Devoir à la maison n°10

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

On note classiquement $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 et $\mathcal{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module *inférieur ou égal à* 1.

On dit qu'une partie *non vide* $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}$ est *de type* S si pour tout couple $(z_1, z_2) \in \mathcal{A}^2$, le produit $z_1 z_2$ et la somme $z_1^2 + z_2^2$ sont encore dans $\mathcal{A}$.

Par ailleurs, on note $b(\mathcal{A})$ le nombre d'éléments de $\mathcal{A}$ dont le module est *inférieur ou égal à 1*, c'est-à-dire le cardinal de $\mathcal{A} \cap \mathcal{U}$. On note $b(\mathcal{A}) = \infty$ si ce nombre est infini.

Enfin, si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbb{C}$, on posera $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \setminus \{0\}$ et $R(\mathcal{A}) = \left\{z \in \mathbb{C},\ z^2 \in \mathcal{A}\right\}$.

Partie I – Quelques exemples simples

1. Chacun des ensembles suivants est une partie de $\mathbb{C}$ de type S, ce que l'on ne demande pas de montrer. Préciser dans chacun des cas la valeur de $b(\mathcal{A})$.

a. $\mathcal{A} = \{0\}$;

b. $\mathcal{A} = \mathbb{C}$;

c. $\mathcal{A} = \mathbb{N}$;

d. $\mathcal{A} = \mathbb{N}^*$;

2. **a.** Donner une partie de type $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}$ de type S telle que $b(\mathcal{A}) = 0$.

b. Donner une partie de type $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}$ de type S telle que $b(\mathcal{A}) = 3$.

3. Montrer que si $\mathcal{A}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, alors $\mathcal{A}$ est de type S.

Partie II – Des exemples plus sophistiqués

On pose classiquement $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on note

$$\mathbb{Z}[j] = \left\{a + bj,\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{Z}[j]$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $z = a + bj$.

2. **a.** Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. $\mathbb{Z}[j]$ est donc bien une partie de type S.

b. Donner la valeur de $b(\mathbb{Z}[j])$.

3. **a.** Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}[j]^2$. Montrer que $z_1^2 + z_2^2 = 0$ *si et seulement si* $z_1 + iz_2 = 0$ ou $z_1 - iz_2 = 0$.

b. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x + y\sqrt{3} = 0$. Montrer que $x = y = 0$. On pourra admettre que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

c. En déduire que si $z_1^2 + z_2^2 = 0$, alors $z_1 = z_2 = 0$.

4. **a.** Montrer que $\mathbb{Z}[j]^*$ est encore de type S.

b. Déterminer $b(\mathbb{Z}[j]^*)$.

5. **a.** Montrer que $R(\mathbb{Z}[j])$ est encore de type S.

b. Déterminer $b(R(\mathbb{Z}[j]))$.

6. Donner une partie $\mathcal{A}$ de type S telle que $b(\mathcal{A}) = 5$.

7. Donner une partie $\mathcal{A}$ de type S telle que $b(\mathcal{A}) = 9$.

Partie III – Sous-groupes de $\mathbb{U}_n$

On considère dans cette partie une partie H de $\mathbb{C}$ et un entier naturel non nul n. On souhaite montrer que H est un sous-groupe de $\mathbb{U}_n$ *si et seulement si* il existe un diviseur d de n tel que $H = \mathbb{U}_d$.

1. On suppose qu'il existe un diviseur d de n tel que $H = \mathbb{U}_d$. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathbb{U}_n$.

2. Réciproquement, on suppose que H est un sous-groupe de $\mathbb{U}_n$ et on pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

a. Justifier l'existence du plus petit entier naturel m non nul tel que $\omega^m \in H$. Justifier également que $m \leqslant n$.

b. Montrer que $H = \left\{\omega^{mk},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = md$.

d. Montrer que $H = \mathbb{U}_d$.

Partie IV – Valeurs possibles de $b(\mathcal{A})$

Dans cette partie, $\mathcal{A}$ désigne une partie de $\mathbb{C}$ de type S a priori quelconque.

1. On se donne un élément a de $\mathcal{A}$.

a. Montrer que $a^n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. On suppose que $0 < |a| < 1$. Montrer que $b(\mathcal{A}) = \infty$.

c. Montrer que $a^{2n} + a^{4n} \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. On suppose que $\mathcal{A}$ possède un élément a de module 1. On note θ son *argument principal*, c'est-à-dire son unique argument appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On suppose que θ n'est ni un multiple de $\frac{\pi}{4}$ ni un multiple de $\frac{\pi}{6}$ et on souhaite montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \left|a^{2n} + a^{4n}\right| < 1$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|a^{2n} + a^{4n}\right| = 2|\cos(n\theta)|$.

b. Justifier le fait que l'on peut supposer que $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

c. Quel n convient lorsque $\theta \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$?

d. Quel n convient lorsque $\theta \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$?

e. On suppose enfin $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[$. Montrer que le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\theta > \frac{\pi}{3}$ convient.

f. En déduire $b(\mathcal{A})$.

3. Montrer que $\mathcal{A} \cap \mathbb{U} \neq \mathbb{U}_3$.

4. On suppose *dans cette question* $b(\mathcal{A})$ fini et $b(\mathcal{A}) \geqslant 2$.

a. Montrer que $\mathcal{A}$ contient un élément de module 1.

b. Montrer que $\mathcal{A} \cap \mathbb{U} \subset \mathbb{U}_8 \cup \mathbb{U}_{12}$.

c. Montrer que $\mathcal{A} \cap \mathbb{U}$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}$.

d. En déduire qu'il existe $m \in \{1, 2, 4, 6, 8, 12\}$ tel que $\mathcal{A} \cap \mathbb{U} = \mathbb{U}_m$.

e. Montrer que si $m \in \{4, 8, 12\}$, alors $0 \in \mathcal{A}$.

5. Quelles sont les valeurs possibles de $b(\mathcal{A})$?