Devoir à la maison n° 4 : corrigé

Problème 1 — Étude d'une fonction

1. **a.** Pour tout $x \in I$, $\cos x \leqslant 1$ et donc $5 - 4\cos x \geqslant 1 > 0$. f est donc bien définie sur I (et même sur $\mathbb{R}$).

b. On peut utiliser la quantité conjuguée. Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) - \sin x &= \sin x \left(\frac{1}{\sqrt{5-4\cos x}} - 1 \right) = \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}} \left(1 - \sqrt{5-4\cos x} \right) \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}} \, \frac{1-(5-4\cos x)}{1+\sqrt{5-4\cos x}} = -\frac{4\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}} \, \frac{1-\cos x}{1+\sqrt{5-4\cos x}} \end{aligned}$$

Comme $1 - \cos x \geqslant 0$ et $\sin x \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant \sin x$ i.e. $f(x) - \sin x \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.

c. On étudie la fonction $\varphi : x \mapsto \sin x - x$ sur I. On a $\varphi'(x) = \cos x - 1 \leqslant 0$ pour tout $x \in I$ et φ' ne s'annule qu'en 0 sur $[0, \pi]$. Ainsi φ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Puisque $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) < 0$ pour tout $x \in]0, \pi]$. $f(0) = 0$ et pour tout $x \in]0, \pi]$, $f(x) \leqslant \sin x < x$. Donc l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur I est $x = 0$.

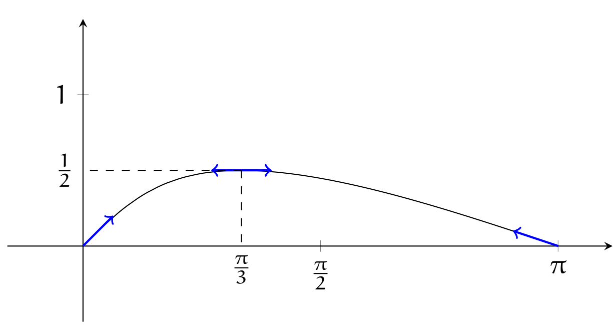
2. Pour tout $x \in I$, $5 - 4\cos x > 0$ donc $x \mapsto \sqrt{5 - 4\cos x}$ est dérivable sur I et ne s'y annule pas. Comme $\sin$ est également dérivable sur I, f est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables sur I et pour $x \in I$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x}{\sqrt{5-4\cos x}} - \frac{4\sin^2 x}{2(5-4\cos x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cos x(5-4\cos x) - 2\sin^2 x}{(5-4\cos x)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-2\cos^2 x + 5\cos x - 2}{(5-4\cos x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(2-\cos x)(2\cos x - 1)}{(5-4\cos x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

En effet, $-2X^2 + 5X - 2$ se factorise sous la forme $(2 - X)(2X - 1)$. Comme $2 - \cos x > 0$ pour tout $x \in I$, le signe de $f(x)$ ne dépend que du signe de $2\cos x - 1$. On en déduit le tableau de variations et le graphe suivants.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

On a notamment $f'(0) = 1$ et $f'(\pi) = -\frac{1}{3}$.



3. **a.** Comme $t \mapsto 5-4t$ ne s'annule pas sur $[-1,1]$, ϕ est dérivable sur $[-1,1]$ et $\phi'(t) = -\frac{9}{(4t-5)^2} < 0$ pour $t \in [-1,1]$. ϕ est donc strictement décroissante sur $[-1,1]$. Comme ϕ est continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$, $\phi([-1,1]) = [\phi(1), \phi(-1)] = [-1,1]$.

b. cos est définie sur I à valeurs dans $[-1,1]$, ϕ est définie sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[-1,1]$ et arccos est définie sur $[-1,1]$ donc $g = \arccos \circ \phi \circ \cos$ est définie sur I.

c. cos est strictement décroissante sur I à valeurs dans $[-1,1]$, ϕ est strictement décroissante sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[-1,1]$ et arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$. On en déduit que $g = \arccos \circ \phi \circ \cos$ est strictement décroissante sur I. Comme g est également continue sur I comme composée de fonctions continues, $g(I) = [g(\pi), g(0)] = [0,\pi] = I$.

