Semaine du 11/03 au 15/03

1 Cours

Applications linéaires

Définition et premières propriétés Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'une forme linéaire. Exemples en géométrie, dans les espaces de fonctions, dans les espaces de suites et dans les $\mathbb{K}^n$. Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$. Structure d'anneau de $\mathcal{L}(E)$.

Isomorphismes Définition d'un isomorphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme. Définition d'un automorphisme et groupe linéaire $GL(E)$.

Images directe et réciproque par une application linéaire L'image directe ou réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel. Noyau et image d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le noyau et l'image. Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $E = S \oplus \operatorname{Ker} f$, alors f induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Ker} f$.

Image d'une famille de vecteurs L'image d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image. Une application linéaire est injective/surjective/bijective **si et seulement si** l'image d'une base est une famille libre/une famille génératrice/une base.

Applications linéaires en dimension finie En dimension finie, deux espaces sont de même dimension **si et seulement si** ils sont isomorphes. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le rang. Hyperplans en dimension finie. Si f est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de **même** dimension **finie**, alors f bijective $\iff$ f injective $\iff$ f surjective. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme. Si E et F sont de même dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective **si et seulement si** il existe $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ <u>**ou**</u> $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Formes linéaires et hyperplans Formes coordonnées. Définition d'un hyperplan comme noyau de forme linéaire non nulle. Lien entre hyperplans et droites vectorielles. Intersections d'hyperplans.

Homothéties, projecteurs et symétries Définition d'une homothétie. Définition d'un projecteur. Si p est la projection sur F parallèlement à G, alors $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker} p$. Caractérisation des projecteurs ($p \circ p = p$). Définition d'une symétrie. Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors $F = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. Caractérisation des symétries ($s \circ s = \mathrm{Id}_E$).

Polynômes

Polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ Définitions : polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, ensemble $\mathbb{K}[X]$. Deux polynômes sont égaux **si et seulement si** leurs coefficients sont égaux. $(K[X], +, \times)$ est un anneau intègre commutatif. $(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Opérations : somme, produit, produit externe, composition.

Degré Degré d'un polynôme. Degré d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'une composée. Définition de $\mathbb{K}_n[X]$. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $n+1$. Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Famille de polynômes à degrés échelonnés.

Dérivation Linéarité. Dérivée d'un produit. Formule de Leibniz. Dérivée d'une composée. Formule de Taylor.

2 Méthodes à maîtriser

- Calculer avec des endomorphismes comme dans tout anneau **non commutatif** et **non intègre**.
- Utiliser le noyau ou l'image d'une application linéaire pour prouver son injectivité ou sa surjectivité.
- Les équivalences $x \in \operatorname{Ker} f \iff f(x) = 0$ et $y \in \operatorname{Im} f \iff \exists x, y = f(x)$ doivent être automatiques.
- Utiliser la dimension pour faciliter la preuve de la bijectivité (injectivité + espaces d'arrivée et de départ de même dimension)
- Utiliser le théorème du rang pour passer de résultats sur le noyau à des résultats sur l'image et vice-versa.
- Utiliser la caractérisation des projecteurs/symétries $p^2 = p$ ou $s^2 = \mathrm{Id}$).
- Déterminer la forme explicite d'une projection/symétrie étant donné deux sous-espaces supplémentaires (analyse / synthèse).
- Pour résoudre des équations d'inconnue polynomiale, chercher dans un premier temps à déterminer le degré du polynôme inconnu.

3 Questions de cours

- **Formule de Leibniz** Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

  Indication : on pourra très fortement s'inspirer de la démonstration de la formule du binôme de Newton vue en début d'année.

- **Banque CCP 42**
  1. Résoudre l'équation différentielle (H) : $2xy' - 3y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
  2. Résoudre l'équation différentielle (E) : $2xy' - 3y = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
  3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}_+$?

- **Banque CCP 43** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \arctan(u_n)$.
  1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
     (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
  2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\arctan x)$.

- **Banque CCP 55** Soit a un nombre complexe.
  On note E l'ensemble des suites (u_n) à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$$

  avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.
  1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
     (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
  2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
     Indication : discuter suivant les valeurs de a.

- **Banque CCP 56** On pose pour $x \in]1, +\infty[$, $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.
  1. Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
  2. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en 1.
  3. En utilisant cette fonction u, montrer que H admet une limite finie en 1^+.

- **Banque CCP 59 (en partie)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = P - P'$.
  1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
  2. Montrer que f est bijectif.
  3. Déterminer f^{-1}.

- **Banque CCP 71 (en partie)** Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$ parallèlement à la droite d'équations $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.
  1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
  2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$.

- **Banque CCP 89** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
  1. On se donne $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
  2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.