Devoir à la maison n°14 : corrigé

Problème 1 — Division selon les puissances croissantes et applications

Partie I – Division selon les puissances croissantes

1. Soit $(A,B)\in\mathbb{K}[X]^2$ tel que $B(0)\neq 0$ et $p\in\mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $Q_1,R_1,Q_2,R_2\in\mathbb{K}[X]$ tels que

$$A = BQ_1 + X^{p+1}R_1 = BQ_2 + X^{p+1}R_2 \qquad \deg Q_1 \leqslant p \qquad \deg Q_2 \leqslant p$$

On a donc $B(Q_1-Q_2) = X^{p+1}(R_2-R_1)$. Puisque 0 n'est pas racine de B, X n'est pas un facteur irréductible de B. Puisque le seul facteur irréductible de X^{p+1} est X, B et X^{p+1} n'ont aucun facteur irréductible commun : ils sont donc premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, X^{p+1} divise Q_1-Q_2. Or $\deg(Q_1-Q_2)\leqslant p$ donc $Q_1-Q_2=0$ i.e. $Q_1=Q_2$. Ensuite, $X^{p+1}(R_2-R_1)=0$ puis $R_1=R_2$ par intégrité.

2. Soient $A,B\in\mathbb{K}[X]$ tels que $B(0)\neq 0$. On fait l'hypothèse de récurrence suivante :

$\mathrm{HR}(p)$: il existe $(Q,R)\in\mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + X^{p+1}R$ et $\deg Q\leqslant p$.

Initialisation : Posons $Q = \frac{A(0)}{B(0)}$. Alors $A-BQ$ admet 0 pour racine : on peut donc le factoriser par X. Il existe alors $R\in\mathbb{K}[X]$ tel que $A-BQ = XR$ i.e. $A = BQ+XR$. On a bien $\deg Q\leqslant 0$.
Hérédité : Supposons $\mathrm{HR}(p)$ vraie pour un certain $p\in\mathbb{N}$. Il existe donc $(\tilde{Q},\tilde{R})\in\mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = B\tilde{Q} + X^{p+1}\tilde{R}$ et $\deg\tilde{Q}\leqslant p$. Mais en raisonnant comme dans l'initialisation, on montre qu'il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $\tilde{R} = \lambda B + XR$. On a alors $A = BQ + X^{p+2}R$ en posant $Q = \tilde{Q} + \lambda X^{p+1}$. Comme $\deg\tilde{Q}\leqslant p$, $\deg Q\leqslant p+1$.
Conclusion : Par récurrence, $\mathrm{HR}(p)$ est vraie pour tout $p\in\mathbb{N}$.

3.

$$
\begin{array}{cccccccccc|l}
 & 2 & - & X & + & X^2 & - & X^3 & & & 1-2X+X^2 \\
\ominus & 2 & - & 4X & + & 2X^2 & & & & & 2+3X+5X^2 \\
 & & & 3X & - & X^2 & - & X^3 & & & \\
\ominus & & & 3X & - & 6X^2 & + & 3X^3 & & & \\
 & & & & & 5X^2 & - & 4X^3 & & & \\
\ominus & & & & & 5X^2 & - & 10X^3 & + & 5X^4 & \\
 & & & & & & & 6X^3 & - & 5X^4 &
\end{array}
$$

Le quotient est donc $2+3X+5X^2$ et le reste est $6-5X$.

Partie II – Application aux développements limités

1. Si on note R le reste de la division selon les puissances croissantes de A par B à l'ordre p, on a $A-BQ = X^{p+1}R$. Comme R est continue en 0, elle est bornée au voisinage de 0 et donc $A(x)-B(x)Q(x) \underset{x\to 0}{=} \mathcal{O}(x^{p+1})$ et a fortiori $A(x)-B(x)Q(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$. Comme B est continue et non nulle en 0, $\dfrac{1}{B}$ est continue et donc bornée au voisinage de 0. On en déduit que $\dfrac{A(x)-B(x)Q(x)}{B(x)} \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$ i.e. $\dfrac{A(x)}{B(x)} \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^p)$.

