

Formes algébrique et exponentielle

EXERCICE 1.

- Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe $4\sqrt{2}(-1 + i)$.
- Trois nombres complexes ont pour produit $4\sqrt{2}(-1 + i)$. Leurs modules sont en progression géométrique de raison 2 et leurs arguments sont en progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$. On note z_1, z_2 et z_3 ces trois nombres, où la numérotation respecte l'ordre des modules. Sachant que z_1 a un argument compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π , déterminer le module et un argument de chacun des trois nombres z_1, z_2 et z_3 .
- Construire les images M_1, M_2 et M_3 des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 dans le plan complexe.

EXERCICE 2.

Déterminer des racines carrées de $\sqrt{3} + i$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 3.

- Déterminer les racines carrées complexes de $1 + i$ sous forme exponentielle.
- Déterminer les racines carrées complexes de $1 + i$ sous forme algébrique.
- En déduire que $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ et $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.
- Montrer que $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.
- Déterminer les valeurs de

$\cos \frac{3\pi}{8}$	$\sin \frac{3\pi}{8}$	$\tan \frac{3\pi}{8}$
$\cos \frac{5\pi}{8}$	$\sin \frac{5\pi}{8}$	$\tan \frac{5\pi}{8}$
$\cos \frac{7\pi}{8}$	$\sin \frac{7\pi}{8}$	$\tan \frac{7\pi}{8}$

EXERCICE 4.

On note $j = e^{2i\pi/3}$.

- Calculer $j^3, 1 + j + j^2, 1 + j^2 + j^4, j^{-1}$ et \bar{j} en fonction de j .
- Simplifier l'expression

$$\frac{1+j}{(1-i)^2} + \frac{1-j}{(1+i)^2}.$$

EXERCICE 5.

Voici quelques calculs pour se délier les doigts...

- Représenter sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$\frac{2 - \sqrt{3}i}{\sqrt{3} - 2i}, \quad \frac{(2+i)(3+2i)}{2-i}, \quad \frac{3+4i}{(2+3i)(4+i)}.$$

- On considère les nombres complexes

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}+i}.$$

Représenter sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

a. $z_1 + z_2$	c. z_1/z_2	e. $z_1^3 + z_2^3$
b. $z_1 z_2$	d. $z_1^2 + z_2^2$	

EXERCICE 6.

Voici un peu d'entraînement...

- On pose $z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 + i$.
 - Représenter le quotient z_1/z_2 sous forme polaire.
 - En déduire les valeurs de $\cos(7\pi/12)$ et de $\sin(7\pi/12)$.
- En précisant pour quelles valeurs des réels x et y , elles ont un sens, mettre sous forme polaire les expressions suivantes :

a. $1 + \sin x - i \cos x$	d. $\frac{e^{ix} + e^{iy}}{1 + e^{i(x+y)}}$
b. $\frac{1}{1 + i \tan x}$	
c. $\frac{1 + \cos x + i \sin x}{1 - \cos x - i \sin x}$	e. $\frac{(1 - i\sqrt{3})(\cos x + i \sin x)}{\cos x + \sin x + i(\cos x - \sin x)}$

EXERCICE 7.★

Voici quelques calculs de puissances.

1. Pour tout entier naturel n , simplifier les expressions suivantes :

a. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^n$

c. $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^n$

b. $\frac{(1-i)^n - \sqrt{2}^n}{(1+i)^n - \sqrt{2}^n}$

d. $(1 + \cos \theta + i \sin \theta)^n$

e. $\frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{i}$

2. Pour quelles valeurs de l'entier relatif n le nombre complexe $(\sqrt{3} + i)^n$ appartient-il à \mathbb{R}_+ ? Pour quelles valeurs est-il imaginaire pur ?

EXERCICE 8.★

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $z_\theta = -\sin(2\theta) + 2i \cos^2(\theta)$.

- Déterminer le module et un argument de z_θ . On discutera en fonction des valeurs de θ .
- Déterminer l'ensemble des nombres réels θ tels que $|z_\theta| = |z_\theta - 1|$.

EXERCICE 9.

