

# DEVOIR SURVEILLÉ N°4 : CORRIGÉ

## Problème 1 – Résolution d’une équation différentielle

### Partie I – Résolution d’une première équation différentielle

1. Les solutions de l’équation caractéristique associée à  $(E_1)$  sont évidemment  $2i$  et  $-2i$ . Les solutions de l’équation différentielle  $(E_1)$  sont les fonctions  $t \mapsto \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .
2. Les solutions de l’équation caractéristique associée à  $(E_2)$  sont évidemment  $2$  et  $-2$ . Les solutions de l’équation différentielle  $(E_2)$  sont les fonctions  $t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .
3. On a montré que l’ensemble des solutions de  $(E_2)$  était

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

On veut montrer que c’est également

$$\mathcal{S}' = \{t \mapsto \lambda \operatorname{ch}(2t) + \mu \operatorname{sh}(2t), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Soit donc  $f \in \mathcal{S}$ . Il existe donc  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $f(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . En posant  $A = \frac{\lambda+\mu}{2}$  et  $B = \frac{\lambda-\mu}{2}$ ,  $f(t) = A \operatorname{ch}(2t) + \mu \operatorname{sh}(2t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  donc  $f \in \mathcal{S}'$ .

Réciproquement, soit  $f \in \mathcal{S}'$ . Il existe donc  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $f(t) = \lambda \operatorname{ch}(2t) + \mu \operatorname{sh}(2t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . En posant  $A = \frac{\lambda+\mu}{2}$  et  $B = \frac{\lambda-\mu}{2}$ ,  $f(t) = A e^{2t} + B e^{-2t}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  donc  $f \in \mathcal{S}$ .

Par double inclusion,  $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ .

### Partie II – Résolution d’une seconde équation différentielle par changement de variable

4.  $\cos$  est deux fois dérivable sur  $]0, \pi[$  à valeurs dans  $] -1, 1[$  et  $f$  est deux fois dérivable sur  $] -1, 1[$  donc  $g = f \circ \arccos$  est deux fois dérivable sur  $]0, \pi[$ .
5. Puisque  $g$  est deux fois dérivable sur  $]0, \pi[$ , on montre successivement que pour tout  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= g(\arccos(x)) \\ f'(x) &= -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} g'(\arccos(x)) \\ f''(x) &= -x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} g'(\arccos(x)) + (1-x^2)^{-1} g''(\arccos(x)) \end{aligned}$$

$f$  est solution de (F) sur  $] -1, 1[$  si et seulement si

$$\forall x \in ] -1, 1[, (1-x^2)f''(x) - xf'(x) + 4f(x) = 0$$

Or d’après ce qui précède, pour tout  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$\begin{aligned} xf'(x) &= -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} g'(\arccos(x)) \\ (1-x^2)f''(x) &= -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} g'(\arccos(x)) + g''(\arccos(x)) \end{aligned}$$

Ainsi  $f$  est-elle solution de (F) sur  $] -1, 1[$  si et seulement si

$$\forall x \in ] -1, 1[, g''(\arccos(x)) + 4g(\arccos(x)) = 0$$

Puisque  $\arccos(] -1, 1[) = ]0, \pi[$ , cette dernière condition équivaut à

$$\forall t \in ]0, \pi[, g''(t) + 4g(t) = 0$$

Pour résumer,  $f$  est solution de F sur  $] -1, 1[$  si et seulement si  $g$  est solution de  $(E_1)$  sur  $]0, \pi[$ .

