Devoir surveillé n°07

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 Soit $(\sigma,\sigma') \in \mathrm{B}_n^2$. Alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$[\omega(\sigma)\omega(\sigma')]_{i,j} = \sum_{k=1}^n [\omega(\sigma)]_{i,k}[\omega(\sigma')]_{k,j} = \sum_{k=1}^n \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)} = \delta_{i,\sigma(\sigma'(j))} = [\omega(\sigma\circ\sigma')]_{i,j}$$

Ainsi $\omega(\sigma)\omega(\sigma') = \omega(\sigma\circ\sigma')$.

2 Soit $\sigma \in \mathrm{B}_n$. Alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$[\omega(\sigma)^\top]_{i,j} = [\omega(\sigma)]_{j,i} = \delta_{j,\sigma(i)} = \delta_{i,\sigma^{-1}(j)} = [\omega(\sigma^{-1})]_{i,j}$$

Par conséquent, $\omega(\sigma)^\top = \omega(\sigma^{-1})$ et, d'après la question précédente,

$$\omega(\sigma)^\top\omega(\sigma) = \omega(\sigma^{-1})\omega(\sigma) = \omega(\sigma^{-1}\circ\sigma) = \omega(\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}) = \mathrm{I}_n$$

Finalement, $\omega(\sigma) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et donc $\omega(\mathrm{B}_n) \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

3 Posons $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$, $\mathrm{D}_\sigma = \mathrm{diag}(d_\sigma(1),\dots,d_\sigma(n))$ et $\Omega = \omega(\sigma)$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$[\mathrm{D}\Omega]_{i,j} = \sum_{k=1}^n \mathrm{D}_{i,k}\Omega_{k,j} = d_i\delta_{i,\sigma(j)}$$

et

$$[\Omega\mathrm{D}_\sigma]_{i,j} = \sum_{k=1}^n \Omega_{i,k}\mathrm{D}_{k,j} = \delta_{i,\sigma(j)}d_{\sigma(j)}$$

Or il est clair que $d_i\delta_{i,\sigma(j)} = \delta_{i,\sigma(j)}d_{\sigma(j)}$ donc $\mathrm{D}\Omega = \Omega\mathrm{D}_\sigma$.

4 Posons $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$ et $\mathrm{D}' = \mathrm{diag}(d_1',\dots,d_n')$. D'après les questions suivantes :

$$\begin{aligned}
&\exists \mathrm{M} \in \omega(\mathrm{B}_n),\ \mathrm{D}' = \mathrm{M}^\top\mathrm{D}\mathrm{M}\\
\iff &\exists \sigma \in \mathrm{B}_n,\ \mathrm{D}' = \omega(\sigma)^\top\mathrm{D}\omega(\sigma)\\
\iff &\exists \sigma \in \mathrm{B}_n,\ \omega(\sigma)\mathrm{D}' = \omega(\sigma)\omega(\sigma)^\top\mathrm{D}\omega(\sigma)\\
\iff &\exists \sigma \in \mathrm{B}_n,\ \omega(\sigma)\mathrm{D}' = \mathrm{D}\omega(\sigma)\\
\iff &\exists \sigma \in \mathrm{B}_n,\ \omega(\sigma)\,\mathrm{diag}(d_1',\dots,d_n') = \mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)\omega(\sigma)\\
\iff &\exists \sigma \in \mathrm{B}_n,\ \omega(\sigma)\,\mathrm{diag}(d_1',\dots,d_n') = \omega(\sigma)\,\mathrm{diag}(d_{\sigma(1)},\dots,d_{\sigma(n)})\\
\iff &\exists \sigma \in \mathrm{B}_n,\ \mathrm{diag}(d_1',\dots,d_n') = \mathrm{diag}(d_{\sigma(1)},\dots,d_{\sigma(n)})\\
\iff &\exists \sigma \in \mathrm{B}_n,\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ d_i' = d_{\sigma(i)}
\end{aligned}$$

