Devoir à la maison n°11 : corrigé

Problème 1 — EPITA 2010

Partie I –

1. **a.** On a clairement $\deg P_k = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est donc une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ à degrés étagés : elle est libre. De plus, elle comporte $n+1$ éléments et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Soient m et k deux entiers naturels.
Si $m < k$, on a $P_k(m) = 0$ car m est une racine de P_k. Si $m \geqslant k$, $P_k(m) = \binom{m}{k}$.
Si $m \geqslant 1$, on a :

$$P_k(-m) = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(-m-i) = \frac{(-1)^k}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(m+i) = \frac{(-1)^k}{k!}\frac{(m+k-1)!}{(m-1)!} = (-1)^k\binom{k+m-1}{k}$$

Comme les coefficients binomiaux sont des entiers, $P_k(m)$ et $P_k(-m)$ sont des entiers pour tous $m, k \in \mathbb{N}$.

c. Notons $(a_0, \dots, a_n)$ les coordonnées de P dans la base $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.
Si les a_i sont des entiers, alors pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $P(m) = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i(m) \in \mathbb{Z}$ d'après la question précédente.
Supposons maintenant que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $P(m) \in \mathbb{Z}$. Montrons par récurrence finie que $a_i \in \mathbb{Z}$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.
On a $P(0) = a_0$ puisque 0 est racine de P_i pour $i \geqslant 1$.
Supposons avoir montré que $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ pour un certain entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Pour $i > k$, $P_i(k) = 0$ donc

$$P(k) = \sum_{i=0}^{k} a_i P_i(k) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i P_i(k) + a_k P_k(k)$$

Or $P_k(k) = 1$, $P_i(k) \in \mathbb{Z}$ pour $0 \leqslant i \leqslant k-1$ et $P(k) \in \mathbb{Z}$ par hypothèse. Ainsi $a_k = P(k) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i P_i(k) \in \mathbb{Z}$.
Par récurrence finie, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$.

2. **a.** Evident.

b. $\Delta(P_0) = 1 - 1 = 0$.

$$\begin{aligned}\Delta(P_{n+1}) &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\prod_{k=0}^{n}(X+1-k) - \prod_{k=0}^{n}(X-k)\right) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\prod_{k=-1}^{n-1}(X-k) - \prod_{k=0}^{n}(X-k)\right)\\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)\right)\big((X+1)-(X-n)\big) = P_n\end{aligned}$$

c. Si $d = 0$, on a clairement $\Delta(P) = 0$ et donc $\deg \Delta(P) = -\infty$. Supposons maintenant $d \geqslant 1$ et posons $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ et $a_d \neq 0$. Alors

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}X^l - \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = \sum_{l=0}^{d}\left(\sum_{k=l}^{d} a_k\binom{k}{l}\right)X^l - \sum_{l=0}^{d} a_l X^l$$

On remarque en particulier que le coefficient de X^d est nul et que celui de X^{d-1} vaut $da_d \neq 0$. On en déduit que $\deg \Delta(P) = d-1$.
En itérant, on obtient $\deg \Delta^d(P) = \deg P - d = 0$. D'après ce qui précède, $\Delta^{d+1}(P) = 0$

d. Si P est un polynôme constant, $\Delta(P) = 0$. Si $\deg P \geqslant 1$, alors $\deg \Delta(P) = \deg P - 1 \geqslant 0$ donc $\Delta(P)$ n'est pas nul. Ainsi $\operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{R}_0[X]$. En particulier, Δ n'est pas injective.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $P = 0$, P admet un antécédent, à savoir 0. Sinon, notons $n = \deg P$. Ainsi $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et il existe donc $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \sum_{k=0}^n a_k P_k$. Or on a vu plus haut que $\Delta(P_{k+1}) = P_k$ donc $P = \Delta\left(\sum_{k=0}^n a_k P_{k+1}\right) \in \operatorname{Im} \Delta$. Ainsi Δ est surjectif.

