# Devoir à la maison n° 6 : corrigé

## Problème 1 — Equation de Legendre

### Partie I – Résolution de $(\mathbf{E_0})$

**1.** En posant $z = y'$, l'équation $(\mathbf{E_0})$ est équivalente sur $]-1,1[$ à $(\mathbf{E'_0}) : z' + \frac{2x}{x^2-1}z = 0$.
Une primitive de $x \mapsto \frac{2x}{x^2-1}$ sur $\Omega$ est $x \mapsto \ln(1-x^2)$ : les solutions de $(\mathbf{E'_0})$ sur $]-1,1[$ sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda}{1-x^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Les solutions de $(\mathbf{E_0})$ sont les primitives de ces fonctions, c'est-à-dire les fonctions $x \mapsto \lambda \operatorname{argth}(x) + \mu$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

**2.** Avec les notations précédentes, on a f solution de $(\mathbf{E_0})$, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ *si et seulement si* $\mu = 0$ et $\lambda = 1$. L'unique fonction $f$ adéquate est donc la fonction argth.

### Partie II – Résolution de $(\mathbf{E_1})$

**1.** Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une solution polynomiale de $(\mathbf{E_1})$ avec $a_n 0$. On a alors

$$(x^2-1)P''(x) + 2xP'(x) - 2P(x) = a_n[n(n-1) + 2n - 2]x^n + Q(x) = a_n[n^2 + n - 2]x^n + Q(x)$$

avec $Q$ une fonction polynomiale de degré inférieur à $n-1$. Ainsi $n^2 + n - 2 = (n-1)(n+2) = 0$, d'où $n = 1$. Ainsi, les seules *éventuelles* solutions polynomiales non nulles de $(\mathbf{E_1})$ sont de degré un. On trouve sans peine, en posant $P(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$, que $P$ est solution *si et seulement si* $b = 0$ i.e. $P(x) = ax$.

**2.** **a.** On a pour tout $x \in \Omega^*$, $y(x) = xz(x)$, $y'(x) = xz'(x) + z(x)$ et $y''(x) = xz''(x) + 2z'(x)$ d'où $z$ est solution sur $\Omega^*$ de l'équation

$$(\mathbf{E'_1}) : \ x(x^2-1)z'' + (4x^2-2)z' = 0$$

c'est-à-dire

$$(\mathbf{E'_1}) : \ z'' + \frac{4x^2-2}{x(x^2-1)}z' = 0$$

**b.** Soient $\alpha, \beta$ et $\gamma$ trois réels. Pour tout $x$ dans $\Omega^*$, on a

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x+1} = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\beta-\gamma)x - \alpha}{x(x^2-1)}$$

En choisissant $\alpha, \beta$ et $\gamma$ tels que

$$\alpha + \beta + \gamma = 4 \qquad \beta - \gamma = 0 \qquad -\alpha = -2$$

i.e. $\alpha = 2$ et $\beta = \gamma = 1$, on a bien l'égalité voulue sur $\Omega^*$. Ainsi,

$$\forall x \in \Omega^*, \ \frac{4x^2-2}{x(x^2-1)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

**c.** Une primitive de $x \mapsto \frac{4x^2-2}{x(x^2-1)}$ sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$ est donc $x \mapsto \ln(x^2(1-x^2))$. Les solutions de $(\mathbf{E'_1})$ sur $]-1,0[$ et $]0,1[$ sont les primitives des fonctions $x \mapsto \frac{\lambda}{x^2(1-x^2)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or pour tout $x \in \Omega^*$

$$\frac{1}{x^2(1-x^2)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2}$$

donc les solutions de $(\mathbf{E'_1})$ sur $]-1,0[$ et $]0,1[$ sont les fonctions $x \mapsto -\frac{\lambda}{x} + \lambda \operatorname{argth}(x) + \mu$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

**d.** Soit $y$ une solution de $(\mathbf{E_1})$ sur $\Omega$. Alors, d'après la question **II.2.a**, la fonction $x \mapsto z(x) = y(x)/x$ vérifie $(\mathbf{E_1'})$ et donc, d'après la question **II.2.c**, qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in ]-1,0[,\ z(x) = -\frac{\lambda_1}{x} + \lambda_1 \operatorname{argth}(x) + \mu_1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in ]0,1[,\ z(x) = -\frac{\lambda_2}{x} + \lambda_2 \operatorname{argth}(x) + \mu_2$$

et donc

$$\forall x \in ]-1,0[,\ y(x) = -\lambda_1 + \lambda_1 x \operatorname{argth}(x) + \mu_1 x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in ]0,1[,\ z(x) = -\lambda_2 + \lambda_2 x \operatorname{argth}(x) + \mu_2 x$$

Comme $y$ est continue en $0$, on doit avoir $\lim_{x\to 0^-} y(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ i.e. $\lambda_1 = \lambda_2$. On a alors en particulier $y(0) = \lambda_1 = \lambda_2$. Comme $y$ est dérivable en $0$, on doit aussi avoir $\lim_{x\to 0^-} \frac{y(x)-y(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)-y(0)}{x}$, ce qui équivaut, après tout calcul, à $\mu_1 = \mu_2$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in ]-1,1[,\ y(x) = -\lambda + \lambda x \operatorname{argth}(x) + \mu x$$

