

DEVOIR SURVEILLÉ N°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

Partie I –

1. a. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

- b. D'après la question précédente, $a_n^* = \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 c. Comme α n'est pas nul, les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$ sont grossièrement divergentes.

2. a. Toujours d'après la formule du binôme,

$$a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k = \frac{1}{2^n} (z+1)^n$$

- b. i. La série $\sum a_n$ est une série géométrique de raison z avec $|z| < 1$: elle converge. De plus, $A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.
 ii. La série $\sum a_n^*$ est à nouveau une série géométrique de raison $\frac{1}{2}(z+1)$. Par inégalité triangulaire $|z+1| \leq |z| + 1 < 2$ de sorte que $\left|\frac{1}{2}(z+1)\right| < 1$. La série $\sum a_n^*$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}} = \frac{2}{1-z} = 2A(z)$$

- c. i. La série $\sum a_n$ diverge grossièrement.
 ii. Si $z = -2$, alors $a_n^* = \frac{(-1)^n}{2^n}$. La série $\sum a_n^*$ est alors une série géométrique convergente puisque $|-1/2| = 1/2 < 1$.
 iii. Par la méthode de l'arc-moitié

$$\frac{z+1}{2} = \frac{e^{i\theta} + 1}{2} = e^{\frac{i\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Comme $0 < |\theta| < \pi$,

$$\left|\frac{z+1}{2}\right| = \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| < 1$$

donc la série géométrique $\sum a_n^*$ converge. Par ailleurs, toujours par la méthode de l'arc-moitié

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{1}{1 - \frac{e^{i\theta} + 1}{2}} = \frac{2}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1}{-ie^{i\theta} 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{ie^{-\frac{i\theta}{2}}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 1 + i \cotan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Partie II –

1. a. i. Comme k est fixé

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (n-j) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

- ii. D'après la question précédente

$$\frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n^k}{2^n}$$

Par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} = 0$.

- b. La somme définissant $S_q(n, a)$ est finie et chacun de ses termes tend vers 0 d'après la question précédente donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_q(n, a) = 0$.
- c. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme (a_n) converge vers 0, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n > q$, $|a_n| \leq \varepsilon/2$. Mais comme la suite de terme général $S_q(n, a)$ converge vers 0, il existe $N \geq q$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $|S_q(n, a)| \leq \varepsilon/2$. Alors pour $n \geq N$,

$$\begin{aligned} |a_n^*| &= \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \right| \\ &\leq |S_q(n, a)| + \frac{1}{2^n} \sum_{k=q+1}^n \binom{n}{k} |a_k| \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=q+1}^n \binom{n}{k} \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \right) \quad \text{par positivité des coefficients binomiaux} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{d'après la question 1.a} \end{aligned}$$

Par définition de la limite, (a_n^*) converge vers 0.

- d. Posons $b_n = a_n - \ell$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité (évidente ?) de l'application $u \mapsto u^*$ et d'après la question 1.b

$$b_n^* = a_n^* - \ell$$

Comme (b_n) converge vers 0, (b_n^*) converge également vers 0 d'après la question précédente de sorte que (a_n^*) converge vers ℓ .

- e. Dans la question 2.c.ii, on a montré que lorsque $a_n = (-2)^n$, alors $a_n^* = (-1/2)^n$. La suite (a_n^*) peut converger sans que la suite (a_n) converge.

2. a. On trouve

$$U_0 = S_0 \quad U_1 = 2S_0 + S_1 U_2 = S_2 + 3S_1 + 3S_0 U_3 = S_3 + 4S_2 + 6S_1 + 4S_0$$

- b. i. On peut conjecturer que

$$U_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k$$

- ii. La relation (\mathcal{E}) est vraie pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Supposons la vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Remarquons d'abord que

$$U_{n+1} = 2^{n+1} T_{n+1} = 2^{n+1} (T_n + a_{n+1}^*) = 2U_n + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k$$

Suivant l'indication de l'énoncé,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (S_k - S_{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k - \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k \quad \text{en réindexant et car } S_{-1} = 0 \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right) S_k \end{aligned}$$

En utilisant maintenant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
 U_{n+1} &= 2U_n + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k \\
 &= 2 \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k + \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right) S_k \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} \right) S_k \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+2}{k+1} S_k \quad \text{d'après la formule du triangle de Pascal}
 \end{aligned}$$

La relation (E) est donc établie par récurrence.

c. Remarquons qu'avec la convention $S_{-1} = 0$,

$$T_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} U_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} S_k = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{k-1}$$

En notant $s_n = S_{n-1}$, on a donc $T_{n-1} = 2s_n^*$. Notons S la série de la série $\sum a_n$. Alors (s_n) converge vers S et, d'après la question 1.d, (s_n^*) converge également vers S . Ainsi (T_{n-1}) converge vers $2S$. La série $\sum a_n^*$ converge donc bien et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

d. L'exemple de la question 2.c.ii montre que $\sum a_n$ peut diverger alors que $\sum a_n^*$ converge.

