Devoir à la maison n° 3

Problème 1 —

Partie I –

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

On pose $c = f(1)$.

1. Déterminer $f(0)$ et montrer que $c \neq 0$. Dans la suite, on pose $g = \frac{1}{c}f$.
2. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
$$g(x+y) = g(x) + g(y) \qquad \text{et} \qquad g(x-y) = g(x) - g(y)$$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = n$.
4. Montrer que g est une fonction impaire et en déduire que $g(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
5. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $g(r) = r$.
6. Montrer que g est strictement croissante.
7. Montrer que $g(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On pourra raisonner par l'absurde et admettre qu'il existe toujours un rationnel strictement compris entre deux réels distincts.
8. En déduire f.

Partie II –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se propose de déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotones telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+f(y)) = f(x) + y^n$$

Dans la suite, f désigne une telle application.

1. Justifier que f est injective.
2. Montrer que $f(0) = 0$.
3. Montrer que $f(f(y)) = y^n$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
4. On suppose $n = 1$ dans cette question.
   a. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
   b. Justifier qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = cx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   c. Conclure.
5. On suppose maintenant $n > 1$.
   a. En déduire que n ne peut être pair. On suppose donc n impair dans la suite.
   b. Montrer que $f \circ f$ est bijective. En déduire que f l'est également.
   c. Montrer que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   d. En déduire une contradiction.
   e. Conclure.