Fonctions usuelles

1 Fonctions logarithme, exponentielle et puissances

1.1 Fonction logarithme et exponentielle

Définition 1.1 Logarithme

La fonction ln est l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 0.

Proposition 1.1 Propriétés algébriques du logarithme

Le logarithme transforme les produits en sommes :

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \ln xy = \ln x + \ln y$$

et donc les quotients en différences :

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

et les puissances en multiples :

$$\forall (x, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{Z},\ \ln x^n = n \ln x$$

Attention ! Le produit xy peut être strictement positif sans que x et y le soient (ils peuvent être aussi tous deux strictement négatifs). Il ne faut donc surtout pas écrire $\ln xy = \ln x + \ln y$ si on n'est pas sûr que x et y sont strictement positifs. Si xy est strictement positif, c'est que $xy = |xy|$ et on peut écrire sans prendre de risque

$$\ln xy = \ln |x| + \ln |y|$$

Proposition 1.2

La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Définition 1.2 Exponentielle

ln une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On note exp sa bijection réciproque.

Remarque. Le fait que ln et exp soient des bijections réciproques l'une de l'autre signifie que $\ln(\exp(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Proposition 1.3 Propriétés algébriques de l'exponentielle

L'exponentielle transforme les sommes en produits :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$$

et donc les différences en quotients :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \exp(x-y)=\frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

et les multiples en puissances :

$$\forall(x,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z},\ \exp(nx)=\exp(x)^n$$

Proposition 1.4

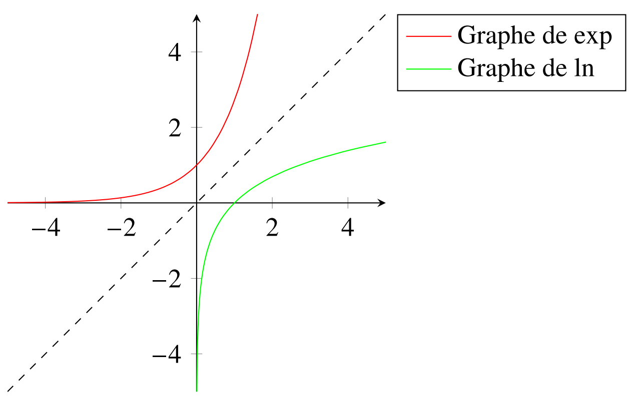
La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\exp'(x)=\exp x$.

Variations de ln **et** exp

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	$+$	
$\exp(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$	$+$	
$\ln(x)$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

Graphes des fonctions ln **et** exp



1.2 Fonctions puissances

Définition 1.3 Puissances entières

- Si $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $a^n=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{ fois}}$.
- Si $a\in\mathbb{R}^*$ et $n\in\mathbb{Z}^*_-$, on pose $a^n=\frac{1}{a^{-n}}$.
- Si $a\in\mathbb{R}^*$, on convient que $a^0=1$.

Remarque. Ainsi, si $a\in\mathbb{R}^*$, a^n est défini pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

Définition 1.4 Puissances quelconques

Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, on pose $a^b = \exp(b \ln a)$.

Attention ! Si a est négatif, on ne peut pas définir de puissances **non entières** de a.

Remarque. Il est important de remarquer que les deux définitions des puissances coïncident.
Autrement dit, si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, $a^n = \exp(n \ln a)$.

On peut alors étendre les propriétés des logarithmes et des exponentielles à des puissances non entières.

Proposition 1.5

- $\forall (x, \alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$
- $\forall (x, \alpha) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x)^\alpha = \exp(\alpha x)$.

Le nombre e

On note $e = \exp(1)$ ou, de manière équivalente, on note e l'unique antécédent de 1 par ln. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \exp(x \ln e) = \exp(x)$. C'est pourquoi dorénavant, on notera e^x et non $\exp(x)$ l'exponentielle d'un réel x.

Proposition 1.6 Propriétés algébriques

Lorsque les expressions suivantes **ont un sens**

$$x^{a+b} = x^a x^b \qquad x^{ab} = (x^a)^b = \left(x^b\right)^a$$
$$(xy)^a = x^a y^a \qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a$$

Exemple 1.1

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\left(2^{2^n}\right)^2 = 2^{2^{n+1}}$.

