

# LIMITE ET CONTINUITÉ DE FONCTIONS

## SOLUTION 1.

Pour tout  $x \neq 0$ , on a :

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$$

d'où, puisque  $x^2 > 0$ ,

$$x - x^2 < f(x) \leq x$$

et donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

## SOLUTION 2.

1. a. Pour tout  $x > 1$ , on a :

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$$

donc  $f(x) = 0$ . Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

b. Pour tout réel  $x$ , on a :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

et pour tout  $x > 0$ , on aboutit à :

$$1 - \frac{1}{x} < g(x) \leq 1.$$

On déduit alors du théorème des gendarmes que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1.$$

2. Pour tout  $x > 0$ , on a

$$f(x) = g(1/x),$$

et on a vu que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = 1.$$

Comme  $u = 1/x$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $0+$ , on déduit du théorème de composition de limites que

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1.$$

3. On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$h(n) = 1$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(n) = 1.$$

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a aussi

$$h(n+1/2) = \frac{(n+1/2)^{n+1/2}}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \sqrt{n+1/2}$$

et donc :

$$h(n+1/2) \geq \sqrt{n+1/2}.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(n+1/2) = +\infty \neq 1.$$

Comme les deux suites  $(n)_{n \geq 1}$  et  $(n+1/2)_{n \geq 1}$  tendent vers  $+\infty$ , on déduit du critère séquentiel sur les limites que  $h$  n'admet aucune limite en  $+\infty$ .

**SOLUTION 3.**

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f$  est croissante et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0,$$

il existe  $M \geq 1$  tel que

$$\forall x \geq M, \quad 0 \leq f(x) - f(x-1) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit  $x \geq M$ . Notons  $n = \lfloor x - M \rfloor$ . On a alors les  $n + 1$  inégalités suivantes

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq f(x-k) - f(x-k-1) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En sommant ces inégalités, on aboutit après télescopage à

$$0 \leq f(x) - f(x-n-1) \leq (n+1) \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme  $n = \lfloor x - M \rfloor \leq x - M$ , on a en divisant par  $x > 0$  et en remarquant que  $x - n \leq x$ ,

$$0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(x-n-1)}{x} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or,

$$n \leq x - M < n + 1$$

ainsi

$$M - 1 \leq x - n - 1 < M$$

et donc, par croissance de  $f$ , on a

$$f(x-n-1) \leq f(M)$$

et ainsi, pour  $x \geq M$ ,

$$0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(M)}{x} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En choisissant  $x \geq \max(1, 2f(M)/\varepsilon)$ , on a alors

$$0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a prouvé que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

**SOLUTION 4.**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

► Si  $x \in \mathbb{Q}$ , il existe  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tel que  $x = p/q$  et

$$\forall n \geq q, \quad |\cos(n!\pi x)| = 1$$

car  $q$  divise alors  $n!$  et  $n!\pi x \in \pi\mathbb{Z}$ . Ainsi

$$f(x) = 1.$$

► Si  $x \notin \mathbb{Q}$ , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n!\pi x \notin \pi\mathbb{Z}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\cos(n!\pi x)| < 1$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} |\cos(n!\pi x)|^m = 0$$

et donc

$$f(x) = 0.$$

On a prouvé que  $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ , fonction indicatrice de  $\mathbb{Q}$ .

#### SOLUTION 5.

Montrons d'abord que pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(2^n)}{n} = 0$ . Posons  $u_n = f(2^{n+1}) - f(2^n)$ . Par hypothèse,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

$$\frac{f(2^n)}{n} = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}}{n} + \frac{f(1)}{n}$$

Le lemme de Césaro nous dit alors que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(2^n)}{n} = 0$ . Soit maintenant  $x \in ]1; +\infty[$ . Il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $2^n \leq x < 2^{n+1}$  : il suffit de prendre  $n = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \right\rfloor$ .

$$0 \leq \frac{f(x)}{\ln x} \leq \frac{f(2^{n+1})}{n \ln 2}$$

Or  $n \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$  et  $\frac{f(2^{n+1})}{n \ln 2} \rightarrow 0$  d'après ce qui précède.

#### SOLUTION 6.

Notons  $l$  la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Soient  $T$  une période de  $f$  et  $x \in D_f$ . Comme  $x + nT \rightarrow +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + nT) = l$ . Mais la suite  $(f(x + nT))_{n \in \mathbb{N}}$  est constante égale à  $f(x)$ . D'où  $f(x) = l$ .

#### SOLUTION 7.

Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Comme la suite  $(f(n))$  tend vers  $+\infty$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $f(N) \geq A$ . Mais comme  $f$  est croissante, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$

$$x \geq N \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(N) \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq A$$

Ce raisonnement étant valable pour tout  $A \in \mathbb{R}$ , on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

#### SOLUTION 8.

1. D'après le théorème de la limite monotone,  $f$  admet en  $+\infty$  une limite  $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ . Donc  $f(x) + f(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2l$ . Or  $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . D'où  $l = 0$ .

2. Comme  $f$  est décroissante,  $f(x) + f(x+1) \leq 2f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . De même,  $2f(x) \leq f(x-1) + f(x)$ . Donc, pour  $x \geq 0$

$$x[f(x) + f(x+1)] \leq 2xf(x) \leq x[f(x-1) + f(x)]$$

Or  $f(x) + f(x+1) \sim \frac{1}{x}$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(f(x) + f(x+1)) = 1$ . Comme  $x-1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ , on a également  $f(x) + f(x-1) \sim \frac{1}{x-1} \sim \frac{1}{x}$ . Par conséquent,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[f(x-1) + f(x)] = 1$ . Par le théorème des gendarmes,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xf(x) = 1$  et donc  $f(x) \sim \frac{1}{2x}$ .

