

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

SOLUTION 1.

1. Prouvons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire.

- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire par bilinéarité du produit sur \mathbb{R} et par linéarité de l'évaluation.
- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique par commutativité du produit sur \mathbb{R} .
- Soit $P \in E$. On a $\langle P | P \rangle = P^2(-1) + P^2(0) + P^2(1) \geq 0$, la forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc positive.
- Soit $P \in E$. Puisqu'une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous les termes sont nuls, on a

$$\langle P | P \rangle = P^2(-1) + P^2(0) + P^2(1) = 0$$

si et seulement si $0, 1, -1$ sont racines de P . Puisque P est de degré inférieur à deux, cette condition est équivalente à $P = 0$. La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc définie.

2. Prouvons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire.

- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire par bilinéarité du produit sur \mathbb{R} et par linéarité de l'évaluation.
- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique par commutativité du produit sur \mathbb{R} .
- Soit $P \in E$. On a

$$\langle P | P \rangle = P^2(x_0) + \dots + P^2(x_n) \geq 0,$$

la forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc positive.

- Soit $P \in E$. Puisqu'une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous les termes sont nuls, on a

$$\langle P | P \rangle = P^2(x_0) + \dots + P^2(x_n) = 0$$

si et seulement si x_0, \dots, x_n sont racines de P . Puisque P est de degré inférieur à n et que les x_k sont deux à deux distincts, cette condition est équivalente à $P = 0$. La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc définie.

3. Prouvons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire.

- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire par bilinéarité du produit sur \mathbb{R} , par linéarité de la dérivation des polynômes et par linéarité de l'évaluation.
- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique par commutativité du produit sur \mathbb{R} .
- Soit $P \in E$. On a

$$\langle P | P \rangle = P^2(a_0) + \dots + (P^{(n)})^2(a_n) \geq 0,$$

la forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc positive.

- Soit $P \in E$ tel que

$$\langle P | P \rangle = P^2(a_0) + \dots + (P^{(n)})^2(a_n) = 0.$$

Puisqu'une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous les réels sont nuls, on a $(P^{(n)})^2(a_n) = 0$. Puisque P est de degré inférieur à n , $P^{(n)}$ est une constante, qui est donc nulle d'après l'égalité précédente. P est donc de degré inférieur à $n-1$, et puisque

$$(P^{(n-1)})^2(a_{n-1}) = 0,$$

on en déduit que la constante $P^{(n-1)}$ est nulle et donc que P est de degré inférieur à $n-2$. Par une récurrence descendante immédiate, on prouve que $P = 0$. La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc définie.

4. Prouvons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

- L'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire par linéarité du produit sur \mathbb{R} , de l'évaluation et de l'intégrale.
- La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique car le produit sur \mathbb{R} est commutatif.
- Soit $P \in E$. Par positivité de l'intégrale, on a

$$\langle P | P \rangle = \int_0^1 P(t)^2 dt \geq 0.$$

La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc positive.

- Reprenons les notations précédentes. Puisque qu'une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous les termes sont nuls, l'égalité $\langle P|P \rangle = 0$ est équivalente à

$$\int_0^1 P^2(t) dt = 0.$$

La fonction P^2 étant continue et positive, la condition est équivalente à $P = 0$. La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc définie.

5. Prouvons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

- L'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire par linéarité du produit sur \mathbb{R} , de l'évaluation et de l'intégrale.
 ► La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique car le produit sur \mathbb{R} est commutatif.
 ► Soit $f \in E$. Par positivité de l'intégrale, on a

$$\langle f|f \rangle = \int_0^1 f(t)^2 dt \geq 0.$$

La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc positive.

- Reprenons les notations précédentes. Puisque qu'une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous les termes sont nuls, l'égalité $\langle f|f \rangle = 0$ est équivalente à

$$\int_0^1 f^2(t) dt = 0.$$

La fonction f^2 étant continue et positive la condition est équivalente à $f = 0$. La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc définie.

6. Prouvons que $(\cdot | \cdot)$ définit un produit scalaire sur E .

- Soient $A, B, C \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \langle A | \lambda B + C \rangle &= \text{tr}({}^t A (\lambda B + C)) = \text{tr}(\lambda {}^t A B + {}^t A C) \\ &\quad (\text{par linéarité de la transposition}) \\ &= \lambda \text{tr}({}^t A B) + \text{tr}({}^t A C) \\ &\quad (\text{par linéarité de la trace}) \\ &= \lambda \langle A | B \rangle + \langle A | C \rangle \end{aligned}$$

L'application $(\cdot | \cdot)$ est donc linéaire à droite.

- Soient $A, B \in E$. On a

$$\langle B | A \rangle = \text{tr}({}^t B A) = \text{tr}({}^t ({}^t A B)) = \text{tr}({}^t A B) = \langle A | B \rangle$$

L'application $(\cdot | \cdot)$ est symétrique donc linéaire à gauche puisqu'elle est linéaire à droite.

- Pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et tout indice $1 \leq i \leq n$,

$$({}^t A A)_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2.$$

On a donc

$$\langle A | A \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 \geq 0.$$

La forme bilinéaire $(\cdot | \cdot)$ est donc positive.

- Puisque sur \mathbb{R} , une somme de carrés est nulle *si et seulement si* tous les carrés sont nuls, on a, d'après le calcul précédent, $\langle A | A \rangle = 0$ *si et seulement si* $\forall 1 \leq k, i \leq n, a_{k,i} = 0$, ie $A = 0$. La forme bilinéaire $(\cdot | \cdot)$ est donc définie.

7. Prouvons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

- L'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire par linéarité du produit sur \mathbb{R} , de la dérivation et de l'intégrale.
 ► La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique car le produit sur \mathbb{R} est commutatif.

- Soit $f \in E$. Par positivité de l'intégrale, on a

$$\langle f|f \rangle = f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \geq 0.$$

La forme bilinéaire $\langle | \rangle$ est donc positive.

- Reprenons les notations précédentes. Puisque qu'une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous les termes sont nuls, l'égalité $\langle f|f \rangle = 0$ implique

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f'(t)^2 dt = 0.$$

La fonction f'^2 étant continue et positive, la deuxième condition est équivalente à $f' = 0$, la fonction f est donc constante et finalement nulle puisque $f(1) = 0$. La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc définie.

8. Prouvons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E .

- *Symétrie* : pour tous f et g dans E , on a

$$\begin{aligned} \langle f|g \rangle &= \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt \\ &= \int_0^1 (g(t)f(t) + g'(t)f'(t)) dt \\ &= \langle g|f \rangle \end{aligned}$$

par commutativité du produit sur le corps $(\mathbb{R}, +, \times)$.

- *Linéarité* : pour tous f, g et h dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \langle f + \lambda g|h \rangle &= \int_0^1 ((f + \lambda g)(t)h(t) + (f + \lambda g)'(t)h'(t)) dt \\ &= \int_0^1 (f(t)h(t) + \lambda g(t)h(t) + f'(t)h'(t) \\ &\quad + \lambda g'(t)h'(t)) dt \\ &= \int_0^1 (f(t)h(t) + f'(t)h'(t)) dt \\ &\quad + \lambda \int_0^1 (g(t)h(t) + g'(t)h'(t)) dt \\ &= \langle f|h \rangle + \lambda \langle g|h \rangle \end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation, de l'évaluation et de l'intégrale. Ainsi, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est linéaire à gauche donc bilinéaire sur E par symétrie.

- *Positivité* : pour tout f dans E , on a

$$\langle f|f \rangle = \int_0^1 (f^2(t) + (f')^2(t)) dt \geq 0$$

par positivité de l'intégrale puisque $f^2 + (f')^2 \geq 0$.

- *Caractère défini* : pour tout f dans E , on a

$$\langle f|f \rangle = \int_0^1 (f^2(t) + (f')^2(t)) dt = 0$$

si et seulement si $f^2 + (f')^2 = 0$ car l'intégrale sur un segment d'une fonction continue et positive est nulle *si et seulement si* cette fonction est nulle. Ceci équivaut à

$$f^2 = (f')^2 = 0,$$

ie $f = 0$.

SOLUTION 2.

1. Prouvons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

- L'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire par linéarité du produit sur \mathbb{R} , de la dérivation et de l'intégrale.
- La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique car le produit sur \mathbb{R} est commutatif.
- Soit $f \in E$. Par positivité de l'intégrale, on a

$$(f|f) = f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \geq 0.$$

La forme bilinéaire $\langle | \rangle$ est donc positive.

- Reprenons les notations précédentes. Puisque qu'une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous les termes sont nuls, l'égalité $\langle f | f \rangle = 0$ implique

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f'^2(t) dt = 0.$$

La fonction f'^2 étant continue et positive, la deuxième condition est équivalente à $f' = 0$, la fonction f est donc constante et finalement nulle puisque $f(1) = 0$. La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc définie.

2. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions de E définies par

$$f \in E, \quad g : t \in [0, 1] \longmapsto t.$$

Puisque

$$\langle f | g \rangle = f(1) + \int_0^1 f'(t) dt,$$

puis

$$\|f\|^2 = f^2(1) + \int_0^1 f'^2(t) dt$$

et finalement

$$\|g\|^2 = 1 + 1 = 2,$$

l'inégalité s'écrit

$$\left(f(1) + \int_0^1 f'(t) dt \right)^2 \leq 2 \left(f^2(1) + \int_0^1 f'^2(t) dt \right).$$

SOLUTION 3.

1. Prouvons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire.

- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire par bilinéarité du produit sur \mathbb{R} et par linéarité de l'évaluation.
- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique par commutativité du produit sur \mathbb{R} .
- Soit $P \in E$. On a $\langle P | P \rangle = P^2(-1) + P^2(0) + P^2(1) \geq 0$, la forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc positive.
- Soit $P \in E$. Puisqu'une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous les termes sont nuls, on a

$$\langle P | P \rangle = P^2(-1) + P^2(0) + P^2(1) = 0$$

si et seulement si 0, 1, -1 sont racines de P. Puisque P est de degré inférieur à deux, cette condition est équivalente à $P = 0$. La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc définie.

2. Orthonormalisons la base canonique de E par le procédé de Gram-Schmidt.

► *Première étape.* On pose

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

► *Deuxième étape.* Notons p_1 la projection orthogonale sur $\text{vect}(\Gamma_1)$. Posons $n_1 = X - p_1(X)$. On a

$$n_1 = X - \langle X | \Gamma_1 \rangle \Gamma_1 = X - 0 \Gamma_1 = X$$

Puisque $\|n_1\| = \sqrt{2}$, on complète (Γ_1) par

$$\Gamma_2 = \frac{n_1}{\|n_1\|} = \frac{X}{\sqrt{2}}.$$

► *Troisième étape.* Notons p_2 la projection orthogonale sur $\text{vect}(\Gamma_1, \Gamma_2)$. Posons $n_2 = X^2 - p_2(X^2)$. On a

$$\begin{aligned} n_2 &= X^2 - \langle X^2 | \Gamma_1 \rangle \cdot \Gamma_1 - \langle X^2 | \Gamma_2 \rangle \cdot \Gamma_2 \\ &= X^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \Gamma_1 - 0 \cdot \Gamma_2 \\ &= X^2 - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Puisque $\|n_2\| = \sqrt{2/3}$, on complète (Γ_1, Γ_2) par

$$\Gamma_3 = \frac{n_2}{\|n_2\|} = \sqrt{3/2}(X^2 - 2/3).$$

La famille $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ est une base orthonormée de E .

