Dérivation et intégration

Opérations et dérivation

$$(u+v)' = u' + v' \qquad (uv)' = u'v + uv' \qquad (\lambda u)' = \lambda u' \qquad (u \circ v)' = (u' \circ v)v'$$

$$\left(u^{-1}\right)' = \frac{1}{u' \circ u^{-1}} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \qquad (u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$$

Formule de Leibniz : $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$

Dérivées usuelles

$$\ln(x) \longmapsto \frac{1}{x} \qquad e^{ax} \longmapsto ae^{ax} \qquad x^\alpha \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\sin(x) \longmapsto \cos(x) \qquad \cos(x) \longmapsto -\sin(x) \qquad \tan(x) \longmapsto 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\arcsin(x) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos(x) \longmapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arctan(x) \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$$

$$\mathrm{sh}(x) \longmapsto \mathrm{ch}(x) \qquad \mathrm{ch}(x) \longmapsto \mathrm{sh}(x) \qquad \mathrm{th}(x) \longmapsto 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$$

Primitives usuelles

$$\ln(x) \longmapsto x\ln(x) - x \qquad e^{ax} \longmapsto \frac{e^{ax}}{a}\ (a \neq 0) \qquad x^\alpha \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln|x| & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\sin(x) \longmapsto -\cos(x) \qquad \cos(x) \longmapsto \sin(x) \qquad \tan(x) \longmapsto -\ln|\cos(x)|$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longmapsto \arcsin(x) \qquad -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longmapsto \arccos(x) \text{ ou } -\arcsin(x) \qquad \frac{1}{1+x^2} \longmapsto \arctan(x)$$

$$\mathrm{sh}(x) \longmapsto \mathrm{ch}(x) \qquad \mathrm{ch}(x) \longmapsto \mathrm{sh}(x) \qquad \mathrm{th}(x) \longmapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$$

Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral : Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, alors

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2, f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Inégalité de Taylor-Lagrange : Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et si $|f^{(n+1)}| \leq \mathrm{M}$ sur I, alors

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2, \left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \mathrm{M} \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Formule de Taylor-Young : Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et $a \in \mathrm{I}$, alors

$$\forall x \in \mathrm{I}, f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$