#### SOLUTION 9.

► Puisque la fonction partie entière est continue en tout point de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , la fonction  $f$  est continue en tout point de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

- Il reste à examiner la continuité en  $n \in \mathbb{Z}$ . Puisque sur  $[n, n+1[$ ,  $f(x) = n + \sqrt{x-n}$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow n+} f(x) = n = f(n).$$

Comme sur  $]n-1, n[$ ,  $f(x) = n-1 + \sqrt{x-n+1}$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow n-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n+} f(x) = n = f(n).$$

La fonction est donc continue à droite et à gauche en  $n$ , elle est donc continue en  $n$ .

- La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

#### SOLUTION 10.

- Puisque la fonction partie entière est continue en tout point de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , la fonction  $f$  est continue en tout point de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .
- Il reste à examiner la continuité en  $n \in \mathbb{Z}$ . Puisque sur  $[n, n+1[$ ,  $f(x) = n \sin(\pi x)$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow n+} f(x) = 0 = f(n).$$

Comme sur  $]n-1, n[$ ,  $f(x) = (n-1) \sin(\pi x)$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow n-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n+} f(x) = 0 = f(n).$$

La fonction est donc continue à droite et à gauche en  $n$ , elle est donc continue en  $n$ .

- La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

#### SOLUTION 11.

La fonction  $x \mapsto (-1)^{E(x)}$  est constante au voisinage de tout point non entier donc continue en ces points. La fonction  $x \mapsto x - E(x) - \frac{1}{2}$  est également continue en tout point non entier.  $f$  est donc continue en tout point non entier. Soit  $n \in \mathbb{Z}$ .

- Pour  $x \in [n-1, n[$ ,  $E(x) = n-1$  donc  $\lim_{x \rightarrow n-} f(x) = (-1)^{n-1} \left( n - (n-1) - \frac{1}{2} \right) = (-1)^{n-1} \frac{1}{2}$ .
- Pour  $x \in [n, n+1[$ ,  $E(x) = n$  donc  $\lim_{x \rightarrow n+} f(x) = (-1)^n \left( n - n - \frac{1}{2} \right) = (-1)^{n-1} \frac{1}{2}$ .

Ainsi  $\lim_{x \rightarrow n-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n+} f(x) = f(n) = (-1)^{n-1} \frac{1}{2}$ .  $f$  est donc continue en  $n$ .

Finalement  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

#### SOLUTION 12.

1. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

- **Premier cas :**  $x_0$  est irrationnel, donc  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_0) = 0$ . Par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ , il existe une suite de rationnels  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $x_0$  et par conséquent,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(q_n) = 1 \neq 0$ . Ainsi  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$  n'est pas continue en  $x_0$ .

- **Deuxième cas :**  $x_0$  est rationnel, donc  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_0) = 1$ . Cette fois, il existe une suite d'irrationnels  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $x_0$  et, cette fois encore,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(z_n) = 0 \neq 1$ . Ainsi  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$  n'est pas continue en  $x_0$ .
2. Comme  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$  est bornée,  $f(x) = \mathcal{O}(x^2)$  et a fortiori,  $f(x) = o(x)$ . Ainsi  $f$  admet un développement limité d'ordre 1 en 0 : elle est donc dérivable en 0 (et  $f'(0) = 0$ ). A fortiori,  $f$  est continue en 0.  
Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ . Si  $f$  était continue en  $x_0$ , alors  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$  serait aussi continue en  $x_0$ , puisque la fonction  $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$  est continue en  $x_0$  et que  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = fg$ . Par conséquent, la fonction  $f$  n'est continue en aucun autre point que 0.

**SOLUTION 13.**

1. Notons  $D = ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ . Soit  $x \in D$ . Alors  $\ln x$  est bien défini et  $x(\ln x)^2 + 1 > 0$ . De plus,  $\ln x \neq 0$  donc  $\frac{1}{\ln x}$  est bien défini. Ainsi  $f(x)$  est bien défini.  $f$  est donc définie sur  $D$ .
2. On a pour  $x \in D$  :

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{\ln x} \ln[x(\ln x)^2 + 1]\right)$$

$x \mapsto x(\ln x)^2 + 1$  est continue sur  $D$  comme produit et somme de fonctions continues et prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Comme  $\ln$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $x \mapsto \ln[x(\ln x)^2 + 1]$  est continue sur  $D$  par composition de fonctions continues. De plus,  $\ln$  est continue et ne s'annule pas sur  $D$  donc  $x \mapsto \frac{1}{\ln x} \ln[x(\ln x)^2 + 1]$  est continue sur  $D$ .  $\exp$  étant continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est continue sur  $D$ .

3. Comme  $x(\ln x)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  par croissances comparées,  $\ln[x(\ln x)^2 + 1] \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x(\ln x)^2$ . On a donc :

$$\frac{1}{\ln x} \ln[x(\ln x)^2 + 1] \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln x$$

Or  $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

On a à nouveau  $x(\ln x)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$  donc  $\ln[x(\ln x)^2 + 1] \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x(\ln x)^2 \underset{x \rightarrow 1}{\sim} (\ln x)^2$ . Par conséquent :

$$\frac{1}{\ln x} \ln[x(\ln x)^2 + 1] \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \ln x$$

Or  $\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ . On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ .

