Devoir à la maison n°08 : corrigé

Problème 1 — Moyenne arithmético-géométrique

Partie I – Etude du cas général

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_n - u_n = \frac{\left(\sqrt{v_{n-1}} - \sqrt{u_{n-1}}\right)^2}{2} \geq 0$$

donc $u_n \leq v_n$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \geq 0 \qquad v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$$

Ceci prouve que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont respectivement croissante et décroissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_{n+1} - u_{n+1} - \frac{v_n - u_n}{2} = u_n - \sqrt{u_n v_n} = \sqrt{u_n}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}) \leq 0$$

donc

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$$

4. Tout d'abord, $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $v_n - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ensuite $v_1 - u_1 \leq \frac{v_1-u_1}{2^{1-1}}$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_n - u_n \leq \frac{v_1-u_1}{2^{n-1}}$. Alors

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2} \leq \frac{|a-b|}{2^{n+1}}$$

Par récurrence, $v_n - u_n \leq \frac{v_1-u_1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Le théorème des gendarmes garantit que $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. Puisque (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante à partir du rang 1, elles sont adjacentes à partir du rang 1 et convergent vers une limite commune $\mathrm{M}(a,b)$.

Partie II – Propriétés de la moyenne arithmético-géométrique

On reprend les deux suites (u_n) et (v_n) de la partie I.

1. Les suites (u_{n+1}) et (v_{n+1}) sont de premier terme $\sqrt{ab}$ et $\frac{a+b}{2}$ et suivent les mêmes relations de récurrence que (u_n) et (v_n) donc convergent vers $\mathrm{M}\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$. Par ailleurs, ce sont des suites extraites de (u_n) et (v_n) donc elles convergent vers $\mathrm{M}(a,b)$. On en déduit que $\mathrm{M}(a,b) = \mathrm{M}\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$.

2. D'après la question **II.1**,

$$\mathrm{M}(b,a) = \mathrm{M}\left(\sqrt{ba}, \frac{b+a}{2}\right) = \mathrm{M}\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right) = \mathrm{M}(a,b)$$

3. On vérifie sans peine que les suites (λu_n) et (λv_n) vérifient les mêmes relation de récurrence que les suites (u_n) et (v_n). En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\lambda u_{n+1} &= \lambda\sqrt{u_n v_n}\\ &= \sqrt{\lambda^2 u_n v_n} \quad \text{car } \lambda \text{ est } \textit{positif}\\ &= \sqrt{(\lambda u_n)(\lambda v_n)}\\ \lambda v_{n+1} &= \lambda\frac{u_n+v_n}{2}\\ &= \frac{\lambda u_n + \lambda v_n}{2}\end{aligned}$$

La partie I montre alors que les suites (λu_n) et (λv_n) convergent vers la même limite $\mathrm{M}(\lambda a, \lambda b)$.
Mais comme les suites (u_n) et (v_n) convergent toutes deux vers $\mathrm{M}(a,b)$, les suites (λu_n) et (λv_n) convergent également vers $\lambda\mathrm{M}(a,b)$. Par unicité de la limite, on obtient $\mathrm{M}(\lambda a, \lambda b) = \lambda\mathrm{M}(a,b)$.

4. Puisque (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante à partir du rang 1 et convergent vers $\mathrm{M}(a,b)$, $u_n \leq \mathrm{M}(a,b) \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, $u_1 \leq \mathrm{M}(a,b) \leq v_1$, ce qui donne le résultat escompté.

Partie III – Étude d'une fonction

1. En reprenant les deux suites (u_n) et (v_n) de la partie I avec $a = 1$ et $b = 0$, on prouve sans peine que la suite (u_n) est constamment nulle à partir du rang 1. On en déduit que $\mathrm{F}(0) = 0$.
La question **II.4** montre que $1 \leq \mathrm{M}(1,1) \leq 1$ i.e. $\mathrm{F}(1) = 1$.

2. Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Les suites (u_n) et (v_n) définies dans la partie I sont positives donc leur limite commune l'est également i.e. $\mathrm{M}(a,b) \geq 0$.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{F}(x) = \mathrm{M}(1,x) \geq 0$.