3. **a.** D'après la question **I.2.b**, $\Delta^k(P_j) = P_{j-k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant j$ et $\Delta^k(P_j) = 0$ pour $k > j$. On en déduit que $\Delta^k(P_j)(0) = P_{j-k}(0) = 0$ si $0 \leqslant k < j$ et que $\Delta^k(P_j)(0) = 0$ si $k > j$. Enfin, $\Delta^k(P_k) = P_0 = 1$ donc $\Delta^k(P_k)(0) = 1$.

b. Considérons l'application Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à P associe $\sum_{k=0}^n \Delta^k(P)(0)P_k$ (Φ est clairement linéaire et bien définie puisque $\deg P_k = k \leqslant n$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$). D'après la question précédente, $\Phi(P_k) = P_k$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$. Or $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\Phi = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. Ainsi $\Phi(P) = P$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Partie II –

1. Notons $\mathcal{P}_n$ la formule à établir. Supposons la vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors, par linéarité de Δ :

$$\begin{aligned}
\Delta^{n+1}(P) &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}(-1)^{n-j}\Delta(P(X+j)) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}(-1)^{n-j}P(X+j+1) - \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}(-1)^{n-j}P(X+j) \\
&= P(X+n+1) + \left[\sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1}(-1)^{n-j+1}P(X+j)\right] - (-1)^n P(X) - \left[\sum_{j=1}^n \binom{n}{j}(-1)^{n-j}P(X+j)\right] \\
&= P(X+n+1) - (-1)^n P(X) + \sum_{j=1}^n (-1)^{n+1-j}\left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right) P(X+j) \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j}(-1)^{n+1-j}P(X+j)
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On peut également raisonner directement sur les endomorphismes. Introduisons l'endomorphisme

$$D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array} \right.$$

de sorte que $\Delta = D - \operatorname{Id}_{\mathbb{K}[X]}$. Puisque $\operatorname{Id}_{\mathbb{K}[X]}$ commute avec D, on a d'après la formule du binôme

$$\Delta^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}(-1)^{n-j}D^j$$

Donc pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\Delta^n(P) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}(-1)^{n-j}D^j(P) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}(-1)^{n-j}P(X+j)$$

2. **a.** Posons $X^n = \sum_{k=0}^n a_k P_k$. On sait que pour $0 \leqslant k < n$, $\deg P_k < n$ et que $\deg P_n = n$. Ainsi le coefficient de X^n dans $\sum_{k=0}^n a_k P_k$ est le produit de a_n par le coefficient dominant de P_n, à savoir $\frac{1}{n!}$. En identifiant les coefficients des monômes de degré n, on a donc $1 = \frac{a_n}{n!}$ i.e. $a_n = n!$.
Puisque $\Delta^n(P_k) = 0$ pour $k < n$ et $\Delta_n(P_n) = 1$ d'après la question **I.3.a**, on a $\Delta^n(X^n) = a_n = n!$. En appliquant la formule de la question précédente à X^n, on a donc

$$n! = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}(-1)^{n-j}(X+j)^n$$

Il suffit alors d'évaluer cette égalité en 0 pour avoir la relation demandée.

b. Il suffit d'appliquer à nouveau la formule de la question **II.1** mais cette fois-ci à X^k pour $0 \leqslant k < n$. D'après la question **I.2.c**, $\Delta^n(X^k) = 0$ puisque $\deg X^k = k < n$. On a donc

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} (X+j)^k$$

et il suffit à nouveau d'évaluer cette égalité en 0.

3. **a.** On rappelle la formule de Taylor-Young

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n)$$

On en déduit pour $0 \leqslant j \leqslant n$:

$$f(a+jh) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} j^k h^k + o(h^n)$$

b. On utilise la question précédente et la question **II.2**

$$\begin{aligned}
h^n A_n(h) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} f(a+jh) \\
&\underset{h\to 0}{=} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} j^k h^k + o(h^n) \\
&\underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^k \right) \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n) \\
&\underset{h\to 0}{=} f^{(n)}(a) h^n + o(h^n)
\end{aligned}$$

On en déduit que $A_n(h) \underset{h\to 0}{=} f^{(n)}(a) + o(1)$ i.e. $A_n(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f^{(n)}(a)$.

