Réduction

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps qui en pratique sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Rappels et généralités

1.1 Structure d'algèbre

Définition 1.1

Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un ensemble muni de deux lois internes $+$ et $\times$ ainsi que d'une loi externe . i.e. d'une application :

$$\begin{cases} \mathbb{K}\times\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x \end{cases}$$

On dit que $(\mathrm{E}, +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$**-algèbre** si

(i) $(\mathrm{E}, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;

(ii) $(\mathrm{E}, +, \times)$ est un anneau ;

(iii) $\forall(\lambda, x, y) \in \mathbb{K}\times\mathrm{E}^2,\ \lambda.(x\times y) = (\lambda.x)\times y = x\times(\lambda.y)$.

Remarque. Si la loi $\times$ est commutative, on dit que E est une algèbre commutative.

Exemple 1.1

- Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(\mathcal{L}(\mathrm{E}), +, \circ, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Elle est non commutative dès que $\dim \mathrm{E} \geq 2$.
- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Elle est non commutative dès que $n \geq 2$.
- $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.
- Si X est un ensemble, $(\mathbb{K}^{\mathrm{X}}, +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.

Définition 1.2 Sous-algèbre

Soit $(\mathrm{E}, +, \times, .)$ une $\mathbb{K}$-algèbre et F un ensemble. On dit que F est une **sous-algèbre** de E si

(i) $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$;

(ii) F est un sous-espace vectoriel de E ;

(iii) F est un sous-anneau de E.

Proposition 1.1

Une sous-algèbre d'une $\mathbb{K}$-algèbre est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Proposition 1.2 Caractérisation des sous-algèbres

Soit $(\mathrm{E}, +, \times, .)$ une $\mathbb{K}$-algèbre et F un ensmble. On dit que F est une **sous-algèbre** de E si et seulement si

(i) $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$;

(ii) $1_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F}$;

(iii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in \mathrm{F}^2,\ \lambda.x + \mu.y \in \mathrm{F}$;

(iv) $\forall (x, y) \in \mathrm{F}^2,\ x \times y \in \mathrm{F}$.

Exemple 1.2

- Soit E un espace vectoriel. Alors l'ensemble $\mathbb{K}\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ des homothéties de E est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.
- L'ensemble $\mathbb{K}\mathrm{I}_n$ des matrices scalaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $(\mathcal{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{K}), +, \times, .)$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^{\mathrm{I}}$.
- Soit I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(k, p) \in (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})^2$. Si $k \geq p$, alors $\mathcal{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^p(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.

Définition 1.3 Morphisme d'algèbres

Soient $(\mathrm{E}, +, \times, .)$ et $(\mathrm{F}, +, \times, .)$ deux $\mathbb{K}$-algèbres. On appelle **morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres** de E dans F toute application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ telle que :

(i) $f(1_{\mathrm{E}}) = 1_{\mathrm{F}}$,

(ii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ f(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.f(x) + \mu.f(y)$,

(iii) $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, f(x \times y) = f(x) \times f(y)$,

Remarque. Une application est donc un morphisme d'algèbres si et seulement si elle est à la fois un morphisme d'espaces vectoriels i.e. une application linéaire et un morphisme d'anneaux.

Remarque. On peut également définir des notions d'**endomorphisme**, d'**isomorphisme** et d'**automorphisme** d'algèbres.

Proposition 1.3 Images directe et réciproque d'une sous-algèbre par un morphisme d'algèbres

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

(i) Si G est une sous-algèbre de E, alors $f(\mathrm{G})$ est une sous-algèbre de F.

(ii) Si H est une sous-algèbre de F, alors $f^{-1}(\mathrm{H})$ est une sous-algèbre de E.

Proposition 1.4

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. Alors $\operatorname{Im} f$ est une sous-algèbre de F.

Attention ! De manière générale, $\operatorname{Ker} f$ n'est pas une sous-algèbre de E. En effet, $1_E \notin \operatorname{Ker} f$ à moins que F soit l'algèbre nulle (i.e. $0_F = 1_F$).

1.2 Matrices semblables

Définition 1.4 Matrices semblables

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que B est **semblable** à A si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Proposition 1.5

La relation de similitude («être semblable à») est une relation d'équivalence.

Remarque. Si deux matrices sont semblables, l'une est inversible si et seulement si l'autre l'est.

Remarque. Si A et B sont semblables, alors A^n et B^n sont semblables pour tout $n \in \mathbb{N}$ (pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si A est inversible). Plus précisément, s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$, alors $B^n = P^{-1}A^nP$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si A est inversible).

1.3 Sous-espaces stables

Définition 1.5 Sous-espace stable

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Remarque. Si F est un sous-espace stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u induit un endomorphisme de F.

