Devoir surveillé n°5 : corrigé

Problème 1 — Développement limité d'une solution d'une équation différentielle

Partie I – Un développement limité de F

1. Il est clair que

$$e^{t^2} \underset{t\to 0}{=} 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + o\left(t^4\right)$$

2. On remarque que $x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ est l'unique primitive de $t \mapsto e^{t^2}$ s'annulant en 0 donc

$$\int_0^x e^{t^2}\,dt \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o\left(x^5\right)$$

d'après le théorème de primitivation des développements limités.

3. On met le développement limité précédent sous forme normalisée

$$\int_0^x e^{t^2}\,dt \underset{x\to 0}{=} x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{10} + o\left(x^4\right)\right)$$

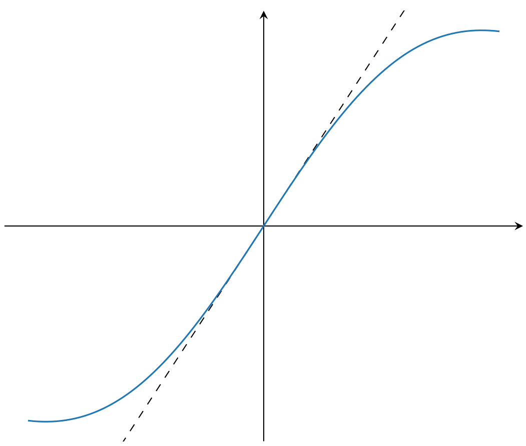
Pour obtenir le développement limité demandé, il suffit de développer $x \mapsto e^{-x^2}$ au voisinage de 0 à l'ordre 4 :

$$e^{-x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
F(x) &\underset{x\to 0}{=} x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{10} + o\left(x^4\right)\right)\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x\left(1 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{15}x^4 + o\left(x^4\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

4. Puisque $F(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$, la tangente à la courbe représentative de F au point d'abscisse 0 est la droite d'équation $y = x$. Par ailleurs, $F(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{2}{3}x^3$ donc la courbe de F est située au-dessus de sa tangente au voisinage de 0^- et au-dessous au voisinage de 0^+.



Partie II – Une équation différentielle

5. Puisque f est solution différentielle de (E) sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + 2xf(x) = 1$. En évaluant l'identité précédente en 0, on obtient $f'(0) = 1$.

6. On formule la proposition suivante

$\mathrm{HR}(n)$: f est n fois dérivable.

Initialisation $\mathrm{HR}(1)$ est vraie puisque f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.

Hérédité Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - 2xf(x)$. Puisque f, $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1$ sont n fois dérivables, f' l'est également. Ainsi f est $n+1$ fois dérivable et $\mathrm{HR}(n+1)$ est vraie.

Conclusion Par récurrence, $\mathrm{HR}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ i.e. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

7. On peut appliquer la formule de Leibniz de dérivation d'un produit. En dérivant $n+1$ fois la relation $f'(x) + 2xf(x) = 1$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+2)}(x) + 2\left(\binom{n+1}{0} x f^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1} f^{(n)}(x)\right) = 0$$

puisque les dérivées d'ordres supérieurs ou égaux à 2 de $x \mapsto x$ sont nulles. On obtient alors la relation demandée. Si on n'a pas encore vu la formule de Leibniz, on procède par récurrence en formulant la proposition suivante

$$\mathrm{HR}(n) :\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{n+2}(x) + 2xf^{(n+1)}(x) + 2(n+1)f^{(n)}(x) = 0$$

Initialisation Puisque f est solution de (E), $f'(x) + 2xf(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, il est légitime de dériver la relation précédente pour trouver $f''(x) + 2xf'(x) + 2f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit, $\mathrm{HR}(0)$ est vraie.

Hérédité Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. En dérivant la relation $f^{n+2}(x) + 2xf^{(n+1)}(x) + 2(n+1)f^{(n)}(x) = 0$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{n+3}(x) + 2xf^{(n+2)}(x) + 2f^{(n+1)}(x) + 2(n+1)f^{(n+1)}(x) = 0$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{n+3}(x) + 2xf^{(n+2)}(x) + 2(n+2)f^{(n+1)}(x) = 0$$

Autrement dit, $\mathrm{HR}(n+1)$ est vraie.

Conclusion $\mathrm{HR}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8. **a.** En évaluant l'identité de la question précédente en 0, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n+2)}(0) = -2(n+1)f^{(n)}(0)$$

Il s'ensuit notamment que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(2n+1)}(0) = -4nf^{(2n-1)}(0)$$

Par une récurrence évidente, on peut montrer que $f^{(2n+1)}(0) = (-4)^n n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. De la même manière

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(2n)}(0) = -2(2n-1)f^{(2n-2)}(0)$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(2n)}(0) = (-2)^n \left(\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right) f(0) = \frac{(-2)^n(2n)!}{2^n n!} f(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} f(0)$$

9. **a.** Tout d'abord, $x \mapsto e^{-x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque $x \mapsto -x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de la fonction $t \mapsto e^{t^2}$ continue sur $\mathbb{R}$. Ceci justifie la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, puisque $x \mapsto e^{x^2}$ est la dérivée de $x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + e^{-x^2}e^{x^2} = 1 - 2xF(x)$$

F est donc bien solution de (E).

b. D'après la formule de Taylor-Young,

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{5} \frac{F^{(k)}(0)}{k!}x^k + o\left(x^5\right)$$

Mais d'après la question précédente, $F^{(k)}(0) = 0$ pour tout entier naturel k pair puisque $F(0) = 0$. La question précédente permet aussi de calculer

$$\frac{F'(0)}{1!} = 1 \qquad \frac{F^{(3)}(0)}{3!} = \frac{(-4)1!}{3!} = -\frac{2}{3} \qquad \frac{F^{(5)}(0)}{5!} = \frac{(-4)^2 2!}{5!} = \frac{4}{15}$$

On retrouve alors bien le développement limité déterminé à la question **I.3**.

10. (E) est une équation différentielle linéaire et son équation homogène associée est $y' + 2xy = 0$ dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-x^2}$, λ décrivant $\mathbb{R}$. Puisque F est une solution particulière de (E), les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto F(x) + \lambda e^{-x^2}$, λ décrivant $\mathbb{R}$.

11. Soit f une éventuelle solution impaire de (E) sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = F(x) + \lambda e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque f est impaire, $f(0) = 0$ et donc $\lambda = 0$ puis $f = F$.
Réciproquement, montrons que F est impaire. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors en effectuant le changement de variable $u = -t$,

$$F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = -e^{-x^2}\int_0^{-x} e^{-u^2}\,du = -F(-x)$$

Ainsi F est bien impaire.
Par conséquent, F est l'unique solution impaire de (E).

Remarque. On prouvait procéder différemment sans résoudre (E).

Existence On sait que (E) admet des solutions sur $\mathbb{R}$. On s'en donne une quelconque que l'on note f. On vérifie alors que $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ est une solution impaire de (E).

Unicité Donnons-nous deux solutions impaires f et g de (E). On a notamment $f(0) = g(0) = 0$. f et g sont donc solutions du même problème de Cauchy $\begin{cases} y' + 2xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$. Par unicité de la solution de ce problème, $f = g$ ce qui prouve l'unicité de la solution impaire de (E).

■