Polynômes annulateurs

Exercice 1 ★★ CCP PSI 2015

L'endomorphisme

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix} \end{cases}$$

est-il diagonalisable ?

Exercice 2 ★★ CCP MP 2018

Soient x un nombre réel et E_x l'ensemble des matrices $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} + x\mathrm{I}_n = 0$.

1. Si $x \neq 0$, montrer qu'une matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{E}_x$ est inversible et exprimer son inverse. Quelles sont les matrices inversibles appartenant à E_0 ?
2. Pour quelles valeurs de x tous les éléments de E_x sont ils diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
3. Déterminer l'ensemble T des traces des éléments de E_{-2}. Quel est son cardinal ?

Exercice 3 ★★★

Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v diagonalisent dans une base commune.

Exercice 4 ★

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si A est diagonalisable, alors A^T l'est aussi.

Exercice 5 ★★★

Soient u et v deux endomorphismes trigonalisables d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v trigonalisent dans une base commune.

Exercice 6 ★★ CCINP (ou CCP) MP 2019

Soit $n \geqslant 2$ entier. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{A} \neq \pm\mathrm{I}_n$.

1. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) \equiv n[2]$.
2. Montrer que $|\,\mathrm{tr}(\mathrm{A})| \leq n - 2$.

Exercice 7 ★★ Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

Soit l'endomorphisme

$$u : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto \mathrm{M} + \mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n \end{cases}$$

Déterminer les valeurs propres de u, ainsi que les espaces propres associés.

Exercice 8

1. Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que
$$\mathrm{A}^2 - 3\mathrm{A} + 2\mathrm{I}_2 = 0$$
2. Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que
$$\mathrm{A}^3 - 8\mathrm{A}^2 + 21\mathrm{A} - 18\mathrm{I}_2 = 0$$

Exercice 9 ★ TPE MP 2010

Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{M}^3 - \mathrm{M}^2 - \mathrm{M} - 2\mathrm{I}_n = 0$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 0$.

Exercice 10 ★★

Déterminer les matrices $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\mathrm{M}^5 = \mathrm{M}^2$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = n$.

Exercice 11

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire annulateur de u. La décomposition de P en facteurs irréductibles unitaires s'écrit $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$. Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $N_i = \operatorname{Ker} P_i(u)$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que $F = \bigoplus_{i=1}^{r} F \cap N_i$.

Exercice 12 **TPE-EIVP PSI 2017**

Soient A, B, C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $C = A + B$, $C^2 = 2A + 3B$, $C^3 = 5A + 6B$. A et B sont-elles diagonalisables ?

Exercice 13 ★★★

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$, $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 14 ★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\operatorname{rg}(A)$ est pair.

Exercice 15 ★★★

Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X + k) = 0$$

Exercice 16 ★★ **E3A MP 2019**

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $E_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice identité de E_n sera notée I_n.
Pour $A \in E_n$ et $j \in [\![1, n]\!]$, on note A_j la j-ème colonne de la matrice A.
Soit u l'application qui à toute matrice A de E_n associe la matrice B dont les colonnes B_j sont

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ B_j = S - A_j = \sum_{k=1, k\neq j}^{n} A_k \text{ où } S = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

1. Dans cette question, $n = 2$ et E_2 est muni de la base $\mathcal{B} = (K_1, K_2, K_3, K_4)$ où

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **a.** Vérifier que u est un endomorphisme de E_2.
- **b.** Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Démontrer que u est un automorphisme de E_2.
- **c.** Reconnaître la nature géométrique de l'automorphisme u en précisant ses éléments caractéristiques.

2. Exprimer $\det(u(A))$ en fonction de $\det(A)$ dans les case $n = 2$ et $n = 3$.

On revient au cas général et on admettra que u est un endomorphisme de E_n.

3. Montrer à l'aide d'opérations sur les colonnes et en utilisant S que l'on a

$$\det(u(A)) = (-1)^{n-1}(n - 1) \det(A)$$

4.
- **a.** Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de l'endomorphisme u.
- **b.** En déduire les éléments propres de l'endomorphisme u. Est-il diagonalisable ?

5. Soinet J_n la matrice de E_n dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $U_n = J_n - I_n$.

- **a.** Déterminer les colonnes du produit matriciel AU_n à l'aide de celles de A.
- **b.** Retrouver alors le résultat de la question **4.a**.

Exercice 17 **Mines Télécom MP 2022**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres complexes et déterminer une matrice D diagonable semblable à A.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle telle que $M^3 + M = 0$. Montrer que M est semblable à D.
3. A et M sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Polynôme minimal

Exercice 18 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

On définit : $\forall m \in \mathbb{R}, A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$. Déterminer le polynome minimal de A_m.

