Devoir à la maison n°16

Solution 1

1. **a.** Soient $(A, B) \in \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$. On a donc $\deg(PA) \leq p+q-1$ et $\deg(QB) \leq p+q-1$. Ainsi $\deg u(A, B) \leq p+q-1$. u est donc bien à valeurs dans F.
Soient (A_1, B_1) et (A_2, B_2) des éléments de E. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On a alors

$$\begin{aligned} u(\lambda(A_1, B_1) + \mu(A_2, B_2)) &= u(\lambda A_1 + \mu A_2, \lambda B_1 + \mu B_2) = (\lambda A_1 + \mu A_2)P + (\lambda B_1 + \mu B_2)Q \\ &= \lambda(PA_1 + QB_1) + \mu(PA_2 + QB_2) = \lambda u(A_1, B_1) + \mu u(A_2, B_2) \end{aligned}$$

   b. Si u est bijective, alors u est surjective. En particulier, 1 admet un antécédent (A, B) par u dans E. Le couple de polynômes (A, B) vérifie $PA + QB = 1$. Le théorème de Bézout nous dit alors que $P \wedge Q = 1$.

   c. Soit $(A, B) \in \operatorname{Ker} u$. Ainsi $PA = -QB$. Comme P et Q sont premiers entre eux, Q divise A. Or $\deg Q = q$ et $\deg A \leq q-1$. On a donc nécessairement $A = 0$. De même, P divise B et $\deg B < \deg Q$ donc $B = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$. Ainsi u est injective. Comme E et F sont de même dimension pq, u est bijective.

2. **a.** Pour $0 \leq l \leq q-1$, $u(X^l, 0) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^{l+k}$ et pour $0 \leq l \leq p-1$, $u(0, X^l) = \sum_{k=0}^{q} b_k X^{l+k}$. On en déduit donc que la matrice de u par rapport aux base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est $M_{P,Q}$.

   b. D'après la question précédente, u est bijective si et seulement si $M_{P,Q}$ est inversible, c'est-à-dire si et seulement si $\operatorname{Res}(P, Q) \neq 0$. Or on a vu que u est bijective si et seulement si $P \wedge Q = 1$. Ainsi $\operatorname{Res}(P, Q) \neq 0 \iff P \wedge Q = 1$.

3. **a.** P admet une racine multiple si et seulement si P et P′ admettent une racine commune i.e. si et seulement si $\operatorname{Res}(P, P') = 0$.

   b. Comme $P = X^3 + aX + b$, $P' = 3X^2 + a$. Ainsi

$$\operatorname{Res}(P, P') = \begin{vmatrix} b & 0 & a & 0 & 0 \\ a & b & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 3 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

En effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a}{3}L_4$ et $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a}{3}L_5$, on se ramène à un déterminant triangulaire par blocs :

$$\operatorname{Res}(P, P') = \begin{vmatrix} b & 0 & a & 0 & 0 \\ \frac{2a}{3} & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2a}{3} & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & 0 & a \\ \frac{2a}{3} & b & 0 \\ 0 & \frac{2a}{3} & 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Le premier déterminant se calcule par la règle de Sarrus et on obtient $\operatorname{Res}(P, P') = 27b^2 + 4a^3$. Ainsi P admet une racine multiple si et seulement si $27b^2 + 4a^3 = 0$.