Applications linéaires

Exercice 1.

Reconnaître les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dans la liste suivante,

1. $f_1 : (x, y, z) \longmapsto (x, xy, x - z)$;
2. $f_2 : (x, y, z) \longmapsto (x + y, 2x + 5z, 0)$;
3. $f_3 : (x, y, z) \longmapsto (x - 3y, x + y, z + 2)$.

Exercice 2.

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. $\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E, \quad u \longmapsto u$, où E est un $\mathbb{K}$-ev.
2. $F : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}), \quad f \longmapsto \exp \circ f$.
3. $G : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}), \quad f \longmapsto f \times \cos$.
4. $H : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}), \quad f \longmapsto f'' - f$.
5. $j : F \longrightarrow E, u \mapsto u$, où F est un sev d'un $\mathbb{K}$-ev E.
6. $T : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \longmapsto (u_0, \dots, u_n)$.
7. $S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \longmapsto (u_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$.

Exercice 3.

Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis par

$$g : (x, y) \longmapsto (y, x) \quad \text{et} \quad f : (x, y) \longmapsto (x + y, 2x).$$

1. Montrer que f et g sont des isomorphismes de $\mathbb{R}^2$. Déterminer f^{-1} et g^{-1}.
2. On note $h = f \circ g - g \circ f$. Justifier que $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
3. A-t-on $f \circ g = g \circ f$? h est-elle injective ?
4. L'application h est-elle surjective ?

Exercice 4.✯

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, u et v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que

$$u \circ v - v \circ u = u.$$

Etablir que, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$:

$$u^k \circ v - v \circ u^k = k u^k.$$

Exercice 5.

Soit f, un endomorphisme de E. Pour tout entier $k \geqslant 2$, on note

$$f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que f^n soit l'application identiquement nulle.

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(I - f)$. Démontrer que $f^k(x) = x$ pour tout entier $k \geqslant 1$. En déduire que $I - f$ est injectif.
2. Simplifier les expressions
$$(I - f) \circ (I + f + f^2 + \dots + f^{n-1})$$
$$\text{et} \quad (I + f + f^2 + \dots + f^{n-1}) \circ (I - f)$$
en utilisant les règles de calcul dans $L(E)$ et en déduire que $I - f$ est un automorphisme.
3. Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, l'endomorphisme $I - f^k$ est inversible. On précisera l'expression de son inverse.

Exercice 6.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$(x, y, z) \longmapsto (2x - y, -x + y, x - z).$$

Prouver que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et expliciter son isomorphisme réciproque f^{-1}.

Exercice 7.✯

Soient f_k les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall k \in \{0, 1, 2\}, \quad f_k : x \longmapsto x^k e^{2x}.$$

On note E le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par ces trois vecteurs.

1. Quelles est la dimension de E ? En donner une base.
2. On note D l'opérateur de dérivation défini par
$$D : f \in E \longmapsto f'.$$
Prouver que $D \in \mathcal{L}(E)$.
3. Montrer que $D \in GL(E)$.

APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 8.

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Pour $\sigma \in S_n$, on pose :

$$f_\sigma : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \end{array}$$

On munit $\mathbb{K}^n$ de la structure d'algèbre pour les opérations composante par composante.

1. Montrer que f_σ est un automorphisme d'algèbre.
2. Soit ϕ un automorphisme d'algèbre de $\mathbb{K}^n$. Montrer qu'il existe $\sigma \in S_n$ tel que $\phi = f_\sigma$.
3. Trouver les sous-espaces de $\mathbb{K}^n$ stables par tous les endomorphismes f_σ avec $\sigma \in S_n$.

Exercice 9.

Soit Φ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$(x, y, z) \longmapsto (x + z, y - z, x + y + z, x - y - z).$$

1. Montrer que Φ est linéaire.
2. Φ est-elle injective ?
3. Etudier la surjectivité de Φ. Donner une base de $\mathrm{Im}(\Phi)$.

Exercice 10.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f_α l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$(x, y, z, t) \longmapsto (x + y + \alpha z + t, x + z + t, y + z).$$

Déterminer en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ des bases des espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f_\alpha)$ et $\mathrm{Im}(f_\alpha)$.

Exercice 11.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f((x, y, z)) = (x, 0, y).$$

On note $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant 3}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer des bases de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
2. On note $E = \left\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \ , \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels $f(E)$ et $f^{-1}(E)$.

