# Semaine du 05/03 au 09/03

## 1 Cours

### Applications linéaires

**Définition et premières propriétés** Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'une forme linéaire. Exemples en géométrie, dans les espaces de fonctions, dans les espaces de suites et dans les $\mathbb{K}^n$. Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$. Structure d'anneau de $\mathcal{L}(E)$.

**Isomorphismes** Définition d'un isomorphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme. Définition d'un automorphisme et groupe linéaire $GL(E)$.

**Images directe et réciproque par une application linéaire** L'image directe ou réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel. Noyau et image d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le noyau et l'image. Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $E = S \oplus \operatorname{Ker} f$, alors $f$ induit un isomorphisme de $S$ sur $\operatorname{Ker} f$.

**Image d'une famille de vecteurs** L'image d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image. Une application linéaire est injective/surjective/bijective **si et seulement si** l'image d'une base est une famille libre/une famille génératrice/une base.

**Applications linéaires en dimension finie** En dimension finie, deux espaces sont de même dimension **si et seulement si** ils sont isomorphes. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le rang. Si $f$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de **même** dimension **finie**, alors $f$ bijective $\iff$ $f$ injective $\iff$ $f$ surjective. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme. Si $E$ et $F$ sont de même dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective **si et seulement si** il existe $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ **ou** $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

## 2 Méthodes à maîtriser

- Calculer avec des endomorphismes comme dans tout anneau **non commutatif** et **non intègre**.
- Utiliser le noyau ou l'image d'une application linéaire pour prouver son injectivité ou sa surjectivité.
- Les équivalences $x \in \operatorname{Ker} f \iff f(x) = 0$ et $y \in \operatorname{Im} f \iff \exists x, y = f(x)$ doivent être automatiques.
- Utiliser la dimension pour faciliter la preuve de la bijectivité (injectivité + espaces d'arrivée et de départ de même dimension)
- Utiliser le théorème du rang pour passer de résultats sur le noyau à des résultats sur l'image et vice-versa.

## 3 Questions de cours

- Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de **dimension finie**. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes : **(i)** $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ ; **(ii)** $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ ; **(iii)** $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
- On considère deux suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que $(v_n)$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Démontrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont de même signe à partir d'un certain rang.
  Application : Déterminer le signe de $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ au voisinage de $+\infty$.
- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)$ par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.
  1. Démontrer que la suite $(u_n)$ est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de $x_0$, le sens de variation de $(u_n)$.
  2. Montrer que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.
  3. Déterminer l'ensemble des fonctions $h$, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\arctan(x))$.
- On pose pour $x \in ]1, +\infty[$, $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.
  1. Montrer que $H$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
  2. Montrer que la fonction $u$ définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $1$.

3. En utilisant cette fonction $u$, montrer que $H$ admet une limite finie en $1^+$.

- Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\,\mathrm{Id}_E = 0$.

1. Prouver que $f$ est bijectif et exprimer $f^{-1}$ en fonction de $f$.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.
3. On suppose maintenant que $E$ est de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E)$.

- Soit $p$ un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $p$ divise $\binom{p}{k}$.
2. Montrer par récurrence que $n^p \equiv n[p]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que si $p$ ne divise pas $n$, alors $n^{p-1} \equiv 1[p]$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument de $z^k - 1$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} |z^k - 1| = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

- 1. Énoncer le théorème de Bézout.
  2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $a \wedge b = 1$. Montrer que $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.
  3. On considère le système $(\mathcal{S})$ : $\begin{cases} x \equiv 6[17] \\ x \equiv 4[15] \end{cases}$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$. Déterminer une solution particulière de $(\mathcal{S})$ puis résoudre $(\mathcal{S})$.