

Calculs élémentaires

Exercice 1

Entrez dans la danse

Calculez

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 2+2i \\ 4 & 1 & -2i \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2-i \\ 2 & -i \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Cayley-Hamilton en dimension 2

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Etablir que

$$M^2 - (a+d)M + (ad-bc)\mathbb{I}_2 = \mathbb{O}_2.$$

Exercice 3

A hue et à dia

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $U = (1)_{1 \leq i,j \leq n}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\sigma(A)$ la somme des coefficients de A . Exprimer UAU en fonction de $\sigma(A)$ et de U .

Exercice 4

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$AB = \mathbb{I}_n + A + A^2.$$

Montrer que $AB = BA$.

Exercice 5

On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices A et B définies par $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et

$$a_{i,j} = i + j, \quad b_{i,j} = i - j.$$

Calculer le terme général des matrices $C = A - B$ et $D = AB$.

Exercice 6

Montrer que l'ensemble G des matrices $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$ est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$ isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 7

On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est *stochastique* si elle est à coefficients positifs et si la somme des éléments de chaque colonne vaut 1. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ deux matrices stochastiques. Montrer que AB est stochastique.

Puissances

Exercice 8 ★

Puissances

Calculer les puissances des matrices A, B, C et D suivantes :

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3. \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix};$$

$$2. \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix};$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 ★

Suites récurrentes couplées

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les trois suites de nombres réels définies par $u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 0$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

Déterminer les expressions des termes généraux de (u_n) , (v_n) et (w_n) en fonction de n , u_0 , v_0 et w_0 .

Exercice 10**Avec polynôme annulateur**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3 - A^2 - 4A + 4I_p = 0_p.$$

Etablir que, pour tout entier naturel n , A^n appartient à $\text{vect}(I_p, A, A^2)$ et exprimer A^n en fonction de I_p , A et A^2 .

Exercice 11**Petits calculs**

On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 , B^2 et B^3 . En déduire A^n et B^n pour tout entier $n \geq 1$.
2. Calculer AB , AB^2 , BA et B^2A .

Exercice 12 ★**Un calcul de puissances**

Soient a et b , deux nombres complexes. Calculer les puissances de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}.$$

Exercice 13**Mines-Ponts MP**

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A + A^{-1} = I_n$. Déterminer $A^k + A^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 14

Soit E l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. a. Montrer que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Donner sa dimension ainsi qu'une base.
b. Montrer que E est un anneau. Est-il commutatif ?
c. On note G l'ensemble des matrices de E telles que $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que G est un groupe.
2. Soit $A \in E$. Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$. On pourra distinguer les cas $a \neq b$ et $a = b$.
3. On pose $B_n = \sum_{p=0}^n \frac{A^p}{p!}$. Montrer que la suite (B_n) et préciser sa limite B . (On dit qu'une suite de matrices converge si les suites des coefficients convergent ; dans ce cas, la limite est la matrice constituée des limites des coefficients).
4. On note f l'application de E dans E qui à la matrice A associe la matrice B définie dans la question précédente. f est-elle linéaire ? injective ? surjective ? Préciser son image.

Exercice 15**Navale**

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$. Calculer de deux façons M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Inverses**Exercice 16 ★★****Matrices à diagonale dominante**

Soient $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 17 ★**Matrices unipotentes**

Soit \mathcal{U}_n le sous-ensemble de $T_n^+(\mathbb{K})$ constitué des matrices dont tous les coefficients diagonaux valent 1. Prouver que \mathcal{U}_n est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 18

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -9 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 19

Soit A_n la matrice carrée de taille n suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que A_n est inversible si et seulement si n est pair et calculer son inverse dans ce cas.

Exercice 20

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = (\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$. Montrer que A_n est inversible et calculer son inverse.

