# Devoir à la maison n°18

### Problème 1 —

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \left(X^2-1\right)^n$ et $P_n = \frac{1}{2^n n!}U_n^{(n)}$.

On note L l'application qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $L(P) = \left[\left(X^2-1\right)P'\right]'$.

#### Partie I – Un endomorphisme auto-adjoint

Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$.

**1.** Montrer que $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
Dans la suite, on supposera $\mathbb{R}[X]$ muni de ce produit scalaire et on notera $\|.\|$ sa norme euclidienne associée.

**2.** Montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

**3.** **a.** Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par L.
On note $L_n$ l'endomorphisme induit de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par L.

**b.** Déterminer le noyau de $L_n$ et en déduire le rang de $L_n$.

**4.** Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$. Montrer que $\langle L(P), Q\rangle = \langle P, L(Q)\rangle$.

#### Partie II – Etude d'une famille de polynômes

**1.** Calculer $P_0, P_1, P_2, P_3$.

**2.** **a.** Montrer que $\deg P_n = n$ et déterminer le coefficient dominant $a_n$ de $P_n$. On exprimera $a_n$ à l'aide de factorielles.

**b.** Justifier que $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

**3.** **a.** En utilisant la formule de Leibniz, établir que

$$P_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k$$

**b.** En déduire les valeurs de $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

**4.** **a.** Vérifier les relations

$$U'_{n+1} = 2(n+1)XU_n$$
$$\left(X^2-1\right)U'_n = 2nXU_n$$

**b.** En dérivant $n+1$ fois les relations précédentes, montrer que

$$P'_{n+1} = XP'_n + (n+1)P_n$$
$$L(P_n) = n(n+1)P_n$$

**5.** En déduire à l'aide de la question **I.4** que $\langle P_m, P_n\rangle = 0$ pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \neq n$.

**6.** **a.** Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P_{n+1}, Q\rangle = 0$.

**b.** On note $\mathcal{I}$ l'ensemble des racines de $P_{n+1}$ de multiplicité impaire appartenant à l'intervalle $]-1, 1[$ et on pose $R = \prod_{r\in\mathcal{I}}(X - r)$.

Montrer que $RP_{n+1}$ est de signe constant sur $[-1, 1]$.

**c.** En déduire que $P_{n+1}$ possède exactement $n + 1$ racines distinctes, toutes dans l'intervalle $]-1, 1[$.

**7.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n$ le coefficient dominant de $P_n$.

**a.** Montrer que $\left\langle P'_{n+1}, P_n\right\rangle = (n + 1)\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2$.

**b.** A l'aide d'une intégration par parties, établir que

$$\|P_n\|^2 = 2 - 2\int_{-1}^{1} tP_n(t)P'_n(t)\,dt$$

**c.** En déduire que $\|P_n\|^2 = \dfrac{2}{2n + 1}$ en utilisant la question **II.4.b**.

**8.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sqrt{\dfrac{2n + 1}{2}}P_n$.

**a.** Montrer que $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

**b.** Calculer la distance du polynôme $X^{n+1}$ au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.