

# DEVOIR SURVEILLÉ N°10

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1

- 1** La fonction  $\tan$  est  $\pi$ -périodique.
- 2** La fonction  $\tan$  est strictement croissante, impaire et  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan = +\infty$ .
- 3** Il suffit de poser  $T_0 = X$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons qu'il existe un polynôme  $T_n$  tel que

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ , \tan^{(n)}(x) = T_n(\tan x)$$

Alors

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ , \tan^{(n+1)}(x) = (1 + \tan^2(x))T_n'(\tan x) = T_{n+1}(\tan x)$$

avec  $T_{n+1} = (1 + X^2)T_n'$ . L'existence de la suite  $(T_n)$  est donc prouvée par récurrence.

- 4** On obtient  $T_1 = X^2 + 1$ ,  $T_2 = 2X^3 + 2X$  et  $T_3 = 6X^4 + 8X^2 + 2$ .
- 5**  $T_0 = X$  est bien à coefficients dans  $\mathbb{N}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $T_n$  est à coefficients dans  $\mathbb{N}$ . Alors  $T_n'$  est également à coefficients dans  $\mathbb{N}$  donc  $T_{n+1} = (X^2 + 1)T_n'$  l'est également. Par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n$  est à coefficients entiers.  $\deg T_0 = 1$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $\deg T_n = n + 1$ . Alors  $\deg T_{n+1} = \deg(X^2 + 1) + \deg(T_n') = n + 2$ . Par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\deg T_n = n + 1$ .
- 6** On utilise la formule de Taylor avec reste intégral.

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur un intervalle  $I$ . Alors pour tout  $(a, b) \in I^2$ ,

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Comme  $\tan$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , la formule de Taylor avec reste intégral donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ , \tan(x) = \sum_{j=0}^{2n+1} \frac{\tan^{(j)}(0)}{j!} x^j + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \tan^{(2n+2)}(t) dt$$

Or la fonction  $\tan$  est impaire donc on prouve aisément que  $\tan^{(j)}$  a une parité opposée à celle de  $j$ . Notamment, si  $j$  est pair,  $\tan^{(j)}$  est impaire et  $\tan^{(j)}(0) = 0$ . On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ , \tan(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\tan^{(2j+1)}(0)}{(2j+1)!} x^{2j+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} T_{2n+2}(\tan t) dt$$

Il suffit donc de poser  $t_j = \tan^{(2j+1)}(0)$ .

- 7** Comme les fonctions  $f^{(n)}$  et  $t \mapsto -\frac{(x-t)^n}{n!}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, x]$  et de dérivées respectives  $f^{(n+1)}$  et  $t \mapsto (x-t)^{n-1}$ , on obtient par intégration par parties :

$$R_n(x) = -\frac{1}{n!} [f^{(n)}(t)(x-t)^n]_0^x + \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x)$$

**8** **8.a** D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n(b) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} b^n + R_{n+1}(b) \geq R_{n+1}(b)$$

car  $b \geq 0$  et  $f^{(n)}(0) \geq 0$  par hypothèse. La suite  $(R_n(b))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est donc décroissante.

Par ailleurs,  $f^{(n)}$  est positive sur  $[0, b]$  par hypothèse de même que  $t \mapsto (b-t)^{n-1}$ . On en déduit que  $R_n(b) \geq 0$ .

La suite  $(R_n(b))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et majorée : elle converge.

**8.b 8.b.i** On effectue le changement de variable linéaire  $t = ux$ . Alors

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(u)(x-ux)^{n-1} x \, du = \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(u)(1-u)^{n-1} \, du$$

**8.b.ii** Par hypothèse,  $f^{(n-1)}$  est positive sur  $I \cap \mathbb{R}_+$  donc  $f^{(n)}$  est croissante sur  $I \cap \mathbb{R}_+$ . Notamment, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$0 \leq f^{(n)}(0) \leq f^{(n)}(tx) \leq f^{(n)}(tb)$$

puis

$$0 \leq f^{(n)}(tx)(1-t)^{n-1} \leq f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1}$$

et enfin, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1} \, dt$$

**8.b.iii** D'après la question précédente,

$$R_n(x) \leq \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1} \, dt = \left(\frac{x}{b}\right)^n \cdot \frac{b^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1} \, dt = \left(\frac{x}{b}\right)^n R_n(b)$$

**8.c** Soit  $x \in [0, b]$ . La suite  $(R_n(b))$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{b}\right)^n$  de sorte que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{b}\right)^n R_n(b) = 0$ . Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ . Mais, d'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{n+1}(x)$$