2. On note à nouveau R le reste de la division selon les puissances croissantes de A par B à l'ordre p. Pour x au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x)Q(x) &= A(x) - B(x)Q(x) + (f(x) - A(x)) - (g(x) - B(x))Q(x) \\ &= x^{p+1}R(x) + (f(x) - A(x)) - (g(x) - B(x))Q(x) \end{aligned}$$

On prouve comme à la question précédente que $x^{p+1}R(x) \underset{x\to0}{=} o(x^p)$. De plus, $f(x) - A(x) \underset{x\to0}{=} o(x^p)$. Enfin, $g(x) - B(x) \underset{x\to0}{=} o(x^p)$ et comme Q est continue et donc bornée au voisinage de 0, $(g(x) - B(x))Q(x) \underset{x\to0}{=} o(x^p)$. On a donc $f(x) - g(x)Q(x) \underset{x\to0}{=} o(x^p)$. Puisque $g(x) \underset{x\to0}{=} B(x) + o(x^p)$, g admet $B(0) \neq 0$ pour limite en 0, de sorte que $\frac{1}{g}$ est bornée au voisinage de 0. Par conséquent, $\dfrac{f(x) - g(x)Q(x)}{g(x)} \underset{x\to0}{=} o(x^p)$ i.e. $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to0}{=} Q(x) + o(x^p)$.

3. On a $\cos(x) \underset{x\to0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ et $\exp(x) \underset{x\to0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$. On effectue donc la division selon les puissances croissantes de $1 - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{24}$ par $1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + \frac{X^4}{24}$ à l'ordre 4.

$$\begin{array}{cccccccccc|l}
 & 1 & & & - & \frac{X^2}{2} & & & + & \frac{X^4}{24} & 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + \frac{X^4}{24} \\ \cline{11-11}
\ominus & 1 & + & X & + & \frac{X^2}{2} & + & \frac{X^3}{6} & + & \frac{X^4}{24} & 1 - X + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{6} \\ \cline{2-10}
 & & - & X & - & X^2 & - & \frac{X^3}{6} & + & & \\
\ominus & & - & X & - & X^2 & - & \frac{X^3}{2} & - & \frac{X^4}{6} & \\ \cline{3-10}
 & & & & & & & \frac{X^3}{3} & + & \frac{X^4}{6} & \\
\ominus & & & & & & & \frac{X^3}{3} & + & \frac{X^4}{3} & \\ \cline{8-10}
 & & & & & & & & - & \frac{X^4}{6} &
\end{array}$$

On a volontairement omis les puissances strictement supérieures à 5 dans les restes car elles n'interviennent pas dans le calcul du quotient qui est de degré au plus 4. D'après la question précédente, on a donc

$$\frac{\cos x}{\exp x} \underset{x\to0}{=} 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

Partie III – Décomposition en éléments simples

1. On effectue la division selon les puissances croissantes de $X^3 - 1$ par $X + 1$.

$$\begin{array}{cccccccccc|l}
 & - & 1 & & & & & + & X^3 & & 1 + X \\ \cline{11-11}
\ominus & - & 1 & - & X & & & & & & -1 + X - X^2 + 2X^3 \\ \cline{2-9}
 & & & & X & & & + & X^3 & & \\
\ominus & & & & X & + & X^2 & & & & \\ \cline{5-9}
 & & & & & - & X^2 & + & X^3 & & \\
\ominus & & & & & - & X^2 & - & X^3 & & \\ \cline{6-9}
 & & & & & & & & 2X^3 & & \\
\ominus & & & & & & & & 2X^3 & + \; 2X^4 & \\ \cline{9-10}
 & & & & & & & & - & 2X^4 &
\end{array}$$

Ainsi $X^3 - 1 = (X + 1)(2X^3 - X^2 + X - 1) - 2X^4$. On en déduit que

$$\frac{X^3 - 1}{X^4(X + 1)} = \frac{2}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{X^3} - \frac{1}{X^4} - \frac{2}{X + 1}$$

ce qui est bien la décomposition en éléments simples de $\frac{X^3-1}{X^4(X+1)}$.

