PROBABILITÉS SUR UN UNIVERS FINI

1 Notion d'expérience aléatoire

Définition 1.1 Expérience aléatoire

- On appelle **expérience aléatoire** toute expérience dont le résultat dépend du hasard, c'est-à-dire tout expérience qui, renouvelée dans les mêmes conditions, ne donne pas à chaque essai les mêmes résultats.
- On appelle **issue** ou **réalisation** d'une expérience aléatoire tout résultat possible de cette expérience.
- L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé **univers** de cette expérience.

Exemple 1.1

Le lancer d'un dé est une expérience aléatoire.
Il existe six issues possibles : «tirer un 1», «tirer un 2», «tirer un 3», «tirer un 4», «tirer un 5», «tirer un 6». Pour simplifier on notera ces issues 1, 2, 3, 4, 5, 6.
L'univers de cette expérience aléatoire est alors $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

REMARQUE. Cette année, nous n'étudierons que les expériences aléatoires possédant un univers fini.
Il existe bien entendu des expériences aléatoires à univers infini (par exemple, jouer à pile ou face jusqu'à ce qu'un pile sorte). ■

Définition 1.2 Événement

- On appelle **événement** toute partie de l'univers d'une expérience aléatoire.
- Un événement est dit **élémentaire** si c'est un singleton.
- On appelle événement **contraire** d'un événement A le complémentaire $\overline{A}$ de cet événement dans l'univers.
- Si A et B sont deux événements, on appelle événement A ET B la partie $A \cap B$.
- Si A et B sont deux événements, on appelle événement A OU B la partie $A \cup B$.
- L'ensemble vide est appelé événement **impossible**.
- Ω est appelé l'événement **certain**.
- On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** si l'événement A ET B est impossible.
- On appelle **système complet d'événements** toute partition de l'univers.

REMARQUE. Un événement et son événement contraire sont incompatibles.
Si A est un événement possible, alors $\{A, \overline{A}\}$ est un système complet d'événements.
Si Ω désigne l'univers, $\{\{\omega\}, \omega \in \Omega\}$ est un système complet d'événements. ■

Exemple 1.2

On considère à nouveau l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé et observer le résultat.
«Tirer un entier pair» est un événement.
L'événement «tirer un 1» est un événement élémentaire.
L'événement contraire de «tirer un entier pair» est «tirer un entier impair».
Si A est l'événement «tirer un entier pair» et B est l'événement «tirer un entier inférieur ou égal à 4», l'événement A ET B est «tirer un 2 ou un 4» tandis que l'événement A OU B est «tirer un 1, un 2, un 3, un 4 ou un 6».
L'événement «tirer un 7» est impossible.
Les événements «tirer un entier pair» et «tirer un 5» sont incompatibles.
Notons A l'événement «tirer un 1 ou un 3», B l'événement «tirer un entier pair» et C l'événement «tirer un 6». $\{A, B, C\}$ est un système complet d'événements.

Lien entre vocabulaires ensembliste et probabiliste

Vocabulaire probabiliste	Vocabulaire ensembliste
Issue	Elément
Événement	Partie
Événement élémentaire	Singleton
Événement contraire	Complémentaire
A ET B	$A \cap B$
A OU B	$A \cup B$
Événement impossible	Ensemble vide
Événements incompatibles	Parties disjointes
Système complet d'événements	Partition

Modélisation

Dans un premier temps, il est essentiel de modéliser correctement l'expérience aléatoire comme le montre les exemples suivants.

Successif/simultané Supposons que l'on tire deux cartes dans un jeu de 52 cartes. On s'intéresse aux valeurs et aux couleurs de ces deux cartes. Combien y a-t-il d'issues possibles ?
Si l'on tire **successivement** les deux cartes, il y a 52 choix possibles pour la première carte et 51 choix possibles pour la seconde donc en tout $52 \times 51 = 2652$ issues possibles. Notamment les issues $(7\heartsuit, V\spadesuit)$ et $(V\spadesuit, 7\heartsuit)$ sont deux issues distinctes.
Si l'on tire **simultanément** les deux cartes, il n'y a aucune raison de distinguer les issues $(7\heartsuit, V\spadesuit)$ et $(V\spadesuit, 7\heartsuit)$. Le nombre d'issues possibles est $\binom{52}{2} = 1326$.

Avec remise/sans remise Supposons que l'on tire successivement 2 boules dans une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10. On s'intéresse aux valeurs affichées par ces deux boules. Combien y a-t-il d'issues possibles ?
S'il s'agit d'un tirage **avec remise** i.e. si l'on remet la première boule dans l'urne après l'avoir tirée, il y a 10 choix possibles pour la première boule et à nouveau 10 choix possibles pour la seconde boule donc $10 \times 10 = 100$ issues possibles.
S'il s'agit d'un tirage **sans remise**, alors il y a 10 choix possibles pour la première boule mais plus que 9 choix possibles our la seconde donc $10 \times 9 = 90$ issues possibles (on n'a plus accès aux issues du type (n, n)).

