

DEVOIR SURVEILLÉ N°12

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Alors

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{vmatrix} = (X-a)(X-d) - bc = X^2 - (a+d)X + ad - bc = X^2 - \text{tr}(A)X + (ad - bc)$$

Comme $\chi_A(A) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$$

2 2.a $\mathbb{A} = \text{vect}(I_2, A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, on a clairement, $I_2 \in \mathbb{A}$ et pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$,

$$(aI_2 + bA)(cI_2 + dA) = acI_2 + (bc + ad)A + bdA^2$$

D'après la question précédente, $A^2 \in \text{vect}(I_2, A) = \mathbb{A}$ donc $(aI_2 + bA)(cI_2 + dA) \in \mathbb{A}$. Ainsi \mathbb{A} est également stable par multiplication : c'est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2.b Si A est une matrice scalaire, $A \in \text{vect}(I_2)$ donc $\mathbb{A} = \text{vect}(I_2)$ et $\dim \mathbb{A} = 1$.

Si A n'est pas une matrice scalaire, alors (I_2, A) est libre. C'est donc une base de $\mathbb{A} = \text{vect}(I_2, A)$ et $\dim \mathbb{A} = 2$.

3 Supposons que $(\text{tr } A)^2 < 4 \det(A)$. Alors le discriminant de χ_A est strictement négatif. Comme χ_A est à coefficients réels, χ_A admet deux racines complexes non réelles conjuguées λ et $\bar{\lambda}$. En particulier, χ_A est scindé à racines simples sur \mathbb{C} .

Ainsi A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$. Alors pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aI_2 + bA$ est semblable à $\begin{pmatrix} a + b\lambda & 0 \\ 0 & a + b\bar{\lambda} \end{pmatrix}$.

On cherche donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} a + \lambda b = i \\ a + \bar{\lambda} b = -i \end{cases}$. Il suffit de prendre $\begin{cases} a = -\frac{\text{Re } \lambda}{\text{Im } \lambda} \\ b = \frac{1}{\text{Im } \lambda} \end{cases}$. Ceci est possible puisque λ n'est pas réel de sorte que $\text{Im } \lambda \neq 0$. En posant $B = aI_2 + bA \in \mathbb{A}$ avec ces valeurs de a et b (qui sont bien réelles), B est

alors semblable à $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ puis B^2 est semblable à $-I_2$ et enfin $B^2 = -I_2$.

Inversement, supposons qu'il existe $B \in \mathbb{A}$ telle que $B^2 = -I_2$. Comme $B \in \mathbb{A}$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $B = aI_2 + bA$. Soit λ une valeur propre de A . Alors $a + b\lambda$ est une valeur propre de B . Or $X^2 + 1$ annule B donc les seules valeurs propres possibles de B sont $\pm i$. Ainsi $a + b\lambda = \pm i$. Comme a et b sont réels, λ ne l'est pas. Ainsi A n'admet pas de valeur propre réelle. χ_A n'admet donc que des racines complexes non réelles : son discriminant $(\text{tr } A)^2 - 4 \det A$ est donc strictement négatif.

4 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $aI_2 + bB = 0$. En multipliant par B , on obtient $aB + bB^2 = 0$ ou encore $aB - bI_2 = 0$. Ainsi

$$a(aI_2 + bB) - b(aB - bI_2) = 0$$

et donc

$$(a^2 + b^2)I_2 = 0$$

et enfin $a^2 + b^2 = 0$. Comme a et b sont réels $a = b = 0$ de sorte que (I_2, B) est une famille libre de \mathbb{A} . Comme $\dim \mathbb{A} = \text{rg}(I_2, A) \leq 2$, c'est une base de \mathbb{A} .