3. Posons

$$L_{-1} = \frac{X(X-1)}{2}, \quad L_1 = \frac{X(X+1)}{2} \quad \text{et} \quad L_0 = 1 - X^2.$$

Il s'agit des polynômes de Lagrange associés aux réels ± 1 et 0. Cette famille est clairement orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, elle est donc libre dans E qui est de dimension trois : il s'agit d'une base orthonormée de E .

REMARQUE. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est lourd en calculs au-delà de trois vecteurs...Il faut parfois avoir un peu de culture – voire du flair ! – mais surtout suivre les indications de l'énoncé pour trouver des bases orthonormées. ■

SOLUTION 4.

1. Soit u l'endomorphisme de E tel que $u(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$. u transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée directe donc u est une isométrie vectorielle directe donc $\det(u) = 1$. Or $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

2. On a $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}}$. Donc $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}}$.

REMARQUE. On en déduit que le déterminant dans une base orthonormée directe ne dépend pas du choix de cette base. Le déterminant de n vecteurs u_1, \dots, u_n dans une base orthonormée quelconque s'appelle le *produit mixte* de ces vecteurs et est noté $[x_1, \dots, x_n]$. ■

3. Cette application est linéaire car le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses variables et notamment par rapport à la dernière. De plus, elle est à valeurs dans \mathbb{R} . C'est donc une forme linéaire.

4. C'est tout simplement le théorème de Riesz.

5. Démontrons simplement la linéarité par rapport à la première variable. Soient $x_1, \dots, x_{n-1} \in E$, $x'_1 \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in E$,

$$\det_{\mathcal{B}}(\lambda x_1 + \mu x'_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \mu \det_{\mathcal{B}}(x'_1, x_2, \dots, x_n)$$

Notons $u = (\lambda x_1 + \mu x'_1) \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$, $v = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$ et $w = x'_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$. Ainsi pour tout $x \in E$, $\langle u, x \rangle = \lambda \langle v, x \rangle + \mu \langle w, x \rangle$ i.e. $\langle u - (\lambda v + \mu w), x \rangle = 0$. Donc $u - (\lambda v + \mu w) \in E^\perp = \{0\}$. On a donc $u = \lambda v + \mu w$, ce qui prouve bien la linéarité par rapport à la première variable. La linéarité par rapport aux autres variables se traite de la même manière.

Soient $x_1, \dots, x_{n-1} \in E$ tels que deux vecteurs parmi ceux-ci soient égaux. On a donc $\det(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = 0$ pour tout $x \in E$ puisque le déterminant est une forme multilinéaire alternée. Ceci signifie que $\langle x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}, x \rangle = 0$ pour tout $x \in E$. Ainsi $x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} = 0$. L'application de l'énoncé est bien alternée.

SOLUTION 5.

1. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement symétrique. Elle est bilinéaire puisque la dérivation et l'évaluation en a sont linéaires. Elle est évidemment positive. Soit enfin $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. On a donc $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(n)}(a) = 0$. Ainsi a est une racine d'ordre au moins $n+1$ de P et $\deg P \leq n$ donc $P = 0$.
2. La famille $((X-a)^k)_{0 \leq k \leq n}$ est clairement orthonormée. Puisqu'elle contient $n+1$ éléments et que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, c'est une base.

SOLUTION 6.

1. En développant $\|x+y\|^2$, on prouve sans peine que

$$\langle x|y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2},$$

et l'on en déduit que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x|e_i \rangle \langle y|e_i \rangle.$$

2. Soit $x \in E$. Posons

$$z = x - \sum_{i=1}^n \langle x|e_i \rangle e_i.$$

On a

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= \sum_{k=1}^n \langle z|e_k \rangle^2 = \sum_{k=1}^n \left\langle x - \sum_{i=1}^n \langle x|e_i \rangle e_i \middle| e_k \right\rangle^2 = \sum_{k=1}^n \left(\langle x|e_k \rangle - \sum_{i=1}^n \langle x|e_i \rangle \langle e_k|e_i \rangle \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (\langle x|e_k \rangle - \langle x|e_k \rangle)^2 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $z = 0$, cqfd.

3. D'après la question précédente, la famille $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est génératrice de E . Comme $n = \dim(E)$, cette famille est une base de E . Pour tout $1 \leq k \leq n$, on a

$$e_k = \sum_{i=1}^n \langle e_k|e_i \rangle e_i.$$

Ainsi, par identification des coordonnées dans la base (e_1, \dots, e_n) ,

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \langle e_k|e_i \rangle = \delta_{k,i}.$$

Comme cela est valable pour tout $1 \leq k \leq n$, on en déduit que la famille (e_1, \dots, e_n) est une base de E .

SOLUTION 7.

1. Prouvons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

- L'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire par linéarité du produit sur \mathbb{R} , de l'évaluation et de l'intégrale.
- La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique car le produit sur \mathbb{R} est commutatif.

- Soit $f \in E$. Par positivité de l'intégrale, on a

$$\langle f|f \rangle = \int_0^1 f(t)^2 dt \geq 0.$$

La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc positive.

- Reprenons les notations précédentes. Puisque qu'une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous les termes sont nuls, l'égalité $\langle f|f \rangle = 0$ est équivalente à

$$\int_0^1 f^2(t) dt = 0.$$

La fonction f^2 étant continue et positive la condition est équivalente à $f = 0$. La forme bilinéaire \langle , \rangle est donc définie.

2. Calcul de F^\perp .

- a. Soit $f \in F^\perp$. On a alors

$$\forall g \in F, \langle f|g \rangle = 0.$$

Comme $\forall g \in F$, on a $fg \in F$ (car $(fg)(0) = 0$), on en déduit que :

$$\forall g \in F, \langle f|fg \rangle = 0.$$

Puisque $\forall g \in F$,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f|fg \rangle = \int_0^1 f(t)f(t)g(t)dt = \int_0^1 f^2(t)g(t)dt \\ &= \langle f^2|g \rangle \end{aligned}$$

on a $f^2 \in F^\perp$.

- b. Notons $g_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_0(t) = t$. On a clairement $g_0 \in F$. Ainsi, pour $f \in F^\perp$, on déduit de la question précédente que $\langle f^2, g_0 \rangle = 0$, i.e.

$$\int_0^1 t f^2(t) dt = 0.$$

Comme $f^2 g_0$ est continue et positive, on en déduit que $f^2 g_0 = 0$ et donc que :

$$\forall t \in [0, 1], \quad t f^2(t) = 0.$$

En particulier, $f(t) = 0$ pour tout $0 < t \leq 1$. On en déduit que $f(0) = 0$ par continuité de f en 0. Ainsi $f = 0$, ce qui achève de prouver que $F^\perp = \{0\}$.

3. Non, car en dimension finie, on a $F^\perp = \{0\}$ *si et seulement si* $F = E$, ce qui n'est manifestement pas le cas.

SOLUTION 8.

s est clairement linéaire et $s^2 = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc s est une symétrie. Soit $S \in \text{Ker}(s - \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ et $A \in \text{Ker}(s + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$. Ainsi ${}^t S = S$ et ${}^t A = -A$. Par conséquent $\langle S, A \rangle = \text{tr}({}^t S A) = \text{tr}(SA)$ et $\langle A, S \rangle = \text{tr}({}^t A S) = -\text{tr}(AS) = -\text{tr}(SA)$. Donc $\langle S, A \rangle = 0$. Ceci signifie que $\text{Ker}(s - \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ et $\text{Ker}(s + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ sont orthogonaux l'un à l'autre : s est une symétrie orthogonale.

SOLUTION 9.

1. Posons $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Comme \mathcal{B} est une base orthonormale, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^n \langle f(e_j), e_i \rangle e_i$. On en déduit que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$a_{ij} = \langle f(e_j), e_i \rangle = \langle e_j, f(e_i) \rangle = \langle f(e_i), e_j \rangle = a_{ji}$$

Ainsi A est symétrique.

2. Soit $x \in \text{Ker } f$ et $y \in \text{Im } f$. Il existe donc $z \in E$ tel que $y = f(z)$. Ainsi

$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(z) \rangle = \langle f(x), z \rangle = \langle 0_E, z \rangle = 0$$

Ainsi $\text{Ker } f \subset (\text{Im } f)^\perp$. De plus, $\dim(\text{Im } f)^\perp = n - \dim \text{Im } f = \dim \text{Ker } f$ d'après le théorème du rang. Ainsi $\text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp$.

SOLUTION 10.

- Supposons $F \subset G$. Soit $x \in G^\perp$. Alors x est orthogonal à tout vecteur de G et a fortiori de F donc $x \in F^\perp$. Ainsi $G^\perp \subset F^\perp$.
Supposons F et G de dimension finie et $G^\perp \subset F^\perp$. D'après ce qui précède, $(F^\perp)^\perp \subset (G^\perp)^\perp$. Mais F et G étant de dimension finie, $(F^\perp)^\perp = F$ et $(G^\perp)^\perp = G$.
- On sait que $F \subset F + G$ donc $(F + G)^\perp \subset F^\perp$ d'après la question précédente. De même, $G \subset F + G$ donc $(F + G)^\perp \subset G^\perp$. Ainsi $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Soit $y \in F + G$. Il existe donc $(u, v) \in F \times G$ tel que $y = u + v$. Alors $\langle x, y \rangle = \langle x, u \rangle + \langle x, v \rangle$. Or $x \in F^\perp$ et $u \in F$ donc $\langle x, u \rangle = 0$. De même, $x \in G^\perp$ et $v \in G$ donc $\langle x, v \rangle = 0$. Ainsi $\langle x, y \rangle = 0$. Ceci étant vrai pour tout $y \in F + G$, $x \in (F + G)^\perp$. D'où $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$.
Par double inclusion, $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
- $F \cap G \subset F$ donc $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ d'après la première question. De même, $F \cap G \subset G$ donc $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. On en déduit que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
Supposons E de dimension finie. Alors

$$\dim(F^\perp + G^\perp) = \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F^\perp \cap G^\perp)$$

Or d'après la question précédente, $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$ donc

$$\begin{aligned} \dim(F^\perp + G^\perp) &= \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F + G)^\perp \\ &= (\dim E - \dim F) + (\dim E - \dim G) - (\dim E - \dim(F + G)) \\ &= \dim E - (\dim F + \dim G - \dim(F + G)) \\ &= \dim E - \dim(F \cap G) = \dim(F \cap G)^\perp \end{aligned}$$

Puisqu'on a précédemment montré que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$, on peut conclure que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

SOLUTION 11.

