

Devoir surveillé n°3 : corrigé

SOLUTION 1.

1. $f(z)$ est défini si et seulement si $e^z + e^{-z} \neq 0$. Or

$$e^z + e^{-z} = 0 \iff e^{2z} = -1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2z = (2k+1)i\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = i\frac{\pi}{2} + ik\pi$$

Donc $f(z)$ est défini pour $z \notin i\frac{\pi}{2} + i\pi\mathbb{Z}$.

2. $f(z) = 0$ équivaut à $e^z - e^{-z} = 0$. Or

$$e^z - e^{-z} = 0 \iff e^{2z} = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2z = 2ik\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = ik\pi$$

L'ensemble des solutions est donc $i\pi\mathbb{Z}$.

3. Posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} |f(z)| < 1 &\iff |e^z - e^{-z}|^2 < |e^z + e^{-z}|^2 \\ &\iff (e^z - e^{-z}) \overline{(e^z - e^{-z})} < (e^z + e^{-z}) \overline{(e^z + e^{-z})} \\ &\iff (e^z - e^{-z}) (e^{\bar{z}} - e^{-\bar{z}}) < (e^z + e^{-z}) (e^{\bar{z}} + e^{-\bar{z}}) \\ &\iff -e^{z-\bar{z}} - e^{\bar{z}-z} < e^{z-\bar{z}} + e^{\bar{z}-z} \\ &\iff e^{2iy} + e^{-2iy} > 0 \\ &\iff \cos(2y) > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2} \\ |f(z)| < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |y| < \frac{\pi}{2} \\ \cos(2y) > 0 \end{cases} \iff |y| < \frac{\pi}{4}.$$

4. Soit $z \in \Delta$. D'après la question précédente, $|f(z)| < 1$ i.e. $f(z) \in \mathcal{D}$. Ainsi tout élément de Δ a pour image par f un élément de \mathcal{D} , c'est-à-dire que $f(\Delta) \subset \mathcal{D}$.
5. **Existence** : Puisque Z est non nul, Z possède des arguments. De plus, les arguments de Z étant égaux à un multiple de 2π près, il existe un argument θ de Z appartenant à $] -\pi, \pi[$. On ne peut avoir $\theta = \pi$ sans quoi Z serait un réel négatif. Considérons également le module r de Z , qui est strictement positif puisque Z est non nul. On peut alors poser $z = \ln r + i\theta$ de sorte que $e^z = Z$ et $\operatorname{Im}(z) = \theta \in] -\pi, \pi[$.

Unicité : Supposons qu'il existe deux complexes z et z' tels que $e^z = e^{z'} = Z$ et les réels $\operatorname{Im}(z)$ et $\operatorname{Im}(z')$ soient dans l'intervalle $] -\pi, \pi[$. Puisque $e^z = e^{z'}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z' = z + 2ik\pi$. En particulier, $\operatorname{Im}(z') - \operatorname{Im}(z) = 2k\pi$. Mais comme les réels $\operatorname{Im}(z)$ et $\operatorname{Im}(z')$ soient dans l'intervalle $] -\pi, \pi[$, $-2\pi < \operatorname{Im}(z') - \operatorname{Im}(z) < 2\pi$, de sorte que $-1 < k < 1$. Puisque k est entier k est nul puis $z' = z$.

6. Remarquons que

$$\frac{1+u}{1-u} = \frac{(1+u)(1-\bar{u})}{|1-u|^2} = \frac{1-|u|^2 + 2i\operatorname{Im}(u)}{|1-u|^2}$$

On en déduit que si $\frac{1+u}{1-u} \in \mathbb{R}_-$, alors $1 - |u|^2 \leq 0$ i.e. $|u| \geq 1$. Par contraposition, si $u \in \mathcal{D}$, $\frac{1+u}{1-u} \notin \mathbb{R}_-$.