Définition 1.5 Fonction puissance

On appelle **fonction puissance** toute fonction du type $x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.7 Ensemble de définition

- Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- Si $\alpha \in \mathbb{Z}_-$, $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}\ \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque. Si $\alpha > 0$, on peut prolonger par continuité la fonction $x \mapsto x^\alpha$ par 0 en 0.
Si $\alpha = 0$, on peut prolonger par continuité la fonction $x \mapsto x^\alpha$ par 1 en 0.

Proposition 1.8 Parité

Soit $n \in \mathbb{Z}$. La fonction $x \mapsto x^n$ a la parité de n.

Remarque. Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ n'est ni paire ni impaire puisque son domaine de définition n'est pas symétrique par rapport à 0.

Proposition 1.9 Dérivabilité

- Si $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
- Si $\alpha \in \mathbb{Z}_-$, $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Remarque. Si $\alpha > 1$, on peut prolonger $x \mapsto x^\alpha$ par 0 en 0 et ce prolongement est dérivable en 0 de dérivée nulle.

Attention ! Si l'exposant est une fonction, il ne faut pas dériver n'importe comment. En clair, la dérivée de $x \mapsto x^{f(x)}$ n'est pas $x \mapsto f(x)x^{f(x)-1}$.

Méthode Dériver des fonctions de la forme $x \mapsto f(x^{g(x)})$

L'idée est de se ramener à la forme exponentielle $f(x)^{g(x)} = \exp\left(g(x)\ln f(x)\right)$. On dérive alors comme une composée.

Exercice 1.1

Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée de $x \mapsto x^x$.

Variations et limites : cas des puissances entières

x	$-\infty$		0		$+\infty$
nx^{n-1}		$-$	0	$+$	
x^n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

n entier pair strictement positif

x	$+\infty$		0		$+\infty$
nx^{n-1}		$+$	0	$+$	
x^n	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

n entier impair strictement positif

x	$-\infty$		0		$+\infty$
nx^{n-1}		$+$	$\Vert$	$-$	
x^n	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0

n entier pair strictement négatif

x	$+\infty$		0		$+\infty$
nx^{n-1}		$-$	$\Vert$	$+$	
x^n	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0

n entier impair strictement négatif

Remarque. Vous m'épargnerez le cas $n = 0$...

Remarque.

- Si n est pair strictement positif, $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
- Si n est impair strictement positif, $x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- Si n est pair strictement négatif, $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Si n est impair strictement négatif, $x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^*$.

Variations et limites : cas des puissances non entières

x	0	$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$	‖	$+$
x^α	‖ 0	$\nearrow$ $+\infty$

$\alpha > 0$

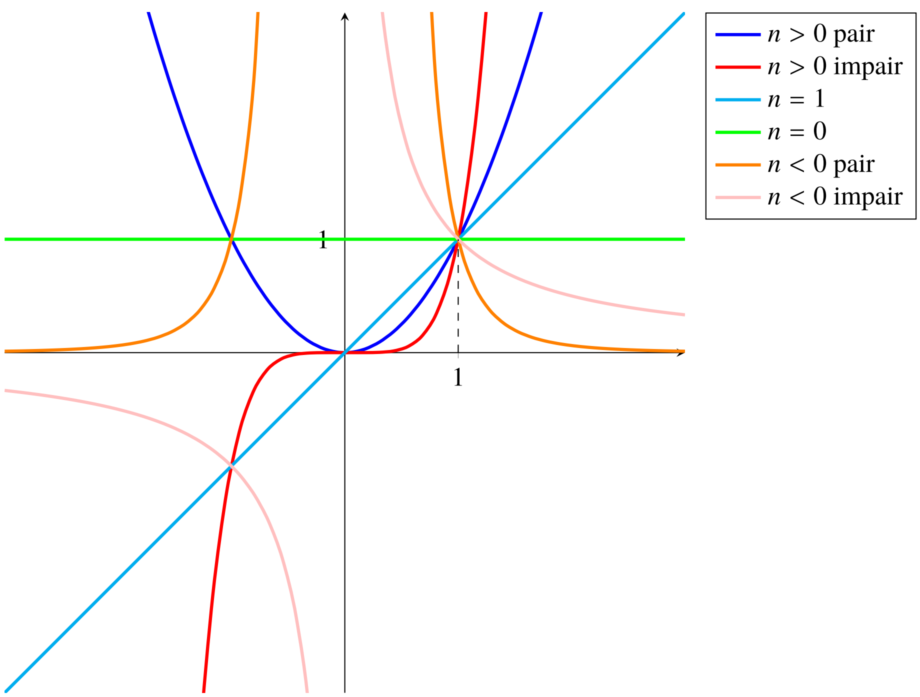
x	0	$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$	‖	$-$
x^n	‖ $+\infty$	$\searrow$ 0