On en déduit que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Si  $n$  est pair,  $f^{(n)}$  est impaire car  $f$  est impaire et alors  $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 = -\frac{f^{(n)}(0)}{n!} (-x)^n$ . Si  $n$  est impair, on a encore  $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = -\frac{f^{(n)}(0)}{n!} (-x)^n$ . Ainsi

$$f(-x) = -f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (-x)^n$$

Finalement,

$$\forall x \in ]-b, b[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

**9** La fonction  $\tan$  est impaire. De plus,  $\tan$  est positive sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  et  $T_n$  est positif sur  $\mathbb{R}_+$  puisque ses coefficients sont dans  $\mathbb{N}$ . Ainsi  $\tan^{(n)} = T_n \circ \tan$  est positive sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ . Soit  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ . On peut trouver  $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  tel que  $x \in ]-b, b[$ . D'après les questions précédentes, on peut alors affirmer que

$$\tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

**10** D'après la question précédente, le rayon de convergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{t_n}{(2n+1)!} z^n$  est supérieur ou égal à  $\frac{\pi}{2}$ . S'il était strictement supérieur à  $\frac{\pi}{2}$ ,  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{(2n+1)!}$  serait continue en  $\frac{\pi}{2}$ . Notamment, tan admettrait une limite finie en  $\frac{\pi}{2}$ , ce qui n'est pas. Le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{t_n}{(2n+1)!} z^n$  vaut donc  $\frac{\pi}{2}$ .

**11** On trouve sans difficulté  $\psi_n(X^i) = \frac{1}{i+1} ((X+1)^{i+1} - X^{i+1})$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

**12** En développant l'expression de  $\psi_n(X^i)$  obtenue à la question précédente grâce à la formule du binôme de Newton, on trouve que  $\deg \psi_n(X^i) = i$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Notamment,  $\psi_n(X^i) \in \mathbb{R}_n[X]$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . L'application  $\psi_n$  est linéaire et  $(X^i)_{0 \leq i \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  donc  $\psi_n(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ . Finalement,  $\psi_n$  est bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**13** Notons  $A = (A_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$  la matrice de  $\psi_n$  dans la base  $(1, X, \dots, X^n)$ . Puisque

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \psi_n(X^j) = \frac{1}{j+1} ((X+1)^{j+1} - X^{j+1}) = \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^j \binom{j+1}{i} X^i$$

on obtient,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, A_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{j+1} \binom{j+1}{i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**14** La matrice  $A$  de la question précédente est triangulaire supérieure et

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, A_{i,i} = \frac{1}{i+1} \binom{i+1}{i} = 1 \neq 0$$

donc  $A$  est inversible et  $\psi_n$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**15**  $A$  est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux valent 1. Ainsi  $\text{Sp}(A) = \{1\}$ . Si  $A$  était diagonalisable,  $A$  serait semblable à la matrice identité  $I_{n+1}$  et donc égale à  $I_{n+1}$ . Ceci n'est pas le cas puisque  $A_{0,1} = \frac{1}{2} \neq 0$  par exemple.

**16** D'une part, le théorème fondamental de l'analyse permet d'affirmer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi_n(P)'(x) = P(x+1) - P(x)$$

D'autre part, comme  $P$  est une primitive de  $P'$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi_n(P')(x) = \int_x^{x+1} P'(t) dt = P(x+1) - P(x)$$

Ainsi, les polynômes  $\psi_n(P)'$  et  $\psi_n(P')$  coïncident sur l'ensemble infini  $\mathbb{R}$  : ils sont donc égaux.

**17** Supposons qu'il existe deux suites  $(S_m)$  et  $(U_m)$  vérifiant les conditions de l'énoncé. On va prouver par récurrence que ces deux suites sont égales. Tout d'abord  $S_0 = U_0 = 1$ . Supposons qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $S_k = T_k$ . Alors  $S'_{k+1} = (k+1)S_k = (k+1)U_k = U'_{k+1}$ . Il existe donc  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $S_{k+1} = U_{k+1} + c$ . Mais alors

$$c = \int_0^1 (S_{k+1}(t) - U_{k+1}(t)) dt = \int_0^1 S_{k+1}(t) dt - \int_0^1 U_{k+1}(t) dt = 0$$

de sorte que  $S_{k+1} = U_{k+1}$ . Par récurrence, les deux suites  $(S_m)$  et  $(U_m)$  sont égales.

