Devoir surveillé n°15

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+4t^2x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\frac{1}{4t^2x^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4x^2} \cdot \frac{1}{t^2}$ est $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$. Par conséquent, $t \mapsto \frac{1}{1+4t^2x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. A fortiori, $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2}$ converge.
De plus, en effectuant le changement de variable linéaire $u = 2xt$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2} = \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{2x}\left[\arctan(u)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4x}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $\frac{1}{1+4n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4x^2} \cdot \frac{1}{n^2}$. Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente donc $\sum \frac{1}{1+4n^2x^2}$ converge. La fonction F est donc définie sur $\mathbb{R}^*$. Il est de plus évident que $\mathrm{F}(-x) = \mathrm{F}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ donc F est paire.

3. Posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+4n^2x^2}$.

- La série $\sum f_n$ converge simplement vers F sur $]a, b[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x \in]a, b[,\ f_n'(x) = -\frac{8n^2x}{(1+4n^2x^2)^2}$$

  Ainsi

$$\forall x \in]a, b[,\ |f_n'(x)| \leq \frac{8n^2b}{(1+4n^2a^2)^2}$$

  Par conséquent

$$\|f_n\|_{\infty,]a,b[} \leq \frac{8n^2b}{(1+4n^2a^2)^2}$$

  Or $\frac{8n^2b}{(1+4n^2a^2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b}{2a^2} \cdot \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente. On en déduit successivement que $\sum \frac{8n^2b}{(1+4n^2a^2)^2}$ puis $\sum \|f_n\|_{\infty,]a,b[}$ convergent. Ainsi $\sum f_n$ converge normalement et, a fortiori, uniformément sur $]a, b[$.

On peut alors conclure que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. Puisque le caractère $\mathcal{C}^1$ est une notion locale, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $t \mapsto \frac{1}{1+4t^2x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Notamment

$$\forall t \in [n-1, n],\ \frac{1}{1+4n^2x^2} \leq \frac{1}{1+4t^2x^2}$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{4n^2x^2} = \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{1+4n^2x^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2}$$

En utlisant la relation de Chasles,

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2} = \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2}$$

5. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{1+4t^2x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$$\forall t \in [n, n+1],\ \frac{1}{1+4t^2x^2} \leq \frac{1}{1+4n^2x^2}$$

En intégrant

$$\int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2} \leq \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{1+4n^2x^2} = \frac{1}{1+4n^2x^2}$$

puis, par relation de Chasles,

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} = 1 + \mathrm{F}(x)$$

6. On a vu précédemment que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2} = \frac{\pi}{4x}$$

D'après les questions précédentes,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\pi}{4x} - 1 \leq \mathrm{F}(x) \leq \frac{\pi}{4x}$$

Puisque $\dfrac{\pi}{4x} - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\pi}{4x}$, $\mathrm{F}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\pi}{4x}$.
De plus, F est positive par positivité de l'intégrale donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leq \mathrm{F}(x) \leq \frac{\pi}{4x}$$

