Interrogation écrite n°10

NOM : Prénom : Note :

1. Soit $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, -x - y + z, -x - 2y + 2z) \end{array} \right.$. On admet que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Déterminer des bases de l'image et du noyau de f et déterminer son rang.

2. On note E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et pour $f \in E$, on pose $D(f) = f'$. Montrer que D est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau et son image. D est-il injectif ? surjectif ?

3. On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et on pose pour $(u_n) \in E$, $T((u_n)) = (u_{n+1})$. Montrer que T est un endomorphisme de E. Déterminer son image et son noyau. T est-il injectif ? surjectif ?

4. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \neq 0$ et $u^2 = 0$. Déterminer le rang de u.

5. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Quelles inclusions ou égalités existe-il *toujours* entre les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(g \circ f)$, $\mathrm{Ker}(g \circ f)$, $\mathrm{Im}\, g$, $\mathrm{Ker}\, g$, $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Ker}\, f$? On justifiera ces inclusions.