Sommes et produits

Solution 1.

On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) \\ &= \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) \end{aligned}$$

Solution 2.

1. Banalissima formula !

$$\sum_{k=p}^{q} (\, u_{k+1} - u_k \,) = u_{q+1} - u_p.$$

2. No comment ...

$$\sum_{k=p-3}^{q-1} (\, u_{k+1} - u_{k-1} \,) = u_q + u_{q-1} - u_{p-4} - u_{p-3}.$$

Solution 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+2)-k}{2k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \\ &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k\,.\,k! &= \sum_{k=1}^{n} (k+1-1)\,.\,k! \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big((k+1)\,.\,k! - 1.k!\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big((k+1)! - k!\Big) = (n+1)! - 1 \end{aligned}$$

4. Posons $u_k = (ak+b)\,2^k$ et cherchons a et b tels que, pour tout entier k, $u_{k+1} - u_k = (k+2)\,2^k$. On remarque que

$$\begin{aligned} u_{k+1} - u_k &= \big(a(k+1)+b\big)\,2^{k+1} - (ak+b)\,2^k \\ &= 2^k\Big(2\,\big(a(k+1)+b\big) - (ak+b)\Big) \\ &= (ak+2a+b)\,2^k \end{aligned}$$

En prenant $a = 1$ puis $b = 0$ (de sorte que $2a+b = 2$), ou encore, en posant $u_k = k\,2^k$ pour tout entier k, on a bien $u_{k+1} - u_k = (k+2)\,2^k$, d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} (k+2)\,2^k &= \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) \\ &= u_{n+1} - u_0 = (n+1)\,2^{n+1} \end{aligned}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \\ &= \ln(n+1) - \ln(1) = \ln n \end{aligned}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons S_n la somme de l'énoncé.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \Big(\sin(x/2+kx) + \sin(x/2-kx)\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \Big(\sin\big((k+1/2)x\big) - \sin\big((k-1/2)x\big)\Big) \\ &= \sin\big((n+1/2)x\big) - \sin(-x/2) \\ &= \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Solution 4.

L'ensemble $\{1,\dots,2n\}$ est la réunion des parties deux à deux disjointes $\{2p-1, 2p\}$ pour p variant de 1 à n. Or $(-1)^{2p-1}(2p-1) + (-1)^{2p}2p = 2p - (2p-1) = 1$ pour tout $1 \leqslant p \leqslant n$, donc la somme est égale à n.

Solution 5.

Par linéarité, on décompose cette somme en une différence de deux sommes égales (changement d'indice $k \leftarrow n+1-k$ dans la deuxième somme). La somme est donc nulle.

Solution 6.

On calcule la somme double en sommant d'abord sur j :

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} 2^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2^k = \sum_{k=1}^{n} k2^k.$$

On calcule la même somme en sommant d'abord sur k. D'après la formule de sommation géométrique,

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} 2^k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} 2^k = \sum_{j=1}^{n}(2^{n+1}-2^j) = n2^{n+1}-(2^{n+1}-2) = (n-1)2^{n+1}+2.$$

Solution 7.

$$\sum_{k=2}^{n}\log\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \log\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \log\frac{(n-1)!(n+1)!}{2(n!)^2} = \log\frac{n+1}{2n}.$$

Solution 8.

1. Puisque pour tout $t \neq \pm 1$,
$$\frac{\alpha}{t-1}+\frac{\beta}{t+1} = \frac{(\alpha+\beta)t+\alpha-\beta}{t^2-1},$$
il suffit de choisir α et β tels que
$$\alpha+\beta=0 \quad \text{et} \quad \alpha-\beta=1,$$
c'est-à-dire $\alpha=-\beta=1/2$.
2. On a
$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Solution 9.

1. En convenant que $A_{-1}=0$:
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k B_k &= \sum_{k=0}^{n}(A_k - A_{k-1})B_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n} A_{k-1} B_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{k+1} \\ &= A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k(B_k - B_{k+1}) \\ &= A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k \end{aligned}$$

2. On pose $a_n = 2^n$ et $B_n = n$. Avec les conventions de l'énoncé, on a $A_n = 2^{n+1} - 1$ et $b_n = 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 2^k k &= (2^{n+1}-1)n - \sum_{k=0}^{n-1}(2^{k+1}-1)\\ &= (2^{n+1}-1)n - 2(2^n-1) + n\\ &= 2^{n+1}(n-1)+2\end{aligned}$$

Solution 10.

1. Pour $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=3}^{n+1} k = \frac{[3+(n+1)][(n+1)-2]}{2} = \frac{(n-1)(n+4)}{2}.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{[1+(2n-1)]n}{2} = n^2.$$

3. Pour $n \geqslant 4$,

$$\sum_{k=3}^{n-1} 2^k = 2^3\frac{2^{n-3}-1}{2-1} = 2^n - 8.$$

4. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k.$$

On a alors pour tout nombre réel x,

$$xf_n'(x) = x\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^k = S_n(x).$$

- Si $x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$, $f_n(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ et donc

$$\begin{aligned}S_n(x) = xf_n'(x) &= x\frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}\\ &= x\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

- Si $x = 1$, on a directement

$$S_n(1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solution 11.

