

DEVOIR SURVEILLÉ N°9

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 —

On considère dans tout ce problème les deux fonctions F et G définies sur \mathbb{R}_+^* par :

$$F(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$G(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

Partie I – Etude de deux fonctions

1.
 - a. Montrer que les fonctions F et G sont continues sur \mathbb{R}_+^* .
 - b. Montrer que F et G sont prolongeables par continuité en 0. On notera encore F et G ces prolongements.
2.
 - a. Montrer que les fonctions F et G sont dérivables sur \mathbb{R}_+^* et calculer leurs dérivées.
 - b. Démontrer, à l'aide de développements limités, que les fonctions F et G sont dérivables en 0. Préciser les valeurs de $F'(0)$ et $G'(0)$.
3.
 - a. Montrer que les réels strictement positifs tels que $F(x) = 0$ constituent une suite $(a_k)_{k \geq 1}$ strictement croissante. On donnera explicitement la valeur de a_k .
 - b. Montrer que les réels strictement positifs tels que $G(x) = 0$ constituent une suite $(b_k)_{k \geq 1}$ strictement croissante. Y-a-t'il un lien entre les suites $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$?
4.
 - a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer sans calcul qu'il existe un réel $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.
 - b. Montrer que la fonction F' est de même signe que $h : x \mapsto x \cos(x) - \sin(x)$ sur \mathbb{R}_+^* .
 - c. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction h est strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$.
 - d. En déduire l'unicité du réel x_k défini dans la question I.4.a.
 - e. Etablir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, x_k \in \left] a_k, a_k + \frac{\pi}{2} \right[$.
 - f. Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k$ puis déterminer un équivalent simple de la suite (x_k) .
5. Tracer l'allure de la courbe représentative \mathcal{C}_F de la fonction F lorsque l'abscisse x varie dans $[0, 4\pi]$. On se placera dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 10\text{cm}$. On fera apparaître clairement les tangentes horizontales à la courbe et on précisera les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_F avec l'axe (O, \vec{i}) .

Partie II – Deux fonctions définies par des intégrales

Dans toute cette partie, E désigne l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. Si f appartient à E , on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$I_f(x) = \int_0^1 f(t) \cos(xt) dt$$

$$J_f(x) = \int_0^1 f(t) \sin(xt) dt$$

Soit f une fonction appartenant à E .

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que les deux réels $I_f(x)$ et $J_f(x)$ sont bien définis. On dispose donc de deux fonctions I_f et J_f définies sur \mathbb{R} .
2. Déterminer la parité des fonctions I_f et J_f .
3. On se propose de calculer dans cette question les limites de I_f et J_f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - a. Etablir que : $\forall x > 0, I_f(x) + iJ_f(x) = \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} - \frac{1}{ix} \int_0^1 f'(t)e^{ixt} dt$.
 - b. Expliquer rapidement pourquoi les fonctions f et f' sont bornées sur $[0, 1]$. On posera par la suite $M = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ et $M' = \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)|$.
 - c. En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x > 0, |I_f(x) + iJ_f(x)| \leq \frac{A}{x}$.
 - d. A l'aide de la question II.3.c, calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (I_f(x) + iJ_f(x))$.
En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} J_f(x)$.
 - e. En utilisant une propriété obtenue sur les fonctions I_f et J_f , calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} I_f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} J_f(x)$.
4. L'objectif de cette question est de prouver que les fonctions I_f et J_f sont continues sur \mathbb{R} .
 - a. Soient p et q deux réels. Rappeler la formule liant $\cos(p) - \cos(q)$ à $\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
 - b. Démontrer que : $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin(u)| \leq |u|$ (on pourra par exemple utiliser l'inégalité des accroissements finis).
 - c. Soient x et y deux réels. Etablir que : $|I_f(x) - I_f(y)| \leq |x - y| \int_0^1 t|f(t)| dt$.
 - d. En déduire que la fonction I_f est continue sur \mathbb{R} .
Par un raisonnement analogue, on pourrait démontrer que la fonction J_f est continue sur \mathbb{R} mais ce n'est pas demandé ici.
5. A l'aide d'une fonction f judicieusement choisie, établir un lien entre les fonctions F et G de la partie I, et les fonctions I_f et J_f de la partie II.

Problème 2 –

L'objet de ce problème est de s'intéresser à résoudre dans certains cas l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x (x-t)f(t) dt = g(x) \quad (1)$$

où f est une fonction inconnue supposée continue sur \mathbb{R} ensemble des nombres réels et g une fonction donnée définie sur \mathbb{R} .

On rappelle que la fonction sh est définie par $\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et la fonction ch par $\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Partie I –

Dans cette partie on suppose que la fonction g est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

1. Montrer que les fonctions f solutions de (1) sont elles aussi de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et qu'elles vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - f(x) = g''(x) \quad (2)$$

2. En déduire la solution de l'équation (1) quand :

- a. g est la fonction nulle ;
- b. g est une fonction constante ;
- c. g est une fonction affine.

3. Déduire aussi que l'équation (1) (que g soit de classe \mathcal{C}^2 ou pas) a au plus une solution.

4. Montrer que toute fonction f de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{2} \left[\int_0^x e^{-t} g''(t) dt + k_A \right] - \frac{e^{-x}}{2} \left[\int_0^x e^t g''(t) dt + k_B \right]$$

où k_A et k_B sont des constantes réelles est solution de (2).

5. Montrer qu'une solution f de (2) vérifiant :

$$f(0) = g(0) \quad \text{et} \quad f'(0) = g'(0)$$

est également solution de (1).

6. Déduire des deux questions précédentes la solution f de (1) quand g est la fonction exponentielle.

Partie II –

Dans cette partie on suppose que la fonction g est seulement continue.

On note E l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On définit l'application A qui à une fonction f de E associe la fonction (notée $A(f)$) par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, A(f)(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$$

- 1. Montrer que pour $f \in E$, $A(f)$ est de classe \mathcal{C}^2 et calculer $A(f)'$ et $A(f)''$ en fonction de f .
- 2. Montrer que l'application A est un endomorphisme injectif de E .
- 3. On définit une application U de E dans E par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = \int_0^x \text{sh}(x-t)f(t) dt$$

Montrer que $U \circ A = U - A$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A^n la n -ème itérée de l'application A :

$$A^2(f) = A(A(f)), \dots, A^n(f) = A(A^{n-1}(f))$$

Montrer que pour tout $f \in E$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(t) dt$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = A + A^2 + \dots + A^n$.

- a. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left| \operatorname{sh}(u) - \sum_{k=1}^n \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!} \right| \leq \frac{\operatorname{ch}(u)|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- b. En déduire que pour toute fonction f de E , pour tout réel x et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|\mathcal{U}(f)(x) - \mathcal{U}_n(f)(x)| \leq \frac{\operatorname{ch}(x)|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \int_0^x |f(t)| dt \right|$$

puis que $\mathcal{U}(f)(x) - \mathcal{U}_n(f)(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

- c. En déduire que $A \circ \mathcal{U} = \mathcal{U} - A$.

6. a. On note I l'application identité de E dans E .
Montrer que les applications $I - A$ et $I + \mathcal{U}$ sont (pour la composition des applications) des bijections de E dans E réciproques l'une de l'autre.
- b. En déduire la fonction f de E solution de l'équation (1).
- c. Expliciter f pour la fonction g paire et telle que

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \in [0, 1[\\ 2 - x & \text{pour } x \in [1, 2[\\ 0 & \text{pour } x \geq 2 \end{cases}$$