Devoir à la maison n°05 : corrigé

Solution 1

1. **a.** sh est continue est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{-\infty} \text{sh} = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \text{sh} = +\infty$. Ainsi sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

   b. ch est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\text{ch}(0) = 1$ et $\lim_{+\infty} \text{ch} = +\infty$. Ainsi ch induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

   c. th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{-\infty} \text{th} = -1$ et $\lim_{+\infty} \text{th} = 1$. Ainsi th induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

2. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$ et posons $\theta = f(x)$. Par définition de f, $\text{sh}\,\theta = x$. Or $\text{ch}^2\theta = \text{sh}^2\theta + 1$. Puisque $\text{ch}\,\theta \geq 1 \geq 0$, $\text{ch}\,\theta = \sqrt{\text{sh}^2\theta + 1} = \sqrt{x^2+1}$.

   b. Soit $x \in [1, +\infty[$ et posons $\theta = g(x)$. Par définition de g, $\text{ch}\,\theta = x$. Or $\text{sh}^2\theta = \text{ch}^2\theta - 1$. Par définition de g, $\theta \in \mathbb{R}_+$ donc $\text{sh}\,\theta \geq 0$. Ainsi $\text{sh}\,\theta = \sqrt{\text{ch}^2\theta - 1} = \sqrt{x^2-1}$.

3. **a.** sh est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est dérivable sur $\text{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{\text{sh}'(f(x))} = \frac{1}{\text{ch}(f(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

   b. ch est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée sh ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi g est dérivable sur $\text{ch}(\mathbb{R}_+^*) =]1, +\infty[$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{1}{\text{ch}'(g(x))} = \frac{1}{\text{sh}(g(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

   c. th est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $1 - \text{th}^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ car th est à valeurs dans $]-1, 1[$. Ainsi h est dérivable sur $\text{th}(\mathbb{R}) =]-1, 1[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = \frac{1}{\text{th}'(h(x))} = \frac{1}{1 - \text{th}^2(h(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = f(x)$. On a donc $\text{sh}(y) = x$ et $\text{ch}(y) = \sqrt{x^2+1}$ d'après **2.a**. Ainsi

$$e^y = \text{sh}(y) + \text{ch}(y) = x + \sqrt{x^2+1}$$

   donc

$$f(x) = y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

   b. Soit $x \in [1, +\infty[$. On a donc $\text{ch}(y) = x$ et $\text{sh}(y) = \sqrt{x^2-1}$ d'après **2.b**. Ainsi

$$e^y = \text{sh}(y) + \text{ch}(y) = x + \sqrt{x^2-1}$$

   donc

$$g(x) = y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

   c. Soit $x \in]-1, 1[$. Posons $y = h(x)$. On a donc $\text{th}(y) = x$ i.e. $\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x$ ou encore $e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$.
   On en déduit que

$$h(x) = y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Remarque. Les fonctions f, g et h s'appellent en fait argsh, argch et argth.

Solution 2

1. A l'aide de la relation de Chasles,

$$\int_0^{2\pi} g(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} g(t)\ \mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} g(t)\ \mathrm{d}t$$

A l'aide du changement de variable $t \mapsto 2\pi - t$,

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi} g(t)\ \mathrm{d}t &= -\int_{\pi}^{0} g(2\pi - t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} g(2\pi - t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} g(-t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{car } g \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \\ &= \int_0^{\pi} g(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{car } g \text{ est paire}\end{aligned}$$

2. Soient $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Remarquons que

$$\begin{aligned}f_r(\theta) &= (r - e^{i\theta})(r - e^{-i\theta}) \\ &= (r - e^{i\theta})\overline{(r - e^{i\theta})} \qquad \text{car } r \in \mathbb{R} \\ &= |r - e^{i\theta}|^2 \geq 0\end{aligned}$$

Supposons que $f_r(\theta) = 0$, alors $r = e^{i\theta}$, puis $|r| = |e^{i\theta}| = 1$ et donc, comme $r \in \mathbb{R}$, $r = \pm 1$, ce qui est exclu. Ainsi

$$\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ f_r(\theta) > 0$$

3. Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On effectue le changement de variable $\theta \mapsto \pi - \theta$. Ainsi

$$\mathrm{I}(r) = -\int_{\pi}^{0} \ln \circ f_r(\pi - \theta)\ \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \ln \circ f_r(\pi - \theta)\ \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \ln \circ f_{-r}(\theta)\ \mathrm{d}\theta = \mathrm{I}(-r)$$

car pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f_r(\pi - \theta) = r^2 - 2r\cos(\pi - \theta) + 1 = r^2 + 2r\cos\theta + 1 = f_{-r}(\theta)$$

4. Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Comme indiqué

$$\begin{aligned}2\mathrm{I}(r) &= \mathrm{I}(r) + \mathrm{I}(-r) \\ &= \int_0^{\pi} \ln \circ f_r(\theta)\ \mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi} \ln \circ f_{-r}(\theta)\ \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi} \ln(f_r(\theta) f_{-r}(\theta))\ \mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Or, comme vu plus haut, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f_r(\theta) = |r - e^{i\theta}|^2 \qquad \text{et} \qquad f_{-r}(\theta) = |-r - e^{i\theta}|^2 = |r + e^{i\theta}|^2$$

de sorte que

$$f_r(\theta) f_{-r}(\theta) = \left|r - e^{i\theta}\right|^2 \left|r + e^{i\theta}\right|^2 = \left|(r - e^{i\theta})(r + e^{i\theta}\right|^2 = \left|r^2 - e^{2i\theta}\right|^2 = f_{r^2}(2\theta)$$

Finalement

$$2\mathrm{I}(r) = \int_0^{\pi} \ln \circ f_{r^2}(2\theta)\ \mathrm{d}\theta$$

En effectuant le changement de variable $\theta \mapsto 2\theta$, on obtient

$$2\mathrm{I}(r) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln \circ f_{r^2}(\theta)\ \mathrm{d}\theta$$

Or $\ln \circ f_{r^2}$ est clairement 2π-périodique et paire donc, d'après la question **1**,

$$2\mathrm{I}(r) = \int_0^{\pi} \ln \circ f_{r^2}(\theta)\ \mathrm{d}\theta = \mathrm{I}(r^2)$$

5. On fixe $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et on procède à une récurrence. Tout d'abord, $2^0 \mathrm{I}(r) = \mathrm{I}(r^1) = \mathrm{I}(r^{2^0})$. Supposons alors qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n \mathrm{I}(r) = \mathrm{I}(r^{2^n})$. D'après la question **4**,

$$2^{n+1}\mathrm{I}(r) = 2\mathrm{I}(r^{2^n}) = \mathrm{I}((r^{2^n})^2) = \mathrm{I}(r^{2^{n+1}})$$

Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \mathrm{I}(r) = \mathrm{I}(r^{2^n})$$

6. Remarquons déjà que puisque $\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}(-r)$, $\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}(|r|)$.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ donc

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ |r|^2 - 2|r| + 1 \leq |r|^2 - 2|r|\cos\theta + 1 \leq |r|^2 + 2|r| + 1$$

ou encore

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ (1 - |r|)^2 \leq f_{|r|}(\theta) \leq (1 + |r|)^2$$

donc

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ 2\ln(1 - |r|) \leq \ln \circ f_{|r|}(\theta) \leq 2\ln(1 + |r|)$$

puis, par croissance de l'intégrale,

$$2\pi \ln(1 - |r|) \leq \mathrm{I}(|r|) \leq 2\pi \ln(1 + |r|)$$

Donc, d'après notre remarque initiale

$$2\pi \ln(1 - |r|) \leq \mathrm{I}(r) \leq 2\pi \ln(1 + |r|)$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $|r| < 1$, on a également $|r|^{2^n} < 1$: on peut donc appliquer la question **6** de sorte que

$$\ln(1 - |r^{2^n}|) \leq \mathrm{I}(r^{2^n}) \leq \ln(1 + |r^{2^n}|)$$

ou encore

$$\ln(1 - |r|^{2^n}) \leq \mathrm{I}(r^{2^n}) \leq \ln(1 + |r|^{2^n})$$

Finalement,

$$\frac{1}{2^n}\ln(1 - |r|^{2^n}) \leq \frac{1}{2^n}\mathrm{I}(r^{2^n}) \leq \frac{1}{2^n}\ln(1 + |r|^{2^n})$$

D'après la question **5**, on a donc

$$\frac{1}{2^n}\ln(1 - |r|^{2^n}) \leq \mathrm{I}(r) \leq \frac{1}{2^n}\ln(1 + |r|^{2^n})$$

Comme $|r| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} |r|^{2^n} = 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(1 - |r|^{2^n}) = \lim_{n\to+\infty} \ln(1 + |r|^{2^n}) = 0$$

De plus, $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\ln(1 - |r|^{2^n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\ln(1 + |r|^{2^n}) = 0$$

En passant à la limite l'encadrement précédent lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $\mathrm{I}(r) = 0$.

8. Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f_{1/r}(\theta) = \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r}\cos\theta + 1 = \frac{1}{r^2}(1 - 2r\cos\theta + r^2) = \frac{1}{r^2} f_r(\theta)$$

Ainsi

$$\mathrm{I}\left(\frac{1}{r}\right) = \int_0^\pi \ln \circ f_{1/r}(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \ln\left(\frac{1}{r^2} f_r(\theta)\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi (\ln \circ f_r(\theta) - 2\ln(|r|))\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{I}(r) - 2\pi\ln(|r|)$$

9. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $|r| > 1$. Alors $\left|\frac{1}{r}\right| < 1$. D'après la question **7**, $\mathrm{I}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$. Ainsi

$$\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}\left(\frac{1}{r}\right) + 2\pi\ln(|r|) = 2\pi\ln(|r|)$$