

# RAISONNEMENTS ET ENSEMBLES

## SOLUTION 1.

1. Il suffit d'établir une table de vérité.

P	Q	NON P	(NON P) OU Q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

On retrouve la table de vérité de l'implication d'où l'équivalence demandée.

2. D'après la question précédente,

$$(\text{NON } Q \implies \text{NON } P) \equiv (\text{NON}(\text{NON } Q) \text{ OU } \text{NON } P) \equiv (Q \text{ OU } \text{NON } P) \equiv (P \implies Q)$$

## SOLUTION 2.

1. La négation de la proposition s'écrit

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \text{ ne divise pas } n.$$

La proposition 1. est vraie : soit  $n \in \mathbb{N}$ ; posons  $m = 1$ . On a bien que 1 divise  $n$ .

2. La négation de la proposition s'écrit

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, m \text{ ne divise pas } n.$$

La proposition 2. est vraie : posons  $m = 1$ ; soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a bien que 1 divise  $n$ .

3. La négation de la proposition s'écrit

$$\exists a, b \in \mathbb{Z}, \forall u, v \in \mathbb{Z}, au + bv \neq 1.$$

La proposition 3. est fausse : posons  $a = b = 2$ ; soient  $u, v \in \mathbb{Z}$ . On a  $au + bv = 2(u + v) \neq 1$ .

4. La négation de la proposition s'écrit

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, |a| > \varepsilon.$$

La proposition 4. est vraie : posons  $a = 0$ ; soit  $\varepsilon > 0$ . On a bien  $|a| \leq \varepsilon$ .

5. La négation de la proposition s'écrit

$$\exists \varepsilon > 0, \forall a \in \mathbb{R}, |a| > \varepsilon.$$

La proposition 5. est vraie : soit  $\varepsilon > 0$ ; posons  $a = \varepsilon/2$ . On a bien  $|a| < \varepsilon$ .

6. La négation de la proposition s'écrit

$$\exists M > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, M < 2^n.$$

La proposition 6. est vraie : soient  $M > 0$  et  $n_0$  un entier strictement plus grand que  $\ln(M)/\ln(2)$ . Soit  $n \geq n_0$ . On a bien  $2^n \geq M$ .

## SOLUTION 3.

1. La négation de  $\mathcal{A}$  est

$$\exists x \in ]0, +\infty[, \exists y \in ]x, +\infty[, \forall z \in ]0, +\infty[, (x \geq z \text{ ou } z \geq y)$$

2. Oui, l'assertion  $\mathcal{A}$  est vraie. Soit  $x \in ]0, +\infty[$ . Soit  $y \in ]x, +\infty[$ . Posons  $z = \frac{x+y}{2}$ . Puisque  $x < y$  on a

$$x = \frac{x+x}{2} < \frac{x+y}{2} = z < \frac{y+y}{2} = y$$

#### SOLUTION 4.

Il faut bien sûr effectuer une récurrence double. Soit pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\text{HR}(n) : (n-1)! \leq u_n \leq n!$$

►  $\text{HR}(1)$  et  $\text{HR}(2)$  sont vraies puisque  $u_1 = 1$  et  $u_2 = 2$ .

► Supposons  $\text{HR}(n)$  et  $\text{HR}(n+1)$  vraies pour un certain  $n \geq 1$ , c'est-à-dire

$$(n-1)! \leq u_n \leq n!$$

et

$$n! \leq u_{n+1} \leq (n+1)!$$

En sommant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$(n-1)! + n! \leq u_n + u_{n+1} \leq n! + (n+1)!$$

En multipliant par  $(n+1)$ , on obtient

$$(n-1)!(n+1) + (n+1)! \leq u_{n+2} \leq (n+1)! + (n+1)!(n+1)$$

D'une part,  $(n-1)!(n+1) + (n+1)! \geq (n+1)!$  car  $(n-1)!(n+1) \geq 0$ . D'autre part

$$(n+1)! + (n+1)!(n+1) = (n+1)!(n+2) = (n+2)!$$

Finalement  $(n+1)! \leq u_{n+2} \leq (n+2)!$  i.e.  $\text{HR}(n+2)$  est vraie.

► Par récurrence double,  $\text{HR}(n)$  est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

#### SOLUTION 5.

Soit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{HR}(n)$  la proposition suivante

$$1 + 1/\sqrt{2} + \dots + 1/\sqrt{n} < 2\sqrt{n}.$$

►  $\text{HR}(1)$  est banalement vraie.

► Prouvons que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\text{HR}(n)$  implique  $\text{HR}(n+1)$  : soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $\text{HR}(n)$  vraie, c'est-à-dire

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Alors

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Or

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$$

car

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

et

$$\frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$\text{HR}(n+1)$  est donc vraie.

- D'après le principe de récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$1 + 1/\sqrt{2} + \dots + 1/\sqrt{n} < 2\sqrt{n}.$$

#### SOLUTION 6.

Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , HR( $n$ ) la proposition

$$\forall k \leq n, \quad u_k \geq k.$$

- HR(0), HR(1) et HR(2) sont vraies car  $u_0 = 1 \geq 0$ ,  $u_1 = 1 \geq 1$  et  $u_2 = 2 \geq 2$ .  
 ► Prouvons que pour tout  $n \geq 2$ , HR( $n$ )  $\Rightarrow$  HR( $n+1$ ). Soit  $n \geq 2$ . Supposons HR( $n$ ) vraie, c'est-à-dire

$$\forall k \leq n, \quad u_k \geq k.$$

On a alors  $u_n \geq n$  et  $u_{n-1} \geq n-1$ , d'où

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \geq n + n - 1 = 2n - 1.$$

Or  $2n - 1 \geq n + 1$  puisque  $n \geq 2$ . Ainsi  $u_{n+1} \geq n + 1$  et HR( $n+1$ ) est vraie.

- D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq n.$$

#### SOLUTION 7.

On note HR( $n$ ) l'hypothèse de récurrence : « Si  $E_1, E_2, \dots, E_n$  sont  $n$  ensembles distincts deux à deux, alors l'un au moins des ensembles ne contient aucun autre. »

La propriété est évidente au rang  $n = 1$ .

