

### EXERCICE 1.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1.  $t \mapsto te^{-3t^2}$

2.  $t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^4}$

3.  $t \mapsto \frac{1}{\text{th } t}$

4.  $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^3}$

5.  $t \mapsto \frac{\sin(2t)}{1+\sin^2 t}$

6.  $t \mapsto \tan^2 t$

7.  $t \mapsto \frac{1}{\cos^2 t \sqrt{\tan t}}$

8.  $t \mapsto \frac{1}{t + \sqrt{t}}$

9.  $t \mapsto \frac{\ln(\ln t)}{t}$

10.  $t \mapsto e^{e^t+t}$

11.  $t \mapsto \frac{1}{t + t(\ln t)^2}$

12.  $t \mapsto \frac{1}{\text{ch}^2 t}$

### EXERCICE 2.

Soit  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ . Calculer

1.  $I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt$

2.  $J_{m,n} = \int_0^{2\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt$

3.  $K_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \sin(nt) dt$

### EXERCICE 3.

Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_0^{\pi/2} x \sin x dx, \quad J = \int_0^1 \sqrt{e^x} dx, \quad K = \int_0^2 \frac{2^x dx}{\sqrt{2+2^x}}.$$

### EXERCICE 4.

Calculer les intégrales suivantes

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx, \quad B = \int_0^\pi (\sin x)^3 dx, \quad C = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

### EXERCICE 5.

Déterminer une primitive de la fonction  $f(x) = (\sin(2x))^3 \cos(3x)$ .

### EXERCICE 6.

Calculer l'intégrale  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(2x)^3 dx$ .

### EXERCICE 7. ★

Calculer, en fonction du nombre réel  $x$ , l'intégrale suivante

$$f(x) = \int_0^1 |x-t| dt.$$

### EXERCICE 8. ★

Calculer :

1.  $I = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2(t)} dt$  en posant  $u = \tan(t)$  ;

2.  $J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$  en posant  $u = \sqrt{x}$  ;

3.  $K = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1} dx$  en posant  $u = \sqrt{e^x-1}$  ;

4.  $L = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+u+1}}$  en posant  $x = \sqrt{u^2+u+1} - u$  ;

5.  $M = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos(x)}$  en posant  $u = \sin(x)$  ;

6.  $N = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin(x)}$  en posant  $u = \cos(x)$  ;

7.  $O = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \sin^3(x) dx$  en posant  $u = \cos(x)$  ;

8.  $P = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x) dx}{1+\cos^2(x)}$  en posant  $u = \cos(2x)$  ;

9.  $Q = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$  en posant  $x = \cos(2u)$  ;

10.  $R = \int_0^1 \frac{\sqrt{x} + x^{1/4}}{\sqrt{x}+1} dx$  en posant  $u = x^{1/4}$ .

**EXERCICE 9.**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $H$  la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \alpha \cos x + \sin x + 2$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha$  pour que  $H$  ne s'annule pas.
2. On suppose la condition précédente satisfaite et on pose pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{H(t)}$ . Justifier que  $F$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}$  et donner une expression de  $F(x)$  pour  $x \in ]-\pi, \pi[$ .
3. Calculer l'intégrale  $F(2\pi)$ .

**EXERCICE 10.**

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels strictement positifs. On définit une fonction  $f$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\alpha + \beta \cos^2 x}$$

1. Justifier que  $f$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ . On note  $F$  celle qui s'annule en 0.
2. Montrer que  $F(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
3. Déterminer une expression de  $F(x)$  pour  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .
4. Calculer  $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{49 - 45 \sin^2 t}$ .

**EXERCICE 11.**

Calculer  $I = \int_{a^2}^{b^2} x \sqrt{(x - a^2)(b^2 - x)} dx$ .

**EXERCICE 12.**

Calculer

1.  $\int x \arctan^2(x) dx$
2.  $\int e^x \sin^2(x) dx$
3.  $\int \cos(\ln x) dx$  en posant  $u = \ln x$
4.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$  en posant  $u = \sqrt{1+x}$ .
5.  $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$

**EXERCICE 13.**

On pose  $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt$  et  $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$ .

1. Justifier que  $S$  et  $C$  sont bien définies.
2. Montrer que  $S = C$  par changement de variable.
3. Que vaut  $S + C$  ? En déduire  $S$  et  $C$ .
4. En déduire  $I = \int_0^1 \frac{dt}{t + \sqrt{1-t^2}}$ .

**EXERCICE 14.**

Calculer

1.  $\int_0^{\pi} \frac{\sin t dt}{4 - \cos^2 t}$  en posant  $u = \cos t$  ;
2.  $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{dt}{\sin t}$  pour  $x \in ]0, \pi[$  en posant  $u = \cos t$  ;
3.  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t}$  en posant  $u = \sin t$  ;
4.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t + \cos t}$  en posant  $u = \tan \frac{t}{2}$ .

**EXERCICE 15.**

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

1. Déterminer une relation entre  $I_{n+1}(x)$  et  $I_n(x)$ .
2. En déduire l'existence et une expression simple de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x)$ .

**EXERCICE 16.**

On pose pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$ .

1. Montrer que  $(I_n)$  converge vers 0.
2. Déterminer une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n+1}$ .
3. En déduire que  $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ .

**EXERCICE 17.**

On considère la suite de terme général  $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$ .

1. Déterminer la limite de  $(I_n)$ .
2. Déterminer une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n+1}$ .
3. On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ . Exprimer  $S_n$  en fonction de  $I_n$ .
4. En déduire la convergence et la limite de  $(S_n)$ .

**EXERCICE 18.**

Pour  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ , on pose

$$I_{n,p} = \int_0^1 t^n (1-t)^p dt$$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $p \in \mathbb{N}$

$$I_{n,p} = \frac{n}{p+1} I_{n-1,p+1}$$

2. En déduire une expression de  $I_{n,p}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**EXERCICE 19.★★**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t} dt.$$

1. Trouver une relation de récurrence entre  $I_{n-1}$  et  $I_n$ .
2. Calculer  $I_0$  puis  $I_n$  pour tout  $n \geq 0$ .
3. Calculer  $I_n$  d'une autre manière et montrer que

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+3} \binom{n}{k} = 2^{2n+2} \frac{n!(n+2)!}{(2n+4)!}.$$

**EXERCICE 20.**

Calculer une primitive des fonctions suivantes.

$$1. \quad t \mapsto \frac{1}{1+t+t^2}$$

$$3. \quad t \mapsto \frac{3t+2}{2t^2-4t+3}$$

$$2. \quad t \mapsto \frac{2-5t}{1+t^2}$$

**EXERCICE 21.★**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Etablir la dérivabilité puis calculer la dérivée de la fonction  $\psi$  définie par

$$x \mapsto \int_0^1 f(t+x) dt.$$

**EXERCICE 22.**

Justifier que  $f : x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} \frac{t}{1+e^t} dt$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée.

**EXERCICE 23.**

Calculer les limites suivantes. On ne cherchera pas à calculer les intégrales.

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-x}^x \sin(t^2) dt.$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}.$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt.$$