Soit

$$v = \frac{\sqrt{3} + i}{i - 1}.$$

Ecrire v^{2002} sous forme polaire puis sous forme algébrique.

EXERCICE 10.

On pose $\omega = \sqrt{3} + i$. Déterminer $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega^n \in \mathbb{R}$. Même question avec $\omega^n \in i\mathbb{R}$.

EXERCICE 11.

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.

1. $2z + 3\bar{z} = 4 - 3i$

2. $3z - 2\bar{z} = -5 + i$

Réels et imaginaires purs**EXERCICE 12.**

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

- Montrer que $\frac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur si et seulement si $z \in \mathbb{U}$.
- Montrer que $\frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U}$ si et seulement si z est imaginaire pur.

EXERCICE 13.★

Soient a et b de module 1 tels que $a \neq \pm b$.

- Prouver que $\frac{1+ab}{a+b} \in \mathbb{R}$.
- Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{z + ab\bar{z} - (a+b)}{a-b} \in i\mathbb{R}.$$

Module et argument**EXERCICE 14.**

On pose $\varphi(z) = |z^3 - z + 2|$ pour $z \in \mathbb{C}$. On souhaite déterminer la valeur maximale de $\varphi(z)$ lorsque z décrit \mathbb{U} .

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos \theta$.
- Soit $z \in \mathbb{U}$ et θ un de ses arguments. Exprimer $|z^3 - z + 2|^2$ uniquement en fonction de $\cos \theta$.
- Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 2$$

Déterminer les variations de f sur \mathbb{R} ainsi que ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. On regroupera ces informations dans un tableau de variations.

- Répondre à la question initialement posée. On précisera pour quelle(s) valeur(s) de $z \in \mathbb{U}$ cette valeur maximale est atteinte.

EXERCICE 15.

On définit une suite de complexes (z_n) par son premier terme $z_0 \in \mathbb{C}$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{2} (z_n + |z_n|)$$

1. Que peut-on dire de la suite (z_n) si $z_0 \in \mathbb{R}_+$? si $z_0 \in \mathbb{R}_-$?
2. On suppose que $z_0 \notin \mathbb{R}_-$ jusqu'à la fin de l'énoncé. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \notin \mathbb{R}_-$.
3. On admet que tout complexe non nul admet un unique argument dans $] -\pi, \pi]$ appelé *argument principal*. Que peut-on dire de cet argument si ce complexe n'appartient pas à \mathbb{R}_- ?
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note r_n le module et θ_n l'argument principal de z_n . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$ et $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.
5. Exprimer θ_n en fonction de θ_0 . Quelle est la limite de la suite (θ_n) ?
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$r_n = r_0 \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$$

7. Montrer que $\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2 \sin x}$ (on précisera pour quels réels x cette égalité a un sens).
8. On suppose maintenant que $z_0 \notin \mathbb{R}$ jusqu'à la fin de l'énoncé. En déduire une expression de r_n en fonction de n , θ_0 et r_0 sans le symbole \prod .
9. Déterminer la limite de la suite (r_n) et en déduire celle de la suite (z_n) .

EXERCICE 16.★

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ de module 1. Montrer que

$$|a + b + c| = |ab + bc + ac|.$$

EXERCICE 17.★

Déterminer les nombres complexes z tels que z , $1/z$ et $1 + z$ soient de même module.

EXERCICE 18.★

Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1 tels que $a \neq c$. Montrer que

$$\frac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2} \in \mathbb{R}_+.$$

EXERCICE 19.

Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer que

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

EXERCICE 20.

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

- | | | |
|---------------------|-------------------------|---------------------------|
| 1. $z^2 = \bar{z}$ | 4. $z^2 = -\bar{z}^2$ | 6. $z^2 = \frac{1}{z^2}$ |
| 2. $z^3 = \bar{z}$ | | |
| 3. $z^2 = 2\bar{z}$ | 5. $z^4 = \frac{32}{z}$ | 7. $z^3 = -\frac{1}{z^3}$ |

Equations dans \mathbb{C} **EXERCICE 21.**

Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{C} :

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 1. $z^2 + (5 - 2i)z + 5 - 5i = 0;$ | 5. $z^6 + (2i - 1)z^3 - 1 - i = 0;$ |
| 2. $z^2 + (-3 + i)z + 4 - 3i = 0;$ | 6. $z^4 - z^3 - z + 1 = 0;$ |
| 3. $z^2 - (9 - 2i)z + 26 = 0;$ | |
| 4. $z^4 + (3 - 6i)z^2 + 2(16 - 63i) = 0;$ | 7. $z^4 + 2 - i\sqrt{12} = 0.$ |

EXERCICE 22.★

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^2 + 8|z| - 3 = 0.$$

EXERCICE 23.

