# Devoir surveillé n°02

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Exercice 1.

On pose $s = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $p = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

1. Montrer que $s = 2p$.
2. En calculant $p\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, déterminer la valeur de $p$ et en déduire celle de $s$.
3. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

## Exercice 2.

Résoudre le système linéaire $(\mathscr{S}) : \begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On distinguera plusieurs cas suivant les valeurs du paramètre réel $a$.

## Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$.
2. En déduire par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{n^{\frac{1}{3}}}$$

**Exercice 4.**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i}$.

1. Calculer $S_0$, $S_1$ et $S_2$.
2. Calculer les sommes $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} 2^k$.
3. En intervertissant l'ordre de sommation, calculer $S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 5.**

1. Soient $k, l, n$ des entiers naturels tels que $l \leqslant k \leqslant n$.
   - **a.** Montrer que $\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$.
   - **b.** En déduire que si $l < n$, $\sum_{k=l}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{l} = 0$.
2. Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites réelles vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k$$

**Exercice 6.**

On conviendra que si $k$ et $n$ sont deux entiers naturels tels que $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$.

1. Montrer que pour tout couple d'entiers naturels $(p, n)$ tels que $p \leqslant n$
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$
2. Donner des expressions de $\binom{k}{1}$, $\binom{k}{2}$ et $\binom{k}{3}$ *sans factorielles* valables pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que $k^3 = 6\binom{k}{3} + 6\binom{k}{2} + \binom{k}{1}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.
4. En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} k^3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ *sous forme factorisée.*