

DEVOIR SURVEILLÉ N°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – E3A MP 2013

L'objet du problème est l'étude des deux suites récurrentes doubles définies par :

$$u_0 = a, u_1 = b, \forall n \geq 0, u_{n+2} = \frac{2}{u_{n+1} + u_n} \quad \text{et} \quad v_0 = a, v_1 = b, \forall n \geq 0, v_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{v_{n+1}v_n}}$$

où a et b sont deux réels strictement positifs.

Partie I – Etude de la suite (v_n)

Soit $v_0 > 0$ et $v_1 > 0$. On considère la suite définie pour $n \geq 0$ par : $v_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{v_{n+1}v_n}}$.

1. Quelles sont les limites possibles, finies ou infinies, de la suite (v_n) ? (On justifiera précisément la réponse.)
2. On pose : $w_n = \ln(v_n)$.
 - a. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (w_n) .
On note F l'espace vectoriel complexe des suites complexes vérifiant cette relation de récurrence.
 - b. Déterminer une base de F .
 - c. Si $(x_n) \in F$, que peut-on dire de la convergence de (x_n) ?
3. Que peut-on en déduire concernant le comportement de la suite (v_n) ? sur le comportement de la série $\sum_{n \geq 0} v_n$? de la série $\sum_{n \geq 0} (v_n - 1)$?

Partie II – Norme subordonnée

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On appelle *norme subordonnée* à la norme $\|\cdot\|$ l'application $\|\cdot\|$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\|A\| = \sup_{X \in \mathbb{C}^n, \|X\| \leq 1} \|AX\|$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|$ définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\|\cdot\|$ est une *norme d'algèbre*, c'est-à-dire que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Partie III – Etude de normes matricielles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite, on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme usuelle sur \mathbb{C}^n définie pour $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ par :

$$\|(z_1, z_2, \dots, z_n)\|_\infty = \max(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$$

et on identifie le n -uplet $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ au vecteur colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note

$\|A\|_\infty$ la norme de A pour la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_\infty$. Enfin, pour $Z \in \mathbb{C}^n$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $N_P(Z) = \|PZ\|_\infty$.

1. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

On pose $m = \max_{1 \leq i \leq n} |m_{i,i}|$.

- a. Soit $Z \in \mathbb{C}^n$. Montrer que $\|DZ\|_\infty \leq m\|Z\|_\infty$.
 - b. Déterminer $\|D\|_\infty$.
2. a. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que N_P est une norme sur \mathbb{C}^n ssi P est une matrice inversible. Lorsque P est inversible, on notera dorénavant $\|\cdot\|_P$ pour N_P et la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_P$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sera notée $\|\cdot\|_P$.
- b. On se donne une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que :

$$\|A\|_P = \|PAP^{-1}\|_\infty.$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\text{sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M et on définit $\rho(M)$ par : $\rho(M) = \max\{|\mu|, \mu \in \text{sp}(M)\}$.
- a. Montrer que, pour toute matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, on a : $\rho(A) = \rho(PAP^{-1})$.
 - b. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\rho(A) \leq \|A\|_P$.
 - c. On suppose A diagonalisable. Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) = \|A\|_P$.
 - d. Un exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\rho(A)$. Déterminer l'inverse P^{-1} d'une matrice $P \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) = \|A\|_P$.
 - e. Un exemple. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par : $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,j} = j$. Déterminer l'inverse P^{-1} d'une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) = \|A\|_P$.

4. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. Soit donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

- a. On pose $m = \max(|a| + |b|, |c| + |d|)$. Montrer que, pour tout $Z \in \mathbb{C}^2$, on a : $\|AZ\|_\infty \leq m\|Z\|_\infty$. Déterminer $\|A\|_\infty$.
- b. On suppose la matrice non diagonalisable et on note f l'endomorphisme de \mathbb{C}^2 canoniquement associé à A .

- i. Démontrer que $\text{sp}(A)$ ne contient qu'un seul élément. On le note α .
- ii. Démontrer l'existence d'une base e de \mathbb{C}^2 telle que : $\text{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.
- iii. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer l'existence d'une base e' de \mathbb{C}^2 telle que :
 $\text{Mat}_{e'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ où $|\beta'| \leq \varepsilon$.
- iv. En déduire l'existence d'une matrice $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que : $\|A\|_P \leq \rho(A) + \varepsilon$.
- c. Déterminer $\inf_{P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})} \|A\|_P$.
- d. Un exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer $\|A\|_\infty$ et montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $\|A\|_P \leq 2$.
- e. On suppose que $\rho(A) < 1$. Justifier l'existence d'une matrice $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que : $\|A\|_P < 1$.
 Que peut-on en déduire concernant la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Partie IV – Etude de la suite (u_n)

Soit $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$. On considère la suite définie pour $n \geq 0$ par : $u_{n+2} = \frac{2}{u_{n+1} + u_n}$. On considère la fonction :

$$f : \begin{matrix} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \rightarrow & (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ (x, y) & \mapsto & \left(y, \frac{2}{x+y}\right) \end{matrix}.$$

On a alors : $f(u_n, u_{n+1}) = (u_{n+1}, u_{n+2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 .