Discernable/indiscernable Supposons que l'on lance simultanément deux dés et qu'on s'intéresse aux résultats affichés par ces deux dés. Combien y a-t-il d'issues possibles ?
A priori, on peut se dire qu'il y a 6 issues possibles pour chacun des deux dés donc $6 \times 6 = 36$ issues possibles en tout. Notamment les issues $(1, 6)$ et $(6, 1)$ sont deux issues distinctes. Mais ceci n'est vrai que si l'on peut distinguer les deux dés i.e. si les deux dés sont **discernables**.
Si les deux dés sont **indiscernables**, on ne peut pas distinguer l'issue $(1, 6)$ de l'issue $(6, 1)$. Dans ce cas, le nombre d'issues possibles est $\binom{6}{2} + 6 = 21$ en distinguant les tirages faisant apparaître deux chiffres distincts et les «doubles».

Remarque. On remarquera que le nombre d'issues possibles s'exprime souvent à l'aide de nombre d'arrangements ou de nombre de combinaisons. ■

2 Probabilité sur un univers fini

2.1 Définition

Définition 2.1 Probabilité

On appelle **probabilité** sur un univers fini Ω toute application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- si A et B sont deux événements incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Définition 2.2 Espace probabilisé fini

On appelle **espace probabilisé fini** tout couple $(\Omega, \mathbb{P})$ où Ω est un univers fini et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.

Proposition 2.1 Propriétés des probabilités

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$. Alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. Alors $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
- Soit $\mathscr{S}$ un système complet d'événements. Alors $\sum_{A \in \mathscr{S}} \mathbb{P}(A) = 1$.

Une probabilité sur un univers fini est entièrement caractérisée par les images des événements élémentaires.

Proposition 2.2

Soit Ω un univers **fini**.

- Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω. Alors $\displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$.
- Soit $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une famille de réels positifs telle que $\displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$. Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Modélisation

Il ne faut pas croire qu'une probabilité liée à une expérience aléatoire est intrinsèque à cette expérience. Généralement, on modélise une expérience aléatoire en **choisissant** la probabilité de chaque issue (ou bien, c'est l'énoncé qui s'en charge). Bien entendu le choix de la probabilité est déterminée par le bon sens ou par l'observation de la réalité. Par exemple, en lançant une pièce un grand nombre de fois, on constate qu'on obtient autant de «pile» que de «face». Il semble donc raisonnable de supposer que la probabilité de chaque issue «pile» ou «face» est $\frac{1}{2}$.
Un autre exemple consisterait à tirer une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. Là encore, il semble raisonnable de supposer que chaque carte a la même probabilité d'être tirée (à savoir $\frac{1}{52}$). Mais une étude statistique montrerait probablement que les cartes du milieu du paquet ont plus de chances d'être tirées que les autres, ce qui tient sans doute à la psychologie humaine. On peut néanmoins admettre que chaque carte a la même chance d'être tirée en considérant que les cartes sont tirées par une personne «idéale» dans le sens où elle ne serait pas soumise aux phénomènes psychologiques.

Remarque. Un événement peut être de probabilité nulle sans qu'il soit impossible. De même, un événement de probabilité 1 n'est pas nécessairement certain.
Il suffit de prendre par exemple $\Omega = \{a, b\}$ et de définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω en posant $\mathbb{P}(\{a\}) = 0$ et $\mathbb{P}(\{b\}) = 1$.
Néanmoins, lorsque l'on traite de probabilité sur des univers finis, c'est très rarement le cas en pratique. ■

Système quasi-complet d'événements

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. On appelle **système quasi-complet d'événements** toute partie $\mathscr{S}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ formée d'événements deux à deux incompatibles telle que $\sum_{A\in\mathscr{S}} \mathbb{P}(A) = 1$.
Un système complet d'événements est un système quasi-complet d'événements.

2.2 Probabilité uniforme

Définition 2.3 Probabilité uniforme

Soit Ω un univers fini non vide. On appelle **probabilité uniforme** sur Ω l'unique probabilité sur Ω telle que $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{\operatorname{card}\Omega}$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Remarque. Si Ω est muni de la probabilité uniforme, on dit alors que toutes les issues sont **équiprobables**. ■
Remarque. Si l'énoncé ne précise pas la probabilité, c'est qu'il s'agit sans doute de la probabilité uniforme. ■

Proposition 2.3

Soit $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur un univers fini Ω. Pour tout événement A, $\mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card}\Omega}$.

