Devoir surveillé n°06

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

---

1. Supposons X ouvert. On sait que $X \subset \overline{X}$ donc $\mathring{X} \subset \overset{\circ}{\overline{A}} = \alpha(X)$. Comme X est ouvert, $\mathring{X} = X$ donc $X \subset \alpha(X)$.
Supposons X fermé. On sait que $\mathring{X} \subset X$ donc $\beta(X) = \overline{\mathring{X}} \subset \overline{X}$. Comme X est fermé, $\overline{X} = X$ donc $\beta(X) \subset X$.

2. Comme $\alpha(X)$ est ouvert en tant qu'intérieur, la question précédente permet d'affirmer que $\alpha(X) \subset \alpha(\alpha(X))$. Comme $\overline{X}$ est fermé, la question précédente permet d'affirmer que $\beta(\overline{X}) \subset \overline{X}$ ou encore $\overline{\alpha(X)} \subset \overline{X}$. Par conséquent, $\overset{\circ}{\overline{\alpha(X)}} \subset \overset{\circ}{\overline{X}}$ ou encore $\alpha(\alpha(X)) \subset \alpha(X)$. Par double inclusion, $\alpha(\alpha(X)) = \alpha(X)$.
Comme $\beta(X)$ est fermé en tant qu'adhérence, la question précédente permet d'affirmer que $\beta(\beta(X)) \subset \beta(X)$. Comme $\mathring{X}$ est ouvert, la question précédente permet d'affirmer que $\mathring{X} \subset \alpha(\mathring{X})$ ou encore $\mathring{X} \subset \overset{\circ}{\widehat{\beta(X)}}$. Par conséquent, $\overline{\mathring{X}} \subset \overline{\overset{\circ}{\widehat{\beta(X)}}}$ ou encore $\beta(X) \subset \beta(\beta(X))$. Par double inclusion, $\beta(\beta(X)) = \beta(X)$.

3. On sait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. On sait également que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc $\mathbb{R} \setminus \mathring{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ puis $\mathring{\mathbb{Q}} = \varnothing$.

4. Posons $X =]0,1[\cup]1,2[\cup\{3\} \cup ([4,5] \cap \mathbb{Q})$. Alors, en utilisant la question précédente,

$$
\begin{aligned}
\mathring{X} &=]0,1[\cup]1,2[\\
\overline{X} &= [0,2] \cup \{3\} \cup [4,5] \\
\alpha(X) &=]0,2[\cup]4,5[\\
\beta(X) &= [0,2] \\
\alpha(\mathring{X}) &=]0,2[\\
\beta(\overline{X}) &= [0,2] \cup [4,5]
\end{aligned}
$$

5. D'une part, $A \cap B \subset A$ donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$. D'autre part, $A \cap B \subset B$ donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$. Finalement, $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
Prenons $A = \{0\}\cup]1,2]$ et $B =]0,1[$. Alors

$$
\begin{aligned}
A \cap \overline{B} &= (\{0\}\cup]1,2]) \cap [0,1] = \{0\} \\
\overline{A \cap B} &= \varnothing \\
\overline{A} \cap \overline{B} &= (\{0\} \cup [1,2]) \cap [0,1] = \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Avec le même exemple, A n'est pas ouvert et on a bien $A \cap \overline{B} \not\subset \overline{A \cap B}$.

Solution 2

---

1. Posons $M_p = \dfrac{1}{p} I_n$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. La suite (M_p) est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$ et converge vers la matrice nulle qui n'est pas inversible. Par caractérisation séquentielle, $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas fermé.

2. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul. Ainsi $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$. Le singleton $\{0\}$ est fermé donc $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est ouvert. Comme l'application det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

