Nombres complexes

1 Corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1.1 Construction de $\mathbb{C}$

Construction de $\mathbb{C}$

On munit $\mathbb{R}^2$ de deux lois internes $+$ et $\times$ de la manière suivante. Pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, on pose

$$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b)\times(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

On vérifie que $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois est un corps. On peut alors identifier le sous-corps $\mathbb{R}\times\{0\}$ de $\mathbb{R}^2$ au corps $\mathbb{R}$ puisque pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,0)$$
$$(a,0)\times(b,0) = (ab,0)$$

On convient de noter $\mathbb{C}$ le corps $\mathbb{R}^2$ et on appelle **nombres complexes** ses éléments.
On convient également de noter un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sous la forme $a+ib$. En particulier, $i = (0,1)$ et

$$i^2 = (0,1)^2 = (-1,0) = -1$$

Remarque. L'écriture d'un complexe z sous la forme $a+ib$ s'appelle la forme **cartésienne** ou **algébrique** de z.
La construction de $\mathbb{C}$ montre que la forme cartésienne est unique. Autrement dit, pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$

$$a+ib = c+id \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

De la construction de $\mathbb{C}$, on déduit les règles de calcul suivantes.

Règles de calcul

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$$
$$(a+ib)\times(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

Définition 1.1 Parties réelle et imaginaire

Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Les réels a et b sont appelés respectivement **partie réelle** et **partie imaginaire** de z. On note :

$$a = \mathrm{Re}(z) \qquad \text{et} \qquad b = \mathrm{Im}(z)$$

Remarque. Un nombre complexe de partie imaginaire nulle est un **réel** et un nombre complexe de partie réelle nulle est un **imaginaire pur**.

Proposition 1.1

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2)$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im} z$$

Remarque. On peut résumer ce qui précède de la manière suivante :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \operatorname{Re}(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda \operatorname{Re}(z_1) + \mu \operatorname{Re}(z_2) \\ \operatorname{Im}(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda \operatorname{Im}(z_1) + \mu \operatorname{Im}(z_2) \end{cases}$$

On dira plus tard que les applications Re : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \operatorname{Re}(z) \end{array} \right.$ et Im : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \operatorname{Im}(z) \end{array} \right.$ sont des formes $\mathbb{R}$-linéaires.

Attention ! Soit $(z_1, z_2)^2 \in \mathbb{C}$. En général,

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2)$$

Autrement dit, la partie réelle (resp. imaginaire) d'une **somme** est bien la somme des parties réelles (resp. imaginaires) mais la partie réelle (resp. imaginaire) d'un **produit** n'est pas en général le produit des parties réelles (resp. imaginaires).

Définition 1.2

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z^0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z^n = \underbrace{z \times z \times \cdots \times z}_{n \text{ fois}}$$

Si $z \neq 0$, on pose

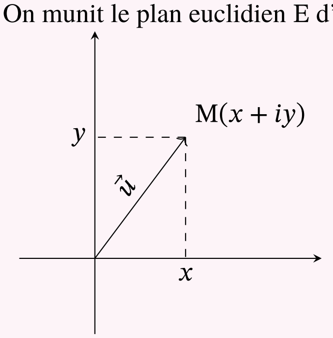
$$\forall n \in \mathbb{N},\ z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

Attention ! On ne peut parler que de puissances entières d'un nombre complexe. Si $z \in \mathbb{C}$, des notations telles que $z^{\frac{1}{3}}$ ou $z^{-\frac{3}{2}}$ n'ont **AUCUN SENS**.

1.2 Le plan complexe

Définition 1.3 Image d'un complexe et affixe d'un point ou d'un vecteur

On munit le plan euclidien E d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.



- On appelle **image** du complexe z le point M de coordonnées $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ dans le repère orthonormé $\mathcal{R}$.
- On appelle **affixe** du point M de coordonnées (x, y) dans le repère orthonormé $\mathcal{R}$ le complexe $z = x + iy$.
- On appelle **affixe** du vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ le complexe $z = x + iy$.

