

DEVOIR SURVEILLÉ N°15

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+4t^2x^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+ . De plus, $\frac{1}{4t^2x^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4x^2} \cdot \frac{1}{t^2}$ est $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$. Par conséquent, $t \mapsto \frac{1}{1+4t^2x^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . A fortiori, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+4t^2x^2}$ converge.
- De plus, en effectuant le changement de variable linéaire $u = 2xt$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+4t^2x^2} = \frac{1}{2x} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2x} [\arctan(u)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4x}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $\frac{1}{1+4n^2x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4x^2} \cdot \frac{1}{n^2}$. Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente donc $\sum \frac{1}{1+4n^2x^2}$ converge. La fonction F est donc définie sur \mathbb{R}^* . Il est de plus évident que $F(-x) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ donc F est paire.

3. Posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+4n^2x^2}$.

- La série $\sum f_n$ converge simplement vers F sur $]a, b[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, b[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x \in]a, b[, f'_n(x) = -\frac{8n^2x}{(1+4n^2x^2)^2}$$

Ainsi

$$\forall x \in]a, b[, |f'_n(x)| \leq \frac{8n^2b}{(1+4n^2a^2)^2}$$

Par conséquent

$$\|f_n\|_{\infty,]a, b[} \leq \frac{8n^2b}{(1+4n^2a^2)^2}$$

Or $\frac{8n^2b}{(1+4n^2a^2)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b}{2a^2} \cdot \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente. On en déduit successivement que $\sum \frac{8n^2b}{(1+4n^2a^2)^2}$ puis $\sum \|f_n\|_{\infty,]a, b[}$ convergent. Ainsi $\sum f_n$ converge normalement et, a fortiori, uniformément sur $]a, b[$.

On peut alors conclure que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, b[$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. Puisque le caractère \mathcal{C}^1 est une notion locale, F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

4. Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $t \mapsto \frac{1}{1+4t^2x^2}$ est décroissante sur \mathbb{R}_+^* . Notamment

$$\forall t \in [n-1, n], \frac{1}{1+4n^2x^2} \leq \frac{1}{1+4t^2x^2}$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{4n^2x^2} = \int_{n-1}^n \frac{dt}{1+4n^2x^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{1+4t^2x^2}$$

En utilisant la relation de Chasles,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n-1}^n \frac{dt}{1+4t^2x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+4t^2x^2}$$

5. L'application $t \mapsto \frac{1}{1+4t^2x^2}$ est décroissante sur \mathbb{R}_+^* donc

$$\forall t \in [n, n+1], \frac{1}{1+4t^2x^2} \leq \frac{1}{1+4n^2x^2}$$

En intégrant

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{1+4t^2x^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{1+4n^2x^2} = \frac{1}{1+4n^2x^2}$$

puis, par relation de Chasles,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+4t^2x^2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} = 1 + F(x)$$

6. On a vu précédemment que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+4t^2x^2} = \frac{\pi}{4x}$$

D'après les questions précédentes,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{\pi}{4x} - 1 \leq F(x) \leq \frac{\pi}{4x}$$

Puisque $\frac{\pi}{4x} - 1 \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{4x}$, $F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{4x}$.

De plus, F est positive par positivité de l'intégrale donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq F(x) \leq \frac{\pi}{4x}$$

