Devoir à la maison n°15 : corrigé

Problème 1 — Polynômes de Tchebychev (d'après E3A 2005 PC)

Partie I – Étude de la suite (T_n)

1. On trouve $T_2 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 4X^3 - 3X$.

2. T_0 est un polynôme pair de degré nul et de coefficient dominant 1.
On fait l'hypothèse de récurrence suivante :

HR(n) : T_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 2^{n-1} et de la parité de n.

HR(1) et HR(2) sont vraies.
Supposons HR(n) et HR($n+1$) vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $\deg XT_{n+1} = n+2$ et $\deg T_n = n < n+2$ donc $\deg T_{n+2} = n+2$. De plus, le coefficient dominant de T_{n+2} est le double de celui de T_{n+1} : il vaut donc 2^{n+1}. Enfin, $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$ et $T_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1} T_{n+1}(X)$ donc

$$T_{n+2}(-X) = -2XT_{n+1}(-X) - T_n(-X) = -2(-1)^{n+1} XT_{n+1}(X) - (-1)^n T_n(X) = (-1)^{n+2} T_{n+2}(X)$$

donc T_{n+2} a bien la parité de $n+2$.
Par récurrence, HR(n) est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. La famille $(T_0, \dots, T_n)$ est une famille de polynômes à degrés échelonnés. Elle est donc libre. Puisqu'elle comporte $n+1$ vecteurs et que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. On fait l'hypothèse de récurrence suivante :

HR(n) : $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos x) = \cos(nx)$.

HR(0) et HR(1) sont évidemment vraies.
Suppsons HR(n) et HR($n+1$) vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(\cos x) &= \cos(x) T_{n+1}(\cos x) - T_n(\cos x) \\
&= 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos(nx) \\
&= 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos((n+1)x - x) \\
&= \cos(x)\cos((n+1)x) - \sin((n+1)x)\sin(x) \\
&= \cos((n+1)x + x) = \cos((n+2)x)
\end{aligned}$$

Par récurrence, HR(n) est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$T_n(\cos x_k) = \cos(nx_k) = \cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Ainsi $\cos x_1, \dots, \cos x_n$ sont bien des racines de T_n. Par ailleurs, les réels $x_1, \dots, x_n$ sont distincts et appartiennent à l'intervalle $[0, \pi]$. La fonction cos étant strictement décroissante (et donc injective) sur $[0, \pi]$, les réels $\cos(x_1), \dots, \cos(x_n)$ sont également distincts et donc au nombre de n. Comme $\deg T_n = n$, T_n admet au plus n racines. Les réels $\cos(x_1), \dots, \cos(x_n)$ sont donc exactement les racines de T_n.

Partie II – Etude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

1. L'application $\langle .,. \rangle$ est évidemment symétrique. Elle est bilinéaire par linéarité de l'intégrale. Elle est positive par positivité de l'intégale ($(\mathrm{P}\circ\cos)^2$ est bien entendu positive sur $[0,\pi]$). Enfin, soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\langle \mathrm{P},\mathrm{P}\rangle = 0$. Comme $(\mathrm{P}\circ\cos)^2$ est continue et positive sur $[0,\pi]$, $(\mathrm{P}\circ\cos)^2$ est nulle sur $[0,\pi]$. On en déduit que $\mathrm{P}\circ\cos$ est nulle sur $[0,\pi]$. Comme $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$, P est nul sur $[-1,1]$. P admet donc une infinité de racines : il est nul. Ceci prouve que $\langle .,. \rangle$ est définie.
$\langle .,. \rangle$ est donc une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive i.e. un produit scalaire.

2. On a déjà vu que $(\mathrm{T}_0,\dots,\mathrm{T}_n)$ était une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ à la question **I.3**.
Soient $p,q \in [\![0,n]\!]$ distincts.

$$\langle \mathrm{T}_p,\mathrm{T}_q\rangle = \int_0^\pi \mathrm{T}_p(\cos x)\mathrm{T}_n(\cos x)\,dx = \int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \big(\cos\big((p+q)x\big)+\cos\big((p-q)x\big)\big)\,dx = 0$$

car $p-q \neq 0$ (p et q sont distincts) et $p+q \neq 0$ (sinon on aurait $p=q=0$). Ainsi $(\mathrm{T}_0,\dots,\mathrm{T}_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

3. T_n est orthogonal à $\mathrm{T}_0,\dots,\mathrm{T}_{n-1}$ et donc à $\mathrm{vect}(\mathrm{T}_0,\dots,\mathrm{T}_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$.

