Comparaison de fonctions

Solution 1.

1. En 0, on a les équivalents suivants :
$$3+x\sim 3,\qquad \sqrt{x+3}\sim\sqrt{3},\qquad \sin\sqrt{x}\sim\sqrt{x}$$
Par produit et quotient d'équivalents, on trouve une limite égale à $3\sqrt{3}$.

2. En 0, on a les équivalents suivants :
$$1-e^x\sim -x,\qquad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\qquad 3x^3+2x^4\sim 3x^3$$
Par produit et quotient d'équivalents, on trouve une limite égale à $-\frac{1}{6}$.

3. On a les équivalents suivants en 0^+ :
$$1-\cos x^2\sim\frac{x^4}{2},\qquad x^5+x^3\sim x^3$$
Par conséquent,
$$\frac{(1-\cos x^2)e^{\frac{1}{x}}}{x^5+x^3}\sim\frac{x}{2}e^{\frac{1}{x}}$$
En posant $u=\frac{1}{x}$, on a $u\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}+\infty$ et
$$\frac{x}{2}e^{\frac{1}{x}}=\frac{e^u}{2u}\underset{u\to+\infty}{\longrightarrow}$$

4. On pose $u=x-\frac{\pi}{4}$ de telle sorte que $u\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\longrightarrow}0$. On a alors
$$\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=u\tan\left(\frac{\pi}{2}+u\right)=-\frac{u}{\tan u}\sim -1$$
Donc $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\longrightarrow}-1$.

5. Ecrivons tout d'abord :
$$(\tanh x)^{\ln x}=e^{\ln x\ln(\tanh x)}$$
Or on sait que :
$$\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$$
Par conséquent,
$$\tanh x-1=-\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$$
On connaît un équivalent de $\ln(1+u)$ en 0 :
$$\ln\tanh x=\ln\left(1-\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)\sim-\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\sim -2e^{-2x}$$
On sait que $\ln(x)=o\left(e^{2x}\right)$ en $+\infty$ donc $\ln x\ln(\tanh x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Finalement, $(\tanh x)^{\ln x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$.

Solution 2.

1. On met le terme prépondérant en facteur sous la première racine :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^3+1} &= \sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}\\ &= x\left(1+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\end{aligned}$$

car $u=\dfrac{1}{x^3}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et $(1+u)^{\frac{1}{3}}=1+\dfrac{u}{3}+o(u)$. On met de même le terme prépondérant en facteur sous la deuxième racine :

$$\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Posons $u=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Par conséquent, $(1+u)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{u}{2}+o(u)$. Or $u=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\sim\dfrac{1}{x}$ car $\dfrac{1}{x^2}=o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Donc

$$1+\frac{u}{2}+o(u)=1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

(on peut remplacer u par un équivalent). Finalement,

$$\begin{aligned}&\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+x+1}\\ &= x\left(1+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-x\left(1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= x+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-x-\frac{1}{2}+o(1) \qquad \text{(on développe)}\\ &= -\frac{1}{2}+o(1) \qquad \text{car } \frac{1}{x^2}=o(1)\end{aligned}$$

La limite recherchée est donc $-\dfrac{1}{2}$.

Remarque. Dans tous les calculs, $x\to+\infty$ et $u\to0$. ■

2. Mettons tout d'abord l'expression sous forme exponentielle

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=x\ln(x+1)-x\ln x$$

Or $x\ln x\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$ et $\ln(x+1)\underset{x\to0}{\longrightarrow}\ln1=0$ donc $x\ln(x+1)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$. Finalement, $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$. Par conséquent, la limite recherchée est $e^0=1$.

Solution 3.

1. Par croissances comparées et car cos est bornée, $\ln(\ln x))^2-\cos^2x+\ln x\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln x$. Par croissances comparées, $2^x-50x^6\underset{x\to+\infty}{\sim}2^x$. Donc

$$\frac{(\ln(\ln x))^2-\cos^2x+\ln x}{2^x-50x^6}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\ln x}{2^x}$$

Par croissances comparées, la limite recherchée est 0.

2. Attention, «$1^{+\infty}$» est une forme indéterminée ! On ne réfléchit pas, on passe à la forme exponentionnelle.

$$\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-x-1}\right)^x=e^{x\ln\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right)}$$

Or $\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc $\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1} = 1+t$ avec $t = \frac{3x-4}{x^2-x+1}$ et $t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $\ln(1+t) \underset{t\to0}{\sim} t$. Donc

$$\ln\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3x-4}{x^2-x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{x}$$

Donc $x\ln\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 3$. La limite recherchée est donc e^3.

3. On a $\cos 3x \underset{x\to0}{=} 1-\frac{9x^2}{2}+o(x^2)$ et $\cos x \underset{x\to0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. Donc $\cos 3x-\cos x \underset{x\to0}{=} -4x^2+o(x^2) \underset{x\to0}{\sim} -4x^2$. Par conséquent, la limite recherchée est -4.

4. On a $a^x = e^{x\ln a} \underset{x\to0}{=} 1+x\ln a+o(x)$. De même $b^x \underset{x\to0}{=} 1+x\ln b+o(x)$. Donc

$$a^x-b^x \underset{x\to0}{=} x(\ln a-\ln b)+o(x) \underset{x\to0}{\sim} x\ln\frac{a}{b}$$

La limite recherchée est donc $\ln\frac{a}{b}$.

5. On se ramène en 0 en posant $x=1+h$. Ainsi $\sqrt{2-x^2}=\sqrt{1-2h-h^2}$. Or $-2h-2h^2 \underset{h\to0}{\longrightarrow} 0$ donc

$$\sqrt{1-2h-h^2}-1 \underset{h\to0}{\sim} -h-h^2 \underset{h\to0}{\sim} -h$$

On a aussi $\ln x = \ln(1+h) \underset{h\to0}{\sim} h$. La limite recherchée est donc -1.

6. Pas besoin d'équivalent ici. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$. Par croissance de l'exponentielle, on a donc

$$e^{-1}\leqslant e^{\cos x}\leqslant e$$

Ainsi

$$e^{-1}\sin\frac{1}{x}\leqslant \sin\frac{1}{x}e^{\cos x}\leqslant e\sin\frac{1}{x}$$

Comme $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que sin est continue en 0, on en déduit que $\sin\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que la limite recherchée est nulle.

7. On passe à la forme exponentielle :

$$\left(\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)^{x^2} = e^{x^2\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)}$$

Comme $\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$,

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \cos\left(\frac{1}{\ln x}\right)-1$$

Comme $\frac{1}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right)-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2(\ln x)^2}$$

Finalement,

$$x^2\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{x^2}{2(\ln x)^2}$$

Par croissances comparées, $-\frac{x^2}{2(\ln x)^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. La limite recherchée est donc 0.

8. On se ramène en 0 en effectuant le changement de variable $x=\frac{\pi}{2}+h$. On a alors

$$(\tan x)(\tan 2x) = \left(\tan\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\right)(\tan(\pi+2h)) = -\frac{\tan 2h}{\tan h} \underset{h\to0}{\sim} -2$$

La limite recherchée est -2.

9. On se ramène en 0 en effectuant le changement de variable $x=1+h$. Occupons nous du numérateur :

$$e^{x^2+x}-e^2x=e^{2+3h+h^2}-e^{2+2h}=e^{2+2h}(e^{h+h^2}-1)\underset{h\to 0}{\sim}e^2(h+h^2)\underset{h\to 0}{\sim}e^2h$$

Maintenant le dénominateur :

$$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)\underset{h\to 0}{\sim}-\frac{\pi h}{2}$$

Par quotient, la limite recherchée est $-\dfrac{2e^2}{\pi}$.

10. On pourrait s'en sortir avec le changement de variable $x=\frac{\pi}{3}+h$ mais il y a plus astucieux. En effet :

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

La limite recherchée est donc 2.

11. Pas besoin d'équivalent ici. En effet pour tout $x\neq 0$, $-1\leqslant\sin\frac{1}{x}\leqslant 1$ donc

$$-x\leqslant x\sin\frac{1}{x}\leqslant x$$

Par le théorème des gendarmes, la limite recherchée est nulle.

Solution 4.