Notons p la projection orthogonale sur $\text{vect}(u)$ et P sa matrice dans \mathcal{B} . Comme (u) est une base orthonormale de $\text{vect}(u)$, on a, pour $x \in E$, $p(x) = \langle x, u \rangle u$. Notons X le vecteur colonne associé à un vecteur x de E . On a $PX = ({}^tUX)U = U({}^tUX) = U{}^tUX$. La matrice de P dans \mathcal{B} est donc $UU{}^t$.

SOLUTION 12.

- Prouvons que 1. \Rightarrow 2.

Lorsque p est une projection orthogonale de E , on a $\text{Im}(id_E - p) = \text{Ker}(p) = \text{Im}(p)^\perp$ donc, pour tout x et y dans E , $p(x) \perp y - p(y)$ ie

$$\langle p(x) | y \rangle = \langle p(x) | p(y) \rangle.$$

Cette expression étant symétrique en (x, y) , on a

$$\begin{aligned} \langle p(x) | y \rangle &= \langle p(x) | p(y) \rangle = \langle p(y) | p(x) \rangle = \langle p(y) | x \rangle \\ &= \langle x | p(y) \rangle \end{aligned}$$

► Prouvons que 2. \Rightarrow 3.

Soit x dans E . Appliquons le 2. à x et $y = p(x)$. On a

$$\|p(x)\|^2 = \langle p(x)|p(x) \rangle = \langle x|p(x) \rangle.$$

ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|p(x)\|^2 \leq \|x\| \cdot \|p(x)\|.$$

Si $p(x) = 0$, l'inégalité 3. est trivialement vérifiée. Si $p(x) \neq 0$, $\|p(x)\| > 0$ et en divisant membre à membre l'inégalité précédente, on aboutit à

$$\|p(x)\| \leq \|x\|.$$

► Prouvons que 3. \Rightarrow 1.

Soient $x \in \text{Im } p$, $y \in \text{Ker } p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $y = 0$, alors $x \perp y$.

Supposons maintenant $y \neq 0$. D'une part,

$$\|p(x + \lambda y)\|^2 = \|x\|^2$$

et d'autre part,

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda \langle x|y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2$$

D'après 2., $2\lambda \langle x|y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2 \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Le discriminant de ce trinôme du second degré en λ est donc négatif, ce qui impose $\langle x|y \rangle^2 \leq 0$ et donc $\langle x|y \rangle = 0$. On a donc $x \perp y$. On en déduit que $\text{Im } p \perp \text{Ker } p$ et donc que p est une projection orthogonale.

SOLUTION 13.

Commençons par établir un plan de bataille...Il nous faut calculer une base orthonormée de F afin de calculer la projection orthogonale p sur F . On commence donc par déterminer une base de F qu'il faudra ensuite orthonormaliser par le procédé de Schmidt.

► Détermination d'une base de F . Il est clair que le système d'équations définissant F est équivalent à

$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4 = 0.$$

Un vecteur X appartient donc à F si et seulement si il est de la forme

$$X = x_1(1, 0, -1, 0) + x_2(0, 1, 0, -1)$$

où $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Posons

$$u = (1, 0, -1, 0) \quad \text{et} \quad v = (0, 1, 0, -1).$$

La famille (u, v) est clairement libre et génératrice de F , il s'agit d'une base de ce sous-espace de \mathbb{R}^4 .

► Détermination d'une base orthonormée de F . La base (u, v) est clairement orthogonale. Puisque l'on a $\|u\| = \|v\| = \sqrt{2}$, la famille formée par

$$u' = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}, 0) \quad \text{et} \quad v' = (0, 1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}).$$

est une base orthonormée de F .

► Calcul de p . Pour tout vecteur x de E , on a

$$p(x) = (x|u')u' + (x|v')v'.$$

Ainsi, en notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de E , on a

$$p(e_1) = (1/2, 0, -1/2, 0), \quad p(e_2) = (0, 1/2, 0, -1/2),$$

puis

$$p(e_3) = (-1/2, 0, 1/2, 0) \quad \text{et} \quad p(e_4) = (0, -1/2, 0, 1/2).$$

Ainsi

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUTION 14.

1. Pour tout $P \in E$, la formule de Taylor s'écrit

$$P = P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{P''(1)}{2}(X-1)^2.$$

Un polynôme P de F est donc combinaison linéaire des vecteurs

$$P_1 = X-1, \quad P_2 = (X-1)^2.$$

Puisque ces deux polynômes appartiennent à F et ne sont pas proportionnels, la famille (P_1, P_2) est une base de F .

2. D'après le cours, la quantité $\|X-P\|^2$ est minimale lorsque $P = \pi_F(X)$, où π_F désigne la projection orthogonale sur F . Orthonormalisons la famille (P_1, P_2) par le procédé de Gram-Schmidt. Posons

$$Q_1 = \frac{X-1}{\|P_1\|} = \frac{X-1}{\sqrt{2}}.$$

Notons π_1 la projection orthogonale sur $\text{vect}(P_1)$. Posons

$$\begin{aligned} n &= (X-1)^2 - \pi_1((X-1)^2) \\ &= (X-1)^2 - \langle (X-1)^2 | Q_1 \rangle Q_1 \\ &= (X-1)^2 + \frac{3}{2}(X-1) \\ &= X^2 - X/2 - 1/2 \end{aligned}$$

Notons ensuite

$$Q_2 = \frac{n}{\|n\|} = \sqrt{2/3}n.$$

On a

$$\begin{aligned} \pi_F(X) &= \langle X | Q_1 \rangle Q_1 + \langle X | Q_2 \rangle Q_2 \\ &= \frac{X-1}{2} - \frac{1}{3}(X^2 - X/2 - 1/2) \\ &= -X^2/3 + 2/3X - 1/3 \end{aligned}$$

Ainsi

$$X - \pi_F(X) = (X^2 + X + 1)/3$$

et

$$\delta = \|X - \pi_F(X)\| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

REMARQUE. On pouvait aussi remarquer que l'orthogonal de F est la droite vectorielle engendrée par $X^2 + X + 1$, ce qui est plus facile à voir lorsque l'on choisit $(X-1, X(X-1))$ comme base de F . Le calcul de la projection et de la distance de X à F s'en trouve simplifié. ■

SOLUTION 15.

Soit $E = \mathcal{C}([0; \pi], \mathbb{R})$. On munit E du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^\pi f(x)g(x)dx$. On pose $f_{a,b} : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$x \mapsto ax^2 + bx$$

et $F = \{f_{a,b} | (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. F est un sous-espace vectoriel de E et $\phi(a, b) = \|\sin - f_{a,b}\|^2$. Le minimum de ϕ est donc atteint quand $f_{a,b}$ est la projection orthogonale de \sin sur F .

Déterminons une base orthogonale de F . On pose $f_1 : x \mapsto x$ et on cherche α tel que $f_2 : x \mapsto x^2 + \alpha x$ soit orthogonale à f_1 .

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^\pi (x^3 + \alpha x^2)dx = \frac{\pi^4}{4} + \alpha \frac{\pi^3}{3}$$

Il faut donc prendre $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$. On pose alors $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$ et $e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|}$. Par conséquent, la projection orthogonale de \sin sur F est :

$$p_F(\sin) = \langle \sin, e_1 \rangle e_1 + \langle \sin, e_2 \rangle e_2.$$

Par le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} \|\sin - p_F(\sin)\|^2 &= \|\sin\|^2 - \|p_F(\sin)\|^2 \\ &= \|\sin\|^2 - \langle \sin, e_1 \rangle^2 - \langle \sin, e_2 \rangle^2 \\ &= \int_0^\pi \sin^2 x dx - \frac{1}{\|f_1\|^2} \left(\int_0^\pi x \sin x dx \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{\|f_2\|^2} \left(\int_0^\pi \left(x^2 - \frac{3\pi}{4} x \right) \sin x dx \right)^2 \end{aligned}$$

Un rapide calcul nous donne $\|f_1\|^2 = \frac{\pi^3}{3}$ et $\|f_2\|^2 = \frac{\pi^5}{80}$. Par intégration par parties, on trouve :

$$\int_0^\pi x \sin x dx = \pi \text{ et } \int_0^\pi x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4.$$

Enfin, $\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}$. Finalement, on trouve

$$\min \phi = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5}.$$

SOLUTION 16.

1. E est une partie non vide de \mathbb{R} minorée par 0. Elle admet une borne inférieure.
2. Si (\mathcal{S}) admet une solution, alors $K = 0$. Les pseudo-solutions de (\mathcal{S}) sont donc les éléments X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\|AX - B\|^2 = 0$ i.e. tels que $AX - B = 0$. Ce sont donc les solutions de (\mathcal{S}) .

3. Première méthode

Puisque $\{AX, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\} = \text{Im}A$, on peut affirmer que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de (\mathcal{S}) si et seulement si AX est la projection de B sur $\text{Im}A$. Or AX est la projection de B sur $\text{Im}A$ si et seulement si $AX - B$ est orthogonal à $\text{Im}A$. Or $AX - B$ est orthogonal à $\text{Im}A$ si et seulement si il est orthogonal à chaque colonne de A puisque les colonnes de A engendrent $\text{Im}A$. Ainsi $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de (\mathcal{S}) si et seulement si ${}^tA(AX - B) = 0$ i.e. si et seulement si X est solution de (\mathcal{S}') .

Seconde méthode

Supposons que X soit solution de (\mathcal{S}') i.e. ${}^tA(AX - B) = 0$. Alors pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \|AY - B\|^2 &= \|A(Y - X) + AX - B\|^2 \\ &= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 + 2\langle A(Y - X), AX - B \rangle \\ &= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 + 2{}^t(Y - X){}^tA(AX - B) \\ &= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 \geq \|AX - B\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi X est pseudo-solution de (\mathcal{S}) .

Supposons que X soit pseudo-solution de (\mathcal{S}) . Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|A(X + \lambda Y) - B\|^2 \geq \|AX - B\|^2$$

ou encore

$$\|(AX - B) + \lambda AY\|^2 \geq \|AX - B\|^2$$

ce qui donne via une identité remarquable

$$2\lambda \langle AY, AX - B \rangle + \lambda^2 \|AY\|^2 \geq 0$$

Si on fixe Y , la dernière inégalité étant vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a nécessairement $\langle AY, AX - B \rangle = 0$. Ainsi pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle AY, AX - B \rangle = 0$ ou encore $(Y, {}^tA(AX - B)) = 0$, ce qui prouve que ${}^tA(AX - B) = 0$ et que X est solution de (\mathcal{S}') .

4. Soit $X \in \text{Ker} A$. On a donc $AX = 0$ puis ${}^t AAX = 0$ donc $X \in \text{Ker } {}^t AA$. Ainsi $\text{Ker} A \subset \text{Ker } {}^t AA$.
 Soit maintenant $X \in \text{Ker } {}^t AA$. On a donc ${}^t AAX = 0$ puis ${}^t X {}^t AAX = 0$. Notons $Y = AX$. Ainsi ${}^t YY = 0$ i.e. $\|Y\|^2 = 0$ donc $Y = 0$ i.e. $AX = 0$.
 D'où $X \in \text{Ker} A$. Ainsi $\text{Ker } {}^t AA \subset \text{Ker} A$.
 Finalement, $\text{Ker} A = \text{Ker } {}^t AA$ et $\text{rg} A = \text{rg } {}^t AA$ via le théorème du rang.
5. Si $\text{rg}(A) = n$, alors $\text{rg}({}^t AA) = n$. La matrice ${}^t AA$ est une matrice carrée de taille n et de rang n le système (\mathcal{S}') est donc de Cramer : il admet une unique solution i.e. (\mathcal{S}) admet une unique pseudo-solution.

