Probabilités

Généralités

Solution 1

1. **a.** La suite (B_n) est décroissante pour l'inclusion. Ainsi, par continuité décroissante,
$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{B}_n$$
   b. Par ailleurs,
$$\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} \mathrm{A}_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)$$
   Ainsi $\mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$ est majorée par le reste d'une série convergente donc $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = 0$.

2. **a.** Soit $k \in [\![n, n+p]\!]$. Par convexité de l'exponentielle,
$$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}_k}) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{A}_k) \leq \exp(-\mathbb{P}(\mathrm{A}_k))$$
   Ainsi
$$\prod_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}_k}) \leq \prod_{k=n}^{n+p} \exp(-\mathbb{P}(\mathrm{A}_k))$$
   Comme les $\overline{\mathrm{A}_k}$ sont mutuellement indépendants,
$$\prod_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}_k}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{\mathrm{A}_k}\right)$$
   On en déduit que
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{\mathrm{A}_k}\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)\right)$$
   b. Posons $\mathrm{C}_{n,p} = \bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{\mathrm{A}_k}$. Fixons $n \in \mathbb{N}$. La suite $(\mathrm{C}_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion. Par continuité décroissante,
$$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}_n}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq n} \overline{\mathrm{A}_k}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{C}_{n,p}\right) = \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{C}_{n,p})$$
   Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ diverge vers $+\infty$, $\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k) = +\infty$ et donc $\lim_{p\to+\infty} \exp\left(-\sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)\right) = 0$. D'après la question précédente, $\lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{C}_{n,p}) = 0$. On en déduit que $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}_n}) = 0$. Ainsi
$$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{B}_n}\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}_n}) = 0$$
   Finalement, $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 0$ et donc $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1$.

Solution 2

1. L'événement $\mathrm{A}_{k,p}$: «le joueur J_k gagne au $p^{\text{ème}}$ tour» correspond à
   - les joueurs $\mathrm{J}_1, \dots, \mathrm{J}_n$ perdent leurs $p-1$ premiers tours ;
   - les joueurs $\mathrm{J}_1, \dots, \mathrm{J}_{k-1}$ perdent lors du $p^{\text{ème}}$ tour ;

- le joueur J_k gagne.

Ainsi

$$\mathbb{P}(A_{k,p}) = (q_1 \dots q_n)^{p-1}(q_1 \dots q_{k-1})p_k$$

Comme $G_k = \bigsqcup_{p\in\mathbb{N}^*} A_{k,p}$,

$$\mathbb{P}(G_k) = \sum_{p=1}^{+\infty}(q_1 \dots q_n)^{p-1}(q_1 \dots q_{k-1})p_k = \frac{(q_1 \dots q_{k-1})p_k}{1-q_1 \dots q_n}$$

2. Posons pour simplifier, $u_k = \prod_{i=1}^k q_k$ (en convenant que $u_0 = 1$). Alors

$$\mathbb{P}(G_k) = \frac{u_{k-1}-u_k}{1-u_n}$$

En notant $G = \bigsqcup_{k=1}^n G_k$ l'événement «l'un des joueurs gagne» i.e. «le jeu se finit», on a par téléscopage

$$\mathbb{P}(G) = \sum_{k=1}^n \frac{u_{k-1}-u_k}{1-u_n} = \frac{u_0-u_n}{1-u_n} = 1$$

Le jeu se finit donc presque sûrement.

3. Le jeu est équitable si et seulement si $\mathbb{P}(G_{k+1}) = \mathbb{P}(G_k)$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ i.e. $p_k = q_k p_{k+1}$ ou encore $\frac{1}{p_{k+1}} = \frac{1}{p_k} - 1$. Ceci équivaut à $\frac{1}{p_k} = \frac{1}{p_1} - (k-1)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Pour que les p_k soient bien des probabilités, il faut que $\frac{1}{p_k} \geq 1$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ i.e. $\frac{1}{p_1} \geq k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ ou encore $p_1 \geq \frac{1}{n}$.

4. Notons T le nombre de coups joués. Comme T est une variable aléatoire positive, elle admet une espérance (éventuellement infinie). Remarquons que pour $(p, k) \in \mathbb{N}^* \times [\![1, n]\!]$, $\{T = n(p-1)+k\} = A_{k,p}$. Remarquons également que

$$\mathbb{N}^* = \bigsqcup_{k=1}^n \{n(p-1)+k,\ p \in \mathbb{N}^*\}$$

Par sommation par paquets (licite car tous les termes sont positifs),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{t=1}^{+\infty} t\mathbb{P}(T=t) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{+\infty} (n(p-1)+k)\mathbb{P}(T = n(p-1)+k) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{+\infty} u_n^{p-1}(u_{k-1}-u_k)(n(p-1)+k) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{p=0}^{+\infty} u_n^p(u_{k-1}-u_k)(np+k) \\
&= \sum_{k=1}^n (u_{k-1}-u_k)\left[n\sum_{p=0}^{+\infty} pu_n^p + k\sum_{p=0}^{+\infty} u_p^n\right] \\
&= \sum_{k=1}^n (u_{k-1}-u_k)\left[\frac{nu_n}{(1-u_n)^2} + \frac{k}{1-u_n}\right] \\
&= \frac{nu_n}{(1-u_n)^2}\sum_{k=1}^n u_{k-1}-u_k + \frac{1}{1-u_n}\sum_{k=1}^n k(u_{k-1}-u_k) \\
&= \frac{nu_n}{1-u_n} + \frac{1}{1-u_n}\left(\sum_{k=1}^n((k-1)u_{k-1}-ku_k) + \sum_{k=1}^n u_{k-1}\right) \\
&= \frac{nu_n}{1-u_n} + \frac{1}{1-u_n}\left(-nu_n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} u_k}{1-u_n}
\end{aligned}$$

Solution 3

---

1. On note B_{2n-1} l'événement «A_1 touche la cible au tour $2n-1$» et C_{2n} l'événément «A_2 touche la cible au tour $2n$. On note également D_{2n+1} l'événement «A_1 l'emporte au tour $2n+1$. Alors

$$D_{2n+1} = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{B_{2i-1}}\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{2} n\overline{C_{2i}}\right) \cap B_{2n+1}$$

Par indépendance des tirs,

$$\mathbb{P}(D_{2n+1}) = \left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{B_{2i-1}})\right)\left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{C_{2i}})\right)\mathbb{P}(B_{2n+1}) = (1-p_1)^n(1-p_2)^n p_1$$

2. Notons E_{2n+2} l'événement «A_2 l'emporte au tour $2n+2$». De la même manière

$$\mathbb{P}(E_{2n+2}) = (1-p_1)^{n+1}(1-p_2)^n p_2$$

3. Notons D l'événement «A_1 l'emporte» et E l'événement «A_2 l'emporte». Alors $D = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} D_{2n+2}$ et $E = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} E_{2n+2}$. Ainsi

$$\mathbb{P}(D) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(D_{2n+1}) = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$
$$\mathbb{P}(E) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_{2n+2}) = \frac{(1-p_1)p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$

Notons F l'événement «le jeu dure indéfininiment». Alors $\overline{F} = D \sqcup E$ donc

$$\mathbb{P}(\overline{F}) = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} + \frac{(1-p_1)p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$

En posant $q_i = 1-p_i$, on a donc

$$\mathbb{P}(\overline{F}) = \frac{1-q_1+q_1(1-q_2)}{1-q_1q_2} = 1$$

puis $\mathbb{P}(F) = 0$.

