Intégration

Solution 1.

Posons $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Alors

$$F(x+T) = \int_0^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt + \int_T^{T+x} f(t)dt$$

Par hypothèse, $\int_0^T f(t)dt = 0$ et $\int_T^{T+x} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt$ par périodicité de f. Ainsi F est aussi T-périodique.
Pour $\lambda > 0$,

$$\int_a^b f(\lambda t)dt = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(u)du = \frac{1}{\lambda}(F(\lambda b) - F(\lambda a))$$

par le changement de variable $u = \lambda t$. Comme F est continue et périodique, elle est bornée sur $\mathbb{R}$: il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |F(x)| \leqslant M$. Par conséquent,

$$\left|\int_a^b f(\lambda t)dt\right| = \frac{1}{\lambda}|F(\lambda b) - F(\lambda a)| \leqslant \frac{2M}{\lambda} \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Si $C = \int_0^T f(t)dt \neq 0$, alors posons $g(t) = f(t) - \frac{C}{T}$ de telle sorte que $\int_0^T g(t)dt = 0$.

$$\int_a^b f(\lambda t)dt = \int_a^b g(\lambda t)dt + \int_a^b \frac{C}{T}dt$$

D'après ce qui précède, $\int_a^b g(\lambda t)dt \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\int_a^b f(\lambda t) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \frac{C}{T}dt = \frac{C(b-a)}{T}.$$

Solution 2.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f admet pour limite l en $+\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \geqslant A$:

   $$l - \frac{\varepsilon}{a} \leqslant f(t) \leqslant l + \frac{\varepsilon}{a}$$

   Soit $y \geqslant A$. On peut intégrer ces inégalités sur $[y, y+a]$ et on obtient :

   $$al - \varepsilon \leqslant \int_y^{y+a} f(t)\,dt \leqslant al + \varepsilon$$

   Ceci prouve que $\lim_{y\to+\infty} \int_y^{y+a} f(t)\,dt = al$.

   Remarque. On aurait également pu appliquer le théorème des accroissements finis à une primitive de f sur $[y, y+a]$. ■

2. Par le changement de variables $u = t + a$, on a $\int_0^X f(t+a)\,dt = \int_a^{X+a} f(u)\,du$. Par conséquent, en utilisant la relation de Chasles

   $$\begin{aligned}\int_0^X (f(t+a) - f(t))\,dt &= \int_a^{X+a} f(t)\,dt - \int_0^X f(t)\,dt \\ &= \int_a^X f(t)\,dt + \int_X^{X+a} f(t)\,dt - \int_0^a f(t)\,dt - \int_a^X f(t)\,dt \\ &= \int_X^{X+a} f(t)\,dt - \int_0^a f(t)\,dt\end{aligned}$$

   On fait tendre X vers $+\infty$ et on utilise la question précédente pour obtenir la limite demandée.

3. Il s'agit ici d'une simple application de ce qui précède avec $f = \arctan$ et $a = 1$. On a alors $l = \frac{\pi}{2}$. La limite recherchée est donc $\frac{\pi}{2} - \int_0^1 \arctan t \, dt$.
Par intégration par parties

$$\int_0^1 \arctan t \, dt = [t \arctan t]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{t^2+1} dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

La limite recherchée est donc $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.

Solution 3.

1. f est continue sur le segment $[a, b]$ donc elle y admet une borne supérieure et cette dernière est atteinte. D'où l'existence de M.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in [a, b]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant M$ donc $f(x)^n \leqslant M^n$. Par croissance de l'intégrale, $\int_a^b f(x)^n \, dx \leqslant (b-a)M^n$. Donc $\left(\int_a^b f(x)^n \, dx\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M(b-a)^{\frac{1}{n}}$.
Le maximum M de f sur $[a, b]$ est atteint en un point c de $[a, b]$. Par continuité de f, il existe un intervalle $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ de longueur non nulle sur lequel $f \geqslant M - \varepsilon$ (l'intervalle en question est du type $[c - \eta, c + \eta]$, $[c, c + \eta]$ ou $[c - \eta, c + \eta]$ suivant que c est aux extrémités ou à l'intérieur de $[a, b]$). Pour tout $x \in [a, b]$, $f(x)^n \geqslant 0$ donc

$$\int_a^b f(x)^n \, dx \geqslant \int_\alpha^\beta f(x)^n \, dx \geqslant (\beta - \alpha)(M - \varepsilon)^n$$

On a alors $\left(\int_a^b f(x)^n \, dx\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant (\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}}(M - \varepsilon)$.
On en déduit l'encadrement suivant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}}(M - \varepsilon) \leqslant \left(\int_a^b f(x)^n \, dx\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M(b-a)^{\frac{1}{n}}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} (\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} (b-a)^{\frac{1}{n}} = 1$, $\lim_{n\to+\infty} (\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}}(M - \varepsilon) = M - \varepsilon$ et $\lim_{n\to+\infty} (b-a)^{\frac{1}{n}} M = M$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N$

$$M - 2\varepsilon \leqslant \left(\int_a^b f(x)^n \, dx\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M + \varepsilon$$

Le raisonnement étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, ceci signifie que $\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(x)^n \, dx\right)^{\frac{1}{n}} = M$.

> **Attention !** Il ne faut sutout pas passer à la limite dans l'encadrement avant d'avoir prouvé l'existence de la limite de $\left(\int_a^b f(x)^n \, dx\right)^{\frac{1}{n}}$ quand n tend vers $+\infty$. Il n'y a pas d'autre possibilité ici que de revenir à la définition epsilonesque de la limite.

Solution 4.

Supposons f de signe constant sur $[a, b]$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$. Alors $\int_{[a,b]} f \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale et

$$\int_{[a,b]} |f| = \int_{[a,b]} f = \left|\int_{[a,b]} f\right|$$

Supposons $\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f|$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $\int_{[a,b]} f \geqslant 0$ i.e. $\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} f$. Il s'ensuit que $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} |f|$ ou encore $\int_{[a,b]} |f| - f = 0$. Or $|f| - f$ est positive et continue sur $[a, b]$ donc $|f| - f$ est nulle sur $[a, b]$. Ceci signifie que f est positive sur $[a, b]$.

Solution 5.

Si $\int_a^b g(t)\,dt = 0$, alors g est nulle sur $[a, b]$ puisqu'elle y est positive et continue. Supposons donc $\int_a^b g(t)\,dt > 0$. f étant continue sur le segment $[a, b]$, elle y admet un minimum m et un maximum M. Puisque g est positive sur $[a, b]$,

$$\forall t \in [a, b],\ mg(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant Mg(t)$$

puis par croissance de l'intégrale

$$m\int_a^b g(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant M\int_a^b g(t)\,dt$$

Ensuite, puisque $\int_a^b g(t)\,dt > 0$,

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \leqslant M$$

Puisque m et M sont des valeurs prises par f sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'un réel $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt}$$

ou encore

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

Solution 6.

