

DEVOIR SURVEILLÉ N°02 : CORRIGÉ

SOLUTION 1.

1. On utilise une formule de factorisation.

$$s = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2 \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{4\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Or

$$\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

et on a donc bien $s = 2p$.

2. En utilisant la formule de duplication du sinus,

$$p \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4} \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$$

Or

$$\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Ainsi

$$p \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4} \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Or $\frac{2\pi}{5}$ n'est pas un multiple entier de π donc $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \neq 0$, ce qui permet d'affirmer que $p = -\frac{1}{4}$ et donc $s = -\frac{1}{2}$.

3. Puisque $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ ont pour somme $s = -\frac{1}{2}$ et pour produit $p = -\frac{1}{4}$, ils sont racines du trinôme $X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$. Ces racines sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Comme $\frac{2\pi}{5} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ et donc

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

REMARQUE. On aurait aussi pu remarquer que

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(2 \times \frac{2\pi}{5}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$$

Ainsi

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = s = -\frac{1}{2}$$

ou encore

$$2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \frac{1}{2} = 0$$

Ainsi $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine du trinôme $2X^2 + X - \frac{1}{2}$. Ces racines sont à nouveau $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Comme précédemment, on invoque que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ pour en déduire que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Puis

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = s - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

■

SOLUTION 2.

On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}) &\iff \begin{cases} x + y + az = 1 \\ (a-1)y + (1-a)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (1-a)y + (1-a^2)z = 1-a & L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + y + az = 1 \\ (a-1)y + (1-a)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (2-a-a^2)z = 1-a & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + y + az = 1 \\ (a-1)y + (1-a)z = 0 \\ (2+a)(1-a)z = 1-a \end{cases}
 \end{aligned}$$

► Si $a = 1$, alors

$$(\mathcal{S}) \iff x + y + z = 1$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\{(1-y-z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$.

► Si $a = -2$, alors

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est vide.

► Si $a \neq -2$ et $a \neq 1$, alors

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}) &\iff \begin{cases} x + y + az = 1 \\ y - z = 0 \\ (2+a)z = 1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2+a} \\ y = \frac{1}{2+a} \\ z = \frac{1}{2+a} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\{(\frac{1}{2+a}, \frac{1}{2+a}, \frac{1}{2+a})\}$.

SOLUTION 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n!^2} = \frac{2(n+1)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n!^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$HR(n) : \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{n^{\frac{1}{3}}}$$

Tout d'abord, $\frac{4^1}{2\sqrt{1}} = 2$, $\binom{2}{1} = 2$ et $\frac{4^1}{1^{\frac{1}{3}}} = 4$ donc $HR(1)$ est vraie.

Supposons $HR(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors d'après la question 1,

$$\frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n+2}{n+1} \leq \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{n^{\frac{1}{3}}}$$

Il reste donc à montrer d'une part que $\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$ et d'autre part que $\frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{n^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{4^{n+1}}{(n+1)^{\frac{1}{3}}}$.
On procède par récurrence dans les deux cas.

$$\begin{aligned} & \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow & 2(n+1)\sqrt{n} \leq (2n+1)\sqrt{n+1} \\ \Leftrightarrow & 4(n+1)^2 n \leq (2n+1)^2 (n+1) \\ \Leftrightarrow & 4(n+1)n \leq (2n+1)^2 \\ \Leftrightarrow & 4n^2 + 4n \leq 4n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie, la première l'est également.

$$\begin{aligned} & \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{n^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{4^{n+1}}{(n+1)^{\frac{1}{3}}} \\ \Leftrightarrow & (2n+1)(n+1)^{\frac{1}{3}} \leq 2(n+1)n^{\frac{1}{3}} \\ \Leftrightarrow & (2n+1)^3(n+1) \leq 8(n+1)^3 n \\ \Leftrightarrow & (2n+1)^3 \leq 8(n+1)^2 n \\ \Leftrightarrow & 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 \leq 8n^3 + 16n^2 + 8n \\ \Leftrightarrow & 0 \leq 4n^2 + 2n - 1 \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie puisque $n \geq 1$ donc la première l'est également. Finalement, $\text{HR}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, $\text{HR}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

SOLUTION 4.

