Séries et familles sommables

Nature de séries

Solution 1

- On suppose $0 < b \leq 1$. Dans ce cas, $b^n = o\left(2^{\sqrt{n}}\right)$ puis $2^{\sqrt{n}} + b^n \sim 2^{\sqrt{n}}$. Finalement $u_n \sim a^n$. On en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge pour $0 < a < 1$ et diverge vers $+\infty$ sinon.
- On suppose $b > 1$. Dans ce cas, $2^{\sqrt{n}} = o\left(b^n\right)$ et donc $2^{\sqrt{n}} + b^n \sim b^n$. Finalement, $u_n \sim \left(\frac{a}{b}\right)^n 2^{\sqrt{n}}$. Posons $v_n = \left(\frac{a}{b}\right)^n 2^{\sqrt{n}}$. Alors

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a}{b}2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{a}{b}2^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{b}$$

  D'après la règle de d'Alembert

  - si $a < b$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge ;
  - si $a > b$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge (grossièrement).

  Enfin, si $a = b$, $u_n \sim 2^{\sqrt{n}}$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement.

Solution 2

Supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Alors (S_n) converge vers la somme $\mathrm{S} > 0$ de cette série. On a donc $\frac{u_n}{\mathrm{S}_n} \sim \frac{u_n}{\mathrm{S}}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{\mathrm{S}_n}$ converge donc.
Supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge. Puisque cette série est à termes positifs, elle diverge donc vers $+\infty$. Si $\frac{u_n}{\mathrm{S}_n}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{\mathrm{S}_n}$ diverge grossièrement. Sinon, $\ln\left(1 - \frac{u_n}{\mathrm{S}_n}\right) \sim -\frac{u_n}{\mathrm{S}_n}$ donc les séries de terme général $\frac{u_n}{\mathrm{S}_n}$ et $\ln\left(1 - \frac{u_n}{\mathrm{S}_n}\right)$ sont de même nature. Or

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln\left(1 - \frac{u_n}{\mathrm{S}_n}\right) &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln \frac{\mathrm{S}_{n-1}}{\mathrm{S}_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (\ln \mathrm{S}_{n-1} - \ln \mathrm{S}_n) = \ln \mathrm{S}_0 - \ln \mathrm{S}_\mathrm{N}\end{aligned}$$

Or $\mathrm{S}_\mathrm{N} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge vers $+\infty$. Ainsi $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1 - \frac{u_n}{\mathrm{S}_n}\right)$ diverge de même que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{\mathrm{S}_n}$.
Les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{\mathrm{S}_n}$ sont donc toujours de même nature.

Solution 3

1. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour $n \geq \mathrm{N}$. Par télescopage, on obtient, $\frac{u_n}{u_\mathrm{N}} \leq \frac{v_n}{v_\mathrm{N}}$ i.e. $u_n \leq \frac{u_\mathrm{N}}{v_\mathrm{N}} v_n$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$. On a donc $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.
2. **a.** Soit β tel que $1 < \beta < \alpha$ et posons $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} \\ &= 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Ainsi $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{\alpha-\beta}{n}$. Puisque $\alpha - \beta > 0$, on a donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang. D'après la première question, $u_n = \mathcal{O}(v_n)$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge car $\beta > 1$ et, comme elle est à termes positifs, sa convergence entraîne celle de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

b. Cette fois-ci, on se donne β tel que $\alpha < \beta < 1$ et on pose à nouveau $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On montre comme précédemment que $v_n = \mathcal{O}(u_n)$. La divergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ entraîne la divergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

c. Si on pose $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge.

Si on pose maintenant $u_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$ pour $n \geq 2$, on a à nouveau $u_n = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Mais la fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln^2 x}$ étant décroissante, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^2 t}$ sont de même nature. Or une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t\ln^2 t}$ est $t \mapsto -\frac{1}{\ln t}$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale précédente et par conséquent celle de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

3. On a

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+3} &= \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{2n}} \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Autrement dit, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ avec les notations précédentes. La série de terme général u_n diverge.

Remarque. Le critère de Raabe-Duhamel permet de conclure (sauf si $\alpha = 1$) dans les cas où le critère de d'Alembert ne le permet pas ($\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$).

Solution 4

1. On sait que $\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \mathcal{O}(x^2)$ donc $\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge et est à termes positifs, il en est de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$.

2. Puisque $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$,

$$\sqrt[n]{3} = e^{\frac{\ln 3}{n}} = 1 + \frac{\ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et

$$\sqrt[n]{2} = e^{\frac{\ln 2}{n}} = 1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On en déduit que

$$\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2} \sim \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{n}$$

Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}\right)$.

3. Puisque $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

De plus, $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ donc

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sim -\frac{1}{2n}$$

Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

4. Puisque $\operatorname{ch} x \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) = 1 + \frac{1}{6n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisque $\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n} = 1 + \frac{1}{6n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge et est à termes positifs, il en est de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}\right)$.

Solution 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{4} < 1$$

La série $\sum u_n$ est donc convergente d'après la règle de D'Alembert.

Solution 6

Puisque la suite (u_n) est à valeurs strictement positives, on peut écrire :

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = a\left[(n+1)^2 - n^2\right] + (n+1)^3 \ln\left(1 - \frac{a}{n+1}\right) - n^3 \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right)$$

En utilisant le développement lmité de $u \mapsto \ln(1+u)$ à l'ordre 3 en 0, on trouve

$$(n+1)^3 \ln\left(1 - \frac{a}{n+1}\right) = -a(n+1)^2 - a^2(n+1) - a^3 + o(1)$$
$$n^3 \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right) = -an^2 - a^2 n - a^3 + o(1)$$

Finalement $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = -a^2 + o(1)$ et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-a^2}$. Si $a \neq 0$, $e^{-a^2} < 1$ et le critère de d'Alembert permet de conclure à la convergence de la série de terme général u_n. Si $a = 0$, il suffit de voir que $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ pour conclure à la divergence de cette même série.

Solution 7

1. Si $\beta \geq 0$, alors $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$ pour $n \geq 3$. Or la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge puisque $\alpha > 1$. On en déduit que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.
Si $\beta < 0$, donnons-nous $\gamma \in]1, \alpha[$. Alors $(\ln n)^{-\beta} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^{\alpha-\gamma}\right)$ par croissances comparées. Ceci signifie que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$. Or la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\gamma}$ est à termes positifs et converge puisque $\gamma > 1$. On en déduit que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.

2. Si $\beta \leq 0$, alors $0 \leq \dfrac{1}{n^\alpha} \leq u_n$ pour $n \geq 3$. Or $\sum\limits_{n\geq1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge donc $\sum\limits_{n\geq2} u_n$ diverge.
Si $\beta > 0$, donnons-nous $\gamma \in]\alpha, 1[$. Alors $(\ln n)^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o(n^{\gamma-\alpha})$ par croissances comparées. Ceci signifie que $\frac{1}{n^\gamma} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$. Or la série $\sum_{n\geq2} u_n$ est à termes positifs et la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq1} \dfrac{1}{n^\gamma}$ diverge puisque $\gamma < 1$. On en déduit que $\sum\limits_{n\geq2} u_n$ diverge.

3. On a alors $0 \leq \frac{1}{n} \leq u_n$ pour $n \geq 3$. Or la série harmonique $\sum\limits_{n\geq1} \dfrac{1}{n}$ diverge. On en déduit que $\sum\limits_{n\geq2} u_n$ diverge.