On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}3^{n-k+1}\binom{n}{k} = \frac{3}{2}\left[\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}\binom{n}{k} - 1\right] = \frac{3}{2}[(2+3)^n - 1] = \frac{3}{2}[5^n - 1].$$

Solution 12.

On fixe $n \in \mathbb{N}$. Cette formule se prouve alors par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$. Elle est banale pour $p = 0$. Si elle est vraie au rang p, on a

$$\sum_{k=0}^{p+1} \binom{n+k}{n} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{n} + \binom{n+p+1}{n} = \binom{n+p+1}{n+1} + \binom{n+p+1}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$$

d'après la relation de Pascal.

Solution 13.

1. Soit $n \geqslant 2$. Posons, pour tout réel x,

$$P(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned} P'(x) &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} \\ &= n(1+x)^{n-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P''(x) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2} \\ &= n(n-1)(1+x)^{n-2}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} &= P'(1) + P''(1) \\ &= n(n+1)2^{n-2}. \end{aligned}$$

On remarque que cette formule est encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

2. Supposons $n \geqslant 2$. Adaptons la méthode précédente. Pour tout réel x, posons

$$P(x) = \frac{(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}}{2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^{2k}.$$

Pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned} P'(x) &= \sum_{k=1}^{n} 2k\binom{2n}{2k} x^{2k-1} \\ &= 2n\frac{(1+x)^{2n-1} - (1-x)^{2n-1}}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P''(x) &= \sum_{k=1}^{n} 2k(2k-1)\binom{n}{k} x^{2k-2} \\ &= 2n(2n-1)\frac{(1+x)^{2n-2} + (1-x)^{2n-2}}{2}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} &= \frac{P'(1) + P''(1)}{4} \\ &= n(2n+1)2^{2n-4}. \end{aligned}$$

Pour $n = 0$, la somme est nulle. Pour $n = 1$, elle vaut 1.

Solution 14.

1. D'après la formule du binôme de Newton, $S_1 = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$ et $S_2 = (1-1)^{2n} = 0$ car $n \neq 0$.
2. En séparant les termes d'indices pairs et d'indices impairs, $S_1 = T_1 + T_2$ et $S_2 = T_1 - T_2$. On en déduit que $T_1 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2) = 2^{2n-1}$ et $T_2 = \frac{1}{2}(S_1 - S_2) = 2^{2n-1}$.
3. Posons $V_1 = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k}$ et $V_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k}(-1)^k$. Comme précédemment, $V_1 = (1+1)^{2n-1} = 2^{2n-1}$ et $V_2 = (1-1)^{2n-1} = 0$. Puis $V_1 = U_1 + U_2$ et $V_2 = U_1 - U_2$ en séparant termes d'indices pairs et impairs. On en déduit à nouveau que $U_1 = \frac{1}{2}(V_1 + V_2) = 2^{2n-2}$ et $U_2 = \frac{1}{2}(V_1 - V_2) = 2^{2n-2}$.

Solution 15.

1. C'est parti !

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \max(i,j) + \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} \max(i,j) + \sum_{i=1}^{n} \max(i,i) \\ &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \max(i,j) + \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} \max(i,j) + \sum_{i=1}^{n} i \end{aligned}$$

On remarque alors que

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \max(i,j) \;=\; \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} \max(i,j),$$

pour ceux qui ne sont pas convaincus, on effectué le changement de variables (muettes !)

$$k = j \;,\; l = i,$$

en remarquant que

$$1 \leqslant k < l \leqslant n \iff 1 \leqslant j < i \leqslant n \quad \text{et} \quad \max(k,l) = \max(i,j).$$

Ainsi

$$U_n = 2S_n + \frac{n(n+1)}{2}$$

, et donc :

$$U_n \;=\; \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.$$

2. C'est immédiat ...

$$V_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

3. Ça vire à la routine ...

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} (j-i)\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i(i+1)}{2}$$

où l'on a effectué le changement de variable (muette !)

$$l = n - i,$$

en remarquant que

$$i \in [\![1,n]\!] \iff l \in [\![0,n-1]\!],$$

ainsi

$$2W_n \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}$$

d'où

$$W_n = \frac{n(n^2-1)}{6}.$$

4. Une autre bataille ...

$$\begin{aligned}X_n &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i = \sum_{i=1}^{n-1}\left(i\sum_{j=i+1}^{n} 1\right) = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)\\ &= n\sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\\ &= \frac{n(n-1)(3n-(2n-1))}{6} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}.\end{aligned}$$

5. La cerise sur le gâteau ...

$$Y_n = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij - \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} ij - \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij - Y_n - \sum_{i=1}^{n} i^2$$

En effet ,

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij = \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} ij,$$

ainsi

$$\begin{aligned}2Y_n &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij - \sum_{i=1}^{n} i^2 = V_n - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

et finalement

$$Y_n = \frac{n\left(n^2-1\right)(3n+2)}{24}.$$

Solution 16.

$$\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{0\leqslant k,n\leqslant N}\frac{(-1)^k}{k^2}\mathbb{1}_{(0\leqslant n<k\leqslant N)} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k k}{k^2}.$$

Solution 17.