Comme  $f$  admet des limites finies en 0 et 1,  $f$  est prolongeable par continuité en 0 et 1.

4. On met en facteur le terme prépondérant dans l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \ln[x(\ln x)^2 + 1] &= \ln\left[x(\ln x)^2 \left(1 + \frac{1}{x(\ln x)^2}\right)\right] \\ &= \ln[x(\ln x)^2] + \ln\left[1 + \frac{1}{x(\ln x)^2}\right] \\ &= \ln x + 2\ln(\ln x) + \ln\left[1 + \frac{1}{x(\ln x)^2}\right] \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x \end{aligned}$$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} \ln[x(\ln x)^2 + 1] = 1$ . On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e$ .

**SOLUTION 14.**

Soit  $x_0 > 0$ . Il existe deux réels strictement positifs  $a$  et  $b$  tels que  $x_0 \in [a, b]$  et, sur le segment  $[a, b]$ , la fonction  $f$  est croissante, majorée (par  $f(b)$ ) et minorée (par  $f(a)$ ). Elle possède donc une limite à gauche finie et une limite à droite finie en  $x_0$ . Posons

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \text{et} \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Comme  $f$  est croissante, alors  $\ell_1 \leq \ell_2$ .

Par composition des limites, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)}{x} = \frac{\ell_1}{x_0} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{x} = \frac{\ell_2}{x_0}.$$

Or la fonction  $x \mapsto f(x)/x$  est décroissante, donc

$$\frac{\ell_2}{x_0} \leq \frac{\ell_1}{x_0}.$$

Mais  $x_0 > 0$ , donc

$$\ell_2 \leq \ell_1$$

et par conséquent,  $\ell_1 = \ell_2$ , ce qui signifie que  $f$  est continue en  $x_0$ .

### SOLUTION 15.

La fonction  $g$  définie par

$$g(t) = f(t) - f\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

est continue (par continuité de  $f$ ) et, puisque  $T$  est une période de  $f$ ,

$$g(T/2) = f(T/2) - f(T) = -f(0) + f(T/2) = -g(0).$$

Par conséquent,

- ou bien  $g(0) = g(T/2) = 0$  et donc  $f(0) = f(T/2)$ ,
- ou bien  $g$  change de signe sur l'intervalle  $[0, T/2]$  et, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel  $t_0 \in [0, T/2]$  tel que  $g(t_0) = 0$ , donc tel que  $f(t_0) = f(t_0 + T/2)$ .

### SOLUTION 16.

Notons, pour tout  $x \in [0, 7/10]$ ,

$$g(x) = f(x + 3/10) - f(x).$$

La fonction  $g$  est continue en tant que somme de deux fonctions continues et ne s'annule pas. On déduit alors du théorème des valeurs intermédiaires qu'elle est de signe constant sur l'intervalle  $[0, 7/10]$ . Quitte à considérer  $-f$  plutôt que  $f$ , on peut supposer que  $g > 0$ . On remarque alors que

$$g(0) = f(3/10) - f(0) = f(3/10) > 0,$$

$$g(0) + g(3/10) = f(6/10) - f(0) = f(6/10) > 0,$$

$$g(0) + g(3/10) + g(6/10) = f(9/10) - f(0) = f(9/10) > 0$$

et

$$g(7/10) = f(1) - f(7/10) = -f(7/10) > 0,$$

$$g(7/10) + g(4/10) = f(1) - f(4/10) = -f(4/10) > 0,$$

$$\begin{aligned} g(7/10) + g(4/10) + g(1/10) &= f(1) - f(1/10) \\ &= -f(1/10) > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction continue  $f$  s'annule sur les intervalles

$$]1/10, 3/10[, \quad ]3/10, 4/10[, \quad ]4/10, 6/10[, \quad ]6/10, 7/10[$$

et  $]7/10, 9/10[$ . Comme  $f(0) = f(1) = 0$ , on en déduit que  $f$  s'annule au moins 7 fois sur  $[0, 1]$ .

**SOLUTION 17.**

Posons  $I = [a, b]$  et notons  $g$  l'application  $g(t) = f(t) - t$ . De l'inclusion  $I \subset f(I)$ , on déduit l'existence de  $c$  et  $d$  appartenant à  $[a, b]$  tels que  $f(c) = a$  et  $f(d) = b$ . Nous avons  $g(c) = f(c) - c = a - c \leq 0$  et  $g(d) = f(d) - d = b - d \geq 0$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $t_0 \in [c, d]$  tel que  $g(t_0) = 0$ , c'est-à-dire  $f(t_0) = t_0$ .

**SOLUTION 18.**

Si  $f(0) = 0$ , alors  $f$  admet un point fixe. Sinon  $f(0) > 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l < 1$ ,  $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$  prend la valeur 1 sur  $\mathbb{R}_+^*$  i.e.  $f$  admet un point fixe.

**SOLUTION 19.**

Soit  $g \begin{cases} [0, 1 - \frac{1}{n}] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x + \frac{1}{n}) - f(x) \end{cases}$ . Il suffit donc de prouver que  $g$  s'annule.  $g$  est continue et

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0$$

Les  $g\left(\frac{k}{n}\right)$  ne peuvent pas être tous strictement positifs ou négatifs, donc il existe  $k_1, k_2 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  tels que  $g\left(\frac{k_1}{n}\right) \leq 0$  et  $g\left(\frac{k_2}{n}\right) \geq 0$ . Si  $k_1 = k_2$ ,  $g$  s'annule évidemment et si  $k_1 \neq k_2$ ,  $g$  s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

**SOLUTION 20.**

Posons  $m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$ . Quitte à permuter les  $x_i$ , ce qui ne change pas la valeur de  $m$ , on peut supposer  $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_n)$ .