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1. $(3 + i)z^2 - (8 + 6i)z + 25 + 5i = 0;$ | 4. $(1 - 5i)z^2 - (20 + 4i)z + 61 + 7i = 0;$ |
| 2. $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0;$ | |
| 3. $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0;$ | 5. $z^6 - 2\cos(\theta)z^3 + 1 = 0$, où $\theta \in \mathbb{R}$. |

EXERCICE 24.

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes

- | | |
|----------------------------|-----------------------------------|
| 1. $(z + i)^3 + iz^3 = 0;$ | 2. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0.$ |
|----------------------------|-----------------------------------|

EXERCICE 25.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = z^3 - (16 - i)z^2 + (89 - 16i)z + 89i$.

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ a une unique solution imaginaire pure que l'on déterminera.
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$.
3. Etudier dans le plan complexe la nature du triangle ayant pour sommets les images des trois racines de cette équation.

EXERCICE 26.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. Montrer que $\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = i \cotan \frac{\theta}{2}$ où $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$.
2. Résoudre l'équation $(z - 1)^5 = (z + 1)^5$. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction cotan.

EXERCICE 27.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. Montrer que $\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = i \cotan \frac{\theta}{2}$ où $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$.
2. Résoudre de deux façons l'équation $(z - 1)^5 = (z + 1)^5$. En déduire les valeurs de $\cotan \frac{\pi}{5}$, $\cotan \frac{2\pi}{5}$, $\cotan \frac{3\pi}{5}$ et $\cotan \frac{4\pi}{5}$.

EXERCICE 28.

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1. $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0$;
2. $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$ (exprimer les solutions à l'aide de la fonction cot);
3. $(1 + iz)^n + (1 - iz)^n = 0$ (distinguer les cas n pair et n impair et exprimer les solutions à l'aide de la fonction tan).

EXERCICE 29.★

Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel non nul.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$$

2. En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1$$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n}\right]$. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{in\theta}$$

4. En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 2 \cos(n\theta)$$

On traitera le cas général, $\theta \in \mathbb{R}$ sans aucune restriction.

EXERCICE 30.

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre sur l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0$$

On précisera le nombre de solutions suivant la valeur de θ .

2. En déduire la résolution sur \mathbb{C} de l'équation

$$z^{2n} - 2z^n \cos(n\theta) + 1 = 0$$

On précisera le nombre de solutions suivant la valeur de θ .

EXERCICE 31.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Résoudre l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On vérifiera en particulier que les solutions sont réelles et on précisera leur nombre.

Applications à la trigonométrie

EXERCICE 32.

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

- Déterminer une équation du second degré dont les racines sont α et β .
- En déduire $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.
- En déduire $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\sin \frac{\pi}{5}$.

EXERCICE 33.

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{11}}$ ainsi que

$$S = \omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9 \quad T = \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$$

- Montrer que $\sin \frac{6\pi}{11} + \sin \frac{18\pi}{11} > 0$. En déduire que $\text{Im}(S) > 0$.
 - Montrer que $S + T = -1$ et $ST = 3$.
 - En déduire une équation du second degré dont sont solutions S et T puis les valeurs de S et T .
- Montrer que $\omega - \omega^{10} = 2i \sin \frac{2\pi}{11}$.
 - Montrer que $\frac{1-\omega^3}{1+\omega^3} = -i \tan \frac{3\pi}{11}$.
 - Montrer que $\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = \frac{1-\omega^3}{1+\omega^3}$.
 - En déduire que $\tan \frac{3\pi}{11} + 4 \sin \frac{2\pi}{11} = i(T - S) = \sqrt{11}$.

