

DEVOIR SURVEILLÉ N° 7 : CORRIGÉ

Problème 1 — Petites Mines 2003

Partie I –

1. Le noyau de D est le sous-espace vectoriel des applications de dérivée nulle sur \mathbb{R} , c'est à-dire les applications constantes sur \mathbb{R} . Toute application de classe \mathcal{C}^∞ admettant une primitive de classe \mathcal{C}^∞ , D est surjective et donc l'image de D est E .

2. ► En prenant $t = 0$, on obtient $a + c = 0$.

► En prenant $t = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$, on obtient $ae^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} + be^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} = 0$.

► En prenant $t = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, on obtient $ae^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} - ce^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}} = 0$.

On en déduit $a = b = c = 0$.

3. On a $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$.

On a également d'une part

$$e^{-\frac{t}{2}} = 1 - \frac{t}{2} + o(t)$$

et d'autre part :

$$\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{t\sqrt{3}}{2} + o(t^2) = t\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + o(t)\right)$$

d'où

$$e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = t\left(1 - \frac{t}{2} + o(t)\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + o(t)\right) = \frac{t\sqrt{3}}{2} - \frac{t^2\sqrt{3}}{4} + o(t^2)$$

Enfin, on a d'une part :

$$e^{-\frac{t}{2}} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2)$$

et d'autre part :

$$\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \frac{3t^2}{8} + o(t^2)$$

On en déduit

$$e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2)\right)\left(1 - \frac{3t^2}{8} + o(t^2)\right) = 1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} + o(t^2)$$

Par conséquent,

$$af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = a + c + \left(a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}\right)t + \left(\frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{4} - \frac{c}{4}\right)t^2 + o(t^2)$$

Par unicité du développement limité, on a :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2} = 0 \\ \frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{4} - \frac{c}{4} = 0 \end{cases}$$

On en déduit à nouveau $a = b = c = 0$.

4. Supposons $a \neq 0$. Alors $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} ae^t$. D'où $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \pm\infty$, ce qui est impossible puisque $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit $a = 0$.
Par conséquent, $b \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + c \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En choisissant $t = 0$, on obtient $c = 0$. Et enfin, $b = 0$ en prenant pour t une valeur n'annulant pas $\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$.
5. On a $D(f_1) = f_1$, $D(f_2) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$ et $D(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3$. Ainsi $D(f_1)$, $D(f_2)$ et $D(f_3)$ sont des vecteurs de G . Comme la famille (f_1, f_2, f_3) engendre G , on a $D(G) \subset G$.
6. Comme $D(f_1) = f_1$, il est clair que $D^3(f_1) = f_1$.

De plus,

$$D(f_2) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$$

donc

$$D^2(f_2) = -\frac{1}{2}D(f_2) + \frac{\sqrt{3}}{2}D(f_3) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3\right) = -\frac{1}{2}f_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$$

puis

$$D^3(f_2) = -\frac{1}{2}D(f_2) - \frac{\sqrt{3}}{2}D(f_3) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3\right) = f_2$$

De même,

$$D(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3$$

donc

$$D^2(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}D(f_2) - \frac{1}{2}D(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3$$

puis

$$D^3(f_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}D(f_2) - \frac{1}{2}D(f_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3\right) = f_3$$

Ainsi les endomorphismes \widehat{D}^3 et Id_G coïncident sur une base de G , d'où $\widehat{D}^3 = \text{Id}_G$.

7. Comme $\widehat{D} \circ \widehat{D}^2 = \widehat{D}^2 \circ \widehat{D} = \text{Id}_G$, \widehat{D} est inversible d'inverse $\widehat{D}^{-1} = \widehat{D}^2$.