4. Posons $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ pour $x > 1$. f est décroissante sur $]1, +\infty[$ de sorte que

$$\int_2^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^n u_k \leq \frac{1}{(\ln 2)^\beta} + \int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

Si $\beta \neq 1$, alors $x \mapsto \frac{(\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta}$ est une primitive de f de sorte que

$$\frac{(\ln(n+1))^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta} \leq \sum_{k=2}^n u_k \leq \frac{1}{(\ln 2)^\beta} + \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta}$$

Le théorème de minoration nous permet d'affirmer que la série $\sum u_n$ diverge si $\beta < 1$. Par contre, si $\beta > 1$, la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geq2} u_n$ est croissante (puisque la série est à termes positifs) et majorée par une suite convergente donc elle converge en vertu du théorème de la limite monotone. On peut donc affirmer que $\sum\limits_{n\geq2} u_n$ converge.
Si $\beta = 1$, alors $x \mapsto \ln(\ln x)$ est une primitive de f de sorte que

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leq \sum_{k=2}^n u_k$$

On conclut à la divergence de $\sum\limits_{n\geq2} u_n$ via le théorème de minoration.

Solution 8

---

1. Soit $q \in]\ell, 1[$. Par définition de la limite, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq \sqrt[n]{u_n} \leq q$ pour $n \geq \mathrm{N}$. Ainsi $0 \leq u_n \leq q^n$ pour $n \geq \mathrm{N}$. Puisque la série $\sum q^n$ converge, il en est de même de la série $\sum u_n$.

2. Soit $q \in]1, \ell[$. Par définition de la limite, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq q \leq \sqrt[n]{u_n}$ pour $n \geq \mathrm{N}$. Ainsi $0 \leq q^n \leq u_n$ pour $n \geq \mathrm{N}$. Puisque la série $\sum q^n$ diverge, il en est de même de la série $\sum u_n$.

3. Posons $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ et $\sum u_n$ diverge.
Posons $u_n = \frac{1}{n^2}$. Alors $\sqrt[n]{u_n} = \exp\left(-\frac{2\ln n}{n}\right)$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ et $\sum u_n$ converge.

Solution 9

---

1. L'ingalité est clairement vraie pour $n = 0$. Supposons la vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq k|x_{n+1} - x_n| \leq k^{n+1}|x_1 - x_0|$$

Par récurrence, l'inégalité est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. D'après la question précédente $x_{n+1} - x_n = \mathcal{O}(k^n)$ avec $k \in [0, 1[$ donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{n+1} - x_n$ converge (absolument). Ceci signifie que la suite (x_n) converge.

3. Notons ℓ la limite de (x_n). Puisque f est continue (car lipschitzienne), $\ell = f(\ell)$ donc ℓ est un point fixe de f.
Soit ℓ' un point fixe de f. Alors

$$|\ell - \ell'| = |f(\ell) - f(\ell')| \leq k|\ell - \ell'$$

ou encore

$$(1-k)|\ell - \ell'| \leq 0$$

Puisque $1 - k > 0$, $|\ell - \ell'| = 0$ i.e. $\ell = \ell'$.
f admet donc un unique point fixe.

Solution 10

Pour tout entier $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}\frac{nu_n}{(n-1)u_{n-1}} &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{n-1}\left(2 - e^{\frac{1}{n}}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{n}}\left(2 - e^{\frac{1}{n}}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \left(1 + \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Ainsi $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par conséquent $\sum v_n$ converge.
Ensuite,

$$\begin{aligned}\ln\left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{1}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\end{aligned}$$

Or on montre $\sum \frac{1}{k^2}$ converge et on montre classiquement qu'il existe une constante γ telle que $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$. Par conséquent, il existe une constante C telle que

$$\ln(u_n) = \sum_{k=2}^n \ln\left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(n) + \mathrm{C} + o(1)$$

On en déduit que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{\mathrm{C}}}{n}$$

Comme la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de la série $\sum u_n$.

Solution 11

1. La fonction $f : x \mapsto \int_x^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ est strictement décroissante sur $]0,1]$ (elle est dérivable et sa dérivée est $x \mapsto -\frac{e^x}{x}$). Comme $\frac{e^t}{t} \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t}$, $\int_0^1 \frac{e^t}{t}$ diverge. Puisque $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est positive, $\lim_{0^+} f = +\infty$. Par ailleurs, $f(1) = 0$. Enfin, f est continue sur $]0,1]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in]0,1]$ tel que $f(u_n) = n$.

2. D'après la question précédente, f induit une bijection strictement décroissante de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$. Sa bijection réciproque est donc également strictement décroissante. Comme $u_n = f^{-1}(n)$, (u_n) est strictement décroissante. de plus, $\lim_{0^+} f = +\infty$ donc $\lim_{+\infty} f^{-1} = 0$. Par conséquent, (u_n) converge vers 0.

3. Remarquons que

$$v_n = \int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{u_n}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{u_n}^1 \frac{e^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Comme $\lim_{t\to0} \frac{e^t-1}{t} = 1$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Comme (u_n) converge vers 0,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t$$

4. Posons $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t$. Ainsi $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} -n + \mathrm{C} + o(1)$ puis $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{\mathrm{C}}}{n}$. On en déduit que $\sum u_n$ diverge.

Solution 12

On va raisonner par récurrence. Notons $\mathcal{P}_p$ l'assertion

> Pour tout $n \in [\![2^p, 2^{p+1}-1]\!]$, a_n est défini et $a_n = 2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} = 2^p$

$\mathcal{P}_0$ est évidemment vraie. Supposons $\mathcal{P}_p$ vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Soit alors $n \in [\![2^{p+1}, 2^{p+2}-1]\!]$. Alors $\lfloor n/2 \rfloor \in [\![2^p, 2^{p+1}-1]\!]$ donc a_n est bien défini et

$$a_n = 2a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 2 \cdot 2^p = 2^{p+1} = 2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}$$

de sorte que $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.
Ainsi $\mathcal{P}_p$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{a_n^2}$ est à termes positifs, elle converge ou diverge vers $+\infty$. Il suffit donc de considérer une suite extraite de la suite (S_n) de ses sommes partielles pour déterminer sa nature et sa somme éventuelle.

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_{2^{p+1}-1} = \sum_{k=0}^{p} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{a_j^2} = \sum_{k=0}^{p} \sum_{k=0}^{p} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{(2^k)^2} = \sum_{k=0}^{p} \frac{2^k}{(2^k)^2} = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^k}$$

Ainsi $\mathrm{S}_{2^{p+1}-1}$ est la somme partielle de rang p de la série géométrique $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k}$. On en déduit que $\lim_{p\to+\infty} \mathrm{S}_{2^{p+1}-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$. On en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{a_n^2}$ converge et que sa somme est 2.
Remarque. On aurait aussi pu utiliser le théorème de sommation par paquets à la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et à la partition $\mathbb{N}^* = \bigsqcup_{p\in\mathbb{N}} [\![2^p, 2^{p+1}-1]\!]$.

Calculs de sommes

Solution 13

Considérons la fraction rationnelle $\mathrm{F} = \dfrac{\mathrm{X}}{\mathrm{X}^4 + \mathrm{X}^2 + 1}$. Elle admet une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ du type

$$\mathrm{F} = \frac{a\mathrm{X} + b}{\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1} + \frac{c\mathrm{X} + d}{\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1}$$

L'imparité de F donne $a = c$ et $b = -d$. En considérant la limite de $x\mathrm{F}(x)$ lorsque x tend vers $\pm\infty$, on trouve $a + c = 0$ et donc $a = c = 0$. On trouve alors facilement $b = \frac{1}{2}$ et $d = -\frac{1}{2}$ d'où

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1)} - \frac{1}{2(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1)}$$

On remarque alors que $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1 = \mathrm{X}^2 - (\mathrm{X} - 1)$ et que $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1 = (\mathrm{X} + 1)^2 - \mathrm{X}$. Ainsi pour $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{p} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n^2 - (n-1)} - \frac{1}{(n+1)^2 - n} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{(p+1)^2 - p}\right) \text{ par télescopage} \\
&\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi la série de l'énoncé converge bien et sa somme vaut $\frac{1}{2}$.

