Devoir surveillé n°13

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 ★★ **E3A MP 2019 Maths I**

On se propose de déterminer toutes les fonctions f solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant :

(i) f est continue sur $\mathbb{R}$

(ii) $(\mathrm{E}_1) : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - \displaystyle\int_0^x (t+x)f(x-t)\ \mathrm{d}t.$

Pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t.$

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

a. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que si f vérifie (E_1), alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que f est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si elle est solution du problème $(\mathcal{P}_1)$ suivant :

(i) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + xf(x) + 2\displaystyle\int_0^x f(u)\ \mathrm{d}u = 0$;

(iii) $f(0) = 1$.

3. En déduire que f est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si F est solution du problème $(\mathcal{P}_2)$ suivant :

(i) F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}''(x) + x\mathrm{F}'(x) + 2\mathrm{F}(x) = 0$;

(iii) $\mathrm{F}'(0) = 1$.

4. On suppose qu'il existe une fonction H développable en série entière sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{H}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, vérifiant :

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{H}''(x) + x\mathrm{H}'(x) + 2\mathrm{H}(x) = 0$

(ii) $\mathrm{H}'(0) = 1$;

(iii) $\mathrm{H}(0) = 0$.

a. Prouver que l'on a : $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -\dfrac{a_n}{n+1}$.

b. En déduire une expression de $\mathrm{H}(x)$ pour tout x réel à l'aide de fonctions usuelles.

5. Déterminer alors l'ensemble des solutions du problème $(\mathcal{P})$.

Exercice 2 ★★ **E3A PSI 2020**

Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $\mathrm{J} = [1, +\infty[$, la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$$

1. Déterminer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur J.
On note alors $\varphi(x)$ sa somme pour tout x de J.

2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J.

3. Etudier alors sa convergence uniforme sur J.

4. Déterminer $\ell = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

a. Justifier la convergence de la série $\sum u_n$. On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

b. Montrer que l'on a au voisinage de l'infini :

$$\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Exercice 3 ★★ **E3A PSI 2020**

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel λ, on pose $\mathrm{I}(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, lorsque cela existe.

1. Justifier qu'il existe au plus réel λ tel que $\mathrm{I}(\lambda)$ converge.

2. Pour tout réel x, on pose $\mathrm{H}_\lambda(x) = \displaystyle\int_a^x (\lambda - f(t))\,\mathrm{d}t$.

Démontrer que, si H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $\mathrm{I}(\lambda)$ existe et $\mathrm{I}(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

3. On suppose désormais que f est continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique.

a. Montrer que pour tout réel x :

$$\mathrm{H}_\lambda(x+\mathrm{T}) - \mathrm{H}_\lambda(x) = \lambda\mathrm{T} - \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

b. Montrer qu'il existe une unique valeur λ_0 du réel λ pour la quelle la suite $(\mathrm{H}_\lambda(a+n\mathrm{T}))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

c. Prouver que, dans ce cas, la fonction H_λ est périodique et bornée sur $\mathbb{R}$.

d. Déterminer alors toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles $\mathrm{I}(\lambda)$ converge.

e. Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$\mathrm{A}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(nt)|}{t}\,\mathrm{d}t$$

a. Justifier que A_n et B_n sont bien définies.

b. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$.

c. Démontrer que la suite $(\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

d. A l'aide d'un changement de variable et de la question **3**, déterminer un équivalent de B_n lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de A_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4 ★★ **E3A MP 2015**

Des bits d'information, c'est-à-dire des 1 ou 0, sont transmis par l'intermédiaire d'un canal. Ce canal n'est pas complètement fiable. On observe qu'un bit envoyé, un 1 ou un 0, peut être altéré en sortie, c'est-à-dire qu'un 1 (respectivement 0) en entrée du canal peut devenir un 0 (respectivement un 1) en sortie.

On note b le bit envoyé et b' le bit en sortie ($b \in \{0,1\}$ et $b' \in \{0,1\}$).

$$b \longrightarrow \boxed{\text{canal bruité}} \longrightarrow b'$$

Après observation, on modélise la transmission d'un bit de façon probabiliste :

- Le bit envoyé définit une variable aléatoire b : on note α la probabilité qu'un 1 soit envoyé (c'est-à-dire $\alpha = \mathbb{P}(b=1)$) et donc $1-\alpha$ la probabilité qu'un 0 soit envoyé.
- La perturbation dans le canal est aussi modélisée de façon probabiliste :
  - On désigne par p la probabilité qu'un 1 en entrée ne soit pas altéré pendant la transmission (c'est-à-dire $p = \mathbb{P}(b'=1 \mid b=1)$) et donc $1-p$ désigne la probabilité qu'un 1 en entrée devienne un 0 en sortie.
  - On désigne par q la probabilité qu'un 0 en entrée ne soit pas altéré pendant la transmission, et donc $1-q$ désigne la probabilité qu'un 0 en entrée devienne un 1 en sortie.

1. On a écrit ci-dessus $p = \mathbb{P}(b'=1 \mid b=1)$. Exprimer de la même manière $1-p$, q et $1-q$ en termes de probabilités conditionnelles.

2. Un bit est envoyé. Quelle est la probabilité de recevoir un 1 en sortie ?

3. On reçoit le bit 1. Quelle est alors la probabilité qu'un 1 ait été envoyé en entrée ?

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On décide d'envoyer n fois le même bit b. On note $b'_1, \dots, b'_n$ les n bits obtenus en sortie et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 1 en sortie. On remarque les valeurs possiblement prises par X sont 0, 1, …, n.

$$b \longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \boxed{\text{canal bruité}} & \longrightarrow & b'_1 \\ \boxed{\text{canal bruité}} & \longrightarrow & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{\text{canal bruité}} & \longrightarrow & b'_n \end{array}\right.$$

4. Soit k un entier entre 0 et n. Exprimer $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction des paramètres p, q et α.

5. En déduire l'espérance de X en fonction des paramètres p, q et α.

6. Soit k un entier entre 0 et n. Exprimer la probabilité que le bit 1 ait été envoyé sachant que le nombre de 1 en sortie vaut k.

Le canal est désormais supposé symétrique, c'est-à-dire que chaque bit, que ce soit un 0 ou un 1, peut-être altéré avec la même probabilité $1 - p$. On suppose $\frac{1}{2} < p < 1$.

7. **a.** Déterminer en fonction des paramètres p et α, l'ensemble des valeurs k prises par X pour lesquelles il est plus probable (au sens strict) qu'un 1 ait été envoyé plutôt qu'un 0.

b. Que devient ce résultat lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$?

8. On suppose $\alpha = \frac{1}{2}$. On note $f(n)$ la probabilité que l'interprétation de l'observation en sortie soit fausse, c'est-à-dire que le bit en entrée n'est pas celui le plus probable en sortie.

a. Donner une expression de $f(n)$ en fonction de n et p.

b. Ecrire une fonction `binome` en langage Python qui prend en entrée un entier naturel N et un entier naturel k compris entre 0 et N et retourne la valeur du coefficient binomial $\binom{N}{k}$.

c. On suppose $p = 0,95$. Ecrire une programme en langage Python qui prend en entrée l'entier naturel n et donne une estimation de $f(n)$.