Devoir surveillé n°02 : corrigé

Solution 1

1. $$\mathrm{S}_n + \mathrm{T}_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i+j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 = n^2$$

2. En échangeant les noms des indices i et j,
$$\mathrm{S}_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{j}{i+j}$$
En intervertissant l'ordre de sommation, on obtient bien $\mathrm{S}_n = \mathrm{T}_n$. Puisque $\mathrm{S}_n + \mathrm{T}_n = n^2$, on a donc $\mathrm{S}_n = \mathrm{T}_n = \frac{n^2}{2}$.

Solution 2

1. On trouve

$a_0 = 1$	$a_1 = 1$	$a_2 = 2$	$a_3 = 5$	$a_4 = 14$
$\mathrm{S}_0 = 1$	$\mathrm{S}_1 = 2$	$\mathrm{S}_2 = 5$	$\mathrm{S}_3 = 14$	$\mathrm{S}_4 = 42$

On remarque que $\mathrm{S}_n = a_{n+1}$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue le changement d'indice $l = n - k$ de sorte que
$$\mathrm{T}_n = \sum_{l=0}^{n}(n-l)a_{n-l}a_l = \sum_{k=0}^{n}(n-k)a_k a_{n-k}$$
Ainsi
$$2\mathrm{T}_n = \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k} + \sum_{k=0}^{n}(n-k)a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(k+n-k)a_k a_{n-k} = n\mathrm{S}_n$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$(n+2)a_{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n!^2} = \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!^2} = 2(2n+1)a_n$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_{n+1} + \mathrm{T}_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k a_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} k a_k a_{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(k+1)a_k a_{n+1-k} \\
&= a_0 a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1}(k+1)a_k a_{n+1-k} \\
&= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n}(k+2)a_{k+1}a_{a_n-k}
\end{aligned}$$
Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+2)a_{k+1} = 2(2k+1)a_k$ d'après la question **3** donc
$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_{n+1} + \mathrm{T}_{n+1} &= a_{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n}(2k+1)a_k a_{n-k} \\
&= a_{n+1} + 4\sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k} + 2\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \\
&= a_{n+1} + 4\mathrm{T}_n + 2\mathrm{S}_n
\end{aligned}$$

Or on a vu à la question **2** que $2T_n = nS_n$ donc

$$S_{n+1} + T_{n+1} = a_{n+1} + 2nS_n + 2S_n = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

D'après la question **2**, $2T_{n+1} = (n+1)S_{n+1}$ donc

$$S_{n+1} + T_{n+1} = S_{n+1} + \frac{n+1}{2}S_{n+1} = \frac{n+3}{2}S_{n+1}$$

On en déduit que

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

5. D'après la question **1**, $S_0 = a_1 = 1$.
Supposons maintenant que $S_n = a_{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$. Or on a supposé que $S_n = a_{n+1}$ donc

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} = (2n+3)a_{n+1}$$

Or d'après la question **3**, $(n+3)a_{n+2} = 2(2n+3)a_{n+1}$ donc

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = \frac{n+3}{2}a_{n+2}$$

puis $S_{n+1} = a_{n+2}$ puisque $\frac{n+3}{2} \neq 0$.
Par récurrence, $S_n = a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Tout d'abord $a_0 = 1$ est un entier naturel. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tels que $a_0, a_1, \dots, a_n$ soient des entiers naturels. Alors S_n est également un entier naturel en tant que somme de produits de ces derniers entiers naturels. Puisque $a_{n+1} = S_n$, a_{n+1} est également un entier naturel. Par récurrence forte, a_n est donc un entier naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 3

---

1. C'est une application de directe de la formule du binôme de Newton.

$$\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j} = \sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}1^j1^{q-j} = (1+1)^q = 2^q$$

2. Après simplifications des différentes factorielles, on obtient :

$$\frac{\binom{n}{k}\binom{k}{p}}{\binom{n}{p}} = \frac{(n-p)!}{(n-k)!(k-p)!} = \binom{n-p}{k-p}$$

3. D'après la question précédente

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\sum_{k=p}^{n}\binom{n-p}{k-p}$$

