

DEVOIR SURVEILLÉ N°10

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

E3A PC 2020

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2}$$

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n \leq 1$.
2. On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

3.
 - a. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$.
 - b. Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.
 - c. On pose, lorsque cela est possible, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$, produit de Cauchy réel des deux séries $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$.
Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n , une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n) .
 - d. En déduire que l'on a pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.
4. Démontrer alors que pour tout $x \in [0, 1[$, $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.
5. En déduire, pour tout $x \in [0, 1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
On utilisera sans le redémontrer que l'on a : $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.
6. Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Problème 1 – D'après E3A MP 2015

Pour tout nombre réel $R > 0$, on note $D(0, R)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R .
Dans tout le problème, on note f la fonction définie sur \mathbb{C} par

$$f(z) = \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

1 Inverse d'une série entière

On considère une série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence R non nul (possiblement infini) et de somme $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On suppose $a_0 = 1$.

On se propose de montrer qu'il existe un réel R' tel que $0 < R' \leq R$ et une série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à R' telle qu'en posant $T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$:

$$\forall z \in D(0, R'), S(z)T(z) = 1$$

Soit ρ un nombre réel tel que $0 < \rho < R$.

- 1 Justifier que la suite $(a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- 2 En déduire qu'il existe un nombre réel $K > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n| \leq \left(\frac{K}{\rho}\right)^n$$

On considère la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$b_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = - \sum_{j=1}^n a_j b_{n-j}$$

- 3 Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \leq \left(\frac{2K}{\rho}\right)^n$$

- 4 En déduire que la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ a un rayon de convergence non nul.

On pose alors $T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

- 5 Soit R' le minimum des rayons de convergence des séries entières $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$. Justifier que ST est développable en série entière sur $D(0, R')$ et expliciter les coefficients de cette série entière.
- 6 Conclure.

2 Rationnalité des nombres de Bernoulli

- 7 Résoudre l'équation $f(z) = 0$ sur \mathbb{C} .
- 8 Justifier qu'il existe une fonction g définie sur le disque $D(0, 2\pi)$ définie par :

$$\forall z \in D(0, 2\pi), g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

9 Justifier que f est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini et préciser les coefficients de cette série entière.

10 Justifier qu'il existe $R > 0$ telle que g soit développable en série entière sur $D(0, R)$.

On notera $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n z^n$ pour $z \in D(0, R)$.

11 Démontrer que la fonction G définie par :

$$\forall t \in]-R, R[, G(t) = t + 2g(t)$$

est une fonction paire. Que peut-on en déduire sur les coefficients γ_n du développement en série entière de g ?

Dans toute la suite de cette partie, on admet que la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n z^n$ admet un rayon de convergence égal à 2π . Ainsi

$$\forall z \in D(0, 2\pi), g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n z^n$$

12 Expliciter $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ et γ_3 . On pourra utiliser un développement limité de g .

13 Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n \frac{\gamma_k}{(n-k+1)!} = 0$$

14 Justifier que, pour tout entier naturel n , γ_n est un nombre rationnel.

3 Expression des nombres de Bernoulli

On note h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(t) = 1 - e^t$.

15 Expliciter un intervalle ouvert I de \mathbb{R} , centré en 0 tel que

$$\forall t \in I, |e^t - 1| < 1$$

16 Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1. On note $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Montrer que $S \circ h$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

17 Démontrer que pour tout $t \in I$, $g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1 - e^t)^k}{k+1}$. On justifiera la convergence de cette série.

18.a Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent de h^k en 0 et en déduire que $(h^k)^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier naturel $n < k$.

18.b De manière plus générale, montrer que pour toute fonction H de classe \mathcal{C}^∞ sur I et tous entiers naturels n, k tels que $k > n$, $(Hh^k)^{(n)}(0) = 0$.

18.c En déduire que

$$g^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n \frac{(h^k)^{(n)}(0)}{k+1}$$

On pourra décomposer $g(t)$ pour $t \in I$ sous la forme

$$g(t) = \sum_{k=0}^n \frac{h(t)^k}{k+1} + h(t)^{n+1} H(t)$$

avec H une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

19 **19.a** Démontrer que pour tous entiers naturels n et k

$$(h^k)^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^n$$

19.b Quelle expression de γ_n peut-on en déduire pour tout entier naturel n ?