Devoir à la maison n° 3 : corrigé

Problème 1 — Homographies conservant $\mathbb{U}$

Partie I – Un exemple

1. **a.** Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $\overline{z} = \frac{1}{z}$. Dans ce cas

$$\overline{h(z)} = -i\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} = -i\frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = -i\frac{z+1}{z-1} = h(z)$$

Par conséquent, $h(z) \in \mathbb{R}$.

b. Soit $z \in \mathbb{D}$. On met $h(z)$ sous forme algébrique :

$$h(z) = i\frac{1+z}{1-z} = i\frac{(1+z)(1-\overline{z})}{(1-z)(1-\overline{z})} = i\frac{1+2i\operatorname{Im}(z)-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{-2\operatorname{Im}(z)+i(1-|z|^2)}{|1-z|^2}$$

Ainsi $\operatorname{Im}(h(z)) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0$ puisque $|z| < 1$ et donc$h(z) \in \mathbb{P}$.

c. On résout l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & h(z) = z \\ \iff & i\frac{1+z}{1-z} = z \\ \iff & i + iz == z - z^2 \\ \iff & z^2 + (i-1)z + i = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de ce trinôme est $(i-1)^2 - 4i = -6i$. Une racine carrée de ce discriminant est $\sqrt{3}(1-i)$. Les points fixes de h sont donc $\frac{(1+\sqrt{3})(1-i)}{2}$ et $\frac{(1-\sqrt{3})(1-i)}{2}$.

d. On résout à nouveau l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & h(z) = Z \\ \iff & i\frac{1+z}{1-z} = Z \\ \iff & i + iz == Z - zZ \\ \iff & (Z+i)z = Z - i \end{aligned}$$

Cette équation n'admet donc une solution que pour $Z \neq -i$.

2. **a.** Soit $z \in \mathbb{R}$. Alors $\overline{z+i} = z - i$ et donc $|z+i| = |z-i|$. Ainsi $|g(z)| = 1$ i.e. $g(z) \in \mathbb{U}$.

b. Soit $z \in \mathbb{P}$. On a $|z-i|^2 = (z-i)(\overline{z}+i) = |z|^2 + 1 - 2\operatorname{Im}(z)$ et $|z+i|^2 = (z+i)(\overline{z}-i) = |z|^2 + 1 + 2\operatorname{Im}(z)$. Puisque $\operatorname{Im}(z) > 0$, $|z-i|^2 < |z+i|^2$ puis $|z-i| < |z+i|$ et donc $|g(z)| < 1$ i.e. $g(z) \in \mathbb{D}$.

Partie II –

1. Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $|h(z)| = \frac{|e^{i\theta}|}{|z|} = 1$ puisque $|z| = 1$.

2. **a.** h est bien de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a = e^{i\theta}$, $b = e^{i\theta}\alpha$, $c = \overline{\alpha}$ et $d = 1$. De plus, $ad - bc = e^{i\theta} - e^{i\theta}\alpha\overline{\alpha} = (1-|\alpha|^2)e^{i\theta} \neq 0$ puisque $\alpha \notin \mathbb{U}$. h est donc bien une homographie.
Par ailleurs, $\overline{\alpha}z + 1 = 0 \iff z = -\frac{1}{\alpha}$. Puisque, $|\alpha| \neq 1$, $\left|-\frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|} \neq 1$. Ceci montre que h est définie sur $\mathbb{U}$.

b. Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $\overline{z} = \frac{1}{z}$ et

$$\overline{h(z)} = e^{-i\theta} \frac{\overline{z} + \overline{\alpha}}{\alpha\overline{z} + 1} = \frac{1}{e^{i\theta}} \frac{\frac{1}{z} + \overline{\alpha}}{\alpha\frac{1}{z} + 1} = \frac{1}{e^{i\theta}} \frac{1 + \overline{\alpha}z}{\alpha + z} = \frac{1}{h(z)}$$

On en déduit que $|h(z)| = 1$.

