Devoir à la maison n°12 : corrigé

Problème 1 — Polynômes de Bernoulli – D'après ENAC 1995

Partie I –

1. **a.** On montre que d est injective et surjective.

   Injectivité Soit $P \in \ker \phi$. Donc P est un polynôme constant. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda$. Comme $P \in E$, on en déduit $\int_0^1 \lambda dx = 0$ i.e. $\lambda = 0$. Ainsi $P = 0$.

   Surjectivité Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Comme D est clairement surjective, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $D(Q) = P$. Posons $\lambda = \int_0^1 Q(t)dt$. Alors $Q - \lambda \in E$ et $D(Q - \lambda) = P$. Ainsi d est surjective.

   Remarque. On peut raisonner de manière plus conceptuelle. E est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$ en tant que noyau de la forme linéaire non nulle $P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \int_0^1 P(t)\,dt$. Clairement, $\operatorname{Ker} D = \mathbb{R}_0[X] = \operatorname{vect}(1)$ donc $\operatorname{Ker} D$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}[X]$ non incluse dans l'hyperplan E : on sait alors que E et $\operatorname{Ker} D$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$. Un théorème du cours permet alors d'affirmer que D induit un isomorphisme de E sur $\operatorname{Im} D$. Mais il est clair que $\operatorname{Im} D = \mathbb{R}[X]$ donc D induit un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$. Autrement dit, d est un isomorphisme. ■

   b. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$.
   Supposons que $P = \Phi(Q)$. Alors $P \in E$ puisque Φ est une application de $\mathbb{R}[X]$ dans E. De plus, $P' = d(P) = d \circ \Phi(Q) = Q$ puisque $\Phi = d^{-1}$.
   Supposons que $P \in E$ et $P' = Q$. Alors $Q = P' = d(P)$ donc $\Phi(Q) = \Phi \circ d(P) = P$.

2. **a.** Non. Il suffit de prendre $P = 1$. On trouve $\Phi(P) = X - \frac{1}{2}$ et donc $\Phi(P)(0) = -\frac{1}{2}$ tandis que $\Phi(P(0)) = \Phi(1) = X - \frac{1}{2}$.

   b. Non. Il suffit à nouveau de prendre $P = 1$. On trouve $\Phi(P) = X - \frac{1}{2}$ et donc $\Phi(P)(1 - X) = \frac{1}{2} - X$ tandis que $\Phi(P(1 - X)) = \Phi(1) = X - \frac{1}{2}$.

3. **a.** On a $B_1' = B_0$ et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B_1 = X + \lambda$. De plus, $\displaystyle\int_0^1 B_1(t)dt = 0$ donc $\lambda = -\frac{1}{2}$. D'où

$$B_1 = X - \frac{1}{2}$$

   De même, $B_2' = B_1$ et donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $B_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \mu$. De plus, $\displaystyle\int_0^1 B_2(t)dt = 0$ donc $\mu = \frac{1}{12}$. D'où

$$B_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}$$

   b. Remarquons tout d'abord que $B_n \in E$ pour $n \geqslant 1$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \phi(B_n)$ et donc $B_{n+1}' = B_n$.
   Soit $n \geqslant 2$. On a :

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(t)dt = \int_0^1 B_{n-1}(t)dt = 0$$

   car $B_{n-1} \in E$.

4. **a.** On a $P_{n+1} = (-1)^{n+1}B_{n+1}(1 - X)$ et donc

$$P_{n+1}' = (-1)^{n+2}B_{n+1}'(1 - X) = (-1)^n B_n(1 - X) = P_n$$

   b. D'après la question précédente, il suffit donc de montrer que $P_{n+1} \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 P_{n+1}(t)dt = (-1)^n \int_0^1 B_{n+1}(1 - t)dt = (-1)^n \int_0^1 B_{n+1}(t)dt = 0$$

   car $B_n \in E$ pour $n \geqslant 1$.

c. On a $P_0 = B_0 = 1$. De plus, $P_{n+1} = \phi(P_n)$ et $B_{n+1} = \phi(B_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit donc par récurrence que $P_n = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$$

5. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant l'expression définissant Q_{n+1}, on obtient :

$$Q'_{n+1} = p^n \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{p} B'_{n+1}\left(\frac{X+k}{p}\right) = p^{n-1} \sum_{k=0}^{p-1} B_n\left(\frac{X+k}{p}\right) = Q_n$$

Vérifions que $Q_{n+1} \in E$:

$$\int_0^1 Q_{n+1}(t)\,dt = p^n \sum_{k=0}^{p-1} \int_0^1 B_{n+1}\left(\frac{t+k}{p}\right) dt$$

En effectuant le changement de variable $u = \frac{t+k}{p}$ dans chaque intégrale, on obtient :

$$\int_0^1 Q_{n+1}(t)\,dt = p^n \sum_{k=0}^{p-1} \int_{\frac{k}{p}}^{\frac{k+1}{p}} B_{n+1}(u)p\,du = p^{n+1} \int_0^1 B_{n+1}(u)\,du = 0$$

en utilisant la relation de Chasles et car $B_{n+1} \in E$. Ainsi $Q'_{n+1} = Q_n$ et $Q_{n+1} \in E$ donc $Q_{n+1} = \phi(Q_n)$ d'après **I.1.b**.

b. On a $Q_0 = B_0 = 1$. Comme $Q_{n+1} = \phi(Q_n)$ et $B_{n+1} = \phi(B_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = B_n$. On a ainsi la relation demandée.

6. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $R'_{n+1} = B'_{n+1}(X+1) - B'_{n+1}(X) = B_n(X+1) - B_n(X) = R_n$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $R_n(0) = B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0$ car $n+1 \geqslant 2$.

c. On a $R_0 = 1 = \frac{X^0}{0!}$. Supposons que $R_n = \frac{X^n}{n!}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Puisque $R'_{n+1} = R_n$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $R_{n+1} = \frac{X^{n+1}}{(n+1)!} + \lambda$. Or $R_{n+1}(0) = 0$ car $n+1 \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $\lambda = 0$ puis $R_{n+1} = \frac{X^{n+1}}{(n+1)!}$.
Par récurrence, $R_n = \frac{X^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. D'après la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{m} k^n = n! \sum_{k=1}^{m} R_n(k) = n! \sum_{k=1}^{m} B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k) = n!(B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(1))$$

par télescopage.

Partie II –

1. **a.** Comme $\deg B_0 = 0$ et que $B'_{n+1} = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit par récurrence que $B_n^{(k)} = B_{n-k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et que $B_n^{(k)} = 0$ pour $k > n$. D'après la formule de Taylor appliquée à B_n en 0, on a :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_{n-k}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!} X^k$$

Remarque. On peut aussi raisonner par récurrence. La formule à démontrer est clairement vraie pour $n = 0$. On suppose alors qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} \frac{X^k}{k!}$. Puisque $B'_{n+1} = B_n$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $B_{n+1} = C + \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} \frac{X^{k+1}}{(k+1)!}$. En réindexant, on a également $B_{n+1} = C + \sum_{k=1}^{n+1} b_{n+1-k} \frac{X^k}{k!}$. En évaluant en 0, il vient $C = B_{n+1}(0) = b_{n+1}$ de sorte que $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} b_{n+1-k} \frac{X^k}{k!}$. Ceci permet d'achever la récurrence. ■

b. Comme $B_0 = 1$, on a clairement $b_0 = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En intégrant la relation précédente entre 0 et 1, on a :

$$\int_0^1 B_n(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_{n-k}}{(k+1)!}$$

Or pour $n \geqslant 1$, $B_n \in E$ car $B_n = \phi(B_{n-1})$ donc $\int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$. En isolant le terme d'indice $k = 0$ de la somme, on en déduit :

$$b_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{(k+1)!}$$

c. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **I.4.c**, on a $B_{2m+1}(1-X) = -B_{2m+1}(X)$. En substituant 0 à X, on obtient $B_{2m+1}(1) = -B_{2m+1}(0)$. Mais comme $2m+1 \geqslant 2$, on a $B_{2m+1}(0) = B_{2m+1}(1)$ d'après la question **I.3.b**. Ainsi $b_{2m+1} = B_{2m+1}(0) = 0$.