Partie III –

1. **a.** Télescopage évident.

b. On calcule aisément $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$ et $P_3 = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2)$.
On a donc $X = P_1$.
Il existe $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tels que $X^2 = a_0 P_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2$. En évaluant en 0, on trouve $a_0 = 0$. En évaluant ensuite en 1, on trouve $a_1 = 1$. En évaluant enfin en 2, on trouve $2a_1 + a_2 = 4$ i.e. $a_2 = 2$. Ainsi $X^2 = P_1 + 2P_2$.
Il existe $b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ tels que $X^3 = b_0 P_0 + b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3$. En évaluant en 0, on trouve $b_0 = 0$. En évaluant en 1, on trouve $b_1 = 1$. En évaluant en 2, on trouve $2b_1 + b_2 = 8$ i.e. $b_2 = 6$. En évaluant enfin en 3, on trouve $3b_1 + 3b_2 + b_3 = 27$ i.e. $b_3 = 6$. Ainsi $X^3 = P_1 + 6P_2 + 6P_3$.
En vertu de la question **I.2.b**, il suffit donc de choisir $Q_1 = P_2$, $Q_2 = P_2 + 2P_3$ et $Q_3 = P_2 + 6P_3 + 6P_4$.

c. D'après les deux questions précédentes :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p} k &= Q_1(p+1) - Q_1(0) = P_2(p+1) - P_2(0) = \frac{p(p+1)}{2} \\
\sum_{k=0}^{p} k^2 &= Q_2(p+1) - Q_2(0) = P_2(p+1) - P_2(0) + 2P_3(p+1) - 2P_3(0) \\
&= \frac{p(p+1)}{2} + \frac{(p+1)p(p-1)}{3} = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \\
\sum_{k=0}^{p} k^3 &= Q_3(p+1) - Q_3(0) = P_2(p+1) - P_2(0) + 6P_3(p+1) - 6P_3(0) + 6P_4(p+1) - 6P_4(0) \\
&= \frac{p(p+1)}{2} + (p+1)p(p-1) + \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{4} \\
&= \frac{p(p+1)\big(2 + (p-1)(4+p-2)\big)}{4} = \left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

2. **a.** Evident.

b. ▶ Pour $n \geqslant 1$,

$$\Delta(B'_{n+1} - nB_n) = \Delta(B'_{n+1}) - n\Delta(B_n) = \left(\Delta(B_{n+1})\right)' - \Delta(B_n) = (X^n)' - nX^{n-1} = 0$$

▶ $\Delta(B_{n+1}) = X^n$ signifie $B_{n+1}(X+1) - B_n(X) = X^n$. En substituant 0 à X dans cette égalité, on a $B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0$ (car n non nul).

▶ On doit avoir $\Delta(B_1) = 1$. D'après la question **I.2.c**, on doit avoir $\deg B_1 = 1 + \deg 1 = 1$. On a vu précédemment que si P était un polynôme de degré d et de coefficient dominant a_d, le coefficient dominant de $\Delta(P)$ était da_d. En appliquant ceci à $P = B_1$ et donc $d = 1$, on voit que le coefficient dominant de B_1 doit être 1. Autrement dit, B_1 doit être unitaire.

c. Soit $(B_n)_{n \geqslant 1}$ une suite satisfaisant aux trois conditions précédentes.
B_1 est unitaire de degré 1 donc de la forme $X + a$ avec $a \in \mathbb{R}$. Il est alors clair que $\Delta(B_1) = 1 = X^0$.
Supposons que l'on ait $\Delta(B_{n+1}) = X^n$ pour un certain entier naturel n. On a alors $\Delta(B_{n+2})' = (n+1)\Delta(B_{n+1})$ puisque $B'_{n+2} - (n+1)B_{n+1} \in \operatorname{Ker}\Delta$. D'où $\Delta(B_{n+2})' = (n+1)X^n$. Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $\Delta(B_{n+2}) = X^{n+1} + a$. En substituant 0 à X dans cette égalité, on obtient $a = B_{n+2}(1) - B_{n+2}(0) = 0$.
Par récurrence, $\Delta(B_{n+1}) = X^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question **III.2.a**, on a bien

$$\sum_{k=0}^{p} k^n = \sum_{k=0}^{p} \Delta(B_{n+1})(k) = B_{n+1}(p+1) - B_{n+1}(0)$$

