Espaces préhilbertiens réels

1 Produit scalaire et norme

1.1 Produit scalaire

Définition 1.1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle **produit scalaire** sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive i.e. toute application $\varphi : \mathrm{E}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :

Bilinéaire $\forall (x, y, z) \in \mathrm{E}^3, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} \varphi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\varphi(x, y) + \mu\varphi(x, z) \\ \varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\varphi(x, z) + \mu\varphi(y, z) \end{cases}$;

Symétrique $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;

Définie $\forall x \in \mathrm{E}, \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_{\mathrm{E}}$;

Positive $\forall x \in \mathrm{E}, \varphi(x, x) \geq 0$.

Notation 1.1

Le produit scalaire de deux éléments x et y de E se note généralement $(x \mid y)$, $\langle x \mid y \rangle$, (x, y) ou encore $\langle x, y \rangle$.

Remarque. Le produit scalaire en géométrie est bien un produit scalaire au sens de la définition précédente.

Méthode **Montrer qu'une application est un produit scalaire**

On procède généralement dans l'ordre suivant.

- On vérifie que l'application est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- On montre la symétrie.
- On montre la linéarité par rapport à la première variable **ou** la seconde variable. La linéarité par rapport à l'autre variable découle de la symétrie.
- On montre la positivité.
- On finit par la «définition».

Exemple 1.1

On appelle produit scalaire **canonique** ou **usuel** sur $\mathbb{R}^n$ l'application

$$\begin{cases} (\mathbb{R}^n)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{cases}$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Exemple 1.2

L'application
$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \longmapsto & {}^tXY \end{array}\right.$$
est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemple 1.3

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Notons E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. L'application
$$\left\{\begin{array}{rcl} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt \end{array}\right.$$
est un produit scalaire.

Définition 1.2 Espace préhilbertien réel, espace euclidien

On appelle **espace préhilbertien réel** tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un **produit scalaire**.
On appelle **espace euclidien** tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

Définition 1.3

Soient E un espace vectoriel préhilbertien réel. Soit $(x,y)\in E^2$. On dit que x et y sont **orthogonaux** si $(x \mid y)=0$. Dans ce cas, on note $x \perp y$.

Remarque. Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

1.2 Norme associée à un produit scalaire

Définition 1.4

Soit $(. \mid .)$ un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. L'application
$$\left\{\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{(x \mid x)} \end{array}\right.$$
est appelée **norme associée** au produit scalaire $(. \mid .)$.

Notation 1.2

Une norme associée à un produit scalaire se note usuellement $\|.\|$.

Définition 1.5

Soit x un vecteur d'un espace préhilbertien réel. On dit que x est **unitaire** si $\|x\|=1$.

Proposition 1.1 Relations entre produit scalaire et norme

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(. \mid .)$ et d'une norme associée $\|.\|$. On a les relations suivantes :

Identités remarquables :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$$
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x \mid y) + \|y\|^2$$
$$\|x\|^2 - \|y\|^2 = (x+y \mid x-y)$$

Identités de polarisation : $(x \mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

Identité du parallélogramme : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

Remarque. Les identités de polarisation permettent donc de retrouver le produit scalaire à partir de la norme.

Remarque. Si x et y sont de même norme, alors $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux. Géométriquement, les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

Proposition 1.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(. \mid .)$ un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et $\|.\|$ sa norme associée. Alors pour tous $x, y \in E$:

$$|(x \mid y)| \leq \|x\|\|y\|$$

avec égalité **si et seulement si** x et y sont colinéaires.

Remarque. Si l'on omet la valeur absolue, le cas d'égalité

$$(x \mid y) = \|x\|\|y\|$$

ne se produit que si x et y sont **positivement** colinéaires, autrement dit **si et seulement si** il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

Cauchy-Schwarz pour les intégrales

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right| \leq \left(\int_a^b f(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou encore

$$\left(\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2\,dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2\right)$$

Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^n$

Si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont deux n-uplets de $\mathbb{R}^n$

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou encore

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)$$

Proposition 1.3 Propriétés de la norme euclidienne

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(.\mid.)$ et d'une norme associée $\|.\|$.

Séparation $\forall x \in \mathrm{E}, \|x\| = 0 \iff x = 0_{\mathrm{E}}$;

Homogénéité $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E}, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;

Inégalité triangulaire $\forall(x, y) \in \mathrm{E}^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Norme

De manière générale, on appelle **norme** sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E toute application $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant

Séparation $\forall x \in \mathrm{E}, \mathrm{N}(x) = 0 \Rightarrow x = 0_{\mathrm{E}}$;

Homogénéité $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E}, \mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\mathrm{N}(x)$;

Inégalité triangulaire $\forall(x, y) \in \mathrm{E}^2, \mathrm{N}(x + y) \leq \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$.

2 Familles orthogonales

2.1 Propriétés des familles orthogonales

Définition 2.1

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \mathrm{E}^{\mathrm{I}}$.

(i) On dit que la famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est **orthogonale** si les vecteurs x_i sont orthogonaux deux à deux i.e.

$$\forall(i, j) \in \mathrm{I}^2,\ i \neq j \implies (x_i \mid x_j) = 0$$

(ii) On dit que la famille est **orthonormale** ou **orthonormée** si elle est orthogonale et si les x_i sont unitaires i.e.

$$\forall(i, j) \in \mathrm{I}^2,\ (x_i \mid x_j) = \delta_{i,j}$$

Exemple 2.1

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.1 Liberté des familles orthogonales

Toute famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. En particulier, toute famille orthonormale est libre.

Proposition 2.2 Théorème de Pythagore

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale d'un espace préhilbertien réel E. Alors

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

Remarque. C'est une généralisation du théorème de Pythagore que vous connaissez en deux dimensions.