En voyant d et d' comme des applications de $[\![1,n]\!]$ dans $\mathbb{R}$, cette dernière condition équivaut à l'existence de $\sigma \in \mathrm{B}_n$ tel que $d' = d\circ\sigma$.
Supposons qu'il existe $\sigma \in \mathrm{B}_n$ tel que $d' = d\circ\sigma$. Alors $\mathrm{Im}(d') = \mathrm{Im}(d)$ puisque σ est surjective. Ceci signifie que D et D′ ont le même ensemble de coefficients diagonaux. Soit $y \in \mathrm{Im}(d) = \mathrm{Im}(d')$. Alors $(d')^{-1}(\{y\}) = \sigma^{-1}(d^{-1}(y))$ puis $\mathrm{card}(d')^{-1}(\{y\}) = \mathrm{card}\, d^{-1}(\{y\})$ car σ est bijective. Ceci signifie que les coefficients diagonaux ont le même nombre d'occurrences dans D et D′.
Réciproquement, supposons que D et D′ aient le même ensemble de coefficients diagonaux, chacun ayant le même nombre d'occurrences dans D et D′.

5 C'est une simple conséquence du théorème spectral.

6 Notons $\{s_1, \dots, s_n\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ où les λ_i sont deux à deux distincts. D'après le théorème sur les polynômes interpolateurs de Lagrange, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\lambda_j) = f(\lambda_j)$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$. Or pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $j \in [\![1, p]\!]$ tel que $s_i = \lambda_j$ donc $P(s_i) = f(s_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

7 Pour simplifier, posons $D = \operatorname{diag}(s_1, \dots, s_n)$ et $D' = \operatorname{diag}(s'_1, \dots, s'_n)$. On prouve aisément par récurrence que $S^k = \Omega^\top D^k \Omega$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis par linéarité de $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \Omega^\top X \Omega$, $P(S) = \Omega^\top P(D) \Omega$. De même, $P(S) = (\Omega')^\top P(D')\Omega'$. Comme D est diagonale,

$$P(D) = \operatorname{diag}(P(s_1), \dots, P(s_n)) = \operatorname{diag}(f(s_1), \dots, f(s_n))$$

Or $\operatorname{Sp}(S) = \{s_1, \dots, s_n\} = \{s'_1, \dots, s'_n\}$ donc on on également $P(s'_i) = f(s'_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ puis

$$P(D') = \operatorname{diag}(P(s'_1), \dots, P(s'_n)) = \operatorname{diag}(f(s'_1), \dots, f(s'_n))$$

Finalement,

$$P(S) = (\Omega')^\top \operatorname{diag}((f(s'_i))_{1 \le i \le n})\Omega' = \Omega^\top \operatorname{diag}((f(s_i))_{1 \le i \le n})\Omega$$

Comme $\operatorname{diag}(f(s_1), \dots, f(s_n))$ est diagonale et donc symétrique, on montre sans peine que $\Omega^\top \operatorname{diag}((f(s_i))_{1 \le i \le n})\Omega \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

8 Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(\varphi, \psi) \in \left(\mathbb{R}^I\right)^2$. Soit $S \in \mathcal{S}_n(I)$. Il existe $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $(s_1, \dots, s_n) \in I^n$ tels que $S = \Omega^\top \operatorname{diag}(s_1, \dots, s_n)\Omega$. Par définition,

$$\begin{aligned}
u(\lambda\varphi + \mu\psi)(S) &= \Omega^\top \operatorname{diag}(((\lambda\varphi + \mu\psi)(s_i))_{1 \le i \le n})\Omega \\
&= \Omega^\top \left(\lambda \operatorname{diag}((\varphi(s_i))_{1 \le i \le n}) + \mu \operatorname{diag}((\psi(s_i))_{1 \le i \le n})\right)\Omega \\
&= \lambda\Omega^\top \left(\operatorname{diag}((\varphi(s_i))_{1 \le i \le n})\right)\Omega + \mu\Omega^\top \left(\operatorname{diag}((\psi(s_i))_{1 \le i \le n})\right)\Omega \\
&= \lambda u(\varphi)(S) + \mu u(\psi)(S)
\end{aligned}$$