Exercice 1.1

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E qui commutent i.e. $u \circ v = v \circ u$. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $v(F)$ est également stable par u.

Définition 1.6 Base adaptée à un sous-espace vectoriel

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. On dit qu'une base de E est adaptée à F si ses premiers éléments forment une base de $\mathcal{F}$.

Proposition 1.6 Matrice et stabilité

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Si $\mathcal{B}$ est une base de E adaptée à F, alors la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est tringulaire par blocs. Plus précisément, en notant $n = \dim E$ et $p = \dim F$, il existe $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ telles que $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$.

1.4 Endomorphismes nilpotents et matrices nilpotentes

Définition 1.7 Endomorphisme nilpotent

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel. On dit que u est **nilpotent** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.
Le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ est appelé l'**indice de nilpotence** de u.

Définition 1.8 Matrice nilpotente

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **nilpotente** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{A}^p = 0$.
Le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{A}^p = 0$ est appelé l'**indice de nilpotence** de A.

Exemple 1.3

Toute matrice triangulaire stricte est nilpotente d'indice de nilpotence inférieure ou égale à sa taille.

Exemple 1.4

Soit $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors J est nilpotente d'indice n.

Proposition 1.7 Majoration de l'indice de nilpotence

(i) L'indice de nilpotence d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est inférieur ou égal à dim E.

(ii) L'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inférieur ou égal à n.

2 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

2.1 Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme

Proposition 2.1

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $x \in \mathrm{E}$. La droite $\mathrm{vect}(x)$ est stable par u si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Définition 2.1 Valeur propre et vecteur propre d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

- On dit qu'un vecteur **non nul** $x \in \mathrm{E}$ est un **vecteur propre** de u s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
- On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de u s'il existe $x \in \mathrm{E}$ **non nul** tel que $u(x) = \lambda x$.

Dans chacun de ces deux cas, on dit que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Remarque. Un vecteur propre est forcément **non nul**.

Exemple 2.1

0 est une valeur propre d'un endomorphisme u si et seulement si celui-ci est non injectif.

Exemple 2.2

Soit D l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ qui à une application associe sa dérivée. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto e^{\lambda x}$ est un vecteur propre de D associé à la valeur propre λ.

Exemple 2.3

Si x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ, alors c'est également un vecteur propre de u^n associé à la valeur propre λ^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si u est un automorphisme).

Exemple 2.4

L'unique valeur propre d'un endomorphisme nilpotent est 0.

Définition 2.2 Spectre d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**. On appelle **spectre** de u, noté $\mathrm{Sp}(u)$, l'ensemble des valeurs propres de u.

Remarque. En dimension infinie, la définition est légèrement différente.

Définition 2.3 Sous-espace propre d'un endomorphisme

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et λ une valeur propre de u. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{E}_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{E})$ est appelé **sous-espace propre** de u associé à la valeur propre λ. C'est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ et du vecteur nul.

Remarque. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est le noyau.

Remarque. Si λ n'est pas une valeur propre de u, on peut convenir que $\mathrm{E}_\lambda(u) = \{0_\mathrm{E}\}$.

Exemple 2.5

Considérons l'endomorphisme T de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ qui à la suite (u_n) associe la suite (u_{n+2}).
Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{T}^2) = \mathrm{vect}\left((\alpha^n), ((-\alpha)^n)\right)$ où α est une racine carrée de λ.

Exercice 2.1

Soient u et v deux endomorphismes d'un même espace vectoriel qui commutent. Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.

Méthode **Déterminer les éléments propres d'un endomorphisme**

Pour déterminer les éléments propres d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on recherche les scalaires $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que l'équation $u(x) = \lambda x$ possède des solutions non nulles. Lesdites solutions sont alors les vecteurs propres associés à la valeur propre λ.

Exercice 2.2

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\varphi(P) = XP'$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer les éléments propres de φ.

2.2 Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'une matrice carrée

Définition 2.4 Valeur propre et vecteur propre d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit qu'une matrice colonne **non nulle** $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un **vecteur propre** de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$.
- On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de A s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle tel que $AX = \lambda X$.

Dans chacun de ces deux cas, on dit que X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Remarque. Un vecteur propre est forcément **non nul**.

Exemple 2.6

0 est une valeur propre d'une matrice carrée si et seulement si elle est non inversible.

Exemple 2.7

Soit D une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. En notant $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, E_k est un vecteur propre de D associé à la valeur propre λ_k.

Exemple 2.8

Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors c'est également un vecteur propre de A^n associé à la valeur propre λ^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si A est inversible).

