Devoir à la maison n$^{\text{o}}$ 13

Exercice 1.☆

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq \mathbf{0}$ et $f^n = \mathbf{0}$ où $\mathbf{0}$ désigne l'endomorphisme nul de E.

  a. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

  b. Montrer que, pour un tel vecteur x, la famille $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$ est une base de E.

Dans toute la suite de l'exercice, f est un endomorphisme de E tel que $f^{n-1} \neq \mathbf{0}$ et $f^n = \mathbf{0}$ et x un vecteur de E tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

2. Pour k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose $F_k = \operatorname{vect}\left((f^{n-i}(x))_{1 \leqslant i \leqslant k}\right)$.

  a. Déterminer la dimension de F_k.

  b. Montrer que $F_k = \operatorname{Ker}(f^k) = \operatorname{Im}(f^{n-k})$.

  c. Montrer que F_k est stable par f.

3. Soit F un sous-espace vectoriel stable par f. On suppose que F est de dimension k avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$. On note $\tilde{f}$ l'endomorphisme de F défini par : $\forall y \in F,\ \tilde{f}(y) = f(y)$.

  a. Montrer qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $\tilde{f}^{p-1} \neq \tilde{\mathbf{0}}$ et $\tilde{f}^p = \tilde{\mathbf{0}}$ où $\tilde{\mathbf{0}}$ désigne l'endomorphisme nul de F.

  b. Soit $y \in F$ tel que $\tilde{f}^{p-1}(y) \neq 0$. Que peut-on dire de la famille $(y, \tilde{f}(y), \dots, \tilde{f}^{p-1}(y))$? En déduire que $\tilde{f}^k = \tilde{\mathbf{0}}$.

  c. Montrer que $F = \operatorname{Ker} f^k$.

  d. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels stables par f.

4. On veut déterminer tous les endomorphismes g de E qui commutent avec f, c'est-à-dire tels que $f \circ g = g \circ f$.

  a. Soit g un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un unique n-uplet de nombres réels $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ tel que :
$$g(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x)$$

  b. En déduire que si g commute avec f alors,
$$g = \alpha_0 \operatorname{Id}_E + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$$
  où $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sont les réels définis à la question précédente.

  c. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et préciser sa dimension.

Exercice 2.

Soit u un endomorphisme de E, pour tout entier naturel p, on notera $I_p = \operatorname{Im} u^p$ et $K_p = \operatorname{Ker} u^p$.

1. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.

2. On suppose que E est de dimension finie et u injectif. Déterminer I_p et K_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

3. On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

  a. Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leqslant n$ tel que : $K_r = K_{r+1}$.

  b. Montrer qu'alors : $I_r = I_{r+1}$ et que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad K_r = K_{r+p}$ et $I_r = I_{r+p}$.

  c. Montrer que : $E = K_r \oplus I_r$.

4. Lorsque E n'est pas de dimension finie, existe-t-il un plus petit entier naturel r tel que $K_r = K_{r+1}$?

Exercice 3.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, avec $n \geqslant 2$. On rappelle que E^* est l'ensemble des formes linéaires sur E.

1. Soit $\varphi \in E^*$ non nulle. Montrer que $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E.

2. Soit H un hyperplan de E. Montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ telle que $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$.

3. Soient φ et ψ deux éléments non nuls de E^* tels que $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Ker}(\psi)$. Montrer qu'il existe un réel non nul λ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

4. Soit H un hyperplan de E. Montrer que l'ensemble $D(H)$ des éléments de E^* dont le noyau contient H est un sous-espace vectoriel de E^* dont on précisera la dimension.

5. On appelle *transvection* de E tout endomorphisme f de E possédant les deux propriétés suivantes :

- $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ est un hyperplan de E ;
- $\operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}) \subset \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

On appelle $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ la base de f et $\operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$ la direction de f.

a. Soit φ un élément non nul de E^* et u un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}(\varphi)$. Pour tout vecteur x de E, on pose $f(x) = x + \varphi(x)u$. Justifier l'existence de u et montrer que f est une transvection dont on précisera la base et la direction.

b. Réciproquement, soit f une transvection de E. Montrer qu'il existe un élément non nul φ de E^* et un vecteur u non nul de $\operatorname{Ker}(\varphi)$ tels que $f(x) = x + \varphi(x)u$ pour tout $x \in E$.