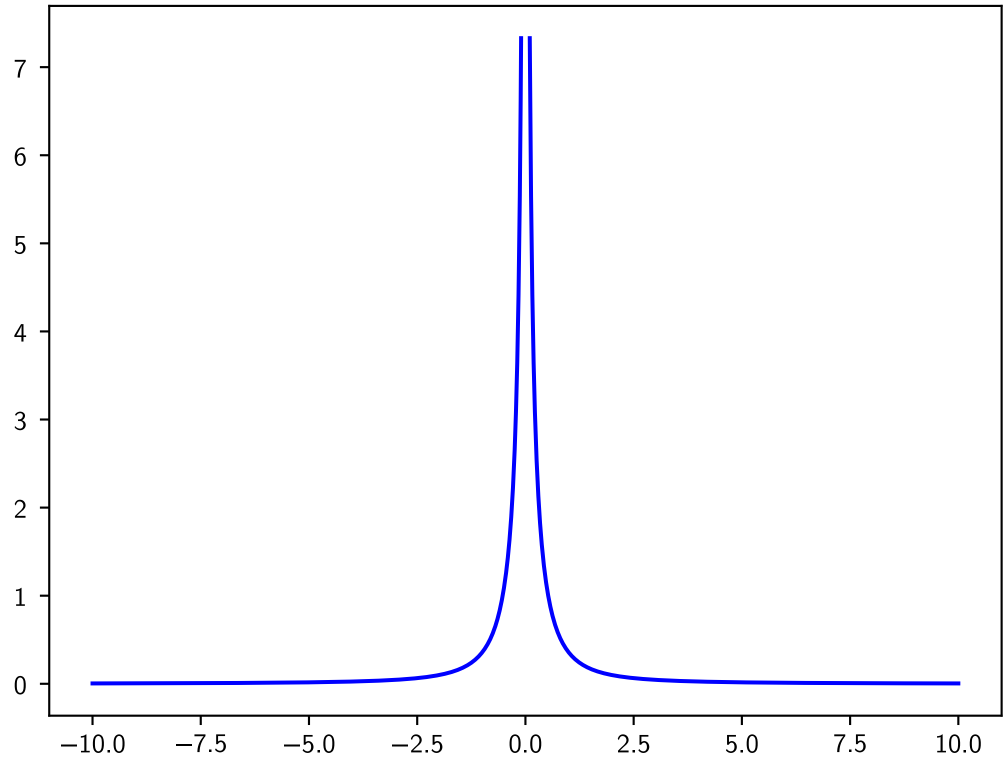
D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{F} = 0$.

7. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{1+4n^2x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{F} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est également décroissante sur $\mathbb{R}*_+$ (la convergence simple suffit).

Remarque. On aurait aussi pu arguer du fait que, d'après la question **3**,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{F}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8nx}{(1+4n^2x^2)^2} \leq 0$$

Comme F est paire, F est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.



8. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{e^{2xt}-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\frac{\sin t}{e^{2xt}-1} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-2xt})$ et $t \mapsto e^{-2xt}$ est intégrable en $+\infty$. Enfin, $\frac{\sin t}{e^{2xt}-1} \underset{t\to+\infty}{=} \frac{1}{2x}$ donc $t \mapsto \frac{\sin t}{e^{2xt}-1}$ est prolongeable par continuité en 0^+. On en déduit que $t \mapsto \frac{\sin t}{e^{2xt}-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi G est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

9. Posons $g(x,t) = \frac{\sin t}{e^{2xt}-1}$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[$,

$$|g(x,t)| \leq \frac{|\sin t|}{e^{2at}-1} = \varphi(t)$$

Comme précédemment, $\varphi(t) \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{2a}$ et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-2at})$ donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Puisque $\mathbb{R}_+^* = \bigcup_{a\in\mathbb{R}_+^*} [a,+\infty[$, G est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

10. **Première version.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $t \mapsto \sin(t)e^{-\alpha t}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$ et $\sin(t)e^{-\alpha t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-\alpha t})$. Or $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $t \mapsto \sin(t)e^{-\alpha t}$ également. On en déduit que I_α converge. Par double intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_\alpha &= -\left[\cos(t)e^{-\alpha t}\right]_0^{+\infty} - \alpha\int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \\
&= 1 - \alpha\left(\left[\sin(t)e^{-\alpha t}\right]_0^{+\infty} + \alpha\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= 1 - \alpha^2\mathrm{I}_\alpha
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{I}_\alpha = \frac{1}{1+\alpha^2}$.
Deuxième version. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $t \mapsto e^{it}e^{-\alpha t}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$ et $|e^{it}e^{-\alpha t}| = e^{-\alpha t}$ donc $t \mapsto e^{it}e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. De plus,

$$\int_0^{+\infty} e^{it}e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{(i-\alpha)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i-\alpha}\left[e^{(i-\alpha)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-i} = \frac{\alpha+i}{\alpha^2+1}$$

En effet, $|e^{it}e^{-\alpha t}| = e^{-\alpha t}$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{(i-\alpha)t} = 0$. Puisque $\sin(t)e^{-\alpha t} = \operatorname{Im}(e^{it}e^{-\alpha t})$, I_α converge et

$$\mathrm{I}_\alpha = \operatorname{Im}\left(\frac{\alpha+i}{\alpha^2+1}\right) = \frac{1}{\alpha^2+1}$$

