

# DEVOIR SURVEILLÉ N°07

- ▶ La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- ▶ On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- ▶ Les calculatrices sont interdites.

## EXERCICE 1.

Soient  $m$  et  $n$  des entiers naturels non nuls. On pose  $G = \{z_1 z_2, (z_1, z_2) \in \mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n\}$ .

1. Dans cette question uniquement, on pose  $m = 4$  et  $n = 6$ . Déterminer les éléments et le cardinal de  $\mathbb{U}_m$ ,  $\mathbb{U}_n$ ,  $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$  et  $G$ .
2. Montrer que  $\mathbb{U}_{m \wedge n} \subset \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$ .
3. À l'aide d'une relation de Bézout entre  $m$  et  $n$ , montrer que  $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_{m \wedge n}$ .
4. Montrer que  $G \subset \mathbb{U}_{m \vee n}$ .
5. À l'aide d'une relation de Bézout entre  $m$  et  $n$ , montrer que  $\mathbb{U}_{m \vee n} \subset G$ .

## EXERCICE 2.

1. Soient  $a$  et  $n$  des entiers strictement supérieurs à 1. On suppose que  $a^n + 1$  est un nombre premier.
  - a. Montrer que  $a$  est pair.
  - b. On suppose que  $n$  admet un diviseur positif impair  $m$  supérieur ou égal à 3. Il existe alors  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n = km$ . Montrer que  $a^k + 1$  divise  $a^n + 1$  et aboutir à une contradiction.
  - c. Que peut-on en déduire sur  $n$  ?
2. On pose pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n = 2^{2^n} + 1$ .
  - a. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$ .
  - b. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k$ .
  - c. Soit  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $m < n$ . Montrer que  $F_m \wedge F_n = 1$ .
3. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $p$  un nombre premier divisant  $F_n$  et distinct de  $F_n$ . On considère l'ensemble

$$A = \{k \in \mathbb{N}^*, 2^k \equiv 1[p]\}$$

- a. Montrer que  $2^{n+1} \in A$ .
- b. Justifier que  $A$  admet un minimum que l'on notera  $m$ .
- c. En écrivant la division euclidienne de  $2^{n+1}$  par  $m$ , montrer que  $m$  divise  $2^{n+1}$ .
- d. Montrer que  $m = 2^{n+1}$ .
- e. Justifier que  $p - 1 \in A$ .
- f. En déduire que  $p \equiv 1[2^{n+1}]$ .

**EXERCICE 3.**

On note  $E = \mathbb{R}^3$  et on définit les ensembles

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = x - y - z = 0\}$$

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .
2. Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .
3. Déterminer les projetés du vecteur  $(1, 2, 3)$  sur  $F$  parallèlement à  $G$  et sur  $G$  parallèlement à  $F$ .

**EXERCICE 4.**

On considère les équations différentielles

$$(\mathcal{E}): y^{(4)} - y = 0$$

$$(\mathcal{F}): y'' - y = 0$$

$$(\mathcal{G}): y'' + y = 0$$

On note  $E, F$  et  $G$  les ensembles respectifs des solutions à valeurs *réelles* de  $(\mathcal{E}), (\mathcal{F})$  et  $(\mathcal{G})$ .

1. Résoudre  $(\mathcal{F})$  et  $(\mathcal{G})$ .
2. Montrer que toute solution de  $(\mathcal{E})$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que  $F \subset E$  et  $G \subset E$ .
4. Montrer que  $E, F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
5. On se donne  $f \in E$ . Montrer que  $f'' + f \in F$  et  $f'' - f \in G$ .
6. En déduire que  $E = F \oplus G$ .
7. En déduire la forme générale des solutions de  $(\mathcal{E})$ .

**EXERCICE 5.**

On note

$$E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} + u_{n+2} + u_n = 0\}$$

$$F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0\}$$

$$G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0\}$$

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
2. Montrer que  $F \subset E$  et que  $G \subset E$ .
3. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  et en déterminer des familles génératrices.
4. Soit  $u \in E$ . On définit les suites  $v$  et  $w$  par  $v_n = u_{n+2} - u_{n+1} + u_n$  et  $w_n = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $v \in F$  et que  $w \in G$ .
5. Montrer que  $E = F \oplus G$ .
6. En déduire la forme générale des éléments de  $E$ .