4. Le jeu est équitable à condition que $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(E)$ i.e. $p_1 = (1-p_1)p_2$ i.e. $p_2 = \frac{p_1}{1-p_1}$. Si $p_1 > 1/2$, alors $1-p_1 < 1/2$ donc $\frac{p_1}{1-p_1} > 1$ et il est impossible d'avoir $p_2 > 1$. Le jeu n'est donc pas équitable.

Probabilités conditionnelles

Solution 4

---

1. On a clairement $p_0 = 0$ et $p_1 = 1-p$.

2. Comme $D_n \subset D_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (p_n) est croissante. Comme elle est majorée par 1 (c'est une suite de probabilités), elle converge.

3. Notons A l'événement «la fleur F_0 a des descendants».

   - Si la fleur F_0 n'a pas de descendants, alors sa lignée est éteinte à l'instant $n+1$ i.e. $\mathbb{P}(D_{n+1} \mid \overline{A}) = 1$.
   - Si la fleur F_0 a des descendants, sa lignée est éteinte à l'instant $n+1$ si chacun de ses deux descendants à sa lignée éteinte à l'instant $n+1$. Les deux lignées étant indépendantes, on a par translation $\mathbb{P}(D_{n+1} \mid A) = p_n^2$.

   D'après la formule des probabilités totales

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(D_{n+1}) = \mathbb{P}(D_{n+1} \mid \overline{A})\mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(D_{n+1} \mid A)\mathbb{P}(A) = (1-p) + pp_n^2$$

4. On sait que (p_n) converge dans $[0,1]$. Elle converge alors nécessairement vers un point fixe de $f : x \mapsto px^2 + 1 - p$. Si $p = 0$, ce point fixe est évidemment 1, sinon c'est une racine du trinôme $pX^2 - X + 1 - p$, à savoir 1 ou $\frac{1-p}{p}$. L'unique racine dans $[0,1]$ est 1 si $p \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{1-p}{p}$ sinon.
Finalement, (p_n) converge vers 1 si $p \leq \frac{1}{2}$ et vers $\frac{1-p}{p}$ sinon.

Solution 5

Notons F_n (resp. P_n) l'événement «on a obtenu face (resp. pile) au $n^{\text{ème}}$ lancer ainsi que G_n l'événement «on a obtenu exactement n lorsque le jeu s'arrête». D'après la formule des probabilités totales :

$$g_{n+2} = \mathbb{P}(G_{n+2}) = \mathbb{P}(G_{n+2} \mid P_1)\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}(G_{n+2} \mid F_1)\mathbb{P}(F_1)$$

Or il est clair que $\P(G_{n+2} \mid P_1) = g_{n+1}$ et $\mathbb{P}(G_{n+2} \mid F_1) = g_n$. Ainso

$$g_{n+2} = pg_{n+1} + qg_n$$

Le polynôme caractéristique est $X^2 - pX - q = X^2 - pX + p - 1$. Son discriminant est $p^2 - 4p + 4 = (p-2)^2$ donc ses racines sont $p - 1$ et 1. On en déduit qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g_n = A + B(p-1)^n$$

Or $g_1 = \mathbb{P}(P_1) = p$ et $g_2 = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(F_1) = p^2 + 1 - p$. On en déduit que

$$\begin{cases} A + B(p-1) = p \\ A + B(p-1)^2 = p^2 + 1 - p \end{cases}$$

On en déduit que $A = \frac{1}{2-p}$ et $B = \frac{1-p}{2-p}$.
Remarque. On aurait aussi pu convenir que $g_0 = 1$ pour aboutir au même résultat.

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g_n = \frac{1 - (p-1)^{n+1}}{2-p}$$

Solution 6

Notons A l'événement «obtenir deux piles consécutifs». Dans la suite, on notera F_n (resp. P_n) l'événement «on a obtenu "pile" (resp. "face") au $n^{\text{ème}}$ lancer.
On va plutôt s'intéresser à l'événement $\overline{A}$ et on note $q = \mathbb{P}(\overline{A})$. Remarquons que F_1, $P_1 \cap F_2$ et $P_1 \cap P_2$ forment un système complet d'événements. On écrit la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{A} \mid F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(\overline{A} \mid P_1 \cap F_1)\mathbb{P}(P_1 \cap F_1) + \mathbb{P}(\overline{A} \mid P_1 \cap P_2)\mathbb{P}(P_1 \cap P_2)$$

- Si on a obtenu un face au premier lancer, il suffit de ne pas obtenir deux piles consécutifs au cours des lancers suivants. Autrement dit, $\mathbb{P}(\overline{A} \mid F_1) = q$.
- Si on a obtenu un pile puis un face, il suffit encore de ne pas obtenir deux piles consécutifs au cours des lancers suivants. Autrement dit, $\mathbb{P}(\overline{A} \mid P_1 \cap F_1) = q$.
- Enfin, il est clair que $\mathbb{P}(\overline{A} \mid P_1 \cap P_2) = 0$.

Ainsi $q = (1-p)q + p(1-p)q$ ou encore $qp^2 = 0$. Comme $p > 0$, $q = 0$ puis $\mathbb{P}(A) = 1$.

Variables aléatoires

Solution 7

1. Posons $\mathrm{I}_k = \int_0^1 x^k(1-x)^r \, \mathrm{d}x$. Comme les I_k sont clairement positifs, il s'agit de montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} r\mathrm{I}_k$ converge et a pour somme 1.

Première méthode :
On prouve par une suite d'intégration par parties que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_k = \frac{k!}{\prod_{i=1}^{k+1}(r+i)}$$

On fait apparaître un télescopage en remarquant que $r = (r+k+1)-(k+1)$. Ainsi $r\mathrm{I}_k = u_k - u_{k+1}$ en posant $u_k = \frac{k!}{\prod_{i=1}^{k}(r+i)}$. On montre maintenant que la suite (u_k) converge vers 0. En effet,

$$\ln(u_k) = -\sum_{i=1}^{k} \ln\left(1+\frac{r}{i}\right)$$

Or $\ln\left(1+\frac{r}{i}\right) \underset{i\to+\infty}{\sim} \frac{r}{i}$, donc, par sommation de relations de comparaison pour des séries à termes positifs divergente,

$$\ln(u_k) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\sum_{i=1}^{k} \frac{r}{i}$$

Comme la série harmonique diverge vers $+\infty$, la suite $(\ln(u_k))$ diverge vers $-\infty$ et la suite (u_k) converge donc vers 0.
La série télescopique $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k - u_{k+1}$ i.e. la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} r\mathrm{I}_k$ converge donc et a pour somme $u_0 = 1$.

Deuxième méthode :
On utilise le théorème de convergence dominée. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1[,\ \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}(1-x)^r \leq \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k-1}(1-x)^r = (1-x)^{r-1}$$

Or la fonction $x \mapsto (1-x)^{r-1}$ est intégrable sur $[0,1[$ par critère de Riemann ($r-1 > -1$). On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = r\int_0^1 (1-x)^{r-1} \, \mathrm{d}x = 1$$

2. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$ converge, c'est-à-dire si et seulement si la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} r(k+1)\mathrm{I}_k$ converge, l'espérance étant alors la somme de cette série. Les calculs précédents montrent que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (k+1)\mathrm{I}_k = \frac{(k+1)!}{\prod_{i=1}^{k+1}(r+i)}$$

Si $r \leq 1$,

$$(k+1)\mathrm{I}_k \geq \frac{(k+1)!}{\prod_{i=1}^{k+1}(1+i)} = \frac{1}{k+2}$$

donc la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} r(k+1)\mathrm{I}_k$ diverge par comparaison à la série harmonique.