Considérons l'unique application linéaire $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A}, \mathbb{C})$ telle que $f(I_2) = 1$ et $f(B) = i$. Comme f envoie une base de \mathbb{A} sur une base du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} , f est bijective. Montrons que f est également un morphisme d'algèbres. Soit $(M, N) \in \mathbb{A}^2$. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = aI_2 + bB$ et $N = cI_2 + dD$. Par linéarité de f ,

$$\begin{aligned} f(M) &= f(aI_2 + bB) = af(I_2) + bf(B) = a + ib \\ f(N) &= f(cI_2 + dB) = cf(I_2) + df(B) = c + id \\ f(MN) &= f(acI_2 + (ad + bc)B + bdB^2) = f((ac - bd)I_2 + (ad + bc)B) \\ &= (ac - bd)f(I_2) + (ad + bc)f(B) = ac - bd + i(ad + bc) \end{aligned}$$

Ainsi

$$f(M)f(N) = (a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc) = f(MN)$$

f est bien un morphisme d'algèbres : \mathbb{A} et \mathbb{C} sont isomorphes.

5 Comme $(\text{tr } A)^2 = 4 \det A$, χ_A admet une unique racine et donc A admet pour unique valeur propre $\lambda = \frac{\text{tr } A}{2}$. A est

trigonalisable et donc semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$ sinon A serait scalaire. Soit $M \in \mathbb{A}$. Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel

que $M = aI_2 + bA$. Alors M est semblable à $\begin{pmatrix} a + b\lambda & b\mu \\ 0 & a + b\lambda \end{pmatrix}$ et $M^2 = 0$ si et seulement si $a + b\lambda = 0$. L'ensemble

des matrices $M \in \mathbb{A}$ vérifiant $M^2 = 0$ est donc la droite $\text{vect}(A - \lambda I_2) = \text{vect}\left(A - \frac{\text{tr } A}{2} I_2\right)$.

Notamment $N = A - \lambda I_2$ vérifie $N^2 = 0$ et $N \neq 0$ car A n'est pas scalaire. L'anneau \mathbb{A} n'est donc pas intègre : ce ne peut être un corps.

6 Comme A et B sont semblables, il existe $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Soit alors $f : M \in \mathbb{A} \mapsto P^{-1}MP$. f est clairement linéaire et à valeurs dans \mathbb{B} . On vérifie aisément qu'en posant $g : M \in \mathbb{B} \mapsto PMP^{-1}$, g est linéaire à valeurs dans \mathbb{B} , $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{A}}$ et $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{B}}$. Ainsi f est bijective. Enfin, on vérifie aisément que $f(I_2) = I_2$ et que pour $(M, N) \in \mathbb{A}^2$, $f(MN) = f(M)f(N)$ donc f est un isomorphisme d'algèbres : \mathbb{A} et \mathbb{B} sont des algèbres isomorphes.

7 Le discriminant de χ_A est strictement positif : χ_A est scindé à racines simples. Par conséquent, A est diagonalisable et admet deux valeurs propres distinctes λ et μ . A est donc semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. D'après la question précédente, \mathbb{A} est isomorphe à $\text{vect}(I_2, D)$, qui est clairement inclus dans l'algèbre $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ des matrices diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Or D n'est pas scalaire puisque $\lambda \neq \mu$. Ainsi $\dim \text{vect}(I_2, D) = 2 = \dim \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$, puis $\text{vect}(I_2, D) = \mathcal{D}_2(\mathbb{R}) : \mathbb{A}$ est isomorphe à $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.

Comme \mathbb{A} est isomorphe en tant qu'anneau à $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$, il suffit de vérifier que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas un corps en constatant par exemple que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas inversible. \mathbb{A} n'est donc pas un corps.

8 Facile.

9 D'après le cours, l'application $\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{cases}$ est un isomorphisme d'algèbres (donc injectif). On vérifie alors que l'application $\Xi : \mathbb{D}\mathcal{L}(\mathbb{D})a\phi_a$ est un morphisme injectif d'algèbres. Par composition, $\Phi = \Psi \circ \Xi$ est également un morphisme injectif d'algèbres.