6. On a déterminé à la question I.1 les solutions de  $(E_1)$  sur  $\mathbb{R}$  et donc a fortiori sur  $]0, \pi[$ . On en déduit que les solutions de (F) sur  $] -1, 1[$  sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \cos(2 \arccos(x)) + \mu \sin(2 \arccos(x))$$

avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Or pour tout  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$\cos(2 \arccos(x)) = 2 \cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$$

$$\sin(2 \arccos(x)) = 2 \cos(\arccos(x)) \sin(\arccos(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

Les solutions de (F) sur  $] -1, 1[$  sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x\sqrt{1-x^2}$$

### Partie III – La fonction argument cosinus hyperbolique

7. La fonction  $\text{ch}$  est strictement croissante et continue sur  $\mathbb{R}_+$ . De plus,  $\text{ch}(0) = 1$  et  $\lim_{+\infty} \text{ch} = +\infty$  donc  $\text{ch}$  induit une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur  $[1, +\infty[$ .
8. Soit  $x \in [1, +\infty[$ . Posons  $\theta = \text{argch}(x)$ . On sait que  $\text{sh}^2(\theta) = \text{ch}^2(\theta) - 1 = x^2 - 1$ . De plus,  $\theta \in \mathbb{R}_+$  par définition de  $\text{argch}$ . Ainsi  $\text{sh } \theta \geq 0$ . Finalement,  $\text{sh}(\text{argch}(x)) = \text{sh}(\theta) = \sqrt{x^2 - 1}$ .
9. La fonction  $\text{ch}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sa dérivée  $\text{sh}$  ne s'annule pas sur cet intervalle. En tant que bijection réciproque de la bijection induite par  $\text{ch}$  de  $\mathbb{R}_+$  sur  $[1, +\infty[$ ,  $\text{argch}$  est dérivable sur  $\text{ch}(\mathbb{R}_+^*) = ]1, +\infty[$ . De plus, pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ ,

$$\text{argch}'(x) = \frac{1}{\text{ch}'(\text{argch}(x))} = \frac{1}{\text{sh}(\text{argch}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

10. C'est du calcul bête et méchant. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ .

$$2 \text{ch}^2(\theta) - 1 = 2 \left( \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \right)^2 - 1 = \frac{e^{2\theta} + e^{-2\theta} + 2}{2} - 1 = \frac{e^{2\theta} + e^{-2\theta}}{2} = \text{ch}(2\theta)$$

$$2 \text{ch}(\theta) \text{sh}(\theta) = 2 \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \cdot \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} = \frac{(e^\theta)^2 - (e^{-\theta})^2}{2} = \frac{e^{2\theta} - e^{-2\theta}}{2} = \text{sh}(2\theta)$$

11. Par définition de la fonction  $\text{argch}$ ,  $\text{ch}(\text{argch } x) = x$  pour tout  $x \in [1, +\infty[$ . Par ailleurs, on a vu que  $\text{sh}(\text{argch}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$  pour tout  $x \in [1, +\infty[$ . On en déduit que pour tout  $x \in [1, +\infty[$ ,

$$\text{ch}(2 \text{argch}(x)) = 2 \text{ch}^2(\text{argch}(x)) - 1 = 2x^2 - 1$$

$$\text{sh}(2 \text{argch}(x)) = 2 \text{ch}(\text{argch}(x)) \text{sh}(\text{argch}(x)) = 2x\sqrt{x^2 - 1}$$

### Partie IV – Un problème de raccord

12. Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $]1, +\infty[$ . Alors  $g = f \circ \text{ch}$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et, pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ , on a successivement

$$f(x) = g(\text{argch}(x))$$

$$f'(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} g'(\text{argch}(x))$$

$$f''(x) = -x(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} g'(\text{argch}(x)) + (x^2 - 1)^{-1} g''(\text{argch}(x))$$

Or  $f$  est solution de (F) sur  $]1, +\infty[$  si et seulement si

$$\forall x \in ]1, +\infty[, (1 - x^2)f''(x) - xf'(x) + 4f(x) = 0$$

Or d'après ce qui précède, pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} xf'(x) &= x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} g'(\operatorname{argch}(x)) \\ (1 - x^2)f''(x) &= -(x^2 - 1)f''(x) = x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} g'(\operatorname{argch}(x)) - g''(\operatorname{argch}(x)) \end{aligned}$$