EXERCICE 34.

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. On pose $A = \omega + \omega^4$ et $B = \omega^2 + \omega^3$.

- Montrer que $A = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$ et $B = 2 \cos \frac{4\pi}{5}$.
- Calculer $A + B$ et AB . En déduire les valeurs exactes de A et B .
- En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{5}$, $\cos \frac{2\pi}{5}$, $\cos \frac{3\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.

EXERCICE 35. ★

En linéarisant $\sin^4 x$, calculer une expression simple de la somme

$$\sin^4 \left(\frac{\pi}{8} \right) + \sin^4 \left(\frac{3\pi}{8} \right) + \sin^4 \left(\frac{5\pi}{8} \right) + \sin^4 \left(\frac{7\pi}{8} \right).$$

Racines de l'unité

EXERCICE 36.

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $\alpha = \omega + \frac{1}{\omega}$.

- Montrer que $\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} + 1 + \omega + \omega^2 = 0$.
- En déduire que α est solution d'une équation du second degré que l'on précisera.
- En déduire la valeur de $\cos \left(\frac{2\pi}{5} \right)$ puis de $\sin \left(\frac{2\pi}{5} \right)$.

EXERCICE 37.

Soient $n \geq 1$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

- Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{km}$. On distinguera suivant que m est ou non multiple de n .
- Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$S(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (z + \omega^k)^n$$

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $S(z) = n(z^n + 1)$.

- Calculer $S \left(e^{\frac{i\pi}{n}} \right)$. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) = 0$$

EXERCICE 38. ★

Soit ω une racine septième de l'unité distincte de 1. Simplifier le nombre

$$\alpha = \frac{\omega}{1 + \omega^2} + \frac{\omega^2}{1 + \omega^4} + \frac{\omega^3}{1 + \omega^6}.$$

Inégalités

EXERCICE 39.

Déterminer les parties bornées non vides de \mathbb{C} stables par $z \mapsto z^2 + z + 1$ et $z \mapsto z^2 - z + 1$.

EXERCICE 40.

Etablir par un calcul que $\operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}$ équivaut à

$$\left| \frac{z}{z-1} \right| < 1.$$

Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

EXERCICE 41.★

Soit λ un nombre réel irrationnel. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\lambda\pi} \right| \leq \frac{1}{|\sin(\lambda\pi)|}.$$

EXERCICE 42.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$1 + z + \dots + z^{n-1} - nz^n = 0.$$

Montrer que $|z| \leq 1$.

EXERCICE 43.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Montrer que

$$\left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}.$$

EXERCICE 44.★

Prouver que

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, |a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|.$$

étudier les cas d'égalité.

EXERCICE 45.★

Soient $n \geq 2$ et z_1, z_2, \dots, z_n appartenant à \mathbb{C}^* . Prouver que

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|,$$

avec égalité *si et seulement si*

$$\arg(z_1) = \arg(z_2) = \dots = \arg(z_n).$$

Géométrie**EXERCICE 46.★**

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes

$$1. \operatorname{Re} \left(\frac{z-1}{z-i} \right) = 0 \quad 2. \operatorname{Im} \left(\frac{z-1}{z-i} \right) = 0 \quad 3. \operatorname{Re}(z^3) = \operatorname{Im}(z^3)$$

EXERCICE 47.

Soient A, B, C, D quatre points du plan distincts deux à deux. On suppose de plus A, B, C non alignés et on introduit le cercle \mathcal{C} de centre O circonscrit au triangle ABC . On choisit un repère orthonormé du plan de centre O tel que \mathcal{C} ait pour rayon 1. On note a, b, c, d les affixes respectifs de A, B, C, D .

$$\text{On pose enfin } Z = \frac{d-a}{c-a} \frac{c-b}{d-b}.$$

1. Dans cette question, on suppose que D appartient à \mathcal{C} .

a. Justifier que $\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}, \bar{c} = \frac{1}{c}, \bar{d} = \frac{1}{d}$.

b. Montrer que Z est un réel.

c. En déduire que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})[\pi]$.

