

SUITES NUMÉRIQUES

1 Généralités

1.1 Définition

Définition 1.1

On appelle suite réelle toute famille d'éléments de \mathbb{R} indexée sur \mathbb{N} ou, de manière équivalente, toute application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} . L'ensemble des suites réelles est donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

REMARQUE. Une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ peut-être notée u (application) ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (famille). On emploie également la notation (u_n) . Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le terme général de u est noté u_n (famille) plutôt que $u(n)$ (application). ■

REMARQUE. Par esprit de simplification, on ne traitera dans ce chapitre que des suites définies à partir du rang 0. On adaptera pour des suites définies à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$. ■

Modes de définition d'une suite

Une suite peut être définie de deux manières différentes.

De manière explicite On donne une formule explicite de u_n en fonction de n du type $u_n = f(n)$.

Par récurrence On donne les k premiers termes de la suite et une relation de récurrence exprimant u_n en fonction des k termes précédents. On dit alors que (u_n) est une suite récurrente d'ordre k . Une suite récurrente d'ordre 1 vérifie donc une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

De manière implicite u_n est défini comme solution d'une équation dépendant de n .

Exemple 1.1

- La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n^2 + 1}$ est une suite définie de manière explicite.
- La suite (u_n) de premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ et définie par la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est une suite récurrente d'ordre 2.



ATTENTION ! Une relation de récurrence ne permet pas toujours de bien définir une suite. Par exemple, il n'existe pas de suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2 + \sqrt{1 - u_n}$.

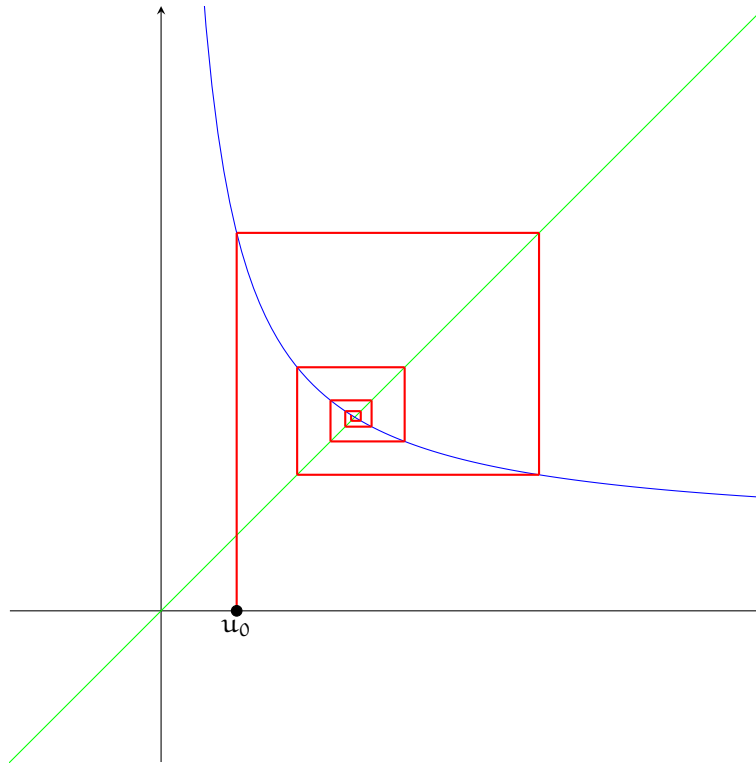
La proposition qui suit permet néanmoins de se tirer d'affaire.

Proposition 1.1

Soient D une partie de \mathbb{R} et f une fonction définie sur D à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que D est stable par f i.e. $f(D) \subset D$. Alors, pour tout $d \in D$, il existe une unique suite définie par $u_0 = d$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in D$.

Représentation graphique d'une suite récurrente d'ordre 1

On obtient la représentation graphique d'une suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ en traçant le graphe de f et la première bissectrice.



1.2 Vocabulaire

Définition 1.2 Suites constantes, stationnaires

Une suite (u_n) est *constante* s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = C$. Une suite est *stationnaire* si elle est constante à partir d'un certain rang.

Définition 1.3

On dit qu'une suite (u_n) est *majorée* (resp. *minorée*) s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq C$ (resp. $u_n \geq C$). On dit qu'une suite est *bornée* si elle est majorée et minorée.

Méthode Prouver qu'une suite est bornée

Pour prouver qu'une suite (u_n) est bornée, il est nécessaire et suffisant d'exhiber une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq C$.

