Partie entière

EXERCICE 1.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

EXERCICE 2.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor$.

EXERCICE 3.★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

EXERCICE 4.★

On se propose de calculer la partie entière du réel

$$\alpha = \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. En déduire $\lfloor \alpha \rfloor$.

EXERCICE 5.★

Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

EXERCICE 6.★★

Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

EXERCICE 7.★

On définit *la partie fractionnaire* d'un nombre réel x par

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

1. Calculer $\{54,465\}$ et $\{-36,456\}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comparer $\{x\}$ et $\{-x\}$.
3. Prouver que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \longmapsto \{x\}$$

   est périodique et tracer son graphe.

EXERCICE 8.★

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par l'expression

$$\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$$

lorsque x et y décrivent $\mathbb{R}$.

EXERCICE 9.★★

Un classique.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer les entiers naturels k tels que

$$\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = m.$$

2. Soit $n \geqslant 0$. Calculer en fonction de n,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n^2+2n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor.$$

EXERCICE 10.★

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations

1. $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor$;
2. $\lfloor x+3 \rfloor = \lfloor x-1 \rfloor$.

EXERCICE 11.

Tracer le graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto \left\lfloor \left| \frac{3}{2} - x \right| \right\rfloor.$$

Exercice 12.★

Etablir que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leqslant n-1.$$

Bornes supérieures et inférieures

Exercice 13.

Soit f une application *croissante* de $[0,1]$ dans $[0,1]$. On souhaite montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $l \in [0,1]$ tel que $f(l) = l$.

1. On pose $\mathrm{A} = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant x\}$. Montrer que A est non vide et majorée.
2. On note alors $c = \sup \mathrm{A}$. Montrer que $c \in [0,1]$.
3. Montrer que $c \leqslant f(c)$.
4. Montrer que $f(c) \in \mathrm{A}$. Conclure.

Exercice 14.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note s_n la somme des chiffres de l'écriture décimale de n.

1. Montrer que $s_n \leqslant 9(\log_{10} n + 1)$.
2. Montrer que la suite $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)$ est bornée. Quelles sont les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble des valeurs de cette suite ? Sont-elles atteintes ?

Exercice 15.

Soient A et B deux ensembles non vides et f une application bornée de $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ dans $\mathbb{R}$. Comparer $\sup_{x\in\mathrm{A}}\left(\inf_{y\in\mathrm{B}} f(x,y)\right)$ et $\inf_{y\in\mathrm{B}}\left(\sup_{x\in\mathrm{A}} f(x,y)\right)$.

Exercice 16.

Soit f une application bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g(x) = \inf_{y \geqslant x} f(y) \qquad \text{et} \qquad h(x) = \sup_{y \geqslant x} f(y)$$

Déterminer le sens de variation de g et h.

Exercice 17.★

Etudier l'existence puis déterminer le cas échéant les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants :

1. $\mathscr{A} = \left\{1 - \frac{2}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$;
2. $\mathscr{B} = \left\{1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n},\ (m,n) \in (\mathbb{Z}^*)^2\right\}$;
3. $\mathscr{C} = \left\{1 - \frac{1}{n-m},\ (m,n) \in \mathbb{Z}^2, m \neq n\right\}$;
4. $\mathscr{D} = \left\{\frac{pq}{p^2+q^2},\ (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$;
5. $\mathscr{E} = \left\{\frac{2^n}{2^m + 3^{n+m}},\ (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\}$;
6. $\mathscr{F} = \left\{\frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1},\ (n,q) \in \mathbb{N}^2\right\}$;
7. $\mathscr{G} = \left\{\frac{mn}{m^2+mn+n^2},\ (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$.

Exercice 18.★

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ est non vide et bornée et que

$$\sup(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \max\left[\sup(\mathrm{A}), \sup(\mathrm{B})\right]$$

et

$$\inf(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \min\left[\inf(\mathrm{A}), \inf(\mathrm{B})\right].$$

Exercice 19.

Prouver l'existence puis calculer les bornes supérieures et inférieures de l'ensemble

$$\mathrm{A} = \left\{(-1)^n/n \ \mid\ n \geqslant 1\right\}.$$

Exercice 20.★

Soient A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} = \{a+b \mid a \in \mathrm{A},\ b \in \mathrm{B}\}.$$

Montrer que si A et B sont bornées, alors $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ l'est aussi et que

$$\inf(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \inf(\mathrm{A}) + \inf(\mathrm{B})$$

et

$$\sup(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \sup(\mathrm{A}) + \sup(\mathrm{B}).$$

Exercice 21.★★

Pour tout $A \subset \mathbb{R}$ *non vide* et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$d(x,A) = \inf\left\{ |x-a| \;\middle|\; a \in A \right\}.$$

(expression qui se lit : « distance de x à A »)

1. Donner une interprétation *géométrique* de $d(x,A)$ sur la droite réelle.
2. Examiner les cas où $A = [0,1[$ et $x = 1, 2, 1/2$ ou -3.
3. On revient au cas général. Justifier l'existence de $d(x,A)$.
4. La borne inférieure $d(x,A)$ est-elle un plus petit élément ? Illustrer par divers exemples.
5. Caculer $d(x, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Même question avec $d(x,\mathbb{Q})$.
6. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\left| d(x,A) - d(y,A) \right| \leqslant |x-y|.$$

Densité

Exercice 22.