On montre maintenant la convergence dans le cas $r > 1$.

Première méthode : On peut à nouveau faire apparaître un télescopage en remarquant que

$$r(k+1)\mathrm{I}_{k+1} = \frac{r}{r-1}(v_k - v_{k+1})$$

avec $v_k = \frac{(k+1)!}{\prod_{i=1}^{k}(r+i)}$. En posant $s = r-1 > 0$, on a donc

$$v_k = (r+1)\frac{(k+1)!}{\prod_{i=1}^{k+1}(s+i)}$$

Quitte à changer r en s dans la question précédente, on a $v_k = (r+1)u_{k+1}$ de sorte que (v_k) converge encore vers 0. La série télescopique $\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k - v_{k+1}$ converge donc et a pour somme $v_0 = 1$. La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} r(k+1)\mathrm{I}_k$ converge donc également et a pour somme $\frac{r}{r-1}$ qui est donc l'espérance de X.

Deuxième méthode : On peut encore utiliser le théorème de convergence dominée. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1[,\ \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}(1-x)^r \leq \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}(1-x)^r = (1-x)^{r-2}$$

Or la fonction $x \mapsto (1-x)^{r-2}$ est intégrable sur $[0,1[$ par critère de Riemann ($r-2 > -1$). On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = r\int_0^1 (1-x)^{r-1}\,\mathrm{d}x = 1$$

Solution 8

Le fait qu'une suite réelle (u_n) converge vers 0 s'écrit :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \geq n,\ -\varepsilon \leq u_p \leq \varepsilon$$

On montre aisément que ceci équivaut à

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \geq n,\ -\frac{1}{2^k} \leq u_p \leq \frac{1}{2^k}$$

On en déduit que

$$\mathrm{A} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} \left\{\mathrm{X}_p \in \left[-\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right]\right\}$$

Comme les X_p sont des variables aléatoires, les $\left\{\mathrm{X}_p \in \left[-\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right]\right\}$ sont des événements. Ainsi A est un événement comme réunions et intersections dénombrables d'événements.

Solution 9

1. Y est à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Notons $\mathrm{A}_{i,k}$ l'événement «le jeton n°i a été tiré au $k^{\text{ème}}$ tour». Alors pour $n \geq 2$

$$\{\mathrm{Y}=n\} = \bigsqcup_{i=1}^{3} \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \mathrm{A}_{i,k}\right) \cap \overline{\mathrm{A}_{i,n}}$$

   Par indépendance des tirages

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n) = 3 \cdot \frac{1}{3}^{n-1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3^{n-1}}$$

2. $\mathrm{Y}-1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}-1=n) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}=n+1) = \frac{2}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}$$

   Ainsi Y suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

3. On sait alors que $\mathbb{E}(\mathrm{Y}-1) = 3$ et $\mathbb{V}(\mathrm{Y}-1) = 6$. Donc $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = 4$ et $\mathbb{V}(\mathrm{Y}) = 6$.

4. Remarquons que (Y,Z) est à valeurs dans $\{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2,\ 2 \leq k < \ell\}$. De plus, pour $2 \leq k < \ell$,

$$\mathbb{P}((\mathrm{Y},\mathrm{Z}) = (k,\ell)) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}=k)\mathbb{P}(\mathrm{Z}=\ell \mid \mathrm{Y}=k) = \frac{2}{3^{k-1}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-k-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2^{\ell-k}}{3^{\ell-1}}$$

Solution 10

On rappelle que pour $|q| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

1. On doit avoir $\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=j,Y=k)=1$. Or

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{j+k}{2^{j+k}}=2\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{2^j}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^k}\right)=2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=8$$

donc $a=\frac{1}{8}$.

2. Pour tout $j\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X=j)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=j,Y=k)=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{j+k}{2^{j+k}}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2^j}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^k}+j\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\right)=\frac{1}{2^{j+3}}(2+2j)=\frac{j+1}{2^{j+2}}$$

Par symétrie, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y=k)=\frac{k+1}{2^{k+2}}$$

3. On remarque par exemple que

$$\mathbb{P}(X=0,Y=0)=0\neq\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)$$

Ainsi X et Y ne sont pas indépendantes.

4. Remarquons que

$$\{X=Y\}=\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}\{X=n\}\cap\{Y=n\}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n,Y=n)=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n}{2^{2n}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{9}$$

Lois usuelles

Solution 11

Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ puisque X et Y le sont. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Remarquons que $\{Z\geq k\}=\{X\geq k\}\cap\{Y\geq k\}$ donc par indépendance de X et Y :

$$\mathbb{P}(Z\geq k)=\mathbb{P}\left(\{X\geq k\}\cap\{Y\geq k\}\right)=\mathbb{P}(X\geq k)\mathbb{P}(Y\geq k)$$

Puisque $\{X\geq k\}=\bigsqcup_{n=k}^{+\infty}\{X=k\}$,

$$\mathbb{P}(X\geq k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}(1-p_1)^{n-1}p_1=(1-p_1)^{k-1}$$

Remarque. On aurait pu se passer du calcul de somme de série puisqu'une loi géométrique représente la loi du premier succès.

De la même manière

$$\mathbb{P}(Y\geq k)=(1-p_2)^{k-1}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(Z\geq k)=(1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}$$

On constate enfin que

$$\{Z\geq k\}=\{Z=k\}\sqcup\{Z\geq k+1\}$$

donc

$$\mathbb{P}(Z=k)=\mathbb{P}(Z\geq k)-\mathbb{P}(Z\geq k+1)=(1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}-(1-p_1)^k(1-p_2)^k$$

Solution 12

1. Remarquons que

$$\{X = Y\} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} (\{X = n\} \cap \{Y = n\})$$

Ainsi par indépendance de X et Y,

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left((1-p)^{n-1}p\right)^2 = p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^{2n} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$$

2. X + Y est à valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Remarquons que

$$\{X + Y = n\} = \bigsqcup_{k=1}^{n-1} (\{X = k\} \cap \{Y = n - k\})$$

A nouveau par indépednace de X et Y,

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k) = \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1}p = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

Remarque. On aurait aussi pu utiliser les fonctions génératrices de X et Y.

3. Puisque $\{Z > n\} = \bigsqcup_{k \geq n+1} \{Z = k\}$,

$$\mathbb{P}(Z > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}p = p(1-p)^n \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = (1-p)^n$$

Remarque. Ceci est cohérent avec l'interprétation de la loi géométrique comme loi du premier succès.