Définition 1.4 Sens de variation

Une suite réelle (u_n) est croissante (resp. décroissante) si

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, n \leq p \implies u_n \leq u_p$$

Une suite est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Une suite réelle est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, n < p \implies u_n < u_p$$

Une suite est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.



ATTENTION ! Une suite peut n'être ni croissante, ni décroissante. C'est le cas par exemple des suites géométriques de raison négative.

Proposition 1.2

Soit (u_n) une suite réelle. Alors

- ▶ (u_n) est croissante *si et seulement si* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$;
- ▶ (u_n) est décroissante *si et seulement si* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$;
- ▶ (u_n) est strictement croissante *si et seulement si* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$;
- ▶ (u_n) est strictement décroissante *si et seulement si* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$.

Méthode Sens de variation d'une suite

Pour déterminer le sens de variation d'une suite (u_n) :

- ▶ on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- ▶ si la suite est *strictement positive*, on peut étudier la position de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.

REMARQUE. On utilisera la première méthode lorsque le terme général est défini à partir de sommes et de différences. On utilisera la deuxième méthode lorsque le terme général est défini à partir de produits et de quotients. ■

Exercice 1.1

Déterminer le sens de variation des suites de terme généraux $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $v_n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}$.

Proposition 1.3

Si une suite (u_n) est définie explicitement par $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si f est constante, majorée, minorée, bornée, croissante ou décroissante, alors (u_n) est constante, majorée, minorée, bornée, croissante ou décroissante.



ATTENTION ! La réciproque est fausse.

1.3 Suites classiques

Définition 1.5 Suites arithmétiques

On appelle suite *arithmétique* de *raison* $r \in \mathbb{K}$ toute suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

On a alors $u_n = u_0 + nr$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.6 Suites géométriques

On appelle suite *géométrique* de *raison* $q \in \mathbb{K}$ toute suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$$

On a alors $u_n = u_0 q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.7 Suites arithmético-géométriques

On appelle suite *arithmético-géométrique* toute suite (u_n) vérifiant une relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.

Méthode Calculer le terme général d'une suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$. On suppose $a \neq 1$ (sinon (u_n) est arithmétique).

- On détermine un point fixe de $x \mapsto ax + b$ i.e. on résout l'équation $x = ax + b$. Comme $a \neq 1$, on trouve une unique solution $l = \frac{b}{1-a}$.
- On montre que la suite $(u_n - l)$ est géométrique de raison a .
- On en déduit une expression du terme général de $(u_n - l)$ puis de (u_n) .

Exercice 1.2

Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = 3u_n - 4, \\ u_0 = -1 \end{cases}.$$

Définition 1.8 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2

On dit que $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 s'il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le *polynôme caractéristique* associée à une telle suite est $X^2 + aX + b$.

Proposition 1.4 Forme générale des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Pour $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$, on note $E_{a,b}$ l'ensemble des suites $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cas complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

- ▶ Si $\Delta \neq 0$, $E_{a,b}$ est l'ensemble des suites de terme général $\lambda r_1^n + \mu r_2^n$ où r_1 et r_2 sont les racines du polynôme caractéristique et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
- ▶ Si $\Delta = 0$, $E_{a,b}$ est l'ensemble des suites de terme général $(\lambda n + \mu)r^n$ où r est la racine double du polynôme caractéristique et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- ▶ Si $\Delta > 0$, $E_{a,b}$ est l'ensemble des suites de terme général $\lambda r_1^n + \mu r_2^n$ où r_1 et r_2 sont les racines réelles du polynôme caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- ▶ Si $\Delta = 0$, $E_{a,b}$ est l'ensemble des suites de terme général $(\lambda n + \mu)r^n$ où r est la racine double réelle du polynôme caractéristique et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- ▶ Si $\Delta < 0$, $E_{a,b}$ est l'ensemble des suites de terme général $\lambda r^n \cos(n\theta) + \mu r^n \sin(n\theta)$ où $re^{\pm i\theta}$ sont les racines complexes conjuguées du polynôme caractéristique et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

REMARQUE. La donnée de conditions initiales (valeurs de u_0 et u_1) permettent de déterminer les constantes λ et μ . ■

Exercice 1.3

1. Déterminer la suite réelle (u_n) telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer la suite réelle (u_n) telle que $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Limite d'une suite

2.1 Définition de la limite

Définition 2.1 Limite d'une suite

Soit (u_n) une suite.

