

Devoir surveillé n°1 : corrigé

SOLUTION 1.

1. On trouve $S_0 = \binom{0}{0} = 1$, $S_1 = \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 3$ et $S_2 = \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \binom{2}{0} + \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 7$.

2. D'après la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

La suite (2^n) étant géométrique,

$$\sum_{k=0}^n 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

3. On procède comme indiqué dans l'énoncé. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \binom{j}{i}$$

D'après la question précédente,

$$S_n = \sum_{j=0}^n 2^j = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

SOLUTION 2.

1. a. On a d'une part

$$\binom{n}{k} \binom{k}{l} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{l!(k-l)!} = \frac{n!}{(n-k)!l!(k-l)!}$$

et d'autre part

$$\binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l} = \frac{n!}{l!(n-l)!} \frac{(n-l)!}{(k-l)!(n-k)!} = \frac{n!}{l!(k-l)!(n-k)!}$$

On en déduit bien l'égalité demandée.

b.

$$\sum_{k=l}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{l} = \sum_{k=l}^n (-1)^k \binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l}$$

d'après la question précédente

$$= \binom{n}{l} \sum_{k=l}^n (-1)^k \binom{n-l}{k-l}$$

$$= \binom{n}{l} \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^{j+1} \binom{n-l}{j}$$

en effectuant le changement d'indice $j = k - l$

$$= (-1)^l \binom{n}{l} \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^j \binom{n-l}{j}$$

$$= (-1)^l \binom{n}{l} (1-1)^{n-l}$$

d'après la formule du binôme

$$= 0$$

car $n - l > 0$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} b_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} a_l \\
 &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{l} a_l \\
 &= \sum_{0 \leq l \leq k \leq n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{l} a_l \\
 &= \sum_{l=0}^n \sum_{k=l}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{l} \\
 &= \sum_{l=0}^n a_l \sum_{k=l}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{l}
 \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $\sum_{k=l}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{l} = 0$ quand $l < n$. On en déduit que

$$(-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} b_k = (-1)^n a_n \sum_{k=n}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{n} = (-1)^n a_n (-1)^n \binom{n}{n} \binom{n}{n} = a_n$$

SOLUTION 3.

1. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

b. D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'_n(x) = n(1+x)^{n-1}$$

et d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'_n(x) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

On a donc

$$f'_n(1) = 2^{n-1} n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$$

c. D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''_n(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

et d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''_n(x) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2}$$

On a donc

$$f''_n(1) = 2^{n-2} n(n-1) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}$$

d. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k^2 = k(k-1) + k$,

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = 2^{n-2} n(n-1) + 2n - 1n = 2^{n-2} n(n+1)$$

2. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 g_n(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-x)^k \\
 &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} x^{2k} + \sum_{0 \leq 2+1k \leq n} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-x)^{2k} + \sum_{0 \leq 2+1k \leq n} \binom{n}{2k+1} (-x)^{2k+1} \\
 &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} x^{2k} + \sum_{0 \leq 2+1k \leq n} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} x^{2k} - \sum_{0 \leq 2+1k \leq n} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1} \\
 &= 2 \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} x^{2k}
 \end{aligned}$$

b. D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'_n(x) = n(1+x)^{n-1} - n(1-x)^{n-1}$$

et d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'_n(x) = 2 \sum_{0 \leq 2k \leq n} 2k \binom{n}{2k} x^{2k-1} = 4 \sum_{0 \leq 2k \leq n} k \binom{n}{2k} x^{2k-1}$$

On a donc

$$g'_n(1) = 2^{n-1}n = 4 \sum_{0 \leq 2k \leq n} k \binom{n}{2k}$$

Ainsi $\sum_{0 \leq 2k \leq n} k \binom{n}{2k} = 2^{n-3}n.$

c. D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g''_n(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} + n(n-1)(1-x)^{n-2}$$

et d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g''_n(x) = 2 \sum_{0 \leq 2k \leq n} 2k(2k-1) \binom{n}{2k} x^{2k-2}$$

On a donc

$$g''_n(1) = 2^{n-2}n(n-1) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} 4k(2k-1) \binom{n}{2k}$$

Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k^2 = \frac{4k(2k-1)}{8} + \frac{k}{2}$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq 2k \leq n} k^2 \binom{n}{2k} &= \frac{1}{4} \sum_{0 \leq 2k \leq n} 2k(2k-1) \binom{n}{2k} + \frac{1}{2} \sum_{0 \leq 2k \leq n} k \binom{n}{2k} \\
 &= \frac{2^{n-2}n(n-1)}{8} + \frac{2^{n-3}n}{2} = 2^{n-5}n(n+1)
 \end{aligned}$$

SOLUTION 4.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n!^2} = \frac{2(n+1)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n!^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\text{HR}(n) : \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{n^{\frac{1}{3}}}$$

Tout d'abord, $\frac{4^1}{2\sqrt{1}} = 2$, $\binom{2}{1} = 2$ et $\frac{4^1}{1^{\frac{1}{3}}} = 4$ donc HR(1) est vraie.

