Applications linéaires

Exercice 1 ★★ — Noyaux et images itérés

Soit u un endomorphisme de E, pour tout entier naturel p, on notera $\mathrm{I}_p = \operatorname{Im} u^p$ et $\mathrm{K}_p = \operatorname{Ker} u^p$.

1. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{K}_p \subset \mathrm{K}_{p+1}$ et $\mathrm{I}_{p+1} \subset \mathrm{I}_p$.
2. On suppose que E est de dimension finie et u injectif. Déterminer I_p et K_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
3. On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.
   a. Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leqslant n$ tel que : $\mathrm{K}_r = \mathrm{K}_{r+1}$.
   b. Montrer qu'alors : $\mathrm{I}_r = \mathrm{I}_{r+1}$ et que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{K}_r = \mathrm{K}_{r+p}$ et $\mathrm{I}_r = \mathrm{I}_{r+p}$.
   c. Montrer que : $\mathrm{E} = \mathrm{K}_r \oplus \mathrm{I}_r$.
4. Lorsque E n'est pas de dimension finie, existe-t-il un plus petit entier naturel r tel que $\mathrm{K}_r = \mathrm{K}_{r+1}$?

Exercice 2 ★★

Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E qui commutent.

1. Montrer que $p + q - p \circ q$ et $p \circ q$ sont des projecteurs.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(p \circ q) = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$ et que $\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.
3. Montrer que $\operatorname{Ker}(p+q-p\circ q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$ et que $\operatorname{Im}(p+q-p\circ q) = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

Exercice 3 ★

On pose $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer que l'application s qui à une fonction $f \in \mathrm{E}$ associe l'application $x \mapsto f(-x)$ est une symétrie dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 4 ★★ — Endomorphismes de rang au plus 1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E dont l'image est une droite vectorielle $\operatorname{vect}(u)$ avec $u \neq 0_{\mathrm{E}}$. On pose alors :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \; f(x) = \varphi(x) u$$

Montrer que φ est une forme linéaire sur E et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

Matrices

Exercice 5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A}_n = (\min(i,j))_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que A_n est inversible et calculer son inverse.

Exercice 6

Soit $f : \mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+2) + \mathrm{P}(\mathrm{X}) - 2\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$.

1. Montrer que P est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$. En déduire $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{X} + \operatorname{tr}(\mathrm{AX})\mathrm{B} \end{cases}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur A et B pour que f soit une symétrie.
3. Déterminer la base et la direction de f dans ce cas.

Exercice 8

Soit A une matrice réelle. Montrer que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^{\mathsf{T}}A = \operatorname{rg} AA^{\mathsf{T}}$.

Exercice 9 **Navale**

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$. Calculer de deux façons M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 **Sans calculs**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer *sans calculs* des bases de $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.

Exercice 11

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Soient $e_1 = (1, 1, -1)$, $e_2 = (1, 0, -1)$ et $e_3 = (1, -1, 0)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$ et calculer P^{-1}.
3. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + \operatorname{tr}(X)A = 0$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 13 **Rang du complément de Schur**

Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ où $A \in GL_p(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. On pose $S = D - CA^{-1}B$. Montrer que $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(S)$.

Déterminants

Exercice 14 ★

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que $\det A, \det B \in \mathbb{Z}$.
2. On suppose que $\det A$ et $\det B$ sont premiers entre eux. Montrer qu'il existe deux matrices $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_n$.

Exercice 15 ★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner le rang de com(A) en fonction de celui de A. On pourra distinguer les cas $\operatorname{rg} A = n$, $\operatorname{rg} A < n - 1$ et $\operatorname{rg} A = n - 1$.

Exercice 16 ★

Caculer le déterminant de la matrice $\left(\binom{n+i}{j}\right)_{0 \leq i,j \leq p}$ avec $0 \leq p \leq n$.

Exercice 17 ★

Calculer le déterminant de taille n

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]}$$