

SEMAINE DU 07/01 AU 11/01

1 Cours

Suites numériques

Généralités Définition d'une suite. Modes de définition : explicite ou par récurrence. Vocabulaire : suites constantes, stationnaires, majorées, minorées bornées, croissantes, décroissantes, monotones. Suites classiques : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2.

Limite d'une suite Définition. Unicité. Vocabulaire : convergence et divergence. Toute suite convergente est bornée. Toute suite de limite strictement positive est strictement positive à partir d'un certain rang.

Théorèmes d'existence de limites Opérations sur les limites. Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration. Théorème de convergence monotone. Suites adjacentes : définition et convergence.

Comparaison asymptotique Comparaison des suites de référence : logarithme, puissance, exponentielle, factorielle. Formule de Stirling. Deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang. Comportement asymptotique de suites définies implicitement.

Suites récurrentes d'ordre un Méthode d'étude de telles suites récurrentes.

Suites extraites Définition. Si une suite admet une limite, alors toute suite extraite admet la même limite. Si les suites des termes de rangs pairs et de rangs impairs admettent la même limite, alors la suite admet également cette limite. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Suites complexes Suite bornée. Limite d'une suite complexe. Une suite complexe converge **si et seulement si** ses parties réelle et imaginaire convergent. Convergence d'une suite géométrique.

2 Méthodes à maîtriser

- ▶ On ne parle de la limite d'une suite qu'**après** avoir justifié son **existence**.
 - Certains théorèmes donnent l'**existence** et la **valeur** de la limite : opérations, encadrement, minoration, majoration.
 - D'autres ne donnent que l'**existence** de la limite : théorème de convergence monotone ou théorème sur les suites adjacentes qui en est une conséquence quasi directe.
- ▶ On ne passe pas à la limite «par morceaux» : quand on «passe à la limite» une expression dépendant d'un entier n , **tous** les n tendent vers l'infini **en même temps**.
- ▶ La limite d'une suite ne peut pas dépendre de l'indice de la suite !
- ▶ Déterminer le sens de variation d'une suite :
 - signe de $u_{n+1} - u_n$ (adapté aux sommes) ;
 - position de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1 (adapté aux produits) si les u_n sont **tous strictement positifs** (mais on peut évidemment adapter si on a compris comment fonctionne ce critère).
- ▶ Déterminer le terme général d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 via l'équation caractéristique.
- ▶ Montrer qu'une suite monotone converge ou diverge (raisonnement par l'absurde éventuel pour le cas de divergence).
- ▶ Montrer que deux suites sont adjacentes.
- ▶ Obtenir successivement les termes d'un développement asymptotique d'une suite définie implicitement.
- ▶ Étudier une suite récurrente d'ordre un.

3 Questions de cours

Des questions de cours volontairement courtes mais balayant une partie des chapitres vus jusqu'à maintenant. Vu la brièveté des questions, l'examineur pourra demander de répondre à **plusieurs** de ces questions.

- Rappeler la formule du binôme de Newton (développement de $(a+b)^n$) et la formule de Bernoulli (factorisation de $a^n - b^n$).
- Prouver les différentes relations sur les coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \qquad k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

- Calculer une somme **double** au choix de l'examineur.
- Résoudre dans \mathbb{C} une équation du type $z^n = a$ ($n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$) et une équation du type $e^z = a$ ($a \in \mathbb{C}^*$) au choix de l'examineur.
- Montrer qu'une composée de surjections est une surjection et qu'une composée d'injections est une injection.
- Résoudre une équation du second degré à coefficients complexes au choix de l'examineur.
- Résoudre une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants au choix de l'examineur.
- Déterminer le terme général d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 au choix de l'examineur.
- Rappeler les développements limités en 0 de
 - $x \mapsto \ln(1+x)$, \exp , $x \mapsto (1+x)^\alpha$ à l'ordre n ;
 - \cos et ch à l'ordre $2n$;
 - \sin , sh et \arctan à l'ordre $2n+1$.
- Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de \tan au voisinage de 0.
- Citer le théorème fondamental de l'analyse.
Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} . Montrer que l'application $g: x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)f(t) \, dt$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée seconde.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite de terme général $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.
- Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.