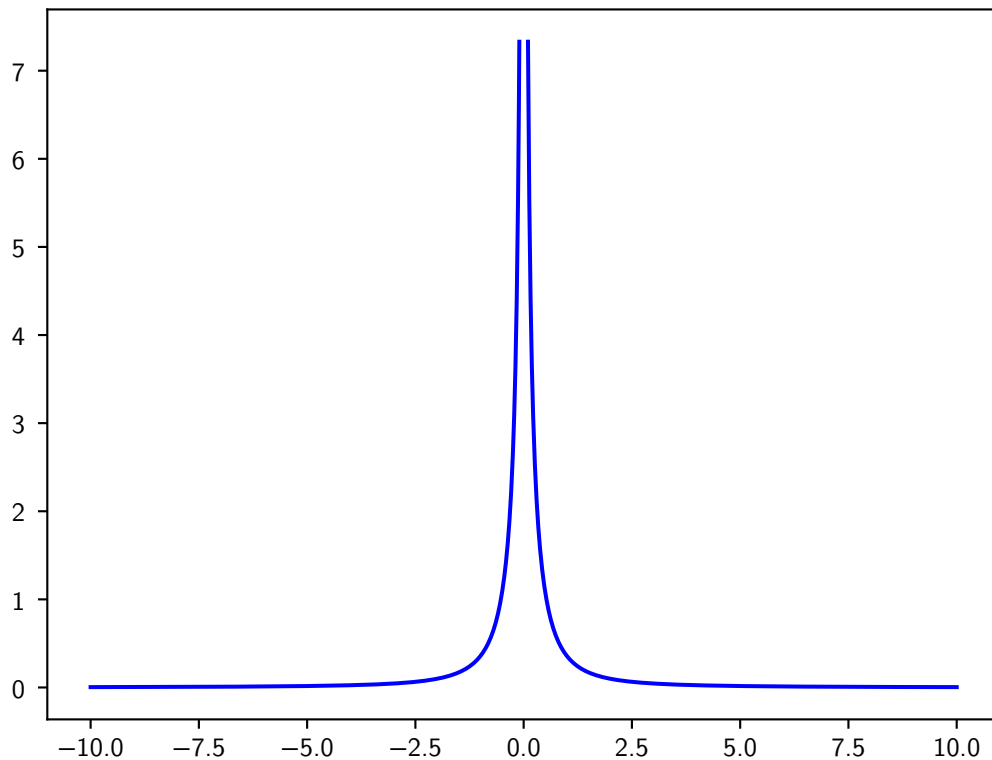
D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{+\infty} F = 0$.

7. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+4n^2x^2}$ est décroissante sur \mathbb{R}_+^* , $F = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est également décroissante sur \mathbb{R}_+^* (la convergence simple suffit).

REMARQUE. On aurait aussi pu arguer du fait que, d'après la question 3,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8nx}{(1+4n^2x^2)^2} \leq 0$$

Comme F est paire, F est croissante sur \mathbb{R}_+^* .



8. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{e^{2xt} - 1}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . De plus, $\frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-2xt})$ et $t \mapsto e^{-2xt}$ est intégrable en $+\infty$. Enfin, $\frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2x}$ donc $t \mapsto \frac{\sin t}{e^{2xt} - 1}$ est prolongeable par continuité en 0^+ . On en déduit que $t \mapsto \frac{\sin t}{e^{2xt} - 1}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* . Ainsi G est définie sur \mathbb{R}_+^* .

9. Posons $g(x, t) = \frac{\sin t}{e^{2xt} - 1}$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[$,

$$|g(x, t)| \leq \frac{|\sin t|}{e^{2at} - 1} = \varphi(t)$$

Comme précédemment, $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2a}$ et $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-2at})$ donc φ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Puisque $\mathbb{R}_+^* = \bigcup_{a \in \mathbb{R}_+^*} [a, +\infty[$, G est continue sur \mathbb{R}_+^* .

10. **Première version.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $t \mapsto \sin(t)e^{-\alpha t}$ est continue (par morceaux) sur \mathbb{R}_+ et $\sin(t)e^{-\alpha t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-\alpha t})$. Or $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ donc $t \mapsto \sin(t)e^{-\alpha t}$ également. On en déduit que I_α converge. Par double intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_\alpha &= -[\cos(t)e^{-\alpha t}]_0^{+\infty} - \alpha \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-\alpha t} dt \\ &= 1 - \alpha \left([\sin(t)e^{-\alpha t}]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-\alpha t} dt \right) \\ &= 1 - \alpha^2 I_\alpha \end{aligned}$$

On en déduit que $I_\alpha = \frac{1}{1 + \alpha^2}$.

Deuxième version. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $t \mapsto e^{it}e^{-\alpha t}$ est continue (par morceaux) sur \mathbb{R}_+ et $|e^{it}e^{-\alpha t}| = e^{-\alpha t}$ donc $t \mapsto e^{it}e^{-\alpha t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . De plus,

$$\int_0^{+\infty} e^{it}e^{-\alpha t} dt = \int_0^{+\infty} e^{(i-\alpha)t} dt = \frac{1}{i-\alpha} [e^{(i-\alpha)t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-i} = \frac{\alpha+i}{\alpha^2+1}$$

En effet, $|e^{it}e^{-\alpha t}| = e^{-\alpha t}$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(i-\alpha)t} = 0$. Puisque $\sin(t)e^{-\alpha t} = \text{Im}(e^{it}e^{-\alpha t})$, I_α converge et

$$I_\alpha = \text{Im}\left(\frac{\alpha + i}{\alpha^2 + 1}\right) = \frac{1}{\alpha^2 + 1}$$

