

# DEVOIR À LA MAISON N°17

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1 —

Dans tout le problème,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

On considère une urne  $U_n$  contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ .

On tire une boule au hasard dans  $U_n$ . On note  $k$  le numéro de cette boule.

Si  $k$  est égal à 1, on arrête les tirages.

Si  $k$  est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne  $U_n$  les boules numérotées de  $k$  à  $n$  (il reste donc les boules numérotées de 1 à  $k-1$ ), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.

On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.

On note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1.

On note  $Y_n$  la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules tirées.

On note  $E(X_n)$  et  $V(X_n)$  (respectivement  $E(Y_n)$  et  $V(Y_n)$ ) l'espérance et la variance de  $X_n$  (respectivement  $Y_n$ ).

### Partie I – Étude de la variable aléatoire $X_n$

On note  $I_n$  la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne  $U_n$ .

1.
  - a. Quelle est la loi de  $I_n$  ?
  - b. Quelle est la loi de  $X_n$  conditionnée par l'événement  $I_n = 1$ .
  - c. On suppose  $n \geq 2$ . Expliquer pourquoi pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$  et tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$

$$P(X_n = j | I_n = k) = P(X_{k-1} = j - 1)$$

2.
  - a. Quelle est la loi de  $X_1$  ?
  - b. Quel est l'événement  $X_2 = 1$  ? Donner la loi de  $X_2$ , son espérance et sa variance.
  - c. Déterminer la loi de  $X_3$ , son espérance et sa variance.
3.
  - a. Expliquer pourquoi  $X_n$  prend ses valeurs dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .
  - b. Déterminer  $P(X_n = 1)$  et  $P(X_n = n)$ .
  - c. On suppose  $n \geq 2$ . Montrer que pour tout entier  $j \geq 2$ ,

$$P(X_n = j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j - 1)$$

- d. On suppose  $n \geq 2$ . Calculer pour tout entier  $j \geq 1$

$$nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j)$$

En déduire que pour tout entier  $j \geq 1$

$$P(X_n = j) = \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1)$$

4. a. On suppose  $n \geq 2$ . Montrer que

$$E(X_n) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$$

- b. En déduire  $E(X_n)$  puis donner un équivalent simple de  $E(X_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . On pourra utiliser une comparaison à une intégrale.
5. a. On suppose  $n \geq 2$ . Calculer  $E(X_n^2)$  en fonction de  $E(X_{n-1}^2)$  et  $E(X_{n-1})$ .
- b. En déduire une expression de  $V(X_n)$  sous forme de somme.
- c. Donner un équivalent simple de  $V(X_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
6. Soit  $(T_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $T_i$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{i}$ . On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i$$

- a. Vérifier que  $X_1$  et  $T_1$  ont la même loi.
- b. On suppose  $n \geq 2$ . Montrer que pour tout entier  $j \geq 1$

$$P(S_n = j) = \frac{1}{n} P(S_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n} P(S_{n-1} = j)$$

En déduire que  $X_n$  et  $S_n$  ont même loi.

- c. Retrouver ainsi  $E(X_n)$  et  $V(X_n)$ .

7. On définit le polynôme  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  par

$$P_n = \sum_{k=1}^n P(X_n = k) X^k$$

- a. Déterminer  $P_1$  et  $P_2$ .
- b. On suppose  $n \geq 2$ . A l'aide de la question **I.3.d**, montrer que

$$P_n = \frac{n-1+X}{n} P_{n-1}$$

- c. En déduire  $P_n$ .
- d. Déterminer  $P(X_n = n-1)$ .
- e. Calculer  $P'_n(1)$  et retrouver  $E(X_n)$ .

## Partie II – Étude de la variable aléatoire $Y_n$

1. Donner la loi de  $Y_1$ .
2. Quelles sont les valeurs prises par  $Y_2$  ? Déterminer la loi de  $Y_2$ .
3. a. On suppose  $n \geq 2$ . Expliquer pourquoi pour tout entier  $j \geq 1$  et tout entier  $k \geq 2$

$$P(Y_n = j | I_n = k) = P(Y_{k-1} = j - k)$$

- b. On suppose  $n \geq 2$ . Déduire de la question précédente que pour tout entier  $j \geq 1$

$$P(Y_n = j) = \frac{n-1}{n} P(Y_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(Y_{n-1} = j - n)$$

- c. Montrer que  $E(Y_n) = E(Y_{n-1}) + 1$  lorsque  $n \geq 2$ . Que vaut  $E(Y_n)$  pour tout entier  $n \geq 1$  ?

### Partie III –

On considère l'urne  $U_n$  contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . A partir de l'urne  $U_n$ , on effectue la suite de tirages décrite dans l'en-tête du problème. Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on définit la variable aléatoire  $Z_i^{(n)}$  égale à 1 si, au cours de l'un quelconque des tirages, on a obtenu la boule numéro  $i$ , égale à 0 sinon.

1. Quelle est la loi de  $Z_n^{(n)}$  ? Que dire de la variable  $Z_1^{(n)}$  ?
2. a. On suppose  $n \geq 2$ . Montrer que pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

$$P(Z_i^{(n)} = 1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=i+1}^n P(Z_i^{(k-1)} = 1)$$

- b. Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $Z_i^{(n)}$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{i}$ .
- c. Que vaut  $\sum_{i=1}^n Z_i^{(n)}$  ? Retrouver ainsi  $E(X_n)$ .
- d. Retrouver  $E(Y_n)$ .