11. Soit $(x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Alors $e^{-2xt} \in [0,1]$. Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2nxt} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-2xt}\right)^n = \frac{e^{-2xt}}{1-e^{-2xt}} = \frac{1}{e^{2xt}-1}$$

puis

$$\frac{\sin t}{e^{2xt}-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t)e^{-2nxt}$$

12. On va utiliser le théorème d'intégration terme à terme. Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$ et posons $f_n : t \mapsto \sin(t)e^{-2nxt}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|f_n(t)| \leq e^{-2nxt}$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ ($nx > 0$).
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{e^{2tx}-1}$.
- La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{e^{2tx}-1}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant l'inégalité $|\sin t| \leq |t|$ et une double intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} |h_n(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} te^{-2nxt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4n^2x^2}$$

La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2}$ converge donc il en est de même de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \displaystyle\int_0^{+\infty} |h_n(t)|\,\mathrm{d}t$.

Avec le théorème d'intégration terme à terme, on obtient via la question **10**,

$$\mathrm{G}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{2xt}-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-2nxt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} = \mathrm{F}(x)$$

Problème 1

1 Il est évident que $\Delta(X^k) = kX^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors $\Delta(P) = XP'$ donc $\Delta^2(P) = X\Delta(P)' = X(P' + XP'') = \Delta(P) + XP''$. Ainsi

$$XP'' = \Delta^2(P) - \Delta(P) = \Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P)$$

3 Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\Delta(X^k) = kX^k \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme Δ est linéaire et que $(X^k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

4 Puisque $\Delta(X^k) = kX^k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la matrice de Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $D_n = \mathrm{diag}(0, 1, 2, \dots, n)$.

5 D'après la question **2**,

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Phi(P) = \Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P) + a\Delta(P) = \Delta^2(P) + (a - 1)\Delta(P)$$

Ainsi $\Phi = \Delta^2 + (a - 1)\Delta$. Comme $\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ est une $\mathbb{R}$-algèbre, Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

6 Evident.

7 Comme $\Phi_n = \Delta_n^2 + (a - 1)\Delta_n$, la matrice de Φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $D_n^2 + (a - 1)D_n$ où D_n est la matrice de Δ_n dans cette même base canonique. Comme D_n est diagonale, il en est de même de $D_n^2 + (a - 1)D_n$. Ainsi Φ_n est diagonalisable.

8 Evident. On trouve $\varphi_n = \Delta_n^2 + (a - 1)\Delta_n + b\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.

9 On rappelle que la matrice D_n de Δ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathrm{diag}((k)_{0\leq k\leq n})$. On en déduit que la matrice de φ_n dans cette base est $\mathrm{diag}((k^2 + (a - 1)k + b)_{0\leq k\leq n})$.

$$s^2 + (a - 1)s + b = 0 \tag{1}$$

10 Si l'équation (1) admet deux racines entières distinctes, $P = X^2 + (a - 1)X + b = (X - m_1)(X - m_2)$ avec $(X - m_1) \wedge (X - m_2) = 1$. D'après le lemme des noyaux,

$$\mathrm{Ker}\,\varphi_n = \mathrm{Ker}\,P(\Delta_n) = \mathrm{Ker}(\Delta_n - m_1\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) \oplus \mathrm{Ker}(\Delta_n - m_2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$$

Comme la matrice de Δ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $D_n = \mathrm{diag}(0, 1, \dots, n)$, $\mathrm{Ker}(\Delta_n - m\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \mathrm{vect}(X^m)$ pour tout $m \in [\![0, n]\!]$.
On en déduit que $\mathrm{Ker}\,\varphi_n = \mathrm{vect}(X^{m_1}, X^{m_2})$.

11 Si l'équation (1) admet une racine entière $m \in [\![0, n]\!]$, $\varphi_n = P(\Delta_n) = (\Delta_n - m\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})^2$. La matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc $(D_n - mI_{n+1})^2 = \mathrm{diag}(((k - m)^2)_{0\leq k\leq n})$. On en déduit que $\mathrm{Ker}\,\varphi_n = \mathrm{vect}(X^n)$.