3. **a.** Supposons que (A), (B), (C) soient vérifiées. (A') et (B') sont donc vérifiées. De plus, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\int_0^1 B_n(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_0^1 B'_{n+1}(t)\,dt = \frac{1}{n}\left(B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)\right) = 0$$

Réciproquement, supposons que (A'), (B'), (C') soient vérifiées. Alors (A) et (B) sont vérifiées. Pour $n \geqslant 1$,

$$B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = \int_0^1 B'_{n+1}(t)\,dt = n\int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$$

b. B_1 est unitaire de degré 1 donc de la forme $X + a$ avec $a \in \mathbb{R}$. La condition (B') fournit alors $a = -\frac{1}{2}$. Ainsi $B_1 = X - \frac{1}{2}$.
$B'_2 = B_1$ donc B_2 est de la forme $\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + a$ avec $a \in \mathbb{R}$. La condition (B') fournit alors $a = \frac{1}{12}$. Ainsi $B_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}$.
$B'_3 = 2B_2$ donc B_3 est de la forme $\frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X + a$ avec $a \in \mathbb{R}$. La condition (B') fournit alors $a = 0$. Ainsi $B_3 = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X$.
$B'_4 = 3B_3$ donc B_4 est de la forme $\frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{4}X^2 + a$ avec $a \in \mathbb{R}$. La condition (B') fournit alors $a = -\frac{1}{120}$. Ainsi $B_4 = \frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{4}X^2 - \frac{1}{120}$.
On laisse au lecteur le soin de mener les calculs et la factorisation de $B_2(p+1) - B_2(0)$, $B_3(p+1) - B_3(0)$ et $B_4(p+1) - B_4(0)$.

c. On a déjà montré l'existence et l'unicité de B_1 à la question précédente. De plus, on voit que $B_1 \in \mathbb{Q}[X]$.
Supposons l'existence et l'unicité de $B_1, \dots, B_n$ et le fait que $B_1, \dots, B_n \in \mathbb{Q}[X]$ pour un certain $n \geqslant 1$. Soit P une primitive de nB_n (il en existe toujours). L'unique choix possible pour B_{n+1} est alors $P - \int_0^1 P(t)\,dt$. D'où l'existence et l'unicité de B_{n+1}. De plus, P est à coefficients rationnels, puisque B_n l'est. Ceci prouve que $\int_0^1 P(t)\,dt \in \mathbb{Q}$ (quitte à décomposer P dans la base canonique). Ainsi $B_{n+1} \in \mathbb{Q}[X]$.
On prouve ainsi par récurrence l'existence et l'unicité de la suite $(B_n)_{n \geqslant 1}$ et le fait que $B_n \in \mathbb{Q}[X]$ pour tout $n \geqslant 1$.

d. On peut par exemple écrire l'algorithme suivant en Python. On représente un polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ par la liste $[a_0, \dots, a_n]$.

```
def bernoulli(n) :
b=[-1/2,1]
s=[b]
for k in range(1,n) :
b=[k*a/(i+1) for (i,a) in enumerate(b)]
b.insert(0,-sum(a/(i+2) for (i,a) in enumerate(b)))
s.append(b)
return s
```

On peut utiliser le module `fractions` si on veut les coefficients sous forme exacte.

```
from fractions import Fraction

def bernoulli(n) :
b=[Fraction(-1,2),Fraction(1)]
s=[b]
for k in range(1,n) :
b=[k*a/(i+1) for (i,a) in enumerate(b)]
b.insert(0,-sum(a/(i+2) for (i,a) in enumerate(b)))
s.append(b)
return s
```