Devoir à la maison n° 5 : corrigé

Solution 1.

1. La fonction $x \mapsto x(a-bx)$ et continue donc bornée sur le segment $[0,\pi]$. Il existe donc $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [0,\pi]$, $|x(a-bx)| \leqslant K$. De plus, $\forall x \in [0,\pi]$, $|\sin x| \leqslant 1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|I_n| \leqslant \int_0^\pi \frac{|x(a-bx)|^n}{n!}|\sin x|\,dx \leqslant \int_0^\pi \frac{K^n}{n!}\,dx = \frac{K^n}{n!}\pi$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{K^n}{n!} = 0$. On en déduit que (I_n) converge vers 0 puisque $K^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$.

> **Remarque.** Si on ne souhaite pas utiliser de résultat théorique sur la continuité, on peut également étudier la fonction $x \mapsto x(a-bx)$ sur $[0,\pi]$. On prouve aisément que cette fonction est positive sur $[0,\pi]$ et qu'elle admet un maximum en $\frac{a}{2b} = \frac{\pi}{2}$ valant $\frac{a^2}{4b}$. De plus, $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ pour tout $x \in [0,\pi]$, ce qui permet d'affirmer par croissance de l'intégrale que pour tout $n \in \mathbb{N}$
>
> $$0 \leqslant I_n \leqslant \pi\frac{\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n}{n!}$$
>
> On conclut avec le théorème des gendarmes.

2. On a $I_0 = \int_0^\pi \sin x\,dx = 2$. On calcule I_1 par intégration par parties :

$$I_1 = \int_0^\pi x(a-bx)\sin x\,dx = -\left[x(a-bx)\cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi (a-2bx)\cos x\,dx$$

Or $a - b\pi = 0$ donc, par une nouvelle intégration par parties :

$$I_1 = \int_0^\pi (a-2bx)\cos x\,dx = \left[(a-2bx)\sin x\right]_0^\pi + 2b\int_0^\pi \sin x\,dx = 4b$$

3. La méthode par excellence pour déterminer des relations de récurrence entre intégrales est à nouveau l'intégration par parties. On remarquera que la dérivée de $x \mapsto \frac{x^k(a-bx)^k}{k!}$ est $x \mapsto \frac{x^{k-1}(a-bx)^{k-1}}{(k-1)!}(a-2bx)$. Allons-y !

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^\pi \frac{x^{n+2}(a-bx)^{n+2}}{(n+2)!}\sin x\,dx \\
&= -\left[\frac{x^{n+2}(a-bx)^{n+2}}{(n+2)!}\cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{x^{n+1}(a-bx)^{n+1}}{(n+1)!}(a-2bx)\cos x\,dx \\
&= \int_0^\pi \frac{x^{n+1}(a-bx)^{n+1}}{(n+1)!}(a-2bx)\cos x\,dx \\
&= \left[\frac{x^{n+1}(a-bx)^{n+1}}{(n+1)!}(a-2bx)\sin x\right]_0^\pi + 2b\int_0^\pi \frac{x^{n+1}(a-bx)^{n+1}}{(n+1)!}\sin x\,dx - \int_0^\pi \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}(a-2bx)^2\sin x\,dx \\
&= 2bI_{n+1} - \int_0^\pi \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}(a^2 - 4bx(a-bx))\sin x\,dx \\
&= 2bI_{n+1} - a^2I_n + 4(n+1)bI_{n+1} = 2b(2n+3)I_{n+1} - a^2I_n
\end{aligned}$$

4. I_0 et I_1 sont des entiers. La relation de récurrence précédente montre que I_n est entier pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme (I_n) converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|I_n| \leqslant \frac{1}{2}$. Comme les I_n sont des entiers, $I_n = 0$ pour $n \geqslant N$. Ainsi (I_n) est stationnaire de limite nulle.
Soit $n \geqslant N$. On a donc $I_n = 0$. Or l'application $f : x \mapsto \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}\sin x$ est positive et continue sur $[0,\pi]$. On en déduit qu'elle est nulle sur $[0,\pi]$, ce qui est faux. Par exemple, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$. Il y a contradiction : π n'est pas rationnel.

