

DEVOIR À LA MAISON N°15

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 – Déterminants de Gram

n et p désignent des entiers naturels non nuls.

E est un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Partie I – Lemme préliminaire

I.1 Soit $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $Y^T Y = 0$ si et seulement si $Y = 0$.

I.2 Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

I.2.a Montrer que $\text{Ker } A \subset \text{Ker } A^T A$.

I.2.b A l'aide de la question **I.1**, montrer que $\text{Ker } A^T A \subset \text{Ker } A$.

I.2.c En déduire que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T A)$.

Partie II – Déterminants de Gram

Si x_1, \dots, x_n sont n vecteurs de E , on pose $G(x_1, \dots, x_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient en position (i, j) est $\langle x_i, x_j \rangle$.

II.1 Soient x_1, \dots, x_n des vecteurs de E et $F = \text{vect}(x_1, \dots, x_n)$. On note (e_1, \dots, e_p) une base orthonormale de F et A la matrice de la famille (x_1, \dots, x_n) dans la base (e_1, \dots, e_p) .

II.1.a Montrer que $G(x_1, \dots, x_n) = A^T A$.

II.1.b En déduire que $\det G(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ et que $\det G(x_1, \dots, x_n) = 0$ si et seulement si la famille (x_1, \dots, x_n) est liée.

II.2 Soient F un sous-espace vectoriel de E de base (e_1, \dots, e_p) et x un vecteur de E . On ne suppose plus (e_1, \dots, e_p) orthonormée dans cette question.

II.2.a Justifier qu'il existe $y \in F$ et $z \in F^\perp$ tel que $x = y + z$.

II.2.b Montrer que $\det G(e_1, \dots, e_p, x) = \|z\|^2 \det G(e_1, \dots, e_p)$.

II.2.c En déduire que $d(x, F)^2 = \frac{\det G(e_1, \dots, e_p, x)}{\det G(e_1, \dots, e_p)}$.

Partie III – Applications

III.1 Dans cette question, on suppose $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. Déterminer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

III.2 Dans cette question, on suppose $E = \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^\pi f(t)g(t) dt$. Déterminer

$$M = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (\sin t - at^2 - bt)^2 dt$$