1. Tout d'abord, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x}$ car $\dfrac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Par conséquent, $u(x)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\underset{x\to+\infty}{\sim}x\ln x$. Donc $u(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et $\ln(1+u(x))\underset{x\to+\infty}{\sim}u(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x\ln x}$. Finalement, $f(x)\sim\dfrac{1}{\ln x}$.

2. Comme $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\ln x}$, $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Par conséquent, $e^{f(x)}-1\underset{x\to+\infty}{\sim}f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\ln x}$.
Donc $\left(e^{f(x)}-1\right)\ln x\underset{x\to+\infty}{\sim}1$ et la limite recherchée est 1.

3. Il suffit de remarquer que :

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x}=\frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln x}=\frac{\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}=1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$$

En mettant sous forme exponentielle :

$$g(x)=\left[e^{x\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)}-1\right]\ln x=\left(e^{f(x)}-1\right)\ln x$$

D'après la question précédente, $g(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$.

Solution 5.

Posons $\mathrm{P}(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ et $\mathrm{Q}(x)=x^{p+1}-x^p-x+1$. On a $\mathrm{P}(1)=\mathrm{Q}(1)=0$. Puisque

$$\mathrm{P}'(x)=n(n+1)x^n-n(n+1)x^{n-1}\quad\text{et}\quad\mathrm{Q}'(x)=(p+1)x^p-px^{p-1}-1$$

on a également $\mathrm{P}'(1)=\mathrm{Q}'(1)=0$. Enfin,

$$\mathrm{P}''(x)=n^2(n+1)x^{n-1}-n(n-1)(n+1)x^{n-2}\quad\text{et}\quad\mathrm{Q}''(x)=p(p+1)x^{p-1}-p(p-1)x^{p-2}$$

ces expressions étant encore valables lorsque $n=1$ ou $p=1$ puisqu'alors le coefficient de x^{n-2} ou x^{p-2} est nul. On trouve $P''(1)=n(n+1)$ et $Q''(1)=2p$. On a donc

$$P(x) \underset{x\to1}{=} \frac{n(n+1)}{2}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right) \quad \text{et} \quad Q(x) \underset{x\to1}{=} p(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)$$

D'où $\lim_{x\to1}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{n(n+1)}{2p}$.

Solution 6.

On a clairement

$$\frac{a^t+b^t+c^t}{3} \underset{0+}{=} 1+\frac{\ln(abc)}{3}t+o(t)$$

d'où

$$\ln(f(1/t)) \underset{0+}{=} \ln\left(\sqrt[3]{abc}\right)+o(1).$$

Donc, par continuité de l'exponentielle en $\ln\left(\sqrt[3]{abc}\right)$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt[3]{abc}.$$

Solution 7.

1. On a, au voisinage de 0,

$$x\cos(x)=x-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$$

et

$$\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

Ainsi,

$$x\cos(x)-\tan(x)=-\frac{5}{6}x^3+o(x^3)\underset{0}{\sim}-\frac{5}{6}x^3.$$

D'où, puisque $\sin^3(x)\underset{0}{\sim}x^3$,

$$\frac{x\cos(x)-\tan(x)}{\sin^3(x)}\underset{0}{\sim}-\frac{5}{6}$$

et donc

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cos(x)-\tan(x)}{\sin^3(x)}=-\frac{5}{6}.$$

2. Reprenons les résultats établis au numéro précédent...

$$x-\tan(x)\underset{0}{\sim}-\frac{1}{3}x^3,$$

d'où

$$\frac{x\cos(x)-\tan(x)}{\sin(x)(x-\tan(x))}\underset{0}{\sim}-\frac{5/6\,x^3}{-1/3\,x^4}=\frac{5}{2x}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to0+}\frac{x\cos(x)-\tan(x)}{\sin(x)(x-\tan(x))}=+\infty$$

et

$$\lim_{x\to0-}\frac{x\cos(x)-\tan(x)}{\sin(x)(x-\tan(x))}=-\infty.$$

3. Posons $x=1+h$ et notons $g(x)$ l'expression de l'énoncé. On a

$$g(x)=\frac{1+h}{h}-\frac{1}{\ln(1+h)}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(1+h)} &\underset{0}{=} \frac{1}{h(1-h/2+o(h))}=\frac{1+h/2+o(h)}{h}\\ &\underset{0}{=}\frac{1}{h}+\frac{1}{2}+o(1)\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1+h}{h}-\frac{1}{\ln(1+h)}\underset{0}{=}1-\frac{1}{2}+o(1)=\frac{1}{2}+o(1).$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\frac{1}{2}.$$

4. Posons $x=1+h$ et notons $g(x)$ l'expression de l'énoncé. On a

$$g(x)=\frac{(1+h)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+h)^{\frac{1}{3}}-1}.$$

Or,pour $\alpha\neq 0$,

$$(1+h)^{\alpha}-1\underset{0}{\sim}\alpha h$$

et donc

$$\frac{(1+h)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+h)^{\frac{1}{3}}-1}\underset{0}{\sim}\frac{\frac{1}{2}h}{\frac{1}{3}h}=\frac{3}{2}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\frac{3}{2}.$$

Solution 8.

- Comparons f, g et h au voisinage de $+\infty$.
  Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,
  $$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2\ln x}{e^x}=\frac{x^3}{e^x}\cdot\frac{\ln x}{x}$$
  Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. Donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ ou encore $f\underset{+\infty}{=}o(g)$.
  Pour tout $x\in]1,+\infty[$,
  $$\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$
  Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0$ ou encore $h\underset{+\infty}{=}o(f)$.
- Comparons f, g et h au voisinage de 0^+.
  Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,
  $$\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{x^{\frac{3}{2}}(\ln x)^2}{e^x}$$
  Par croissances comparées, $\lim_{x\to0^+}x^{\frac{3}{2}}(\ln x)^2=0$ et par continuité de l'exponentielle en 0, $\lim_{x\to0}e^x=1$. Donc $\lim_{x\to0^+}\frac{h(x)}{g(x)}=0$ ou encore $h\underset{0^+}{=}o(g)$.
  Pour tout $x\in]0,1[$,
  $$\frac{f(x)}{h(x)}=\frac{\sqrt{x}}{\ln x}$$
  Puisque $\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}=0$ et $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$, on obtient $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{h(x)}=0$ par opérations sur les limites. Ceci signifie que $f\underset{0^+}{=}o(h)$.

Solution 9.

1. On a d'abord :
$$\ln(1+x)=\ln\left(x(1+\frac{1}{x}\right)=\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
Comme $\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$, $\ln(1+\frac{1}{x})\underset{x\to+\infty}{=}\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})$. Par conséquent,
$$x\ln(x+1)\underset{x\to+\infty}{=}x\ln x+1+o(1)$$
Il vient donc :
$$x\ln(1+x)-(x+1)\ln x\underset{x\to+\infty}{=}-\ln x+1+o(1)$$
Comme $1\underset{x\to+\infty}{=}o(\ln x)$, on a $x\ln(1+x)-(x+1)\ln x\underset{x\to+\infty}{\sim}-\ln x$.

2. Comme $\frac{1}{x^2}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$, $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x^2}$. De plus on sait que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x-1<\lfloor x\rfloor\leqslant x$. Donc, pour $x>0$:
$$1-\frac{1}{x}<\frac{\lfloor x\rfloor}{x}\leqslant 1$$
Ceci prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\lfloor x\rfloor}{x}=1$. Par conséquent, $\lfloor x\rfloor\underset{x\to+\infty}{\sim}x$. Par produit, on obtient :
$$\lfloor x\rfloor\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x}$$

3. On a d'une part
$$\sqrt{1+x}\underset{x\to0}{=}1+\frac{x}{2}+o(x)$$
et d'autre part
$$\sqrt{1+x^2}\underset{x\to0}{=}1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\underset{x\to0}{=}1+o(x)$$
Par conséquent,
$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}\underset{x\to0}{=}x+o(x)\underset{x\to0}{\sim}x$$

4. Cherchons d'abord un équivalent du numérateur. On a $\sin x\underset{x\to0}{\sim}x$ et $\cos x-1\underset{x\to0}{\sim}-\frac{x^2}{2}$. Or $-\frac{x^2}{2}\underset{x\to0}{=}o(x)$. Donc $\sin x+\cos x-1\underset{x\to0}{\sim}x$.
Cherchons maintenant un équivalent du dénominateur. On remarque que $x-x\cos x=x(1-\cos x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$. Donc
$$\tan(x-x\cos x)\underset{x\to0}{\sim}x(1-\cos x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{x^3}{2}$$
Par quotient, $\dfrac{\sin x+\cos x-1}{\tan(x-x\cos x)}\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{2}{x^2}$.

