Devoir à la maison n°05

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Solution 1

1. Soit $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|x\|_p = 0$. Alors $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = 0$. Mais comme tous les termes de cette somme sont positifs, ils sont nuls et x est également nul.
Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n$. Alors

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda|^p |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|x\|_p$$

2. **a.** Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$. L'inégalité est clairement vraie si l'un des deux réels u et v est nul. Supposons donc $u > 0$ et $v > 0$. Par concavité du logarithme

$$\ln\left(\frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(u^p) + \frac{1}{q}\ln(v^q) = \ln(u) + \ln(v) = \ln(uv)$$

On en déduit l'inégalité demandée par croissance de l'exponentielle.

b. Soit $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$. Supposons d'abord $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$|x_k y_k| = |x_k||y_k| \leq \frac{|x_k|^p}{p} + \frac{|y_k|^q}{q}$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\|x.y\|_1 \leq \frac{\|x\|_p^p}{p} + \frac{\|y\|_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Revenons maintenant au cas général : x et y sont donc quelconques. Remarquons que l'inégalité demandée est vraie si l'un des vecteurs x et y est nul. Supposons donc x et y non nuls. Alors $\|x\|_p \neq 0$ et $\|y\|_q \neq 0$ par propriété de séparation. Posons alors $x' = \frac{x}{\|x\|_p}$ et $y' = \frac{y}{\|y\|_q}$. Par homogénéité, $\|x'\|_p = \|y'\|_q = 1$. D'après ce qui précède, $\|x'.y'\|_1 \leq 1$. Mais il est clair que $x'.y' = \dfrac{x.y}{\|x\|_p\|x\|_q}$ et par homogénéité de $\|.\|_1$, $\|x'.y'\|_1 = \dfrac{\|x.y\|_1}{\|x\|_p\|x\|_q}$ d'où l'inégalité demandée.

3. C'est du cours lorsque $p = 1$. Supposons donc $p > 1$. Soit $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$. Posons $q = \frac{p}{p-1}$ de sorte que $q > 0$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k + y_k|^{p-1}$$

D'après la question **2.b**,

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k + y_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k + y_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

En tenant compte du fait que $(p-1)q = p$ et $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$, ces deux inégalités peuvent également s'écrire

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k + y_k|^{p-1} \leq \|x\|_p \|x+y\|_p^{p-1}$$
$$\sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k + y_k|^{p-1} \leq \|y\|_p \|x+y\|_p^{p-1}$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient

$$\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x+y\|_p^{p-1}$$

Si $\|x+y\|_p = 0$, alors on a clairement $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. Sinon, il suffit de diviser l'inégalité précédente par $\|x+y\|_p^{p-1}$ pour aboutir au même résultat.

4. **a.** Soit $x \in \mathbb{K}^n$. Alors on a clairement

$$\|x\|_\infty^p \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = \|x\|_p^p$$

On en déduit que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$.

b. Soit $x \in \mathbb{K}^n$.

$$\|x\|_q^q = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^q \leq \|x\|_\infty^{q-p} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = \|x\|_\infty^{q-p} \|x\|_p^p$$

D'après la question **4.a**, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$ donc $\|x\|_q^q \leq \|x\|_p^q$ puis $\|x\|_q \leq \|x\|_p$.
Posons $\mathrm{M} = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|x\|_q}{\|x\|_p}$. L'inégalité précédente montre que $\mathrm{M} \leq 1$. De plus, cette inégalité est une égalité lorsque x est un vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ donc $\mathrm{M} = 1$ et cette borne supérieure est atteinte.

5. **a.** Posons $p' = \frac{p}{r}$ et $q' = \frac{q}{r}$ de sorte que $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}$. D'après la question **2.b**

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k|^r \leq \left(\sum_{k=1} |x_k|^{rp'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1} |y_k|^{rq'}\right)^{\frac{1}{q'}}$$

Puisque $rp' = p$ et $rq' = q$, on obtient l'inégalité demandée en élevant la dernière inégalité à la puissance $\frac{1}{r}$.

b. Puisque $p < q$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ i.e. $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}$.
Soit $x \in \mathbb{K}^n$ et $y = (1, \dots, 1)$. D'après la question précédente,

$$\|x.y\|_p \leq \|x\|_q \|y\|_r$$

Ce qui s'écrit encore

$$\|x\|_p \leq \|x\|_q n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$$

Posons $\mathrm{M} = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|x\|_p}{\|x\|_q}$. L'inégalité précédente montre que $\mathrm{M} \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$. De plus, cette inégalité est une égalité lorsque $|x_k| = 1$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ donc $\mathrm{M} = n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$ et cette borne supérieure est atteinte.

