Devoir à la maison n°18

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Dans tout ce qui suit, $\sqcup$ désigne l'union disjointe d'ensembles (réunion d'ensembles deux à deux disjoints).

1 L'ensemble des partitions de l'ensemble $\llbracket 1,n \rrbracket$ en k parties est une partie de l'ensemble $\mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)^k$ (où $\mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)$ désigne l'ensemble des parties de $\llbracket 1,n \rrbracket$). Comme $\llbracket 1,n \rrbracket$ est fini, $\mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)$ puis $\mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)^k$ le sont aussi. Par conséquent l'ensemble des partitions de $\llbracket 1,n \rrbracket$ en k parties est fini. On peut même majorer son cardinal par celui de $\mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)^k$, c'est-à-dire 2^{nk}.

2 **2.a** Supposons qu'il existe une partition $\{A_1,\dots,A_k\}$ de $\llbracket 1,n \rrbracket$ en k parties. Puisque chacun des A_i est non vide, il est de cardinal supérieur ou égal à 1. Ainsi

$$n = \operatorname{card}(\llbracket 1,n \rrbracket)\operatorname{card}\left(\bigsqcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k \operatorname{card}(A_i) \geq k$$

Autrement dit, si $k > n$, il n'existe pas de partition de $\llbracket 1,n \rrbracket$ en k parties i.e. $S(n,k) = 0$.

2.b L'unique partition de $\llbracket 1,n \rrbracket$ en 1 partie est $\{\llbracket 1,n \rrbracket\}$ donc $S_{n,1} = 1$.

3 Soient k et n des entiers strictement positifs. Notons $\mathcal{P}_{n,k}$ l'ensemble des partitions de $\llbracket 1,n \rrbracket$ à k éléments, $\mathcal{Q}_{n,k}$ l'ensemble des partitions de $\llbracket 1,n \rrbracket$ à k éléments et qui contiennent $\{n\}$ et enfin $\mathcal{R}_{n,k}$ l'ensemble des partitions de $\llbracket 1,n \rrbracket$ à k éléments qui ne contiennent pas $\{n\}$. Il est alors clair que $\mathcal{P}_{n,k} = \mathcal{Q}_{n,k} \sqcup \mathcal{R}_{n,k}$ et donc que $S_{n,k} = \operatorname{card}\mathcal{Q}_{n,k} + \operatorname{card}\mathcal{R}_{n,k}$.
On vérifie que les applications $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{n-1,k-1} & \longrightarrow & \mathcal{Q}_{n,k} \\ \mathcal{U} & \longmapsto & \mathcal{U} \cup \{\{n\}\} \end{array}\right.$ et $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}_{n,k} & \longrightarrow & \mathcal{P}_{n-1,k-1} \\ \mathcal{U} & \longmapsto & \mathcal{U} \setminus \{\{n\}\} \end{array}\right.$ sont bien définies et vérifient $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}_{n-1,k-1}}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{Q}_{n,k}}$. Ainsi f et g sont bijectives si bien que $\operatorname{card}\mathcal{Q}_{n,k} = \operatorname{card}\mathcal{P}_{n-1,k-1} = S(n-1,k-1)$.
Considérons maintenant l'application

$$h : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{n,k} & \longrightarrow & \mathcal{P}_{n-1,k} \\ \{A_1,\dots,A_k\} & \longmapsto & \{A_1 \setminus \{n\},\dots,A_k \setminus \{n\}\} \end{array}\right.$$

Cette application est bien définie. Notamment, par définition de $\mathcal{R}_{n,k}$, si $\{A_1,\dots,A_k\} \in \mathcal{R}_{n,k}$, alors aucun des $A_i \setminus \{n\}$ n'est vide. De plus, h est clairement surjective et chaque élément de $\mathcal{P}_{n-1,k}$ possède exactement k antécédents. Plus précisément, les antécédents de $\{B_1,\dots,B_k\} \in \mathcal{P}_{n-1,k}$ par h sont les partitions de $\llbracket 1,n \rrbracket$ obtenues en «ajoutant» n à l'une des k parties $B_1,\dots,B_k$. D'après le lemme des bergers, $\operatorname{card}\mathcal{R}_{n,k} = k\operatorname{card}\mathcal{P}_{n-1,k} = kS(n-1,k)$.
D'après ce qui précède, $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$.