Exercice 21**Kalléidoscope**

Dire si les matrices suivantes sont inversibles ou non. Le cas échéant, calculer leur inverse ou sinon, donner une base de leur image et une base de leur noyau.

$$1. A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$5. A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2. A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$6. A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$3. A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$7. A_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$4. A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8. A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22 ★**Taille XXL**

Soit $n \geq 1$. Prouver l'inversibilité et calculer l'inverse des matrices suivantes,

$$1. \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

$$2. \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 23 ★**Le point de vue élémentaire**

Soient $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n + A$ soit inversible. On pose alors $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

1. Montrer que $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$.
2. Prouver que $I_n + B$ est inversible.

Exercice 24 ★★**Utilisation d'identités remarquables**

Soient $n \geq 1$ et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Prouver l'inversibilité et inverser M par la méthode du pivot de Gauss.
2. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a. Calculer les puissances de J .
- b. Exprimer M en fonction de J .
- c. En déduire que M est inversible et retrouver l'expression de son inverse.

Exercice 25**Pivot party**

En utilisant l'algorithme du pivot, vérifier que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leur inverse.

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$3. \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 6 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 26

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^3 - A$.
2. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1} .

Image et noyau**Exercice 27**

Les applications suivantes sont clairement linéaires. Déterminer leur noyau et leur image et écrire dans chaque cas la matrice M correspondante rapportée aux bases canoniques.

1. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$;
2. $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x - y, x + y, x + 2y)$;
3. $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x - 3y + 2z$;
4. $\theta : \mathbb{R}^3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3[X], P \mapsto P'$.

Exercice 28**Une matrice de projection**

Soit

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

considérée comme matrice d'un endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dans la base canonique. En déterminer l'image et le noyau. Montrer qu'il s'agit d'un projecteur.

Exercice 29

Déterminer des bases du noyau et de l'image de $A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$. Donner

aussi des systèmes d'équations cartésiennes (avec un nombre minimum d'équations) de $\text{Ker } A$ et $\text{Im } A$.

Exercice 30**Sans calculs**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer *sans calculs* des bases de $\text{Ker } A$ et

$\text{Im } A$.

Rang**Exercice 31 ★****Avec paramètre**

Discuter le rang de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 32**Matrices de rang 1**

Soit M une matrice carrée de taille $n \geq 2$ à coefficients réels de rang 1.

1. Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes U et V tels que $M = UV^T$.
2. Exprimer les puissances entières de M en fonction de M et de $\text{tr}(M)$.
3. A quelle condition une matrice de rang 1 est-elle une matrice de projection ?
4. Quelles sont les matrices de rang 1 qui sont nilpotentes ?

Exercice 33

Soit A une matrice réelle. Montrer que $\text{rg } A = \text{rg } A^T A = \text{rg } A A^T$.

Exercice 34

On considère une application f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} , non constamment égale à 0 ou 1, telle que :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, f(AB) = f(A)f(B)$$

1. Montrer que pour toute matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A)$ est non nul.
2. Soit A une matrice de rang r , strictement inférieur à n .
 - a. Montrer l'existence de $r + 1$ matrices, notées A_1, A_2, \dots, A_{r+1} , toutes équivalentes à A et telles que le produit $A_1 A_2 \dots A_{r+1}$ soit nul.
 - b. En déduire que $f(A) = 0$.
3. Que peut-on en conclure pour l'application f ?
Donner un exemple d'une telle application.

Exercice 35

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AU = \lambda U$. Montrer qu'il existe $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $A^T V = \lambda V$.

Exercice 36

Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si il existe deux familles libres (X_1, \dots, X_r) et (Y_1, \dots, Y_r) de vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $M = X_1 Y_1^T + \dots + X_r Y_r^T$.

Matrices définies par blocs**Exercice 37 ★****Bloc party**

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de M en fonction de ceux de A et B .
2. En cas d'inversibilité, exprimer l'inverse de M en fonction de A et B .

Exercice 38

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$.

Montrer que M est inversible si et seulement si A et B le sont et que, dans ce cas, il existe

$$C' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ telle que } M^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & C' \\ \hline 0 & B^{-1} \end{array} \right).$$

Exercice 39**Groupes multiplicatifs inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ un groupe pour la multiplication matricielle. On suppose $\mathcal{G} \neq \{0\}$.

REMARQUE. L'inversibilité et l'élément neutre pour le groupe \mathcal{G} n'ont a priori rien à voir avec l'inversibilité et l'élément neutre pour le groupe $GL_n(\mathbb{K})$.

