Devoir à la maison n°11

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1 **E3A MP 2010**

On étudie dans cet exercice des équations de la forme

$$(\mathcal{E}_{p,q}) : \ \mathrm{M}^2 + p\mathrm{M} + q\mathrm{I}_n = 0$$

où l'inconnue M est une matrice carrée de taille n à coefficients *réels* ($\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), p et q sont deux paramètres réels et I_n désigne la matrice identité de taille n.

1. Pour une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$\mathrm{E}(\mathrm{M}) = \left\{\mathrm{PMP}^{-1}\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$$

Démontrer que si M est solution de l'équation $(\mathcal{E}_{p,q})$, alors toute matrice de E(M) est également solution.

Dans la suite, les ensembles de solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{p,q})$ *pourront être écrits sous la forme d'une réunion d'ensembles* $\mathrm{E}(\mathrm{A})$, $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{-(a+b),an})$:

$$\mathrm{M}^2 - (a+b)\mathrm{M} + ab\mathrm{I}_n = 0$$

avec a et b deux réels *distincts*.

a. Démontrer que toute solution M de l'équation est diagonalisable (on énoncera complètement lé théorème utilisé).

b. Déterminer les solutions de l'équation $\mathcal{E}_{-(a+b),ab}$.

3. On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{0,0})$ (c'est-à-dire l'équation $\mathrm{M}^2 = 0$).

a. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M. Démontrer que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$.

b. Enoncer précisément le théorème du rang.

c. Démontrer que $\mathrm{rg}\, f \leq \dfrac{n}{2}$.

d. On pose $p = \mathrm{rg}\, f$. Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \mathrm{I}_p & 0 \end{array}\right)$$

e. En déduire les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{0,0})$.

4. On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{-2a,a^2})$:

$$\mathrm{M}^2 - 2a\mathrm{M} + a^2\mathrm{I}_n = 0$$

avec a un réel.

a. Démontrer que M est solution si et seulement si $\mathrm{N} = \mathrm{M} - a\mathrm{I}_n$ vérifie $\mathrm{N}^2 = 0$.

b. En déduire les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{-2a,a^2})$.

5. Démontrer que si n est impair, l'équation $\mathrm{M}^2 + \mathrm{I}_n = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. On considère l'équation $(\mathcal{E}_{0,1})$ (c'est-à-dire l'équation $\mathrm{M}^2 + \mathrm{I}_n = 0$). On suppose que n est pair et on note $n = 2p$.

a. Démontrer que toute solution M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

b. Démontrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\mathrm{I}_p \\ \hline \mathrm{I}_p & 0 \end{array}\right)$$