Devoir surveillé n°10

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

Partie I – Etudes d'endomorphismes donnés par leur matrice

1. Soient u et v deux réels. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ ayant pour matrice dans la base canonique $(1, X, X^2)$ la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{pmatrix}$$

a. Calculer le déterminant de f en justifiant votre réponse.

b. Déterminer des bases du noyau de f et de l'image de f.

2. Soit w un réel. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ ayant pour matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3w \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Calculer le déterminant de g en justifiant votre réponse.
On notera w_0 la valeur qui annule ce déterminant.

b. Déterminer une base du noyau de g lorsque $w = w_0$.

Partie II – Définition d'une application linéaire, exemples et propriétés

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, Q un polynôme unitaire de degré 2 à coefficients réels et φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = 2P'Q - nPQ'$$

3. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Soient u et v deux réels. On suppose dans cette question que $n = 2$ et $Q = X^2 + uX + v$.

a. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Déterminer le noyau de φ en fonction de Q.

5. Soit w un réel. On suppose dans cette question que $n = 3$ et $Q = X^2 + 2X + w$.

a. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. Déterminer le noyau de φ en fonction des valeurs de w.

On revient maintenant au cas général : dans toute la fin de l'énoncé, n est à nouveau un entier quelconque supérieur ou égal à 2 et Q un polynôme de degré 2 unitaire.

6. On suppose que Q admet une racine double α.

a. Justifier que $((X-\alpha)^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Déterminer le noyau de φ et l'image de φ.

7. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. En dérivant la fraction rationnelle $\dfrac{P^2}{Q^n}$, montrer que P appartient au noyau de φ si et seulement si P^2 est colinéaire à Q^n.

8. On suppose que Q n'admet pas de racine double. Montrer que

- si n est impair, le noyau de φ est nul ;
- si n est pair, le noyau de φ est la droite engendrée par $Q^{n/2}$.

Exercice 1 ★★

On cherche à déterminer la nature et la somme éventuelle de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon_n}{n}$ pour diverses suites $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{-1,1\}$.
On notera $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon_n}{n}$ la somme partielle de rang $N \in \mathbb{N}^*$ d'une telle série.

On admettra le résultat suivant.

> Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Si pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $(u_{pn+k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

1. On suppose dans cette question que $\varepsilon_n = (-1)^n$ et on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

- **a.** Justifier que la suite de terme général $H_n - \ln(n)$ converge. On notera γ sa limite.
- **b.** Justifier que $S_{2N} = H_N - H_{2N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.
- **c.** En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon_n}{n}$.

2. On suppose dans cette question que $\varepsilon_{3n+1} = 1$, $\varepsilon_{3n+2} = 1$ et $\varepsilon_{3n+3} = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Justifier que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon_n}{n}$ diverge.

3. On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varepsilon_{4n+1} = \varepsilon_{4n+2} = 1 \qquad \varepsilon_{4n+3} = \varepsilon_{4n+4} = -1$$

- **a.** Justifier que pour tout entier naturel N,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} = \int_0^1 \frac{1 - x^{4N+4}}{1+x^2}\, dx$$

- **b.** En déduire l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} = \frac{\pi}{4}$.
- **c.** Calculer de même la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4}$.
- **d.** En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon_n}{n}$ est convergente et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.

4. On suppose enfin dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varepsilon_{6n+1} = \varepsilon_{6n+2} = \varepsilon_{6n+3} = 1 \qquad \varepsilon_{6n+4} = \varepsilon_{6n+5} = \varepsilon_{6n+6} = -1$$

- **a.** Montrer que

$$\int_0^1 \frac{1+x+x^2}{1+x^3}\, dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln 2$$

- **b.** En s'inspirant de la question précédente, montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln 2$$