Montrer que $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n}, (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 23.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

On pose $a = f(1)$.

1. Déterminer $f(0)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = an$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = an$.
4. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$.
5. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux suites de rationnels (α_n) et (β_n) convergeant vers x telles que $\alpha_n \leqslant x \leqslant \beta_n$.
   b. On suppose f croissante. Montrer que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6. Déterminer toutes les applications croissantes f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Exercice 24.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? On justifiera à chaque fois sa réponse.

1. Si $\mathscr{A}$ est une partie de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$, alors $\mathbb{R}\setminus\mathscr{A}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ et $\mathscr{A}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors $\mathscr{B}$ est également dense dans $\mathbb{R}$.
4. Il existe des parties de $\mathbb{R}$ bornées et denses dans $\mathbb{R}$.

Exercice 25.

Etablir que $E = \{r^3 \mid r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Irrationnels

EXERCICE 26.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On définit une fonction g par $g(x) = e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ pour $x \in [0,1]$. On définit également une fonction h par $h(x) = g(x) + e^{-x}\frac{x^n}{n!}$.

1. Montrer que g est strictement décroissante sur $[0,1]$.
2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < e$.
3. Montrer que h est strictement croissante sur $[0,1]$.
4. En déduire que $e < \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) + \frac{1}{n!}$.
5. On suppose que e est rationnel. Il existe donc deux entiers naturels p, q tels que $e = \frac{p}{q}$. Montrer par l'absurde que $q > n$.
6. Conclure.

EXERCICE 27.

Soit α et β deux réels non nuls tels que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. On suppose $\alpha > 1$ et α *irrationnel* . On pose

$$A = \{\lfloor n\alpha \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^*\} \text{ et } B = \left\{\lfloor n\beta \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

1. Montrer que $\beta > 1$ et que β est également irrationnel.
2. On suppose qu'il existe un couple $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\lfloor p\alpha \rfloor = \lfloor q\beta \rfloor$. On pose alors $k = \lfloor p\alpha \rfloor = \lfloor q\beta \rfloor$.
   - **a.** Montrer que $p - \frac{1}{\alpha} < \frac{k}{\alpha} < p$ et $q - \frac{1}{\beta} < \frac{k}{\beta} < q$ et aboutir à une contradiction.
   - **b.** En déduire que $A \cap B = \varnothing$.
3. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ qui n'est ni dans A ni dans B.
   - **a.** Montrer qu'il existe un couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\lfloor p\alpha \rfloor < k < \lfloor (p+1)\alpha \rfloor$ et $\lfloor q\beta \rfloor < k < \lfloor (q+1)\beta \rfloor$.
   - **b.** Montrer que $p < \frac{k}{\alpha} < p+1-\frac{1}{\alpha}$ et $q < \frac{k}{\beta} < q+1-\frac{1}{\beta}$ et aboutir à une contradiction.
   - **c.** En déduire que $A \cup B = \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 28.

Soit $n \in \mathbb{N}$ impair tel que $n \geqslant 3$. On pose $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{n}}$. On souhaite montrer que $\frac{\varphi}{\pi}$ est irrationnel.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $A_k = \left(\sqrt{n}\right)^k \cos k\varphi$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_{k+1} + nA_{k-1} = 2A_k$.
2. En déduire que les A_k sont des entiers.
3. Montrer qu'aucun des A_k n'est divisible par n.
4. Conclure en raisonnant par l'absurde.

EXERCICE 29.

Prouver que le nombre $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

EXERCICE 30.☆

Le réel $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est-il rationnel ?

EXERCICE 31.

Que dire de $x + y$ et $x\,y$ dans les quatre cas suivants ?

1. $x, y \in \mathbb{Q}$;
2. $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
3. $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
4. $y \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

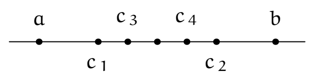
EXERCICE 32.☆

Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n}$ est rationnel *si et seulement si* n est un carré parfait (ie de la forme m^2 avec $m \in \mathbb{N}$).

Intervalles

EXERCICE 33.

Soient $a \leqslant b$. Exprimer en fonction de a et b les réels c_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, représentés ci-dessous :



EXERCICE 34.

Prouver l'égalité

$$\bigcup_{n\geqslant 1} \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[=]0,1[\cup]1,2[.$$

Relations binaires

EXERCICE 35.