3. Soit $(x,x') \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $x \leq x'$. On définit les suites (u_n), (v_n), (u'_n) et (v'_n) telles que $u_0 = 1$, $v_0 = x$, $u'_0 = 1$ et $v'_0 = x'$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \qquad u'_{n+1} = \sqrt{u'_n v'_n} \qquad v'_{n+1} = \frac{u'_n+v'_n}{2}$$

On prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u'_n$ et $v_n \leq v'_n$. Par ailleurs, les suites (u_n) et (v_n) convergent vers $\mathrm{F}(x)$ tandis que les suites (u'_n) et (v'_n) convergent vers $\mathrm{F}(x')$. Par passage à la limite, $\mathrm{F}(x) \leq \mathrm{F}(x')$. Ceci prouve la croissance de F sur $\mathbb{R}_+$.

4. **a.** Il suffit d'appliquer la question **II.4** avec $a = 1$ et $b = x$.

b. On rappelle que $\mathrm{F}(1) = 1$. A l'aide de l'inégalité de la question précédente, on a donc pour tout $x \in]1,+\infty[$,

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \leq \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(1)}{x-1} \leq \frac{1}{2}$$

et pour tout $x \in [0,1[$,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(1)}{x-1} \leq \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

ou encore pour tout $x \in]1,+\infty[$,

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} \leq \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(1)}{x-1} \leq \frac{1}{2}$$

et pour tout $x \in]0,1[$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(1)}{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim_{x\to1^-} \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$ et donc $\lim_{x\to1} \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$. Finalement, F est dérivable en 1 et $\mathrm{F}'(1) = \frac{1}{2}$.

5. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x) &= \mathrm{M}(1, x) \\
&= \mathrm{M}\left(\sqrt{x}, \frac{1+x}{2}\right) && \text{d'après } \mathbf{II.1} \\
&= \mathrm{M}\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right) && \text{d'après } \mathbf{II.2} \\
&= \frac{1+x}{2}\mathrm{M}\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) && \text{d'après } \mathbf{II.3} \\
&= \frac{1+x}{2}\mathrm{F}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)
\end{aligned}$$

b. Puisque F est croissante et positive, elle admet une limite finie ℓ à droite en 0. Or $\lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{1+x} = 0^+$ donc la question précédente montre que $\ell = \frac{\ell}{2}$ et donc $\ell = 0$. Il s'ensuit que $\lim_{0^+} \mathrm{F} = 0 = \mathrm{F}(0)$ donc F est continue en 0.

D'après la question **III.4.a**, $\mathrm{F}(x) \geq \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0)}{x - 0} = \frac{\mathrm{F}(x)}{x} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Par théorème de minoration, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(0)}{x-0} = +\infty$ donc F n'est pas dérivable en 0. On peut même dire que la courbe représentative de F admet une tangente verticale en l'origine.

6. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{F}(x) \geq \sqrt{x}$ donc, par théorème de minoration, $\lim_{+\infty} \mathrm{F} = +\infty$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x) &= \mathrm{M}(1, x) \\
&= x\mathrm{M}\left(\frac{1}{x}, 1\right) && \text{d'après } \mathbf{II.3} \\
&= x\mathrm{M}\left(1, \frac{1}{x}\right) && \text{d'après } \mathbf{II.2} \\
&= x\mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

c. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{x} = \mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right)$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{u\to 0^+} \mathrm{F}(u) = 0$$

donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{F}(x)}{x} = 0$ i.e. $\mathrm{F}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$.

d. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question **III.5.a**

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}(1+x)\mathrm{F}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

Mais d'après la question **III.6.b**

$$\mathrm{F}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{F}\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$$

On en déduit le résultat voulu.

e. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{\sqrt{x}} = \mathrm{F}\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{2\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim_{u\to+\infty} \mathrm{F}(u) = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{F}(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right) = +\infty$. Ceci signifie que $\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{=} o(\mathrm{F}(x))$.

7.

```
from matplotlib.pyplot import plot
from math import sqrt
from numpy import logspace

def F(x,eps) :
u=1
v=x
while abs(uv)>eps :
u,v=sqrt(u*v),(u+v)/2
return (u+v)/2

x=logspace(3,1,1000)
y=[F(t,1e3) for t in x]
plot(x,y)
y=[sqrt(t) for t in x]
plot(x,y)
y=[(1+t)/2 for t in x]
plot(x,y)
```