Devoir surveillé n°11 : corrigé

Problème 1 — D'après Petites Mines 2001

Partie I –

1. Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathrm{E}(s)\mathrm{E}(t) = \left(\mathrm{I} + s\mathrm{A} + \frac{s^2}{2}\mathrm{A}^2\right)\left(\mathrm{I} + t\mathrm{A} + \frac{t^2}{2}\mathrm{A}^2\right) = \mathrm{I} + (s+t)\mathrm{A} + \left(\frac{s^2}{2} + st + \frac{t^2}{2}\right)\mathrm{A}^2 + \frac{st^2 + s^2t}{2}\mathrm{A}^3 + \frac{s^2t^2}{2}\mathrm{A}^4$$

Or $\mathrm{A}^3 = 0$ et donc $\mathrm{A}^4 = 0$. Finalement

$$\mathrm{E}(s)\mathrm{E}(t) = \mathrm{I} + (s+t)\mathrm{A} + \left(\frac{s^2}{2} + st + \frac{t^2}{2}\right)\mathrm{A}^2 = \mathrm{I} + (s+t)\mathrm{A} + \frac{(s+t)^2}{2}\mathrm{A}^2 = \mathrm{E}(s+t)$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors $\mathrm{E}(0 \times t) = \mathrm{E}(0) = \mathrm{I} = \mathrm{E}(t)^0$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{E}(nt) = \mathrm{E}(t)^n$. Alors, d'après la question **I.1**,

$$\mathrm{E}((n+1)t) = \mathrm{E}(nt+t) = \mathrm{E}(nt)\mathrm{E}(t) = \mathrm{E}(t)^n\mathrm{E}(t) = \mathrm{E}(t)^{n+1}$$

Par récurrence, $\mathrm{E}(nt) = \mathrm{E}(t)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après la question **I.1**, $\mathrm{E}(t)\mathrm{E}(-t) = \mathrm{E}(0 \times t) = \mathrm{E}(0) = \mathrm{I}$. Ainsi $\mathrm{E}(t)$ est inversible et $\mathrm{E}(t)^{-1} = \mathrm{E}(-t)$.

4. Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda\mathrm{I} + \mu\mathrm{A} + \nu\mathrm{A}^2 = 0$. En multipliant cette égalité par A^2, on obtient $\lambda\mathrm{A}^2 + \mu\mathrm{A}^3 + \nu\mathrm{A}^4 = 0$ et donc $\lambda = 0$ puisque $\mathrm{A}^2 \neq 0$ et $\mathrm{A}^3 = \mathrm{A}^4 = 0$. On a donc $\mu\mathrm{A} + \nu\mathrm{A}^2 = 0$. En multipliant cette égalité par A, on obtient $\mu\mathrm{A}^2 + \nu\mathrm{A}^3 = 0$ et donc $\mu = 0$ puisque $\mathrm{A}^2 \neq 0$ et $\mathrm{A}^3 = 0$. Il reste $\nu\mathrm{A}^2 = 0$ et donc $\nu = 0$ puisque $\mathrm{A}^2 \neq 0$. Finalement, $\lambda = \mu = \nu = 0$, ce qui prouve la liberté de $(\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$.

5. Les questions **I.1** et **I.3** montrent que E est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), \times)$. Il nous suffit donc de déterminer le noyau de E. Or

$$t \in \operatorname{Ker} \mathrm{E} \iff \mathrm{E}(t) = \mathrm{I} \iff \mathrm{I} + t\mathrm{A} + \frac{t^2}{2}\mathrm{A}^2 = \mathrm{I} \iff t\mathrm{A} + \frac{t^2}{2}\mathrm{A}^2 = 0 \iff t = 0$$

car $(\mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$ est libre comme sous-famille de la famille libre $(\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$. Ainsi $\operatorname{Ker} \mathrm{E} = \{0\}$ et donc E est injective.

