

# DEVOIR À LA MAISON N° 4

## Problème 1 —

1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $I = [0, \pi]$  par  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}}$ .
  - a. Montrer que  $f$  est bien définie sur  $I$ .
  - b. Étudier le signe de  $f(x) - \sin x$  pour  $x \in I$ .
  - c. Montrer que pour  $x \in ]0, \pi]$ ,  $\sin x < x$ . En déduire les solutions de l'équation  $f(x) = x$  sur  $I$ .
2. Étudier les variations de  $f$  sur  $I$  et tracer son graphe (on tracera notamment les tangentes en  $0$  et  $\pi$ ).
3. On considère la fonction  $g$  définie sur  $I$  par  $g(x) = \arccos\left(\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right)$ .
  - a. Étudier les variations de  $\phi : \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \frac{4-5t}{5-4t} \end{cases}$ . Quelle est l'image de  $[-1, 1]$  par  $\phi$ ?
  - b. Justifier que  $g$  est bien définie sur  $I$ .
  - c. Donner les variations de  $g$  sans calculer la dérivée de  $g$ . Quelle est l'image de  $I$  par  $g$ ?
4. Soit  $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ .
  - a. Montrer qu'il existe un unique  $z \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$  tel que  $f(z) = f(x)$ .
  - b. Calculer  $\cos(g(x))$  et  $\sin(g(x))$ .
  - c. Calculer  $f(g(x))$  et en déduire que  $z = g(x)$ .
5.
  - a. Montrer que pour  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{2}}$  et  $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{2}}$ .
  - b. En déduire que  $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right) = f(x)$  et  $\cos\left(\frac{z-x}{2}\right) = 2f(x)$ .
6.
  - a. Prouver que  $f$  induit une bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$  sur un intervalle à préciser. On note  $h$  sa bijection réciproque.
  - b. Déterminer la fonction  $h$  à l'aide de la question précédente.