On a alors

$$f(x_1) \leq m \leq f(x_n)$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $x \in [x_1, x_n] \subset [0, 1]$  tel que  $f(x) = m$ .

**SOLUTION 21.**

Soit  $g: x \mapsto f(x) - x$ .

Puisque  $f$  est décroissante,  $f$  admet une limite finie ou une limite égale à  $-\infty$  en  $+\infty$ . Dans les deux cas,  $\lim_{+\infty} g = -\infty$ .

De même,  $f$  admet une limite finie ou une limite égale à  $+\infty$  en  $-\infty$ . Dans les deux cas,  $\lim_{-\infty} g = +\infty$ .

Comme  $g$  est continue,  $g$  s'annule sur  $\mathbb{R}$  d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

De plus,  $g$  est strictement décroissante donc injective. Elle s'annule donc exactement une fois, ce qui prouve que  $f$  admet un unique point fixe.

**SOLUTION 22.**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par

$$g(t) = f(t) - t.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que  $g$  ne s'annule pas sur  $[0, 1]$ . Puisque  $g$  est continue sur cet intervalle, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que  $g$  est de signe constant sur  $[0, 1]$ , par exemple positif. On sait qu'alors

$$\int_0^1 g(t) dt > 0$$

ce qui est absurde car

$$\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 tdt = \int_0^1 f(t)dt - 1/2 = 0$$

### SOLUTION 23.

---

Posons  $g : x \mapsto f(x) - x$ . On a  $g(a) = f(a) - a$  et  $g(f(a)) = a - f(a) = -g(a)$ . Donc  $g$  s'annule entre  $a$  et  $f(a)$  i.e.  $f$  a un point fixe entre  $a$  et  $f(a)$ .

### SOLUTION 24.

---

D'après la définition de la limite, il existe  $A \geq 0$  tel que

$$\forall x \geq A, |f(x) - \ell| \leq 1,$$

ainsi  $\forall x \geq A$ ,

$$|f(x)| \leq 1 + |\ell|.$$

De plus,  $f$  étant continue sur le segment  $[0, A]$ , elle est bornée sur cet intervalle : il existe un nombre réel  $M \geq 0$  tel que  $\forall t \in [0, A]$ ,

$$|f(t)| \leq M.$$

En posant

$$M' = \max(|\ell| + 1, M),$$

on a pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$|f(x)| \leq M'.$$

### SOLUTION 25.

---

La fonction  $h = g - f$  rest continue sur le segment  $[a, b]$  donc est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe  $c \in [a, b]$  tel que

$$\forall x \in [a, b], h(x) \geq h(c) > 0.$$

En posant  $m = \frac{h(c)}{2}$ , on obtient le résultat demandé.

### SOLUTION 26.

---

Comme  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ , il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x < A, f(x) > f(0)$ . De même, il existe  $B \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x > B, f(x) > f(0)$ . Remarquons qu'on a nécessairement  $A < 0$  et  $B > 0$ . De plus,  $f$  étant continue sur  $[A, B]$ ,  $f$  est minorée sur  $[A, B]$  et atteint sa borne inférieure  $m$  sur  $[A, B]$ . Comme  $0 \in [A, B]$ , on a  $m \leq f(0)$ . Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq m$ .  $f$  est donc minorée sur  $\mathbb{R}$  par  $m$  et  $m$  est atteint sur le segment  $[A, B]$ .

### SOLUTION 27.

---

Posons  $\forall x \in [a, b], g(x) = f(x) - x$ . La fonction  $g$  est continue,  $g(a) = f(a) - a \geq 0$  et  $g(b) = f(b) - b \leq 0$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $g(c) = 0$ , c'est-à-dire  $f(c) = c$ .



**SOLUTION 28.**

Notons  $I = [a; b]$ .  $f$  étant continue, elle atteint ses bornes sur  $I$  : il existe  $c, d \in I$  tels que

$$f(c) = \min_I f \text{ et } f(d) = \max_I f.$$

Comme  $I \subset f(I)$  et  $c, d \in I$ , on a

$$f(c) \leq a \leq c \text{ et } f(d) \geq b \geq d.$$

Par conséquent,  $f(c) - c \leq 0$  et  $f(d) - d \geq 0$ . Le théorème des valeurs intermédiaires appliquées à la fonction continue  $x \mapsto f(x) - x$  entre  $c$  et  $d$  nous donne le résultat.

**SOLUTION 29.**

1. De l'inclusion  $I \subset f(I)$ , on déduit l'existence de  $c$  et  $d$  appartenant à  $[a, b]$  tels que  $f(c) = a$  et  $f(d) = b$ .  $f$  prend donc les valeurs  $a$  et  $b$  sur  $I$ .
2. Notons  $g$  l'application définie par  $g(t) = f(t) - t$  pour  $t \in [a, b]$ . Nous avons  $g(c) = f(c) - c = a - c \leq 0$  et  $g(d) = f(d) - d = b - d \geq 0$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $t_0 \in [c, d]$  tel que  $g(t_0) = 0$ , c'est-à-dire  $f(t_0) = t_0$ .  $f$  admet donc un point fixe sur  $I$ .