2. Posons $F = \dfrac{X^2+1}{(X-1)^4(X+1)^3}$ et

$$G = F(X+1) = \frac{X^2+2X+2}{X^4(X+2)^3} = \frac{X^2+2X+2}{X^4(X^3+6X^2+12X+8)}$$

On effectue la division selon les puissances croissantes de X^2+2X+2 par X^3+2X^2+4X+8 à l'ordre 3.

$$
\begin{array}{rlllll|l}
 & 2 + 2X + X^2 & & & & & 8+12X+6X^2+X^3 \\ \cline{7-7}
\ominus & 2 + 3X + \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{4}X^3 & & & & & \frac{1}{4}-\frac{1}{8}X+\frac{1}{8}X^2-\frac{1}{8}X^3 \\ \cline{2-2}
 & \quad - X - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{4}X^3 & & & & & \\
\ominus & \quad - X - \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{4}X^3 - \frac{1}{8}X^4 & & & & & \\ \cline{2-2}
 & \qquad X^2 + \frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{8}X^4 & & & & & \\
\ominus & \qquad X^2 + \frac{3}{2}X^3 + \frac{3}{4}X^4 + \frac{1}{8}X^5 & & & & & \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad - X^3 - \frac{5}{8}X^4 - \frac{1}{8}X^5 & & & & & \\
\ominus & \qquad\quad - X^3 - \frac{3}{2}X^4 - \frac{3}{4}X^5 - \frac{1}{8}X^6 & & & & & \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad \frac{7}{8}X^4 + \frac{5}{8}X^5 + \frac{1}{8}X^6 & & & & &
\end{array}
$$

Ainsi

$$X^2+2X+2 = (X^3+2X^2+4X+8)\left(-\frac{1}{8}X^3+\frac{1}{8}X^2-\frac{1}{8}X+\frac{1}{4}\right)+X^4\left(\frac{1}{8}X^2+\frac{5}{8}X+\frac{7}{8}\right)$$

d'où

$$G = -\frac{1}{8X}+\frac{1}{8X^2}-\frac{1}{8X^3}+\frac{1}{4X^4}+\frac{X^2+5X+7}{8(X+2)^3}$$

On en déduit

$$F = G(X-1) = -\frac{1}{8(X-1)}+\frac{1}{8(X-1)^2}-\frac{1}{8(X-1)^3}+\frac{1}{4(X-1)^4}+\frac{X^2+3X+3}{8(X+1)^3}$$

Posons $\tilde{F} = \dfrac{X^2+3X+3}{8(X+1)^3}$ et $\tilde{G} = \tilde{F}(X-1)$. Ainsi

$$\tilde{G} = \frac{X^2+X+1}{8X^3} = \frac{1}{8X}+\frac{1}{8X^2}+\frac{1}{8X^3}$$

On en déduit

$$\tilde{F} = \tilde{G}(X+1) = \frac{1}{8(X+1)}+\frac{1}{8(X+1)^2}+\frac{1}{8(X+1)^3}$$

puis

$$F = -\frac{1}{8(X-1)}+\frac{1}{8(X-1)^2}-\frac{1}{8(X-1)^3}+\frac{1}{4(X-1)^4}+\frac{1}{8(X+1)}+\frac{1}{8(X+1)^2}+\frac{1}{8(X+1)^3}$$

Problème 2 — ENSI 1979

Partie I – Etude de cas particuliers

1. On trouve

$$\begin{array}{llll}
P_1 = X & P_2 = 2X & P_3 = 3X - X^3 & P_4 = 4X - 4X^3 \\
Q_1 = 1 & Q_2 = 1 - X^2 & Q_3 = 1 - 3X^2 & Q_4 = 1 - 6X^2 + X^4
\end{array}$$

2. Les décompositions en facteurs irréductibles de P_2, Q_2, P_3, Q_3 ne posent pas de problèmes.

$$P_2 = 2X \qquad Q_2 = (1-X)(1+X) \qquad P_3 = X(\sqrt{3}-X)(\sqrt{3}+X) \qquad Q_3 = (1-X\sqrt{3})(1+X\sqrt{3})$$

La factorisation de P_4 est évidente. Les racines de $1-6X+X^2$ sont $3-2\sqrt{2}$ et $3+2\sqrt{2}$. Les racines de Q_4 sont donc les racines carrées de ces derniers réels. Puisque $3-2\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^2$ et $3+2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2$, les racines de Q_4 sont $1-\sqrt{2}$, $-1+\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$, $-1-\sqrt{2}$. Finalement,

$$P_4 = 4X(1-X)(1+X) \qquad Q_4 = (X+1+\sqrt{2})(X-1+\sqrt{2})(X+1-\sqrt{2})(X-1-\sqrt{2})$$