Supposons HR( $n$ ) pour un certain  $n \geq 1$  et montrons HR( $n+1$ ). Soient donc  $E_1, \dots, E_n, E_{n+1}$   $n+1$  ensembles distincts deux à deux. A fortiori,  $E_1, \dots, E_n$  sont distincts deux à deux. Par hypothèse de récurrence, il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $E_i$  ne contient aucun des  $E_j$  pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$ . Il y a alors deux cas à étudier.

- Si  $E_i$  ne contient pas  $E_{n+1}$ , alors  $E_i$  ne contient aucun autre ensemble et le tour est joué.  
 ► Si  $E_i$  contient  $E_{n+1}$ , on montre que  $E_{n+1}$  ne contient aucun des autres ensemble. En effet,  $E_{n+1}$  ne peut pas contenir  $E_i$  sinon on aurait  $E_i = E_{n+1}$  ce qui est exclu puisque tous les ensembles sont distincts.  $E_{n+1}$  ne peut pas non plus contenir un des  $E_j$  pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$  sinon  $E_i$  contiendrait ce même  $E_j$ , ce qui est exclu.

La propriété HR( $n$ ) est donc vraie pour tout  $n$  par récurrence.

#### SOLUTION 8.

On raisonne par récurrence forte.

**Initialisation** Tout d'abord  $u_0 = 1 \leq 0! = 1$ .

**Hérédité** Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u_k \leq k!$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Alors

$$u_{n+1} \leq 0! + 1! + \dots + n!$$

Mais par croissance de la factorielle,  $k! \leq n!$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Ainsi

$$u_{n+1} \leq n! + n! + \dots + n! = (n+1)n! = (n+1)!$$

**Conclusion** Par récurrence forte,  $u_n \leq n!$   $n \in \mathbb{N}$ .

**SOLUTION 9.**

1. On trouve  $F_2 = 1$ ,  $F_3 = 2$ ,  $F_4 = 3$  et  $F_5 = 3$ .
2. On a bien  $F_5 = 5 \geq 5$  et  $F_6 = 8 \geq 6$ . Supposons que  $F_n \geq n$  et  $F_{n+1} \geq n+1$  pour un certain  $n \geq 5$ . Alors  $F_{n+2} \geq 2n+1$ . Or  $2n+1 \geq n+2$  car  $n \geq 5 \geq 1$ . Ainsi  $F_{n+2} \geq n+2$ .  
Par récurrence double,  $F_n \geq n$  pour tout  $n \geq 5$ .  
On peut en déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = +\infty$ .
3. a. On utilise la définition de la suite  $(F_n)$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On fait apparaître un télescopage.

$$1 + \sum_{k=0}^{n-1} F_k = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+2} - F_{k+1} = 1 + F_{n+1} - F_1 = F_{n+1}$$

car  $F_1 = 1$ .

- b. On utilise la définition de la suite  $(F_n)$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On fait apparaître un télescopage.

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+2} - F_{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} F_{2(k+1)} - F_{2k} = F_{2n} - F_0 = F_{2n}$$

car  $F_0 = 0$ .

- c. On utilise la définition de la suite  $(F_n)$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On fait apparaître un télescopage.

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_{2k} = \sum_{k=1}^{n-1} F_{2k} = \sum_{k=1}^{n-1} F_{2k+1} - F_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} F_{2(k+1)-1} - F_{2k-1} = F_{2n-1} - F_1 = F_{2n-1} - 1$$

car  $F_1 = 1$ .

4. a. On trouve  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Les liens coefficients/racines nous apprennent que  $\alpha\beta = -1$ .
- b. On vérifie que  $\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^0 - \beta^0) = 0 = F_0$  et que  $\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^1 - \beta^1) = 1 = F_1$ .  
On suppose maintenant que  $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$  et  $F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_n + F_{n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n + \alpha^{n+1} - \beta^n - \beta^{n+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^n(1 + \alpha) - \beta^n(1 + \beta)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n \alpha^2 - \beta^n \beta^2) \quad \text{car } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont solutions de l'équation } x^2 = x + 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) \end{aligned}$$

Par récurrence double,  $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- c. On tient compte du fait que  $\beta = -\frac{1}{\alpha}$ .  
D'une part

$$\begin{aligned} F_{p+q} F_r &= \frac{1}{5}(\alpha^{p+q} - (-1)^{p+q} \alpha^{-p-q})(\alpha^r - (-1)^r \alpha^{-r}) \\ &= \frac{1}{5}(\alpha^{p+q+r} + (-1)^{p+q+r} \alpha^{-p-q-r} - (-1)^r \alpha^{p+q-r} - (-1)^{p+q} \alpha^{-p-q+r}) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 F_p F_{q+r} - (-1)^r F_{p-r} F_q &= \frac{1}{5} (\alpha^p - (-1)^p \alpha^{-p}) (\alpha^{q+r} - (-1)^{q+r} \alpha^{-q-r}) \\
 &\quad - \frac{(-1)^r}{5} (\alpha^{p-r} - (-1)^{p-r} \alpha^{-p+r}) (\alpha^q - (-1)^q \alpha^{-q}) \\
 &= \frac{1}{5} (\alpha^{p+q+r} + (-1)^{p+q+r} \alpha^{-p-q-r} - (-1)^{q+r} \alpha^{p-q-r} - (-1)^p \alpha^{-p+q+r}) \\
 &\quad - \frac{(-1)^r}{5} (\alpha^{p+q-r} + (-1)^{p+q-r} \alpha^{-p-q+r} - (-1)^q \alpha^{p-q-r} - (-1)^{p-r} \alpha^{-p+q+r}) \\
 &= \frac{1}{5} (\alpha^{p+q+r} + (-1)^{p+q+r} \alpha^{-p-q-r} - (-1)^r \alpha^{p+q-r} - (-1)^{p+q} \alpha^{-p-q+r})
 \end{aligned}$$

On en déduit que  $F_p F_{q+r} - (-1)^r F_{p-r} F_q = F_{p+q} F_r$ .