**SOLUTION 30.**

1. C'est un classique. On a  $f(0) \in [0, 1]$  donc  $f(0) \geq 0$ . De même,  $f(1) \in [0, 1]$  donc  $f(1) \leq 1$ . Ainsi l'application continue  $x \mapsto f(x) - x$  prend une valeur positive et une valeur négative sur  $[0, 1]$ . Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que cette application s'annule sur  $[0, 1]$  i.e. que  $f$  admet un point fixe.
2. D'après la première question,  $F$  est non vide. De plus,  $F \subset [0, 1]$  donc  $F$  est borné. Ainsi  $F$  admet une borne inférieure  $a$  et une borne supérieure  $b$ . Il existe donc deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  d'éléments de  $F$  convergeant respectivement vers  $a$  et  $b$ . On a  $f(a_n) = a_n$  et  $f(b_n) = b_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $f$  est continue, on a  $f(a) = a$  et  $f(b) = b$  par passage à la limite. Ainsi  $a, b \in F$  donc  $a = \min F$  et  $b = \max F$ .
3. Soit  $x \in F$ . Alors  $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$  car  $f(x) = x$ . Ainsi  $g(x)$  est un point fixe de  $f$ .
4. Supposons que  $f - g$  ne s'annule pas sur  $[0, 1]$ . Alors  $f - g$  est de signe constant sur  $[0, 1]$ .  
Supposons que  $f - g > 0$ . On a donc  $f(a) > g(a)$  et donc  $g(a) < a$  car  $a$  est un point fixe de  $f$ . Or, d'après la question précédente,  $g(a)$  est également un point fixe de  $f$ . Mais  $a$  est le plus petit point fixe de  $f$  : il y a contradiction.  
Supposons que  $f - g < 0$ . On a donc  $f(b) < g(b)$  et donc  $g(b) > b$  car  $b$  est un point fixe de  $f$ . Or, d'après la question précédente,  $g(b)$  est également un point fixe de  $f$ . Mais  $b$  est le plus grand point fixe de  $f$  : il y a également contradiction.  
Par conséquent  $f - g$  s'annule sur  $[0, 1]$ .

**SOLUTION 31.**

1. Notons  $l$  la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $x \geq A$ ,  $|f(x) - l| < \varepsilon$ . Soit  $T$  une période de  $f$ . Pour tout  $x \in [A; A+T]$ ,  $|f(x) - l| < \varepsilon$ . La dernière égalité est vraie sur une période donc sur  $\mathbb{R}$  tout entier. En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient que  $f$  est constante égale à  $l$ .
2. Notons  $P$  l'ensemble des périodes de  $f$  et posons  $p = \inf P$ . Il s'agit donc de prouver que  $p \in P$ . Il existe une suite  $(t_n)$  d'éléments de  $P$  tendant vers  $p$ .

- Supposons  $p > 0$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(x + t_n) = f(x)$ . Par continuité de  $f$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x + p) = f(x)$  et donc  $p \in \mathbb{P}$ .
  - Supposons  $p = 0$ . Comme  $f$  est non constante, il existe  $y \in \mathbb{R}$  tel que  $f(y) \neq f(0)$ . Posons  $\varepsilon = |f(y) - f(0)|$ . Par continuité de  $f$  en 0, il existe  $\alpha > 0$  tel que, pour tout  $x \in [0; \alpha]$ ,  $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ . Comme  $(t_n)$  converge vers 0, il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $0 < t_k \leq \alpha$ . L'intervalle de période  $[0; t_k[$  contient un  $z$  tel que  $f(z) = f(y)$ . Comme  $z \in [0; \alpha]$ ,  $|f(z) - f(0)| < \varepsilon$  mais  $|f(z) - f(0)| = |f(y) - f(0)| = \varepsilon$  : il y a donc contradiction et  $p$  ne peut être égal à 0.
3. Soit  $T$  une période de  $f$ .  $f$  est bornée et atteint ses bornes sur l'intervalle compact  $[0; T]$ . Par périodicité,  $f$  est bornée et atteint ses bornes sur  $\mathbb{R}$ .

**SOLUTION 32.**

1. Remarquons que la fonction  $g$  définie sur  $[0, 1]$  par  $g(y) = y^5 + y$  est strictement croissante sur ce segment. Puisqu'elle est continue, elle réalise une bijection de  $[0, 1]$  sur  $[0, 2]$ . On a donc, pour tout  $1 \leq x \leq 2$  et  $\forall y \in [0, 1]$ ,  $g(y) = y^5 + y = x$  si et seulement si  $y = g^{-1}(x)$ . La fonction  $f$  existe donc et est unique car  $f = g^{-1}$ .
2. La fonction  $f$  étant la bijection réciproque d'une fonction continue, elle est continue.

**SOLUTION 33.**

1. Puisque  $f \circ f = id_{[0,1]}$ ,  $f$  est une bijection de l'intervalle  $[0, 1]$  sur lui-même. En tant que bijection continue sur un intervalle, elle est strictement monotone (cf. le cours). Raisonnons par l'absurde en supposant  $f$  strictement décroissante. On aurait alors  $0 = f(0) > f(1)$  et donc  $f(1) < 0$  ce qui est absurde car  $f$  est à valeurs dans  $[0, 1]$ .
2. Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de  $\alpha \in [0, 1]$  tel que  $f(\alpha) \neq \alpha$ . Si  $f(\alpha) < \alpha$ , par stricte croissance de  $f$ , on a  $\alpha = f(f(\alpha)) < f(\alpha)$  ce qui est absurde. De même, si  $f(\alpha) > \alpha$ , par stricte croissance de  $f$ , on a  $\alpha = f(f(\alpha)) > f(\alpha)$  ce qui est absurde. On aboutit donc dans tous les cas de figure à une absurdité.

