

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

1 Projection orthogonale

1.1 Définition et premières propriétés

Proposition 1.1

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E . Si F est de **dimension finie**, alors $E = F \oplus F^\perp$.



ATTENTION ! Le résultat n'est plus forcément vrai si F n'est pas de dimension finie. On conserve néanmoins le fait que F et F^\perp sont en somme directe.

Exemple 1.1

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par

$$\left\langle \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n \right\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

et on considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = 0\}$$

Soit $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in F^\perp$. Alors F est orthogonal aux polynômes $X^n - 1$, ce qui signifie que $a_n = a_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Mais comme la suite (a_n) est presque nulle, elle est nulle. Ainsi $P = 0$. Par conséquent, $F^\perp = \{0\}$ et $F \oplus F^\perp = F \neq \mathbb{R}[X]$.

Exercice 1.1 Orthogonal et topologie

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E .

1. Montrer que F^\perp est fermé.
2. Montrer que $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$.

Définition 1.1 Projecteur orthogonal

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E . Si $E = F \oplus F^\perp$, on appelle **projecteur orthogonal** sur F le projecteur sur F parallèlement à F^\perp .

REMARQUE. La projection orthogonale sur F est notamment définie lorsque F est de dimension finie.

Proposition 1.2 Expression de la projection orthogonale dans une base orthonormale

Soit F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** d'un espace préhilbertien E . On se donne une base orthonormale (f_1, \dots, f_n) de F . Soient p le projecteur orthogonal sur F et $x \in E$. Alors

$$p(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k$$

REMARQUE. En particulier la projection d'un vecteur x sur une droite vectorielle $\text{vect}(u)$ est $\frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$. Si u est normé, alors cette projection est simplement $\langle x, u \rangle u$.

Proposition 1.3 Distance à un sous-espace vectoriel

Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E tel que $E = F \oplus F^\perp$, alors pour tout $x \in E$, il existe un unique vecteur $y \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - y\|$, à savoir $y = p_F(x)$ où p_F désigne le projecteur orthogonal sur F . Notamment, $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

Proposition 1.4 Inégalité de Bessel

Soient I est un ensemble **fini ou dénombrable** et $(e_i)_{i \in I}$ une famille **orthonormale** de vecteurs d'un espace préhilbertien E . Soit également $x \in E$.

Alors la famille $(\langle x, e_i \rangle^2)_{i \in I}$ est **sommable** et

$$\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

1.2 Convergence**Définition 1.2 Suite totale**

On dit qu'une suite de vecteurs $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace vectoriel normé E est **totale** si $\text{vect}(u_n, n \in \mathbb{N})$ est **dense** dans E .

Exemple 1.2

Posons $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$. D'après le théorème de Weierstrass la suite $(x \mapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite totale de E muni de la norme infinie.

Proposition 1.5

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **orthonormale totale** d'un espace préhilbertien E . Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n le projecteur orthogonal sur $\text{vect}(e_0, \dots, e_n)$.

Alors pour tout $x \in E$, la suite $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

REMARQUE. E est muni de la norme associée produit scalaire E .

2 Endomorphismes symétriques**2.1 Définition**

Définition 2.1 Endomorphisme symétrique

On dit qu'un endomorphisme u d'un espace préhilbertien E est **symétrique** si

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

Proposition 2.1 Interprétation matricielle

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E . Alors u est **symétrique** si et seulement si sa matrice dans une **base orthonormale** de E est **symétrique**.

Proposition 2.2

Un **projecteur** d'un espace préhilbertien E est **symétrique** si et seulement si il est **orthogonal**.
Une **symétrie** d'un espace préhilbertien E est **symétrique** si et seulement si elle est **orthogonale**.

REMARQUE. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien de dimension n et A sa matrice dans une **base orthonormale**. Alors

- u est un **projecteur orthogonal** si et seulement si $A^2 = A$ et $A^T = A$;
- u est une **symétrie orthogonale** si et seulement si $A^2 = I_n$ et $A^T = A$.

Adjoint

Si E est un espace euclidien, on peut montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

Cet endomorphisme u^* s'appelle l'**adjoint** de u . Ainsi u est symétrique si et seulement si $u = u^*$. C'est pour cela qu'on qualifie les endomorphismes symétriques d'endomorphismes auto-adjoints.

2.2 Réduction des endomorphismes symétriques**Proposition 2.3 Stabilité de l'orthogonal**

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace préhilbertien E . Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors F^\perp est également stable par u .

