Bases orthonormales

Exercice 1 ★★ Produit mixte et produit vectoriel

Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 1$.

1. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E. Montrer que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.
2. En déduire que $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.
3. Soient $x_1, \dots, x_{n-1}$ $n-1$ vecteurs de E. Montrer que l'application
$$x \in \mathrm{E} \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$$
est une forme linéaire sur E.
4. En déduire qu'il existe un unique vecteur $u \in \mathrm{E}$ tel que
$$\forall x \in \mathrm{E},\ \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \langle u, x \rangle$$
On appelle u le produit vectoriel des vecteur $x_1, \dots, x_{n-1}$ et on note
$$u = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$$
5. Montrer que l'application
$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathrm{E}^{n-1} \mapsto x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$$
est une application $n-1$-linéaire alternée.

Exercice 2 ★★★

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $\langle ., . \rangle$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2,\ \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)\mathrm{Q}^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. Donner sans calcul une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Exercice 3 ★★★

Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs non nuls de E tels que
$$\forall x \in \mathrm{E},\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$$

1. Montrer que
$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle \langle y | e_i \rangle.$$
2. En déduire que
$$\forall x \in \mathrm{E},\ \ x = \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle e_i.$$
3. Etablir que $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 4 ★★ Formule de Parseval

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormale totale d'un espace préhilbertien réel E. Montrer que
$$\forall x \in \mathrm{E},\ \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle^2$$

Sous-espaces orthogonaux

Exercice 5 ★★

Montrer que $s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}^\mathsf{T} \end{array} \right.$ est une symétrie orthogonale pour le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire défini par $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{B})$ pour $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6 ★★

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E.

1. Montrer que $\mathrm{F} \subset \mathrm{G} \implies \mathrm{G}^\perp \subset \mathrm{F}^\perp$ et que, si F et G sont de dimension finie, $\mathrm{G}^\perp \subset \mathrm{F}^\perp \implies \mathrm{F} \subset \mathrm{G}$.
2. Montrer que $(\mathrm{F}+\mathrm{G})^\perp = \mathrm{F}^\perp \cap \mathrm{G}^\perp$.
3. Montrer que $\mathrm{F}^\perp + \mathrm{G}^\perp \subset (\mathrm{F}\cap\mathrm{G})^\perp$ et que, si E est de dimension finie, $(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})^\perp = \mathrm{F}^\perp + \mathrm{G}^\perp$.

Exercice 7 ★★ **Orthogonal et topologie**

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E que l'on munit de sa norme euclidienne.

1. Montrer que pour tout $y \in \mathrm{E}$, $\varphi_y : x \in \mathrm{E} \mapsto \langle x, y\rangle$ est continue.
2. Montrer que $\mathrm{F}^\perp$ est fermé dans E.
3. Montrer que de manière générale, $\overline{\mathrm{F}} \subset (\mathrm{F}^\perp)^\perp$.

Projection orthogonale

Exercice 8 ★★

Soit u un vecteur unitaire d'un espace euclidien E. On note U le vecteur colonne représentant u dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{vect}(u)$ dans $\mathcal{B}$.

Exercice 9 ★★★ **ENS MP**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^n$ non nul tel que les projetés orthogonaux de $e_1, \dots, e_n$ sur $\mathrm{vect}(u)$ aient la même norme.
2. Montrer que cette norme commune est indépendante du vecteur u choisi et l'exprimer en fonction de $\|e_1\|, \dots, \|e_n\|$.

Exercice 10 ★★ **Caractérisations des projections orthogonales**

Soient E un espace euclidien et p une projection de E. Etablir l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1. p est orthogonale ;
2. $\forall x, y \in \mathrm{E},\ \langle p(x)|y\rangle = \langle x|p(y)\rangle$;
3. $\forall x \in \mathrm{E},\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 11 ★★★

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $u \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - u) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - u)$.
2. Soit $x \in \mathrm{E}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)$. Montrer que (x_n) converge vers la projection de x sur $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - u)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - u)$.

Exercice 12 **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

1. Montrer que $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Donner une base orthonormée de $\mathrm{F} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
4. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur F.
5. Montrer que :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E},\ \left|\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} \mathrm{P}^2(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 13 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soient $n \geq 3$, $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

1. Donner le rang de M.
2. Déterminer les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
3. Donner la matrice du projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales

Exercice 14 ★★★

Soient H et K deux hyperplans d'un espace euclidien E. On note s_{H} et s_{K} les réflexions par rapport à H et K. Montrer que s_{H} et s_{K} commutent si et seulement si $\mathrm{H} = \mathrm{K}$ ou $\mathrm{H}^{\perp} \subset \mathrm{K}$.