2. **a.** En choisissant $p=2$ et en substituant 0 à X dans la relation de la question **I.5.b**, on obtient :

$$B_n(0) = 2^{n-1}\left[B_n(0) + B_n\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

et donc

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{b_n\left(1-2^{n-1}\right)}{2^{n-1}}$$

b. En choisissant $p=3$ et en substituant 0 à X dans la relation de la question **I.5.b**, on obtient :

$$B_n(0) = 3^{n-1}\left[B_n(0) + B_n\left(\frac{1}{3}\right) + B_n\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

Mais comme $B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$, on obtient en substituant $\frac{1}{3}$ à X : $B_n\left(\frac{2}{3}\right) = B_n\left(\frac{1}{3}\right)$ car n est pair. Par conséquent

$$B_n\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{b_n\left(1-3^{n-1}\right)}{2\times 3^{n-1}}$$

De même, en choisissant $p=4$ et en substituant 0 à X dans la relation de la question **I.5.b**, on obtient :

$$B_n(0) = 4^{n-1}\left[B_n(0) + B_n\left(\frac{1}{4}\right) + B_n\left(\frac{1}{2}\right) + B_n\left(\frac{3}{4}\right)\right]$$

Or on a vu plus haut que $2^{n-1}\left[B_n(0) + B_n\left(\frac{1}{2}\right)\right] = b_n$. De plus, pour les mêmes raisons que précédemment $B_n\left(\frac{1}{4}\right) = B_n\left(\frac{3}{4}\right)$. Par conséquent

$$B_n\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{b_n\left(1-2^{n-1}\right)}{2\times 4^{n-1}}$$

Enfin, en choisissant $p=6$ et en substituant 0 à X dans la relation de la question **I.5.b**, on obtient :

$$B_n(0) = 6^{n-1}\left[B_n(0) + B_n\left(\frac{1}{6}\right) + B_n\left(\frac{1}{3}\right) + B_n\left(\frac{1}{2}\right) + B_n\left(\frac{2}{3}\right) + B_n\left(\frac{5}{6}\right)\right]$$

On a vu précédemment que $3^{n-1}\left[B_n(0) + B_n\left(\frac{1}{3}\right) + B_n\left(\frac{2}{3}\right)\right] = b_n$ et on a encore $B_n\left(\frac{1}{6}\right) = B_n\left(\frac{5}{6}\right)$. Par conséquent

$$B_n\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{b_n\left(1+6^{n-1}-2^{n-1}-3^{n-1}\right)}{2\times 6^{n-1}}$$

3. **a.** Il suffit de prendre $m=1$.

b. Comme $(-1)^m B_{2m-1}$ est la dérivée de $(-1)^m B_{2m}$, $(-1)^m B_{2m}$ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et elle est également continue sur cet intervalle. De plus, d'après la question **II.2.a**, $B_{2m}(0)$ et $B_{2m}\left(\frac{1}{2}\right)$ sont de signes opposés donc $(-1)^m B_{2m}$ s'annule une unique fois sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ en un réel α_m en vertu du théorème de la bijection monotone.

	0	α_m	$\frac{1}{2}$
$(-1)^m B_{2m-1}$		$+$	
$(-1)^m B_{2m}$	$B_{2m}(0) < 0$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $B_{2m}(1/2) < 0$

c. $(-1)^m B_{2m}$ est donc négative puis positive sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. De plus, $(-1)^m B_{2m}$ ne s'annule qu'une fois sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Puisque $(-1)^m B_{2m}$ est la dérivée de $(-1)^m B_{2m+1}$, $(-1)^m B_{2m+1}$ est strictement décroissante puis strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. On en déduit que $(-1)^{m+1} B_{2m+1}$ est strictement croissante puis strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Comme $2m+1$ est impair, on a $B_{2m+1}(0) = B_{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Ainsi $(-1)^{m+1} B_{2m+1}$ est strictement positive sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