$\alpha < 0$

Remarque. Pour $\alpha \neq 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa bijection réciproque est la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.

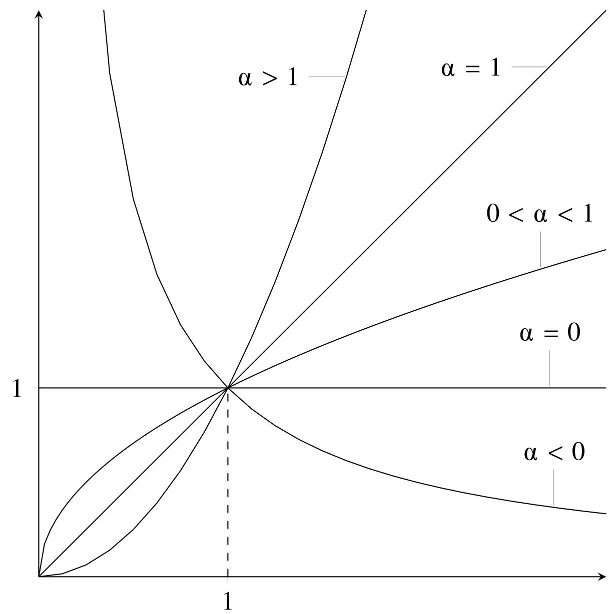
Graphes : cas des puissances entières

Graphe de $x \mapsto x^n$ suivant les valeurs de n



Graphes : cas des puissances non entières

Graphe de $x \mapsto x^{\alpha}$ suivant les valeurs de α



Racines $n^{\text{èmes}}$

Si n est un entier naturel impair, $x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est notée $\sqrt[n]{\ }$ et elle est définie sur $\mathbb{R}$.
Si n est un entier naturel pair non nul, $x \mapsto x^n$ induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Sa bijection réciproque est encore notée $\sqrt[n]{\ }$ et elle est définie sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Attention ! Soit $n \in \mathbb{N}\ \{0, 1\}$.
La notation $x^{\frac{1}{n}}$ n'a aucun sens pour $x \leq 0$.
La notation $\sqrt[n]{x}$ n'a de sens pour $x \leq 0$ que si n est impair.

Attention ! Les racines $n^{\text{èmes}}$ notées $\sqrt[n]{\ }$ n'ont pas grand-chose à voir avec les racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe.
Un nombre complexe – fût-il réel – admet n racines $n^{\text{èmes}}$ complexes (sauf s'il est nul, bien entendu) tandis qu'un nombre réel admet au plus une racine $n^{\text{ème}}$ dans le sens $\sqrt[n]{\ }$.
Des notations du style $\sqrt[n]{z}$ ou $z^{\frac{1}{n}}$ avec z complexe non réel n'ont **AUCUN SENS**.

Remarque. Pour tout $n \in \mathbb{N}\ \{0, 1\}$, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur son ensemble de définition privé de 0.

1.3 Croissances comparées

Lemme 1.1

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

L'idée à retenir est, qu'en $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur la puissance, qui elle-même l'emporte sur le logarithme.