Ainsi  $f$  est-elle solution de (F) sur  $]1, +\infty[$  si et seulement si

$$\forall x \in ]1, +\infty[, -g''(\operatorname{argch}(x)) + 4g(\operatorname{argch}(x)) = 0$$

Puisque  $\operatorname{argch}(]1, +\infty[) = \mathbb{R}_+^*$ , cette dernière condition équivaut à

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, g''(t) - 4g(t) = 0$$

Pour résumer,  $f$  est solution de (F) sur  $]1, +\infty[$  si et seulement si  $g$  est solution de  $(E_2)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

La question I.3 montre alors que les solutions de l'équation différentielle de (F) sur  $]1, +\infty[$  sont les fonctions

$$x \in ]1, +\infty[ \mapsto \lambda \operatorname{ch}(2 \operatorname{argch}(x)) + \mu \operatorname{sh}(2 \operatorname{argch}(x))$$

ou encore

$$x \in ]1, +\infty[ \mapsto \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x \sqrt{x^2 - 1}$$

avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

13. Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $] -\infty, -1[$ . Alors  $g : x \mapsto f(-x)$  est deux fois dérivable sur  $]1, +\infty[$ . De plus, pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ ,  $g'(x) = -f'(-x)$  et  $g''(x) = f''(-x)$ .  $f$  est solution de (F) sur  $] -\infty, -1[$  si et seulement si

$$\forall x \in ] -\infty, -1[, (1 - x^2)f''(x) - xf'(x) + 4f(x) = 0$$

Ceci équivaut à

$$\forall x \in ]1, \infty[, (1 - (-x)^2)f''(-x) - (-x)f'(-x) + 4f(-x) = 0$$

ou encore à

$$\forall x \in ]1, \infty[, (1 - x^2)f''(-x) + xf'(-x) + 4f(-x) = 0$$

et finalement à

$$\forall x \in ]1, \infty[, (1 - x^2)g''(x) - xg'(x) + 4g(x) = 0$$

Finalement  $f$  est solution de (F) sur  $] -\infty, -1[$  si et seulement si  $g$  est solution de  $(E_2)$  sur  $]1, +\infty[$ . On en déduit que les solutions de (F) sur  $] -\infty, -1[$  sont les fonctions

$$x \in ]1, +\infty[ \mapsto \lambda(2(-x)^2 - 1) + 2\mu(-x)\sqrt{(-x)^2 - 1}$$

avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . On peut également affirmer que ce sont les fonctions

$$x \in ]1, +\infty[ \mapsto \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x \sqrt{x^2 - 1}$$

avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  puisque  $-\mu$  décrit  $\mathbb{R}$  lorsque  $\mu$  décrit  $\mathbb{R}$ .

14. Soit  $f$  une solution de (F) sur  $\mathbb{R}$ . Remarquons qu'alors  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . En particulier,  $f$  et  $f'$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ .

D'après, les questions précédentes il existe  $(\lambda_-, \mu_-, \lambda_0, \mu_0, \lambda_+, \mu_+) \in \mathbb{R}^6$  tel que

$$\begin{aligned} \forall x \in ] -\infty, -1[, f(x) &= \lambda_-(2x^2 - 1) + 2\mu_- x \sqrt{x^2 - 1} \\ \forall x \in ] -1, 1[, f(x) &= \lambda_0(2x^2 - 1) + 2\mu_0 x \sqrt{1 - x^2} \\ \forall x \in ]1, \infty[, f(x) &= \lambda_+(2x^2 - 1) + 2\mu_+ x \sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

Par continuité de  $f$  en  $-1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  et donc  $\lambda_- = \lambda_0$ . De même, par continuité de  $f$  en  $1$ ,  $\lambda_0 = \lambda_+$ . Finalement,  $\lambda_- = \lambda_0 = \lambda_+$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in ] -\infty, -1[, f'(x) &= 4\lambda_- x + 2\mu_- \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ \forall x \in ] -1, 1[, f'(x) &= 4\lambda_0 x + 2\mu_0 x \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \\ \forall x \in ]1, \infty[, f'(x) &= 4\lambda_+ x + 2\mu_+ \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

Par continuité de  $f'$  en  $-1$  et  $1$ , on obtient  $\mu_- = \mu_0 = \mu_+ = 0$  (sinon  $f'$  admettrait des limites infinies à gauche ou à droite en  $-1$  ou  $1$ ).

