Devoir surveillé n°04 : corrigé

Solution 1

1. Puisque arctan est définie sur $\mathbb{R}$, h est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

2. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2x^2}$, $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ et $x \mapsto \frac{x-1}{x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que h est également dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$,

$$\begin{aligned}
h'(x) &= -\frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x}\right)^2} \\
&= -\frac{4x}{4x^4+1} - \frac{1}{(x+1)^2+x^2} + \frac{1}{x^2+(x-1)^2} \\
&= -\frac{4x}{4x^4+1} - \frac{1}{2x^2+2x+1} + \frac{1}{2x^2-2x+1} \\
&= -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{(2x^2+2x+1)-(2x^2-2x+1)}{(2x^2+1)^2-(2x)^2} \\
&= -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{4x^4+1} = 0
\end{aligned}$$

3. La question montre que h est constante sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$.
Puisque $h(1) = \arctan(1/2) - \arctan(1/2) + \arctan(0) = 0$, h est constante égale à 0 sur $]0, +\infty[$.
Puisque $\lim_{-\infty} h = \arctan(0) - \arctan(1) + \arctan(1)$, h est constante égale à 0 sur $]-\infty, -1[$.
Enfin, puisque $\lim_{0^-} h = \lim_{+\infty} \arctan - \arctan(0) + \lim_{+\infty} \arctan = \pi$, h est constante égale à π sur $]-1, 0[$.

4. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) && \text{car } h \text{ est nulle sur } \mathbb{R}_+^* \\
&= \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) - \arctan(0) && \text{par télescopage} \\
&= \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

b. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, $\lim_{n\to+\infty} S_n = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

c. Vu en cours.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n} \arctan(2k^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) && \text{d'après la question précédente} \\
&= \frac{n\pi}{2} - S_n
\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\pi}{2} = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$ par opérations.
Enfin, $\frac{T_n}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{S_n}{n}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{T_n}{n} = \frac{\pi}{2}$ par opérations.

Solution 2

1. Tout d'abord, $\sin(0) = 0$ donc $f_n(0) = 0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$. Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \cos x < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \cos^n(x) = 0$ (suite géométrique). Ainsi $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

2. On a clairement $f_n(0) = 0$. De plus, cos et sin sont positives sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc f_n également. Par conséquent, le minimum de f_n sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est 0 (et il est atteint en 0).

3. f_n est clairement dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f_n'(x) = -n\cos^{n-1}(x)\sin^2(x) + \cos^{n+1}(x) = \cos^{n-1}(x)(\cos^2(x) - n\sin^2(x))$$

Comme $\cos^{n-1}$ est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, le signe de $f_n'(x)$ est le signe de $\cos^2(x) - n\sin^2(x)$. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

- Si $x \leq \arctan\frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $0 \leq \tan x \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ par croissance de tan sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ puis $\tan^2 x \leq \frac{1}{n}$ par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ puis $\cos^2 x - n\sin^2 x \geq 0$ et enfin $f_n'(x) \geq 0$.
- Si $x \geq \arctan\frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $\tan x \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$ par croissance de tan sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ puis $\tan^2 x \leq \frac{1}{n}$ par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ puis $\cos^2 x - n\sin^2 x \leq 0$ et enfin $f_n'(x) \leq 0$.

Ainsi f_n est-elle croissante sur $\left[0, \arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et décroissante sur $\left[\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{\pi}{2}\right]$: elle admet donc un maximum en $\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Posons $u_n = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. On a donc

$$\mathrm{M}_n = f_n(u_n) = \cos^n(u_n)\sin(u_n)$$

Puisque $u_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \cos(u_n) \leq 1$ puis $0 \leq \cos^n(u_n) \leq 1$. Par conséquent

$$0 \leq \mathrm{M}_n \leq \sin(u_n)$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \arctan(0) = 0$ car arctan est continue en 0. Enfin, par continuité de sin en 0, $\lim_{n\to+\infty} \sin(u_n) = \sin(0) = 0$. On rappelle que

$$0 \leq \mathrm{M}_n \leq \sin(u_n)$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

5. Tout d'abord, $\sin(0) = 0$ donc $f_n(0) = 0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$. Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \cos x < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\cos^n(x) = 0$ (croissances comparées). Ainsi $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Remarque. Si on n'a pas encore vu les croissances comparées pour les suites, on peut constater que pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\sqrt{n}\cos^n(x) = n^{\frac{1}{2}}e^{n\ln(\cos(x))} \underset{\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $\ln(\cos(x)) < 0$ $(0 < \cos x < 1)$.
De plus, $\sqrt{n}\cos^n\frac{\pi}{2} = 0$.
Dans tous les cas, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $\theta = \arctan(x)$ et remarquons déjà que $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, $\tan\theta = x$ donc $x\cos\theta = \sin\theta$ puis $x^2\cos^2\theta = \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$. Ainsi $\cos^2\theta = \frac{1}{1+x^2}$. Mais comme $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\theta > 0$ donc

$$\cos(\arctan x) = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et

$$\sin(\arctan x) = \sin\theta = x\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

7. Posons $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ de sorte que $\ln(u_n) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Considérons alors la fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$. f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $f'(t) = \frac{1}{1+t}$ pour $t \in]-1,+\infty[$. En particulier, f est dérivable en 0 de sorte que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = f'(0) = 1$$

ou encore

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

Posons alors $t = \frac{1}{n}$ de sorte que $t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

c'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 1$. Par continuité de l'exponentielle en 1,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e$$

8. On a clairement

$$\mathrm{M}'_n = \sqrt{n}\,\mathrm{M}_n = \sqrt{n}\cos^n\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

La question **6** permet alors d'affirmer que

$$\mathrm{M}'_n = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right)^n \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \cdot \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

Il est clair que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$ et, d'après la question **7**, $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. On en déduit bien que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{M}'_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Solution 3

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x+1)e^x$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$ et strictement croissante sur $[-1,+\infty[$.
Par opérations, $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{-\infty} f = 0$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. f est strictement croissante et continue sur $[-1,+\infty[$. Elle induit donc une bijection de $[-1,+\infty[$ sur $\mathrm{I} = [f(-1), \lim_{+\infty} f[= \left[-\frac{1}{e},+\infty\right[$.