7. Montrons que tout élément de \mathcal{D} admet un unique antécédent dans Δ . Soit $u \in \mathcal{D}$ et $z \in \mathbb{C}$. On a facilement $f(z) = u \iff e^{2z} = \frac{1+u}{1-u}$. D'après la question 6, $\frac{1+u}{1-u} \notin \mathbb{R}_-$. D'après la question 5, cette équation admet une unique solution telle que $\operatorname{Im}(2z) \in] -\pi, \pi[$ i.e. $\operatorname{Im}(z) \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Notons encore z cette solution. Comme on a également $|f(z)| < 1$, la question 3 montre que $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4}$ i.e. $z \in \Delta$. L'équation $f(z) = u$ admet donc une unique solution dans Δ . Puisqu'on a également montré que $f(\Delta) \subset \mathcal{D}$, f réalise bien une bijection de Δ sur \mathcal{D} .

SOLUTION 2.

1. a. Soit $(z, z') \in (\mathbb{C} \setminus \{-i\})^2$ tel que $f(z) = f(z')$. Alors $\frac{iz+1}{z+i} = \frac{iz'+1}{z'+i}$ donc $(iz+1)(z'+i) = (iz'+1)(z+i)$. En développant, on obtient $izz' + z' - z + i = izz' + z - z' + i$ puis $z = z'$ donc f est injective.

- b.** Soit $Z \in \text{Im} f$. Il existe donc $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ tel que $Z = f(z)$. Supposons $Z = i$. Alors $\frac{iz+1}{z+i} = i$ puis $iz+1 = i(z+i) = iz-i$, ce qui est absurde. Ainsi $Z \neq i$ de sorte que $\text{Im} f \subset \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Réciproquement, soit $Z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Posons $z = \frac{1-iZ}{Z-i}$. Alors $z(Z-i) = 1-iZ$ puis $Z(z+i) = iz+1$. En particulier, $z \neq -i$ puisqu'alors on aurait $0 = i \times (-1) + 1 = 2$. Ainsi $Z = \frac{iz+1}{z+i} = f(z)$ de sorte que $Z \in \text{Im} f$. Par conséquent, $\mathbb{C} \setminus \{i\} \subset \text{Im} f$.
Par double inclusion, $\text{Im} f = \mathbb{C} \setminus \{i\}$. En particulier, f n'est pas surjective puisque $\text{Im} f \neq \mathbb{C}$.
- c.** Soit $Z \in f(\mathcal{P})$. Il existe donc $z \in \mathcal{P}$ tel que $Z = f(z)$. Remarquons alors que

$$\begin{aligned} |iz+1|^2 - |z+i|^2 &= (iz+1)\overline{iz+1} - (z+i)\overline{z+i} \\ &= (iz+1)(-i\bar{z}+1) - (z+i)(\bar{z}-i) \\ &= (z\bar{z}+iz-i\bar{z}+1) - (z\bar{z}-iz+i\bar{z}+1) \\ &= 2i(z-\bar{z}) = -4\text{Im}(z) < 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$|Z| = |f(z)| = \frac{|iz+1|}{|z+i|} < 1$$

Ceci signifie que $Z \in \mathcal{D}$. Finalement, $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}$.

- d.** Soit $Z \in \mathcal{D}$. Alors $Z \neq i$ donc Z admet un unique antécédent z par f par injectivité de f . On a déjà montré à la question 1.b que cet unique antécédent était $z = \frac{1-iZ}{Z-i}$. Il s'agit alors de montrer que $z \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} \text{Im}(z) &= \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1-iZ}{Z-i} - \overline{\left(\frac{1-iZ}{Z-i} \right)} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1-iZ}{Z-i} - \frac{1+i\bar{Z}}{\bar{Z}+i} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{(1-iZ)(\bar{Z}+i) - (1+i\bar{Z})(Z-i)}{(Z-i)(\bar{Z}+i)} \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{(Z+\bar{Z}+i-iZ\bar{Z}) - (Z+\bar{Z}-i+iZ\bar{Z})}{(Z-i)\bar{Z}-i} \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{2i-2iZ\bar{Z}}{|Z-i|^2} = \frac{1-|Z|^2}{|Z-i|^2} \end{aligned}$$

Or $Z \in \mathcal{D}$ donc $|Z| < 1$ de sorte que $\text{Im}(z) > 0$ i.e. $z \in \mathcal{P}$. On a donc prouvé que tout élément de \mathcal{D} admettait un unique antécédent par f dans \mathcal{P} . Puisqu'on sait également que $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}$, f induit une bijection de \mathcal{P} sur \mathcal{D} .