1. On décompose la première somme pour obtenir deux sommes simples à calculer,

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} i + \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j = \sum_{i=1}^{n} i(n-i) + \sum_{j=1}^{n} j(j-1).$$

L'indice de sommation étant une variable muette,

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j) = \sum_{i=1}^{n}\big(i(n-i)+i(i-1)\big) = \sum_{i=1}^{n}(n-1)i = \frac{(n-1)n(n+1)}{2}.$$

2. On a,

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij = \sum_{j=2}^{n} j\left(\sum_{i=1}^{j-1} i\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{j^2(j-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^3 - \sum_{j=1}^{n} j^2\right) = \frac{n(n-1)(3n+2)(n+1)}{24}$$

puisque $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} k^3 = \frac{\big(n(n+1)\big)^2}{4}$.

Solution 18.

On a

$$S = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2} = \frac{n(n+3)}{4}$$

Solution 19.

Soit $n \geqslant 1$. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\ell} = \sum_{1 \leqslant \ell \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{\ell} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{n+1-\ell}{\ell} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{n+1}{\ell} - \sum_{\ell=1}^{n} 1 = (n+1)S_n - n \end{aligned}$$

Solution 20.

On calcule la somme double en sommant d'abord sur j :

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} 2^k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} 2^k = \sum_{k=1}^{n} k2^k.$$

On calcule la même somme en sommant d'abord sur k. D'après la formule de sommation géométrique,

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} 2^k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} 2^k = \sum_{j=1}^{n} (2^{n+1} - 2^j) = n2^{n+1} - (2^{n+1} - 2) = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Solution 21.

On a

$$\begin{aligned} P &= \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{k}\right) \\ &= \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{n+1}{2} \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

Solution 22.

On trouve $V = (n!)^{2n}, W = (n!)^{2n-2}$. $W = \frac{XY}{(n!)^4}$ et $X = Y$ par symétrie, d'où $X = (n!)^{n-1}(n!)^2 = (n!)^{n+1}$, et enfin $Z = \frac{X}{(n!)^2} = (n!)^{n-1}$.

Solution 23.

Pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $\frac{1}{k(k+1)} = 1/k - 1/(k+1)$, donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

et donc

$$\prod_{k=1}^{n} 2^{1/k(k+1)} = \prod_{k=1}^{n} \exp\Big(\frac{\log 2}{k(k+1)}\Big) = \exp\Big(\log 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\Big) = \frac{2}{\sqrt[n+1]{2}}.$$

Solution 24.

1. Soit $k \geqslant 2$. On a

$$\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} = \frac{k-1}{k+1} \times \frac{v_k}{v_{k-1}}$$

en posant $v_k = k^2+k+1$ puisqu'alors $v_{k-1} = (k-1)^2 + k - 1 + 1 = k^2 - k + 1$.

2. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{v_k}{v_{k-1}} \\ &= \frac{2(n-1)!}{(n+1)!} \frac{v_n}{v_1} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)} \end{aligned}$$

après telescopage.

3. On a

$$u_n = \frac{2}{3}\left[1 + \frac{1}{n(n+1)}\right]$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}.$$

Solution 25.

On a pour $k \in \mathbb{N}$, $\cos \dfrac{\alpha}{2^k} = \dfrac{\sin \frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{\alpha}{2^k}}$ car $\dfrac{\alpha}{2^k} \in]0, \pi[$ et donc le dénominateur de la fraction précédente est non nul. Par conséquent

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin \frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{\alpha}{2^k}} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sin 2\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2^n}} \end{aligned}$$

en utilisant un télescopage. Pour déterminer la limite, on écrit :

$$P_n = \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin \frac{\alpha}{2^n}}$$

Or $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$.

Solution 26.

Par la méthode du pivot de Gauss...

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Le système de l'énoncé est donc équivalent au système

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ \quad - y \quad - 2t = 1 \\ \quad\quad z - 4t = 1 \end{cases}$$

qu'on résoud en remontant du bas vers le haut. On trouve

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-7t \\ -1-2t \\ 1+4t \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi l'ensemble de solutions est une droite $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}^4$, à savoir

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 27.

Par la méthode du pivot de Gauss...

$$\begin{pmatrix} -3 & 9 & -2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 8 & -24 & 4 & -12 & -4 & -8 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 7 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{4} \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -3 & 9 & -2 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot (-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système de l'énoncé est donc équivalent au système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & & & - & x_5 & = & 4 \\ & & & & & & x_4 & - & 2x_5 & = & -2 \end{array} \right.$$

qu'on résout en remontant du bas vers le haut. On trouve

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 3x_2 + 3x_5 \\ x_2 \\ 4 + x_5 \\ -2 + 2x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} \qquad \text{où } (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi l'ensemble de solutions est un plan $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}^5$, à savoir

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUTION 28.

Par la méthode du pivot de Gauss...

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ -2 & -3 & 3 & b \\ 1 & 1 & -2 & c \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b+2a \\ 0 & -1 & -1 & c-a \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b+2a \\ 0 & 0 & 0 & a+b+c \end{pmatrix}$$

Le système de l'énoncé est donc équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & a \\ & & y & + & z & = & b+2a \\ & & & & 0 & = & a+b+c \end{array}\right.$$

qui admet une solution *si et seulement si* $a+b+c=0$. Géométriquement cela signifie qu'un point de $\mathbb{R}^3$ est une image par l'application

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+2y-z \\ -2x-3y+3z \\ x+y-2z \end{pmatrix}$$

si et seulement si il est dans le plan d'équation $x+y+z=0$.
Dans ce cas le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & a \\ & & y & + & z & = & a-c \end{array}\right.$$

qu'on résoud en remontant du bas vers le haut. On trouve

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c-a+3z \\ a-c-z \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{où } z \in \mathbb{R}.$$

Ainsi l'ensemble de solutions est une droite $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^3$, à savoir

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 2c-a \\ a-c \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUTION 29.