Solution 14

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\binom{n+p}{n}} &= \frac{p!}{(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)}\\ &= \frac{p!}{p-1}\frac{(n+p)-(n+1)}{(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)}\\ &= \frac{p!}{p-1}\left(\frac{1}{(n+p-1)\dots(n+1)} - \frac{1}{(n+p)\dots(n+2)}\right)\end{aligned}$$

Donc pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, on a par télescopage

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\binom{n+p}{n}} &= \frac{p!}{p-1}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{(n+p-1)\dots(n+1)} - \frac{1}{(n+p)\dots(n+2)}\right)\\ &= \frac{p!}{p-1}\left(\frac{1}{(p-1)\dots 1} - \frac{1}{(\mathrm{N}+p)\dots(\mathrm{N}+2)}\right) \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{p!}{(p-1)(p-1)!} = \frac{p}{p-1}\end{aligned}$$

Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$ converge et sa somme vaut $\frac{p}{p-1}$.

Solution 15

---

1. On reconnaît le développement de Taylor en 0 de exp.
   Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, a fortiori, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment d'extrémités 0 et x. De plus, la dérivée d'ordre $n+1$ de exp est encore exp pour tout t compris entre 0 et x, $|e^t| = e^t \leq \mathrm{M}$ avec $\mathrm{M} = \max(e^x, 1)$ (pour éviter de distinguer suivant le signe de x). En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et x à l'ordre n, on a

   $$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{\mathrm{M}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

   Remarquons que M est indépendant de n donc l'inégalité précédente est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par comparaison des suites de référence, $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$ par encadrement. La série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge donc et sa somme est e^x.

2. On reconnaît les développements de Taylor en 0 de cos et sin.
   Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. cos et sin sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, a fortiori, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment d'extrémités 0 et x. Une récurrence évidente montre que $\cos^{(2n+1)} = (-1)^{n+1}\sin$ et $\sin^{(2n+2)} = (-1)^{n+1}\sin$. Il est alors évident que $\cos^{(2n+1)}$ et $\sin^{(2n+2)}$ sont majorées en valeur absolue par 1 sur $\mathbb{R}$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à cos entre 0 et x à l'ordre $2n$, on a

   $$\left|\cos x - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

   En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à sin entre 0 et x à l'ordre $2n+1$, on a

   $$\left|\sin x - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

   Par comparaison des suites de référence,

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0$$

   Ceci permet de conclure que les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ convergent et ont respectivement pour sommes $\cos x$ et $\sin x$.

   Remarque. On peut, en reprenant la preuve de la première question, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ix)^n}{n!}$ converge et a pour somme e^{ix}. On obtient la convergence et la somme des séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ en passant à la partie réelle et imaginaire.

3. On reconnaît le développement de Taylor en0 de $x \mapsto \ln(1+x)$.
Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. $f : t \mapsto \ln(1+t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ donc, a fortiori, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0,x]$. Une récurrence évidente montre que $f^{(n+1)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}$ pour tout $t \in]-1,+\infty[$. Ainsi pour tout $t \in [0,x]$,

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq n!$$

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et x à l'ordre n, on a

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| \leq \frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

car $x \in [0,1]$. Par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} = \ln(1+x)$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ converge donc et sa somme vaut $\ln(1+x)$.

Solution 16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1}\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, \mathrm{d}t \\
&= \ln(2) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On a pour tout $t \in [0,1]$

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$$

et par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n+1}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, \mathrm{d}t = 0$ puis

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$$

On en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et que sa somme est $\ln(2)$.

Solution 17

On sait, du moins j'espère, que

$$u_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Par une décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{u_n} = 6\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}\right)$$

On pose $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On montre classiquement qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_k} &= 6\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{2k+1}\right)\\
&= 6\left(\mathrm{H}_n+\mathrm{H}_{n+1}-1-4\left(\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{2k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\right)\right)\\
&= 6\left(\mathrm{H}_n+\mathrm{H}_{n+1}-1-4\left(\mathrm{H}_{2n+1}-1-\frac{1}{2}\mathrm{H}_n\right)\right)\\
&= 6\left(3\mathrm{H}_n+\mathrm{H}_{n+1}-4\mathrm{H}_{2n+1}+3\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 6\left(3\ln(n)+3\gamma+\ln(n+1)+\gamma-4\ln(2n+1)-4\gamma+3+o(1)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 6\left(\ln\left(\frac{n^3(n+1)}{(n+1/2)^4}\right)+3-4\ln(2)+o(1)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 6\left(3-4\ln(2)\right)+o(1)
\end{aligned}$$

car $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3(n+1)}{(n+1/2)^4}=1$. On en déduit que $\sum\frac{1}{u_n}$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{u_n}=6\left(3-4\ln(2)\right)$$

On peut vérifier avec Python.

```
from math import log

def somme(n):
  s=0
  S=0
  for k in range(1,n+1):
    s+=k**2
    S+=1/s
  return S

print(somme(1000))
print(6*(3-4*log(2)))
```

Solution 18

1. C'est du cours.

2. **a.** Supposons $\lambda\neq0$. Si $\lambda\in\mathbb{R}^*$, $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\lambda}{n}$ et $\sum u_n$ diverge. Si $\lambda\in\{-\infty,+\infty\}$, $\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{=}o(u_n)$ et (u_n) est de signe constant à partir d'un certain rang donc $\sum u_n$ diverge.
Par l'absurde, $\lambda=0$.

   b. Remarquons que (u_n) est positive puisqu'elle est décroissante de limite nulle.
Notons $\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$. Par décroissance de (u_n),

$$0\leq 2nu_{2n}=2\sum_{k=n+1}^{2n}u_{2n}\leq 2\sum_{k=n+1}^{2n}u_k=2(\mathrm{S}_{2n}-\mathrm{S}_n)$$

Comme $\sum u_n$ converge, $(\mathrm{S}_{2n}-\mathrm{S}_n)$ converge vers 0 puis $(2nu_{2n})$ également via le théorème des gendarmes. Par ailleurs,

$$0\leq(2n+1)u_{2n+1}\leq(2n+1)u_{2n}=2nu_{2n}+u_{2n}$$

A nouveau, $((2n+1)u_{2n+1})$ converge vers 0 par le théorème des gendarmes. On peut alors conclure que (nu_n) converge vers 0 puisque c'est le cas pour ses suites extraites $(2nu_{2n})$ et $((2n+1)u_{2n+1})$.

c. Remarquons que

$$n(u_n - u_{n+1}) = (nu_n - (n+1)u_{n+1}) + u_{n+1}$$

Puisque la suite (nu_n) converge, la série télescopique $\sum nu_n - (n+1)u_{n+1}$ converge. De plus, $\sum u_{n+1}$ converge par hypothèse. Ainsi, $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge comme somme de deux séries convergentes. On peut rajouter que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (nu_n - (n+1)u_{n+1}) + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

Solution 19

Pour simplifier l'exercice, on remarquera que, via le changement de variable $u = \tan x$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

1. Pour tout $u \in [0,1]$, $0 \leq \frac{u^n}{1+u^2} \leq u^n$ donc

$$0 \leq \mathrm{I}_n \leq \int_0^1 u^n\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème des gendarmes, (I_n) converge vers 0.

2. Il est clair que

$$\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+2} = \int_0^1 u^n\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n+1}$$

3. Remarquons que

$$(-1)^n\mathrm{I}_{2n} + (-1)^n\mathrm{I}_{2n+2} = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

donc en posant $v_n = (-1)^n\mathrm{I}_{2n}$,

$$v_n - v_{n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

La série télescopique $\sum v_n - v_{n+1}$ converge puisque (v_n) converge vers 0. On en déduit que $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n - v_{n+1} = v_0 - \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Remarque. On aurait aussi pu utiliser le critère spécial des séries alternées pour montrer que $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge.

