Devoir à la maison n°16

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.
Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u$ (n fois).
On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.
Pour deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on dira que la matrice A est **semblable** à la matrice B s'il existe une matrice P de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$. On rappelle que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, si u est un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}'$ et de matrice B dans la base $\mathcal{B}$ alors $\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ (c'est-à-dire, la matrice A est semblable à la matrice B).

Partie I –

1. On notera $\mathrm{A} \sim \mathrm{B}$ pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B.
   Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On pourra désormais dire que les matrices A et B **sont** semblables.

2. Démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de déterminants différents ne sont pas semblables.

3. Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels.
   On considère l'application w de $\operatorname{Ker} u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.

   a. Montrer que $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Ker} u^i$.
   b. En déduire que $\dim(\operatorname{Ker} u^{i+j}) \leq \dim(\operatorname{Ker} u^i) + \dim(\operatorname{Ker} u^j)$.

4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\operatorname{rg} u = 2$.

   a. Montrer que $\dim(\operatorname{Ker} u^2) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question **I.3.b**).
   b. Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.
   c. Ecrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.

5. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\operatorname{rg} u = 1$.

   a. Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.
   b. Justifier l'existence d'un vecteur c de $\operatorname{Ker} u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E.
   c. Ecrire alors la matrice U′ de u et la matrice V′ de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie II –

Soit désormais une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1}.

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

1. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.

2. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

3. On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

4. On suppose dans cette question que $\operatorname{rg} N = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

- **a.** Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire, en utilisant la question **I.4**, une matrice semblable à la matrice M.
- **b.** Calculer M^3 et déterminer $\operatorname{rg} M$.
- **c.** Montrer que les matrices M et N sont semblables.
- **d.** Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

5. On suppose dans cette question que $\operatorname{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.
Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

6. **Exemple** : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

- **a.** Montrer que $\operatorname{Ker}(u - id_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2).
- **b.** Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E, et écrire la matrice de u dans cette base.
- **c.** Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

7. Réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?