Devoir surveillé n°09 : corrigé

Solution 1

1. **a.** Comme 4 est une racine multiple de P, on peut factoriser P par $(X-4)^2$. On en déduit après calcul que

$$P = (X-4)^2(X^2+2)$$

Les racines complexes de P sont donc $-i\sqrt{2}$, $i\sqrt{2}$ et 4.

b. On a $P' = 4X^3 - 24X + 36X - 16 = 4(X^3 - 6X + 9X - 4)$. Comme 4 est une racine multiple de P, 4 est une racine de P′. On peut donc factoriser P′ par $X-4$. Après calcul, on trouve

$$P' = 4(X-4)(X-1)^2$$

Les racines complexes de P′ sont donc 1 et 4.

c.

$$\begin{aligned} 4 &= 0\cdot(-i\sqrt{2}) + 0\cdot i\sqrt{2} + 1\cdot 4 \\ 1 &= \frac{3}{8}\cdot(-i\sqrt{2}) + \frac{3}{8}\cdot i\sqrt{2} + \frac{1}{4}\cdot 4 \end{aligned}$$

2. **a.** On sait que $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{X-\alpha_k}$.

b. D'une part, $\frac{P'(z)}{P(z)} = 0$. D'autre part,

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{z-\alpha_k} = \sum_{k=1}^{n} r_k \cdot \frac{\overline{z-\alpha_k}}{(z-\alpha_k)\cdot\overline{(z-\alpha_k)}} = \sum_{k=1}^{n} r_k \frac{\overline{z-\alpha_k}}{|z-\alpha_k|^2}$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} r_k \cdot \frac{\overline{z-\alpha_k}}{|z-\alpha_k|^2} = 0$$

puis, en conjuguant,

$$\sum_{k=1}^{n} r_k \cdot \frac{z-\alpha_k}{|z-\alpha_k|^2} = 0$$

c. L'égalité de la question précédente peut s'écrire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{|z-\alpha_k|^2}\cdot z = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{|z-\alpha_k|^2}\cdot \alpha_k$$

Posons $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{|z-\alpha_k|^2}$. On a donc

$$Sz = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{|z-\alpha_k|^2}\cdot \alpha_k$$

Remarquons que les r_k sont des entiers naturels non nuls donc $S > 0$. Ainsi, en posant $\lambda_k = \frac{1}{S}\cdot\frac{r_k}{|z-\alpha_k|^2}$.

$$z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k$$

De plus, les λ_k sont bien des réels positifs et, par définition de S, leur somme vaut bien 1.

Solution 2

1. **a.** Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(r) = (p+1)r^p - p(\mathrm{M}+1)r^{p-1} = r^{p-1}((p+1)r - p(\mathrm{M}+1))$$

Ainsi l'unique zéro strictement positif de f' est

$$r_0 = \frac{p(\mathrm{M}+1)}{p+1}$$

Or

$$r_0 - 1 = \frac{p(\mathrm{M}+1)}{p+1} - 1 = \frac{\mathrm{M}p - 1}{p+1}$$

Ainsi

- $r_0 > 1$ lorsque $\mathrm{M} > 1/p$;
- $r_0 < 1$ lorsque $\mathrm{M} < 1/p$;
- $r_0 = 1$ lorsque $\mathrm{M} = 1/p$.

b. On remarque que $f(1) = 0$.

r	0		r_0		1		$+\infty$
$f'(r)$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(r)$	M	$\searrow$	$f(r_0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que $f(r) > 0$ lorsque $r > 1$.

c. On remarque que $r_0 = \frac{\mathrm{M}+1}{1+1/p} > \mathrm{M}+1$.

r	0		1		r_0		$\mathrm{M}+1$		$+\infty$
$f'(r)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(r)$	M	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(r_0)$	$\nearrow$	M	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que $f(r) \geq \mathrm{M} > \frac{1}{p} > 0$ lorsque $r \geq \mathrm{M}+1$.

2. **a.** Soit z une racine complexe de P de module différent de 1. Alors

$$z^p = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k z^k$$

puis, par inégalité triangulaire,

$$|z|^p \leq \sum_{k=0}^{p-1} |a_k||z|^k \leq \mathrm{M}\sum_{k=0}^{p-1} |z|^k = \mathrm{M}\frac{|z|^p - 1}{|z| - 1}$$

Si $|z| > 1$, on obtient en multipliant cette inégalité par $|z| - 1 > 0$,

$$|z|^{p+1} - |z|^p \leq \mathrm{M}|z|^p - \mathrm{M}$$

c'est-à-dire

$$|z|^{p+1} - (\mathrm{M}+1)|z|^p + \mathrm{M} \leq 0$$

c'est-à-dire $f(|z|) \leq 0$.

b. Soit z une racine de P et supposons $\mathrm{M} \leq \frac{1}{p}$. D'après la question **1.b**, $f(r) > 0$ lorsque $r > 1$. Or si $|z| > 1$, la question **2.a** montre que $f(|z|) \leq 0$. C'est donc que $|z| \leq 1$.

c. Soit z une racine de P et supposons $\mathrm{M} > \frac{1}{p}$. Supposons que $|z| \geq \mathrm{M}+1$. D'après la question **1.c**, $f(|z|) > 0$. Mais comme on a également $|z| \geq \mathrm{M}+1 > \frac{1}{p}+1 > 1$, la question **2.a** montre que $f(|z|) \leq 0$, ce qui est contradictoire. C'est donc que $|z| < \mathrm{M}+1$.

