Devoir à la maison n°1

Exercice 1.

1. Soient x_1, x_2, y_1, y_2 quatre réels.
   a. Montrer que $(x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leqslant \left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2\right)$.
   b. En déduire que $\sqrt{(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2} \leqslant \sqrt{x_1^2+x_2^2} + \sqrt{y_1^2+y_2^2}$.
2. Soient $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ des réels. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k + y_k)^2$$

   a. Déterminer des réels A, B et C tels que $P(\lambda) = A\lambda^2 + 2B\lambda + C$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On exprimera A, B et C sous forme de sommes.
   b. On suppose $A \neq 0$. P est donc un trinôme du second degré. Quel est le signe de $P(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$? Que peut-on en déduire sur le discriminant Δ de P ? En déduire l'inégalité suivante.

$$(\mathrm{CS}) : \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

   c. On suppose $A = 0$. Que peut-on en déduire sur les réels $x_1, \dots, x_n$? En déduire que l'inégalité (CS) est encore vraie.
   d. En utilisant (CS), montrer que

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

   e. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. En utilisant (CS), montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2$$

Exercice 2.

Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel non nul. On pose

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (2k) \qquad \text{et} \qquad Q_n = \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$$

1. Exprimer P_n en fonction de n.
2. Que vaut P_nQ_n ?
3. En déduire Q_n.

Exercice 3.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \qquad\qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \qquad\qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k}$$

1. Calculer a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 ainsi que S_0, S_1, S_2, S_3, S_4. Que remarque-t-on ?
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) a_{n-k} a_k$$
En déduire que $2T_n = nS_n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$$
4. Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$
puis que
$$\frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$
5. En déduire par récurrence que $S_n = a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Montrer que a_n est un entier naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$.