On effectue le changement d'indice $j = k - p$ (la contrainte $p \leq k \leq n$ se transforme en $0 \leq j \leq n-p$), et on conclut en utilisant la première question avec $q = n - p$:

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\sum_{j=0}^{n-p}\binom{n-p}{j} = 2^{n-p}\binom{n}{p}$$

Solution 4

---

1. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{\alpha}{2^k} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. Alors $\alpha \equiv 2^{k-1}\pi[2^k\pi]$. Il existerait donc $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\alpha = 2^{k-1}\pi + 2^k m\pi = (2^{k-1} + 2^k m)\pi$$

Comme $k \in \mathbb{N}^*$, $2^{k-1} + 2^k m$ est entier. Ainsi on aurait donc $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$ et a fortiori $\alpha \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, ce qui n'est pas. La somme S_n est donc bien définie.

2. On sait que

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

On en déduit que

$$\frac{2}{\tan(2x)} = \frac{1-\tan^2 x}{\tan x} = \frac{1}{\tan x} - \tan x$$

et donc que

$$\frac{1}{\tan(x)} - \frac{2}{\tan(2x)} = \tan(x)$$

Les membres de cette égalité sont définis si

$$x \not\equiv 0[\pi] \qquad 2x \not\equiv 0[\pi] \qquad x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \qquad 2x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

c'est-à-dire si

$$x \not\equiv 0[\pi] \qquad x \not\equiv 0[\pi/2] \qquad x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \qquad x \not\equiv \frac{\pi}{4}[\pi/2]$$

ou, plus simplement, si $x \not\equiv 0[\pi/4]$.

3. On veut évidemment appliquer l'égalité précédente à $x = \alpha/2^k$. Il faut donc vérifier que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha/2^k \not\equiv 0[\pi/4]$. Supposons que $\alpha/2^k \equiv 0[\pi/4]$. Alors $\alpha \equiv 0[2^{k-2}\pi]$. Comme $k \geq 1$, on aurait donc a fortiori $\alpha \equiv 0[\pi/2]$, ce qui n'est pas. On est donc en droit d'appliquer l'égalité précédente :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\tan(\alpha/2^k)}{2^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k\tan(\alpha/2^k)} - \frac{2}{2^k\tan(2\alpha/2^k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k\tan(\alpha/2^k)} - \frac{1}{2^{k-1}\tan(\alpha/2^{k-1})} \\ &= \frac{1}{2^n\tan(\alpha/2^n)} - \frac{1}{\tan(\alpha)} \end{aligned}$$

4. On sait que $\lim_{x\to0}\cos(x) = 1$ et que $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Or $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x\cos x}$ donc $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x} = 1$. Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha}{2^n} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tan(\alpha/2^n)}{\alpha/2^n} = 1$$

ou encore

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n\tan(\alpha/2^n) = \alpha$$

Comme $\alpha \neq 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n\tan(\alpha/2^n)} = \frac{1}{\alpha}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\tan\alpha}$$

Solution 5

---

1. On utilise une formule de factorisation.

$$s = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Or

$$\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

et on a donc bien $s = 2p$.

2. En utilisant la formule de duplication du sinus,

$$p\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$$

Or

$$\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)=\sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=-\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Ainsi

$$p\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Or $\frac{2\pi}{5}$ n'est pas un multiple entier de π donc $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\neq 0$, ce qui permet d'affirmer que $p=-\frac{1}{4}$ et donc $s=-\frac{1}{2}$.

3. Puisque $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ ont pour somme $s=-\frac{1}{2}$ et pour produit $p=-\frac{1}{4}$, ils sont racines du trinôme $X^2+\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}$. Ces racines sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Comme $\frac{2\pi}{5}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$ et donc

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\qquad\text{et}\qquad\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

Remarque. On aurait aussi pu remarquer que

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\left(2\times\frac{2\pi}{5}\right)=2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1$$

Ainsi

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1=s=-\frac{1}{2}$$

ou encore

$$2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-\frac{1}{2}=0$$

Ainsi $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine du trinôme $2X^2+X-\frac{1}{2}$. Ces racines sont à nouveau $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Comme précédemment, on invoque que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$ pour en déduire que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Puis

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=s-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$