3. La décomposition en éléments simples de R_2 est directe :

$$R_2 = \frac{2X}{(1-X)(1+X)} = \frac{(X+1)-(1-X)}{(1-X)(1+X)} = \frac{1}{1-X} - \frac{1}{1+X}$$

Une division euclidienne montre que la partie entière de R_3 est $\frac{1}{3}X$. La méthode usuelle montre que

$$R_3 = \frac{1}{3}X - \frac{4}{9\left(X-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} - \frac{4}{9\left(X+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

La décomposition en éléments simples de R_4 est de la forme

$$R_4 = \frac{\alpha}{X-1-\sqrt{2}} + \frac{\beta}{X-1+\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{X+1-\sqrt{2}} + \frac{\delta}{X+1+\sqrt{2}}$$

avec

$$\alpha = \frac{P_4(1+\sqrt{2})}{Q_4'(1+\sqrt{2})} \qquad \beta = \frac{P_4(1-\sqrt{2})}{Q_4'(1-\sqrt{2})} \qquad \gamma = \frac{P_4(-1+\sqrt{2})}{Q_4'(-1+\sqrt{2})} \qquad \delta = \frac{P_4(-1-\sqrt{2})}{Q_4'(-1-\sqrt{2})}$$

On remarquera pour simplifier les calculs que $\frac{P_4}{Q_4'} = \frac{1-X^2}{X^2-3}$ et on tirera profit du fait que R_4 est impaire. On trouve alors

$$R_4 = \frac{-1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{X-1-\sqrt{2}} + \frac{-1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{X-1+\sqrt{2}} + \frac{-1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{X+1-\sqrt{2}} + \frac{-1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{X+1+\sqrt{2}}$$

Partie II – Etude du cas général

1. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_{n+1} = Q_{n+1} + iP_{n+1} = -XP_n + Q_n + iP_n + iXQ_n = (1+iX)(Q_n+iP_n) = (1+iX)Z_n$$

Puisque $Z_0 = 1$, on montre alors aisément que $Z_{n+1} = (1+iX)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Tout d'abord, $1 + i\tan\alpha = \frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}$ donc $(1+i\tan\alpha)^n = \frac{e^{in\alpha}}{\cos^n\alpha}$. Puisque P_n et Q_n sont à coefficients réels, il s'ensuit que

$$P_n(\tan\alpha) = \operatorname{Im}((1+i\tan\alpha)^n) = \frac{\sin n\alpha}{\cos^n\alpha} \qquad Q_n(\tan\alpha) = \operatorname{Re}((1+i\tan\alpha)^n) = \frac{\cos n\alpha}{\cos^n\alpha}$$

3. D'après la formule du binôme,

$$Z_n = (1+iX)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^kX^k = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}(-1)^kX^{2k} + i\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}(-1)^kX^{2k+1}$$

donc

$$P_n = \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}(-1)^kX^{2k+1} \qquad Q_n = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}(-1)^kX^{2k}$$

4. D'après la question **II.3**, P_n est impair et Q_n est pair.
Remarque. On peut également déterminer la parité de P_n et Q_n sans leurs formes développées. D'une part,
$$\overline{Z}_n = (1-iX)^n = Z_n(-X) = Q_n(-X) + iP_n(-X)$$
D'autre part, puisque P_n et Q_n sont à coefficients réels,
$$\overline{Z}_n = Q_n - iP_n$$
Puisque P_n, Q_n, $P_n(-X)$, $Q_n(-X)$ sont à coefficients réels, $P_n(-X) = -P_n(X)$ et $Q_n(-X) = Q_n(X)$. Autrement dit, P_n est impair et Q_n est pair. ■
La question **II.3** montre également que
   - si n est pair, $\deg P_n = n-1$, $\deg Q_n = n$, le coefficient dominant de P_n est $-(-1)^{\frac{n}{2}}n$ et le coefficient dominant de Q_n est $(-1)^{\frac{n}{2}}$;
   - si n est impair, $\deg P_n = n$, $\deg Q_n = n-1$, le coefficient dominant de P_n est $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ et le coefficient dominant de Q_n est $(-1)^{\frac{n-1}{2}}n$.

