

DEVOIR SURVEILLÉ N°10 : CORRIGÉ

Problème 1 — D'après Petites Mines 1995

Partie I –

1. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$.

$$T(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) = \lambda T(P) + \mu T(Q)$$

Ainsi T est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

On remarque que $\Delta = T - \text{Id}_{\mathbb{R}[X]}$. Or T et $\text{Id}_{\mathbb{R}[X]}$ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ donc Δ en est un aussi puisque $\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

2. a. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $\deg \Delta(P) \leq \max(\deg P(X+1), \deg P) \leq n$. Ainsi $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ceci prouve que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ .
- b. Soit $P \in \text{Ker } \Delta_n$. Alors $P(X+1) = P(X)$. On pose alors $Q = P - P(0)$ et on prouve par récurrence que $Q(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme \mathbb{N} est infini, Q est nul de sorte que P est constant. Réciproquement tout polynôme constant appartient au noyau de Δ_n . Finalement $\text{Ker } \Delta_n = \mathbb{R}_0[X]$.
- c. D'après le théorème du rang, $\text{rg } \Delta_n = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \text{Ker } \Delta_n = n+1-1 = n$.
Prouvons que $\text{Im } \Delta_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\deg \Delta_n(X^k) \leq k \leq n-1$ donc $\Delta_n(X^k) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. De plus,

$$\Delta_n(X^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k - X^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k$$

Ainsi $\deg \Delta_n(X^n) \leq n-1$ et $\Delta_n(X^n) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Finalement, $\Delta_n(X^k) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Comme $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que Δ_n est linéaire, $\text{Im } \Delta_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Enfin, $\dim \text{Im } \Delta_n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$ donc $\text{Im } \Delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3. a.

$$\begin{aligned} \Delta(N_k) &= \frac{1}{k!} \left[\prod_{j=0}^{k-1} (X+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \right] \\ &= \frac{1}{k!} \left[\prod_{j=-1}^{k-2} (X-j) - \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \right] \\ &= \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) [(X+1) - (X-k+1)] \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) = N_{k-1} \end{aligned}$$

- b. Puisque $\Delta(N_0) = 0$, on déduit de la question précédente que $\Delta^j(N_k) = N_{k-j}$ si $j \leq k$ et que $\Delta^j(N_k) = 0$ si $j > k$.
De plus, on a clairement $N_0(0) = 1$ et $N_l(0) = 0$ pour $l \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $\Delta^j(N_k)(0) = 1$ si $j = k$ et $\Delta^j(N_k) = 0$ si $j \neq k$.
- c. Tout d'abord, la famille $(N_k)_{0 \leq k \leq n}$ est bien une famille de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, cette famille est une famille de polynômes à degrés étagés : elle est donc libre. Enfin, elle comporte $n+1$ éléments et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. On peut donc affirmer que $(N_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

- d. Posons $P = \sum_{k=0}^n a_k N_k$. Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Par linéarité de Δ^j ,

$$\Delta^j(P) = \sum_{k=0}^n a_k \Delta^j(N_k)$$

On évalue ensuite cette égalité en 0

$$\Delta^j(P)(0) = \sum_{k=0}^n a_k \Delta^j(N_k)(0)$$

D'après la question **I.3.b**, on a alors $a_j = \Delta^j(P)(0)$.

4. a. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\tilde{T}(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda f + \mu g)(x+1) = \lambda f(x+1) + \mu g(x+1) = \lambda \tilde{T}(f)(x) + \mu \tilde{T}(g)(x)$$

Ainsi $\tilde{T}(\lambda f + \mu g) = \lambda \tilde{T}(f) + \mu \tilde{T}(g)$. Ceci prouve que \tilde{T} est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

On remarque que $\tilde{\Delta} = \tilde{T} - \text{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$. Or \tilde{T} et $\text{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ donc $\tilde{\Delta}$ en est un aussi puisque $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

- b. On a clairement $\tilde{T}^k(f)(x) = f(x+k)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- c. Puisque $\text{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ et \tilde{T} commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\tilde{\Delta}^j = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \tilde{T}^k$$

- d. D'après les deux questions précédentes

$$\tilde{\Delta}^j(f)(0) = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \tilde{T}^k(f)(0) = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k} f(k)$$