SOLUTION 17.

Comme E est ouvert, un minimum de f est forcément un minimum local et donc un point critique. Pour $x \in E$, $\nabla f(x) = 2 \sum_{i=1}^p (x - x_i)$.

L'unique point critique de f sur E est donc $m = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i$. Il suffit donc de vérifier que m est bien un minimum : il sera nécessairement unique. Pour $x \in E$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^p \|x - m + m - x_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^p (\|x - m\|^2 + 2\langle x - m, m - x_i \rangle + \|m - x_i\|^2) \\ &= p\|x - m\|^2 + f(m) + \left\langle x - m, \sum_{i=1}^p m - x_i \right\rangle \\ &= p\|x - m\|^2 + f(m) \geq f(m) \end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^p m - x_i = 0$. Ceci prouve que f atteint bien son minimum en m .

SOLUTION 18.

Pour $x \in E$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^p \|x - m + m - x_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^p (\|x - m\|^2 + 2\langle x - m, m - x_i \rangle + \|m - x_i\|^2) \\ &= p\|x - m\|^2 + f(m) + \left\langle x - m, \sum_{i=1}^p m - x_i \right\rangle \\ &= p\|x - m\|^2 + f(m) \geq f(m) \end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^p m - x_i = 0$. Ceci prouve que f atteint bien son minimum en m .

SOLUTION 19.

Puisque $O(E)$ est un groupe, $r \circ s$ est un endomorphisme orthogonal de E . Comme

$$\det(r \circ s) = 1 \times -1 = -1,$$

$r \circ s$ est indirect : il s'agit d'une symétrie. On a donc

$$(r \circ s)^2 = r \circ s \circ r \circ s = id_E,$$

d'où $s \circ r \circ s = r^{-1}$ et $r \circ s \circ r = s^{-1} = s$.

SOLUTION 20.

Notons

$$\vec{a} = \frac{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}}{\sqrt{3}}$$

un vecteur normé dirigeant l'axe de la rotation. D'après le cours, pour tout vecteur $\vec{x} \in E$,

$$f(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{a} \rangle \vec{a} + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)(\vec{x} - \langle \vec{x} | \vec{a} \rangle \vec{a}) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \vec{a} \wedge \vec{x}$$

ie

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2} \langle \vec{x} | \vec{a} \rangle \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{a} \wedge \vec{x}.$$

On a donc

$$f(\vec{u}) = \vec{v}$$

puis

$$f(\vec{v}) = \vec{w}$$

et

$$f(\vec{w}) = \vec{u},$$

d'où

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

REMARQUE. L'esquisse d'un petit tétraèdre trirectangle permet de retrouver *empiriquement* le résultat démontré ci-dessus, à moins de se fendre d'une petite démonstration... ■

SOLUTION 21.

Les colonnes de la matrice M étant normées et deux à deux orthogonales, la matrice étudiée est orthogonale. Une simple application de la règle de Sarrus permet de conclure que le déterminant de f vaut 1 : f est donc une rotation ; notons θ son angle. Déterminons son axe en résolvant le système \mathcal{S} suivant, $MX = X$...

$$\mathcal{S} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & -1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}.$$

Effectuons $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - \sqrt{6}L_1$

$$\mathcal{S} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix},$$

les solutions sont donc les vecteurs colinéaires au vecteur unitaire

$$\vec{a} = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}.$$

Le vecteur e_3 est unitaire et orthogonal à \vec{a} donc

$$\langle f(e_3)|e_3 \rangle = \frac{1}{2} = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \text{Det}(a, u, f(u)) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(\theta),$$

f est donc la rotation d'axe orienté par \vec{a} et d'angle $\pi/3$.

SOLUTION 22.

► Prouvons 1) \Rightarrow 2) Soient x et y deux vecteurs non nuls de E . Comme

$$\left(\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right) \perp \left(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right),$$

on a :

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \left| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right. \right\rangle = 0$$

i.e.

$$\frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\|u(y)\|^2}{\|y\|^2},$$

d'où, par positivité de la norme :

$$\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|u(y)\|}{\|y\|}.$$

La quantité

$$\frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

est donc indépendante du vecteur $x \neq 0$. Notons-la k . On a

$$\forall x \neq 0, \quad \|u(x)\| = k\|x\|.$$

Comme $u(x) = 0$, cette égalité est prolongeable à E :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = k\|x\|.$$

► Prouvons 2) \Rightarrow 3) Supposons que

$$\exists k \geq 0, \quad \forall x \in E, \quad \|u(x)\| = k\|x\|.$$

Si $k = 0$, u est la composée de n'importe quelle rotation avec l'homothétie de rapport nul. Si $k \neq 0$, alors $k > 0$, notons h_k l'homothétie de rapport k . On a, pour tout vecteur x de E ,

$$\|((h_k)^{-1} \circ u)(x)\| = \frac{\|u(x)\|}{k} = \|x\|.$$

Ainsi l'endomorphisme $(h_k)^{-1} \circ u$ de E est une isométrie i de E et $u = h_k \circ i$.

► Prouvons 3) \Rightarrow 1) Si $u = h_k \circ i$ avec h_k homothétie de rapport $k \geq 0$ et i isométrie de E , alors, pour tous vecteurs x et y de E , on a

$$\langle u(x)|u(y) \rangle = k\langle x|y \rangle$$

et donc,

$$\langle x|y \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle u(x)|u(y) \rangle = 0.$$

SOLUTION 23.

- Si $H = K$ alors $s_H = s_K$ et s_H et s_K commutent évidemment.
- Si $H^\perp \subset K$, alors on a également $K^\perp \subset H$. Soient $a, b \in E$ tels que $H = \text{vect}(a)^\perp$ et $K = \text{vect}(b)^\perp$. On a donc $a \in K$ et $b \in H$. De plus, a et b sont orthogonaux. Enfin, $(H \cap K)^\perp = H^\perp + K^\perp = \text{vect}(a) \oplus \text{vect}(b)$. Soit $x \in E$. Il existe donc $u \in H \cap K$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $x = u + \lambda a + \mu b$. On a alors :

$$\begin{aligned}s_H \circ s_K(x) &= s_H(u + \lambda a - \mu b) = u - \lambda a - \mu b \\ s_K \circ s_H(x) &= s_K(u - \lambda a + \mu b) = u - \lambda a - \mu b\end{aligned}$$

On a bien prouvé que s_H et s_K commutent.

REMARQUE. On a même prouvé que $s_H \circ s_K = s_K \circ s_H = s_{H \cap K}$. ■

- Réciproquement, si s_H et s_K commutent, soit à nouveau a tel que $H = \text{vect}(a)^\perp$. On a donc $s_H(a) = -a$. Par conséquent, $s_H \circ s_K(a) = s_K \circ s_H(a) = -s_K(a)$. Ceci implique que $s_K(a) \in H^\perp = \text{vect}(a)$. Comme s_K est une isométrie, on a $s_K(a) = a$ ou $s_K(a) = -a$. Si $s_K(a) = a$ alors $a \in K$ et donc $H^\perp \subset K$. Si $s_K(a) = -a$ alors $a \in K^\perp$, c'est-à-dire que $K = \text{vect}(a)^\perp = H$.

SOLUTION 24.

1. Soit (i, j, k) une base orthonormée directe de E et f vérifiant la condition de l'énoncé. Alors

$$f(i) = f(j) \wedge f(k) \qquad f(j) = f(k) \wedge f(i) \qquad f(k) = f(i) \wedge f(j)$$

La famille $(f(i), f(j), f(k))$ est donc orthogonale. Par conséquent

$$\begin{aligned}\|f(i)\| &= \|f(j)\| \|f(k)\| \\ \|f(j)\| &= \|f(k)\| \|f(i)\| \\ \|f(k)\| &= \|f(i)\| \|f(j)\|\end{aligned}$$

Si l'un des vecteurs $f(i), f(j), f(k)$ est nul alors ces 3 vecteurs sont nuls et donc $f = 0$. Si les 3 vecteurs sont non nuls, on tire des 3 dernières relations que :

$$\|f(i)\| = \|f(j)\| = \|f(k)\| = 1$$

Comme de plus $f(i) = f(j) \wedge f(k)$, la famille $(f(i), f(j), f(k))$ est une base orthonormée directe. On a donc $f \in \text{SO}(E)$. Réciproquement, si $f = 0$ ou $f \in \text{SO}(E)$, alors f vérifie bien la condition de l'énoncé puisque les applications $(u, v) \mapsto f(u \wedge v)$ et $(u, v) \mapsto f(u) \wedge f(v)$ sont bilinéaires et que ces deux applications coïncident sur une base orthonormée directe. L'ensemble des endomorphismes recherché est donc $\text{SO}(E) \cup \{0\}$.

2. Tout le raisonnement précédent reste valable à l'exception près que $f(i) = -f(j) \wedge f(k)$ et la famille $(f(i), f(j), f(k))$ est donc une base orthonormée indirecte. f est donc soit l'endomorphisme nul soit une isométrie indirecte. L'ensemble recherché est donc $(\text{O}(E) \setminus \text{SO}(E)) \cup \{0\}$.

SOLUTION 25.

Notons P le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$. On a $P = \{(3z - 2y, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}((-2, 1, 0), (3, 0, 1))$. Notons $u_1 = (-2, 1, 0)$ et $u_2 = (3, 0, 1)$. Notons s la symétrie de l'énoncé. On va déterminer les images des vecteurs de la base canonique par s . Un vecteur normal à P est $n = u_1 \wedge u_2 = (1, 2, -3)$. Le projeté orthogonal d'un vecteur u sur $P^\perp = \text{vect}(n)$ est donc $p(u) = \frac{\langle u, n \rangle}{\|n\|^2} n$. On a alors $s(u) = u - 2p(u) = u - 2 \frac{\langle u, n \rangle}{\|n\|^2} n$. Il suffit alors d'appliquer à $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. On trouve

$$s(e_1) = \frac{1}{7}(6, -2, 3) \qquad s(e_2) = \frac{1}{7}(-2, 3, 6) \qquad s(e_3) = \frac{1}{7}(3, 6, -2)$$

La matrice de s dans la base canonique est donc $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

SOLUTION 26.