On vérifie sans difficulté que $\Psi(\mathbb{D})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme Ψ est injectif, Ψ induit un isomorphisme d'algèbres de \mathbb{D} sur $\Psi(\mathbb{D})$ donc \mathbb{D} est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

10 On a clairement $\phi_z(1) = a + ib$ et $\phi_z(i) = -b + ia$ donc

$$\Psi(z) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\phi_z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

11 11.a Comme \mathbb{A} est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $I_n \in \mathbb{A}$ puis $A - \lambda I_n \in \mathbb{A}$. Comme λ est valeur propre de A , $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Comme A n'est pas scalaire, $A - \lambda I_n$ n'est pas nulle. Ainsi \mathbb{A} possède un élément non nul et non inversible : \mathbb{A} n'est pas un corps.

11.b Une matrice diagonalisable ou trigonalisable possède une valeur propre réelle. D'après la question précédente, si \mathbb{A} contient une telle matrice, ce n'est pas un corps.

11.c Soit A une matrice non nulle de \mathbb{A} . L'application Φ_A est clairement un endomorphisme de \mathbb{A} . De plus, l'intégrité de \mathbb{A} montre que le noyau de Φ_A est nul. Enfin, \mathbb{A} est de dimension finie. On peut alors affirmer que Φ_A est un automorphisme de \mathbb{A} . Il est notamment surjectif : en particulier, il existe $B \in \mathbb{A}$ tel que $\Phi_A(B) = I_n$ i.e. $AB = I_n$. On en déduit que A est inversible. Ainsi \mathbb{A} est un corps.

12 Par exemple, $\det(A^2) = \det(-I_n)$ et donc $(-1)^n = \det(A)^2 \geq 0$ donc n est pair.

13 Par bilinéarité du produit matriciel, il suffit de remarquer que les produits deux à deux des éléments de $\{I_n, A, B, AB\}$ restent dans \mathbb{H} .

$$\begin{array}{llll} I_n^2 = I_n \in \mathbb{H} & I_n A = A \in \mathbb{H} & I_n B = B \in \mathbb{H} & I_n AB = AB \in \mathbb{H} \\ AI_n = A \in \mathbb{H} & A^2 = -I_n \in \mathbb{H} & AB \in \mathbb{H} & AAB = A^2 B = -B \in \mathbb{H} \\ BI_n = B \in \mathbb{H} & BA = -AB \in \mathbb{H} & B^2 = -I_n \in \mathbb{H} & BAB = -AB^2 = A \in \mathbb{H} \\ ABI_n = AB \in \mathbb{H} & ABA = -A^2 B = B \in \mathbb{H} & AB^2 = -A \in \mathbb{H} & (AB)^2 = -AB^2 A = A^2 = -I_n \in \mathbb{H} \end{array}$$

14 Les calculs de la question précédente montre que :

$$(tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_n$$

15 15.a Soit $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ tel que $tI_n + xA + yB + zAB = 0$. D'après la question précédente, $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$. On en déduit que $t = x = y = z = 0$ (somme de termes positifs). Ainsi (I_n, A, B, AB) est libre. Cette famille est donc une base de \mathbb{H} et $\dim \mathbb{H} = 4$.

15.b Soit $M \in \mathbb{H}$ non nulle. Comme (I_n, A, B, AB) est une base de \mathbb{H} , il existe $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ non nul tel que $M = tI_n + xA + yB + zAB$. Alors $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ et la question précédente montre que M est inversible d'inverse $\frac{1}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}(tI_n - xA - yB - zAB)$. \mathbb{H} est donc bien un corps.

16 16.a On vérifie immédiatement que $J^2 = I_2$. Des calculs par blocs montrent alors que A et B vérifient la condition (\star) .