Remarque. On parle de **plan complexe** plutôt que de plan euclidien quand on idientifie les points par leur affixe plutôt que par leurs coordonnées.

Exercice 1.1

Géométriquement, à quoi correspond l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\mathrm{Re}(z) = a$ ou $\mathrm{Im}(z) = b$ où a et b sont des réels ?

Proposition 1.2

Soient A et B deux points d'affixes respectifs a et b. Alors le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour affixe $b - a$.

1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 1.4 Conjugué d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle **conjugué** de z le nombre complexe $\overline{z}$ défini par :

$$\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$$

On a par conséquent

$$\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\overline{z}) = -\,\mathrm{Im}(z)$$

Proposition 1.3 Propriétés de la conjugaison

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les propriétés suivantes.

- $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\,\mathrm{Im}(z)$.
- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
- $\overline{\overline{z}} = z$.

Méthode **Caractérisation des réels et des imaginaires purs**

Pour caractériser les réels et les imaginaires purs, on utilise souvent les propriétés suivantes.

- z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Proposition 1.4 Conjugaison et opérations

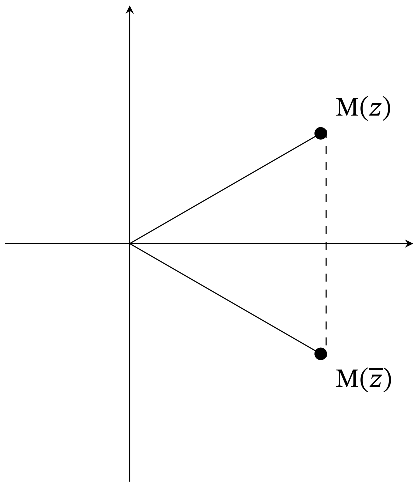
Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \text{ si } z_2 \neq 0$$

Remarque. Ces propriétés signifient que la conjugaison est un morphisme de corps (c'est même un isomorphisme).

Interprétation géométrique du conjugué



Si z est l'affixe d'un point M, alors $\overline{z}$ est l'affixe du symétrique $\overline{\mathrm{M}}$ de M par rapport à l'axe des abscisses.

1.4 Module d'un nombre complexe

Définition 1.5 Module d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $z\overline{z}$ est un réel positif. On appelle **module** de z le réel positif défini par :

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

Proposition 1.5 Propriétés du module

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les propriétés suivantes.

- $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$.
- $z = 0$ si et seulement si $|z| = 0$.
- $|z| = |\overline{z}|$.
- Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.
- $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

Proposition 1.6 Module et opérations

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.
Inégalités triangulaires

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad\qquad |z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$$

De plus, $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_1 = \lambda z_2$ ou $z_2 = \lambda z_1$.
Module d'un produit et d'un quotient

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \qquad\qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ si } z_2 \neq 0$$

Par récurrence, on prouve également que pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.

Remarque. A l'inverse de la partie réelle et de la partie imaginaire, le module se comporte bien avec le produit mais pas avec la somme.

Attention ! On a bien $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \left(z_1 = \lambda z_2 \ \underline{\text{ou}}\ z_2 = \lambda z_1\right)$.
En effet, si $z_1 = 1$ et $z_2 = 0$, on a bien $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ et $z_2 = \lambda z_1$ avec $\lambda = 0$ mais il n'existe évidemment pas de réel positif λ tel que $z_1 = \lambda z_2$.
Néanmoins, si z_1 et z_2 sont tous deux **non nuls**, on peut se contenter d'une des deux conditions $z_2 = \lambda z_1$ ou $z_1 = \lambda z_2$.

Méthode **Forme algébrique d'une fraction**

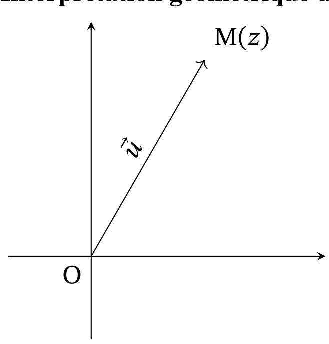
Pour mettre une fraction de deux complexes sous forme algébrique, on multiplie le dénominateur par son conjugué et on utilise le fait que pour $z \in \mathbb{C}$, $z\bar{z} = |z|^2$.