2.2 Bases orthonormales

Proposition 2.3 Coordonnées dans une base orthonormale

Soient $(e_i)_{i\in I}$ une base **orthonormale** d'un espace préhilbertien E et $x \in E$. Alors $x = \sum_{i\in I}(x \mid e_i)e_i$.
Autrement dit les coordonnées de x dans la base $(e_i)_{i\in I}$ sont $\big((x \mid e_i)\big)_{i\in I}$, ou encore, $\forall i \in I$, $e_i^*(x) = (x \mid e_i)$.

Proposition 2.4 Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base **orthonormale** d'un espace préhilbertien E. Soit $(x, y) \in E^2$. Alors

$$(x \mid y) = \sum_{i\in I} e_i^*(x)e_i^*(y) = \sum_{i\in I}(x \mid e_i)(y \mid e_i) \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i\in I} e_i^*(x)^2 = \sum_{i\in I}(x \mid e_i)^2$$

Interprétation matricielle du produit scalaire

Si on note X et Y les matrices colonnes de deux vecteurs x et y dans une base orthonormale, alors $(x \mid y) = {}^t\mathrm{X}\mathrm{Y}$.
En effet, ${}^t\mathrm{X}\mathrm{Y}$ est une matrice carrée de taille 1 qu'on peut identifier à un réel.

Proposition 2.5

Tout espace **euclidien** admet une base orthonormale.

Le résultat précédent peut être démontré grâce au procédé suivant qui permet de **construire** explicitement une famille orthonormale à partir d'une famille libre.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre d'un espace préhilbertien réel E. On cherche à construire une famille **orthonormale** $(f_1, \dots, f_n)$ de E telle que :

$$\mathrm{vect}(e_1, \dots, e_n) = \mathrm{vect}(f_1, \dots, f_n)$$

On va raisonner par récurrence finie.
L'hypothèse de récurrence est la suivante :

HR(p) : «il existe une famille orthonormale $(f_1, \dots, f_p)$ telle que $\mathrm{vect}(e_1, \dots, e_p) = \mathrm{vect}(f_1, \dots, f_p)$.»

Initialisation L'initialisation est évidente, il suffit de normaliser e_1 i.e. de prendre $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.

Hérédité On suppose HR(p) pour $1 \leq p \leq n-1$. Le but est de construire f_{p+1}. On cherche d'abord un vecteur g orthogonal à $f_1, \dots, f_p$ sous la forme

$$g = e_{p+1} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k$$

On a alors nécessairement $\lambda_k = (f_k \mid e_{p+1})$ pour $1 \leq k \leq p$. Il suffit alors de normaliser g i.e. de prendre $f_{p+1} = \frac{g}{\|g\|}$. Par construction, f_{p+1} est unitaire et orthogonal à tous les f_i et $\mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{p+1}) = \mathrm{vect}(f_1, \dots, f_{p+1})$.
Astuce de calcul : par le théorème de Pythagore, $\|g\|^2 = \|e_{p+1}\|^2 - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2$.

Conclusion Par récurrence finie, HR(n) est vraie.

Exercice 2.1

Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$ pour le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ suivant :

$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

Corollaire 2.1

Soit E un espace **euclidien**. Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E.

Remarque. Si l'on se donne une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie, il est facile de trouver un produit scalaire pour lequel $\mathcal{B}$ est orthonormale. Il suffit de choisir $\left\{\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \sum_{k=1}^n e_k^*(x)e_k^*(y) \end{array}\right.$.

3 Orthogonalité

3.1 Sous-espaces orthogonaux

Définition 3.1 Sous-espaces orthogonaux

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E. On dit que F et G sont orthogonaux et on note $F \perp G$ si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G.

Proposition 3.1

Deux sous-espaces orthogonaux sont en somme directe.

Définition 3.2 Orthogonal d'une partie

Soient E un espace préhilbertien réel et A une partie E. On appelle **orthogonal** de A, noté $A^\perp$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de A.

Exemple 3.1

$E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.

Proposition 3.2

Soient E un espace préhilbertien réel et A une partie E. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus, $A^\perp = \text{vect}(A)^\perp$.

Remarque. Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel, F et $F^\perp$ sont orthognaux.

Attention ! Dire que deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux ne signifie pas forcément que l'un est l'orthogonal de l'autre. Par exemple, deux droites de $\mathbb{R}^3$ peuvent être orthogonales sans que l'une soit l'orthogonal de l'autre puisque l'orthogonal d'une droite dans $\mathbb{R}^3$ est un plan. En fait,

$$\mathrm{F} \perp \mathrm{G} \iff \mathrm{F} \subset \mathrm{G}^{\perp} \iff \mathrm{G} \subset \mathrm{F}^{\perp}$$

Exercice 3.1

Soit A une partie d'un espace préhilbertien réel. Montrer que $\mathrm{A} \subset (\mathrm{A}^{\perp})^{\perp}$.

Exercice 3.2

Soient A et B deux parties d'un espace préhilbertien réel. Montrer que si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, alors $\mathrm{B}^{\perp} \subset \mathrm{A}^{\perp}$.
Montrer à l'aide d'un contre-exemple que la réciproque est fausse.

Proposition 3.3 Propriétés de l'orthogonal

Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E.

(i) Si F admet un supplémentaire orthogonal G dans E, alors $\mathrm{G} = \mathrm{F}^{\perp}$. De plus, dans ce cas, $(\mathrm{F}^{\perp})^{\perp} = \mathrm{F}$.

(ii) Si F est de **dimension finie**, alors $\mathrm{F}^{\perp}$ est l'unique supplémentaire orthogonal de F dans E. On a alors $(\mathrm{F}^{\perp})^{\perp} = \mathrm{F}$.

(iii) Si E est un espace euclidien, $\dim \mathrm{F}^{\perp} = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}$.

Remarque. Si F est de **dimension finie** (et a fortiori quand E est lui-même de dimension finie), on a toujours $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$.