Remarque. Dans le cas de la probabilité uniforme, tout calcul de probabilité se résume donc à un problème de dénombrement. ■

Exemple 2.1

On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer une carte d'un jeu de 52 cartes. On considère que toutes les issues sont équiprobables.
Soit A l'événement «tirer un roi». Alors $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.
Soit B l'événement «tirer un coeur». Alors $\mathbb{P}(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

2.3 Probabilité conditionnelle

Définition 2.4 Probabilité conditionnelle

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$ tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On appelle **probabilité de** A **sachant** B notée $\mathbb{P}(A \mid B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$ le quotient $\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Exemple 2.2

Un test sanguin est effectué sur 100 personnes que l'on classe suivant leur groupe sangin et leur facteur rhésus. On résume les résultats de ce test dans le tableau suivant.

Rhésus \ Groupe sanguin	A	B	AB	O
Positif	30	7	3	35
Négatif	8	2	1	9

On tire une personne au hasard sur ces 100 personnes. On s'intéresse à l'événement B^+ : «la personne est du groupe sanguin B^+». On a clairement $\mathbb{P}(B^+) = \frac{7}{100}$.
Notons A l'événement «la personne est du groupe sanguin B» et R^+ l'événement «la personne est de facteur rhésus positif». On a clairement $\mathbb{P}(B) = \frac{7+2}{100} = \frac{9}{100}$ et $\mathbb{P}(R+) = \frac{30+7+3+35}{100} = \frac{75}{100}$.
Intuitivement, la probabilité qu'une personne soit du groupe sanguin B **sachant** qu'elle est de facteur rhésus positif est $\mathbb{P}(B \mid R^+) = \frac{7}{3+7+3+35} = \frac{7}{75}$. On a donc bien $\mathbb{P}(B^+) = \mathbb{P}(B \cap R^+) = \mathbb{P}(R^+)\mathbb{P}(B \mid R^+)$.
De même, intuitivement, la probabilité qu'une personne soit de facteur rhésus positif **sachant** qu'elle est du groupe sanguin B est $\mathbb{P}(R^+ \mid B) = \frac{7}{7+2} = \frac{7}{9}$. On a encore bien $\mathbb{P}(B^+) = \mathbb{P}(B \cap R^+) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(R^+ \mid B)$.

Proposition 2.4

Soient (Ω, dP) un espace probabilisé fini et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors $\mathbb{P}_B : A \in \mathscr{P}(\Omega) \mapsto \mathbb{P}_B(A)$ est une probabilité sur Ω.

Proposition 2.5 Formule des probabilités composées

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ tel que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Exemple 2.3

Une urne contient initialement 7 boules noires et 3 boules blanches. On tire **successivement** 3 boules : si on tire une boule noire, on la retire de l'urne ; si on tire une boule blanche, on la retire de l'urne et on ajoute une boule noire à la place. On considère raisonnablement que chaque boule de l'urne a la même probabilité d'être tirée. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules blanches à la suite ?

On note B_i l'événement «La $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche». La probabilité recherchée est $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$.

- Clairement, $\mathbb{P}(B_1) = \frac{3}{10}$.
- Maintenant, si B_1 est réalisé, avant le $2^{\text{ème}}$ tirage, l'urne est constituée de 8 boules noires et 2 boules blanches. On a donc, $\mathbb{P}(B_2 \mid B_1) = \frac{2}{10}$.
- Si B_1 et B_2 sont réalisés, avant le 3ème tirage, l'urne est constituée de 9 boules noires et 1 blanche. On en déduit $\mathbb{P}(B_3 \mid B_1 \cap B_2) = \frac{1}{10}$.

Finalement :
$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2 \mid B_1)\mathbb{P}(B_3 \mid B_2 \cap B_1) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{500}$$

Proposition 2.6 Formule des probabilités totales

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $\mathscr{S}$ un système complet d'événements et B un événement. Alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{A \in \mathscr{S}} \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)$$

Remarque. La propriété reste vraie si $\mathscr{S}$ est uns sytème-quasi complet d'événements. ■

Remarque. En particulier, si A est un événement de probabilité non nulle, alors $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \mid \overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})$. ■

Exemple 2.4

On dipose d'un test permettant de dépister une maladie. Il y a 95% de chances que le test soit positif si la personne est malade et 2% de chances que le test soit positif si la personne n'est pas malade. On considère un population atteinte à 7% par cette maladie. Quelle est la probabilité pour qu'une personne choisie au hasard réponde positivement au test ?

On note T l'événement «la personne répond positivement au test» et M l'événement «la personne est malade». L'énoncé siginifie que $\mathbb{P}(M) = \frac{7}{100}$, $\mathbb{P}(T \mid M) = \frac{95}{100}$ et $\mathbb{P}(T \mid \overline{M}) = \frac{2}{100}$. On a donc

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T \mid M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T \mid \overline{M})\mathbb{P}(\overline{M}) = \frac{95}{100} \times \frac{7}{100} + \frac{2}{100} \times \left(1 - \frac{7}{100}\right) = \frac{851}{10000}$$

Proposition 2.7 Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Soient $\mathscr{S}$ un système complet d'événements et A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)}{\sum_{S \in \mathscr{S}} \mathbb{P}(B \mid S)\mathbb{P}(S)}$$

Exemple 2.5

On considère une urne A contenant deux boules rouges et trois boules vertes et une urne B contenant trois boules rouges et deux boules vertes. On tire au hasard une boule dans l'urne A que l'on place dans l'urne B. On tire ensuite une boule dans l'urne B. Quelle est la probabilité que la boulé tirée dans l'urne A soit verte sachant que la boule tirée dans l'urne B est rouge ?

