Nombres réels, relations binaires

Exercice 1.★★

Pour tout $A \subset \mathbb{R}$ *non vide* et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$d(x, A) = \inf\left\{ |x - a| \ \middle|\ a \in A \right\}.$$

(expression qui se lit : « distance de x à A »)

1. Donner une interprétation *géométrique* de $d(x, A)$ sur la droite réelle.
2. Examiner les cas où $A = [0, 1[$ et $x = 1, 2, 1/2$ ou -3.
3. On revient au cas général. Justifier l'existence de $d(x, A)$.
4. La borne inférieure $d(x, A)$ est-elle un plus petit élément ? Illustrer par divers exemples.
5. Caculer $d(x, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Même question avec $d(x, \mathbb{Q})$.
6. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\left| d(x, A) - d(y, A) \right| \leqslant |x - y|.$$

Exercice 2.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

Exercice 3.★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Exercice 4.★

On se propose de calculer la partie entière du réel

$$\alpha = \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. En déduire $\lfloor \alpha \rfloor$.

Exercice 5.★

Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 6.★★

Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 7.★

On définit *la partie fractionnaire* d'un nombre réel x par

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

1. Calculer $\{54,465\}$ et $\{-36,456\}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comparer $\{x\}$ et $\{-x\}$.
3. Prouver que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \longmapsto \{x\}$$

est périodique et tracer son graphe.

Exercice 8.★

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par l'expression

$$\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$$

lorsque x et y décrivent $\mathbb{R}$.

EXERCICE 9.★★

Un classique.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer les entiers naturels k tels que
$$\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = m.$$

2. Soit $n \geqslant 0$. Calculer en fonction de n,
$$u_n = \sum_{k=0}^{n^2+2n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor.$$

EXERCICE 10.★

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations

1. $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor$;
2. $\lfloor x+3 \rfloor = \lfloor x-1 \rfloor$.

EXERCICE 11.

Tracer le graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$x \mapsto \left\lfloor \left| \frac{3}{2} - x \right| \right\rfloor.$$

EXERCICE 12.★

Etablir que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$:
$$0 \leqslant \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leqslant n-1.$$

EXERCICE 13.

Soit f une application *croissante* de $[0,1]$ dans $[0,1]$. On souhaite montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $l \in [0,1]$ tel que $f(l) = l$.

1. On pose $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant x\}$. Montrer que A est non vide et majorée.
2. On note alors $c = \sup A$. Montrer que $c \in [0,1]$.
3. Montrer que $c \leqslant f(c)$.
4. Montrer que $f(c) \in A$. Conclure.

EXERCICE 14.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note s_n la somme des chiffres de l'écriture décimale de n.

1. Montrer que $s_n \leqslant 9(\log_{10} n + 1)$.
2. Montrer que la suite $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)$ est bornée. Quelles sont les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble des valeurs de cette suite ? Sont-elles atteintes ?

EXERCICE 15.

Soient A et B deux ensembles non vides et f une application bornée de $A \times B$ dans $\mathbb{R}$. Comparer $\sup_{x\in A}\left(\inf_{y\in B} f(x,y)\right)$ et $\inf_{y\in B}\left(\sup_{x\in A} f(x,y)\right)$.

EXERCICE 16.

Soit f une application bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$g(x) = \inf_{y \geqslant x} f(y) \qquad \text{et} \qquad h(x) = \sup_{y \geqslant x} f(y)$$

Déterminer le sens de variation de g et h.

EXERCICE 17.★

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ est non vide et bornée et que
$$\sup(A \cup B) = \max\left[\sup(A), \sup(B)\right]$$
et
$$\inf(A \cup B) = \min\left[\inf(A), \inf(B)\right].$$

EXERCICE 18.☆

Etudier l'existence puis déterminer le cas échéant les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants,

1. $\mathcal{A} = \left\{ 2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$;
2. $\mathcal{B} = \left\{ 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m}, n, m \in \mathbb{Z}^* \right\}$;
3. $\mathcal{C} = \left\{ 1 - \frac{1}{n-m}, n \neq m \in \mathbb{Z} \right\}$;
4. $\mathcal{D} = \left\{ \frac{pq}{p^2+q^2}, (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$;
5. $\mathcal{E} = \left\{ \frac{2^n}{2^m + 3^{n+m}}, (n,m) \in \mathbb{N} \right\}$;
6. $\mathcal{F} = \left\{ \frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1}, (n,q) \in \mathbb{N}^2 \right\}$;
7. $\mathcal{G} = \left\{ \frac{mn}{m^2+n^2+mn}, m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

EXERCICE 19.