Attention ! Si F n'est pas de dimension finie, $\mathrm{F}^{\perp}$ n'est pas nécessairement un supplémentaire de F : on peut seulement affirmer que F et $\mathrm{F}^{\perp}$ sont en somme directe.
On ne peut pas non plus affirmer que $(\mathrm{F}^{\perp})^{\perp} = \mathrm{F}$ mais seulement que $\mathrm{F} \subset (\mathrm{F}^{\perp})^{\perp}$.

Exercice 3.3

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E.

1. Montrer que $\mathrm{F} \subset \mathrm{G} \implies \mathrm{G}^{\perp} \subset \mathrm{F}^{\perp}$ et que, si F et G sont de dimension finie, $\mathrm{G}^{\perp} \subset \mathrm{F}^{\perp} \implies \mathrm{F} \subset \mathrm{G}$.
2. Montrer que $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp}$.
3. Montrer que $\mathrm{F}^{\perp} + \mathrm{G}^{\perp} \subset (\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^{\perp}$ et que, si E est de dimension finie, $(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} + \mathrm{G}^{\perp}$.

Exemple 3.2

Soit E un espace euclidien de dimension 4 muni d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit F un sous-espace vectoriel défini par le système d'équation $\begin{cases} -x + y - 3z + 2t = 0 \\ 3x + 4y - z + t = 0 \end{cases}$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors $\mathrm{F}^{\perp} = \operatorname{vect}(-e_1 + e_2 - 3e_3 + 2e_4, 3e_1 + 4e_2 - e_3 + e_4)$.

3.2 Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales

Définition 3.3 Projecteur orthogonal

Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E. Si $E = F \oplus F^\perp$, on appelle **projecteur orthogonal** sur F le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque. La projection orthogonale sur F est notamment définie lorsque F est de dimension finie.

Proposition 3.4 Expression de la projection orthogonale dans une base orthonormale

Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de E. On se donne une base orthonormale $(f_1, \dots, f_n)$ de F. Soient p le projecteur orthogonal sur F et $x \in E$. Alors

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} (x \mid f_k) f_k$$

Remarque. En particulier la projection d'un vecteur x sur une droite vectorielle $\operatorname{vect}(u)$ est $\frac{(x|u)}{\|u\|^2}u$. Si u est normé, alors cette projection est simplement $(x \mid u)u$.

Remarque. On peut donner une interprétation géométrique de la méthode de Gram-Schmidt. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre d'un espace préhilbertien réel E. On sait qu'on peut construire une famille **orthonormale** $(f_1, \dots, f_n)$ de E telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \operatorname{vect}(e_1, \dots, e_k) = \operatorname{vect}(f_1, \dots, f_k) = F_k$$

Alors, en convenant que $F_0 = \{0\}$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{k+1} = \dfrac{p_{F_k^\perp}(e_{k+1})}{\|p_{F_k^\perp}(e_{k+1})\|}$.

Exercice 3.4

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. On se donne $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $\mathcal{F}$ une base orthonormale de F. On note enfin M la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que la matrice du projecteur orthogonals sur F dans la base $\mathcal{B}$ est $M{}^tM$.

Définition 3.4 Symétrie orthogonale

Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E. Si $E = F \oplus F^\perp$, on appelle **symétrie orthogonale** par rapport à F la symétrie par rapport F parallèlement à $F^\perp$.
Si F est un hyperplan de E, on parle plutôt de **réflexion** par rapport à F.

Remarque. La symétrie orthogonale sur F est notamment définie lorsque F est de dimension finie.

Exercice 3.5

Montrer que $\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tM \end{array} \right.$ est une symétrie orthogonale pour le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}({}^tAB)$.

3.3 Distance à un sous-espace vectoriel

Définition 3.5 Distance à un sous-espace vectoriel

Soient E un espace préhilbertien réel, $x \in \mathrm{E}$ et F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de E. La distance de x à F est :

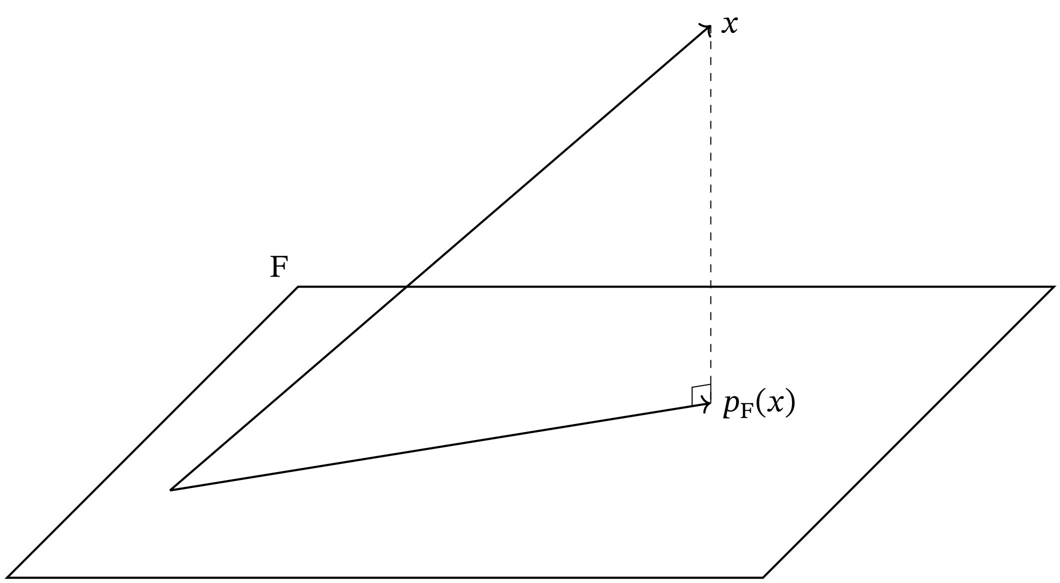
$$d(x, \mathrm{F}) = \inf_{y \in \mathrm{F}} \|x - y\|$$

Proposition 3.5

Soient E un espace préhilbertien réel, $x \in \mathrm{E}$ et F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de E. La distance de x à F est atteinte en $p_{\mathrm{F}}(x)$, où p_{F} désigne la projection orthogonale sur F. Autrement dit,

$$d(x, \mathrm{F}) = \|x - p_{\mathrm{F}}(x)\|$$

De plus, $p_{\mathrm{F}}(x)$ est l'unique vecteur y de F tel que $d(x, \mathrm{F}) = \|x - y\|$.