- ◇ Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) admet l pour limite si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - l| \leq \varepsilon$$

- ◇ On dit que (u_n) admet $+\infty$ pour limite si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n \geq A$$

- ◇ On dit que (u_n) admet $-\infty$ pour limite si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n \leq A$$

REMARQUE. Les propositions où les inégalités larges finales sont remplacées par des inégalités strictes sont équivalentes. ■

REMARQUE.

- ◇ Dans le premier cas (limite égale à l), la définition signifie que les termes de (u_n) sont tous à une distance inférieure à ε à partir d'un certain rang N . Comme on peut choisir ε , cela signifie que les termes de la suite sont aussi proches que l'on veut de l quitte à ne considérer les termes qu'à partir d'un certain rang.

- ◇ Dans le second cas (limite égale à $+\infty$), la définition signifie que les termes de (u_n) sont tous supérieurs à A à partir d'un certain rang N . Comme on peut choisir A , cela signifie que les termes de la suite sont aussi grands positivement que l'on veut quitte à ne considérer les termes qu'à partir d'un certain rang.
- ◇ Dans le troisième cas (limite égale à $-\infty$), la définition signifie que les termes de (u_n) sont tous inférieurs à A à partir d'un certain rang N . Comme on peut choisir A , cela signifie que les termes de la suite sont aussi grands négativement que l'on veut quitte à ne considérer les termes qu'à partir d'un certain rang.

■



ATTENTION ! L'indice N de la définition dépend du choix de ε ou A .

REMARQUE. On peut condenser ces trois définitions en une seule en utilisant la notion de voisinage. La définition est la suivante.

Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) admet l pour limite si pour tout voisinage \mathcal{V} de l , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \implies u_n \in \mathcal{V}$.

■

REMARQUE. La définition «epsilonesque» de la limite sert assez peu en pratique. On possède de nombreux théorèmes pour montrer l'existence d'une limite et même la déterminer le cas échéant. ■

REMARQUE. On considère toujours la limite d'une suite quand n tend vers $+\infty$. Considérer la limite de u_n quand n tend vers un entier n'a aucun intérêt. ■

Exercice 2.1

Soit $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ de limite fine. Montrer que cette limite est entière et que u est stationnaire.

Théorème 2.1 Unicité de la limite

Soit (u_n) une suite. Si (u_n) possède une limite, elle est *unique*. On la note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. La relation $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ se note aussi souvent $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$.

REMARQUE. La notation $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ signifie en fait deux choses : primo, (u_n) admet une limite ; secundo, cette limite vaut l . On parle toujours de la valeur d'une limite sous réserve d'existence de celle-ci. ■

Proposition 2.1

Soient (u_n) une suite et $l \in \mathbb{R}$. Alors

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \iff u_n - l \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Proposition 2.2


Soit (u_n) une suite admettant $l > 0$ pour limite. Alors (u_n) est minorée par un réel *strictement positif* à partir d'un certain rang.

REMARQUE. Dire que (u_n) est minorée par un réel *strictement positif* à partir d'un certain rang est plus fort que de dire que (u_n) est strictement positive à partir d'un certain rang. Par exemple, la suite de terme général $\frac{1}{n}$ est strictement positive mais elle n'est en aucun cas minorée par un réel strictement positif (elle est au mieux minorée par 0). ■

2.2 Convergence et divergence


Définition 2.2 Convergence et divergence

On dit qu'une suite (u_n) *converge* ou qu'elle est *convergente* si elle possède une limite *finie*. Dans le cas contraire, on dit qu'elle *diverge* ou qu'elle est *divergente*.

 **ATTENTION !** Une suite divergente est une suite qui ne possède pas de limite ou qui tend vers $\pm\infty$.

Proposition 2.3

Toute suite convergente est bornée.

 **ATTENTION !** La réciproque de cette proposition est *fausse*. Il suffit par exemple de considérer la suite de terme général $(-1)^n$.

2.3 Limite et suites extraites

Définition 2.3 Suites extraites

Soit (u_n) une suite. On appelle *suite extraite* (ou sous-suite) de (u_n) toute suite du type $(u_{\varphi(n)})$ où φ est une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

REMARQUE. Une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} est une suite strictement croissante d'entiers naturels. On aurait pu également définir une suite extraite de (u_n) comme une suite de la forme $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ où $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers. ■

Exemple 2.1


Pour toute suite (u_n) , les suites $(u_{2,n})$ et (u_{2n+1}) sont deux suites extraites de (u_n) .

