

DEVOIR À LA MAISON N°01 : CORRIGÉ

SOLUTION 1.

1. a. On trouve $f_1: x \mapsto \frac{x}{2}$, $f_2: x \mapsto -\frac{1}{8}x^2 + x$ et $f_3: x \mapsto -\frac{1}{128}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{5}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$.
 b. f_1 est clairement strictement croissante sur $[0, 1]$.
 f_2 est polynomiale donc dérivable sur $[0, 1]$ et

$$\forall x \in [0, 1], f_2'(x) = 1 - \frac{1}{4}x > 0$$

donc f_2 est strictement croissante sur $[0, 1]$.

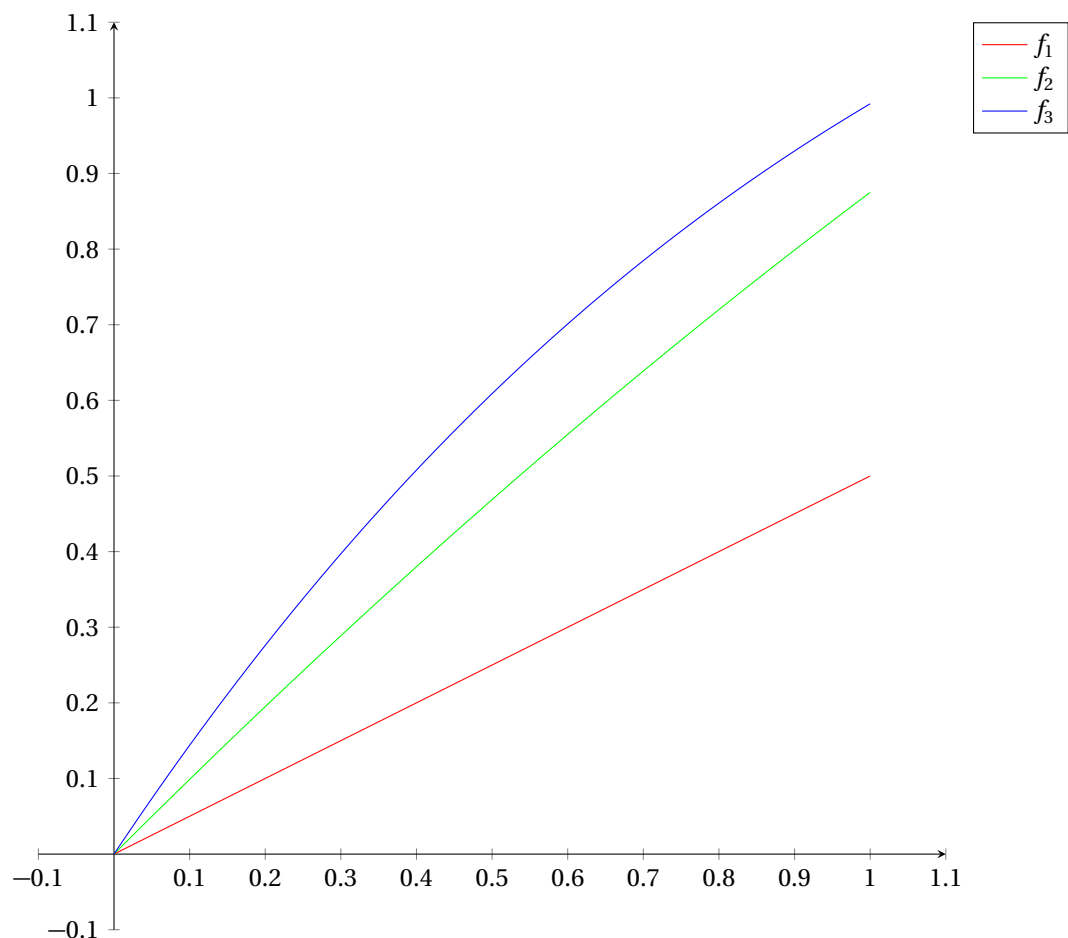
f_3 est deux fois dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_3'(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$$

$$f_3''(x) = -\frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

Le trinôme $-\frac{3}{32}X^2 + \frac{3}{4}X - \frac{5}{4}$ admet pour racines $4 - \frac{2\sqrt{6}}{3}$ et $4 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Puisque $4 - \frac{2\sqrt{6}}{3} > 1$, f_3'' est strictement négative sur $[0, 1]$. Ainsi f_3' est strictement décroissante sur $[0, 1]$. Puisque $f_3'(1) = 1/2 > 0$, f_3' est strictement positive sur $[0, 1]$, de sorte que f_3 est strictement croissante sur $[0, 1]$.

- c. En regardant la suite des questions, on devine les positions respectives des courbes de f_1 , f_2 et f_3 .



