Devoir à la maison n° 2

Exercice 1.

1. Soient k, l, n des entiers naturels tels que $l \leqslant k \leqslant n$.

a. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$.

b. En déduire que si $l < n$, $\sum_{k=l}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{l} = 0$.

2. Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k$$

Exercice 2.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in [-1, 1]^n$ tels que $\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$. On veut montre l'inégalité :

$$|x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n| \leqslant \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière d'un réel t. On pose $S = \sum_{k=1}^{n} kx_k$ et $S_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$. Enfin, on pose $p = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

1. Montrer que $S = -\sum_{k=1}^{n-1} S_k$.

2. Montrer que $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $|S_k| \leqslant n - k$.

3. Montrer que $|S| \leqslant \sum_{k=1}^{p} k + \sum_{k=1}^{n-p-1} k$.

4. En déduire l'inégalité annoncée. On pourra distinguer le cas n pair et le cas n impair.

Exercice 3.

Soit n un entier naturel impair. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $G = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$.

1. Soit $r \in \mathbb{Z}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk}$ selon les valeurs de r.

2. Montrer que l'application $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ k & \longmapsto & \omega^{k^2} \end{array} \right.$ est n-périodique.

3. Soit $j \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+j)^2} = G$.

4. Montrer que $G\overline{G} = n$ et en déduire $|G|$.