Lemme 2.1

Soit φ une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.

Théorème 2.2

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors toute suite extraite de (u_n) admet aussi l pour limite.

 **ATTENTION !** Il ne suffit pas qu'une suite extraire admette une limite pour garantir l'existence d'une limite pour la suite initiale.

REMARQUE. Le résultat reste vrai si l'on considère une suite du type $(u_{\varphi(n)})$ où φ n'est plus forcément une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} mais une application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} telle que la suite $(\varphi(n))$ soit de limite $+\infty$. ■

Proposition 2.4

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $(u_{2,n})$ et (u_{2n+1}) admettent pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors (u_n) admet également pour limite l .

Méthode Prouver qu'une suite diverge

Le théorème précédent permet de montrer qu'une suite (u_n) n'admet pas de limite par l'absurde. On suppose en effet que (u_n) admet une limite et on exhibe deux suites extraites de (u_n) qui admettent deux limites différentes. Ceci contredit alors l'unicité de la limite.

Exercice 2.2

Montrer que la suite de terme général $(-1)^n$ n'admet pas de limite.

2.4 Opérations sur les limites

Proposition 2.5 Limite d'une somme

Le tableau suivant résume les différents cas possibles.

| | | | | | |
|--------------------------------------------|---------------------|--------------------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ | $l \in \mathbb{R}$ | $l \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ | $l' \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$ | $l + l'$ | $+\infty$ | F.I. | $+\infty$ | $-\infty$ |

Proposition 2.6 Limite d'un produit

Le tableau suivant résume les différents cas possibles.

| | | | | | | | | | |
|----------------------------------------|---------------------|------------------------|------------------------|-------------|------------------------|------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ | $l \in \mathbb{R}$ | $l \in \mathbb{R}_+^*$ | $l \in \mathbb{R}_+^*$ | 0 | $l \in \mathbb{R}_-^*$ | $l \in \mathbb{R}_-^*$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ | $l' \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n$ | ll' | $+\infty$ | $-\infty$ | F.I. | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

Proposition 2.7 Limite de l'inverse

On suppose que la suite (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Le tableau suivant résume les différents cas possibles.

| | | | |
|----------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ | $l \in \mathbb{R}^*$ | 0 | $\pm\infty$ |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n}$ | $\frac{1}{l}$ | $\begin{cases} +\infty \text{ si } u_n > 0 \text{ à partir d'un certain rang} \\ -\infty \text{ si } u_n < 0 \text{ à partir d'un certain rang} \\ \text{pas de limite sinon} \end{cases}$ | 0 |

REMARQUE.

- ◇ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ avec $u_n > 0$ à partir d'un certain rang peut se noter $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$.
- ◇ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ avec $u_n < 0$ à partir d'un certain rang peut se noter $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^-$.

■

REMARQUE. La limite d'un quotient se déduit des tableaux donnant la limite d'un produit et de l'inverse puisque $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$. ■

2.5 Composition par une fonction

Proposition 2.8

Soit (u_n) une suite de limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction de limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ en l . Alors la suite $(f(u_n))$ admet L pour limite.

Corollaire 2.1

Soit (u_n) une suite de limite $l \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue en l . Alors la suite $(f(u_n))$ admet $f(l)$ pour limite.

Corollaire 2.2 Suite récurrente et point fixe

Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ et que f est continue en l , alors $f(l) = l$ i.e. l est un point fixe de f .

2.6 Limites classiques

Proposition 2.9 Limite d'une suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Si $|a| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$.
- Si $a = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 1$.
- Si $a > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$.
- Si $a \leq -1$, alors (a^n) n'admet pas de limite.

Exercice 2.3

Soit $a \in]-1, 1[$. Déterminer la limite de a^{2^n} .

2.7 Passage à la limite

Théorème 2.3 Passage à la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers l et l' . Soient $m, M \in \mathbb{R}$.

- ◇ Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $l \leq l'$.
- ◇ Si $u_n \leq M$ à partir d'un certain rang, alors $l \leq M$.
- ◇ Si $u_n \geq m$ à partir d'un certain rang, alors $l \geq m$.