Solution 2.

1. On a facilement $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $J_0 = \frac{\pi^3}{24}$, $I_1 = 1$. Pour le calcul de J_1, on intègre deux fois par parties :

$$\begin{aligned} J_1 &= \left[t^2 \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, dt \\ &= \frac{\pi^2}{4} + 2\left[t \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $\cos^n$ est continue, positive et non constamment nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc son intégrale sur ce segment est stritement positive i.e. $I_n > 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On procède à nouveau à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[\sin t \cos^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t \, dt \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^n t \, dt \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité demandée.

4. **a.** Il est évident que $t \geqslant 0$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Pour établir l'autre inégalité, il suffit d'utiliser la concavité de la fonction sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En effet, sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, le graphe de cette fonction est au-dessus de la corde reliant les points d'abscisse 0 et $\frac{\pi}{2}$. Ainsi pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t \geqslant \frac{2t}{\pi}$ et on en déduit bien la seconde inégalité demandée.
Pour les nouvelles générations qui ignoreront tout de la convexité, on introduit la fonction $f : t \mapsto \frac{\pi}{2}\sin t - t$. f est deux fois dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f''(t) = -\frac{\pi}{2}\sin t$ pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi f'' est négative sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et ne s'annule qu'en 0 ce qui prouve la stricte décroissance de f'. On a $f'(0) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$. f' étant également continue, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires montre que f' s'annule en un unique réel α sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$. La décroissance de f' montre que f' est positive sur $[0, \alpha]$ et négative sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi f est croissante sur $[0, \alpha]$ et décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Puisque $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, f est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi^2}{4} \sin^2 t \cos^n t \, dt = \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^n t \, dt = \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+2})$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $I_n > 0$

$$0 \leqslant \frac{J_n}{I_n} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{I_{n+2}}{I_n}\right)$$

Or d'après la question **3**, $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Par le théorème des gendarmes, $\left(\frac{J_n}{I_n}\right)$ converge vers 0.

5. **a.** On procède encore une fois à des intégrations par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[t \cos^{n+2} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{n+1} t \, dt \\ &= (n+2)\left[\frac{t^2}{2}\sin t \cos^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\left(\cos^{n+2} t - (n+1)\sin^2 t \cos^n t\right) dt \\ &= -\frac{1}{2}(n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\left(\cos^{n+2} t - (n+1)(1-\cos^2 t)\cos^n t\right) dt \\ &= -\frac{1}{2}(n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\left((n+2)\cos^{n+2} t - (n+1)\cos^n t\right) dt \\ &= \frac{1}{2}\left((n+2)(n+1)J_n - (n+2)^2 J_{n+2}\right) \end{aligned}$$

b. En utilisant la question **3**

$$\frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{(n+1)J_n}{(n+2)I_{n+2}} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{\frac{n+1}{n+2}J_n - J_{n+2}}{I_{n+2}}$$

En utilisant maintenant la question précédente :

$$\frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{\frac{n+1}{n+2}J_n - J_{n+2}}{\frac{1}{2}\left((n+2)(n+1)J_n - (n+2)^2 J_{n+2}\right)} = \frac{2}{(n+2)^2}$$

6. En sommant les égalités de la question précédente pour $n \in [\![0, N]\!]$ (avec $N \geqslant 1$), on obtient par télescopage

$$\frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1} - \frac{J_{N+1}}{I_{N+1}} - \frac{J_{N+2}}{I_{N+2}} = 2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+2)^2} = 2S_{N+2} - 2$$

En utilisant la question **4.c**, on en déduit que (S_n) converge vers $\frac{1}{2}\left(\frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1}\right) + 1$. En utilisant les résultats de la question **1**, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1}\right) + 1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\pi^3}{24}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{1}\right) + 1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{4} - 2\right) + 1 = \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$