5.
   - Supposons n pair.
   La question **II.2** montre que les réels $\tan\frac{k\pi}{n}$ pour $k \in \left[\!\left[-\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1\right]\!\right]$ sont racines de P_n. La fonction tan étant strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ces $n-1$ réels sont distincts. Puisque $\deg P_n = n-1$, ce sont exactement les racines de P_n et elles sont simples.
   La question **II.2** montre que les réels $\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k \in \left[\!\left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}-1\right]\!\right]$ sont racines de Q_n. La fonction tan étant strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ces n réels sont distincts. Puisque $\deg Q_n = n$, ce sont exactement les racines de P_n et elles sont simples.
   - Supposons n impair.
   La question **II.2** montre que les réels $\tan\frac{k\pi}{n}$ pour $k \in \left[\!\left[-\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right]\!\right]$ sont racines de P_n. La fonction tan étant strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ces n réels sont distincts. Puisque $\deg P_n = n$, ce sont exactement les racines de P_n et elles sont simples.
   La question **II.2** montre que les réels $\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k \in \left[\!\left[-\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}-1\right]\!\right]$ sont racines de Q_n. La fonction tan étant strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ces $n-1$ réels sont distincts. Puisque $\deg Q_n = n-1$, ce sont exactement les racines de P_n et elles sont simples.

6. Les questions précédentes montrent que si n est pair
$$\begin{aligned}
P_n &= -(-1)^{\frac{n}{2}}n \prod_{k=-\frac{n}{2}+1}^{\frac{n}{2}-1}\left(X - \tan\frac{k\pi}{n}\right) \\
&= -(-1)^{\frac{n}{2}}nX \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(X - \tan\frac{k\pi}{n}\right)\left(X + \tan\frac{k\pi}{n}\right) \\
Q_n &= (-1)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}-1}\left(X - \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \\
&= (-1)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(X - \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\left(X + \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)
\end{aligned}$$
et que si n est impair
$$\begin{aligned}
P_n &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}}\left(X - \tan\frac{k\pi}{n}\right) \\
&= (-1)^{\frac{n-1}{2}}X \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(X - \tan\frac{k\pi}{n}\right)\left(X + \tan\frac{k\pi}{n}\right) \\
Q_n &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}n \prod_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}-1}\left(X - \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \\
&= (-1)^{\frac{n-1}{2}}n \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1}\left(X - \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\left(X + \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)
\end{aligned}$$

7. Lorsque n est pair, $\deg P_n < \deg Q_n$ donc la partie entière de R_n est nulle.
Lorsque n est impair, $\deg P_n = \deg Q_n + 1$ donc la partie entière de R_n est de degré 1. Puisque P_n et Q_n sont respectivement impair et pair, R_n est impaire. L'unicité de la décomposition en éléments simples nous apprend donc que la partie entière de R_n est également impaire. Elle est donc de la forme aX où a est le quotient du coefficient de P_n par le coefficient dominant de Q_n. Ainsi $a = \frac{1}{n}$. La partie entière de la fraction rationnelle R_n est donc $\frac{1}{n}X$.

8. D'une part,

$$Z_n' = ni(1+iX)^{n-1} = niZ_{n-1} = -nP_{n-1} + niQ_{n-1}$$

D'autre part,

$$Z_n' = Q_n' + iP_n'$$

Puisque P_{n-1}, Q_{n-1}, P_n', Q_n' sont à coefficients réels, on en déduit que $Q_n' = -nP_{n-1}$ et $P_n' = nQ_{n-1}$.

9. Supposons n pair. Puisque R_n est impaire, la décomposition en éléments simples de R_n est de la forme

$$R_n = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\lambda_k}{X - \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}} + \frac{\lambda_k}{X + \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

avec

$$\lambda_k = \frac{P_n\left(\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{Q_n'\left(\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)} = -\frac{1}{n}\cdot\frac{P_n\left(\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{P_{n-1}\left(\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$$

D'après la question **II.2**, on obtient après simplification

$$\lambda_k = -\frac{1}{n\cos^2\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

Supposons n impair. Puisque R_n est impaire, la décomposition en éléments simples de R_n est de la forme

$$R_n = \frac{1}{n}X + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{\lambda_k}{X - \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}} + \frac{\lambda_k}{X + \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

avec

$$\lambda_k = -\frac{1}{n\cos^2\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