Exercice 19 ★★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A admet le même polynôme minimal considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 20 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

On considère un entier $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et telle que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ soit libre. Montrer que $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Exercice 21 **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Énoncer le lemme de décomposition des noyaux appliqué à f dans le cas de deux polynômes premiers entre eux.
2. On suppose que le polynôme minimal de f est donné par $\mu_f = (X^2+1)(X^2+4)$. A l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe deux vecteurs non nuls de E, x et y, tels que : $f^2(x) = -x$ et $f^2(y) = -4y$.
3. On suppose que E est de dimension 4. Montrer que $(x, f(x), y, f(y))$ est une base de E. Donner alors la matrice de f dans cette base.

Exercice 22 **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et telle que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ soit libre. Montrer que $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Exercice 23 **ENS MP 2011**

1. Soit A une matrice inversible réelle. Exprimer le polynôme minimal de A^{-1} en fonction de celui de A.
2. Soit A une matrice orthogonale réelle telle que 1 et -1 ne soient pas racines de son polynôme minimal. Montrer que A et A^{-1} ont même polynôme minimal. Montrer que le degré de ce polynôme minimal est pair.

Exercice 24

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.

1. Montrer que $f^n \circ g - g \circ f^n = nf^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que $P(f) \circ g - g \circ P(f) = f \circ P'(f)$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.
3. Montrer que f est nilpotent.

Exercice 25 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ n & & & \end{pmatrix}$ où $n \geq 3$.

1. Quel est le rang de A ? la dimension du noyau de A ?
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Quelle est la multiplicité de la valeur propre 0 ?
4. Montrer qu'il existe $\lambda \in]1, +\infty[$ tel que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1-\lambda\}$.
5. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 3.

Exercice 26 ★★

On considère un entier $n \geq 2$. Soit l'endomorphisme

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M + \mathrm{tr}(M) I_n \end{array} \right.$$

1. Déterminer un polynôme annulateur de u de degré 2.
2. u est-il diagonalisable ?
3. Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de u.

Exercice 27 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Donner le rang de B en fonction du rang de A.
2. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

3. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que B l'est aussi, et donner ses valeurs propres.

Exercice 28 ★★ **Matrice compagnon**

Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\chi_A = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
2. Montrer que $\pi_A = \chi_A$.
3. Déterminer les sous-espaces propres de $A^\top$.

Exercice 29 **Endomorphismes cycliques**

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. **a.** Pour $x \in \mathrm{E}$, on note $\mathrm{I}_{u,x} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}], \mathrm{P}(u)(x) = 0_\mathrm{E}\}$. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{I}_{u,x}$ est un idéal de $\mathbb{K}[x]$. On note $\pi_{u,x}$ son unique générateur unitaire. Justifier que $\pi_{u,x}$ divise π_u.

   b. Pour $x \in \mathrm{E}$, on note $\mathrm{E}_{u,x} = \{\mathrm{P}(u)(x), \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]\}$. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{E}_{u,x}$ est un sous-espace vectoriel de E et que $(u^k(x))_{0 \le k \le \deg \pi_{u,x}-1}$ en est une base. En déduire la dimension de $\mathrm{E}_{u,x}$.

   c. Montrer que $\mathrm{E}_{u,x}$ est stable par E et que $\pi_{u_{|\mathrm{E}_{u,x}}} = \pi_{u,x}$.

2. Soient $x_1, \dots, x_p$ tels que les polynômes $\pi_{u,x_1}, \dots, \pi_{u,x_p}$ soient deux à deux premiers entre eux. On pose $x = \sum_{i=1}^p x_i$ et $\mathrm{P} = \prod_{i=1}^p \pi_{u,x_i}$.

   a. Montrer que $\pi_{u,x}$ divise P.

   b. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{E}_{x_1}, \dots, \mathrm{E}_{x_p}$ sont en somme directe.

   c. En déduire que $\pi_{u,x} = \mathrm{P}$ et $\mathrm{E}_{u,x} = \bigoplus_{i=1}^p \mathrm{E}_{u,x_i}$.

3. En considérant la décomposition en facteurs irréductibles de π_u, montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

4. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

   (i) $\pi_u = \chi_u$.

   (ii) Il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{E}_{u,x} = \mathrm{E}$.

   (iii) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

   On dit dans ce cas que u est un endomorphisme *cyclique*.

Exercice 30 ★

Soient un entier $n \ge 2$ et $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Déterminer le polynôme minimal de U.
2. Réduire U.

Exponentielles

Exercice 31

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\exp(\mathrm{A})^\mathrm{T} = \exp(\mathrm{A}^\mathrm{T})$.
2. On suppose A symétrique dans cette question. Montrer que $\exp(\mathrm{A})$ est également symétrique.
3. Montrer que $\det(\exp(\mathrm{A})) > 0$.
4. On suppose A antisymétrique dans cette question. Montrer que $\exp(\mathrm{A}) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 32 ★

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(\mathrm{A})$ de deux manières.

Exercice 33 ★

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(\mathrm{A})$ de deux manières.

Exercice 34 ★★

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ nilpotent où E est un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Ker}(\exp(u) - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(\exp(u) - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \mathrm{Im}(u)$.