SUITES NUMÉRIQUES

Suites récurrentes d'ordre deux

EXERCICE 1.☆

Soit $(\phi_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et

$$\forall n \geqslant 0,\ \ \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n.$$

1. Exprimer ϕ_n en fonction de n.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 0$,
$$\phi_{n+1}^2 = \phi_n\phi_{n+2} + (-1)^n.$$
3. Déduire de tout ce qui précède que la suite de terme général
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\phi_k\phi_{k+1}}$$
converge vers une limite ℓ à préciser.

EXERCICE 2.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par $u_0, u_1 > 0$ et $\forall n \geqslant 0$,

$$u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}u_n}{u_{n+1} + u_n}.$$

Exprimer u_n en fonction de n puis étudier la convergence de la suite.

EXERCICE 3.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par $u_0, u_1 > 0$ et $\forall n \geqslant 0$,

$$u_{n+2} = (u_{n+1}u_n^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Exprimer u_n en fonction de n puis étudier la convergence de la suite.

EXERCICE 4.

Pour chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ récurrentes linéaires d'ordre deux suivantes, calculer u_n en fonction de n.

1. $u_0 = -1, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$;
2. $u_0 = 1, u_1 = 9$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$;
3. $v_0 = 0, v_1 = 1$ et $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$;
4. $u_0 = 1, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n$.

EXERCICE 5.

Soit (u_n) la suite définie par ses deux premiers termes $u_0 = 0$ et $u_1 \in]0, 1[$ et par la relation de récurrence $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 6.

Soit (u_n) la suite définie par ses deux premiers termes $u_0, u_1 \in]0, 1[$ et par la relation de récurrence $u_{n+2} = \dfrac{\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}}{2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.
2. On pose $v_n = \min(u_n, u_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est croissante.
3. Montrer que $v_{n+2} \geqslant \sqrt{v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire la convergence et la limite de (u_n).

EXERCICE 7.

Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1 + 4i$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = (3 - 2i)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n$.

EXERCICE 8.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0, u_1 \in \mathbb{R}_+$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1 + u_nu_{n-1}}$$

Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Suites divergentes

EXERCICE 9.☆

Étudier le comportement asymptotique des suites définies respectivement par,

1. $a_n = \left\lfloor \dfrac{n}{5} \right\rfloor - \dfrac{n}{5}$;
2. $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$;
3. $c_n = \cos\left(\dfrac{n^2 - 3n + 1}{n + 2}\pi\right)$.

EXERCICE 10.★★

Soient $n \geqslant 1$ et

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que $(H_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Quelle alternative en déduit-on quant au comportement asymptotique de $(H_n)_{n\geqslant 1}$?

2. Montrer que $\forall n \geqslant 1$,

$$H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

Décrire le comportement de $(H_n)_{n\geqslant 1}$.

EXERCICE 11.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor,\ \ \alpha_n = u_{n^2},$$

$$\beta_n = u_{n^2+3n}.$$

1. Donner une expression simple de α_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la convergence et la limite de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. *Etude de* $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ (n+1)^2 \leqslant n^2 + 3n < (n+2)^2$.

b. En déduire une expression *simple* de β_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Etablir la convergence et calculer la limite de $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

EXERCICE 12.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$. On étudie ici les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = \sin(n\alpha)$ et $v_n = \cos(n\alpha)$.

1. Montrer pour tout n les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \sin(\alpha)v_n + \cos(\alpha)u_n \\ v_{n+1} &= \cos(\alpha)v_n - \sin(\alpha)u_n \end{cases}$$

En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $\dfrac{\ell(1-\cos(\alpha))}{\sin(\alpha)}$, et que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ', alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $\dfrac{\ell'(\cos(\alpha)-1)}{\sin(\alpha)}$.

2. On suppose que les deux suites sont convergentes de limites respectives ℓ et ℓ'. Montrer grâce à la question précédente que $\ell = \ell' = 0$. En calculant par ailleurs $\ell^2 + \ell'^2$, aboutir à une contradiction.
En conclure que les deux suites sont divergentes.

EXERCICE 13.

Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite réelle à termes positifs, on lui associe la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$v_n = \sqrt{u_1 + \sqrt{u_2 + \cdots + \sqrt{u_n}}}.$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

2. Prouver que si la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est constante, alors $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

3. Que peut-on dire de $(v_n)_{n\geqslant 1}$ si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée ?

EXERCICE 14.

On considère une suite réelle (u_n) bornée. On pose $v_n = \sup\limits_{p\geqslant n} u_p$ et $w_n = \inf\limits_{p\geqslant n} u_p$.