Exercice 12.✯

Soient E l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et ψ l'application de E dans E qui à f associe l'application g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \geqslant 0, \quad g(x) = \int_0^x 2tf(t)dt.$$

1. Justifier que E est un espace vectoriel réel pour les opérations usuelles sur les fonctions.
2. Quelle est la dimension de E ?
3. Montrer que ψ est un endomorphisme de E.
4. Etudier l'injectivité puis la surjectivité de ψ. Formuler en termes de contre-exemple les résultats précédents.
5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\psi - \lambda \mathrm{id}_E)$.

Exercice 13.

On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On définit l'application u par

$$u : z \longmapsto iz - i\bar{z}.$$

1. Prouver que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
3. Calculer u^2.
4. En déduire que l'endomorphisme $\mathrm{id}_\mathbb{C} + 2u$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 14.

On pose définit l'application suivante

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (x \mapsto \int_0^x P(t)dt) \end{array}.$$

Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer son noyau et son image. f est-il inversible à gauche ? à droite ?

Exercice 15.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et X^2+aX+b un polynôme à coefficients complexes.

1. On note r_1 et r_2 les deux racines (éventuellement confondues) de X^2+aX+b. Montrer que
$$u^2 + au + b\,\mathrm{Id}_E = (u - r_1\,\mathrm{Id}_E) \circ (u - r_2\,\mathrm{Id}_E) = (u - r_2\,\mathrm{Id}_E) \circ (u - r_1\,\mathrm{Id}_E)$$
2. On pose $F = \mathrm{Ker}(u^2 + au + b\,\mathrm{Id}_E)$, $F_1 = \mathrm{Ker}(u - r_1\,\mathrm{Id}_E)$ et $F_2 = \mathrm{Ker}(u - r_2\,\mathrm{Id}_E)$. Montrer que $F_1 \subset F$ et $F_2 \subset F$.
3. A partir de maintenant, on supose que les deux racines r_1 et r_2 sont *distinctes*. Montrer que $F = F_1 \oplus F_2$.
4. **Application :** Dans cette question, on suppose que E est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que u est l'endomorphisme de E qui à f associe f'. On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}) \quad y'' + ay' + by = 0$ dont on cherche les solutions à valeurs complexes.
   - **a.** Montrer que toute solution de $(\mathcal{E})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   - **b.** Montrer que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est F.
   - **c.** Déterminer F_1 et F_2.
   - **d.** En déduire le résultat du cours déjà connu : les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ du type $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ avec λ et μ décrivant $\mathbb{C}$.

Exercice 16.

Pour $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $x \in [0,1]$, on pose $\Phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)f(t)\,dt$.

1. Prouver que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
2. En utilisant la relation de Chasles, trouver une autre expression de $\Phi(f)(x)$. En déduire que $\Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et exprimer $\Phi(f)''$ en fonction de f.
3. En déduire $\mathrm{Ker}\,\Phi$ et $\mathrm{Im}\,\Phi$.

Exercice 17.

On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (\sin, \cos, \mathrm{sh}, \mathrm{ch})$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F.
2. On note D l'opérateur de dérivation. Montrer que F est stable par D. On notera d l'endomorphisme de F induit par D.
3. On note M la matrice de d dans la base $\mathcal{B}$. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que d est un automorphisme de F. Écrire la matrice de d^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
5. On note $f = d - \mathrm{Id}$. Déterminer l'image et le noyau de f.
6. On note $g = d + \mathrm{Id}$. Déterminer l'image et le noyau de $g \circ f$.

Exercice 18.

Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires définies par :

1. $f(x,y,z) = (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z)$;
2. $f(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$;
3. $f(x,y,z) = (x+y+z, 2x-y-z, x+2y+2z)$;
4. $f(x,y,z) = (x+2y-z, x+2y-z, 2x+4y-2z)$.

Exercice 19.

Soient
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \mapsto (x,y,0),$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y) \mapsto (x-y, x+y, x+2y)$$
et
$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto x - 3y + 2z.$$

1. Montrer que f, g et h sont linéaires.
2. Déterminer noyau et image dans chaque cas.

Exercice 20.

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$. Etablir que
$$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g) = E \iff \mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g).$$

Exercice 21.★

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev, $f \in L(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g.$$

Etablir que

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g) \quad \text{et} \quad F = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(f).$$

Exercice 22.

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires. Que pensez vous des propositions suivantes ?