Exercice 2.1

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que χ_A est scindé sur \mathbb{R} .

Exercice 2.2

Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E . On pose $\varphi : x \in E \setminus \{0_E\} \mapsto \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2}$.

1. Justifier que φ admet un maximum sur la sphère unité de E et en déduire que φ admet un maximum sur l'ouvert $E \setminus \{0_E\}$.
2. On note u un vecteur où φ admet son maximum. En considérant le gradient de φ , montrer que u est un vecteur propre de f .

Théorème 2.1 Théorème spectral

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E . Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) u est un endomorphisme **symétrique** ;
- (ii) E est la **somme directe orthogonale des sous-espaces propres** de u ;
- (iii) il existe une **base orthonormale** de E formée de **vecteurs propres** de u .

REMARQUE. Notamment, tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux.

Corollaire 2.1 Réduction des matrices symétriques

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel $(X, Y) \mapsto X^T Y$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) A est une matrice **symétrique** ;
- (ii) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est la **somme directe orthogonale des sous-espaces propres** de A ;
- (iii) il existe une **base orthonormale** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de **vecteurs propres** de A ;
- (iv) il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^T$.

REMARQUE. Notamment, toute matrice symétrique **réelle** est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.



ATTENTION ! Une matrice symétrique complexe n'est pas nécessairement diagonalisable. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. En effet, A est nilpotente ($A^2 = 0$) non nulle.

Endomorphismes symétriques positifs

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E . On dit que u est **positif** si

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0$$

Il est classique de montrer que u est positif si et seulement si $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.

- Supposons u positif et donnons-nous $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et x un vecteur propre associé. Alors $\langle u(x), x \rangle \geq 0$ et $\langle u(x), x \rangle = \lambda \|x\|^2$. Comme $x \neq 0_E$, $\|x\|^2 > 0$ et donc $\lambda \geq 0$. Ainsi $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.
- Supposons $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$. D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormale (e_1, \dots, e_n) de vecteurs propres de u . Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (positives) associées à ces vecteurs propres. Un calcul simple montre que

$$\langle u(x), x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, e_i \rangle^2 \geq 0$$

On dira que u est **défini positif** si

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \langle u(x), x \rangle > 0$$

On montre aisément que u est défini positif si et seulement si u est inversible et positif i.e. si et seulement si $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Matrices symétriques positives

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est **positive** si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T M X \geq 0$$

Il est classique de montrer que M est positive si et seulement si $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$.

- Supposons M positif et donnons-nous $\lambda \in \text{Sp}(M)$ et X un vecteur propre associé. Alors $X^T M X \geq 0$ et $X^T M X = \lambda X^T X$. Comme $X \neq 0$, $X^T X > 0$ et donc $\lambda \geq 0$. Ainsi $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.
- Supposons $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $M = P D P^T$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D . Un calcul simple montre que

$$X^T M X = (P^T X)^T D (P^T X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (P^T X)_i^2 \geq 0$$

On dira que M est **définie positive** si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T M X > 0$$

On montre aisément que M est définie positive si et seulement si M est inversible et positive i.e. si et seulement si $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$.

REMARQUE. On peut déduire les résultats sur les matrices symétriques positives à partir des résultats sur les endomorphismes symétriques positifs (et inversement) en considérant la matrice d'un tel endomorphisme dans une base orthonormale.

Notation 2.1

L'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives) est traditionnellement noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$).

Exercice 2.3

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $A^T A \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$. A quelle condition est-elle définie positive ?

Exercice 2.4 Réduction simultanée

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \mapsto X^T A X$ est un produit scalaire.
2. En déduire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que

$$P^T A P = I_n \quad \text{et} \quad P^T B P = D$$

Exercice 2.5 Décomposition polaire

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = S^2$.
2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(Q, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = QS$.

3 Isométries vectorielles

3.1 Définition

Définition 3.1 Isométrie vectorielle

On appelle **isométrie vectorielle** d'un espace préhilbertien E tout endomorphisme de E **conservant la norme**, c'est-à-dire toute application $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$$

Proposition 3.1

Toute isométrie vectorielle u d'un espace préhilbertien E est linéaire et conserve le produit scalaire i.e.

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

REMARQUE. Réciproquement, toute application conservant le produit scalaire est évidemment une isométrie vectorielle.