Par la méthode du pivot de Gauss...

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ a & 3 & -1 & 3 \\ 5 & -8 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3+2a & -1-a & 3+2a \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3+2a & -1-a & 3+2a \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 5+3a & \frac{3}{2}+a \end{pmatrix}$$

Le système de l'énoncé est donc équivalent au système

$$\begin{cases} -x+2y-z &= 2 \\ 2y-4z &= 1 \\ (5+3a)z &= \frac{3}{2}+a \end{cases}$$

Si $a = -\frac{5}{3}$, la dernière ligne se lit $0 = -\frac{1}{6}$ et donc $E_{-\frac{5}{3}} = \varnothing$.
Si $a \neq -\frac{5}{3}$, on résout en remontant du bas vers le haut et on trouve une solution unique (dont le calcul n'est pas demandé).
Ainsi E_a n'est jamais un ensemble infini.

Solution 30.

Méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Le système initial est donc équivalent au système

$$\begin{cases} x - y &= 2 \\ 4y - z &= -6 \\ \frac{3}{2}z &= 3 \end{cases}$$

qu'on résoud en remontant. On trouve l'unique solution $(1, -1, 2)$.

Solution 31.

Méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Le système initial est donc équivalent au système

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 4y - z = -6 \\ 0 = 6. \end{cases}$$

Puisqu'il n'existe pas de x, y, z tels que $0 = 6$, le système n'a pas de solution.

Solution 32.

Méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & a & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & a-2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 6+a-a^2 & 3-a \end{pmatrix}$$

On factorise $6 + a - a^2 = (3 - a)(2 + a)$. Ainsi le système

1. a une seule solution si et seulement si $(3 - a)(2 + a) \neq 0$, ce qui revient à dire que $a \in \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$,
2. n'a pas de solution si et seulement si $(3 - a)(2 + a) = 0$ et $3 - a \neq 0$, ce qui revient à dire que $a = -2$,
3. possède une infinité de solutions $(3 - a)(2 + a) = 0$ et $3 - a \neq 0$, ce qui revient à dire que $a = 3$.

Solution 33.

1. Pivot de Gauss :

$$\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -3 & 17 \\ 5 & -3 & 8 & -10 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ |2 \\ |2 \end{array}\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 7 & -18 & 46 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ |7 \end{array}\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 7 & -18 & 46 \\ 0 & 0 & -46 & 46 \end{pmatrix}$$

Le système initial est donc équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 4z & = & -4 \\ & & 7y & - & 18z & = & 46 \\ & & & - & 46z & = & 46 \end{array}\right.$$

qu'on résout facilement en commençant par le bas. On trouve l'unique solution $(2, 4, -1)$.

2.

$$\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 6 & -11 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ 02 \end{array}\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -9 & -1 \\ 0 & 5 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le système initial est donc équivalent à un système dont une équation est $0x + 0y + 0z = -1$, ou encore $0 = -1$. Il n'y a pas de (x, y, z) vérifiant cette équation. Par conséquence le système n'a pas de solution.

Remarque. On aurait déjà pu le voir une étape plus tôt, car elle contient les équations contradictoires $5y - 9 = -1$ et $5y - 9 = -2$.

3. On commence par une permutation de lignes pour obtenir un pivot en haut à gauche.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système initial est donc équivalent au système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & 2y & - & z & = & -2 \\ & & & & 0 & = & 0. \end{array} \right.$$

La dernière équation est vérifiée pour tout choix de (x, y, z). Elle est donc superflue et peut être omise. En résout les deux équations restantes.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 - y - z = 2 - y - (2 + 2y) = -3y \\ z & = & 2 + 2y. \end{array} \right.$$

Le système admet donc une unfinité de solutions, à savoir tous les triplets $(-3y, y, 2+2y)$ avec $y \in \mathbb{R}$. L'ensemble de solutions s'écrit aussi comme

$$\{(0,0,2) + y(-3,1,2) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

ou encore,

$$(0,0,2) + \mathbb{R}(-3,1,2).$$

Il s'agit de la droite passant par le point $(0,0,2)$ est dirigée par le vecteur $(-3,1,2)$.

4. On commence par une permutation de lignes puisque le pivot le plus simple à manipuler est 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \\ 2 & -3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & -1 & 18 & -6 \\ 0 & -1 & 9 & -1 \\ 0 & -5 & 22 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & -1 & 18 & -6 \\ 0 & 0 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & -68 & 31 \end{pmatrix}$$

La troisième équation donne $z = -5/9$ tandis que la quatrième donne $z = -68/31 \neq -5/9$. Par conséquence le système n'a pas de solution.

Solution 34.