Exercice 15 ★★

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

1. Trouver les $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que

$$\forall u, v \in \mathrm{E},\ f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$$

2. Trouver les $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que

$$\forall u, v \in \mathrm{E},\ f(u \wedge v) = -f(u) \wedge f(v)$$

Exercice 16 ★★

Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 17 ★★

Déterminer les réels a, b, c pour que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix}$ soit la matrice d'une rotation.

Exercice 18 ★★★

Soit E un espace euclidien de dimension 2.

1. On sait que la matrice d'une réflexion de E dans une base orthonormée est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Quelle est l'interprétation géométrique de θ ?
2. Déterminer une condition portant sur l'angle entre leurs axes pour que la *somme* de deux réflexions soit encore une réflexion.

Exercice 19 ★★ **Petites Mines 2009**

Soit u un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E. On pose $v = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - u$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont orthogonaux et supplémentaires.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, u^k est un automorphisme orthogonal.

Exercice 20 ★★

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ engendré par la famille (e_1, e_2, e_3) où

$$e_1 : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad e_2 : t \mapsto \cos(2\pi t) \qquad e_3 : t \mapsto \sin(2\pi t)$$

1. Montrer que $\Phi : (f, g) \mapsto 2\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.

2. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E.

3. Pour tout réel x, on définit l'application τ_x qui à tout élément f de E associe g tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(x - t)$$

a. Montrer que τ_x est un endomorphisme de E. Donner sa matrice relativement à $\mathcal{B}$.

b. Montrer que τ_x est un automorphisme orthogonal de E.

c. Caractériser géométriquement τ_x.

Exercice 21 ★★

Déterminer l'image de la droite d'équation $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ par la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et d'axe dirigé par $\vec{a}(1, 1, 1)$.

Exercice 22 ★★

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de E de la réflexion s_1 par rapport au plan d'équation $x + y - 2z = 0$.

2. Quelle est la nature de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner ses éléments caractéristiques.

3. Trouver les réflexions s_2 et s_3 telles que $s_1 \circ s_2 = f$ et $s_3 \circ s_1 = f$. Préciser leur plan de réflexion.

Exercice 23 ★

Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On note A la matrice de f dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E. Montrer que f est une symétrie orthogonale si et seulement si A est une matrice orthogonale symétrique.

Exercice 24 ★★ — Mines MP 2011

Soient f et g deux éléments de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ tels que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que f et g sont soit deux rotations de même axe soit des symétries par rapport à des droites orthogonales entre elles.

Exercice 25 ★★ — Banque Mines-Ponts MP 2018

Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})^\perp$.

2. En déduire que $(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})^2 = 0 \implies f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

Exercice 26 ★★★

Soit $\mathrm{O} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right)$ une matrice orthogonale réelle de taille n où A et D sont deux blocs carrés de tailles respectives p et q. Montrer que $(\det \mathrm{A})^2 = (\det \mathrm{D})^2$.

Exercice 27 ★

Soient A et B les matrices, dans deux bases orthonormales, d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^\top \mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{B}^\top \mathrm{B})$.

Exercice 28 ★★

1. Soit X une matrice colonne réelle de taille n. Montrer que $\mathrm{X}^\top \mathrm{X} \in \mathbb{R}_+$ et que $\mathrm{X}^\top \mathrm{X} = 0$ implique $\mathrm{X} = 0$.

2. Soit M une matrice antisymétrique réelle de taille n. Montrer que $\mathrm{I}_n + \mathrm{M}$ est inversible.

3. On pose $\mathrm{A} = (\mathrm{I}_n - \mathrm{M})(\mathrm{I}_n + \mathrm{M})^{-1}$. Montrer que A est orthogonale.

Exercice 29 ★★★★ **ENS MP 2010**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ laissant stable $(\mathbb{R}_+)^n$.

Exercice 30 ★★★

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{com}(\mathrm{A})$ si et seulement si $\mathrm{A} = 0$ ou $\mathrm{A} \in \mathrm{SO}(n)$.