Prouver l'existence puis calculer les bornes supérieures et inférieures de l'ensemble

$$A = \left\{(-1)^n/n \mid n \geqslant 1\right\}.$$

EXERCICE 20.☆

Soient A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Montrer que si A et B sont bornées, alors $A + B$ l'est aussi et que

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$$

et

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

EXERCICE 21.

Montrer que $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n}, (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 22.

Etablir que $E = \{r^3 \mid r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 23.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On définit une fonction g par $g(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ pour $x \in [0,1]$. On définit également une fonction h par $h(x) = g(x) + e^{-x}\frac{x^n}{n!}$.

1. Montrer que g est strictement décroissante sur $[0,1]$.
2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e$.
3. Montrer que h est strictement croissante sur $[0,1]$.
4. En déduire que $e < \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) + \frac{1}{n!}$.
5. On suppose que e est rationnel. Il existe donc deux entiers naturels p, q tels que $e = \frac{p}{q}$. Montrer par l'absurde que $q > n$.
6. Conclure.

Exercice 24.

Soit α et β deux réels non nuls tels que $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$. On suppose $\alpha>1$ et α *irrationnel* . On pose

$$A=\{\lfloor n\alpha\rfloor \mid n\in\mathbb{N}^*\} \text{ et } B=\{\lfloor n\beta\rfloor \mid n\in\mathbb{N}^*\}$$

1. Montrer que $\beta>1$ et que β est également irrationnel.
2. On suppose qu'il existe un couple $(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\lfloor p\alpha\rfloor=\lfloor q\beta\rfloor$. On pose alors $k=\lfloor p\alpha\rfloor=\lfloor q\beta\rfloor$.
   a. Montrer que $p-\frac{1}{\alpha}<\frac{k}{\alpha}<p$ et $q-\frac{1}{\beta}<\frac{k}{\beta}<q$ et aboutir à une contradiction.
   b. En déduire que $A\cap B=\varnothing$.
3. On suppose qu'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ qui n'est ni dans A ni dans B.
   a. Montrer que les suites $(\lfloor n\alpha\rfloor)$ et $(\lfloor n\beta\rfloor)$ tendent vers $+\infty$.
   b. En déduire qu'il existe un couple $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ tel que $\lfloor p\alpha\rfloor<k<\lfloor (p+1)\alpha\rfloor$ et $\lfloor q\beta\rfloor<k<\lfloor (q+1)\beta\rfloor$.
   c. Montrer que $p<\frac{k}{\alpha}<p+1-\frac{1}{\alpha}$ et $q<\frac{k}{\beta}<q+1-\frac{1}{\beta}$ et aboutir à une contradiction.
   d. En déduire que $A\cup B=\mathbb{N}^*$.

Exercice 25.

Soit $n\in\mathbb{N}$ impair tel que $n\geqslant 3$. On pose $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{n}}$. On souhaite montrer que $\frac{\varphi}{\pi}$ est irrationnel.

1. Pour $k\in\mathbb{N}$, on pose $A_k=\left(\sqrt{n}\right)^k\cos k\varphi$. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $A_{k+1}+nA_{k-1}=2A_k$.
2. En déduire que les A_k sont des entiers.
3. Montrer qu'aucun des A_k n'est divisible par n.
4. Conclure en raisonnant par l'absurde.

Exercice 26.

Prouver que le nombre $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

Exercice 27.✯

Le réel $r=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est-il rationnel ?

Exercice 28.

Que dire de $x+y$ et xy dans les quatre cas suivants ?

1. $x,y\in\mathbb{Q}$;
2. $x,y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;
3. $x\in\mathbb{Q},y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;
4. $y\in\mathbb{Q},x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Exercice 29.✯

Montrer que si $n\in\mathbb{N}$, $\sqrt{n}$ est rationnel *si et seulement si* n est un carré parfait (ie de la forme m^2 avec $m\in\mathbb{N}$).

Exercice 30.

Prouver l'égalité

$$\bigcup_{n\geqslant 1}\left]\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right[=]0,1[\cup]1,2[.$$

Exercice 31.