- On trouve $S_0 = \binom{0}{0} = 1$, $S_1 = \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 3$ et $S_2 = \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \binom{2}{0} + \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 7$.
- D'après la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

La suite (2^n) étant géométrique,

$$\sum_{k=0}^n 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

- On procède comme indiqué dans l'énoncé. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \binom{j}{i}$$

D'après la question précédente,

$$S_n = \sum_{j=0}^n 2^j = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

SOLUTION 5.

- a. On a d'une part

$$\binom{n}{k} \binom{k}{l} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{l!(k-l)!} = \frac{n!}{(n-k)!l!(k-l)!}$$

et d'autre part

$$\binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l} = \frac{n!}{l!(n-l)!} \frac{(n-l)!}{(k-l)!(n-k)!} = \frac{n!}{l!(k-l)!(n-k)!}$$

On en déduit bien l'égalité demandée.

b.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=l}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{l} &= \sum_{k=l}^n (-1)^k \binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l} && \text{d'après la question précédente} \\
&= \binom{n}{l} \sum_{k=l}^n (-1)^k \binom{n-l}{k-l} \\
&= \binom{n}{l} \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^{j+l} \binom{n-l}{j} && \text{en effectuant le changement d'indice } j = k - l \\
&= (-1)^l \binom{n}{l} \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^j \binom{n-l}{j} \\
&= (-1)^l \binom{n}{l} (1-1)^{n-l} && \text{d'après la formule du binôme} \\
&= 0 && \text{car } n-l > 0
\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} b_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} a_l \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{l} a_l \\
&= \sum_{0 \leq l \leq k \leq n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{l} a_l \\
&= \sum_{l=0}^n \sum_{k=l}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{l} a_l \\
&= \sum_{l=0}^n a_l \sum_{k=l}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{l}
\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $\sum_{k=l}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{l} = 0$ quand $l < n$. On en déduit que

$$(-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} b_k = (-1)^n a_n \sum_{k=n}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{n} = (-1)^n a_n (-1)^n \binom{n}{n} \binom{n}{n} = a_n$$

SOLUTION 6.**1. Première méthode :**

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$. On sait que pour tout $k \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$. Cette relation est encore vraie pour $k = p$ si l'on convient que $\binom{p}{p+1} = 0$. On obtient donc par télescopage

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Seconde méthode :

On fixe $p \in \mathbb{N}$ et on montre par récurrence la relation pour tout entier $n \geq p$. Notons donc

$$\text{HR}(n): \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

HR(p) est vraie puisque

$$\sum_{k=p}^p \binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{p+1}{p+1} = 1$$

Supposons $HR(n)$ vraie pour un certain entier $n \geq p$. Alors

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p}$$

Ainsi $HR(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, $HR(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq p$.

2. On trouve évidemment

$$\binom{k}{1} = k \qquad \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} \qquad \binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

A noter que ces expressions sont également valables lorsque $k \in \{0, 1, 2\}$ puisque, par convention, $\binom{k}{p} = 0$ lorsque $p > k$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} 6\binom{k}{3} + 6\binom{k}{2} + \binom{k}{1} &= k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k \\ &= k(k-1)[(k-2)+3] + k \\ &= k(k-1)(k+1) + k \\ &= k[(k^2-1)+1] \\ &= k^3 \end{aligned}$$

REMARQUE. On aurait pu déterminer les coefficients des coefficients binomiaux sans l'aide de l'énoncé. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$a\binom{k}{3} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{1} = \frac{a}{6}k^3 + \left(-\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)k^2 + \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c\right)k$$

Il suffit donc de choisir a, b et c tels que

$$\begin{cases} \frac{a}{6} = 1 \\ -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 0 \\ \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c = 0 \end{cases}$$

On trouve alors $a = 6, b = 6$ et $c = 1$. ■

4.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^3 &= 6 \sum_{k=1}^n \binom{k}{3} + 6 \sum_{k=1}^n \binom{k}{2} + \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} \\ &= 6 \sum_{k=3}^n \binom{k}{3} + 6 \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} + \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} \\ &= 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} + (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{4} [(n-1)(n-2) + 4(n-1) + 2] \\ &= \frac{n(n+1)}{4} (n^2 + n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$