**SOLUTION 34.**

1. D'après l'équation,  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$  d'où  $f(0) = 0$ .
2. La fonction  $f$  est nécessairement impaire car

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(-x) = f(0) = 0.$$

3. On montre facilement par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = an.$$

On déduit alors de l'imparité de  $f$  que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = an.$$

4. On démontre facilement par récurrence que

$$\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x).$$

Soit  $r \in \mathbb{Q} : \exists (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*$  tel que  $r = \frac{p}{q}$ . Par le point précédent,

$$f(r) = pf\left(\frac{1}{q}\right).$$

Or

$$f\left(\frac{q}{q}\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right) = a.$$

D'où  $f\left(\frac{1}{q}\right) = a\frac{1}{q}$  et  $f(r) = ar$ .

5. La fonction  $f$  est supposée continue au point 0.

a. Prouvons que  $f$  est continue en tout point de  $\mathbb{R}$ . Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Comme

$$\forall h \in \mathbb{R}, f(x_0 + h) = f(x_0) + f(h)$$

et, par continuité de  $f$  au point 0,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(0) = 0,$$

la fonction  $f$  admet une limite au point  $x_0$  et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

Ainsi  $f$  est continue au point  $x_0$ .

b. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . L'ensemble des rationnels  $\mathbb{Q}$  étant dense dans  $\mathbb{R}$ , il existe  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de nombres rationnels convergeant vers  $x$ . Puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(r_n) = ar_n,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ar_n = ax,$$

puis  $f(x) = ax$  par continuité de  $f$  au point  $x$ .

6. Réciproquement les fonctions du type  $x \mapsto ax$  vérifie bien la relation de l'énoncé. On en déduit que les applications recherchées sont exactement les fonctions linéaires.

#### SOLUTION 35.

► Supposons  $|a| < 1$ . Par une récurrence facile, on prouve que  $\forall n \geq 0$ ,

$$f(a^n x) = f(x).$$

Par continuité de  $f$  en 0,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a^n x) = f(0),$$

et par passage à la limite dans l'égalité de ci-dessus,  $f(x) = f(0)$ . La fonction  $f$  est donc constante. *Réciproquement*, toute fonction constante vérifie l'équation initiale.

► Supposons  $|a| > 1$ . Puisque  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = f(x/a).$$

On est ainsi ramené au cas précédent car  $|1/a| < 1$ .

#### SOLUTION 36.

► Si  $n = 0$ , les fonctions recherchées sont les fonctions constantes sur  $\mathbb{R}$ .

► Si  $n = 1$ , toute fonction continue est solution.

► Si  $n \geq 2$  est impair. On a alors, par une récurrence immédiate,  $\forall x \neq 0$ ,

$$\forall p \in \mathbb{N}, f(x^{1/n^p}) = f(x).$$

Par continuité de  $f$  en 1, et puisque  $x^{1/n^p}$  tend vers 1 lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ ,

$$f(x) = f(1).$$

Puis, par continuité de  $f$  en 0, on a alors  $f(0) = f(1)$ . La fonction  $f$  est donc constante. La réciproque est facile à vérifier.

- Si  $n \geq 2$  est pair. On raisonne de même pour prouver que  $\forall x > 0$ ,

$$f(x) = f(1).$$

Si  $x < 0$ , on a

$$f(x) = f(x^n) = f(1).$$

Par continuité de  $f$  en 0, on a alors  $f(x) = f(1)$ . La fonction  $f$  est donc constante. La réciproque est facile à vérifier.

#### SOLUTION 37.

Posons  $f(x) = g(x) - g(0)$  pour tout  $x$  réel. On vérifie alors sans peine que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On en déduit classiquement que  $\exists a \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax$$

et donc que  $g$  est de la forme

$$x \mapsto ax + b$$

avec  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$ . Réciproquement, on vérifie que toute fonction de la forme

$$x \mapsto ax + b$$

avec  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$  est solution de l'équation fonctionnelle proposée.

#### SOLUTION 38.

1. La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que fonction lipschitzienne sur cet intervalle. La fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ .
2. On a, pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} (g(x))^2 &= |g(x)|^2 = |f(x) - f(0)|^2 \\ &= |x - 0|^2 = x^2 \end{aligned}$$

De plus, pour tous réels  $x$  et  $y$ ,

$$\begin{aligned} (g(x) - g(y))^2 &= |g(x) - g(y)|^2 = |f(x) - f(y)|^2 \\ &= |x - y|^2 = x^2 - 2xy + y^2 \end{aligned}$$

Or, on a aussi

$$\begin{aligned} (g(x) - g(y))^2 &= (g(x))^2 - 2g(x)g(y) + (g(y))^2 \\ &= x^2 - 2g(x)g(y) + y^2 \end{aligned}$$

et donc

$$g(x)g(y) = xy.$$

3. On remarque que  $g$  est injective (si  $g(x) = g(y)$  alors  $f(x) = f(y)$  et  $|x - y| = 0$ , d'où  $x = y$ ). Comme  $f(0) = 0$ , on a  $g(1) \neq 0$  et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x}{g(1)}.$$

Ainsi  $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b.$$

Réciproquement, une fonction de la forme

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = ax + b,$$

avec  $a$  et  $b$  réels est une isométrie *si et seulement si*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |a(x - y)| = |x - y|,$$

ie *si et seulement si*  $|a| = 1$ , ie  $a = \pm 1$ . Les seules isométries de  $\mathbb{R}$  sont les fonctions de la forme

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \pm x + b,$$

avec  $b \in \mathbb{R}$ .

