Devoir à la maison n°7 : corrigé

Solution 1.

1. **a.** φ est deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en tant que produit de fonctions deux fois dérivables sur cet intervalle et pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\varphi''(t) = \cos(t)z''(t) - 2\sin(t)z'(t) - \cos(t)z(t)$$

b. D'après la question précédente, z est solution de (E) *si et seulement si* φ'' est nulle sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Or φ'' est nulle sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *si et seulement si* il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(t) = \lambda t + \mu$ pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que les solutions de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sont les fonctions

$$t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \frac{\lambda t + \mu}{\cos t} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

2. **a.** Puisque $z(t) = y(\sin t)$, pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $y(x) = z(\arcsin x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$. On en déduit que pour tout $x \in]-1, 1[$

$$y'(x) = \frac{z'(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} \qquad y''(x) = \frac{z''(\arcsin x)}{1-x^2} + \frac{xz'(\arcsin x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

b. y est solution de (F) *si et seulement si*

$$\forall x \in]-1, 1[, \ (1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$$

ce qui équivaut d'après la question précédente à

$$\forall x \in]-1, 1[, \ z''(\arcsin x) - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}z'(\arcsin x) - z(\arcsin x) = 0$$

Puisque sin prend toute les valeurs dans $]-1, 1[$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ceci équivaut encore à

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ z''(\arcsin(\sin t)) - \frac{2\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}z'(\arcsin(\sin t)) - z(\arcsin(\sin t)) = 0$$

Or pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ car cos est positive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\arcsin(\sin t) = t$. Finalement, y est solution de (F) *si et seulement si*

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ z''(t) - \frac{2\sin t}{\cos t}z'(t) - z(t) = 0$$

autrement dit, *si et seulement si* z est solution de (E).
Les solutions de (E) étant les fonctions

$$t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \frac{\lambda t + \mu}{\cos t} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

celles de (F) sont les fonctions

$$x \in]-1, 1[\mapsto \frac{\lambda \arcsin x + \mu}{\cos(\arcsin x)} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

ou encore les fonctions

$$x \in]-1, 1[\mapsto \frac{\lambda \arcsin x + \mu}{\sqrt{1-x^2}} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

3. **a.** Remarquons tout d'abord que f est deux fois dérivable en tant que solution d'une équation différentielle d'ordre 2.
De plus, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f''(x) = \frac{3xf'(x)}{1-x^2} + \frac{f(x)}{1-x^2}$$

Supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que f soit n fois dérivable sur $]-1, 1[$. A fortiori, f est $n-1$ fois dérivable sur $]-1, 1[$. f' est également $n-1$ fois dérivable sur $]-1, 1[$. Puisque $x \mapsto \frac{3x}{1-x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ sont indéfiniment dérivables donc a fortiori $n-1$ fois dérivables sur $]-1, 1[$, f'' est $n-1$ fois dérivable sur $]-1, 1[$. Autrement dit f est $n+1$ fois dérivable sur $]-1, 1[$.
Par récurrence, f est indéfiniment dérivable sur $]-1, 1[$.

b. Notons $\mathrm{HR}(n)$ l'hypothèse de récurrence suivante

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+3)xf^{(n+1)}(x)-(n+1)^2f^{(n)}(x)=0$$

$\mathrm{HR}(0)$ est vraie puisque f est solution de (F). Supposons que $\mathrm{HR}(n)$ soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors en dérivant (ceci est licite car les fonctions en jeu sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$), on obtient

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)f^{(n+3)}(x)-2xf^{(n+2)}(x)-(2n+3)xf^{(n+2)}(x)-(2n+3)f^{(n+1)}(x)-(n+1)^2f^{(n+1)}(x)=0$$

ou encore

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)f^{(n+3)}(x)-(2n+5)xf^{(n+2)}(x)-(n+2)^2f^{(n+1)}(x)=0$$

puisque $(n+1)^2+2n+3=n^2+4n+4=(n+2)^2$.
Par récurrence, $\mathrm{HR}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Remarque. On peut prouver directement la relation demandée sans récurrence à l'aide de la formule de Leibniz en dérivant n fois la relation

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)f''(x)-3xf'(x)-f(x)=0$$

■

c. En évaluant la relation de la question précédente en $x=0$, on obtient $a_{n+2}=(n+1)^2a_n$.

d. Récurrences sans aucune difficulté.

4. **a.** C'est du cours

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$$

b. g est bien solution de (F) (prendre $\lambda=1$ et $\mu=0$ dans la solution générale). On a évidemment $g(0)=0$. De plus, $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ de sorte que $g'(0)=1$. En reprenant les notations de la question précédente, $a_0=0$ et $a_1=1$. Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$a_{2p}=0 \qquad\qquad a_{2p+1}=2^{2p}\,(p!)^2$$

En appliquant la formule de Taylor-Young à g en 0 à l'ordre $2n+1$ (ceci est licite puisque g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'après la question **3.a**), on a donc

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{p=0}^{n} \frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}x^{2p+1} + o(x^{2n+1})$$

c. h est bien solution de (F) (prendre $\lambda=0$ et $\mu=1$ dans la solution générale). On a évidemment $h(0)=1$. De plus, $h(x) \underset{x\to 0}{=} 1+o(x)$ de sorte que $h'(0)=0$. En reprenant les notations de la question précédente, $a_0=1$ et $a_1=0$. Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$a_{2p}=\frac{((2p)!)^2}{2^{2p}\,(p!)^2} \qquad\qquad a_{2p+1}=0$$

En appliquant la formule de Taylor-Young à h en 0 à l'ordre $2n$ (ceci est licite puisque h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'après la question **3.a**), on a donc

$$h(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{p=0}^{n} \frac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}x^{2p} + o(x^{2n})$$

ou encore

$$h(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}}x^{2p} + o(x^{2n})$$

d. Puisque k est une primitive de h sur $]-1,1[$,

$$k(x) \underset{x\to 0}{=} k(0) + \sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{2p}{p}}{(2p+1)2^{2p}}x^{2p+1} + o(x^{2n+1})$$

et donc

$$k(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{2p}{p}}{(2p+1)2^{2p}}x^{2p+1} + o(x^{2n+1})$$

5. Le coefficient de x^{2n+1} dans le développement limité de g en 0 est $\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

D'autre part, dans le produit hk, un terme en x^{2n+1} est obtenu comme le produit d'un terme en x^{2p+1} dans le développement limité de k en 0 et d'un terme en $x^{2(n-p)}$ dans le développement limité de h en 0. Par unicité du développement limité

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{2p}{p}}{(2p+1)2^{2p}} \frac{\binom{2(n-p)}{n-p}}{2^{2(n-p)}} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

ou encore

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1} \binom{2p}{p} \binom{2(n-p)}{n-p} = \frac{2^{4n}}{(n+1)\binom{2n+1}{n}}$$