1. Déterminer le sens de variation des suites (v_n) et (w_n).

2. En déduire que (v_n) et (w_n) sont convergentes.

3. Montrer que (u_n) converge *si et seulement si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - w_n = 0$.

Lemme de Césaro

EXERCICE 15.★★

C'est une application classique du lemme de Césaro.

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = l.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n} = \ell.$$

2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = \ell.$$

3. Étudier le comportement asymptotique des suites de termes généraux

$$a_n = \binom{2n}{n}^{1/n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

EXERCICE 16.★

Etudier le comportement asymptotique de suites de termes généraux

1. $\alpha_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)^k$;

2. $\beta_n = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^{1/k}\right)^{1/n}$.

EXERCICE 17.

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

Déterminer la limite de u_n ainsi qu'un équivalent.

Suites adjacentes

EXERCICE 18.

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n v_n}\right) \end{cases} \begin{cases} v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(v_n + \sqrt{u_n v_n}\right) \end{cases}$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune $l \in \mathbb{R}$.

2. Soit x et y deux réels tels que $0 < x < y$. Montrer que $\dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{\ln y - \ln x}{y - x} \leqslant \dfrac{1}{x}$.

3. Montrer que la suite de terme général $c_n = \dfrac{v_n - u_n}{\ln v_n - \ln u_n}$ est bien définie puis montrer que la suite (c_n) est constante.

4. En déduire la valeur de l.

EXERCICE 19.★★

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $p + q = 1$ et $p > q$. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \begin{cases} u_{n+1} &= &pu_n &+ &qv_n \\ v_{n+1} &= &pv_n &+ &qu_n \end{cases}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2. Calculer la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 20.★★

Soient $0 < a < b$, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ les suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et $\forall n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Prouver que les suites sont adjacentes. Leur limite commune s'appelle *la moyenne arithmético-géométrique de* a *et* b, on ne cherchera pas à la calculer !

EXERCICE 21.★★

Quelques calculs de moyennes.

1. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que
$$\frac{2}{a+b} \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right].$$

2. Soient $0 < b_0 \leqslant a_0$ et $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(a_n)_{n\geqslant 0}$ les deux suites définies par
$$\forall n \geqslant 0\ ,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left[a_n + b_n\right]$$
et
$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right].$$
Montrer que $\forall n \geqslant 0$,
$$b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n.$$

3. Montrer que $\forall n \geqslant 0$,
$$0 \leqslant a_n - b_n \leqslant \frac{a_0 - b_0}{2^n}.$$

4. En déduire que les deux suites sont adjacentes.

5. Calculer $a_n b_n$ puis en déduire la valeur de la limite commune des deux suites.

Suites définies implicitement

EXERCICE 22.★

Posons pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x \in \mathbb{R}$,
$$P_n(x) = x^n - nx + 1.$$

1. Montrer que P_n possède une unique racine sur l'intervalle $[0, 1]$ que l'on notera u_n.

2. Déterminer le signe de $P_n(u_{n+1})$. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

3. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ que l'on précisera.

4. Déterminer un équivalent de $u_n - \ell$.

EXERCICE 23.★

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction définuie sur $\mathbb{R}$ par
$$x \longmapsto g_n(x) = x^n + x - 1$$
admet un unique zéro positif noté a_n. Etudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 24.★★

Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, l'équation
$$x - n\ln(x) = 0$$
admet deux racines distinctes sur $]0, +\infty[$ notées $u_n < v_n$.

1. Etudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\geqslant 3}$ et $(v_n)_{n\geqslant 3}$

2. Etudier le comportement asymptotique des suites $(u_n)_{n\geqslant 3}$ et $(v_n)_{n\geqslant 3}$.

EXERCICE 25.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0$ admet une unique solution strictement positive notée a_n.

2. Montrer que la suite (a_n) est strictement décroissante.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 26.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution u_n dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

2. Déterminer un équivalent de (u_n).

3. On pose $v_n = u_n - n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite l de (v_n).

4. Déterminer un équivalent de $(v_n - l)$. En déduire un développement asymptotique à 3 termes de (u_n).

EXERCICE 27.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\cos x = nx$ possède une unique solution $x_n \in [0, 1]$.
2. Déterminer la limite de (x_n).
3. Etudier la monotonie de (x_n).
4. Etablir que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
5. Déterminer un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$.