4. On remarque que

$$\{Z > X + Y\} = \bigsqcup_{n \geq 2} (\{Z > n\} \cap \{X + Y = n\})$$

Par indépendance de Z et X + Y,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z > X + Y) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(Z > n)\mathbb{P}(X + Y = n) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} (1-p)^n (n-1)p^2(1-p)^{n-2} \\
&= p^2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)(1-p)^{2n-2} \\
&= p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{2n} \\
&= p^2(1-p)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{2(n-1)} \\
&= \frac{p^2(1-p)^2}{(1-(1-p)^2)^2}
\end{aligned}$$

car $\sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$ pour $t \in]-1, 1[$. En simplifiant

$$\mathbb{P}(Z > X + Y) = \frac{(1-p)^2}{(2-p)^2}$$

On peut vérifier avec Python.

```
import numpy.random as rd

p=.2
n=10000
X=rd.geometric(p,n)
Y=rd.geometric(p,n)
Z=rd.geometric(p,n)
print(sum(Z>X+Y)/n)
print((1-p)**2/(2-p)**2)
```

Solution 13

1. La loi de X est une loi géométrique de paramètre 1/2.
2. Notons B l'événement consitant à obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience. Alors

$$\mathrm{B} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} (\mathrm{B}\cap\{\mathrm{X}=n\})$$

Or

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{X}=n) = \mathbb{P}_{\mathrm{X}=n}(\mathrm{B})\mathbb{P}(\mathrm{X}=n) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n n}$$

Comme

$$\forall x\in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

on obtient par intégration

$$\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

On peut vérifier avec Python.

```
from random import random
from math import log

def simul():
    nb=1
    while random()<.5:
        nb+=1
    return random()<1/nb

N=10**5
print(sum([simul() for n in range(N)])/N)
print(log(2))
```

Solution 14

1. X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=n) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}=n) = (1-p)^{n-1}p$$

2. **a.** U et V sont respectivement à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$. Soit alors $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$.
Traitons d'abord le cas où $m = 0$. Alors

$$\{(\mathrm{U}, \mathrm{V}) = (n, 0)\} = \{\mathrm{X} = n\} \cap \{\mathrm{Y} = n\}$$

donc, par indépendance de X et Y

$$\mathbb{P}((\mathrm{U}, \mathrm{V}) = (n, 0)) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = n)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = n) = p^2(1-p)^{2n-2}$$

Traitons maintenant le cas $m > 0$. Alors

$$\{(\mathrm{U}, \mathrm{V}) = (n, m)\} = (\{\mathrm{X} = n + m\} \cap \{\mathrm{Y} = n\})$$

A nouveau, par indépendance de X et Y,

$$\mathbb{P}((\mathrm{U}, \mathrm{V}) = (n, m)) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = n + m)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = n) = p^2(1-p)^{2n+m-2}$$

En intervertissant X et Y, on trouve que si $m < 0$,

$$\mathbb{P}((\mathrm{U}, \mathrm{V}) = (n, m)) = p^2(1-p)^{2n-m-2}$$

Dans tous les cas,

$$\mathbb{P}((\mathrm{U}, \mathrm{V}) = (n, m)) = p^2(1-p)^{2n+|m|-2}$$

On retrouve alors les lois marginales.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{U} = n) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{U} = n, \mathrm{V} = m) \\
&= p^2(1-p)^{2n-2} + 2\sum_{m=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2n+m-2} \\
&= p^2(1-p)^{2n-2} + 2p^2(1-p)^{2n-1}\sum_{m=1}^{+\infty}(1-p)^{m-1}
\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{m=1}^{+\infty}(1-p)^{m-1} = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{U} = n) = p(1-p)^{2n-2}(2-p) = \left((1-p)^2\right)^{n-1}\left(1-(1-p)^2\right)$$

Notamment, U suit la loi géométrique de paramètre $1-(1-p)^2$.
De la même manière

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{V} = m) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{U} = n, \mathrm{V} = m) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2n+|m|-2} \\
&= p^2(1-p)^{|m|}\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{2(n-1)} \\
&= p^2(1-p)^{|m|} \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)^{|m|}}{2-p}
\end{aligned}$$

b. Il s'agit d'une simple vérification :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(\mathrm{U} = n)\mathbb{P}(\mathrm{V} = m) = p(1-p)^{2n-2}(2-p) \cdot \frac{p(1-p)^{|m|}}{2-p} = p^2(1-p)^{2n+|m|-2} = \mathbb{P}(\{\mathrm{U} = n\} \cap \{\mathrm{V} = m\})$$

3. L'énoncé suppose implicitement que U et V sont respectivement à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$. Puisque $X = U + \max(V, 0)$ et $Y = U - \min(V, 0)$, X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Posons $p_n = \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par indépendance de U et V d'une part et de X et Y d'autre part,

$$\mathbb{P}(U = n)\mathbb{P}(V = 0) = \mathbb{P}(U = n, V = 0) = \mathbb{P}(X = n, Y = n) = p_n^2$$

De même,

$$¶(U = n)\mathbb{P}(V = 1) = \mathbb{P}(U = n, V = 1) = \mathbb{P}(X = n + 1, Y = n) = p_n p_{n+1}$$

Par hypotèse ces deux quantités ne sont pas nulles, donc en divisant membre à membre

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\mathbb{P}(V = 1)}{\mathbb{P}(V = 0)}$$

La suite de terme général $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ est donc constante i.e. la suite (p_n) est géométrique. En notant $1 - p$ sa raison, $p_n = (1 - p)^{n-1} p_1$. Mais comme $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$, $p_1 = p$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = (1 - p)^{n-1} p$$

donc X et Y suivent bien la loi géométrique de paramètre p.
On a vu plus haut que $1 - p = \frac{\mathbb{P}(V=1)}{\mathbb{P}(V=0)}$ i.e. $p = 1 - \frac{\mathbb{P}(V=1)}{\mathbb{P}(V=0)}$.

Solution 15

---

1. **a.** Les variables aléatoires Y_k sont mutuellement indépendantes.
On a clairement $Y_1 = 1$.

b. Y_k suit la loi géométrique de paramètre $\frac{n-k+1}{n} = 1 - \frac{k-1}{n}$. On en déduit que $\mathbb{E}(Y_k) = \frac{n}{n-k+1}$ et que $\mathbb{V}(Y_k) = \frac{\frac{k-1}{n}}{\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2} = \frac{n(k-1)}{(n-k+1)^2}$.

2. On a clairement $X = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n - k + 1} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = n H_n$$

3. Par comparaison série/intégrale, on obtient classiquement $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Par conséquent, $\mathbb{E}(X) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n$.

Solution 16

---

1. D'après une identité de polarisation :

$$2\,\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{V}(V + Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)$$

Or une loi de Poisson a une variance égale à son espérance donc

$$2\,\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X + Y) - \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = 0$$

par linéarité de l'espérance.

2. Soient λ et μ deux réels strictement positifs. Posons $a_n = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ et $b_n = \frac{e^{-\mu}\mu^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Posons également $p_{i,j} = a_i b_j$ pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ de manière générale sauf

$$p_{0,1} = a_0 b_1 - \alpha \qquad p_{1,0} = a_1 b_0 + \alpha \qquad p_{0,2} = a_0 b_2 + \alpha \qquad p_{2,0} = a_2 b_0 - \alpha$$

où l'on choisit par exemple $\alpha = \min\{a_0 b_1, a_2 b_0\}$. La famille $(a_i b_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille sommable de somme 1 via Fubini. La famille $(p_{i,j})$ est donc également une famille sommable de réels positifs (on a choisit α pour cela) de somme 1. Il existe donc une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ telle que $\mathbb{P}(Z = (i, j)) = p_{i,j}$. Posons $Z = (X, Y)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_{n,k} = a_n \qquad \mathbb{P}(Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_{k,n} = b_n$$

de telle sorte que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} p_{k,n-k} = e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$$

via la formule du binôme de Newton (l'égalité reste encore valable pour $n=1$ et $n=2$ car les α se simplifient). Ainsi $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.
Enfin, X et Y ne sont pas indépendantes. Par exemple, $\mathbb{P}(X=0, Y=1) = p_{0,1}$ et $\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=1) = a_0 b_1 \neq p_{0,1}$ puisque $\alpha > 0$.