On souhaite montrer qu'il existe $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que \mathcal{G} soit isomorphe à un sous-groupe de $GL_r(\mathbb{K})$.

On note E l'élément neutre de \mathcal{G} .

1. On suppose que $E = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ avec $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que les éléments de \mathcal{G} sont

de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ avec $A \in GL_r(\mathbb{K})$. Conclure dans ce cas.

2. On revient au cas général. Montrer que E est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$. Conclure.

Exercice 40

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$.

On suppose A inversible. Montrer que $\text{rg } M = \text{rg } A + \text{rg } B$. Le résultat reste-t-il valable si A n'est pas inversible ?

Exercice 41

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. On pose $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,r} \\ \hline 0_{q,p} & B \end{array} \right)$. Montrer que $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$.

Changement de base

Exercice 42

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est A .

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans \mathcal{C} soit D .
2. Déterminer une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1} .
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

Exercice 43**Passage obligé**

Soient $E = \mathbb{R}^2$, $u = (1, 1)$, $v = (1, -1)$ et $\mathcal{B} = (u, v)$.

1. Justifier que \mathcal{B} est une base de E .
2. Donner les matrices de passage entre \mathcal{B} et la base canonique \mathcal{B}_0 de E .

Exercice 44**Changements de base**

Soit f l'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par

$$(x, y, z) \mapsto (2x - y, y - z, -z + 2x).$$

1. Calculer la matrice M de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 .
2. Prouver que la famille \mathcal{B}' définie par

$$f_1 = e_2 - e_3, \quad f_2 = -e_1 + e_3, \quad f_3 = e_1 + e_2$$

est une base de \mathbb{R}^3 .

3. Calculer la matrice $P = \text{mat}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$ et son inverse.
4. Calculer la matrice M' de f dans la base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 .
5. Quel est le lien entre M , M' et P ?

Exercice 45

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique vaut

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\text{Im}(f)$, $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$.
2. Soit la famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ de vecteurs de \mathbb{R}^4 définie par

$$f_1 = (1, 0, 0, 0), \quad f_2 = (1, 1, -1, 1), \quad f_3 = (3, 2, 0, -1)$$

et $f_4 = (7, 4, -4, 5)$. Vérifier que \mathcal{F} est une base de \mathbb{R}^4 .

3. Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{F} .

Représentation des applications linéaires

Exercice 46

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $A = a + bX + cX^2$ un élément de E . On définit l'application f par :

$$\forall P \in E, f(P) = (AP)''$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Donner la matrice M de f dans la base canonique de E .
3. Déterminer une condition sur A pour que f soit bijective.
4. On pose $A = X^2 + 1$. Déterminer M^{-1} et M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans ce cas.

Exercice 47

Soit $f : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$.

1. Montrer que P est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. En déduire $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.

3. Déterminer une base de $\mathbb{R}_3[X]$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 48

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & X + \text{tr}(AX)B \end{cases}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur A et B pour que f soit une symétrie.
3. Déterminer la base et la direction de f dans ce cas.

Exercice 49

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\text{Im } f = \text{Ker } f$ si et seulement si n est pair et il existe une base de E dans laquelle la

matrice de f est $\left(\begin{array}{c|c} 0_p & I_p \\ \hline 0_p & 0_p \end{array} \right)$ avec $n = 2p$.

Exercice 50 ★**Polynom's Corner**

Soient $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et T_n l'application définie sur E_n par

$$T_n(P) = (nX + 1)P + (1 - X^2)P'.$$

1. Prouver que $T_n \in \mathcal{L}(E_n)$.
2. Ecrire la matrice $M_n = \text{mat}_{\mathcal{B}_n}(T_n)$ de T_n dans la base canonique de E_n .
3. Dans le cas où $n = 3$, déterminer des bases de $\text{Ker}(T_n)$ et de $\text{Im}(T_n)$.

Exercice 51 ★**Le commutant d'une matrice**

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et φ_A l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\varphi_A : M \longmapsto AM - MA.$$

1. Prouver que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau et l'image de φ_A .
3. En déduire que le commutant de A , ie l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A , est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont on donnera une base.

Exercice 52**Espaces de polynômes**

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et f l'application définie sur l'espace E par $f(P) = P + P'$.