Proposition 3.2

Si E est un espace euclidien, toute isométrie vectorielle de E est un automorphisme. Dans ce cas, une isométrie vectorielle est également appelée un **automorphisme orthogonal**.

REMARQUE. Si u est un automorphisme orthogonal, alors $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Proposition 3.3 Interprétation matricielle

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E . Alors u est une isométrie vectorielle si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale de E est orthogonale.

Rappel Isométrie vectorielle directe ou indirecte

Une isométrie vectorielle d'un espace euclidien est dite **directe** si son déterminant est positif et **indirecte** dans le cas contraire.

On parle également d'automorphisme orthogonal **positif** ou **négatif**.

REMARQUE. Le déterminant d'une isométrie vectorielle ne peut valoir que -1 ou 1 .

Rappel Matrice orthogonale positive ou négative

Une matrice orthogonale est dite **positive** si son déterminant est positif et **négative** dans le cas contraire.

REMARQUE. Le déterminant d'une matrice orthogonale ne peut valoir que -1 ou 1 .

Proposition 3.4

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E . Alors u est une isométrie vectorielle directe (resp. indirecte) si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale de E est orthogonale positive (resp. négative).

3.2 Réduction des isométries vectorielles

Proposition 3.5 Stabilité de l'orthogonal

Soit u une isométrie vectorielle d'un espace préhilbertien E . Si F est un sous-espace vectoriel de E **stable** par u , alors F^\perp est également **stable** par u .

Rappel Isométries d'un plan euclidien

Les isométries d'un plan euclidien sont :

- les rotations dont la matrice dans toute base orthonormale est de la forme $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$;
- les réflexions dont la matrice dans une base orthonormale adaptée est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

REMARQUE. Plus précisément, on appelle rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme du plan euclidien dont la matrice dans une base orthonormée **directe** du plan est $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Cette matrice ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie. Néanmoins, si on change l'orientation du plan le même endomorphisme est alors la rotation d'angle $-\theta$.

Exemple 3.1

Si r est une rotation d'angle θ d'un plan euclidien orienté, sa matrice dans une base orthonormée directe (e_1, e_2) est $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Via la formule de changement de base, sa matrice dans la base orthonormée indirecte (e_2, e_1) est $P^{-1}R(\theta)P$, où $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a évidemment $P^{-1} = P$ de sorte que

$$P^{-1}R(\theta)P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(-\theta)$$

Proposition 3.6 Réduction des isométries vectorielles

Soit u une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E . Alors il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ($\theta \in]0, \pi[$).

Corollaire 3.1 Réduction des matrices orthogonales

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ($\theta \in]0, \pi[$), telles que $A = PDP^T$.

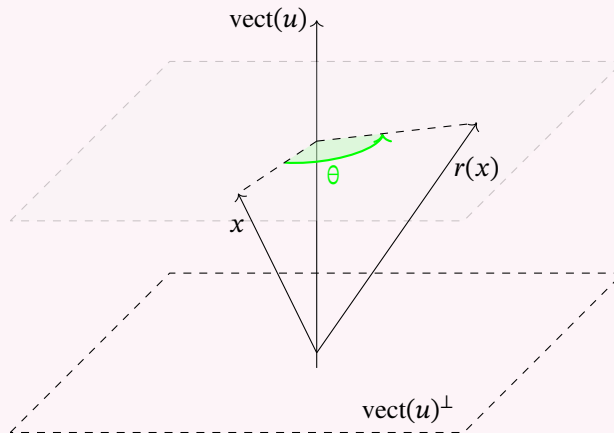
3.3 Cas d'un espace euclidien de dimension 3

Rappel Orientation induite

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. On peut orienter un plan P de E en se donnant un vecteur u non nul normal à P : on décide qu'une base (v, w) de P est directe (resp. indirecte) si (u, v, w) est directe (resp. indirecte). On vérifie sans peine qu'on a alors bien orienté P : on parle alors de l'orientation de P induite par u .

REMARQUE. Si on change u en $-u$, on change l'orientation induite de P .

Définition 3.2 Rotation



Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et u un vecteur non nul de E . On appelle **rotation** (vectorielle) d'angle θ et d'axe orienté par u l'endomorphisme laissant les vecteurs de $\text{vect}(u)$ invariants et induisant une rotation d'angle θ dans le plan $\text{vect}(u)^\perp$ dont l'orientation est induite par celle de $\text{vect}(u)$.