Ainsi u est linéaire. Puisque tr est également linéaire, $v = \operatorname{tr} \circ u$ est aussi linéaire.
Soit $x \in I$. En prenant $\Omega = I_n$ et $s_1 = \dots = s_n = x$, on obtient

$$u(\varphi)(xI_n) = \varphi(x)I_n$$

9 Soit $\varphi \in \operatorname{Ker} u$. D'après la question précédente, $u(\varphi)(xI_n) = \varphi(x)I_n = 0$ pour tout $x \in I$. Ainsi φ est nulle sur I. Par conséquent, $\operatorname{K}eru = \{0\}$ et u est injective.
Si $n = 1$, alors en identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$, alors l'ensemble des applications de $\mathcal{S}_n(I)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est tout simplement $\mathbb{R}^I$ et la question précédente montre alors que $u(\varphi) = \varphi$ pour tout $\varphi \in \mathbb{R}^I$. Par conséquent, $u = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^I}$ est surjective. Si $n \ge 2$, on peut choisir une application constante Φ de $\mathcal{S}_n(I)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}I_n$. Supposons que cette application Φ admette un antécédent φ par u. Alors pour tout $x \in I$, on aurait $\Phi(xI_n) = u(\varphi)(xI_n) = \varphi(x)I_n$, ce qui contredirait la définition de Φ. Ainsi u n'est pas surjective.

10 Puisque f est polynomiale, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f(x) = P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Soit $S \in \mathcal{S}_n(I)$. Il existe donc $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $(s_1, \dots, s_n) \in I^n$ tels que

$$S = \Omega^\top \operatorname{diag}(s_1, \dots, s_n)\Omega$$

Par définition

$$f(S) = \Omega^\top \operatorname{diag}(f(s_1), \dots, f(s_n))\Omega = \Omega^\top \operatorname{diag}(P(s_1), \dots, P(s_n))\Omega$$

Posons $D = \operatorname{diag}(s_1, \dots, s_n)$. Comme D est diagonale, $P(D) = \operatorname{diag}(P(s_1), \dots, P(s_n))$ puis

$$P(S) = P(\Omega^\top D\Omega) = \Omega^\top P(D)\Omega = f(S)$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $S \in \mathcal{S}_n(I)$, $u(f)(S) = P(S)$. Notamment, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(f)(xI_n) = P(xI_n)$ ou encore $f(x)I_n = P(x)I_n$. On en déduit que $f(x) = P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc que f est polynomiale.

11 Supposons que $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\varphi \in \mathbb{R}^I$ sur I. Soit $S \in \mathcal{S}_n(I)$. A nouveau, il existe $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $(s_1, \dots, s_n) \in I^n$ tels que $S = \Omega^\top \operatorname{diag}(s_1, \dots, s_n)\Omega$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u(\varphi_k)(S) = \Omega^\top \operatorname{diag}(\varphi_k(s_1), \dots, \varphi_k(s_n))\Omega$. Comme $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers φ sur I, $\lim\limits_{k\to+\infty} \varphi_k(s_i) = \varphi(s_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On en déduit que

$$\lim_{k\to+\infty} \operatorname{diag}(\varphi_k(s_1), \dots, \varphi_k(s_n)) = \operatorname{diag}(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n))$$

Enfin, l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \Omega^\top M\Omega$ est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc cette application est continue. On en déduit par caractérisation séquentielle de la continuité que

$$\lim_{k\to+\infty} u(\varphi_k)(S) = \lim_{k\to+\infty} \Omega^\top \operatorname{diag}(\varphi_k(s_1), \dots, \varphi_k(s_n))\Omega = \Omega^\top \operatorname{diag}(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n))\Omega = u(\varphi)(S)$$

Autrement dit, $(u(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $u(\varphi)$ sur $\mathcal{S}_n(I)$. Comme tr est linéaire et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, tr est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sorte que

$$\lim_{k\to+\infty} v(\varphi_k)(S) = \lim_{k\to+\infty} \operatorname{tr}(u(\varphi_k)(S)) = \operatorname{tr}(u(\varphi(S))) = v(\varphi)(S)$$

A nouveau, $(v(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $v(\varphi)$ sur $\mathcal{S}_n(I)$.
Supposons maintenant que $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur I. Munissons par exemple $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne notée $\|\cdot\|$. Remarquons que si $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned}\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|\Omega^\top M\Omega\|^2 &= \operatorname{tr}((\Omega^\top M\Omega)^\top(\Omega^\top M\Omega))\\ &= \operatorname{tr}(\Omega^\top M^\top \Omega\Omega^\top M\Omega)\\ &= \operatorname{tr}(\Omega^\top M^\top M\Omega)\\ &= \operatorname{tr}(\Omega\Omega^\top M^\top M)\\ &= \operatorname{tr}(M^\top M) = \|M\|^2\end{aligned}$$