16.b A et B sont clairement antisymétriques. De plus,

$$C^T = (AB)^T = B^T A^T = (-B)(-A) = BA = -AB = -C$$

donc C est également antisymétrique. Soit $M \in \mathbb{H}$. Il existe $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = tI_4 + xA + yB + zC$. Alors $M^T = tI_n - xA - yB - zC \in \mathbb{H}$. De plus, $MM^T = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_4$. Si M n'est pas nulle, $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ et donc

$$M^{-1} = \frac{1}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2} M^T$$

De plus, on peut préciser que

$$\det(M)^2 = \det(MM^T) = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^4$$

Ainsi

$$t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{|\det M|}$$

de sorte que

$$M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{|\det M|}} M^T$$

17 On a déjà vu que A, B et C étaient antisymétriques, ce sont donc des quaternions purs. De plus, si on se donne $M = tI_4 + xA + yB + zC$, $M^T = -M \iff t = 0$. Ainsi $\mathbb{L} = \text{vect}(A, B, C)$. La famille (A, B, C) est libre en tant que sous famille de la famille libre (I_4, A, B, C) : c'est donc une base de \mathbb{L} .

\mathbb{L} n'est pas une sous-algèbre de \mathbb{H} puisqu'elle ne contient pas I_4 .

18 Soit $(M, N) \in \mathbb{L}^2$. Il existe donc $(x, y, z, x', y', z') \in \mathbb{R}^6$ tel que $M = xA + yB + zC$ et $N = x'A + y'B + z'C$. Les calculs effectués à la question **13** montre que

$$MN + NM = -2(xx' + yy' + zz')I_4$$

Comme la base (A, B, C) est orthonormé par hypothèse

$$(M | N) = xx' + yy' + zz'$$

Ainsi

$$\frac{1}{2}(MN + NM) = -(M | N)I_4$$

- 19** Supposons que M soit un quaternion pur i.e. $M \in \mathbb{L}$. D'après la question précédente avec $N = M$, $M^2 = -\|M\|^2 I_4$ i.e. $M = \lambda I_4$ avec $\lambda = -\|M\|^2 \leq 0$.
Réciproquement, soit $M \in \mathbb{H}$ tel que $M^2 = \lambda I_4$ avec $\lambda \leq 0$. On sait qu'il existe $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = tI_4 + xA + yB + zC$. Les calculs effectués à la question **13** montre que

$$M^2 = (t^2 - x^2 - y^2 - z^2)I_4 + 2txA + 2tyB + 2tzC$$

Comme (I_4, A, B, C) est libre,

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \lambda \quad \text{et} \quad tx = ty = tz = 0$$

Si $t \neq 0$, alors $x = y = z = 0$ et donc $\lambda = t^2 > 0$, ce qui est contradictoire. Ainsi $t = 0$ puis $M = xA + yB + zC \in \mathbb{L}$.

- 20** Soit $M \in \mathbb{L}$. Comme ϕ est un morphisme d'algèbre. Alors $\phi(M)^2 = M^2$. D'après la question précédente, $M^2 = \lambda I_4$ avec $\lambda \leq 0$. Donc $\phi(M)^2 = -\lambda I_4$ donc $\phi(M) \in \mathbb{L}$ toujours d'après la question précédente. Ainsi \mathbb{L} est stable par ϕ .
D'après la question **18**,

$$M^2 = -\|M\|^2 I_4 \quad \text{et} \quad \phi(M)^2 = -\|\phi(M)\|^2 I_4$$

Comme $M^2 = \phi(M)^2$, $\|\phi(M)\| = \|M\|$. On en déduit que ϕ induit un automorphisme orthogonal de \mathbb{L} .

- 21.1.a** Supposons M et N colinéaires. Comme M et N ont même norme, $M = N$ ou $M = -N$. Si $M = N$, alors $M = P^{-1}NP$ avec $P = I_4 \in \mathbb{H}$. Supposons maintenant $M = -N$. Soit P non nulle dans l'orthogonal de $\text{vect}(M)$ dans \mathbb{L} . D'après la question **18**, $MP + PM = 0$. Comme \mathbb{H} est un corps, P est inversible et donc $P^{-1}MP = -M = N$.