### SOLUTION 39.

1. Prenons  $x = y = 0$  dans l'équation fonctionnelle. Il vient

$$(f(0))^2 - f(0) = f(0)(f(0) - 1) = 0,$$

ie  $f(0) = 0$  ou  $f(0) = 1$ .

2. Si  $f(0) = 0$ , pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = f(x + 0) = f(x)f(0) = 0.$$

Ainsi  $f = 0$ .

3. On suppose que  $f(0) \neq 0$ . On a donc  $f(0) = 1$  d'après la première question.

- a. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a

$$f(x)f(-x) = f(x - x) = f(0) = 1$$

et *a fortiori*  $f(x) \neq 0$ . La fonction  $f$  ne s'annule donc pas sur  $\mathbb{R}$ .

- b. On déduit classiquement du théorème des valeurs intermédiaires que la fonction  $f$ , continue sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  et ne s'y annulant pas (d'après la question précédente), garde un signe constant sur  $\mathbb{R}$ . Comme  $f(1) = 1$ , on a  $f > 0$ .

- c. Comme  $f > 0$ , on peut poser  $g = \ln(f)$ . On a alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x + y) = g(x) + g(y).$$

On est ainsi ramené à une équation fonctionnelle bien connue : il existe un réel  $a$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{g(x)} = e^{ax}.$$

### SOLUTION 40.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a  $f(x) = f\left(2\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ . Par récurrence, on montre que  $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par continuité de  $f$  en 0,  $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$ . Par conséquent,  $f(x) = f(0)$ .

La fonction  $f$  est donc constante.

### SOLUTION 41.

1. Supposons tout d'abord que  $x \notin \pi\mathbb{Z}$ . On a pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin \frac{x}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^k}}$  car  $\frac{x}{2^k} \notin \pi\mathbb{Z}$  et donc le dénominateur de la fraction précédente est non nul. Par conséquent

$$P_n = \prod_{k=1}^n \frac{\sin \frac{x}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^k}} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}}$$

en utilisant un télescopage. Puisque  $\sin \frac{x}{2^n} \sim \frac{x}{2^n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{\sin x}{x}$ .

Si  $x \in \pi\mathbb{Z}$  et  $x \neq 0$ , alors il existe  $p \in \mathbb{Z}$  impair et un entier  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $x = p2^q\pi$  (considérer la décomposition en facteurs premiers). Donc pour  $n > q$ ,  $P_n(x)$  contient le facteur  $\cos \frac{p\pi}{2}$  qui est nul. On a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = 0$ . La formule de l'énoncé est encore valable puisque dans ce cas,  $\sin x = 0$ .

2. On notera  $g$  la fonction définie par  $g(x) = \frac{\sin x}{x}$  pour  $x \neq 0$  et  $g(0) = 1$ . On remarque que  $g$  est continue en 0. Soit  $f$  une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ . On a  $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cos \frac{x}{2}$  d'après l'énoncé. On établit par récurrence que pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) P_n(x)$ . Comme  $f$  est continue en 0 et que  $\frac{x}{2^n} \rightarrow 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$ . En passant à la limite dans l'égalité  $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) P_n(x)$ , on obtient  $f(x) = f(0) \frac{\sin x}{x}$ . On a donc  $f = f(0)g$ . Réciproquement soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f = \lambda g$ .  $f$  est bien continue en 0 car  $g$  l'est. Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ . Alors

$$f(2x) = \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{\sin x \cos x}{x} = f(x) \cos x$$

De plus,  $f(2 \times 0) = f(0) = f(0) \times \cos 0$ . La fonction  $f$  vérifie bien les conditions de l'énoncé. Les fonctions recherchées sont donc les fonctions  $\lambda g$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

#### SOLUTION 42.

1. On pose  $I = [a; b]$ . Considérons l'application

$$\begin{aligned} g: I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) - x \end{aligned}$$

Comme  $f(I) \subset I$ ,  $f(a), f(b) \in [a; b]$ . Ainsi  $g(a) = f(a) - a \geq 0$  et  $g(b) = f(b) - b \leq 0$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $x \in I$  tel que  $g(x) = 0$  i.e.  $f(x) = x$ .

2. Soit  $M \in \mathbb{R}_+$  et  $x \in [-M; M]$ .

$$||f(x)| - |f(0)|| \leq |f(x) - f(0)| \leq k|x| \leq kM.$$

Par conséquent

$$|f(x)| \leq kM + |f(0)|$$

Il suffit donc de choisir  $M$  tel que  $kM + |f(0)| = M$  i.e.  $M = \frac{|f(0)|}{1-k} \in \mathbb{R}_+$ .

