

DEVOIR SURVEILLÉ N°3 : CORRIGÉ

Problème 1 —

Partie I – Étude d'une application

- Il s'agit de déterminer les solutions éventuelles de l'équation $f(z) = i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$. Cette équation équivaut à $z^2 - iz + 1 = 0$ qui est une équation du second degré dont le discriminant est égal à $-5 = (i\sqrt{5})^2$. Les solutions de cette équation sont donc $\frac{i(1+\sqrt{5})}{2}$ et $\frac{i(1-\sqrt{5})}{2}$ qui sont donc également les antécédents de i par f .
- On vient de voir que i admettait deux antécédents par f : f n'est donc pas injective.
- Soit $Z \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à l'équation (E) : $f(z) = Z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Celle-ci équivaut à $z^2 - zZ + 1 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré dont 0 n'est manifestement pas solution. Cette dernière équation admet donc toujours au moins une solution non nulle donc Z admet au moins un antécédent par f . L'application f est donc surjective.

- Puisque $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$,

$$f(\mathbb{U}) = \{f(e^{i\theta}), \theta \in \mathbb{R}\} = \{e^{i\theta} + e^{-i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\} = \{2\cos\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$$

Puisque $\text{Im}(\cos) = [-1, 1]$, $f(\mathbb{U}) = [-2, 2]$.

- Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors

$$\begin{aligned} z \in f^{-1}(\mathbb{R}) &\iff f(z) \in \mathbb{R} \\ &\iff f(z) = \overline{f(z)} \\ &\iff z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \\ &\iff z - \bar{z} - \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}} = 0 \\ &\iff (z - \bar{z}) \left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) = 0 \\ &\iff \bar{z} = z \text{ ou } |z| = 1 \\ &\iff z \in \mathbb{R} \text{ ou } z \in \mathbb{U} \end{aligned}$$

Ainsi $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \mathbb{U}$.

- On étudie pour cela l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x + \frac{1}{x} \end{cases}$. φ est clairement dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		+	0	-	
Variations de φ		\nearrow	\searrow	\searrow	\nearrow
	$-\infty$		$-\infty$	2	$+\infty$

Il en résulte que $f(\mathbb{R}^*) = \text{Im}(\varphi) =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

- Soit $Z \in f(D)$. Il existe donc $z \in D$ tel que $Z = f(z)$. Il s'agit maintenant de montrer que $f(z) \notin [-2, 2]$. On peut raisonner par l'absurde. Supposons que $f(z) \in [-2, 2]$. A fortiori, $f(z) \in \mathbb{R}$ i.e. $z \in f^{-1}(\mathbb{R})$. D'après la question I.5, $z \in \mathbb{R}$ ou $z \in \mathbb{U}$. Or on ne peut avoir $z \in \mathbb{U}$ puisque $z \in D$. C'est donc que $z \in \mathbb{R}$. Mais alors $f(z) \in f(\mathbb{R}) =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. Or $f(z) \in [-2, 2]$ donc $f(z) = -2$ ou $f(z) = 2$. Les variations de φ nous disent alors que $z = -1$ ou $z = 1$, ce qui est à nouveau impossible puisque $z \in D$. On en conclut par l'absurde que $f(z) \notin [-2, 2]$. Ainsi on a bien $f(D) \subset \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$.
- Soit $Z \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$. On rappelle que les antécédents de Z par f sont les solutions de l'équation $z^2 - Zz + 1 = 0$. Cette équation du second degré admet pour discriminant $Z^2 - 4$ qui est non nul puisque $Z \notin \{-2, 2\}$. Elle admet donc deux solutions. Ainsi Z admet exactement deux antécédents par f dans \mathbb{C}^* . Notons α et β les deux antécédents de Z par f . Puisqu'ils ont solutions de l'équation $z^2 - Zz + 1 = 0$, $\alpha\beta = 1$.
- On reprend les notations de la question précédente. Il s'agit maintenant de voir qu'un seul des deux antécédents de Z par f appartient à D . Puisque $\alpha\beta = 1$, on a également $|\alpha||\beta| = 1$. On ne peut avoir $|\alpha| = 1$ ou $|\beta| = 1$ puisqu'alors $Z = f(\alpha) = f(\beta)$ appartiendrait à $f(\mathbb{U}) = [-2, 2]$. Ainsi α et β sont de module distincts de 1. Puisque $|\alpha||\beta| = 1$, l'un de ces deux modules est strictement inférieur à 1 et l'autre est strictement supérieur à 1. Un seul de ces deux complexes appartient donc à D (ils sont évidemment tous deux de module non nul puisqu'ils appartiennent à \mathbb{C}^*). Ainsi Z admet un unique antécédent dans D par f . Ceci prouve que f induit une bijection de D sur $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$.