Proposition 1.10 Croissances comparées

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} x^a |\ln x|^b = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} |x|^b |e^{ax} = 0$$

Exercice 1.2

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$.

2 Fonctions circulaires directes et réciproques

2.1 Fonctions circulaires directes

On appelle **fonctions circulaires ou trigonométriques directes** les fonctions sin, cos et tan. On se reportera au chapitre **Trigonométrie** pour les définitions et les différentes formules.

Rappel **Fonctions trigonométriques**

La fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire.
La fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire.
La fonction tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, π-périodique et impaire.

Lemme 2.1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Proposition 2.1 Dérivabilité

Les fonctions cos, sin et tan sont dérivables sur leur ensemble de définition et

$$\sin' = \cos \qquad \cos' = -\sin \qquad \tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$$

Exercice 2.1

Calculer les dérivées successives de sin et cos

Variations et limites

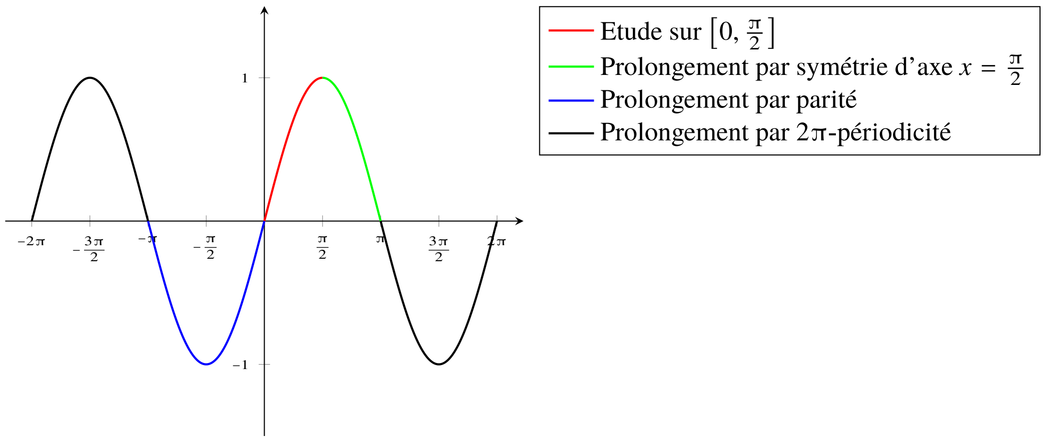
x	$-\pi$		$-\pi/2$		0		$\pi/2$		π
$\sin'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$\sin(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	$-\pi$		$-\pi/2$		0		$\pi/2$		π
$\cos'(x)$	0		$+$		0		$-$		0
$\cos(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

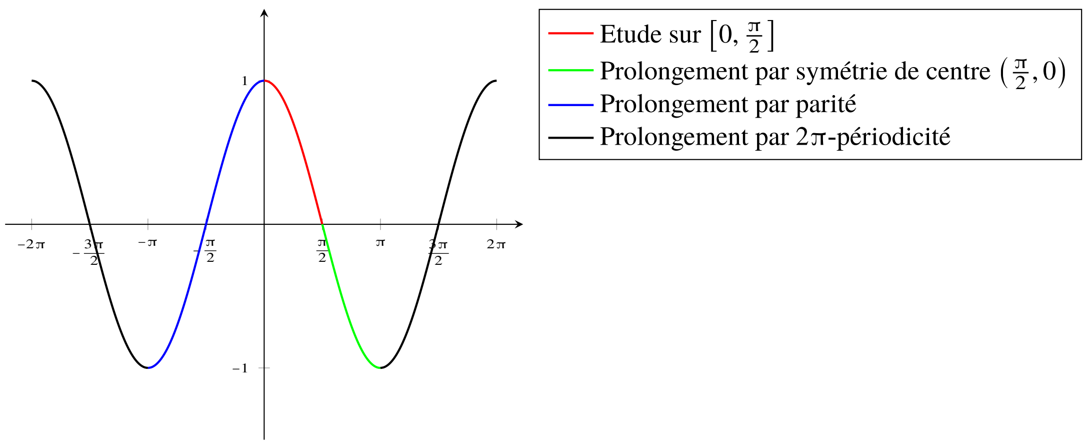
x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$\tan'(x)$			$+$		
$\tan(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