On notera AV, AR, BV, BR les événements «la boule tirée dans l'urne A est verte», etc... On cherche donc $\mathbb{P}(AV \mid BR)$. D'après la formule de Bayes

$$\mathbb{P}(AV \mid BR) = \frac{\mathbb{P}(BR \mid AV)}{\mathbb{P}(BR \mid AV)\mathbb{P}(AV) + \mathbb{P}(BR \mid AR)\mathbb{P}(AR)}$$

Or $\mathbb{P}(AV) = \frac{3}{5}$, $\mathbb{P}(AR) = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}(BR \mid AV) = \frac{3}{6}$, $\mathbb{P}(BR \mid AR) = \frac{4}{6}$ donc

$$\mathbb{P}(AV \mid BR) = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{3}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5}} = \frac{15}{17}$$

2.4 Événements indépendants

Définition 2.5 Événements indépendants

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. On dit que deux événements A et B sont **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Proposition 2.8

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors A et B sont indépendants **si et seulement si** $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$

Exemple 2.6

Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement deux boules avec remise. On s'intéresse aux événements suivants :

- B_1 : «la première boule tirée est blanche» ;
- B_2 : «la seconde boule tirée est blanche».

Les événements B_1 et B_2 sont indépendants.
On effectue la même expérience mais sans remise. Les événements B_1 et B_2 ne sont pas indépendants.

Attention ! Dire que deux événements sont indépendants ne signifient pas qu'ils sont incompatibles.
Au contraire, deux événements incompatibles ne sont généralement pas indépendants à moins que l'un d'entre eux soit de probabilité nulle.

Définition 2.6 Famille d'événements indépendants

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements. On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements **mutuellement indépendants** si, pour toute partie **finie** I de J

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Remarque. Il découle directement de la définition que toute sous-famille d'une famille d'événements mutuellement indépendants est encore une famille d'événements mutuellement indépendants. ■

Attention ! Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille finie d'événements mutuellement indépendants alors les A_i sont indépendants deux à deux. Cependant, la réciproque est fausse.

Exemple 2.7

On lance deux dés discernables et on s'intéresse aux résultats affichés par ces deux dés. On note

- A_1 l'événement «le résultat du dé n°1 est pair» ;
- A_2 l'événement «le résultat du dé n°2 est pair» ;
- A_3 l'événement «la somme des résultats des deux dés est impaire.

On a clairement

- $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{2}$;
- $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$;

ce qui prouve que les événements A_1, A_2 et A_3 sont deux à deux indépendants.
Cependant $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$, ce qui prouve que les événement A_1, A_2 et A_3 ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 2.1

On lance 10 fois un dé à six faces. On suppose les lancers indépendants.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement un 6 ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au plus un 6 ?

3 Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

3.1 Définitions

Définition 3.1 Variable aléatoire

On appelle **variable aléatoire** sur Ω toute application dont l'ensemble de départ est Ω.

Remarque. Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire **réelle**. ■

Exemple 3.1

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés. La somme S des deux chiffres est une variable aléatoire réelle. De plus, $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$.

Notation 3.1

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur l'univers Ω.
Pour toute partie A de $X(\Omega)$, $X^{-1}(A)$ est une partie de Ω donc un événement. L'événement $X^{-1}(A)$ se note plutôt $X \in A$. Si A est un singleton $\{x\}$, l'événement $X^{-1}(\{x\})$ se note plutôt $X = x$.
On peut alors parler des probabilités $\mathbb{P}(X \in A)$ et $\mathbb{P}(X = x)$.
Si X est une variable aléatoire réelle et $x \in \mathbb{R}$, alors $\mathbb{P}(X \in]-\infty, x])$ et $\mathbb{P}(X \in [x, +\infty[)$ se note alors plutôt $\mathbb{P}(X \leqslant x)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant x)$ respectivement.

Remarque. Si X est une variable aléatoire sur Ω, alors $X = x_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.
En particulier, $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$. ■

Exemple 3.2

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer trois fois une pièce et on note X le nombre de «face» obtenu. L'univers de cette expérience aléatoire est

$$\Omega = \{\mathrm{PPP}, \mathrm{FPP}, \mathrm{PFP}, \mathrm{PPF}, \mathrm{FFP}, \mathrm{FPF}, \mathrm{PFF}, \mathrm{FFF}\}$$

- L'événement $X = 1$ est en fait l'événement $X^{-1}(\{1\})$, c'est-à-dire $\{\mathrm{FPP}, \mathrm{PFP}, \mathrm{PPF}\}$.
- L'événement $X \geqslant 2$ est en fait l'événement $X^{-1}([2, +\infty[)$ ou encore $X^{-1}(\{2, 3\})$, c'est-à-dire $\{\mathrm{FFP}, \mathrm{FPF}, \mathrm{PFF}, \mathrm{FFF}\}$.