Solution 17

---

1. Si n voitures sont passés en 1H, chacune de ces voitures a une probabilité $\frac{1}{m}$ de chosir le gucihet n°1. Ainsi la loi de X conditionnée par l'événement $N=n$ est une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{m}$. Autrement dit

$$\mathbb{P}(X=k \mid N=n) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k}$$

2. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k \mid N=n)\mathbb{P}(N=n)$$

Or $\mathbb{P}(X=k \mid N=n) = 0$ lorsque $k > n$ donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k \mid N=n)\mathbb{P}(N=n)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k \mid N=n+k)\mathbb{P}(N=n+k)\\ &= \sum_{n=}^{+\infty}\binom{n+k}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k\left(1-\frac{1}{m}\right)^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!}\\ &= e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^k\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

3. On reconnaît la somme d'une série exponentielle

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\frac{1}{n!} = e^{\lambda\left(1-\frac{1}{m}\right)}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\frac{\lambda}{m}}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^k\frac{1}{k!}$$

Par conséquent, X suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{m}$.

4. C'est du cours : $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \frac{\lambda}{m}$.

Solution 18

---

1. L'application $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $t^n e^{-t^2} \underset{\pm\infty}{=} \frac{1}{t^2}$ par croissances comparées. donc l'intégrale I_n converge par comparaison à une intégrale de Riemann.

2. Remarquons que

- $t \mapsto t^{n+1}/(n+1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;
- $t \mapsto e^{-t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;
- $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}e^{-t^2} = 0$.

Donc, par intégration par parties

$$\mathrm{I}_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t^{n+2}}{n+1}e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$$

ou encore

$$2\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\mathrm{I}_n$$

Comme $t \mapsto te^{-t^2}$ est impaire, $\mathrm{I}_1 = 0$. Ainsi $\mathrm{I}_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, On montre également que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\mathrm{I}_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

3. On utilise la formule de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{Y}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}=n)\mathrm{I}_n \\
&= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n \mathrm{I}_n}{n!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n} \mathrm{I}_{2n}}{(2n)!} \\
&= e^{-\lambda}\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{2^{2n}n!} \\
&= e^{-\lambda}\sqrt{\pi}e^{\frac{\lambda^2}{4}} \\
&= \sqrt{\pi}e^{-\lambda+\frac{\lambda^2}{4}}
\end{aligned}$$

L'utilisation de la formule de transfert est justifiée a posteriori puisque le calcul précédent montre que la série à termes postifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathrm{X}=n)\mathrm{I}_n$ converge.

Espérance et variance

Solution 19

Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}(\mathrm{X}>n) &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (1-\mathbb{P}(\mathrm{X}\leq n)) \\
&= \mathrm{N}+1-\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}=k) \\
&= \mathrm{N}+1-\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}(\mathrm{X}=k) \\
&= \mathrm{N}+1-\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}(\mathrm{N}+1-k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) \\
&= (\mathrm{N}+1)\left(1-\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)\right)+\sum_{k=0}^{n}k\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) \\
&= (\mathrm{N}+1)\mathbb{P}(\mathrm{X}>\mathrm{N})+\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}k\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)
\end{aligned}$$

Supposons que X admette une espérance finie. Alors la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(X=k)$ converge. Alors son reste est défini et tend vers 0. De plus,

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) \geq (N+1)\sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = (N+1)\mathbb{P}(X>N) \geq 0$$

donc, par encadrement,

$$\lim_{N\to+\infty} (N+1)\mathbb{P}(X>N) = 0$$

On en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X>N)$ converge et que $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>n)$.
Supposons maitenant que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X>n)$ converge. On remarque alors tout simplement que

$$\sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(X>n) - (N+1)\mathbb{P}(X>N) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>n)$$

Ainsi la suite des sommes partielles de la série à termes *positifs* $\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(X=k)$ est majorée. Cette série converge donc, ce qui signifie que X admet une espérance finie.

Solution 20

---

1. Z est à valeurs dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. De plus, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\{Z\geq k\} = \bigcup_{I\in\mathcal{P}_k(\mathbb{N})} \bigcap_{i\in I} E_i$$

où $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ de cardinal k. L'ensemble $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ est dénombrable puisque l'application qui une partie $\{x_1,\dots,x_k\}$ de $\mathbb{N}$ (avec $x_1<\dots<x_k$) associe $(x_1,\dots,x_k)$ est une injection de $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}^k$. Par conséquent, $\{Z\geq k\}$ est un événement en tant qu'union dénombrable d'événements. Ensuite

$$\{Z=k\} = \{Z\geq k\}\setminus\{Z\geq k+1\}$$

donc $\{Z=k\}$ est aussi un événement.
Enfin

$$\{Z=\infty\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{Z\geq k\}$$

donc $\{Z=\infty\}$ est aussi un événement comme intersection dénombrable d'événement.
Ceci prouve que Z est bien une variable aléatoire.

2. Remarquons que

$$\overline{F} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} E_k$$

donc F est un événement. De plus,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} E_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(E_k)$$

Comme la série $\sum \mathbb{P}(E_n)$ converge, la suite de ses restes converge vers 0 i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(E_k) = 0$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} E_k\right) = 0$$

La suite $\left(\bigcup_{k\geq n} E_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour l'inclusion donc, par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}(\overline{F}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} E_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} E_k\right) = 0$$

puis $\mathbb{P}(F) = 1$.

3.

Fonctions génératrices

Solution 21

Comme les X_k sont indépendantes,

$$G_S(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k(t-1)} = e^{\Lambda(t-1)}$$

en notant $\Lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$. On en déduit que S suit la loi de Poisson de paramètre Λ.

Solution 22

On a alors $G_{X_i}(t) = (1-p+pt)^{n_i}$. Comme les X_i sont indépendantes,

$$G_S(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t) = (1-p+pt)^n$$

en posant $n = \sum_{i=1}^{n} n_i$. Ainsi $S \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Solution 23

1. Remarquons que S est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\{S = n\} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} (\{N = n\} \cap \{S_k = n\})$$

en posant $S_k = \sum_{i=0}^{k} X_i$. Les S_k sont des variables aléatoires comme sommes *finies* de variables aléatoires réelles donc les ensembles $\{S_k = n\}$ sont des événements. Ainsi $\{S = n\}$ est bien un événement comme réunion dénombrable d'événements. S est donc bien une variable aléatoire.