1. Prouver que f est un endomorphisme de E .
2. On note \mathcal{B}_0 la base canonique de E . Déterminer la matrice $M = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$.
3. Etablir que f est un automorphisme de E et calculer M^{-1} .
4. En déduire la solution P de $P + P' = X^2 + X + 1$.

Exercice 53**Du p'tit lait**

Soit f , un endomorphisme de \mathbb{R}^3 , admettant pour matrice relative à la base canonique la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau et de l'image de f .
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de f^2 .
3. Vérifier que $\text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 54

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient f , g et h les applications de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définies par :

$$f(P(X)) = XP(X), \quad g(P(X)) = P'(X) \quad \text{et} \quad h(P(X)) = (P(X))^2.$$

1. Montrer que les applications f et g sont linéaires, mais que h ne l'est pas.
2. Les applications f et g sont-elles injectives ? Surjectives ? Déterminer la dimension de leurs noyaux respectifs. Déterminer l'image de f .
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On désigne par f_n et g_n les restrictions de f et de g à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que l'image de g_n est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$ et celle de f_n est incluse dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
4. Déterminer la matrice de g_n dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice de f_n relativement aux bases

$$\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{n+1} = (1, X, \dots, X^{n+1}).$$

5. Calculer les dimensions respectives des images de f_n et de g_n .

Exercice 55**Etude d'un endomorphisme**

Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, définie en posant, pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

1. Montrer que f est linéaire et que son image est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Dans le cas où $n = 3$, donner la matrice de f dans la base $(1, X, X^2, X^3)$. Déterminer ensuite, pour une valeur de n quelconque, la matrice de f dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f pour $n \geq 3$. Calculer leurs dimensions respectives.
4. Soit Q un élément de l'image de f . Montrer (en utilisant en particulier les résultats de la deuxième question) qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(P) = Q \quad \text{et} \quad P(0) = P'(0) = 0.$$

Exercice 56

Soit $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$L(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z).$$

1. Ecrire la matrice associée à L dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
2. Trouver une base et déterminer la dimension de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

$$\text{Ker}(L), \quad \text{Im}(L), \quad \text{Ker}(L) \cap \text{Im}(L).$$

3. Déterminer $L \circ L = L^2$ et $L \circ L \circ L = L^3$ en calculant leurs matrices dans la base canonique. Quelle est la matrice de L^{16} dans la base canonique ?

Exercice 57 ★**Un endomorphisme de matrices**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On considère l'application ϕ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\phi(M) = AM$.

1. Vérifier que ϕ est linéaire.
2. Montrer que ϕ est un isomorphisme. Donner une expression simple de l'isomorphisme réciproque.
3. Déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 58

On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}_3[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto P(X+1) + P(X) \end{aligned}$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. On note \mathcal{B} la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer la matrice de ϕ dans la base \mathcal{B} . On notera M cette matrice.
3.
 - a. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1} .
 - b. En déduire que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$, et donner la matrice de ϕ^{-1} dans la base \mathcal{B} .
4. En déduire que l'équation $P(X+1) + P(X) = 4X^3 - 2X^2 + X - 1$ admet une unique solution $P \in \mathbb{R}_3[X]$, et donner cette solution.

Exercice 59

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et les fonctions g_1, g_2, g_3 et g_4 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_1(x) = xe^x, \quad g_2(x) = xe^{-x}, \quad g_3(x) = e^x, \quad g_4(x) = e^{-x}.$$

On note $F = \text{vect}(g_1, g_2, g_3, g_4)$.

1.
 - a. Si a, b, c et d sont quatre réels tels que $\forall x \in \mathbb{R}, axe^x + bxe^{-x} + ce^x + de^{-x} = 0$, montrer qu'alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + c)e^x = 0$, puis que $a = c = 0$.
 - b. Montrer que (g_1, g_2, g_3, g_4) est une base de F , qu'on notera \mathcal{B}_1 par la suite. Quelle est la dimension de F ?
2.
 - a. Vérifier que g'_1 et g'_2 appartiennent à F .
 - b. Montrer que (g_1, g_2, g'_1, g'_2) est aussi une base de F , qu'on notera \mathcal{B}_2 . Donner la matrice de passage de \mathcal{B}_1 à \mathcal{B}_2 .
3. Soit φ l'application définie sur F par $\varphi(f) = f'$.
 - a. Montrer que φ est un endomorphisme de F .
 - b. Déterminer la matrice M de φ dans la base \mathcal{B}_1 .
 - c. En déduire que φ est un automorphisme de F .
 - d. Déterminer la matrice N de φ dans la base \mathcal{B}_2 . Cette matrice est-elle inversible?