Remarque. Si on ne sait pas ce qu'est un morphisme de groupes, on montre l'injectivité «comme d'habitude». Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{E}(s) = \mathrm{E}(t)$. On a donc $\mathrm{I} + s\mathrm{A} + \frac{s^2}{2}\mathrm{A}^2 = \mathrm{I} + t\mathrm{A} + \frac{t^2}{2}\mathrm{A}^2$. Comme la famille $(\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$ est libre, on peut «identifier» les coefficients. Notamment $s = t$.

6. Remarquons que $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}^3 = 0$. On est donc bien dans les conditions de cette partie. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{E}(t) = \mathrm{I} + t\mathrm{A} + \frac{t^2}{2}\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie II –

1. La matrice de $f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ dans $\mathcal{B}_0$ est $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. On trouve alors $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \mathrm{vect}(u)$ avec $u = (3, 1)$.

La matrice de $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ dans $\mathcal{B}_0$ est $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. On trouve alors $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \mathrm{vect}(v)$ avec $v = (2, 1)$.

F et G sont bien des droites vectorielles. Comme u et v sont non colinéaires, $\mathcal{B} = (u, v)$ est libre et est donc une base de $\mathbb{R}^2$ puisque $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. Ceci prouve que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathbb{R}^2$.

2. Puisque $u \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$, $f(u) = 2u$. De même, $v \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ donc $f(v) = v$. Par conséquent, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. En notant P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ vers la base $\mathcal{B}$ et D la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, on a bien $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. On a vu à la question **II.2** que $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Un calcul simple montre que $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Puisque le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les produits des coefficients diagonaux, $\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a clairement $\mathrm{PD}^0\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{I} = \mathrm{A}^0$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$. Alors

$$\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{AA}^n = \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PDD}^n\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PD}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}$$

Par récurrence, $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Un calcul donne alors, $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 3.2^n - 2 & 6 - 6.2^n \\ 2^n - 1 & 3 - 2.2^n \end{pmatrix}$.

Partie III –

1. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle entre 0 et t à l'ordre n et on obtient

$$\left| e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right| \leq \frac{\mathrm{M}_n |t|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $\mathrm{M}_n = \sup\limits_{[0,t]} |\exp^{(n+1)}|$. Or $\exp^{(n+1)} = \exp$ et exp est positive donc $\mathrm{M}_n = \sup\limits_{[0,t]} \exp$; en particulier, M_n ne dépend pas de n. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{M}_n |t|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ et le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = 0$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = e^t$.

Remarque. Rigoureusement, il faudrait écrire $[t, 0]$ au lieu de $[0, t]$ lorsque t est négatif.

2. A l'aide de la question **II.4**,

$$a_n(t) = 3 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$
$$b_n(t) = 6 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - 6 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$$
$$c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$
$$d_n(t) = 3 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$$

3. En utilisant **III.1**, on obtient

$$a(t) = 3e^{2t} - 2e^t \qquad b(t) = 6e^t - 6e^{2t} \qquad c(t) = e^{2t} - e^t \qquad d(t) = 3e^t - 2e^{2t}$$

4. Il suffit de poser $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{R} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. On a $\mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q}$, $\mathrm{R}^2 = \mathrm{R}$ et $\mathrm{QR} = \mathrm{RQ} = 0$. q et r sont des projecteurs.
On a $\operatorname{Ker} \mathrm{Q} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\operatorname{Im} \mathrm{Q} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et donc $\operatorname{Ker} q = \operatorname{vect}(v) = \mathrm{G}$ et $\operatorname{Im} q = \operatorname{vect}(u) = \mathrm{F}$. q est donc le projecteur sur F parallèlement à G.
On a $\operatorname{Ker} \mathrm{R} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\operatorname{Im} \mathrm{R} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et donc $\operatorname{Ker} r = \operatorname{vect}(u) = \mathrm{F}$ et $\operatorname{Im} r = \operatorname{vect}(v) = \mathrm{G}$. r est donc le projecteur sur G parallèlement à F.

