Devoir surveillé n°7 : corrigé

Problème 1 — Petites Mines 2003

Partie I –

1. Le noyau de D est le sous-espace vectoriel des applications de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$, c'est à-dire les applications constantes sur $\mathbb{R}$. Toute application de classe $\mathcal{C}^\infty$ admettant une primitive de classe $\mathcal{C}^\infty$, D est surjective et donc l'image de D est E.

2.
- ▶ En prenant $t=0$, on obtient $(1):\ a+c=0$.
- ▶ En prenant $t=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, on obtient $(2):\ ae^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}+be^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}=0$.
- ▶ En prenant $t=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, on obtient $(3):\ ae^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}-ce^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}=0$.

D'après (1) et (2), $a\left(e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}+e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}\right)=0$, puis $a=0$ puisque la somme d'exponentielles est strictement positive donc non nulle. D'après (1), on a alors $c=0$ et d'après (2), on a également $b=0$ puisque qu'une exponentielle est non nulle.

3. On a $e^t \underset{t\to0}{=} 1+t+\frac{1}{2}t^2+o(t^2)$.
On a également d'une part

$$e^{-\frac{t}{2}} \underset{t\to0}{=} 1-\frac{t}{2}+o(t)$$

et d'autre part :

$$\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{t\sqrt{3}}{2}+o(t^2)\underset{t\to0}{=}t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+o(t)\right)$$

d'où

$$e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\underset{t\to0}{=}t\left(1-\frac{t}{2}+o(t)\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+o(t)\right)\underset{t\to0}{=}\frac{t\sqrt{3}}{2}-\frac{t^2\sqrt{3}}{4}+o(t^2)$$

Enfin, on a d'une part :

$$e^{-\frac{t}{2}}\underset{t\to0}{=}1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{8}+o(t^2)$$

et d'autre part :

$$\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\underset{t\to0}{=}1-\frac{3t^2}{8}+o(t^2)$$

On en déduit

$$e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\underset{t\to0}{=}\left(1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{8}+o(t^2)\right)\left(1-\frac{3t^2}{8}+o(t^2)\right)\underset{t\to0}{=}1-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{4}+o(t^2)$$

Par conséquent,

$$af_1(t)+bf_2(t)=+cf_3(t)\underset{t\to0}{=}a+c+\left(a+\frac{b\sqrt{3}}{2}-\frac{c}{2}\right)t+\left(\frac{a}{2}-\frac{b\sqrt{3}}{4}-\frac{c}{4}\right)t^2+o(t^2)$$

Par unicité du développement limité, on a :

$$\begin{cases}a+c=0\\ a+\frac{b\sqrt{3}}{2}-\frac{c}{2}=0\\ \frac{a}{2}-\frac{b\sqrt{3}}{4}-\frac{c}{4}=0\end{cases}$$

On en déduit à nouveau $a=b=c=0$.

4. Supposons $a \neq 0$. Alors $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} ae^t$. D'où $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, ce qui est impossible puisque $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit $a = 0$.
Par conséquent, $b \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + c \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En choisissant $t = 0$, on obtient $c = 0$. Et enfin, $b = 0$ en prenant pour t une valeur n'annulant pas $\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$.

5. On a $D(f_1) = f_1$, $D(f_2) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$ et $D(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3$. Ainsi $D(f_1)$, $D(f_2)$ et $D(f_3)$ sont des vecteurs de G. Comme la famille (f_1, f_2, f_3) engendre G, on a $D(G) \subset G$.

6. Comme $D(f_1) = f_1$, il est clair que $D^3(f_1) = f_1$.
De plus,
$$D(f_2) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$$
donc
$$D^2(f_2) = -\frac{1}{2}D(f_2) + \frac{\sqrt{3}}{2}D(f_3) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3\right) = -\frac{1}{2}f_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$$
puis
$$D^3(f_2) = -\frac{1}{2}D(f_2) - \frac{\sqrt{3}}{2}D(f_3) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3\right) = f_2$$
De même,
$$D(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3$$
donc
$$D^2(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}D(f_2) - \frac{1}{2}D(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3$$
puis
$$D^3(f_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}D(f_2) - \frac{1}{2}D(f_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3\right) = f_3$$
Ainsi les endomorphismes $\widehat{D}^3$ et Id_G coïncident sur une base de G, d'où $\widehat{D}^3 = \mathrm{Id}_G$.