4 On peut écrire la fonction récursive suivante.

```python
def S(n,k):
    if n==0 and k==0:
        return 1
    if n==0:
        return 0
    if k==0:
        return 0
    return S(n-1,k-1)+k*S(n-1,k)
```

On teste sur quelques exemples.

```
>>> S(8,3), S(4,6), S(1,10)
(966, 0, 0)
```

4.b Notons $m(n,k)$ le nombre d'opérations nécessaires pour calculer $\mathrm{S}(n,k)$. Alors $m(n,k) = 2+m(n-1,k-1)+m(n-1,k) \geq m(n-1,k-1)+m(n-1,k)$. Notons

$$\mathcal{P}_n : \forall k \in \mathbb{N},\ m(n,k) \geq \binom{n}{k}$$

Tout d'abord, $\mathcal{P}_1$ est clairement vraie puisque $\binom{1}{k} \in \{0,1\}$ et le calcul de $\mathrm{S}(1,k)$ nécessite au moins une opération. Supposons $\mathcal{P}_{n-1}$ vraie pour un certain entier $n \geq 2$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ m(n,k) \geq m(n-1,k-1)+m(n-1,k) \geq \binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Ainsi $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

$\boxed{5}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En conservant les notations de la question **3**, l'ensemble des partitions de $[\![1,n]\!]$ est $\displaystyle\bigsqcup_{k=1}^{n} \mathcal{P}_{n,k}$ de sorte que

$$\mathrm{B}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{S}_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}_{n,k}$$

puisque $\mathrm{S}_{n,0} = 0$ pour $n \geq 1$.

$\boxed{6}$ Se donner une partition de $[\![1,n+1]\!]$ revient à :

- fixer le nombre k d'éléments autres que $n+1$ de la partie contenant $n+1$ ($k \in [\![0,n]\!]$) ;
- choisir ces k éléments dans $[\![1,n]\!]$ ($\binom{n}{k}$ choix possibles) ;
- se donner une partition des $n-k$ éléments restants (B_{n-k} choix possibles).

On en déduit que

$$\mathrm{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B}_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \mathrm{B}_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B}_k$$

$\boxed{7}$ On procède par récurrence forte. Tout d'abord, $\mathrm{B}_0 = 1$ donc $\mathrm{B}_0 \leq 0!$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{B}_k \leq k!$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Alors

$$\mathrm{B}_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \leq \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)n! = (n+1)!$$

Ainsi $\mathrm{B}_n \leq n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{8}$ La suite (B_n) est manifestement positive donc la suite $\left(\frac{\mathrm{B}_n}{n!}1^n\right)$ est bornée d'après la question précédente. Par définition du rayon de convergence, $\mathrm{R} \geq 1$.

$\boxed{9}$ On a les développements en série entière suivants :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$
$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{B}_n}{n!} x^n$$

Par produit de Cauchy et en utilisant la question **6**,

$$\forall x \in]-1,1[,\ e^x f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{\mathrm{B}_k}{k!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B}_k \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{B}_{n+1}}{n!} x^n$$

D'autre part, par dérivation d'une somme de série entière,

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{\mathrm{B}_n}{n!}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{B}_n}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{B}_{n+1}}{n!}x^n$$

On en déduit donc que

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = e^x f(x)$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Comme exp est une primitive de exp sur $]-1,1[$, on en déduit l'existence d'une constante $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \mathrm{C}e^{e^x}$ pour tout $x \in]-1,1[$. Mais comme $f(0) = \mathrm{B}_0 = 1$, $\mathrm{C} = e^{-1}$. Ainsi

