

# DEVOIR SURVEILLÉ N°01 : CORRIGÉ

## Solution 1

Notons  $\mathcal{P}_n$  : « $(1+x)^n \geq 1+nx$ ».  $\mathcal{P}_0$  est clairement vraie. Supposons que  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $(1+x)^n \geq 1+nx$ . Or  $1+x \geq 0$  donc

$$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

ou encore

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

Ainsi  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. Par récurrence,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## Solution 2

Posons pour  $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{P}_n : 1 \leq u_n \leq n^2$$

**Initialisation.** Puisque  $u_1 = 1$  et  $u_2 = 2$ ,  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont vraies.

**Hérédité.** Supposons que  $\mathcal{P}_n$  et  $\mathcal{P}_{n+1}$  soient vraies pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 &\leq u_n \leq n^2 \\ 1 &\leq u_{n+1} \leq (n+1)^2 \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$1 + \frac{2}{n+2} \leq u_{n+2} \leq (n+1)^2 + \frac{2n^2}{n+2}$$

En particulier, il est clair que  $u_{n+2} \geq 1$ . Reste à montrer que

$$(n+1)^2 + \frac{2n^2}{n+2} \leq (n+2)^2$$

Calculons donc la différence suivante :

$$\begin{aligned} (n+2)^2 - \left[ (n+1)^2 + \frac{2n^2}{n+2} \right] &= 2n+3 - \frac{2n^2}{n+2} \\ &= \frac{(2n+3)(n+2) - 2n^2}{n+2} = \frac{5n+6}{n+2} \geq 0 \end{aligned}$$

On a donc bien montré que

$$(n+1)^2 + \frac{2n^2}{n+2} \leq (n+2)^2$$

et par conséquent que

$$u_{n+2} \leq (n+2)^2$$

$\mathcal{P}_{n+2}$  est donc vraie.

**Conclusion.** Par récurrence double,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## Solution 3

Tout d'abord,  $u_0 = 1 = 0!$  et  $u_1 = 1 = 1!$ . Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n = n!$  et  $u_{n+1} = (n+1)!$ . Alors

$$u_{n+2} = (n+1)(n! + (n+1)!) = (n+1)(n! + n!(n+1)) = (n+1)n!(n+2) = (n+2)!$$

Par récurrence double,  $u_n = n!$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## Solution 4

On raisonne par l'absurde. Supposons que  $\sqrt{n^2+1}$  soit un entier. Il existe donc  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\sqrt{n^2+1} = k$ . Ainsi  $n^2+1 = k^2$  ou encore  $(k-n)(k+n) = 1$ . Comme  $k$  et  $n$  sont deux entiers naturels, on a nécessairement  $k-n = k+n = 1$ . Notamment

$$2n = (k+n) - (k-n) = 1 - 1 = 0$$

et donc  $n = 0$ , ce qui contredit l'énoncé. Ainsi  $\sqrt{n^2+1}$  n'est pas un entier.

**Solution 5**

1. D'après l'énoncé,  $f(0)^2 = f(0)$  donc  $f(0) \in \{0, 1\}$ . De plus,  $f(0)f(1) = f(0) + 1$  donc on ne peut avoir  $f(0) = 0$ . Ainsi  $f(0) = 1$ .

2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x)f(0) = f(0) + x + 0$$

donc

$$f(x) = x + 1$$

3. Réciproquement, si  $f(x) = x + 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x)f(y) = (x+1)(y+1) = xy + 1 + x + y = f(xy) + x + y$$

On en déduit que l'unique fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$

est la fonction  $x \mapsto x + 1$ .

**Solution 6**

1. Soit  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ . Remarquons que

$$d_2(x, y) = \left| \frac{y-x}{(x+1)(y+1)} \right| = \frac{|y-x|}{(x+1)(y+1)}$$

Ainsi il est clair que  $d_2(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$ .