1. $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$;
2. $\text{Ker}(g \circ f) \subset \text{Ker}(f)$;
3. $\text{Ker}(g \circ f) \subset \text{Ker}(f)$;
4. $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ *si et seulement si* $g \circ f = 0$.

Exercice 23.★★

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et f appartenant à $\mathcal{L}(E)$. Montrer l' équivalence suivante

$$\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f) \quad \textit{si et seulement si} \quad \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}.$$

Exercice 24.

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = \text{id}_E$.

1. Etablir que f est surjective et g injective.
2. Montrer que $p = g \circ f$ est un projecteur de E.
3. Etablir que $\text{Im}(p) = \text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(f)$.
4. Montrer que
$$\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g) = E.$$

Exercice 25.

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = f(\text{Ker}(f \circ f)).$$

Exercice 26.

Soit u un endomorphisme de E, pour tout entier naturel p, on notera $I_p = \text{Im}\, u^p$ et $K_p = \text{Ker}\, u^p$.

1. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.
2. On suppose que E est de dimension finie et u injectif. Déterminer I_p et K_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
3. On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.
   a. Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leqslant n$ tel que : $K_r = K_{r+1}$.
   b. Montrer qu'alors : $I_r = I_{r+1}$ et que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad K_r = K_{r+p}$ et $I_r = I_{r+p}$.
   c. Montrer que : $E = K_r \oplus I_r$.
4. Lorsque E n'est pas de dimension finie, existe-t-il un plus petit entier naturel r tel que $K_r = K_{r+1}$?

Exercice 27.

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
2. Montrer que si g est surjective et $E = \text{Im}\, f + \text{Ker}\, g$, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Formuler des énoncés similaires pour l'injectivité.

Exercice 28.

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E qui commutent.

1. Montrer que $\text{Im}\, u$ et $\text{Ker}\, u$ sont stables par v.
2. On suppose que $E = \text{Ker}\, u \oplus \text{Ker}\, v$. Montrer que $\text{Im}\, u \subset \text{Ker}\, v$ et que $\text{Im}\, v \subset \text{Ker}\, u$.
3. Montrer que les inclusions précédentes sont des égalités si E est de dimension finie.

Exercice 29.

Soient E et F deux espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, G et H deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $f(G + H) = f(G) + f(H)$.
2. Montrer que si G et H sont en somme directe et que f est injective, alors $f(G \oplus H) = f(G) \oplus f(H)$.

EXERCICE 30.

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$$

EXERCICE 31.

Soient E un espace vectoriel et f, g deux projecteurs de E.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$ *si et seulement si* $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.

EXERCICE 32.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$;

(ii) $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$;

(iii) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$;

(iv) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

EXERCICE 33.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

(i) il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$;

(ii) $\dim E$ est paire.

EXERCICE 34.

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g \circ f$.

2. Montrer que $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$.

3. Montrer que $g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

EXERCICE 35.★

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie et f un endomorphisme de E. On souhaite prouver l'équivalence des deux propriétés suivantes :

$(*)$ Il existe un projecteur p de E tel que $f = p \circ f - f \circ p$

$(**)$ $f^2 = 0$

1. Supposons $(*)$ vérifiée. Prouver que $p \circ f \circ p = 0$, puis que $f = p \circ f$. En déduire que $(**)$ est vérifiée.

2. Supposons $(**)$ vérifiée. Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E et p le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f)$ parallèlement à S. Prouver la propriété $(*)$.

EXERCICE 36.★★

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n. Un endomorphisme u de E est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$.

1. Donner des exemples d'endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^2$ puis de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer qu'un endomorphisme nilpotent n'est jamais un isomorphisme.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \exists p_x \in \mathbb{N}, \quad u^{p_x}(x) = 0.$$

Montrer que u est nilpotent.

4. Montrer que si u est un endomorphisme nilpotent alors $\mathrm{id}_E - u \in GL(E)$.

EXERCICE 37.★

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension 3 et f appartenant à $\mathcal{L}(E)$.

1. On suppose dans cette question que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Calculer le rang de f.

2. On suppose dans cette question que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Calculer le rang de f.

EXERCICE 38.★★

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et u un endomorphisme de E.