2. Soit $m \in \mathbb{N}$. Puisque $(N = n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements

$$\mathbb{P}(S = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = m, N = n)$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires S et $\sum_{k=1}^{n} X_k$ coïncident sur l'événement $N = n$ donc

$$\mathbb{P}(S = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = m, N = n\right)$$

puis par indépendance des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n, N$

$$\mathbb{P}(S = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = m\right) \mathbb{P}(N = n)$$

Soit $t \in [0,1]$.

$$G_S(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = m) t^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = m\right) \mathbb{P}(N = n) t^m$$

Cette égalité et le fait que la famille $\left(\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = m\right) \mathbb{P}(N = n) t^m\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est une famille de réels positifs permettent d'appliquer le théorème de Fubini de sorte que

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = m\right) t^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) G_{\sum_{k=1}^{n} X_k}(t)$$

Or $G_{\sum_{k=1}^{n} X_k} = G_X^n$ car $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi que X donc

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) G_X(t)^n = G_N \circ G_X(t)$$

3. Puisque X et N admettent des espérances finies, G_X est dérivable en 1 et G_N est dérivable en $1 = G_X(1)$. Il s'ensuit que G_S est dérivable en 1 et que

$$G_S'(1) = G_X'(1)G_N'(G_X(1)) = G_X'(1)G_N'(1)$$

Autrement dit, S admet une espérance finie et $E(S) = E(X)E(N)$.

4. Puisque X et N admettent des moments d'ordre deux, G_X est deux fois dérivable en 1 et G_N est deux fois dérivable en $1 = G_X(1)$. Il s'ensuit que G_S est deux fois dérivable en 1 et donc que S admet un moment d'ordre deux. De plus

$$G_S''(1) = G_X'(1)^2G_N''(G_X(1)) + G_X''(1)G_N'(G(1)) = G_X'(1)^2G_N''(1) + G_X''(1)G_N'(1)$$

puis

$$\begin{aligned} V(S) &= G_S''(1) + G_S'(1) - G_S'(1)^2 \\ &= G_X'(1)^2G_N''(1) + G_X''(1)G_N'(1) + G_X'(1)G_N'(1) - G_X'(1)^2G_N'(1)^2 \\ &= G_X'(1)^2(G_N''(1) + G_N'(1) - G_N'(1)^2) + G_N'(1)(G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2) \\ &= E(X)^2V(N) + E(N)V(X) \end{aligned}$$

Inégalités

Solution 24

---

1. On fixe $t \in \mathbb{R}$. Soit $x \in [-1, 1]$. Alors $\frac{1}{2}(1-x) \geq 0$, $\frac{1}{2}(1+x) \geq 0$ et $\frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1+x) = 1$. Comme la fonction exp est convexe, par inégalité de Jensen,

$$\exp\left(\frac{1}{2}(1-x)(-t) + \frac{1}{2}(1+x)t\right) \leq \frac{1}{2}(1-x)\exp(-t) + \frac{1}{2}(1+x)\exp(t)$$

ou encore

$$e^{tx} \leq \frac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)e^t$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On sait que

$$\operatorname{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{et} \qquad e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

Or

$$(2n)! = 2^n n! \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$$

donc $(2n)! \geq 2^n n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\operatorname{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.

3. Fixons $t \in \mathbb{R}$. Puisque X est à valeurs dans $[-1, 1]$.

$$e^{tX} \leq \frac{1}{2}(1-X)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+X)e^t$$

d'après la première question. Par croissance est linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \frac{1}{2}(1-\mathbb{E}(X))e^{-t} + \frac{1}{2}(1+\mathbb{E}(X))e^t$$

Or X est centrée donc $\mathbb{E}(X) = 0$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \frac{e^{-t}+e^t}{2} = \operatorname{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

4. Soit $(t, \varepsilon) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Puisque $x \mapsto e^{tx}$ est strictement croissante ($t > 0$), $[Y \geq \varepsilon] = [e^{tY} \geq e^{t\varepsilon}]$ puis $\mathbb{P}(Y \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{tY} \geq e^{t\varepsilon})$. Comme e^{tY} est positive, l'inégalité de Markov donne

$$\mathbb{P}(e^{tY} \geq e^{t\varepsilon}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tY})}{e^{t\varepsilon}}$$

On en déduit bien que

$$\mathbb{P}(Y \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon}\mathbb{E}(e^{tY})$$

5. Soit $(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(\mathrm{S} \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon}\mathbb{E}(e^{t\mathrm{S}})$$

Comme les variables aléatoires $\exp(t\mathrm{X}_k)$ sont indépendantes,

$$\mathbb{E}(e^{t\mathrm{S}_n}) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{t\mathrm{X}_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e^{t\mathrm{X}_k})$$

Remarquons maintenant que les X_k/c_k sont à valeurs dans $[-1, 1]$. Ainsi

$$\mathbb{E}(e^{t\mathrm{X}_k/c_k}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

Quitte à remplacer t par tc_k, on en déduit que

$$\mathbb{E}(e^{t\mathrm{X}_k}) \leq e^{\frac{t^2c_k^2}{2}}$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(\mathrm{S} \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon}\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{t^2c_k^2}{2}} = e^{\frac{t^2a}{2}-t\varepsilon}$$

en posant $a = \sum_{k=1}^{n} c_k^2$. La fonction $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{t^2a}{2} - t\varepsilon$ admet un minimum en $\frac{\varepsilon}{a}$ et celui-ci vaut $-\frac{\varepsilon^2}{2a}$ donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{S} \geq \varepsilon) \leq e^{-\frac{\varepsilon^2}{2a}}$$

Enfin, les variables $-\mathrm{X}_k$ vérifient les mêmes hypothèses que les variables X_k donc on a également

$$\mathbb{P}(\mathrm{S} \leq -\varepsilon) = \mathbb{P}(-\mathrm{S} \geq \varepsilon) \leq e^{\frac{-\varepsilon^2}{2a}}$$

Comme $[|\mathrm{S}| \geq \varepsilon]$ est l'union disjointe de $[\mathrm{S} \leq -\varepsilon]$ et $[\mathrm{S} \geq \varepsilon]$,

$$\mathbb{P}(|\mathrm{S}| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(\mathrm{S} \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(\mathrm{S} \leq -\varepsilon) \leq 2e^{\frac{-\varepsilon^2}{2a}}$$

Solution 25

---

1. Soit $(x, t) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}$. La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ et les réels $\frac{1-x}{2}$ et $\frac{1+x}{2}$ sont positifs et de somme 1. Par convexité

$$\exp\left(-t\frac{1-x}{2} + t\frac{1+x}{2}\right) \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}$$

ou encore

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}$$

2. Comme X est bornée, $e^{t\mathrm{X}}$ également donc elle admet une espérance. Comme X est à valeurs dans $[-1, 1]$, on peu appliquer la question précédente pour affirmer que

$$e^{t\mathrm{X}} \leq \frac{1-\mathrm{X}}{2}e^{-t} + \frac{1+\mathrm{X}}{2}e^{t}$$

Par linéarité et croissance de l'espérance

$$\mathbb{E}(\mathrm{E}^{tx}) \leq e^{-t}\frac{1-\mathbb{E}(\mathrm{X})}{2} + e^{t}\frac{1+\mathbb{E}(\mathrm{X})}{2}$$

Or X est centrée donc $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 0$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(e^{t\mathrm{X}}) \leq \operatorname{ch}(t)$$

Remarquons alors que

$$\operatorname{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

En effet, $2^n n!$ est le produit des entiers naturels pairs inférieurs ou égaux à $2n$ donc $2^n n! \leq (2n)!$.