3. En appliquant la première question à l'intervalle  $[-M; M]$  de la question précédente, on en déduit que  $f$  admet un point fixe sur  $[-M; M]$ . Montrons que ce point fixe est unique. Soient  $x$  et  $y$  deux points fixes de  $f$ . Alors

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \leq k|x - y| \implies (1-k)|x - y| \leq 0.$$

Puisque  $1 - k > 0$

$$|x - y| \leq 0 \implies |x - y| = 0 \implies x = y$$

#### SOLUTION 43.

1. Soit  $l$  la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $x > A$ ,  $|f(x) - l| < 1$  : ainsi  $f$  est bornée sur  $]A; +\infty[$ . De plus, par continuité,  $f$  est bornée sur l'intervalle compact  $[0; A]$ . Donc  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $(x_n)$  et  $(y_n)$  deux suites d'éléments de  $[0; +\infty[$  tels que  $(f(x_n))$  et  $(f(y_n))$  convergent respectivement vers  $\inf f$  et  $\sup f$ .
- Si l'une des deux suites  $(x_n)$  ou  $(y_n)$  est bornée, on peut en extraire une sous-suite convergeant vers un réel  $x$  ou  $y$  de  $[0; +\infty[$ . Mais, par continuité de  $f$ , on a  $f(x) = \inf f$  ou  $f(y) = \sup f$  et donc  $f$  admet un minimum ou un maximum absolu.
  - Si aucune des deux suites n'est bornée, on peut extraire de chacune une sous-suite tendant vers  $+\infty$ . Par passage à la limite,  $l = \inf f = \sup f$ . Donc  $f$  est constante égale à  $l$ , elle admet bien évidemment un minimum et un maximum absolu.

En considérant la fonction  $x \mapsto e^{-x}$  sur  $[0; +\infty[$ , on voit bien qu'une telle fonction n'admet pas forcément à la fois un minimum absolu et un maximum absolu.

3. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $x \geq A$ ,  $|f(x) - l| < \varepsilon/3$ . Comme  $f$  est continue, elle est uniformément continue sur l'intervalle compact  $[0; A]$ . Il existe donc  $\alpha$  tel que pour tous  $x, y \in [0; A]$  tels que  $|x - y| < \alpha$ ,  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ . Soient  $x, y \in \mathbb{R}$  tels que  $|x - y| < \alpha$ .

- Si  $x, y \in [0; A]$ ,

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3 < \varepsilon.$$

- Si  $x, y \in [A; +\infty[$ ,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |l - f(y)| < 2\varepsilon/3 < \varepsilon.$$

- Si  $x \in [0; A]$  et  $y \in [A; +\infty[$ , on a nécessairement  $|x - A| \leq |x - y| < \alpha$  donc  $|f(x) - f(A)| < \varepsilon/3$ . De plus,  $|f(A) - f(y)| \leq |f(A) - l| + |l - f(y)| < 2\varepsilon/3$ . Finalement,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| < \varepsilon$$

- Si  $x \in [A; +\infty[$  et  $y \in [0; A]$ , on procède comme précédemment.

On a donc prouvé que  $f$  était uniformément continue.

#### SOLUTION 44.

**REMARQUE.** Si  $f$  est une fonction uniformément continue et si  $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ , on sait qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  tel que

$$|x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Mais alors, on peut prouver par récurrence que, pour  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$|x - y| < m\alpha \implies |f(x) - f(y)| < m\varepsilon$$

■

Comme  $f$  est uniformément continue, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $|x - y| < \alpha$  implique  $|f(x) - f(y)| < 1$ . Posons  $m = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor + 1$ . Ainsi  $m\alpha \geq 1$ . Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $f(n) \geq A + m$ . Soit  $x \geq N$  et posons  $n = \lfloor x \rfloor$ . Ainsi  $n \geq N$  et donc  $f(n) \geq A + m$ . De plus,  $|x - n| < 1 \leq m\alpha$ . D'après la remarque,  $|f(x) - f(n)| < m$ , ce qui implique  $f(x) > f(n) - m \geq A$ . On a donc prouvé le résultat voulu.

#### SOLUTION 45.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f$  admet une limite finie  $l$  en  $+\infty$ , il existe  $A \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$x \geq A \implies |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{3}$$

D'après le théorème de Heine,  $f$  est uniformément continue sur  $[0, A]$ . Il existe donc  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall x, y \in [0, A], |x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Soit maintenant  $x, y \in \mathbb{R}_+$  tels que  $|x - y| < \alpha$ .

► Si  $x, y \in [0, A]$ , on a  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$ .

► Si  $x \geq A$  et  $y \geq A$ ,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |l - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

► Si  $x \in [0, A]$  et  $y \geq A$ ,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(A) - l| + |l - f(y)|$$

Comme  $|x - y| < \alpha$ ,  $|x - A| < \alpha$  donc  $|f(x) - f(A)| < \frac{\varepsilon}{3}$  par uniforme continuité de  $f$  sur  $[0, A]$ .

On a également  $|f(A) - l| < \frac{\varepsilon}{3}$  et  $|l - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$  car  $A \geq A$  et  $y \geq A$ .

Finalement, on a bien  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

► On procède de même si  $y \in [0, A]$  et  $x \geq A$ .

#### SOLUTION 46.

Soit  $f$  une fonction périodique continue sur  $\mathbb{R}$  et  $T$  une de ses périodes. Soit  $\varepsilon > 0$ .  $f$  est uniformément continue sur  $[-T, 2T]$  donc il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall x, y \in [-T, 2T], |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

On peut supposer  $\alpha < T$ .

Soient  $x, y \in \mathbb{R}$  tels que  $|x - y| < \alpha$ . Il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $x - nT \in [0, T]$  (prendre  $n = E(\frac{x}{T})$ ). On a alors  $y - nT \in ]-\alpha, T + \alpha[ \subset [-T, 2T]$ .

Comme  $|(x - nT) - (y - nT)| = |x - y| < \alpha$  et que  $x - nT$  et  $y - nT$  appartiennent à l'intervalle  $[-T, 2T]$ , on a d'après ce qui précède :

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - nT) - f(y - nT)| < \varepsilon$$

Ceci étant valable pour tout  $\varepsilon > 0$ , on en déduit que  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .