# Semaine du 26/09 au 30/09

## 1 Cours

### Espaces vectoriels normés

**Normes** Définition. Rappel sur les normes euclidiennes. Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des applications bornées sur un ensemble X à valeurs dans $\mathbb{K}$. Normes usuelles sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t} \qquad \|f\|_\infty = \max_{[a,b]} |f|$$

Distance associée à une norme. Boules et sphères. Définition de la convexité d'une partie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Convexité des boules. Equivalence de normes. Toutes les normes d'un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes. Partie bornée, application bornée. Produit d'espaces vectoriels normés : norme produit.

**Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé** Convergence/divergence. Unicité de la limite. Toute suite convergente est bornée. Opérations algébriques. Suites extraites et valeurs d'adhérence.

### Révisions de première année sur les suites et séries numériques

### Séries

**Compléments sur les séries numériques** Règle de d'Alembert. Comparaison série/intégrale. Sommation des relations de comparaison.

## 2 Méthodes à maîtriser

- Pour montrer qu'une application est une norme, on peut essayer de l'exprimer à l'aide d'une norme connue.
- Calculer une norme uniforme d'une suite ou d'une fonction par une étude de cette suite ou de cette fonction.
- Pour montrer que deux normes $N_1$ et $N_2$ ne sont pas équivalentes, on exhibe une suite $u$ tel que $\dfrac{N_2(u_n)}{N_1(u_n)}$ tende vers 0 ou $+\infty$.
- Pour montrer qu'une suite diverge, on peut extraire deux suites convergeant vers des limites différentes.
- Utiliser une série télescopique pour déterminer la somme d'une série. Par exemple, dans le cas d'une série $\sum F(n)$ où F est une fraction rationnelle (décomposition en éléments simples).
- Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour déterminer la convergence et la somme d'une série de Taylor.
- Déterminer la nature d'une série par comparaison à une série de nature connue (inégalité, domination, négligeabilité, équivalence).
- Utiliser les séries télescopiques : pour montrer qu'une suite $(u_n)$ converge, il suffit de montrer que $\sum u_n - u_{n-1}$ converge et vice versa.
- Encadrer une somme partielle ou un reste à l'aide d'une intégrale. On peut alors déterminer un équivalent d'une somme partielle de série divergente ou d'un reste d'une série convergente.
- Pour obtenir un équivalent du reste $R_n$ ou de la somme partielle $S_n$ d'une série du type $\sum f(n)$, on peut
  - soit encadrer le reste ou la somme partielle à l'aide d'intégrales ;
  - soit 1. déterminer une primitive F de $f$ ; 2. montrer que $f(n) \sim F(n) - F(n-1)$ ; 3. sommer cette relation d'équivalence (série télescopique) ; 4. en déduire $S_n \sim F(n)$ ou $R_n \sim -F(n)$ suivant le cas (divergent/convergent).
- Pour montrer la convergence/divergence d'une série de termes de signe non constant, on peut
  - montrer la convergence absolue ;
  - utiliser le critère spécial des séries alternées ;
  - utiliser un DL pour écrire le terme de la série comme somme du terme d'une série alternée et de termes de séries convergentes/divergentes (ex : $\sum \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$).

## 3 Questions de cours

**Banque CCP** BCCP 1, 5, 6, 7, 46