Devoir à la maison n°8

Exercice 1.

On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto 1 - \sqrt{x}$ ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.
2. Montrer que $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer le sens de variation de f et de $f \circ f$ sur $[0,1]$.
4. Montrer que f possède un unique point fixe α sur $[0,1]$ et déterminer celui-ci.
5. Montrer que $u_0 \leqslant \alpha$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leqslant \alpha$.
7. Montrer que $u_0 \leqslant u_2$. En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis qu'elle converge.
8. Montrer que les points fixes de $f \circ f$ sur $[0,1]$ sont 0, α et 1.
9. En déduire la limite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, puis la convergence et la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et enfin la convergence et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème 1 —

On donne $e \approx 2,72$, $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,61$, $\sqrt{2} \approx 1,41$ et $\ln(3) \approx 1,10$.

Partie I – Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3xe^{-x^2} - 1$$

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition. Donner le tableau de variations de f. Préciser les branches infinies de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f ainsi qu'une symétrie de celle-ci.
2. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. Etudier la position de la courbe de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente.
3. Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$. On fera également figurer les asymptotes et la tangente des questions précédentes.
4. **a.** Justifier que f admet un développement limité en 0 à tout ordre.

   b. Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 5.

Partie II – Étude d'une équation différentielle

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E_n l'équation différentielle $xy' - (n - 2x^2)y = n - 2x^2$.
On note H_n l'équation différentielle homogène associée à E_n.

1. Résoudre H_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. En déduire les solutions de E_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. Donner toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ solutions de E_n sur $\mathbb{R}$. On distinguera les cas $n = 1$ et $n \geqslant 2$.

Partie III – Étude de deux suites

On suppose désormais dans cette partie que $n \geqslant 2$. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1$$

1. Quel est le signe de $f_n(0)$ et de $f_n(1)$?
2. Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$. Donner la limite de f_n en $+\infty$. En déduire que f_n s'annule exactement deux fois sur $\mathbb{R}_+$ en deux réels notés u_n et v_n vérifiant $u_n < 1 < v_n$.
3. Quelle est la limite de $(v_n)_{n\geqslant 2}$?
4. **a.** Exprimer $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n.
   b. En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
   c. Déduire de ce qui précède la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 2}$.
   d. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente. On note l sa limite.
5. Soit g_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g_n(x) = \ln(3) + n\ln(x) - x^2$$

   a. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $g_n(t) = 0$ *si et seulement si* $f_n(t) = 0$.
   b. On suppose $l \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Conclusion ?
   c. Soit la suite $(w_n)_{n\geqslant 2}$ définie par

$$\forall n \geqslant 2,\ w_n = u_n - 1$$

   Trouver en utilisant un développement limité de $g_n(1 + w_n) = g_n(u_n)$ un équivalent simple de w_n.