### SOLUTION 10.

Raisonnons par récurrence. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $HR(n)$  la proposition

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leq 3 - \frac{1}{n}$$

- $HR(1)$  est vraie car les deux membres sont dans ce cas égaux à 2.
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons  $HR(n)$  vérifiée, c'est-à-dire

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leq 3 - \frac{1}{n}$$

En multipliant membre à membre par  $1 + \frac{1}{(n+1)^3} \geq 0$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) &\leq \left(3 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right) \\
 \left(3 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right) &\leq 3 - \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

est donc une *condition suffisante* de  $HR(n+1)$ . Or,

$$\begin{aligned}
 &\left(3 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right) \leq 3 - \frac{1}{n+1} \\
 \iff &\frac{(3n-1)(1+(n+1)^3)}{n(n+1)^3} \leq \frac{3n+2}{n+1} \\
 \iff &(3n-1)(n^3+3n^2+3n+2) \leq (3n+2)n(n+1)^2 \\
 \iff &3n^4+8n^3+6n^2+3n-2 \leq 3n^4+8n^3+7n^2+2n \\
 \iff &0 \leq n^2-n+2
 \end{aligned}$$

Le déterminant du trinôme  $X^2 - X + 2$  étant strictement négatif, la dernière inégalité est vraie et donc la première également. Par suite,  $HR(n+1)$  est vérifiée.

- D'après le principe de récurrence,  $HR(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### SOLUTION 11.

Notons  $HR(n)$  :  $u_n = 2^{n-1}$ . Clairement,  $u_1 = 1$  donc  $HR(1)$  est vraie. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $HR(k)$  soit vraie pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors

$$u_{n+1} = u_0 + \sum_{k=1}^n u_k = 1 + \sum_{k=1}^n 2^{k-1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 1 + \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n$$

de sorte que  $HR(n+1)$  est vraie. Par récurrence forte,  $HR(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### SOLUTION 12.

Raisonnons par contraposition. Supposons  $a \neq 0$ . Posons  $\varepsilon = |a|/2$  : on a  $\varepsilon > 0$  et  $|a| \geq \varepsilon$ . Ainsi  $\exists \varepsilon > 0$  tel que  $|a| \geq \varepsilon$ .

### SOLUTION 13.

Quitte à permuter les  $a_i$ , on peut supposer que

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_9.$$

Prouvons par contraposition que

$$(a_1 + \dots + a_9 = 90) \implies (a_7 + a_8 + a_9 \geq 30).$$

Supposons que  $a_7 + a_8 + a_9 < 30$ . On a alors

$$a_4 + a_5 + a_6 \leq a_7 + a_8 + a_9 < 30$$

et

$$a_1 + a_2 + a_3 \leq a_7 + a_8 + a_9 < 30.$$

Ainsi  $a_1 + \dots + a_9 < 90$  donc  $a_1 + \dots + a_9 \neq 90$ .

### SOLUTION 14.

- Supposons que  $n$  est pair. Alors il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $n = 2k$ . Alors  $n^2 = 4k^2 = 2k'$  avec  $k' = 2k^2$ . Donc  $n^2$  est pair. Réciproquement supposons que  $n$  est impair. Alors il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $n = 2k + 1$ . Alors  $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k' + 1$  avec  $k' = 2k(k + 1)$ . Donc  $n^2$  est impair.
- Supposons par l'absurde que  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ . Alors il existe  $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  tels que  $\sqrt{2} = m/n$ . Quitte à simplifier on peut supposer que la fraction  $m/n$  est irréductible. On a

$$(*) \quad 2n^2 = m^2.$$

De cette équation on déduit que  $m^2$  est pair, donc  $m$  aussi. Alors il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $m = 2k$ . Ainsi  $(*)$  devient  $2n^2 = m^2 = 4k^2$ , d'où  $n^2 = 2k^2$ . Par conséquent  $n^2$  est pair, et donc  $n$  est aussi pair. On peut donc simplifier la fraction  $m/n$  par 2. Or d'après l'hypothèse la fraction  $m/n$  est irréductible, contradiction  $\zeta$ . Cela prouve que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

*Preuve alternative.* Notons  $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$  l'ensemble de tous les nombres premiers. Tout nombre entier positif possède une factorisation unique en nombres premiers, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists_1 (\nu_p(n)) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{P})} : \quad n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(n)}.$$

La notation  $\mathbb{N}^{(\mathbb{P})}$  désigne l'ensemble des applications de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{N}$  qui sont nulles à partir d'un certain rang. Par exemple,  $20 = 2^2 \times 5$  donc  $\nu_2(20) = 2$ ,  $\nu_5(20) = 1$  et  $\nu_p(20) = 0$  pour tout  $p \in \mathbb{P} \setminus \{2, 5\}$ .

Maintenant, supposons que  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ . Alors il existe  $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  tels que  $\sqrt{2} = m/n$ , autrement dit  $2n^2 = m^2$ . Alors

$$2 \left( \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(n)} \right)^2 = \left( \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(m)} \right)^2,$$

d'où

$$2 \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{2v_p(n)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{2v_p(m)}.$$

Par unicité de cette décomposition  $2v_2(n) + 1 = 2v_2(m)$ , une contradiction.  $\nexists$

#### SOLUTION 15.

Raisonnons par l'absurde en supposant  $\ln(2)/\ln(3)$  rationnel. Il existe donc deux entiers naturels  $p$  et  $q \neq 0$  tels que  $\ln(2)/\ln(3) = p/q$ , ie  $q \ln(2) = p \ln(3)$ , ie  $\ln(2^q) = \ln(3^p)$  d'où  $2^q = 3^p$ . Puisque  $q \geq 1$ ,  $2^q$  est un nombre pair, ce qui est absurde car  $3^p$  est toujours impair.

#### SOLUTION 16.

Voici deux preuves possibles (parmi tant d'autres !)

- Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un tel polynôme  $P$ . On a alors  $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x}P(x) = 1$ , et puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}P(x) = 0$  (l'exponentielle l'emporte sur les puissances en  $+\infty$ , donc également sur les polynômes), on obtient par passage à la limite,  $0 = 1$ . Ce qui est absurde.
- Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un tel polynôme  $P$ . On a alors  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = e^x$ . L'exponentielle ne s'annulant pas, le polynôme  $P$  est non nul. Toutes les fonctions en jeu étant dérivables, la dérivation membre à membre de cette égalité aboutit à  $\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) = e^x = P(x)$ , ie  $P = P'$ , ce qui est absurde car  $P$  étant non nul, cela implique  $\deg(P) < \deg(P)$ .

#### SOLUTION 17.

Soit  $f$  une telle fonction. Pour tout  $x$  réel, on a

$$f(-x) = -f(x) \text{ et } f(-x) - 1 = f(x) - 1,$$

d'où  $f(x) = -f(x)$  et  $f(x) = 0$ . Réciproquement, il est clair que la fonction nulle est solution du problème posé.

#### SOLUTION 18.

- *Analyse* : soit  $f$  une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, f(m+n) = f(n) + f(m).$$

On a alors  $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ , donc  $f(0) = 0$ . Par une récurrence immédiate, on prouve que  $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = nf(1)$ .

- *Synthèse* : soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $f$  l'application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = kn$ . Il est immédiat que  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, f(m+n) = f(n) + f(m)$ .

#### SOLUTION 19.

- *Analyse* : supposons que  $f$  désigne une solution de l'équation. On en déduit (en fixant  $y = 0$ ) que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f(0) = 2f(x) + 1,$$

i.e  $f(x) = f(0) - 1$ . Ceci prouve que  $f$  est nécessairement une fonction constante.

**REMARQUE.** La partie synthèse va maintenant permettre de déterminer, parmi les fonctions constantes, celles qui sont effectivement solutions. ■

- *Synthèse* : soit  $f$  une fonction constante qu'on suppose égale au réel  $c$ , i.e

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = c.$$

La fonction  $f$  est solution de l'équation *si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f(y) = 2f(x - y) + 1.$$

i.e  $c + c = 2c + 1$ , soit encore  $0 = 1$ . Ceci est absurde ! Il n'y a donc pas de solution constante à l'équation de l'énoncé.

- *Conclusion* : dans la partie analyse on a prouvé que seules les fonctions constantes pouvaient être solutions de l'équation. Dans la partie synthèse, on a vérifié qu'aucune fonction constante ne pouvait être solution.

#### SOLUTION 20.

On remarque que rechercher  $x, y$  tels que  $xy \neq 0$  et

$$\alpha xy = x^2 + y^2,$$

revient à trouver les valeurs non nulles de  $y$  telles que l'équation

$$X^2 - \alpha yX + y^2 = 0$$

admet une solution non nulle.

- *Analyse* : soient  $x, y$  tels que  $xy \neq 0$  et

$$\alpha xy = x^2 + y^2.$$

Alors le discriminant de l'équation

$$X^2 - \alpha yX + y^2 = 0,$$

$\Delta = (\alpha^2 - 4)y^2$  est positif. Et, puisque  $y \neq 0$ ,

$$\alpha^2 \geq 4.$$

- *Synthèse* : supposons  $\alpha^2 \geq 4$ . Soit alors  $y = 1$ . Alors le discriminant de l'équation

$$X^2 - \alpha X + 1 = 0,$$

$\Delta = (\alpha^2 - 4)$  est positif et les deux racines  $x_1$  et  $x_2$  de l'équation sont non nulles puisque  $x_1 x_2 = 1$ . Le couple  $(x_1, 1)$  est une solution au problème posé.

- *Conclusion* : la condition nécessaire et suffisante est  $\alpha^2 \geq 4$ , i.e  $|\alpha| \geq 2$ .

#### SOLUTION 21.

- *Analyse* : supposons l'existence de deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = a + b2^n.$$

Alors  $u_0 = 1 = a + b$  et  $u_1 = 7 = a + 2b$ . Ce système linéaire  $2 \times 2$  en  $(a, b)$  admet une unique solution, le couple  $(-5, 6)$ .



- *Synthèse* : prouvons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = -5 + 6 \times 2^n$ . Soit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , HR( $n$ ) la proposition suivante,

$$\forall k \leq n, \quad u_k = -5 + 6 \times 2^k.$$

✚ HR(0) et HR(1) sont banalement vraies.

✚ Prouvons que pour tout  $n \geq 1$ , HR( $n$ ) implique HR( $n+1$ ) : soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons HR( $n$ ) vraie, c'est-à-dire

$$\forall k \leq n, \quad u_k = -5 + 6 \times 2^k.$$

Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n - 2u_{n-1} \\ &= 3(-5 + 6 \times 2^n) - 2(-5 + 6 \times 2^{n-1}) \\ &= -5 + (18 - 6) \times 2^n = -5 + 6 \times 2^{n+1} \end{aligned}$$

HR( $n+1$ ) est donc vraie.

✚ D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -5 + 6 \times 2^n.$$

#### SOLUTION 22.

- *Analyse* : supposons l'existence de deux nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $s = \alpha + \beta$  et  $p = \alpha\beta$ . Alors  $\alpha$  et  $\beta$  sont les racines réelles du polynôme

$$Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - sx + p.$$

Le discriminant de cet équation est donc positif :  $s^2 \geq 4p$ .

- *Synthèse* : supposons  $s^2 \geq 4p$  et posons  $\Delta = s^2 - 4p$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les racines de  $x^2 - sx + p$ , par exemple  $\alpha = (s + \sqrt{\Delta})/2$  et  $\beta = (s - \sqrt{\Delta})/2$ . On a bien que  $s = \alpha + \beta$  et  $p = \alpha\beta$ .
- *Conclusion* :  $s$  et  $p$  sont respectivement la somme et le produit de deux nombres réels si et seulement si  $s^2 \geq 4p$ .

#### SOLUTION 23.

- *Analyse* : soit  $f$  une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(n)f(m).$$

Par une récurrence immédiate, on prouve que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = f(1)^n.$$

- *Synthèse* : soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $f$  l'application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = k^n.$$

Il est immédiat que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(n)f(m).$$

L'application identiquement nulle vérifie également cette équation fonctionnelle.