Supposons HR(n) vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors d'après la question 1,

$$\frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n+2}{n+1} \leq \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{n^{\frac{1}{3}}}$$

Il reste donc à montrer d'une part que $\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$ et d'autre part que $\frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{n^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{4^{n+1}}{(n+1)^{\frac{1}{3}}}$. On procède par récurrence dans les deux cas.

$$\begin{aligned} & \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \\ \iff & 2(n+1)\sqrt{n} \leq (2n+1)\sqrt{n+1} \\ \iff & 4(n+1)^2n \leq (2n+1)^2(n+1) \\ \iff & 4(n+1)n \leq (2n+1)^2 \\ \iff & 4n^2 + 4n \leq 4n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie, la première l'est également.

$$\begin{aligned} & \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{n^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{4^{n+1}}{(n+1)^{\frac{1}{3}}} \\ \iff & (2n+1)(n+1)^{\frac{1}{3}} \leq 2(n+1)n^{\frac{1}{3}} \\ \iff & (2n+1)^3(n+1) \leq 8(n+1)^3n \\ \iff & (2n+1)^3 \leq 8(n+1)^2n \\ \iff & 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 \leq 8n^3 + 16n^2 + 8n \\ \iff & 0 \leq 4n^2 + 2n - 1 \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie puisque $n \geq 1$ donc la première l'est également. Finalement, HR(n+1) est vraie.

Par récurrence, HR(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

SOLUTION 5.

- On trouve $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ et $F_5 = 3$.
- On a bien $F_5 = 5 \geq 5$ et $F_6 = 8 \geq 6$. Supposons que $F_n \geq n$ et $F_{n+1} \geq n+1$ pour un certain $n \geq 5$. Alors $F_{n+2} \geq 2n+1$.
Or $2n+1 \geq n+2$ car $n \geq 5 \geq 1$. Ainsi $F_{n+2} \geq n+2$.
Par récurrence double, $F_n \geq n$ pour tout $n \geq 5$.
On peut en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = +\infty$.
- On utilise la définition de la suite (F_n) . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait apparaître un télescopage.

$$1 + \sum_{k=0}^{n-1} F_k = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+2} - F_{k+1} = 1 + F_{n+1} - F_1 = F_{n+1}$$

$$\text{car } F_1 = 1.$$

- On utilise la définition de la suite (F_n) . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait apparaître un télescopage.

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+2} - F_{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} F_{2(k+1)} - F_{2k} = F_{2n} - F_0 = F_{2n}$$

$$\text{car } F_0 = 0.$$

- On utilise la définition de la suite (F_n) . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait apparaître un télescopage.

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_{2k} = \sum_{k=1}^{n-1} F_{2k} = \sum_{k=1}^{n-1} F_{2k+1} - F_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} F_{2(k+1)-1} - F_{2k-1} = F_{2n-1} - F_1 = F_{2n-1} - 1$$

$$\text{car } F_1 = 1.$$

4. a. On trouve $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Les liens coefficients/racines nous apprennent que $\alpha\beta = -1$.
 b. On vérifie que $\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^0 - \beta^0) = 0 = F_0$ et que $\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^1 - \beta^1) = 1 = F_1$.
 On suppose maintenant que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ et $F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
 F_{n+2} &= F_n + F_{n+1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n + \alpha^{n+1} - \beta^n - \beta^{n+1}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^n(1 + \alpha) - \beta^n(1 + \beta)] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n \alpha^2 - \beta^n \beta^2) \quad \text{car } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont solutions de l'équation } x^2 = x + 1 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2})
 \end{aligned}$$

Par récurrence double, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- c. On tient compte du fait que $\beta = -\frac{1}{\alpha}$.
 D'une part

$$\begin{aligned}
 F_{p+q}F_r &= \frac{1}{5}(\alpha^{p+q} - (-1)^{p+q}\alpha^{-p-q})(\alpha^r - (-1)^r\alpha^{-r}) \\
 &= \frac{1}{5}(\alpha^{p+q+r} + (-1)^{p+q+r}\alpha^{-p-q-r} - (-1)^r\alpha^{p+q-r} - (-1)^{p+q}\alpha^{-p-q+r})
 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 F_pF_{q+r} - (-1)^rF_{p-r}F_q &= \frac{1}{5}(\alpha^p - (-1)^p\alpha^{-p})(\alpha^{q+r} - (-1)^{q+r}\alpha^{-q-r}) \\
 &\quad - \frac{(-1)^r}{5}(\alpha^{p-r} - (-1)^{p-r}\alpha^{-p+r})(\alpha^q - (-1)^q\alpha^{-q}) \\
 &= \frac{1}{5}(\alpha^{p+q+r} + (-1)^{p+q+r}\alpha^{-p-q-r} - (-1)^{q+r}\alpha^{p-q-r} - (-1)^p\alpha^{-p+q+r}) \\
 &\quad - \frac{(-1)^r}{5}(\alpha^{p+q-r} + (-1)^{p+q-r}\alpha^{-p-q+r} - (-1)^q\alpha^{p-q-r} - (-1)^{p-r}\alpha^{-p+q+r}) \\
 &= \frac{1}{5}(\alpha^{p+q+r} + (-1)^{p+q+r}\alpha^{-p-q-r} - (-1)^r\alpha^{p+q-r} - (-1)^{p+q}\alpha^{-p-q+r})
 \end{aligned}$$

On en déduit que $F_pF_{q+r} - (-1)^rF_{p-r}F_q = F_{p+q}F_r$.