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = e^{e^x-1}$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg \mathrm{H}_k = k$ donc $(\mathrm{H}_0, \dots, \mathrm{H}_n)$ est à degrés échelonnés et ne contient pas le polynôme nul : elle est donc libre. Or $\dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] = n+1$ donc $(\mathrm{H}_0, \dots, \mathrm{H}_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

$\boxed{\mathbf{12}}$ **12.a** Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\mathrm{H}_{k+1}(\mathrm{X}) + k\mathrm{H}_k(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-k)\mathrm{H}_k(\mathrm{X}) + k\mathrm{H}_k(\mathrm{X}) = \mathrm{X}\mathrm{H}_k(\mathrm{X})$$

12.b Posons $\mathrm{L}_n(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}(n,k)\mathrm{H}_k(\mathrm{X})$. Alors $\mathrm{L}_0 = \mathrm{S}(0,0)\mathrm{H}_0 = 1$ et, d'après la question **3**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_n &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}(n,k)\mathrm{H}_k(\mathrm{X}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{S}(n,k)\mathrm{H}_k(\mathrm{X}) \qquad \text{car } \mathrm{S}(n,0) = 0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{S}_{n-1,k-1}\mathrm{H}_k(\mathrm{X}) + \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{S}(n-1,k)\mathrm{H}_k(\mathrm{X}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{S}(n-1,k)\mathrm{H}_{k+1}(\mathrm{X}) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{S}(n-1,k)k\mathrm{H}_k(\mathrm{X}) \qquad \text{par changement d'indice et car } \mathrm{S}(n-1,n) = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{S}(n-1,k)(\mathrm{H}_{k+1}(\mathrm{X}) + k\mathrm{H}_k(\mathrm{X})) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{S}(n-1,k)\mathrm{X}\mathrm{H}_k(\mathrm{X}) \qquad \text{d'après la question précédente} \\
&= \mathrm{X}\mathrm{L}_{n-1}(\mathrm{X})
\end{aligned}$$

Une récurrence évidente montre alors que $\mathrm{L}_n(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\mathbf{13}}$ **13.a** Soit $k \in \mathbb{N}$. On a clairement

$$0 \leq \mathrm{S}(n,k) \leq \sum_{j=0}^{n} \mathrm{S}(n,j) = \mathrm{B}_n \leq n!$$

La suite $\left(\frac{\mathrm{S}(n,k)}{n!}\right)$ est donc bornée de sorte que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq k} \mathrm{S}(n,k)\frac{x^n}{n!}$ est supérieur ou égal à 1. Sa somme f_k est donc définie sur $]-1,1[$.

13.b Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_k'(x) = \frac{(e^x-1)^{k-1}}{(k-1)!}e^x = \frac{(e^x-1)^{k-1}}{(k-1)!}(e^x - 1 + 1) = kg_k(x) + \frac{(e^x-1)^{k-1}}{(k-1)!}$$

Ainsi g_k est bien solution de l'équation différentielle $y' = \frac{(e^x-1)^{k-1}}{(k-1)!} + y$ sur $\mathbb{R}$.

13.c On procède par récurrence sur k. Tout d'abord

$$\forall x \in]-1,1[,\ f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{S}(n,0)\frac{x^n}{n!} = \mathrm{S}(0,0) = 1 = \frac{(e^x-1)^0}{0!}$$