Soit φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tous réels a, b on pose

$$a \leqslant_\varphi b \iff \varphi(b)-\varphi(a) \geqslant |b-a|.$$

1. Montrer que $\leqslant_\varphi$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que cet ordre est total si et seulement si pour tous réels a, b on a $|\varphi(b)-\varphi(a)| \geqslant |b-a|$.
3. Quel ordre obtient on si $\varphi = \mathrm{I}d_{\mathbb{R}}$?

EXERCICE 36.

Soit X un ensemble de cardinal supérieur à 1. On munit $\mathscr{P}(\mathrm{X})$ de l'ordre $\subset$. On note $\mathrm{E} \subset \mathscr{P}(\mathrm{X})$ l'ensemble des singletons de E.

1. E possède-t-il un plus grand élément ?
2. E possède-t-il une borne supérieure ?

EXERCICE 37.

On définit une relation binaire sur $\mathbb{N}^2$ par

$$x \preccurlyeq y \quad \textit{si et seulement si} \quad \left(\begin{array}{c} x_1 < y_1 \\ \text{ou} \\ x_1 = y_1 \ \text{ et } \ x_2 \leqslant y_2 \end{array}\right)$$

où $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$

1. Prouver que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$.
2. L'ordre est-il total ?
3. On pose $\mathrm{A} = \left\{(p, p)\ ,\ p \in \mathbb{N}\right\}$ et

$$\mathrm{B} = \left\{(2, 10^p)\ ,\ p \in \mathbb{N}\right\}.$$

Les parties A et B de $\left(\mathbb{N}^2, \preccurlyeq\right)$ sont-elles majorées ? Possèdent-elles un plus grand élément ? Une borne supérieure ?

EXERCICE 38.

Soit E un ensemble.

1. Montrer que la relation d'inclusion notée $\subset$ est un ordre sur $\mathscr{P}(\mathrm{E})$.
2. L'ordre est-il total ?
3. On pose pour tout $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{P}(\mathrm{E})^2$,

$$\sup(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sup(\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}) \ \text{ et } \ \inf(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \inf(\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}).$$

   a. Justifier ces définitions. On exprimera $\sup(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ et $\inf(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ en fonction des sous-ensembles A et B à l'aide des symboles $\cup$ et $\cap$.
   b. Montrer plus généralement que toute partie non vide $\mathscr{F}$ de $(\mathscr{P}(\mathrm{E}), \subset)$ admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on explicitera à l'aide de $\mathscr{F}$ en utilisant les symboles $\cap$ et $\cup$.

EXERCICE 39.

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathrm{E}$, on appelle classe d'équivalence de x l'ensemble $\mathrm{C}(x) = \{y \in \mathrm{E} \mid x \mathscr{R} y\}$. Montrer que les classes d'équivalences forment une partition de E.

Exercice 40.

1. Montrer que la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$x \mathscr{R} y \iff xe^y = ye^x$$
est une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Quel est le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de x ?

Exercice 41.

On définit une relation binaire $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{C}$ par
$$z \mathscr{R} z' \iff |z| = |z'|$$
Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence et décrire géométriquement les classes d'équivalence.

Exercice 42.

On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $\mathscr{R}$ par

$x \mathscr{R} y$ *si et seulement si* $x + y$ est pair.

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer les classes d'équivalence.

Exercice 43.

On définit la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{R}$ par
$$x \mathscr{R} y \iff x^2 - y^2 = x - y$$
Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer les cardinaux des classes d'équivalence.

Exercice 44.

Soit E un ensemble. On rappelle que E^E est l'ensemble des applications de E dans E. Si f et g sont deux éléments de E^E, on dira que f est conjuguée à g s'il existe une bijection φ de E dans E telle que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$. On notera alors $f \sim g$.

1. **a.** Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E^E.
   b. Quelle est la classe d'équivalence de Id_E ?
   c. Quelle est la classe d'équivalence d'une application constante ?
2. On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}$.
   a. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Les applications $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto ax^2$ sont-elles conjuguées ?
   b. Les applications sin et cos sont-elles conjuguées ?

Exercice 45.

On définit une relation binaire $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ par
$$(x, y) \mathscr{R} (x', y') \iff |x' - x| \leqslant y' - y$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?
2. On pose $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Montrer que $\sup A = (0, \sqrt{2})$.

Exercice 46.

Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles du plan, de centres respectifs O, O′ et de rayons respectifs R et R′. On dit que $\mathscr{C}$ est inférieur à $\mathscr{C}'$ si $OO' \leqslant R' - R$. On note alors $\mathscr{C} \leqslant \mathscr{C}'$.
Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre dans l'ensemble des cercles du plan.

Exercice 47.

Dans $\mathbb{N}^*$, on considère la relation $\mathscr{R}$ suivante :
$$p \mathscr{R} q \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad q = p^n$$

1. Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?
2. La partie $\{2, 3\}$ est-elle majorée ?

Exercice 48.

Soient E un ensemble, $(F, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $f : E \to F$ une application injective. On définit dans E la relation $\mathscr{R}$ par $x \mathscr{R} y \iff f(x) \leqslant f(y)$. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre sur E.