Exercice 1.2

Mettre sous forme algébrique les fractions suivantes.

$$\frac{2 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2i}, \quad \frac{(2+i)(3+2i)}{2-i}, \quad \frac{3+4i}{(2+3i)(4+i)}$$

Interprétation géométrique du module



Si z est un nombre complexe d'image le point M, alors $|z| = \mathrm{OM}$.
Si $\vec{u}$ est un vecteur d'affixe z, $|z| = \|\vec{u}\|$.

Proposition 1.7

Si A et B sont deux points d'affixes respectifs a et b, alors $\mathrm{AB} = |b - a|$.

Cercles et disques en complexe

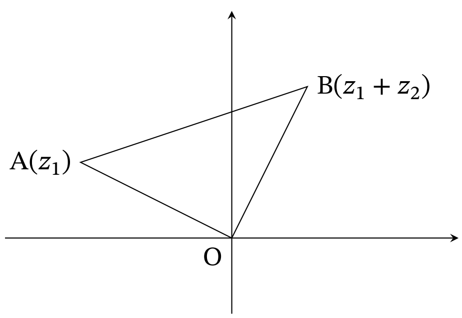
Soient A un point d'affixe a et $r \in \mathbb{R}_+$.

- L'ensemble des points d'affixes z vérifiant $|z - a| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r.
- L'ensemble des points d'affixes z vérifiant $|z - a| \leq r$ est le disque fermé (circonférence incluse) de centre A et de rayon r.
- L'ensemble des points d'affixes z vérifiant $|z - a| < r$ est le disque ouvert (circonférence exclue) de centre A et de rayon r.

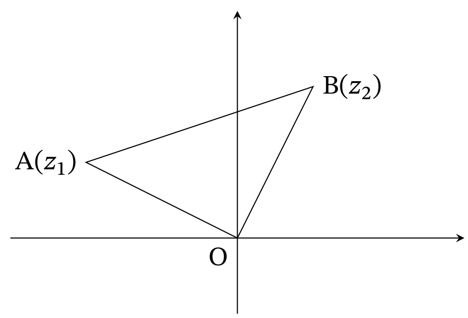
Exercice 1.3 ⋆ **Modules**

Déterminer les nombres complexes z tels que z, $1/z$ et $1 + z$ soient de même module.

Interprétation géométrique de l'inégalité triangulaire



L'inégalité triangulaire $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ s'interprète par $\mathrm{OB} \leq \mathrm{OA} + \mathrm{AB}$.



L'inégalité triangulaire $|z_2 - z_1| \geq ||z_2| - |z_1||$ s'interprète par $\mathrm{AB} \geq |\mathrm{OB} - \mathrm{OA}|$.

2 Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

2.1 Définition de $\mathbb{U}$

Définition 2.1

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

Remarque. Les propriétés du module montre que $\mathbb{U}$ muni de la loi $\times$ est un groupe.

Remarque. L'image de $\mathbb{U}$ est le cercle de centre O et de rayon 1, c'est-à-dire le cercle trigonométrique.

Proposition 2.1

Soit $u \in \mathbb{C}$. Alors

$$u \in \mathbb{U} \iff \overline{u} \in \mathbb{U} \iff \frac{1}{u} = \overline{u}$$

Exercice 2.1 ⋆ **Des réels**

Soient a et b de module 1 tels que $a \neq \pm b$.

1. Prouver que $\dfrac{1+ab}{a+b} \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$\frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b} \in i\mathbb{R}.$$

2.2 Notation $e^{i\theta}$

Définition 2.2

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le complexe $\cos\theta + i\sin\theta$.

Proposition 2.2

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$. Réciproquement, pour tout $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = e^{i\theta}$. De manière plus condensée :
$$\mathbb{U} = \left\{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

Proposition 2.3 Conjugué de $e^{i\theta}$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors
$$\overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

Proposition 2.4 Relations d'Euler

Pour $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Proposition 2.5

Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors on a

- $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$,
- $e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}$.