2. Réciproquement, on suppose que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})[\pi]$ et on veut montrer que D appartient à \mathcal{C} .

a. Que peut-on dire de Z ?

b. Exprimer d en fonction de a, b, c, Z .

c. Calculer \bar{d} et en déduire que D appartient à \mathcal{C} .

EXERCICE 48.

Soit z un nombre complexe. On note A, B, C, D les points d'affixes respectifs $1, z, z^2, z^3$ dans un repère orthonormé du plan.

1. Pour quelles valeurs de z les points A, B, C, D sont-ils deux à deux distincts ? On suppose cette condition remplie dans la suite de l'énoncé.

2. Déterminer les valeurs de z tels que $ABCD$ soit un parallélogramme. Préciser la nature de ce parallélogramme.

3. Déterminer les valeurs de z tels que le triangle ABC soit rectangle isocèle en A .

4. Déterminer les valeurs de z tels que ABD soit rectangle isocèle en A .

EXERCICE 49.

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on considère l'application

$$P : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto z^3 + \alpha z^2 + \beta z \end{cases}$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

1. Que vaut $1 + j + j^2$?
2. Montrer que $P(1) + P(j) + P(j^2) = 3$.
3. On note A_0, A_1 et A_2 les points du plan d'affixes respectifs $1, j$ et j^2 . On se donne également B_1 et B_2 deux points du plan. Montrer qu'il existe $k \in \{0, 1, 2\}$ tel que $A_k B_1 \cdot A_k B_2 \geq 1$. On pourra utiliser le fait que le module d'une somme de complexes est toujours inférieur ou égal à la somme des modules de ces complexes (inégalité triangulaire).

EXERCICE 50.

Soient a, b et c trois nombres complexes non nuls de même module et deux à deux distincts. On note A, B, C et H les points d'affixes respectifs a, b, c et $a + b + c$.

1. On pose $w = \overline{bc} - b\overline{c}$. Calculer \overline{w} et en déduire que w est imaginaire pur.
2. Montrer que $(b + c)(\overline{b} - \overline{c})$ est également imaginaire pur.
3. Montrer que si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs d'affixes respectifs z_1 et z_2 , alors leur produit scalaire est la partie réelle de $z_1 \overline{z_2}$.
4. Montrer que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.
5. En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC .

EXERCICE 51.★

Déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe z tels que les points d'affixes $1, z$ et z^3 soient alignés.

EXERCICE 52.★

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que les points d'affixes respectives z, iz et z^2 soient alignés.

EXERCICE 53.★

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé direct \mathcal{R} . Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan \mathcal{P} tels que les points d'affixes respectives $1, z^2$ et z^4 soient alignés.

EXERCICE 54.★★

Déterminer les points $M(z)$ du plan \mathcal{P} tels que $\left(\frac{z}{z-1}\right)^4 \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 55.★★

Soient A, B, C trois points deux à deux distincts d'affixes a, b, c .

1. Prouver que ABC est un triangle équilatéral direct *si et seulement si*

$$a + jb + j^2c = 0,$$

et équilatéral indirect *si et seulement si*

$$a + jc + j^2b = 0.$$

2. Prouver que ABC est un triangle équilatéral *si et seulement si*

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$

EXERCICE 56.★

On se place dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $M_1 M_2 M_3$ un triangle inscrit dans un cercle de centre O . On note z_k l'affixe de M_k .

1. Montrer que l'orthocentre H du triangle $M_1 M_2 M_3$ a pour affixe

$$h = z_1 + z_2 + z_3.$$

2. En déduire que le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un vrai triangle sont alignés.

EXERCICE 57.★

Soient $\mathcal{E} = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ et $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par

$$\forall z \in \mathcal{E}, f(z) = \frac{z+i}{z-2i}.$$

Déterminer les ensembles suivants :

1. $\mathcal{E}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathbb{R}\};$
2. $\mathcal{E}_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in i\mathbb{R}\};$
3. $\mathcal{E}_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(f(z)) = \pi/2\}.$

EXERCICE 58.

Dans tout l'exercice, le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct \mathcal{R} .

1. Déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les nombres complexes z , $1/z$ et $1 + z$ aient même module.
2. Déterminer les nombres complexes tels que

$$|z - 1| = |\bar{z} + 1|.$$

Interprétation géométrique ?