Partie II –

- a. Φ est clairement linéaire. Soit $P \in \text{Ker } \Phi$. Alors $\deg P \leq n$ et $P(k) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Ainsi $\deg P = n$ et P possède $n+1$ racines : il est donc nul. On en déduit que $\text{Ker } \Phi = \{0\}$.
Ainsi Φ est injective. Or $\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \mathbb{R}^{n+1} = n+1$ donc Φ est un isomorphisme.
- b. Comme Φ est bijective, le $(n+1)$ -uplet $(f(k))_{0 \leq k \leq n}$ admet un unique antécédent par Φ dans $\mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire que le problème (\mathcal{P}) admet une unique solution P_f .
- a. D'après la question **I.4.d**

$$\tilde{\Delta}^j(f)(0) = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k} f(k) = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k} P_f(k) = \tilde{\Delta}^j(P_f)(0) = \Delta^j(P_f)(0)$$

quitte à confondre polynômes et fonctions polynomiales associées.

- b. D'après la question **I.3.d** et la question précédente

$$P_f = \sum_{j=0}^n \Delta^j(P_f)(0) N_j = \sum_{j=0}^n \tilde{\Delta}^j(f)(0) N_j$$

- a. Comme x n'est pas entier, $N(x) \neq 0$, on peut poser $K = \frac{f(x) - P_f(x)}{N(x)}$ de sorte que $\varphi(x) = 0$.
 φ s'annule $n+2$ fois sur $[0, n]$ à savoir en les entiers $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et en x . Comme φ est continue et dérivable sur \mathbb{R} , on peut appliquer le théorème de Rolle entre ces zéros consécutifs de φ pour montrer que φ' s'annule $n+1$ fois sur l'intervalle $]0, n[$ (remarquer que l'intervalle est ouvert maintenant. On fait l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\text{HR}(k) : \varphi^{(k)} \text{ s'annule } n+2-k \text{ fois sur }]0, n[$$

HR(1) est vraie. On suppose que HR(k) est vraie pour un certain $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi $\varphi^{(k)}$ s'annule $n+1-k$ fois sur $]0, n[$. Comme $\varphi^{(k)}$ est continue et dérivable sur \mathbb{R} , on peut appliquer le théorème de Rolle entre ces zéros consécutifs de $\varphi^{(k)}$ pour montrer que $\varphi^{(k+1)}$ s'annule $n-k$ fois sur $]0, n[$. Ainsi HR($k+1$) est vraie. Par récurrence finie, HR($n+1$) est vraie i.e. $\varphi^{(n+1)}$ s'annule une fois sur $]0, n[$. Il existe donc $c \in]0, n[$ tel que $\varphi^{(n+1)}(c) = 0$.

Ainsi $f^{(n+1)}(c) - P_f^{(n+1)}(c) - KN^{(n+1)}(c) = 0$. Puisque $\deg P_f \leq n$, $P_f^{(n+1)} = 0$. Comme N est un polynôme unitaire de degré $n+1$, $N^{(n+1)} = (n+1)!$. Ainsi $f^{(n+1)}(c) = K(n+1)!$. Mais K a été défini tel que $f(x) - P_f(x) = KN(x)$, ce qui permet de conclure.

- b. L'existence de c dans la question précédente est également garantie lorsque x est entier puisque dans ce cas, $f(x) = P_f(x)$ et $N(x) = 0$ (n'importe quel $c \in]0, n[$ convient).

Soit $x \in]0, n[$. On fait l'hypothèse de récurrence suivante

$$HR(k) : \forall x \in [0, k], \left| \prod_{j=0}^k (x-j) \right| \leq k!.$$

HR(1) est vraie puisque pour $x \in [0, 1]$, $|x| \leq 1$ et $|x-1| \leq 1$.

Supposons HR(k) vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0, k+1]$.

- Si $x \in [0, k]$,

$$\left| \prod_{j=0}^{k+1} (x-j) \right| = \left| \prod_{j=0}^k (x-j) \right| \cdot (k+1-x) \leq k!(k+1) = (k+1)!$$

- Si $x \in [k, k+1]$,

$$\left| \prod_{j=0}^{k+1} (x-j) \right| = x \cdot \left| \prod_{j=1}^{k+1} (x-j) \right| = x \cdot \left| \prod_{j=0}^k (x-1-j) \right| \leq (k+1)k! = (k+1)!$$

car $x-1 \in [0, k]$ (il est essentiel ici d'avoir $k \geq 1$ d'où l'initialisation au rang 1).