Exemple 2.9

L'unique valeur propre d'une matrice carrée est 0.

Définition 2.5 Spectre d'une matrice carrée

Soit A une matrice carrée. On appelle **spectre** de A, noté Sp(A), l'ensemble des valeurs propres de A.

Définition 2.6 Sous-espace propre d'une matrice carrée

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A. Le sous-espace vectoriel $E_\lambda(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$ est appelé **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ. C'est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ et de la matrice colonne nulle.

Remarque. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est le noyau.

Remarque. Si λ n'est pas une valeur propre de A, on peut convenir que $E_\lambda(A) = \{0\}$.

Proposition 2.2 Lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et A sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E. Alors

(i) $\operatorname{Sp}(u) = \operatorname{Sp}(A)$;

(ii) $x \in E$ est un vecteur propre de u si et seulement si $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est un vecteur propre de A ;

(iii) Pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(u) = \operatorname{Sp}(A)$, l'isomorphisme $\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{array}\right.$ induit un isomorphisme de $E_\lambda(u)$ sur $E_\lambda(A)$.

Proposition 2.3

Deux matrices semblables ont même spectre.

Attention ! La réciproque est fausse. Par exemple, le spectre de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est $\{0\}$ mais ces deux matrices ne sont évidemment pas semblables.

Proposition 2.4 Spectre et sous-corps

Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps d'un corps $\mathbb{L}$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset \operatorname{Sp}_{\mathbb{L}}(A)$.

Attention ! L'inclusion peut être stricte. Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ peut être considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On peut vérifier que $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$ et que $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, +i\}$.

2.3 Propriétés des sous-espaces propres

Proposition 2.5

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carré est directe.

Corollaire 2.1 Cardinal d'un spectre

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie** n ou d'une matrice carrée de taille n est un ensemble **fini** de cardinal inférieur ou égal à n.

Proposition 2.6

Soient deux endomorphismes d'un même espace vectoriel qui commutent. Alors tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

2.4 Polynôme caractéristique

Définition 2.7 Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme $\chi_A = \det(XI_n - A)$ de $\mathbb{K}[X]$ est appelé **polynôme caractéristique** de A.

Exemple 2.10

Le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est $(X-1)(X-4) - 2 \times 3 = X^2 - 5X - 2$.

Exemple 2.11 Matrice compagnon

Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$. Alors en développant par rapport à la dernière colonne, $\chi_A = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Remarque. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_A = \chi_{A^\top}$.

Proposition 2.7

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Attention ! La réciproque est fausse. Par exemple, les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont même polynôme caractéristique mais ne sont évidemment pas semblables.

Définition 2.8 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de E de **dimension finie**. Le polynôme caractéristique de la matrice de u dans une base de E est indépendant de la base : on l'appelle **polynôme caractéristique** de u et on le note χ_u.

Méthode **Déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme**

Pour déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il suffit de déterminer la matrice de cet endomorphisme dans une base de E et de calculer le polynôme caractéristique de cette matrice.

Exemple 2.12

Soit r la rotation d'angle θ du plan euclidien orienté. La matrice de r dans une base orthonormée directe est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On en déduit que $\chi_r = (X - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = X^2 - 2\cos\theta + 1$.

Proposition 2.8 Spectre et polynôme caractéristique

(i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{Sp}(A)$ est l'ensemble des racines de χ_A.

(ii) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de E de **dimension finie**. Alors $\mathrm{Sp}(u)$ est l'ensemble des racines de χ_u.

Attention ! Le corps de base peut avoir son importance. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\chi_A = X^2 + 1$. Ainsi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$ tandis que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, +i\}$.

Exemple 2.13

Toute matrice carrée réelle de taille impaire possède une valeur propre réelle.
De même, tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire possède une valeur propre réelle.

Exemple 2.14

Si A est une matrice carrée **réelle**, les valeurs propres **complexes** de A sont conjuguées deux à deux.

Remarque. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Sp}(A^\top) = \mathrm{Sp}(A)$. En effet, $\chi_A = \chi_{A^\top}$.

Méthode Déterminer les éléments propres d'une matrice

Pour déterminer les éléments propres d'une matrice M, il suffit de

1. calculer χ_M ;
2. déterminer les racines de χ_M, ce qui fournit $\mathrm{Sp}(M)$;
3. pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, résoudre l'équation $MX = \lambda X$, ce qui fournit $E_\lambda(M)$.

Méthode Déterminer les éléments propres d'un endomorphisme

Pour déterminer les éléments propres d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de **dimension finie**, il suffit de

1. déterminer la matrice M de u dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E ;
2. déterminer les éléments propres de M.

