Devoir surveillé n°10

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – E3A 2015 PC Maths 2

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre. Dans tout le problème, on note tan la fonction tangente.

Etant donnés un entier naturel $n \geq 1$ et une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert I, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur I. La notation $f^{(0)}$ désigne f.

Partie IA

1 Quelle est la période de la fonction tan ?

2 Représenter la fonction tan sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

3 Démontrer l'existence d'une suite de polynômes $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n, $\tan^{(n)}$, dérivée n-ième de la fonction tan, vérifie :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n)}(x) = \mathrm{T}_n(\tan(x))$$

On explicitera une relation de récurrence vérifiée par les polynômes T_n et T_{n+1}.

4 Expliciter les polynômes T_1, T_2, T_3.

5 Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les coefficients du polynôme T_n sont des entiers naturels. Quel est le degré du polynôme T_n ?

6 Justifier qu'il existe une suite de nombres entiers naturels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{t_j}{(2j+1)!} x^{2j+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \mathrm{T}_{2n+2}(\tan(t))\,\mathrm{d}t$$

On citera précisément le théorème utilisé.

Partie IB

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in \mathrm{I}$ et symétrique par rapport à 0. Soit f une fonction de la variable réelle x de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. Pour tout entier naturel non nul n, on note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième et R_n la fonction définie pour $x \in \mathrm{I}$ par :

$$\mathrm{R}_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

On suppose que f est impaire et que pour tout entier naturel n non nul et tout nombre réel x dans I tel que $x \geq 0$, $f^{(n)}(x) \geq 0$.

7 Soit $x \in \mathrm{I}$. Pour tout entier naturel non nul n, justifier l'égalité :

$$\mathrm{R}_n(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathrm{R}_{n+1}(x)$$

8 Soit $b \in \mathrm{I}$ tel que $b > 0$.

8.a Démontrer que la suite $(\mathrm{R}_n(b))_{n\geq 1}$ est convergente.

8.b Soient $x \in [0, b]$ et n un entier naturel non nul.

8.b.i Justifier l'égalité :

$$\mathrm{R}_n(x) = \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(tx)(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

8.b.ii En déduire que :

$$0 \leq \mathrm{R}_n(x) \leq \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

8.b.iii Démontrer que :

$$\mathrm{R}_n(x) \leq \left(\frac{x}{b}\right)^n \mathrm{R}_n(b)$$

8.c En déduire que pour tout x dans $]-b, b[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

On justifiera précisément la convergence de la série.

9 La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant été définie dans la question **6**, démontrer que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

10 Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t_n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$? Justifier votre réponse.

Partie IIA

Soit n un entier naturel ≥ 2. On note $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé par l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré $\leq n$. Pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on note P′ son polynôme dérivé.

Pour tout P dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on note $\psi_n(\mathrm{P})$ le polynôme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi_n(\mathrm{P})(x) = \int_x^{x+1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$$

11 Calculer $\psi_n(\mathrm{X}^i)$, pour $i \in \{0, \dots, n\}$

12 Démontrer que ψ_n, l'application qui associe à P dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\psi_n(\mathrm{P})$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

13 Ecrire la matrice de ψ_n dans la base $(1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^n)$.

14 Démontrer que ψ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

15 L'endomorphisme ψ_n est-il diagonalisable ? Justifier la réponse.

16 Soit P dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Démontrer que $\psi_n(\mathrm{P})'$ le polynôme dérivé du polynôme $\psi_n(\mathrm{P})$ vérifie $\psi_n(\mathrm{P})' = \psi_n(\mathrm{P}')$.

Partie IIB

17 Démontrer l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que :

- $S_0 = 1$;
- $\forall k \in \mathbb{N},\ S'_{k+1} = (k+1)S_k$;
- $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^1 S_k(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

18 Expliciter les polynômes S_1, S_2 et S_3.

19 Pour $k \in \mathbb{N}$, démontrer que S_k est un polynôme unitaire de degré k.

20 Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$, démontrer l'égalité $S_k(0) = S_k(1)$.

21 Soit $m \in \mathbb{N}$. Démontrer que S_m vérifie :

$$S_m(1-X) = (-1)^m S_m(X)$$

On pourra utiliser l'unicité de la suite définie par les conditions de la question **17**.

22 Pour tout entier naturel $k \leq n$, démontrer que S_k est l'unique polynôme dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\psi_n(S_k)(X) = X^k$.

Dans toute la suite, on note $\sigma_k = S_k(0)$, pour tout entier naturel $k \leq n$. Ainsi $\sigma_0 = 1$.

23 Expliciter les valeurs de σ_1, σ_2 et σ_3.

24 Démontrer que $\sigma_k = 0$, pour tout entier naturel impair k tel que $k \geq 3$.

25 Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer l'égalité :

$$S_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma_k X^{n-k}$$

26 En déduire que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \sigma_k = 0$$

27 Expliciter un programme en Python qui permet de calculer σ_{50}.

Partie III

Dans cette partie, on admet que la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sigma_n}{n!} z^n$ possède un rayon de convergence $R > 0$. On note D son disque ouvert de convergence et on pose :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{n!} z^n$$

28 Démontrer que pour tout z dans D, $e^z S(z) = z + S(z)$.

29 Soit la fonction T définie par :

$$T(z) = \begin{cases} \dfrac{z(e^{2iz}+1)}{e^{2iz}-1} & \text{si } 0 < |z| < \pi \\ -i & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Démontrer qu'il existe un nombre réel $\rho \in]0, R]$, tel que T admet un développement en série entière sur le disque de centre 0 et de rayon ρ. Exprimer les coefficients de ce développement en série entière en fonction de $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

30 En utilisant l'égalité (qu'on justifiera)

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\},\ i\tan x = \frac{2(e^{4ix}+1)}{e^{4ix}-1} - \frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1}$$

déterminer pour tout entier naturel n, une expression de t_n en fonction de σ_n.