Devoir à la maison n° 7

Problème 1 —

Dans tout ce problème, le mot *entier* désignera un entier naturel supérieur ou égal à 1 et le mot *ensemble* désignera un ensemble de tels entiers.

Partie I –

Pour un ensemble A et un entier n, on définit :

- le nombre $\nu_n(A)$ d'éléments de A compris entre 1 et n i.e. $\nu_n(A) = \operatorname{card}(A \cap [\![1, n]\!])$;
- la proportion $\delta_n(A)$ d'entiers de A parmi ceux compris entre 1 et n i.e. $\delta_n(A) = \dfrac{\nu_n(A)}{n}$.

La limite de la suite $(\delta_n(A))$, si elle existe, est appelée *densité* de A dans B et est notée $\delta(A)$.

1. Déterminer, si elles existent les densités de

a. $\mathbb{N}^*$;

b. d'un ensemble fini E ;

c. de l'ensemble $2\mathbb{N}$ des entiers pairs ;

d. de l'ensemble C des carrés d'entiers ;

e. de $A = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}}]\!]2^{2k}, 2^{2k+1}]\!]$;

f. de l'ensemble D des entiers dont l'écriture décimale ne comporte pas de 0.

2. Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite strictement croissante d'entiers et $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

a. Que vaut $\nu_{a_n}(A)$?

b. Montrer que si A possède une densité, alors $\delta(A)$ est la limite de la suite $\left(\dfrac{n}{a_n}\right)$.

c. Montrer que $a_{\nu_n(A)} \leqslant n < a_{\nu_n(A)+1}$.

d. Montrer que si la suite $\left(\dfrac{n}{a_n}\right)$ possède une limite l, alors $\delta(A) = l$.

3. **a.** Soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la densité de l'ensemble A des entiers congrus à un entier p modulo q.

b. Soit α un réel supérieur ou égal à 1. Déterminer la densité de $A = \{\lfloor n\alpha \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Partie II –

1. Soient A et B deux ensembles. Montrer que si trois des quatre ensembles A, B, $A \cup B$ et $A \cap B$ ont une densité, alors le quatrième également et qu'alors

$$\delta(A) + \delta(B) = \delta(A \cup B) + \delta(A \cap B)$$

a. Que dire dans le cas où A et B sont deux ensembles disjoints possédant une densité ?

b. Si A possède une densité, montrer que $\overline{A} = \mathbb{N}^* \setminus A$ possède également une densité. Que vaut celle-ci ?

c. On dit qu'un ensemble est *négligeable* s'il possède une densité nulle. Que dire d'une partie d'un ensemble négligeable ?

d. Soit A un ensemble de densité δ et B un ensemble négligeable. Que dire de $A \cup B$?

Partie III –

Soit B un ensemble infini dont les éléments sont rangés en une suite strictement croissante $(b_n)_{n \geqslant 1}$. On appelle *densité relative* d'un ensemble A dans B la limite, si elle existe, de la suite de terme général

$$\delta_n(A|B) = \frac{\operatorname{card}(A \cap \{b_k, 1 \leqslant k \leqslant n\})}{n}$$

On note alors cette densité relative $\delta(A|B)$.

1. On se propose tout d'abord d'établir le lemme suivant. Soit (u_n) une suite réelle et (p_n) une suite d'entiers divergeant vers $+\infty$ vérifiant $p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant p_n + 1$. Montrer que (u_n) est convergente *si et seulement si* (u_{p_n}) l'est et que dans ce cas, elles ont la même limite.

2. Soient A et B deux ensembles tels que $A \cap B$ et B possèdent une densité avec B non négligeable. Montrer que pour tout n suffisamment grand, $\delta_n(A|B) = \delta_{\nu_n(B)}(A|B)\delta_n(B)$. En déduire que A possède une densité relative dans B et que $\delta(A|B) = \dfrac{\delta(A \cap B)}{\delta(B)}$.

3. On dit que deux ensembles A et B sont *indépendants* si A, B et $A \cap B$ possèdent une densité et si $\delta(A \cap B) = \delta(A)\delta(B)$.

a. Montrer qu'un ensemble négligeable est indépendant de tout ensemble ayant une densité.

b. Soient A et B deux ensembles possédant une densité non nulle. Montrer que A et B sont indépendants *si et seulement si* A possède une densité relative dans B et $\delta(A|B) = \delta(A)$.

4. Pour un entier p, on note M_p l'ensemble des entiers multiples de p. Étudier l'indépendance de M_p et M_q pour des entiers p et q.

5. Soient A et B deux ensembles infinis dont les éléments sont rangés en des suites strictement croissantes $(a_n)_{n \geqslant 1}$ et $(b_n)_{n \geqslant 1}$. On note $A_B = \{a_{b_n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que si A et B ont des densité, alors A_B également et que, dans ce cas, $\delta(A_B) = \delta(A)\delta(B)$.

Partie IV –

On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $(p_n)_{n \geqslant 1}$ la suite strictement croissante formée de ceux-ci. On note A_k l'ensemble des multiples de p_k pour $k \geqslant 1$.

1. Soit $k \geqslant 1$. Justifier que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i}$ possède une densité P_k et que $P_k = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

2. Montrer que $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} P_k = 0$.

3. En remarquant que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i}$ contient tous les nombres premiers à partir de p_{k+1}, justifier que $\displaystyle\limsup_{n \to +\infty} \delta_n(\mathbb{P}) \leqslant P_k$.

4. En déduire que $\mathbb{P}$ est de densité nulle.