1. Supposons que f ne s'annule pas sur $]0, \pi[$. Alors $t \mapsto f(t)\sin t$ est continue, positive et non constamment nulle sur $[0, \pi]$ (elle ne s'annule pas sur $]0, \pi[$) donc $\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt > 0$, ce qui contredit l'énoncé.
   Ainsi f s'annule bien sur $]0, \pi[$.

2. La première question prouve déjà que f s'annule au moins une fois en un réel $a \in]0, \pi[$. Supposons que f s'annule une unique fois en a. Alors f est de signe constant sur $]0, a[$ et sur $]a, \pi[$.
   Si f est de même signe sur $]0, a[$ et $]a, \pi[$, alors on ne peut avoir $\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt = 0$ car $t \mapsto f(t)\sin t$ est continue, de signe constant sur $[0, \pi]$ et n'y est pas constamment nulle (elle ne s'annule pas sur $]0, a[$ ni sur $]a, \pi[$).
   Nécessairement, f est de signe différent sur $]0, a[$ et sur $]a, \pi[$. Mais alors $t \mapsto f(t)\sin(t - a)$ est continue, de signe constant sur $[0, \pi]$ et n'y est pas constamment nulle (encore une fois, elle ne s'annule pas sur $]0, a[$ ni sur $]a, \pi[$), ce qui contredit le fait que

$$\int_0^\pi f(t)\sin(t-a)\,dt = \cos a\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt - \sin a\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt = 0$$

Notre supposition initiale était donc fausse : f s'annule au moins deux fois sur $]0, \pi[$.

Solution 7.

Posons $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ et considérons $g : t \in [a,b] \mapsto f(t) - m$. g est continue sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt = 0$ donc g s'annule sur $[a,b]$.

Solution 8.

Par linéarité, $\int_a^b P(t)f(t)\,dt = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
Supposons que f s'annule n fois au plus sur $[a,b]$. Notons $c_i < \cdots < c_p$ les points de $[a,b]$ où f s'annule *en changeant de signe*. On a donc $p \leqslant n$. Par continuité, f est de signe constant entre deux $_i$ consécutifs.
Posons alors $P = \prod_{k=1}^p (X - c_i)$. P change également de signe en les c_i et reste de signe constant entre deux c_i consécutifs. On en déduit que $t \mapsto P(t)f(t)$ est de signe constant sur $[a,b]$. Puisque $\deg P = p \leqslant n$, $\int_a^b P(t)f(t)\,dt = 0$. Enfin, $t \mapsto P(t)f(t)$ est continue sur $[a,b]$. On en déduit que cette fonction est nulle sur $[a,b]$. Or P ne s'annule qu'en les c_i donc f est nulle sur $[a,b] \setminus \{c_1, \dots, c_p\}$. Par continuité, f est nulle sur $[a,b]$.

Solution 9.

Pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, la fonction f prend la valeur k sur $\left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ elle est donc en escalier. On a :

$$\int_0^1 f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} k/n = \frac{n-1}{2}.$$

Solution 10.

1. Effectuons le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ $t = \pi - u$. On obtient

$$\begin{aligned}
I &= -\int_\pi^0 \frac{\pi - u}{2 + \sin(\pi - u)}du = \int_0^\pi \frac{\pi - u}{2 + \sin(u)}du \\
&= \pi\int_0^\pi \frac{du}{2+\sin(u)} - \int_0^\pi \frac{u}{2+\sin(u)}du \\
&= \pi J - I
\end{aligned}$$

Ainsi

$$I = \frac{\pi}{2}J.$$

2. *Calculs de* I *et* J.

   a. La fonction F est continue en tant que primitive de la fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$

$$t \longmapsto \frac{1}{2+\sin(t)}.$$

   b. Soit $x \in]-\pi, \pi[$. Effectuons le changement de variable bijectif de $]-\pi,\pi[$ sur $]-\infty, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$, $u = \tan(t/2)$. On a

$$dt = \frac{2}{1+u^2}du \quad \text{et} \quad \frac{1}{2+\sin(t)} = \frac{1}{2 + \frac{2u}{u^2+1}},$$

d'où

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{\tan(x/2)} \frac{du}{u^2+u+1} = \int_0^{\tan(x/2)} \frac{du}{(u+1/2)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2} \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\times(u+1/2)\right)\right]_0^{\tan(x/2)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\tan(x/2)+1/2\Big)\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(1/\sqrt{3}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\tan(x/2)+1/2\Big)\right) - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

c. Puisque F est continue en π , on a

$$J = F(\pi) = \lim_{x\to\pi-} F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

On en déduit que $I = \dfrac{\pi^2}{3\sqrt{3}}$.

Solution 11.

1. Ce calcul relève du formulaire :

$$\int \frac{dx}{x^2+5} = \frac{\arctan(x/\sqrt{5})}{\sqrt{5}}.$$

2. Idem :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} = \operatorname{argsh}(x/\sqrt{5}).$$

3. Aucune difficulté :

$$\int e^x \sin(e^x)dx = -\cos(e^x).$$

4. On a

$$\int \tan^3(x)dx + \int \tan(x)dx = \frac{\tan^2(x)}{2}$$

et

$$\int \tan(x) = -\ln(\cos(x)|)$$

d'où

$$\int \tan^3(x)dx = \frac{\tan^2(x)}{2} + \ln(|\cos(x)|).$$

5. On a

$$\int \frac{1}{\tan^3(x)}dx + \int \frac{1}{\tan(x)}dx = -\frac{1}{2\tan^2(x)}$$

et

$$\int \frac{1}{\tan(x)}dx = \ln(|\sin(x)|)$$

d'où

$$\int \frac{1}{\tan^3(x)}dx = -\frac{1}{2\tan^2(x)} - \ln(|\sin(x)|).$$

6. Il faut distinguer deux cas...

- Si $m = 1$, on a
$$\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^m}\,dx = \ln(|x^2+3x+7|).$$
- Sinon, on a
$$\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^m}\,dx = \frac{(x^2+3x+7)^{1-m}}{1-m}.$$

7. Sans soucis :
$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln^2(x).$$

8. Routine :
$$\int \frac{\mathrm{ch}(x)dx}{\mathrm{sh}^5(x)} = -\frac{1}{4}\,\mathrm{sh}^{-4}(x).$$

Solution 12.