6. On a vu à la question **4.a** que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$.
De plus,

$$\|x\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \leq n \|x\|_\infty^p$$

donc $\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}}$. Finalement

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$$

Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Solution 2

1. Soit $f \in \mathrm{E}$ tel que $\|f\|_p = 0$. Alors $\displaystyle\int_a^b |f(t)|^p \, \mathrm{d}t = 0$. Mais comme $|f|^p$ est continue est positive sur $[a, b]$, elle est nulle sur $[a, b]$ de même que f.
Soit $(\lambda, f) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E}$. Alors

$$\|\lambda f\|_p = \left(\int_a^b |\lambda f(t)|^p \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b |\lambda|^p |f(t)| \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p$$

2. **a.** Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$. L'inégalité est clairement vraie si l'un des deux réels u et v est nul. Supposons donc $u > 0$ et $v > 0$. Par concavité du logarithme

$$\ln\left(\frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(u^p) + \frac{1}{q}\ln(v^q) = \ln(u) + \ln(v) = \ln(uv)$$

On en déduit l'inégalité demandée par croissance de l'exponentielle.

b. Soit $(f, g) \in \mathrm{E}^2$. Supposons d'abord $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. D'après la question précédente, pour tout $t \in [a, b]$,

$$|f(t)g(t)| = |f(t)||g(t)| \leq \frac{|f(t)|^p}{p} + \frac{|g(t)|^q}{q}$$

En intégrant sur $[a, b]$, on obtient

$$\|fg\|_1 \leq \frac{\|f\|_p^p}{p} + \frac{\|g\|_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Revenons maintenant au cas général : f et g sont donc quelconques. Remarquons que l'inégalité demandée est vraie si l'une des deux fonctions f et g est nulle. Supposons donc f et g non nulles. Alors $\|f\|_p \neq 0$ et $\|g\|_q \neq 0$ par propriété de séparation. Posons alors $\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|_p}$ et $\tilde{g} = \frac{f}{\|f\|_q}$. Par homogénéité, $\|\tilde{f}\|_p = \|\tilde{g}\|_q = 1$. D'après ce qui précède, $\|\tilde{f}\tilde{g}\|_1 \leq 1$. Mais il est clair que $\tilde{f}\tilde{g} = \dfrac{fg}{\|f\|_p\|g\|_q}$ et par homogénéité de $\|.\|_1$, $\|\tilde{f}\tilde{g}\|_1 = \dfrac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q}$ d'où l'inégalité demandée.

3. C'est du cours lorsque $p = 1$. Supposons donc $p > 1$. Soit $(f, g) \in \mathrm{E}^2$. Posons $q = \frac{p}{p-1}$ de sorte que $q > 0$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\|f + g\|_p^p = \int_a^b |f(t) + g(t)|^p \, \mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)||f(t) + g(t)|^{p-1} + \int_a^b |g(t)||f(t) + g(t)|^{p-1}$$

D'après la question **2.b**,

$$\int_a^b |f(t)||f(t) + g(t)|^{p-1} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\int_a^b |g(t)||f(t) + g(t)|^{p-1} \leq \left(\int_a^b |g(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

En tenant compte du fait que $(p - 1)q = p$ et $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$, ces deux inégalités peuvent également s'écrire

$$\int_a^b |f(t)||f(t) + g(t)|^{p-1} \leq \|f\|_p + \|f + g\|_p^{p-1}$$
$$\int_a^b |g(t)||f(t) + g(t)|^{p-1} \leq \|g\|_p + \|f + g\|_p^{p-1}$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\|x + y\|_p^{p-1}$$

Si $\|f + g\|_p = 0$, alors on a clairement $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. Sinon, il suffit de diviser l'inégalité précédente par $\|f + g\|_p^{p-1}$ pour aboutir au même résultat.

4. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\|f_n\|_p^p = \int_a^{a+\frac{b-a}{n}} \left(1 - n\frac{t-a}{b-a}\right)^p \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{b-a}{n}} \left(1 - \frac{nt}{b-a}\right)^p \,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{n}\int_0^1 (1-t)^p \,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{n(p+1)}$$

Ainsi $\|f_n\|_p = \left(\frac{b-a}{n(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\|f_n\|_q}{\|f_n\|_p} = \left(\frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{(p+1)^{\frac{1}{p}}}{(q+1)^{\frac{1}{q}}}$$

Or $p < q$ donc $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\|f_n\|_q}{\|f_n\|_p} = +\infty$. Par conséquent, $\sup_{f\in \mathrm{E}\setminus\{0\}} \frac{\|f\|_q}{\|f\|_p} = +\infty$.

5. **a.** Posons $p' = \frac{p}{r}$ et $q' = \frac{q}{r}$ de sorte que $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}$. D'après la question **2.b**

$$\int_a^b |f(t)|^r|g(t)|^r \,\mathrm{d}t \leq \left(\int_a^b |f(t)|^{rp'} \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_a^b |g(t)|^{rq'} \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q'}}$$

Puisque $rp' = p$ et $rq' = q$, on obtient l'inégalité demandée en élevant la dernière inégalité à la puissance $\frac{1}{r}$.

b. Puisque $p < q$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ i.e. $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}$.
Soit $f \in \mathrm{E}$ et g la fonction constante égale à 1 sur $[a, b]$. D'après la question précédente,

$$\|fg\|_p \leq \|f\|_q\|g\|_r$$

Ce qui s'écrit encore

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q(b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

Posons $\mathrm{M} = \sup_{f\in \mathrm{E}\setminus\{0\}} \frac{\|f\|_p}{\|f\|_q}$. L'inégalité précédente montre que $\mathrm{M} \leq (b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$. De plus, cette inégalité est une égalité lorsque f est constante égale à 1 sur $[a, b]$ donc $\mathrm{M} = (b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ et cette borne supérieure est atteinte.

6. Soit $f \in \mathrm{E}$ et posons $\mathrm{M} = \|f\|_\infty$. Fixons $\varepsilon \in]0, 2\mathrm{M}]$.
Pour tout $t \in [a, b]$, $|f(t)|^p \leq \mathrm{M}^p$ d'où $\|f\|_p \leq (b-a)^{\frac{1}{p}}\mathrm{M}$ pour tout $t \in [a, b]$ par croissance de l'intégrale. Puisque $\lim_{p\to+\infty}(b-a)^{\frac{1}{p}}\mathrm{M} = \mathrm{M}$, il existe $p_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(b-a)^{\frac{1}{p}}\mathrm{M} \leq \mathrm{M}+\varepsilon$ pour tout $p \geq p_1$. A fortiori, $\|f\|_p \leq \mathrm{M}+\varepsilon$ pour tout $p \geq p_1$.
Puisque $|f|$ est continue sur $[a, b]$, elle y atteint sa borne supérieure. Il existe donc $c \in [a, b]$ tel que $|f(c)| = \mathrm{M}$. Supposons $c \in]a, b[$. Par continuité de $|f|$ en c, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|f(t)| \geq \mathrm{M} - \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $t \in [c-\alpha, c+\alpha]$. Puisque $\mathrm{M} - \frac{\varepsilon}{2} \geq 0$, on peut affirmer que $|f(t)|^p \geq \left(\mathrm{M} - \frac{\varepsilon}{2}\right)^p$ pour tout $t \in [c-\alpha, c+\alpha]$. Or $|f|^p$ est positive sur $[a, b]$ donc

$$\int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t \geq \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} \left(\mathrm{M} - \frac{\varepsilon}{2}\right)^p = 2\alpha(\mathrm{M}-\varepsilon)^p$$

Ainsi $\|f\|_p \geq (2\alpha)^{\frac{1}{p}}\left(\mathrm{M} - \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Puisque $\lim_{p\to+\infty}(2\alpha)^{\frac{1}{p}}\left(\mathrm{M} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \mathrm{M} - \frac{\varepsilon}{2}$. Il existe $p_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(2\alpha)^{\frac{1}{p}}(\mathrm{M}-\varepsilon) \geq \mathrm{M} - \varepsilon$ pour tout $p \geq p_2$. Un raisonnement similaire permet d'aboutir au même résultat lorsque $c = a$ ou $c = b$.
Finalement, $\mathrm{M} - \varepsilon \leq \|f\|_p \leq \mathrm{M} + \varepsilon$ pour tout $p \geq \max(p_1, p_2)$, ce qui assure que $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \mathrm{M} = \|f\|_\infty$.