

# DEVOIR À LA MAISON N°01

## A rendre le mercredi 23/09

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

### Solution 1

1. D'après l'énoncé,  $x_0^3 = x_0^2$  donc  $x_0 \in \{0, 1\}$ .
2. Si  $x_0 = 0$ , alors  $x_1^3 = x_1^2$  donc  $x_1 \in \{0, 1\}$ . Si  $x_0 = 1$ , alors  $1 + x_1^3 = (1 + x_1)^2$  ce qui équivaut à  $x_1(x_1^2 - x_1 - 2) = 0$  ou encore  $x_1(x_1 - 2)(x_1 + 1) = 0$  de sorte que  $x_1 \in \{-1, 0, 2\}$ .
3. Si  $(x_0, x_1) = (0, 0)$ , alors  $(S_0, S_1) = (0, 0)$ .  
Si  $(x_0, x_1) = (0, 1)$ , alors  $(S_0, S_1) = (0, 1)$ .  
Si  $(x_0, x_1) = (1, 0)$ , alors  $(S_0, S_1) = (1, 1)$ .  
Si  $(x_0, x_1) = (1, -1)$ , alors  $(S_0, S_1) = (1, 0)$ .  
Si  $(x_0, x_1) = (1, 2)$ , alors  $(S_0, S_1) = (1, 3)$ .
4. On raisonne par récurrence. On note  $\mathcal{P}_n$  l'assertion

$$\exists m \in \mathbb{N}, S_n = \frac{m(m+1)}{2}$$

Tout d'abord,  $\mathcal{P}_0$  est vraie puisque  $S_0 = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$  ou  $S_1 = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ .

Supposons  $\mathcal{P}_n$  vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Il existe donc  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $S_n = \frac{m(m+1)}{2}$ . D'une part,

$$\sum_{k=0}^{n+1} x_k^3 = S_{n+1}^2 = (S_n + x_{n+1})^2$$

et d'autre part

$$\sum_{k=0}^{n+1} x_k^3 = \left( \sum_{k=0}^n x_k^3 \right) + x_{n+1}^3 = S_n^2 + x_{n+1}^3$$

On en déduit que

$$(S_n + x_{n+1})^2 = S_n^2 + x_{n+1}^3$$

ou encore

$$x_{n+1}(x_{n+1}^2 - x_{n+1} - 2S_n) = 0$$

Cette dernière égalité équivaut à

$$x_{n+1}(x_{n+1}^2 - x_{n+1} - m(m+1)) = 0$$

ou encore

$$x_{n+1}(x_{n+1} + m)(x_{n+1} - (m+1)) = 0$$

de sorte que  $x_{n+1} \in \{-m, 0, m+1\}$ .

Si  $x_{n+1} = -m$ , alors  $S_{n+1} = S_n - m = \frac{m(m-1)}{2} = \frac{(m-1)((m-1)+1)}{2}$ . Si  $m \geq 1$ , alors  $m-1 \in \mathbb{N}$ . Sinon  $m = 0$  et alors  $S_{n+1} = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$ .

Si  $x_{n+1} = 0$ , alors  $S_{n+1} = S_n = \frac{m(m+1)}{2}$  et  $m \in \mathbb{N}$ .

Si  $x_{n+1} = m+1$ , alors  $S_{n+1} = S_n + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$  et  $m+1 \in \mathbb{N}$ . Dans tous les cas de figure,  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. Par récurrence,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Solution 2**

1. On remarque que

$$f(0) = f(0^2 + 0^2) = f(0)^2 + f(0)^2 = 2f(0)^2$$

de sorte que  $f(0) = 0$  ou  $f(0) = \frac{1}{2}$ . Or  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  donc  $f(0) = 0$ .

De même

$$f(1) = f(1^2 + 0^2) = f(1)^2 + f(0)^2 = f(1)^2$$

donc  $f(1) = 0$  ou  $f(1) = 1$ . Or l'énoncé stipule que  $f(1) \neq 0$  donc  $f(1) = 1$ .

2. On utilise à nouveau le même genre d'astuce.

$$f(2) = f(1^2 + 1^2) = f(1)^2 + f(1)^2 = 2$$

$$f(4) = f(2^2 + 0^2) = f(2)^2 + f(0)^2 = 4$$

$$f(5) = f(2^2 + 1^2) = f(2)^2 + f(1)^2 = 5$$

$$f(8) = f(2^2 + 2^2) = f(2)^2 + f(2)^2 = 8$$

3. On décompose
- $5^2$
- de deux manières sous la forme d'une somme de deux carrés.

$$\begin{aligned} f(5^2) &= f(3^2 + 4^2) = f(3)^2 + f(4)^2 \\ &= f(5^2 + 0^2) = f(5)^2 + f(0)^2 = f(5)^2 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$f(3)^2 = f(5)^2 - f(4)^2 = 5^2 - 4^2 = 3^2$$

Puisque  $f$  est à valeurs positives,  $f(3) = 3$ . On en déduit aussitôt que

$$f(9) = f(3^2 + 0^2) = f(3)^2 + f(0)^2 = 3^2 + 0^2 = 9$$

De la même manière, puisque  $10^2 = 6^2 + 8^2$ ,

$$f(10)^2 = f(10^2) = f(6)^2 + f(8)^2$$

Ainsi

$$f(6)^2 = f(10)^2 - f(8)^2 = 10^2 - 8^2 = 6^2$$

de sorte que  $f(6) = 6$ .