1. Soient s une réflexion de E , (u, v) une base de E , et $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ la matrice de s dans la base (u, v) . Recherchons l'axe de

s . Les vecteurs de l'axe sont les vecteurs de matrice colonne X dans la base (u, v) vérifiant $AX = X$. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} AX = X &\iff \begin{cases} x \cos \theta + y \sin \theta = x \\ x \sin \theta - y \cos \theta = y \end{cases} \iff \begin{cases} x(\cos \theta - 1) + y \sin \theta = 0 \\ x \sin \theta - y(\cos \theta + 1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2y \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 0 \\ 2x \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 2y \cos^2 \frac{\theta}{2} = 0 \end{cases} \iff x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2} = 0 \end{aligned}$$

La dernière équivalence est justifiée par le fait que $\sin \frac{\theta}{2}$ et $\cos \frac{\theta}{2}$ ne peuvent être simultanément nuls. Un vecteur directeur de l'axe est donc $\cos \frac{\theta}{2} u + \sin \frac{\theta}{2} v$. On en déduit que $\frac{\theta}{2}$ est l'angle orienté de droites entre l'axe des abscisses i.e. $\text{vect}(u)$ et l'axe de la réflexion s (modulo π puisqu'il s'agit d'un angle orienté de droites).

2. Soit s_1 et s_2 deux réflexions de E . On peut choisir une base orthonormée \mathcal{B} de E de telle sorte que la matrice de s_1 dans cette base soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice de s_2 dans \mathcal{B} est de la forme $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$. La matrice de $s_1 + s_2$ dans \mathcal{B} est donc $A = \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -1 - \cos \theta \end{pmatrix}$. $s_1 + s_2$ est une réflexion *si et seulement si* la matrice A est orthogonale de déterminant -1 . Ceci nous donne donc les conditions

$$\begin{cases} (1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 1 \\ \sin^2 \theta + (-1 - \cos \theta)^2 = 1 \\ (1 + \cos \theta)(-1 - \cos \theta) - \sin^2 \theta = -1 \end{cases}$$

Un rapide calcul montre que chacune des équations de ce système équivaut à $2 \cos \theta = -1$ i.e. $\theta \equiv \pm \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$. On a donc $\frac{\theta}{2} \equiv \pm \frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$. Avec notre choix de base, l'axe de s_1 est l'axe des abscisses. A l'aide de la première question, on peut donc conclure que $s_1 + s_2$ est une réflexion *si et seulement si* l'angle non orienté de droites entre l'axe de s_1 et l'axe de s_2 vaut $\frac{\pi}{3}$.

SOLUTION 27.

1. Soient $y \in \text{Im } v$ et $z \in \text{Ker } v$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = v(x)$ i.e. $y = x - u(x)$. On a également $v(z) = 0_E$ i.e. $z = u(z)$.

$$(y|z) = (x - u(x)|z) = (x|z) - (u(x)|z) = (x|z) - (u(x)|u(z)) = 0$$

car u conserve le produit scalaire. On a donc prouvé que $\text{Im } v$ et $\text{Ker } v$ sont orthogonaux.

En particulier, ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe. De plus, d'après le théorème du rang $\dim \text{Ker } v + \dim \text{Im } v = \dim E$, donc $\text{Im } v$ et $\text{Ker } v$ sont supplémentaires.

2. Une composée d'automorphismes orthogonaux est un automorphisme orthogonal.

SOLUTION 28.

1. L'application Φ est clairement symétrique. Elle est bilinéaire par linéarité de l'intégrale. Elle est positive par positivité de l'intégrale.

Enfin, soit $f \in E$ telle que $\Phi(f, f) = 0$. On a donc $\int_0^1 f(t)^2 dt = 0$. Comme l'application f^2 est positive et continue sur $[0, 1]$, elle est nulle sur $[0, 1]$. Par conséquent, f est également nulle sur $[0, 1]$. De plus, f est une combinaison linéaire des fonctions 1-périodiques e_1, e_2, e_3 . Donc f est aussi 1-périodique. Elle est alors nulle sur \mathbb{R} . L'application Φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire.

2. Les calculs sont élémentaires :

$$\begin{aligned}\|e_1\|^2 &= 2 \int_0^1 \frac{1}{2} dt = 1 \\ \|e_2\|^2 &= 2 \int_0^1 \cos^2(2\pi t) dt = \int_0^1 (1 + \cos(4\pi t)) dt = 1 \\ \|e_3\|^2 &= 2 \int_0^1 \sin^2(2\pi t) dt = \int_0^1 (1 - \cos(4\pi t)) dt = 1 \\ \langle e_1, e_2 \rangle &= \sqrt{2} \int_0^1 \cos(2\pi t) dt = 0 \\ \langle e_1, e_3 \rangle &= \sqrt{2} \int_0^1 \sin(2\pi t) dt = 0 \\ \langle e_2, e_3 \rangle &= 2 \int_0^1 \sin(2\pi t) \cos(2\pi t) dt = \int_0^1 \sin(4\pi t) dt = 0\end{aligned}$$

La base (e_1, e_2, e_3) est donc orthonormée.

3. a. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f_1, f_2 \in E$. $\tau_x(\lambda f_1 + \mu f_2)$ est l'application $t \mapsto (\lambda f_1 + \mu f_2)(x - t)$, c'est-à-dire l'application $t \mapsto \lambda f_1(x - t) + \mu f_2(x - t)$ i.e. l'application $\lambda \tau_x(f_1) + \mu \tau_x(f_2)$. Ainsi τ_x est linéaire.
De plus, $\tau_x(e_1) = e_1$. De plus, pour $x, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\cos(2\pi(x - t)) &= \cos(2\pi x) \cos(2\pi t) + \sin(2\pi x) \sin(2\pi t) \\ \sin(2\pi(x - t)) &= \sin(2\pi x) \cos(2\pi t) - \cos(2\pi x) \sin(2\pi t)\end{aligned}$$

Autrement dit, $\tau_x(e_2) = \cos(2\pi x)e_2 + \sin(2\pi x)e_3$ et $\tau_x(e_3) = \sin(2\pi x)e_2 - \cos(2\pi x)e_3$. Donc $\tau_x(e_1)$, $\tau_x(e_2)$ et $\tau_x(e_3)$ appartiennent à $\text{vect}(e_1, e_2, e_3) = E$. Comme (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de E , on en déduit que $\tau_x(f) \in E$ pour tout $f \in E$. Ainsi τ_x est bien un endomorphisme de E .

- b. Les calculs précédents montrent que la matrice de τ_x dans la base (e_1, e_2, e_3) est $M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi x) & \sin(2\pi x) \\ 0 & \sin(2\pi x) & -\cos(2\pi x) \end{pmatrix}$.
- c. On vérifie sans peine que M_x est orthogonale. Comme M_x est la matrice de τ_x dans une base orthonormale, on en déduit que τ_x est un automorphisme orthogonal.
- d. On a $\det M = -1$ donc τ_x est une isométrie vectorielle indirecte. Comme $\dim E = 3$, τ_x est une réflexion ou une anti-rotation.

Cherchons les vecteurs invariants par τ_x . On résout le système $MX = X$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}MX = X &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 \cos(2\pi x) + x_3 \sin(2\pi x) = x_2 \\ x_2 \sin(2\pi x) - x_3 \cos(2\pi x) = x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2(\cos(2\pi x) - 1) + x_3 \sin(2\pi x) = 0 \\ x_2 \sin(2\pi x) - x_3(1 + \cos(2\pi x)) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_2 \sin^2(\pi x) + 2x_3 \sin(\pi x) \cos(\pi x) = 0 \\ 2x_2 \sin(\pi x) \cos(\pi x) - 2x_3 \cos^2(\pi x) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x_2 \sin(\pi x) - x_3 \cos(\pi x) = 0\end{aligned}$$

Le sous-espace des vecteurs invariants par τ_x est donc le plan P_x d'équation $x_2 \sin(\pi x) - x_3 \cos(\pi x) = 0$ dans la base (e_1, e_2, e_3) . τ_x est donc une réflexion. On peut également définir P_x par $P_x = \text{vect}(e_1, \cos(\pi x)e_2 + \sin(\pi x)e_3)$.

SOLUTION 29.

Posons $g(x) = f(x) - f(0_E)$ pour tout $x \in E$. En particulier, $g(0_E) = 0 - E$. Montrons que g conserve la norme. Soit $x \in E$. Alors, d'après l'énoncé,

$$\|g(x)\| = \|f(x) - f(0_E)\| = \|x - 0_E\| = \|x\|$$

Montrons que g conserve le produit scalaire. Soit $(x, y) \in E^2$. Alors

$$\begin{aligned} \langle g(x), g(y) \rangle &= \frac{1}{2} (\|g(x)\|^2 + \|g(y)\|^2 - \|g(x) - g(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|f(x) - f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Montrons que g est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} \|g(\lambda x + \mu y) - \lambda g(x) - \mu g(y)\|^2 &= \|g(\lambda x + \mu y)\|^2 + \lambda^2 \|g(x)\|^2 + \mu^2 \|g(y)\|^2 \\ &\quad - 2\lambda \langle g(\lambda x + \mu y), g(x) \rangle - 2\mu \langle g(\lambda x + \mu y), g(y) \rangle + 2\lambda\mu \langle g(x), g(y) \rangle \\ &= \|\lambda x + \mu y\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 + \mu^2 \|y\|^2 \\ &\quad - 2\lambda \langle \lambda x + \mu y, x \rangle - 2\mu \langle \lambda x + \mu y, y \rangle + 2\lambda\mu \langle x, y \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où $g(\lambda x + \mu y) = \lambda g(x) + \mu g(y)$. g est donc linéaire.

g est linéaire et conserve le produit scalaire : c'est un automorphisme orthogonal. Comme $f = g + f(0_E)$, f est la composée de g par la translation de vecteur $f(0_E)$.

SOLUTION 30.

Supposons que f est une symétrie orthogonale. Alors f est un automorphisme orthogonal et donc A est orthogonale i.e. ${}^tAA = I_n$. De plus, f est une symétrie donc $A^2 = I_n$. On en déduit que ${}^tA = A$ et donc A est symétrique. Réciproquement, supposons A orthogonale et symétrique. Alors f est un automorphisme orthogonal. Or ${}^tAA = I_n$ et ${}^tA = A$ donc $A^2 = I_n$ et f est une symétrie. Il est alors classique de montrer que f est une symétrie orthogonale.

SOLUTION 31.

Notons C_1, \dots, C_n les vecteurs colonnes de la matrice $|A| = (|a_{i,j}|)_{1 \leq i, j \leq n}$ et U le vecteur colonne de taille n dont tous les coefficients valent 1. On a

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| = \sum_{i=1}^n \langle C_i | U \rangle \leq \sum_{i=1}^n \|C_i\| \cdot \|U\| = \sum_{i=1}^n 1 \times \sqrt{n} = n\sqrt{n},$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et puisque les vecteurs C_1, \dots, C_n sont unitaires (car A est orthogonale).

SOLUTION 32.

Comme O est orthogonale, ${}^tOO = I_n$. On en déduit en particulier,

$$\begin{aligned} {}^tAA + {}^tCC &= I_p & {}^tAB + {}^tCD &= 0 \\ {}^tBB + {}^tDD &= I_q & {}^tBA + {}^tDC &= 0 \end{aligned}$$

► Si $\det A = \det D = 0$, alors on a bien l'inégalité demandée.