Soit $S \in \mathcal{S}_n(I)$. Avec les mêmes notations que précédemment et la remarque ci-dessus,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \|u(\varphi_k)(S) - u(\varphi)(S)\|^2 = \|\operatorname{diag}(\varphi_k(s_1) - \varphi(s_1), \dots, \varphi_k(s_n) - \varphi(s_n))\|^2 = \sum_{i=1}^n (\varphi_k(s_i) - \varphi(s_i)^2 \le n\|\varphi_k - \varphi\|_\infty^2$$

ou encore

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \|u(\varphi_k)(S) - u(\varphi)(S)\| \le \sqrt{n}\|\varphi_k - \varphi\|_\infty$$

Ce majorant est indépendant de S et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ donc $(u(\varphi_k))$ converge uniformément vers $u(\varphi)$. Comme tr est linéaire et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on peut noter C la norme subordonnée de tr à la norme euclidienne (et à la valeur absolue). Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall S \in \mathcal{S}_n(I),\ |v(\varphi_k)(S) - v(\varphi)(S)| \le C\|u(\varphi_k)(S) - u(\varphi)(S)\| \le C\sqrt{n}\|\varphi_k - \varphi\|_\infty$$

On conclut comme précédemment que $(v(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $v(\varphi)$ sur $\mathcal{S}_n(I)$.

12 Comme S est symétrique réelle, il existe une base orthonormée $(X_1, \dots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de S. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeus propres associés. Sans perte de généralité, on peut supposer $\lambda_1 \le \dots \le \lambda_n$. Soit alors $X \in \Sigma$. Il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$. Comme $(X_1, \dots, X_n)$ est orthonormée

$$X^\top X = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$$

De plus,

$$X^\top SX = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i$$

donc, comme $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$ et $\lambda_1 \le \dots \le \lambda_n$,

$$\lambda_1 \le \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \le \lambda_n$$

i.e.

$$\lambda_1 \le X^\top SX \le \lambda_n$$

De plus, $X_1 \in \Sigma$ et $X_1^\top X_1 = \lambda_1$ de même que $X_n \in \Sigma$ et $X_n^\top SX_n = \lambda_n$ donc

$$\min(\operatorname{Sp}(S)) = \lambda_1 = \min_{X\in\Sigma} X^\top SX \qquad \text{et} \qquad \max(\operatorname{Sp}(S)) = \lambda_n = \max_{X\in\Sigma} X^\top SX$$

13 Soient $(S_1, S_2) \in \mathcal{S}_n(I)^2$ et $t \in [0,1]$. Tout d'abord, $S = (1-t)S_1 + tS_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors pour tout $X \in \Sigma$

$$X^T SX = (1-t)X^T S_1 X + (1-t)X^T S_2 X$$

donc, d'après la question précédente

$$(1-t)\min \mathrm{Sp}(S_1) + t \in \mathrm{Sp}(S_2) \leq X^T SX \leq (1-t)\max \mathrm{Sp}(S_1) + t\max \mathrm{Sp}(S_2)$$

puis, toujours d'après la question précédente, en notant $m = (1-t)\min \mathrm{Sp}(S_1) + t \in \mathrm{Sp}(S_2)$ et $M = (1-t)\max \mathrm{Sp}(S_1) + t\max \mathrm{Sp}(S_2)$;

$$\mathrm{Sp}(S) \subset [m, M]$$

Comme $(S_1, S_2) \in \mathcal{S}_n(I)^2$, $(\min \mathrm{Sp}(S_1), \max \mathrm{Sp}(S_1), \min \mathrm{Sp}(S_2), \max \mathrm{Sp}(S_2)) \in I^4$ puis, comme I est un intervalle donc convexe, $(m, M) \in I^2$ puis $\mathrm{Sp}(S) \subset [m, M] \subset I$. Ainsi $S \in \mathcal{S}_n(I)$ et $\mathcal{S}_n(I)$ est convexe.
Vérifions maintenant que ρ est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Tout d'abord, ρ est bien positive par définition.
Homogénéité. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$. On montre aisément que $\mathrm{Sp}(tM) = t\,\mathrm{Sp}(M)$. Ainsi

$$\rho(tM) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(tM)\} = \max\{|\lambda t|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\} = |t|\max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\} = |t|\rho(M)$$