Partie III – Calcul exact d'une intégrale

1. **a.** Soit $p \in [\![0,n-1]\!]$.

$$\mathrm{I}(\mathrm{T}_p) = \int_0^\pi \mathrm{T}_p(\cos x)\,dx = \int_0^\pi \cos(px)\,dx = \begin{cases} \pi & \text{si } p=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_n(\mathrm{T}_p) &= \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{T}_p(\cos x_k) \\ &= \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos(px_k) \\ &= \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{(2k-1)p\pi}{2n} \\ &= \frac{\pi}{n}\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{i(2k-1)p\pi}{2n}}\right) \\ &= \frac{\pi}{n}\,\mathrm{Im}\left(e^{\frac{ip\pi}{2n}}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ikp}{n}}\right) \end{aligned}$$

Si $p=0$, alors $e^{ip\pi}=1$ et donc $e^{\frac{ip\pi}{2n}}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ikp}{n}} = n$ puis $\mathrm{S}_n(\mathrm{T}_p)=\pi$.
Si $p \in [\![1,n-1]\!]$, $e^{ip\pi} \neq 1$ donc

$$e^{\frac{ip\pi}{2n}}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{ikp}}{n} = e^{\frac{ip\pi}{2n}}\frac{1-e^{ip\pi}}{1-e^{\frac{ip\pi}{n}}} = \frac{1-(-1)^p}{-2i\sin\frac{p\pi}{2n}} = i\,\frac{1-(-1)^p}{2\sin\frac{p\pi}{2n}}$$

Puisque ce dernier résultat est imaginaire pur, $\mathrm{S}_n(\mathrm{T}_p)=0$.

b. I et S_n sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. D'après la question précédente, elles coïncident sur la base $(\mathrm{T}_0,\dots,\mathrm{T}_{n-1})$ de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ (cf. question **I.3**) : elles sont donc égales sur $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Ainsi pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{I}(\mathrm{P}) = \mathrm{S}_n(\mathrm{P})$.

2. **a.** On a $\deg \mathrm{P} \leqslant 2n-1$ et $\deg \mathrm{R} \leqslant \deg \mathrm{T}_n - 1 = n-1 \leqslant 2n-1$. Par conséquent $\deg(\mathrm{QT}_n) = \deg(\mathrm{P}-\mathrm{R}) \leqslant 2n-1$. Or $\deg(\mathrm{QT}_n) = \deg\mathrm{Q} + \deg\mathrm{T}_n = \deg\mathrm{Q}+n$. D'où $\deg\mathrm{Q} \leqslant n-1$ et $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$.

b. Puisque I est une forme linéaire,

$$\mathrm{I}(\mathrm{P}) = \mathrm{I}(\mathrm{QT}_n) + \mathrm{I}(\mathrm{R}) = \langle \mathrm{Q},\mathrm{T}_n\rangle + \mathrm{I}(\mathrm{R})$$

Or d'après **II.3**, T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ et donc à Q. Ainsi $\langle \mathrm{Q},\mathrm{T}_n\rangle = 0$ et $\mathrm{I}(\mathrm{P}) = \mathrm{I}(\mathrm{R})$.

c. Puisque S_n est une forme linéaire

$$S_n(P) = S_n(QT_n) + S_n(R)$$

Or $S_n(QT_n) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} Q(\cos x_k)T_n(\cos x_k) = 0$ puisque $\cos x_1, \dots, \cos x_n$ sont les racines de T_n. Puisque $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $S_n(R) = I(R)$ d'après **III.1.b**. Enfin, d'après la question précédente $I(R) = I(P)$ donc $S_n(P) = I(P)$.

3. Testons avec le polynôme T_{2n} qui est de degré $2n$.

$$I(T_{2n}) = \langle T_{2n}, T_0 \rangle = 0$$

puisque T_{2n} est orthogonal à $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ d'après **II.3** et donc à T_0.

$$S_n(T_{2n}) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(2nx_k) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos((2k-1)\pi) = -\pi$$

Ainsi $I(T_{2n}) \neq S_n(T_{2n})$.