► Si $\det D \neq 0$, posons $M = \left(\begin{array}{c|c} {}^tA & {}^tC \\ \hline \mathbf{0} & {}^tD \end{array} \right)$ et $N = MO = \left(\begin{array}{c|c} I_p & \mathbf{0} \\ \hline {}^tDC & {}^tDD \end{array} \right)$. Les matrices M et N étant triangulaires par blocs, on a $\det M = \det({}^tA)\det({}^tD) = \det A \det D$ et $\det N = \det I_p \det({}^tDD) = (\det D)^2$. De plus, $\det N = \det(MO) = \det M \det O$. On en déduit que $(\det D)^2 = \det A \det D \det O$. Puisque $\det D \neq 0$, $\det D = \det A \det O$ et donc $(\det D)^2 = (\det A)^2 (\det O)^2$. Or O est orthogonale donc $\det O = \pm 1$ et $(\det O)^2 = 1$. On a bien l'égalité demandée.

► Si $\det A \neq 0$, posons $M = \left(\begin{array}{c|c} {}^tA & \mathbf{0} \\ \hline {}^tB & {}^tD \end{array} \right)$ et $N = MO = \left(\begin{array}{c|c} {}^tAA & {}^tAB \\ \hline \mathbf{0} & I_q \end{array} \right)$. Les matrices M et N étant triangulaires par blocs, on a $\det M = \det({}^tA)\det({}^tD) = \det A \det D$ et $\det N = \det({}^tAA)\det I_q = (\det A)^2$. De plus, $\det N = \det(MO) = \det M \det O$. On en déduit que $(\det A)^2 = \det A \det D \det O$. Puisque $\det A \neq 0$, $\det A = \det D \det O$ et donc $(\det A)^2 = (\det D)^2 (\det O)^2$. On conclut comme précédemment en remarquant que $(\det O)^2 = 1$.

SOLUTION 33.

On a $B = P^{-1}AP$ où P est une matrice de passage entre deux bases orthonormales. P est donc une matrice orthogonale. On a donc $P^{-1} = {}^tP$ puis $B = {}^tPAP$. Ainsi

$$\operatorname{tr}({}^tBB) = \operatorname{tr}({}^tP {}^tAP {}^tPAP) = \operatorname{tr}({}^tP {}^tAAP) = \operatorname{tr}({}^tP {}^tAA P) = \operatorname{tr}(P({}^tP {}^tAA)) = \operatorname{tr}({}^tAA)$$

SOLUTION 34.

1. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Alors tXX est une matrice carrée réelle de taille 1 i.e. un réel et ${}^tXX = \sum_{k=1}^n x_k^2$. Ainsi ${}^tXX \geq 0$ puisque les x_k sont des réels et ${}^tXX = 0$ implique $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = 0$ i.e. $X = 0$.

2. Soit $X \in \operatorname{Ker}(I_n + M)$. On a donc $(I_n + M)X = 0$ i.e. $MX = -X$. Ainsi ${}^tXMX = -{}^tXX$. Mais en transposant l'égalité $MX = -X$, on obtient ${}^tX {}^tM = -{}^tX$ et donc ${}^tXM = {}^tX$ puisque ${}^tM = -M$. Ainsi ${}^tXMX = {}^tXX$. Par conséquent, ${}^tXX = -{}^tXX$ et donc ${}^tXX = 0$. D'après la question précédente, $X = 0$. D'où $\operatorname{Ker}(I_n + M) = \{0\}$ et $I_n + M$ est inversible.

3. On a ${}^tAA = {}^t((I_n + M)^{-1}) {}^t(I_n - M)(I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Or

$${}^t((I_n + M)^{-1}) = ({}^t(I_n + M))^{-1} = (I_n - M)^{-1} \quad \text{et} \quad {}^t(I_n - M) = I_n + M$$

Ainsi ${}^tAA = (I_n - M)^{-1}(I_n + M)(I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Or $I_n - M$ et $I_n + M$ commutent donc

$${}^tAA = (I_n - M)^{-1}(I_n - M)(I_n + M)(I_n + M)^{-1} = I_n$$

Ainsi A est orthogonale.

SOLUTION 35.

Supposons $A = 0$. Alors il est clair que $A = \text{com}(A) = 0$.

Supposons $A \in \text{SO}(n)$. On sait que $\text{com}(A)^t A = \det(A)I_n$. Puisque $A \in \text{SO}(n)$, $\det(A) = 1$ et ${}^t A = A^{-1}$. Il s'ensuit que $\text{com}(A) = A$.

Supposons maintenant $A = \text{com}(A)$. Puisque ${}^t \text{com}(A)A = \det(A)I_n$, ${}^t AA = \det(A)I_n$.

- Si $\det(A) = 0$, ${}^t AA = 0$ et, a fortiori, $\text{tr}({}^t AA) = 0$ et donc $A = 0$ puisque $(M, N) \mapsto \text{tr}({}^t MN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si $\det(A) \neq 0$, alors $\text{tr}({}^t AA) = \text{tr}(\det(A)I_n) = n \det(A)$. En particulier, $\det(A) > 0$ à nouveau car $(M, N) \mapsto \text{tr}({}^t MN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par ailleurs, $\det({}^t AA) = \det(\det(A)I_n)$ ou encore $\det(A)^2 = \det(A)^n$. Puisque $n \neq 2$ et $\det(A) > 0$, $\det(A) = 1$. Ainsi ${}^t AA = I_n$ et $A \in \text{SO}(n)$.

SOLUTION 36.

1. ► Supposons que la famille (x_1, \dots, x_p) soit liée. Il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^p \lambda_j x_j = 0_E$. On a alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j (x_i | x_j) = 0$$

Si on note (C_1, \dots, C_p) les colonnes de la matrice $G_p(x_1, \dots, x_p)$, on a donc $\sum_{j=1}^p \lambda_j C_j = 0$. Les colonnes de la matrice $G_p(x_1, \dots, x_p)$ sont liées donc $\det G_p(x_1, \dots, x_p) = 0$.

- Réciproquement, supposons que $\det G = 0$. Alors les colonnes C_1, \dots, C_p de G sont liées. Il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^p \lambda_j C_j = 0$. On en déduit comme précédemment que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j (x_i | x_j) = 0$$

Posons $z = \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j$. L'égalité précédente signifie que $(z | x_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq p$. Par linéarité, on a donc $(z | \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i) = 0$ i.e. $\|z\|^2 = 0$. Donc $z = 0$, ce qui signifie que (x_1, \dots, x_p) est liée.

2. a. Pour $1 \leq j \leq p$, $x_j = \sum_{i=1}^n (x_j | e_i) e_i$ puisque \mathcal{B} est orthonormée. Donc $A = ((x_j | e_i))_{1 \leq i, j \leq p}$. De plus,

$$(x_i | x_j) = \sum_{k=1}^n (x_i | e_k)(x_j | e_k)$$

Ceci signifie que $G_p(x_1, \dots, x_p) = {}^t AA$.

- b. On a $\det G_p(x_1, \dots, x_p) = \det({}^t A) \det(A) = (\det A)^2$. Comme x_1, \dots, x_p est libre, c'est une base de F et donc $\det A \neq 0$. Ainsi $\det G_p(x_1, \dots, x_p) > 0$.

3. a. ► Si $x \in F$, les deux déterminants sont nuls.
- Si $x \notin F$, notons \mathcal{B} une base orthonormée de $\text{vect}(x, x_1, \dots, x_p)$ et posons comme précédemment $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(x, x_1, \dots, x_p)$. On a alors également $G_{p+1}(x, x_1, \dots, x_p) = {}^t AA$. Notons également $A' = \text{mat}_{\mathcal{B}}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p)$ de sorte que $G_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p) = {}^t A' A'$. Comme $\pi(x) \in F$ et que (x_1, \dots, x_p) est une base de F , il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tel que $\pi(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$. Notons C, C_1, \dots, C_n les colonnes de A : la matrice A' s'obtient à partir de A en effectuant l'opération de pivot $C \leftarrow C - \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i$. On en déduit que $\det(A') = \det(A)$ puis que $\det G_{p+1}(x, x_1, \dots, x_p) = \det G_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p)$.
- b. Comme $x - \pi(x) \in F^\perp$, on a $x - \pi(x) \perp x_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On en déduit que

$$G_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p) = \left(\begin{array}{c|ccc} \|x - \pi(x)\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & G_p(x_1, \dots, x_p) & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

On a donc $\det G_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p) = \|x - \pi(x)\|^2 \det G_p(x_1, \dots, x_p)$. On conclut en remarquant que $d(x, F)^2 = \|x - \pi(x)\|^2$.

SOLUTION 37.

1. On a $u + v = 0$. Donc $\|u\|^2 = -\langle u, v \rangle = -\sum_{(i,j) \in I \times J} \alpha_i \alpha_j \langle x_i, x_j \rangle$. Or pour $(i, j) \in I \times J$, $\alpha_i \alpha_j \langle x_i, x_j \rangle > 0$. Ainsi si I et J sont non vides, $\|u\|^2 < 0$, ce qui est absurde.
2. Supposons que I soit non vide. Alors J est vide. On a donc $v = 0$ puis $u = 0$. Donc $\langle u, x_p \rangle = 0$. Or $\langle u, x_p \rangle = \sum_{i \in I} \alpha_i \langle x_i, x_p \rangle$. Mais pour $i \in J$, $\alpha_i \langle x_i, x_p \rangle < 0$. Comme I est non vide, $\langle u, x_p \rangle < 0$. Il y a donc contradiction. Ainsi I est vide. On démontre de même que J est vide.
3. Comme I et J sont vides, $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Ceci signifie que la famille (x_1, \dots, x_{p-1}) est libre.

SOLUTION 38.

1. On a $A = (\langle x_j, e_i \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. De plus, comme \mathcal{B} est orthonormée, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$:

$$\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_i, e_k \rangle \langle x_j, e_k \rangle$$

Ceci signifie que $G(x_1, \dots, x_p) = {}^t A A$.

2. Si (x_1, \dots, x_p) est liée, alors $\text{rg} A < p$. Par conséquent, $\text{rg} G(x_1, \dots, x_p) = \text{rg}({}^t A A) \leq \text{rg} A < p$. Ceci signifie que $G(x_1, \dots, x_p)$ est non inversible. Donc $\det G(x_1, \dots, x_p) = 0$.
Si (x_1, \dots, x_p) est libre, alors A est une matrice carrée inversible. Donc $\det(A) \neq 0$. Par conséquent, $\det G(x_1, \dots, x_p) = \det({}^t A A) = \det(A)^2 > 0$.
3. On pose $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$. On a alors :

$$\det G(x_1, \dots, x_p, x) = \det G(x_1, \dots, x_p, y) + \det G(x_1, \dots, x_p, z)$$

Comme $y \in F$, la famille (x_1, \dots, x_p, y) est liée et $\det G(x_1, \dots, x_p, y) = 0$. De plus, $\det G(x_1, \dots, x_p, z) = \|z\|^2 \det G(x_1, \dots, x_p)$, le déterminant étant diagonal par blocs. On conclut en remarquant que $d(x, F)^2 = \|z\|^2$.

SOLUTION 39.