On sait alors que $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(M)$ et l'isomorphisme $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k e_k \in E$ permet de récupérer le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ à partir du sous-espace propre $E_\lambda(M)$.

Exercice 2.3

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\varphi(P) = (X+1)P' - P$ pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

Proposition 2.9 Degré et coefficients du polynôme caractéristique

(i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors χ_A est un polynôme unitaire de degré n. De plus, le coefficient constant de χ_A est $(-1)^n \det(A)$ et le coefficient du monôme de degré $n-1$ est $-\operatorname{tr}(A)$.

(ii) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de E de **dimension finie**. Alors χ_u est un polynôme unitaire de degré n. De plus, le coefficient constant de χ_u est $(-1)^n \det(u)$ et le coefficient du monôme de degré est $-\operatorname{tr}(u)$.

Exemple 2.15

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors u est un automorphisme si et seulement si $\chi_u(0) \neq 0$ i.e. si et seulement si le coefficient constant de χ_u est non nul.

On en déduit que dans ce cas, il existe un polynôme P tel que $u^{-1} = P(u)$. Plus précisément, $P = \dfrac{\chi_u(0) - \chi_u}{\chi_u(0)X}$.

Exemple 2.16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\chi_A(0) \neq 0$ i.e. si et seulement si le coefficient constant de χ_A est non nul.

On en déduit que dans ce cas, il existe un polynôme P tel que $A^{-1} = P(A)$. Plus précisément, $P = \dfrac{\chi_A(0) - \chi_A}{\chi_A(0)X}$.

Exemple 2.17

Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, alors $\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$.

Proposition 2.10 Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors $\chi_A = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$.

Remarque. C'est a fortiori vrai pour les matrices diagonales.

Remarque. On peut montrer que le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des polynômes caractéristiques des blocs triangulaires.

Proposition 2.11 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit

Soient u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Si on note $u_{|F}$ l'endomorphisme de F induit par u, alors $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u.

Définition 2.9 Multiplicité d'une valeur propre

(i) Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A. On appelle **mutiplicité** de la valeur propre λ, notée $m_\lambda(\mathrm{A})$, la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique χ_{A}.

(ii) Soient u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et λ une valeur propre de u. On appelle **mutiplicité** de la valeur propre λ, notée $m_\lambda(u)$, la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique χ_u.

Remarque. On peut convenir qu'une valeur propre de multiplicité nulle n'est tout simplement pas une valeur propre.

Remarque. Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} m_\lambda(\mathrm{A}) = n$.
De même, si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, alors $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda(u) = \dim \mathrm{E}$.

Remarque. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, $1 \leq \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) \leq m_\lambda(\mathrm{A})$.
De même, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $1 \leq \dim \mathrm{E}_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$.

3 Diagonalisabilité

3.1 Endomorphisme diagonalisable

Définition 3.1 Endomorphisme diagonalisable

Un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de **dimension finie** est dit **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
Dans ce cas, les coefficients diagonaux de cette matrice sont les valeurs propres de u, chaque valeur propre apparaissant autant de fois que sa multiplicité dans χ_u.

Exemple 3.1

Une homothétie, un projecteur ou une symétrie d'un espace vectoriel de dimension finie sont diagonalisables.

Attention ! La diagonalisabilité peut dépendre du corps de base. L'endomorphisme $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & iz \end{array}\right.$ est diagonalisable en tant qu'endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ mais ne l'est pas en tant qu'endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Proposition 3.1

Un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de **dimension finie** est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Proposition 3.2 Diagonalisabilité et sous-espace propre

Un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de **dimension finie** est diagonalisable si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :

(i) $\mathrm{E} = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$;

(ii) $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim \mathrm{E}_\lambda(u) = \dim \mathrm{E}$;

(iii) χ_u est scindé et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim \mathrm{E}_\lambda(u) = m_\lambda(u)$.

Exercice 3.1

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. On suppose u diagonalisable.
Montrer que u et v commutent si et seulement si tout sous-espace propre de u est stable par v.

Proposition 3.3

Un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de **dimension finie** $n \in \mathbb{N}^*$ est diagonalisable si une des deux conditions équivalentes suivantes est réalisée :

(i) u possède n valeurs propres distinctes ;

(ii) χ_u est scindé à racines simples.

Attention ! Il s'agit d'une condition suffisante mais pas nécessaire. Par exemple, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 2, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est diagonalisable mais possède λ comme unique valeur propre et son polynôme caractéristique $(\mathrm{X} - \lambda)^n$ admet λ comme racine de multiplicité n.