Graphes

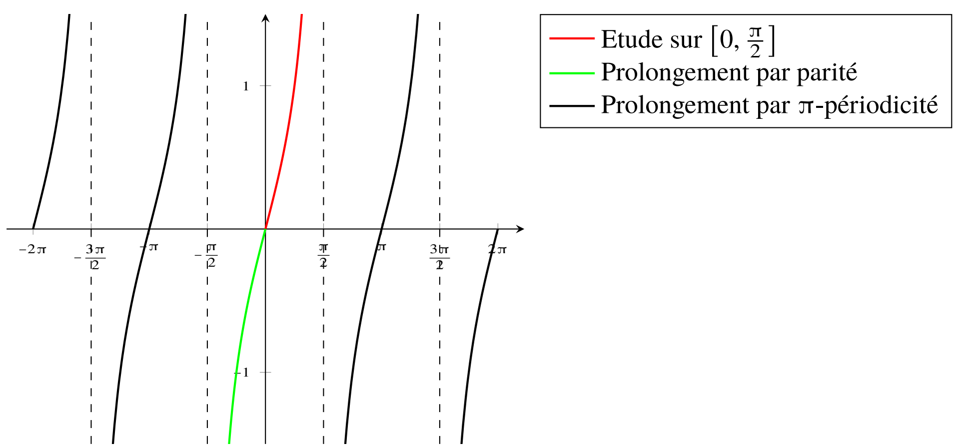
Graphe de sin



Graphe de cos



Graphe de tan



2.2 Fonctions circulaires réciproques

Définition 2.1

- La fonction sin induit une bijection strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1; 1]$. On appelle fonction **arcsinus** sa bijection réciproque notée arcsin.
- La fonction cos induit une bijection strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. On appelle fonction **arccosinus** sa bijection réciproque notée arccos.
- La fonction tan induit une bijection strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. On appelle fonction **arctangente** sa bijection réciproque notée arctan.

Remarque.

- La fonction arcsin est donc une bijection de $[-1, 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Pour $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x$ est l'unique réel de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut x.
- La fonction arccos est donc une bijection de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$. Pour $x \in [-1, 1]$, $\arccos x$ est l'unique réel de $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut x.
- La fonction arctan est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x$ est l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut x.

Proposition 2.2

Soit $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

- $\theta = \arcsin(x) \iff x = \sin(\theta)$ ET $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $\theta = \arccos(x) \iff x = \cos(\theta)$ ET $\theta \in [0, \pi]$
- $\theta = \arctan(x) \iff x = \tan(\theta)$ ET $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Angles usuels

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Ensemble de définition et image

Les fonctions arcsin et arccos sont définies sur $[-1, 1]$ et la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$.
L'image des fonctions arcsin, arccos et arctan sont respectivement $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $[0, \pi]$ et $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Variations et limites

x	-1	0	1
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

x	-1	0	1
$\arccos(x)$	π	$\frac{\pi}{2}$	0

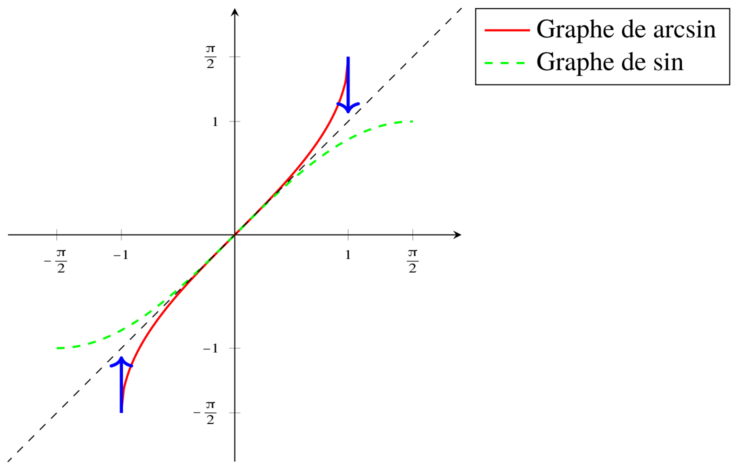
x	$-\infty$	0	∞
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