11. Soit $(x, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Alors $e^{-2xt} \in [0, 1]$. Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2nxt} = \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-2xt})^n = \frac{e^{-2xt}}{1 - e^{-2xt}} = \frac{1}{e^{2xt} - 1}$$

puis

$$\frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t)e^{-2nxt}$$

12. On va utiliser le théorème d'intégration terme à terme. Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$ et posons $f_n : t \mapsto \sin(t)e^{-2nxt}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+^* .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|f_n(t)| \leq e^{-2nxt}$ donc f_n est intégrable sur \mathbb{R}_+^* ($nx > 0$).
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* vers la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{e^{2tx} - 1}$.
- La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{e^{2tx} - 1}$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant l'inégalité $|\sin t| \leq |t|$ et une double intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} |h_n(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} te^{-2nxt} dt = \frac{1}{4n^2x^2}$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge donc il en est de même de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_0^{+\infty} |h_n(t)| dt$.

Avec le théorème d'intégration terme à terme, on obtient via la question 10,

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-2nxt} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4n^2x^2} = F(x)$$

Problème 1

- 1** Il est évident que $\Delta(X^k) = kX^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- 2** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors $\Delta(P) = XP'$ donc $\Delta^2(P) = X\Delta(P)' = X(P' + XP'') = \Delta(P) + XP''$. Ainsi
- $$XP'' = \Delta^2(P) - \Delta(P) = \Delta \circ (\Delta - \text{Id})(P)$$
- 3** Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\Delta(X^k) = kX^k \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme Δ est linéaire et que $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.
- 4** Puisque $\Delta(X^k) = kX^k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la matrice de Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $D_n = \text{diag}(0, 1, 2, \dots, n)$.
- 5** D'après la question 2,

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \Phi(P) = \Delta \circ (\Delta - \text{Id})(P) + a\Delta(P) = \Delta^2(P) + (a-1)\Delta(P)$$

Ainsi $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$. Comme $(\mathcal{L}(\mathbb{R}[X]), +, \circ)$ est un anneau, Φ est une endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

- 6** Evident.
- 7** Comme $\Phi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n$, la matrice de Φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $D_n^2 + (a-1)D_n$ où D_n est la matrice de Δ_n dans cette même base canonique. Comme D_n est diagonale, il en est de même de $D_n^2 + (a-1)D_n$. Ainsi Φ_n est diagonalisable.
- 8** Evident. On trouve $\varphi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n + b \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.
- 9** On rappelle que la matrice D_n de Δ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\text{diag}((k)_{0 \leq k \leq n})$. On en déduit que la matrice de φ_n dans cette base est $\text{diag}((k^2 + (a-1)k + b)_{0 \leq k \leq n})$.

$$s^2 + (a-1)s + b = 0 \tag{1}$$

- 10** Si l'équation (1) admet deux racines entières distinctes, $P = X^2 + (a-1)X + b = (X - m_1)(X - m_2)$ avec $(X - m_1) \wedge (X - m_2) = 1$. D'après le lemme des noyaux,

$$\text{Ker } \varphi_n = \text{Ker } P(\Delta_n) = \text{Ker}(\Delta_n - m_1 \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) \oplus \text{Ker}(\Delta_n - m_2 \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$$

Comme la matrice de Δ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $D_n = \text{diag}(0, 1, \dots, n)$, $\text{Ker}(\Delta_n - m \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \text{vect}(X^m)$ pour tout $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On en déduit que $\text{Ker } \varphi_n = \text{vect}(X^{m_1}, X^{m_2})$.

- 11** Si l'équation (1) admet une racine entière $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi_n = P(\Delta_n) = (\Delta_n - m \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})^2$. La matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc $(D_n - m \text{Id}_{n+1})^2 = \text{diag}(((k-m)^2)_{0 \leq k \leq n})$. On en déduit que $\text{Ker } \varphi_n = \text{vect}(X^n)$.

- 12** On montre de même que si l'équation (1) n'admet pas de racine entière dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, alors $\text{Ker } \varphi_n = \{0\}$ (la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est diagonale à coefficients diagonaux non nuls).

Remarquons ensuite que $\text{Ker } \varphi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker } \varphi_n$.