Séparation. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $\rho(M) = 0$. Alors $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$ et M est diagonalisable donc M est semblable à la matrice nulle puis $M = 0$.
Inégalité triangulaire. Soit $(S_1, S_2) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$. Pour tout $X \in \Sigma$,

$$|X^T(S_1 + S_2)X| \leq |X^T S_1 X| + |X^T S_2 X| \leq \rho(S_1) + \rho(S_2)$$

D'après la question précédente,

$$\mathrm{Sp}(S_1 + S_2) \subset [-\rho(S_1) - \rho(S_2), \rho(S_1) + \rho(S_2)]$$

puis $\rho(S_1 + S_2) \leq \rho(S_1) + \rho(S_2)$.

14 Remarquons déjà que χ est en fait à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, chaque coefficient de $\chi(M)$ est polynomial en les coefficients de M. Les applications coordonnées de χ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ sont donc continues de sorte que χ est elle-même continue.

15 Comme la suite (M_k) converge, elle est bornée. Ceci signifie que la suite $(\rho(M_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est elle-même bornée. Par définition de ρ, la suite $(\Lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc aussi bornée. Comme elle est à valeurs dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^n$, elle est à valeurs dans un compact et elle admet alors une valeur d'adhérence que nous noterons Λ. Il existe donc une application $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\Lambda_{\alpha(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \Lambda$. Par définition de $\mathrm{Sp}_\uparrow$,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \Lambda_{\alpha(k),1} \leq \cdots \leq \Lambda_{\alpha(k),n}$$

puis, par passage à la limite,

$$\Lambda_1 \leq \cdots \leq \Lambda_n$$

donc Λ est croissante.

16 Remarquons déjà que $(M_{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers M en tant que suite extraite de la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Notons à nouveau Λ la limite de la suite $(\Lambda_{\alpha(k)})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\chi(M_{\alpha(k)}) = \prod_{i=1}^{n}(X - \Lambda_{\alpha(k),i})$$

L'application $(P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{R}_1[X] \mapsto \displaystyle\prod_{i=1}^{n} P_i$ est multilinéaire et $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension finie donc cette application est continue. Comme χ est également continue, on obtient par passage à la limite

$$\chi(M) = \prod_{i=1}^{n}(X - \Lambda_i)$$

Notamment, $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ sont les valeurs propres de M comptées avec multiplicité. On prouve comme à la question précédente que Λ est croissante, ce qui signifie que $\Lambda = \mathrm{Sp}_\uparrow(M)$.

17 On a montré précédemment que la suite $(\Lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ était à valeurs dans un compact de $\mathbb{R}^n$. La question précédente montre que cette suite admet $\mathrm{Sp}_\uparrow(M)$ comme unique valeur d'adhérence. On en déduit que $(\Lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{Sp}_\uparrow(M)$. Autrement dit, $\mathrm{Sp}_\uparrow(M_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Sp}_\uparrow(M)$. Ainsi $\mathrm{Sp}_\uparrow$ est continue par caractérisation séquentielle de la continuité.

$\boxed{18}$ On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne définie par $\|M\|^2 = \operatorname{tr}(M^\top M)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\forall \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \|\Omega\|^2 = \operatorname{tr}(\Omega^\top \Omega) = \operatorname{tr}(I_n) = n$$

donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée.
L'application $f\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (M^\top, M)$ est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc f est continue. L'application $g\colon (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto AB$ est bilinéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc g est continue. Ainsi $h = g \circ f$ est continue. De plus, $h(M) = M^\top M$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = h^{-1}(\{I_n\})$. Finalement, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
Ainsi $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée et fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{19}$ Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. On considère à nouveau une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et convergeant vers une matrice M. Il existe alors une suite $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ M_k = \Omega_k^\top \operatorname{diag}(\Lambda_k)\Omega_k$$

en notant à nouveau $\Lambda_k = \operatorname{Sp}_\uparrow(M_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u(\varphi)(M_k) = \Omega_k^\top \operatorname{diag}(\varphi(\Lambda_k))\Omega_k$$

