Devoir à la maison n°02 : corrigé

Solution 1

1. On formule l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\mathcal{P}_n : \quad \forall (m,p) \in \mathbb{N}^2, \ \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

Initialisation : Soit $(m,p) \in \mathbb{N}^2$.

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{0}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{0}{0}\binom{m}{p} = \binom{m}{p}$$

car $\binom{0}{k} = 0$ lorsque $k > 0$ avec les conventions adoptées. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit $(m,p) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p} \binom{n+1}{k}\binom{m}{p-k} &= \sum_{k=0} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)\binom{m}{p-k} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} + \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k-1}\binom{m}{p-k} \\
&= \binom{m+n}{p} + \sum_{k=1}^{p} \binom{n}{k-1}\binom{m}{p-k} && \text{d'après } \mathcal{P}_n \text{ et car } \binom{n}{-1} = 0 \text{ par convention} \\
&= \binom{m+n}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k}\binom{m}{p-1-k} && \text{par changement d'indice} \\
&= \binom{m+n}{p} + \binom{m+n}{p-1} && \text{d'après } \mathcal{P}_n \\
&= \binom{m+n+1}{p}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Lorsque $p = m = n$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

Par symétrie des coefficients binomiaux, on obtient le résultat voulu.

3. En effectuant le changement d'indice $\ell = n - k$, on obtient

$$\mathrm{S}_n = \sum_{\ell=0}^{n} (n-\ell)\binom{n}{n-\ell}^2 = n\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}^2 - \sum_{\ell=0}^{n} \ell\binom{n}{\ell}^2 = n\binom{2n}{n} - \mathrm{S}_n$$

Ainsi $\mathrm{S}_n = \dfrac{1}{2}n\dbinom{2n}{n}$.

4. Supposons n impair. La question précédente montre $2\mathrm{S}_n = n\binom{2n}{n}$. Comme n est impair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$. Ainsi $2\mathrm{S}_n = (2p+1)\binom{2n}{n}$ ou encore $\binom{2n}{n} = 2\left(\mathrm{S}_n - p\binom{2n}{n}\right)$. Comme S_n et $\binom{2n}{n}$ sont entiers, $\binom{2n}{n}$ est pair.

Solution 2

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}_n &= \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n} 2k-1} \\
&= \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)^2}{\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} 2k-1\right)} \\
&= \frac{\left(2^n \prod_{k=1}^{n} k\right)^2}{\prod_{k=1}^{2n} k} \\
&= \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \\
&= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}
\end{aligned}
$$

Solution 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
\sin(3x) &= \sin(x+2x) \\
&= \sin(x)\cos(2x) + \sin(2x)\cos(x) \\
&= \sin(x)(1-2\sin^2(x)) + 2\sin(x)\cos^2(x) \\
&= \sin(x)(1-2\sin^2(x)) + 2\sin(x)(1-\sin^2(x)) \\
&= 3\sin(x) - 4\sin^3(x)
\end{aligned}
$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente,

$$
u_n = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} 3^{k+1}\sin\left(\frac{x}{3^k}\right) - 3^k\sin\left(\frac{x}{3^{k-1}}\right)
$$

Après télescopage

$$
u_n = \frac{1}{4}\left(3^{n+1}\sin\left(\frac{x}{3^n}\right) - \sin(3x)\right)
$$

3. On sait que $\sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{x}{3^n} + o\left(\frac{1}{3^n}\right)$ donc $\lim_{n\to+\infty} 3^{n+1}\sin\left(\frac{x}{3^n}\right) = 3x$. On en déduit que

$$
\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3x-\sin(3x)}{4}
$$