2. Soit  $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3$ . Posons

$$X = \frac{x}{x+1} \qquad Y = \frac{y}{y+1} \qquad Z = \frac{z}{z+1}$$

Puisque  $X - Z = X - Y + Y - Z$ , d'après l'inégalité triangulaire,

$$|X - Z| \leq |X - Y| + |Y - Z|$$

c'est-à-dire

$$d_2(x, z) \leq d_2(x, y) + d_2(y, z)$$

3. Soit  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ . On rappelle que

$$d_2(x, y) = \frac{|y-x|}{(x+1)(y+1)} = \frac{d_1(x, y)}{(1+x)(1+y)}$$

Or  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$  donc  $1+x \geq 1$  et  $1+y \geq 1$ . Par conséquent,  $(1+x)(1+y) \geq 1$  donc

$$d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$$

4. Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un tel  $\lambda$ . Notamment, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$d_1(x, 0) \leq \lambda d_2(x, 0)$$

c'est-à-dire

$$x \leq \lambda \frac{x}{x+1}$$

Notamment, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\lambda \geq x + 1$$

ce qui est évidemment absurde. Il n'existe donc pas de réel  $\lambda$  tel que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, d_1(x, y) \leq \lambda d_2(x, y)$$

**Solution 7**

On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}
 & (1-\lambda)\sqrt{x} + \lambda\sqrt{y} \leq \sqrt{(1-\lambda)x + \lambda y} \\
 \Leftrightarrow & \quad \left[ (1-\lambda)\sqrt{x} + \lambda\sqrt{y} \right]^2 \leq (1-\lambda)x + \lambda y \quad \text{car tous les membres de l'inégalité précédente sont positifs} \\
 \Leftrightarrow & \quad (1-\lambda)^2x + \lambda^2y + 2(1-\lambda)\lambda\sqrt{x}\sqrt{y} \leq (1-\lambda)x + \lambda y \\
 \Leftrightarrow & \quad 0 \leq [(1-\lambda) - (1-\lambda)^2]x + [\lambda - \lambda^2]y - 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x}\sqrt{y} \\
 \Leftrightarrow & \quad 0 \leq \lambda(1-\lambda)x + \lambda(1-\lambda)y - 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x}\sqrt{y} \\
 \Leftrightarrow & \quad 0 \leq \lambda(1-\lambda)[x + y - 2\sqrt{x}\sqrt{y}] \\
 \Leftrightarrow & \quad 0 \leq \lambda(1-\lambda)(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2
 \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie car  $\lambda \geq 0$  et  $1 - \lambda \geq 0$  donc la première l'est également par équivalence.

**Solution 8**

1.

$$\begin{aligned}
 A \setminus (B \cap C) &= A \cap \overline{B \cap C} \\
 &= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\
 &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \quad \text{par distributivité de l'intersection sur l'union} \\
 &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C)
 \end{aligned}$$

2. D'une part,

$$\begin{aligned}
 A \setminus (B \cup C) &= A \cap \overline{B \cup C} \\
 &= A \cap \overline{B} \cap \overline{C}
 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 (A \setminus B) \cap (A \setminus C) &= (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) \\
 &= (A \cap A) \cap \overline{B} \cap \overline{C} \\
 &= A \cap \overline{B} \cap \overline{C}
 \end{aligned}$$

Ainsi  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .

3. D'une part,

$$A \cap (B \setminus C) = A \cap B \cap \overline{C}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 (A \cap B) \setminus (A \cap C) &= A \cap B \cap \overline{A \cap C} \\
 &= A \cap B \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\
 &= (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \quad \text{par distributivité de l'union sur l'intersection} \\
 &= \emptyset \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \quad \text{car } A \cap \overline{A} = \emptyset \\
 &= A \cap B \cap \overline{C}
 \end{aligned}$$

Ainsi  $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ .

4. Si on prend  $A = B = C$ ,

$$\begin{aligned}
 A \cup (B \setminus C) &= A \cup \emptyset = A \\
 (A \cup B) \setminus (A \cup C) &= A \setminus A = \emptyset
 \end{aligned}$$

Notamment, si  $A$  est non vide (ce qui est possible dès que  $E$  est non vide),  $A \cup (B \setminus C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$ .