Devoir à la maison n°13 : corrigé

Problème 1 — Un développement asymptotique de la série harmonique (d'après ENS BL 2010)

Partie I –

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. ln est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$ de dérivée $t \mapsto \frac{1}{t}$. De plus, pour tout $t \in]k, k+1[$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$. D'après l'inégalité des accoissements finis, on a bien

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

2. **a.** La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs divergente. Ainsi $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{H}_n = +\infty$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **I.1**,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

ce qui donne

$$\mathrm{H}_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant \mathrm{H}_n - \frac{1}{n}$$

On en déduit l'inégalité demandée.

c. Pour tout $n \geqslant 2$,

$$1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \frac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{H}_n}{n\ln(n)} = 1$$

ou encore

$$\mathrm{H}_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$$

3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \geqslant 0$ d'après la question **I.1**.
La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est donc décroissante.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n) \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0$ d'après la question **I.2.b**. Ainsi $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et minorée : elle converge vers un réel γ.
Puisque $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est minorée par 0, $\gamma \geqslant 0$. De plus, $u_1 = 1$ et $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante donc $\gamma \leqslant 1$.

4. **a.** Il s'agit d'intégrer deux fois par parties. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_k &= \frac{1}{2}\left[\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f'(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) f'(t)\,dt \\
&= \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \left[\left(t - k - \frac{1}{2}\right) f(t)\right]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} f(t)\,dt \\
&= \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t)\,dt
\end{aligned}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant les égalités précédentes pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{J}_k = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n-1}\left[f'(k+1)-f'(k)\right] - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left[f(k+1)+f(k)\right] + \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)\,dt$$

On remarque un télescopage dans la première somme :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f'(k+1)-f'(k) = f'(n)-f'(1)$$

On utilise un changement d'indice dans la seconde somme :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k)+f(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=2}^{n} f(k) = 2\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1) - f(n)$$

Enfin, la relation de Chasles pour les intégrales montre que

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)\,dt = \int_1^n f(t)\,dt$$

On en déduit alors la relation demandée.

5. **a.** Remarquons tout d'abord que f est bien de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(t) = \frac{2}{t^3}$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$-\frac{1}{2} \leqslant t-k-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$$

donc

$$0 \leqslant \left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$$

Puisque f'' est positive sur $[k, k+1]$, pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$0 \leqslant \left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2 f''(t) \leqslant \frac{1}{4} f''(t) = \frac{1}{2t^3}$$

La croissance de l'intégrale montre alors que

$$0 \leqslant \mathrm{J}_k \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{4t^3}$$

b. L'intégrale de la question **I.5.a** se calcule aisément de sorte que

$$0 \leqslant \mathrm{J}_k \leqslant \frac{1}{8}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \leqslant \frac{1}{8k^2}$$

Puisque la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{8k^2}$ converge, il en est de même de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathrm{J}_k$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier supérieur ou égal à n. En reprenant la question **I.5.b**,

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{p} \mathrm{J}_k \leqslant \frac{1}{8}\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

puis, par télescopage,

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{p} \mathrm{J}_k \leqslant \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(p+1)^2}\right)$$

Par passage à la limite (justifié puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{J}_n$ converge)

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{J}_k \leqslant \frac{1}{8n^2}$$

d. D'après la question **I.4.b** appliquée à la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{H}_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{8} - \frac{1}{n^2} + \ln(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{J}_k$$

En notant $\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{J}_k$ et $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{J}_k$, ceci s'écrit également

$$u_n = \frac{5}{8} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} + \mathrm{S} - \mathrm{R}_n$$

D'après la question **I.3.b**, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \gamma$. De plus, (R_n) converge vers 0 (reste d'une série convergente ou théorème des gendarmes appliqué au résultat de la question **I.5.c**). Un passage à la limite donne donc

$$\gamma = \frac{5}{8} + \mathrm{S}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} - \mathrm{R}_n$$

ou encore

$$\mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} - \mathrm{R}_n$$

La question **I.5.c** montre que $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On en déduit le développement asymtotique demandé.

Partie II –

1. **a.** Puisque (u_n) est de limite γ d'après la question **I.3.b**, (x_n) est également de limite γ.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $p \geqslant n+1$, un télescopage donne

$$\sum_{k=n+1}^{p} y_k = x_p - x_n$$

   Par passage à la limite lorsque p tend vers $+\infty$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k = \gamma - x_n$$

   c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Pour tout entier $k \geqslant n+1$,

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - x_{k-1} \\ &= \mathrm{H}_k - \ln(k) - \frac{1}{2k} - \mathrm{H}_{k-1} + \ln(k-1) + \frac{1}{2(k-1)} \\ &= \frac{1}{k} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k-1)} + \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right) \end{aligned}$$

   On en déduit l'égalité demandée.

2. Tout d'abord

$$\begin{aligned} \frac{1}{k-1} &= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{k}} \\ &\underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\ &\underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right) \end{aligned}$$

   Ensuite

$$\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{=} -\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

   Après calcul, on trouve bien

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

   Autrement dit,

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3k^3}$$

3. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$ est une série à termes positifs convergente donc d'après le résultat admis et la question **II.1.c**,

$$\gamma - x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

Or par comparaison à une intégrale,

$$\int_{n+1}^{p+1} \frac{dt}{t^3} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^3} \leqslant \int_{n}^{p} \frac{dt}{t^3}$$

ou encore

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(p+1)^2}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$$

puis par passage à la limite

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

On en déduit sans peine que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

de sorte que

$$\gamma - x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$$

ce qui s'écrit encore

$$\gamma - x_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisque

$$x_n = u_n - \frac{1}{2n} = \mathrm{H}_n - \ln(n) - \frac{1}{2n}$$

on en déduit le développement asymptotique demandé.