	0		α_m		$\frac{1}{2}$
$(-1)^m\mathrm{B}_{2m}$		$-$	0	$+$	
$(-1)^m\mathrm{B}_{2m+1}$	0	$\searrow$	$(-1)^m\mathrm{B}_{2m+1}(\alpha_m)$	$\nearrow$	0
$(-1)^{m+1}\mathrm{B}_{2m+1}$	0	$\nearrow$	$(-1)^{m+1}\mathrm{B}_{2m+1}(\alpha_m)$	$\searrow$	0

d. Soit l'hypothèse de récurrence :

HR(m) : «$(-1)^m\mathrm{B}_{2m-1}$ est strictement positive sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$.»

On a vu à la question **II.3.a** que HR(1) est vraie. Les questions **II.3.b** et **II.3.c** prouvent que HR(m) $\Rightarrow$ HR($m+1$). On en conclut que HR(m) est vraie pour tout $m\in\mathbb{N}^*$.
Mais la question **II.3.b** prouve alors que $(-1)^m\mathrm{B}_{2m}$ s'annule une unique fois sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ pour tout $m\in\mathbb{N}^*$.

e. On sait que

$$\mathrm{B}_{2m}\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{b_{2m}\left(1+6^{2m-1}-2^{2m-1}-3^{2m-1}\right)}{2\times 6^{2m-1}}$$
$$\mathrm{B}_{2m}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{b_{2m}\left(1-2^{2m-1}\right)}{2\times 4^{2m-1}}$$

Or

$$2^{2m-1}+3^{2m-1}\leqslant 3^{2m-1}+3^{2m-1}=2\times 3^{2m-1}\leqslant 2^{2m-1}\times 6^{2m-1}=6^{2m-1}$$

donc $1+6^{2m-1}-2^{2m-1}-3^{2m-1}\geqslant 1>0$. De même, $1-2^{2m-1}<0$ de sorte que $\mathrm{B}_{2m}\left(\frac{1}{6}\right)$ et $\mathrm{B}_{2m}\left(\frac{1}{4}\right)$ sont de signes opposés. Comme B_{2m} est continue sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on en déduit que $\theta_m\in\left]\frac{1}{4},\frac{1}{6}\right[$.

4. **a.** La fonction $(-1)^m\mathrm{B}_{2m}$ est strictement croissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. De plus,

$$\left|\mathrm{B}_{2m}\left(\frac{1}{2}\right)\right|=|b_{2m}|\frac{2^{2m-1}-1}{2^{2m-1}}\leqslant|b_{2m}|$$

pour $m\geqslant 1$ car, dans ce cas, $2^{2m-1}-1\geqslant 0$. Les variations de $(-1)^m\mathrm{B}_{2m}$ permettent donc de déduire que le maximum de $|\mathrm{B}_{2m}|$ est atteint en 0 et vaut $|b_{2m}|$. Le résultat est encore valable pour $m=0$ puisque B_0 est constante égale à b_0.

b. On a $\mathrm{B}_{2m}(1-t)=\mathrm{B}_{2m}(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Les variations de $(-1)^m\mathrm{B}_{2m}$ sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ se déduisent donc de celles sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$: ainsi $|\mathrm{B}_{2m}|$ atteint sa borne supérieure sur $[0,1]$ en 0 et en 1 et celle-ci vaut $|b_{2m}|$.

Partie III –

1.
```python
def integrale(P) :
    return sum([P[k]/(k+1) for k in range(len(P))])
```

2.
```python
def primitive(P) :
    return [0]+[P[k]/(k+1) for k in range(len(P))]
```

3.
```
def phi(P) :
    Q=primitive(P)
    Q[0]=-integrale(Q)
    return Q
```

4.
```
def B(n) :
    res=[[1]]
    for _ in range(n) :
        res.append(phi(res[-1]))
    return res
```