Devoir surveillé n°02 : corrigé

Problème 1 — Formule de Vandermonde

1. Evident.

2. On remarque que

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!k+n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}=\binom{n+1}{k}$$

3. **Initialisation :** Soit $(m,p)\in\mathbb{N}^2$.

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{0}{k}\binom{m}{p-k}=\binom{0}{0}\binom{m}{p}=\binom{m}{p}$$

car $\binom{0}{k}=0$ lorsque $k>0$ avec les conventions adoptées. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$. Soit $(m,p)\in\mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p}\binom{n+1}{k}\binom{m}{p-k}&=\sum_{k=0}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)\binom{m}{p-k}\\
&=\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}+\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k-1}\binom{m}{p-k}\\
&=\binom{m+n}{p}+\sum_{k=1}^{p}\binom{n}{k-1}\binom{m}{p-k} && \text{d'après } \mathcal{P}_n \text{ et car } \binom{n}{-1}=0 \text{ par convention}\\
&=\binom{m+n}{p}+\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}\binom{m}{p-1-k} && \text{par changement d'indice}\\
&=\binom{m+n}{p}+\binom{m+n}{p-1} && \text{d'après } \mathcal{P}_n\\
&=\binom{m+n+1}{p}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

4. Lorsque $p=m=n$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{2n}{n}$$

Par symétrie des coefficients binomiaux, on obtient le résultat voulu.

5. En effectuant le changement d'indice $\ell=n-k$, on obtient

$$S_n=\sum_{\ell=0}^{n}(n-\ell)\binom{n}{n-\ell}^2=n\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}^2-\sum_{\ell=0}^{n}\ell\binom{n}{\ell}^2=n\binom{2n}{n}-S_n$$

Ainsi $S_n=\dfrac{1}{2}n\dbinom{2n}{n}$.

6. Supposons n impair. La question précédente montre $2S_n=n\binom{2n}{n}$. Comme n est impair, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $n=2p+1$. Ainsi $2S_n=(2p+1)\binom{2n}{n}$ ou encore $\binom{2n}{n}=2\left(S_n-p\binom{2n}{n}\right)$. Comme S_n et $\binom{2n}{n}$ sont entiers, $\binom{2n}{n}$ est pair.

Solution 1.

1. On utilise une formule de factorisation.

$$s=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=2\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}}{2}\right)=2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Or

$$\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi-\frac{4\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

et on a donc bien $s=2p$.

2. En utilisant la formule de duplication du sinus,

$$p\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$$

Or

$$\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)=\sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=-\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Ainsi

$$p\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Or $\frac{2\pi}{5}$ n'est pas un multiple entier de π donc $p\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\neq 0$, ce qui permet d'affirmer que $p=-\frac{1}{4}$ et donc $s=-\frac{1}{2}$.

3. Puisque $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ ont pour somme $s=-\frac{1}{2}$ et pour produit $p=-\frac{1}{4}$, ils sont racines du trinôme $X^2+\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}$. Ces racines sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Comme $\frac{2\pi}{5}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$ et donc

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

Remarque. On aurait aussi pu remarquer que

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\left(2\times\frac{2\pi}{5}\right)=2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1$$

Ainsi

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1=s=-\frac{1}{2}$$

ou encore

$$2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-\frac{1}{2}=0$$

Ainsi $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine du trinôme $2X^2+X-\frac{1}{2}$. Ces racines sont à nouveau $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Comme précédemment, on invoque que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$ pour en déduire que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Puis

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=s-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

■

Solution 2.

1. On trouve $S_0=\binom{0}{0}=1$, $S_1=\binom{0}{0}+\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=3$ et $S_2=\binom{0}{0}+\binom{1}{0}+\binom{2}{0}+\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=7$.

2. D'après la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

La suite (2^n) étant géométrique,

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1$$

3. On procède comme indiqué dans l'énoncé. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}$$

D'après la question précédente,

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} 2^j = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1$$

Solution 3.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+my-z=1 \\ x+y+mz=m \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} x+y-z=1 & \\ (m-1)y=0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (m+1)z=m-1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Il y a alors plusieurs cas à traiter.

Cas $m=1$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}) \iff &\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2z=0 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\{(1-y,y,0),\ y \in \mathbb{R}\} = (1,0,0) + \mathbb{R}(-1,1,0)$$

Cas $m=-1$

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} x+y-z=1 \\ -2y=0 \\ 0=-2 \end{cases}$$

Le système n'a donc pas de solution.

Cas $m \notin \{-1,1\}$

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} x = \dfrac{2m}{m+1} \\ y=0 \\ z = \dfrac{m-1}{m+1} \end{cases}$$

Le système $(\mathcal{S})$ admet donc le triplet $\left(\frac{2m}{m+1}, 0, \frac{m-1}{m+1}\right)$ pour unique solution.

Solution 4.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4k(k+1)}\right) = \sin\frac{\pi}{4k}\cos\frac{1}{4(k+1)} - \cos\frac{\pi}{4k}\sin\frac{1}{4(k+1)}$$

puis

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4k(k+1)}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4k}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4(k+1)}\right)} = \tan\frac{\pi}{4k} - \tan\frac{\pi}{4(k+1)}$$

Par télescopage,

$$u_n = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4(n+1)}\right) = 1 - \tan\left(\frac{\pi}{4(n+1)}\right)$$

2. On en déduit $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.