► *Conclusion* : les seules fonctions de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  vérifiant

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(n)f(m),$$

sont les fonctions de la forme

$$n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) = k^n,$$

où  $k \in \mathbb{N}$ .

#### SOLUTION 24.

1. On raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned} |x+2| \geq \frac{1-x}{1+x} &\iff x+2 \geq \frac{1-x}{1+x} \text{ ou } -(x+2) \geq \frac{1-x}{1+x} \\ &\iff \frac{(x+2)(1+x) - (1-x)}{1+x} \geq 0 \text{ ou } \frac{(x+2)(1+x) + (1-x)}{1+x} \leq 0 \\ &\iff \frac{x^2+4x+1}{1+x} \geq 0 \text{ (1) ou } \frac{x^2+2x+3}{1+x} \leq 0 \text{ (2)} \end{aligned}$$

Les racines de  $x^2+4x+1$  sont  $-2-\sqrt{3}$  et  $-2+\sqrt{3}$ . On a le tableau de signes suivant :

$x$	$-\infty$	$-2-\sqrt{3}$	$-1$	$-2+\sqrt{3}$	$+\infty$	
$x^2+4x+1$	+	0	-	-	0	+
$x+1$	-	-	0	+	+	+
$\frac{x^2+4x+1}{1+x}$	-	0	+	-	0	+

L'ensemble des solutions de (1) est donc  $\mathcal{S}_1 = [-2-\sqrt{3}, -1[ \cup [-2+\sqrt{3}, +\infty[$ .

Le trinôme  $x^2+2x+3$  est constamment positif; l'ensemble des solutions de (2) est donc  $\mathcal{S}_2 = ]-\infty, -1[$ .

L'ensemble des solutions de l'inéquation initiale est donc  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = ]-\infty, -1[ \cup [-2+\sqrt{3}, +\infty[$ .

2. On raisonne également par équivalences :

$$\begin{aligned} x+1 \leq \sqrt{x+2} &\iff x+2 \geq 0 \text{ ET } (x+1 \leq 0 \text{ ou } (x+1 \geq 0 \text{ ET } (x+1)^2 \leq x+2)) \\ &\iff \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+1 \leq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x^2+x-1 \leq 0 \end{cases} \\ &\iff -2 \leq x \leq -1 \text{ ou } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2+x-1 \leq 0 \end{cases} \\ &\iff -2 \leq x \leq -1 \text{ ou } \begin{cases} x \leq -1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \\ &\iff -2 \leq x \leq -1 \text{ ou } -1 \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ &\iff -2 \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc  $\left[-2, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$ .

**SOLUTION 25.**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Il y a deux cas à considérer,  $x \geq 1$  et  $x < 1$ .

► *Cas 1 :  $x \geq 1$ .* On a alors

$$x^2 - x + 1 \geq |x - 1| \iff x^2 - x + 1 \geq x - 1.$$

Ce qui est encore équivalent à  $x^2 - 2x + 1 \geq -1$ , c'est-à-dire  $(x - 1)^2 \geq -1$ , inégalité vérifiée pour tout  $x$  réel.

► *Cas 2 :  $x < 1$ .* On a alors

$$x^2 - x + 1 \geq |x - 1| \iff x^2 - x + 1 \geq 1 - x.$$

Ce qui est encore équivalent à  $x^2 \geq 0$ , inégalité vérifiée pour tout  $x$  réel.

► *Conclusion :* on a prouvé que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x + 1 \geq |x - 1|.$$

**SOLUTION 26.**

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} & |x + y| = |x| + |y| \\ \iff & |x + y|^2 = (|x| + |y|)^2 && \text{car les membres de l'égalité sont positifs} \\ \iff & (x + y)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ \iff & x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2 \\ \iff & xy = |x||y| \\ \iff & xy \geq 0 \end{aligned}$$

**SOLUTION 27.**

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Supposons que  $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0$ . Alors

$$(\alpha + \beta/2)^2 - \beta^2/4 + \beta^2 = 0,$$

c'est-à-dire  $(\alpha + \beta/2)^2 + 3\beta^2/4 = 0$ . Ainsi  $\alpha + \beta/2 = \beta = 0$  et donc  $\alpha = \beta = 0$ .

**SOLUTION 28.**

1. On résout par équivalence.

$$\begin{aligned} & \sqrt{|x - 3|} = |x - 1| \\ \iff & |x - 3| = (x - 1)^2 \quad \text{car les deux membres sont positifs} \\ \iff & x - 3 = (x - 1)^2 \text{ ou } x - 3 = -(x - 1)^2 \\ \iff & x^2 - 3x + 4 = 0 \text{ ou } x^2 - x - 2 = 0 \\ \iff & x = -1 \text{ ou } x = 2 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc  $\{-1, 2\}$ .

2.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{|x-3|} \leq x-1 \\
\iff & \begin{cases} x \geq 1 \\ |x-3| \leq (x-1)^2 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x \geq 1 \\ -(x-1)^2 \leq x-3 \leq (x-1)^2 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 4 \geq 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2 \end{cases} \\
\iff & x \geq 2
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc  $[2, +\infty[$ .

**SOLUTION 29.**

Remarquons que  $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \iff \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2) \geq 0 \iff (x-y)^2 \geq 0$ . La dernière inégalité étant toujours vraie, la première l'est également.

**SOLUTION 30.**

1.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{|x^2-4|} \leq |x-1| \\
\iff & |x^2-4| \leq |x-1|^2 \quad \text{car les membres de l'inégalité précédente sont positifs} \\
\iff & |x^2-4| \leq (x-1)^2 \\
\iff & |x^2-4|^2 \leq (x-1)^4 \quad \text{car les membres de l'inégalité précédente sont positifs} \\
\iff & (x^2-4)^2 \leq (x-1)^4 \\
\iff & 0 \leq (x-1)^4 - (x^2-4)^2 \\
\iff & 0 \leq [(x-1)^2 + (x^2-4)][(x-1)^2 - (x^2-4)] \\
\iff & 0 \leq (2x^2 - 2x - 3)(5 - 2x)
\end{aligned}$$

Or les racines du trinôme  $2x^2 - 2x - 3$  sont  $\frac{1-\sqrt{7}}{2}$  et  $\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ . Un tableau de signes permet de conclure que l'ensemble des solutions est  $]-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{7}}{2}, \frac{5}{2}[$ .