2. a. On raisonne par récurrence. Tout d'abord, $0 \leq u_0 = 0 \leq \sqrt{x}$.
 Supposons que $0 \leq u_n \leq \sqrt{x}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(x - u_n^2) \geq u_n \geq 0 \quad \text{car } u_n^2 \leq x$$

et

$$\sqrt{x} - u_{n+1} = \sqrt{x} - u_n - \frac{1}{2}(x - u_n^2) = (\sqrt{x} - u_n) \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + u_n)\right)$$

Or, d'une part, $\sqrt{x} - u_n \geq 0$ et, d'autre part, $\sqrt{x} \leq 1$ et $u_n \leq \sqrt{x} \leq 1$ donc $1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + u_n) \geq 0$. On obtient bien $\sqrt{x} - u_{n+1} \geq 0$.

Finalement, on a montré que $0 \leq u_n \leq \sqrt{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(x - u_n^2) \geq 0$$

car $0 \leq u_n \leq \sqrt{x}$. Ainsi (u_n) est bien croissante.

c. D'après la question précédente, (u_n) est croissante et majorée. Notons ℓ sa limite. La relation de récurrence vérifiée par (u_n) implique que $\ell = \ell + \frac{1}{2}(x - \ell^2)$ et donc que $\ell^2 = x$. Or (u_n) est positive d'après la question précédente donc $\ell \geq 0$ puis $\ell = \sqrt{x}$.

3. a. Soit $(n, x) \in \mathbb{N} \times [0, 1]$. On a déjà remarqué que

$$0 \leq \sqrt{x} - f_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - f_n(x)) \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + f_n(x))\right)$$

Or on sait également que $0 \leq f_n(x) \leq \sqrt{x}$ donc $\sqrt{x} - f_n(x) \geq 0$ et $1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + f_n(x)) \leq 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}$. Finalement,

$$0 \leq \sqrt{x} - f_{n+1}(x) \leq (\sqrt{x} - f_n(x)) \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. φ_n est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\varphi'_n(t) = \left(1 - \frac{t}{2}\right)^n - \frac{nt}{2} \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{n+1}{2}t\right)$$

On en déduit que φ_n est croissante sur $\left[0, \frac{2}{n+1}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{2}{n+1}, 1\right]$.

Notamment, φ_n admet un maximum et celui-ci vaut

$$\varphi_n\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a montré précédemment que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) \leq \varphi_n(\sqrt{x}) \leq \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n$$

Or pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq 1 - \frac{2}{n+1} \leq 1$ donc

$$0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) \leq \frac{2}{n+1}$$

Ceci étant valable pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq M_n \leq \frac{2}{n+1}$.

Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que (M_n) converge vers 0.

SOLUTION 2.

On sait que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. On raisonne alors par récurrence.

Il est clair que $T_1 = S_1^2 = 1$.

Supposons que $T_n = S_n^2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} S_{n+1}^2 &= (S_n + (n+1))^2 \\ &= S_n^2 + 2(n+1)S_n + (n+1)^2 \\ &= T_n + 2(n+1) \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 \\ &= T_n + n(n+1)^2 + (n+1)^2 \\ &= T_n + (n+1)^3 = T_{n+1} \end{aligned}$$

On conclut donc par récurrence que $T_n = S_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

SOLUTION 3.

1. Il existe $\binom{6}{2}$ issues possibles à ce tirage. La variable aléatoire X est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$.

► L'événement $X = 0$ correspond à tirer les deux boules parmi les quatre rouges. On en déduit que

$$P(X = 0) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{5}$$

► L'événement $X = 1$ correspond à tirer une boule parmi les deux noires et une boule parmi les quatre rouges. On en déduit que

$$P(X = 1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{8}{15}$$

► L'événement $X = 2$ correspond à tirer les deux boules parmi les deux noires. On en déduit que

$$P(X = 2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{15}$$

2. La variable aléatoire Y est encore à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P(Y = 0|X = 0)P(X = 0) + P(Y = 0|X = 1)P(X = 1) + P(Y = 0|X = 2)P(X = 2) \\ &= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \times \frac{2}{5} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}} \times \frac{8}{15} + 1 \times \frac{1}{15} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P(Y = 1|X = 0)P(X = 0) + P(Y = 1|X = 1)P(X = 1) + P(Y = 1|X = 2)P(X = 2) \\ &= \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} \times \frac{2}{5} + \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} \times \frac{8}{15} + 0 \times \frac{1}{15} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y = 2) &= P(Y = 2|X = 0)P(X = 0) + P(Y = 2|X = 1)P(X = 1) + P(Y = 2|X = 2)P(X = 2) \\ &= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \times \frac{2}{5} + 0 \times \frac{8}{15} + 0 \times \frac{1}{15} \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

3. On utilise la formule de Bayes

$$P(X = 1|Y = 1) = \frac{P(Y = 1|X = 1)P(X = 1)}{P(Y = 1)}$$

Or $P(Y = 1) = P(X = 1)$ et on a vu à la question précédente que

$$P(Y = 1|X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}$$

Ainsi la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire au premier tirage sachant que l'on a tiré une seule boule noire au second tirage est $\frac{1}{5}$.

4. La probabilité recherchée est :

$$P(X = 1, Y = 1) + P(X = 0, Y = 2) = P(Y = 1|X = 1)P(X = 1) + P(Y = 2|X = 0)P(X = 0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} \times \frac{8}{15} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$$