5. Comme $\tan^2 x\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$, $\sqrt{1+\tan^2 x}-1\underset{x\to0}{\sim}\frac{\tan^2 x}{2}$. Par conséquent,
$$\frac{\sqrt{1+\tan^2 x}-1}{\tan x}\underset{x\to0}{\sim}\frac{\tan x}{2}\underset{x\to0}{\sim}\frac{x}{2}$$

6. On a $\ln(\cos x)=\ln(1+(\cos x-1))$. Or $\cos x-1\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$. Donc
$$\ln(\cos x)\underset{x\to0}{\sim}\cos x-1\underset{x\to0}{\sim}-\frac{x^2}{2}$$

7. Comme $\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on a $e^{\frac{1}{x}}\underset{x\to+\infty}{=}1+\frac{1}{x}$ et $\cos\left(\frac{1}{x}\right)\underset{x\to+\infty}{=}1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\underset{x\to+\infty}{=}1+o(x)$. Par conséquent,
$$e^{\frac{1}{x}}-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x}$$
Et par produit, $x(e^{\frac{1}{x}}-\cos\left(\frac{1}{x}\right))\underset{x\to+\infty}{\sim}1$.

8. Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(\ln x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $\left(\frac{1}{2}\right)^x \underset{x\to+\infty}{=} \ln(\ln x)$. D'où

$$\ln(\ln x) - \left(\frac{1}{2}\right)^x \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(\ln x)$$

Par croissances comparées, $\left(\frac{1}{3}\right)^x \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Par conséquent,

$$\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$$

Par quotient, on obtient :

$$\frac{\ln(\ln x) - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3 \ln(\ln x)$$

9. Factorisons dans un premier temps :

$$e^{\sin x} - e^{\tan x} = e^{\tan x}(e^{\sin x - \tan x} - 1)$$

Comme $e^{\tan x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$, on a clairement $e^{\tan x} \underset{x\to0}{\sim} 1$. De plus, $\sin x - \tan x \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ donc $e^{\sin x - \tan x} - 1 \underset{x\to0}{\sim} \sin x - \tan x$. Mais on a :

$$\sin x - \tan x = \tan x(\cos x - 1) \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$$

Finalement, $e^{\sin x} - e^{\tan x} \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$.

10. Remarquons que $\dfrac{\pi x}{2x+3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$. On a donc $\dfrac{\pi x}{2x+3} = \frac{\pi}{2} + t$ avec $t = -\dfrac{3\pi}{4x+6}$ et $t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or

$$\tan\left(\frac{\pi x}{2x+3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\frac{1}{\tan t} \underset{t\to0}{\sim} -\frac{1}{t}$$

Par conséquent,

$$\tan\left(\frac{\pi x}{2x+3}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{4x+6}{3\pi} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{4x}{3\pi}$$

Solution 10.

1. En posant $u = x - \frac{\pi}{2}$, on a $u \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$ et $\cos x = -\sin u$. Or $\sin u \underset{u\to0}{\sim} u$ donc $\cos x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2} - x$.

2. En posant $u = x - \frac{\pi}{2}$, on a $u \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$ et $\tan x = -\frac{1}{\tan u}$. Or $\tan u \underset{u\to0}{\sim} u$ donc $\tan x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$.

3. $\sqrt[3]{1+x^3} - x = (x^3+1)^{\frac{1}{3}} - x = x\left(\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right)$. Or $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3x^3}$. Finaalement, $\sqrt[3]{1+x^3} - x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3x^2}$.

4. En posant $u = x - 1$, on a $u \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2+u} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{u}{2}} - 1\right)$. Or $\frac{1}{1+\frac{u}{2}} - 1 \equiv u \to 0 - \frac{u}{2}$ donc $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \underset{x\to1}{\sim} \frac{1-x}{4}$.

Solution 11.

1. Puisque $x^2 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, $\sin(x^2) \underset{x\to0}{\sim} x^2$. De plus, $e^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x$. Donc

$$\frac{x\sin(x^2)}{e^x - 1} \underset{x\to0}{\sim} \frac{x \times x^2}{x} = x^2$$

2. $\sqrt{1+x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$ et $1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ donc

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{1-\cos x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{x}$$

3. Puisque $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $\ln(1+\sqrt{x}) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$. De plus, $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$. Enfin, puisque $x^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $\arctan(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$. Finalement,

$$\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\tan(x)\arctan(x^3)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x\times x^3} = \frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}$$

4. Puisque $\frac{1}{x^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $\sin\left(\frac{1}{x^3}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$. De même, $\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $e^{\frac{1}{x^2}}-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$. Finalement

$$\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\times\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = 1$$

Solution 12.

1. On sait que $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$ et $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$. Donc $\sin(x)+\tan(x) \underset{x\to 0}{=} 2x+o(x)$. On en déduit que $\sin(x)+\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$.

2. On sait que $e^x-1 \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$ et $x^3 \underset{x\to 0}{=} o(x)$ donc $x^3+e^x-1 \underset{x}{=} +o(x)$. Autrement dit, $x^3+e^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.

3. On sait que $\arcsin(x) \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$ et $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. A fortiori, $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1+o(x)$ donc $\arcsin(x)+\cos(x)-1 \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$. Autrement dit $\arcsin(x)+\cos(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.

4. Puisque $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $\sqrt{1+\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$. De même, $\frac{1}{x^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$. A fortiori, $\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$. On en déduit que $\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$. Autrement dit, $\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

Solution 13.

On a

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} &= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}\\ &= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sqrt{n-1} &= \sqrt{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1/2}\\ &= \sqrt{n}\left(1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\end{aligned}$$

donc

$$u_n = \frac{1}{4n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Ainsi

$$u_n \sim \frac{1}{4n^{3/2}}.$$

Solution 14.

1. On a au voisinage de 0,
$$\arccos(x)-\frac{\pi}{2}=-\arcsin(x)\underset{0}{\sim}-x.$$
2. On a au voisinage de 0,
$$x^4+x+x^2\underset{0}{\sim}x.$$
3. On a au voisinage de 0,
$$\arcsin(x)+x+x^2=x+x+o(x)\underset{0}{\sim}2x.$$
4. On a au voisinage de 0,
$$\arctan(x)+x=x+x+o(x)\underset{0}{\sim}2x.$$
5. On a pour $x\neq 1$,
$$\frac{1}{1-x}-1+x=\frac{2x-x^2}{1-x},$$
ainsi au voisinage de 0,
$$\frac{1}{1-x}-1+x\underset{0}{\sim}\frac{2x}{1}=2x.$$
6. On a
$$\frac{x^2}{1+x}\underset{0}{=}o(x),$$
ainsi
$$\frac{x^2}{1+x}-x=-x+o(x)\underset{0}{\sim}-x.$$

Solution 15.

On a au voisinage de 0,
$$\frac{e^x+1}{2}\underset{0}{=}1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{48}x^4+o(x^4)$$
de plus,
$$\ln(1+u)\underset{0}{=}u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4+o(u^4)$$
Posons
$$u=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{48}x^4$$
et appliquons le théorème de composition des DL.

u	$\frac{x}{2}$	$\frac{x^2}{4}$	$\frac{x^3}{12}$	$\frac{x^4}{48}$
$-\frac{u^2}{2}$	0	$-\frac{x^2}{8}$	$-\frac{x^3}{8}$	$-\frac{7x^4}{96}$
$\frac{u^3}{3}$	0	0	$\frac{x^3}{24}$	$\frac{x^4}{16}$
$-\frac{u^4}{4}$	0	0	0	$-\frac{x^4}{64}$
$\ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right)$	$\frac{x}{2}$	$\frac{x^2}{8}$	0	$-\frac{x^4}{192}$

D'où

$$f(x) \underset{0}{=} -\frac{1}{192}x^4 + o(x^4)$$

et donc

$$f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{192}x^4.$$

Solution 16.