7. Comme $\widehat{D} \circ \widehat{D}^2 = \widehat{D}^2 \circ \widehat{D} = \mathrm{Id}_G$, $\widehat{D}$ est inversible d'inverse $\widehat{D}^{-1} = \widehat{D}^2$.

Partie II –

1. On sait que f est trois fois dérivable. Soit $n \geqslant 3$ et supposons f n fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $f''' = f$, f''' est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est $n+3$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$. A fortiori, elle est $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On conclut par récurrence que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. On a vu précédemment que $\widehat{D}^3 = \mathrm{Id}_G$ ce qui signifie que la restriction de T à G est nulle i.e. $G \subset \operatorname{Ker} T$.

3. On a $g' = f''' + f'' + f' = f + f'' + f' = g$. Ainsi g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.

4. Les solutions de l'équation $y' - y = 0$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^t$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ est $X^2 + X + 1 = 0$. Ses solutions sont j et $\bar{j}$. On en déduit que l'ensemble des solutions réelles sont les fonctions de la forme :
$$t \mapsto \left(A \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + B \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right) e^{-\frac{t}{2}}$$
où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ c'est-à-dire les fonctions du type $Af_2 + Bf_3$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Autrement dit l'ensemble des solutions réelles de $y'' + y' + y = 0$ est $\operatorname{vect}(f_2, f_3)$.
On a vu que (f_1, f_2, f_3) était libre donc (f_2, f_3) est aussi libre. Par conséquent, (f_2, f_3) est une base de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$.

6. Une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$ est $t \mapsto \frac{\lambda}{3}e^t$. Les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$ sont donc les fonctions :

$$\frac{\lambda}{3}f_1 + Af_2 + Bf_3$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

7. Soit $f \in \operatorname{Ker} T$ i.e. f une solution de $(\mathcal{E})$. En posant $g = f'' + f' + f$, on a montré en **II.3** que g vérifiait l'équation différentielle $y' - y = 0$. Ceci prouve qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda f_1$ (cf. **II.4**). f est alors solution de $y'' + y' + y = \lambda f_1$ dont on a vu en **II.6** que les solutions étaient de la forme $\frac{\lambda}{3}f_1 + Af_2 + Bf_3$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Donc $f \in \operatorname{vect}(f_1, f_2, f_3) = G$. On a donc prouvé que $\operatorname{Ker} T \subset G$.
Or $G \subset \operatorname{Ker} T$ d'après **II.2** donc $\operatorname{Ker} T = G$ par double inclusion. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est exactement G.

Solution 1.

1. **a.** L'application f^{n-1} n'étant pas constamment nulle, il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

b. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x) = 0$$

On montre alors que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ par récurrence.
Initialisation : En composant par f^{n-1}, on obtient

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^{n-1+i}(x) = 0_E$$

Or pour $i \geqslant 1$, $n - 1 + i \geqslant n$ donc $f^{n-1+i}(x) = 0$. On en déduit que $\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0$. Comme $f^{n-1}(x) \neq 0$, $\lambda_0 = 0$.
Hérédité : Supposons qu'il existe $k \in [\![0, n-2]\!]$ tel que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, k]\!]$. On a alors

$$\sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i f^i(x) = 0$$

En composant par f^{n-k-2}, on obtient ensuite

$$\sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i f^{n-k-2+i}(x) = 0$$

Or pour $i \geqslant k + 2$, $n - k - 2 + i \geqslant n$ donc $\lambda_i = 0$. Il reste finalement $\lambda_{k+1} f^{n-1}(x) = 0$ puis $\lambda_{k+1} = 0$ puisque $f^{n-1}(x) \neq 0$.
Conclusion : Par récurrence, $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.
Par conséquent, la famille $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$ est libre. Puisqu'elle comporte n éléments et que $n = \dim E$, c'est une base de E.

2. **a.** La famille $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f^{n-k}(x))$ est une sous-famille de la famille libre $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$. Elle est donc également libre. On en déduit $\dim F_k = k$.

b. Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $f^k(f^{n-i}(x)) = f^{n+k-i}(x) = 0$ car $n + k - i \geqslant n$ et donc $f^{n-i}(x) \in \operatorname{Ker} f^k$. Comme $(f^{n-i}(x))_{1 \leqslant i \leqslant k}$ engendre F_k, $F_k \subset \operatorname{Ker} f^k$. Donc $\dim \operatorname{Ker} f^k \geqslant \dim F_k = k$.
Pour $1 \leqslant i \leqslant n - k$, $f^{n-i}(x) \in \operatorname{Im} f^k$ car $n - i \geqslant k$. Comme $(f^{n-i}(x))_{1 \leqslant i \leqslant n-k}$ engendre F_{n-k}, $F_{n-k} \subset \operatorname{Im} f^k$. D'où $\dim \operatorname{Im} f^k \geqslant \dim F_{n-k} = n - k$. Par le théorème du rang, on a donc $\dim \operatorname{Ker} f^k = n - \dim \operatorname{Im} f^k \leqslant k$. On en déduit que $\dim \operatorname{Ker} f^k = k = \dim F_k$ et, comme $F_k \subset \operatorname{Ker} f^k$, $F_k = \operatorname{Ker} f^k$.
Quitte à remplacer k par $n - k$, on a également $F_k \subset \operatorname{Im} f^{n-k}$. Et comme $f^k \circ f^{n-k} = \mathbf{0}$, on a aussi $\operatorname{Im} f^{n-k} \subset \operatorname{Ker} f^k$. On en déduit que $F_k = \operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Im} f^{n-k}$.

c. On a $F_k = \operatorname{Im} f^{n-k}$ d'après la question précédente. Donc $f(F_k) = \operatorname{Im} f^{n-k+1} \subset \operatorname{Im} f^{n-k} = F_k$. F_k est donc stable par f.

3. **a.** On considère $A = \{k \in \mathbb{N}^* \mid \tilde{f}^k = \tilde{\mathbf{0}}\}$. A est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ puisque $n \in A$. Elle admet donc un plus petit élément $p \geqslant 1$. Si $p = 1$, alors $p - 1 = 0$ mais $\tilde{f}^{p-1} = \operatorname{Id}_F \neq \tilde{\mathbf{0}}$ car $F \neq \{0_E\}$. Si $p \geqslant 2$, alors $p - 1 \in \mathbb{N}^*$ et on ne peut avoir $\tilde{f}^{p-1} = \tilde{\mathbf{0}}$ sinon $p - 1 \in A$, ce qui contredit la minimalité de p. On a donc dans tous les cas $\tilde{f}^{p-1} \neq \tilde{\mathbf{0}}$ et $\tilde{f}^p = \tilde{\mathbf{0}}$.

b. On prouve comme à la question **1.b** que la famille $(y, \tilde{f}(y), \dots, \tilde{f}^{p-1}(y))$ est libre. Comme $k = \dim F$ et que la famille précédente est de cardinal p, on en déduit $p \leqslant k$. Ainsi $\tilde{f}^k = \tilde{\mathbf{0}}$.

c. La question précédente prouve que $F \subset \operatorname{Ker} f^k$. Or on a vu à la question **2.b** que $\dim \operatorname{Ker} f^k = k$. Comme $\dim F = k$, on a donc $F = \operatorname{Ker} f^k$.

d. On vient de voir que tous les sous-espaces stables de dimension k avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$ était de la forme $\operatorname{Ker} f^k$. Réciproquement, on a vu à la question **2** que les sous-espaces $\operatorname{Ker} f^k$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$ étaient stables par f. Il reste à remarquer que le seul sous-espace de dimension 0 i.e. le sous-espace nul et que le seul sous-espace de dimension n i.e. E tout entier sont évidemment stables par f. Enfin, comme $f^0 = \operatorname{Id}_E$ et $f^n = \mathbf{0}$, on a $\{0\} = \operatorname{Ker} f^0$ et $E = \operatorname{Ker} f^n$.
Les sous-espaces stables par f sont donc exactement les sous-espaces $\operatorname{Ker} f^k$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

4. **a.** La famille $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$ étant une base de E, il existe un unique n-uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ de réels tel que :

$$g(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x)$$

Ce sont les coordonnées de $g(x)$ dans la base $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$.

b. Si g commute avec f, g commute avec f^i pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Par conséquent,

$$g\left(f^i(x)\right) = f^i(g(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^{k+i}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k\right)\left(f^i(x)\right)$$

On en déduit que les endomorphismes g et $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$ coïncident sur la base $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$. Ceci prouve que

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = \alpha_0 \operatorname{Id}_E + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$$

c. Notons $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par la famille $(\operatorname{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ et $\mathcal{C}'$ l'ensemble des endomorphismes commutant avec f. La question précédente montre que $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$. Mais comme toute puissance de f commute avec f, il est clair que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$. Ainsi $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$. Comme la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$ est une famille libre de E, a fortiori la famille $(\operatorname{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$. On en déduit que $\dim \mathcal{C} = n$.