

# SYSTÈMES LINÉAIRES

## 1 Notion de système linéaire

### Définition 1.1 Système linéaire

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls. On appelle **système linéaire de  $n$  équations à  $p$  inconnues** tout système d'équations de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où  $x_1, \dots, x_p$  sont des inconnues.

### Exemple 1.1

Quelques exemples et contre-exemples.

- $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases}$  est un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues.
- $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 7x - 5y - 2z = 2 \end{cases}$  est un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues.
- $\begin{cases} x = y + 2z + 1 \\ z + y + 2 = -3x \\ 2x + 3y - 3 = 17z \end{cases}$  est un système d'équation linéaire de 3 équations à 3 inconnues.
- $\begin{cases} e^x + y = 1 \\ x + \sin(y) = 2 \end{cases}$  n'est pas un système linéaire.
- $\begin{cases} x^2 + 2y^3 = -3 \\ 2x^4 - y^5 = 2 \end{cases}$  n'est pas un système linéaire.

### Interprétation géométrique

**Cas  $n = 2$**  Les équations intervenant dans un système linéaire à deux inconnues sont de la forme  $ax + by = c$ . Sauf cas particulier où  $(a, b) = (0, 0)$ , ce sont des équations de droites du plan. L'ensemble des solutions d'un système linéaire à deux inconnues peut être interprété comme l'intersection de droites du plan.

**Cas  $n = 3$**  Les équations intervenant dans un système linéaire à trois inconnues sont de la forme  $ax + by + cz = d$ . Sauf cas particulier où  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ , ce sont des équations de plans de l'espace. L'ensemble des solutions d'un système linéaire à trois inconnues peut être interprété comme l'intersection de plans de l'espace.

## 2 Structure de l'ensemble des solutions

**Définition 2.1** Système homogène associé à un système linéaire

On appelle système **homogène** associé au système linéaire

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

le système

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

**REMARQUE.** En clair, on se débarrasse des termes constants.

**Exemple 2.1**

Systèmes homogènes associés à quelques systèmes linéaires.

- Le système homogène associé au système  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases}$  est  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$ .
- Le système homogène associé au système  $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 7x - 5y - 2z = 2 \end{cases}$  est  $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 7x - 5y - 2z = 0 \end{cases}$ .
- Le système homogène associé au système  $\begin{cases} x = y + 2z + 1 \\ z + y + 2 = -3x \\ 2x + 3y - 3 = 17z \end{cases}$  est  $\begin{cases} x = y + 2z \\ z + y = -3x \\ 2x + 3y = 17z \end{cases}$ .

**Théorème 2.1** Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire

Les solutions d'un système linéaire sont les sommes d'une solution particulière de ce système et des solutions du système homogène associé.

**Exemple 2.2**

Le système  $(S) : \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 3x - y - z = -2 \end{cases}$  admet  $(1, 2, 3)$  pour solution. Alors

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 3x - y - z = -2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x + y + z = 2 \times 1 + 2 + 3 \\ 3x - y - z = 3 \times 1 - 2 - 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2(x - 1) + (y - 2) + (z - 3) = 0 \\ 3(x - 1) - (y - 2) - (z - 3) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi  $(x, y, z)$  est solution de  $(S)$  si et seulement si  $(x - 1, y - 2, z - 3)$  est une solution  $(u, v, w)$  du système homogène associé à  $(S)$ .

Ceci signifie que  $(x, y, z)$  est solution de  $(S)$  si et seulement si il existe une solution  $(u, v, w)$  du système homogène associé à  $(S)$  tel que  $(x, y, z) = (1 + u, 2 + v, 3 + w) = (1, 2, 3) + (u, v, w)$ .

### 3 Résolution d'un système linéaire

**Notation 3.1 Opérations élémentaires**

On notera  $L_1, \dots, L_p$  les lignes d'un système linéaire de  $p$  équations.

- Pour  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ , on notera  $L_i \leftrightarrow L_j$  l'opération consistant à échanger les lignes  $L_i$  et  $L_j$ .
- Pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $\lambda \neq 0$ , on notera  $L_i \leftarrow \lambda L_i$  l'opération consistant à multiplier la ligne  $L_i$  par  $\lambda$ .
- Pour  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$  et  $\lambda$  scalaire, on notera  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$  l'opération consistant à ajouter  $\lambda$  fois la ligne  $L_j$  à la ligne  $L_i$ .