On a au voisinage de 0,

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7)$$

et

$$\mathrm{sh}(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + o(x^7)$$

Posons

$$y = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040}$$

et appliquons le théorème de composition des DL.

y	x	$\frac{x^3}{6}$	$\frac{x^5}{120}$	$\frac{x^7}{5040}$
$-\frac{y^3}{6}$	0	$-\frac{x^3}{6}$	$-\frac{x^5}{12}$	$-\frac{13x^7}{720}$
$\frac{y^5}{120}$	0	0	$\frac{x^5}{120}$	$\frac{x^7}{144}$
$-\frac{y^7}{5040}$	0	0	0	$-\frac{x^7}{5040}$
$\sin\circ\mathrm{sh}$	x	0	$-\frac{1}{15}x^5$	$-\frac{x^7}{90}$

Posons

$$u = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

et appliquons le théorème de composition des DL.

u	x	$-\frac{x^3}{6}$	$\frac{x^5}{120}$	$-\frac{x^7}{5040}$
$\frac{u^3}{6}$	0	$\frac{x^3}{6}$	$-\frac{x^5}{12}$	$\frac{13x^7}{720}$
$\frac{u^5}{120}$	0	0	$\frac{x^5}{120}$	$-\frac{x^7}{144}$
$\frac{u^7}{5040}$	0	0	0	$\frac{x^7}{5040}$
$(\mathrm{sh}\circ\sin)(x)$	x	0	$-\frac{1}{15}x^5$	$\frac{x^7}{90}$

ainsi,

$$\sin(\mathrm{sh}(x))-\mathrm{sh}(\sin(x)) \underset{0}{=} -\frac{1}{90}x^7+o(x^7),$$

et donc

$$\sin(\mathrm{sh}(x))-\mathrm{sh}(\sin(x)) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{90}x^7.$$

Solution 17.

On a

$$\arcsin(x) \underset{0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o(x^6)$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}+o(x^5).$$

D'après le théorème sur les produits de DL, on a donc

$$f(x) \underset{0}{=} x+\frac{2}{3}x^3+\frac{8}{15}x^5+o(x^5).$$

Solution 18.

1. Produit de développements limités connus :

$$e^x\sin(x)=x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

2. Comme la valuation de $\sin(x)$ est égale à 1, on trouve le développement limité à l'ordre 6 de $\sin^3(x)$ en partant du développement limité à l'ordre 4 de $\sin(x)$:

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4).$$

Le développement limité de $\cos x$ à l'ordre 3 est

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3).$$

On trouve finalement

$$\sin^3(x)-x^3\cos(x)=o(x^6)...$$

3. Le cours dit comment calculer le développement limité à l'ordre 2 de $(1+x)^{1/2}$.

$$x^3\sqrt{1+x} = x^3 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{8} + o(x^5).$$

4. On se ramène à un développement limité connu par une transformation simple :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+x} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(x/2)}\\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3).\end{aligned}$$

5. Même chose.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3-x^2} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(x^2/3)}\\ &= \frac{1}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^4}{27} + o(x^5).\end{aligned}$$

6. C'est immédiat :

$$\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

7. C'est sans soucis :

$$\begin{aligned}\sqrt{4-x} &= 2\sqrt{1-(x/4)}\\ &= 2 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{64} - \frac{x^3}{512} + o(x^3).\end{aligned}$$

8. D'après les formules d'addition,

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x).$$

Il ne reste plus qu'à appliquer les formules connues :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{\sqrt{3}x^3}{12} + o(x^3).$$

9. On se ramène à la seule forme connue :

$$\ln(2+x) = \ln(2) + \ln[1+(x/2)]$$

et on en déduit que

$$\ln(2+x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3).$$

10. Même chose.

$$\begin{aligned}\exp(3-x) &= e^3\exp(-x)\\ &= e^3 - e^3x + \frac{e^3x^2}{2} - \frac{e^3x^3}{6} + o(x^3).\end{aligned}$$

11. On passe par la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/x} &= e^{\ln(1+x)/x} = e^{1-x/2+x^2/3+o(x^2)}\\ &= e.e^{-x/2+x^2/3+o(x^2)}\\ &= e.\left(1 - x/2 + x^2/8 + x^2/3 + o(x^2)\right)\end{aligned}$$

donc :

$$(1+x)^{1/x} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2).$$

Solution 19.

1. $$x+\ln(1+x)=2x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

2. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I (comme somme de fonctions continues et strictement croissantes). D'après le théorème d'inversion, la fonction f réalise une bijection de I sur l'intervalle
$$\mathrm{J}=\left]f(-1^+),f(1^-)\right[=]-\infty,1+\ln 2[\,.$$

3. Admettons que
$$f^{-1}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3)$$
pour des réels a_k convenables. Comme $f(0)=0$, alors $f^{-1}(0)=0$ et, par continuité de f^{-1}, on sait déjà que $a_0=0$.
Comme $f^{-1}(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on peut prendre
$$u=f^{-1}(x)=\mathcal{O}(x)$$
dans le développement limité
$$f(u)=2u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o(u^3).$$
Or
$$\begin{aligned}u^2&=a_1^2x^2+2a_1a_2x^3+o(x^3)\\ u^3&=a_1^3x^3+o(x^3)\end{aligned}$$
donc
$$\begin{aligned}f\big(f^{-1}(x)\big)&=2a_1x+\frac{(4a_2-a_1^2)}{2}x^2\\&\quad+\frac{(6a_3-3a_1a_2+a_1^3)}{3}x^3\\&\quad+o(x^3)\\&=x\qquad(\forall\ x\in\mathrm{J})\\&=x+o(x^3).\end{aligned}$$
Par unicité du développement limité, on en déduit que
$$\begin{cases}2a_1&=1\\-a_1^2+4a_2&=0\\a_1^3-3a_1a_2+6a_3&=0\end{cases}$$
donc
$$a_1=\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{16},\ a_3=\frac{-1}{192}.$$

Remarque. f^{-1} admet un développement limité d'ordre 3 en 0 car elle est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $f(\mathrm{I})$. En effet, c'est la bijection réciproque d'une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, à savoir f, dont la dérivée ne s'annule pas sur I puisque pour tout $x\in\mathrm{I}$,
$$f'(x)=1+\frac{1}{1+x}>0$$

■

Solution 20.

1. **a.** On pose $u = x - x_0$ et on trouve
$$e^{(1+u)} = e\left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)\right).$$

b. On applique les formules d'addition en posant $u = x - \pi/4$:
$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)\right).$$

c. Idem avec $u = x - \pi/6$:
$$\sin(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}u - \frac{u^2}{2} - \frac{\sqrt{3}u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)\right).$$

d. On pose $u = x - e$ et
$$\begin{aligned}\ln(x) &= 1 + \ln\left(1 + \frac{u}{e}\right)\\ &= 1 + \frac{u}{e} - \frac{u^2}{2e^2} + \frac{u^3}{3e^3} - \frac{u^4}{4e^4} + o(u^4).\end{aligned}$$

e. On se ramène à une forme connue avec $u = x - 1$:
$$\frac{1}{1 + (1+u)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + (u + u^2/2)}$$
et on considère maintenant l'infiniment petit
$$v = u + \frac{u^2}{2} = \mathcal{O}(u).$$
On vérifie que
$$\begin{aligned}v^2 &= u^2 + u^3 + \frac{u^4}{4},\\ v^3 &= u^3 + \frac{3u^4}{2} + o(u^4),\\ v^4 &= u^4 + o(u^4),\end{aligned}$$
d'où
$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} - \frac{u^4}{8} + o(u^4).$$

f. On intègre le résultat précédent, puisque
$$\arctan(1+u) = \arctan(1) + \int_1^{1+u} \frac{dt}{1+t^2}.$$
Par conséquent,
$$\arctan(1+u) = \frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{4} + \frac{u^3}{12} + o(u^4).$$

g. Pour tout $x > 0$, on a :
$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

h. Notons $f(x)$ l'expression de l'énoncé. Avec $h = x - \pi/4$, on a :
$$\begin{aligned}f(x) &= e^{\tan(\pi/2+2h)\ln(\tan(h+\pi/4))}\\ &= e^{-\ln(\tan(h+\pi/4))/\tan(2h)}\end{aligned}$$
d'où
$$f(\pi/4 + h) = \exp\left(-\frac{\ln\left(\frac{1+\tan(h)}{1-\tan(h)}\right)}{\tan(2h)}\right).$$