- Si l'équation (1) n'admet pas de racine entière, alors $\text{Ker } \varphi_n = \{0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ et $\dim \text{Ker } \varphi = 0$.
- Si l'équation (1) admet une unique racine entière m , alors $\text{Ker } \varphi_n = \{0\}$ pour tout entier $n < m$ et $\text{Ker } \varphi_n = \text{vect}(X^m)$ pour tout entier $n \geq m$. Ainsi $\text{Ker } \varphi = \text{vect}(X^m)$ et $\dim \text{Ker } \varphi = 1$.
- Si l'équation (1) admet deux racines entières distinctes m_1 et m_2 , alors, en supposant $m_1 < m_2$, $\text{Ker } \varphi_n = \{0\}$ pour tout entier $n < m_1$, $\text{Ker } \varphi_n = \text{vect}(X^{m_1})$ pour tout entier n tel que $m_1 \leq n < m_2$ et $\text{Ker } \varphi_n = \text{vect}(X^{m_1}, X^{m_2})$ pour tout entier $n \geq m_2$. Ainsi $\text{Ker } \varphi = \text{vect}(X^{m_1}, X^{m_2})$ et $\dim \text{Ker } \varphi = 2$.

$$x^2 y'' + axy' + by = 0 \tag{2}$$

$$u'' + (a-1)u' + bu = 0 \tag{3}$$

- 13** L'équation différentielle (2) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2. De plus, elle est résolue sur les intervalles I et J.

L'ensemble des solutions de (2) sur I ou sur J est donc un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2.

14 Comme y est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* , $g = y \circ \exp$ l'est également sur \mathbb{R} . Remarquons alors que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$y(x) = g(\ln x) \quad y'(x) = \frac{1}{x} g'(\ln x) \quad y''(x) = -\frac{1}{x^2} g'(\ln x) + \frac{1}{x^2} g''(\ln x)$$

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 y''(x) + ax y'(x) + by(x) = 0$$

ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, -g'(\ln x) + g''(\ln x) + ag'(\ln x) + bg(\ln x) = 0$$

et, comme $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, g''(t) + (a-1)g'(t) + bg(t) = 0$$

Ainsi g est bien solution de l'équation différentielle (3) sur \mathbb{R} .

15 Comme g est deux fois dérivable sur \mathbb{R} , la fonction $y = g \circ \ln$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* . De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = y(e^t) \quad g'(t) = e^t y'(e^t) \quad g''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t)$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R}, g''(t) + (a-1)g'(t) + bg(t) = 0$$

ce qui donne

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t) + (a-1)e^t y'(e^t) + y(e^t) = 0$$

Comme $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 y''(x) + ax y'(x) + y(x) = 0$$

donc y est bien solution de (2) sur \mathbb{R}_+^* .

16 Supposons $a = 3$ et $b = 1$. L'équation caractéristique associée à (3) est alors $r^2 + 2r + 1 = 0$. Son unique racine est -1 donc les solutions de (3) sur \mathbb{R} sont les fonctions

$$t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{-t}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Les questions précédentes montrent alors que les solutions de (2) sur \mathbb{R}_+^* sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{\lambda \ln(x) + \mu}{x}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Supposons $a = 1$ et $b = 4$. L'équation caractéristique associée à (3) est alors $r^2 + 4 = 0$. Ses racines sont $2i$ et $-2i$ donc les solutions à valeurs réelles de (3) sur \mathbb{R} sont les fonctions

$$t \mapsto \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t), \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Les questions précédentes montrent alors que les solutions de (2) sur \mathbb{R}_+^* sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \cos(2 \ln x) + \mu \sin(2 \ln x), \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

17 Comme y est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_-^* , $h = y \circ (-\exp)$ l'est également sur \mathbb{R} . Remarquons alors que pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$,

$$y(x) = h(\ln(-x)) \quad y'(x) = \frac{1}{x} h'(\ln(-x)) \quad y''(x) = -\frac{1}{x^2} h'(\ln(-x)) + \frac{1}{x^2} h''(\ln(-x))$$

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 y''(x) + ax y'(x) + by(x) = 0$$

ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, -h'(\ln(-x)) + h''(\ln(-x)) + ah'(\ln(-x)) + bh(\ln(-x)) = 0$$

et, comme $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, h''(t) + (a-1)h'(t) + bh(t) = 0$$

Ainsi h est bien solution de l'équation différentielle (3) sur \mathbb{R} .

