Devoir surveillé n° 2

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. On pose $A = \omega + \omega^4$ et $B = \omega^2 + \omega^3$.

1. Montrer que $A = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $B = 2\cos\frac{4\pi}{5}$.

2. Calculer $A+B$ et AB. En déduire les valeurs exactes de A et B.

3. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{3\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

Exercice 2.

1. On considère l'équation $(E) :\ (1+iz)^5 = (1-iz)^5$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

a. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\dfrac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1} = i\tan\theta$.

b. Déterminer les solutions complexes de (E) à l'aide des racines cinquièmes de l'unité. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction tan.

c. Développer $(1+iz)^5$ et $(1-iz)^5$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. En déduire les solutions de (E) sous une autre forme.

d. Déterminer le sens de variation de la fonction tan sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. En déduire les valeurs de $\tan\frac{\pi}{5}$ et $\tan\frac{2\pi}{5}$.

2. On se donne maintenant $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et on considère l'équation

$$(E_\alpha) :\ (1+iz)^5(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^5(1+i\tan\alpha)$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

a. Montrer que $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = e^{2i\alpha}$.

b. Résoudre l'équation $Z^5 = e^{2i\alpha}$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

c. En déduire les solutions de (E_α) que l'on exprimera à l'aide de la fonction tan.

Exercice 3.

1. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

2. Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ et u une racine carrée du produit $z_1 z_2$. Montrer que

$$|z_1| + |z_2| = \left|\frac{z_1 + z_2}{2} - u\right| + \left|\frac{z_1 + z_2}{2} + u\right|$$

3. Soit $m \in \mathbb{C}$. On note a et b les racines de l'équation $z^2 + 2mz + 1 = 0$. Montrer que $|a| + |b| = |m - 1| + |m + 1|$.

Exercice 4.

On pose $\varphi(z) = |z^3 - z + 2|$ pour $z \in \mathbb{C}$. On souhaite déterminer la valeur maximale de $\varphi(z)$ lorsque z décrit $\mathbb{U}$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$.

2. Soit $z \in \mathbb{U}$ et θ un de ses arguments. Exprimer $|z^3 - z + 2|^2$ uniquement en fonction de $\cos\theta$.

3. Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 2$$

Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. Répondre à la question initialement posée. On précisera pour quelle(s) valeur(s) de $z \in \mathbb{U}$ cette valeur maximale est atteinte.

Exercice 5.

Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et par $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n - x_n \end{cases}$. On pose $z_n = x_n + iy_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer z_0, z_1, z_2 et z_3.

2. Montrer que (z_n) est une suite géométrique. On donnera sa raison sous formes algébrique et exponentielle.

3. Exprimer $A_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$ en fonction de n à l'aide des fonctions cos et sin.

Exercice 6.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $D_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ki\theta}$ et $F_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} D_k(\theta)$.

1. Montrer que si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, $D_n(\theta) = \dfrac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

Préciser également la valeur de $D_n(\theta)$ lorsque $\theta \equiv 0[2\pi]$.

2. Montrer que si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, $F_n(\theta) = \dfrac{\sin^2\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

Préciser également la valeur de $F_n(\theta)$ lorsque $\theta \equiv 0[2\pi]$.