Exemple 3.2

La matrice de l'endomorphisme u de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ défini par $u(\mathrm{P}) = \mathrm{XP}' - \mathrm{P}''$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $0, 1, \dots, n$. Son polynôme caractéristique est $\prod_{k=0}^{n} (\mathrm{X} - k)$ qui est scindé à racines simples. Ainsi u est diagonalisable.

Décomposition spectrale

Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension finie. Notons $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}$ la famille de projecteurs associée à la décomposition en somme directe $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$. Alors $u = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda p_\lambda$. Cette écriture s'appelle la décomposition spectrale de u.

3.2 Matrice diagonalisable

Définition 3.2 Matrice diagonalisable

On dit qu'une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **diagonalisable** si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé est diagonalisable.

Proposition 3.4

Une matrice carrée A est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.
Dans ce cas, les coefficients diagonaux de cette matrice diagonale sont les valeurs propres de A, chaque valeur propre apparaissant autant de fois que sa multiplicité dans χ_A.

Attention ! La diagonalisabilité peut dépendre du corps de base. Par exemple, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable en tant que matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais ne l'est pas en tant que matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 3.5

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A.

Proposition 3.6 Diagonalisabilité et sous-espace propre

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :

(i) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A)$;

(ii) $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = n$;

(iii) χ_A est scindé et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\dim E_\lambda(A) = m_\lambda(A)$.

Proposition 3.7

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si une des deux conditions équivalentes suivantes est réalisée :

(i) A possède n valeurs propres distinctes ;

(ii) χ_A est scindé à racines simples.

Attention ! Il s'agit d'une condition suffisante mais pas nécessaire. Par exemple, si $n \geq 2$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λI_n est diagonalisable mais possède λ comme unique valeur propre et son polynôme caractéristique $(X - \lambda)^n$ admet λ comme racine de multiplicité n.

Méthode **Diagonalisation d'une matrice**

Diagonaliser une matrice diagonalisable A consiste à trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. La marche à suivre est la suivante.

1. Déterminer les valeurs propres de A et des bases des sous-espaces propres associés.
2. Former la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs des bases des différents sous-espaces propres.
3. Former la matrice diagonale D constituée des valeurs propres de A, chaque colonne de D contenant la valeur propre associée à la colonne correspondante de P.

Exemple 3.3

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -32 & -2 & 14 & -21 & 92 & -69 \\ 6 & 3 & 6 & -32 & 2 & 28 \\ 36 & 12 & 35 & -184 & 8 & 164 \\ 3 & 2 & 8 & -36 & 12 & 23 \\ -15 & -2 & 0 & 17 & 29 & -43 \\ 3 & 0 & -2 & 5 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$

On trouve $\chi_A = X^6 - 5X^5 + 2x^4 + 10X^3 - 7X^2 - 5X + 4$. On en déduit que $\operatorname{Sp}(A) = \{4, -1, 1\}$. On trouve successivement

$$E_4(A) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \qquad E_{-1}(A) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 59 \\ 11 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \qquad E_1(A) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$$

On en déduit que $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 59 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 11 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -7 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcul de puissance

Si A est une matrice carrée diagonalisable, alors il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. On a alors $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et même pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si A est inversible). Puisque D est diagonale, le calcul de ses puissances est aisé.

Exercice 3.2 Commutant

Soit M une matrice diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont distinctes deux à deux. Déterminer le commutant de M, c'est-à-dire l'ensemble des matrices commutant avec M.

4 Trigonalisabilité

4.1 Endomorphisme trigonalisable

Définition 4.1 Endomorphisme trigonalisable

Un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de **dimension finie** est dit **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
Dans ce cas, les coefficients diagonaux de cette matrice sont les valeurs propres de u, chaque valeur propre apparaissant autant de fois que sa multiplicité dans χ_u.

Remarque. On a une définition équivalente en remplaçant «triangulaire supérieure» par «triangulaire inférieure» (il suffit d'inverser l'ordre des vecteurs de la base).

Remarque. Un endomorphisme diagonalisable est a fortiori trigonalisable.

Proposition 4.1 Trigonalisabilité, déterminant et trace

Soit u un endomorphisme trigonalisable d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors

$$\mathrm{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda(u)\lambda \qquad \det(u) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda^{\mu_\lambda(u)}$$

Autrement dit, la trace et le déterminant sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres **comptées** avec multiplicité.

Remarque. C'est a fortiori vrai pour les endomorphismes diagonalisables.

Proposition 4.2 Trigonalisabilité et polynôme caractéristique

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé.

Attention ! La trigonalisabilité peut donc dépendre du corps de base.

Corollaire 4.1

Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.

4.2 Matrice trigonalisable

Définition 4.2 Matrice trigonalisable

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé est trigonalisable.

