Semaine du 12/10 au 16/10

1 Cours

Applications

Définitions Ensembles d'arrivée et de départ, graphe, image.

Composition Définition, associativité, application identité.

Injectivité Définition. Composition et injectivité.

Surjectivité Définition. Composition et surjectivité.

Bijectivité Définition. Bijection réciproque. Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
$f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est bijective si et seulement si il existe $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_\mathrm{F}$ et dans ce cas, $f^{-1} = g$.

Image directe et réciproque Définitions. Image directe et réciproque d'une union, d'une intersection.

Restriction et prolongement Définitions. Bijection induite.

2 Méthodes à maîtriser

- Savoir prouver l'injectivité en pratique : «Soit (x, x') tel que $f(x) = f(x')$» puis montrer que $x = x'$.
- Savoir prouver la surjectivité en pratique : recherche d'un antécédent (résolution d'une équation).
- Savoir prouver la bijectivité en pratique :
  - Existence et unicité d'une solution de l'équation $y = f(x)$ où y est fixé et x est l'inconnue.
  - Déterminer g telle que $g \circ f = \mathrm{Id}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}$.
  - Montrer que f est injective et surjective.
- Automatismes :
  - $y \in f(\mathrm{A}) \iff \exists x \in \mathrm{A},\ y = f(x)$
  - $x \in f^{-1}(\mathrm{B}) \iff f(x) \in \mathrm{B}$

3 Questions de cours

Injectivité. Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est également.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f l'est également.

Surjectivité. Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est également.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g l'est également.

Retour sur le DS n°2. Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$. Montrer que

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{p} = 2^{n-p}\binom{n}{p}$$

Retour sur le DS n°2. On pose $s = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $p = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

1. Montrer que $s = 2p$.
2. En calculant $p\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, déterminer la valeur de p et en déduire celle de s.
3. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.