Remarque. On peut également étudier la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{t^2}{2} - \ln(\operatorname{ch} t)$ pour établir cette inégalité.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par indépendance de $X_1, \dots, X_n$,

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{tX_i})$$

Comme X_i/a_i est centrée et que $|X_i/ai_|\leq 1$,

$$\mathbb{E}(E^{tX_i}) = \mathbb{E}(e^{ta_i\cdot\frac{X_i}{a_i}}) \leq e^{\frac{(ta_i)^2}{2}} = e^{\frac{t^2a_i^2}{2}}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq \prod_{i=1}^n e^{\frac{t^2a_i^2}{2}} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2\right)$$

4. Puisque $\{|S_n| \geq a\} = \{S_n \geq a\} \sqcup \{-S_n \geq a\}$,

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq a) = \mathbb{P}(S_n \geq a) + \mathbb{P}(-S_n \geq a)$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Par stricte croissance de $x \mapsto e^{tx}$,

$$\{S_n \geq a\} = \left\{e^{tS_n} \geq e^{ta}\right\} \qquad \text{et} \qquad \{-S_n \geq a\} = \left\{e^{-tS_n} \geq e^{ta}\right\}$$

Les variables aléatoires e^{tS_n} et e^{-tS_n} sont positives donc d'après l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(e^{tS_n} \geq e^{ta}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{e^{ta}} \qquad \text{et}\mathbb{P}(e^{-tS_n} \geq e^{ta}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{-tS_n})}{e^{ta}}$$

D'après la question précédente,

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq e^{\frac{st^2}{2}}$$

Mais comme les $-X_i$ vérifient les mêmes hypothèses que les X_i, on a également

$$\mathbb{E}(e^{-tS_n}) \leq e^{\frac{st^2}{2}}$$

Finalement

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(|S_n| \geq a) \leq 2\exp\left(\frac{st^2}{2} - ta\right)$$

L'application $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{st^2}{2} - ta$ admet un minimum en $\frac{a}{s}$ valant $-\frac{a^2}{2s}$. Donc, par croissance de l'exponentielle,

$$\mathbb{E}(e^{-tS_n}) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2s}}$$

Temps d'arrêt

Solution 26

On note respectivement P_n et F_n le nombre de «piles» et de «faces» obtenus en n coups. En remarquant que $P_n + F_n = n$, l'événement $P_n = 2F_n$ est également l'événement $3F_n = n$. Remarquons que, F_n étant à valeurs entières, l'événement $3F_n = n$ est vide si n n'est pas multiple de 3. $F_{3n} = n$

Notons $T = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ \}$. On convient que $T = \infty$ si.

Posons $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(F_{3n} = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{2^{3n}}$ et $S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)$.

On vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_{n-k})\mathbb{P}(T = k)$$

$S_1 = 1 + S_1S_2$

$f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{2^{3n}} = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$

Finalement

$\mathbb{P}(T = \infty) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1 - S_2 = \frac{1}{S_1} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+3}$

Solution 27

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. T_1 suit la loi géométrique de paramètre p.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\{T_r = n\} = \{S_{n-1} = r-1\} \cap \{X_n = 1\}$$

Or S_{n-1} et X_n sont indépendantes d'après le lemme des coalitions donc

$$\mathbb{P}(T_r = n) = \mathbb{P}(S_{n-1} = r-1)\,\mathbb{P}(X_n = 1)$$

De plus, S_{n-1} suit la loi de Bernoulli de paramètres $n-1$ et p en tant que somme de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p donc

$$\mathbb{P}(T_r = n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{(n-1)-(r-1)} \cdot p = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

3. **Première méthode.** On remarque que

$$\overline{\{T_r = +\infty\}} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{T_r = n\}$$

donc

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(T_r = +\infty) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_r = n) \\ &= \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \\ &= p^r \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} (1-p)^{n-r} \end{aligned}$$

On sait que pour $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

donc en dérivant $r-1$ fois

$$\frac{(r-1)!}{(1-x)^r} = \sum_{n=r-1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-r+1)!} x^{n-r+1}$$

ou encore

$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{n=r-1}^{+\infty} \binom{n}{r-1} x^{n-r+1} = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} x^{n-r}$$

Notamment,

$$\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} (1-p)^{n-r} = \frac{1}{(1-(1-p))^r} = \frac{1}{p^r}$$

On en déduit que $1 - \mathbb{P}(T_r = +\infty) = 1$ i.e. $\mathbb{P}(T_r = +\infty) = 0$.

Deuxième méthode. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\{T_r = +\infty\} \subset \{T_r > n\} = \{S_n \leq r\}$$

donc

$$\mathbb{P}(T_r = +\infty) \leq \mathbb{P}(S_n \leq r)$$

Or

$$\mathbb{P}(S_n \leq r) = \sum_{k=0}^{r} \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} p^r (1-p)^{n-r}$$

Pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $\binom{n}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$ donc, par croissances comparées,

$$\lim_{n \to +\infty} \binom{n}{k} p^r (1-p)^{n-r} = 0$$

Par somme finie,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n \leq r) = 0$$

On en déduit à nouveau que $\mathbb{P}(T_r = +\infty) = 0$.

Solution 28

---

1. Dans la suite, on notera F_n (resp. P_n) l'événement «on a obtenu "pile" (resp. "face") au $n^{\text{ème}}$ lancer.

- $\{X = 2\} = P_1 \cap P_2$ donc $p_2 = \frac{4}{9}$.
- $\{X = 3\} = F_1 \cap P_2 \cap P_3$ donc $p_3 = \frac{4}{27}$.

2. Remarquons que F_1, $P_1 \cap F_2$ et $P_1 \cap P_2$ forment un système complet d'événements. On écrit la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X = n+2) = \mathbb{P}(X = n+2 \mid F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(X = n+2 \mid P_1 \cap F_1)\mathbb{P}(P_1 \cap F_1) + \mathbb{P}(X = n+2 \mid P_1 \cap P_2)\mathbb{P}(P_1 \cap P_2)$$

- Lorsque l'on a obtenu face au premier lancer, on doit alors obtenir le premier double pile à la fin des $n+1$ lancers restants. Ainsi $\mathbb{P}(X = n+2 \mid F_1) = p_{n+1}$.
- Lorsque on a déjà obtenu deux piles consécutifs lors des deux premiers lancers, il est désormais impossible d'obtenir le premier double pile au $(n+2)^{\text{ème}}$ lancer. Ainsi $d\mathrm{P}(X = n+2 \mid P_1 \cap P_2) = 0$.
- Lorsque l'on a ontenu un pile puis un face lors des deux premiers lancers, on doit alors obtenir le premier double pile à la fin des n lancers restants. Ainsi $\mathbb{P}(X = n+2 \mid P_1 \cap F_1) = p_n$.

Finalement, $p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$.

3. Au vu des valeurs de p_2 et p_3, on doit choisir $p_1 = 0$.

4. Le polynôme caractéristique associé à la relation de récurrence précédente est $X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{2}{9}$. Ses racines sont $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = A\left(\frac{2}{3}\right)^n + B\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

En particulier,

$$\begin{cases} \frac{2}{3}A - \frac{1}{3}B = p_1 = 0 \\ \frac{4}{9}A + \frac{1}{9}B = p_2 = \frac{4}{9} \end{cases}$$

ce qui donne $A = \frac{2}{3}$ et $B = \frac{4}{3}$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

5. On sait que $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$ pour $q \in]-1, 1[$. On en déduit sans peine que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n = \frac{15}{4}$$

Solution 29

---

1. S_0 est constante égale à 0. Le support de S_1 est clairement $\{-1, 1\}$, $\mathbb{P}(S_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(S_1 = -1) = 1 - p$.
Le support de S_2 est clairement $\{-2, 0, 2\}$, $\mathbb{P}(S_2 = 2) = p^2$, $\P(S_2 = 2) = (1-p)^2$ et $\mathbb{P}(S_2 = 0) = 2p(1-p)$.

