Devoir surveillé n° 8

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

Le but de cet exercice est de montrer l'existence de points fixes de l'exponentielle complexe, c'est-à-dire qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = z$.

1. L'exponentielle admet-elle des points fixes sur $\mathbb{R}$?

2. Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose

$$f(x) = \exp\left(\frac{x}{\tan x}\right) - \frac{x}{\sin x}$$

Déterminer les limites de f en 0 et $\frac{\pi}{2}$.

3. En déduire qu'il existe $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(b) = 0$.

4. On pose $a = \frac{b}{\tan b}$ et $z = a + ib$. Montrer que $\frac{e^z}{z} = \frac{e^a \cos b}{a}$.

5. En déduire que $e^z = z$.

Problème 1 —

On note $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Partie I – Equation fonctionnelle de Cauchy

Le but de cette partie est de déterminer l'ensemble

$$F = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \right\}$$

On se donne donc f une fonction de F.

1. Déterminer la valeur de $f(0)$.

2. Montrer que f est impaire.

3. Montrer que pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.

4. En déduire que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1)$.

5. En utilisant un argument de densité, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$.

6. Déterminer l'ensemble F.

7. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont ont précisera la dimension.

Partie II – Application à d'autres équations fonctionnelles

On souhaite maintenant déterminer les ensembles

$$G = \left\{g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x+y) = g(x)g(y)\right\}$$
$$H = \left\{h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}),\ \forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ h(xy) = h(x)+h(y)\right\}$$
$$K = \left\{k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}),\ \forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ k(xy) = k(x)k(y)\right\}$$

1. On se donne une fonction g de G.

   a. Déterminer g si $g(0) = 0$.

   b. On suppose maintenant $g(0) \neq 0$. Préciser $g(0)$ et montrer que g est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

   c. En considérant la fonction $\ln \circ g$, déterminer l'ensemble G.

   d. G est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

2. Déterminer alors les ensembles H et K. Préciser si ce sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et donner leurs dimensions le cas échéant.

Problème 2 —

On définit deux suites de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$P_{n+1} = P_n + XQ_n$$
$$Q_{n+1} = -XP_n + Q_n$$

Il est évident que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de polynômes à coefficients *réels*, ce que l'on ne demande pas de montrer. On pose enfin $R_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$ et $Z_n = Q_n + iP_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans une première partie, on étudiera certains cas particuliers puis on étudiera le cas général dans la partie suivante.

> Il est *fortement conseillé* de vérifier si les résultats obtenus dans le cas général sont cohérents avec ceux obtenus dans les cas particuliers.

Partie I – Etude de cas particuliers

1. Calculer P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3, P_4, Q_4.

2. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de P_2, Q_2, P_3, Q_3, P_4, Q_4 dans $\mathbb{R}[X]$.

3. Donner la décomposition en éléments simples de R_2, R_3, R_4 dans $\mathbb{R}(X)$.

Partie II – Etude du cas général

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = (1+iX)^n$.

2. Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$P_n(\tan\alpha) = \frac{\sin(n\alpha)}{\cos^n(\alpha)} \qquad Q_n(\tan\alpha) = \frac{\cos(n\alpha)}{\cos^n(\alpha)}$$

> A partir de maintenant, on suppose n non nul.
> On sera amené dans plusieurs questions à distinguer des cas selon la *parité* de n.

3. Donner une expression *développée* de Z_n à l'aide de la formule du binôme de Newton et en déduire des expressions de P_n et Q_n.

4. Déterminer la parité, le degré et le coefficient dominant des polynômes P_n et Q_n.

5. A l'aide de la question **II.2**, déterminer les racines de P_n et Q_n. Montrer en particulier que toutes les racines de P_n et Q_n sont réelles et simples.

6. Factoriser P_n et Q_n sous forme de produits de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

7. Calculer la partie entière de la fraction rationnelle R_n.

8. Calculer P_n' et Q_n' en fonction de P_{n-1} et Q_{n-1}.

9. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle R_n.

10. Calculer les produits suivants

$$A_n = \prod_{0<2k<n} \tan\frac{k\pi}{n} \qquad B_n = \prod_{0<2k+1<n} \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}$$