- e.** Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Alors

$$\begin{aligned} & z \in f^{-1}(\mathbb{U}) \\ \iff & f(z) \in \mathbb{U} \\ \iff & f(z)\overline{f(z)} = 1 \\ \iff & \frac{iz+1}{z+i} \cdot \frac{-i\bar{z}+1}{\bar{z}-i} = 1 \\ \iff & (iz+1)(-i\bar{z}+1) = (z+i)(\bar{z}-i) \\ \iff & z\bar{z}+iz-i\bar{z}+1 = z\bar{z}+i\bar{z}-iz+1 \\ \iff & z = \bar{z} \\ \iff & z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi $f^{-1}(\mathbb{U}) = \mathbb{R}$.

- 2. a.** Soit $z \in \mathcal{P}$.

$$\text{Im}(g(z)) = \frac{1}{2i}(g(z) - \overline{g(z)}) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{z-\bar{z}}{2i|z|^2} = \frac{\text{Im}(z)}{|z|^2} > 0$$

donc $g(z) \in \mathcal{P}$. L'application g est par conséquent bien définie.

- b.** Il suffit de vérifier que g est une involution. En effet, pour tout $z \in \mathcal{P}$, $g(g(z)) = z$ donc $g \circ g = \text{Id}_{\mathcal{P}}$. Puisque g est une involution, elle est bijective.

3. a. Soit $z \in \mathcal{P}$. Supposons $z \sin \theta + \cos \theta = 0$. Alors $\operatorname{Im}(z \sin \theta + \cos \theta) = 0$ et donc $\sin \theta \cdot \operatorname{Im}(z) = 0$. Puisque $\operatorname{Im}(z) > 0$, $\sin \theta = 0$. Or $z \sin \theta + \cos \theta = 0$ donc $\cos \theta = 0$. On a donc $\sin \theta = \cos \theta = 0$, ce qui est absurde puisque $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$. Finalement $z \sin \theta + \cos \theta \neq 0$, ce qui prouve que $A_\theta(z)$ est bien défini. Montrons maintenant que $A_\theta(z) \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(A_\theta(z)) &= \frac{1}{2i} (A_\theta(z) - \overline{A_\theta(z)}) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{z \cos \theta - \sin \theta}{z \sin \theta + \cos \theta} - \frac{\bar{z} \cos \theta - \sin \theta}{\bar{z} \sin \theta + \cos \theta} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{(z \cos \theta - \sin \theta)(\bar{z} \sin \theta + \cos \theta) - (\bar{z} \cos \theta - \sin \theta)(z \sin \theta + \cos \theta)}{|z \sin \theta + \cos \theta|^2} \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{(z\bar{z} \cos \theta \sin \theta + z \cos^2 \theta - \bar{z} \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta) - (z\bar{z} \cos \theta \sin \theta - z \sin^2 \theta + \bar{z} \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta)}{|z \sin \theta + \cos \theta|^2} \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{z(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - \bar{z}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{|z \sin \theta + \cos \theta|^2} \\ &= \frac{z - \bar{z}}{2i|z \sin \theta + \cos \theta|^2} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z \sin \theta + \cos \theta|^2} \end{aligned}$$

Or $z \in \mathcal{P}$ donc $\operatorname{Im}(z) > 0$. Ainsi $\operatorname{Im}(A_\theta(z)) > 0$ i.e. $A_\theta(z) \in \mathcal{P}$.