12 On montre de même que si l'équation (1) n'admet pas de racine entière dans $[\![0, n]\!]$, alors $\mathrm{Ker}\,\varphi_n = \{0\}$ (la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est diagonale à coefficients diagonaux non nuls).
Remarquons ensuite que $\mathrm{Ker}\,\varphi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}\,\varphi_n$.

- Si l'équation (1) n'admet pas de racine entière, alors $\mathrm{Ker}\,\varphi_n = \{0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$ et $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = 0$.
- Si l'équation (1) admet une unique racine entière m, alors $\mathrm{Ker}\,\varphi_n = \{0\}$ pour tout entier $n < m$ et $\mathrm{Ker}\,\varphi_n = \mathrm{vect}(X^m)$ pour tout entier $n \geq m$. Ainsi $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{vect}(X^m)$ et $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = 1$.
- Si l'équation (1) admet deux racines entières distinctes m_1 et m_2, alors, en supposant $m_1 < m_2$, $\mathrm{Ker}\,\varphi_n = \{0\}$ pour tout entier $n < m_1$, $\mathrm{Ker}\,\varphi_n = \mathrm{vect}(X^{m_1})$ pour tout entier n tel que $m_1 \leq n < m_2$ et $\mathrm{Ker}\,\varphi_n = \mathrm{vect}(X^{m_1}, X^{m_2})$ pour tout entier $n \geq m_2$. Ainsi $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{vect}(X^{m_1}, X^{m_2})$ et $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = 2$.

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \tag{2}$$

$$u'' + (a - 1)u' + bu = 0 \tag{3}$$

13 L'équation différentielle (2) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2. De plus, elle est résolue sur les intervalles I et J.
L'ensemble des solutions de (2) sur I ou sur J est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

$\boxed{\textbf{14}}$ Comme y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $g = y \circ \exp$ l'est également sur $\mathbb{R}$. Remarquons alors que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$y(x) = g(\ln x) \qquad y'(x) = \frac{1}{x}g'(\ln x) \qquad y''(x) = -\frac{1}{x^2}g'(\ln x) + \frac{1}{x^2}g''(\ln x)$$

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0$$

ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, -g'(\ln x) + g''(\ln x) + ag'(\ln x) + bg(\ln x) = 0$$

et, comme $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g''(t) + (a-1)g'(t) + bg(t) = 0$$

Ainsi g est bien solution de l'équation différentielle (3) sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{15}}$ Comme g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $y = g \circ \ln$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = y(e^t) \qquad g'(t) = e^t y'(e^t) \qquad g''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t)$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g''(t) + (a-1)g(t) + bg(t) = 0$$

ce qui donne

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t) + (a-1)e^t y'(e^t) + y(e^t) = 0$$

Comme $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2y''(x) + axy'(x) + y(x) = 0$$

donc y est bien solution de (2) sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\textbf{16}}$ Supposons $a = 3$ et $b = 1$. L'équation caractéristique associée à (3) est alors $r^2 + 2r + 1 = 0$. Son unique racine est -1 donc les solutions de (3) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{-t},\ \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Les questions précédentes montrent alors que les solutions de (2) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{\lambda \ln(x) + \mu}{x},\ \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Supposons $a = 1$ et $b = 4$. L'équation caractéristique associée à (3) est alors $r^2 + 4 = 0$. Ses racines sont $2i$ et $-2i$ donc les solutions à valeurs réelles de (3) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$t \mapsto \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t),\ \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Les questions précédentes montrent alors que les solutions de (2) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \cos(2\ln x) + \mu \sin(2\ln x),\ \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

$\boxed{\textbf{17}}$ Comme y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$, $h = y \circ (-\exp)$ l'est également sur $\mathbb{R}$. Remarquons alors que pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$,

$$y(x) = h(\ln(-x)) \qquad y'(x) = \frac{1}{x}h'(\ln(-x)) \qquad y''(x) = -\frac{1}{x^2}h'(\ln(-x)) + \frac{1}{x^2}h''(\ln(-x))$$

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0$$

ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, -h'(\ln(-x)) + h''(\ln(-x)) + ah'(\ln(-x)) + bh(\ln(-x)) = 0$$

et, comme $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h''(t) + (a-1)h'(t) + bh(t) = 0$$

Ainsi h est bien solution de l'équation différentielle (3) sur $\mathbb{R}$.

