Nature de séries

Exercice 1 ★★★

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}$ où $a, b > 0$.

Exercice 2 ★★★

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive. On pose $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$. Comparer la nature des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{u_n}{S_n}$.

Exercice 3 ★★★ **Critère de Raabe-Duhamel**

1. Soient (u_n) et (v_n) de suites de réels strictement positifs vérifiant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang. Montrer que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.
2. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   a. On suppose $\alpha > 1$. A l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

   b. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.

   c. On suppose $\alpha = 1$. Montrer à l'aide d'exemples qu'on ne peut rien conclure en général.
3. Application. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$$

Exercice 4 ★★

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$.
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}\right)$.
3. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$.
4. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}\right)$.

Exercice 5 ★

Convergence de la série $\sum \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$.

Exercice 6 ★★★

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = e^{an^2}\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n^3}$$

Exercice 7 ★★ **Séries de Bertrand**

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et on s'intéresse à la convergence de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$.

1. On suppose $\alpha > 1$. Montrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.
2. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.
3. On suppose $\alpha = 1$ et $\beta \leq 0$. Montrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.
4. On suppose $\alpha = 1$ et $\beta > 0$. Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 2} u_n$ suivant la valeur de β via une comparaison à une intégrale.

Exercice 8 ★★★ **Règle de Cauchy**

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On suppose que la suite de terme général $\sqrt[n]{u_n}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. Montrer que si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
3. Montrer à l'aide de deux exemples qu'on ne peut conclure dans le cas $\ell = 1$.

Exercice 9 ★★

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ k-lipschitzienne avec $k < 1$ et (x_n) une suite telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$.
2. En considérant la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{n+1} - x_n$, montrer que la suite (x_n) converge.
3. En déduire que f admet un unique point fixe.

Exercice 10 ★★★ **CCINP (ou CCP) PC 2021**

On pose pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right)$$

et pour tout entier $n \geq 3$,

$$v_n = \ln\left(\frac{nu_n}{(n-1)u_{n-1}}\right)$$

Montrer que la série $\sum_{n\geq2} v_n$ converge, puis que la série $\sum_{n\geq3} u_n$ diverge.

Exercice 11 ★★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in \,]0,1]$ tel que

$$\int_{u_n}^{1} \frac{e^t}{t}\,dt = n$$

On pourra considérer la fonction $x \mapsto \int_x^1 \frac{e^t}{t}\,dt$.

2. Étudier la monotonie de (u_n) et sa limite.
3. On pose $v_n = n + \ln u_n$. Montrer que (v_n) converge et exprimer sa limite sous forme d'une intégrale.
4. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 12 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2021**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que :

$$a_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 2,\ a_n = 2a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Montrer que (a_n) est définie, puis que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{a_n^2}$ converge et calculer sa somme.

Calculs de sommes

Exercice 13 ★★

Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n\geq0} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$.

Exercice 14 ★★★

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$ et calcul de la somme.

Exercice 15 ★★★ **Taylor-Lagrange**

A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange prouver la convergence et déterminer la somme des séries suivantes

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ pour $x \in \mathbb{R}$;
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ pour $x \in [0,1]$.

Exercice 16 ★★

En remarquant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,dt$, montrer la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et déterminer sa somme.

Exercice 17 ★★★ **X (non PC/PSI) MP 2021**

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$.

Exercice 18 ★★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

1. Donner la définition de la convergence d'une série puis montrer que si $\sum u_n$ converge alors la suite (u_n) tend vers 0.
2. Soit (u_n) une suite décroissante telle que $\sum u_n$ converge.
   a. On suppose que $\lim_{n\to\infty} nu_n = \lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Montrer que $\lambda = 0$.
   b. Montrer que $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$.
   c. Montrer que la série $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge puis montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(u_n - u_{n+1})$.

Exercice 19 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2019**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^n\,dx$.

1. Calculer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+2}$.
3. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
4. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n I_n$ converge et calculer sa somme.

Comparaison série/intégrale

Exercice 20 ★★

Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha \leq 1$.

Déterminer un équivalent du reste de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.

Exercice 21 ★★

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \ln(n!)$.

1. Par une comparaison à une intégrale montrer que $u_n \sim n \ln n$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{u_n^2}$.
3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$.
4. A l'aide d'une comparaison à une intégrale, déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{u_n}$.

Séries alternées

Exercice 22 ★★★ **Série des restes de la série harmonique alternée**

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.
2. On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} R_n$ converge.

Exercice 23 ★★★

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sqrt{k}$.

1. Déterminer un équivalent de b_n.
2. Montrer que $(b_n + b_{n+1})$ converge vers une limite strictement négative.
3. Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{b_n}$.

Exercice 24 ★★ **D'après Mines-Télécom MP 2016**

Soit (v_n) une suite telle que $v_n = \frac{\cos(v_{n-1})}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la limite puis un équivalent de v_n. En déduire la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$.
2. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.
3. En déduire la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n v_n$.

Exercice 25 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2021**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos\left(n^2\pi \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 26 ★★★

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Exercice 27 ★★★

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Exercice 28 ★★ **CCINP (ou CCP) PC 2019**

On pose $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour tout entier $n \geq 2$.