Optimisation

Exercice 31 ★★★

Calculer le minimum de $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & \displaystyle\int_0^\pi (\sin x - ax^2 - bx)^2 \,\mathrm{d}x \end{array}$.

Exercice 32 ★★★

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) du produit scalaire $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto \mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{Y}$. On se donne $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. On pose $\mathrm{E} = \left\{\|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|^2,\ \mathrm{X} \in c\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right\}$ et $\mathrm{K} = \inf \mathrm{E}$.

1. Justifier l'existence de K.
2. On considère le système linéaire $(\mathcal{S}) :\ \mathrm{AX} = \mathrm{B}$. On appelle *pseudo-solution* de $\mathcal{S}$ tout élément Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|\mathrm{AY} - \mathrm{B}\|^2 = \mathrm{K}$. Montrer que si $(\mathcal{S})$ admet une solution, les pseudo-solutions de $(\mathcal{S})$ sont les solutions de $(\mathcal{S})$.
3. On associe à $(\mathcal{S})$ le système $(\mathcal{S}') :\ \mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{AX} = \mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{B}$. Montrer qu'un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si il est solution de $(\mathcal{S}')$.
4. Montrer que $\mathrm{rg}\,\mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{A} = \mathrm{rg}\,\mathrm{A}$.
5. Montrer que si $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = n$, $(\mathcal{S})$ admet une unique pseudo-solution.

Exercice 33 ★★★ **ENS MP 2010**

Soient E un espace euclidien et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E. Pour $x \in \mathrm{E}$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^p \|x - x_i\|^2$. Montrer que f atteint son minimum en un unique point que l'on précisera.

Exercice 34 ★★★

Soient E un espace euclidien et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E. Pour $x \in \mathrm{E}$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^p \|x - x_i\|^2$. Montrer que f atteint son minimum en $m = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^p x_i$.

Exercice 35 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{A}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. On rappelle que $\mathrm{A}_0 = 1$. Pour tous $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on pose $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
2. Calculer A_n en distinguant deux cas selon la parité de n.
3. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
4. Calculer $d(\mathrm{X}^3, \mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$.

Endomorphismes symétriques et matrices symétriques

Exercice 36 ★★★ **Mines-Ponts MP 2016**

Soit E un espace euclidien de dimension finie. On considère des vecteurs unitaires a et b de E formant une famille libre.
Réduire l'endomorphisme

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b \end{array} \right.$$

Exercice 37 ★★ **CCP MP 2016**

Soient E un espace euclidien et v un endomorphisme symétrique de E.
On dit que v est *positif* si $\forall x \in \mathrm{E},\ \langle v(x), x\rangle \geq 0$. On dit que v est *défini positif* si v est positif et si $\forall x \in \mathrm{E},\ \langle v(x), x\rangle = 0 \implies x = 0_{\mathrm{E}}$.

1. **a.** Montrer que v est positif si et seulement si ses valeurs propres sont positives.
   b. Montrer que v est défini positif si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.
2. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E. On pose $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle u_k$ pour $x \in \mathrm{E}$.
   a. Montrer que f est un endomorphisme symétrique défini positif.
   b. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ symétrique, défini positif telle que $g^2 = f^{-1}$.
   c. Montrer que $(g(u_1), \dots, g(u_n))$ est une base orthonormale de E.

Exercice 38 ★★ **Racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif**

Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. On suppose que $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique g de E tel que $f = g^2$.

Exercice 39 ★

Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$.

Exercice 40 ★★★ **ENS MP 2010**

Montrer que $\Phi : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à une matrice associe sa plus grande valeur propre est une application convexe.

Exercice 41 ★★★ **ENS MP 2010**

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{I}_n \\ \hline \mathrm{I}_n & \mathrm{A} \end{array}\right)$. Trouver les valeurs propres de B.

Exercice 42 ★★★

Soient A, B deux matrices réelles symétriques positives de taille n et $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que tout vecteur propre de A^k est vecteur propre de A.
2. Montrer que si $\mathrm{A}^k = \mathrm{B}^k$, alors $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.
3. Que se passe-t-il sans l'hypothèse A, B symétriques positives ?

Exercice 43 ★★★

Soient A et B deux matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) \geq 0$.

Exercice 44 ★★

Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on pose

$$\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \sqrt{\max \mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top \mathrm{A})}$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $n = p$, N est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 45 ★★★★ **ENS MP 2006**

Soit $(a, b, c, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |ax^2 + bx + c| \leq |\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C}|$$

Montrer que

$$|b^2 - 4ac| \leq |\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}|$$

Exercice 46 **ENS PSI 2016**

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{M}^\top \mathrm{M}) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}(\mathrm{M}\mathrm{M}^\top) \setminus \{0\}$$

Exercice 47 ★★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2021**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

(i) $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\forall(\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(A)^2,\ \lambda + \mu \neq 0$;

(ii) $\forall B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ \exists! M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ AM + MA = B$.

Exercice 48 ★★★

Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ le système

$$\begin{cases} X^\top YX = I_n \\ Y^\top XY = I_n \end{cases}$$

Exercice 49 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2021**

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont les coefficients diagonaux sont nuls et D une matrice diagonale.
Montrer que $S + D$ est semblable à D si, et seulement si, S est nulle.

Exercice 50 ★★ **Racine carrée d'une matrice symétrique positive**

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Polynômes orthogonaux

Exercice 51 ★★★

On pose $Q_n = (1 - X^2)^n = (1 + X)^n(1 - X)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On notera $\varphi(P, Q) = \langle P, Q\rangle$ par la suite.
2. Soit n et k deux entiers tels que $0 \leq k < n$. Montrer que $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$.
3. On pose $P_n = Q_n^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 52 ★★★

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $P \in E$, on pose $L(P) = P'' - 2XP'$. Pour tous $P, Q \in E$, on note

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\, dt$$

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que L est diagonalisable. On précisera ses valeurs propres.
3. Montrer que L est symétrique pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
4. Montrer que l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de E diagonalise L i.e. est une base de vecteurs propres de L.

Divers

Exercice 53 ★★

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Une application $u : E \to E$ est dite *antisymétrique* si

$$\forall(x, y) \in E^2,\ \langle x, u(y)\rangle + \langle y, u(x)\rangle = 0$$

On note A(E) l'ensemble des applications antisymétriques de E.
REMARQUE. Rien à voir avec les applications *multilinéaires* antisymétriques !

1. Soit $u \in A(E)$. Montrer que u est linéaire.
2. Soit $u : E \to E$. Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
   (i) u est linéaire et $\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0$;
   (ii) u est antisymétrique ;
   (iii) u est linéaire et sa matrice dans une base orthonormée est antisymétrique.
3. Montrer que A(E) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.
4. Soit $u \in A(E)$. Montrer que $\mathrm{Im}\, u$ est l'orthogonal de $\mathrm{Ker}\, u$.
5. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u alors $F^\perp$ est également stable par u.

Exercice 54 ★★

Soient E un espace euclidien, p une projection orthogonale et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Montrer que la matrice A de p dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique.

Exercice 55 ★★★

Montrer que le rang d'une matrice antisymétrique réelle est pair.

Exercice 56 ★★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2018**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit cE l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^\top = A^2 + A - I_n$.
On appelle a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

1. Décrire a si A est symétrique, avec $A \in \mathcal{E}$.
2. Décrire a si on ne suppose plus A symétrique, avec $A \in \mathcal{E}$.

Exercice 57 ★★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On travaille dans l'espace des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $|\operatorname{tr}(A)| \leq \sqrt{n}\|A\|$.
3. **a.** Quel est l'orthogonal de l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques ?
   b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer la distance de A à $S_n(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients de A ?
4. Soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|UA\| = \|AU\| = \|A\|$.
5. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Exercice 58 ★★★

Soit E un espace euclidien de dimension n et $u_1, \dots, u_{n+1}$ des vecteurs non nuls de E faisant un angle constant α_n (non nul) deux à deux. Que vaut α_n ?

Exercice 59 ★★★

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{rg}(A^\top A) = \operatorname{rg}(AA^\top) = \operatorname{rg} A$.

Exercice 60 ★★★

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant
$$\langle P, Q\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$
pour $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$.
2. On pose $F = \operatorname{vect}(1 + X^n, n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que $F^\perp = \{0\}$. Conclusion ?

Exercice 61 ★★ **Théorème de Riesz**

Soit E un espace euclidien. Montrer que pour toute forme linéaire $\varphi \in E^*$, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\varphi(x) = \langle a, x\rangle$ pour tout $x \in E$.