18 Réciproquement, on montre que, si h est solution de (3) sur \mathbb{R} , alors $y : x \mapsto h(\ln(-x))$ est solution de (2) sur \mathbb{R}_-^* . Pour $a = 1$ et $b = -4$, les solutions de (3) sur \mathbb{R} sont les fonctions

$$t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

On en déduit que les solutions de (2) sur \mathbb{R}_-^* sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{2\ln(-x)} + \mu e^{-2\ln(-x)}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

ou encore les fonctions

$$x \mapsto \lambda x^2 + \frac{\mu}{x^2}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

19 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Alors son rayon de convergence R est définie par

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0 \quad (4)$$

20 Pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \\ J'_0(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^{k-1} \\ J'_0(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} \end{aligned}$$

Comme J_0 est solution de PBEquaDiffLG08 :rep :eq :4,

$$\forall x \in]-R, R[, \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+2} = 0$$

ou encore

$$\forall x \in]-R, R[, \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^k + \sum_{k=2}^{+\infty} c_{k-2} x^k = 0$$

et enfin

$$c_1 x + \sum_{k=2}^{+\infty} (k^2 c_k + c_{k-2}) x^k = 0$$

Par unicité du développement en série entière, $c_1 = 0$ et $c_k = -\frac{1}{k^2} c_{k-2}$ pour tout entier $k \geq 2$. On sait de plus que $c_0 = 1$.

On en déduit par récurrence que $c_{2k+1} = 0$ et $c_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

21 On utilise la règle de d'Alembert. Pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\left| \frac{c_{2k+2} x^{2k+2}}{c_{2k} x^{2k}} \right| = \frac{x^2}{(2k+2)^2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum c_k x^k$ est $+\infty$.

22 Supposons que (J_0, f) soit liée dans l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, r[$. Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que

$$\forall x \in]0, r[, \alpha J_0(x) + \beta f(x) = 0$$

Supposons $\beta = 0$. Alors $\alpha \neq 0$ car $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. On en déduit que $J_0(x) = 0$ pour tout $x \in]0, r[$. Cela signifierait que $c_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ par unicité du développement en série entière, ce qui contredit l'expression de c_{2k} trouvée précédemment. Ainsi $\beta = 0$ et donc

$$\forall x \in]0, r[, f(x) = -\frac{\alpha}{\beta} J_0(x)$$

Comme J_0 est continue en 0, elle est bornée au voisinage de 0 et donc f également.

23 Si $\sum \beta_k x^k$ est solution, alors, en posant $R = \min(R_\alpha, R_\beta) > 0$, on obtient par produit de Cauchy,

$$\forall x \in]-R, R[, \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} \right) x^n = 1$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $\alpha_0 = 1$, on en déduit le résultat voulu.

24 Puisque $0 < r < R_\alpha$, la suite $(\alpha_k r^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée par définition du rayon de convergence. Il existe donc $M > 0$ tel que $|\alpha_k r^k| \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ i.e. $|\alpha_k| \leq \frac{M}{r^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} \beta_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

25 Il existe une unique $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant (5) : c'est la suite définie par $\beta_0 = 1$ et la relation de récurrence $\beta_n = -\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarquons qu'alors $\beta_1 = -\alpha_1 \beta_0 = -\alpha_1$. Mais alors,

$$|\beta_1| = |\alpha_1| \leq \frac{M}{r^1} = \frac{M(M+1)^{1-1}}{r^1}$$

Supposons qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, |\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$$

Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |\beta_n| &= \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| |\beta_{n-k}| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_{n-k}| |\beta_k| \\ &= |\alpha_n| + \sum_{k=1}^{n-1} |\alpha_{n-k}| |\beta_k| \\ &\leq \frac{M}{r^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{M}{r^{n-k}} \cdot \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k} \\ &= \frac{M}{r^n} + \frac{M^2}{r^n} \sum_{k=1}^{n-1} (M+1)^{k-1} \\ &= \frac{M}{r^n} + \frac{M^2}{r^n} \sum_{k=0}^{n-2} (M+1)^k \\ &= \frac{M}{r^n} + \frac{M^2}{r^n} \cdot \frac{(M+1)^{n-1} - 1}{(M+1) - 1} \\ &= \frac{M}{r^n} + \frac{M}{r^n} ((M+1)^{n-1} - 1) \\ &= \frac{M}{r^n} (M+1)^{n-1} \end{aligned}$$

On en déduit bien par récurrence forte que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, |\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$$

26 En tant que série géométrique le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k} x^k$ est $\frac{r}{M+1}$. La question précédente permet alors d'affirmer que $R_\beta \geq \frac{r}{M+1}$.