Réciproquement, on vérifie sans peine que les fonctions $x \mapsto -\lambda + \lambda x \operatorname{argth}(x) + \mu x$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ sont solution de l'équation $(\mathbf{E_1})$. Les solutions de cette équation sur $\Omega$ sont donc les fonctions

$$x \mapsto -\lambda + \lambda x \operatorname{argth}(x) + \mu x$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

## Partie III – Cas général

**1.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(x^2-1)P''(x) + 2xP'(x) - 2P(x) = a_q[q(q-1) + 2q - n(n+1)]x^q + Q(x) = a_q[q^2 + q - n(n+1)]x^q + Q(x)$$

avec $Q$ une fonction polynomiale de degré inférieur à $q-1$. Ainsi $q^2 + q - n(n+1) = (q-n)(q+n+1) = 0$, d'où $q = n$ car $q \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$Q(x) = [2(n-1) + (n-1)(n-2) - n(n+1)]a_{n-1}x^{n-1} + R(x) = -2na_{n-1} + R(x)$$

où $R$ est une fonction polynomiale de degré inférieur à $n-2$. On en déduit que $-2na_{n-1} = 0$ et puisque $n \neq 0$, $a_{n-1} = 0$.

**2.** On suppose que $P \in \mathcal{P}_n$. On sait alors, d'après la question précédente, que $P$ est de degré $n$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_{n-1} = 0$.

**a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
-n(n+1)P(x) &= \sum_{k=0}^{n} -n(n+1)a_k x^k \\
2xP'(x) &= \sum_{k=0}^{n} 2ka_k x^k \\
x^2P''(x) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_k x^k \\
-P''(x) &= \sum_{k=2}^{n} -k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{n-2} -(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k
\end{aligned}$$

et donc, puisque les termes de degrés $n$ s'éliminent et $a_{n-1} = 0$,

$$(x^2-1)P''(x) + 2xP'(x) - n(n+1)P(x) = \sum_{k=0}^{n-2} [-n(n+1)a_k + 2ka_k + k(k-1)a_k - (k+2)(k+1)a_{k+2}]x^k$$

Ainsi $P$ est solution de $(\mathbf{E_n})$ *si et seulement si*

$$\forall k \in [\![0, n-2]\!],\ -n(n+1)a_k + 2ka_k + k(k-1)a_k - (k+2)(k+1)a_{k+2} = 0$$

i.e.

$$\forall k \in [\![0, n-2]\!],\ a_{k+2} = \frac{k^2 + k - n^2 - n}{(k+1)(k+2)}a_k = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)}a_k$$

**b.** Comme $a_{n-1}=0$, on déduit de la relation établie à la question précédente par une récurrence immédiate que pour tout entier naturel $k$ tel que $2k+1\leqslant n$, $a_{n-2k-1}=0$.

**c.** Raisonnons pour un entier naturel $k$ tel que $2k\leqslant n$, on note

$$\mathrm{HR}(k): \ a_{n-2k}=(-1)^k\frac{\binom{2n-2k}{n-k}\binom{n-k}{k}}{\binom{2n}{n}}a_n$$

- $\mathrm{HR}(0)$ est évidemment vraie.
- Soit $k$ un entier naturel tel que $2k+2\leqslant n$. On suppose $\mathrm{HR}(k)$ vraie. On a alors, d'après la formule de récurrence établie à la question **III.2.a**,

$$\begin{aligned}a_{n-2k-2}&=-\frac{(n-2k)(n-2k-1)}{2(k+1)(2n-2k-1)}a_{n-2k}\\&=-\frac{(n-2k)(n-2k-1)}{2(k+1)(2n-2k-1)}\times(-1)^k\frac{\binom{2n-2k}{n-2k}\binom{n}{k}}{\binom{2n}{n}}a_n\end{aligned}$$

D'après une relation sur les coefficients binomiaux

$$(n-2k-1)(n-2k)\binom{2n-2k}{n-2k}=(n-2k-1)(2n-2k)\binom{2n-2k-1}{n-2k-1}=2(n-k)(2n-2k-1)\binom{2n-2k-2}{n-2k-2}$$

de sorte que

$$a_{n-2k-2}=(-1)^{k+1}\frac{(n-k)\binom{2n-2k-2}{n-2k-2}\binom{n}{k}}{(k+1)\binom{2n}{n}}$$

Enfin on montre sans peine que $\frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}=\binom{n}{k+1}$. Finalement,

$$a_{n-2k-2}=(-1)^{k+1}\frac{\binom{2n-2k-2}{n-2k-2}\binom{n}{k+1}}{\binom{2n}{n}}$$

Ainsi $\mathrm{HR}(k+1)$ est vraie.
Par récurrence finie, $\mathrm{HR}(k)$ est vraie pour tout entier naturel $k$ tel que $2k\leqslant n$.

**d.** D'après ce qui précède, les solutions polynomiales de $(\mathbf{E_n})$ sont les fonctions

$$x\mapsto\lambda\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\frac{(-1)^k\binom{2n-2k}{n-k}\binom{n-k}{k}}{\binom{2n}{n}}x^{n-2k}$$

avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

**e.** Après calcul,

$$\mathcal{P}_4=\left\{x\mapsto\lambda\left(x^4-\frac{6}{7}x^2+\frac{3}{35}\right)\right\}$$