On prouve également l'existence de la suite  $(S_m)$  par récurrence. En effet, si  $S_0, \dots, S_k$  ont déjà été construits, en notant

$Q_{k+1}$  l'unique primitive de  $(k+1)S_k$  s'annulant en 0, il suffit alors de poser  $S_{k+1} = Q_{k+1} - \int_0^1 Q_{k+1}(t) dt$  pour avoir

$$S'_{k+1} = (k+1)S_k \text{ et } \int_0^1 S_{k+1}(t) dt = 0.$$

**18** Avec les notations de la question précédente,  $Q_1 = X$  puis

$$S_1 = Q_1 - \int_0^1 Q_1(t) dt = X - \frac{1}{2}$$

Ensuite,  $Q_2 = X^2 - X$  puis

$$S_2 = Q_2 - \int_0^1 Q_2(t) dt = X^2 - X + \frac{1}{6}$$

Enfin,  $Q_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$  puis

$$S_3 = Q_3 - \int_0^1 Q_3(t) dt = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$$

**19**  $S_0$  est un polynôme unitaire de degré 0. Supposons qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $S_k$  soit un polynôme unitaire de degré  $k$ . Alors le monôme dominant de  $S'_{k+1} = (k+1)S_k$  est  $(k+1)X^k$  donc, en primitivant,  $S_{k+1}$  est bien un polynôme unitaire de degré  $k+1$ . Par récurrence, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $S_k$  est un polynôme unitaire de degré  $k$ .

**20** Soit un entier  $k \geq 2$ . Alors  $k-1 \geq 1$  donc

$$S_k(1) - S_k(0) = \int_0^1 S'_k(t) dt = k \int_0^1 S_{k-1}(t) dt = 0$$

**21** Posons  $U_m(X) = (-1)^m S_m(1-X)$ . Alors

- $U_0 = S_0 = 1$  ;
- $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $U'_{k+1} = (-1)^{k+2} S'_{k+1}(1-X) = (-1)^k (k+1) S_k(1-X) = (k+1) U_k$  ;
- pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , par le changement de variable  $u = 1-t$ ,

$$\int_0^1 U_k(t) dt = (-1)^k \int_0^1 S_k(1-t) dt = (-1)^k \int_0^1 S_k(u) du = 0$$

Par unicité de la suite vérifiant ces trois conditions, les suites  $(S_m)$  et  $(U_m)$  sont égales i.e.

$$\forall m \in \mathbb{N}, S_m(1-X) = (-1)^m S_m(X)$$

**22** Tout d'abord,  $\deg S_k = k$  donc  $S_k \in \mathbb{R}_n[X]$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . L'injectivité de  $\psi_n$  garantit alors l'unicité demandée. On raisonne ensuite par récurrence. Tout d'abord,  $\psi_n(S_0) = \psi_n(1) = 1 = X^0$ . Supposons que  $\psi_n(S_k) = X^k$  pour un certain  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Alors, d'après la question **16**

$$\psi_n(S_{k+1})' = \psi_n(S'_{k+1}) = \psi_n((k+1)S_k) = (k+1)\psi_n(S_k) = (k+1)X^k$$

Il existe donc  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $\psi_n(S_{k+1}) = X^{k+1} + c$ . Mais, comme  $k+1 \geq 1$ ,

$$c = \psi_n(S_{k+1})(0) = \int_0^1 S_{k+1}(t) dt = 0$$

Ainsi  $\psi_n(S_{k+1}) = X^{k+1}$ . Par récurrence finie,  $\psi_n(S_k) = X^k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

**23** On trouve avec la question **18**

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2} \qquad \sigma_2 = \frac{1}{6} \qquad \sigma_3 = 0$$

**24** Soit  $k$  un entier naturel impair tel que  $k \geq 3$ . D'après la question **20**,  $S_k(0) = S_k(1)$ . Mais d'après la question **21**,  $S_k(1) = S_k(1-0) = (-1)^k S_k(0) = -S_k(0)$  car  $k$  est impair. On en déduit donc que  $\sigma_k = S_k(0) = 0$ .

**25** C'est parti pour une autre récurrence. Tout d'abord  $S_0 = 1 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} X^{0-k}$ . Supposons que  $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sigma_k X^{n-k}$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$S'_{n+1} = (n+1)S_n = \sum_{k=0}^n (n+1) \binom{n}{k} \sigma_k X^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} (n+1-k) \sigma_k X^{n-k} = \left( \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \sigma_k X^{n+1-k} \right)'$$

Comme  $S_{n+1}(0) = \sigma_{n+1}$ ,

$$S_{n+1} = \sigma_{n+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \sigma_k X^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \sigma_k X^{n+1-k}$$

ce qui conclut la récurrence.