4. **a.** Les variations de f montrent que $f(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Comme f est strictement décroissante et continue sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, f induit une bijection de $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Il existe donc un unique $z \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ tel que $f(z) = f(x)$.

b. $\cos(g(x)) = \cos(\arccos(\phi(\cos x))) = \phi(\cos x)$. Ainsi $\cos(g(x)) = \phi(\cos x) = \dfrac{4-5\cos x}{5-4\cos x}$.

$\sin(g(x)) = \sqrt{1-\cos^2(g(x))}$. On obtient $\sin(g(x)) = \sqrt{\dfrac{9\sin^2 x}{(5-4\cos x)^2}} = \dfrac{3\sin x}{5-4\cos x}$ car $\sin x \geqslant 0$ et $5-4\cos x \geqslant 0$.

c. $f(g(x)) = \dfrac{\sin(g(x))}{\sqrt{5-4\cos(g(x))}}$. En remplaçant $\cos(g(x))$ et $\sin(g(x))$ par les expressions trouvées à la question précédente, on obtient bien $f(g(x)) = f(x)$.
De plus, $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et g est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ donc $g(x) \in \left[g(\frac{\pi}{3}), g(0)\right] = \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.
Enfin, z est l'unique réel appartenant à $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ tel que $f(z) = f(x)$ donc $z = g(x)$.

5. **a.** On a $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$. Or $\theta \in [0,\pi]$ donc $\frac{\theta}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi $\cos\frac{\theta}{2}$ et $\sin\frac{\theta}{2}$ sont positifs. On en déduit les résultats annoncés.

b. On a $\cos\left(\dfrac{x+z}{2}\right) = \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{z}{2} - \sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{z}{2}$ et $\cos\left(\dfrac{z-x}{2}\right) = \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{z}{2} + \sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{z}{2}$. De plus, $x, z \in [0,\pi]$ donc

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{z}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\sqrt{\frac{1+\cos z}{2}} \qquad \sin\frac{x}{2}\sin\frac{z}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos z}{2}}$$

Or $\cos z = \cos(g(x)) = \dfrac{4-5\cos x}{5-4\cos x}$ donc

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{z}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(1+\cos x)\left(1+\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(1+\cos x)(9-9\cos x)}}{\sqrt{5-4\cos x}} = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sqrt{5-4\cos x}} = \frac{3}{2}f(x)$$
$$\sin\frac{x}{2}\sin\frac{z}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(1-\cos x)\left(1-\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(1+\cos x)(1+\cos x)}}{\sqrt{5-4\cos x}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sqrt{5-4\cos x}} = \frac{1}{2}f(x)$$

car $\sin x \geqslant 0$. On en déduit que $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right) = f(x)$ et $\cos\left(\frac{z-x}{2}\right) = 2f(x)$.

6. **a.** f est strictement croissante et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ donc induit une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ sur $\left[f(0), f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

b. Soit $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et posons $x = h(y)$ de sorte que $y = f(x)$. Posons également $z = g(x)$.
D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right) = y$. De plus, $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et $z \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ donc $\frac{x+z}{2} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right] \subset [0,\pi]$. Ainsi $\frac{x+z}{2} = \arccos y$.
D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{z-x}{2}\right) = 2y$. De plus, $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et $z \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ donc $\frac{z-x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset [0,\pi]$. Ainsi $\frac{z-x}{2} = \arccos 2y$.
Enfin, $x = \frac{x+z}{2} - \frac{z-x}{2} = \arccos y - \arccos 2y$. On a donc $h(y) = \arccos y - \arccos 2y$.