

DEVOIR À LA MAISON N°03

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 —

Les différentes parties de ce problème sont très largement indépendantes.

Partie I – Étude d'une application

On définit une application f de la manière suivante :

$$f: \begin{cases} \mathbb{C}^* & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto z + \frac{1}{z} \end{cases}$$

1. Déterminer les antécédents éventuels du nombre complexe i par f .
2. L'application f est-elle injective ?
3. Montrer que f est surjective.
4. Montrer que $f(\mathbb{U}) = [-2, 2]$.
5. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*$.
6. Montrer que $f(\mathbb{R}^*) =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. On pourra procéder à une étude de fonction.
7. On pose $D = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < 1\}$. Montrer que $f(D) \subset \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$.
8. Montrer que tout élément de $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ admet exactement 2 antécédents par f dans \mathbb{C}^* . Que vaut le produit de ces deux antécédents ?
9. Montrer que f induit une bijection de D sur $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$.

Partie II – Un petit peu d'exponentielle complexe

On définit une application g de la manière suivante :

$$g: \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto f(e^z) \end{cases}$$

1. Déterminer les antécédents éventuels du nombre complexe i par g .
2. Déterminer $g(i\mathbb{R})$.
3. Déterminer $g(\mathbb{R})$.

Partie III – Une suite d'applications

On définit une suite d'applications (φ_n) de \mathbb{C} dans \mathbb{C} en posant

$$\forall z \in \mathbb{C}, \varphi_0(z) = 2 \text{ et } \varphi_1(z) = z$$

et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \varphi_{n+2}(z) = z\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)$$

1. Donner des expressions de $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ et $\varphi_4(z)$.
2. En déduire les solutions des équations $\varphi_2(z) = 0$, $\varphi_3(z) = 0$ et $\varphi_4(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \varphi_n(f(z)) = f(z^n)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $f(z^n) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$.
5. En déduire les solutions de l'équation $\varphi_n(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On précisera également le nombre de ces solutions.