

# Devoir à la maison n°13 : corrigé

## SOLUTION 1.

1. a. On a évidemment  $[(1-X) + X]^{2n-1} = 1$ . En développant le membre de gauche à l'aide de la formule du binôme de Newton, on obtient

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{2n-1-k} = 1$$

En séparant la somme en deux parties, on a également

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{2n-1-k} + \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{2n-1-k} = 1$$

ou encore

$$(1-X)^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k} + X^n \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^{k-n} (1-X)^{2n-1-k} = 1$$

Il suffit donc de poser

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k} \quad G_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^{k-n} (1-X)^{2n-1-k}$$

$F_n$  et  $G_n$  ainsi définis sont des combinaisons linéaires de polynômes de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  donc des polynômes de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

- b. Soit  $(F, G)$  un couple de polynômes de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  vérifiant

$$(1-X)^n F + X^n G = 1$$

Alors

$$(1-X)^n (F - F_n) + X^n (G - G_n) = 0$$

Ainsi  $X^n$  divise  $F - F_n$ . Or  $\deg(F - F_n) \leq n-1$  donc  $F = F_n$ . De même,  $(1-X)^n$  divise  $G - G_n$  mais  $\deg(G - G_n) \leq n-1$  donc  $G = G_n$ .

2. a. En substituant  $1-X$  à  $X$  dans l'égalité  $(1-X)^n F_n(X) + X^n G_n(X) = 1$ , on obtient

$$(1-X)^n G_n(1-X) + X^n F_n(1-X) = 1$$

Mais l'unicité des polynômes  $F_n$  et  $G_n$  prouvée à la question 1.b montre que  $F_n(1-X) = G_n(X)$  et que  $G_n(1-X) = F_n(X)$ .

- b. En évaluant l'égalité  $(1-X)^n F_n(X) + X^n G_n(X) = 1$  en 0, on obtient  $F_n(0) = 1$ . En évaluant cette même égalité en  $\frac{1}{2}$ , on obtient

$$\frac{1}{2^n} F_n\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^n} G_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Or  $G_n\left(\frac{1}{2}\right) = F_n\left(1 - \frac{1}{2}\right) = F_n\left(\frac{1}{2}\right)$  d'après la question 2.a. Ainsi  $F_n\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{n-1}$ .

Enfin, on a prouvé à la question 1.a que

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k}$$

Ainsi  $F_n(1) = \binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n}$ .

3. a. Pour  $x \neq 1$ ,

$$F_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n} - \frac{x^n G_n(x)}{(1-x)^n} = \frac{1}{(1-x)^n} - x^{n-1} \frac{x G_n(x)}{(1-x)^n}$$

Or  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x G_n(x)}{(1-x)^n} = 0$  car  $G_n$  est continue en 0. Il s'ensuit donc que

$$F_n(x) = (1-x)^{-n} + o(x^{n-1})$$

b. Le développement limité de  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  en 0 est usuel.

$$\begin{aligned}
 (1-x)^{-n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (-n-j)}{k!} (-x)^k + o(x^{n-1}) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \prod_{j=0}^{k-1} (n+j)}{k!} (-x)^k + o(x^{n-1}) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (n+j)}{k!} x^k + o(x^{n-1}) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} x^k + o(x^{n-1}) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} x^k + o(x^{n-1})
 \end{aligned}$$

Puisque  $\deg F_n \leq n-1$ , on a par unicité du développement limité, on a pour  $x$  au voisinage de 0

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

Comme tout voisinage de 0 est infini

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} X^k$$

4. a. **Première méthode :** En dérivant la relation  $(1-X)^n + X^n G_n = 1$ , on obtient

$$-n(1-X)^{n-1} F_n + (1-X)^n F'_n + nX^{n-1} G_n + X^n G'_n = 0$$

ou encore

$$(1-X)^{n-1} (nF_n - (1-X)F'_n) = X^{n-1} (nG_n + F'_n)$$

Comme  $X^{n-1}$  et  $(1-X)^{n-1}$  sont premiers entre eux,  $X^{n-1}$  divise  $nF_n - (1-X)F'_n$ . De plus,

$$\deg(nF_n - (1-X)F'_n) \leq n-1$$

donc il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $nF_n - (1-X)F'_n = kX^{n-1}$ . En évaluant cette égalité en 1, on obtient  $k = nF_n(1) = n\binom{2n-1}{n}$ .