4. Pour tout $u \in [0,1]$,

$$\frac{u^n}{1+u^2} \leq \frac{u^{n+1}}{1+u^2}$$

donc $\mathrm{I}_{n+1} \leq \mathrm{I}_n$. La suite (I_n) converge vers 0 en décroissant donc la série $\sum(-1)^n\mathrm{I}_n$ converge d'après le critère spécial des séries alternées.
Posons $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k\mathrm{I}_k$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n &= \int_0^1 \frac{\sum_{k=0}(-1)^k u^k}{1+u^2}\,\mathrm{d}u && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}u^{n+1}}{(1+u)(1+u^2)}\,\mathrm{d}u && \text{somme des termes d'une suite géométrique} \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)(1+u^2)} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}}{(1+u)(1+u^2)}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

On prouve comme précédemment que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{(1+u)(1+u^2)}\, du \leq \int_0^1 u^{n+1}\, du = \frac{1}{n+2}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{(1+u)(1+u^2)}\, du = 0$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{I}_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \int_0^1 \frac{du}{(1+u)(1+u^2)}$$

Par une décomposition en éléments simples,

$$\frac{1}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-u}{1+u^2} + \frac{1}{1+u}\right)$$

donc

$$\int_0^1 \frac{du}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{1}{2}\left[\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + \ln(1+u)\right]_0^1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{I}_n = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2$$

On vérifie avec Python.

```
from numpy import pi, log
from scipy.integrate import quad
I=lambda n:quad(lambda u:u**n/(1+u**2),0,1)[0]
S=sum([(-1)**n*I(n) for n in range(1000)])
print(S,pi/8+log(2)/4)
```

Comparaison série/intégrale

Solution 20

On posera $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.

Première méthode : comparaison à une intégrale.

Il faut prendre garde au sens de variation de $t \mapsto 1/t^\alpha$ pour encadrer.

- Supposons $\alpha \leq 0$. Par comparaison à une intégrale

$$\int_0^n \frac{dt}{t^\alpha} \leq \mathrm{S}_n \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha}$$

ou encore

$$\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \mathrm{S}_n \leq \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

On en déduit $\mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

- Supposons $0 < \alpha \leq 1$. Par comparaison à une intégrale

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \mathrm{S}_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}$$

Si $0 < \alpha < 1$, on en déduit

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leq \mathrm{S}_n \leq 1 + \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

On en déduit à nouveau $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
Si $\alpha = 1$,

$$\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$$

et donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

- Supposons $\alpha > 1$. On compare à nouveau à une intégrale. Pour des entiers n et N tels que $1 \leq n < N$

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}$$

ou encore

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right)$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

On en déduit que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Deuxème méthode : utilisation de séries télescopiques.
Plaçons-nous dans le cas $\alpha \neq 1$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ admet pour primitive $t \mapsto \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, on peut conjecturer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$ et $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ dans le cas convergent.

$$n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha} = n^{1-\alpha}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{1-\alpha} \cdot \frac{1-\alpha}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-\alpha}{n^\alpha}$$

- Si $\alpha < 1$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série à termes positifs divergente donc

$$\sum_{k=1}^{n} k^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n$$

ou encore

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

- Si $\alpha > 1$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série à termes positifs convergente donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} k^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n$$

ou encore

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

Reste le cas $\alpha = 1$. Cette fois, ln est une primitive de $t \mapsto 1/t$ donc on est amené à considérer l'équivalent suivant

$$\ln(n) - \ln(n-1) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Comme $\sum \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs divergente,

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = S_n - 1$$

ou encore, comme (S_n) diverge vers $+\infty$,

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Solution 21

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a évidemment $u_n = \sum_{k=1}^n \ln k$. La fonction ln étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,
$$\int_1^n \ln(t)\, \mathrm{d}t \leq u_n \leq \int_1^{n+1} \ln(t)\, \mathrm{d}t$$
ou encore
$$n\ln(n) - n + 1 \leq u_n \leq (n+1)\ln(n+1) - n$$
On a clairement $1 = o(n\ln n)$, $n = o(n\ln n)$ donc $n\ln n - n + 1 \sim n\ln n$.
De plus,
$$(n+1)\ln(n+1) - n = n\ln n + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n$$
On a clairement $n = o(n\ln n)$ et $\ln n = o(n\ln n)$.
Par ailleurs, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = o(n\ln n)$.
On en déduit également que $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = o(n)$ et a fortiori $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = o(n\ln n)$.
Finalement, $(n+1)\ln(n+1) - n \sim n\ln n$.
Le théorème des gendarmes assure alors que $u_n \sim n\ln n$.

2. D'après la question précédente, $\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{1}{n^2(\ln n)^2}$. On en déduit par exemple que $\frac{1}{u_n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ce qui assure la convergence de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{u_n^2}$.

3. Soit $(x, y) \in]1, +\infty[$ tel que $x \leq y$. Alors $0 <\leq \ln x \leq \ln y$ donc $0\frac{1}{\ln y} \leq \frac{1}{\ln x}$. Puisque $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$, on en déduit que $0 \leq f(y) \leq f(x)$. Ainsi f est décroissante sur $]1, +\infty[$.

4. Soit $n \geq 2$. Puisque la fonction f est décroissante sur $]1, +\infty[$
$$\int_2^{n+1} f(t)\, \mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^n f(k)$$
ou encore
$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{u_k}$$
Par théorème de minoration, la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{u_n}$ diverge (vers $+\infty$).

Séries alternées

Solution 22

1. Il suffit d'appliquer le critère spécial des séries alternées.

2. On sait que al suite (R_n) converge vers 0 et que R_n est du signe de $\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ i.e. de $(-1)^{n+1}$. Il suffit donc de montrer que la suite $(|\mathrm{R}_n|)$ est décroissante pour conclure à la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{R}_n$ à nouveau grâce au critère spécial des séries alternées. Puisque R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$,
$$|\mathrm{R}_{n+1}| - |\mathrm{R}_n| = (-1)^{n+2}\mathrm{R}_{n+1} - (-1)^{n+1}\mathrm{R}_n = (-1)^n(\mathrm{R}_n + \mathrm{R}_{n+1})$$
Or, par changement d'indice,
$$\mathrm{R}_n + \mathrm{R}_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$

Ainsi $\mathrm{R}_n + \mathrm{R}_{n+1}$ est lui-même le reste de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$, qui vérifie encore le critère des séries alternées. On en déduit que $\mathrm{R}_n + \mathrm{R}_{n+1}$ est du signe de $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$, c'est-à-dire de $(-1)^{n+1}$. Finalement, $|\mathrm{R}_{n+1}| - |\mathrm{R}_n| = (-1)^n(\mathrm{R}_n + \mathrm{R}_{n+1})$ est du signe de $(-1)^n(-1)^{n+1} = -1$, c'est-à-dire négatif. La suite $(|\mathrm{R}_n|)$ est donc bien décroissante : on peut appliquer le critère spécial des séries alternées de sorte que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{R}_n$ converge.

Solution 23

1. On a $b_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2k} - \sqrt{2k-1}$. Or

$$\sqrt{2k} - \sqrt{2k-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{k}}$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série à termes positifs divergente donc

$$b_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Mais on peut alors classiquement écrire que

$$\sqrt{k} - \sqrt{k-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

donc, en utilisant le même théorème,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \sqrt{n}$$

On en déduit finalement que $b_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n/2}$.
On remarque ensuite que $b_{2n+1} = b_{2n} - \sqrt{2n+1}$. D'une part, $b_{2n} \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n/2} + o(\sqrt{n})$ et, d'autre part, $\sqrt{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$ donc $\sqrt{2n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{2n} + o(\sqrt{n})$. Finalement, $b_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{=} -\sqrt{n/2} + o(\sqrt{n})$ i.e. $b_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\sqrt{n/2}$.
Un équivalent de b_n est donc $\frac{(-1)^n}{2}\sqrt{n}$. En effet, les équivalents précédents permettent de montrer qu'en posant $u_n = \frac{b_n}{(-1)^n\sqrt{n}}$, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes deux vers $\frac{1}{2}$. Il en est donc de même de la suite (u_n), ce qui fournit l'équivalent de (b_n) annoncée.