REMARQUE. Autrement dit, le passage à la limite conserve les inégalités *larges*. Il ne conserve pas les inégalités strictes. Par exemple, $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} > 0$. Mais on a évidemment pas $0 > 0$. ■

Corollaire 2.3

Soit (u_n) une suite convergeant vers l .

- ◇ Si (u_n) est croissante, alors $u_n \leq l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ◇ Si (u_n) est décroissante, alors $u_n \geq l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ◇ Si (u_n) est strictement croissante, alors $u_n < l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ◇ Si (u_n) est strictement décroissante, alors $u_n > l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 Théorèmes d'existence de limites

3.1 Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration

Ces théorèmes proviennent de l'existence d'une relation d'ordre sur \mathbb{R} .

Théorème 3.1 Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites et $l \in \mathbb{R}$.

Théorème des gendarmes/d'encadrement : Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ et $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang, alors (v_n) admet une limite et celle-ci vaut l .

Théorème de minoration : Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors (v_n) admet une limite et celle-ci vaut $+\infty$.

Théorème de majoration : Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$ et $v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang, alors (v_n) admet une limite et celle-ci vaut $-\infty$.

REMARQUE. Ce théorème est un théorème d'existence : il prouve l'existence d'une limite. Il est vrai qu'il nous fournit en plus la valeur de la limite. Mais si l'existence de la limite était garantie, le simple théorème de passage à la limite nous aurait fourni la valeur de la limite. ■

Exercice 3.1

Déterminer la limite de $(n!)$ et de $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.

REMARQUE. Il existe une version «améliorée» du théorème des gendarmes. Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si $u_n \sim w_n$, alors $u_n \sim v_n \sim w_n$. ■

Corollaire 3.1

Soient (u_n) et (ε_n) deux suites telles que $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $|u_n| \leq \varepsilon_n$ à partir d'un certain rang. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exemple 3.1

Soient (u_n) une suite, $l \in \mathbb{R}$ et $K \in [0, 1[$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - l| \leq K|u_n - l|$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Corollaire 3.2

Soient (u_n) une suite bornée et (ε_n) une suite de limite nulle. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \varepsilon_n = 0$.

Corollaire 3.3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- ◇ Si (u_n) est minorée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.
- ◇ Si (u_n) est majorée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = -\infty$.

3.2 Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures, de la densité

Proposition 3.1

Soient \mathcal{A} une partie de \mathbb{R} et $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $c = \sup \mathcal{A}$ (resp. $c = \inf \mathcal{A}$) si et seulement si c est un majorant (resp. un minorant) de \mathcal{A} et s'il existe une suite d'éléments de \mathcal{A} de limite c .

Proposition 3.2 Caractérisation séquentielle de la densité

Soit A une partie de \mathbb{R} . A est dense dans \mathbb{R} si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de A de limite x .

3.3 Théorème de convergence monotone

Ce théorèmes provient à nouveau de l'existence d'une relation d'ordre sur \mathbb{R} .

Théorème 3.2 Théorème de convergence monotone

Toute suite monotone admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Plus précisément,

- ◇ toute suite croissante majorée converge, toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$;
- ◇ toute suite décroissante minorée converge, toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.



ATTENTION ! Une suite décroissante et minorée (resp. majorée) ne converge pas forcément vers son minorant (resp. majorant). Lequel d'ailleurs ?



ATTENTION ! Le majorant ou le minorant doit être une *constante*. Par exemple, si (u_n) est décroissante et si $u_n \geq -n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ne peut absolument rien dire sur la convergence de (u_n) .

Exercice 3.2

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$.

Exercice 3.3

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$.

!!! Le fichier `SommesLK09.tex` n'existe pas !!!

3.4 Suites adjacentes

Définition 3.1 Suites adjacentes

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Théorème 3.3 Suites adjacentes

Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.



ATTENTION ! Si on a seulement $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$, on ne peut pas déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ car on ne sait même pas a priori que (u_n) et (v_n) admettent des limites. Ce sont les sens de variations de (u_n) et (v_n) qui garantissent l'existence de ces limites.

Exercice 3.4

Les suites de termes généraux $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ convergent vers la même limite.

Exercice 3.5

Théorème des segments emboîtés

On appelle segment tout intervalle *fermé* de \mathbb{R} i.e. du type $[a, b]$. On appelle *longueur* du segment $[a, b]$ le réel $b - a$. Soit (I_n) une suite décroissante de segments (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$) dont la suite des longueurs tend vers 0. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

Le résultat est-il toujours vrai si les intervalles I_n ne sont plus fermés ?