Développons à l'ordre 5 $\ln(1+\tan(h))$. On a

$$v=\tan(h)=h+\frac{h^3}{3}+\frac{2h^5}{15}+o(h^5).$$

De plus,

$$\ln(1+v)=v-\frac{v^2}{2}+\frac{v^3}{3}-\frac{v^4}{4}+\frac{v^5}{5}+o(v^5).$$

Comme

$$-\frac{v^2}{2}=-\frac{1}{2}\left(h^2+\frac{2h^4}{3}+o(h^5)\right),$$

$$\frac{v^3}{3}=\frac{1}{3}(h^3+h^5+o(h^5)),$$

$$-\frac{v^4}{4}=-\frac{1}{4}(h^4+o(h^5)),$$

et

$$\frac{v^5}{5}=\frac{1}{5}(h^5+o(h^5)),$$

d'où

$$\ln(1+\tan(h))=h-\frac{h^2}{2}+\frac{2h^3}{3}-\frac{7h^4}{12}+\frac{2h^5}{15}+o(h^5)$$

donc

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1+\tan(h)}{1-\tan(h)}\right)&=\ln(1+\tan(h))-\ln(1+\tan(-h))\\&=2u+\frac{4u^3}{3}+\frac{4u^5}{3}+o(u^5)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\ln(f(h+\pi/4))&=\frac{2h+\frac{4h^3}{3}+\frac{4h^5}{3}+o(h^5)}{2h+8h^3/3+64h^5/15+o(h^5)}\\&=\frac{1+\frac{2h^2}{3}+\frac{2h^4}{3}+o(h^4)}{1+4h^2/3+32h^4/15+o(h^4)}\\&=-1+\frac{2h^2}{3}+\frac{26h^4}{45}+o(h^4)\end{aligned}$$

En posant

$$u=\frac{2h^2}{3}+\frac{26h^4}{45}+o(h^4)$$

On a

$$f(h+\pi/4)=e^{-1}\left(1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)\right)$$

avec

$$u^2=4h^4/9+o(h^4)$$

d'où finalement :

$$f(\pi/4+h)=\frac{1}{e}+\frac{2}{3e}h^2+\frac{4}{5e}h^4+o(h^4).$$

2. **a.** Tout d'abord, pour tout $x>0$,

$$\sqrt[3]{x^3+x^2}=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3}$$

et on applique la formule du cours avec l'infiniment petit

$$u=\frac{1}{x}$$

pour trouver

$$\sqrt[3]{x^3+x^2} = x + \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + \frac{5}{81x^2} - \frac{10}{243x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

De même,

$$\sqrt[3]{x^3-x^2} = x - \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} - \frac{5}{81x^2} - \frac{10}{243x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Donc

$$\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2} = \frac{2}{3} + \frac{10}{81x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

b. On prend bien entendu

$$u = x - \frac{\pi}{4}$$

pour infiniment petit. D'après les formules d'addition,

$$\begin{aligned}\cos(x)+\sin(x) &= \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sqrt{2}\left(1-\frac{u^2}{2}+o(u^2)\right).\end{aligned}$$

c. On pose $u = x - \pi/4$ et d'après les formules d'addition,

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \frac{\cos(u)+\sin(u)}{\cos(u)-\sin(u)}\\ &= \frac{1+u-u^2/2+o(u^2)}{1-u-u^2/2+o(u^2)}.\end{aligned}$$

En prenant

$$v = u + \frac{u^2}{2} + o(u^2) = \mathcal{O}(u)$$

pour infiniment petit, on retrouve une forme connue :

$$\frac{1}{1-v} = 1 + u + \frac{3u^2}{2} + o(u^2)$$

et on en déduit que

$$\tan(x) = 1 + 2u + 2u^2 + o(u^2).$$

Solution 21.

On a au voisinage de 0,

$$\operatorname{ch}(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Posons $u = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ et appliquons le théorème de composition des DL..

u	0	$\frac{x^2}{2}$	0	$\frac{x^4}{24}$
$-\frac{u^2}{2}$	0	0	0	$-\frac{x^4}{8}$
$\ln(1+\operatorname{ch}(x))$	0	$\frac{x^2}{2}$	0	$-\frac{x^4}{12}$

Ainsi,

$$\frac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{x} \underset{0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3).$$

Posons $v = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}$ et appliquons à nouveau le théorème de composition des DL.

v	$\frac{x}{2}$	0	$-\frac{x^3}{12}$
$\frac{v^2}{2}$	0	$\frac{x^2}{8}$	0
$\frac{v^3}{6}$	0	0	$\frac{x^2}{48}$
$f(x)-1$	$\frac{x}{2}$	$\frac{x^2}{2}$	$-\frac{x^3}{16}$

Ainsi,

$$f(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{16} + o(x^4).$$

Solution 22.

► On a au voisinage de 0 ,

$$\arctan(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

et

$$\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

Posons $u = x - \frac{x^3}{3}$ et appliquons le théorème de composition des DL.

u	x	0	$-\frac{x^3}{3}$
$-\frac{u^2}{2}$	0	$-\frac{x^2}{2}$	0
$\frac{u^3}{3}$	0	0	$\frac{x^3}{3}$
$\ln(1+\arctan(x))$	x	$-\frac{x^2}{2}$	0

Ainsi,

$$\ln(1+\arctan(x)) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

► On a au voisinage de 0,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

ainsi, après une banale comoposition de DL,

$$\frac{x}{\sin^2(x)} = \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right).$$

On a donc après un simple produit de DL,

$$\ln(h(x)) \underset{0}{=} 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2).$$

◇ On a au voisinage de 0,

$$e^u = 1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2).$$

Posons $u = -\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}$ et appliquons à nouveau le théorème de composition des DL.

u	$-\frac{x}{2}$	$\frac{x^2}{3}$
$\frac{u^2}{2}$	0	$\frac{x^2}{8}$
$\frac{h(x)}{e}-1$	$-\frac{x}{2}$	$\frac{11x^2}{24}$

Ainsi,

$$h(x) \underset{0}{=} e-\frac{ex}{2}+\frac{11ex^2}{24}+o(x^2).$$

Solution 23.

On a au voisinage de 0,

$$e^x \underset{0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3),$$

ainsi,

$$3e^x+e^{-x} \underset{0}{=} 4+2x+2x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

On a donc au voisinage de 0,

$$\ln(1+u) = u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o(u^3).$$

Posons $u = \frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}$ et appliquons le théorème de composition des DL.

u	$\frac{x}{2}$	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{12}$
$-\frac{u^2}{2}$	0	$-\frac{x^2}{8}$	$-\frac{x^3}{4}$
$\frac{u^3}{3}$	0	0	$\frac{x^3}{24}$
$f(x)-\ln(4)$	$\frac{x}{2}$	$\frac{3x^2}{8}$	$-\frac{x^3}{8}$

Ainsi,

$$f(x) \underset{0}{=} \ln(4) + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{8} + o(x^3).$$

Solution 24.

On a au voisinage de 0 ,

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

ainsi

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + o(x^4)}.$$

Or ,au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1 + u + u^2 + o(u^2).$$

Posons $u = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{48}x^4$. Puisque $u = \mathcal{O}(x^2)$, le développement à l'ordre 2 en u indiqué ci-dessus est suffisant pour développer $f(x)$ à l'ordre 4. Appliquons la méthode de calcul du DL d'une composée.

u	$\frac{1}{4}x^2$	$-\frac{1}{48}x^4$
u^2	0	$\frac{1}{16}x^4$
$\frac{1}{1-u} - 1$	$\frac{1}{4}x^2$	$\frac{1}{24}x^4$

D'où

$$f(x) \underset{0}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + o(x^4).$$

Solution 25.

Nous allons considérer $f(x)$ comme le produit de $g(x) = x^2\sin(x)$ et de $h(x) = 1/(1+x)$, et nous allons développer chacun des termes à l'ordre 5.