3. Si M n'admet pas de valeurs propres strictement positives, alors $\chi_M(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On peut alors choisir $\rho > 0$ de manière arbitraite. Pour tout $\lambda \in]0, \rho[$, $\chi_M(\lambda) \neq 0$ i.e. $M - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{R})$.
Si M admet des valeurs propres strictement positives, on note ρ la plus petite d'entre elles. A nouveau, pour tout $\lambda \in]0, \rho[$, $\chi_M(\lambda) \neq 0$ i.e. $M - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{R})$.
Posons alors $M_p = M - \frac{\rho}{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. La suite (M_p) converge vers M et, d'après ce qui précède, est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$. Par caractérisation séquentielle, $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. **Première méthode.** Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Comme $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une suite (A_p) de matrices inversibles convergeant vers A. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda I_n - BA_p = A_p^{-1}(\lambda I_n - A_pB)A_p$ donc $\lambda I_n - BA_p$ et $\lambda I_n - A_pB$ sont semblables : elles ont donc même déterminant i.e. $\det(\lambda I_n - BA_p) = \det(\lambda I_n - A_pB)$. Mais $\lim_{p\to+\infty} \lambda I_n - BA_p = \lambda I_n - BA$ et $\lim_{p\to+\infty} \lambda I_n - A_pB = \lambda I_n - AB$ par continuité des endomorphismes $M \mapsto BM$ et $M \mapsto MB$ sur l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme det est continue, on obtient par caractérisation séquentielle, $\lim_{p\to+\infty} \det(\lambda I_n - BA_p) = \det(\lambda I_n - BA)$ et $\lim_{p\to+\infty} \det(\lambda I_n - A_pB) = \det(\lambda I_n - AB)$. Par unicité de la limite, $\det(\lambda I_n - BA) = \det(\lambda I_n - AB)$ i.e. $\chi_{BA}(\lambda) = \chi_{AB}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
Deuxième méthode. Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \chi_{AB}(\lambda)$ et $g : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \chi_{AB}(\lambda)$. Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $BA = A^{-1}ABA$ donc BA et AB sont semblables de sorte que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ i.e. $f(A) = g(A)$. De plus, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc les applications $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto MB$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto BM$ sont continues. Comme det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les applications f et g sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, elles coïncident sur $GL_n(\mathbb{R})$ qui est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $f = g$. Ainsi,

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$$

Comme deux polynômes qui coïncident sur un ensemble infini (en l'occurrence $\mathbb{R}$), sont égaux,

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \chi_{AB} = \chi_{BA}$$

Si on considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $AB = 0$ donc $\pi_{AB} = X$ mais $BA = B \neq 0$ donc $\pi_{BA} \neq X = \pi_{AB}$.

5. Si on pose $A = I_n$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-1} \end{array}\right)$, alors $\det(A) = 1$ et $\det(B) = -1$. Notamment, A et B appartiennent à $GL_n(\mathbb{R})$.
Si $GL_n(\mathbb{R})$ était connexe par arcs, $\det(GL_n(\mathbb{R}))$ serait un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle, car det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mais, d'après ce qui précède, cet intervalle contiendrait -1 et 1 et donc également 0. Ceci est absurde puisque les matrices inversibles sont de déterminants non nuls. Ainsi $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Solution 3

1. Tout d'abord, $u_n(0) = 0$ donc $\sum u_n(0)$ converge.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2x^2}$ donc $\sum u_n(x)$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.
La série $\sum u_n$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors u_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u_n'(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{(1+nx^2) - 2nx^2}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$$

On en déduit les variations de u_n sur $\mathbb{R}_+$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
$u_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$u_n(x)$	0	$\nearrow$	$u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	$\searrow$	0

Comme u_n est impaire et positive sur $\mathbb{R}_+$,

$$\|u_n\|_\infty = u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

On en déduit que $\sum \|u_n\|_\infty$ converge i.e. $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
A fortiori, $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et les fonctions u_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}$ donc S est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Les fonctions u_n sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a déjà montré que $\sum u_n$ convergeait simplement sur $\mathbb{R}$.
Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, par inégalité triangulaire,

$$|u_n'(x)| \leq \frac{1+nx^2}{n(1+nx^2)^2} = \frac{1}{n(1+nx^2)} \leq \frac{1}{n(1+na^2)}$$

Ainsi

$$\|u_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \frac{1}{n(1+na^2)}$$

Comme $\dfrac{1}{n(1+na^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2a^2}$, $\sum \dfrac{1}{n(1+na^2)}$ converge par comparaison à une série de Riemann puis $\sum \|u_n'\|_{\infty,[a,+\infty[}$ converge. Ainsi $\sum u_n'$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$. Ceci étant valable pour tout $a > 0$, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais comme S est impaire, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

4. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Posons $\alpha_\mathrm{N} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}$. Soit $x \in]0, \alpha_\mathrm{N}]$. Pour tout $n \in [\![1, \mathrm{N}]\!]$,

$$0 < 1 + nx^2 \leq 1 + \mathrm{N}x^2 \leq 2$$

donc

$$\frac{u_n(x)}{x} \geq \frac{1}{2n}$$

Ainsi

$$\frac{\mathrm{S_N}(x)}{x} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n}$$

