

# DEVOIR À LA MAISON N°2

## Problème 1 –

On note  $\mathbb{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$  et  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ .

On appelle *homographie* toute fonction  $h$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  qui à tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $cz + d \neq 0$  associe  $h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  où  $a, b, c, d$  sont des complexes tels que  $ad - bc \neq 0$ .

### Partie I – Un exemple

1. Soit  $h$  l'homographie définie par  $h(z) = i \frac{1+z}{1-z}$ .
  - a. Montrer que  $\forall z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}, h(z) \in \mathbb{R}$ .
  - b. Montrer que  $\forall z \in \mathbb{D}, h(z) \in \mathbb{P}$ .
  - c. Déterminer les points fixes de  $h$ , c'est-à-dire les complexes  $z$  tels que  $h(z) = z$ .
  - d. Pour quels  $Z \in \mathbb{C}$ , l'équation  $h(z) = Z$  d'inconnue  $z$  admet-elle une solution ?
2. Soit  $g$  l'homographie définie par  $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$ .
  - a. Montrer que  $\forall z \in \mathbb{R}, g(z) \in \mathbb{U}$ .
  - b. Montrer que  $\forall z \in \mathbb{P}, g(z) \in \mathbb{D}$ .

### Partie II – Homographies conservant $\mathbb{U}$

1. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $h$  l'homographie définie par  $h(z) = \frac{e^{i\theta}}{z}$ . Montrer que  $\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}$ .
2. Soient  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}, \theta \in \mathbb{R}$  et l'homographie  $h$  définie par  $h(z) = e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1}$ .
  - a. Montrer que  $h$  est bien une homographie et que  $h$  est définie sur  $\mathbb{U}$ .
  - b. Montrer que  $\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}$ .
3. Inversement, on souhaite montrer que les seules homographies conservant  $\mathbb{U}$  sont celles des questions II.1 et II.2. Soit donc  $h$  une homographie définie par  $h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  où  $a, b, c, d$  sont des complexes tels que  $ad - bc \neq 0$  et vérifiant :  $\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}$ .
  - a. Montrer que  $\begin{cases} \bar{a}b = \bar{c}d \\ |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 \end{cases}$ .
  - b. Montrer que si  $a = 0$ , alors  $h$  est du type présenté dans la question II.1.
  - c. On suppose maintenant  $a \neq 0$ .
    - i. Montrer que  $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$ .
    - ii. Montrer que  $|a| \neq |c|$ .
    - iii. En déduire que  $h$  est du type présenté dans la question II.2.