# Devoir à la maison n°07

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

## Problème 1 —

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f$ continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(xy)=xf(y)+yf(x)$$

**1.** Soit $f\in\mathcal{E}$.

**a.** Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.

**b.** Démontrer que la fonction $f$ est impaire.

**2.** On suppose que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

**a.** Montrer que $f$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $xy'-y=kx$ où $k$ est une constante dépendant de $f$ que l'on précisera.

**b.** En déduire $f(x)$ en fonction de $k$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

**3.** On note $\varphi$ l'unique élément de $\mathcal{E}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\varphi'(1)=1$.

**a.** $\varphi$ est-elle dérivable en 0 ?

**b.** Déterminer les variations et les limites de $\varphi$ en $+\infty$ et $-\infty$ puis tracer son graphe.

**4.** On considère $f\in\mathcal{E}$ que l'on suppose seulement continue sur $\mathbb{R}$. On note alors F l'unique primitive de $f$ s'annulant en 0.

**a.** Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\mathrm{F}(xy)=x^2\mathrm{F}(y)+\dfrac{xy^2}{2}f(x)$.

**b.** En déduire que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

**c.** Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.

## Exercice 1.

Toutes les fonctions entrant en jeu dans cet exercice sont à valeurs réelles.

**1.** On souhaite résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle suivante :

$$(\mathrm{E}):\ \cos(t)z''(t)-2\sin(t)z'(t)-\cos(t)z(t)=0$$

**a.** Soit $z$ une fonction deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. On pose $\varphi(t)=\cos(t)z(t)$ pour tout $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Exprimer $\varphi''(t)$ en fonction de $z(t)$, $z'(t)$ et $z''(t)$ pour tout $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

**b.** En déduire les solutions de (E).

**2.** On souhaite maintenant résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle suivante :

$$(\mathrm{F}) : \ (1-x^2)y''(x)-3xy'(x)-y(x)=0$$

**a.** Soit $y$ une fonction deux fois dérivable sur $]-1,1[$. On pose $z(t)=y(\sin(t))$ pour $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Exprimer $y(x)$, $y'(x)$ et $y''(x)$ en fonction de $z(\arcsin x)$, $z'(\arcsin x)$ et $z''(\arcsin x)$ pour tout $x\in]-1,1[$.

**b.** En déduire que $y$ est solution de (F) sur $]-1,1[$ *si et seulement si* $z$ est solution d'une équation différentielle que l'on précisera. En déduire les solutions de (F).

**3.** Soit $f$ une solution de (F) sur $]-1,1[$.

**a.** Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\forall x\in]-1,1[,\ (1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+3)xf^{(n+1)}(x)-(n+1)^2f^{(n)}(x)=0$$

**b.** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n=f^{(n)}(0)$. Déterminer une relation de récurrence entre $a_{n+2}$ et $a_n$ à l'aide de la question précédente.

**c.** Montrer que pour tout $p\in\mathbb{N}$,

$$a_{2p}=\frac{\big((2p)!\big)^2}{2^{2p}\big(p!\big)^2}a_0 \qquad\qquad a_{2p+1}=2^{2p}\big(p!\big)^2a_1$$

**4.** On se propose de déterminer plusieurs développements limités à l'aide de la question **3**.

**a.** Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. Rappeler la formule de Taylor-Young appliquée à $f$ en 0 à un ordre $n\in\mathbb{N}$.

**b.** Soit $g : x\in]-1,1[\mapsto\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. Que valent $g(0)$ et $g'(0)$ ? En remarquant que $g$ est solution de (F), donner le développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de $g$.

**c.** Soit $h : x\in]-1,1[\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Que valent $h(0)$ et $h'(0)$ ? En remarquant que $h$ est solution de (F), donner le développement limité à l'ordre $2n$ en 0 de $h$.

**d.** Soit $k : x\in]-1,1[\mapsto\arcsin x$. Déduire de la question **4.c** le développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de $k$.

**5.** En remarquant que $g=hk$ et en considérant le coefficient de $x^{2n+1}$ dans le développement limité de cette fonction, montrer que

$$\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{2p+1}\binom{2p}{p}\binom{2(n-p)}{n-p}=\frac{2^{4n}}{(n+1)\binom{2n+1}{n}}$$