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors
$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{ni\theta}$$

Remarque. En passant aux parties réelle et imaginaire dans l'égalité $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$, on retrouve les formules d'addition pour sin et cos.

La première assertion signifie que l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{U}, \theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme de groupes.

Morphisme de groupes

Soit $(G,*)$ et $(H,\circ)$ deux groupes et $\phi : G \to H$. On dit que ϕ est un morphisme de groupes si

$$\forall g_1, g_2 \in G, \phi(g_1 * g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$$

Attention ! L'égalité $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{ni\theta}$ n'est valable que pour $n \in \mathbb{Z}$. L'expression $\left(e^{i\theta}\right)^n$ n'a dailleurs **AUCUN SENS** si $n \notin \mathbb{Z}$. Par pitié, évitez-moi les horreurs du style suivant :

$$e^{i\alpha} = e^{\frac{\alpha}{2\pi}2i\pi} = \left(e^{2i\pi}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi}} = 1^{\frac{\alpha}{2\pi}} = 1$$

Autrement dit, $\mathbb{U}$ serait égal à $\{1\}$, ce qui est manifestement faux.

Proposition 2.6 Formule de Moivre

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

Proposition 2.7

Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \iff \theta_1 \equiv \theta_2[2\pi]$$

Méthode Formule de l'arc moitié

Il s'agit de factoriser une somme ou une différence de deux complexes de module 1. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}$$
$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}$$

On retiendra en particulier que pour $t \in \mathbb{R}$,

$$1 + e^{it} = 2\cos\frac{t}{2}e^{\frac{it}{2}}$$
$$1 - e^{it} = -2i\sin\frac{t}{2}e^{\frac{it}{2}}$$

Remarque. En passant aux parties réelle et imaginaire dans les formules de l'arc-moitié, on retrouve les formules de factorisation de $\cos a \pm \cos b$ et $\sin a \pm \sin b$.

2.3 Argument d'un complexe non nul

Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. D'après ce qui précède, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

Définition 2.3 Argument d'un complexe non nul

Soit z un complexe **non nul**. Tout réel θ tel que $z = |z|\, e^{i\theta}$ est appelé un **argument** de z.

Proposition 2.8

Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et θ_0 un argument de z. L'ensemble des arguments de z est

$$\theta_0 + 2\pi\mathbb{Z} = \{\theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Proposition 2.9

Soit $(z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$. Alors

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) \equiv \arg(z_2)[2\pi] \end{cases}$$

Remarque. Il existe donc une infinité d'arguments d'un complexe non nul. On sait cependant que tous ces arguments diffèrent d'un multiple entier de 2π : on dit alors que l'argument d'un complexe est défini **modulo** 2π. Si θ est un argument d'un complexe non nul z, on note

$$\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$$

De plus, tout complexe non nul admet un unique argument dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$: on l'appelle l'**argument principal**.

Remarque. Tout complexe **non nul** z peut donc s'écrire sous la forme $re^{i\theta}$ avec r un réel **positif** et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors r est nécessairement le module de z et θ un argument de z. L'écriture sous la forme $re^{i\theta}$ s'appelle la forme **trigonométrique** ou **polaire** de z.

Exercice 2.2

Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants :

$$1+i, \quad \frac{\sqrt{3}+i}{i-1}, \quad \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2+2i}$$

Exercice 2.3 **Puissances**

Calculer α^n pour $\alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Attention ! Dans l'écriture d'un complexe z sous forme trigonométrique $re^{i\theta}$, on exige que r soit un réel **positif**. Ainsi $-2e^{i\frac{\pi}{4}}$ n'est pas la forme trigonométrique de $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$. Sa forme trigonométrique est $2e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Proposition 2.10

Soient z_1, z_2 deux complexes non nuls. Alors

$$\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi] \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi]$$

Par récurrence, on a également pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$\arg(z^n) \equiv n \arg(z)[2\pi]$$