27 Pour tout $x \in]0, r[$,

$$\begin{aligned} x^2 y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x) &= x^2 \lambda''(x) J_0(x) + 2x^2 \lambda'(x) J_0'(x) + x^2 \lambda(x) J_0''(x) + x \lambda'(x) J_0(x) + x \lambda(x) J_0'(x) + x^2 \lambda(x) J_0(x) \\ &= \lambda(x) (x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x)) + x^2 \lambda''(x) J_0(x) + 2x^2 \lambda'(x) J_0'(x) + x \lambda'(x) J_0(x) \\ &= x^2 \lambda''(x) J_0(x) + 2x^2 \lambda'(x) J_0'(x) + x \lambda'(x) J_0(x) \end{aligned}$$

car J_0 est solution de (4).

Par ailleurs, en posant $z : x \mapsto x J_0^2(x) \lambda'(x)$, pour tout $x \in]0, r[$,

$$\begin{aligned} z'(x) &= J_0^2(x) \lambda'(x) + 2x J_0'(x) J_0(x) + x J_0^2(x) \lambda''(x) \\ &= J_0(x) (J_0(x) \lambda'(x) + 2x J_0'(x) + x J_0(x) \lambda''(x)) \\ &= J_0(x) (x^2 y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x)) \end{aligned}$$

Si y est solution de (4) sur $]0, r[$, z' est donc nulle sur $]0, r[$.

Réciproquement, supposons que z' est nulle sur $]0, r[$. Posons $w : x \mapsto x^2 y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x)$. Supposons qu'il existe $a \in]0, r[$ tel que $w(a) \neq 0$. Par continuité de w , w ne s'annulerait pas sur un intervalle ouvert non vide contenant a et inclus dans $]0, r[$. Par conséquent, J_0 serait nulle sur cet intervalle et donc J_0' également. On en déduirait que $J_0(a) = J_0'(a) = 0$. Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, J_0 serait constamment nulle sur \mathbb{R}_+^* . Par continuité de J_0 en 0, on aurait donc $c_0 = J_0(0) = 1$, ce qui n'est pas. On a donc prouvé par l'absurde que z' était nulle sur $]0, r[$.

28 Comme J_0 est développable en une série entière de rayon de convergence infini, on en déduit par produit de Cauchy que J_0^2 également. De plus, $J_0^2(0) = c_0^2 = 1$.

29 J_0^2 est développable en série entière et $J_0^2(0) = 1$ donc, d'après ce qui précède, il existe une série entière $\sum_{k \in \mathbb{N}} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $r > 0$ tel que

$$\forall x \in]-r, r[, J_0^2(x) \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k = 1$$

ou encore, comme $\beta_0 = 1$,

$$\forall x \in]-r, r[, x J_0^2(x) \left(\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k x^{k-1} \right) = 1$$

En posant $\lambda : \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k}{k} x^k$ qui est bien de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, r[$, on a donc

$$\forall x \in]0, r[, x J_0^2(x) \lambda'(x) = 1$$

Notamment, $x \mapsto x J_0^2(x) \lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0, r[$. D'après la question 27, $x \mapsto \lambda(x) J_0(x)$ est solution de 4 sur $]0, r[$.

Comme J_0 est développable en une série entière de rayon de convergence infini, on obtient par produit de Cauchy, que $\eta x \mapsto J_0(x) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k}{k} x^k$ est développable en série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à r . En posant $R_\eta = r$, on obtient bien que $x \mapsto J_0(x) \lambda(x) = \eta(x) + J_0(x) \ln(x)$ est solution de 4 sur $]0, R_\eta[$.

30 Posons $f : x \in]0, R_\eta[\mapsto \eta(x) + J_0(x) \ln(x)$. η est continue en 0 comme somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$. De même, J_0 est continue en 0 de sorte que $\lim_{x \rightarrow 0} J_0 = J_0(0) = 1$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} f = -\infty$. Notamment, f n'est pas bornée au voisinage de 0. D'après la question 22, la famille (J_0, f) est libre. L'ensemble des solutions de 4 sur $]0, R_\eta[$ étant un espace vectoriel de dimension 2, (J_0, f) en est donc une base. L'ensemble des solutions de 4 sur $]0, R_\eta[$ est donc $\text{vect}(J_0, f)$.