Recherche d'un zéro d'une fonction continue par dichotomie

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ avec $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$. On construit les suites (a_n) et (b_n) par récurrence de la manière suivante.

► On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

► On suppose avoir défini a_n et b_n . Si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0$, on pose $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$. Sinon, on pose

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}.$$

On montre alors que (a_n) et (b_n) convergent vers un zéro c de f . De plus, $a_n - c \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et $b_n - c \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Algorithme 1 Dichotomie

Données : une fonction f
deux réels a et b tels que $f(a)f(b) \leq 0$
un réel strictement positif ε

Résultat : une valeur approchée m d'un zéro de f à ε près

$c \leftarrow a$

$d \leftarrow b$

Tant que $|d - c| > \varepsilon$ **Faire**

$m \leftarrow \frac{c + d}{2}$

Si $f(c)f(m) \leq 0$ **Alors**

$d \leftarrow m$

Sinon

$c \leftarrow m$

Fin Si

Fin Tant que

$m \leftarrow \frac{c + d}{2}$

3.5 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Le théorème suivant est admis.

Théorème 3.4 Bolzano-Weierstrass

De toute suite *bornée*, on peut extraire une sous-suite *convergente*.



ATTENTION ! Une même suite bornée peut admettre plusieurs sous-suites convergeant vers des limites différentes.

REMARQUE. La démonstration est hors programme mais on peut en donner l'idée :

- On construit par dichotomie une suite (I_n) décroissante de segments emboîtés contenant chacun une infinité de termes de la suite.
- On choisit dans chaque I_n un élément $u_{\varphi(n)}$ de telle sorte que $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ soit strictement croissante.
- La suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ converge d'après le théorème des suites adjacentes.



REMARQUE. Dans le même ordre d'idée, de toute suite réelle non majorée (resp. non minorée), on peut extraire une sous-suite divergeant vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$). ■

3.6 Lemme de Césaro (hors programme)

Le théorème suivant est hors programme mais tellement classique qu'il mérite de figurer dans ce chapitre.

Théorème 3.5 Lemme de Césaro

Soit (u_n) une suite de limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$$

admet aussi l pour limite.

REMARQUE. Autrement dit, les *moyennes* successives des termes de la suite (u_n) converge vers la même limite que (u_n) . C'est également vrai si on ne débute pas au rang 0. La suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

converge elle aussi vers l . ■



ATTENTION ! La réciproque de ce théorème est *fausse* comme on s'en convainc facilement avec la suite de terme général $(-1)^n$.

4 Comparaison de suites

4.1 Définition

Les définitions sont totalement similaires à celles vues dans le cadre des fonctions. C'est encore plus simple puisque dans le cas des suites, on travaille toujours au voisinage de $+\infty$.

Définition 4.1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- ◇ On dit que (u_n) est *négligeable* devant (v_n) et on note $u_n = o(v_n)$ s'il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que $u_n = v_n \varepsilon_n$ à partir d'un certain rang.
- ◇ On dit que (u_n) est *équivalente* à (v_n) et on note $u_n \sim v_n$ s'il existe une suite (η_n) de limite 1 telle que $u_n = v_n \eta_n$ à partir d'un certain rang.
- ◇ On dit que (u_n) est *dominée* par (v_n) et on note $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ s'il existe une constante K telle que $|u_n| \leq K|v_n|$ à partir d'un certain rang.

Méthode En pratique

Si (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, ces trois définitions sont respectivement équivalentes à :

- ◇ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0,$
- ◇ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1,$
- ◇ $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.

Tout ce qui a été dit sur la comparaison des fonctions reste, mutatis mutandis, vrai pour la comparaison des suites. En particulier, on a la propriété suivante :

Proposition 4.1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \sim v_n$. Alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

4.2 Comparaison des suites de références**Suites de référence**

On appelle suites de référence les suites (a^n) , (n^α) , $(\ln n)^\beta$, $(n!)$ avec $a > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.2

- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha < \beta \iff n^\alpha = o(n^\beta)$.
- Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $a < b \iff a^n = o(b^n)$.
- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\beta > 0$. Alors $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$.
- Soit $a, \alpha \in \mathbb{R}$ avec $a > 1$. Alors $n^\alpha = o(a^n)$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $a^n = o(n!)$.