1. La symétrie de φ est évidente. La bilinéarité de φ provient de la linéarité de l'intégrale. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt \geq 0$ donc φ est positive. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt = 0$. Comme P^2 est continue positive sur $[-1, 1]$, on en déduit que P^2 est nulle sur $[-1, 1]$. Le polynôme P^2 admet donc une infinité de racines : il est donc nul. Par conséquent, P est également nul. Ceci prouve que φ est définie.
 φ est donc un produit scalaire.
2. 1 et -1 sont des racines de multiplicité n de Q_n . On en déduit que $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$ pour $k < n$.
3. Soit $k, l \in \llbracket 0, n \rrbracket$ avec $k \neq l$. On peut supposer $k < l$.
Supposons $l \geq 1$ pour se donner une idée de la marche à suivre. On utilise une intégration par parties :

$$\langle P_k, P_l \rangle = \int_{-1}^1 Q_k^{(k)}(t)Q_l^{(l)}(t)dt = [Q_k^{(k)}(t)Q_l^{(l-1)}(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 Q_k^{(k+1)}(t)Q_l^{(l-1)}(t)dt$$

Or $l-1 < l$ donc $Q_l^{(l-1)}(-1) = Q_l^{(l-1)}(1) = 0$ d'après la question précédente. Ainsi $\langle Q_k^{(k)}, Q_l^{(l)} \rangle = -\langle Q_k^{(k+1)}, Q_l^{(l-1)} \rangle$.

On peut donc prouver à l'aide d'une récurrence finie que $\langle Q_k^{(k)}, Q_l^{(l)} \rangle = (-1)^l \langle Q_k^{(k+l)}, Q_l \rangle$. Or $k < l$ donc $k+l > 2k$. Puisque $\deg Q_k = 2k$, $Q_k^{(k+l)} = 0$. On a donc $\langle P_k, P_l \rangle = 0$.

Les P_k sont donc orthogonaux deux à deux. La famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est donc orthogonale. De plus, $\deg Q_k = 2k$ donc $\deg P_k = \deg Q_k^{(k)} = k$. La famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille de polynômes à degrés étagés : elle est donc libre. Comme elle comporte $n+1$ éléments et que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

SOLUTION 40.

1. Soient $x, y, z \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \langle z, u(\lambda x + \mu y) \rangle &= -\langle u(z), \lambda x + \mu y \rangle && \text{par antisymétrie} \\ &= -\lambda \langle u(z), x \rangle - \mu \langle u(z), y \rangle && \text{par bilinéarité du produit scalaire} \\ &= \lambda \langle z, u(x) \rangle + \mu \langle z, u(y) \rangle && \text{par antisymétrie} \end{aligned}$$

On a donc $\langle z, u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu u(y) \rangle = 0$ pour tout $z \in E$. Comme $E^\perp = \{0_E\}$, $u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu u(y) = 0_E$. D'où la linéarité de u .

2. (i) \Rightarrow (ii) Soient $x, y \in E$. Alors $\langle u(x+y), x+y \rangle = 0$. Or, par linéarité de u et bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle u(x+y), x+y \rangle = \langle u(x), x \rangle + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle + \langle u(y), y \rangle = \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle$$

D'où l'antisymétrie de u .

(ii) \Rightarrow (iii) On a vu dans la question précédente que u était linéaire. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans cette base. Comme \mathcal{B} est orthonormée, $u(e_j) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_j), e_i \rangle e_i$ pour $1 \leq j \leq n$. On en déduit que $a_{ij} = \langle u(e_j), e_i \rangle$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Or, par antisymétrie de u , $\langle u(e_j), e_i \rangle = -\langle u(e_i), e_j \rangle$ i.e. $a_{ij} = -a_{ji}$ pour $1 \leq i, j \leq n$. On en déduit que A est antisymétrique.

(iii) \Rightarrow (i) u est bien linéaire par hypothèse. Soient \mathcal{B} une base orthonormale de E et A la matrice de u dans \mathcal{B} . Soit $x \in E$ et X la matrice colonne de x dans \mathcal{B} . Alors

$$\langle u(x), x \rangle = {}^t(MX)X = -{}^tXMX = -\langle x, u(x) \rangle$$

On en déduit que $\langle u(x), x \rangle = 0$.

3. Fixons une base orthonormée \mathcal{B} de E et considérons Φ l'isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à un endomorphisme de E associe sa matrice dans la base \mathcal{B} . D'après la question précédente, $\Phi(A(E)) = A_n(\mathbb{R})$ où $A_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques. On a donc également $A(E) = \Phi^{-1}(A_n(\mathbb{R}))$ donc $A(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ comme image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire et $\dim A(E) = \dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ car Φ est un isomorphisme.

4. Soient $x \in \text{Ker } u$ et $y \in \text{Im } u$. Il existe $z \in E$ tel que $y = u(z)$.

$$\langle x, y \rangle = \langle x, u(z) \rangle = -\langle z, u(x) \rangle = -\langle z, 0_E \rangle = 0$$

Ainsi $\text{Im } u \subset (\text{Ker } u)^\perp$. D'après le théorème du rang $\dim \text{Im } u = n - \dim \text{Ker } u = \dim(\text{Ker } u)^\perp$. Ainsi $\text{Im } u = (\text{Ker } u)^\perp$.

5. Soit F un sous-espace vectoriel stable par u . Soient $x \in F^\perp$. Alors, pour tout $y \in F$, $\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle = 0$ car $u(y) \in F$. Ainsi $u(x) \in F^\perp$, ce qui prouve que $u(F^\perp) \subset F^\perp$.

SOLUTION 41.

Soit \mathcal{B}' une base orthonormale adaptée à la décomposition en somme directe $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$. La matrice A' de p dans la base \mathcal{B}' est diagonale (les éléments diagonaux valent 1 ou 0). Notons P la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' . On a $A = PA'P^{-1}$. Or P est orthogonale donc $P^{-1} = {}^tP$. Ainsi $A = PA'{}^tP$ est symétrique.

SOLUTION 42.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Si A est nulle, $\text{rg } A = 0$ et donc le rang de A est pair. Sinon, notons u l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associée à A . On munit \mathbb{R}^n de son produit scalaire canonique et on se donne une base orthonormale \mathcal{B} de \mathbb{R}^n adaptée à la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^n = S \oplus \text{Ker } u$ où S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$. La matrice de u dans cette base \mathcal{B} est de la forme $A' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ avec B carrée de taille $p = \dim S$. Si on note P la matrice de passage de la base canonique vers la base \mathcal{B} , P est orthogonale et $A' = P^{-1}BP = {}^tPAP$. On en déduit que A' est également antisymétrique et donc B est antisymétrique et C est nulle. On a donc $A' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\text{rg } A' = \text{rg } B$ mais comme S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$, $\text{rg } A' = \dim S = p$, ce qui prouve que B est inversible. Or $\det({}^tB) = \det(-B) = (-1)^p \det B$ donc p est pair sinon on aurait $\det B = 0$ et B non inversible.

SOLUTION 43.

D'après le cours sur les espaces euclidiens et le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(u)^\perp) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\text{Im}(u)),$$

il suffit donc de prouver que

$$\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)^\perp.$$

Soit $y \in \text{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Soit $x' \in \text{Ker}(u)$. On a :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u(x+x') | x+x' \rangle = \langle u(x) | x' \rangle + \langle x | u(x') \rangle \\ &= \langle u(x) | x' \rangle + 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\langle y | x' \rangle = 0.$$

On a donc prouvé que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)^\perp$.

SOLUTION 44.

1. L'application f est clairement un endomorphisme par linéarité à droite du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient x et y dans E . On a

$$\begin{aligned} \langle f(x), y \rangle &= \langle \langle a, x \rangle b + \langle b, x \rangle a, y \rangle \\ &= \langle a, x \rangle \langle b, y \rangle + \langle b, x \rangle \langle a, y \rangle \end{aligned}$$

Comme cette expression est symétrique en (x, y) , on a

$$\langle f(x), y \rangle = \langle f(y), x \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

par symétrie du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2. Pour tout $x \in E$, on a $x \in \text{Ker}(f)$ si et seulement si

$$\langle a, x \rangle b + \langle b, x \rangle a = 0.$$

Comme (a, b) est libre, cela équivaut à

$$\langle a, x \rangle = \langle b, x \rangle = 0,$$

ie $x \in \text{vect}(a, b)^\perp$. Ainsi

$$\text{Ker}(f) = \text{vect}(a, b)^\perp$$

et, d'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned} \text{rg}(f) &= n - \dim(\text{Ker}(f)) = n - \dim(\text{vect}(a, b)^\perp) \\ &= n - (n - \dim(\text{vect}(a, b))) = \dim(\text{vect}(a, b)) \\ &= 2 \end{aligned}$$

car (a, b) est libre.

3. On pose $F = \text{Im}(f)$.

a. F est un sev de E en tant que noyau d'un endomorphisme de E .

► F est stable par f : soit $y \in \text{Im}(f)$; on a alors $f(y) \in \text{Im}(f) = F$. Ainsi F est stable par f .

► Base de F : on a clairement

$$F = \text{Im}(f) \subset \text{vect}(a, b).$$

Comme $\dim(F) = 2$ (d'après la question 2.), on a nécessairement

$$F = \text{Im}(f) = \text{vect}(a, b).$$

Ainsi (a, b) est une base de F car cette famille est libre.

b. Notons $\mathcal{B} = (a, b)$ et $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Comme

$$\begin{cases} f(a) = \|a\|^2 b + \langle a, b \rangle a \\ f(b) = \|b\|^2 a + \langle a, b \rangle b \end{cases},$$

on a

$$M = \begin{pmatrix} \langle a, b \rangle & \|b\|^2 \\ \|a\|^2 & \langle a, b \rangle \end{pmatrix}.$$

SOLUTION 45.

► Soit

$$x \in \text{Ker}(u - id_E) \cap \text{Im}(u - id_E).$$

On a alors $u(x) = x$ et il existe $y \in E$ tel que $x = u(y) - y$. Par une récurrence sans difficulté, on établit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad nx = u^n(y) - y.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x = \frac{u^n(y) - y}{n}$$

et donc, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|x\| \leq \frac{\|u^n(y)\| + \|y\|}{n}.$$

Par une récurrence immédiate, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u^n(y)\| \leq \|y\|$$

et ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \|x\| \leq \frac{2\|y\|}{n}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient par le théorème d'encadrement, $\|x\| = 0$, ie $x = 0$. Ainsi

$$\text{Ker}(u - id_E) \cap \text{Im}(u - id_E) = \{0\}.$$

- Comme $\text{Ker}(u - id_E) \oplus \text{Im}(u - id_E)$, on déduit du théorème du rang que

$$\dim(\text{Ker}(u - id_E) \oplus \text{Im}(u - id_E)) = \dim(E)$$

et donc que

$$E = \text{Ker}(u - id_E) \oplus \text{Im}(u - id_E)$$

car $\text{Ker}(u - id_E) \oplus \text{Im}(u - id_E) \subset E$.

SOLUTION 46.