Comme les u_n sont positives sur $\mathbb{R}_+$,

$$\forall x \in]0, \alpha_N],\ \frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_N(x)}{x} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

Mais comme les fonctions $x \mapsto \frac{S(x)}{x}$ et $x \mapsto \frac{S_N(x)}{x}$ sont impaires, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |x| \leq \alpha_N$,

$$\frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_N(x)}{x} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

On sait que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$. Fixons $M \in \mathbb{R}_+$. Il existe alors N tel que $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \geq M$. Mais alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $|x| \leq \alpha_N$, $\frac{S(x)}{x} \geq M$. Par définition de la limite, $\lim_{x\to 0^+}\frac{S(x)}{x} = +\infty$.
Comme $S(0) = 0$, $\lim_{x\to 0}\frac{S(x)-S(0)}{x-0} = +\infty$. La fonction S n'est donc pas dérivable en 0. On peut cependant affirmer que la courbe de S admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

Solution 4

1. Soit $x \in J$. Puisque $x > 0$, la suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{1+nx}}$ est décroissante et de limite nulle. D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum f_n(x)$ converge. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur J.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_{\infty,J} = \sup_{x\in J}\frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série à termes positifs divergente donc $\sum \|f_n\|_{\infty,J}$ diverge également. Autrement dit, $\sum f_n$ ne converge pas normalement.

3. Comme la série $\sum f_n$ converge simplement sur J, il suffit de montrer que la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle sur J. Posons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n$. D'après le critère spécial des séries alternées,

$$\forall x \in J,\ |R_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Ainsi

$$\|R_n\|_{\infty,J} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\|R_n\|_{\infty,J} = 0$ i.e. (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur J. Par conséquent, $\sum f_n$ converge uniformément sur J.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{+\infty} f_n = 0$ et $\lim_{+\infty} f_0 = 1$. Comme $\sum f_n$ converge uniformément sur $J = [1, +\infty[$, on peut utiliser le théorème d'interversion série/limite :

$$\lim_{+\infty}\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{+\infty} f_n = 1$$

5. **a.** Il s'agit à nouveau du critère spécial des séries alternées.

   b. Remarquons que

$$\forall x \in J,\ \varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right)$$

De plus,

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right| = \frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{\sqrt{1+nx}-\sqrt{nx}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+nx}+\sqrt{nx}\right)\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} \leq \frac{1}{2(nx)^{3/2}}$$

Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in \mathrm{J},\ \left|\varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2(nx)^{3/2}} = \frac{\mathrm{K}}{x^{3/2}}$$

en posant $\mathrm{K} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. On en déduit bien que

$$\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Solution 5

1. **a. Première méthode.** D'après le théorème du rang $\dim \mathrm{Ker}(p) + \dim \mathrm{Im}(p) = \dim \mathrm{E}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$. Alors $p(x) = 0_{\mathrm{E}}$ et il existe et $a \in \mathrm{E}$ tel que $x = p(a)$. Ainsi $p^2(a) = p(x) = 0_{\mathrm{E}}$. Mais comme $p^2 = p$, $x = p(a) = p^2(a) = 0_{\mathrm{E}}$. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0_{\mathrm{E}}\}$. On en déduit que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
Deuxième méthode. Comme $\mathrm{X} \wedge (\mathrm{X}-1) = 1$ et $\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)$ annule p, le lemme des noyaux donne

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(p^2 - p) = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$$

Comme $(p - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \circ p = 0$, $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$. On sait de plus que $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{Ker}(p) + \dim \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ et le théorème du rang donne $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{Ker}(p) + \dim \mathrm{Im}(p)$ donc $\dim \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \dim \mathrm{Im}(p)$ puis $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Im}(p)$ grâce à l'inclusion précédente. On en déduit que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

   b. Dans une base adaptée à la décomposition en somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$, la matrice de p est $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ où $r = \mathrm{rg}(p)$. On en déduit que $\mathrm{tr}(p) = r = \mathrm{rg}(p)$.

   c. Si $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{tr}(u)$, u n'est pas nécessairement un projecteur. Considérons par exemple l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il est clair que $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2$ donc $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{rg}(u)$ mais $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathrm{A}$ donc $u^2 \neq u$ et u n'est pas un projecteur.