Remarque. On note $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Comme $\operatorname{Sp}_\uparrow$ est continue, (Λ_k) converge vers $\Lambda = \operatorname{Sp}_\uparrow(M)$ puis, comme φ est continue, $(\varphi(\Lambda_k))$ converge vers $\varphi(\Lambda)$. La suite $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc on peut en extraire une suite $(\Omega_{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. En passant à la limite dans la relation suivante

$$\forall k \in \mathbb{N},\ M_{\alpha(k)} = \Omega_{\alpha(k)}^\top \operatorname{diag}(\Lambda_{\alpha(k)})\Omega_{\alpha(k)}$$

on obtient

$$M = \Omega^\top \operatorname{diag}(\Lambda)\Omega$$

et en passant à la limite dans la relation suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u(\varphi)(M_{\alpha(k)}) = \Omega_{\alpha(k)}^\top \operatorname{diag}(\varphi(\Lambda_{\alpha(k)}))\Omega_{\alpha(k)}$$

on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} u(\varphi)(M_{\alpha(k)}) = \Omega^\top \operatorname{diag}(\varphi(\Lambda)))\Omega = u(\varphi)(M)$$

Ainsi, si $(u(\varphi)(M_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge, elle converge vers $u(\varphi)(M)$.
Soit S une valeur d'adhérence de la suite $(u(\varphi)(M_k))_{k\in\mathbb{N}}$. Il existe donc une suite extraite $(u(\varphi)(M_{\beta(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers S. En appliquant ce qui précède à la suite $(M_{\beta(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ au lieu de la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on prouve que $S = u(\varphi)(M)$. Ainsi $u(\varphi)(M)$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(u(\varphi)(M_k))_{k\in\mathbb{N}}$.
Comme précédemment, la suite (Λ_k) est à valeurs dans un compact. Comme φ est continue, l'application $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ est également continue. L'image d'un compact par une application continue est un compact donc $(\varphi(\Lambda_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est également à valeurs dans un compact. Par définition de ρ, la suite $(u(\varphi)(M_k))$ est donc également à valeurs dans un compact. Comme $u(\varphi)(M)$ est son unique valeur d'adhérence, elle converge vers $u(\varphi)(M)$. Par caractérisation séquentielle de la continuité, $u(\varphi)$ est continue.
Enfin, on a déjà vu que la trace était continue sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc $v(\varphi)$ est également continue par composition.

$\boxed{20}$ Soient $U \in \mathcal{U}_S$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Il existe donc $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $U = \Omega^\top S\Omega$. En notant $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $[U]_{k,k} = E_k^\top U E_k = (\Omega E_k)^\top S(\Omega E_k)$. Or $\Omega E_k \in \Sigma$ donc, d'après la question **12**, $\min \operatorname{Sp}(S) \leq [U]_{k,k} \leq \max \operatorname{Sp}(S)$. Comme $S \in \mathcal{S}_n(I)$, $(\min \operatorname{Sp}(S), \max \operatorname{Sp}(S)) \in I^2$ puis, comme I est un intervalle, $[U]_{k,k} \in I$.
Comme $S \in \mathcal{S}_n(I)$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in I^n$ tel que S est orthosemblable à $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Par conséquent, U est également orthosemblable à $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ i.e. il existe $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $U = W^\top \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)W$. Ainsi

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ [U]_{k,k} = \sum_{\ell=1}^{n} [W]_{\ell,k}^2 \lambda_\ell$$

Comme $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\sum_{\ell=1}^{n} [W]_{\ell,k}^2 = 1$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Par convexité de f sur I,

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ f([U]_{k,k}) \leq \sum_{\ell=1}^{n} [W]_{\ell,k}^2 f(\lambda_\ell)$$

puis

$$\sum_{k=1}^{n} f([\mathrm{U}]_{k,k}) \leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}[\mathrm{W}]_{\ell,k}^2 f(\lambda_\ell) = \sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}[\mathrm{W}]_{\ell,k}^2\right) f(\lambda_\ell)$$