Partie II – Un petit peu d'exponentielle complexe

- On a déjà vu que les antécédents de i par f étaient $\frac{i(1+\sqrt{5})}{2}$ et $\frac{i(1-\sqrt{5})}{2}$. Les antécédents de i par g sont donc les antécédents de ces deux nombres par la fonction exponentielle. Les formes exponentielles de ces deux nombres sont

$$\frac{i(1+\sqrt{5})}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} \quad \frac{i(1-\sqrt{5})}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot e^{\frac{-i\pi}{2}}$$

On en déduit que leurs antécédents par l'exponentielle sont les complexes

$$\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \text{ et } \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

où $k \in \mathbb{Z}$. Il s'agit donc également des antécédents de i par g .

2.

$$g(i\mathbb{R}) = \{g(i\theta), \theta \in \mathbb{R}\} = \{2\cos\theta, \theta \in \mathbb{R}\} = [-2, 2]$$

- On sait que $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$. Ainsi $g(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_+^*)$. Les variations de la fonction φ étudiées à la question I.6 montrent que $f(\mathbb{R}_+^*) = [2, +\infty[$.

Partie III – Une suite d'applications

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\varphi_2(z) &= z\varphi_1(z) - \varphi_0(z) = z^2 - 2 \\ \varphi_3(z) &= z\varphi_2(z) - \varphi_1(z) = z^3 - 3z \\ \varphi_4(z) &= z\varphi_3(z) - \varphi_2(z) = z^4 - 4z^2 + 2\end{aligned}$$

- Les solutions de l'équation $\varphi_2(z) = 0$ sont clairement $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$. De même, les solutions de l'équation $\varphi_3(z) = 0$ sont $0, -\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. L'équation $\varphi_4(z) = 0$ est une équation bicarrée. On la résout classiquement en effectuant le changement de variable $Z = z^2$. Les solutions de l'équation $Z^2 - 4Z + 2 = 0$ sont $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. On en déduit que les solutions de l'équation $\varphi_4(z) = 0$ sont

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}, -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}, \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}, -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

3. On note P_n l'assertion

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \varphi_n(f(z)) = f(z^n)$$

Puisque pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\varphi_0(z) = 2$ et $f(z^0) = f(1) = 2$, P_0 est vrai. De même, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\varphi_1(f(z)) = z + \frac{1}{z}$ et $f(z^1) = z + \frac{1}{z}$ donc P_1 est vraie.

Supposons P_n et P_{n+1} vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} \varphi_{n+2}(f(z)) &= f(z)\varphi_{n+1}(f(z)) - \varphi_n(f(z)) \\ &= f(z)f(z^{n+1}) - f(z^n) \\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right) \left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \\ &= z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}} = f(z^{n+2}) \end{aligned}$$

Ainsi P_{n+2} est vraie.

Par récurrence double, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. L'équation $f(z^n) = 0$ équivaut à $z^{2n} = -1$. L'ensemble des solutions de cette équation est donc l'ensemble des racines $2n^{\text{èmes}}$ de -1 , c'est-à-dire

$$A_n = \left\{ e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}, k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket \right\}$$

5. Remarquons que pour $\omega \in A_n$,

$$\varphi_n(f(\omega)) = f(\omega^n) = 0$$

Donc les $f(\omega)$ pour $\omega \in A_n$ sont des solutions de l'équation $\varphi_n(z) = 0$. Via une formule d'Euler, ceci signifie que les réels $2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$ sont des solutions de l'équation $\varphi_n(z) = 0$.