Définition 3.2 Loi d'une variable aléatoire

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω. On appelle **loi** de X l'application $\mathbb{P}_X$: $\begin{cases} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{cases}$.

Notation 3.2

Si X et Y sont des variables aléatoires de même loi, on note $X \sim Y$.
Lorsque X suit une loi $\mathscr{L}$ donnée, on notera également $X \sim \mathscr{L}$.

Proposition 3.1

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω. Alors $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur l'univers fini $X(\Omega)$.

Corollaire 3.1

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω. Alors $\mathbb{P}_X$ est entièrement déterminée par la donnée des $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Remarque. C'est pour cela qu'en pratique, lorsque l'on demande la loi d'une variable aléatoire X sur Ω, on ne demande pas $\mathbb{P}(X \in A)$ pour tout $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$ mais $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$. ■

3.2 Lois usuelles

Définition 3.3 Loi uniforme

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω. On dit que X suit une loi uniforme sur E si

$$\forall x \in E,\ \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{\operatorname{card} E}$$

Définition 3.4 Loi de Bernoulli

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans $\{0, 1\}$. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ si $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et donc $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
Pour abréger, on dira que X suit la loi $\mathscr{B}(p)$.

Interprétation de la loi de Bernoulli

On appelle **épreuve** de Bernoulli une expérience aléatoire à deux issues généralement désignées «succès» et «échec». La variable aléatoire X telle que X(«succès») = 1 et X(«échec») = 0 suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}$(«succès»).

Fonction indicatrice

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A une partie de Ω. La fonction indicatrice de A est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Définition 3.5 Loi binomiale

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ si $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
Pour abréger, on dira que X suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$.

Interprétation de la loi binomiale

On considère une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. La variable aléatoire correspondant au nombre de succès suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$.

Exemple 3.3

On dispose d'une urne comportant q boules blanches et r boules noires. On tire successivement n boules dans l'urne avec remise. On note X la variable aléatoire totalisant le nombre de boules blanches tirées et Y la variable aléatoire totalisant le nombre de boules noires tirées. Alors X suit la loi $\mathscr{B}\left(n, \frac{q}{q+r}\right)$ et Y suit la loi $\mathscr{B}\left(n, \frac{r}{q+r}\right)$.

3.3 Image d'une variable aléatoire, loi conditionnelle

Définition 3.6 Image d'une variable aléatoire par une fonction

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire sur Ω et $f : X(\Omega) \to E$. Alors $Y = f \circ X$ est une variable aléatoire sur Ω.

Notation 3.3

On note $Y = f(X)$ plutôt que $Y = f \circ X$ mais il s'agit d'un abus de notation.

Proposition 3.2 Loi de l'image d'une variable aléatoire

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire sur Ω et $f : X(\Omega) \to E$. Alors la loi de $Y = f(X)$ est l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(Y(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in f^{-1}(A)) \end{array}\right.$.

Remarque. En particulier, pour tout $y \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(\{y\}))$. ■

Exemple 3.4

Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![-2,2]\!]$, $Y=X^2$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0,1,4\}$ et

$$\mathbb{P}(Y=0)=\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{5}$$
$$\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(X=-1)+\mathbb{P}(X=1)=\frac{2}{5}$$
$$\mathbb{P}(Y=4)=\mathbb{P}(X=-2)+\mathbb{P}(X=2)=\frac{2}{5}$$

Définition 3.7 Loi conditionnelle

Soient $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire sur Ω et $B\in\mathscr{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B)>0$. On appelle **loi de** X **conditionnée par l'événement** B l'application $\mathbb{P}_{X|B}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1]\\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X\in A\mid B)\end{array}\right.$.

Remarque. A nouveau, quand on demande en pratique la loi conditionnelle de X conditionnée par l'événement B, on se contente de donner $\mathbb{P}(X=x\mid B)$ pour tout $x\in X(\Omega)$ plutôt que $\mathbb{P}(X\in A\mid B)$ pour tout $A\in\mathscr{P}(X(\Omega))$. ■

3.4 Couples de variables aléatoires

Définition 3.8 Couple de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un univers Ω. On note (X,Y) la variable aléatoire $\left\{\begin{array}{ccc}\Omega & \longrightarrow & X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ \omega & \longmapsto & (X(\omega),Y(\omega))\end{array}\right.$.

