Interrogation écrite n°09

NOM : Prénom : Note :

1. Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F + G = F + H$, $F \cap G = F \cap H$ et $G \subset H$. Montrer que $H = G$.

   Soit $x \in H$. Alors $x = 0_E + x \in F + H = F + G$. Il existe donc $(a, b) \in F \times G$ tel que $x = a + b$. Or $x \in H$ et $b \in G \subset H$ donc $a = x - b \in H$. Par conséquent, $a \in F \cap H = F \cap G$. Ainsi $a \in G$ et $b \in G$ donc $x = a + b \in G$. On a donc montré que $H \subset G$ mais on sait que $G \subset H$ donc $G = H$ par double inclusion.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, 30 divise $n^5 - n$.

   Soit $n \in \mathbb{Z}$. Tout d'abord, 5 est premier donc $n^5 \equiv n[5]$ d'après le petit théorème de Fermat. Ainsi 5 divise $n^5 - n$. Par ailleurs, $n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$. Comme n et $n+1$ sont deux entiers consécutifs, l'un d'entre eux est divisible par 2. De même, $n - 1$, n et $n + 1$ sont trois entiers consécutifs donc l'un d'entre eux est divisible par 3. Ainsi 2 et 3 divisent $n^5 - n$. Enfin, 2, 3 et 5 sont premiers entre eux deux à deux donc $30 = 2 \times 3 \times 5$ divise $n^5 - n$.

3. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $F + G$ est également un sous-espace vectoriel de E.

   - Tout d'abord, $F + G \subset E$.
   - Ensuite, $0_E \in F$ et $0_E \in G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E donc $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$.
   - Enfin, soient $(x, y) \in (F+G)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Il existe donc $(f_1, f_2, g_1, g_2) \in F^2 \times G^2$ tel que $x = f_1 + g_1$ et $y = f_2 + g_2$. Alors $\lambda x + \mu y = (\lambda f_1 + \mu f_2) + (\lambda g_1 + \mu g_2)$. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $\lambda f_1 + \mu f_2 \in F$ et $\lambda g_1 + \mu g_2 \in G$. Par conséquent, $\lambda x + \mu y \in F + G$.

   Ceci prouve que $F + G$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

4. Donner la valuation p-adique de 360 pour tout nombre premier p.

   Puisque $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, $\nu_2(360) = 3$, $\nu_3(360) = 2$, $\nu_5(360) = 1$ et $\nu_p(360) = 0$ pour tout nombre premier $p > 5$.

5. Donner une famille génératrice de $\mathrm{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y + 3z = 0\right\}$ («mettre sous forme d'un vect»).

$$\begin{aligned} \mathrm{F} &= \left\{(x, 2x + 3z, z), (x, z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x(1, 2, 0) + z(0, 3, 1), (x, z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \operatorname{vect}((1, 2, 0), (0, 3, 1)) \end{aligned}$$

Ainsi $((1, 2, 0), (0, 3, 1))$ est une famille génératrice de F.

6. Donner une famille génératrice de $\mathrm{G} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y + 3z = x - 2y + 3z = 0\right\}$ («mettre sous forme d'un vect»).

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \underset{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1}{\iff} \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ \quad -x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = -x \end{cases}$$

Ainsi

$$\mathrm{G} = \{(x, -x, -x), x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -1, -1), x \in \mathbb{R}\} = \operatorname{vect}((1, -1, -1))$$

Par conséquent, $((1, -1, -1))$ est une famille génératrice de G.

7. Montrer que la famille $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh}, \cos, \sin)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
Soit $(\alpha, \beta, ga, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha \operatorname{ch} + \beta \operatorname{sh} + \gamma \cos + \delta \sin = 0$. En dérivant successivement cette égalité, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha \operatorname{ch} + \beta \operatorname{sh} + \gamma \cos + \delta \sin &= 0 \\ \alpha \operatorname{sh} + \beta \operatorname{ch} - \gamma \sin + \delta \cos &= 0 \\ \alpha \operatorname{ch} + \beta \operatorname{sh} - \gamma \cos - \delta \sin &= 0 \\ \alpha \operatorname{sh} + \beta \operatorname{ch} + \gamma \sin - \delta \cos &= 0 \end{aligned}$$

En évaluant ces quatre égalités en 0, on obtient $\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ \beta - \delta = 0 \end{cases}$. Il s'ensuit que $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ donc la famille $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh}, \cos, \sin)$ est libre.