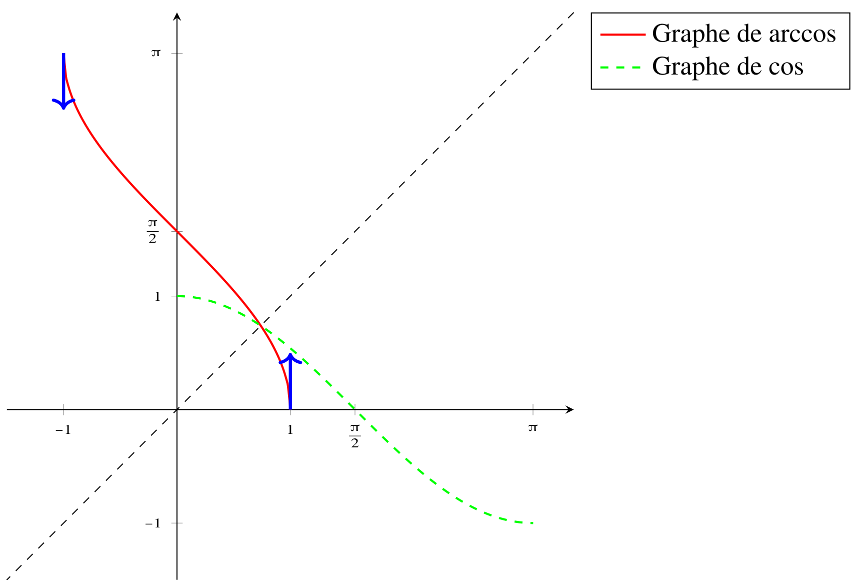
Proposition 2.3 Parité

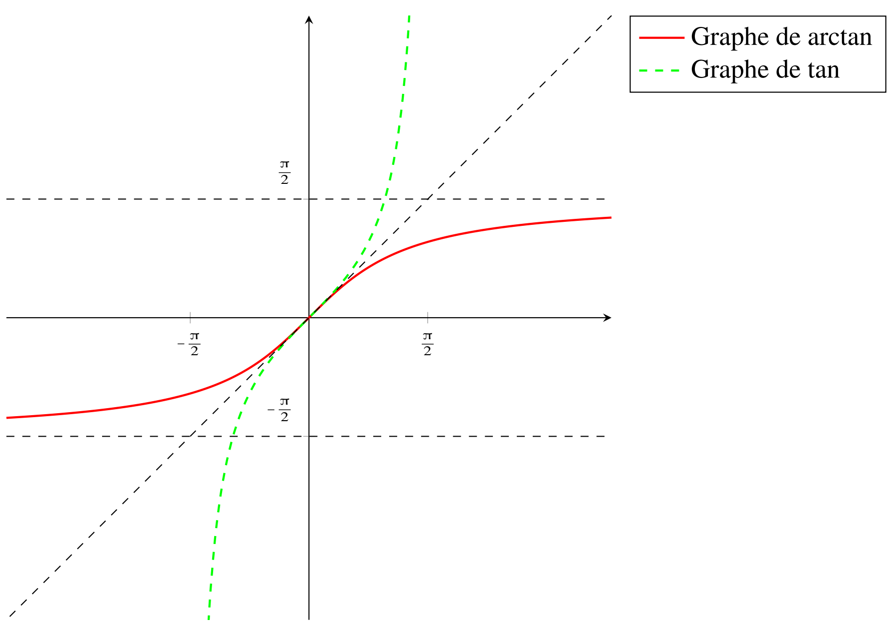
Les fonctions arcsin et arctan sont impaires. La fonction arccos n'est ni paire ni impaire.