Remarque. Une matrice diagonalisable est a fortiori trigonalisable.

Proposition 4.3

Une matrice carrée A est trigonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
Dans ce cas, les coefficients diagonaux de cette matrice triangulaire supérieure sont les valeurs propres de A, chaque valeur propre apparaissant autant de fois que sa multiplicité dans χ_A.

Remarque. On a un énoncé équivalent en remplaçant «triangulaire supérieure» par «triangulaire inférieure».

Proposition 4.4 Trigonalisabilité, déterminant et trace

Soit A une matrice carrée trigonalisable. Alors

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} m_\lambda(A)\lambda \qquad \det(A) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \lambda^{\mu_\lambda(A)}$$

Autrement dit, la trace et le déterminant sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres **comptées** avec multiplicité.

Remarque. C'est a fortiori vrai pour les matrices diagonalisables.

Proposition 4.5 Trigonalisabilité et polynôme caractéristique

Soit A une matrice carrée. Alors A est trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé.

Attention ! La trigonalisabilité peut donc dépendre du corps de base.

Corollaire 4.2

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Méthode **Trigonalisation d'une matrice**

Il s'agit essentiellement de remarquer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet pour polynôme caractéristique $\chi_A = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)}(X - \lambda)^{m_\lambda(A)}$ alors

- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)^{m_\lambda(A)}$ d'après le lemme des noyaux (cf. plus loin) ;
- la suite $(\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)^k)$ est croissante pour l'inclusion.

L'algorithme suivant fournit alors une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et une matrice $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ telles que $A = PTP^{-1}$.
On remarque que T peut alors s'écrire $T = D + T'$ avec D diagonale et T' triangulaire stricte et que D et T' **commutent**.

Algorithme 1 Trigonalisation d'une matrice

Données : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ trigonalisable
Résultat : Une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et une matrice $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ telles que $A = PTP^{-1}$.

```
Déterminer Sp(A)
Pour λ ∈ Sp(A) Faire
    Déterminer une base B_λ de E_λ(A) = Ker(A − λI_n)
    k ← 1
    Tant que dim Ker(A − λI_n)^k < m_λ(A) Faire
        Ajouter des vecteurs à B_λ la transformer en une base de Ker(A − λI_n)^k
        k ← k + 1
    Fin Tant que
Fin Pour
Poser B = ⋃_{λ∈Sp(A)} B_λ
Former la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs de B
Former la matrice T dont les colonnes sont constituées des coordonnées dans la base B des produits de A par les vecteurs de B
```

Exemple 4.1

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. On trouve $\chi_A = (X+2)(X-1)^2$. On calcule ensuite

$$\operatorname{Ker}(A - 2I_3) = \operatorname{vect}(C_1) \qquad \operatorname{Ker}(A + I_3) = \operatorname{vect}(C_2) \qquad \operatorname{Ker}(A + I_3)^2 = \operatorname{vect}(C_2, C_3)$$

avec

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$AC_1 = -2C_1 \qquad AC_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_2 \qquad AC_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -C_2 + C_3$$

On en déduit qu'en posant $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $A = PTP^{-1}$.

Exemple 4.2

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On trouve $\chi_A = (X+1)^3$ de sorte que $\operatorname{Sp}(A) = \{-1\}$. On calcule ensuite

$$\operatorname{Ker}(A + I_3) = \operatorname{vect}(C_1) \qquad \operatorname{Ker}(A + I_3)^2 = \operatorname{vect}(C_1, C_2) \qquad \operatorname{Ker}(A + I_3)^3 = \operatorname{vect}(C_1, C_2, C_3)$$

avec

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$AC_1 = -C_1 \qquad AC_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 - C_2 \qquad AC_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = -C_1 - 2C_2 - C_3$$

On en déduit qu'en posant $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $A = PTP^{-1}$.

Proposition 4.6 Trigonalisabilité et nilpotence

(i) Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est nilpotent si et seulement si il est trigonalisable et admet 0 comme unique valeur propre.

(ii) Une matrice carrée est nilpotente si et seulement si elle est trigonalisable et admet 0 comme unique valeur propre.

Remarque. Il existe donc une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme nilpotent est triangulaire stricte.
Une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire stricte.

Remarque. Puisqu'une matrice triangulaire stricte est nilpotente d'indice inférieure ou égale à sa taille, on retrouve alors les majorations de l'indice de nilpotence précédemment énoncées.

(i) L'indice de nilpotence d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est inférieur ou égal à $\dim E$.

(ii) L'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inférieur ou égal à n.

Remarque. On en déduit que

(i) le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension n est X^n

(ii) le polynôme caractéristique d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est X^n.