Dans la suite, on note $df_{(x_0, y_0)}$ et $J_{(x_0, y_0)}$ la différentielle et la jacobienne de f au point $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

2. Déterminer les points fixes de f dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

3. Déterminer la matrice $J_{(1,1)}$.

4. Démontrer l'existence d'une matrice $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $\|J_{(1,1)}\|_P = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. On fixe un réel α vérifiant $\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$.

- a. Justifier l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \|(1, 1) - (x_0, y_0)\|_P \leq \eta \implies \|J_{(x_0, y_0)}\|_P \leq \alpha.$$

Dans la suite, on note D le disque fermé de centre $(1, 1)$ et de rayon η pour la norme $\|\cdot\|_P$ et on suppose qu'il existe un entier n_0 tel que $(u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in D$.

- b. Soit $(x_0, y_0) \in D \cap (\mathbb{R}_+^*)^2$. On définit, pour $t \in [0, 1]$:

$$\varphi(t) = f((1, 1) + t[(x_0, y_0) - (1, 1)]).$$

Justifier que φ est de classe \mathcal{C}^1 et obtenir une expression de $\varphi'(t)$ faisant intervenir la différentielle de f . En déduire :

$$\|(1, 1) - f(x_0, y_0)\|_P \leq \alpha \|(1, 1) - (x_0, y_0)\|_P.$$

- c. Démontrer que, pour tout $n \geq n_0$, $(u_n, u_{n+1}) \in D$.

d. Démontrer que, pour tout $n \geq n_0$, on a l'inégalité :

$$\|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha^{n-n_0} \|(1, 1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P.$$

e. Obtenir que : $u_n = 1 + O(\alpha^n)$.

f. Que peut-on en déduire concernant le comportement de la suite (u_n) ? sur le comportement de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$? de la série $\sum_{n \geq 0} (u_n - 1)$?

Partie V – Suite de l'étude

On considère une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On rappelle qu'une valeur d'adhérence de (x_n) est un réel λ pour lequel il existe une suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n) qui converge vers λ . On rappelle que toute suite bornée admet une valeur d'adhérence et on admet que toute suite bornée admet une plus petite et une plus grande valeur d'adhérence.

1.
 - a. Soit (x_n) une suite bornée non convergente admettant λ pour valeur d'adhérence. Justifier l'existence d'un réel $r > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ vérifiant $|x_n - \lambda| > r$. En déduire que (x_n) admet une valeur d'adhérence $\lambda' \neq \lambda$.
 - b. Montrer que toute suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence est convergente.
 - c. Soit (x_n) une suite bornée. On note ℓ_- sa plus petite valeur d'adhérence et ℓ_+ sa plus grande. Montrer l'équivalence : (x_n) est convergente si et seulement si $\ell_- = \ell_+$.

2. Dans cette question, (u_n) désigne la suite étudiée dans la partie IV.

On pose $\alpha = \min \left\{ u_0, u_1, \frac{1}{u_0}, \frac{1}{u_1} \right\}$.

- a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \leq u_n \leq \frac{1}{\alpha}$. On note ℓ_- et ℓ_+ les plus petite et plus grande valeurs d'adhérences de (u_n) .
- b. Justifier l'existence d'une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) telle que $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\varphi(n)+1})$ convergent et $u_{\varphi(n)+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_-$. En déduire l'inégalité $\ell_- \ell_+ \geq 1$.
- c. Montrer que l'on a : $\ell_- \ell_+ = 1$.
- d. En considérant une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) telle que $(u_{\varphi(n)})$, $(u_{\varphi(n)+1})$ et $(u_{\varphi(n)+2})$ convergent et $(u_{\varphi(n)+3}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_-$, obtenir l'égalité $\ell_- = \ell_+$ et conclure.
- e. Que peut-on dire de l'hypothèse d'existence d'un entier n_0 tel que $(u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in D$ dans la question IV.5.a ?