1. On pose $z = \alpha + i$. Ainsi
$$H(x) = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\bar{z}\right) + 2 = |z|\cos(x-\varphi) + 2 = \sqrt{\alpha^2+1}\cos(x-\varphi)+2$$
où φ est un argument de z. H ne peut s'annuler que si $-\frac{2}{\sqrt{\alpha^2+1}}$ appartient à $[-1,1]$. Or
$$-1 \leqslant -\frac{2}{\sqrt{\alpha^2+1}} \leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad 0 \leqslant \frac{4}{\alpha^2+1} \leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha^2 \geqslant 3 \quad\Leftrightarrow\quad |\alpha| \geqslant \sqrt{3}$$
Une condition nécessaire et suffisante pour que H ne s'annule pas est $|\alpha| < \sqrt{3}$.

2. La fonction $\frac{1}{H}$ est continue comme comme inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas. Ainsi l'intégrale définissant $F(x)$ est bien définie. De plus, F est une primitive de $\frac{1}{H}$ donc F est continue (et même de classe $\mathcal{C}^1$).
Soit $x \in]-\pi,\pi[$. On a $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\alpha\cos t + \sin t + 2}$. On peut effectuer le changement de variables $u = \tan\frac{t}{2}$ puisque $t \mapsto \tan\frac{t}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$ (ou $[x,0]$). On utilise alors le paramétrage rationnel du cercle trigonométrique pour exprimer $\cos t$ et $\sin t$ en fonction de u
$$F(x) = \int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{2du}{(1+u^2)\left(\alpha\frac{1-u^2}{1+u^2} + \frac{2u}{1+u^2} + 2\right)} = \int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{2du}{(2-\alpha)u^2+2u+2+\alpha}$$
On ne peut avoir $\alpha = 2$ puisque $|\alpha| < \sqrt{3}$.
$$F(x) = \frac{2}{2-\alpha}\int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{du}{u^2 + \frac{2}{2-\alpha}u + \frac{2+\alpha}{2-\alpha}} = \frac{2}{2-\alpha}\int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{du}{\left(u+\frac{1}{2-\alpha}\right)^2 + \frac{3-\alpha^2}{(2-\alpha)^2}}$$
Or $|\alpha| < \sqrt{3}$ donc $3-\alpha^2 > 0$. Posons $\beta = \frac{\sqrt{3-\alpha^2}}{2-\alpha}$.
$$\begin{aligned}F(x) &= \frac{2}{2-\alpha}\int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{du}{\left(u+\frac{1}{2-\alpha}\right)^2+\beta^2} = \frac{2}{2-\alpha}\frac{1}{\beta}\left(\arctan\left(\frac{1}{\beta}\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2-\alpha}\right)\right) - \arctan\left(\frac{1}{\beta}\frac{1}{2-\alpha}\right)\right)\\ &= \frac{2}{\sqrt{3-\alpha^2}}\left(\arctan\left(\frac{2-\alpha}{\sqrt{3-\alpha^2}}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3-\alpha^2}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3-\alpha^2}}\right)\right)\end{aligned}$$

3. Par 2π-périodicité de H, $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{H(t)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{H(t)}$. Ainsi $F(2\pi) = F(\pi) - F(-\pi)$. Comme F est continue, $F(\pi) = \lim_{x\to\pi^-} F(x)$ et $F(-\pi) = \lim_{x\to-\pi^+} F(x)$. En utilisant l'expression précédente valable pour $x \in]-\pi, \pi[$, on trouve :

$$F(2\pi) = F(\pi) - F(-\pi) = \frac{2\pi}{\sqrt{3-\alpha^2}}$$

Solution 13.

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

2. On a $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Or pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\alpha + \beta\cos^2 t} \geqslant \frac{1}{\alpha}$. Ainsi pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$F(x) \geqslant \int_0^x \frac{dt}{\alpha} = \frac{x}{\alpha}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\alpha} = +\infty$, on a également $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

3. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Comme tan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$), on peut effectuer le changement de variable $u = \tan t$ dans l'intégrale définissant f. Remarquons de plus que $\cos^2 t = \frac{1}{1+\tan^2 t}$. Ainsi :

$$F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{(1+t^2)\left(\alpha + \frac{\beta}{1+t^2}\right)} = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{\alpha t^2 + \alpha + \beta} = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \tan x\right)$$

4. $49 - 45\sin^2 x = 4 + 45\cos^2 x$. Il suffit donc de poser $\alpha = 4$ et $\beta = 45$ pour se ramener au cas précédent. Comme f est π-périodique et paire,

$$I = 2\int_0^{\pi} f(t)dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = 4F\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et notamment en $\frac{\pi}{2}$. En utilisant l'expression déterminée à la question précédente, on trouve :

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \tan x\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}$$

Finalement, $I = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{4(4+45)}} = \frac{\pi}{7}$.

Solution 14.

Pour simplifier, on supposera $a^2 \leqslant b^2$. On effectue le changement de variable $x = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}\sin\theta$. Ainsi

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}\sin\theta\right)\sqrt{\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\frac{b^2-a^2}{2}\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}\sin\theta\right)\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta \qquad \text{car } \frac{b^2-a^2}{2} \geqslant 0 \\
&= \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}\sin\theta\right)\cos^2\theta\,d\theta \qquad \text{car } \cos\theta \geqslant 0 \text{ pour } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
&= \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2 \left[\frac{a^2+b^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta + \frac{b^2-a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^2\theta\,d\theta\right] \\
&= \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2 \frac{a^2+b^2}{2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{16}(b^2-a^2)^2(a^2+b^2)\pi
\end{aligned}$$

Si $a^2 \geqslant b^2$, on trouve pour I l'opposé de cette valeur.

Solution 15.

1. Par une intégration par parties

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^{n+1}}\right]_0^x + (n+1)\int_0^x \frac{2t^2\,dt}{(1+t^2)^{n+2}} \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} + (n+1)\left(2I_n(x) - 2I_{n+1}(x)\right)
\end{aligned}$$

   Ainsi

$$2(n+1)I_{n+1}(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} + (2n+1)I_n(x)$$

2. Le résultat de la question précédente alliée à une récurrence simple garantit l'existence de $\lim_{x\to+\infty} I_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si on pose $l_n = \lim_{x\to+\infty} I_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $l_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} l_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\frac{l_n}{l_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

   Puisque $l_0 = \frac{\pi}{2}$, $l_n = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 16.

1. Procédons en deux temps...

   ▶ *Etude en* 0. f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on a

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x) = f'(0)x + o(x).$$

   Comme

$$\text{cotan}(\pi x) = \frac{1}{\tan(\pi x)} \underset{0}{=} \frac{1}{\pi x + o(x)},$$

on a, au voisinage de 0,

$$f(x)\cot\!an(\pi x) \underset{0}{=} \frac{f'(0)}{\pi} + o(1).$$

La fonction $x \in]0,1[\longrightarrow f(x)\,\mathrm{cotan}(\pi x)$ est donc prolongeable par continuité en 0 par $\frac{f'(0)}{\pi}$.