Remarque. D'après Pythagore, on a : $\|x - p_{\mathrm{F}}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_{\mathrm{F}}(x)\|^2$. En particulier, si $(f_1, \dots, f_n)$ est une base orthonormale de F,

$$\|x - p_{\mathrm{F}}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (x \mid f_k)^2$$

Cette remarque peut avoir un intérêt pour le calcul pratique de distance.

Remarque. Puisque $x - p_{\mathrm{F}}(x) = p_{\mathrm{F}^\perp}(x)$, on a également $d(x, \mathrm{F}) = \|p_{\mathrm{F}^\perp}(x)\|$.

3.4 Hyperplans

Proposition 3.6 Hyperplans vectoriels

Soient E un espace euclidien. Pour $u \in \mathrm{E}$, on note $\varphi_u : x \in \mathrm{E} \mapsto (u \mid x)$. On a donc $\varphi_u \in \mathrm{E}^*$.
Soit n un vecteur non nul de E. Alors $\operatorname{Ker} \varphi_n$ est l'hyperplan $\operatorname{vect}(n)^\perp$.
Réciproquement, soit H un hyperplan de E de vecteur normal non nul n. Alors $\mathrm{H} = \operatorname{Ker} \varphi_n$.

Proposition 3.7 Hyperplans affines

Soient E un espace euclidien.
Soient A un point de E, $\vec{n}$ un vecteur non nul de E et $k \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\{M \in E \mid \overrightarrow{AM}.\vec{n} = k\}$ est un hyperplan affine de E de direction $\operatorname{vect}(\vec{n})^{\perp}$.
Réciproquement, soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E de vecteur normal non nul $\vec{n}$. Alors il existe $A \in E$ et $k \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{H} = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM}.\vec{n} = k\}$.

Corollaire 3.1 Équation d'un hyperplan affine

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et de repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ où O est un point de E et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E.
Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E de vecteur normal non nul $\vec{n}$ de coordonnées $(a_1, \dots, a_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{H}$ ait pour équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = k$ dans le repère $\mathcal{R}$.
Réciproquement, soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul et $k \in \mathbb{R}$. Alors l'ensemble d'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = k$ dans le repère $\mathcal{R}$ est un hyperplan affine de vecteur normal le vecteur de coordonnées $(a_1, \dots, a_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple 3.3 Droite affine

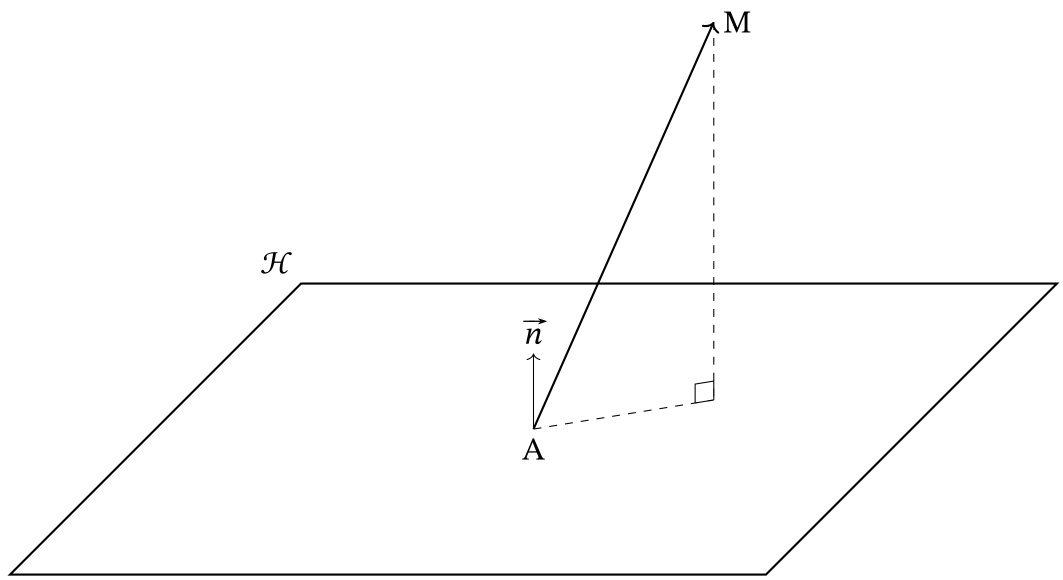
Une partie de $\mathbb{R}^2$ est une droite affine **si et seulement si** elle admet une équation du type $ax+by+c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b) \neq (0, 0)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Si $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique, alors (a, b) est un vecteur normal à cette droite.

Exemple 3.4 Plan affine

Une partie de $\mathbb{R}^3$ est un plan affine **si et seulement si** elle admet une équation du type $ax+by+cz+d$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Si $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique, alors (a, b, c) est un vecteur normal à ce plan.

Proposition 3.8 Distance d'un point à un hyperplan affine

Soit E un espace euclidien, M un point de E, $\vec{n}$ un vecteur **unitaire** de E et $\mathcal{H}$ l'hyperplan $A + \operatorname{vect}(\vec{n})^{\perp}$. Alors pour tout point M de E la distance de M à $\mathcal{H}$ est $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|$.