2. On voit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
b_n + b_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k\sqrt{k} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k\sqrt{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k\sqrt{k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}\sqrt{k+1} \\
&= -1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)
\end{aligned}$$

Notons $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$. S_n est la somme partielle d'une série qui converge en vertu du critère des séries alternées puisque la suite de terme général $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ est décroissante. Notons S la somme de cette série. Le premier terme de la somme définissant S est $1 - \sqrt{2} \leq 0$. On en déduit donc que $1 - \sqrt{2} \leq \mathrm{S} \leq 0$. Ainsi $(b_n + b_{n+1})$ converge vers $-1 - \mathrm{S}$ et $-1 - \mathrm{S} \leq \sqrt{2} - 2 < 0$.

3. Posons $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k}$. On a donc

$$u_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_{2k}} + \frac{1}{b_{2k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{2k} + b_{2k-1}}{b_{2k}b_{2k-1}}$$

D'après la question précédente, $(b_{2n}+b_{2n-1})$ converge vers une certaine limite $l<0$ et, d'après la première question, $b_{2n}b_{2n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{4}$. Ainsi $\frac{b_{2n}+b_{2n-1}}{b_{2n}b_{2n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{4l}{n}$. Or la série de terme général $-\frac{4l}{n}$ diverge (série de Riemann) et donc celle de terme général $\frac{b_{2n}+b_{2n-1}}{b_{2n}b_{2n-1}}$ également (on peut appliquer les théorèmes de comparaison car ces séries sont à termes positifs à partir d'un certain rang). La somme partielle de cette série n'est autre que u_{2n} qui diverge par conséquent. Comme cette suite est extraite de (u_n), la suite (u_n) diverge i.e. la série de terme général $\frac{1}{b_n}$ diverge.

Solution 24

---

1. Puisque cos est bornée, $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. En particulier, (v_n) converge vers 0. Par conséquent, $(\cos(v_{n-1}))$ converge vers 1 puis $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Puisque la série harmonique est une série à termes positifs divergente, la série $\sum v_n$ diverge également.

2. Il suffit de constater que cette série vérifie le critère des séries alternées.

3. Il nous faut un développement asymptotique de (v_n). On remarque que $v_n - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{v_{n-1}^2}{n}\right)$. Or $v_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $v_n - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Par conséquent, $(-1)^n v_n = \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Puisque la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et que la série $\sum \frac{1}{n^3}$ est une série à termes positifs convergente, la série $\sum(-1)^n v_n$ converge également.

Solution 25

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{=} \cos\left(-n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n \sin\left(-\frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Or la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}\pi}{3n}$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum u_n$ converge en tant que somme de deux séries convergentes.

Solution 26

Remarquons que

$$\begin{aligned} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) &= \sin\left(n\pi\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \sin\left(n\pi\left(1+\frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n\pi}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{(-1)^n\pi}{2n} + u_n \end{aligned}$$

avec $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$. La série $\sum \frac{(-1)^n\pi}{2n}$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées et la série $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ converge donc comme somme de deux séries convergentes.

Solution 27

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+u_n\end{aligned}$$

avec $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées, la série $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann mais la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Par conséquent, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ diverge.

Remarque. Pourtant, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. La condition de positivité est donc nécessaire pour le critère de convergence par équivalence.

Solution 28

1. Puisque (a_n) converge vers 0,

$$\ln(1+a_n) \underset{n\to+\infty}{=} a_n - \frac{a_n^2}{2} + \mathcal{O}(a_n)^3 \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ vérifie le critère spécial des séries alternées donc converge. La série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge. Enfin la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$. On en déduit que la série $\sum \ln(1+a_n)$ diverge vers $-\infty$.

2. Par propriété du logarithme

$$\ln\left(\prod_{k=2}^{n}(1+a_k)\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln(1+a_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Par passage à l'exponentielle,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=2}^{n}(1+a_k)\right) = 0$$

Solution 29

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : x \mapsto x^n + x\sqrt{n} - 1$ est continue et strictement croissante sur $[0,1]$. De plus, $f_n(0) = -1 > 0$ et $f_n(1) = \sqrt{n} > 0$ donc f_n s'annule une unique fois sur $[0,1]$. L'équation $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$ admet donc une unique solution u_n dans $[0,1]$.

2. Remarquons que $u_n = \frac{1-u_n^n}{\sqrt{n}}$. Comme (u_n) est à valeurs dans $[0,1]$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc (u_n) converge vers 0 d'après le théorème des gendarmes.

3. Comme (u_n) converge vers 0, (u_n^n) également. Ainsi

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{u_n^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Par comparaison à une série de Riemann, $\sum u_n$ diverge.

4. Comme (u_n) converge vers 0, $0 \leq u_n \leq 1/2$ à partir d'un certain rang de sorte que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/2^n)$. Ainsi

$$(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n u_n^n}{\sqrt{n}}$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n\sqrt{n}}\right) \qquad \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge d'après le critère des séries alternées et la série géométrique à termes positifs $\sum 1/2^n$ converge également. On en déduit la convergence de la série $\sum (-1)^n u_n$.

Sommation de relations de comparaison

Solution 30

---

1. Puisque $\ell \neq 0$, on peut affirmer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ell$. Par ailleurs, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ell$ est une série divergente à termes de signe constant, donc on peut affirmer que

$$\sum_{k=1}^n u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \ell = n\ell$$

Ceci signifie que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k = \ell$.

2. A nouveau, puisque $\ell \neq 0$, on peut affirmer que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ell$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\ell$ est encore une série divergente à termes de signe constant donc

$$\sum_{k=1}^n ku_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n n\ell = \frac{n(n+1)}{2}\cdot\ell \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2\ell}{2}$$

Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n ku_k = \frac{1}{2}$.

Solution 31

---

1. Avec les notations de l'énoncé, $\lim_{n\to+\infty} a_n \mathrm{S}_n = 1$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^2$ est à termes positifs donc la suite (S_n) converge ou diverge vers $+\infty$. Supposons qu'elle converge. Alors elle converge vers une limite ℓ strictement positive ($\mathrm{S}_n \geq \mathrm{S}_1 = a_1^2 > 0$). Alors (a_n) converge vers $1/\ell$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^2$ divergerait alors grossièrement, ce qui contredirait la convergence de la suite (S_n).
Par conséquent, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^2$ diverge et la suite (S_n) converge vers $+\infty$. Puisque $a_n = \frac{a_n\mathrm{S}_n}{\mathrm{S}_n}$, (a_n) converge vers 0.

2. La suite (S_n) est clairement croissante. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [\mathrm{S}_{n-1}, \mathrm{S}_n]$. Alors, par croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$(\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1})\mathrm{S}_{n-1}^2 \leq \int_{\mathrm{S}_{n-1}}^{\mathrm{S}_n} t^2 \,\mathrm{d}t \leq (\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1})\mathrm{S}_n^2$$

ou encore, en posant $u_n = \int_{\mathrm{S}_{n-1}}^{\mathrm{S}_n} t^2 \,\mathrm{d}t$,

$$a_n^2\mathrm{S}_{n-1}^2 \leq u_n \leq a_n^2\mathrm{S}_n^2$$

On rappelle que $\lim_{n\to+\infty} a_n\mathrm{S}_n = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} a_n^2\mathrm{S}_n^2 = 1$. De plus,

$$a_n^2\mathrm{S}_{n-1}^2 = a_n^2(\mathrm{S}_n - a_n)^2 = a_n^2\mathrm{S}_n^2 - 2\mathrm{S}_n a_n^3 + a_n^4$$

Or $\lim_{n\to+\infty} a_n\mathrm{S}_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} a_n^2\mathrm{S}_{n-1}^2 = 1$. D'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers 1.

3. Remarquons que

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \int_0^{S_n} t^2 \, dt = \frac{S_n^3}{3}$$

Par sommation de relation de comparaison pour les séries divergentes à termes positifs, $\sum_{k=1}^n u_n \sim n$. On en déduit que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$ et, comme $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$, $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$.

