# Interrogation écrite n°06

NOM : Prénom : Note :

1. Soit $f_n : x \mapsto e^{-nx}$. La suite $(f_n)$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$ ? Justifier.
   ***Première méthode.*** *Supposons que $(f_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de la double limite, on aurait alors*
   $$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 1^-} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$
   *et donc $1 = 0$. Ainsi $(f_n)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.*
   ***Deuxième méthode.*** *On montre que $(f_n)$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = 1$ donc $(f_n)$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle.* ∎

2. On pose $f_n : x \mapsto x^n(1-x)$. La suite de fonctions $(f_n)$ converge-t-elle simplement sur $[0,1]$ ? uniformément sur $[0,1]$ ? Justifier.
   *Remarquons que $f_n(1) = 0$ et que pour $x \in [0,1[$, la suite géométrique $(f_n(x))$ converge vers $0$. Ainsi $(f_n)$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Une étude de fonctions montre que $f_n$ est positive et atteint son maximum en $\frac{n}{n+1}$. Par conséquent,*
   $$\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$$
   *Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_{\infty,[0,1]} = 0$ i.e. $(f_n)$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.* ∎

3. On pose $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Montrer que $\zeta$ est continue sur $]1,+\infty[$.
   *On pose $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$. Les fonctions $f_n$ sont bien continues sur $]1,+\infty[$. Fixons $a > 1$. Alors $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \frac{1}{n^a}$. Or $\sum \frac{1}{n^a}$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$. On en déduit que $\zeta$ est continue sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 1$. Finalement, $\zeta$ est continue sur $]1,+\infty[$.* ∎

4. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2 x}$. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

   *Posons* $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^2+x}$. *Il est clair que* $\|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[} = \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$. *On en déduit que* $\sum f_n$ *converge normalement et donc uniformément sur* $[1,+\infty[$. *De plus, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{+\infty} f_n = \delta_{0,n}$. *D'après le théorème d'interversion série/limite,* $\lim_{+\infty} f = 1$. ∎

5. On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2}$. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

   *Posons* $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n^2}$. *Fixons* $x \in \mathbb{R}_+$. *Alors* $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ *donc* $\sum f_n(x)$ *converge (absolument). Ainsi* $\sum f_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+$.
   *Les fonctions* $f_n$ *sont de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1} e^{-nx}}{n}$. *Fixons* $x \in \mathbb{R}_+$. *La suite de terme général* $\frac{e^{-nx}}{n}$ *est décroissante de limite nulle donc la série* $\sum f_n'(x)$ *vérifie le critère spécial des séries alternées. Notamment* $\sum f_n'$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+$. *Notons* $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k'$. *D'après le critère spécial des séries alternées,*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |\mathrm{R}_n(x)| \leq |f_{n+1}'(x)| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

   *de sorte que* $(\mathrm{R}_n)$ *converge uniformément vers la fonction nulle. On en déduit que* $\sum f_n'$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}_+$. *On en conclut que* $f$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+$. ∎