Exemple 3.5

Pour le produit scalaire usuel, la distance d'un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ à la droite d'équation $ax + by + c = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exemple 3.6

Pour le produit scalaire usuel, La distance d'un point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Proposition 3.9 Orientation induite sur un hyperplan

Soient E un espace vectoriel orienté, H un hyperplan de vecteur normal n non nul, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de H.
On note $\mathcal{B}_1'$ et $\mathcal{B}_2'$ les concaténations respectives de $\mathcal{B}_1$ et n d'une part et $\mathcal{B}_2$ et n d'autre part. Alors $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ ont la même orientation **si et seulement si** $\mathcal{B}_1'$ et $\mathcal{B}_2'$ ont la même orientation.

Remarque. Il n'est pas nécessaire de considérer un vecteur n normal à H. Le résultat reste valable pour tout vecteur $n \notin$ H.

Orientation induite sur un hyperplan

L'orientation d'un espace euclidien E et la donnée d'un vecteur non nul n normal à un hyperplan H permet donc d'orienter H. En décrétant qu'une base de H sera directe (resp. indirecte) **si et seulement si** sa concaténation avec n est une base directe (resp. indirecte) de E, on définit bien une orientation de E.

Remarque. Seul le **sens** de n importe dans la définition de l'orientation induite.

Théorème de Riesz

Soient E un espace euclidien et $\varphi \in E^*$. Alors il existe un unique $a \in E$ tel que $\varphi(x) = (a \mid x)$ pour tout $x \in E$.
Cela revient à montrer que l'application

$$\Phi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E^* \\ a & \longmapsto & (x \in E \mapsto (a \mid x)) \end{cases}$$

est bijective. On montre facilement que Φ est linéaire. Puisque E est de dimension finie, $\dim E = \dim E^*$. Il suffit alors de montrer l'injectivité de Φ pour avoir sa bijectivité. Soit donc $a \in \operatorname{Ker} \Phi$. Ceci signifie que l'application $x \in E \mapsto (a \mid x)$ est nulle. Ainsi $a \in E^\perp = \{0_E\}$. Par conséquent, $\operatorname{Ker} \Phi = \{0_E\}$ de sorte que Φ est injective puis bijective.

4 Automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales

Dans ce paragraphe E désigne un **espace euclidien orienté**.

4.1 Isométries vectorielles et automorphismes orthogonaux

Définition 4.1 Isométrie vectorielle

On appelle **isométrie vectorielle** de E tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ conservant la norme i.e tel que $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.

Proposition 4.1

Une isométrie vectorielle de E est un automorphisme de E.

Proposition 4.2 Conservation du produit scalaire

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie vectorielle **si et seulement si** il conserve le produit scalaire (i.e. $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$).

Remarque. C'est pourquoi une isométrie vectorielle est également appelée **automorphisme orthogonal**.

Exemple 4.1

Une symétrie est un automorphisme orthogonal **si et seulement si** c'est une symétrie orthogonale.

Attention ! Une projection orthogonale distincte de l'identité n'est pas un automorphisme orthogonal. Ce n'est même pas un automorphisme.

Définition 4.2 Groupe orthogonal

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E forment un sous-groupe de GL(E) appelé **groupe orthogonal** de E et noté O(E).

Proposition 4.3 Caractérisation par les bases orthonormales

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) u est un automorphisme orthogonal.

(ii) L'image par u d'une base orthonormale de E est une base orthonormale de E.

Proposition 4.4 Sous-espaces stables

Soient $u \in O(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u.

Définition 4.3 Automorphismes orthogonaux positifs et négatifs

Soit $u \in O(E)$. Si $\det u > 0$, alors on dit que u est un **automorphisme orthogonal positif** ; si $\det u < 0$, on dit que u est un **automorphisme orthogonal négatif**. On parle également d'**isométries vectorielles directes ou indirectes**.

Proposition 4.5

Une réflexion est un automorphisme orthogonal négatif.

Exercice 4.1

Soit E un espace euclidien. Montrer que O(E) est engendré par les réflexions.

Définition 4.4 Groupe spécial orthogonal

L'ensemble des automorphismes orthogonaux positifs de E forment un sous-groupe de O(E) appelé **groupe spécial orthogonal** de E et noté SO(E).

Proposition 4.6 Caractérisation par les bases directes

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) u est un automorphisme orthogonal positif.

(ii) L'image par u d'une base orthonormale directe de E est une base orthonormale directe de E.

Remarque. Le caractère positif ou négatif d'un automorphisme orthogonal ne dépend pas de l'orientation puisque le déterminant d'un endomorphisme est indépendant de la base.

4.2 Matrices orthogonales

Définition 4.5 Matrice orthogonale

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est orthogonale si $A{}^tA = {}^tAA = I_n$.

Remarque. En pratique, il suffit de vérifier $A^tA = I_n$ **ou** ${}^tAA = I_n$.

Remarque. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale. Alors A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$. De plus, $\det(A) = \pm 1$.

Proposition 4.7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est une matrice orthogonale si et seulement si la famille de ses colonnes (resp. de ses lignes) forment une base orthonormale pour le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$).

Définition 4.6 Groupe orthogonal

L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forment un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ appelé **groupe orthogonal** d'ordre n et noté $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$.

Proposition 4.8 Caractérisation matricielle des bases orthonormales

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E où $n = \dim E$. Alors $\mathcal{F}$ est une base orthonormale de E **si et seulement si** $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est une matrice orthogonale.

Remarque. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées, on a donc $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \pm 1$.

Proposition 4.9 Caractérisation matricielle des automorphismes orthogonaux

Un endomorphisme de E est un automorphisme orthogonal **si et seulement si** sa matrice dans une **base orthonormale** de E est orthogonale.