2. Posons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 1$ et A est diagonale donc diagonalisable.
Posons $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{rg}(\mathrm{B}) = 1$. On a clairement $\chi_{\mathrm{B}} = \mathrm{X}^3$. Si B était diagonalisable, π_{B} serait scindé à racines simples mais, comme π_{B} divise χ_{B}, on aurait $\pi_{\mathrm{B}} = \mathrm{X}$ puis $\mathrm{B} = 0$, ce qui n'est pas. Ainsi B n'est pas diagonalisable.

3. **a.** Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ dans E. Comme $\mathrm{rg}\, u = 1$, $\dim \mathrm{Ker}\, u = n - 1$ d'après le théorème du rang et $\dim \mathrm{S} = 1$. Dans une base adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{S}$, la matrice de u est bien de la forme voulue.

   b. On notera $m_\lambda(u)$ la multiplicité d'une valeur propre λ dans χ_u et $\mathrm{E}_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.
Remarquons que $\chi_u = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - a_n)$. Si $\mathrm{tr}(u) = a_n = 0$, alors $\chi_u = \mathrm{X}^n$ et u n'est pas diagonalisable $m_0(u) = n \neq n - 1 = \dim \mathrm{Ker}(u) = \dim \mathrm{E}_0(u)$.
Supposons que $\mathrm{tr}(u) = a_n \neq 0$. Comme $\chi_u = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - a_n)$, $\mathrm{Sp}(u) = \{0, a_n\}$. De plus, $m_0(u) = \dim \mathrm{E}_0(u) = n - 1$ et $1 \leq \dim \mathrm{E}_{a_n}(u) \leq m_{a_n}(u) = 1$ donc $\dim \mathrm{E}_{a_n}(u) = m_{a_n}(u) = 1$. Ainsi u est diagonalisable.
Finalement, u est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(u) \neq 0$.

   c. Puisque $\mathrm{tr}(u) = 1 \neq 0$, u est diagonalisable d'après la question précédente. Ceci signifie que π_u est scindé à racines simples. De plus, $\chi_u = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - 1)$ donc $\mathrm{Sp}(u) = \{0, 1\}$. On en déduit que $\pi_u = \mathrm{X}(\mathrm{X} - 1)$. Comme π_u annule u, $u^2 = u$ et u est un projecteur.

   d. Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A. On vérifie que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ donc $u^2 = u$ et u est un projecteur. De plus, $\mathrm{Ker}\, \mathrm{A} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{Im}\, \mathrm{A} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc u est le projecteur sur $\mathrm{vect}((1, 1, 1))$ parallèlement à $\mathrm{vect}((1, -1, 0), (1, 0, 1))$.

Solution 6

1. **a.** On vérifie que $U^2 = V^2 = I_4$ donc $u^2 = v^2 = \mathrm{Id}$. De même, $UV = -VU$ donc $u \circ v = -v \circ u$.

   b. On trouve $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(U) = \mathrm{tr}(v) = \mathrm{tr}(V) = 0$. De plus $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ annule u et v donc u et v sont diagonalisables et $\mathrm{Sp}(u)$ et $\mathrm{Sp}(v)$ sont inclus dans $\{-1, 1\}$. Comme u est diagonalisables, $1 \times \dim E_1(u) + (-1) \times \dim E_{-1}(u) = \mathrm{tr}(u) = 0$ et $\dim E_1(u) + \dim E_{-1}(u) = 4$ donc $\dim E_1(u) = \dim E_{-1}(u) = 2$. Pour les mêmes raisons, $\dim E_1(v) = \dim E_{-1}(v) = 2$.

   c. On calcule

$$\dim E_1(U) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

   donc $E_1(u) = \mathrm{vect}(e_1, e_2)$ avec $e_1 = b_2$ et $e_2 = 3b_1 - 2b_3 - b_4$.
   On pourrait vérifier par le calcul que (e_3, e_4) est bien une base de $E_{-1}(u)$. Mais plus simplement, comme $u \circ v = -v \circ u$,

$$u(e_3) = u \circ v(e_1) = -v \circ u(e_1) = -v(e_1) = -e_3$$
$$u(e_4) = u \circ v(e_2) = -v \circ u(e_2) = -v(e_2) = -e_4$$