▶ *Etude en* 1. f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on a

$$f(1+x) \underset{0}{=} f(1) + f'(1)x + o(x) = f'(1)x + o(x).$$

Comme

$$\mathrm{cotan}(\pi(x+1)) = \frac{1}{\tan(\pi x)} \underset{0}{=} \frac{1}{\pi x + o(x)},$$

on a, au voisinage de 0,

$$f(1+x)\,\mathrm{cotan}(\pi x) \underset{0}{=} \frac{f'(1)}{\pi} + o(1).$$

La fonction $x \in]0,1[\longrightarrow f(x)\,\mathrm{cotan}(\pi x)$ est donc prolongeable par continuité en 1 par $\frac{f'(1)}{\pi}$.

2. On note g ce prolongement et $h = fg$.

a. h est dérivable sur $]0,1[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle, et, pour $0 < x < 1$,

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Or, d'après le théorème de dérivation d'un produit,

$$g'(x) = f'(x)\,\mathrm{cotan}(\pi x) - \pi(1 + \mathrm{cotan}^2(\pi x))f(x).$$

On a donc

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2f'(x)g(x) - \pi(1+\mathrm{cotan}^2(\pi x))f(x)^2 \\ &= 2f'(x)g(x) - \pi(f(x)^2 + g(x)^2) \end{aligned}$$

La fonction g étant prongeable par continuité en 0 et 1, h' admet des limites finies en 0 et en 1. Comme h est continue sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$, on déduit du théorème de dérivation d'un prolongement par continuité que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Remarque. Rappelons le théorème de dérivation d'un prolongement par continuité : si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{t_0\}$ et que $f'(t)$ admet une limite finie ℓ lorsque t tend t_0 avec $t \neq t_0$, alors f est dérivable en t_0, $f'(t_0) = \ell$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Ce résultat utile est une conséquence (facile) du théorème des accroissements finis. ■

b. On remarque que, pour tout x dans $[0,1]$,

$$-\pi g(x)^2 + 2f'(x)g(x) = -\pi[(g(x) - f'(x)/\pi)^2 - f'(x)^2/\pi^2]$$

d'où

$$-\pi g(x)^2 + 2f'(x)g(x) \leqslant \frac{1}{\pi}f'(x)^2$$

et donc

$$h'(x) = 2f'(x)g(x) - \pi(f(x)^2 + g(x)^2) \leqslant -\pi f(x)^2 + \frac{1}{\pi}f'(x)^2.$$

c. Par positivité de l'intégrale, comme

$$\forall x \in [0,1],\ \ h'(x) \leqslant -\pi f(x)^2 + \frac{1}{\pi}f'(x)^2,$$

on a

$$\int_0^1 h'(x)dx \leqslant \int_0^1 \left(-\pi f(x)^2 + \frac{1}{\pi}f'(x)^2\right)dx,$$

et puisque

$$\int_0^1 h'(x)dx = h(1) - h(0) = 0,$$

on a, par linéarité de l'intégrale,

$$\pi^2\int_0^1 f(x)^2dx \leqslant \int_0^1 f'(x)^2dx.$$

SOLUTION 17.

1. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, on peut effectuer le changement de variable $y = f(x)$ dans la seconde intégrale. Ainsi

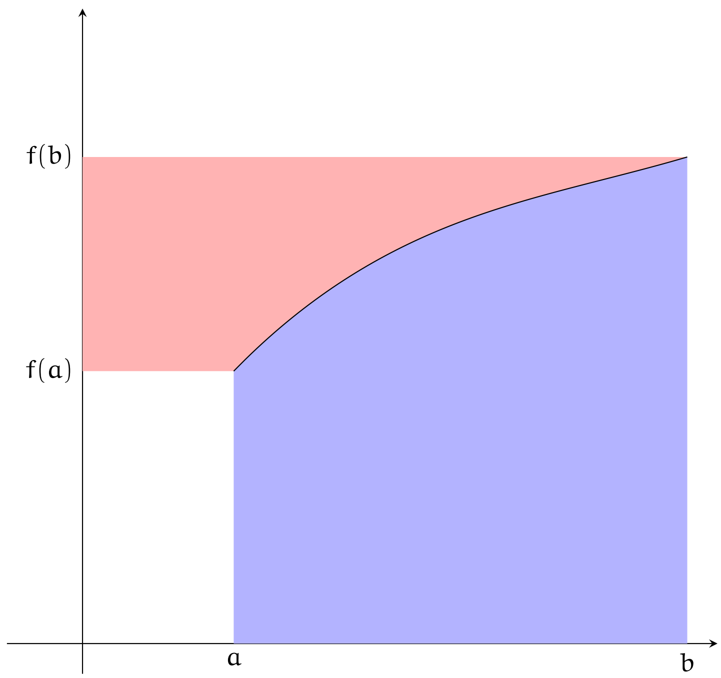
$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy = \int_a^b xf'(x)\,dx$$

Puis, par intégration par parties :

$$\int_a^b xf'(x)\,dx = [xf(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\,dx$$

On en déduit la formule demandée.

2. La somme des aires des intégrales (coloriées en rouge et en bleu) vaut la différence des aires des rectangles dont le premier a pour dimensions $b \times f(b)$ et le second $a \times f(a)$.



SOLUTION 18.

La fonction

$$t \longmapsto \sqrt{1+\ln^2(t)}$$

étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et les fonctions

$$x \longmapsto e^x \quad \text{et} \quad x \longmapsto e^{-x}$$

de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, sur cet intervalle,

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= e^x\sqrt{1+x^2} + e^{-x}\sqrt{1+x^2}\\ &= 2\,\mathrm{ch}(x)\sqrt{1+x^2}\end{aligned}$$

SOLUTION 19.

1. La fonction partie entière étant continue par morecaux, la fonction $t \mapsto 3^{-\lfloor t \rfloor}$ est également continue par morceaux. La fonction f est donc bien définie.

2. La fonction $t \mapsto 3^{-\lfloor t \rfloor}$ est constante égale à 3^{-k} sur chaque intervalle $]k, k+1[$ où $k \in \mathbb{Z}$. Par définition de l'intégrale d'une fonction constante par morceaux :
$$f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} 3^{-k} = \frac{1-3^{-n}}{1-3^{-1}} = 3\frac{1-3^{-n}}{2}$$
Ainsi $f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$.