Remarque. Si u est un automorphisme orthogonal, on a donc $\det(u) = \pm 1$. Plus précisément, si u est un automorphisme orthogonal positif, alors $\det(u) = +1$ et si u est un automorphisme orthogonal négatif, $\det(u) = -1$.

Exemple 4.2

Soient E un espace euclidien de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans une base orthonormale. f est une symétrie orthogonale **si et seulement si** deux des trois conditions suivantes sont réalisées :

(i) ${}^tAA = I_n$.

(ii) $A^2 = I_n$.

(iii) ${}^tA = A$.

Décomposition QR

L'interprétation matricielle de la méthode de Gram-Schmidt est que toute matrice A de $GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = QR$ où A est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure. En effet, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $A = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$ où $\mathcal{B}_0$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Le procédé de Gram-Schmidt permet l'obtention d'une base orthonormale (pour le produit scalaire usuel) $\mathcal{B}'$ à partir de $\mathcal{B}$. En posant $Q = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}')$ et $R = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, on a donc $A = QR$. Comme $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormales, Q est orthogonale. Enfin, si on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$, le procédé de Gram-Schmidt assure que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $\text{vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{vect}(f_1, \dots, f_p)$. En particulier, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $e_p \in \text{vect}(f_1, \dots, f_p)$ ce qui assure que R est triangulaire supérieure.

Définition 4.7

Soit $A \in O(n)$. Si $\det(A) > 0$, on dit que A est **orthogonale positive** ; si $\det(A) < 0$, on dit que M est **orthogonale négative**.

Remarque. Si A est orthogonale positive, $\det(A) = 1$.
Si A est orthogonale négative, $\det(A) = -1$.

Définition 4.8 Groupe spécial orthogonal

L'ensemble des matrices orthogonales positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $O(n)$ appellé **groupe spécial orthogonal** d'ordre n et noté $SO(n)$ ou $SO_n(\mathbb{R})$.

Proposition 4.10 Caractérisation des bases orthonormales directes

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E où $n = \dim E$. Alors $\mathcal{F}$ est une base orthonormale directe de E **si et seulement si** $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est une matrice orthogonale positive.

Définition 4.9 Produit mixte

$\det_{\mathcal{B}}$ ne dépend pas de la base **orthonormale directe** $\mathcal{B}$ de E choisie. Si $\dim E = n$, alors pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on appelle **produit mixte** du n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ le déterminant de $(x_1, \dots, x_n)$ dans une base orthonormale directe quelconque de E. On le note $[x_1, \dots, x_n]$.

Interprétation géométrique

Si $\dim E = 2$, alors pour tout $(x_1, x_2) \in E^2$, $[x_1, x_2]$ est l'aire orientée du parallélogramme porté par les vecteurs x_1 et x_2.
Si $\dim E = 3$, alors pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in E^3$, $[x_1, x_2, x_3]$ est le volume orienté du parallélépipède porté par les vecteurs x_1, x_2 et x_3.
De manière générale, $[x_1, \dots, x_n]$ est le «volume orienté» du parallélotope porté par les vecteurs $x_1, \dots, x_n$.

Remarque. Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$[f(x_1), \dots, f(x_n)] = \det(f)[x_1, \dots, x_n]$$

Appliquer un endomorphisme à un parallélotope revient donc à multiplier son «volume orienté» par le déterminant.

Produit vectoriel

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension $n \geq 2$. Soit $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in E^{n-1}$.
L'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & [x_1, \dots, x_{n-1}, x] \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur E. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur appelé **produit vectoriel** des vecteurs $x_1, \dots, x_{n-1}$ noté $x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$ tel que $\forall x \in E$, $\varphi(x) = (x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \mid x)$.
L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} E^{n-1} & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_{n-1}) & \longmapsto & x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \end{array} \right.$ est une application $n-1$ linéaire alternée.
Le produit vectoriel de $n-1$ vecteurs est orthogonal à chacun de ces vecteurs.

Proposition 4.11 Caractérisation des automorphismes orthogonaux positifs

Un endomorphisme de E est un automorphisme orthogonal positif **si et seulement si** sa matrice dans une **base orthonormale** de E est orthogonale positive.

5 Automorphismes orthogonaux du plan et de l'espace

5.1 Automorphismes orthogonaux du plan vectoriel euclidien

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel euclidien **orienté de dimension** 2.

Proposition 5.1

$\mathrm{O}(2)$ est l'ensemble des matrices de la forme $\mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $\mathrm{S}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

$\mathrm{SO}(2)$ est l'ensemble des matrices $\mathrm{R}(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Proposition 5.2

$\forall(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{R}(\theta)\mathrm{R}(\varphi) = \mathrm{R}(\varphi)\mathrm{R}(\theta) = \mathrm{R}(\theta + \varphi)$.

Remarque. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \theta & \longmapsto & \mathrm{R}(\theta) \end{array}\right.$ est un morphisme de groupes de noyau $2\pi\mathbb{Z}$ et d'image $\mathrm{SO}(2)$. Comme $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif, on en déduit que $(\mathrm{SO}(2), \times)$ et $(\mathrm{SO}(\mathrm{E}), \circ)$ (si $\dim \mathrm{E} = 2$) sont des groupes commutatifs.

Remarque. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ z & \longmapsto & \mathrm{M}(z) \end{array}\right.$ où $\mathrm{M}(z) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Re}(z) \end{pmatrix}$ est un morphisme injectif de $\mathbb{R}$-algèbres. Elle induit un isomorphisme de groupes de $\mathbb{U}$ sur $\mathrm{SO}(2)$. A nouveau, comme $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe commutatif, on en déduit que $(\mathrm{SO}(2), \times)$ et $(\mathrm{SO}(\mathrm{E}), \circ)$ (si $\dim \mathrm{E} = 2$) sont des groupes commutatifs.