5 Polynômes d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

5.1 Généralités

Définition 5.1

(i) Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$. On pose $P(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$.

(ii) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$. On pose $P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n A^n$.

Exemple 5.1

Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E et $P = X^2 + X + 1$, alors $P(u) = u^2 + u + \mathrm{Id}_E$ (et non $u^2 + u + 1$, ce qui n'aurait aucun sens).
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = X^2 + X + 1$, alors $P(A) = A^2 + A + I_n$ (et non $A^2 + A + 1$, ce qui n'aurait aucun sens).

Exercice 5.1

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $\operatorname{Ker} P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont des sous-espaces vectoriels stables par u.

Lemme 5.1

(i) Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, $u(x) = \lambda x \implies P(u)(x) = P(\lambda)x$.

(ii) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors pour tout $(\lambda, X) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = \lambda X \implies P(A)X = P(\lambda)X$.

Définition 5.2 Sous-algèbre engendrée par un endomorphisme ou une matrice carrée

(i) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. L'application $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(u) \in \mathcal{L}(E)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. L'image de ce morphisme, notée $\mathbb{K}[u]$, est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. L'image de ce morphisme, notée $\mathbb{K}[A]$, est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5.2 Polynômes annulateurs

Définition 5.3 Polynôme annulateur

(i) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle **polynôme annulateur** de u tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme annulateur** de A tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$.

Proposition 5.1 Polynôme annulateur et valeur propre

(i) Soient u un endomorphisme d'un espace vectoriel et P un polynôme annulateur de u. Alors toute valeur propre de u est racine de P.

(ii) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P un polynôme annulateur de A. Alors toute valeur propre de A est racine de P.

Attention ! La réciproque est fausse. Une racine d'un polynôme annulateur n'est pas forcément une valeur propre.

Théorème 5.1 Lemme des noyaux

Soient $P_1, \dots, P_r$ des polynômes premiers entre eux deux à deux et $P = \prod_{i=1}^r P_i$.

(i) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors

$$\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} P_i(u)$$

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\operatorname{Ker} P(A) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} P_i(A)$$

Corollaire 5.1 Polynôme annulateur et diagonalisabilité

(i) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors u est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples.

Corollaire 5.2 Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Soient u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel stable par F. Alors $u_{|F}$ est diagonalisable.
De plus, $\mathrm{Sp}(u_{|F}) \subset \mathrm{Sp}(u)$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u_{|F})$, $E_\lambda(u_{|F}) \subset E_\lambda(u)$.

Remarque. En fait, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u_{|F})$, $E_\lambda(u_{|F}) = E_\lambda(u) \cap F$.

Exercice 5.2

Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables d'un même espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que si u et v commutent, alors il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux diagonales.

Proposition 5.2 Polynôme annulateur et trigonalisabilité

(i) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors u est trigonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de u scindé.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est trigonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines.

Exercice 5.3

Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables d'un même espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que si u et v commutent, alors il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux triangulaires supérieures.

On peut affiner ce résultat.

Proposition 5.3

(i) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie annulé par un polynôme scindé. Alors il existe des sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_r$ de E stables par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ et tels que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, l'endomorphisme induit par u sur E_i soit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ annulée par un polynôme scindé. Alors A est semblable à une matrice diagonale par blocs où chaque bloc diagonal est la somme d'une matrice scalaire et d'une matrice triangulaire supérieure stricte.

Remarque. Plus précisément, si $P = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$ annule u, alors en posant $E_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i)^{m_i}$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, les E_i sont stables par u et $u_{|E_i} = \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i} + n_i$ avec $n_i = u_{|E_i} - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}$ nilpotent.

De même, si $P = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$ annule A, alors A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix}
\boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_1\end{matrix}} & & & \\
& \boxed{\begin{matrix}\lambda_2 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_2\end{matrix}} & & \\
& & \ddots & \\
& & & \boxed{\begin{matrix}\lambda_n & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n\end{matrix}}
\end{pmatrix}$$

Décomposition de Dunford

Il en résulte qu'il existe des endomorphismes d et n de E tels que

- $u = d + n$;
- les restrictions de d aux sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_r$ sont des homothéties ;
- n est nilpotent ;
- d et n **commutent**.

On peut alors montrer que ces endomorphismes d et n sont uniques. L'écriture $u = d + n$ s'appelle la **décomposition de Dunford** de l'endomorphisme u.
De même, il existe des matrices D et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

- $A = D + N$;
- D est diagonalisable ;
- N est nilpotente ;
- D et N **commutent**.

A nouveau, ces matrices D et N sont uniques. L'écriture $A = D + N$ s'appelle la **décomposition de Dunford** de la matrice A.