En utilisant en cascade la fomule de duplication du sinus,

$$\begin{aligned} p\cos\left(\frac{\pi}{14}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\sin\left(\frac{\pi}{14}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) \end{aligned}$$

et puisque $\pi/7 + 5\pi/14 = \pi/2$,

$$\begin{aligned} p\cos\left(\frac{\pi}{14}\right) &= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) \\ &= \frac{1}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) \end{aligned}$$

et puisque $2\pi/7 + 3\pi/14 = \pi/2$,

$$p\cos\left(\frac{\pi}{14}\right) = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) = \frac{1}{8}\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

et puisque $\frac{3\pi}{7} + \frac{\pi}{14} = \frac{\pi}{2}$,

$$p\cos\left(\frac{\pi}{14}\right) = \frac{1}{8}\cos\left(\frac{\pi}{14}\right).$$

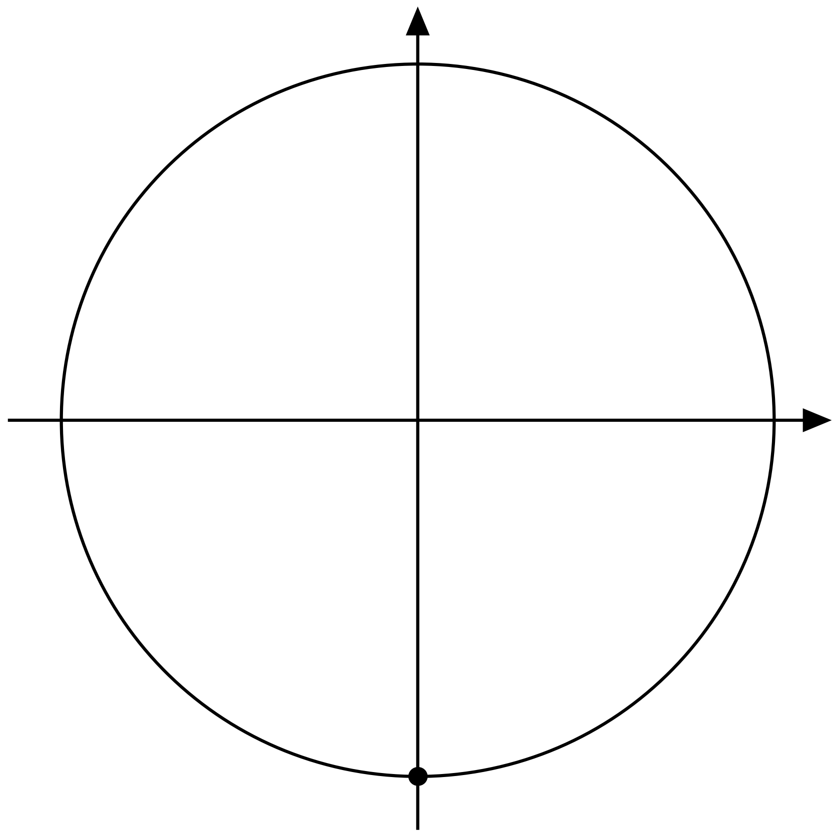
Comme $\pi/14 \not\equiv \pi/2[\pi]$, $\cos(\pi/14) \neq 0$ d'où $p = \dfrac{1}{8}$.

Solution 35.

1. L'équation est équivalente à $\cos(3x) = \cos(\pi/2-2x)$. Un réel x est donc solution *si et seulement si* $3x \equiv \pi/2-2x[2\pi]$ *ou* $3x \equiv 2x - \pi/2[2\pi]$, ie $5x \equiv \pi/2[2\pi]$ *ou* $x \equiv -\pi/2[2\pi]$, c'est-à-dire $x \equiv \pi/10[2\pi/5]$ *ou* $x \equiv -\pi/2[2\pi]$. L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}\mathbb{Z} \cup -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Remarque. Voici la représentation géométrique de l'ensemble des solutions.



2. Posons $\alpha = \cos(\pi/10)$ et $\beta = \sin(\pi/10)$. On sait que pour tout réel x,

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Puisque le nombre $\frac{\pi}{10}$ est une solution de l'équation étudiée à la question **1**, on a $4\alpha^3 - 3\alpha = 2\beta\alpha$, et comme α est non nul et $\alpha^2 = 1 - \beta^2$, on a $4(1-\beta^2) - 3 = 2\beta$, ie $4\beta^2 + 2\beta - 1 = 0$. Ainsi $\beta = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Puisque $0 < \frac{\pi}{10} < \pi$, on a $\beta > 0$ et donc $\beta = \sin(\pi/10) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Comme $\alpha^2 = 1 - \beta^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$, on a

$$\cos(\pi/5) = 2\cos^2(\pi/10) - 1 = 2\alpha^2 - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

puis

$$\sin(\pi/5) = \sqrt{1 - \cos^2(\pi/5)} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

Solution 36.

Ô formulaire ...

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2} &= \frac{\frac{1}{2}\cos(\pi/18) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\pi/18)}{\sin(\pi/18)\sin(\pi/18)} \\
&= \frac{\cos(\pi/3)\cos(\pi/18) - \sin(\pi/3)\sin(\pi/18)}{\frac{1}{2}\sin(2\times\pi/18)} \\
&= \frac{\cos(\pi/3+\pi/18)}{\frac{1}{2}\sin(\pi/9)} = \frac{\cos(7\pi/18)}{\frac{1}{2}\sin(\pi/9)} \\
&= \frac{\sin(\pi/2 - 7\pi/18)}{\frac{1}{2}\sin(\pi/9)} = \frac{\sin(\pi/9)}{\frac{1}{2}\sin(\pi/9)} = 2
\end{aligned}$$

Ainsi $\alpha = 4$.