3. **a.** Soit $z \in \mathbb{U}$. On a donc $h(z) \in \mathbb{U}$ et ainsi $\overline{h(z)} = \frac{1}{h(z)}$.

$$\begin{aligned}
& \overline{h(z)} = \frac{1}{h(z)} \\
\Longrightarrow\quad & \frac{\overline{a}\overline{z} + \overline{b}}{\overline{c}\overline{z} + \overline{d}} = \frac{cz + d}{az + b} \\
\Longrightarrow\quad & (\overline{a}\overline{z} + \overline{b})(az + b) = (\overline{c}\overline{z} + \overline{d})(cz + d) \\
\Longrightarrow\quad & |a|^2 + \overline{a}b\frac{1}{z} + a\overline{b}z + |b|^2 = |c|^2 + \overline{c}d\frac{1}{z} + c\overline{d}z + |d|^2 \qquad \text{car } z \in \mathbb{U} \\
\Longrightarrow\quad & a\overline{b}z^2 + \left(|a|^2 + |b|^2\right) z + \overline{a}b = c\overline{d}z^2 + \left(|c|^2 + |d|^2\right) z + \overline{c}d \\
\Longrightarrow\quad & (a\overline{b} - c\overline{d})z^2 + \left(|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2\right) z + \overline{a}b - \overline{c}d = 0
\end{aligned}$$

Ceci signifie que le trinôme $(a\overline{b} - c\overline{d})z^2 + \left(|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2\right) z + \overline{a}b - \overline{c}d$ admet une infinité de racines (tous les éléments de $\mathbb{U}$). Ceci n'est possible que si ce trinôme est le trinôme nul. On en déduit en particulier que $\overline{a}b = \overline{c}d$ et $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$.

> **Remarque.** La condition $a\overline{b} = c\overline{d}$ ne nous apprend rien de plus que la condition $\overline{a}b = \overline{c}d$ (elle lui est équivalente).

b. Supposons $a = 0$. Alors $\overline{c}d = \overline{a}b = 0$. L'un des complexes c ou d est nul. On ne peut avoir $c = 0$ sinon $ad - bc = 0$. C'est donc que $d = 0$. Il vient alors $|b|^2 = |d|^2$ et donc $|b| = |d|$. d ne peut être nul sinon on aurait $b = 0$ puis $ad - bc = 0$. Le complexe $\frac{b}{d}$ est de module 1 : il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{b}{d} = e^{i\theta}$. On a alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $h(z) = \frac{e^{i\theta}}{z}$.

c. **i.** Puisque $a \neq 0$ et $\overline{a}b = \overline{c}d$, $b = \frac{\overline{c}d}{\overline{a}}$. Ainsi

$$|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 = |a|^2 + \frac{|c|^2|d|^2}{|a|^2} - |c|^2 - |d|^2 = \frac{1}{|a|^2}(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2)$$

Or on a vu que $|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 = 0$ donc $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$.

ii. Supposons par l'absurde que $|a| = |c|$. Alors

$$ad - bc = \frac{\overline{a}ad - \overline{a}bc}{\overline{a}} = \frac{|a|^2d - \overline{a}bc}{\overline{a}} = \frac{|c|^2d - \overline{a}bc}{\overline{a}} = \frac{c\overline{c}d - \overline{a}bc}{\overline{a}} = \frac{c}{\overline{a}}(\overline{c}d - \overline{a}b) = 0$$

Il y a donc contradiction.

iii. On a alors nécessairement $|a| = |d|$ et en particulier $d \neq 0$. Pour tout z dans l'ensemble de définition de h :

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{d} \frac{z + \frac{b}{a}}{\frac{c}{d}z + 1}$$

Comme $|a| = |d|$, $\frac{a}{d} \in \mathbb{U}$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{a}{d} = e^{i\theta}$. Posons $\alpha = \frac{b}{a}$. Alors

$$\overline{\alpha} = \frac{\overline{b}}{\overline{a}} = \frac{a\overline{b}}{|a|^2} = \frac{c\overline{d}}{|d|^2} = \frac{c}{d}$$

Ainsi on a bien

$$h(z) = e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\overline{\alpha}z + 1}$$

Enfin, $|\alpha| \neq 1$ sinon on aurait $\overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ i.e. $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ et finalement $ad - bc = 0$, ce qui est exclus.