Interrogation écrite n°15

NOM : Prénom : Note :

1. Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de M en fonction de la valeur de a.

3. Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et préciser sa dimension.

4. Écrire la matrice A de l'endomorphisme $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & XP' - X^2P(1) \end{array} \right.$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner des bases du noyau et de l'image de A et en déduire des bases du noyau et de l'image de u.

5. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $M + M^T = \operatorname{tr}(M)M \iff \big(M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) \text{ OU } (M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \text{ ET } \operatorname{tr}(M) = 2)\big)$.