- b. On vérifie immédiatement que $A_0(z) = z$ pour tout $z \in \mathcal{P}$. Autrement dit, $A_0 = \operatorname{Id}_{\mathcal{P}}$.
c. Soit $z \in \mathcal{P}$. Alors

$$\begin{aligned} A_\theta(A_\varphi(z)) &= \frac{A_\varphi(z) \cos \theta - \sin \theta}{A_\varphi(z) \sin \theta + \cos \theta} \\ &= \frac{\frac{z \cos \varphi - \sin \varphi}{z \sin \varphi + \cos \varphi} \cdot \cos \theta - \sin \theta}{\frac{z \cos \varphi - \sin \varphi}{z \sin \varphi + \cos \varphi} \cdot \sin \theta + \cos \theta} \\ &= \frac{(z \cos \varphi - \sin \varphi) \cos \theta - (z \sin \varphi + \cos \varphi) \sin \theta}{(z \cos \varphi - \sin \varphi) \sin \theta + (z \sin \varphi + \cos \varphi) \cos \theta} \\ &= \frac{z(\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta) - (\sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta)}{z(\cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta) + \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta} \\ &= \frac{z \cos(\theta + \varphi) - \sin(\theta + \varphi)}{z \sin(\theta + \varphi) + \cos(\theta + \varphi)} \\ &= A_{\theta+\varphi}(z) \end{aligned}$$

On en déduit que $A_\theta \circ A_\varphi = A_{\theta+\varphi}$.

- d. Il suffit de remarquer

$$A_\theta \circ A_{-\theta} = A_{-\theta} \circ A_\theta = A_{\theta-\theta} = A_0 = \operatorname{Id}_{\mathcal{P}}$$

Ainsi A_θ est bijective et $A_\theta^{-1} = A_{-\theta}$.

SOLUTION 3.

- Les points A et B sont confondus *si et seulement si* $z = 1$.
Les points A et C sont confondus *si et seulement si* $z^2 = 1$ i.e. $z = 1$ ou $z = -1$.
Les points A et D sont confondus *si et seulement si* $z^3 = 1$ i.e. $z = 1$, $z = j$ ou $z = j^2$.
Les points B et C sont confondus *si et seulement si* $z^2 = z$ i.e. $z = 0$ ou $z = 1$.
Les points B et D sont confondus *si et seulement si* $z^3 = z$ i.e. $z = 0$, $z = -1$ ou $z = 1$.
Les points C et D sont confondus *si et seulement si* $z^3 = z^2$ i.e. $z = 0$ ou $z = 1$.
Ainsi les points A, B, C, D sont deux à deux distincts *si et seulement si* $z \notin \{0, 1, -1, j, j^2\}$.
- ABCD est un parallélogramme *si et seulement si* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire *si et seulement si* $z - 1 = z^2 - z^3$ ou encore $-z^3 + z^2 - z + 1 = 0$. Puisque $z \neq -1$, $-z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{(-z)^4 - 1}{-z - 1} = -\frac{z^4 - 1}{z - 1}$. Ainsi ABCD est un parallélogramme *si et seulement si* $z^4 = 1$. Puisque les racines quatrièmes de l'unité sont $1, i, -1, -i$ et que $z \notin \{-1, 1\}$, ABCD est un parallélogramme *si et seulement si* $z = i$ ou $z = -i$.
Si $z = i$, A, B, C, D sont les points d'affixes respectifs $1, i, -1, -i$ donc ABCD est un carré.
Si $z = -i$, A, B, C, D sont les points d'affixes respectifs $1, -i, -1, i$ donc ABCD est à nouveau un carré.

3. Le triangle ABC est rectangle isocèle en A si et seulement si $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. En termes d'affixes, ABC est

$$\text{rectangle isocèle en A si et seulement si } \begin{cases} |z-1| = |z^2-1| \\ \arg \frac{z^2-1}{z-1} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} \left| \frac{z^2-1}{z-1} \right| = 1 \\ \arg \frac{z^2-1}{z-1} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}. \text{ Puisque } \frac{z^2-1}{z-1} = z+1, \text{ ceci}$$

$$\text{équivalent à } \begin{cases} |z+1| = 1 \\ \arg(z+1) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases} \text{ ou encore } z+1 = \pm i.$$

Finalement, ABC est rectangle isocèle en A si et seulement si $z = -1 \pm i$.