A nouveau, comme $\mathrm{W} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\sum_{k=1}^{n}[\mathrm{W}]_{\ell,k}^2 = 1$ pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} f([\mathrm{U}]_{k,k}) \leq \sum_{\ell=1}^{n} f(\lambda_\ell) = v(f)(\mathrm{S})$$

Par ailleurs, $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{U}_\mathrm{S}$ et

$$\sum_{k=1}^{n} f([\mathrm{D}]_{k,k}) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) = v(f)(\mathrm{S})$$

Ainsi

$$\max\left\{\sum_{k=1}^{n} f([\mathrm{U}]_{k,k}),\ \mathrm{U} \in \mathcal{U}_\mathrm{S}\right\} = v(f)(\mathrm{S})$$

21 Soient $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{S}_n(\mathrm{I})^2$ et $t \in [0,1]$. Posons alors $\mathrm{S} = (1-t)\mathrm{A} + t\mathrm{B}$. Soit $\mathrm{U} \in \mathcal{U}_\mathrm{S}$. Il existe donc $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\mathrm{U} = \Omega^\mathsf{T}\mathrm{S}\Omega = (1-t)\Omega^\mathsf{T}\mathrm{A}\Omega + t\Omega^\mathsf{T}\mathrm{B}\Omega = (1-t)\mathrm{C} + t\mathrm{D}$$

en posant $\mathrm{C} = \Omega^\mathsf{T}\mathrm{A}\Omega \in \mathcal{U}_\mathrm{A}$ et $\mathrm{D} = \Omega^\mathsf{T}\mathrm{B}\Omega \in \mathcal{U}_\mathrm{B}$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$[\mathrm{U}]_{k,k} = (1-t)[\mathrm{C}]_{k,k} + t[\mathrm{D}]_{k,k}$$

puis, par convexité de f

$$f([\mathrm{U}]_{k,k}) \leq (1-t)f([\mathrm{C}]_{k,k}) + tf([\mathrm{D}]_{k,k})$$

et enfin

$$\sum_{k=1}^{n} f([\mathrm{U}]_{k,k}) \leq (1-t)\sum_{k=1}^{n} f([\mathrm{C}]_{k,k}) + t\sum_{k=1}^{n} f([\mathrm{D}]_{k,k})$$

Mais, puisque $\mathrm{C} \in \mathcal{U}_\mathrm{A}$ et $\mathrm{D} \in \mathcal{U}_\mathrm{B}$, on obtient d'après la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} f([\mathrm{U}]_{k,k}) \leq (1-t)v(f)(\mathrm{A}) + tv(f)(\mathrm{B})$$

Ceci étant vrai pour tout $\mathrm{U} \in \mathcal{U}_\mathrm{S}$, on a encore d'après la question précédente,

$$v(f)(\mathrm{S}) \leq (1-t)v(f)(\mathrm{A}) + tv(f)(\mathrm{B})$$

c'est-à-dire

$$v(f)((1-t)\mathrm{A} + t\mathrm{B}) \leq (1-t)v(f)(\mathrm{A}) + tv(f)(\mathrm{B})$$

22 Supposons f convexe sur I. D'après la question précédente, $v(f)$ est convexe sur $\mathcal{S}_n(\mathrm{I})$. Réciproquement, supposons $v(f)$ convexe sur $\mathcal{S}_n(\mathrm{I})$. Soient alors $(a,b) \in \mathrm{I}^2$ et $t \in [0,1]$. Alors

$$v(f)((1-t)a\mathrm{I}_n + tb\mathrm{I}_n) \leq (1-t)v(f)(a\mathrm{I}_n) + tv(f)(b\mathrm{I}_n)$$

ou encore

$$v(f)(((1-t)a + tb)\mathrm{I}_n) \leq (1-t)v(f)(a\mathrm{I}_n) + tv(f)(b\mathrm{I}_n)$$

Or d'après la question **8**,

$$\forall x \in \mathrm{I},\ u(f)(x\mathrm{I}_n) = f(x)\mathrm{I}_n$$

donc

$$\forall x \in \mathrm{I},\ v(f)(x\mathrm{I}_n) = \mathrm{tr}(f(x)\mathrm{I}_n) = nf(x)$$

On en déduit que

$$nf((1-t)a + tb) \leq n(1-t)f(a) + ntf(b)$$

puis

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

Ceci signifie que f est convexe sur I.