Exercice 60 ★★★**Centrale MP**

Soient H_1 et H_2 deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (f, g) \in H_1 \times H_2, \quad f \circ g + g \circ f = 0$$

1. Justifier qu'il existe $(p_1, p_2) \in H_1 \times H_2$ tel que $p_1 + p_2 = \text{Id}$.
2. Montrer que p_1 et p_2 sont des projecteurs.
3. Montrer que $\dim H_1 \leq (n - \text{rg } p_2)^2$ et $\dim H_2 \leq (n - \text{rg } p_1)^2$.
4. Quel est le nombre de choix possibles pour le couple (H_1, H_2) ?

Exercice 61 ★★

Soient p_1, \dots, p_n des projecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que $p_1 + \dots + p_n = \text{Id}_E$.

Montrer que $\text{Im } p_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } p_n = E$.

Exercice 62 ★★★

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer le rang de l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ $\Phi : f \mapsto v \circ f \circ u$.

Exercice 63 ★

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto iz + (1-i)\bar{z} \end{cases}.$$

1. Montrer que f est un automorphisme du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} .
2. Montrer qu'il existe une base du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Construire le point d'affixe $f(z)$ à partir du point d'affixe z .

Exercice 64 ★

On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (\sin, \cos, \text{sh}, \text{ch})$.

1. Montrer que \mathcal{B} est une base de F .
2. On note D l'opérateur de dérivation. Montrer que F est stable par D . On notera d l'endomorphisme de F induit par D .
3. On note M la matrice de d dans la base \mathcal{B} . Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que d est un automorphisme de F . Écrire la matrice de d^{-1} dans la base \mathcal{B} .
5. On note $f = d - \text{Id}$. Déterminer l'image et le noyau de f .
6. On note $g = d + \text{Id}$. Déterminer l'image et le noyau de $g \circ f$.

Matrices remarquables

Exercice 65 ★**Matrices (anti-)symétriques**

Soient $n \geq 1$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices carrées antisymétriques d'ordre n .

1. Justifier que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser leurs dimensions.
2. Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 66 ★

Soit E le sous ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par

$$E = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication des matrices. Calculer $\dim(E)$.
2. Soit $M(a, b, c)$ un élément de E . Déterminer, suivant les valeurs des paramètres a, b et $c \in \mathbb{R}$ son rang.
3. Calculer (lorsque cela est possible) l'inverse $M(a, b, c)^{-1}$ de $M(a, b, c)$.
4. Donner une base de E formée de matrices inversibles et une autre formée de matrices de rang 1.

Exercice 67

Montrer que

$$F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de F et la compléter en une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 68

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est magique si les sommes des coefficients de M par ligne et par colonne sont constantes. On note \mathcal{M} l'ensemble des matrices magiques et, pour $M \in \mathcal{M}$, $s(M)$ la valeur commune des sommes.

1. Montrer que \mathcal{M} est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $s : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{K}$ est un morphisme d'algèbres.

REMARQUE. Il s'agit de montrer que \mathcal{M} est un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que s est un morphisme d'anneau et une forme linéaire.

2. Montrer que si $M \in \mathcal{M}$ est inversible, alors $M^{-1} \in \mathcal{M}$.
3. Montrer que \mathcal{M} est la somme directe du sous-espace vectoriel \mathcal{M}_s des matrices magiques symétriques et du sous-espace vectoriel \mathcal{M}_a des matrices magiques antisymétriques.
4. On note ϕ_M l'endomorphisme de \mathbb{K}^n canoniquement associé à M et on pose

$$\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, x_1 + \dots + x_n = 0\} \text{ et } \mathcal{K} = \{(x, \dots, x), x \in \mathbb{K}\}.$$

Montrer que $M \in \mathcal{M}$ si et seulement si \mathcal{H} et \mathcal{K} sont stables par ϕ_M .