4. On sait que $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$. Le triangle ABD est rectangle isocèle en A si et seulement si $AB = AD$ et

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]. \text{ En termes d'affixes, ABD est rectangle isocèle en A si et seulement si } \begin{cases} |z-1| = |z^3-1| \\ \arg \frac{z^3-1}{z-1} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases} \text{ ou encore}$$

$$\begin{cases} \left| \frac{z^3-1}{z-1} \right| = 1 \\ \arg \frac{z^3-1}{z-1} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}. \text{ Puisque } \frac{z^3-1}{z-1} = z^2 + z + 1, \text{ ceci équivaut à } \begin{cases} |z^2 + z + 1| = 1 \\ \arg(z^2 + z + 1) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases} \text{ ou encore } z^2 + z + 1 = \pm i.$$

Finalement, ABC est rectangle isocèle en A si et seulement si z est solution d'une des deux équations $(E_1) : Z^2 + Z + 1 + i = 0$ ou $(E_2) : Z^2 + Z + 1 - i = 0$.

Le discriminant de (E_1) est $-3 - 4i = (1 - 2i)^2$. Les solutions de (E_1) sont donc $\frac{-1+(1-2i)}{2} = -i$ et $\frac{-1-(1-2i)}{2} = -1 + i$.
Puisque les coefficients de l'équation (E_2) sont les conjugués de ceux de l'équation (E_1) , les solutions de (E_2) sont les conjuguées de celles de l'équation (E_1) , c'est-à-dire i et $-1 - i$.

Le triangle ABD est rectangle isocèle en A si et seulement si $z \in \{i, -i, 1 + i, 1 - i\}$.

SOLUTION 4.

Supposons f injective. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On sait déjà que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Montrons alors que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Soit donc $y \in f(A) \cap f(B)$. Il existe donc $(a, b) \in A \times B$ tel que $y = f(a) = f(b)$. Mais par injectivité de f , $a = b$ de sorte que $a = b \in A \cap B$. On en déduit que $y \in f(A \cap B)$. On a donc bien montré que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ puis, par double inclusion, que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Supposons maintenant que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Posons $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$. Alors $f(A) = \{f(x_1)\}$ et $f(B) = \{f(x_2)\}$. Puisque $f(x_1) = f(x_2)$, $f(A) = f(B)$. Ainsi $f(A) \cap f(B) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\}$. En particulier, $f(A) \cap f(B)$ est non vide. Puisque $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, $f(A \cap B)$ est également non vide. Il s'ensuit que $A \cap B$ est non vide et donc que $x_1 = x_2$. Ceci prouve l'injectivité de f .

SOLUTION 5.

1. D'après l'énoncé, $f(0 + f(0)) = f(f(0)) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.

2. A nouveau d'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(f(n)) = f(0 + f(n)) = f(f(0)) + f(n) = f(0) + f(n) = f(n)$$

puisque $f(0) = 0$. On a donc $f \circ f = f$.

3. Procédons par double inclusion.

Soit $a \in \text{Im } f$. Il existe donc $b \in \mathbb{N}$ tel que $a = f(b)$. Ainsi $f(a) = f(f(b)) = f(b) = a$ d'après la question précédente. Ainsi $a \in \mathcal{F}$. Ceci prouve que $\text{Im } f \subset \mathcal{F}$.

Soit $a \in \mathcal{F}$. Alors $a = f(a) \in \text{Im } f$. Ceci prouve que $\mathcal{F} \subset \text{Im } f$.

Par double inclusion, $\text{Im } f = \mathcal{F}$.

4. Soit $a \in \mathcal{F}$. Alors $f(a) = a$. Par conséquent

$$f(a+1) = f(1 + f(a)) = f(f(1)) + f(a) = a + f(1) = a + 1$$

car $f(1) = 1$ par hypothèse.

5. Puisque $f(0) = 0$, $0 \in \mathcal{F}$ et la question précédente permet de montrer par récurrence tout entier naturel appartient à \mathcal{F} , c'est-à-dire que $\mathcal{F} = \mathbb{N}$. Ceci signifie que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ i.e. $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$.