Solution 32

---

1. Par croissance de la fonction sin l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est stable par sin. Ainsi la suite (u_n) est à valeurs dans cet intervalle. De plus, une étude de fonction montre que $x \mapsto \sin(x) - x$ est négative sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée, elle converge. Enfin, sin est continue donc (u_n) converge vers un point fixe de sin. L'étude de $x \mapsto \sin(x) - x$ montre que 0 est l'unique point fixe de sin. Ainsi (u_n) converge vers 0.

2. Remarquons que

$$\begin{aligned}
\sin(x)^\alpha - x^\alpha &\underset{x\to0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^\alpha - x^\alpha \\
&\underset{x\to0}{=} x^\alpha\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^\alpha - x^\alpha \\
&\underset{x\to0}{=} x^\alpha\left(1 - \frac{\alpha x^2}{6} + o(x^2)\right) - x^\alpha \\
&\underset{x\to0}{=} -\frac{\alpha x^{\alpha+2}}{6} + o(x^{\alpha+2})
\end{aligned}$$

Notamment, en prenant $\alpha = -2$,

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$$

Comme (u_n) converge vers 0,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3}$$

3. La série $\sum \frac{1}{3}$ est une série à termes positifs divergente donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3}$$

autrement dit

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3} = +\infty$,

$$\frac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}$$

ou encore

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$$

car (u_n) est positive d'après la première question.

Solution 33

---

1. Supposons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1)$ et que la série $\sum 1$ est une série à termes positifs divergente,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \ell + o\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1\right)$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n\to+\infty}{=} n\ell + o(n)$$

et enfini

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1)$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \ell$$

2. **a.** $f(x) - x \underset{x\to0^+}{\sim} -\lambda x^\alpha$ donc $x \mapsto f(x) - x$ est de même signe que $x \mapsto -\lambda x^\alpha$ au voisinage de 0^+. Ainsi il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x \mapsto f(x) - x$ est négative sur $[0, \varepsilon]$ et ne s'annule qu'en 0.

b. Par hypothèse, f est positive sur $[0, \varepsilon]$. Comme 0 est le seul point fixe de f sur $[0, \varepsilon]$, $x \mapsto f(x) - x$ est de signe constant sur cet intervalle puisqu'elle y est continue. Or $f(x) - x \underset{x\to0^+}{\sim} -\lambda x^\alpha$ donc $x \mapsto f(x) - x$ est négative sur $[0, \varepsilon]$. On en déduit que

$$\forall x \in [0, \varepsilon],\ 0 \le f(x) \le x \le \varepsilon$$

On en déduit alors aisément que (u_n) est à valeurs dans $[0, \varepsilon]$ et décroissante. Elle converge donc d'après le théorème de convergence monotone ar contnuité de f, (u_n) converge vers l'unique point fixe de f sur $[0, \varepsilon]$, à savoir 0.

c. Tout d'abord, $\alpha > 1$ donc $x^{\alpha-1} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$. On peut alors utiliser le développement limité usuel de $(1 + u)^\beta$ lorsque u tend vers 0 :

$$f(x)^{1-\alpha} \underset{x\to0}{=} x^{1-\alpha}\left(1 - \lambda x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1})\right)^{1-\alpha} \underset{x\to0}{=} x^{1-\alpha}\left(1 + (\alpha-1)\lambda x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1})\right) \underset{x\to0}{=} x^{1-\alpha}1 + (\alpha-1)\lambda + o(1)$$

d. Comme (u_n) converge vers 0

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n)^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} = (\alpha-1)\lambda$$

ou encore

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} = (\alpha-1)\lambda$$

D'après la première question

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^{1-\alpha} - u_k^{\alpha} = (\alpha-1)\lambda$$

ou encore

$$u_n^{1-\alpha} - u_0^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} (\alpha-1)\lambda n$$

Or $\lim_{n\to+\infty}(\alpha-1)\lambda n = +\infty$ de sorte que

$$u_n^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} (\alpha-1)\lambda n$$

et enfin

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} ((\alpha-1)\lambda n)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

e. Dans le cas de la fonction $x \mapsto \sin x$, on a $\lambda = \frac{1}{6}$, $\alpha = 3$ donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Dans le cas de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$, on a $\lambda = \frac{1}{2}$, $\alpha = 2$ donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

Solution 34

Remarquons que S_n est la somme partielle de rang n de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$. Puisque $\frac{1}{n^2+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^2}$ et que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$ converge vers un réel C. En notant R_n le reste de rang n de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$, on a $S_n = C - R_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\frac{1}{k^2+\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^2}$, $R_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Une comparaison à une intégrale montre que $R_n \sim \frac{1}{n}$ d'où le résultat annoncé.

Solution 35

1. On propose deux méthodes.
Première méthode. Comme $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la série $\sum \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge. Or

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{k}} = \int_{1}^{n} \frac{dt}{\sqrt{t}} - S_n + 1 = 2\sqrt{n} - S_n - 1$$

donc la suite $(S_n - 2\sqrt{n})$ converge. En notant C sa limite, on a le résultat voulu.
Deuxième méthode. On remarque que

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left(\frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

ou encore

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} + 2\sqrt{n-1}$ converge ce qui permet également de conclure.

2. D'après la question précédente

$$C = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} + 2\sqrt{n-1}$$

donc

$$S_n - 2\sqrt{n} - C = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{k} + 2\sqrt{k-1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) - \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Or

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{8n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

donc

$$2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) - \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n\sqrt{n}}$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

donc

$$2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) - \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Par sommation de relation d'équivalence pour le reste de séries convergentes à termes positifs,

$$S_n - 2\sqrt{n} - C \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Ainsi

$$S_n \underset{n\to+\infty}{=} 2\sqrt{n} + C + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Produit de Cauchy

Solution 36

1. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n+1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k}}{k}\binom{n}{k-1} \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k}}{n+1}\binom{n+1}{k} \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{1}{n+1}\left[\left(\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}\right) - 1 - (-1)^{n+1}\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{1}{n+1}\left[(1-1)^{n+1} - 1 - (-1)^{n+1}\right] \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Puisque $S_1 = 1$, on en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = S_1 + \sum_{k=2}^{n} S_k - S_{k-1} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

2. On remarque que $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. Puisque les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!}$ sont absolument convergentes, on peut affirmer via le théorème sur les produits de Cauchy que

Solution 37

On sait que les séries géométriques $\sum_{n\in\mathbb{N}} a^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b^n$ convergent absolument et ont pour sommes respectives $\frac{1}{1-a}$ et $\frac{1}{1-b}$. On en déduit par produit de Cauchy que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-b}$$

où

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

Familles sommables

Solution 38

On rappelle que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
Supposons qu'il existe une telle application f. Alors $f(\mathbb{Q})$ est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis. En effet, $f(\mathbb{Q}) = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{f(x)\}$. Par ailleurs, $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ donc $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est également au plus dénombrable. Enfin, $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{Q}) \cup f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est au plus dénombrable comme réunion de deux tels ensembles.
On remarque maintenant que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ comme image de l'intervalle $\mathbb{R}$ par une application continue. Mais les intervalles non réduits à un point ne sont pas finis ou dénombrables donc $f(\mathbb{R})$ est un point $\{a\}$. Mais alors $f(\mathbb{Q}) = f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{a\}$ et donc $\{a\} \subset \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$, ce qui est absurde.

Solution 39

Notons A l'ensembles des polynômes unitaires de $\mathbb{Z}[X]$ et A_d l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{Z}[X]$ de degré d. Remarquons que l'ensemble des entiers algébriques est

$$E = \bigcup_{P \in A} P^{-1}(\{0\}) = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} \bigcup_{P \in A_d} P^{-1}(\{0\})$$

Pour tout $P \in A$, l'ensemble $P^{-1}(\{0\})$ est fini. De plus, l'ensemble A_d est dénombrable puisqu'il est en bijection avec $\mathbb{Z}^d$ via l'application

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}^d & \longrightarrow & A_d \\ (a_0, \dots, a_{d-1}) & \longmapsto & X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k \end{array}\right.$$

et que $\mathbb{Z}^d$ est lui-même dénombrable comme produit cartésien fini d'ensembles dénombrables. Ainsi pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{P \in A_d} P^{-1}(\{0\})$ est au plus dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis. Finalement, E est également au plus dénombrable comme union dénombrable de tels ensembles. De plus, E n'est clairement pas fini puisque $\mathbb{Z} \subset E$ (tout entier relatif n est racine du polynôme $X - n$) donc E est dénombrable.