Ainsi HR(k) est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (et également vraie pour $k=0$ mais peu importe). En particulier,

HR(n) est vraie, c'est-à-dire que pour tout $x \in [0, n]$, $|N(x)| \leq n!$.

En choisissant un réel $c \in]0, n[$ comme dans la question précédente

$$|f(x) - P_f(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |N(x)| \leq \frac{M_n}{(n+1)!} n! = \frac{M_n}{n+1}$$

Problème 2 — Suites implicites et équation différentielle

Partie I – Etude de deux suites implicites

1. $t \mapsto -\frac{1}{t}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* à valeurs dans \mathbb{R} et \exp est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} donc, par composition, f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

Comme $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* , g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* en tant que produit de telles fonctions.

2. Posons $u = \frac{1}{t}$ de sorte que $u \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} +\infty$. On a alors

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{u \rightarrow +\infty} u e^{-u} = 0$$

par croissances comparées.

De plus, g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(t) = \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t}} - \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}}$$

de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g'(t) = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^3 e^{-u} - u^2 e^{-u} = 0$$

à nouveau par croissances comparées.

Puisque g est clairement de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et que g et g' admettent une limite finie en 0^+ , g est prolongeable par continuité en 0^+ en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

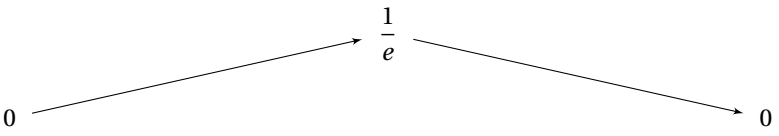
Si on note encore g ce prolongement, $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$.

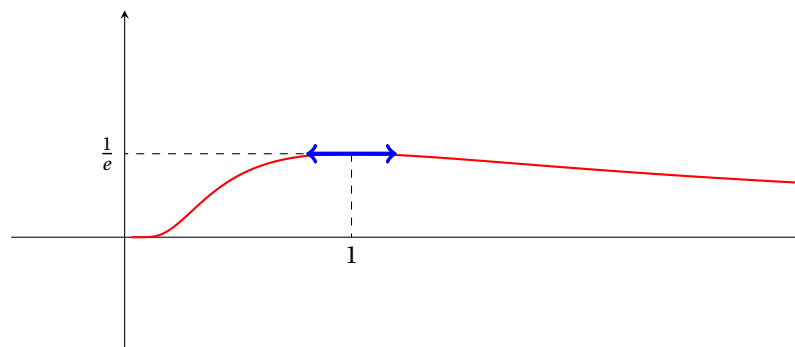
3. On a vu que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(t) = \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^3}(1-t)$$

On obtient sans difficulté $\lim_{+\infty} g = 0$.

On en déduit le tableau de variations puis le graphe suivants.

x	0		1		$+\infty$
$g'(t)$	0	+	0	-	
$g(t)$	0				



4. a. On a donc $H(x) = \int_1^x t e^{-t} dt$ pour $x > 0$. On intègre par parties :

$$H(x) = [-t e^{-t}]_1^x + \int_1^x e^{-t} dt = -(x e^{-x} - e^{-1}) + [-e^{-t}]_1^x = -(x+1)e^{-x} + 2e^{-1}$$

b. Pour se ramener au voisinage de 0, on pose $x = 1 + u$ de sorte que

$$H(x) = H(1+u) = -(2+u)e^{-1}e^{-u} + 2e^{-1}$$

En utilisant le développement limité de l'exponentielle en 0, on obtient :

$$\begin{aligned} H(1+u) &\underset{u \rightarrow 0}{=} -e^{-1}(2+u) \left(1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + o(u^3) \right) + 2e^{-1} \\ &\underset{u \rightarrow 0}{=} e^{-1} \left(u - \frac{u^3}{6} + o(u^3) \right) \end{aligned}$$

On en déduit

$$H(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} e^{-1}(x-1) - \frac{e^{-1}}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