EXERCICE 28.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $x = \ln x + n$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$. On note x_n la plus petite et y_n la plus grande de ces deux solutions.
2.
   a. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

   b. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$.

   c. On pose $u_n = x_n - e^{-n}$ pour $n \geqslant 2$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-2n}$.

   d. Déterminer un équivalent simple de $u_n - e^{-2n}$.
3.
   a. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

   b. Montrer que $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

   c. On pose $v_n = y_n - n$ pour $n \geqslant 2$. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

   d. Déterminer un équivalent simple de $v_n - \ln n$.

Suites déginies par des sommes

EXERCICE 29.★

1. Montrer que $\forall k \geqslant 1$,
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{du}{u} \leqslant \frac{1}{k}.$$
2. En déduire qu'il existe $\gamma \in [0, 1]$ tel que
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \gamma.$$

EXERCICE 30.

On pose, pour tout entier naturel n non nul,
$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$
Etablir à l'aide d'un encadrement que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ln(2)$.

EXERCICE 31.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles convergeant respectivement vers a et b.
Montrer que $\frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} ab$.

EXERCICE 32.

Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \binom{n+p}{n}^{-1}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+p+1)u_{n+1} = (n+1)u_n$.
2. Montrer que $S_n = \frac{1}{p-1}\left(1 - (n+p+1)u_{n+1}\right)$.
3. On pose $v_n = (n+p)u_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que (v_n) converge vers 0.
4. En déduire que (S_n) converge et donner sa limite en fonction de p.

EXERCICE 33.

Etudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

EXERCICE 34.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$$

1. Montrer que $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$.
2. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{p+1} \leqslant \ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \frac{1}{p}$$
3. Déterminer le sens de variation de (u_n).
4. Montrer que (u_n) converge vers un réel $\gamma \in [0,1]$.

EXERCICE 35.★★

Prouver que

$$\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!.$$

EXERCICE 36.★

Déterminer un équivalent de la suite définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}.$$

Suites définies par des produits

EXERCICE 37.★

Calcul d'un produit infini.

1. Montrer que $\forall u \geqslant 0$,
$$u - \frac{u^2}{2} \leqslant \ln(1+u) \leqslant u.$$
2. En déduire que la suite de terme général
$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$
converge vers une limite ℓ à préciser.

EXERCICE 38.★

Pour tout x réel et tout entier naturel n, on pose

$$P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x^{2^k} + 1).$$

1. Simplifier l'expression de $P_n(x)$.
2. Etudier la convergence de la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 39.

Encadrement d'un produit.

1. Prouver que $\forall x \geqslant 1$,
$$\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2} \leqslant \frac{1}{4}.$$
2. Etudier la convergence de la suite de terme général
$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{k(k+1)}{(2k+1)^2}.$$

EXERCICE 40.★

Etudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \left[\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right]^{1/n^3}.$$

EXERCICE 41.

On pose $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Exprimer u_n à l'aide de factorielles.
2. Montrer que (u_n) converge.
3. Soit $v_n = (n+1)u_n^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que (v_n) converge. En déduire la limite de (u_n).

EXERCICE 42.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} (1 + z^{2^k}) = \frac{1}{1-z}$$

EXERCICE 43.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dbinom{2n}{n}$ et $u_n = \dfrac{a_n\sqrt{n}}{4^n}$.

1. Vérifier la relation $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Démontrer par récurrence que $u_n \leqslant \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}$.
4. En déduire l'existence d'un réel $K \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ tel que $\dbinom{2n}{n} \sim K\dfrac{4^n}{\sqrt{n}}$.

Suites récurrentes d'ordre un

EXERCICE 44.

Soit $x > 0$. On définit une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1 = x$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{n+u_n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n > 0$.
2. Soit un entier $n \geqslant 1$. Montrer si $u_n \geqslant 1$, alors $u_{n+1} \leqslant 1$ et que si $u_n \leqslant 1$, alors $u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{n}$.
3. En déduire que pour entier $n \geqslant 3$, $u_n \leqslant \dfrac{2}{n-1}$.
4. En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.
5. Donner un équivalent simple de u_n.
6. On pose $v_n = nu_n - 1$ pour entier $n \geqslant 1$. Exprimer v_{n+1} en fonction de n et v_n.
7. En déduire un équivalent simple de v_n.
8. En déduire un développement asymptotique à deux termes de u_n.

EXERCICE 45.☆

Étudier les suites définies par

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}.$$

EXERCICE 46.☆

Étudier la suite définie par

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8).$$

EXERCICE 47.

Etudier le système dynamique $u_{n+1} = f(u_n)$ défini par la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto e^{x-1}.$$

EXERCICE 48.

Etudier le système dynamique $u_{n+1} = f(u_n)$ défini par la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \arctan(x).$$

EXERCICE 49.