- Commençons par g. La fonction g est elle-même un produit. Le premier terme x^2 est un polynôme de degré 2, son développement à l'ordre 5 est donc égal à x^2. Nous connaissons aussi un développement de $\sin x$ à l'ordre 5 : $\sin(x) = x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^5)$. Le produit des deux termes conduit donc à

  $$x^2\sin(x) = x^3 - x^5/6 + o(x^5),$$

  puisqu'on ne tient compte dans le produit que des termes de degré $\leqslant 5$. Notons donc qu'il aurait été suffisant de développer $\sin(x)$ seulement à l'ordre 3. Il est souvent possible d'utiliser ce type de raccourci, mais il est plus sûr au début d'appliquer strictement les règles de calcul, au prix de quelques lourdeurs.

- Passons maintenant à $1/(1+x)$. On sait que

  $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + o(x^5).$$

► En utilisant la règle du produit, il vient donc

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3 - x^5/6 + o(x^5)) \times \\ &\quad (1 - x + x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + o(x^5)) \\ &= x^3 - x^4 + 5x^5/6 + o(x^5) \end{aligned}$$

Notons que, là encore, il aurait été possible de ne développer $1/(1+x)$ qu'à l'ordre 2, puisque x^3 est en facteur dans le premier terme g.

Solution 26.

1. On a

$$(1-x)^{-1/2} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + o(x^4)$$

et

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

d'où, après produit des deux DL :

$$f(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{49}{384}x^4 + o(x^4).$$

2. Comme $1 + \cos(x) \underset{0}{=} 2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, on a,

$$g(x) \underset{0}{=} \sqrt{2}\left[1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^4)\right].$$

Puisque $\sqrt{1+u} \underset{0}{=} 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$, on déduit du théorème de composition des DL que,

$$g(x) \underset{0}{=} \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}x^2}{8} + \frac{\sqrt{2}x^4}{384} + o(x^4).$$

3. Comme $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, on a,

$$h(x) \underset{0}{=} e \times \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right).$$

Puisque $e^u \underset{0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, on déduit du théorème de composition des DL que,

$$h(x) \underset{0}{=} e - \frac{e\,x^2}{2} + \frac{e\,x^4}{6} + o(x^4).$$

4. Comme

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

et

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^4),$$

on a :

$$\frac{\cos(x)}{1+x^2} \underset{0}{=} 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{37}{24}x^4 + o(x^4).$$

Solution 27.

1. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

donc pour x au voisinage de 0

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = \ln\left(1-x^{n+1}\right) - \ln(1-x)$$

Or $\ln\left(1-x^{n+1}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -x^{n+1}$ donc $\ln\left(1-x^{n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^n\right)$ et

$$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right)$$

donc

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right)$$

2. On sait que

$$e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right)$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k - e^x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^n}{n!}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\ln\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right) &= \ln\left(e^x + \sum_{k=0}^{n-1} x^k - e^x\right)\\ &= x + \ln\left(1 + e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k - e^x\right)\right)\end{aligned}$$

Or d'après ce qui précède,

$$e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k - e^x\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^n}{n!}$$

Puisque $n \geqslant 1$,

$$e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k - e^x\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

et donc

$$\begin{aligned}\ln\left(1 + e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k - e^x\right)\right) &\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^n}{n!}\\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right) = x - \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

3. La fonction $t \mapsto e^{-t^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\int_x^{x^2} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$e^{-\frac{t^2}{2}} \underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + o(t^5)$$

Comme $x \mapsto \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ est une primitive de $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$, on obtient en intégrant terme à terme :

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + o\left(x^6\right)$$

Par conséquent,

$$\int_0^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{40} + o\left(x^{12}\right)$$

et a fortiori

$$\int_0^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^6}{6} + o\left(x^6\right)$$

D'après la relation de Chasles, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_x^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \int_0^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

On en déduit que

$$\int_x^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^6}{6} + o\left(x^6\right)$$

Solution 28.

Il est possible d'obtenir certains développements asymptotiques au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$ en posant $x = 1/u$, ce qui ramène le problème à 0^+ (ou 0^-). Posant $x = 1/u$, on se ramène à u tendant vers 0^+. Or,

$$\begin{aligned} f(1/u) &= \sqrt{1/u^2 + 1/u} = \frac{\sqrt{1+u}}{u} \\ &= \frac{1 + u/2 - u^2/8 + o(u^2)}{u} \\ &= 1/u + 1/2 - u/8 + o(u) \end{aligned}$$

d'où

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o(1/x).$$

Bien entendu, on aurait pu aussi mettre directement le terme dominant en facteur en écrivant $f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$, ce qui ramène au problème de $\sqrt{1+u}$ au voisinage de 0.

Solution 29.

1. On pourrait procéder par étude de fonctions mais comme on connaît la formule de Taylor avec reste intégral, autant en profiter. D'abord à l'ordre 1.

$$\sin x = x + \int_0^x (x-t)(-\sin t)\,dt$$

Pour $x \in [0,1]$, $\sin t \geqslant 0$ et l'intégrale est négative. On en déduit que $\sin x \leqslant x$. Puis à l'ordre 3

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \sin t\,dt$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, l'intégrale est positive. On en déduit que $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6}$.

2. Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2}$. En utilisant la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^6} \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

Or $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$. Ainsi

$$\left|S_n - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^6} \leqslant \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} \frac{n^3}{n^6} = \frac{1}{6n^2}$$

Finalement, $S_n - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Solution 30.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $f_n : x \mapsto \cos x - nx$. f_n est dérivable et $f_n'(x) = -\sin x - n < 0$ pour tout $x \in [0,1]$. f_n est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$. De plus, $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = cos(1) - n < 0$. On en déduit que f_n s'annule une unique fois sur $[0,1]$. D'où l'existence et l'unicité de x_n.

2. On a $\cos x_n = nx_n$ et donc $x_n = \frac{\cos x_n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $|x_n| \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis que (x_n) converge vers 0.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $f_n \geqslant f_{n+1}$ sur $[0,1]$. Donc $f_n(x_{n+1}) \geqslant f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n)$. La stricte décroissance de f_n implique que $x_{n+1} \leqslant x_n$. Par conséquent la suite (x_n) est décroissante.

4. Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que cos est continue en 0, $\cos x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos 0 = 1$. Donc $x_n = \frac{\cos x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

5. Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\cos x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2)$. Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $\cos x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi $x_n = \frac{\cos x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. On en déduit que $x_n - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^3}$.

Solution 31.

1. Soit $n \geqslant 2$. On étudie la fonction f_n définie par $f_n(x) = x - \ln x - n$ pour $x > 0$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f_n'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. f_n est donc strictement croissante sur $]0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. De plus, $\lim_{n\to 0^+} f_n(x) = +\infty$, $f_n(1) = 1 - n < 0$ car $n \geqslant 2$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ par croissances comparées. Comme f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de la bijection appliqué à f_n sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ assure qu'il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$ sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty$. Comme 1 n'est évidemment pas solution, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

2.
   a. Comme x_n est la plus petite des deux solutions, $x_n \in]0,1[$ pour tout $n \geqslant 2$. Or $\ln x_n = x_n - n$ pour tout $n \geqslant 2$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \ln x_n = -\infty$. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

   b. Puisque pour $n \geqslant 2$, $\ln x_n = -n + x_n$, $x_n = e^{-n}e^{x_n}$. Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $e^{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ceci prouve que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$.

   c. Remarquons déjà que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{-n})$. On a pour tout $n \geqslant 2$, $x_n = \ln(e^{-n} + u_n) + n = \ln(1 + e^n u_n)$. Or $e^n u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ donc $\ln(1 + e^n u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n u_n$. Ainsi $e^n u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$. D'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-2n}$.

   d. Posons $s_n = u_n - e^{-2n}$ pour $n \geqslant 2$ de sorte que $s_n \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{-2n})$. On rappelle que

$$x_n = \ln(1 + e^n u_n) = \ln(1 + e^{-n} + e^n s_n)$$

D'une part,

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} e^{-n} + e^{-2n} + o(e^{-2n})$$

et d'autre part, en posant $\alpha_n = e^{-n} + e^n s_n$,

$$\ln(1+\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{=} \alpha_n - \frac{\alpha_n^2}{2} + o\left(\alpha_n^2\right)$$

Or $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$ donc

$$\ln(1+\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{=} e^{-n} + e^n s_n - \frac{e^{-2n}}{2} + o(e^{-2n})$$

On en déduit que $e^n s_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{3}{2}e^{-2n} + o(e^{-2n})$ ou encore $s_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2}e^{-3n}$.