Remarque. On aurait aussi pu remarquer que $\mathrm{Q} + \mathrm{R} = \mathrm{I}$ et donc que $q + r = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, ce qui aurait permis de conclure directement quant à la nature de r.

6. Soit $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(s)\mathrm{E}(t) &= \left(e^{2s}\mathrm{Q} + e^s\mathrm{R}\right)\left(e^{2t}\mathrm{Q} + e^t\mathrm{R}\right) \\ &= e^{2s+2t}\mathrm{Q}^2 + e^{s+t}\mathrm{R}^2 + e^{2s+t}\mathrm{QR} + e^{s+2t}\mathrm{RQ} \\ &= e^{2(s+t)}\mathrm{Q} + e^{s+t}\mathrm{R} = \mathrm{E}(s+t) \end{aligned}$$

car $\mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q}$, $\mathrm{R}^2 = \mathrm{R}$ et $\mathrm{QR} = \mathrm{RQ} = 0$.
On prouve alors comme à la question **I.1** que $\mathrm{E}(t)^n = \mathrm{E}(nt)$ pour tout $(t, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ et que $\mathrm{E}(t)$ est inversible d'inverse $\mathrm{E}(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
A nouveau E est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$. Soit $t \in \operatorname{Ker} \mathrm{E}$. On a donc $e^{2t}\mathrm{Q} + e^t\mathrm{R} = \mathrm{I}$. En multipliant par Q, on obtient $e^{2t}\mathrm{Q} = \mathrm{Q}$ car $\mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q}$ et $\mathrm{QR} = 0$. Comme $\mathrm{Q} \neq 0$, $e^{2t} = 1$ et $t = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} \mathrm{E} = \{0\}$ et E est injectif.

Remarque. A nouveau, si on ne sait pas ce qu'est un morphisme de groupes, on se donne $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{E}(s) = \mathrm{E}(t)$. On a donc $e^{2s}\mathrm{Q} + e^s\mathrm{R} = e^{2t}\mathrm{Q} + e^t\mathrm{R}$. En multipliant par Q, on ontient $e^{2s}\mathrm{Q} = e^{2t}\mathrm{Q}$ puis $e^{2s} = e^{2t}$ car $\mathrm{Q} \neq 0$ et enfin $s = t$ par injectivité de l'exponentielle.

Problème 2 — Petites Mines 2009

Partie I – Définition d'une application

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2 \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Notons Q_1 et Q_2 les quotients respectifs des divisions euclidiennes de $\mathrm{P}_1(\mathrm{X}^2)$ et $\mathrm{P}_2(\mathrm{X}^2)$ par T et R_1 et R_2 les restes. On a donc

$$\mathrm{P}_1(\mathrm{X}^2) = \mathrm{TQ}_1 + \mathrm{R}_1 \text{ avec } \deg \mathrm{R}_1 < \deg \mathrm{T} \qquad \mathrm{P}_2(\mathrm{X}^2) = \mathrm{TQ}_2 + \mathrm{R}_2 \text{ avec } \deg \mathrm{R}_2 < \deg \mathrm{T}$$

On en déduit que

$$(\lambda_1\mathrm{P}_1 + \lambda_2\mathrm{P}_2)(\mathrm{X}^2) = \mathrm{T}(\lambda_1\mathrm{Q}_1 + \lambda_2\mathrm{Q}_2) + (\lambda_1\mathrm{R}_1 + \lambda_2\mathrm{R}_2)$$

et $\deg(\lambda_1\mathrm{R}_1 + \lambda_2\mathrm{R}_2) \leq \max(\deg \mathrm{R}_1, \deg \mathrm{R}_2) < \deg \mathrm{T}$. Ainsi $\lambda_1\mathrm{Q}_1 + \lambda_2\mathrm{Q}_2$ et $\lambda_1\mathrm{R}_1 + \lambda_2\mathrm{R}_2$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $(\lambda_1\mathrm{P}_1 + \lambda_2\mathrm{P}_2)(\mathrm{X}^2)$ par T. Par conséquent,

