Groupes, anneaux, corps

Exercice 1.

Soit G un groupe. Notre but est de montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathsf{S}(\mathsf{G})$.

1. Pour cela considérons pour tout $g \in G$ l'application *translation à gauche par* g
$$\varphi_g : G \to G, h \mapsto gh.$$
Montrer que $\varphi_g \in S(G)$.
2. Montrer que $G \longrightarrow S(G), g \longmapsto \varphi_g$, est un morphisme injectif. Conclure.

Exercice 2.

Soient E un ensemble et $x \in E$. On pose

$$S(x) = \{\sigma \in \mathfrak{S}(E), \sigma(x) = x\}$$

Montrer que $S(x)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}(E)$.

Exercice 3.

Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On pose pour tous éléments (x, y) et (x', y') de G :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Vérifier que $*$ est une loi interne associative sur G.
2. Vérifier que $(G, *)$ est un groupe. Est-il commutatif ?
3. Donner une expression de $(x, y)^{*n}$.

Exercice 4.

Soit $G =]-1, 1[$. On pose pour tous éléments x et y de G :

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

1. Vérifier que $*$ est une loi interne associative sur G.
2. Vérifier que $(G, *)$ est un groupe. Est-il commutatif ?
3. Donner une expression de x^{*n}.

Exercice 5.

Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G.

1. Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G *si et seulement si* $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 6.✯

Soit G un groupe. Etant donné un élément a de G on définit l'application :

$$\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & axa^{-1} \end{array} \right.$$

1. Soit $a \in G$. Montrer que φ_a est un automorphisme de G.
2. On pose $\mathfrak{I}(G) = \{\varphi_a, a \in G\}$. Montrer que l'ensemble $\mathfrak{I}(G)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$.
3. Montrer que $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}(G) \\ a & \longmapsto & \varphi_a \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes.

Exercice 7.

Soit G un groupe. Montrer que $f : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array} \right.$ est un automorphisme de G *si et seulement si* G est commutatif.

Exercice 8.

Déterminer les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 9.

Soit G un groupe d'élément neutre e tel que $\forall x \in G$, $x^2 = e$. Montrer que G est commutatif.

Exercice 10.

Montrer que les endomorphismes de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ continus sont les homothéties i.e. les applications $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 11.

Soit $(G, .)$ un groupe. On définit le centre de G par

$$Z(G) = \{a \in G \mid \forall x \in G, ax = xa\}$$

i.e. l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

Exercice 12.

On munit $\mathbb{R}$ de la loi interne $*$ définié par : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a * b = a + b + ab$. $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ?

Exercice 13.

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On suppose G non trivial i.e. $G \neq \{0\}$.

1. Question préliminaire : soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n\alpha \leqslant \beta < (n+1)\alpha$.
2. Justifier que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ possède une borne inférieure que l'on notera a.
3. On suppose que $a > 0$.
   a. On suppose que $a \notin G$. Justifier l'existence de deux éléments distincts x et y de G appartenant à l'intervalle $]a, 2a[$.
   b. Aboutir à une contradiction et en déduire que $a \in G$.
   c. En déduire que $a\mathbb{Z} \subset G$.
   d. Soit $z \in G$. En utilisant la question **1**, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $z = na$.
   e. En déduire que $G = a\mathbb{Z}$.
4. On suppose que $a = 0$.
   a. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. En utilisant la question **1**, montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $|g - t| < \varepsilon$.
   b. En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14.

Soit G un groupe abélien fini d'ordre impair. Calculer le produit des éléments de G.

Exercice 15.

Soient $(G, *)$ un groupe et H un ensemble. On suppose qu'il existe une bijection f de G sur H. On définit la loi $.$ sur H de la manière suivante :

$$\forall (x, y) \in H^2, x.y = f\left(f^{-1}(x) * f^{-1}(y)\right)$$

Montrer que $(H, .)$ est un groupe.

Exercice 16.

Soient $(G, *)$ un groupe et $(H, .)$ un ensemble muni d'une loi interne. On suppose qu'il existe une surjection de G sur H vérifiant

$$\forall (x, y) \in G^2, f(x * y) = f(x).f(y)$$

Montrer que $(H, .)$ est un groupe. Que peut-on dire de f ?

Exercice 17.

Soit G un groupe. On définit une relation binaire $\sim$ sur G par

$$\forall (x, y) \in G^2, \ x \sim y \iff \exists g \in G, y = g^{-1}xg$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Exercice 18.

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. On définit une relation binaire $\sim$ sur G par

$$\forall (x, y) \in G^2, \ x \sim y \iff \exists h \in H, \ y = xh$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Exercice 19.

Dans cette exercice, on pourra identifier le plan à $\mathbb{C}$ via un repère orthonormé. On pourra en particulier identifier une transformation du plan à une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1. On note G l'ensemble des translations et des similitudes directes du plan. Montrer que G muni de la loi de composition est un groupe.
2. On note H l'ensemble des translations et des rotations du plan. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 20.

Montrer que l'ensemble des nombres décimaux

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{k}{10^n} \ : \ (k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$$

est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Est-ce aussi un sous-corps ?

Exercice 21.

Montrer que tout anneau commutatif intègre fini est un corps.

Exercice 22.

On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau commutatif.
2. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 23.

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Un élément a de A est dit nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$.

1. Soit $(x, y) \in A^2$. Montrer que si xy est nilpotent, alors yx est nilpotent.

2. Soit $(x, y) \in A^2$. Montrer que si x et y commutent et que l'un des deux est nilpotent, alors xy est nilpotent.

3. Soit $(x, y) \in A^2$. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors $x + y$ est nilpotent.

4. Soit $x \in A$. Montrer que si x est nilpotent, alors $1 - x$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 24.

Soit A un anneau tel que $\forall x \in A,\ x^2 = x$ (on dit que les éléments de A sont idempotents).

1. Montrer que $\forall x \in A,\ 2x = 0$.

2. Montrer que A est commutatif.

Exercice 25.★★

Soit f un endomorphisme de corps de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f_{|\mathbb{Q}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$.

2. Montrer que f est croissant.

3. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 26.

Soit E un ensemble non vide. Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on définit la différence de A et B par $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Préciser les éléments neutres pour Δ et $\cap$.

2. Quels sont les éléments de $\mathcal{P}(E)$ inversibles pour $\cap$?

3. L'anneau $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est-il intègre ?

Exercice 27.

On note $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ l'ensemble des réels de la forme $a + b\sqrt{3}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ est un corps.

Exercice 28.

Soit A un anneau intègre commutatif fini.

1. Soit a un élément non nul de A. Montrer que l'application ϕ : $\left\{\begin{array}{lcl} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & ax \end{array}\right.$ est bijective.

2. En déduire que A est un corps.