Notons également que pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

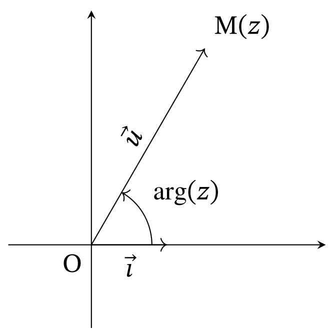
$$\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi] \quad \text{et} \quad \arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi[2\pi]$$

Méthode **Caractérisation des réels et des imaginaires purs par l'argument**

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

- z est réel si et seulement si $\arg(z) \equiv 0[\pi]$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Interprétation géométrique de l'argument



Si z est un nombre complexe non nul d'image le point M, alors $\arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{\imath}, \overrightarrow{\mathrm{OM}})$.
Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul d'affixe z, alors $\arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{\imath}, \vec{u})$.

Proposition 2.11 Lien avec les coordonnées polaires

Le point M d'affixe $\rho e^{i\theta}$ a pour coordonnées polaires $[\rho, \theta]$.

Proposition 2.12

Soient A et B deux points distincts d'affixes respectifs a et b. Alors $\arg(b-a)$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{\imath}, \overrightarrow{\mathrm{AB}})$.

Exercice 2.4

Soient A un point d'affixe a et $\theta \in \mathbb{R}$. Quel est l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie :

1. $\arg(z-a) \equiv \theta[2\pi]$?
2. $\arg(z-a) \equiv \theta[\pi]$?

Proposition 2.13

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectifs z_1 et z_2. Alors $\arg \frac{z_2}{z_1}$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

Corollaire 2.1

Soient A, B et M trois distincts points d'affixes respectifs a, b et z. Alors $\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{\mathrm{MA}}, \overrightarrow{\mathrm{MB}})$.

2.4 Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

Définition 2.4 Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine $n^{\text{ème}}$** de l'unité tout nombre complexe tel que $z^n = 1$. Ce sont des éléments de $\mathbb{U}$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

Remarque. $(\mathbb{U}_n, \times)$ a une structure de groupe. C'est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{U}, \times)$.

Proposition 2.14

Il existe exactement n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité qui sont les complexes

$$\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \qquad \text{avec} \qquad k \in [\![0, n-1]\!]$$

De manière plus condensée,

$$\mathbb{U}_n = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

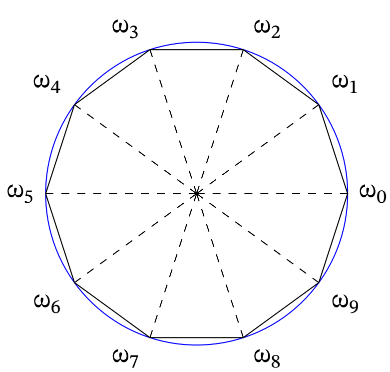
Remarque. On peut remplacer $[\![0, n-1]\!]$ par tout ensemble de n entiers consécutifs.

Remarque. Les ω_k sont toutes des puissances de $\omega = \omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Plus précisément, $\omega_k = \omega^k$.

Exemple 2.1

Les racines cubiques de l'unité sont 1, j et j^2 avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Interprétation géométrique des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité



Les images des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité sont disposées régulièrement sur le cercle trigonométrique (sur la figure, $n = 10$). Elles sont les sommets d'un **polygone régulier à n côtés**.

Exercice 2.5

Déterminer la somme et le produit des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

Remarque. Géométriquement, il est facile de voir que la somme des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité est nulle puisque le centre de gravité du polygône régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique est l'origine, qui a pour affixe 0 (cf. plus loin l'expression du barycentre en complexes).

Définition 2.5 Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe non nul

Soient a un complexe non nul et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine $n^{\text{ème}}$ de a tout complexe z tel que $z^n = a$.