3. Comme $t \mapsto 3^{-\lfloor t \rfloor}$ est positive, la fonction f est croissante. En particulier, $f(\lfloor x \rfloor) \leqslant f(x) \leqslant f(\lfloor x \rfloor + 1)$. D'après la question précédente, $f(\lfloor x \rfloor)$ et $f(\lfloor x \rfloor + 1)$ tendent vers $\frac{3}{2}$ quand x tend vers $+\infty$. Par encadrement, $f(x)$ tend vers $\frac{3}{2}$ quand x tend vers $+\infty$.

Solution 20.

1. On recherche les x tels que $g : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ soit continue sur $[x, x^2]$ ou $[x^2, x]$. Comme $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$, on en déduit que f est continue sur D.

2. Si $0 < x < 1$, alors $x^2 < x$. g est strictement négative sur $[x^2, x]$ mais l'ordre des bornes fait que $f(x) > 0$.
Si $x > 1$, alors $x < x^2$. g est strictement positive sur $[x, x^2]$ et l'ordre des bornes fait que $f(x) > 0$.

3. **Etude en 0 :** Si $0 < x < 1$, $\dfrac{1}{\ln x} \leqslant \dfrac{1}{\ln t} \leqslant \dfrac{1}{\ln x^2}$ pour $t \in [x^2, x]$. On en déduit que $\dfrac{x^2 - x}{\ln x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x^2 - x}{2\ln x}$. Par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 - x}{\ln x} = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. f est donc prolongeable en 0 en posant $f(0) = 0$.

   Remarque. On peut également remarquer que g est prolongeable par continuité en 0 (puisque de limite nulle). En notant G une primitive de g sur $[0, 1[$, alors $f(x) = G(x^2) - G(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$ et, G étant continue en 0, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. ■

   Etude en 1 : Si $0 < x < 1$, alors pour tout $t \in [x^2, x]$, $\dfrac{x}{t\ln t} \leqslant \dfrac{1}{\ln t} \leqslant \dfrac{x^2}{t\ln t}$ puis par croissance de l'intégrale,
$$\int_x^{x^2} \frac{x^2\,dt}{t\ln t} \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x\,dt}{t\ln t}$$
ou encore
$$x^2\,[\ln(-\ln(t))]_x^{x^2} \leqslant f(x) \leqslant x\,[\ln(-\ln(t))]_x^{x^2}$$
ce qui donne
$$x^2 \ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x \ln 2$$
On en déduit que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \ln 2$.
Si $x > 1$, alors pour tout $t \in [x, x^2]$, $\dfrac{x}{t\ln t} \leqslant \dfrac{1}{\ln t} \leqslant \dfrac{x^2}{t\ln t}$ puis par croissance de l'intégrale,
$$\int_x^{x^2} \frac{x\,dt}{t\ln t} \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x^2\,dt}{t\ln t}$$
ou encore
$$x\,[\ln\ln(t)]_x^{x^2} \leqslant f(x) \leqslant x^2\,[\ln\ln(t)]_x^{x^2}$$
ce qui donne
$$x \ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x^2 \ln 2$$
On en déduit que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \ln 2$.
Finalement, $\lim_{x\to 1} f(x) = \ln 2$. f est donc prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln 2$.

Remarque. On peut aussi remarquer en utilisant un développement que

$$\frac{1}{\ln t} \underset{t\to 1}{=} \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2} + o(1)$$

En posant $h(t) = g(t) - \frac{1}{t-1}$ pour tout $t \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, on a pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$,

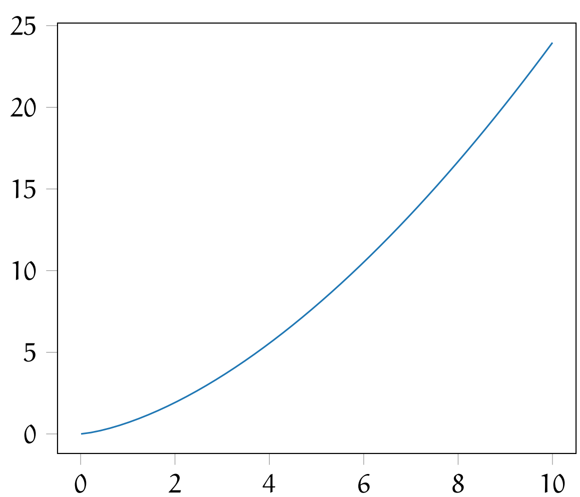
$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} + \int_x^{x^2} h(t)\,dt = \ln(x+1) + \int_x^{x^2} h(t)\,dt$$

h est prolongebale par continuité en 1 (puisque de limite $\frac{1}{2}$). En notant H une primitive de h sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \ln(x+1) + H(x^2) - H(x)$ pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ puis, H étant continue en 1, $\lim_{x\to 1} f(x) = \ln 2$. ■

4. Notons G une primitive de g sur $]0,1[$. Pour $0 < x < 1$, on a donc $f(x) = G(x^2) - G(x)$. Donc f est dérivable sur $]0,1[$ et $f'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$ pour tout $x \in]0,1[$. De la même manière, f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$ pour tout $x \in]1,+\infty[$. f est continue en 0 et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. De même, f est continue en 1 et $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = 1$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.
   On a alors $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, ce qui montre que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   On a montré que $f(x) \geqslant x\ln 2$ pour $x > 1$. Par minoration, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

5. f est deux fois dérivable sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ et pour $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{\ln x + \frac{1}{x} - 1}{\ln^2 x}$. Posons $h(x) = \ln x + \dfrac{1}{x} - 1$ pour $x > 0$. On a $h'(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$. Ainsi h est décroissante sur $]0,1]$ puis croissante sur $[1,+\infty[$. De plus, $h(1) = 0$ donc h est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On en déduit que f'' est positive sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Donc f' est croissante sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty[$. Or f' est continue en 1 donc elle est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Ceci montre que f est convexe.

6. Les informations obtenues aux différentes questions permettent de tracer le graphe suivant :



Solution 21.

1. A l'aide d'une formule de trigonométrie et de la linéarité de l'intégrale, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sin(x)\int_0^x \cos(t)g(t)\,dt - \cos(x)\int_0^x \sin(t)g(t)\,dt$$

Les applications $x \mapsto \int_0^x \cos(t)g(t)\,dt$ et $x \mapsto \int_0^x \sin(t)g(t)\,dt$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ comme primitives de fonctions continues. Comme sin et cos sont également de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos(x)\int_0^x \cos(t)g(t)\,dt + \sin(x)\cos(x)g(x) + \sin(x)\int_0^x \sin(t)g(t)\,dt - \cos(x)\sin(x)g(x) \\
&= \int_0^x (\cos(x)\cos(t) + \sin(x)\sin(t))\,g(t)\,dt = \int_0^x \cos(t-x)g(t)\,dt
\end{aligned}$$

2. On a montré à la question précédente que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \cos(x)\int_0^x \cos(t)g(t)\,dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)g(t)\,dt$$

On démontre comme à la première question que f' est de classe $\mathcal{C}^1$ i.e. que f est de classe $\mathcal{C}^2$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -\sin(x)\int_0^x \cos(t)g(t)\,dt + \cos^2(x)g(x) + \cos(x)\int_0^x \sin(t)g(t)\,dt + \sin^2(x)g(x) \\
&= -\int_0^x (\sin(x)\cos(t) - \cos(x)\sin(t))\,g(t)\,dt + g(x) = -f(x) + g(x)
\end{aligned}$$

Ceci prouve que f est bien solution de $y'' + y = g$.