Remarque. On a néanmoins pour $x \in [-1, 1]$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Graphes


Graphe de arcsin
Graphe de sin
$\frac{\pi}{2}$
1
$-\frac{\pi}{2}$
-1
-1
1
$\frac{\pi}{2}$
-1
$-\frac{\pi}{2}$


Graphe de arccos
Graphe de cos
π
$\frac{\pi}{2}$
1
-1
1
$\frac{\pi}{2}$
π
-1


Graphe de arctan
Graphe de tan
$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$

Proposition 2.4

$$\forall x \in [-1,1], \sin(\arcsin x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \arcsin(\sin x) = x \iff x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\forall x \in [-1,1], \cos(\arccos x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \arccos(\cos x) = x \iff x \in [0, \pi]$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \arctan(\tan x) = x \iff x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Attention ! $\arcsin \circ \sin \neq \mathrm{Id}$, $\arccos \circ \cos \neq \mathrm{Id}$ et $\arctan \circ \tan \neq \mathrm{Id}$. En effet, arcsin, arccos et arctan sont des bijections réciproques de **restrictions** de sin, cos et tan.

Exemple 2.1

- On a $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ mais $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$ car $\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- On a $\cos -\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ mais $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \neq -\frac{\pi}{3}$ car $-\frac{\pi}{3} \notin [0, \pi]$.
- On a $\tan \frac{5\pi}{4} = 1$ mais $\arctan 1 = \frac{\pi}{4} \neq \frac{5\pi}{4}$ car $\frac{5\pi}{4} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 2.2

Construire les courbes représentatives des fonctions $\arcsin \circ \sin$, $\arccos \circ \cos$ et $\arctan \circ \tan$.

Proposition 2.5

$$\forall x \in [-1,1],\ \sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

Exercice 2.3 ✯ **Une somme d'arcsinus**

Prouver l'égalité suivante :

$$\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = \arcsin\left(\frac{56}{65}\right).$$

Exercice 2.4

Résoudre l'équation $\arcsin(x) = \arccos(2x)$.

Proposition 2.6 Dérivabilité

Les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1,1[$ et la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in]-1,1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[,\ \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ATTENTION ! Les fonctions arcsin et arccos ne sont pas dérivables en -1 et 1.

Proposition 2.7

$$\forall x \in [-1,1], \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \operatorname{signe}(x)\frac{\pi}{2}$$

3 Fonctions hyperboliques

Définition 3.1 Fonctions hyperboliques

On appelle **sinus hyperbolique**, **cosinus hyperbolique** et **tangente hyperbolique** les trois fonctions notées respectivement ch, sh et th telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

REMARQUE. Les formules définissant $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$ sont les analogues des relations d'Euler permettant de définir sin et cos à partir de l'exponentielle complexe. La seule différence est qu'ici, les exponentielles sont réelles.

Formulaire de trigonométrie hyperbolique

- Formule fondamentale :

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

- Formules d'addition :

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \qquad \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$
$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \qquad \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$$
$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b} \qquad \operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

- Formules de duplication

$$\operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2\operatorname{ch}^2 a - 1 = 2\operatorname{sh}^2 a + 1$$
$$\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$$
$$\operatorname{th} 2a = \frac{2\operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}$$

REMARQUE. Seule la première formule est explicitement au programme. On doit néanmoins être capable de retrouver les autres formules facilement.
Les formules de trigonométrie hyperbolique sont évidemment très analogues aux formules de trigonométrie usuelle. Il suffit en fait de se rappeler quand les signes $-$ se transforment en signe $+$ et réciproquement.

Proposition 3.1 Parité

Les fonctions sh et th sont impaires et la fonction ch est paire.

Proposition 3.2 Dérivabilité

Les fonctions sh, ch et th sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\mathrm{sh}' = \mathrm{ch} \qquad \mathrm{ch}' = \mathrm{sh} \qquad \mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}^2}$$

Exercice 3.1

Calculer les dérivées successives de sh et ch.

Variations et limites

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$			$+$		
$\mathrm{sh}(x)$					$+\infty$
			0		
	$-\infty$				

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$				$+\infty$
			1		

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{th}'(x)$			$+$		
$\mathrm{th}(x)$					$+1$
			0		
	-1				

Graphes