1. On suppose dans cette question l'existence d'un *projecteur* p de E tel que
$$u = p \circ u - u \circ p.$$
   a. Démontrer que $p \circ u \circ p = 0$. On précisera de quel 0 il s'agit.
   b. Prouver que $u \circ p = 0$.
   c. En déduire que $u^2 = 0$.
2. On suppose dans cette question que $u^2 = 0$.
   a. Démontrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
   b. Soient H et S deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E tels que
$$\mathrm{Im}(u) \subset H \subset \mathrm{Ker}(u).$$
   En notant q la projection sur H parallèlement à S , reconnaître l'application linéaire $q \circ u - u \circ q$.
3. Donner une condition *nécessaire et suffisante* pour qu'il existe un projecteur p de E tel que
$$u = p \circ u - u \circ p.$$

EXERCICE 39.★

Soient E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

1. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
2. $f^2 = 0, \quad n = 2\,\mathrm{rg}(f)$.

EXERCICE 40.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E nilpotent d'indice n. On pose

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ g & \longmapsto & f \circ g - g \circ f \end{array}$$

1. Montrer que $\Phi^p(g) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f^{p-k} \circ g \circ f^k$. En déduire que Φ est nilpotent.
2. Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $b \in \mathcal{L}(E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$. En déduire l'indice de nilpotence de Φ.

EXERCICE 41.

On note $E = \mathbb{R}^4$,
$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid z = y + t = 0\}$$
et $G = \{(x, y, z, t) \mid x = y + z = 0\}$.

1. Prouver que F et G sont des plans vectoriels de E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
3. Donner les expressions analytiques de p et s, respectivement projecteur sur F parallèlement à G et symétrie par rapport à F parallèlement à G.

EXERCICE 42.★

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions affines et on pose
$$\mathcal{N} = \left\{ f \in E \;\middle|\; f(0) = f(1) = 0 \right\}.$$

1. Montrer que les sous-espaces vectoriel $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}$ sont supplémentaires dans E.
2. Expliciter le projecteur sur $\mathcal{A}$ parallèlement à $\mathcal{N}$.
3. Expliciter la symétrie par rapport à $\mathcal{A}$ parallèlement à $\mathcal{N}$.

EXERCICE 43.★

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, p et q deux projecteurs de E.

1. Prouver que
$$p \circ q + q \circ p = 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad p \circ q = q \circ p = 0.$$
2. Montrer que $p + q$ est un projecteur *si et seulement si*
$$p \circ q = q \circ p = 0.$$
3. On suppose que $p + q$ est un projecteur de E. Montrer que
$$\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$$
   et
$$\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q).$$

EXERCICE 44.★

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$.

1. Prouver que $\psi = p \circ q$ est un projecteur de E.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.
3. Etablir que $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.

EXERCICE 45.★★

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et A une partie finie de $\mathrm{GL}(E)$ stable par composition. On pose $p = \dfrac{1}{|A|}\sum_{f \in A} f$. Montrer que p est un projecteur.

EXERCICE 46.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Id} + \lambda p$ est-il un automorphisme ?

EXERCICE 47.

Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E qui commutent.

1. Montrer que $p + q - p \circ q$ et $p \circ q$ sont des projecteurs.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, q$ et que $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(p + q - p \circ q) = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$ et que $\mathrm{Im}(p + q - p \circ q) = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$.

EXERCICE 48.

Soient H_1 et H_2 deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (f, g) \in H_1 \times H_2,\ f \circ g + g \circ f = 0$$

1. Justifier qu'il existe $(p_1, p_2) \in H_1 \times H_2$ tel que $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}$.
2. Montrer que p_1 et p_2 sont des projecteurs.
3. Montrer que $\dim H_1 \leqslant (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2$ et $\dim H_2 \leqslant (n - \mathrm{rg}\, p_1)^2$.
4. Quel est le nombre de choix possibles pour le couple (H_1, H_2) ?

EXERCICE 49.★

Soient E et F deux espaces vectoriels, f et g deux applications linéaires de rang fini de E dans F.

1. Montrer que
$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f + g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$
2. Prouver que $\mathrm{rg}(f + g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$ *si et seulement si*
$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = E.$$

EXERCICE 50.

Soient E un espace vectoriel réel de dimension n , f et g deux endomorphismes tels que

$$f + g = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant n.$$

1. Montrer que
$$E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Im}(g).$$
2. Après avoir justifié l'égalité $f \circ g = g \circ f$, prouver que f et g sont des projecteurs de E.

EXERCICE 51.

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E.