Proposition 2.15

Soient a un complexe non nul et $n \in \mathbb{N}^*$. Si z_0 est une racine $n^{\text{ème}}$ de a alors l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de a est

$$z_0\mathbb{U}_n = \{z_0\omega, \omega \in \mathbb{U}_n\}$$

Corollaire 2.2

Soit a un complexe non nul de module r et d'argument θ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors a admet exactement n racines $n^{\text{èmes}}$ qui sont

$$r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{avec} \qquad k \in [\![0, n-1]\!]$$

Remarque. Le réel $r^{\frac{1}{n}}$ peut aussi se noter $\sqrt[n]{r}$.

Méthode **Déterminer les racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe**

Pour déterminer les racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe a, on met a sous **forme trigonométrique** et on utilise le corollaire précédent.

Exercice 2.6

Déterminer les racines $5^{\text{èmes}}$ de -4.

Exercice 2.7 **Deux équations**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $(z+i)^3 + iz^3 = 0$;
2. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

3 Equations du second degré

3.1 Racines carrées d'un complexe

Proposition 3.1 Racines carrées d'un complexe

Tout complexe non nul admet deux racines carrées opposées.

Remarque.

- Le complexe 0 n'admet que lui-même comme racine carrée.
- Si a est un réel strictement positif, les racines carrées de a sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

➢ Si a est un réel strictement négatif, les racines carrées de a sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

Attention ! La notation $\sqrt{a}$ n'a de sens que pour $a \in \mathbb{R}_+$: on prendra garde à ne jamais écrire $\sqrt{z}$ si z est un complexe quelconque. Par ailleurs, un complexe admet en général deux racines carrées : on parlera donc d'**une** racine carrée d'un complexe et non de **la** racine carrée d'un complexe.
Quand on parle de **la** racine carrée d'un réel positif, c'est qu'on parle de sa racine carrée positive. Dans le cas complexe, rien ne nous permet de différencier les deux racines (pas de relation d'ordre).

Il existe deux méthodes pour déterminer en pratique les racines carrées d'un complexe.

Méthode **Racines carrées : méthode trigonométrique**

Si on connaît la forme trigonométrique d'un complexe non nul $z = re^{i\theta}$, alors les racines carrées de z sont $\pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Méthode **Racines carrées : méthode algébrique**

Soit $Z = X + iY$ une racine carrée d'un complexe non réel $z = a + ib$ (X, Y, a, b sont des réels). On a donc $Z^2 = z$. On considère la partie réelle et le module de Z^2 et z et on obtient

$$X^2 - Y^2 = a \quad \text{et} \quad X^2 + Y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

On détermine les valeurs de X^2 et Y^2, ce qui nous donne 4 solutions possibles pour le couple (X, Y). De plus, en considérant la partie imaginaire de Z^2 et z, on a $2XY = b$. Donc XY est du signe de b et on a finalement plus que 2 solutions.

Exercice 3.1

Déterminer les racines carrées de $1 + i$ par la méthode algébrique et par la méthode trigonométrique. En déduire des valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$.

3.2 Résolution des équations du second degré

Proposition 3.2 Equation du second degré à coefficients complexes

Soient a, b, c trois complexes avec $a \neq 0$. Considérons l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

et $\Delta = b^2 - 4ac$ son **discriminant**.

➢ Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux racines distinctes

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

où δ est une racine carrée de Δ.

➢ Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une racine double

$$z = -\frac{b}{2a}$$

Proposition 3.3 Equation du second degré à coefficients réels

Soient a, b, c trois **réels** avec $a \neq 0$. Considérons l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

et $\Delta = b^2 - 4ac$ son **discriminant**.

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines **réelles** distinctes

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines **complexes** distinctes et **conjuguées**

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une racine **réelle** double

$$z = -\frac{b}{2a}$$

Exercice 3.2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0.$$

Comme pour le cas réel, on a un lien entre les racines d'une équation du second degré et ses coefficients.

Proposition 3.4 Lien coefficients-racines

Soient a, b, c trois complexes avec $a \neq 0$. Alors deux complexes z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ si et seulement si

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

L'exemple suivant est classique et à connaître.