On en déduit qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = \lambda(2x^2 - 1)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Réciproquement, toute fonction  $x \mapsto \lambda(2x^2 - 1)$  est évidemment solution de (F) sur  $\mathbb{R}$ .

En conclusion, les solutions de (F) sur  $\mathbb{R}$  sont exactement les fonctions  $x \mapsto \lambda(2x^2 - 1)$ .

### SOLUTION 1.

1. Une primitive de  $x \mapsto \frac{3x}{1+x^2}$  est  $x \mapsto \frac{3}{2} \ln(1+x^2)$ . On en déduit que les solutions de  $(E_H)$  sont les fonctions  $x \mapsto \lambda \exp\left(\frac{3}{2} \ln(1+x^2)\right) = (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2. Posons donc  $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$  avec  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ . On obtient  $(1+x^2)P'(x) - 3xP(x) = -bx^3 + (3a-2c)x^2 + (2b-3d)x + c$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Une condition suffisante (et même nécessaire en fait,

mais qu'importe) pour que  $P$  soit solution de (E) est donc que  $(a, b, c, d)$  vérifie le système 
$$\begin{cases} -b = 0 \\ 3a - 2c = 0 \\ 2b - 3d = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$
. On

trouve alors  $a = \frac{2}{3}$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$  et  $d = 0$ . Ceci signifie que la fonction polynomiale  $P : x \mapsto \frac{2}{3}x^3 + x$  est solution de (E).

On en déduit que les solutions  $f_\lambda$  de (E) sont telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_\lambda(x) = \frac{2}{3}x^3 + x + \lambda(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Remarquons que pour tout  $x > 0$ ,

$$(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

En utilisant un développement limité classique

$$\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{3}{2x^2} + \frac{3}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

A fortiori

$$\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

On en déduit

$$(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x^3 + \frac{3}{2}x + o(1)$$

4. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . D'après la question précédente,

$$f_\lambda(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{2}{3} + \lambda\right)x^3 + \left(1 + \frac{3}{2}\lambda\right)x + o(1)$$

Si  $\lambda \neq -\frac{2}{3}$ ,  $f_\lambda(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{2}{3} + \lambda\right)x^3$  et  $f$  admet une limite infinie en  $+\infty$ .

Si  $\lambda = -\frac{2}{3}$ ,  $f_\lambda = g$  et  $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$  de sorte que  $g$  admet une limite finie (nulle) en  $+\infty$ .

$g$  est donc l'unique solution de (E) admettant une limite finie en  $+\infty$ .

5.  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on trouve  $g'(x) = 2x^2 + 1 - 2x\sqrt{1+x^2} = (\sqrt{1+x^2} - x)^2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . De plus, par stricte croissance de la racine carrée, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$ . On en déduit que  $g'(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Ainsi  $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Par opérations sur les limites, il est clair que  $\lim_{-\infty} g = -\infty$ . Par ailleurs, on a vu à la question précédente que  $\lim_{+\infty} g = 0$ .

### SOLUTION 2.

1. On a facilement  $I_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $J_0 = \frac{\pi^3}{24}$ ,  $I_1 = 1$ . Pour le calcul de  $J_1$ , on intègre deux fois par parties :

$$\begin{aligned} J_1 &= [t^2 \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, dt \\ &= \frac{\pi^2}{4} + 2 [t \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{aligned}$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $\cos^n$  est continue, positive et non constamment nulle sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  donc son intégrale sur ce segment est strictement positive i.e.  $I_n > 0$ .
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On procède à nouveau à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= [\sin t \cos^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t \, dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^n t \, dt \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité demandée.