Enfin,

$$f(10) = f(1^2 + 3^2) = f(1)^2 + f(3)^2 = 1^2 + 3^2 = 10$$

4. Tout d'abord

$$f(50) = f(5^2 + 5^2) = f(5)^2 + f(5)^2 = 5^2 + 5^2 = 50$$

Enfin,

$$50 = f(50) = f(1^2 + 7^2) = f(1)^2 + f(7)^2 = 1 + f(7)^2$$

donc  $f(7)^2 = 49 = 7^2$  puis  $f(7) = 7$ .

5. Puisque
- $125 = 10^2 + 5^2 = 11^2 + 2^2$
- , on obtient

$$f(10)^2 + f(5)^2 = f(11)^2 + f(2)^2$$

Or on a montré que  $f(10) = 10$ ,  $f(5) = 5$  et  $f(2) = 2$  donc  $f(11)^2 = 11^2$  puis  $f(11) = 11$ . De même,  $145 = 8^2 + 9^2 = 12^2 + 1^2$  et on a montré que  $f(8) = 8$ ,  $f(9) = 9$  et  $f(1) = 1$ . On en déduit comme précédemment que  $f(12) = 12$ .

6. On peut raisonnablement conjecturer que
- $f(n) = n$
- pour tout
- $n \in \mathbb{N}$
- .

On note  $\mathcal{P}_n$  l'assertion

$$\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, f(k) = k$$

D'après les questions précédentes,  $\mathcal{P}_4$  est vraie (et même  $\mathcal{P}_6$ ).

On suppose  $\mathcal{P}_n$  vraie pour un certain entier  $n \geq 4$ . D'après les indications de l'énoncé,

$$f(2n+1)^2 + f(n-2)^2 = f(2n-1)^2 + f(n+2)^2$$

Or  $n-2, n+2$  et  $2n-1$  appartiennent à  $\llbracket 0, 2n \rrbracket$  car  $n \geq 2$  donc  $f(n-2) = n-2, f(n+2) = n+2$  et  $f(2n-1) = 2n-1$  d'après  $\mathcal{P}_n$ . Ainsi  $f(2n+1)^2 = (2n+1)^2$  puis  $f(2n+1) = 2n+1$ .

De même,

$$f(2n+2)^2 + f(n-4)^2 = f(2n-2)^2 + f(n+4)^2$$

Or  $n-4, n+4$  et  $2n-2$  appartiennent à  $\llbracket 0, 2n \rrbracket$  car  $n \geq 4$  donc  $f(n-4) = n-4, f(n+4) = n+4$  et  $f(2n-2) = 2n-2$  d'après  $\mathcal{P}_n$ . Ainsi  $f(2n+2)^2 = (2n+2)^2$  puis  $f(2n+2) = 2n+2$ .

Finalement  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

Par récurrence,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ce qui permet d'affirmer que  $f(n) = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Solution 3

1. a. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

- b. D'une part, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'_n(x) = n(1+x)^{n-1}$$

et d'autre part, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'_n(x) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

On a donc

$$f'_n(1) = 2^{n-1}n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$$

- c. D'une part, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f''_n(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

et d'autre part, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f''_n(x) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2}$$

On a donc

$$f''_n(1) = 2^{n-2}n(n-1) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}$$

- d. Puisque pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k^2 = k(k-1) + k$ ,

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = 2^{n-2}n(n-1) + 2n = 2^{n-2}n(n+1)$$

2. a. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-x)^k \\ &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} x^{2k} + \sum_{0 \leq 2+1k \leq n} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-x)^{2k} + \sum_{0 \leq 2+1k \leq n} \binom{n}{2k+1} (-x)^{2k+1} \\ &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} x^{2k} + \sum_{0 \leq 2+1k \leq n} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} x^{2k} - \sum_{0 \leq 2+1k \leq n} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1} \\ &= 2 \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} x^{2k} \end{aligned}$$

- b. D'une part, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$g'_n(x) = n(1+x)^{n-1} - n(1-x)^{n-1}$$

et d'autre part, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$g'_n(x) = 2 \sum_{0 \leq 2k \leq n} 2k \binom{n}{2k} x^{2k-1} = 4 \sum_{0 \leq 2k \leq n} k \binom{n}{2k} x^{2k-1}$$

On a donc

$$g'_n(1) = 2^{n-1}n = 4 \sum_{0 \leq 2k \leq n} k \binom{n}{2k}$$

Ainsi  $\sum_{0 \leq 2k \leq n} k \binom{n}{2k} = 2^{n-3}n.$

c. D'une part, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$g''_n(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} + n(n-1)(1-x)^{n-2}$$

et d'autre part, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$g''_n(x) = 2 \sum_{0 \leq 2k \leq n} 2k(2k-1) \binom{n}{2k} x^{2k-2}$$

On a donc

$$g''_n(1) = 2^{n-2}n(n-1) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} 4k(2k-1) \binom{n}{2k}$$

Puisque pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k^2 = \frac{4k(2k-1)}{8} + \frac{k}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq 2k \leq n} k^2 \binom{n}{2k} &= \frac{1}{4} \sum_{0 \leq 2k \leq n} 2k(2k-1) \binom{n}{2k} + \frac{1}{2} \sum_{0 \leq 2k \leq n} k \binom{n}{2k} \\ &= \frac{2^{n-2}n(n-1)}{8} + \frac{2^{n-3}n}{2} = 2^{n-5}n(n+1) \end{aligned}$$