Supposons que pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, $f_{k-1} = g_{k-1}$ sur $]-1,1[$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1,1[,\ f_k'(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{S}(n,k)\frac{x^{n-1}(n-1)!}{} \text{par dérivation de la somme d'une série entière} \\
&= \sum_{n=k-1}^{+\infty} \mathrm{S}(n+1,k)\frac{x^n}{n!} \qquad \text{par changement d'indice} \\
&= \sum_{n=k-1}^{+\infty} \mathrm{S}(n,k-1)\frac{x^n}{n!} + k\sum_{n=k-1}^{+\infty} \mathrm{S}(n,k)\frac{x^n}{n!} \qquad \text{d'après la question } \mathbf{3} \\
&= f_{k-1}(x) + kf_k(x) \qquad \text{car } \mathrm{S}(k-1,k) = 0 \\
&= g_{k-1}(x) + kf_k(x) \qquad \text{par hypothèse de récurrence}
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, f_k et g_k sont alors solutions sur $]-1,1[$ de la même équation différentielle linéaire d'ordre 1, à savoir $y' = g_{k-1} + ky$. De plus, $f_k(0) = g_k(0)$ (car $k \in \mathbb{N}^*$). Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, $f_k = g_k$ sur $]-1,1[$.
Par récurrence,

$$\frac{(e^x-1)^k}{k!} = f_k(x) = g_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{S}(n,k)\frac{x^n}{n!}$$

$\boxed{\mathbf{14}}$ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

14.a On reconnaît un développement en série entière usuel :

$$\forall x \in]-1,1[,\ ]\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{H}_k(\alpha)\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = (1+x)^\alpha$$

14.b Si $u < \ln 2$, $e^u - 1 \in]-1,1[$ donc, d'après la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{H}_k(\alpha)\frac{(e^u-1)^k}{k!} = (1+e^u-1)^\alpha = e^{u\alpha}$$

$\boxed{\mathbf{15}}$ Soit $m \in \mathbb{N}$. Supposons que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathrm{Y}=n)t^n$ possède un rayon de convergence $\mathrm{R} > 1$. On sait alors que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^m\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n)t^n$ possède le même rayon de convergence R. Puisque $1 \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^m\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n)$ converge, ce qui signifie que Y admet un moment d'ordre m fini.

$\boxed{\mathbf{16}}$ **16.a** Posons $f_n : t \in [-1,1] \mapsto \mathbb{P}(\mathrm{Y}=n)t^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$. Soit $m \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \geq m;\ \forall t \in [-1,1],\ |f_n^{(m)}(t)| \leq \frac{n!}{(n-m)!}\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n) \leq n^m\mathbb{P}(\mathrm{Y}=m)$$

Par hypothèse, Y admet un moment d'ordre m donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^m\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n)$ converge. On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(m)}$ converge normalement et donc uniformément sur $[-1,1]$. Ainsi $\mathrm{G_Y} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$ d'après le théormème de dérivabilité des séries de fonctions.

16.b Le même théorème nous dit que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{G_Y}^{(k)}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(1) = \sum_{n=m}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n) = \sum_{n=m}^{+\infty}\mathrm{H}_k(n)\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{H}_k(n)\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n)$$

16.c Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq e^{-\sqrt{n}} \leq e^{-n}$ et la série géométrique $\sum e^{-n}$ converge ($0 < e^{-1} < 1$). Par conséquent, la série $\sum e^{-\sqrt{n}}$ converge également. Notons $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}} > 0$. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\mathrm{S}} = 1$ et $\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\mathrm{S}} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut alors considérer une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n) = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\mathrm{S}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par croissances comparées, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $n^m\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n) \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n^2)$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^m\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n)$ converge. Ainsi Y possède un moment fini à tout ordre.

La fonction G_Y est alors la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{S} t^n$. Soit $t > 1$. Alors, puisque $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$,

$$e^{-\sqrt{n}} t^n = \exp\left(-\sqrt{n} + n\ln(t)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Notamment, la suite $\left(e^{-\sqrt{n}}t^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et le rayon de convergence de la série entière définissant G_Y ne peut pas être strictement supérieur à 1.

