Interrogation écrite n°01

NOM : Prénom : Note :

1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n\left(\ln(n+1)-\ln(n)\right)$.

   Remarquons que $\ln(n+1)-\ln(n)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. *Ainsi la suite* $(\ln(n+1)-\ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est décroissante et de limite nulle. La série* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n\left(\ln(n+1)-\ln(n)\right)$ *converge d'après le critère spécial des séries alternées.* ■

2. Déterminer un équivalent du reste de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

   On sait que $\frac{1}{n^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. *Comme la série* $\sum\frac{1}{n^2}$ *est un série à termes positifs convergente,*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$$

■

3. Justifier la convergence de la série $\sum 2^{n+2}\cdot 3^{1-n}$ et calculer $\sum_{n=2}^{+\infty}2^{n+2}\cdot 3^{1-n}$.

   Remarquons que $2^{n+2}\cdot 3^{1-n}=12\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$. *La série* $\sum 2^{n+2}\cdot 3^{1-n}$ *est donc une série géométrique de raison* $\frac{2}{3}\in[0,1[$ *donc une série convergente. De plus,*

$$\sum_{n=2}^{+\infty}2^{n+2}\cdot 3^{1-n}=12\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=12\left(\frac{2}{3}\right)^2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=12\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=16$$

■

4. Justifier la convergence et calculer la valeur de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Remarquons que $t \mapsto te^{-t}$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$. *De plus,* $te^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t}^2\right)$ *par croissances comparées. Or* $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$ *donc* $t \mapsto te^{-t}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$ *i.e.* I *converge.*
Les fonctions $t \mapsto t$ *et* $t \mapsto -e^{-t}$ *sont de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *et* $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -te^{-t}$ *donc, par intégration par parties,*

$$\mathrm{I} = -\left[te^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$$

■

5. Justifier la convergence et calculer la valeur de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t\,\mathrm{d}t}{1+e^{2t}}$ par un changement de variable.

On effectue le changement de variable $u = e^t$ *i.e.* $t = \ln(u)$. *Comme* $\ln$ *est une bijection strictement croissante de* $[1,+\infty[$ *sur* $[0,+\infty[$, I *est de même nature que* $\mathrm{J} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ *et* $\mathrm{I} = \mathrm{J}$ *en cas de convergence. Comme une primitive de* $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ *est* $\arctan$ *qui admet une limite finie en* $+\infty$, J *converge et*

$$\mathrm{I} = \mathrm{J} = [\arctan(t)]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

■

6. Déterminer un équivalent de $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{\ln(1+t)}{t^2+t^3}\,\mathrm{d}t$ en 0^+.

Remarquons que $\dfrac{\ln(1+t)}{t^2} \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}$. *Or* $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ *est positive sur* $]0,1]$ *et* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ *diverge. Ainsi*

$$\int_x^1 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to0^+}{\sim} \int_x^1 \mathrm{d}t = -\ln(x)$$

■