Théorème 5.2 Cayley-Hamilton

(i) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**. Alors $\chi_u(u) = 0$.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $d = \deg \pi_A$. Alors $\chi_A(A) = 0$.

5.3 Idéal annulateur

Définition 5.4 Idéal annulateur d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

(i) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Le noyau du morphisme d'algèbres $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(u) \in \mathcal{L}(E)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé **idéal annulateur** de u.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le noyau du morphisme d'algèbres $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé **idéal annulateur** de A.

Proposition 5.4 Polynôme minimal

(i) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**. L'idéal annulateur de u admet un unique générateur unitaire appelé **polynôme minimal** de u, noté π_u.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'idéal annulateur de A admet un unique générateur unitaire appelé **polynôme minimal** de A, noté π_A.

Remarque. En clair, ceci signifie que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(u) = 0 \iff \pi_u | P \qquad \text{et} \qquad P(A) = 0 \iff \pi_A | P$$

En particulier, le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique en vertu du théorème de Cayley-Hamilton.

Attention ! Une erreur classique consiste à croire qu'il suffit d'«enlever» les puissances du polynôme caractéristique pour obtenir le polynôme minimal.

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A = (X-1)^2(X-2)^2$ et on vérifie que $(X-1)(X-2)$ n'annule pas A. On a en fait $\pi_A = (X-1)(X-2)^2$.

Attention ! L'idéal annulateur d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension infinie peut être réduit à $\{0\}$, auquel cas il n'existe pas de polynôme minimal.
Par exemple, l'idéal annulateur de l'endomorphisme $D : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P'$ est nul.

Exemple 5.2

Le polynôme minimal d'un projecteur sur un sous-espace vectoriel non trivial est $X(X-1)$.
Le polynôme minimal d'une symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel non trivial est $(X-1)(X+1)$.

Exemple 5.3

(i) Si u est un endomorphisme nilpotent d'indice p d'un espace vectoriel de dimension n, alors son polynôme minimal est X^p. Puisque son polynôme caractéristique est X^n et que π_u divise χ_u, on en déduit $p \leq n$.

(ii) Si A est une matrice nilpotente d'indice p de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors son polynôme minimal est X^p. Puisque son polynôme caractéristique est X^n et que π_A divise χ_A, on en déduit $p \leq n$.

Exercice 5.4

Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$. Montrer que $\pi_A = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Proposition 5.5 Spectre et polynôme minimal

(i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{Sp}(A)$ est l'ensemble des racines de π_A.

(ii) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de E de **dimension finie**. Alors $\mathrm{Sp}(u)$ est l'ensemble des racines de π_u.

Proposition 5.6 Polynôme minimal d'un endomorphisme induit

Soient u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel stable par F. Alors $\pi_{u_{|F}}$ divise π_u.

Proposition 5.7 Diagonalisabilité et polynôme minimal

(i) Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Dans ce cas, $\pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$.

(ii) Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Dans ce cas, $\pi_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$.

Proposition 5.8 Trigonalisabilité et polynôme minimal

(i) Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

(ii) Une matrice carrée est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

Proposition 5.9 Dimension de la sous-algèbre engendrée par un endomorphisme ou une matrice carrée

(i) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**. Posons $d = \deg \pi_u$. Alors $\dim \mathbb{K}[u] = d$ et $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $d = \deg \pi_A$. Alors $\dim \mathbb{K}[A] = d$ et $(A^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[A]$.

Sous-espaces caractéristiques

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ dont le polynôme minimal est scindé i.e.

$$\pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\mathrm{X} - \lambda)^{\mu_\lambda}$$

On appelle **sous-espace caractéristique** associé à la valeur propre λ le sous-espace vectoriel

$$\mathrm{N}_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{E})^{\mu_\lambda}$$

Le lemme des noyaux garantit que

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{N}_\lambda(u)$$

Par ailleurs, le polynôme caractéristique de u est alors de la forme

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\mathrm{X} - \lambda)^{m_\lambda}$$

où $\mu_\lambda \leq m_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On peut montrer que

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \mathrm{N}_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{E})^{m_\lambda}$$

Si u est diagonalisable, alors $\mu_\lambda = 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Les sous-espaces caractéristiques sont alors exactement les sous-espaces propres.
Les sous-espaces caractéristiques de u sont stables par u. L'endomorphisme u_λ de $\mathrm{N}_\lambda(u)$ induit par u est alors de la forme $\lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{N}_\lambda(u)} + n_\lambda$ où n_λ est un endomorphisme nilpotent de $\mathrm{N}_\lambda(u)$ (cf. Proposition 5.3).