5. En déduire la dimension de \mathcal{M} .

Exercice 69

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\Delta_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M + M^T = \text{tr}(M)A\}$. On note respectivement $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ les ensembles des matrices symétriques et des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que Δ_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ contenant $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.
2. Si $\text{tr}(A) \neq 2$, montrer que $\Delta_A = \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.
3. Déterminer Δ_A dans le cas où $A \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$.
4. Déterminer Δ_A dans le cas où $\text{tr}(A) = 2$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$. On pourra remarquer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est la somme directe de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 70**Questions en vrac**

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $M(z) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z) & -\operatorname{Im}(z) \\ \operatorname{Im}(z) & \operatorname{Re}(z) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{E} = \{M(z), z \in \mathbb{C}\}$.

1. Montrer que \mathcal{E} est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que l'application $M : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ z & \longmapsto & M(z) \end{cases}$ est un isomorphisme de \mathbb{R} -espaces vectoriels.
3. Montrer que \mathcal{E} est un anneau commutatif et que M est un isomorphisme d'anneaux.
4. Montrer que \mathcal{E} est un corps.
5. Résoudre l'équation $A^4 = I_2$ d'inconnue $A \in \mathcal{E}$.
6. Pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $N(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $\mathcal{F} = \{N(a, b), (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.
Montrer que \mathcal{F} est un anneau commutatif. Quels sont ses éléments inversibles ?

Exercice 71**Matrices de trace nulle et crochets de Lie**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathcal{N}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$.

Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on pose $[A, B] = AB - BA$. On note $\mathcal{L}_n = \{[A, B], (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2\}$.

1.
 - a. Montrer que \mathcal{N}_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer sa dimension.
 - b. Montrer que $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{N}_n$.
2.
 - a. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de diagonale nulle appartient à \mathcal{N}_n .
 - b. Montrer que toute matrice de \mathcal{N}_n est semblable à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de diagonale nulle.
 - c. En déduire que $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{L}_n$.

Exercice 72**Matrices symplectiques**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array} \right)$. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ est *symplectique* si $M^T J M = J$. Montrer que l'ensemble des matrices symplectiques de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\operatorname{GL}_{2n}(\mathbb{K})$.

Exercice 73

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f(AB) = f(BA)$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

Montrer que f est proportionnelle à la trace.

Equations d'inconnue matricielle**Exercice 74**

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX).$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 75

On considère l'équation

$$X^2 + X = A \tag{E}$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Ker} A$.
2. Montrer que A n'est pas inversible.
3. Soit X vérifiant (E). Montrer que X ou $X + I_2$ n'est pas inversible.
4. On suppose X non inversible.
 - a. Montrer que $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} X$ et $\operatorname{Ker} X \subset \operatorname{Ker} A$.
 - b. Montrer que $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} X$ et $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} X$.
 - c. En déduire qu'il existe $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $X = xA$. Quelles sont les seules valeurs possibles de x ? Quelles sont les matrices X correspondantes ?
5. On suppose $X + I_2$ non inversible. En posant $Y = -(X + I_2)$, se ramener au cas précédent.
6. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 76

On veut résoudre le système d'équations d'inconnues dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} XY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

1. On suppose que le système admet un couple de solutions (X, Y) . Montrer que $\text{rg } X = \text{rg } Y = 1$.
2. Que peut-on en déduire sur la forme de X et Y ?
3. Résoudre le système.

Exercice 77

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + \text{tr}(X)A = 0$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Systèmes linéaires**Exercice 78**

Résoudre selon les valeurs des paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

Exercice 79 ★

Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = -4 \\ 3x + 2y - 3z = 17 \\ 5x - 3y + 8z = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - 3z = 2 \\ -x + 6y - 11z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - z = -2 \\ x + y + z = 2 \\ -2x + 4y - 5z = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - 5z = 3 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \\ x + y - 7z = 2 \\ 2x - 3y + 8z = 5 \end{cases}$$

Exercice 80

Résoudre le système $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et où m est un paramètre réel.