

EXERCICE 1.

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

$$1. \frac{1}{X^n - 1} \quad \left| \quad 2. \frac{X^{n-1}}{X^n - 1} \quad \left| \quad 3. \frac{1}{(X-1)(X^n - 1)} \right.$$

EXERCICE 2.

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $F = \frac{1}{X^n(1-X)^n}$.

EXERCICE 3.

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$:

$$1. F = \frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} \quad \left| \quad 3. F = \frac{1}{X(X-1)^3} \quad \left| \quad 5. F = \frac{1}{X^2 + X + 1} \right. \right. \\ 2. F = \frac{4}{(X^2 + 1)^2} \quad \left| \quad 4. F = \frac{2X}{X^2 + 1} \quad \left| \quad 6. F = \frac{X}{(X^2 - 1)^3} \right.$$

EXERCICE 4.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ dont les racines sont réelles et simples. Montrer que le polynôme $Q = P'^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles.

EXERCICE 5.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Quel est son degré ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les racines de T_n ?
3. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{T_n}$.

EXERCICE 6.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A_n \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A_n \left(X + \frac{1}{X} \right) = X^n + \frac{1}{X^n}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les racines de A_n sont les $x_k = 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $0 \leq k \leq n-1$.
3. Décomposer $\frac{1}{A_n}$ en éléments simples.

EXERCICE 7.

Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $P_n = \prod_{k=0}^n (X - k)$.

1. En considérant $f_n = \frac{P'_n}{P_n}$, montrer que P'_n admet une unique racine x_n dans $]0, 1[$.
2. Montrer que (x_n) converge vers 0.
3. Montrer que $x_n \sim \frac{1}{\ln n}$.

EXERCICE 8.

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P .

EXERCICE 9.

Calculer les limites des suites suivantes :

$$1. u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k} \quad \left| \quad 3. w_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} \right. \\ 2. v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} \quad \left| \quad 4. z_n = \sum_{k=1}^n \frac{k-2}{k^3 + 3k^2 + 2k} \right.$$

EXERCICE 10.

Soit $F = \frac{X^2 + 1}{(X-1)(X+1)^6}$.

1. Déterminer la partie polaire de F relative au pôle 1.
2. On pose $G = (X+1)^6 F$. Ecrire un développement limité de $G(x)$ à l'ordre 5 en -1 .
3. En déduire la décomposition en éléments simples de F .

EXERCICE 11.

Décomposer en éléments simple sur $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes.

$$1. F = \frac{X+1}{(X^2+1)(X^2-X+1)} \quad \left| \quad 3. F = \frac{X^2+1}{X(X^2+X+1)^2} \right. \\ 2. F = \frac{1}{X^2(X^2+1)^2} \quad \left| \quad 4. F = \frac{2X+3}{X(X^2+X+3)^2} \right.$$

EXERCICE 12.

Trouver une primitive de la fonction

$$\varphi : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{4x}{x^4 - 1}.$$

EXERCICE 13.

Démontrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $R \in \mathbb{K}(X)$ telle que $R' = \frac{1}{X}$.

EXERCICE 14.

Calculer $\int_0^\pi \frac{\sin t \, dt}{4 - \cos^2 t}.$

EXERCICE 15.

Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2}.$
2. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1 - x^2}.$
3. $\int_2^3 \frac{2x + 1}{x^2 + x - 3} dx.$
4. $\int_0^2 \frac{x \, dx}{x^4 + 16}.$
5. $\int_0^3 \frac{x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{(x - 4)^3} dx.$
6. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3 - 7x + 6}.$
7. $\int_{-1}^1 \frac{2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 17x + 30}{x^3 + 8} dx.$
8. $\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4 - 1} dx.$
9. $\int_{-1}^0 \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 - 3x + 2} dx.$
10. $\int_1^2 \frac{2x^8 + 5x^6 - 12x^5 + 30x^4 + 36x^2 + 24}{x^4(x^2 + 2)^3} dx.$
11. $\int_0^a \frac{-2x^2 + 6x + 7}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$ pour $a \in \mathbb{R}$. Y a-t-il une limite quand $a \rightarrow +\infty$?
12. $\int_0^2 \frac{dx}{x^4 + 1}.$

EXERCICE 16.

Calculer

1. $\int_0^{\pi} \frac{\sin t \, dt}{4 - \cos^2 t}$ en posant $u = \cos t$;
2. $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{dt}{\sin t}$ pour $x \in]0, \pi[$ en posant $u = \cos t$;
3. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t}$ en posant $u = \sin t$;
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t + \cos t}$ en posant $u = \tan \frac{t}{2}$.

EXERCICE 17.

Le but est de déterminer l'ensemble \mathcal{A} de toutes les suites réelles (u_n) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_n = n - 1$$

1. Trouver une suite réelle vérifiant cette relation de récurrence.
2. Montrer que \mathcal{A} est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On précisera la direction de \mathcal{A} et on en donnera une base.

EXERCICE 18.

Montrer que $\mathcal{F} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid X^2 P'' - 3XP' + 4P = 4 - X\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer sa direction.

EXERCICE 19.

Soit E l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) - f(x) = x^2$$

1. Déterminer une fonction polynomiale P élément de E .
2. Montrer que E est un sous-espace affine de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ et donner sa direction.

EXERCICE 20.

Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines de E de direction respectives F et G .

1. Montrer que si $E = F + G$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.
2. Montrer que si $E = F \oplus G$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un singleton.