Exercice 4.1

Déterminer un équivalent de $\operatorname{ch}(e^{-n}) - \cos \frac{\pi}{n}$.

Exercice 4.2

Déterminer la limite de $n \left(\frac{\pi}{2} e^{\frac{1}{n}} - \arccos \frac{1}{n} \right)$.

Exercice 4.3

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Piège !

Proposition 4.3 Formule de Stirling

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

4.3 Suites implicites

On appelle *suite implicite* une suite dont le terme général u_n est donné comme la solution d'une équation dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$.

!!! Le fichier `ImplicitesLG02.tex` n'existe pas !!!

5 Suites récurrentes d'ordre 1

Une suite récurrente d'ordre 1 est tout simplement une suite vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse à la convergence de (u_n) . On supposera f continue sur son ensemble de définition. On sait alors que si (u_n) converge, alors sa limite est un point fixe de f . Graphiquement un point fixe est l'abscisse (ou l'ordonnée) de l'intersection du graphe de f et de la première bissectrice.

Méthode Étude d'une suite récurrente d'ordre 1

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

- On trace le graphe de f et la première bissectrice et on place les premiers termes de la suite (u_n) afin d'avoir une idée de son comportement asymptotique.
Si f est croissante
- On recherche le signe et les zéros de $x \mapsto f(x) - x$ (i.e. les points fixes de f).
- Suivant la position de u_0 par rapport au(x) point(s) fixe(s) de f on en déduit une majoration/minoration de (u_n) par un point fixe ainsi que son sens de variation.
- On utilise le théorème de convergence monotone et la convergence vers un point fixe pour conclure. On raisonne par l'absurde pour prouver la divergence le cas échéant.
Si f est décroissante
- En remarquant que $f \circ f$ est croissante, on peut étudier les suites $(u_{2,n})$ et (u_{2n+1}) grâce à ce qui précède.
Si f n'est ni croissante ni décroissante
- On essaie de repérer un intervalle I stable par I tel que $u_n \in I$ à partir d'un certain rang. On peut alors se reporter à un des deux cas précédents.

Exercice 5.1

Etude des suites récurrentes (u_n) définies par

1. $u_0 \geq -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$,
2. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \ln(u_n + 3)$,
3. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$,
4. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

6 Suites complexes**Définition 6.1 Suite complexe**

On appelle suite complexe toute application de \mathbb{N} dans \mathbb{C} .

Définition 6.2 Suite bornée

On dit qu'une suite complexe (u_n) est bornée s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $|u_n| \leq K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

REMARQUE. Géométriquement, cela signifie que les termes de la suite sont dans un disque de centre O et de rayon K . ■

Définition 6.3 Limite d'une suite complexe

On dit qu'une suite complexe (u_n) admet $l \in \mathbb{C}$ si $|u_n - l| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

REMARQUE. La suite $(|u_n - l|)$ est réelle donc la définition a bien un sens. ■

Exemple 6.1

On considère une suite géométrique (u_n) de raison $q \in \mathbb{C}$ et de premier terme $u_0 \neq 0$ (sinon (u_n) est la suite nulle).

- Si $|q| > 1$, on peut seulement dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$.
- Si $|q| < 1$, (u_n) converge vers 0.
- Si $|q| = 1$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $q = e^{i\alpha}$ et (u_n) ne converge que si $\alpha \equiv 0[2\pi]$.



ATTENTION ! Une suite complexe ne peut avoir une limite égale à $\pm\infty$. Ces symboles n'ont d'ailleurs pas de sens puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre dans \mathbb{C} . On peut tout au plus dire que $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Proposition 6.1

Soient (u_n) une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{u_n} = \bar{l}$.

Corollaire 6.1

Soient (u_n) une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(l)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(u_n) = \operatorname{Im}(l)$.

Tout ce qui a été dit sur les suites réelles reste vrai pour les suites complexes excepté ce qui est lié à la relation d'ordre, c'est-à-dire :

- ▶ les opérations sur les limites contenant $\pm\infty$,
- ▶ le théorème de passage à la limite (il contient des inégalités),
- ▶ les théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration (encore des inégalités),
- ▶ le théorème de la limite monotone et celui des suites adjacentes (la monotonie n'a pas de sens pour une suite complexe).

Par contre, le théorème de Bolzano-Weierstrass reste vrai dans le cas complexe mais la version complexe n'est pas au programme en première année.

!!! Le fichier ComplexesBE01.tex n'existe pas !!!