2.

$$\begin{aligned}
& \frac{x+1}{x-1} \leq \frac{x-2}{x+2} \\
\iff & \frac{(x+1)(x+2) - (x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \leq 0 \\
\iff & \frac{6x}{(x-1)(x+2)} \leq 0
\end{aligned}$$

Un tableau de signes permet de conclure que l'ensemble des solutions est  $]-\infty, -2[ \cup [0, 1[$ .

3. Remarquons tout d'abord que les membres de l'inégalité ne sont définis que pour  $x > -1$  ou  $x < -2$ . On suppose donc que  $x$  vérifie ces inégalités par la suite.

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \leq \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \\
 \Leftrightarrow & \frac{x+1}{x+2} \leq \frac{x+2}{x+1} \quad \text{car les membres de l'inégalité précédente sont positifs} \\
 \Leftrightarrow & 0 \leq \frac{x+2}{x+1} - \frac{x+1}{x+2} \\
 \Leftrightarrow & 0 \leq \frac{(x+2)^2 - (x+1)^2}{(x+1)(x+2)} \\
 \Leftrightarrow & 0 \leq \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} \\
 \Leftrightarrow & x \geq -\frac{3}{2} \quad \text{car } (x+1)(x+2) > 0
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc  $]-1, +\infty[$ .

#### SOLUTION 31.

L'inégalité est définie lorsque l'expression sous la racine carrée est positive, c'est-à-dire pour  $x \in [0, 2]$ . Si  $x < 1$  l'inégalité est manifestement fautive. Considérons donc le cas où  $x \geq 1$ . Puisque dans ce cas les deux côtés de l'inégalité sont des nombres positifs on peut « prendre le carré » de l'inégalité.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2x-x^2} < x-1 & \Leftrightarrow 2x-x^2 < (x-1)^2 \\
 & \Leftrightarrow 2x-x^2 < x^2-2x+1 \\
 & \Leftrightarrow 0 < 2x^2-4x+1 \\
 & \Leftrightarrow x < \frac{4-\sqrt{8}}{4} \quad \text{ou} \quad x > \frac{4+\sqrt{8}}{4} \\
 & \stackrel{x \geq 1}{\Leftrightarrow} x > 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc  $]1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2]$ .

#### SOLUTION 32.

Soit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , HR( $n$ ) la proposition suivante

$$\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

- HR(1), HR(2) et HR(3) sont banalement vraies.
- Prouvons que pour tout  $n \geq 1$ , HR( $n$ ) implique HR( $n+1$ ). soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ; supposons HR( $n$ ) vraie, c'est-à-dire

$$\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

On a

$$\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n+2} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \times \frac{2n+1}{2n+2},$$

donc

$$\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n+2} \leq \frac{2n+1}{2(n+1)\sqrt{3n+1}}.$$

Or ,

$$\frac{2n+1}{2(n+1)\sqrt{3n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

est équivalent à

$$\frac{(2n+1)^2}{4(n+1)^2(3n+1)} \leq \frac{1}{3n+4},$$

qui est aussi équivalent à

$$(2n+1)^2(3n+4) \leq 4(n+1)^2(3n+1)$$

et encore à

$$12n^3 + 28n^2 + 19n + 4 \leq 12n^3 + 28n^2 + 20n + 1$$

qui est finalement équivalent à  $n \geq 3$ , HR( $n+1$ ) est donc vraie.

► D'après le principe de récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

### SOLUTION 33.

Soit, pour tout  $n \geq 2$ , HR( $n$ ) la proposition suivante

$$\forall a \in ]0, 1[, \quad 1 - na < (1-a)^n < \frac{1}{1+na}.$$

► HR(2) est vraie car

$$(1-a)^2 = 1 - 2a + a^2 > 1 - 2a$$

et

$$(1-a)^2(1+2a) - 1 = a^2(2a-3) < 0$$

lorsque  $a \in ]0, 1[$ .

► Prouvons que pour tout  $n \geq 1$ , HR( $n$ ) implique HR( $n+1$ ) : soit  $n \in \mathbb{N}$  ; supposons HR( $n$ ) vraie, c'est-à-dire  $\forall a \in ]0, 1[, \quad \forall n \geq 2$

$$1 - na < (1-a)^n < \frac{1}{1+na}.$$

Soit alors  $a \in ]0, 1[$ . On a

$$(1-a)^{n+1} > (1-na)(1-a),$$

donc

$$(1-a)^{n+1} > 1 - (n+1)a + na^2 > 1 - (n+1)a.$$

De plus

$$(1-a)^{n+1} = (1-a)(1-a)^n < \frac{1-a}{1+na}.$$

Or,

$$\frac{1-a}{1+na} < \frac{1}{1+(n+1)a}$$

est équivalent à

$$1 - a + (n+1)a - (n+1)a^2 < 1 + na$$

c'est-à-dire à  $-(n+1)a < 0$  qui est banalement vérifiée. HR( $n+1$ ) est donc vraie.

► D'après le principe de récurrence,

$$\forall a \in ]0, 1[, \quad \forall n \geq 2, \quad 1 - na < (1-a)^n < \frac{1}{1+na}.$$

**SOLUTION 34.**

L'inégalité est une conséquence immédiate de

$$(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 \geq 0.$$

**SOLUTION 35.**

Soient  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

1. Après mise au même dénominateur, l'inégalité est équivalente à

$$\frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4,$$

comme  $ab > 0$ , ceci équivaut à

$$(a+b)^2 - 4ab \geq 0.$$

Or cette dernière est clairement puisque

$$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0.$$

2. On a, pour tous  $x$  et  $y$  positifs

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

c'est-à-dire

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}.$$

Ainsi

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad b + c \geq 2\sqrt{bc} \quad \text{et} \quad c + a \geq 2\sqrt{ca}.$$

On en déduit que

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{abbc ca} = 8abc.$$

3. Après mise au même dénominateur, l'inégalité est équivalente à

$$\frac{a^2 - 2\sqrt{b}a + b}{a} = \frac{(a - \sqrt{b})^2}{a} \geq 0,$$

inégalité clairement vérifiée.