Définition 5.1 Rotation

Soit $u \in \mathrm{SO}(\mathrm{E})$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de u dans toute base orthonormale directe de E soit $\mathrm{R}(\theta)$. On appelle alors u la **rotation (vectorielle) d'angle** θ.

Remarque. $\mathrm{SO}(\mathrm{E})$ est donc le groupe (commutatif) des rotations de E.

Remarque. L'angle d'une rotation est défini modulo 2π.

Remarque. Si l'on change l'orientation de E, la rotation d'angle θ devient la rotation d'angle $-\theta$.

Proposition 5.3 Classification des automorphismes orthogonaux via le déterminant

Soit $u \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$.

- Si $\det(u) = +1$, alors u est une rotation.
- Si $\det(u) = -1$, alors u est une réflexion i.e. une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Remarque. Il n'existe donc que **deux** types d'isométries vectorielles du plan.

Exercice 5.1

On se place dans un plan euclidien. Montrer que la composée de deux réflexions est une rotation et que toute rotation peut s'écrire comme la composée de deux réflexions.

Proposition 5.4 Classification des automorphismes orthogonaux via les vecteurs invariants

Soit $u \in \mathrm{O(E)}$. Notons $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id_E})$.

- Si $\dim \mathrm{F} = 0$, alors u est une rotation d'angle non nul (modulo 2π).
- Si $\dim \mathrm{F} = 1$, alors u est une réflexion.
- Si $\dim \mathrm{F} = 2$, alors $u = \mathrm{Id_E}$.

Remarque. La matrice d'une réflexion dans une base orthonormale directe (ou indirecte) est de la forme $\mathrm{S}(\theta)$, θ dépendant de la base choisie (contrairement aux rotations). De plus, il existe une base orthonormale (directe si on le souhaite) de E dans laquelle la matrice d'une réflexion est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Proposition 5.5

Soient r une rotation d'angle θ et u un vecteur unitaire. Alors $\cos\theta = (u \mid r(u))$ et $\sin\theta = [u, r(u)]$.

Méthode **Déterminer l'axe d'une réflexion connaissant sa matrice**

Soit s une réflexion de matrice S dans une base orthonormale $\mathcal{B}$. L'axe de s est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants. Pour le déterminer, il suffit de résoudre $\mathrm{SX} = \mathrm{X}$.

Exercice 5.2

Soit s une réflexion de matrice $\mathrm{S}(\theta)$ dans une base orthonormée (e_1, e_2) d'un espace euclidien de dimension 2. Déterminer l'axe de s.

Définition 5.2 Angle de vecteurs

Soient u et v deux vecteurs non nuls de E. Posons $u' = \frac{u}{\|u\|}$ et $v' = \frac{v}{\|v\|}$. Il existe une unique rotation r telle que $r(u') = v'$. On appelle angle de vecteurs (u, v) l'angle de cette rotation r (défini modulo 2π).

Remarque. Si l'on change l'orientation de E, les angles sont changés en leurs opposés.

Proposition 5.6 Relation de Chasles

Pour tous vecteurs u, v, w de E non nuls, $(u, v) + (v, w) = (u, w)$.

Proposition 5.7 Lien avec le produit scalaire et le produit mixte

Pour tous vecteurs u, v non nuls de E :

$$(u \mid v) = \|u\|\|v\| \cos(u, v) \qquad [u, v] = \|u\|\|v\| \sin(u, v)$$

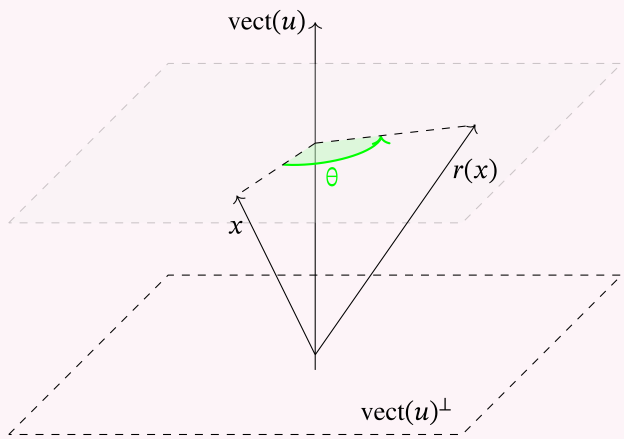
Exercice 5.3

Montrer que les rotations conservent les angles orientés et que les réflexions changent les angles orientés en leurs opposés.

5.2 Automorphismes orthogonaux de l'espace vectoriel euclidien (hors programme)

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel euclidien **orienté de dimension** 3.

Définition 5.3 Rotation



Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et u un vecteur non nul de E. On appelle **rotation (vectorielle) d'angle** θ **et d'axe orienté par** u l'endomorphisme laissant les vecteurs de $\mathrm{vect}(u)$ invariants et induisant une rotation d'angle θ dans le plan $\mathrm{vect}(u)^\perp$ dont l'orientation est induite par celle de $\mathrm{vect}(u)$.

Remarque. Si u et u' sont deux vecteurs non nuls, colinéaires et de même sens, les rotations d'axes orientés par u et u' et de même angle θ sont identiques.
Si u et u' sont deux vecteurs non nuls, colinéaires et de sens contraire, la rotation d'axe orienté par u et d'angle θ et la rotation d'axe orienté par u' et d'angle $-\theta$ sont identiques.

Proposition 5.8 Matrice d'une rotation

La matrice de la rotation d'angle θ et d'axe orienté par u dans une base orthonormale directe adaptée à la décomposition de premier vecteur colinéaire et de même sens que u est $\mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Définition 5.4 Anti-rotation

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et u un vecteur non nul de E. On appelle **anti-rotation** d'angle θ et d'axe orienté par u la composée commutative de la rotation d'angle θ et d'axe orienté par u et de la réflexion par rapport au plan $\mathrm{vect}(u)^\perp$.

