Devoir à la maison n°06

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que
$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}x^k + o(x^n)$$

2. En déduire un développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de arcsin.

Exercice 2.

1. Soient a et b des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I. Montrer que toute solution sur I de l'équation différentielle $y' + ay = b$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

2. Soient a, b et c des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I. Montrer que toute solution sur I de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Exercice 3.

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E) \quad (1+x^2)y' = 1 + 3xy$$

1. Démontrer que les solutions réelles de (E) sont les fonctions f_λ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_\lambda(x) = P(x) + \lambda(1+x^2)^r$$
où λ est un nombre réel, r un nombre rationnel à préciser et P une fonction polynôme à expliciter.

2. Montrer qu'il existe une unique solution g de (E) admettant une limite finie en $+\infty$.

3. Calculer g' et déterminer son signe.

4. Déterminer, si elle existe, la limite de $\dfrac{g(x)}{x^3}$ quand x tend vers $-\infty$.

5. Représenter graphiquement la fonction g.

Exercice 4.

On rappelle que si f est dérivable en a, alors la courbe représentative de f admet pour tangente au point d'abscisse a la droite d'équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.
On considère l'équation différentielle

$$(E) : \ (1+x^2)y' + 2xy = \frac{1}{x}$$

1. Dans cette question, on ne cherchera pas à résoudre (E). On note f_λ l'unique solution de (E) telle que $f_\lambda(1) = \lambda$.

   a. Former une équation cartésienne de la tangente D_λ à la courbe représentative de f_λ au point d'abscisse 1.

   b. Montrer que les droites D_λ passent toutes par un même point lorsque λ décrit $\mathbb{R}$.

2. **a.** Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer l'unique solution f_λ de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f_\lambda(1) = \lambda$.

3. On se place maintenant dans un cadre plus général. Soient a, b, c trois fonctions continues sur un intervalle I. On suppose que a ne s'annule pas sur I. On se donne $x_0 \in I$ et on considère l'équation différentielle

   $$(\mathcal{E}) : \ ay' + by = c$$

   Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note f_λ l'unique solution de $(\mathcal{E})$ sur I telle que $f_\lambda(x_0) = \lambda$. On note enfin $\mathcal{D}_\lambda$ la tangente à la courbe représentative de f_λ au point d'abscisse x_0.
   Montrer que, lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, les droites $\mathcal{D}_\lambda$ sont soit toutes concourantes soit toutes parallèles.