

DEVOIR À LA MAISON N° 15

Problème 1 —

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $I = [a, b]$. On suppose que f' est strictement négative sur I , que f'' est positive sur I et que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

Partie I – Description de la méthode de Newton

1. Montrer qu'il existe un unique réel $c \in I$ tel que $f(c) = 0$.
2.
 - a. Soit u un réel de I . Montrer que l'abscisse de l'intersection de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u et de l'axe des abscisses est égale à $u - \frac{f(u)}{f'(u)}$.
 - b. Soit g la fonction définie sur I par

$$\forall x \in I, g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

On définit la suite (x_n) par $x_0 \in [a, c]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n)$$

Quelle est l'interprétation géométrique de la suite (x_n) ? On illustrera son propos par une figure soignée.

3.
 - a. Justifier que g est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.
 - b. En déduire les variations de g sur I .
 - c. Établir que $g([a, c]) \subset [a, c]$.
 - d. Établir que la suite (x_n) est à valeurs dans $[a, c]$.

Partie II – Convergence de la méthode de Newton

1.
 - a. Étudier le sens de variation de (x_n) .
 - b. Prouver que la suite (x_n) converge vers c .
2.
 - a. Justifier l'existence de deux réels strictement positifs m et M tels que $|f'| \geq m$ et $|f''| \leq M$ sur I .
 - b. A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que

$$\forall x \in I, |g(x) - c| \leq (x - c)^2 \frac{M}{2m}$$

- c. On pose $K = \frac{M}{2m}$. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $K|x_N - c| < 1$. En déduire l'existence de deux constantes $C > 0$ et $k \in]0, 1[$ telles que

$$\forall n \geq N, |x_n - c| \leq Ck^{2^n}$$

- d. Soit $q \in]0, 1[$. Montrer que la suite $(x_n - c)$ est négligeable devant la suite (q^n) .