Proposition 5.9 Matrice d'une anti-rotation

La matrice d'une anti-rotation d'angle θ et d'axe orienté par u dans une base orthonormale directe de premier vecteur colinéaire et de même sens que u est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Remarque. L'anti-rotation d'angle θ et d'axe orienté par u est également la composée de la rotation d'angle $\theta + \pi$ et d'axe orienté par u et de $-\mathrm{Id}_E$.
Autrement dit, r est l'anti-rotation d'angle θ et d'axe orienté par u **si et seulement si** $-r$ est la rotation d'angle $\theta + \pi$ et d'axe orienté par u.

Remarque. Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est une rotation d'axe cette droite et d'angle π (peut importe l'orientation).

A nouveau, on peut classifier les automorphismes orthogonaux de E suivant la dimension du sous-espace des vecteurs invariants.

Proposition 5.10 Classification des automorphismes orthogonaux

Soit $f \in O(E)$. Notons $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

- Si $\dim F = 0$, alors f est une anti-rotation.
- Si $\dim F = 1$, alors f est une rotation d'angle non nul.
- Si $\dim F = 2$, alors f est une réflexion.
- Si $\dim F = 3$, alors $f = \mathrm{Id}_E$.

On peut également classifier les automorphismes orthogonaux de E suivant leur caractère positif ou négatif.

Proposition 5.11 Classification des automorphismes orthogonaux

Soit $f \in O(E)$.

- Si $\det(f) = +1$, f est une rotation.
- Si $\det(f) = -1$, alors f est une réflexion ou une anti-rotation.

Méthode **Déterminer l'image d'un vecteur par une rotation d'axe et d'angle donnés**

Soit r une rotation d'angle θ d'axe orienté par u. On suppose u unitaire. Soit x un vecteur de E. On veut déterminer $r(x)$.

- On calcule la projection orthogonale y de x sur $\mathrm{vect}(u)$: $y = (x \mid u)u$. On a alors $z = x - y \in \mathrm{vect}(u)^{\perp}$.
- On calcule l'image de z : $r(z) = (\cos\theta)z + (\sin\theta)u \wedge z$.
- On a alors $r(x) = y + r(z)$.

Méthode **Déterminer la matrice d'une rotation d'axe et d'angle donnés**

Soit r une rotation d'angle θ orienté par u. On suppose u unitaire. On veut déterminer la matrice M de r dans la base canonique.

Méthode n°1 On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La méthode précédente nous permet de calculer $r(e_1)$, $r(e_2)$ et $r(e_3)$. On peut aussi remarquer que $r(e_3) = r(e_1) \wedge r(e_2)$. Les colonnes de M sont les vecteurs colonnes représentant $r(e_1)$, $r(e_2)$ et $r(e_3)$ dans la base canonique.

Méthode n°2 On détermine v, w tels que (u, v, w) soient une base orthonormale directe : il suffit de choisir v orthogonal à u et de poser $w = u \wedge v$. La matrice de r dans la base (u, v, w) est $\mathrm{R}(\theta)$. Si on note P la matrice de la base (u, v, w) dans la base canonique, alors la matrice recherchée est $\mathrm{PR}(\theta)\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PR}(\theta)^t\mathrm{P}$.

Exercice 5.4

Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'axe dirigé par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Méthode **Déterminer l'axe et l'angle de la rotation associée à une matrice de** $\mathrm{SO}(3)$

Soit r une rotation de matrice R dans une base orthonormale directe $\mathcal{B}$.

Méthode n°1

- On cherche d'abord un vecteur directeur u de l'axe en résolvant $\mathrm{RX} = \mathrm{X}$.
- On détermine un vecteur v non nul et orthogonal à u.
- On détermine le vecteur $r(v)$ grâce à R.
- On a alors $\cos\theta = \frac{(v|r(v))}{\|v\|^2}$.
- On détermine θ grâce au signe de $\sin\theta$: on remarque que $[u, v, r(v)] = \|u\|\|v\|^2 \sin\theta$ ou que $v \wedge r(v) = \|v\|^2(\sin\theta)\frac{u}{\|u\|}$.

Méthode n°2

- On cherche d'abord un vecteur directeur u de l'axe en résolvant $\mathrm{RX} = \mathrm{X}$.
- R et $\mathrm{R}(\theta)$ sont la matrice de r dans des bases différentes donc $\mathrm{tr}(\mathrm{R}(\theta)) = \mathrm{tr}(\mathrm{R})$ i.e. $1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}(\mathrm{R})$. On en déduit $\cos\theta$.
- On détermine θ grâce au signe de $\sin\theta$. Le signe de $\sin\theta$ est le même que celui de $[u, x, r(x)]$ où x est un vecteur quelconque de E : en pratique, on prend un vecteur de la base canonique.

Exercice 5.5

Soit $\mathrm{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $\mathrm{A} \in \mathrm{SO}(3)$.
2. Déterminer l'axe et l'angle de la rotation associée à A.

Méthode **Déterminer le plan d'une réflexion connaissant sa matrice**

Soit s une réflexion de matrice S dans une base orthonormale directe $\mathcal{B}$. Le plan par rapport auquel on effectue la réflexion est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par s. Pour le déterminer, il suffit de résoudre $SX = X$.

Proposition 5.12 Composée de réflexions

(i) La composée de la réflexion de plan P_1 suivie de la réflexion de plan P_2 (avec $P_1 \neq P_2$) est la rotation d'axe $D = P_1 \cap P_2$ d'angle 2θ avec $\theta \equiv (D_1, D_2)[\pi]$ où $D_1 = P_1 \cap D^\perp$ et $D_2 = P_2 \cap D^\perp$ (l'orientation de $D^\perp$ étant induite par l'orientation de D).

(ii) Toute rotation d'axe D peut s'écrire comme le produit de deux réflexions de plans contenant D, l'un des plans pouvant être choisi arbitrairement.