

# SEMAINE DU 11/06 AU 15/06

## 1 Cours

### Espaces préhilbertiens réels

**Produit scalaire et norme** Définition d'un produit scalaire. Orthogonalité. Espace préhilbertien réel, espace euclidien. Norme associée à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Inégalité triangulaire. Identités de polarisation.

**Familles orthogonales** Définition d'une famille orthogonale et d'une famille orthonormale. Une famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. Théorème de Pythagore. Expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale à l'aide du produit scalaire. Expression du produit scalaire et de la norme à l'aide des coordonnées dans une base orthonormale. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Tout espace euclidien admet une base orthonormale. Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

**Sous-espaces orthogonaux** Sous-espaces vectoriels orthogonaux. Orthogonal d'une partie. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace vectoriel. L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie est son unique supplémentaire orthogonal. Dimension de l'orthogonal. Projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Distance à un sous-espace vectoriel. Cas d'un sous-espace vectoriel de dimension finie : expression de la distance à l'aide de la projection orthogonale.

**Automorphismes orthogonaux** Définition : conservation de la norme et du produit scalaire. Groupe orthogonal  $O(E)$ . Automorphismes orthogonaux positifs/négatifs (ou isométries vectorielles directes/indirectes). Groupe spécial orthogonal  $SO(E)$ . Un endomorphisme est un automorphisme orthogonal (positif) **si et seulement si** il envoie une base orthonormée (directe) sur une base orthonormée (directe).

**Matrices orthogonales** Définition. Groupe orthogonal  $O_n(\mathbb{R})$ . Matrices orthogonales positives et négatives. Groupe spécial orthogonal  $SO(n)$ . Une famille de vecteurs est une base orthonormée (directe) **si et seulement si** sa matrice dans une base orthonormée (directe) est une matrice orthogonale (positive). Un endomorphisme est un automorphisme orthogonal (positif) **si et seulement si** sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale (positive).

**Automorphismes orthogonaux du plan euclidien** Description de  $O_2(\mathbb{R})$  et  $SO_2(\mathbb{R})$ . Les automorphismes orthogonaux positifs du plan euclidien sont les rotations. Les automorphismes orthogonaux négatifs du plan euclidien sont les réflexions. Angles du plan euclidien orienté.

### Dénombrement

**Cardinal d'un ensemble fini** Deux ensembles finis en bijection ont même cardinal. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective **si et seulement si** elle est injective **si et seulement si** elle est surjective. Principe de Dirichlet. Cardinal d'une réunion de deux ensembles (formule du crible hors programme). Cardinal d'un produit cartésien. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

**Arrangements et combinaison** Nombre d'arrangements (uplets d'éléments deux à deux distincts), nombre d'applications injectives d'un ensemble fini dans un autre. Nombres de parties de cardinal fixé d'un ensemble fini. Interprétation combinatoire des coefficients binomiaux et des relations classiques sur les coefficients binomiaux.

## 2 Méthodes à maîtriser

- ▶ Montrer qu'une application est un produit scalaire. Dans l'ordre : symétrie, linéarité par rapport à l'**une** des deux variables (la linéarité par rapport à la seconde variable s'obtient par symétrie), positivité, définition.
- ▶ Montrer qu'une famille est orthonormale.
- ▶ Orthonormaliser une famille libre par le procédé de Gram-Schmidt.
- ▶ Calculer la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel.
- ▶ Calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.
- ▶ Pour déterminer le cardinal d'un ensemble, on peut le mettre en bijection avec un ensemble de cardinal connu.
- ▶ Sinon, on se débrouille avec des phrases de français...

### 3 Questions de cours

Pas de question de cours cette semaine.