Partie II –

1. On sait que f est trois fois dérivable. Soit $n \geq 3$ et supposons f n fois dérivable sur \mathbb{R} . Comme $f''' = f$, f''' est n fois dérivable sur \mathbb{R} . Par conséquent, f est $n + 3$ fois dérivable sur \mathbb{R} . A fortiori, elle est $n + 1$ fois dérivable sur \mathbb{R} .
On conclut par récurrence que f est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} .
2. On a vu précédemment que $\widehat{D}^3 = \text{Id}_G$ ce qui signifie que la restriction de T à G est nulle i.e. $G \subset \text{Ker } T$.
3. On a $g' = f''' + f'' + f' = f + f'' + f' = g$. Ainsi g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.
4. Les solutions de l'équation $y' - y = 0$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^t$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ est $X^2 + X + 1 = 0$. Ses solutions sont j et \bar{j} . On en déduit que l'ensemble des solutions réelles sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \left(A \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + B \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right) e^{-\frac{t}{2}}$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ c'est-à-dire les fonctions du type $Af_2 + Bf_3$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Autrement dit l'ensemble des solutions réelles de $y'' + y' + y = 0$ est $\text{vect}(f_2, f_3)$.

On a vu que (f_1, f_2, f_3) était libre donc (f_2, f_3) est aussi libre. Par conséquent, (f_2, f_3) est une base de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$.

6. Une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$ est $t \mapsto \frac{\lambda}{3} e^t$. Les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$ sont donc les fonctions :

$$\frac{\lambda}{3} f_1 + A f_2 + B f_3$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

7. Soit $f \in \text{Ker } T$ i.e. f une solution de (\mathcal{E}) . En posant $g = f'' + f' + f$, on a montré en **II.3** que g vérifiait l'équation différentielle $y' - y = 0$. Ceci prouve qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda f_1$ (cf. **II.4**). f est alors solution de $y'' + y' + y = \lambda f_1$ dont on a vu en **II.6** que les solutions étaient de la forme $\frac{\lambda}{3} f_1 + A f_2 + B f_3$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Donc $f \in \text{vect}(f_1, f_2, f_3) = G$. On a donc prouvé que $\text{Ker } T \subset G$.
Or $G \subset \text{Ker } T$ d'après **II.2** donc $\text{Ker } T = G$ par double inclusion. L'ensemble des solutions de (\mathcal{E}) est exactement G .

SOLUTION 1.

1. a. L'application f^{n-1} n'étant pas constamment nulle, il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.
b. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f^{n-i}(x) = 0$$

En composant par f^{n-1} , on obtient $\lambda_n f^{n-1}(x) = 0$. Comme $f^{n-1}(x) \neq 0$, $\lambda_n = 0$.

En composant par f^{n-2} , on obtient ensuite $\lambda_{n-1} = 0$ et ainsi de suite. On prouve donc que

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$$

Par conséquent, la famille $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$ est libre. Comme elle est de cardinal $n = \dim E$, c'est une base de E .