Définition 3.9 Loi conjointe

Soient $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X et Y deux variables aléatoires sur Ω.
On appelle **loi conjointe** de X et Y la loi de (X,Y) autrement dit la loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ définie par

$$\forall(A,B)\in\mathscr{P}(X(\Omega))\times\mathscr{P}(Y(\Omega)),\ \mathbb{P}_{(X,Y)}(A\times B)=\mathbb{P}((X,Y)\in A\times B)$$

Remarque. La loi conjointe de X et Y est entièrement déterminée par la donnée des $\mathbb{P}((X,Y)=(x,y))$ pour $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$.
En pratique, lorsque l'on demande la loi conjointe du couple (X,Y), on se contente de donner $\mathbb{P}((X,Y)=(x,y))$ pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$. ■

Définition 3.10 Lois marginales

Si (X,Y) est un couple de variables aléatoires, on appelle **lois marginales** de (X,Y) les lois de X et Y.

Proposition 3.3

Soient $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X et Y deux variables aléatoires sur Ω.
La loi conjointe de X et Y permet de retrouver les lois marginales. Plus précisément

$$\forall x\in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}((X,Y)=(x,y))$$
$$\forall y\in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}((X,Y)=(x,y))$$

Attention ! Les lois marginales ne permettent pas de retrouver la loi conjointe (à moins que les variables aléatoires soient indépendantes).

Exemple 3.5

On tire simultanément 2 boules dans une urne contenant 4 boules numérotées de 1 à 4. On note U le plus petit et V le plus grand des deux nombres obtenus. Quelle est la loi conjointe de U et V ? Quelles sont les lois marginales ?

On a ici $\Omega = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ et on considère tous les événements équiprobables. U est à valeurs dans $\{1,2,3\}$ et V est à valeurs dans $\{2,3,4\}$. On peut résumer la loi conjointe de U et V ainsi que les lois marginales grâce au tableau suivant.

U \ V	2	3	4	$\mathbb{P}(\mathrm{U}=u)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\mathbb{P}(\mathrm{V}=v)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	

Définition 3.11 Lois conditionnelles

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X et Y deux variables aléatoires sur Ω.
Soit $y \in \mathrm{Y}(\Omega)$. On appelle loi de X **conditionnée** par l'événement $\mathrm{Y}=y$ la loi conditionnelle $\mathbb{P}_{\mathrm{X}|\mathrm{Y}=y}$.
Soit $x \in \mathrm{X}(\Omega)$. On appelle loi de Y **conditionnée** par l'événement $\mathrm{X}=x$ la loi conditionnelle $\mathbb{P}_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}=x}$.

Extension aux n-uplets de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires sur Ω.
On appelle $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ la variable aléatoire $\left\{\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathrm{X}_1(\Omega) \times \cdots \times \mathrm{X}_n(\Omega) \\ \omega & \longmapsto & (\mathrm{X}_1(\omega), \dots, \mathrm{X}_n(\omega)) \end{array}\right.$.
On appelle loi conjointe des variables $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ la loi de $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$.
On appelle lois marginales les lois de $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$.

3.5 Variables aléatoires indépendantes

Définition 3.12 Couple de variables aléatoires indépendantes

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X et Y deux variables aléatoires sur Ω.
Les variables aléatoires X et Y sont dites **indépendantes** si

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{P}(\mathrm{X}(\Omega)) \times \mathscr{P}(\mathrm{Y}(\Omega)),\ \mathbb{P}((\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{Y} \in \mathrm{B})$$

Proposition 3.4

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X et Y deux variables aléatoires sur Ω.
Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes **si et seulement si**

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

Remarque. Si X et Y sont des variables aléatoires **indépendantes**, la connaissance des lois marginales de (X, Y) permet de restituer la loi conjointe de X et Y. ■

Exercice 3.1

Montrer que deux événements A et B sont indépendants **si et seulement si** les variables aléatoires $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ sont indépendantes.

Définition 3.13 Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(X_i)_{i \in I}$ une famille **finie** de variables aléatoires.
On dit que $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de variables aléatoires **mutuellement indépendantes** si

$$\forall (A_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathscr{P}(X_i(\Omega)),\ P\left(\bigcap_{i \in I} X_i \in A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

Une famille **infinie** de variables aléatoires est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes si toute sous-famille finie l'est.

Proposition 3.5

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(X_i)_{i \in I}$ une famille finie de variables aléatoires.
$(X_i)_{i \in I}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes **si et seulement si**

$$\forall (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i(\Omega),\ P\left(\bigcap_{i \in I} X_i = x_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Remarque. Toute sous-famille d'une famille finie de variables mutuellement indépendantes est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes. ■

Attention ! Si des variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, alors ces variables aléatoires sont indépendantes deux à deux mais la réciproque est fausse.

Exemple 3.6

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $Z = XY$. Alors X, Y, Z sont deux à deux indépendantes mais pas mutuellement indépendantes.