10. ► Supposons n pair.
Les racines non nulles de P_n autrement dit de $\frac{P_n}{X}$ sont les $\tan\frac{k\pi}{n}$ et les $-\tan\frac{k\pi}{n}$ pour $k \in [\![1, \frac{n}{2}-1]\!]$. Le produit de ces racines vaut donc

$$(-1)^{\frac{n}{2}-1}\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\tan^2\frac{k\pi}{n} = (-1)^{\frac{n}{2}-1}A_n^2$$

Par ailleurs,

$$\frac{P_n}{X} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{2k+1}(-1)^k X^{2k}$$

donc le produit des racines de $\frac{P_n}{X}$ est aussi

$$(-1)^{n-2}\frac{\binom{n}{1}(-1)^0}{\binom{n}{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}-1}} = (-1)^{\frac{n}{2}-1}$$

Ainsi $A_n^2 = 1$. Puisque $\tan\frac{k\pi}{n} > 0$ pour $k \in [\![1, \frac{n}{2}-1]\!]$, on a donc $A_n > 0$ de sorte que $A_n = 1$.
Les racines de Q_n sont les $\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ et les $-\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k \in [\![0, \frac{n}{2}-1]\!]$. Le produit de ces racines vaut donc

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\tan^2\frac{(2k+1)\pi}{2n} = (-1)^{\frac{n}{2}}B_n^2$$

Par ailleurs,

$$Q_n = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n}{2k}(-1)^k X^{2k}$$

donc le produit des racines de Q_n est aussi

$$(-1)^n \frac{\binom{n}{0}(-1)^0}{\binom{n}{n}(-1)^{\frac{n}{2}}} = (-1)^{\frac{n}{2}}$$

Ainsi $B_n^2 = 1$. Puisque $\tan \frac{(2k+1)\pi}{2n} > 0$ pour $k \in \llbracket 0, \frac{n}{2} - 1 \rrbracket$, on a donc $B_n > 0$ de sorte que $B_n = 1$.

Remarque. On peut aussi remarquer que les tangentes intervenant dans chacun des produits A_n et B_n sont inverses l'une de l'autre deux à deux en vertu de la relation trigonométrique $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)}$. ■

► Supposons n impair.

Les racines non nulles de P_n autrement dit de $\frac{P_n}{X}$ sont les $\tan \frac{k\pi}{n}$ et les $-\tan \frac{k\pi}{n}$ pour $k \in \llbracket 1, \frac{n-1}{2} \rrbracket$. Le produit de ces racines vaut donc

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \tan^2 \frac{k\pi}{n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} A_n^2$$

Par ailleurs,

$$\frac{P_n}{X} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} (-1)^k X^{2k}$$

donc le produit des racines de $\frac{P_n}{X}$ est aussi

$$(-1)^{n-1} \frac{\binom{n}{1}(-1)^0}{\binom{n}{n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$$

Ainsi $A_n^2 = n$. Puisque $\tan \frac{k\pi}{n} > 0$ pour $k \in \llbracket 1, \frac{n-1}{2} \rrbracket$, on a donc $A_n > 0$ de sorte que $A_n = \sqrt{n}$.

Les racines de Q_n sont les $\tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ et les $-\tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k \in \llbracket 0, \frac{n-1}{2} - 1 \rrbracket$. Le produit de ces racines vaut donc

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \tan^2 \frac{(2k+1)\pi}{2n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} B_n^2$$

Par ailleurs,

$$Q_n = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k} (-1)^k X^{2k}$$

donc le produit des racines de Q_n est aussi

$$(-1)^{n-1} \frac{\binom{n}{0}(-1)^0}{\binom{n}{n-1}(-1)^{\frac{n-1}{2}}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n}$$

Ainsi $B_n^2 = \frac{1}{n}$. Puisque $\tan \frac{(2k+1)\pi}{2n} > 0$ pour $k \in \llbracket 0, \frac{n-1}{2} - 1 \rrbracket$, on a donc $B_n > 0$ de sorte que $B_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Remarque. A nouveau, en utilisant la relation trigonométrique $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)}$, on peut montrer que $B_n = \frac{1}{A_n}$.

■