Etudier le système dynamique $u_{n+1} = f(u_n)$ défini par $u_0 \geqslant 0$ et la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \ln(1+x).$$

EXERCICE 50.

Etudier le système dynamique $u_{n+1} = f(u_n)$ défini $u_0 \in \mathbb{R}$ et la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto \text{th}(x).$$

Suites pseudo-récurrentes

EXERCICE 51.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a^{2n}u_n + a^{n^2}.$$

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on pose* $v_n = a^{-n^2+n}u_n$.
   - **a.** Calculer $v_{n+1} - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - **b.** Prouver que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a^k}.$$
   - **c.** En déduire une expression de u_n en fonction de n et a. On discutera suivant les valeurs de a.
2. Déterminer, en discutant suivant les valeurs de a, le comportement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 52.★★

Soient $0 < \alpha < 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $0 < u_0 < u_1$ et $\forall n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = u_n + \alpha^n u_{n-1}.$$

1. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 1$,
$$u_n \leqslant u_1 \prod_{k=0}^{n-1}(1+\alpha^k).$$
3. Justifier que $\forall u \geqslant 0$,
$$\ln(1+u) \leqslant u.$$
En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée , puis qu'elle converge.

EXERCICE 53.★★

Soient $n \geqslant 0$ et
$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}.$$
On définit la suite $(x_n)_{n\geqslant1}$ par $x_1 > 0$ et
$$\forall n \geqslant 1, \quad x_{n+1} = f_n(x_n).$$

1. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant1}$ converge.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 2 \;,\; x_n \leqslant 1/n$.
3. Montrer que $(nx_n)_{n\geqslant1}$ est croissante.
4. Montrer que $\forall n \geqslant 2$,
$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \leqslant 1.$$
5. Trouver un équivalent de x_n.

EXERCICE 54.

On définit une suite (u_n) par $u_1 = 1$ et la relation de récurrence $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant 2$.
2. En déduire que $\left(\dfrac{u_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant1}$ converge et donner sa limite.
3. Déterminer la limite de $(u_n - \sqrt{n})$.

Suites à valeurs complexes

EXERCICE 55.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

1. On note x_n et y_n les parties réelle et imaginaire de z_n.
   - **a.** Déterminer une relation de récurrence liant y_n et y_{n+1}. En déduire la limite de (y_n).
   - **b.** Déterminer le sens de variation de $(|z_n|)$.
   - **c.** Déterminer le sens de variation de (x_n).
   - **d.** En déduire la convergence de (x_n). On ne cherchera pas à calculer la limite de cette suite.
   - **e.** En déduire la convergence de (z_n). Que peut-on dire de sa limite ?
   - **f.** Déterminer la limite de (z_n) si $z_0 \in \mathbb{R}_+$ et si $z_0 \in \mathbb{R}_-$.
2. On note r_n le module et θ_n l'argument principal (i.e. appartenant à $]-\pi,\pi]$) de z_n.
   - **a.** En exprimant z_{n+1} sous forme exponentielle, exprimer d'une part r_{n+1} en fonction de r_n et θ_n et d'autre part θ_{n+1} en fonction de θ_n.
   - **b.** Déterminer la limite de (θ_n).
   - **c.** Soit $\alpha \in]-\pi,0[\cup]0,\pi[$. En remarquant que pour $a \not\equiv 0[\pi]$, $\cos a = \dfrac{\sin 2a}{2\sin a}$, donner une expression simplifiée de $S_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\alpha}{2^k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que (S_n) converge vers $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$.
   - **d.** En déduire la limite de (r_n) puis celle de (z_n) en fonction de r_0 et θ_0.

EXERCICE 56.

On pose $z_n = \exp(i\ln n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que (z_n) diverge.

Suites extraites

EXERCICE 57. ✯

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que les suites

$$(u_{2n})_{n\geqslant 0} \;,\; (u_{2n+1})_{n\geqslant 0} \;\text{ et }\; (u_{3n})_{n\geqslant 0}$$

convergent. Prouver que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

EXERCICE 58.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - [x]$ la partie fractionnaire de x. Montrer que la suite $(\{\sqrt{n}\})$ n'admet pas de limite.

EXERCICE 59.

Soient $(a_n), (b_n), (c_n)$ trois suites réelles telles que $a_n + b_n + c_n$ tend vers 0 et $e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n}$ tend vers 3. Montrer que les suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ convergent.

EXERCICE 60.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels et p et q deux entiers naturels impairs tels que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n^p - v_n^q = 0$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.