3. Déterminer le lieu des points du plan dont l'affixe z vérifie

$$|(1 + i)\bar{z} - 2i| = 2.$$

Calcul de sommes**EXERCICE 59.**

Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n - x_n \end{cases}$. On pose $z_n = x_n + iy_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer z_0 , z_1 , z_2 et z_3 .
2. Montrer que (z_n) est une suite géométrique. On donnera sa raison sous formes algébrique et exponentielle.
3. Exprimer $A_n = \sum_{k=0}^n z_k$, $B_n = \sum_{k=0}^n x_k$, $C_n = \sum_{k=0}^n y_k$ en fonction de n à l'aide des fonctions \cos et \sin .

EXERCICE 60.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \notin 0[2\pi]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n k \cos(k\alpha) \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n k \sin(k\alpha)$$

Montrer que

$$S_n = \frac{n \cos(n+1)\alpha - (n+1) \cos(n\alpha) + 1}{2(\cos \alpha - 1)}$$

$$T_n = \frac{n \sin(n+1)\alpha - (n+1) \sin(n\alpha)}{2(\cos \alpha - 1)}$$

EXERCICE 61.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer de deux manières $(1+i)^{2n}$ et en déduire $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1}$.

EXERCICE 62.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Déterminer le module et un argument de $z^k - 1$.
2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

EXERCICE 63.

Soit n un entier naturel non nul. On pose $\omega = e^{\frac{i\pi}{n}}$.

1. Justifier que $\omega \neq 1$.
2. On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$. Montrer que $A_n = \frac{2}{1-\omega}$.
3. On pose $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$. Montrer que $C_n = 1$ et $S_n = \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$.
4. Calculer $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega^{2k} - 1|$.

EXERCICE 64.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer de deux manières $(1+i)^n$ et en déduire les sommes suivantes

$$S_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} \quad T_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$$

EXERCICE 65.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $D_n(\theta) = \sum_{k=-n}^n e^{ki\theta}$ et $F_n(\theta) = \sum_{k=0}^n D_k(\theta)$.

1. Montrer que si $\theta \notin 0[2\pi]$, $D_n(\theta) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}$.
Préciser également la valeur de $D_n(\theta)$ lorsque $\theta \equiv 0[2\pi]$.
2. Montrer que si $\theta \notin 0[2\pi]$, $F_n(\theta) = \frac{\sin^2(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}$.
Préciser également la valeur de $F_n(\theta)$ lorsque $\theta \equiv 0[2\pi]$.

EXERCICE 66.★

Simplifier la somme

$$S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} (-3)^k \binom{n}{2k}.$$

EXERCICE 67.★Pour tout entier naturel n , on pose

$$S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k}, \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+1},$$

$$\text{et } S_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+2}.$$

1. Calculer $S_1 + S_2 + S_3$, puis $S_1 + jS_2 + j^2S_3$ et $S_1 + j^2S_2 + j^4S_3$.
2. En déduire les valeurs de S_1 , S_2 et S_3 .

EXERCICE 68.★Soient α et β , deux nombres réels. Simplifier les sommes

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(\alpha + k\beta),$$

$$S'_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(\alpha + k\beta),$$

$$S''_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cos(\alpha + k\beta).$$

EXERCICE 69.★Soit α , un nombre réel tel que $\cos \alpha \neq 0$. On pose

$$R_n = \sum_{k=0}^n \frac{\cos k\alpha}{\cos^k \alpha} \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{k=0}^n \frac{\sin k\alpha}{\cos^k \alpha}.$$

Calculer $R_n + iI_n$ et en déduire des expressions simplifiées de R_n et de I_n .**EXERCICE 70.**Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \frac{\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cdots + \cos((2n+1)x)}{\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x) + \cdots + \sin((2n+1)x)}.$$

Exponentielle d'un nombre complexe**EXERCICE 71.**Résolvons dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1. $e^z = -7$;
2. $e^z = -2i$;
3. $e^z = 1 + i$.

EXERCICE 72.★Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1. $e^z + e^{-z} = 1$;
2. $e^z + e^{-z} = 2i$.