Partie IV – Calcul approché d'une intégrale

1. En séparant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs :

$$\sum_{k=1}^{2n} f\circ\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n} f\circ\cos\left(\frac{2k\pi}{2n}\right) + \sum_{k=1}^{n} f\circ\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$$

et donc

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{2n} f\circ\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\circ\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\circ\cos(x_k)$$

On en déduit que

$$S_n(f) = \frac{\pi}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n} f\left(\cos\frac{k\pi}{2n}\right) - \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

Puisque cos est continue sur $[0,\pi]$ à valeurs dans $[-1,1]$ et que f est continue sur $[-1,1]$, $f\circ\cos$ est continue sur $[0,\pi]$. Le théorème sur les sommes de Riemann permet donc d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{k\pi}{2n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\cos\frac{k\pi}{2n}\right) = \int_0^{\pi} f\circ\cos(x)\,dx = I(f)$$

On en déduit que $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers $I(f)$.

2. **a.** Pour $t \in [-1,1]$

$$a^2 - 2at + 1 \geqslant (a^2 - 2a + 1) = (a-1)^2 > 0$$

puisque $a \neq 1$. La fonction $t \mapsto a^2 - 2at + 1$ est continue sur $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est continue sur $[-1,1]$.

b. Les racines de $X^{2n}+1$ sont les racines $2n^{\text{èmes}}$ de -1, à savoir les complexes $z_k = e^{\frac{(2k-1)i\pi}{2n}}$ avec $k \in [\![1, 2n]\!]$. Or pour $k \in [\![1,n]\!]$, $z_k = e^{ix_k}$ et pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $z_k = \overline{z_{2n-k+1}}$. Les racines de $X^{2n}+1$ sont donc les nombres complexes e^{ix_k} et e^{-ix_k} pour $k \in [\![1,n]\!]$.
On en déduit la décomposition en facteurs irréductibles de $X^{2n}+1$ sur $\mathbb{C}[X]$:

$$X^{2n}+1 = \prod_{k=1}^{n}(X - e^{ix_k})\prod_{k=1}^{n}(X - e^{-ix_k})$$

En regroupant les racines conjuguées, on obtient la décomposition en facteurs irréductibles de $X^{2n}+1$ sur $\mathbb{R}[X]$:

$$X^{2n}+1 = \prod_{k=1}^{n}(X^2 - 2X\cos(x_k) + 1)$$

Chacun de ces facteurs est bien irréductible puisque les e^{ix_k} ne sont pas réels. En effet, $x_k \notin \pi\mathbb{Z}$ pour $k \in [\![1,n]\!]$.

c. D'après la question précédente,

$$\mathrm{S}_n(f)=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n \ln(a^2-2a\cos(x_k)+1)=\frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^n(a^2-2a\cos(x_k)+1)\right)=\frac{\pi}{n}\ln(a^{2n}+1)$$

d. D'après **IV.1**, $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{S}_n(f)=\mathrm{I}(f)$.
Si $a\in]0,1[$, $\lim_{n\to+\infty}a^{2n}=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{S}_n(f)=0$. Ainsi $\mathrm{I}(f)=0$.
Si $a\in]1,+\infty[$, alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a^{2n}}=0$. Donc

$$\mathrm{S}_n(f)=\frac{\pi}{n}\ln(a^{2n}+1)=\frac{\pi}{n}\left(2n\ln(a)+\ln\left(1+\frac{1}{a^{2n}}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}2\pi\ln(a)$$

Ainsi $\mathrm{I}(f)=2\pi\ln(a)$.

e. Si $a\in]0,1[$, alors

$$\mathrm{S}_n(f)-\mathrm{I}(f)=\mathrm{S}_n(f)=\frac{\pi}{n}\ln(a^{2n}+1)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{a^{2n}\pi}{n}$$

car $a^{2n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et $\ln(1+x)\underset{x\to0}{\sim}x$.
Si $a\in]1,+\infty[$,

$$\mathrm{S}_n(f)-\mathrm{I}(f)=\frac{\pi}{n}\ln(a^{2n}+1)-2\pi\ln(a)=\frac{\pi}{n}\ln\left(1+\frac{1}{a^{2n}}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{na^{2n}}$$

car $\frac{1}{a^{2n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et $\ln(1+x)\underset{x\to0}{\sim}x$.