3. Remarquons que dans cette question $\mathrm{M} = \frac{1}{p}$.

a. Puisque $\mathrm{M} = \frac{1}{p}$, la question **2.b** montrer que toutes les racines de P sont de module inférieure ou égal à 1.

b. On vérifie que

$$\mathrm{P}(1) = 1 - \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} 1 = 0$$

donc 1 est racine de P. De plus,

$$\mathrm{P}'(1) = p - \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} k = p - \frac{1}{p}\cdot\frac{p(p-1)}{2} = \frac{p+1}{2} \neq 0$$

Ainsi 1 est racine simple de P.

4. Remarquons que dans cette question $\mathrm{M} = 1$.

a. Puisque $p \geq 2$, $\mathrm{M} = 1 > \frac{1}{2} \geq \frac{1}{p}$. La question **2.c** montre que les racines de P sont de module strictement inférieur à $\mathrm{M}+1 = 2$.

b. Supposons que z soit racine de P. Alors

$$z^p - \sum_{k=0}^{p-1} z^k = 0$$

En mutipliant par $z-1$, on obtient

$$z^{p+1} - z^p - (z^p - 1) = 0$$

donc z est racine du polynôme $\mathrm{X}^{p+1} - 2\mathrm{X}^p + 1$.

c. Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$,

$$g'(r) = (p+1)r^p - 2pr^{p-1} = (p+1)r^{p-1}\left(r - \frac{2p}{p+1}\right)$$

Remarquons que $1 < \frac{2p}{p+1} < 2$. On en déduit le tableau de variation suivant.

r	0	1	$\frac{2p}{p+1}$	2	$+\infty$
$g'(r)$	0	$-$	0	$+$	
$g(r)$	1	0	$g\left(\frac{2p}{p+1}\right)$	1	$+\infty$

Puisque $g(1) = 0$, $g(2p/(p+1)) < 0$. De plus, $g(2) = 1 > 0$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[2p/(p+1), 2]$, on montre donc que g s'annule sur cet intervalle en un réel x_p. Ainsi x_p est une racine de $\mathrm{X}^{p+1} - 2\mathrm{X}^p + 1 = (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}$. Comme $x_p \neq 1$, x_p est également une racine de P. Pour tout entier $p \geq 2$, $\frac{2p}{p+1} \leq x_p \leq 2$ donc le théorème des gendarmes montre que la suite (x_p) converge vers 2.

5. On a déjà montré que x_p était racine du polynôme $\mathrm{X}^{p+1} - 2\mathrm{X}^p + 1$. On en déduit imédiatement que $(2-x_p)x^p = 1$, c'est-à-dire $\varepsilon_p x_p^p = 1$ ou encore $\varepsilon_p = (2-\varepsilon_p)^{-p} = x_p^{-p}$. Or pour tout entier $p \geq 2$,

$$\frac{4}{3} = 2 - \frac{2}{3} \leq 2 - \frac{2}{p+1} = \frac{2p}{p+1} \leq x_p \leq 2$$

donc

$$0 \leq p\varepsilon_p \leq \frac{p}{(4/3)^p}$$

Par croissances comparées, $\lim_{p\to+\infty} \frac{p}{(4/3)^p} = 0$ donc la suite $(p\varepsilon_p)$ converge vers 0 par encadrement.
Enfin,

$$\varepsilon_p = (2-\varepsilon_p)^{-p} = \frac{1}{2^p}\left(1-\frac{\varepsilon_p}{2}\right)^{-p} = \frac{1}{2^p}\exp\left(-p\ln\left(1-\frac{\varepsilon_p}{2}\right)\right)$$

Or comme la suite (ε_p) converge vers 0,

$$\ln\left(1-\frac{\varepsilon_p}{2}\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} -\frac{\varepsilon_p}{2}$$

et don

$$-p\ln\left(1-\frac{\varepsilon_p}{2}\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p\varepsilon_p}{2}$$

Comme la suite $(p\varepsilon_p)$ converge également vers 0,

$$\lim_{p\to+\infty} -p\ln\left(1-\frac{\varepsilon_p}{2}\right) = 0$$

et donc

$$\exp\left(-p\ln\left(1-\frac{\varepsilon_p}{2}\right)\right) \underset{p\to+\infty}{=} 1+o(1)$$

puis

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2^p}\exp\left(-p\ln\left(1-\frac{\varepsilon_p}{2}\right)\right) \underset{p\to+\infty}{=} \frac{1}{2^p}+o\left(\frac{1}{2^p}\right)$$

Comme $x_p = 2-\varepsilon_p$,

$$x_p \underset{p\to+\infty}{=} 2-\frac{1}{2^p}+o\left(\frac{1}{2^p}\right)$$

6. Soit z une racine de P. Alors $z \neq 0$ puisque 0 n'est clairement pas racine de P. On en déduit que $\mathrm{Q}(1/z) = -\frac{\mathrm{P}(z)}{z^p} = 0$ et donc $1/z$ est racine de Q.
Le nombre M associé au polynôme Q est encore 1, de sorte que les racines de Q sont encore toutes de module strictement inférieur à 2. Donc $1/z$ est de module strictement inférieur à 2, ce qui signifie que z est de module strictement supérieur à $\frac{1}{2}$.
Les racines de P sont donc toutes de module strictement compris entre $\frac{1}{2}$ et 2.