Partie III –

1. a. D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(n+1)!}$ est infini. On en déduit que f est définie, continue et même de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = e^x - 1$$

c. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{-x}f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. a. On a clairement $\sigma_n \leq n$ donc

$$0 \leq \frac{\sigma_n}{n!} \leq \frac{1}{(n-1)!}$$

Comme la série entière $\sum \frac{x^n}{(n-1)!}$ est de rayon de convergence infini par la règle de d'Alembert, il en est de même de la série entière $\sum \frac{\sigma_n x^n}{n!}$. Ainsi g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . A fortiori, elle est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

b. Comme g est définie par une série entière de rayon de convergence infini, on obtient sa dérivée sur \mathbb{R} en dérivant terme à terme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_{n+1} x^n}{n!}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) - g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sigma_{n+1} - \sigma_n) x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = f(x)$$

- c. On pourrait résoudre l'équation différentielle $y' - y = f$. On peut aussi remarquer qu'en posant $h(x) = e^{-x}g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, h est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = e^{-x}(g'(x) - g(x)) = e^{-x}f(x)$$

Sachant que $h(0) = g(0) = 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \int_0^x h'(t) dt = \int_0^x e^{-t}f(t) dt$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^x \int_0^x e^{-t}f(t) dt$$

3. a. D'après la question 1.c,

$$e^{-x}f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Or $e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^n} n!$ donc

$$e^{-x}f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{n-1}}{n!}$$

On peut primitiver terme à terme cette série entière de rayon de convergence infini

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x e^{-t}f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n \cdot n!}$$

- b. Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_n x^n}{n!} \quad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n \cdot n!} \quad g(x) = e^x F(x)$$

donc, par produit de Cauchy,

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k \cdot k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n x^n$$

Par unicité du développement en série entière, $\gamma_n = \frac{\sigma_n}{n!}$.

4. a. i. Par des DL usuels,

$$w_k = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{k}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Comme $\sum \frac{1}{k^2}$ est une série convergente à termes positifs, $\sum w_k$ converge.

- ii. En notant $v_k = \sigma_k - \ln(k)$, on a $w_k = v_k - v_{k+1}$. Ainsi la série télescopique $\sum v_k - v_{k+1}$ converge i.e. la suite (v_k) admet une limite nulle.

- b. En séparant les termes de rangs pairs et impairs,

$$\tau_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \left(\sigma_{2n} - \frac{1}{2}\sigma_n\right) - \frac{1}{2}\sigma_n = \sigma_{2n} - \sigma_n$$

- c. En notant γ la limite de la suite (v_n) , $\sigma_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ puis $\sigma_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(2n) + \gamma + o(1)$ et enfin $\tau_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(2) + o(1)$. Ainsi (τ_{2n}) converge vers $\ln(2)$. Comme $\tau_{2n+1} = \tau_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, (τ_{2n+1}) converge également vers $\ln(2)$. Ainsi (τ_n) converge vers $\ln(2)$ i.e. la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge et sa somme vaut $\ln(2)$.

5. a. D'après ce qui précède, $\sigma_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ puis

$$\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} = 1$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \sigma_n x^n$ vaut donc 1.

- b. On peut déjà garantir que $] -1, 1[\subset \Delta \subset [-1, 1]$. Comme σ_n diverge vers $+\infty$, les séries $\sum \sigma_n$ et $\sum (-1)^n \sigma_n$ divergent grossièrement. Finalement, $\Delta =] -1, 1[$. De plus, pour tout $x \in \Delta$,

$$\phi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \sigma_n x^{n-1}$$

Il est alors clair que ϕ' est positive sur $[0, 1[$. Ainsi ϕ est croissante sur $[0, 1[$.

- c. Puisque $\sigma_n = n! \gamma_n$,

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} n!}{k \cdot k! (n-k)!} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Ainsi, en posant $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 = 0$, $\frac{\sigma_n}{2^n} = a_n^*$. D'après la question 4.c, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ln 2$ et d'après la question 2.c, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2 \ln 2$ ou encore, comme $a_0^* = a_0 = 0$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{2^n} = 2 \ln 2$$

Ceci signifie que $\phi\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \ln 2$.

- d. On peut remarquer que la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sigma_n x^n$ est le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$. Ainsi

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

On retrouve alors $\phi\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \ln 2$.