**26** Soit un entier  $n \geq 2$ . En évaluant la relation de la question précédente en 1 et en utilisant la question **20**,

$$\sigma_n = S_n(0) = S_n(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sigma_k$$

et comme  $\binom{n}{n} = 1$ ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \sigma_k = 0$$

**27** D'après la question précédente,

$$\forall n \geq 2, \sigma_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \sigma_k$$

ou encore

$$\forall n \geq 1, \sigma_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} \sigma_k$$

```
def sigma(N):
    l=[1]
    for n in range(1,N+1):
        binomial=1
        somme=0
        for k in range(n):
            somme+=binomial*l[k]
            binomial*=(n-k+1)/(k+1)
        l.append(-somme/(n+1))
    return l[-1]
```

```
>>> sigma(50)
7.500866746077044e+24
```

**28** Le rayon de convergence de la série exponentielle est infini. Par produit de Cauchy,

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{D}, e^z S(z) &= \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{n!} z^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{\sigma_k}{k!} \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sigma_k \right) \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

D'après la question 26, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sigma_k = \begin{cases} \sigma_n & \text{si } n \geq 2 \\ \sigma_0 & \text{si } n = 0 \\ \sigma_0 + \sigma_1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

de sorte que

$$\forall z \in D, e^z S(z) = \sigma_0 z + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{n!} z^n = z + S(z)$$

**29** Posons  $\rho = \min\left\{\frac{R}{2}, \pi\right\}$ . Soit  $z \in D(0, \rho)$ . Alors  $|2iz| = 2|z| < R$  donc, d'après la question précédente,  $(e^{2iz} - 1)S(2iz) = 2iz$ .

De plus, pour  $z \in D(0, \rho) \setminus \{0\}$ ,  $2z$  n'est pas un multiple entier de  $2\pi$  donc  $e^{2iz} - 1 \neq 0$  de sorte que  $S(2iz) = \frac{2iz}{e^{2iz} - 1}$  puis

$$2iT(z) = (e^{2iz+1})S(2iz) = e^{2iz}S(2iz) + S(2iz) = 2iz + 2S(2iz)$$

ou encore

$$T(z) = z - iS(2iz)$$

Cette égalité est encore valable pour  $z = 0$  puisque  $T(0) = -i$  et  $S(0) = \sigma_0 = 1$ . Finalement,

$$\forall z \in D(0, \rho), T(z) = z - iS(2iz) = z - i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{n!} (2iz)^n$$

Puisque  $\sigma_1 = -\frac{1}{2}$  et  $\sigma_n = 0$  pour tout  $n \geq 3$  impair, tous les termes d'indices impairs de ce dernier développement en série entière sont nuls. On peut donc écrire :

$$\forall z \in D(0, \rho), T(z) = -i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n (-1)^n \sigma_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

**30** Soit  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \setminus \{0\}$ . Alors  $2x$  et  $4x$  ne sont pas des multiples de  $2\pi$  de sorte que  $e^{4ix} \neq 1$  et  $e^{2ix} \neq 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{2(e^{4ix} + 1)}{e^{4ix} - 1} - \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1} &= \frac{2(e^{2ix} + e^{-2ix})}{e^{2ix} - e^{-2ix}} - \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} \\ &= \frac{2 \cos(2x)}{i \sin(2x)} - \frac{\cos(x)}{i \sin(x)} \\ &= \frac{\cos(2x)}{i \sin(x) \cos(x)} - \frac{\cos(x)}{i \sin(x)} \\ &= \frac{\cos(2x) - \cos^2(x)}{i \sin(x) \cos(x)} \\ &= -\frac{\sin^2(x)}{i \sin(x) \cos(x)} \\ &= i \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = i \tan(x) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\tan(x) = \frac{1}{ix} (T(2x) - T(x))$$

et donc, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \tan(x) &= -\frac{1}{x} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n (-1)^n \sigma_{2n}}{(2n)!} (2x)^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n (-1)^n \sigma_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n (-1)^n \sigma_{2n} (1 - 4^n)}{(2n)!} x^{2n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{n+1} (-1)^{n+1} \sigma_{2n+2} (1 - 4^{n+1})}{(2n+2)!} x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{n+1} (-1)^n \sigma_{2n+2} (4^{n+1} - 1)}{(2n+2)!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{t_n}{(2n+1)!} = \frac{4^{n+1}(-1)^n \sigma_{2n+2}(4^{n+1} - 1)}{(2n+2)!}$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \frac{4^{n+1}(-1)^n \sigma_{2n+2}(4^{n+1} - 1)}{2n+2}$$