18 Réciproquement, on montre que, si h est solution de (3) sur $\mathbb{R}$, alors $y : x \mapsto h(\ln(-x))$ est solution de (2) sur $\mathbb{R}_-^*$. Pour $a = 1$ et $b = -4$, les solutions de (3) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

On en déduit que les solutions de (2) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{2\ln(-x)} + \mu e^{-2\ln(-x)}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

ou encore les fonctions

$$x \mapsto \lambda x^2 + \frac{\mu}{x^2}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Ce qui précède montre également que les solutions de (2) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont également les fonctions

$$x \mapsto \lambda x^2 + \frac{\mu}{x^2}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Soit alors f une éventuelle solution de (2) de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Il existe alors $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x^2} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \ f(x) = \gamma x^2 + \frac{\delta}{x^2}$$

f doit être continue en 0 : elle doit notamment avoir une limite finie en 0, ce qui impose $\beta = \delta = 0$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, f'' doit être continue en 0, ce qui impose $\alpha = \beta$.
Réciproquement, on vérifie que les fonctions $x \mapsto \lambda x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ sont bien solutions de (2) sur $\mathbb{R}$.
Finalement l'ensemble des solutions de (2) sur $\mathbb{R}$ est $\text{vect}(x \mapsto x^2)$.

19 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Alors son rayon de convergence R est définie par

$$\mathrm{R} = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, \ (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0 \tag{4}$$

20 Pour tout $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$,

$$\mathrm{J}_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$$
$$\mathrm{J}_0'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^{k-1}$$
$$\mathrm{J}_0'(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}$$

Comme J_0 est solution de PBEquaDiffLG08 :rep :eq :4,

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[, \ \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+2} = 0$$

ou encore

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[, \ \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^k + \sum_{k=2}^{+\infty} c_{k-2} x^k = 0$$

et enfin

$$c_1 x + \sum_{k=2}^{+\infty} (k^2 c_k + c_{k-2}) x^k = 0$$

Par unicité du développement en série entière, $c_1 = 0$ et $c_k = -\frac{1}{k^2} c_{k-2}$ pour tout entier $k \geq 2$. On sait de plus que $c_0 = 1$.
On en déduit par récurrence que $c_{2k+1} = 0$ et $c_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

21 On utilise la règle de d'Alembert. Pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\left| \frac{c_{2k+2} x^{2k+2}}{c_{2k} x^{2k}} \right| = \frac{x^2}{(2k+2)^2} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum c_k x^k$ est $+\infty$.

$\boxed{22}$ Supposons que (J_0, f) soit liée dans l'expace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,r[$. Il existe donc $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que

$$\forall x \in]0,r[,\ \alpha \mathrm{J}_0(x) + \beta f(x) = 0$$

Supposons $\beta = 0$. Alors $\alpha \neq 0$ car $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$. On en déduit que $\mathrm{J}_0(x) = 0$ pour tout $x \in]0,r[$. Cela signifierait que $c_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ par unicité du développement en série entière, ce qui contredit l'expression de c_{2k} trouvée précédemment. Ainsi $\beta = 0$ et donc

$$\forall x \in]0,r[,\ f(x) = -\frac{\alpha}{\beta}\mathrm{J}_0(x)$$

Comme J_0 est continue en 0, elle est bornée au voisinage de 0 et donc f également.

$\boxed{23}$ Si $\sum \beta_k x^k$ est solution, alors, en posant $\mathrm{R} = \min(\mathrm{R}_\alpha, \mathrm{R}_\beta) > 0$, on obtient par produit de Cauchy,

$$\forall x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_{n-k}\right)x^n = 1$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $\alpha_0 = 1$, on en déduit le résultat voulu.