17 **17.a** Puisque $Y \sim \mathcal{P}(1)$, $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{e^{-1}}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La série entière définissant G_Y est alors $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{e^{-1}}{k!} t^k$, qui admet un rayon de convergence infini. La question **15** montre que Y amet un moment fini à tout ordre.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{E}(Y^n) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^n \mathbb{P}(Y = k)$$

En utilisant la question **12.b**,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k^n = \sum_{j=0}^{n} S(n,j) H_j(k)$$

Finalement,

$$\mathbb{E}(Y^n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) \sum_{j=0}^{n} S(n,j) H_j(k)$$

D'après la question **16.b**, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} H_j(k)\mathbb{P}(Y = k)$ converge et a pour somme $G_Y^{(j)}(1)$. On peut donc intervertir l'ordre de sommation dans l'égalité précédente pour obtenir

$$\mathbb{E}(Y^n) = \sum_{j=0}^{n} S(n,j) G_Y^{(j)}(1)$$

Or $G_Y(t) = e^{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc $G_Y^{(j)}(t) = e^{t-1}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$. Finalement,

$$\mathbb{E}(Y^n) = \sum_{j=0}^{n} S(n,j) = B_n$$

17.b Soit $Q = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme a coefficients entiers. Pour tout $k \in [\![0,d]\!]$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^k}{n!}$ converge et a pour somme $e\mathbb{E}(Y^k) = eB_k$. Ainsi la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{Q(n)}{n!}$ converge comme combinaison linéaire de séries convergentes et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Q(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathbb{E}(Y^k) = e\sum_{k=0}^{d} a_k B_k \in e\mathbb{Z}$$

puisque les a_k et les B_k sont entiers.

18 Par croissance de $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\int_0^p t^n\,dt \leq U_n(p) \leq \int_0^{p+1} t^n\,dt$$

ou encore

$$\frac{p^{n+1}}{n+1} \leq U_n(p) \leq \frac{(p+1)^{n+1}}{n+1}$$

Mais comme $(p+1)^{n+1} \underset{p\to+\infty}{\sim} p^{n+1}$, on en déduit que

$$U_n(p) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^{n+1}}{n+1}$$

19 On constate que $\Delta(\mathrm{H}_0) = 0$ et que pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\Delta(\mathrm{H}_k) = \mathrm{H}_k(\mathrm{X}+1) - \mathrm{H}_k(\mathrm{X}) = \prod_{j=0}^{k-1}(\mathrm{X}+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1}(\mathrm{X}-j) = \prod_{j=-1}^{k-2}(\mathrm{X}-j) - \prod_{j=0}^{k-1}(\mathrm{X}-j) \\ = [(\mathrm{X}+1)-(\mathrm{X}-k+1)]\prod_{j=0}^{k-2}(\mathrm{X}-j) = k\mathrm{H}_{k-1}\end{aligned}$$

La matrice de Δ_n dans la base $(\mathrm{H}_0, \dots, \mathrm{H}_n)$ est donc

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

20 D'après la question **12.b**,

$$\mathrm{U}_n(p) = \sum_{k=0}^{p} k^n = \sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{n} \mathrm{S}(n,j)\mathrm{H}_j(k) = \sum_{j=0}^{n}\mathrm{S}(n,j)\sum_{k=0}^{p}\mathrm{H}_j(k)$$

Or on a vu à la question précédente que

$$\mathrm{H}_j(\mathrm{X}) = \frac{1}{j+1}\Delta(\mathrm{H}_{j+1}) = \frac{1}{j+1}(\mathrm{H}_{j+1}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{H}_{j+1}(\mathrm{X}))$$

Ainsi, par télescopage,

$$\sum_{k=0}^{p}\mathrm{H}_j(k) = \frac{1}{j+1}\sum_{k=0}^{p}(\mathrm{H}_{j+1}(k+1) - \mathrm{H}_{j+1}(k)) = \frac{1}{p+1}(\mathrm{H}_{j+1}(p+1) - \mathrm{H}_{j+1}(0)) = \frac{1}{j+1}\mathrm{H}_{j+1}(p+1)$$

puis

$$\mathrm{U}_n(p) = \sum_{j=0}^{n}\frac{\mathrm{S}(n,j)}{j+1}\mathrm{H}_{j+1}(p+1)$$

21 **21.a** On a clairement $\mathrm{Q} = \frac{1}{2}\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)$.

