Devoir surveillé n°1 : corrigé

Solution 1.

1. Une récurrence évidente montrer que $u_n = 2^{3^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est croissante. Elle converge donc ou diverge vers $+\infty$. Supposons qu'elle converge vers une limite ℓ. Alors, en passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = u_n + u_n^2$, on obtiendrait $\ell = \ell + \ell^2$ et donc $\ell = 0$. Or (u_n) est croissante et $u_0 = 1$ donc $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite, $\ell \geqslant 1$, ce qui contredit $\ell = 0$. La suite (u_n) ne converge donc pas. Etant croissante, elle diverge vers $+\infty$.

3. On utilise la quantité conjuguée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$
Le dénominateur tend clairement vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi la limite de (u_n) est nulle.

4. Il s'agit de la somme des termes d'une suite arithmétique. Le nombre de termes vaut n, le premier terme est 1 et le dernier terme est $2n-1$. On en déduit que
$$S_n = \frac{(1 + (2n-1))n}{2} = n^2$$

5. Il s'agit cette fois de la somme des termes d'une suite géométrique. Le premier terme est 9, le nombre de termes est $n-1$ et la raison est 3 donc
$$S_n = 9 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{3-1} = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} - 9\right)$$

6. Rien de plus simple.
$$z = \overline{\left(\frac{3-4i}{-1+2i}\right)} = \frac{\overline{3-4i}}{\overline{-1+2i}} = \frac{3+4i}{-1-2i} = -\frac{3+4i}{1+2i} = -\frac{(3+4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = -\frac{11-2i}{5} = -\frac{11}{5} + \frac{2}{5}i$$

7. Tout d'abord, $|z| = \sqrt{2+6} = 2\sqrt{2}$. Ensuite
$$z = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

8. C'est du cours.
$$\begin{aligned}
&\sin(x) = \sin(3x)\\
\iff\ & 3x \equiv x[2\pi] \text{ ou } 3x \equiv \pi - x[2\pi]\\
\iff\ & 2x \equiv 0[2\pi] \text{ ou } 4x \equiv \pi[2\pi]\\
\iff\ & x \equiv 0[\pi] \text{ ou } x \equiv \pi/4[\pi/2]
\end{aligned}$$
L'ensemble des solutions de (E) est donc $\pi\mathbb{Z} \cup \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)$.

9.
$$\begin{aligned}
&\frac{3-2x}{3-x} \leqslant \frac{2-3x}{2-x}\\
\iff\ & \frac{2x-3}{x-3} \leqslant \frac{3x-2}{x-2}\\
\iff\ & \frac{2x-3}{x-3} - \frac{3x-2}{x-2} \leqslant 0\\
\iff\ & \frac{(2x-3)(x-2) - (3x-2)(x-3)}{(x-3)(x-2)} \leqslant 0\\
\iff\ & \frac{(2x-3)(x-2) - (3x-2)(x-3)}{(x-3)(x-2)} \leqslant 0\\
\iff\ & -\frac{x(x-4)}{(x-2)(x-3)} \leqslant 0\\
\iff\ & \frac{x(x-4)}{(x-2)(x-3)} \geqslant 0
\end{aligned}$$

A l'aide d'un tableau de signes, on trouve que l'ensemble des solutions de (I) est $]-\infty,0]\cup]2,3[\cup[4,+\infty[$.

10. Puisque les deux membres sont positifs, l'inéquation

$$|x+1| \leqslant |2x-5|$$

équivaut à

$$|x+1|^2 \leqslant |2x-5|^2$$

ou encore

$$0 \leqslant (2x-5)^2-(x+1)^2$$

Via une identité remarquable, ceci équivaut à

$$0 \leqslant ((2x-5)+(x+1))((2x-5)-(x+1))$$

et finalement à

$$0 \leqslant (3x-4)(x-6)$$

L'ensemble des solutions de (I) est donc

$$\left]-\infty,\frac{4}{3}\right]\cup[6,+\infty[$$

11. f est clairement dérivable en tant que produit de fonctions dérivables et pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=2(2x^2-6x-27)e^{2x}+(4x-6)e^{2x}=4(x^2-2x-15)e^{2x}=4(x-5)(x+3)e^{2x}$$

On en déduit que $f'\geqslant 0$ sur $]-\infty,-3]\cup[5,+\infty[$ et $f'\leqslant 0$ sur $[-3,5]$. Ainsi f est croissante sur $]-\infty,-5]$ et sur $[3,+\infty[$ et décroissante sur $[-5,3]$.

12. On étudie la fonction $f: x\in\mathbb{R}\mapsto 4x^3-30x^2+72x$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=12x^2-60x+72=12(x^2-5x+6)=12(x-2)(x-3)$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $]-\infty,2]$, strictement décroissante sur $[2,3]$ et strictement croissante sur $[3,+\infty[$. Par ailleurs, $\lim_{-\infty} f=-\infty<55$, $f(2)=56>55$, $f(3)=54<55$ et $\lim_{+\infty} f=+\infty>55$. Comme f est également continue sur $\mathbb{R}$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur chacun des trois intervalles précédents montre que 55 admet exactement trois antécédents par f. L'équation (E) possède donc exactement trois solutions.

13. Il suffit de constater que $t\mapsto \ln(e^t+1)$ est une primitive de $t\mapsto \frac{e^t}{e^t+1}$ sur $[0,1]$. Ainsi

$$\mathrm{I}=\left[\ln(e^t+1)\right]_0^1=\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

14. On vérifie aisément que $x\mapsto \frac{1}{3}e^{\sin(3x)}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

15. On sait que $\lim_{u\to0}\frac{e^u-1}{u}=1$ donc $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$. De même, $\lim_{u}\to 0\frac{\sin u}{u}=1$ donc $\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{3x}=1$. Or pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$,

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{\sin(3x)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin(3x)}$$

On en déduit que $\lim_0 f=\frac{2}{3}$.

16. Il y a $6\times6=36$ résultats possibles. Il y a 6 résultats favorables, à savoir $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,6)$, $(2,1)$, $(4,2)$ et $(6,3)$. Puisque tous les résultats sont implicitement équiprobables, la probabilité recherchée est $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

17. Il y a $\binom{52}{2}=26\times51$ tirages possibles. Il y a $13\times\binom{4}{2}=13\times6$ tirages favorables. Tous les tirages étant implicitement équiprobables, l'espérance recherchée est

$$\frac{13\times6}{26\times51}\times10-\frac{26\times51-13\times6}{26\times51}=\frac{11\times13\times6}{26\times51}-1=\frac{11}{17}-1=-\frac{6}{17}$$

18. Une équation de $\mathscr{P}$ est par exemple $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

Un point $\mathrm{M}(x,y,z)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ *si et seulement si* les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ sont colinéaires, autrement dit *si et seulement si* il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{\mathrm{IM}}=\lambda\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$, ce qui équivaut en termes de coorodonnées à

$$\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases}$$

Finalement, le point $\mathrm{M}(x,y,z)$ appartient à $\mathscr{P}\cap\mathscr{D}$ *si et seulement si* il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1 \\ x=1-2\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases}$$

Ce système équivaut à

$$\begin{cases} (1-2\lambda)+\dfrac{-1+2\lambda}{2}+\dfrac{1-2\lambda}{3}=1 \\ x=1-2\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \lambda=-\dfrac{1}{10} \\ x=\dfrac{6}{5} \\ y=-\dfrac{6}{5} \\ z=\dfrac{6}{5} \end{cases}$$

L'unique point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$ est donc le point de coordonnées $\left(\frac{6}{5},-\frac{6}{5},\frac{6}{5}\right)$.