donc y' est continue en 0. Puisque y' est continue sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* , y' est continue sur \mathbb{R} i.e. y est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

On vérifie alors que y est encore solution de E_n en 0 donc elle est solution de E_n sur \mathbb{R} .

Partie III – Étude de deux suites

1. On a $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = \frac{3}{e} - 1 > 0$.
2. f_n est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'_n(x) = 3(nx^{n-1} - 2x^{n+1})e^{-x^2} = 3x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$$

On en déduit que f_n est strictement croissante sur $[0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ et strictement décroissante sur $[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_n(x) = (x^2)^{\frac{n}{2}} e^{-x^2} - 1$$

donc, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -1$.

Remarquons que puisque $n \geq 2$, $1 \in [0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ et puisque f_n est strictement croissante sur cet intervalle, $f_n(\sqrt{\frac{n}{2}}) \geq f_n(1) > 0$.

f est strictement monotone et continue sur chacun des deux intervalles $[0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ et $[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty[$. De plus, $f_n(0) < 0$, $f_n(\sqrt{\frac{n}{2}}) > 0$ et $\lim_{+\infty} f < 0$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f_n s'annule une unique fois sur chacun des deux intervalles $[0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ et $[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty[$ en deux réels notés respectivement u_n et v_n .

Puisque $f_n(1) > 0$ et que 1 appartient à l'intervalle $[0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ sur lequel f_n est strictement croissante, $u_n > 1$. Par ailleurs $v_n > \sqrt{\frac{n}{2}} \geq 1$ puisque $n \geq 2$.

3. D'après la question précédente, $v_n \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$ pour tout $n \geq 2$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ par théorème de minoration.
4.
 - a. Par définition, $f_n(u_n) = 0$ pour tout $n \geq 2$ donc $e^{-u_n^2} = \frac{1}{3u_n^n}$.
 - b. $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1}e^{-u_n^2} - 1 = u_n - 1 < 0$.
 - c. On sait également que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ et que f_{n+1} est strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ contenant u_n et u_{n+1} . D'où $u_n < u_{n+1}$. Ceci étant valable pour tout $n \geq 2$, la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.
 - d. La suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est également majorée par 1 donc elle converge en vertu du théorème de la limite monotone.
5.
 - a. Évident.

- b. Supposons $l \neq 1$. On a en fait $l < 1$ puisque (u_n) est majorée par 1. Pour tout $n \geq 2$, $f_n(u_n) = 0$ et donc $g_n(u_n) = 0$ d'après la question précédente. Ainsi pour tout $n \geq 2$,

$$0 = \ln 3 + n \ln(u_n) - u_n^2$$

Puisque $l < 1$, le membre de droite diverge vers $-\infty$, ce qui est absurde.

On en déduit que $l = 1$.

- c. Pour tout $n \geq 2$, $g_n(u_n) = 0$ et donc

$$n \ln(1 + w_n) = u_n^2 - \ln 3$$

Puisque (w_n) converge vers 0, $n \ln(1 + w_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n w_n$. Par ailleurs, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 - \ln 3 = 1 - \ln 3$ donc

$$w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1 - \ln 3}{n}$$

SOLUTION 1.

- On sait que th est strictement croissante et continue sur \mathbb{R} . De plus, $\lim_{-\infty} \text{th} = -1$ et $\lim_{+\infty} \text{th} = 1$. Donc th induit une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \frac{\text{th}(a) + \text{th}(b)}{1 + \text{th}(a) \text{th}(b)} &= \frac{\frac{\text{sh } a}{\text{ch } a} + \frac{\text{sh } b}{\text{ch } b}}{1 + \frac{\text{sh } a}{\text{ch } a} \cdot \frac{\text{sh } b}{\text{ch } b}} \\ &= \frac{\text{sh } a \text{ ch } b + \text{sh } b \text{ ch } a}{\text{ch } a \text{ ch } b + \text{sh } a \text{ sh } b} \\ &= \frac{(e^a - e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^b - e^{-b})(e^a + e^{-a})}{(e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^b - e^{-b})(e^a - e^{-a})} \\ &= \frac{e^{a+b} - e^{-(a+b)}}{e^{a+b} + e^{-(a+b)}} = \text{th}(a + b) \end{aligned}$$

- Vérifions que \star est une loi interne sur G . Soit $(x, y) \in G^2$. Par surjectivité de th sur G , il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = \text{th } a$ et $y = \text{th } b$. Alors $x \star y = \text{th}(a + b) \in G$.

La loi \star est clairement commutative.

Vérifions que \star est associative. Soit $(x, y, z) \in G^3$. Comme précédemment, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(x, y, z) = (\text{th } a, \text{th } b, \text{th } c)$. Alors

$$(x \star y) \star z = \text{th}(a + b) \star \text{th } c = \text{th}(a + b + c) = \text{th } a \star \text{th}(b + c) = x \star (y \star z)$$

Pour tout $x \in G$, $0 \star x = x \star 0 = x$ et $0 \in G$ donc 0 est neutre pour \star .

