

DEVOIR À LA MAISON N°17

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1

Partie I – Étude de la suite (T_n)

1. On trouve $T_2 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 4X^3 - 3X$.
2. T_0 est un polynôme pair de degré nul et de coefficient dominant 1.
On fait l'hypothèse de récurrence suivante :

$HR(n)$: T_n est un polynôme de degré n , de coefficient dominant 2^{n-1} et de la parité de n .

$HR(1)$ et $HR(2)$ sont vraies.

Supposons $HR(n)$ et $HR(n+1)$ vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $\deg XT_{n+1} = n+2$ et $\deg T_n = n < n+2$ donc $\deg T_{n+2} = n+2$. De plus, le coefficient dominant de T_{n+2} est le double de celui de T_{n+1} : il vaut donc 2^{n+1} . Enfin, $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$ et $T_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1} T_{n+1}(X)$ donc

$$T_{n+2}(-X) = -2XT_{n+1}(-X) - T_n(-X) = -2(-1)^{n+1}XT_{n+1}(X) - (-1)^n T_n(X) = (-1)^{n+2}T_{n+2}(X)$$

donc T_{n+2} a bien la parité de $n+2$.

Par récurrence, $HR(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. La famille (T_0, \dots, T_n) est une famille de polynômes à degrés échelonnés. Elle est donc libre. Puisqu'elle comporte $n+1$ vecteurs et que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. On fait l'hypothèse de récurrence suivante :

$HR(n)$: $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos x) = \cos(nx)$.

$HR(0)$ et $HR(1)$ sont évidemment vraies.

Supposons $HR(n)$ et $HR(n+1)$ vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos x) &= \cos(x)T_{n+1}(\cos x) - T_n(\cos x) \\ &= 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos(nx) \\ &= 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos((n+1)x - x) \\ &= \cos(x)\cos((n+1)x) - \sin((n+1)x)\sin(x) \\ &= \cos((n+1)x + x) = \cos((n+2)x) \end{aligned}$$

Par récurrence, $HR(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. D'après la question précédente, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$T_n(\cos x_k) = \cos(nx_k) = \cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Ainsi $\cos x_1, \dots, \cos x_n$ sont bien des racines de T_n . Par ailleurs, les réels x_1, \dots, x_n sont distincts et appartiennent à l'intervalle $[0, \pi]$. La fonction \cos étant strictement décroissante (et donc injective) sur $[0, \pi]$, les réels $\cos(x_1), \dots, \cos(x_n)$ sont également distincts et donc au nombre de n . Comme $\deg T_n = n$, T_n admet au plus n racines. Les réels $\cos(x_1), \dots, \cos(x_n)$ sont donc exactement les racines de T_n .

Partie II – Etude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

1. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est évidemment symétrique. Elle est bilinéaire par linéarité de l'intégrale. Elle est positive par positivité de l'intégrale ($(P \circ \cos)^2$ est bien entendu positive sur $[0, \pi]$). Enfin, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. Comme $(P \circ \cos)^2$ est continue et positive sur $[0, \pi]$, $(P \circ \cos)^2$ est nulle sur $[0, \pi]$. On en déduit que $P \circ \cos$ est nulle sur $[0, \pi]$. Comme $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$, P est nul sur $[-1, 1]$. P admet donc une infinité de racines : il est nul. Ceci prouve que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive i.e. un produit scalaire.

2. On a déjà vu que (T_0, \dots, T_n) était une base de $\mathbb{R}_n[X]$ à la question 3.

Soient $p, q \in \llbracket 0, n \rrbracket$ distincts.

$$\langle T_p, T_q \rangle = \int_0^\pi T_p(\cos x) T_q(\cos x) dx = \int_0^\pi \cos(px) \cos(qx) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((p+q)x) + \cos((p-q)x)) dx = 0$$

car $p - q \neq 0$ (p et q sont distincts) et $p + q \neq 0$ (sinon on aurait $p = q = 0$). Ainsi (T_0, \dots, T_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. T_n est orthogonal à T_0, \dots, T_{n-1} et donc à $\text{vect}(T_0, \dots, T_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Partie III – Calcul exact d'une intégrale

1. a. Soit $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

$$I(T_p) = \int_0^\pi T_p(\cos x) dx = \int_0^\pi \cos(px) dx = \begin{cases} \pi & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S_n(T_p) &= \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n T_p(\cos x_k) \\ &= \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \cos(px_k) \\ &= \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{(2k-1)p\pi}{2n} \\ &= \frac{\pi}{n} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n e^{\frac{i(2k-1)p\pi}{2n}} \right) \\ &= \frac{\pi}{n} \operatorname{Im} \left(e^{\frac{ip\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ikp\pi}{n}} \right) \end{aligned}$$

Si $p = 0$, alors $e^{ip\pi} = 1$ et donc $e^{\frac{ip\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ikp\pi}{n}} = n$ puis $S_n(T_p) = \pi$.