21.b L'application Φ est clairement linéaire par linéarité de Δ et de $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{Q}(\mathrm{X}-1))$. Comme $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(0)$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, F est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Notamment, $\dim \mathrm{F} = n$. La famille $(\mathrm{X}^k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille libre de n vecteurs de F ; c'est donc une base de F. De plus,

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1,n]\!],\ \Phi(\mathrm{X}^k) &= \frac{1}{2^k}(\mathrm{X}^k(\mathrm{X}+1)^k - (\mathrm{X}-1)^k\mathrm{X}^k) \\ &= \frac{1}{2^k}\mathrm{X}^k\left[(\mathrm{X}+1)^k - (\mathrm{X}-1)^k\right] \\ &= \frac{1}{2^k}\mathrm{X}^k\left[\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mathrm{X}^{k-j} - \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\mathrm{X}^{k-j}\right] \\ &= \frac{1}{2^{k-1}}\mathrm{X}^k\sum_{0\leq 2j+1\leq k}\binom{k}{2j+1}\mathrm{X}^{k-2j-1} \\ &= \frac{1}{2^{k-1}}\sum_{0\leq 2j+1\leq k}\binom{k}{2j+1}\mathrm{X}^{2(k-j)+1} \in \mathrm{G}\end{aligned}$$

Ainsi Φ est bien une application linéaire de F dans G. De plus, on voit que $\deg\Phi(\mathrm{X}^k) = 2k+1$ donc $(\Phi(\mathrm{X}), \dots, \Phi(\mathrm{X}^n))$ est une famille de polynômes à degrés échelonnées et donc une famille libre de n vecteurs de G. Comme $\dim \mathrm{G} = n$, $(\Phi(\mathrm{X}), \dots, \Phi(\mathrm{X}^k))$ est une base de G. Ainsi Φ envoie une base de F sur une base de G : c'est donc un isomorphisme de F sur G.

21.c Avec la question précédente, on peut aisément étendre Φ à un isomorphisme de $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ \mathrm{P}(0) = 0\}$ à $\mathrm{G} = \mathrm{vect}(\mathrm{X}^{2k+1}, k \in \mathbb{N})$ que l'on notera encore Φ dans cette question.
Montrons d'abord l'unicité. Supposons qu'il existe deux polynômes P_r et S_r tels que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{p} k^{2r+1} = \mathrm{P}_r\left(\frac{p(p+1)}{2}\right) = \mathrm{S}_r\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)$$

Ainsi

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}_r(\mathrm{Q}(p)) = \mathrm{S}_r(\mathrm{Q}(p))$$

Le polynôme $\mathrm{P}_r(\mathrm{Q}(\mathrm{X}))-\mathrm{S}_r(\mathrm{Q}(\mathrm{X}))$ possédant une infinité de racines, il est nul. Ainsi $\mathrm{P}_r(\mathrm{Q}(\mathrm{X})) = \mathrm{S}_r(\mathrm{Q}(\mathrm{X}))$ puis $\mathrm{P}_r(\mathrm{Q}(\mathrm{X}-)) = \mathrm{S}_r(\mathrm{Q}(\mathrm{X}-1))$ et enfin $\Delta(\mathrm{P}_r(\mathrm{Q}(\mathrm{X}))) = \Delta(\mathrm{S}_r(\mathrm{Q}(\mathrm{X})))$ i.e. $\Phi(\mathrm{P}_r) = \Phi(\mathrm{S}_r)$ puis $\mathrm{P}_r = \mathrm{S}_r$ par injectivité de Φ.
Traitons maintenant l'existence. Par surjectivité de Φ, il existe $\mathrm{P}_r \in \mathrm{F}$ tel que $\Phi(\mathrm{P}_r) = \mathrm{X}^{2r+1} \in \mathrm{G}$, c'est-à-dire $\mathrm{P}_r(\mathrm{Q}(\mathrm{X})) - \mathrm{P}_r(\mathrm{Q}(\mathrm{X}-1)) = \mathrm{X}^{2r+1}$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=1}^{p} k^{2r+1} = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{P}_r(\mathrm{Q}(k)) - \mathrm{P}_r(\mathrm{Q}(k-1)) = \mathrm{P}_r(\mathrm{Q}(p)) - \mathrm{P}_r(\mathrm{Q}(0)) = \mathrm{P}_r\left(\frac{p(p+1)}{2}\right) - \mathrm{P}_r(0) = \mathrm{P}_r\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)$$