Solution 40

Supposons (i) et montrons (ii). On sait qu'il existe une bijection de A sur $\mathbb{N}$. Cette bijection est a fortiori une injection de A dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}$.
Supposons (ii) et montrons (i). Il existe une injection f de A sur un ensemble dénombrable B. Par définition, il existe une bijection g de B sur $\mathbb{N}$. Alors $g \circ f$ est une injection de A sur $\mathbb{N}$ donc une bijection de A sur $g \circ f(A)$, qui est une partie de $\mathbb{N}$. Ainsi A est dénombrable.
Supposons (i) et montrons (iii). On sait qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur A. Cette bijection est a fortiori une surjection de l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}$ sur A.
Supposons (iii) et montrons (i). Il existe une surjection g d'un ensemble dénombrable B sur A. Par définition, il existe une bijection f de $\mathbb{N}$ sur B. Alors $f \circ g$ est une surjection de $\mathbb{N}$ sur A. Considérons une application qui à tout élément de A associe l'un de ses antécédents par $f \circ g$ (il en existe toujours au moins un par surjectivité de $f \circ g$). Par construction, cette application est une bijection de A sur une partie de $\mathbb{N}$ (l'ensemble des antécédents choisis) de sorte que A est dénombrable.

Solution 41

Considérons $I_n = \left\{\frac{k+1}{k},\ k \in [\![1, n]\!]\right\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $I_n \subset \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[$ et

$$\sum_{x \in I_n} \frac{1}{x^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(k+1)^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

car la série à termes positifs $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n^2}{(n+1)^2}$ diverge grossièrement vers $+\infty$. La famille $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[}$ n'est donc pas sommable.

Solution 42

1. Soit un entier $n \geq 2$. Tout d'abord,
$$n v_n = (n-1) v_{n-1} + u_n$$
donc
$$v_{n-1} = \frac{n}{n-1} v_n - \frac{1}{n-1} u_n$$
Par conséquent,
$$(n+1) v_n^2 - (n-1) v_{n-1}^2 = 2 u_n v_n - \frac{1}{n}\left(u_n^2 + v_n^2\right) \leq 2 u_n v_n$$

2. **a.** Posons $S_n = \sum_{k=1}^n u_k^2$ et $T_n = \sum_{k=1}^n v_k^2$. En convenant que $v_0 = 0$, l'inégalité de la question précédente est encore valide pour $n = 1$. On en déduit que
$$\sum_{k=1}^{n} (k+1) v_k^2 - (k-1) v_{k-1}^2 \leq 2 \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$
ou encore que
$$\sum_{k=1}^{n} v_k^2 + \sum_{k=1}^{n} k v_k^2 - (k-1) v_{k-1}^2 \leq 2 \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

Par télescopage

$$\sum_{k=1}^{n} kv_k^2 - (k-1)v_{k-1}^2 = nv_n^2$$

et par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Finalement,

$$\sum_{k=1}^{n} v_k^2 + nv_n^2 \leq 2\left(\sum_{k=1}^{n} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou encore

$$\mathrm{T}_n + nv_n^2 \leq 2\sqrt{\mathrm{S}_n}\sqrt{\mathrm{T}_n}$$

A fortiori

$$\mathrm{T}_n \leq 2\sqrt{\mathrm{S}_n}\sqrt{\mathrm{T}_n}$$

puis

$$\mathrm{T}_n \leq 4\mathrm{S}_n \leq 4\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$$

La suite (T_n) est croissante et majorée donc elle converge i.e. la série $\sum v_n^2$ converge. En passant à la limite dans ce qui précède,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \leq 4\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$$

b. On peut supposer la suite (u_n) positive sans perte de généralité. On va d'abord montrer que la famille $\left(\frac{u_m u_n}{m+n}\right)_{1\leq m\leq n}$ est sommable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{u_m u_n}{m+n} = u_n \sum_{m=1}^{n} \frac{u_m}{m+n} \leq u_n \sum_{m=1}^{n} \frac{u_m}{n} = u_n v_n$$

Puisque $u_n v_n \leq \frac{1}{2}\left(u_n^2 + v_n^2\right)$, la série $\sum u_n v_n$ converge. D'après le théorème de sommation par paquets, la famille $\left(\frac{u_m u_n}{m+n}\right)_{1\leq m\leq n}$ est sommable. La sous-famille $\left(\frac{u_m u_n}{m+n}\right)_{1\leq m<n}$ est donc également sommable et, par symétrie, la famille $\left(\frac{u_m u_n}{m+n}\right)_{1\leq n<m}$ est aussi sommable. Enfin la série $\sum \frac{u_p^2}{2p}$ converge puisque $\frac{u_p^2}{2p} \leq u_p^2$. Puisque

$$(\mathbb{N}^*)^2 = \left\{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ 1 \leq m < n\right\} \sqcup \left\{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ 1 \leq n < m\right\} \sqcup \{(p,p),\ p \in \mathbb{N}^*\}$$

le théorème de sommation par paquets permet d'affirmer que la famille $\left(\frac{u_m u_n}{m+n}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

Solution 43

---

1. Notons J_n l'intégrale à calculer. Tout d'abord, $\mathrm{J}_0 = 2\pi^2$ et, si $n \neq 0$, on intégre par parties

$$\int_0^{2\pi} te^{-int}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{in}\left[te^{-int}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} e^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{2i\pi}{n}$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\sum_{(n,m)\in\mathrm{I}^2} \frac{a_n b_m}{n+m} &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{(n,m)\in\mathrm{I}^2} a_n b_m \int_0^{2\pi} te^{-i(n+m)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} t\sum_{(n,m)\in\mathrm{I}^2} a_n b_m e^{-int}e^{-imt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} t\left(\sum_{n\in\mathrm{I}} a_n e^{-int}\right)\left(\sum_{m\in\mathrm{I}} b_m e^{-imt}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Posons $f(t) = \sum_{n\in\mathrm{I}} a_n e^{-int}$ et $g(t) = \sum_{m\in\mathrm{I}} b_m e^{-imt}$. Par inégalité, triangulaire,

$$\sum_{(n,m)\in\mathrm{I}^2} \frac{a_n b_m}{n+m} = \left|\sum_{(n,m)\in\mathrm{I}^2} \frac{a_n b_m}{n+m}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{t}\,|f(t)|\right)\left(\sqrt{t}\,|g(t)|\right)\,\mathrm{d}t$$

puis, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{(n,m)\in\mathrm{I}^2} \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\int_0^{2\pi} t\,|f(t)|^2\,\mathrm{d}t \int_0^{2\pi} t\,|g(t)|^2\,\mathrm{d}t}$$

Calculons ensuite

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} t|f(t)|^2\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} tf(t)\overline{f(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} t\left(\sum_{n\in\mathrm{I}} a_n e^{-int}\right)\left(\sum_{m\in\mathrm{I}} a_m e^{imt}\right)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{(n,m)\in\mathrm{I}^2} a_n a_m \int_0^{2\pi} te^{-i(n-m)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{(n,m)\in\mathrm{I}^2} a_n a_m \mathrm{J}_{n-m}
\end{aligned}$$

Or pour $n \neq m$, J_{n-m} est imaginaire pur et l'intégrale qu'on calcule est réelle de sorte que

$$\int_0^{2\pi} t|f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathrm{I}} a_n^2 \mathrm{J}_0 = 2\pi^2 \sum_{n\in\mathrm{I}} a_n^2$$

De la même manière,

$$\int_0^{2\pi} t|g(t)|^2\,\mathrm{d}t = 2\pi^2 \sum_{n\in\mathrm{I}} b_m^2$$

On en déduit le résultat demandé.