REMARQUE. Si u et u' sont deux vecteurs non nuls, colinéaires et de même sens, les rotations d'axes orientés par u et u' et de même angle θ sont identiques.

Si u et u' sont deux vecteurs non nuls, colinéaires et de sens contraire, la rotation d'axe orienté par u et d'angle θ et la rotation d'axe orienté par u' et d'angle $-\theta$ sont identiques.

REMARQUE. Si on change l'orientation de E , les angles de rotation sont changés en leurs opposés.

Proposition 3.7 Matrice d'une rotation

La matrice de la rotation d'angle θ et d'axe orienté par u dans une base orthonormale directe de premier vecteur colinéaire

et de même sens que u est $R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Proposition 3.8

Les isométries vectorielles directes d'un espace euclidien de dimension 3 sont les rotations.

Méthode Déterminer l'image d'un vecteur par une rotation d'axe et d'angle donnés

Soit r une rotation d'angle θ d'axe orienté par u . On suppose u unitaire. Soit x un vecteur de E . On veut déterminer $r(x)$.

- On calcule la projection orthogonale y de x sur $\text{vect}(u)$: $y = \langle x, u \rangle u$. On a alors $z = x - y \in \text{vect}(u)^\perp$.
- On calcule l'image de z : $r(z) = (\cos \theta)z + (\sin \theta)u \wedge z$.
- On a alors $r(x) = y + r(z)$.

Méthode Déterminer la matrice d'une rotation d'axe et d'angle donnés

Soit r une rotation d'angle θ orienté par u . On suppose u unitaire. On veut déterminer la matrice M de r dans la base canonique.

Méthode n°1 On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 . La méthode précédente nous permet de calculer $r(e_1)$, $r(e_2)$ et $r(e_3)$. On peut aussi remarquer que $r(e_3) = r(e_1) \wedge r(e_2)$. Les colonnes de M sont les vecteurs colonnes représentant $r(e_1)$, $r(e_2)$ et $r(e_3)$ dans la base canonique.

Méthode n°2 On détermine v, w tels que (u, v, w) soient une base orthonormale directe : il suffit de choisir v orthogonal à u et de poser $w = u \wedge v$. La matrice de r dans la base (u, v, w) est $R(\theta)$. Si on note P la matrice de la base (u, v, w) dans la base canonique, alors la matrice recherchée est $PR(\theta)P^{-1} = PR(\theta)P^T$.

Exercice 3.1 Matrice d'une rotation

Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'axe dirigé par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Méthode Déterminer l'axe et l'angle de la rotation associée à une matrice de $SO(3)$

Soit r une rotation de matrice R dans une base orthonormale directe \mathcal{B} .

Méthode n°1

- On cherche d'abord un vecteur directeur u de l'axe en résolvant $RX = X$.
- On détermine un vecteur v non nul et orthogonal à u .
- On détermine le vecteur $r(v)$ grâce à R .
- On a alors $\cos \theta = \frac{\langle v, r(v) \rangle}{\|v\|^2}$.
- On détermine θ grâce au signe de $\sin \theta$: on remarque que $[u, v, r(v)] = \|u\|\|v\|^2 \sin \theta$ ou que $v \wedge r(v) = \|v\|^2(\sin \theta) \frac{u}{\|u\|}$.

Méthode n°2

- On cherche d'abord un vecteur directeur u de l'axe en résolvant $RX = X$.
- R et $R(\theta)$ sont la matrice de r dans des bases différentes donc $\text{tr}(R(\theta)) = \text{tr}(R)$ i.e. $1 + 2 \cos \theta = \text{tr}(R)$. On en déduit $\cos \theta$.
- On détermine θ grâce au signe de $\sin \theta$. Le signe de $\sin \theta$ est le même que celui de $[u, x, r(x)]$ où x est un vecteur quelconque de E : en pratique, on prend un vecteur de la base canonique.

Exercice 3.2 Matrice de rotation

Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A \in \text{SO}(3)$.
2. Déterminer l'axe et l'angle de la rotation associée à A .

Exercice 3.3 Anti-rotations

Soit E un espace euclidien de dimension 3.

1. Montrer qu'une rotation de E commute avec une réflexion de E si et seulement si l'axe de la première est orthogonal au plan de la seconde.
2. On appelle anti-rotation de E toute composée commutative d'une rotation et d'une réflexion. Montrer que les isométries vectorielles indirectes de E sont les anti-rotations.