1. Etablir que
$$\dim(\mathrm{Ker}(f \circ g)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g)).$$
2. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité *si et seulement si* $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

EXERCICE 52.

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer le rang de l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ $\Phi : f \mapsto v \circ f \circ u$.

EXERCICE 53.

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $h \in \mathcal{L}(G, H)$ où E, F, G, H sont des espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que

$$\mathrm{rg}(g \circ f) + \mathrm{rg}(h \circ g) \leqslant \mathrm{rg}(h \circ g \circ f) + \mathrm{rg}(g)$$

Exercice 54.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E dont l'image est une droite vectorielle $\text{vect}(u)$ avec $u \neq 0_E$. On pose alors :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \varphi(x)u$$

Montrer que φ est une forme linéaire sur E et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

Exercice 55.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, avec $n \geqslant 2$. On rappelle que E^* est l'ensemble des formes linéaires sur E.

1. Soient φ et ψ deux éléments non nuls de E^* tels que $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$. Montrer qu'il existe un réel non nul λ tel que $\psi = \lambda\varphi$.
2. Soit H un hyperplan de E. Montrer que l'ensemble $D(H)$ des éléments de E^* dont le noyau contient H est un sous-espace vectoriel de E^* dont on précisera la dimension.
3. On appelle *transvection* de E tout endomorphisme f de E possédant les deux propriétés suivantes :
   - $\text{Ker}(f - \text{Id})$ est un hyperplan de E ;
   - $\text{Im}(f - \text{Id}) \subset \text{Ker}(f - \text{Id})$.

   On appelle $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ la base de f et $\text{Im}(f - \text{Id}_E)$ la direction de f.

   a. Soit φ un élément non nul de E^* et u un vecteur non nul de $\text{Ker}(\varphi)$. Pour tout vecteur x de E, on pose $f(x) = x + \varphi(x)u$. Justifier l'existence de u et montrer que f est une transvection dont on précisera la base et la direction.

   b. Réciproquement, soit f une transvection de E. Montrer qu'il existe un élément non nul φ de E^* et un vecteur u non nul de $\text{Ker}(\varphi)$ tels que $f(x) = x + \varphi(x)u$ pour tout $x \in E$.

Exercice 56.

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E. On suppose qu'il existe $x \in E$ non nul tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \varphi_i(x) = 0$$

Montrer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée.

Exercice 57.

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ des formes linéaires sur E ($m \leqslant n$). Montrer que

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} \text{Ker}\,\varphi_i\right) + \text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = n$$

Exercice 58.★

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, f et g deux formes linéaires sur E non nulles.

1. Prouver que
$$\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$$
si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $g = \lambda f$.
2. En déduire une *condition nécessaire et suffisante* pour que f et g définissent le même hyperplan H. En déduire toutes les équations de H.

Exercice 59.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 - 3u + 2\,\text{Id}_E = 0$.

1. Montrer que $u \in GL(E)$ et exprimer u^{-1} en fonction de u.
2. On pose $f = u - \text{Id}_E$ et $g = 2\,\text{Id}_E - u$. Montrer que $f \circ g = g \circ f = 0$.
3. Vérifier que f et g sont des projecteurs.
4. Montrer que $\text{Im}\, f = \text{Ker}\, g$ et $\text{Im}\, g = \text{Ker}\, f$.
5. Montrer que $E = \text{Ker}\, f \oplus \text{Ker}\, g$ et $E = \text{Im}\, f \oplus \text{Im}\, g$.

Exercice 60.

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$ qui commute avec tous les endomorphismes de E, c'est-à-dire

$$\forall g \in \mathcal{L}(E), \quad f \circ g = g \circ f$$

1. Soit u un vecteur non nul de E. Justifier l'existence d'un supplémentaire H_u de $\text{vect}(u)$ dans E. Quelle est la dimension de H_u ?
2. En considérant le projecteur p_u sur $\text{vect}(u)$ parallèlement à H_u, montrer qu'il existe $\lambda_u \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda_u u$.
3. Soit $v \in E$ non colinéaire à u. On montre de même qu'il existe $\lambda_v \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda_v v$. Montrer que $\lambda_u = \lambda_v$. On pourra considérer le vecteur $u + v$.
4. Reprendre la question précédente lorsque v est non nul et colinéaire à u.
5. En déduire que les endomorphismes de E commutant avec tous les endomorphismes sont les homothéties.