- 21.1.b** Supposons que M et N aient même norme. D'après la question **18**, $M^2 = -\|M\|^2 I_4$ et $N^2 = -\|N\|^2 I_4 = -\|M\|^2 I_4$. Ainsi

$$M(MN) - (MN)N = -\|M\|^2 N + \|M\|^2 M = \|M\|^2 (M - N)$$

Ceci s'écrit également $MP = PN$ avec $P = MN - \|M\|^2 I_4 \in \mathbb{H}$. Supposons que $P = 0$. Alors $MP = -\|M\|^2 N - \|M\|^2 M = 0$. Comme M et N ne sont pas colinéaires, $M \neq 0$ puis $\|M\| \neq 0$ ce qui donne $M + N = 0$. Ceci est absurde car M et N ne sont pas colinéaires. Ainsi $P \neq 0$.

Comme \mathbb{H} est un corps, P est inversible et l'égalité $MP = PN$ donne $N = P^{-1}MP$.

- 22** On vérifie que ϕ_P est à valeurs dans \mathbb{H} , ϕ_P est linéaire, $\phi_P(I_4) = I_4$ et pour tout $(M, N) \in \mathbb{H}^2$, $\phi_P(MN) = \phi_P(M)\phi_P(N)$. Ainsi ϕ_P est un endomorphisme de l'algèbre \mathbb{H} .
De plus, on vérifie aisément que $\phi_P \circ \phi_{P^{-1}} = \phi_{P^{-1}} \circ \phi_P = \text{Id}_{\mathbb{H}}$ donc ϕ_P est un automorphisme de l'algèbre \mathbb{H} .

- 23** ϕ est entièrement déterminé par $\phi(A)$ et $\phi(B)$. En effet, (I_4, A, B, AB) est une base de \mathbb{H} et on sait que $\phi(I_4) = I_4$ et $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$.

Il est donc suffisant de trouver une matrice P non nulle de \mathbb{H} telle que

$$\begin{cases} P^{-1}AP = \phi(A) \\ P^{-1}BP = \phi(B) \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} AP = P\phi(A) \\ BP = P\phi(B) \end{cases}$$

- 23.a** On sait que A et B sont orthogonaux donc $\phi(B)$ est orthogonal à $\phi(A) = A$ car la restriction de ϕ à \mathbb{L} conserve le produit scalaire et donc l'orthogonalité. Ainsi $\phi(B) \in \text{vect}(A)^\perp = \text{vect}(B, C)$. Cette même restriction conserve la norme donc $\|\phi(B)\| = \|B\| = 1$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(B) = \cos(\theta)B + \sin(\theta)C$. Posons $P = \alpha I_4 + \beta A$ comme indiqué dans l'énoncé. On a alors clairement $AP = PA = P\phi(A)$. De plus la condition

$$BP = P\phi(B) = P(\cos(\theta)B + \sin(\theta)C)$$

équivaut à

$$\alpha B + \beta BA = \alpha \cos(\theta)B + \beta \cos(\theta)AB + \alpha \sin(\theta)C + \beta \sin(\theta)AC$$

ou encore

$$\alpha B - \beta C = \alpha \cos(\theta)B + \beta \cos(\theta)C + \alpha \sin(\theta)C - \beta \sin(\theta)B$$

ou enfin, comme (B, C) est libre

$$\begin{cases} \alpha = \alpha \cos(\theta) - \beta \sin(\theta) \\ -\beta = \beta \cos(\theta) + \alpha \sin(\theta) \end{cases}$$

Ceci équivaut à

$$\begin{cases} \alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} = -\beta \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ \alpha \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = -\beta \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

On peut par exemple choisir $(\alpha, \beta) = \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}\right)$. Alors $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et donc $P \neq 0$ car (B, C) est libre. Ce qui précède montre donc que $\phi = \phi_P$.

23.b Comme A et $\phi(A)$ sont de même norme, il existe $Q \in \mathbb{H}$ non nul tel que $\phi(A) = Q^{-1}AQ$ d'après la question **21**. Posons $\psi = \phi \circ \phi_{Q^{-1}} = \phi \circ \phi_Q^{-1}$ de sorte que $\psi(A) = A$. D'après la question précédente, il existe $R \in \mathbb{H}$ non nul tel que $\psi = \phi_R$. Alors $\phi = \phi_R \circ \phi_Q = \phi_{QR}$.