3. On peut supposer les suites (a_n) et (b_n) positives sans perte de généralité. Soit K une partie finie de $(\mathbb{N}^*)^2$. Il existe une partie finie I de $\mathbb{N}^*$ telle que $\mathrm{K} \subset \mathrm{I}^2$. Alors

$$\sum_{(n,m)\in\mathrm{K}} \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \pi\sqrt{\sum_{n\in\mathrm{I}} a_n^2 \sum_{n\in\mathrm{I}} b_n^2} \leq \pi\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^2 \sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n^2}$$

La famille $\left(\frac{a_n b_m}{n+m}\right)_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est donc sommable et

$$\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \pi\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^2 \sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n^2}$$

Solution 44

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{mn(m+n+2)}$ converge car $\frac{1}{mn(m+n+2)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Notons alors S_m sa somme.

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_m &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{mn(m+n+2)} \\
&= \frac{1}{m(m+2)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(m+n+2)-n}{n(m+n+2)} \\
&= \frac{1}{m(m+2)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{m+n+2} \\
&= \frac{1}{m(m+2)} \sum_{n=1}^{m+2} \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Notons alors $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ de sorte que $\mathrm{S}_m = \frac{1}{m(m+2)}\mathrm{H}_{m+2}$. A nouveau, la série $\sum_{m\in\mathbb{N}^*} \mathrm{S}_m$ converge car $\mathrm{H}_m \underset{m\to+\infty}{=} \ln(m)$ et donc $\mathrm{S}_m \underset{m\to+\infty}{\sim} \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^{\frac{3}{2}}}\right)$ par exemple. De plus,

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{+\infty} \mathrm{S}_m &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_{m+2}}{m(m+2)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty} \mathrm{H}_{m+2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_m}{m} - \frac{\mathrm{H}_{m+2}}{m+2} + \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{m(m+2)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_m}{m} - \frac{\mathrm{H}_{m+2}}{m+2} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m(m+2)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{H}_1 + \frac{\mathrm{H}_2}{2}\right) + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} - \frac{1}{m+2} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{7}{4}
\end{aligned}
$$

Puisque la famille $\left(\frac{1}{mn(m+n+2)}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est à termes positifs, cette famille est sommable et sa somme vaut $\frac{7}{4}$.

Solution 45

Remarquons que

$$
\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1}
$$

Ainsi pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ est une série télescopique convergente ayant pour somme $\frac{1}{q^2}$. De plus, la série $\sum_q \in \mathbb{N}^* \frac{1}{q^2}$ et a pour somme $\frac{\pi^2}{6}$. Comme la famille $\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs, elle est sommable et a pour somme $\frac{\pi^2}{6}$.

Solution 46

Le membre de droite n'est défini que pour $\alpha > 2$. Remarquons que dans ce cas,

$$
\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{p}{p^\alpha} = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=0}^{p-1} \frac{1}{p^\alpha}
$$

La famille $\left(\frac{1}{p^\alpha}\right)_{0\leq k<p}$ est une famille de réels positifs et

$$
\left\{(p,k) \in \mathbb{N}^2,\ q < p\right\} = \bigsqcup_{p\in\mathbb{N}^*} \{p\} \times [\![0, p-1]\!]
$$

donc, d'après le théorème de sommation par paquets, la famille $\left(\frac{1}{p^\alpha}\right)_{0\leq k<p}$ est donc sommable.

En considérant cette fois que

$$
\left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2,\ q < p\right\} = \bigsqcup_{q\in\mathbb{N}} [\![q+1, +\infty[\![\times\{q\}
$$

ce même théorème permet d'affirmer que

$$
\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}} = \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=q+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha}
$$

Remarque. On aurait aussi pu considérer le théorème sur les séries doubles en posant

$$
u_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{k^\alpha} & \text{si } k > n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
$$

Solution 47

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{z^n}{1-z^n} = z^n \sum_{p=0}^{+\infty} z^{np} = \sum_{p=1}^{+\infty} z^{np}$$

On va alors montrer que la famille $(z^{np})_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} |z|^{np}$ converge et a pour somme $\frac{|z|^n}{1-|z|^n}$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{|z|^n}{1-|z|^n}$ converge également (équivalent ou critère de d'Alembert). On peut alors affirmer que la somme S de cette famille est

$$\mathrm{S} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} z^{np} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$$

Posons maintenant $\mathrm{I}_k = \left\{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ np = k\right\}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Les ensembles I_k sont clairement disjoints et pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(n,p) \in \mathrm{I}_{np}$. Autrement dit, $(\mathbb{N}^*)^2 = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*} \mathrm{I}_k$. Le théorème de sommation par paquets permet d'affirmer que

$$\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{(n,p)\in\mathrm{I}_k} z^{np} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{(n,p)\in\mathrm{I}_k} z^k = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathrm{card}(\mathrm{I}_k) z^k$$

En notant $\mathcal{D}_k$ l'ensemble des diviseurs positifs de k, il est à peu près clair que l'application $(n,p) \in \mathrm{I}_k \mapsto n$ induit une bijection de I_k sur $\mathcal{D}_k$. Ainsi $\mathrm{card}(\mathrm{I}_k) = \mathrm{card}(\mathcal{D}_k) = \tau(k)$. Finalement,

$$\mathrm{S} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \tau(k) z^k$$

Solution 48

Tout d'abord, cette série converge par le critère de d'Alembert par exemple.
Remarquons ensuite que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = z^{2^n} \sum_{p=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}p} = \sum_{p=0}^{+\infty} z^{2^n(2p+1)}$$

La famille $(z^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est évidemment sommable puisque la série géométrique $\sum z^k$ converge absolument et elle a pour somme $\frac{z}{1-z}$. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \{2^n(2p+1),\ p \in \mathbb{N}\}$. L'existence et l'unicité de la décomposition en facteurs premiers montrent que $\mathbb{N}^* = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_n$. D'après le théorème de sommation par paquets,

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{k=1}^{+\infty} z^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{q\in\mathrm{I}_n} z^q = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} z^{2^n(2p+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$$

Solution 49

Posons $\mathrm{I}_p = \left\{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ m+n = p\right\}$ et

$$\mathrm{S}_p = \sum_{(m,n)\in\mathrm{I}_p} \frac{1}{(m+n)^\alpha} = \frac{\mathrm{card}(\mathrm{I}_p)}{p^\alpha} = \frac{p-1}{p^\alpha}$$

D'après le théorème de sommation par paquets, la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si et seulement si la série $\sum \mathrm{S}_p$ converge. Puisque $\frac{p-1}{p^\alpha} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$, la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ i.e. $\alpha > 2$ (comparaison à une série de Riemann).

Solution 50

Première méthode
Considérons $\mathrm{I} = \{(n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ n < k\}$ et montrons que $\left(\frac{1}{k!}\right)_{(n,k)\in\mathrm{I}}$ est sommable. Remarquons que $\mathrm{I} = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*} [\![0,k-1]\!]\times\{k\}$. De plus, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{k!} = \frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$ et la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(k-1)!}$ converge et a pour somme e. D'après le théorème de sommation par paquets, la famille $\left(\frac{1}{k!}\right)_{(n,k)\in\mathrm{I}}$ est sommable et sa somme vaut e. Si on remarque maintenant que $\mathrm{I} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\}\times[\![n+1,+\infty[\![$, le même théorème de sommation par paquets nous dit que $\mathrm{S} = e$.

Deuxième méthode Posons $u_{n,k} = \frac{1}{k!}$ si $n < k$ et $u_{n,k} = 0$ sinon. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n,k}$ converge et a pour somme $\frac{1}{(k-1)!}$ (somme finie de termes non nuls). Ensuite la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(k-1)!}$ converge et a pour somme e. D'après le théorème de Fubini, on peut permuter les sommes.

$$\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} = e$$