$$f(\lambda_1\mathrm{P}_1 + \lambda_2\mathrm{P}_2) = (\lambda_1\mathrm{Q}_1 + \lambda_2\mathrm{Q}_2) + \mathrm{X}(\lambda_1\mathrm{R}_1 + \lambda_2\mathrm{R}_2) = \lambda_1(\mathrm{Q}_1 + \mathrm{XR}_1) + \lambda_2(\mathrm{Q}_2 + \mathrm{XR}_2) = \lambda_1 f(\mathrm{P}_1) + \lambda_2 f(\mathrm{P}_2)$$

ce qui prouve que f est bien linéaire.

2. f_n est linéaire puisque f l'est. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$. Il faut donc montrer que $f_n(\mathrm{P}) = f(\mathrm{P}) \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$. Notons à nouveau Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2)$ par T.
D'une part, $\deg \mathrm{R} \leq \deg \mathrm{T} - 1 = n - 1$ donc $\deg \mathrm{XR} \leq n$.
D'autre part $\deg \mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = 2\deg \mathrm{P} \leq 2n$ donc

$$\deg \mathrm{Q} = \deg \mathrm{QT} - \deg \mathrm{T} = \deg(\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) - \mathrm{R}) - n \leq \max(\deg \mathrm{P}(\mathrm{X}^2), \deg \mathrm{R}) - n \leq 2n - n = n$$

Par conséquent, $\deg f(\mathrm{P}) = \deg(\mathrm{Q} + \mathrm{XR}) \leq \max(\deg \mathrm{Q}, \deg \mathrm{XR}) \leq n$. Ceci prouve que $f_n(\mathrm{P}) = f(\mathrm{P}) \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.
f_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.

3. **a.** On reprend à nouveau les mêmes notations.

- Si $\mathrm{P} = 1$, alors $\mathrm{Q} = 0$ et $\mathrm{R} = 1$. Ainsi $f_2(1) = \mathrm{X}$.
- Si $\mathrm{P} = \mathrm{X}$, alors $\mathrm{Q} = 1$ et $\mathrm{R} = 0$. Ainsi $f_2(\mathrm{X}) = 1$.
- Si $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2$, alors $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^2$ et $\mathrm{R} = 0$. Ainsi $f_2(\mathrm{X}^2) = \mathrm{X}^2$.

La matrice de f_2 dans la base $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ est donc $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_3$ donc $f_2^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_2[\mathrm{X}]}$. f_2 est bijective et $f_2^{-1} = f_2$. f_2 est une symétrie.
On a $\mathrm{A} - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(f_2 - \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_2[\mathrm{X}]}) = \mathrm{vect}(1 + \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$.
De même, $\mathrm{A} + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} + \mathrm{I}_3) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(f_2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_2[\mathrm{X}]}) = \mathrm{vect}(\mathrm{X} - 1)$.
f_2 est donc la symétrie par rapport à $\mathrm{vect}(1 + \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ parallèlement à $\mathrm{vect}(\mathrm{X} - 1)$.

Partie II – Etude d'un cas particulier

1. On emploie encore une fois les mêmes notations.

- Si $\mathrm{P} = 1$, alors $\mathrm{Q} = 0$ et $\mathrm{R} = 1$. On a donc $f_3(1) = \mathrm{X}$.
- Si $\mathrm{P} = \mathrm{X}$, alors $\mathrm{Q} = 0$ et $\mathrm{R} = \mathrm{X}^2$. On a donc $f_3(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3$.
- Si $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2$, alors $\mathrm{Q} = \mathrm{X} - 1$ et $\mathrm{R} = \mathrm{X}^2 - a\mathrm{X} + a$. On a donc $f_3(\mathrm{X}^2) = \mathrm{X}^3 - a\mathrm{X}^2 + (1 + a)\mathrm{X} - 1$.
- Si $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3$, alors $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - a - 1$ et $\mathrm{R} = (1 + 2a)\mathrm{X}^2 - a\mathrm{X} + a + a^2$. On a donc $f_3(\mathrm{X}^3) = (2a + 2)\mathrm{X}^3 + (-a - 1)\mathrm{X}^2 + (1 + a + a^2)\mathrm{X} - a - 1$.