1. Nature de $\sum_{n\geq 2} \ln(1 + a_n)$.
2. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=2}^{n} (1 + a_k)\right)$.

Exercice 29 ★★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2019**

1. Montrer que l'équation $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$ a une unique solution dans $[0, 1]$, notée u_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que la suite (u_n) a pour limite 0.
3. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?
4. Quelle est la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$?

Sommation de relations de comparaison

Exercice 30 ★★

Soit (u_n) une suite réelle de limite ℓ non nulle.

1. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ converge vers ℓ.
2. Déterminer la limite de la suite de terme général $\dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ku_k$.

Exercice 31 ★★★ **Centrale-Supélec MP 2019**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\lim_{n\to\infty} a_n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) = 1$$

1. Montrer que la suite (a_n) converge vers 0 et que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^2$ diverge.
2. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$. Monter que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 \, dt = 1$$

3. Monter que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt[3]{3n}}$.

Exercice 32 ★★★

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Déterminer la limite de la suite (u_n).
2. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la suite de terme général $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ converge vers un réel non nul.
3. En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 33 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2021**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \ell$$

2. Soient $a > 0$, $\lambda > 0$, $\alpha > 1$ et $f : [0, a] \to [0, a]$ continue admettant un développement asymptotique en 0 de la forme :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x - \lambda x^\alpha + o(x^\alpha)$$

   a. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que 0 soit le seul point fixe de f dans $[0, \varepsilon]$.

   b. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in [0, \varepsilon]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) converge vers 0.

   c. Trouver un équivalent de $f(x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}$ quand x tend vers 0.

   d. En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

   e. Appliquer aux fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \ln(1 + x)$.

Exercice 34 ★★

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2 + \sqrt{k}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$S_n = C - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 35 ★★★

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $S_n \underset{n\to+\infty}{=} 2\sqrt{n} + C + o(1)$.
2. Déterminer un équivalent de $S_n - 2\sqrt{n} - C$.

Produit de Cauchy

Exercice 36 ★★★

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = \mathrm{H}_n$$

2. En déduire que

$$e\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_n}{n!}$$

Exercice 37 ★★

Soit a et b deux complexes distcincts de module strictement inférieur à 1. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-b}$$

Familles sommables

Exercice 38 ★★★

Montrer qu'il n'existe pas d'application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Exercice 39 ★★★

On dit qu'un nombre complexe est un *entier algébrique* s'il est racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers. Montrer que l'ensemble des entiers algébriques est dénombrable.

Exercice 40 ★

Soit A un ensemble. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) A est dénombrable ;

(ii) il existe une injection de A dans un ensemble dénombrable ;

(iii) il existe une surjection d'un ensemble dénombrable sur A.

Exercice 41 ★

La famille $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x \in \mathbb{Q} \cap [1,+\infty[}$ est-elle sommable ?

Exercice 42 ★★★

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

1. Montrer que $(n+1)v_n^2 - (n-1)v_{n-1}^2 \leq 2u_n v_n$ pour tout entier $n \geq 2$.

2. On suppose que la série $\sum u_n^2$ converge.

a. Montrer que la série $\sum v_n^2$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \leq 4\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$$

b. En déduire la sommabilité de la famille $\left(\frac{u_m u_n}{m+n}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$.

Exercice 43 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2018**

1. Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\int_0^{2\pi} te^{-int}\,\mathrm{d}t$.
2. Soient I une partie finie de $\mathbb{N}^*$, $(a_n)_{n\in\mathrm{I}}$ et $(b_n)_{n\in\mathrm{I}}$ deux suites finies de réels positifs. Montrer que
$$\sum_{(n,m)\in\mathrm{I}^2} \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \pi\sqrt{\sum_{n\in\mathrm{I}} a_n^2 \sum_{n\in\mathrm{I}} b_n^2}$$
3. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles telles que les familles $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soient sommables. Montrer que $\left(\frac{a_n b_m}{n+m}\right)_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et que
$$\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \pi\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^2 \sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n^2}$$

Exercice 44 ★★★

Montrer que la famille $\left(\frac{1}{mn(m+n+2)}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 45 ★★

Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 46 ★★★

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$$
Pour quelles valeurs de α cette somme est-elle finie ?

Exercice 47 ★★★

On note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs positifs d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n) z^n$$

Exercice 48 ★★★

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer la convergence et déterminer la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$.

Exercice 49 ★★

Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 50 ★★

Calculer
$$\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé

Exercice 51 ★★

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, $k \in [0,1[$ et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ tels que
$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x-y\|$$
Soit $u \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En considérant la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n+1} - u_n$, montrer que u converge.

Exercice 52 ★ **Petites Mines 2016**

Soit $\sum u_n$ une série numérique absolument convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_{n-k}}{2^k}$.

1. Montrer que la série $\sum v_n$ converge et calculer sa somme.

2. Reprendre la question précédente lorsque $\sum u_n$ est une série absolument convergente à termes dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

Exercice 53 ★★

Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$, on pose $\mathrm{D}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$ et $\mathrm{T}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$. Il est clair que D et T sont des endomorphismes de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Montrer que $\exp(\mathrm{D}) = \mathrm{T}$.