Solution 37.

1. C'est l'esprit de l'exercice 7 qui souffle ici ...

$$\begin{aligned}
p\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) \\
&= \frac{1}{4}\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) \\
&= \frac{1}{8}\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{1}{8}\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\frac{1}{8}\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)
\end{aligned}$$

et puisque $\pi/7 \not\equiv 0[\pi]$, $\sin(\pi/7) \neq 0$ d'où $p = -\frac{1}{8}$.

2. Rappelons que $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b).$$

Retroussons nos manches ...

$$2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

d'où

$$4p = 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right).$$

Continuons dans cette voie ...

$$2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)$$

et

$$2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7}\right),$$

ainsi

$$4p = -1 + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7}\right).$$

Puisque $\frac{5\pi}{7} = \pi - \frac{2\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{7} = \pi - \frac{4\pi}{7}$ et $\frac{\pi}{7} = \pi - \frac{6\pi}{7}$, on a

$$4p = -1 - s$$

et donc $s = -\frac{1}{2}$.

Solution 38.

1. Soit $x \not\equiv 0[\pi]$. Posons $t = \tan(x/2)$. On a alors

$$\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{2t^2}{2t} = t = \tan(x/2).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après les formules de factorisation, on a

$$\begin{aligned}\sin(x-2\pi/3)+\sin(x+2\pi/3) &= 2\cos(-2\pi/3)\sin(x)\\ &= -\sin(x)\end{aligned}$$

3. Soit $x \not\equiv \pi/4[\pi/2]$. On a $\pi/4 - x = \pi/2 - (x+\pi/4)$, donc

$$\alpha = \tan(\pi/4 - x) = \frac{1}{\tan(x+\pi/4)}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha^2+1}{\alpha} &= \frac{1}{\cos^2(\pi/4-x)} \times \frac{1}{\tan(\pi/4-x)}\\ &= \frac{1}{\cos(\pi/4-x)\sin(\pi/4-x)} = \frac{2}{\sin(2(\pi/4-x))}\\ &= \frac{2}{\sin(\pi/2-2x)} = \frac{1}{\cos(2x)}\end{aligned}$$

4. Soit $x \not\equiv 0[\pi/2]$. On a

$$\frac{1}{\tan(x)} - \tan(x) = \frac{1-\tan^2(x)}{\tan(x)} = \frac{2}{\tan(2x)}$$

Solution 39.

1. On utilise une formule de factorisation :

$$\sin(x)+\sin(5x) = 2\sin(3x)\cos(2x),$$

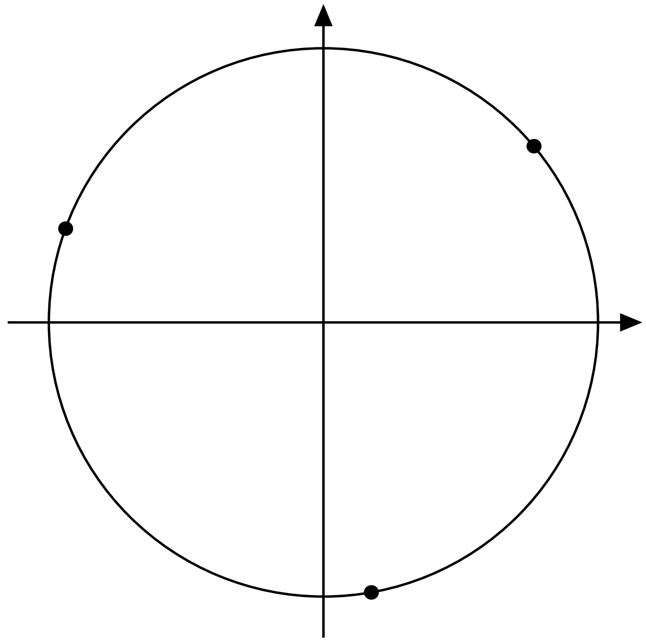
la première équation est donc équivalente à

$$\cos(2x)\left[\sin(3x) - \sqrt{3}/2\right] = 0.$$

- Or, $\cos(2x) = 0$ *si et seulement si* $2x \equiv \pi/2[\pi]$ c'est-à-dire $x \equiv \pi/4[\pi/2]$.
- On a $\sin(3x) = \sqrt{3}/2 = \sin(\pi/3)$ *si et seulement si* $3x \equiv \pi/3[2\pi]$ *ou* $3x \equiv 2\pi/3[2\pi]$, c'est-à-dire $x \equiv \pi/9[2\pi/3]$ *ou* $x \equiv 2\pi/9[2\pi/3]$.
- L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \cup \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\mathbb{Z} \cup \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}.$$

Remarque. Voici la représentation géométrique de l'ensemble des solutions.