2. a. La famille $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f^{n-k}(x))$ est une sous-famille de la famille libre $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$. Elle est donc également libre. On en déduit $\dim F_k = k$.
b. Pour $1 \leq i \leq k$, $f^k(f^{n-i}(x)) = f^{n+k-i}(x) = 0$ car $n+k-i \geq n$ et donc $f^{n-i}(x) \in \text{Ker } f^k$. Comme $(f^{n-i}(x))_{1 \leq i \leq k}$ engendre F_k , $F_k \subset \text{Ker } f^k$. Donc $\dim \text{Ker } f^k \geq \dim F_k = k$.
Pour $1 \leq i \leq n-k$, $f^{n-i}(x) \in \text{Im } f^k$ car $n-i \geq k$. Comme $(f^{n-i}(x))_{1 \leq i \leq n-k}$ engendre F_{n-k} , $F_{n-k} \subset \text{Im } f^k$. D'où $\dim \text{Im } f^k \geq \dim F_{n-k} = n-k$. Par le théorème du rang, on a donc $\dim \text{Ker } f^k = n - \dim \text{Im } f^k \leq k$. On en déduit que $\dim \text{Ker } f^k = k = \dim F_k$ et, comme $F_k \subset \text{Ker } f^k$, $F_k = \text{Ker } f^k$.
Quitte à remplacer k par $n-k$, on a également $F_k \subset \text{Im } f^{n-k}$. Et comme $f^k \circ f^{n-k} = 0$, on a aussi $\text{Im } f^{n-k} \subset \text{Ker } f^k$. On en déduit que $F_k = \text{Ker } f^k = \text{Im } f^{n-k}$.
c. On a $F_k = \text{Im } f_{n-k}$ d'après la question précédente. Donc $f(F_k) = \text{Im } f^{n-k+1} \subset \text{Im } f^{n-k} = F_k$. F_k est donc stable par f .
3. a. On considère $A = \{k \in \mathbb{N}^* \mid \tilde{f}^k = \tilde{0}\}$. A est une partie non vide de \mathbb{N}^* puisque $n \in A$. Elle admet donc un plus petit élément $p \geq 1$. Si $p = 1$, alors $p-1 = 0$ mais $\tilde{f}^{p-1} = \text{Id}_F \neq \tilde{0}$ car $F \neq \{0_E\}$. Si $p \geq 2$, alors $p-1 \in \mathbb{N}^*$ et on ne peut avoir $\tilde{f}^{p-1} = \tilde{0}$ sinon $p-1 \in A$, ce qui contredit la minimalité de p . On a donc dans tous les cas $\tilde{f}^{p-1} \neq \tilde{0}$ et $\tilde{f}^p = \tilde{0}$.
b. On prouve comme à la question 1.b que la famille $(y, \tilde{f}(y), \dots, \tilde{f}^{p-1}(y))$ est libre. Comme $k = \dim F$ et que la famille précédente est de cardinal p , on en déduit $p \leq k$. Ainsi $\tilde{f}^k = \tilde{0}$.
c. La question précédente prouve que $F \subset \text{Ker } f^k$. Or on a vu à la question 2.b que $\dim \text{Ker } f^k = k$. Comme $\dim F = k$, on a donc $F = \text{Ker } f^k$.
d. On vient de voir que tous les sous-espaces stables de dimension k avec $1 \leq k \leq n-1$ étaient de la forme $\text{Ker } f^k$. Réciproquement, on a vu à la question 2 que les sous-espaces $\text{Ker } f^k$ avec $1 \leq k \leq n-1$ étaient stables par f . Il reste à remarquer que le seul sous-espace de dimension 0 i.e. le sous-espace nul et que le seul sous-espace de dimension n i.e. E tout entier sont évidemment stables par f . Enfin, comme $f^0 = \text{Id}_E$ et $f^n = 0$, on a $\{0\} = \text{Ker } f^0$ et $E = \text{Ker } f^n$.
Les sous-espaces stables par f sont donc exactement les sous-espaces $\text{Ker } f^k$ avec $0 \leq k \leq n$.
4. a. La famille $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$ étant une base de E , il existe un unique n -uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ de réels tel que :

$$g(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x)$$

Ce sont les coordonnées de $g(x)$ dans la base $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$.

- b. Si g commute avec f , g commute avec f^i pour $0 \leq i \leq n-1$. Par conséquent,

$$g(f^i(x)) = f^i(g(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^{k+i}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k \right) (f^i(x))$$

On en déduit que les endomorphismes g et $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$ coïncident sur la base $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$. Ceci prouve que

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = \alpha_0 \text{Id}_E + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$$

- c. Notons \mathcal{C} le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par la famille $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ et \mathcal{C}' l'ensemble des endomorphismes commutant avec f . La question précédente montre que $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$. Mais comme toute puissance de f commute avec f , il est clair que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$. Ainsi $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$. Comme la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$ est une famille libre de E , a fortiori la famille $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$. On en déduit que $\dim \mathcal{C} = n$.