$\boxed{24}$ Puisque $0 < r < \mathrm{R}_\alpha$, la suite $(\alpha_k r^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée par définition du rayon de convergence. Il existe donc $\mathrm{M} > 0$ tel que $|\alpha_k r^k| \leq \mathrm{M}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ i.e. $|\alpha_k| \leq \dfrac{\mathrm{M}}{r^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} \beta_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_{n-k} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$\boxed{25}$ Il existe une unique $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant (5) : c'est la suite définie par $\beta_0 = 1$ et la relation de récurrence $\beta_n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\beta_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Remarquons qu'alors $\beta_1 = -\alpha_1\beta_0 = -\alpha_1$. Mais alors,

$$|\beta_1| = |\alpha_1| \leq \frac{\mathrm{M}}{r^1} = \frac{\mathrm{M}(\mathrm{M}+1)^{1-1}}{r^1}$$

Supposons qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ |\beta_k| \leq \frac{\mathrm{M}(\mathrm{M}+1)^{k-1}}{r^k}$$

Par inégalité triangulaire,

$$
\begin{aligned}
|\beta_n| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k||\beta_{n-k}| \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_{n-k}||\beta_k| \\
&= |\alpha_n| + \sum_{k=1}^{n-1} |\alpha_{n-k}||\beta_k| \\
&\leq \frac{\mathrm{M}}{r^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{M}}{r^{n-k}} \cdot \frac{\mathrm{M}(\mathrm{M}+1)^{k-1}}{r^k} \\
&= \frac{\mathrm{M}}{r^n} + \frac{\mathrm{M}^2}{r^n} \sum_{k=1}^{n-1} (\mathrm{M}+1)^{k-1} \\
&= \frac{\mathrm{M}}{r^n} + \frac{\mathrm{M}^2}{r^n} \sum_{k=0}^{n-2} (\mathrm{M}+1)^{k} \\
&= \frac{\mathrm{M}}{r^n} + \frac{\mathrm{M}^2}{r^n} \cdot \frac{(\mathrm{M}+1)^{n-1}-1}{(\mathrm{M}+1)-1} \\
&= \frac{\mathrm{M}}{r^n} + \frac{\mathrm{M}}{r^n}\left((\mathrm{M}+1)^{n-1}-1\right) \\
&= \frac{\mathrm{M}}{r^n}(\mathrm{M}+1)^{n-1}
\end{aligned}
$$

On en déduit bien par récurrence forte que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ |\beta_k| \leq \frac{\mathrm{M}(\mathrm{M}+1)^{k-1}}{r^k}$$

26 En tant que série géométrique le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\mathrm{M}(\mathrm{M}+1)^{k-1}}{r^k} x^k$ est $\frac{r}{\mathrm{M}+1}$. La question précédente permet alors d'affirmer que $\mathrm{R}_\beta \geq \frac{r}{\mathrm{M}+1}$.

27 Pour tout $x \in]0, r[$,

$$
\begin{aligned}
x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) &= x^2\lambda''(x)\mathrm{J}_0(x) + 2x^2\lambda'(x)\mathrm{J}_0'(x) + x^2\lambda(x)\mathrm{J}_0''(x) + x\lambda'(x)\mathrm{J}_0(x) + x\lambda(x)\mathrm{J}_0'(x) + x^2\lambda(x)\mathrm{J}_0(x) \\
&= \lambda(x)\left(x^2\mathrm{J}_0''(x) + x\mathrm{J}_0'(x) + x^2\mathrm{J}_0(x)\right) + x^2\lambda''(x)\mathrm{J}_0(x) + 2x^2\lambda'(x)\mathrm{J}_0'(x) + x\lambda'(x)\mathrm{J}_0(x) \\
&= x^2\lambda''(x)\mathrm{J}_0(x) + 2x^2\lambda'(x)\mathrm{J}_0'(x) + x\lambda'(x)\mathrm{J}_0(x)
\end{aligned}
$$