3. Comme f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et que sa dérivée ne s'annule pas sur $]-1,+\infty[$, W est dérivable sur $\mathrm{J} = \left]-\frac{1}{e},+\infty\right[$. De plus, pour tout $x \in \mathrm{J}$,

$$\mathrm{W}'(x) = \frac{1}{f'(\mathrm{W}(x))} = \frac{1}{(\mathrm{W}(x)+1)e^{\mathrm{W}(x)}}$$

Comme $f(0) = 0$, $\mathrm{W}(0) = 0$. Par conséquent, $\mathrm{W}'(0) = 1$.
De plus, par définition de W, $f(\mathrm{W}(x)) = x$ i.e. $\mathrm{W}(x)e^{\mathrm{W}(x)} = x$ Notamment, si $x \neq 0$, on a nécessairement $\mathrm{W}(x) \neq 0$ et donc $e^{\mathrm{W}(x)} = \frac{x}{\mathrm{W}(x)}$. On en déduit que pour tout $x \in \mathrm{J} \setminus \{0\}$,

$$\mathrm{W}'(x) = \frac{\mathrm{W}(x)}{x(1+\mathrm{W}(x))}$$

Solution 4

1. Posons $\varphi : u \in]-1,+\infty[\mapsto \ln(1+u)-u$. φ est dérivable et

$$\forall u \in]-1,+\infty[,\ \varphi'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 = -\frac{u}{1+u}$$

Ainsi φ' est positive sur $]-1,0]$ et négative sur $[0,+\infty[$. φ est donc croissante sur $]-1,0]$ et décroissante sur $[0,+\infty[$: φ admet un maximum en 0. Comme $\varphi(0)=0$, φ est négative sur $]-1,+\infty[$. Par contre,

$$\forall u \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+u) \leq u$$

2. Soit $t \in [0,n]$. Alors $\frac{t}{n} \in]-1,+\infty[$. D'après la question précédente,

$$\ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \leq \frac{t}{n}$$

puis

$$n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \leq t$$

puis, par passage à l'exponentielle,

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leq e^t$$

Si $t=n$, la seconde inégalité de l'énoncé est clairement vraie. Sinon, $-\frac{t}{n} \in]-1,+\infty[$ et, toujours d'après la première question,

$$\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$$

puis

$$n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leq -t$$

puis, par passage à l'exponentielle,

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$$

3. D'après la seconde inégalité de la question précédente,

$$0 \leq e^{-t} - f_n(t)$$

D'après la première inégalité,

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leq e^t$$

En mutipliant par $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ (positif),

$$\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n \leq e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$$

En multipliant par $-e^{-t}$ (négatif),

$$-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq -e^{-t}\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n$$

En ajoutant e^{-t},

$$e^{-t} - f_n(t) \leq e^{-t} - e^{-t}\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n = e^{-t}\left[1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right]$$

4. On fixe $u \in [0,1]$ et on raisonne par récurrence sur n. Tout d'abord $(1-u)^0 = 1 \geq 1 = 1 - 0 \cdot u$. Supposons que $(1-u)^n \geq 1-nu$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors, en multipliant par $1-u$ (positif),

$$(1-u)^{n+1} \geq (1-nu)(1-u) = 1-(n+1)u + nu^2 \geq 1-(n+1)u$$

Par récurrence, $(1-u)^n \geq 1-nu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Soit $t \in [0, n]$. Alors $\frac{t^2}{n^2} \in [0, 1]$ donc, en appliquant la question précédente,

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - n \cdot \frac{t^2}{n^2} = 1 - \frac{t^2}{n}$$

puis

$$1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \leq \frac{t^2}{n}$$

Enfin, d'après la question **3**,

$$0 \leq e^{-t} - f_n(t) \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}$$

6. D'après la question précédente, g_n est minorée par 0. Or $g_n(0) = 0$ donc le minimum de f_n sur $[0, n]$ est $m_n = 0$ (atteint en 0).

7. On étudie les variations de ψ. ψ est clairement dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\psi'(t) = t(2 - t)e^{-t}$. On en déduit que ψ est croissante sur $[0, 2]$ et décroissante sur $[2, +\infty[$: ψ admet donc un maximum sur $\mathbb{R}_+$ en 2. En particulier, elle est majorée sur $\mathbb{R}_+$ (par $\psi(2) = \frac{4}{e}$).

8. Notons t_n le point de $[0, n]$ où g_n admet son maximum. D'après la question **5**,

$$0 \leq g_n(t_n) \leq \frac{\psi(t_n)}{n}$$

et donc

$$0 \leq \mathrm{M}_n \leq \frac{4}{ne}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{M}_n = 0$.