**Proposition 3.1**

Tout système linéaire est changé par des opérations élémentaires en un système équivalent.

**REMARQUE.** Des opérations du type  $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$  avec  $\lambda \neq 0$  transforme également un système en un système équivalent.

**Méthode** **Formatage d'un système linéaire**

Pour effectuer sans peine des opérations élémentaires sur un système linéaire, les inconnues doivent être placées en «colonnes».

Par exemple, le système linéaire  $\begin{cases} x + z = 2 \\ y - z = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$  sera plutôt écrit  $\begin{cases} x & & + & z & = & 2 \\ & y & - & z & = & -1 \\ x & + & 2y & & = & 3 \end{cases}$ .

On peut alors résoudre le système linéaire à l'aide de l'algorithme suivant.

**Algorithme 1** Pivot de Gauss**Données :** un système linéaire de  $n$  équations  $(L_1, \dots, L_n)$  à  $p$  inconnues  $(x_1, \dots, x_p)$ **Résultat :** un système linéaire «triangulaire» équivalent au système initial.**Pour**  $k$  variant de 1 à  $\min(n, p)$  **Faire**  **Si** il existe une ligne  $i$  où le coefficient de  $x_k$  est non nul **Alors**     $L_k \leftrightarrow L_i$      $a \leftarrow$  coefficient de  $x_k$  sur la ligne  $L_k$  ( $a$  est donc non nul)    **Pour**  $j$  variant de  $k + 1$  à  $n$  **Faire**       $b \leftarrow$  coefficient de  $x_k$  sur la ligne  $j$        $L_j \leftarrow L_j - \frac{b}{a} L_k$     **Fin Pour**  **Fin Si****Fin Pour****REMARQUE.** Le coefficient de  $x_k$  sur la ligne  $L_k$  à l'étape  $k$  de l'algorithme s'appelle le **pivot**.

A la fin de l'algorithme, on obtient un système «triangulaire» et plusieurs cas peuvent se présenter.

- Il existe une unique solution.
- Il n'existe aucune solution.
- Il existe une infinité de solutions.

## 4 Quelques exemples

**Exemple 4.1****Résolution**

On est dans un cas simple de pivot de Gauss où tous les pivots sont égaux à 1.

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \textcircled{x} & - & y & - & 5z & = & -6 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ -3x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{cases} & \text{Le coefficient en position de pivot est égal à 1.} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x & - & y & - & 5z & = & -6 \\ & \textcircled{y} & + & 11z & = & 14 \\ & - & y & - & 14z & = & -17 \end{cases} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array} & \text{Le coefficient en position de pivot est encore égal à 1.} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x & - & y & - & 5z & = & -6 \\ & y & + & 11z & = & 14 \\ & & - & 3z & = & -3 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Structure de l'ensemble des solutions**L'ensemble des solutions est le singleton  $\{(2, 3, 1)\}$ .**Interprétation géométrique**

L'ensemble des solutions est l'intersection de trois plans de l'espace donc un point (sauf cas particulier).

**Exemple 4.2****Résolution**

Si des pivots sont nuls, on procède à des échanges de lignes.

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \bigcirc & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \end{cases} & \text{Le coefficient en position de pivot est nul.} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \textcircled{x} & + & y & - & z & = & 2 \\ & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \end{cases} & L_1 \leftrightarrow L_2 & \text{On met un 1 en position de pivot.} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & \textcircled{2y} & + & z & = & 1 \\ & y & - & 2z & = & -2 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 & \text{Le coefficient en position de pivot est différent de 1.} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & \textcircled{y} & - & 2z & = & -2 \\ & 2y & + & z & = & 1 \end{cases} & L_3 \leftrightarrow L_2 & \text{On préfère un 1 en position de pivot.} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & y & - & 2z & = & -2 \\ & & 5z & = & 1 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Structure de l'ensemble des solutions**

L'ensemble des solutions est le singleton  $\left\{\left(\frac{9}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)\right\}$ .

**Interprétation géométrique**

L'ensemble des solutions est l'intersection de trois plans de l'espace donc un point (sauf cas particulier).

**Exemple 4.3****Résolution**

Si des pivots ne sont pas égaux à 1, on utilise des opérations du style  $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$  avec  $\lambda \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} -4x & + & 3y & - & z & = & 2 \\ -3x & - & y & - & 3z & = & -1 \\ -2x & + & 5y & + & 2z & = & 3 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} -4x & + & 3y & - & z & = & 2 \\ & - & 13y & - & 9z & = & -10 \\ & & 7y & + & 5z & = & 4 \end{cases} & \begin{aligned} L_2 & \leftarrow 4L_2 - 3L_1 \\ L_3 & \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{aligned} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} -4x & + & 3y & - & z & = & 2 \\ & - & 13y & - & 9z & = & -10 \\ & & & 2z & = & -18 \end{cases} & L_3 \leftarrow 13L_3 + 7L_2 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 7 \\ y = 7 \\ z = -9 \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Structure de l'ensemble des solutions**

L'ensemble des solutions est le singleton  $\{(7, 7, -9)\}$ .

**Interprétation géométrique**

L'ensemble des solutions est l'intersection de trois plans de l'espace donc un point (sauf cas particulier).

**Exemple 4.4****Résolution**

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x + 4y - z = 3 \\ 2x + 3y - 5z = 2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y - z = 3 \\ -5y - 3z = -4 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5} + \frac{17}{5}z \\ y = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}z \end{cases} & \text{On exprime les inconnues en fonction du paramètre } z.
\end{aligned}$$

**Structure de l'ensemble des solutions**

L'ensemble des solutions est

$$\left\{ \left( -\frac{1}{5} + \frac{17}{5}z, \frac{4}{5} - \frac{3}{5}z, z \right), z \in \mathbb{K} \right\}$$

En particulier, il existe donc une infinité de solutions (puisque  $z$  peut prendre une infinité de valeurs). Les solutions sont de la forme

$$\underbrace{\left( -\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 0 \right)}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\left( \frac{17}{5}z, -\frac{3}{5}z, z \right)}_{\text{solution de l'équation homogène}}$$

**Interprétation géométrique** L'ensemble des solutions est l'intersection de deux plans de l'espace non parallèles donc

une droite. Il s'agit en effet de la droite paramétrée par  $\begin{cases} x = -\frac{1}{5} + \frac{17}{5}t \\ y = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  autrement dit de la droite passant par le

point  $\left( -\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 0 \right)$  et de vecteur directeur  $\left( \frac{17}{5}, -\frac{3}{5}, 1 \right)$ .

**Exemple 4.5****Résolution**

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x - 3y = 1 \\ 4x - 5y = 2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -3 \\ -7y = 7 \\ -13y = 14 \end{cases} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 4L_1 \end{aligned} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -3 \\ y = -1 \\ 13 = 14 \end{cases}
\end{aligned}$$

**Structure de l'ensemble des solutions**

Puisque manifestement  $13 \neq 14$ , l'ensemble des solutions est vide.

**Interprétation géométrique** Rien de surprenant : trois droites du plan sont rarement concourantes.

**Exemple 4.6****Résolution**

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \\ -5x + 3y = 1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ 3x - y = 1 \\ -5x + 3y = 1 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \text{On préfère éliminer } y. \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ 1 = 1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

**Structure de l'ensemble des solutions**

L'ensemble des solutions est le singleton  $\{(1, 2)\}$ .

**Interprétation géométrique** On a donc ici affaire à trois droites concourantes.

**Exemple 4.7**

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} 2x - 3y + 4z = -3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ 4x - 5y + 14z = 1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + 4z = -3 \\ 4x - 5y + 14z = 1 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \text{On préfère un } -1 \text{ en position de pivot.} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 5 \\ y + 6z = 7 \\ 3y + 18z = 21 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1 \end{array} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 5 \\ y + 6z = 7 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 - 11z \\ y = 7 - 6z \end{cases}
\end{aligned}$$

**Structure de l'ensemble des solutions**

L'ensemble des solutions est

$$\{(9 - 11z, 7 - 6z, z), z \in \mathbb{K}\}$$

En particulier, il existe donc une infinité de solutions (puisque  $z$  peut prendre une infinité de valeurs). Les solutions sont de la forme

$$\underbrace{(9, 7, 0)}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{(-11z, -6z, z)}_{\text{solution de l'équation homogène}}$$

**Interprétation géométrique** Trois plans de l'espace se coupent suivant la droite paramétrée par  $\begin{cases} x = 9 - 11t \\ y = 7 - 6t \\ z = t \end{cases}$ , c'est à dire la droite passant par le point  $(9, 7, 0)$  et de vecteur directeur  $(-11, -6, 1)$ .