Semaine du 17/10 au 04/11

1 Cours

Fonctions d'une variable réelle

Généralités Ensemble de définition. Représentation graphique. Fonctions associées ($x \mapsto f(x)+a$, $x \mapsto f(x+a)$, $x \mapsto \lambda f(x)$, $x \mapsto f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, $x \mapsto a - f(x)$, $x \mapsto f(x-a)$). Parité, périodicité. Monotonie. Fonctions majorées, minorées, bornées. Minimum et maximum d'une fonction.

Continuité Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire pour les fonctions strictement monotones. Théorème de la bijection.

Dérivation Taux de variation et dérivée. Dérivation et opérations (dérivée d'une composée). Dérivation et sens de variation. Utilisation d'un tableau de variations. Dérivée d'une bijection réciproque. Dérivées successives.

Étude de fonctions Méthode générale.

Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle, puissances, logarithme La fonction ln est définie comme l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 0 et la fonction exp est définie comme sa bijection réciproque. Étude générale de ces trois types de fonctions, propriétés algébriques, croissances comparées des fonctions exponentielle, puissances et logarithme.

2 Méthodes à maîtriser

- Justifier la continuité ou la dérivabilité d'une composée.
- Majorer, minorer, borner (majorer en valeur absolue) une fonction.
- Savoir déterminer le minimum ou le maximum éventuel d'une fonction par une étude de cette fonction.
- Déterminer le nombre de solutions d'une équation par étude de fonctions.
- Savoir prouver une inégalité par étude de fonction.
- Méthodologie d'une étude de fonction : domaine de définition, restriction du domaine d'étude (parité, périodicité), variations et limites, branches infinies (seules les asymptotes horizontales et verticales sont officiellement au programme mais des exemples d'asymptotes obliques ont été vues en exercices), tracé de la courbe.
- Pour étudier une expression du type $f(x)^{g(x)}$, mettre cette expression sous forme exponentielle $\exp\big(g(x)\ln(f(x))\big)$.
- Savoir utiliser les croissances comparées.

3 Questions de cours

- Montrer que pour tout $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ puis que $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$.
- Établir que $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. On admettra qu'une fonction croissante admet une limite finie ou égale à $+\infty$ en $+\infty$.
- Établir que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. On admettra qu'une fonction décroissante minorée admet une limite finie en $+\infty$.
- En admettant que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, montrer que pour $(\alpha,\beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \qquad \lim_{x\to0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0$$