2. Notons X_n le déplacement vers du point mobile à l'instant n de sorte que $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p$. On suppose implictement les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes. Alors $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ (somme nulle si $n = 0$). Remarquons que $\frac{1}{2}(X_n + 1)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Ainsi $R_n = \frac{1}{2}(S_n + n)$ suit une loi binomiale de paramètres n et p. En particulier, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(R_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Par conséquent, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(S_n = 2k - n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On remarque que si n est pair, S_n ne prend que des valeurs paires et que si n est impair, S_n ne prend que des valeurs impaires. Plus précisément,

$$\forall k \in [\![-n, n]\!],\ \mathbb{P}(S_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k}(1-p)^{n-k}$$

et

$$\forall k \in [\![-n-1, n]\!],\ \mathbb{P}(S_{2n+1} = 2k+1) = \binom{2n+1}{n+k+1} p^{n+k+1}(1-p)^{n-k}$$

3. D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{2n+1} = 0$$

et

$$p_{2n} = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in [0, 1]$. La suite (p_n) est donc bornée de sorte que le rayon de convergence de la série entière $\sum p_n t^n$ vaut au moins 1.
On montre classiquement que

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} x^n$$

donc

$$\forall t \in]-1, 1[,\ P(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n} t^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} (4p(1-p)t^2)^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 4p(1-p)t^2}}$$

car $0 \leq p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$.

5. Comme les événements $\{T = n\}$ sont disjoints, la série à termes positifs $\sum q_n$ converge. On en déduit que la série entière $\sum q_n t^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. Notamment sa somme Q est continue sur $[-1, 1]$.

6. En faisant intervenir un produit de Cauchy de deux séries entières, il suffit en fait de prouver que $p_0 = 1$ (ce qui est clair) et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \sum_{k=1}^n p_{n-k} q_k$$

Remarquons que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\{S_n = 0\} &= \bigsqcup_{k=1}^n \{S_n = 0\} \cap \{T = k\} \\
&= \bigsqcup_{k=1}^n \left\{ \sum_{j=k+1}^n X_j = 0 \right\} \cap \{T = k\}
\end{aligned}$$

Remarquons que l'événement $\{T = k\}$ peut se décrire uniquement à l'aide de $X_1, \dots, X_k$:

$$\{T = k\} = \left\{ \sum_{j=1}^k X_j = 0 \right\} \cap \left[\bigcap_{\ell=1}^{k-1} \left\{ \sum_{j=1}^{\ell} X_j \neq 0 \right\} \right]$$

donc les événements $\left\{\sum_{j=k+1}^{n} \mathrm{X}_j = 0\right\}$ et $\{\mathrm{T} = k\}$ sont indépendants d'après le lemme des coalitions. Ainsi

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\sum_{j=k+1}^{n} \mathrm{X}_j = 0\right) q_k$$

Or $\sum_{j=k+1}^{n} \mathrm{X}_j$ suit la même loi que S_{n-k} donc

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} p_{n-k} q_k$$

7. Pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\mathrm{Q}(t) = 1 - \frac{1}{\mathrm{P}(t)} = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)t^2}$$

En primitivant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[,\ 1 - \sqrt{1-x} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{2^{2n-1}} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)} x^n$$

On en déduit que

$$\forall t \in]-1,1[,\ \mathrm{Q}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)} p^n (1-p)^n t^{2n}$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)} p^n (1-p)^n \text{ et } \mathbb{P}(\mathrm{T} = 2n-1) = 0$$

Enfin $q_0 = 0$.

8. L'événement de l'énoncé est $\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \{\mathrm{T} = n\}$. Comme Q est continue en 1,

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \{\mathrm{T} = n\}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = \mathrm{Q}(1) = \lim_{t \to 1} 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)t^2} = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)} = 1 - |2p-1|$$

On remarque notamment que cette probabilité vaut 1 lorsque $p = \frac{1}{2}$.

9. Q est la fonction génératrice de T. On remarque que Q n'est pas dérivable en 1. En effet, en posant $\alpha = 4p(1-p) \in [0,1]$,

$$\forall t \in]-1,1[,\ \frac{\mathrm{Q}(t) - \mathrm{Q}(1)}{t-1} = \frac{\sqrt{1-\alpha t^2}}{1-t}$$

Si $\alpha \neq 1$, il est clair que

$$\lim_{t \to 1} \frac{\sqrt{1-\alpha t^2}}{1-t} = +\infty$$

et si $\alpha = 1$,

$$\frac{\sqrt{1-\alpha t^2}}{1-t} = \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}} \xrightarrow[t \to 1]{} +\infty$$

Solution 30

---

1. a. Le nombre de tirages possibles est $\binom{2n}{n}$.

b. Notons A l'ensemble des tirages possibles et A_k le nombre de tirages dans lesquels figurent k boules blanches. Alors $\mathrm{A} = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k$. De plus, se donner un tirage dans A_k équivaut à choisir k boules parmi les n boules blanches et $n-k$ boules parmi les n noires. Ainsi

$$\binom{2n}{n} = \mathrm{card}(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{card}(\mathrm{A}_k) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

2. **a.** Pour que la puce se retrouve en O, il faut qu'elle est sauté autant de fois à gauche qu'à droite et le nombre de sauts doit donc être pair. Ainsi $\mathbb{P}(\mathrm{C}_{2n+1}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, si le nombre de sauts est $2n$, il y faut placer n sauts à droite parmi les $2n$ sauts, le reste des sauts étant à gauche. Ainsi $\P(\mathrm{C}_{2n}) = \binom{2n}{\cdot}\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

b. D'après la formule de Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Ainsi

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})^2} = \frac{2^{2n}}{=}\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

puis

$$\mathbb{P}(\mathrm{C}_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

puis $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{C}_{2n}) = 0$.

3. **a.** Pour se retrouver à l'origine, il faut, pour les mêmes raisons que précédemment, un nombre pair de déplacements horizontaux et un nombre pair de déplacements verticaux. Ainsi pour se retrouver à l'origine en $2n$ coups :

- on fixe un nombre $2k$ ($k \in [\![0, n]\!]$) de déplacements horizontaux (les $2n - 2k$ déplacements restants sont horizontaux) ;
- on choisit k déplacements à doite parmi les $2k$ déplacements horizontaux (les k déplacements restants étant à gauche) ;
- on choisit $n - k$ déplacements vers le haut parmi les $2n - 2k$ déplacements verticaux (les $n - k$ déplacements restants étant vers le bas).

Finalement

$$\mathbb{P}(\mathrm{C}_{2n}) = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}\binom{2n-k}{n-k} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}^2$$

b. On avait trouvé précédemment

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

donc

$$\binom{2n}{n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^{2n}}{\pi n}$$

puis

$$\mathbb{P}(\mathrm{C}_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n}$$

et enfin $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{C}_{2n}) = 0$.