**SOLUTION 36.**

1. On trouve  $x = 2$  ou  $-8$ .
2.  $\mathcal{S} = [-8, 5]$ .
3.  $\mathcal{S} = ]-\infty, -8[ \cup ]5, +\infty[$ .
4. L'équation équivaut à  $x^2 - 4 = \pm(2x - 5)$ , ie  $x = 1$  ou  $x = -1 \pm \sqrt{10}$ .
5.  $\mathcal{S} = [-8, 5]$ .
6.  $\mathcal{S} = [\frac{2}{3}, 6]$ .
7.  $\mathcal{S} = ]-\infty, -4[ \cup ]5, +\infty[$ .

**REMARQUE.** Tous ces résultats s'obtiennent après avoir dressé un tableau de signes. ■

---

**SOLUTION 37.**

En développant le membre de droite, on trouve que l'inégalité est équivalente à

$$|xy - 1| \leq |x - 1| + |y - 1| + |x - 1||y - 1|.$$

On remarque alors que

$$xy - 1 = (x - 1)(y - 1) + x - 1 + y - 1,$$

et en appliquant l'inégalité triangulaire

$$|xy - 1| \leq |(x - 1)(y - 1)| + |x - 1| + |y - 1|,$$

d'où le résultat.

---

**SOLUTION 38.**

► Plaçons-nous sur l'intervalle  $] -\sqrt{3}, \sqrt{3}[$ . L'équation est alors équivalente à

$$3 - x^2 > 2,$$

c'est-à-dire

$$x^2 < 1,$$

ie  $x \in ]-1, 1[$ .

► Plaçons-nous sur  $] -\infty, -\sqrt{3}[ \cup ]\sqrt{3}, +\infty[$ . L'équation est alors équivalente à

$$x^2 - 3 > 2,$$

c'est-à-dire

$$x^2 > 5,$$

ie  $x \in ]-\infty, -\sqrt{5}[ \cup ]\sqrt{5}, +\infty[$ .

► L'ensemble des solutions est donc

$$]-1, 1[ \cup ]-\infty, -\sqrt{5}[ \cup ]\sqrt{5}, +\infty[.$$

---

**SOLUTION 39.**

Puisque  $0 \leq x \leq y$ ,

$$0 \leq x^2 \leq xy,$$

mais aussi

$$xy \leq y^2,$$

d'où

$$0 \leq x^2 \leq xy \leq y^2,$$

et donc

$$0 \leq x \leq \sqrt{xy} \leq y.$$

---

**SOLUTION 40.**



1. Puisque les deux membres sont positifs, l'inégalité est équivalente à

$$\sqrt{a+b}^2 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,$$

c'est-à-dire

$$a+b \leq a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b,$$

ce qui équivaut à  $2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$ . Puisque cette dernière inégalité est banalement vraie, l'inégalité initiale l'est également.

2. Puisque les deux membres de l'inégalité sont invariants par permutation des réels  $a$  et  $b$ , on peut toujours supposer que  $a \leq b$ , quitte à permuter les deux nombres. On a d'après la première question appliquée à  $a \geq 0$  et  $b-a \geq 0$ ,

$$\sqrt{b} = \sqrt{a+b-a} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b-a}$$

et donc  $\sqrt{b} - \sqrt{a} \leq \sqrt{b-a} = \sqrt{|b-a|}$ . De plus, on a par croissance de la racine carrée sur  $\mathbb{R}_+$ ,

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq 0 \leq \sqrt{|b-a|}.$$

Ainsi  $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|b-a|}$ .

#### SOLUTION 41.

On se donne  $\lambda \in [0, 1]$  et on raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_\lambda} + \sqrt{b_\lambda} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{a_\lambda} + \sqrt{b_\lambda})^2 \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 && \text{car les membres de l'inégalité précédente sont positifs} \\ \Leftrightarrow & a_\lambda + b_\lambda + 2\sqrt{a_\lambda b_\lambda} \geq a + b + 2\sqrt{ab} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{a_\lambda b_\lambda} \geq \sqrt{ab} \\ \Leftrightarrow & a_\lambda b_\lambda \geq ab && \text{par croissance des fonctions carrée et racine carrée} \\ \Leftrightarrow & \lambda^2(2ab - a^2 - b^2) + \lambda(a^2 + b^2 - 2ab) \geq 0 && \text{après simplification} \\ \Leftrightarrow & (a-b)^2 \lambda(1-\lambda) \geq 0 \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie puisque  $\lambda \in [0, 1]$ . Par équivalence, l'inégalité de départ est également vraie.

#### SOLUTION 42.

Prouvons par exemple que  $A = B$  par double inclusion.

On a  $B \subset A \cup B = A \cap C \subset A$ . De même,  $A \subset A \cup C = B \cap C \subset B$ . L'égalité  $B = C$  se démontre de la même manière.

#### SOLUTION 43.

Montrons l'égalité des deux ensembles. Comme

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) = B \cup (A \cap C)$$

on a

$$\begin{aligned} Y &= [B \cup (A \cap C)] \cap (C \cup A) \\ &= [B \cap (C \cup A)] \cup [(A \cap C) \cap (C \cup A)] \\ &= (B \cap C) \cup (B \cap A) \cup (A \cap C) = X \end{aligned}$$

**SOLUTION 44.**

► Supposons que  $A = B$ . On a alors banalement

$$A \cap B = A \cup B = A = B.$$

► *Réciproquement*, supposons que  $A \cup B = A \cap B$ . Montrons que  $A = B$  par double inclusion. On a

$$A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$$

et puisque  $A$  et  $B$  jouent des rôles symétriques, on a également  $B \subset A$ .