   Ainsi e_3 et e_4 appartiennent à $E_{-1}(u)$. De plus, v est un isomorphisme en tant que symétrie donc (e_3, e_4) est libre en tant qu'image de la famille libre (e_1, e_2) par v. Comme $\dim E_{-1}(u) = 2$, (e_3, e_4) est une base de $E_{-1}(u)$.
   On sait que (e_1, e_2) et (e_3, e_4) sont des bases respectives de $E_1(u)$ et $E_{-1}(u)$. Comme u est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(u) = \{-1, 1\}$, $E = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$. On en déduit que $\mathcal{E}$ est une base de E. Il est alors clair que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Par définition, $v(e_1) = e_3$ et $v(e_2) = e_4$. Comme $v^2 = \mathrm{Id}$, $v(e_3) = e_1$ et $v(e_4) = e_2$ donc

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On sait que $\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$ et que tr est linéaire. Comme $u \circ v = v \circ u$, $2\,\mathrm{tr}(u \circ v) = 0$ puis $\mathrm{tr}(u \circ v) = 0$.

3.

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(u) &= \mathrm{tr}(u \circ v^2) && \text{car } v^2 = \mathrm{Id} \\ &= \mathrm{tr}(v \circ u \circ v) && \text{par propriété de la trace} \\ &= \mathrm{tr}(-u \circ v \circ v) && \text{car } v \circ u = -u \circ v \\ &- \mathrm{tr}(u \circ v^2) && \text{par linéarité de la trace} \\ &= -\mathrm{tr}(u) \end{aligned}$$

   Ainsi $\mathrm{tr}(u) = 0$. De la même manière, $\mathrm{tr}(v) = 0$.

4. Comme $u^2 = \mathrm{Id}$, $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ annule u. Comme $(X-1) \wedge (X+1) = 1$, on a d'après le lemme des noyaux :

$$E = \mathrm{Ker}(u^2 - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}) = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$$

   Soit $x \in E$. Comme $u^2 = \mathrm{Id}$, $\frac{1}{2}(x + u(x)) \in E_1(u)$ et $\frac{1}{2}(x - u(x)) \in E_{-1}(u)$. De plus, $x = \frac{1}{2}(x + u(x)) + \frac{1}{2}(x - u(x))$.

5. Le polynôme scindé à racines simples $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ annule u donc u est diagonalisable. Notamment, $\mathrm{tr}(u) = \dim E_1(u) - \dim E_{-1}(u)$. Or $\mathrm{tr}(u) = 0$ donc $\dim E_1(u) = \dim E_{-1}(u)$. Enfin, $E = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$ donc $\dim E = 2k$ avec $k = \dim E_1(u) = \dim E_{-1}(u)$. Notamment, la dimension de E est paire.

6. Soit $x \in \mathrm{E}_1(u)$. Alors $v(x) = v \circ u(x) = -u \circ v(x)$ donc $v(x) \in \mathrm{E}_{-1}(u)$. Ainsi $v(\mathrm{E}_1(u)) \subset \mathrm{E}_{-1}(u)$. Mais v est un isomorphisme donc $\dim v(\mathrm{E}_1(u)) = \dim \mathrm{E}_1(u)$. Or on a vu à la question précédente que $\dim \mathrm{E}_1(u) = \dim \mathrm{E}_{-1}(u)$. Ainsi $v(\mathrm{E}_1(u)) \subset \mathrm{E}_{-1}(u)$ et $\dim v(\mathrm{E}_1(u)) = \dim \mathrm{E}_{-1}(u)$ donc $v(\mathrm{E}_1(u)) = \mathrm{E}_{-1}(u)$.
On prouve de la même manière que $v(\mathrm{E}_{-1}(u)) = \mathrm{E}_1(u)$.

7. Notons $(e_1, \dots, e_k)$ une base de $\mathrm{E}_1(u)$. Posons ensuite $e_{k+i} = v(e_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Comme v est un isomorphisme, $(e_{k+1}, \dots, e_{2k}) = (v(e_1), \dots, v(e_k))$ est une base de $v(\mathrm{E}_1(u)) = \mathrm{E}_{-1}(u)$. On sait également que $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1(u) \oplus \mathrm{E}_{-1}(u)$ donc $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{2k})$ est une base de E.
Comme $(e_1, \dots, e_k)$ et $(e_{k+1}, \dots, e_{2k})$ sont des bases respectives de $\mathrm{E}_1(u)$ et $\mathrm{E}_{-1}(u)$,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_k & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_k \end{array}\right)$$

De plus, $v(e_i) = e_{k+i}$ et $v(e_{k+i}) = v^2(e_i) = e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ donc

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(v) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_k \\ \hline \mathrm{I}_k & 0 \end{array}\right)$$