Soit φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tous réels a,b on pose

$$a\leqslant_\varphi b \iff \varphi(b)-\varphi(a)\geqslant|b-a|\,.$$

1. Montrer que $\leqslant_\varphi$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que cet ordre est total si et seulement si pour tous réels a,b on a $|\varphi(b)-\varphi(a)|\geqslant|b-a|$.
3. Quel ordre obtient on si $\varphi=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$?

Exercice 32.

Soit X un ensemble de cardinal supérieur à 1. On munit $\mathcal{P}(X)$ de l'ordre $\subset$. On note $E\subset\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des singletons de E.

1. E possède-t-il un plus grand élément ?
2. E possède-t-il une borne supérieure ?

Nombres réels, relations binaires

Exercice 33.

On définit une relation binaire sur $\mathbb{N}^2$ par

$$x \preccurlyeq y \quad \textit{si et seulement si} \quad \begin{pmatrix} x_1 < y_1 \\ \text{ou} \\ x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leqslant y_2 \end{pmatrix}$$

où $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$

1. Prouver que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$.
2. L'ordre est-il total ?
3. On pose $A = \left\{ (p, p) \ , \ p \in \mathbb{N} \right\}$ et
$$B = \left\{ (2, 10^p) \ , \ p \in \mathbb{N} \right\}.$$
Les parties A et B de $\left(\mathbb{N}^2, \preccurlyeq \right)$ sont-elles majorées ? Possèdent-elles un plus grand élément ? Une borne supérieure ?

Exercice 34.

Soit E un ensemble.

1. Montrer que la relation d'inclusion notée $\subset$ est un ordre sur $\mathcal{P}(E)$.
2. L'ordre est-il total ?
3. On pose pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$,
$$\sup(A, B) = \sup(\{A, B\}) \text{ et } \inf(A, B) = \inf(\{A, B\}).$$
   a. Justifier ces définitions. On exprimera $\sup(A, B)$ et $\inf(A, B)$ en fonction des sous-ensembles A et B à l'aide des symboles $\cup$ et $\cap$.
   b. Montrer plus généralement que toute partie non vide $\mathcal{F}$ de $(\mathcal{P}(E), \subset)$ admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on explicitera à l'aide de $\mathcal{F}$ en utilisant les symboles $\cap$ et $\cup$.

Exercice 35.

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathbb{R}$. Pour $x \in E$, on appelle classe d'équivalence de x l'ensemble $C(x) = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$. Montrer que les classes d'équivalences forment une partition de E.

Exercice 36.

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$x\mathcal{R}y \iff xe^y = ye^x$$
est une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Quel est le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de x ?

Exercice 37.

On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{C}$ par

$$z\mathcal{R}z' \iff |z| = |z'|$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire géométriquement les classes d'équivalence.

Exercice 38.

On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{R}$ par

$x\mathcal{R}y$ *si et seulement si* $x + y$ est pair.

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer les classes d'équivalence.

Exercice 39.

On définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer les cardinaux des classes d'équivalence.

Exercice 40.

Soit E un ensemble. On rappelle que E^E est l'ensemble des applications de E dans E. Si f et g sont deux éléments de E^E, on dira que f est conjuguée à g s'il existe une bijection φ de E dans E telle que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$. On notera alors $f \sim g$.

1. **a.** Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E^E.

   b. Quelle est la classe d'équivalence de Id_E ?

   c. Quelle est la classe d'équivalence d'une application constante ?

2. On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}$.

   a. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Les applications $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto ax^2$ sont-elles conjuguées ?

   b. Les applications sin et cos sont-elles conjuguées ?

Exercice 41.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles du plan, de centres respectifs O, O' et de rayons respectifs R et R'. On dit que $\mathcal{C}$ est inférieur à $\mathcal{C}'$ si $OO' \leqslant R' - R$. On note alors $\mathcal{C} \leqslant \mathcal{C}'$.
Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre dans l'ensemble des cercles du plan.

Exercice 42.

Dans $\mathbb{N}^*$, on considère la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$p\mathcal{R}q \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad q = p^n$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

2. La partie $\{2, 3\}$ est-elle majorée ?

Exercice 43.

Soient E un ensemble, $(F, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $f : E \to F$ une application injective. On définit dans E la relation $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y \iff f(x) \leqslant f(y)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E.