3. La solution générale de l'équation homogène $y'' + y = 0$ est $x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme f est une solution particulière de $y'' + y = g$, on en déduit que les solutions de $y'' + y = g$ sont $x \mapsto f(x) + \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Solution 22.

Posons $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, $|\cos t - 1| \leqslant \frac{t^2}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\left|\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,dt - \int_x^{2x} \frac{dt}{t}\right| &= \left|\int_x^{2x} \frac{\cos t - 1}{t}\,dt\right| \\
&\leqslant \int_x^{2x} \frac{|\cos t - 1|}{t}\,dt \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_x^{2x} t\,dt = \frac{3x^2}{4}
\end{aligned}$$

Or $\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \ln 2$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2}{4} = 0$ donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln 2$.
Puisque $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ est impaire, f est paire et $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \ln 2$.
Finalement, $\lim_{x\to 0} f(x) = \ln 2$.

Solution 23.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Par inégalité triangulaire,

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \int_a^b |f(t)||\sin(tx) - \sin(ty)|\,dt$$

Or sin est 1-lipschitzienne car $|\sin'| \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}$ donc

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \int_a^b |f(t)||tx - ty|\,dt = |x - y|\int_a^b |f(t)t|\,dt$$

En posant $K = \int_a^b |f(t)t|\,dt$, g est K-lipschitzienne.

Solution 24.

On a $\forall n \geqslant 1$,

$$t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1}.$$

Il s'agit d'une somme de Riemann sur $[0,1]$ pour la fonction continue

$$f : u \in [0,1] \longmapsto \frac{1}{1+u^2}.$$

La suite converge donc vers

$$\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{4}$$

Solution 25.

On a $\forall n \geqslant 1$,

$$v_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)},$$

ainsi

$$w_n = \ln(v_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Il s'agit d'une somme de Riemann sur $[0,1]$ pour la fonction continue

$$f : u \in [0,1] \longmapsto \ln(1+u).$$

La suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ converge donc vers

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+u)du &= \Big[(u+1)\big[\ln(u+1)-1\big]\Big]_0^1 \\ &= \ln(4)-1\end{aligned}$$

et , par continuité de l'exponentielle ,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{4}{e}.$$

Solution 26.

En factorisant par n, le terme u_n devient

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+1/n} + \frac{1}{1+2/n} + \dots + \frac{1}{1+n/n}\right).$$

Si pour $t \in [0,1]$, on pose $f(t) = \frac{1}{1+t}$, alors le terme u_n vérifie

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On reconnaît donc la somme de Riemann de la fonction f sur le segment $[0,1]$. On peut affirmer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente de limite $\int_0^1 f(t)\,dt$, c'est-à-dire $\ln(2)$.

Solution 27.

Posons, pour n assez grand, $v_n = \ln(u_n)$ et notons M un réel tel que $|f| \leqslant M$ sur $[0,1]$ (un tel réel existe car f est continue sur le segment $[0,1]$). L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en 0 appliquée à la fonction

$$t \mapsto \ln(1+t)$$

entraîne, pour n assez grand et k entre 1 et n, que

$$\left|\ln\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M^2C}{n^2},$$

où C est une constante positive. Nous avons donc

$$\left|v_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)\right| \leqslant \frac{M^2C}{n}.$$

De l'inégalité ci-dessus et de la convergence de la somme de Riemann $(1/n)\sum_{k=1}^n f(k/n)$ vers $\int_0^1 f(t)\,dt$, on peut déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente de limite $\int_0^1 f(t)\,dt$. Par continuité de la fonction exponentielle, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc convergente vers $\exp(\int_0^1 f(t)\,dt)$.

Solution 28.

On peut écrire $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k(n-k)} = n^2\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}$. On reconnaît une somme de Riemann.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx$$

On met le trinôme sous la racine sous forme canonique :

$$I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-(2x-1)^2}\,dx$$

Effectuons le changement de variables $u = 2x-1$:

$$I = \frac{1}{4}\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2}\,du$$

Or $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2}\,du$ est l'aire du demi-disque unité et vaut donc $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que $I = \dfrac{\pi}{8}$ puis que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{8}n^2$.

Solution 29.

Les racines de $X^{2n}-1$ sont les complexes $z_k = e^{i\frac{k\pi}{n}}$ pour $k \in [\![-n+1, n]\!]$. Mais pour $k \in [\![1, n-1$, $z_{-k} = \overline{z_k}$ donc

$$X^{2n}-1 = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}(X-z_k)(X-\overline{z_k}) = (X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2-2X\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$$

Notons I l'intégrale à calculer. On a

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \ln(r^2 - 2r\cos\theta + 1)\, d\theta$$

Par parité de cos, on peut affirmer que

$$I = \int_{0}^{\pi} \ln(r^2 - 2r\cos\theta + 1)\, d\theta$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$S_n = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(r^2 - 2r\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$$

Comme $\theta \mapsto \ln(r^2 - 2r\cos\theta + 1)$ est continue sur $[0, \pi]$, la suite (S_n) converge vers I d'après le théorème sur les sommes de Riemann. Mais d'après ce qui précède

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} r^2 - 2r\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)\\
&= \frac{\pi}{n}\ln\left((r-1)^2\prod_{k=1}^{n-1} r^2 - 2r\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)\\
&= \frac{\pi}{n}\ln\left((r-1)^2\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\right)\\
&= \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{r-1}{r+1}r^{2n}-1\right)\\
&= \frac{\pi}{n}\ln(r^{2n}-1) + \frac{\pi}{n}\ln\frac{r-1}{r+1}
\end{aligned}$$

Tout d'abord, $\frac{\pi}{n}\ln\frac{r-1}{r+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Puis

$$\frac{\pi}{n}\ln(r^{2n}-1) = 2\pi\ln r + \frac{\pi}{n}\ln\left(1 - \frac{1}{r^{2n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\pi\ln r$$

On en déduit que $I = 2\pi\ln r$.

Solution 30.