Réciproquement, soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une solution de l'équation $\varphi_n(z) = 0$. Puisque f est surjective, il existe donc $\omega \in \mathbb{C}^*$ tel que $\alpha = f(\omega)$. Alors $f(\omega^n) = \varphi_n(f(\omega)) = f(\omega^n) = 0$ de sorte que ω est solution de l'équation $f(z^n) = 0$.

Il existe donc $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$ tel que $\alpha = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}$. Mais alors $\alpha = f(\omega) = 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

Finalement l'ensemble des solutions de l'équations $\varphi_n(z) = 0$ est

$$B_n = \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket \right\}$$

On peut remarquer que certains éléments de B_n figurent en double dans la description précédente. En effet,

$$\begin{aligned} B_n &= \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \cup \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket n, 2n-1 \rrbracket \right\} \\ \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket n, 2n-1 \rrbracket \right\} &= \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2(k+n)+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\ &\quad \text{via le "changement d'indice" } k \rightarrow k+n \\ &= \left\{ 2 \cos\left(\pi + \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\ &= \left\{ -2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\ &= \left\{ -2 \cos\left(\frac{(2(n-1-k)+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\ &\quad \text{via le "changement d'indice" } k \rightarrow n-1-k \\ &= \left\{ -2 \cos\left(\pi - \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\ &= \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \end{aligned}$$

Finalement, on peut affirmer que

$$B_n = \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\frac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$ et \cos est injective sur $[0, \pi]$ puisqu'elle y est strictement décroissante. Les réels $2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ sont donc deux à deux distincts. Le nombre de solutions de l'équation $\varphi_n(z) = 0$ est donc n .

REMARQUE. Le lecteur cultivé aura remarqué que les fonctions φ_n sont reliées aux *polynômes de Tchebychev*. ■

SOLUTION 1.

1. a. C'est du cours : les complexes u et v sont les solutions de l'équation $X^2 - zX - \frac{p}{3} = 0$.
 b. Tout d'abord

$$u^3 v^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Ensuite

$$u^3 + v^3 = (u + v)^3 - 3u^2v - 3uv^2 = (u + v)^3 - 3uv(u + v) = z^3 + pz = -q$$

puisque z est solution de (E).

- c. D'après le cours, u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $X^2 - (u^3 + v^3)X + u^3 v^3 = 0$, c'est-à-dire de l'équation (E').
 d. On utilise le fait que $u^3 + v^3 = -q$ et $uv = -\frac{p}{3}$.

$$\begin{aligned} (ju + j^2v)^3 + p(ju + j^2v) + q &= u^3 + 3ju^2v + 3j^2uv^2 + v^3 + p(ju + j^2v) + q \\ &= 3uv(ju + j^2v) + p(ju + j^2v) \quad \text{car } u^3 + v^3 = -q \\ &= 0 \quad \text{car } uv = -\frac{p}{3} \\ (j^2u + jv)^3 + p(j^2u + jv) + q &= u^3 + 3j^2u^2v + 3juv^2 + v^3 + p(j^2u + jv) + q \\ &= 3uv(j^2u + jv) + p(j^2u + jv) \quad \text{car } u^3 + v^3 = -q \\ &= 0 \quad \text{car } uv = -\frac{p}{3} \end{aligned}$$

Ainsi $ju + j^2v$ et $j^2u + jv$ sont bien solutions de (E).

2. Avec les notations de l'énoncé $p = -3i$ et $q = 1 - i$. L'équation (E') est alors

$$X^2 + (1 - i)X - i = 0$$

Son discriminant est $(1 - i)^2 + 4i = 2i$. Une racine carrée de ce discriminant est $1 + i$. Les solutions de (E') sont alors -1 et i . Une racine cubique de -1 est $u = -1$ et une racine cubique de i est $v = -i$ et on a bien $uv = i = -\frac{p}{3}$. Les solutions de (E) sont donc

$$\begin{aligned} u + v &= -1 - i \\ ju + j^2v &= -j - j^2i = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)(1 + i) \\ j^2u + jv &= -j^2 - ji = \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)(1 + i) \end{aligned}$$