3. **a.** Pour tout $n \geqslant 2$, $y_n \geqslant 1$ donc $y_n = \ln y_n + n \geqslant n$. En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

b. Comme $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\ln y_n \underset{n\to+\infty}{=} o(y_n)$. Donc $n = y_n - \ln y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$.

c. Remarquons tout d'abord que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$. On a pour tout $n \geqslant 2$,

$$v_n = y_n - n = \ln y_n = \ln(n+v_n) = \ln n + \ln\left(1+\frac{v_n}{n}\right)$$

Comme $\frac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, $\ln\left(1+\frac{v_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{n}$. A fortiori, $\ln\left(1+\frac{v_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. Ceci prouve que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

d. Posons $t_n = v_n - \ln n$ pour $n \geqslant 2$. On rappelle que pour $n \geqslant 2$, $v_n = \ln n + \ln\left(1+\frac{v_n}{n}\right)$. Ainsi

$$t_n = \ln\left(1+\frac{v_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$$

Solution 32.

On a

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1+ax^2}{1+bx^2} &\underset{0}{=} (1+ax^2)\big(1-bx^2+b^2x^4-b^3x^6+o(x^6)\big)\\ &\underset{0}{=} 1+(a-b)x^2+(b^2-ab)x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

d'où

$$f(x) \underset{0}{=} (-1/2+a-b)x^2 + (1/24+b^2-ab)x^4 + o(x^4).$$

Comme le système

$$a-b=1/2,\quad 1/24 = ab-b^2 = b(a-b)$$

admet pour unbique solution

$$(a,b) = (7/12, 1/12),$$

L'expression $f(x)$ est un infiniment petit d'ordre le plus grans possible *si et seulement si*

$$a = \frac{7}{12} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{12}.$$

Solution 33.

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x}$. Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x = -\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Par conséquent f est bien continue en 0.

2. Etudions le taux de variation de f en 0 : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

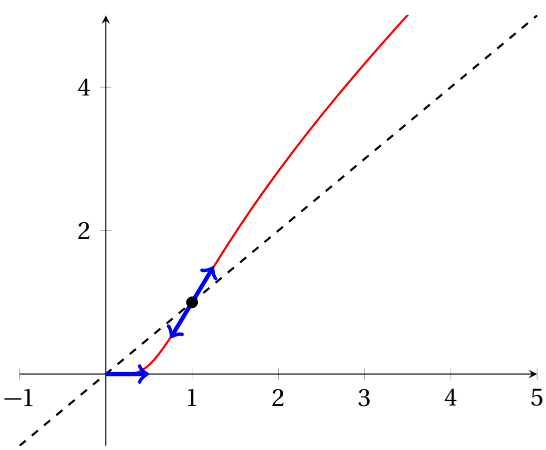
3. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x > 0$:
$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right)f(x) = \frac{f(x)}{x^2}(x+1-\ln x)$$
Pour $x > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $g(x) = x+1-\ln x$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = 1-\frac{1}{x}$. g est donc décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$. Comme $g(1) = 2 > 0$, on en déduit que g est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

5. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$. Pour $x > 0$, $f(x) - x = x\left(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1\right)$. Or $e^{\frac{\ln x}{x}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$. Donc $f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty$. $\mathscr{C}$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$.

6. Posons $x = 1+h$, de sorte que $f(x) = f(1+h) = e^{\left(1+\frac{1}{1+h}\right)\ln(1+h)}$. On a d'une part :
$$1 + \frac{1}{1+h} \underset{h\to 0}{=} 2 - h + h^2 + o(h^2)$$
et d'autre part :
$$\ln(1+h) \underset{h\to 0}{=} h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3) \underset{h\to 0}{=} h\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)\right)$$
De sorte que,
$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{1+h}\right)\ln(1+h) &\underset{h\to 0}{=} h\left(2 - 2h + \frac{13}{6}h^2 + o(h^2)\right)\\ &\underset{h\to 0}{=} 2h - 2h^2 + \frac{13}{6}h^3 + o(h^3)\end{aligned}$$
Posons $u = 2h - 2h^2 + \frac{13}{6}h^3 + o(h^3)$. On a $u \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $e^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$. On trouve $u^2 \underset{h\to 0}{=} 4h^2 - 8h^3 + o(h^3)$ et $u^3 \underset{h\to 0}{=} 8h^3 + o(h^3)$. Il vient finalement :
$$f(1+h) \underset{h\to 0}{=} 1 + 2h - \frac{1}{2}h^3 + o(h^3)$$
c'est-à-dire :
$$f(x) \underset{x\to 1}{=} 1 + 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

7. On déduit de la question précédente que $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse 1 une tangente d'équation $y = 1+2(x-1)$ i.e. $y = 2x-1$. On déduit la position relative de $\mathscr{C}$ et T du signe de $-\frac{1}{2}(x-1)^3$. Au voisinage de 1^-, $\mathscr{C}$ est au-dessus de T et au voisinage de 1^+, $\mathscr{C}$ est au-dessous de T.

8. 

Solution 34.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x)=(x+1)e^x>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$. f est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $f(0)=0$ et $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$, f induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même.

2. f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée ne s'y annule pas. f^{-1} est donc également $\mathscr{C}^\infty$: elle admet notamment un développement limité en 0 à tout ordre.
   On a $f(0)=0$ donc $f^{-1}(0)=0$. On a également $f(x)\underset{x\to0}{\sim}x$ donc $f^{-1}(f(x))\underset{x\to0}{\sim}f^{-1}(x)$ i.e. $f^{-1}(x)\underset{x\to0}{\sim}x$. Le développement limité d'ordre 2 de f^{-1} en 0 est donc $f^{-1}(x)\underset{x\to0}{=}x+ax^2+o(x^2)$. Posons $u=f^{-1}(x)$. On a $u\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$ donc $e^u\underset{u\to0}{=}1+u+o(u)\underset{x\to0}{=}1+x+o(x)$. Ainsi

   $$f(u)=ue^u=x(1+ax+o(x))(1+x+o(x))=x+(a+1)x^2+o(x^2)$$

   Comme $f(u)=x$, on a par unicité du développement limité $a+1=0$ i.e. $a=-1$.

   Remarque. Inutile de pousser le développement limité de e^u à un ordre supérieur à 1. ■

3. Posons à nouveau $u=f^{-1}(x)$. On a donc $f(u)=x$ i.e. $ue^u=x$. Ainsi $u+\ln u=\ln x$. Or $u\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et $\ln u\underset{u\to+\infty}{=}o(u)$ donc $u\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln x$ i.e. $f^{-1}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln x$.

Solution 35.

Un rapide coup d'oeil à l'ensemble de l'exercice permet de conclure qu'un DL (au moins à l'ordre trois !) sera le bienvenu.

1. L'expression est définie sur $[-1,1]\setminus\{0\}$. Allons-y, allons-o ...Puisqu'au voisinage de 0,

   $$\arcsin'(x)=(1-x^2)^{-\frac12}=1+\frac12x^2+\frac38x^4+o(x^5),$$

   on obtient d'après le théorème d'intégration des DL,

   $$\arcsin(x)=\arcsin(x)-\arcsin(0)=x+\frac16x^3+\frac{3}{40}x^5+o(x^6).$$

   Ainsi, pour x voisin de 0 mais non nul,

   $$\frac{1}{\arcsin(x)}=\frac1x\times\frac{1}{1+\frac16x^2+\frac{3}{40}x^4+o(x^5)}$$

   Déterminons le $\mathrm{DL}_4(0)$ du dernier quotient, noté $\mathrm{Q}(x)$, en appliquant le théorème de composition des DL. On a, au voisinage de 0,

   $$\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+o(u^2).$$

   Posons $u=-\frac16x^2-\frac{3}{40}x^4$. Les calculs ne présentent aucune difficulté et sont résumés ci-dessous,

u	0	$-\frac16x^2$	0	$-\frac{3}{40}x^4$
u^2	0	0	0	$\frac{x^4}{36}$
$\mathrm{Q}(x)$	0	$-\frac16x^2$	0	$-\frac{17}{360}x^4$

On en déduit qu'au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \times \left[-\frac{1}{6}x^2 - \frac{17}{360}x^4 + o(x^5) \right] \\ &= -\frac{1}{6}x - \frac{17}{360}x^3 + o(x^4) \end{aligned}$$

2. Comme $f(x) \underset{0}{=} o(1)$, la fonction tend vers 0 avec x. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = 0$.