Par une récurrence sans difficulté sur $n \in \mathbb{N}^*$, on prouve que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f^{(n)}(x) = \lambda^n f^{(n-1)}(\lambda x).$$

Comme $f(0) = 0$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ f^{(n)}(0) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On note

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad M_n = \max_{t\in[-x,x]} |f^{(n)}(t)|.$$

Par une récurrence facile, on prouve à partir de l'égalité

$$\forall t \in [-x, x],\quad f^{(n)}(t) = \lambda^n f^{(n-1)}(\lambda t)$$

et le fait que $[-\lambda x, \lambda x] \subset [-x, x]$, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad M_n \leqslant |\lambda|^{n+\dots+2+1} M_0 \leqslant M_0.$$

Or, d'apès la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad |f(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}M_0}{n!}.$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}M_0}{n!} = 0$$

et on en déduit par encadrement que $f(x) = 0$. Ainsi $f = 0$. Réciproquement, il est clair que $f = 0$ est une solution de l'équation de départ.

Solution 31.

1. Le calcul ne pose aucune difficulté, on trouve
$$I_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = 1.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, intégrons I_{n+2} par parties en posant $\forall t \in [0, \pi/2]$,
$$u(t) = -\cos(t) \;\text{ et }\; v(t) = \sin^{n+1}(t).$$
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ et,
$$\forall t \in [0, \pi/2], \quad u'(t) = \sin(t)$$
et
$$v'(t) = (n+1)\cos(t)\sin^n(t).$$
La formule d'intégration par parties s'écrit donc,
$$\begin{aligned} I_{n+2} &= [-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\pi/2} \\ &\qquad + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^n(t)dt \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)dt \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (\sin^n(t) - \sin^{n+2}(t))dt \\ &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \end{aligned}$$
D'où la relation de récurrence,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

3. D'après la relation de récurrence établie précédemment :
$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 3\times 1}{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2} I_0 \\ &= \frac{(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times(2n-3)\times\cdots\times 4\times 3\times 2\times 1}{[(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2]^2} I_0 \\ &= \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2} I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$
De la même façon,
$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times 5\times 3} I_1 \\ &= \frac{[(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2]^2}{(2n+1)\times(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times\cdots\times 5\times 4\times 3\times 2} I_1 \\ &= \frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!} I_1 = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

4. Puisque $\forall t \in [0, \pi/2],\ \ 0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t),$$

ainsi après intégration sur le segment $[0, \pi/2]$,

$$I_{n+1} \leqslant I_n.$$

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. On a donc en particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

soit encore, d'après la relation de récurrence obtenue ci-dessus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \frac{n+1}{n+2} I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

5. Par une récurrence sans difficulté , on prouve à l'aide de l'inégalité précédente que pour tout n positif $I_n > 0$. D'après le résultat de la question **3.**,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1,$$

de plus

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

d'où , en appliquant le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$$

et donc

$$I_{n+1} \sim I_n.$$

6. Posons $v_n = (n+1)I_{n+1}I_n$. On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_nI_{n+1} = v_n$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante égale à $\pi/2$ car $I_1 = 1$.

7. On a $(n+1)I_{n+1}I_n \sim nI_n^2$ d'après ce qui précède. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}$$

et puisque la fonction racine carrée est continue en $\pi/2$ et que I_n est positive,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

ainsi

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Solution 32.

1. Posons $x = \frac{\pi}{2} + u$. Alors $f_{n,\lambda}(x) = (-1)^n \sin(2nu)\ln(-\lambda \sin u)$. Or $\sin(2nu) \underset{u\to0}{\sim} 2nu$ et $-\lambda \sin u \underset{u\to0}{=} -\lambda u(1+o(1))$. Ainsi

$$\ln(-\lambda \sin u) \underset{u\to0}{=} \ln(-\lambda u) + \ln(1+o(1)) \underset{u\to0}{=} \ln(-\lambda u) + o(1) \underset{u\to0}{\sim} \ln(-\lambda u)$$

le dernier équivalent étant justifié par le fait que $\ln(-\lambda u) \xrightarrow[u\to0]{} -\infty$. On a donc

$$(-1)^n \sin(2nu)\ln(-\lambda \sin u) \underset{u\to0}{\sim} (-1)^n 2nu \ln(-\lambda u) \xrightarrow[u\to0]{} 0$$

par croissances comparées. La limite recherchée est nulle.

2. Remarquons que les intégrales de cette question sont bien définies puisque $f_{n,\lambda}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$ d'après la question précédente. Il suffit alors de remarquer que $\ln(\lambda\cos x) = \ln\lambda + \ln(\cos x)$. Il vient alors

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{n,\lambda}(x)\,dx &= \ln\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2nx)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{n,1}(x)\,dx\\ &= -\ln\lambda\left[\frac{\cos(2nx)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + I_n\\ &= \frac{1+(-1)^{n+1}}{2n}\ln\lambda + I_n\end{aligned}$$

3. On a $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)\ln(\cos x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\ln(\cos x)\,dx$. On effectue le changement de variables $t = \cos x$ de sorte que :

$$I_1 = 2\int_0^1 t\ln t\,dt = \left[t^2\ln t\right]_0^1 - \int_0^1 t\,dt = -\frac{1}{2}$$

On a $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x = 4\sin x\cos x(2\cos^2 x - 1)$. En effectuant à nouveau le changement de variables $t = \cos x$ dans I_2, on obtient :

$$I_2 = 4\int_0^1 t(2t^2-1)\ln t\,dt = 2\left[(t^4-t^2)\ln t\right]_0^1 - 2\int_0^1 (t^3-t)dt = \frac{1}{2}$$

4. On effectue le changement de variables $t = \frac{\pi}{2} - x$ dans I_n et on obtient :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(n\pi - 2nt)\ln(\sin t)\,dt = (-1)^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2nt)\ln(\sin t)\,dt$$

Par ailleurs

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2nt)\ln(\sin t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(nt)\cos(nt)\ln(\sin t)\,dt$$

On effectue une intégration par parties en remarquant qu'une primitive de $t \mapsto 2\sin(nt)\cos(nt)$ est $t \mapsto \frac{1}{n}\sin^2(nt)$ et que la dérivée de $t \mapsto \ln(\sin t)$ est $t \mapsto \cot t$. On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(nt)\cos(nt)\ln(\sin t)\,dt = \left[\frac{1}{n}\sin^2(nt)\ln(\sin t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(nt)\cot t\,dt$$

On prouve comme à la première question que $\sin^2 nt\ln(\sin t) \underset{t\to 0}{\sim} n^2t^2\ln t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc $\left[\frac{1}{n}\sin^2(nt)\ln(\sin t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$. On obtient finalement

$$I_n = (-1)^{n+1}\left(-\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(nt)\cot t\,dt\right) \quad \text{i.e.} nI_n = (-1)^n J_n$$