Enfin, pour tout $x \in G$, $x \star (-x) = (-x) \star x = 0$ et $-x \in G$ donc tout élément de G est inversible pour la loi \star .

Tout ceci prouve que (G, \star) est un groupe commutatif.

- Tout d'abord $x^{\star 0} = 0 = \frac{(1+x)^0 - (1-x)^0}{(1+x)^0} + (1-x)^0$. Supposons que $x^{\star n} = \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} x^{\star(n+1)} &= x \star x^{\star n} \\ &= \frac{x + x^{\star n}}{1 + x \cdot x^{\star n}} \\ &= \frac{x + \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}}{1 + x \cdot \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}} \\ &= \frac{x(1+x)^n + x(1-x)^n + (1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n + x(1+x)^n - x(1-x)^n} \\ &= \frac{(1+x)(1+x)^n - (1-x)(1-x)^n}{(1+x)(1+x)^n + (1-x)(1-x)^n} \\ &= \frac{(1+x)^{n+1} - (1-x)^{n+1}}{(1+x)^{n+1} + (1-x)^{n+1}} \end{aligned}$$

Par récurrence, l'égalité de l'énoncé est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin, si $n \in \mathbb{Z}_-$, en utilisant le fait que $-n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x^{*n} &= (x^{*-1})^{*(-n)} = (-x)^{*(-n)} \\ &= \frac{(1 + (-x))^{-n} - (1 - (-x))^{-n}}{(1 + (-x))^{-n} + (1 - (-x))^{-n}} \\ &= \frac{\frac{1}{(1-x)^n} - \frac{1}{(1+x)^n}}{\frac{1}{(1-x)^n} + \frac{1}{(1+x)^n}} \\ &= \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n} \end{aligned}$$

SOLUTION 2.

1. a. Récurrence évidente.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(u_{n-1} - 2\sqrt{a} + \frac{a}{u_{n-1}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{u_{n-1}} - \frac{\sqrt{u_{n-1}}}{\sqrt{a}} \right)^2 \geq 0$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{u_n} - u_n \right) = \frac{a - u_n^2}{2u_n}$$

Or $u_n > 0$ et $u_n^2 \geq a$ d'après la question 1.b donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite (u_n) est donc décroissante à partir du rang 1.

d. La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0 ou \sqrt{a} au choix) donc elle converge vers un réel ℓ . Par passage à la limite, $\ell \geq \sqrt{a} > 0$ donc on peut affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{u_n} = \frac{a}{\ell}$ puis que $\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{a}{\ell} \right)$. On en déduit que $\ell^2 = a$ et, comme $\ell > 0$, $\ell = \sqrt{a}$.

2. On pose $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part,

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(u_n - 2\sqrt{a} + \frac{a}{u_n} \right) = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}$$

D'autre part,

$$u_{n+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(u_n + 2\sqrt{a} + \frac{a}{u_n} \right) = \frac{(u_n + \sqrt{a})^2}{2u_n}$$

On en déduit que

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2} = v_n^2$$

b. Une récurrence évidente montre que $v_n = v_0^{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Puisque $u_0 > 0$ et $a > 0$, $u_0 - \sqrt{a} < u_0 + \sqrt{a}$ et $\sqrt{a} - u_0 < u_0 + \sqrt{a}$ donc $|u_0 - \sqrt{a}| < u_0 + \sqrt{a} = |u_0 + \sqrt{a}|$. On en déduit que $|v_0| < 1$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_0^{2^n}$. Or $|v_0| < 1$. On en déduit que (v_n) converge vers 0. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} \sqrt{a}$$

Donc (u_n) converge vers \sqrt{a} .

3. On s'intéresse maintenant à la vitesse de convergence de (u_n) vers sa limite.

a. La suite $(u_n + \sqrt{a})$ est convergente donc bornée. Ainsi $u_n + \sqrt{a} = \mathcal{O}(1)$. Or pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_{n-1}^2 \geq 0$ donc $v_n = |v_n| = |v_0|^{2^n} = K^{2^n}$ en posant $K = |v_0|$. Or $u_n - \sqrt{a} = v_n(u_n + \sqrt{a})$ donc $u_n - \sqrt{a} = \mathcal{O}(K^{2^n})$.

b. Montrer que pour tout $q \in [0, 1[$, $u_n - \sqrt{a} = o(q^n)$.

- c. Soit $q \in]0, 1[$. La question précédente nous dit qu'il suffit de montrer que $K^{2^n} = o(q^n)$ i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K^{2^n}}{q^n} = 0$. C'est évident si $K = 0$. Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{K^{2^n}}{q^n} = \exp(2^n \ln K - n \ln q)$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n \ln K - n \ln q = 2^n \left(\ln K - \frac{n}{2^n} \ln q \right)$$

Par croissance comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln K - \frac{n}{2^n} \ln q = \ln K < 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \ln K - n \ln q = -\infty$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K^{2^n}}{q^n} = 0$ i.e. $K^{2^n} = o(q^n)$.

4.

```
from math import sqrt
```

```
def minimal(a,u0,e):
    u=u0
    n=0
    while abs(u-a)>e:
        u=(u+a/u)/2
        n+=1
    return n
```