car $\mathrm{P}_r \in \mathrm{F}$ de sorte que $\mathrm{P}_r(0) = 0$.

$\boxed{22}$ **22.a** On rappelle que $\mathrm{U}_n(p) \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{p^{n+1}}{n+1}$ d'après la question **18**. On en déduit que

$$\mathrm{P}_r\left(\frac{p(p+1)}{2}\right) = \mathrm{U}_{2r+1}(p) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^{2r+2}}{2r+2}$$

Notons d le degré de P_r et α son coefficient dominant. Alors

$$\mathrm{P}_r\left(\frac{p(p+1)}{2}\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} \alpha\frac{p^{2d}}{2^d}$$

On en déduit que $\dfrac{\alpha}{2^d} = \dfrac{1}{2r+2}$ et $2d = 2r+2$. Ainsi $d = r+1$ et $\alpha = \dfrac{2^r}{r+1}$. Le terme dominant de P_r est donc $\dfrac{2^r\mathrm{X}^{r+1}}{r+1}$.
22.b Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On a vu que $\mathrm{P}_r \in \mathrm{F}$ donc $\mathrm{P}_r(0) = 0$. On a vu précédemment que $\Phi(\mathrm{P}_r) = \mathrm{X}^{2r+1}$ i.e. $\mathrm{P}_r(\mathrm{Q}(\mathrm{X}))-\mathrm{P}_r(\mathrm{Q}(\mathrm{X}-1)) = \mathrm{X}^{2r+1}$. En dérivant cette égalité, on obtient

$$\mathrm{Q}'(\mathrm{X})\mathrm{P}_r'(\mathrm{Q}(\mathrm{X})) - \mathrm{Q}'(\mathrm{X}-1)\mathrm{P}_r'(\mathrm{Q}(\mathrm{X}-1)) = (2r+1)\mathrm{X}^{2r}$$

Mais $\mathrm{Q}'(\mathrm{X}) = \mathrm{X} + \dfrac{1}{2}$ donc

$$\left(\mathrm{X}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{P}_r'(\mathrm{Q}(\mathrm{X})) - \left(\mathrm{X}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{P}_r'(\mathrm{Q}(\mathrm{X}-1)) = (2r+1)\mathrm{X}^{2r}$$

Comme $\mathrm{Q}(0) = \mathrm{Q}(-1) = 0$, on obtient en évaluant en 0, $\mathrm{P}_r'(0) = 0$ car $r \geq 1$. Ainsi $\mathrm{P}_r(0) = \mathrm{P}_r'(0) = 0$ donc X^2 divise P_r.
22.c On sait que le terme dominant de P_1 est X^2. De plus, X^2 divise P_1 donc $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}^2$.
De même, le terme dominant de P_2 est $\dfrac{4}{3}\mathrm{X}^3$ et X^2 divise P_2 donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{P}_2 = \dfrac{4}{3}\mathrm{X}^3 + a\mathrm{X}^2$. En évaluant l'égalité

$$\sum_{k=1}^{p} k^5 = \mathrm{P}_2\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)$$

pour $p = 1$, on obtient $\mathrm{P}_2(1) = 1$ de sorte que $a = -\dfrac{1}{3}$. Finalement, $\mathrm{P}_2 = \dfrac{4}{3}\mathrm{X}^3 - \dfrac{1}{3}\mathrm{X}^2$.