5. De la trigonométrie avant toute chose : pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}J_n - J_{n-1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2(nx) - \sin^2((n-1)x))\cot x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(2(n-1)x) - \cos(2nx))\cot x\,dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin((2n-1)x)\sin x\cot x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin((2n-1)x)\cos x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(2nx) + \sin(2(n-1)x))dx = -\frac{1}{4n}\big[\cos(2nx)\big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4(n-1)}\big[\cos(2(n-1)x)\big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{1-(-1)^n}{4n} + \frac{1-(-1)^{n-1}}{4(n-1)}\end{aligned}$$

Donc $J_n - J_{n-1} = \frac{1}{2(n-1)}$ si n est pair et $J_n - J_{n-1} = \frac{1}{2n}$ si n est impair. On en déduit que $J_n - J_{n-2} = \frac{1}{n-1}$ si n est pair et que $J_n - J_{n-2} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-2)}$ si n est impair. Un calcul simple donne $J_1 = \frac{1}{2}$.

$$J_{2n} = J_1 + (J_2 - J_1) + \sum_{k=2}^{n} J_{2k} - J_{2k-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$$

$$J_{2n+1} = J_{2n+1} - J_{2n} + J_{2n} = \frac{1}{2(2n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$$

Comme $nI_n = (-1)^n J_n$, on en déduit que :

$$I_{2n} = \frac{1}{2n} J_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$$

$$I_{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} J_{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{2(2n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \right)$$

Remarque. Il aurait fallu justifier l'existence de plusieurs intégrales en montrant que les fonctions à intégrer étaient prolongables par continuité aux bornes. Dans les calculs (intégration par parties, changement de variables), il aurait été plus rigoureux de considérer des bornes variables puis de faire tendre celle-ci vers la valeur voulue à la fin des calculs. ■

Solution 33.

1. Pour tout t dans $[0, \pi]$ et tout entier naturel n, on a

$$\cos((n+2)t) = \cos((n+1)t)\cos(t) - \sin((n+1)t)\sin(t)$$

et

$$\cos(nt) = \cos((n+1)t)\cos(t) + \sin((n+1)t)\sin(t),$$

d'où

$$\begin{aligned} I_{n+2} + I_n &= 2\int_0^{\pi} \frac{\cos((n+1)t)\cos(t)}{2-\cos(t)} dt \\ &= 2\int_0^{\pi} \frac{\cos((n+1)t)[\cos(t) - 2 + 2]}{2-\cos(t)} dt \\ &= 4I_{n+1} - 2\int_0^{\pi} \cos((n+1)t) dt \\ &= 4I_{n+1} \end{aligned}$$

2. La suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est donc linéaire récurrente d'ordre deux d'équation caractéristique $r^2 - 4r + 1 = 0$, dont les solutions valent $2 \pm \sqrt{3}$. Il existe donc deux réels α et β tels que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$I_n = \alpha(2-\sqrt{3})^n + \beta(2+\sqrt{3})^n.$$

On a clairement

$$2I_0 - I_1 = \sqrt{3}(\alpha - \beta) = \int_0^{\pi} \frac{2-\cos(t)}{2-\cos(t)} = \pi,$$

de plus, par les méthodes classiques (poser $u = \tan(t/2)$ (en prenant garde à la borne π !) pour se ramener à une fraction rationnelle), on prouve sans peine que

$$I_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi

$$\sqrt{3}(\alpha - \beta) = \pi \text{ et } I_0 = \alpha + \beta = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

D'où $\alpha = \pi/\sqrt{3}$, $\beta = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ I_n = \frac{\pi}{\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n.$$

Solution 34.

1. Notons $s_n(t)$ la somme de l'énoncé et posons
$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)it}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, de sorte que $s_n = \mathrm{Im}(S_n)$. Pour tout $t \not\equiv 0\,[\pi]$, on a (en appliquant la formule de la série géométrique) :
$$\begin{aligned}S_n(t) &= e^{it}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{2it})^k = e^{it}\frac{e^{2int}-1}{e^{2it}-1}\\ &= e^{it}\frac{e^{int}(e^{int}-e^{-int})}{e^{it}(e^{it}-e^{-it})} = e^{int}\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\end{aligned}$$
d'où, pour tous $t \not\equiv 0\,[\pi]$:
$$s_n(t) = \mathrm{Im}(S_n(t)) = \frac{\sin^2(nt)}{\sin(t)}.$$
Remarque. On peut également prouver cette formule par récurrence sur n en utilisant les formules d'addition trigonométriques. ■

2. D'après la question précédente, la fonction s_n est clairement prolongeable par continuité en 0 par $s_n(0) = 0$. De plus, par linéarité de l'intégrale, on a :
$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\pi/2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sin((2k+1)t)\right)dt\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin((2k+1)t)dt\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin((2k+1)t)dt\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{\cos((2k+1)t)}{2k+1}\right]_0^{\pi/2}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}\end{aligned}$$
Remarque. Un calcul élémentaire d'équivalent ($s_n(t) \underset{0}{\sim} n^2 t$) permet également de prouver que s_n est prolongeable par continuité par 0 en 0. ■

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque la fonction définie par
$$x > 0 \mapsto 1/(2x-1)$$
est décroissante sur $[1, +\infty[$, on a
$$\forall x \in [k, k+1],\quad \frac{1}{2k+1} \leqslant \frac{1}{2x-1} \leqslant \frac{1}{2k-1},$$
puis, par positivité de l'intégrale :
$$\frac{1}{2k+1} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{dx}{2x-1} \leqslant \frac{1}{2k-1}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :
$$\frac{1}{2k+1} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{dx}{2x-1} \leqslant \frac{1}{2k-1},$$

en sommant ces n inégalités pour k variant de 1 à n, on aboutit à :

$$I_n + \frac{1}{2n+1} - 1 \leqslant \int_1^n \frac{dx}{2x-1} \leqslant I_n$$

d'où

$$\frac{1}{2}\ln(2n-1) \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2}\ln(2n-1) + \frac{2n}{2n+1}$$

Puisque $\frac{2n}{2n+1} = o\left(\ln(2n-1)\right)$, on en déduit que

$$I_n \sim \frac{1}{2}\ln(2n-1),$$

et comme

$$\ln(2n-1) = \ln(n) + \ln(2-1/n) \sim \ln(n),$$

on aboutit à

$$I_n \sim \frac{1}{2}\ln(n).$$

Solution 35.

La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, elle est donc bornée sur cet ensemble : il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall t \in [0,1]$,

$$|f(t)| \leqslant M.$$

Ainsi, par positivité de l'intégrale,

$$|I_n| \leqslant \int_0^1 t^n |f(t)| dt \leqslant \int_0^1 M t^n dt = \frac{M}{n+1}$$

et, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$