1. La bilinéarité vient de la linéarité de la trace. De plus, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}({}^t M) = \text{tr}(M)$. Par conséquent, $\text{tr}({}^t AB) = \text{tr}({}^t BA)$, d'où la symétrie. De plus,

$$\text{tr}({}^t AB) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} b_{ij}$$

et en particulier

$$\text{tr}({}^t AA) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 \geq 0$$

Cette dernière somme ne s'annulant que si tous les a_{ij} sont nuls i.e. $A = 0$. L'application est donc définie positive. On vérifie sans difficulté que la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée.

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\text{tr}(A)| = |\text{tr}(I_n A)| \leq \|I_n\| \|A\|$$

On vérifie facilement que $\|I_n\| = \sqrt{n}$.

3. a. Soient $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$$(A|S) = \text{tr}({}^t AS) = -\text{tr}(AS)$$

$$(S|A) = \text{tr}({}^t SA) = \text{tr}(SA)$$

Or $\text{tr}(SA) = \text{tr}(AS)$ donc $(A|S) = 0$. Les sous-espaces vectoriels $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont donc orthogonaux. On sait également que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit donc que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est l'orthogonal de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- b. $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$ où p désigne la projection orthogonale sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On trouve facilement que $p(A) = \frac{{}^t A + A}{2}$. Ainsi

$$\|A - p(A)\| = \frac{1}{2} \|A - {}^t A\| = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij} - a_{ji})^2}$$

en utilisant la formule donnant le carré de la norme vue à la première question.

4. Comme $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, ${}^t U U = U {}^t U = I_n$.

$$\|UA\|^2 = \text{tr}({}^t (UA)UA) = \text{tr}({}^t A {}^t U U A) = \text{tr}({}^t AA) = \|A\|^2$$

$$\|AU\|^2 = \text{tr}({}^t (AU)AU) = \text{tr}({}^t U {}^t A A U) = \text{tr}({}^t A A U {}^t U) = \text{tr}({}^t AA) = \|A\|^2$$

5. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 &= \text{tr}({}^t B {}^t AAB) = \text{tr}({}^t AAB {}^t B) = \text{tr}({}^t ({}^t AA)B {}^t B) \\ &= ({}^t AA|B {}^t B) \leq \|{}^t AA\| \|B {}^t B\| = \|{}^t AA\| \|{}^t BB\| \end{aligned}$$

car $\|B {}^t B\|^2 = \text{tr}(B {}^t B B {}^t B) = \text{tr}({}^t B B {}^t B B) = \|{}^t BB\|^2$. En utilisant la formule donnant le carré de la norme vue à la première question, on a :

$$\|{}^t AA\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} \right)^2$$

Or pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a d'après Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n ,

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} \leq \sqrt{S_i} \sqrt{S_j}$$

avec $S_i = \sum_{k=1}^n a_{ki}^2$ pour $1 \leq i \leq n$. Ainsi

$$\|{}^tAA\|^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} S_i S_j = \left(\sum_{i=1}^n S_i \right) \left(\sum_{j=1}^n S_j \right) = \left(\sum_{i=1}^n S_i \right)^2$$

Par conséquent,

$$\|{}^tAA\| \leq \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{kl}^2 = \|A\|^2$$

On a donc également $\|{}^tBB\| \leq \|B\|^2$, ce qui nous donne finalement l'inégalité demandée.

SOLUTION 47.

Pour simplifier, on peut supposer u_1, \dots, u_{n+1} unitaires de sorte que pour $i, j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ distincts, $(u_i | u_j) = \cos \alpha_n$. Notons u'_1, \dots, u'_n les projections orthogonales de u_1, \dots, u_n sur $\text{vect}(u_{n+1})^\perp$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $u'_i = u_i - (\cos \alpha_n) u_{n+1}$ et par le théorème de Pythagore, $\|u'_i\|^2 = \|u_i\|^2 - (\cos^2 \alpha_n) \|u_{n+1}\|^2 = 1 - \cos^2 \alpha_n$. Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts

$$(u'_i | u'_j) = (u_i | u_j) - \cos \alpha_n ((u_i | u_{n+1}) + (u_j | u_{n+1})) + \cos^2 \alpha_n \|u_{n+1}\|^2 = \cos \alpha_n - \cos^2 \alpha_n$$

Par conséquent,

$$\frac{(u'_i | u'_j)}{\|u'_i\| \|u'_j\|} = \frac{\cos \alpha_n - \cos^2 \alpha_n}{1 - \cos^2 \alpha_n} = \frac{\cos \alpha_n}{1 + \cos \alpha_n}$$

Les vecteurs u'_1, \dots, u'_n font donc un angle constant α_{n-1} deux à deux. De plus, $\cos \alpha_{n-1} = \frac{\cos \alpha_n}{1 + \cos \alpha_n}$ i.e. $\cos \alpha_n = \frac{\cos \alpha_{n-1}}{1 - \cos \alpha_{n-1}}$. L'énoncé n'a de sens que pour $n \geq 2$. On trouve aisément $\alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$. Posons $z_n = \frac{1}{\cos \alpha_n}$. La suite (z_n) vérifie la relation de récurrence $z_n = z_{n-1} - 1$. Puisque $z_2 = -2$, on trouve $z_n = -n$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi $\alpha_n = \arccos\left(-\frac{1}{n}\right)$.

SOLUTION 48.

Soit $X \in \text{Ker } A$. On a donc $AX = 0$ puis ${}^tAAX = 0$ donc $X \in \text{Ker } {}^tAA$. Ainsi $\text{Ker } A \subset \text{Ker } {}^tAA$. Soit maintenant $X \in \text{Ker } {}^tAA$. On a donc ${}^tAAX = 0$ puis ${}^tX{}^tAAX = 0$. Notons $Y = AX$. Ainsi ${}^tYY = 0$. Or tYY est la somme des carrés des composantes de Y donc $Y = 0$ i.e. $AX = 0$. D'où $X \in \text{Ker } A$. Ainsi $\text{Ker } {}^tAA \subset \text{Ker } A$. Finalement, $\text{Ker } A = \text{Ker } {}^tAA$ et $\text{rg } A = \text{rg } {}^tAA$ via le théorème du rang. En changeant A en tA , on a également $\text{rg } {}^tA = \text{rg } A^tA$. Or $\text{rg } A = \text{rg } {}^tAA = \text{rg } A^tA = \text{rg } A$.

SOLUTION 49.

1. Évident.

2. On va montrer que F admet pour supplémentaire la droite vectorielle $\mathbb{R}_0[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_0[X] \cap F$. Alors il existe $(\lambda_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N}^*)}$ tel que $P = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (1 + X^n)$. On a donc

$$P = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n X^n$$

Mais comme $\deg P \leq 0$, $\lambda_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $P = 0$. Ainsi F et $\mathbb{R}_0[X]$ sont en somme directe.

3. Soit $P \in F^\perp$. Posons $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ avec $(a_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Puisque $\langle P, 1 + X^n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_0 + a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Mais comme la suite (a_n) est nulle à partir d'un certain rang, on en déduit que $a_0 = 0$ puis que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $P = 0$ puis $F^\perp = \{0\}$.
En particulier, $F \oplus F^\perp = F \neq \mathbb{R}[X]$ puisque F est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.

SOLUTION 50.

1. D'une part, on a :

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\|^2 &= \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y) \rangle \\ &= \|f(x)\|^2 - 2\langle f(x), f(y) \rangle + \|f(y)\|^2 \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} - 2\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} + \frac{1}{\|y\|^2}.\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|}\right)^2 &= \frac{\|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2}{\|x\|^2\|y\|^2} \\ &= \frac{1}{\|y\|^2} - 2\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} + \frac{1}{\|x\|^2}.\end{aligned}$$

D'où la conclusion.

2. Remarquons tout d'abord que l'inégalité est évidente si deux des vecteurs a, b, c, d sont égaux. On les suppose maintenant deux à deux distincts. Soient $x, y, z \in E \setminus \{0\}$. L'inégalité triangulaire donne

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\|$$

qui devient en utilisant la première question :

$$\frac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|} \leq \frac{\|x - z\|}{\|x\|\|z\|} + \frac{\|z - y\|}{\|z\|\|y\|}.$$

En multipliant par $\|x\|\|y\|\|z\|$, on obtient :

$$\|z\|\|x - y\| \leq \|y\|\|x - z\| + \|x\|\|z - y\|.$$

En posant $x = b - a$, $y = d - a$ et $z = c - a$, on obtient le résultat voulu.

SOLUTION 51.

Si la famille (x_1, \dots, x_n) est libre, alors $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ et l'inégalité est trivialement vérifiée. Sinon, on peut orthonormaliser la famille (x_1, \dots, x_n) en une base orthonormale $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ de E . Notons M la matrice de (x_1, \dots, x_n) dans la base \mathcal{B} , Q la matrice de passage de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{B}' et R la matrice de (x_1, \dots, x_n) dans la base \mathcal{B}' . On a donc $M = QR$ puis $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(M) = \det(Q)\det(R)$. Puisque \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont des bases orthonormales, Q est orthogonale et donc $\det(Q) = \pm 1$. De plus, par procédé de Gram-Schmidt, la matrice R est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $\langle x_1, e_1 \rangle, \dots, \langle x_n, e_n \rangle$. On en déduit que

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \langle x_i, e_i \rangle$$

puis par inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\| \|e_i\| = \prod_{i=1}^n \|x_i\|$$

SOLUTION 52.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux

$$a_k = 1 \quad , \quad b_k = \frac{1}{k},$$

on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n 1^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}},$$

d'où, en élevant au carré,

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

SOLUTION 53.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux

$$a_k = \sqrt{x_k} \quad , \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}},$$

on aboutit à

$$\sum_{k=1}^n 1 \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}},$$

d'où, en élevant au carré,

$$n^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right).$$

SOLUTION 54.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux réels

$$a_k = \sqrt{k} \quad , \quad b_k = \frac{\sqrt{k}}{n-k}, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

on aboutit à

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} k} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2}},$$

d'où, en élevant au carré,

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} \right)^2 \leq \frac{n(n-1)}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2}$$

d'où le résultat.

SOLUTION 55.

D'après-Cauchy-Schwarz,

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq \left(\int_a^b \sqrt{f(x)} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx \right)^2 = (b-a)^2$$

Donc la borne inférieure de l'énoncé existe. Elle est atteinte si \sqrt{f} et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ sont colinéaires : il suffit par exemple de prendre $f = 1$ sur $[a, b]$.

SOLUTION 56.

On a

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) = \int_a^t f'(u) du.$$

Appliquons alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On obtient

$$f^2(t) \leq \left(\int_a^t du \right) \left(\int_a^t f'^2(u) du \right),$$

soit

$$f^2(t) \leq (t-a) \int_a^t f'^2(u) du.$$

Comme $f'^2 \geq 0$ et $a \leq t \leq b$, on a

$$\int_a^t f'^2(u) du \leq \int_a^b f'^2(u) du$$

d'où

$$\forall t \in [a, b], \quad f^2(t) \leq (t-a) \int_a^b f'^2(u) du,$$

puis, par positivité de l'intégrale,

$$\int_a^b f^2(t) dt \leq \left(\int_a^b (t-a) dt \right) \int_a^b f'^2(u) du$$

et donc

$$\int_a^b f^2(u) du \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u) du.$$