2. On utilise une formule de factorisation ...

$$\cos(x) - \cos(2x) = 2\sin(x/2)\cos(3x/2)$$

la deuxième équation est donc équivalente à

$$2\sin(x/2)\cos(3x/2) = \sin(3x),$$

c'est-à-dire

$$2\sin(x/2)\cos(3x/2) = 2\sin(3x/2)\cos(3x/2),$$

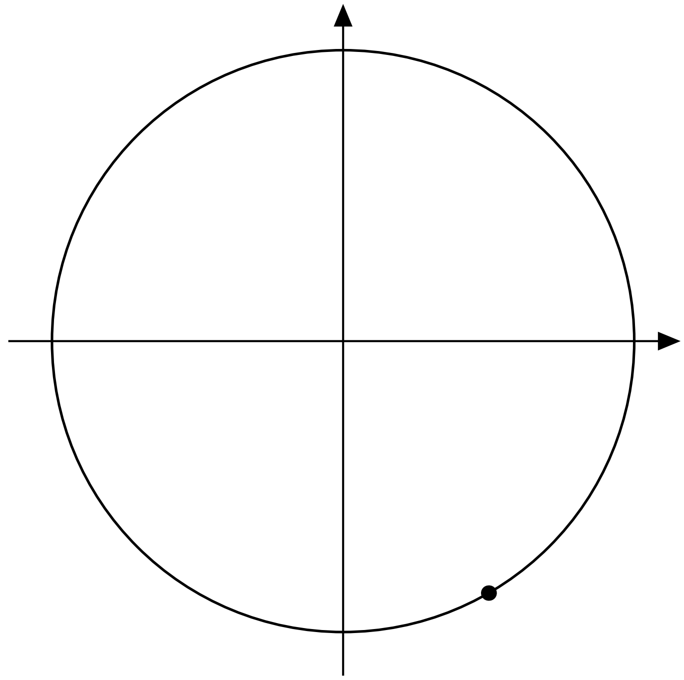
soit finalement :

$$\cos(3x/2)\Big[\sin(x/2) - \sin(3x/2)\Big] = 0.$$

- Or, $\cos(3x/2) = 0$ *si et seulement si* $3x/2 \equiv \pi/2[\pi]$ c'est-à-dire $x \equiv \pi/3[2\pi/3]$.
- On a $\sin(x/2) = \sin(3x/2)$ *si et seulement si* $x/2 \equiv 3x/2[2\pi]$ ou $x/2 \equiv \pi - 3x/2[2\pi]$ c'est-à-dire $x \equiv 0[2\pi]$ ou $x \equiv \pi/2[\pi]$.
- L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = 2\pi\mathbb{Z} \cup \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \cup \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}.$$

Remarque. Voici la représentation géométrique de l'ensemble des solutions.



3. En utilisant une formule de duplication, l'équation s'écrit

$$\sin^2(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x) = 1.$$

- On commence par poser $y = \sin^2(x)$, x est solution de l'équation *si et seulement si*

$$y + 2y(1-y) = 1,$$

équation admettant deux racines :1 et $1/2$. Un nombre réel x est donc solution *si et seulement si*

$$\sin(x) = \pm 1/\sqrt{2} = \sin(\pm\pi/4),$$

ou

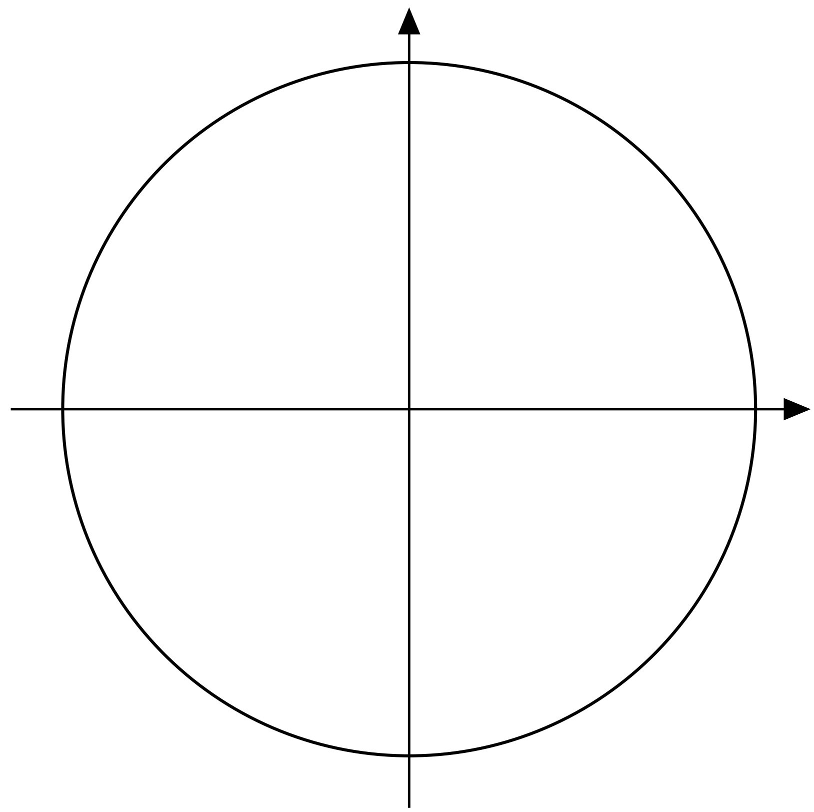
$$\sin(x) = \pm 1 = \sin(\pm\pi/2),$$

ce qui est équivalent à $x \equiv \pi/4[\pi]$ *ou* $x \equiv 3\pi/4[\pi]$ ou $x \equiv \pi/2[\pi]$.

- L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \cup \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Remarque. Voici la représentation géométrique de l'ensemble des solutions.