car J_0 est solution de (4).
Par ailleurs, en posant $z : x \mapsto x\mathrm{J}_0^2(x)\lambda'(x)$, pour tout $x \in]0, r[$,

$$
\begin{aligned}
z'(x) &= \mathrm{J}_0^2(x)\lambda'(x) + 2x\mathrm{J}_0'(x)\mathrm{J}_0(x) + x\mathrm{J}_0^2(x)\lambda''(x) \\
&= \mathrm{J}_0(x)\left(\mathrm{J}_0(x)\lambda'(x) + 2x\mathrm{J}_0'(x) + x\mathrm{J}_0(x)\lambda''(x)\right) \\
&= \mathrm{J}_0(x)\left(x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x)\right)
\end{aligned}
$$

Si y est solution de (4) sur $]0, r[$, z' est donc nulle sur $]0, r[$.
Réciproquement, supposons que z' est nulle sur $]0, r[$. Posons $w : x \mapsto x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x)$. Supposons qu'il existe $a \in]0, r[$ tel que $w(a) \neq 0$. Par continuité de w, w ne s'annulerait pas sur un intervalle ouvert non vide contenant a et inclus dans $]0, r[$. Par conséquent, J_0 serait nulle sur cet intervalle et donc J_0' également. On en déduirait que $\mathrm{J}_0(a) = \mathrm{J}_0'(a) = 0$. Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, J_0 serait constamment nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Par continuité de J_0 en 0, on aurait donc $c_0 = \mathrm{J}_0(0) = 1$, ce qui n'est pas. On a donc prouvé par l'absurde que z' était nulle sur $]0, r[$.

28 Comme J_0 est développable en une série entière de rayon de convergence infini, on en déduit par produit de Cauchy que J_0^2 également. De plus, $\mathrm{J}_0^2(0) = c_0^2 = 1$.

29 J_0^2 est développable en série entière et $\mathrm{J}_0^2(0) = 1$ donc, d'après ce qui précède, il existe une série entière $\sum_{k\in\mathbb{N}} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $r > 0$ tel que

$$\forall x \in]-r, r[,\ \mathrm{J}_0^2(x) \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k = 1$$

ou encore, comme $\beta_0 = 1$,

$$\forall x \in]-r, r[,\ x\mathrm{J}_0^2(x)\left(\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k x^{k-1}\right) = 1$$

En posant $\lambda :\ \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k}{k} x^k$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, r[$, on a donc

$$\forall x \in]0, r[,\ x\mathrm{J}_0^2(x)\lambda'(x) = 1$$

Notamment, $x \mapsto x\mathrm{J}_0^2(x)\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0, r[$. D'après la question **27**, $x \mapsto \lambda(x)\mathrm{J}_0(x)$ est solution de 4 sur $]0, r[$.
Comme J_0 est développable en une série entière de rayon de convergence infini, on obtient par produit de Cauchy, que $\eta x \mapsto \mathrm{J}_0(x) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k}{k} x^k$ est développable en série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à r. En posant $\mathrm{R}_\eta = r$, on obtient bien que $x \mapsto \mathrm{J}_0(x)\lambda(x) = \eta(x) + \mathrm{J}_0(x)\ln(x)$ est solution de 4 sur $]0, \mathrm{R}_\eta[$.

$\boxed{\textbf{30}}$ Posons $f :\ x \in]0, \mathrm{R}_\eta[\mapsto \eta(x) + \mathrm{J}_0(x)\ln(x)$. η est continue en 0 comme somme d'une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R}_\eta > 0$. De même, J_0 est continue en 0 de sorte que $\lim_0 \mathrm{J}_0 = \mathrm{J}_0(0) = 1$. On en déduit que $\lim_0 f = -\infty$. Notamment, f n'est pas bornée au voisinage de 0. D'après la question **22**, la famille (J_0, f) est libre. L'ensemble des solutions de 4 sur $]0, \mathrm{R}_\eta[$ étant un espace vectoriel de dimension 2, (J_0, f) en est donc une base. L'ensemble des solutions de 4 sur $]0, \mathrm{R}_\eta[$ est donc $\mathrm{vect}(\mathrm{J}_0, f)$.