Exemple 3.1

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Les racines de $z^2 - 2\cos\theta + 1 = 0$ sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

4 Complexes et géométrie

4.1 Colinéarité, parallélisme, alignement et orthogonalité

Proposition 4.1 Colinéarité et orthogonalité de vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectifs z_1 et z_2. Alors

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff \dfrac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$ (si $z_1 \neq 0$) $\iff \overline{z_1} z_2 \in \mathbb{R}$;
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\iff \dfrac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}$ (si $z_1 \neq 0$) $\iff \overline{z_1} z_2 \in i\mathbb{R}$.

Proposition 4.2 Parallélisme et perpendicularité de droites

Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectifs a, b, c et d. On suppose $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{C} \neq \mathrm{D}$. Alors

➢ (AB) et (CD) parallèles $\iff \dfrac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R} \iff (d-c)\overline{(b-a)} \in \mathbb{R}$;

➢ (AB) et (CD) perpendiculaires $\iff \dfrac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R} \iff (d-c)\overline{(b-a)} \in i\mathbb{R}$.

Proposition 4.3 Alignement et angle droit

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs a, b, c. Alors

➢ A, B, C alignés $\iff \dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$ (si A et B sont distincts) $\iff (c-a)\overline{(b-a)} \in \mathbb{R}$;

➢ $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est un angle droit $\iff \dfrac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$ (si A et B sont distincts) $\iff (c-a)\overline{(b-a)} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 4.1

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes 1, z^2 et z^4 soient alignés.

4.2 Transformations géométriques

Définition 4.1

On appelle **similitude directe** de centre Ω, d'angle θ et de rapport λ, la composée s de la rotation r de centre Ω et d'angle θ et de l'homothétie h de centre Ω et de rapport λ. De plus, r et h commutent i.e.

$$s = h \circ r = r \circ h$$

Proposition 4.4

Soit f une transformation du plan.

- Si f est la translation de vecteur $\vec{u}$, alors f associe à tout point d'affixe z le point d'affixe $z+b$ où b est l'affixe de $\vec{u}$.
- Si f est la similitude directe de centre Ω, d'angle θ et de rapport λ, alors f associe à tout point d'affixe z le point d'affixe $\lambda e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$ où ω est l'affixe de Ω.

Proposition 4.5

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Notons $f : \mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(az+b)$.

- Si $a = 1$, alors f est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, alors il existe un unique $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega = a\omega + b$. f est la similitude de centre $\Omega(\omega)$, d'angle $\arg(a)$ et de rapport $|a|$.

Remarque. Si $a \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, alors f est une rotation de centre Ω.
Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors f est une homothétie de centre Ω.

Exercice 4.2

Déterminer les complexes z tels que z, z^2 et z^3 forment un triangle équilatéral.

Proposition 4.6

L'application $\mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(\overline{z})$ est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Exercice 4.3

A quelle application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont associées

a. la symétrie par rapport à l'origine,

b. la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées,

c. la symétrie par rapport à la première bissectrice ?

5 Applications à la trigonométrie

5.1 Linéarisation

Méthode **Linéarisation de** $\cos^m\theta\sin^n\theta$

Il s'agit d'exprimer $\cos^m\theta\sin^n\theta$ comme une combinaison linéaire de $\cos k\theta$ et $\sin k\theta$ avec $k \in \mathbb{N}$. On utilise pour cela les relations d'Euler. On écrit

$$\cos^m\theta\sin^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^m\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^n$$

puis on développe et on regroupe les termes conjugués.

Exercice 5.1

Linéariser $\sin^4\theta$.

5.2 Développement

Méthode **Développement de** $\cos n\theta$ **et** $\sin n\theta$

Il s'agit d'exprimer $\cos n\theta$ ou $\sin n\theta$ en fonction de puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$. On utilise pour cela la formule de Moivre. On écrit

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

puis on développe et on considère les parties réelle et imaginaire.

Exercice 5.2

Développer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$.