La matrice de f_3 dans la base $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^3)$ est donc bien la matrice B.

2. On développe deux fois par rapport à la première colonne :

$$\det(f_3) = \det(\mathrm{B}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -a - 1 \\ 1 & 0 & a + 1 & 1 + a + a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a - 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a + 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & -a - 1 \\ 0 & -a & -a - 1 \\ 1 & 1 & 2a + 2 \end{vmatrix} = (a + 1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -a & 1 \end{vmatrix} = (a + 1)(a - 1)$$

3. f_3 n'est pas bijective *si et seulement si* $\det(f_3) = 0$ i.e. *si et seulement si* $a = \pm 1$.

4. **a.** Dans ce cas, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les trois premières colonnes sont linéairement indépendantes (famille échelonnée) et la dernière colonne est identique à la première. On en déduit que $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\operatorname{Im} B$ et que $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur de $\operatorname{Ker} B$. En utilisant le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} B = 1$ et $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\operatorname{Ker} B$.
On en déduit que $(X, X^3, X^3 + X^2 - 1)$ ou encore $(X, X^3, X^2 - 1)$ est une base de $\operatorname{Im} f_3$ et que $(X^3 - 1)$ est une base de $\operatorname{Ker} f_3$.

b. La matrice de la famille $\mathcal{F} = (X, X^3, X^2 - 1, X^3 - 1)$ (réunion des bases de $\operatorname{Im} f_3$ et $\operatorname{Ker} f_3$) dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En développant deux fois par rapport à la première colonne, on trouve que le déterminant de cette matrice est -1, donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{C}_3[X]$. Ceci prouve que $\mathbb{C}_3[X] = \operatorname{Im} f_3 \oplus \operatorname{Ker} f_3$.

Partie III – Etude du noyau

1. $\deg P(X^2) = 2 \deg P = 2p < n$. En employant toujours les mêmes notations, $Q = 0$ et $R = P(X^2)$. Ainsi $f(P) = Q + XR = XP(X^2)$. Comme P est non nul, $f(P)$ est également non nul.

2. Supposons $P \in \operatorname{Ker} f$. On a donc $Q = -XR$. Or $P(X^2) = QT + R$ donc $P(X^2) = (1 - XT)R$ et $\deg R < \deg T = n$ puisque R est le reste de la division euclidienne de $P(X^2)$ par T.
Réciproquement, supposons qu'il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg R < n$ et $P(X^2) = (1 - XT)R$ i.e. $P(X^2) = -XTR + R$. On en déduit que $-XR$ et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(X^2)$ par R. Alors $f(P) = -XR + XR = 0$.

3. Soit $P \in \operatorname{Ker} f$. Il existe donc $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg R < n$ et $P(X^2) = (1 - XT)R$. Ainsi $\deg P(X^2) = \deg(1 - XT) + \deg R$. Or $\deg(1 - XT) = \deg XT = n + 1$ donc $\deg P(X^2) < 2n + 1$ i.e. $\deg P(X^2) \leq 2n$. Ainsi $2 \deg P \leq 2n$ donc $\deg P \leq n$.

4. Soit $P \in \operatorname{Ker} f$. D'après la question **III.2**, il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2) = (1 - XT)R$ et $\deg R < n$. Posons $Q = X^k P$. Alors $Q(X^2) = X^{2k} P(X^2) = (1 - XT)X^{2k}R$. Or $\deg X^{2k}R = 2k + \deg R$ et $\deg R = \deg P(X^2) - \deg(1 - XT) = \deg P(X^2) - (n + 1)$ donc $\deg X^{2k}R = 2k + \deg P(X^2) - (n + 1) \leq 2n - (n + 1) = n - 1$. En utilisant maintenant l'autre sens de l'équivalence démontrée à la question **III.2**, on en déduit que $Q \in \operatorname{Ker} f$.