4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) + \cos(3x) = 2\cos(2x)\cos(x)$. L'équation est donc équivalente à $\cos(2x)[1 + 2\cos(x)] = 0$. Un réel x est donc solution *si et seulement si* $\cos(2x) = 0$ ou $\cos(x) = -\frac{1}{2} = \cos(2\pi/3)$.

- La première équation est équivalente à $2x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, c'est-à-dire $x \equiv \frac{\pi}{4}[\pi/2]$.
- La seconde équation est équivalente à $x \equiv \pm\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.
- L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \cup \frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \cup -\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}.$$

5. Puisque $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, l'équation est équivalente à

$$2\sin(x)[\cos(x) + 1/2] = 0.$$

- Un réel x est donc solution *si et seulement si* $\sin(x) = 0$ *ou* $\cos(x) = -1/2 = \cos(2\pi/3)$, c'est-à-dire $x \equiv 0[\pi]$ *ou* $x \equiv \pm 2\pi/3[2\pi]$.
- L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \pi\mathbb{Z} \cup \frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \cup -\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}.$$

6. Posons $y = \cos(x)$. Un réel x est solution *si et seulement si*

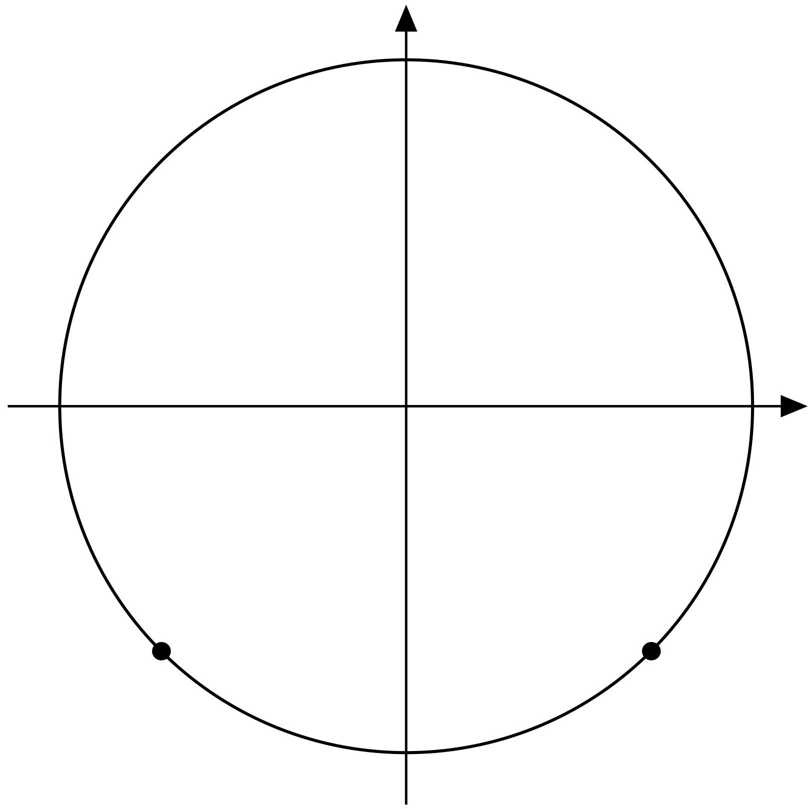
$$12y^2 - 8(1 - y^2) = 20y^2 - 8 = 2,$$

ie $y^2 = 2$, c'est-à-dire $y = \pm 1/\sqrt{2}$.

- On a $\cos(x) = 1/\sqrt{2} = \cos(\pi/4)$ *si et seulement si* $x \equiv \pm\pi/4[2\pi]$.
- On a $\cos(x) = -1/\sqrt{2} = \cos(3\pi/4)$ *si et seulement si* $x \equiv \pm 3\pi/4[2\pi]$.

- L'ensemble des solutions est donc
$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

Remarque. Voici la représentation géométrique de l'ensemble des solutions.



Solution 40.

Puisque les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \sin 5x$ sont 2π-périodiques, on va d'abord résoudre l'équation sur $[-\pi, \pi]$.
Tout d'abord, les solutions de l'équation $\sin 5x = \sin x$ sur $[-\pi, \pi]$ sont $-\pi$, $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{6}$, 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ et π.
Il s'agit alors de déterminer le signe de $f : x \mapsto \sin 5x - \sin x$ entre chacune de ces solutions. Puisque f est continue, elle est de signe constant entre chacune des solutions. Remarquons également que $f(x) = 2\sin 2x \cos 3x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Puisque $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} > 0$, f est strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{6}\right[$.
- Puisque $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{4} < 0$, f est strictement négative sur $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Puisque $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{3\pi}{2}\cos\frac{9\pi}{4} < 0$, f est strictement négative sur $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right[$.
- Puisque $f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 2\sin\frac{11\pi}{6}\cos\frac{11\pi}{4} > 0$, f est strictement négative sur $\left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right[$.

Comme f est impaire, on a facilement le signe de f entre les racines négatives.
On en déduit que l'ensemble des solutions de $\sin 5x \leqslant \sin x$ sur $[-\pi, \pi]$ est

$$\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left\{-\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left[-\frac{\pi}{6}, 0\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$$

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right] + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\left[-\frac{\pi}{6}, 0\right] + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] + 2\pi\mathbb{Z}\right)$$