3. Comme

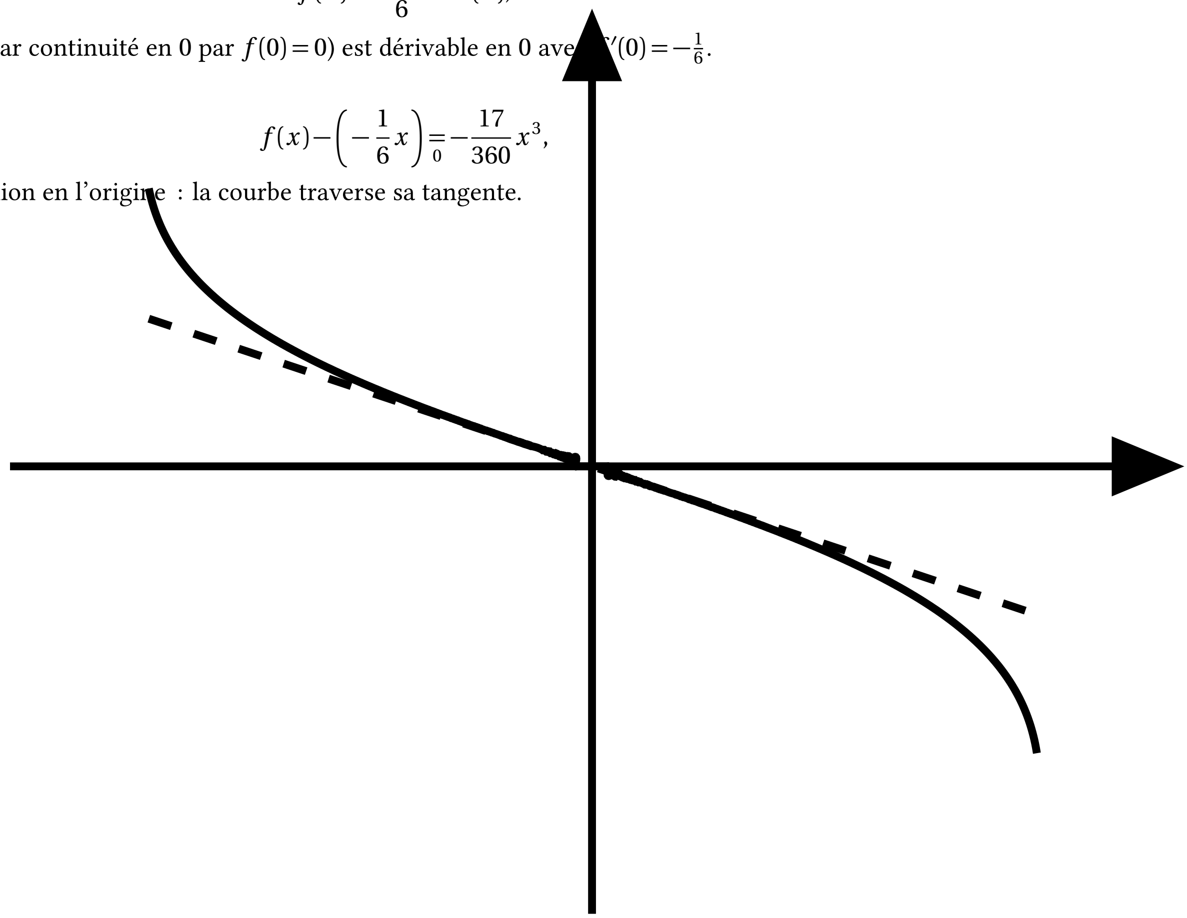
$$f(x) = -\frac{1}{6}x + o(x),$$

la prolongée f (prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 0$) est dérivable en 0 avec $f'(0) = -\frac{1}{6}$.

4. Comme

$$f(x) - \left(-\frac{1}{6}x \right) \underset{0}{=} -\frac{17}{360}x^3,$$

f présente un point d'inflexion en l'origine : la courbe traverse sa tangente.



Solution 36.

On a au voisiange de $\pm\infty$,

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

ainsi

$$f(x) = x + 2 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe admet donc la droite d'équation $y = x+2$ pour asymptote en $\pm\infty$, la courbe étant située au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$, et inversement au voisinage de $-\infty$.

Solution 37.

Il s'agit de montrer que $\lim_{x\to\infty}(f(x)-2x)=0$. On pose $t=1/x$ et on se rapelle que le DL d'ordre 1 de $\ln(1+t)$ en 0 est t. Donc

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(f(x)-2x) &= \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)-\frac{2}{t}\right]\\ &= \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t^2}(\ln(1+t)-\ln(1-t))-\frac{2}{t}\right]\\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^2}(t-(-t))-\frac{2}{t}\right]=0.\end{aligned}$$

Solution 38.

Les racines de x^2+x sont 0 et -1. f est donc définie sur $]-\infty,-1]\cup]0;+\infty[$. On a d'abord $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ par croissance comparée. La courbe admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote verticale. De plus, en $\pm\infty$

$$\begin{aligned}f(x) &= |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}e^{\frac{1}{x}}\\ &= |x|\left(1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= |x|\left(1+\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\end{aligned}$$

La courbe admet donc la droite d'équation $y=x+\frac{3}{2}$ comme asymptote oblique en $+\infty$ et la droite d'équation $y=-x-\frac{3}{2}$ comme asymptote oblique en $-\infty$.

Solution 39.

Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en x_0 :

$$f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2+o(h^2)$$

On a donc aussi

$$f(x_0-h) \underset{h\to 0}{=} f(x_0)-f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2+o(h^2)$$

Ainsi

$$f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0) \underset{h\to 0}{=} f''(x_0)h^2+o(h^2)$$

puis

$$\tau(h) \underset{h\to 0}{=} f''(x_0)+o(1)$$

Ceci signifie que $\lim_0 \tau = f''(x_0)$.

Solution 40.

1. Supposons f dérivable en a. On a alors
$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+o(h)$$
et
$$f(a-h)=f(a)-hf'(a)+o(h),$$
ainsi
$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \frac{2hf'(a)+o(h)}{2h}=f'(a)+o(1)$$
et donc
$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=f'(a).$$

2. La fonction *valeur absolue* n'est pas dérivable en 0 mais admet une dérivée symétrique en 0 car
$$\lim_{h\to0}\frac{|h|-|-h|}{2h}=0.$$

Solution 41.

On a $u_n = \arctan n^3 - \arctan n^2$. Or si $n>0$, n^2 et n^3 son strictement positifs d'où $\arctan n^2 = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{n^2}$ et $\arctan n^3 = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{n^3}$. Ainsi $u_n = \arctan\frac{1}{n^2} - \arctan\frac{1}{n^3}$ pour $n\geqslant 1$. Comme $\arctan u \underset{u\to0}{\sim} u$, $\arctan\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\arctan\frac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$. De plus, $\frac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

Solution 42.

1. On remarque que l'intégrande tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. Nous ne disposons pas en première année de théorème d'interversion limite/intégrale mais il y a cependant des chances que (u_n) converge vers 1. En effet,
$$1-u_n=\int_0^1 \mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}=\int_0^1\frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x^n}\leqslant\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$$
On en déduit que (u_n) converge vers 1.

2. On a vu que $1-u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x^n}$. Soit $n\geqslant1$: on écrit $\frac{x^n}{1+x^n}$ sous la forme $\frac{x}{n}\frac{nx^{n-1}}{1+x^n}$ et on effectue une intégration par parties :
$$1-u_n=\left[\frac{x}{n}\ln(1+x^n)\right]_0^1-\frac{1}{n}\int_0^1\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x=\frac{\ln2}{n}-\frac{1}{n}\int_0^1\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$$
En utilisant l'inégalité classique $\ln(1+u)\leqslant u$, on a :
$$0\leqslant\int_0^1\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$$
Donc $\displaystyle\int_0^1\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Par conséquent,
$$1-u_n=\frac{\ln2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\quad\text{i.e.}\quad u_n=1-\frac{\ln2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$