4. a. Il est évident que  $t \geq 0$  pour  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

Pour établir l'autre inégalité, il suffit d'utiliser la concavité de la fonction  $\sin$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . En effet, sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , le graphe de cette fonction est au-dessus de la corde reliant les points d'abscisse 0 et  $\frac{\pi}{2}$ . Ainsi pour tout  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$  et on en déduit bien la seconde inégalité demandée.

Pour les nouvelles générations qui ignoreront tout de la convexité, on introduit la fonction  $f : t \mapsto \frac{\pi}{2} \sin t - t$ .  $f$  est deux fois dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et  $f''(t) = -\frac{\pi}{2} \sin t$  pour tout  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Ainsi  $f''$  est négative sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et ne s'annule qu'en 0 ce qui prouve la stricte décroissance de  $f'$ . On a  $f'(0) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$  et  $f'(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0$ .  $f'$  étant également continue, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires montre que  $f'$  s'annule en un unique réel  $\alpha$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . La décroissance de  $f'$  montre que  $f'$  est positive sur  $[0, \alpha]$  et négative sur  $[\alpha, \frac{\pi}{2}]$ . Ainsi  $f$  est croissante sur  $[0, \alpha]$  et décroissante sur  $[\alpha, \frac{\pi}{2}]$ . Puisque  $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$ ,  $f$  est positive sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

- b. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leq J_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi^2}{4} \sin^2 t \cos^n t \, dt = \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^n t \, dt = \frac{\pi^2}{4} (I_n - I_{n+2})$$

- c. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque  $I_n > 0$

$$0 \leq \frac{J_n}{I_n} \leq \frac{\pi^2}{4} \left( 1 - \frac{I_{n+2}}{I_n} \right)$$

Or d'après la question 3,  $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ . Par le théorème des gendarmes,  $(\frac{J_n}{I_n})$  converge vers 0.

5. a. On procède encore une fois à des intégrations par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= [t \cos^{n+2} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{n+1} t \, dt \\ &= (n+2) \left[ \frac{t^2}{2} \sin t \cos^{n+1} t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} (\cos^{n+2} t - (n+1) \sin^2 t \cos^n t) \, dt \\ &= -\frac{1}{2} (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 (\cos^{n+2} t - (n+1)(1 - \cos^2 t) \cos^n t) \, dt \\ &= -\frac{1}{2} (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 ((n+2) \cos^{n+2} t - (n+1) \cos^n t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} ((n+2)(n+1)J_n - (n+2)^2 J_{n+2}) \end{aligned}$$

- b. En utilisant la question 3

$$\frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{(n+1)J_n}{(n+2)I_{n+2}} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{\frac{n+1}{n+2}J_n - J_{n+2}}{I_{n+2}}$$

En utilisant maintenant la question précédente :

$$\frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{\frac{n+1}{n+2}J_n - J_{n+2}}{\frac{1}{2}((n+2)(n+1)J_n - (n+2)^2J_{n+2})} = \frac{2\left(\frac{n+1}{n+2}J_n - J_{n+2}\right)}{(n+1)((n+2)J_n - (n+2)J_{n+2})} = \frac{2}{(n+2)^2}$$

6. En sommant les égalités de la question précédente pour  $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$  (avec  $N \geq 1$ ), on obtient par télescopage

$$\frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1} - \frac{J_{N+1}}{I_{N+1}} - \frac{J_{N+2}}{I_{N+2}} = 2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{(n+2)^2} = 2S_{N+2} - 2$$

En utilisant la question 4.c, on en déduit que  $(S_n)$  converge vers  $\frac{1}{2} \left( \frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1} \right) + 1$ . En utilisant les résultats de la question 1, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1} \right) + 1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{\pi^3}{24}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{1} \right) + 1 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{4} - 2 \right) + 1 = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$