5. a. L'équation (E_n) équivaut à $g(t) = \frac{1}{n}$. g étant continue et strictement croissante sur $]0, 1[$, elle établit une bijection de $]0, 1[$ sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$. De même, g étant continue et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$, elle établit une bijection de $]1, +\infty[$ sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$. Puisque $n \geq 3 > e$, $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{e}$. Ainsi l'équation $g(t) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution sur $]0, 1[$ et une unique solution sur $]1, +\infty[$. Il en est donc de même pour l'équation (E_n) .
- b. Soit $n \geq 3$. Puisque $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, $g(\alpha_{n+1}) < g(\alpha_n)$. Puisque $\alpha_n, \alpha_{n+1} \in]0, 1[$ et que g est croissante sur $]0, 1[$, $\alpha_{n+1} < \alpha_n$. Ainsi la suite (α_n) est strictement décroissante. De même, on a $g(\beta_{n+1}) < g(\beta_n)$. Puisque $\beta_n, \beta_{n+1} \in]1, +\infty[$ et que g est décroissante sur $]1, +\infty[$, $\beta_{n+1} > \beta_n$. Ainsi la suite (β_n) est strictement croissante.

- c. Supposons que (α_n) converge vers $l > 0$. Puisque $g(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par passage à la limite $g(l) = 0$ puisque g est continue en l . Or d'après les variations de g , on a $g > 0$ sur \mathbb{R}_+^* . Il y a donc contradiction. La suite (α_n) est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers une limite $l \geq 0$. On vient de voir qu'on ne peut avoir $l > 0$. C'est donc que $l = 0$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$.
 Pour les mêmes raisons, (β_n) ne peut converger vers un réel $l > 0$.
 La suite (β_n) est croissante. Ainsi (β_n) converge ou diverge vers $+\infty$. Or (β_n) est minorée par 1 donc, si elle convergeait vers un réel l , on aurait $l \geq 1 > 0$, ce qui est impossible. Ainsi (β_n) diverge vers $+\infty$.

Partie II – Etude d'une équation différentielle

- En posant $x = 0$ dans (E), on obtient $u_0 = y(0) = 0$.
- En dérivant E, on obtient $x^2 y'' + (2x + 1)y' = 2x$. En posant à nouveau $x = 0$ dans cette équation différentielle, on obtient $u_1 = y'(0) = 0$.
 En dérivant une nouvelle fois, on obtient $x^2 y''' + (4x + 1)y'' + 2y' = 2$. En posant encore une fois $x = 0$, on obtient $u_2 = y''(0) = 2$.
- Supposons qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $y(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Les deux questions précédentes montrent que $b = c = 0$ et $a = 1$. Or $x \mapsto x^2$ n'est manifestement pas solution de (E). y ne peut donc être polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.
- Posons $z(x) = x^2$ pour $x \geq 0$. D'après la formule de Leibniz :

$$(zy')^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{(k)} y^{(n+1-k)}$$

Or $z^{(k)}$ est nulle pour $k \geq 3$. On en déduit :

$$(zy')^{(n)} = zy^{(n+1)} + nz'y^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2} z''y^{(n-1)}$$

Enfin $z^{(n)}$ est nulle puisque $n \geq 3$. On a donc en dérivant n fois (E)

$$x^2 y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0$$

pour tout $x \geq 0$. En posant $x = 0$, on a

$$u_n + n(n-1)u_{n-1} = 0$$

- On fait l'hypothèse de récurrence suivante

$$\text{HR}(n) : u_n = (-1)^n n((n-1)!)^2$$

HR(2) est vraie puisqu'on a vu que $u_2 = 2$.

Supposons HR(n) vraie pour un certain $n \geq 2$. Puisque $u_{n+1} = -n(n+1)u_n$ d'après la question précédente, on a :

$$u_{n+1} = -n(n+1)(-1)^n n((n-1)!)^2 = (-1)^{n+1} (n+1)(n!)^2$$

en utilisant HR(n). Ainsi HR($n+1$) est vraie.

Par récurrence, HR(n) est vraie pour tout $n \geq 2$.

Comme y est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+ , y admet un développement limité à tout ordre en 0 donné par la formule de Taylor-Young. On a donc pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{k!} x^k + o(x^n) \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k (k-1)! x^k}{k!} + o(x^n) \end{aligned}$$

car $u_0 = u_1 = 0$. On a également $y(x) = o(1)$ et $y(x) = o(x)$ pour les ordres 0 et 1.