Exercice 3.2

Montrer que $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants **si et seulement si** $(\mathbb{1}_{A_i})_{i \in I}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Proposition 3.6

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in [0, 1]$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathscr{B}(p)$.
Alors la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$.

Remarque. Cela permet de redémontrer le fait que le nombre de succès dans la répétition de n fois la même épreuve de Bernoulli de paramètre p suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$. ■

Proposition 3.7

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur Ω.
Soient f et g des applications définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$. Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

4 Espérance, variance, covariance

4.1 Espérance d'une variable aléatoire réelle

Définition 4.1 Espérance

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire **réelle** sur Ω. On appelle **espérance** de X le réel

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) x$$

Remarque. L'espérance de X ne dépend que de la loi de X : deux variables aléatoires réelles suivant la même loi ont la même espérance.
La réciproque est fausse. ■
Remarque. L'espérance de X est la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leurs probabilités respectives. ■

Exemple 4.1

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. Alors $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

Définition 4.2 Variable aléatoire centrée

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω. On dit que X est **centrée** si $\mathbb{E}(X) = 0$.

Remarque. Si X est une variable aléatoire réelle, $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée. ■

Proposition 4.1 Propriétés de l'espérance

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Linéarité Soient X et Y des variables aléatoires réelles sur Ω et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$.

Positivité Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. Si X est **positive**, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

Croissance Soient X et Y des variables aléatoires réelles sur Ω. Si $X \leqslant Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Inégalité triangulaire Soit X une variable aléatoire réelle. Alors $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$.

Remarque. En termes plus savants, l'espérance est une forme linéaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des variables aléatoires réelles sur Ω. ■

Proposition 4.2 Espérance de lois classiques

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Constante Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω constante égale à $c \in \mathbb{R}$. Alors $\mathbb{E}(X) = c$.

Loi uniforme Soit X suivant la loi uniforme sur un ensemble fini $E \subset \mathbb{R}$. Alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\operatorname{card} E} \sum_{x \in E} x$.

Loi de Bernoulli Soient $p \in [0,1]$ et X une variable aléatoire sur Ω suivant la loi $\mathscr{B}(p)$. Alors $\mathbb{E}(X) = p$.

Loi binomiale Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$ et X une variable aléatoire sur Ω suivant la loi $\mathscr{B}(n,p)$. Alors $\mathbb{E}(X) = np$.

Proposition 4.3 Formule de transfert

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire sur Ω et f une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) f(X(\omega)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) f(x)$$

Exercice 4.1

Soit X suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Calculer $\mathbb{E}(2^X)$.

Remarque. Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires et f une application de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(X,Y)) &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} f(x,y) \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} f(x,y) \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\
&= \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} f(x,y) \mathbb{P}(X = x, Y = y)
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.4

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X et Y des variables aléatoires réelles sur Ω. Si X et Y sont **indépendantes**, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Attention ! La réciproque est fausse. Il suffit de prendre X suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ et $Y = X$.

4.2 Covariance, variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

Définition 4.3 Moments

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire **réelle** sur Ω et $k \in \mathbb{N}$. On appelle **moment d'ordre** k de X le réel $E\left(X^k\right)$.

Remarque. L'espérance d'une variable aléatoire est donc son moment d'ordre 1. ■
Remarque. On appelle **moment centré d'ordre** k d'une variable aléatoire réelle X le réel $E\left((X - \mathbb{E}(X))^k\right)$. ■

Définition 4.4 Covariance

Soient $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X et Y deux variable aléatoires réelles sur Ω.
On appelle **covariance** de X et Y le réel

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E\left((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Proposition 4.5 Propriétés de la covariance

Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Symétrie Soient X et Y des variables aléatoires réelles sur Ω. Alors $\operatorname{Cov}(X,Y)=\operatorname{Cov}(Y,X)$.

Bilinéarité Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles sur Ω et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Alors

$$\operatorname{Cov}(\lambda X+\mu Y,Z)=\lambda\operatorname{Cov}(X,Z)+\mu\operatorname{Cov}(Y,Z) \qquad \operatorname{Cov}(X,\lambda Y+\mu Z)=\lambda\operatorname{Cov}(X,Y)+\mu\operatorname{Cov}(Y,Z)$$

Positivité Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. Alors $\operatorname{Cov}(X,X)\geqslant 0$.

Remarque. En termes plus savants, la covariance est une forme bilinéaire symétrique positive sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des variables aléatoires réelles sur Ω.
Cependant la covariance n'est pas un produit scalaire car non définie. ■

Proposition 4.6

Soient $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X et Y des variables aléatoires réelles sur Ω.
Si X et Y sont **indépendantes**, alors $\operatorname{Cov}(X,Y)=0$.

Remarque. L'indépendance de X et Y implique l'«orthogonalité» pour la covariance. ■

Attention ! La réciproque est fausse.

Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=-1)=\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{3}$ et posons $Y=\begin{cases}1 & \text{si } X=0\\ 0 & \text{si } X\neq 0\end{cases}$. On vérifie que $\operatorname{Cov}(X,Y)=0$ mais X et Y ne sont évidemment pas indépendantes (la définition de Y fait intervenir X). Par exemple, $\mathbb{P}((X,Y)=(0,0))=0$ tandis que $\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)\neq 0$.

Remarque. Si $\operatorname{Cov}(X,Y)=0$, on dit que X et Y sont **non-corrélées**. Ainsi l'indépendance implique la non-corrélation mais la réciproque est fausse. ■

Définition 4.5 Variance et écart-type

Soient $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire **réelle** sur Ω.
On appelle **variance** de X le réel positif

$$V(X)=\operatorname{Cov}(X,X)=E\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2$$

On appelle **écart-type** de X le réel positif $\sigma(X)=\sqrt{V(x)}$.

Remarque. La variance d'une variable aléatoire est donc son moment centré d'ordre 2. ■
Remarque. On a donc

$$V(X)=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\})(X(\omega)-\mathbb{E}(X))^2=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)(x-\mathbb{E}(X))^2$$

ou encore

$$V(X)=\left(\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)^2\right)-\mathbb{E}(X)^2=\left(\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)x^2\right)-\mathbb{E}(X)^2$$

■

Proposition 4.7 Identités remarquables et identités de polarisation

Soient $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X et Y des variables aléatoires réelles sur Ω. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) &= \mathrm{V}(\mathrm{X})+\mathrm{V}(\mathrm{Y})+2\,\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\\
\mathrm{V}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}) &= \mathrm{V}(\mathrm{X})+\mathrm{V}(\mathrm{Y})-2\,\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\\
\mathrm{Cov}(\mathrm{X}+\mathrm{Y},\mathrm{X}-\mathrm{Y}) &= \mathrm{V}(\mathrm{X})-\mathrm{V}(\mathrm{Y})\\
\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &= \frac{1}{2}(\mathrm{V}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})-\mathrm{V}(\mathrm{X})-\mathrm{V}(\mathrm{Y})) = \frac{1}{2}(\mathrm{V}(\mathrm{X})+\mathrm{V}(\mathrm{Y})-\mathrm{V}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})) = \frac{1}{4}(\mathrm{V}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})-\mathrm{V}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}))
\end{aligned}$$

Proposition 4.8 Cauchy-Schwarz

Soient $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω. Alors

$$|\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})| \leqslant \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})}\sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{Y})} = \sigma(\mathrm{X})\sigma(\mathrm{Y})$$

Remarque. Le réel $\frac{\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}{\sigma(\mathrm{X})\sigma(\mathrm{Y})}$ est un réel compris entre -1 et 1. On l'appelle le **coefficient de corrélation** de X et Y. Il mesure l'intensité de la «liaison» entre deux variables aléatoires. ■

Corollaire 4.1 Théorème de Pythagore

Soient $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n$ des variables aléatoires réelles sur Ω **deux à deux indépendantes**. Alors

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}_1+\dots+\mathrm{X}_n) = \mathrm{V}(\mathrm{X}_1)+\dots+\mathrm{V}(\mathrm{X}_n)$$

Proposition 4.9 Variance de lois classiques

Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Constante Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω constante égale à $c\in\mathbb{R}$. Alors $\mathrm{V}(\mathrm{X})=0$.

Loi de Bernoulli Soient $p\in[0,1]$ et X une variable aléatoire sur Ω suivant la loi $\mathscr{B}(p)$. Alors $\mathrm{V}(\mathrm{X})=p(1-p)$.

Loi uniforme Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $p\in[0,1]$ et X une variable aléatoire sur Ω suivant la loi $\mathscr{B}(n,p)$. Alors $\mathrm{V}(\mathrm{X})=np(1-p)$.

Définition 4.6 Variable aléatoire réduite

Soient $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω. On dit que X est **réduite** si $\mathrm{V}(\mathrm{X})=1$.

Proposition 4.10

Soient $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire réelle sur Ω et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
Alors $\mathrm{V}(a\mathrm{X}+b)=a^2\mathrm{V}(\mathrm{X})$.

Corollaire 4.2

Soient $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire réelle sur Ω telle que $\sigma(\mathrm{X})>0$.
Alors $\frac{\mathrm{X}-\mathbb{E}(\mathrm{X})}{\sigma(\mathrm{X})}$ est une variable aléatoire centrée réduite.

4.3 Inégalités classiques

Proposition 4.11 Inégalité de Markov

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire réelle **positive** sur Ω et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Si on ne suppose plus X positive, on peut affirmer que

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$$

Proposition 4.12 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire réelle sur Ω et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$P\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma(X)^2}{\varepsilon^2}$$

Exemple 4.2

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note m leur espérance commune et σ leur écart-type commun et on pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors $V(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ et d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$P\left(\left|\bar{X}_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

En particulier

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\bar{X}_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$