Polynômes de Tchebycheff

En utilisant la formule de Moivre, on prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n vérifiant $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Plus précisément

$$T_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k}(1-X^2)^k$$

On peut également vérifier que la suite (T_n) est définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et par la relation de récurrence $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

5.3 Sommes trigonométriques

Il s'agit de sommes faisant intervenir les fonctions trigonométriques. Une idée générale est de considérer la somme à calculer comme la partie réelle ou imaginaire d'une somme faisant intervenir des exponentielles complexes qui sera peut-être plus facile à calculer.

Méthode **Sommes trigonométriques**

On traite un exemple standard à savoir le calcul des sommes :

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta + \phi) \quad \text{et } I_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta + \phi)$$

où θ et Φ sont deux réels. Pour cela, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{i(k\theta+\phi)}$$

et on remarque que $R_n = \operatorname{Re}(S_n)$ et $I_n = \operatorname{Im}(S_n)$. On écrit d'abord que :

$$S_n = e^{i\phi} \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$$

et on remarque que la somme est une série géométrique de raison $e^{i\theta}$. On doit alors distinguer deux cas.

- Cas $e^{i\theta} = 1$ i.e. $\theta \equiv 0[2\pi]$.
  Alors on a évidemment
  $$R_n = (n+1)\cos\phi \text{ et } I_n = (n+1)\sin\phi.$$
- Cas $e^{i\theta} \neq 1$ i.e. $\theta \not\equiv 0[2\pi]$.
  Alors
  $$S_n = e^{i\phi}\frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}$$
  On utilise la formule de l'arc moitié et on obtient :
  $$S_n = e^{i\left(\phi + \frac{n}{2}\theta\right)} \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$
  On obtient donc :
  $$R_n = \cos\left(\phi + \frac{n}{2}\theta\right)\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ et } I_n = \sin\left(\phi + \frac{n}{2}\theta\right)\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

On peut être amené à effectuer une linéarisation préliminaire.

Exercice 5.3

Simplifier $\sum_{k=0}^{n} \cos^2 k\theta$.

5.4 Pour nos amis physiciens

Proposition 5.1

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On écrit $z = a + ib$ sous forme trigonométrique : $z = re^{i\psi}$. Alors

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ a\cos\theta + b\sin\theta = r\cos(\theta - \psi)$$

6 Exponentielle complexe

6.1 Définition

Définition 6.1

Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit l'exponentielle de z par :

$$e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$$

Remarque. L'exponentielle complexe prolonge l'exponentielle réelle dans le sens où ces deux exponentielles coïncident sur $\mathbb{R}$.

6.2 Propriétés

L'exponentielle complexe a les mêmes propriétés que l'exponentielle réelle.

Proposition 6.1 Propriétés de l'exponentielle

- Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $e^z \neq 0$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.
- Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors $e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

Remarque. Ces propriétés reviennent à dire que l'exponentielle complexe est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Attention ! On sait que l'exponentielle d'un réel est strictement positive mais cela n'aurait aucun sens de dire que l'exponentielle d'un complexe est strictement positive : un complexe n'a aps de signe !

On a d'autres propriétés liées au corps $\mathbb{C}$.

Proposition 6.2 Module et argument

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors
$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \qquad \text{et} \qquad \arg(e^z) \equiv \mathrm{Im}(z)[2\pi].$$

Proposition 6.3

- Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = \mathrm{Z}$.
- Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $e^{z_1} = e^{z_2} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z_2 = z_1 + 2ik\pi$.

Remarque. Tout nombre complexe non nul admet donc au moins un antécédent (en fait une infinité) par l'exponentielle complexe : on dit que l'exponentielle complexe est surjective sur $\mathbb{C}^*$.
Pour $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}^*$, l'équation $e^z = \mathrm{Z}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{C}$. De plus, deux de ces solutions diffèrent d'un multiple entier de $2i\pi$.

Exercice 6.1

Résoudre dans $\mathbb{C}$:
$$e^z = 1 + i\sqrt{3}$$

Exercice 6.2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :
$$e^z + e^{-z} = 1 \qquad \text{et} \qquad e^z + e^{-z} = 2i$$