**Seconde méthode :** D'après 3.b,  $F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} X^k$ . Ainsi

$$\begin{aligned}
 nF_n - (1-X)F'_n &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} X^k - (1-X) \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n+k-1}{k} X^{k-1} \\
 &= n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} X^k - \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n+k-1}{k} X^{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n+k-1}{k} X^k \\
 &= n + \sum_{k=1}^{n-1} (n+k) \binom{n+k-1}{k} X^k - \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n+k-1}{k} X^{k-1} \\
 &= n + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \binom{n+k}{k+1} X^k - \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \binom{n+k}{k+1} X^k \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n+k}{k+1} X^k - \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \binom{n+k}{k+1} X^k \\
 &= n \binom{2n-1}{n} X^{n-1}
 \end{aligned}$$

- b. Le polynôme  $X^{n-1}(1-X)^{n-1}$  admet évidemment une primitive  $P_n \in \mathbb{R}[X]$ . Alors, en posant  $H_n = P_n - P_n(0)$ , on a bien  $H'_n = X^{n-1}(1-X)^{n-1}$  et  $H_n(0) = 0$ .  
Si  $K_n \in \mathbb{R}[X]$  vérifie  $K'_n = X^{n-1}(1-X)^{n-1}$  et  $K_n(0) = 0$  alors  $K'_n = H'_n$  donc  $H_n$  et  $K_n$  sont égaux à une constante additive près. Puisque  $H_n(0) = K_n(0)$ ,  $H_n$  et  $K_n$  sont égaux. On en déduit l'unicité de  $H_n$ .
- c. En utilisant la question 4.a,

$$\begin{aligned} ((1-X)^n F_n)' &= -n(1-X)^{n-1} F_n + (1-X)^n F'_n \\ &= -(1-X)^{n-1} (nF_n - (1-X)F'_n) \\ &= -n \binom{2n-1}{n} (1-X)^{n-1} X^{n-1} \\ &= -n \binom{2n-1}{n} H'_n = \left( 1 - n \binom{2n-1}{n} H_n \right)' \end{aligned}$$

Les polynômes  $(1-X)^n F_n$  et  $1 - n \binom{2n-1}{n} H_n$  sont donc égaux à une constante additive près. Par ailleurs, puisque  $F_n(0) = 1$  et  $H_n(0) = 0$ , ces deux polynômes coïncident en 0 : ils sont donc égaux.

5. a. Puisque  $(1-X)^n F_n = 1 - n \binom{2n-1}{n} H_n$ , on obtient  $H_n(1) = \frac{1}{n \binom{2n-1}{n}}$ .
- b. Rappelons que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $H'_n(x) = x^{n-1}(1-x)^{n-1}$ .
- Si  $n$  est impair,  $H'_n$  est positive sur  $\mathbb{R}$  et ne s'annule qu'en 0 et 1.  $H_n$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . De plus,  $\deg H_n = 2n-1 \geq 1$  donc les limites de  $H_n$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  sont infinies. Les variations de  $H_n$  imposent  $\lim_{-\infty} H_n = -\infty$  et  $\lim_{+\infty} H_n = +\infty$ .
  - Si  $n$  est pair,  $H'_n$  est négative sur  $]-\infty, 0]$ , positive sur  $[0, 1]$ , négative sur  $[1, +\infty[$  et ne s'annule qu'en 0 et 1. Ainsi  $H_n$  est strictement décroissante sur  $]-\infty, 0]$ , strictement croissante sur  $[0, 1]$  et strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$ . Pour les mêmes raisons que précédemment, les limites de  $H_n$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  sont infinies et les variations de  $H_n$  imposent  $\lim_{-\infty} H_n = +\infty$  et  $\lim_{+\infty} H_n = -\infty$ .
- c. Puisque  $(1-X)^n F_n = 1 - n \binom{2n-1}{n} H_n$  et que  $F_n(1) \neq 0$ , les racines réelles de  $F_n$  sont exactement les antécédents distincts de 1 de  $\frac{1}{n \binom{2n-1}{n}}$  par  $H_n$ .
- Si  $n$  est impair, les variations et la continuité de  $H_n$  montrent que  $\frac{1}{n \binom{2n-1}{n}}$  admet un unique antécédent par  $H_n$ . Puisque  $H_n(1) = \frac{1}{n \binom{2n-1}{n}}$ , 1 est l'unique antécédent de  $\frac{1}{n \binom{2n-1}{n}}$  par  $H_n$ . Mais celui-ci est à exclure puisque  $F_n(1) \neq 0$ . Ainsi  $F_n$  n'admet pas de racine réelle.
  - Si  $n$  est pair, les variations et la continuité de  $H_n$  montrent que  $\frac{1}{n \binom{2n-1}{n}}$  admet un unique antécédent par  $H_n$  sur  $]-\infty, 0]$ . Puisque  $H_n(1) = \frac{1}{n \binom{2n-1}{n}}$ , les variations de  $H_n$  montrent que le seul autre antécédent de  $\frac{1}{n \binom{2n-1}{n}}$  par  $H_n$  est 1. Mais celui-ci est à exclure puisque  $F_n(1) \neq 0$ . Ainsi  $F_n$  admet une unique racine réelle et on peut même préciser que celle-ci est strictement négative.