**SOLUTION 45.**

Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

on a  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ . Cette inclusion est *stricte* car  $1 = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \in \mathcal{E}$  mais  $1 \notin \mathcal{F}$ .

**SOLUTION 46.**

1. Notons  $A, B, C, D$  les points de coordonnées respectives  $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ .

Les droites  $(AB), (CD), (AC), (BD)$  ont pour équations respectives  $x + y = 1, x + y = -1, x - y = 1, x - y = -1$ . On en déduit que  $A_1$  est la portion du plan strictement comprise entre les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  et que  $A_2$  est la portion du plan strictement comprise entre les droites  $(AC)$  et  $(BD)$ .

En se plaçant successivement sur les quatre quadrants  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$ , on montre que  $A_3$  est la réunion des triangles  $OAB, OAD, OCA, OCD$  autrement dit le carré  $ABCD$ .

2. La question précédente montre que  $A_1 \cap A_2 = A_3$ , ce qui équivaut bien à l'équivalence demandée.

**SOLUTION 47.**

On a  $A \subset A \cup B = B \cap C \subset B \subset A \cup B = B \cap C \subset C$ .

**SOLUTION 48.**

Supposons  $D = A \times B$  où  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $\mathbb{R}$ . Comme  $(1, 0) \in D, 1 \in A$ . De la même façon,  $(0, 1) \in D$  donc  $1 \in B$ . Par conséquent,  $(1, 1) \in D$ , ce qui est faux.

**SOLUTION 49.**

Il y a toujours deux modes de raisonnement possibles : soit en raisonnant sur les éléments, soit directement sur les ensembles. La seconde méthode est généralement plus élégante et plus rapide.

1. On suppose  $A \cap B = A \cap C$  et  $A \cup B = A \cup C$ .

**Première méthode** Soit  $x \in B$ . Alors  $x \in A \cup B = A \cup C$ . Si  $x \notin A$ , alors  $x \in C$ . Si  $x \in A$ , alors  $x \in A \cap B = A \cap C$ . Donc  $x \in C$ . Dans les deux cas,  $x \in C$ . On en déduit que  $B \subset C$ . Les rôles de  $B$  et  $C$  étant symétriques, on a également  $C \subset B$ . D'où  $B = C$ .

**Deuxième méthode** On a  $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$ . D'une part,  $B \cap A = C \cap A$ . D'autre part,

$$B \cap \bar{A} = (A \cup B) \setminus A = (A \cup C) \setminus A = C \cap \bar{A}$$

$$\text{Ainsi } B = (C \cap A) \cup (C \cap \bar{A}) = C.$$

**2. Première méthode** Soit  $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ . Si  $x \in A \setminus B$ , alors  $x \in A$  et  $x \notin B$ . A fortiori,  $x \notin B \cap C$ . Donc  $x \in A \setminus (B \cap C)$ . De même, si  $x \in A \setminus C$ ,  $x \in A \setminus (B \cap C)$ . On en déduit que  $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cap C)$ .

Soit  $x \in A \setminus (B \cap C)$ . Alors  $x \in A$  et  $x \notin B \cap C$ . Si  $x \notin B$ , alors  $x \in A \setminus B$ . Si  $x \in B$ , alors  $x \notin C$  donc  $x \in A \setminus C$ . Ainsi  $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .

On en déduit que  $A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .

Par double inclusion,  $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$ .

**Deuxième méthode** Beaucoup plus rapidement :

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) = A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = A \cap \overline{(B \cap C)} = A \setminus (B \cap C)$$

#### SOLUTION 50.

1.

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}, \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, x = \frac{p}{q} \right\} = \left\{ \frac{p}{q}, (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}$$

2.

$$2\mathbb{Z} + 1 = \{ n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1 \} = \{ 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \}$$

3.

$$i\mathbb{R} = \{ z \in \mathbb{C}, \exists b \in \mathbb{R}, z = ib \} = \{ ib, b \in \mathbb{R} \} = \{ z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) = 0 \}$$

4.

$$\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x) \}$$

#### SOLUTION 51.

1.

$$\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x) \}$$

2.

$$\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists T \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x) \}$$

3.

$$\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b \}$$

#### SOLUTION 52.

Notons  $A = (X \cup Z) \cap (Y \cup \bar{Z})$  et  $B = (X \cap \bar{Z}) \cup (Y \cap Z)$ .

*Première méthode* : en utilisant trois fois la distributivité de  $\cap$  sur  $\cup$ , on obtient l'égalité  $A = (X \cap Y) \cup (Z \cap Y) \cup (X \cap \bar{Z})$ , c'est-à-dire :  $A = (X \cap Y) \cup B$ . Ainsi  $A = B \iff X \cap Y \subset B$ .

Prouvons donc l'inclusion  $X \cap Y \subset B$ .

Si  $x \in X \cap Y$ , on a deux cas :

- soit  $x \in Z$ , et alors  $x \in Y \cap Z$  (puisque  $x \in Y$ ), donc  $x \in B$  (puisque  $Y \cap Z \subset B$ ).

- soit  $x \in \overline{Z}$ , et alors  $x \in X \cap \overline{Z}$  (puisque  $x \in X$ ), donc  $x \in B$  (puisque  $X \cap \overline{Z} \subset B$ ).

*Deuxième méthode* : avec les fonctions indicatrices. Le calcul de  $\mathbb{1}_B$  est le plus simple : puisque  $(X \cap \overline{Z}) \cap (Y \cap Z) = \emptyset$ , on a  $\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_X \mathbb{1}_{\overline{Z}} + \mathbb{1}_Y \mathbb{1}_Z$ . Pour calculer  $\mathbb{1}_A$  on développe en gardant  $\mathbb{1}_{\overline{Z}}$  sous cette forme (sans la remplacer par  $1 - \mathbb{1}_Z$ ), et on utilise que  $\mathbb{1}_Z \mathbb{1}_{\overline{Z}} = 0$  puisque  $Z \cap \overline{Z} = \emptyset$ . Il reste au final  $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_X \mathbb{1}_{\overline{Z}} + \mathbb{1}_Y \mathbb{1}_Z$ , on a donc bien  $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ , et donc  $A = B$ .