Devoir à la maison n°16 : corrigé

Problème 1 — Petites Mines 2002 – Exemples de matrices semblables à leur inverse

Partie I –

1. La relation considérée est **réflexive** : $\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A = I_3^{-1} A I_3$.
Elle est **symétrique**, car si $A = P^{-1}BP$, alors $B = PAP^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} AP^{-1}$.
Enfin elle est **transitive**, car si $A = P^{-1}BP$ et $B = Q^{-1}CQ$, alors $A = P^{-1}Q^{-1}CQP = (QP)^{-1}CQP$, et $GL_3(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif.

2. On sait que le déterminant d'un produit de matrices est le produit des déterminants (c'est un morphisme multiplicatif). Si $A \sim B$, il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}AP$. Alors $\det A = \det\left(P^{-1}BP\right) = \det\left(P^{-1}\right)\det(B)\det(P)$ et, comme $\det P^{-1} = \frac{1}{\det P}$, il vient $\det A = \det B$. On conclut alors par contraposition.

3. **a.** Soit $y \in \operatorname{Im} w$. Il existe $x \in \operatorname{Ker} u^{i+j}$ tel que $y = w(x) = u^j(x)$. On en déduit que $u^i(y) = u^{i+j}(x) = 0$ car $x \in \operatorname{Ker} u^{i+j}$. Donc $y \in \operatorname{Ker} u^i$. Ainsi $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Ker} u^i$.

b. D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} w + \operatorname{rg} w = \dim \operatorname{Ker} u^{i+j}$. Or

$$\operatorname{Ker} w = \operatorname{Ker}\left(u^j\right)_{|\operatorname{Ker} u^{i+j}} = \operatorname{Ker} u^j \cap \operatorname{Ker} u^{i+j} = \operatorname{Ker} u^j$$

car $\operatorname{Ker} u^j \subset \operatorname{Ker} u^{i+j}$. En remplaçant dans l'égalité précédente, on a donc

$$\dim \operatorname{Ker} u^j + \dim \operatorname{Im} w = \dim \operatorname{Ker} u^{i+j}$$

D'après la question précédente, $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Ker} u^i$ donc $\operatorname{rg} w \leq \dim \operatorname{Ker} u^i$. On peut donc conclure :

$$\dim \operatorname{Ker} u^{i+j} \leq \dim \operatorname{Ker} u^j + \dim \operatorname{Ker} u^i$$

4. **a.** D'une part, $u^3 = u^{2+1}$, donc la question **I.3.b** donne $3 = \dim \operatorname{Ker} u^3 \leq \dim \operatorname{Ker} u^2 + \dim \operatorname{Ker} u$. Comme $\operatorname{rg} u = 2$, on a $\dim \operatorname{Ker} u = 1$ d'après le théorème du rang. Ainsi $\dim \operatorname{Ker} u^2 \geq 2$.
D'autre part $u^2 = u^{1+1}$, donc $\dim \operatorname{Ker} u^2 \leq 2 \dim \operatorname{Ker} u = 2$ toujours d'après la question **I.3.b**. Finalement, on obtient $\dim \operatorname{Ker} u^2 = 2$.

b. De $\dim \operatorname{Ker} u^2 = 2$, on peut déduire $\operatorname{rg} u^2 = 1$. Il existe donc un vecteur a non nul tel que $u^2(a) \neq 0$. Soient α, β, γ des réeles tels que

$$\alpha a + \beta u(a) + \gamma u^2(a) = 0$$

Alors, par application de u^2, on trouve $\alpha u^2(a) = 0$ puisque $u^3 = 0$. D'où $\alpha = 0$.
Puis, en appliquant u, on trouve $\beta = 0$. Enfin, il reste $\gamma u^2(a) = 0$ ce qui donne $\gamma = 0$.
La famille $\left(u^2(a), u(a), a\right)$ est donc libre. Elle est formée de 3 vecteurs, dans E de dimension 3, c'est donc une base de E.

c. On a $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. **a.** Puisque $\operatorname{rg} u = 1$, il existe un vecteur b tel que $u(b) \neq 0$.

b. D'une part $u^2 = 0$ donc $u^2(b) = 0$, ce qui entraîne $u(b) \in \operatorname{Ker} u$. D'autre part, $\dim \operatorname{Ker} u = 2$ donc le vecteur non nul $u(b)$ de $\operatorname{Ker} u$ peut être complété par un vecteur c de $\operatorname{Ker} u$ pour que la famille $(u(b), c)$ forme une base de $\operatorname{Ker} u$. Il nous reste à vérifier que la famille $(b, u(b), c)$ est libre. Soient α, β, γ des réels tels que $\alpha b + \beta u(b) + \gamma c = 0$. Alors, par application de u, on trouve $\alpha = 0$. Puis, la famille $(u(b), c)$ étant libre, on trouve $\beta = \gamma = 0$. La famille $(b, u(b), c)$ est libre et possède autant d'éléments que la dimension de E : c'est donc une base de E.