5. **a.** Comme $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, il existe un polynôme de degré entier naturel dans $\operatorname{Ker} f$. Ainsi I est non vide. Comme c'est une partie de $\mathbb{N}$, I admet un minimum.

b. Notons a_0 et a_1 les coefficients dominants respectifs de P_0 et P_1 (ceux-ci existent puisque P_0 et P_1 sont de degré $d \in \mathbb{N}$ donc non nuls). Alors $P_1 - \frac{a_1}{a_0} P_0$ appartient à $\operatorname{Ker} f$ et est de degré strictement inférieur à d. Par minimalité de d, on en déduit que $P_1 - \frac{a_1}{a_0} P_0 = 0$. En posant $c = \frac{a_1}{a_0}$, on a donc bien $P_1 = cP_0$.

c. Soit k un entiel naturel tel que $k \leq n - d$. Alors $\deg P_0 + k \leq n$ et, d'après la question **III.4**, $X^k P_0 \in \operatorname{Ker} f$. Comme $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel, on en déduit que pour tout $S \in \mathbb{C}_{n-d}[X]$, $SP_0 \in \operatorname{Ker} f$.
Réciproquement, soit $P \in \operatorname{Ker} f$.D'après **III.3**, $\deg P \leq n$. Soit S et U le quotient et le reste de la division euclidienne de P par P_0. On a en particulier $\deg U < d \leq n$ ($P_0 \in \operatorname{Ker} f$ donc $d = \deg P_0 \leq n$ d'après **III.3**). Comme $SP_0 = P - U$, $\deg S = \deg(P - U) - \deg P_0 \leq \max(\deg P, \deg U) - d \leq n - d$. D'après ce qui précède, $SP_0 \in \operatorname{Ker} f$. Ainsi $U = P - SP_0 \in \operatorname{Ker} f$. Or $\deg U < d$ donc, par minimalité de d, $U = 0$ et $P = SP_0$.

6. D'après **III.3**, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f_3$. Or on a vu à la question **II.4.a** que, dans ce cas, $\operatorname{Ker} f_3 = \operatorname{vect}(X^3 - 1)$.

Partie IV – Etude d'un produit scalaire

1. Il suffit de reprendre les questions **I.1** et **I.2** en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.
La matrice A est celle de la question **I.3.a** (on la considère tout simplement comme une matrice à coefficients réels et non complexes).

2. La symétrie est évidente.
La bilinéarité provient de la bilinéarité du produit de polynômes, de la linéarité de la dérivation et de la linéarité de l'évaluation en 1.
Pour tout $U \in \mathbb{R}_2[X]$, $\langle U, U\rangle = U(1)^2 + U'(1)^2 + U''(1)^2$ donc la forme bilinéaire est positive.
Soit $U \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\langle U, U\rangle = 0$. On a donc $U(1)^2 + U'(1)^2 + U''(1)^2 = 0$. Une somme de termes positifs étant nulle *si et seulement si* chacun des termes est nul, on en déduit $U(1) = U'(1) = U''(1) = 0$. Ainsi 1 est racine de U d'ordre au moins 3. Comme $\deg U \leq 2$, U est nécessairement nul.
$\langle ., .\rangle$ est donc une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive : c'est un produit scalaire.

3. On vérifie que ${}^t\!AA = I_3$ donc A est orthogonale.

4.
- **a.** On a $\langle 1, X\rangle = 1 \neq 0$ donc la base canonique $(1, X, X^2)$ n'est pas orthogonale donc encore moins orthonormale.
- **b.** Attention, la matrice de g dans la base canonique est orthogonale mais la base canonique n'est pas orthonormale : on n'en déduit surtout pas que g est une isométrie. En fait $\langle 1, 1\rangle = 1$ et $\langle g(1), g(1)\rangle = \langle X, X\rangle = 2$. g ne conserve donc pas le produit scalaire ; ce n'est pas une isométrie.