c. On a $U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie II –

1. On a $\det T = 1$ et A est semblable à T donc $\det A = 1$, ce qui prouve que A est inversible.

2. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $N^3 = 0$. On a alors : $(I_3 - N + N^2)(I + N) = I_3 - N^3 = I$ car la matrice N commute avec I et les puissances de N. On en déduit $T^{-1} = I_3 - N + N^2$. Autrement dit, $\left(P^{-1}AP\right)^{-1} = I_3 - N + N^2$. On peut conclure en remarquant que $\left(P^{-1}AP\right)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$.

3. Si $N = 0$, alors $T = I_3$ donc $A = I_3 = A^{-1}$. A et A^{-1} sont évidemment semblables.

4. **a.** Appelons u l'endomorphisme de matrice N dans une base de E. On a donc $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(N) = 2$ et $u^3 = 0$ puisque $N^3 = 0$. D'après la question **I.4.c**, il existe une base de E dans laquelle u a pour matrice U donc N est semblable à U et la matrice M est semblable à V.

b. D'après la question **II.2**, on a $V^3 = 0$, donc aussi $M^3 = 0$ puisque M et V sont semblables. D'autre part, le rang de V est 2 car le sous-espace engendré par ses vecteurs colonnes est de dimension 2. Comme M et V sont semblables, elles ont même rang (elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes). Ainsi $\mathrm{rg}\, M = 2$.
De manière moins sophistiquée, on peut calculer directement $M^3 = (N(N - I_3))^3 = N^3(N - I_3)^3 = 0$ car N et $N - I_3$ commutent et $N^3 = 0$. Enfin, on peut voir que N étant de rang 2, α et γ sont non nuls. Un calcul rapide donne $M = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \alpha\gamma - \beta \\ 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{rg}\, M = 2$ puisque $-\alpha$ et $-\gamma$ sont non nuls.

c. On a $N^3 = 0$ et $\mathrm{rg}\, N = 2$, de même que $M^3 = 0$ et $\mathrm{rg}\, M = 2$. On prouve comme en **II.4.a** que M est également semblable à U. Par transitivité, on en déduit que M et N sont semblables.

d. On sait que A est semblable à $T = I_3 + N$ et A^{-1} est semblable à $I_3 - N + N^2 = I_3 + M$. Or M et N sont semblables donc il existe $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $M = Q^{-1}NQ$. On a alors également $I_3 + M = Q^{-1}(I_3 + N)Q$ i.e. $I_3 + M$ et $I_3 + N$ sont semblables. Par transitivité de la relation $\sim$, on en déduit que A et A^{-1} sont semblables.

5. Ici $\mathrm{rg}\, N = 1$ donc l'un au moins des deux coefficients α et γ est nul (sinon le rang serait 2). Le calcul de **II.2** montre alors que $N^2 = 0$.

On a vu dans **I.5.c** que N est semblable à U′ et M à V′. Or U′ et V′ sont semblables. En effet, posons $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie que $P^{-1} = P$ puis que $V' = P^{-1}U'P$. En raisonnant comme précédemment, N et M sont semblables puis $I_3 + N$ et $I_3 + M$ le sont aussi et enfin A et A^{-1} sont semblables.

6. **a.** Déterminons $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$. C'est l'ensemble des vecteurs de coordonnées (x, y, z) dans la base (a, b, c) tels que $\begin{cases} -y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$. On reconnaît une équation de plan. Une base est, par exemple $(e_1, e_2) = (a, b - c)$.

b. La matrice des coordonnées de la famille $(a, b - c, c)$ dans la base (a, b, c) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice a pour déterminant 1, donc la famille $(a, b - c, c)$ est une base de E. Dans cette base, la matrice de u est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ car $u(a) = a$, $u(b - c) = b - c$ et $u(c) = -b + 2c = -(b - c) + c$. On aurait également pu calculer $P^{-1}AP$.

c. On a $P^{-1}AP = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a donc $\operatorname{rg} N = 1$ et on peut appliquer la question **II.5** : A est bien semblable à A^{-1}.

7. Soit $A = -I_3$. On a $A^{-1} = -I_3 = A$ donc A et A^{-1} sont bien semblables par réflexivité de la relation $\sim$.
De plus, pour toute matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$, $P^{-1}AP = A$. La seule matrice semblable à A est donc A elle-même. Aucune matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est semblable à A.