Si $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $e^{ip\pi} \neq 1$ donc

$$e^{\frac{ip\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{ikp\pi}}{n} = e^{\frac{ip\pi}{2n}} \frac{1 - e^{ip\pi}}{1 - e^{\frac{ip\pi}{n}}} = \frac{1 - (-1)^p}{-2i \sin \frac{p\pi}{2n}} = i \frac{1 - (-1)^p}{2 \sin \frac{p\pi}{2n}}$$

Puisque ce dernier résultat est imaginaire pur, $S_n(T_p) = 0$.

- b. I et S_n sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}[X]$. D'après la question précédente, elles coïncident sur la base (T_0, \dots, T_{n-1}) de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (cf. question 3) : elles sont donc égales sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $I(P) = S_n(P)$.

2. a. On a $\deg P \leq 2n-1$ et $\deg R \leq \deg T_n - 1 = n-1 \leq 2n-1$. Par conséquent $\deg(QT_n) = \deg(P-R) \leq 2n-1$. Or $\deg(QT_n) = \deg Q + \deg T_n = \deg Q + n$. D'où $\deg Q \leq n-1$ et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

- b. Puisque I est une forme linéaire,

$$I(P) = I(QT_n) + I(R) = \langle Q, T_n \rangle + I(R)$$

Or d'après 3, T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc à Q . Ainsi $\langle Q, T_n \rangle = 0$ et $I(P) = I(R)$.

c. Puisque S_n est une forme linéaire

$$S_n(P) = S_n(QT_n) + S_n(R)$$

Or $S_n(QT_n) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n Q(\cos x_k) T_n(\cos x_k) = 0$ puisque $\cos x_1, \dots, \cos x_n$ sont les racines de T_n . Puisque $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $S_n(R) = I(R)$ d'après 1.b. Enfin, d'après la question précédente $I(R) = I(P)$ donc $S_n(P) = I(P)$.

3. Testons avec le polynôme T_{2n} qui est de degré $2n$.

$$I(T_{2n}) = \langle T_{2n}, T_0 \rangle = 0$$

puisque T_{2n} est orthogonal à $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ d'après 3 et donc à T_0 .

$$S_n(T_{2n}) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \cos(2nx_k) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \cos((2k-1)\pi) = -\pi$$

Ainsi $I(T_{2n}) \neq S_n(T_{2n})$.

Partie IV – Calcul approché d'une intégrale

1. En séparant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs :

$$\sum_{k=1}^{2n} f \circ \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{k=1}^n f \circ \cos\left(\frac{2k\pi}{2n}\right) + \sum_{k=1}^n f \circ \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$$

et donc

$$\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{2n} f \circ \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f \circ \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f \circ \cos(x_k)$$

On en déduit que

$$S_n(f) = \frac{\pi}{n} \left(\sum_{k=1}^{2n} f\left(\cos \frac{k\pi}{2n}\right) - \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{k\pi}{n}\right) \right)$$

Puisque \cos est continue sur $[0, \pi]$ à valeurs dans $[-1, 1]$ et que f est continue sur $[-1, 1]$, $f \circ \cos$ est continue sur $[0, \pi]$. Le théorème sur les sommes de Riemann permet donc d'affirmer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{k\pi}{2n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\cos \frac{k\pi}{2n}\right) = \int_0^\pi f \circ \cos(x) \, dx = I(f)$$

On en déduit que $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge bien vers $I(f)$.

2. a. Pour $t \in [-1, 1]$

$$a^2 - 2at + 1 \geq (a^2 - 2a + 1) = (a-1)^2 > 0$$

puisque $a \neq 1$. La fonction $t \mapsto a^2 - 2at + 1$ est continue sur $[-1, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et \ln est continue sur \mathbb{R}_+^* donc f est continue sur $[-1, 1]$.

b. Les racines de $X^{2n} + 1$ sont les racines $2n^{\text{èmes}}$ de -1 , à savoir les complexes $z_k = e^{\frac{(2k-1)i\pi}{2n}}$ avec $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$. Or pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $z_k = e^{ix_k}$ et pour $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, $z_k = \overline{z_{2n-k+1}}$. Les racines de $X^{2n} + 1$ sont donc les nombres complexes e^{ix_k} et e^{-ix_k} pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On en déduit la décomposition en facteurs irréductibles de $X^{2n} + 1$ sur $\mathbb{C}[X]$:

$$X^{2n} + 1 = \prod_{k=1}^n (X - e^{ix_k}) \prod_{k=1}^n (X - e^{-ix_k})$$

En regroupant les racines conjuguées, on obtient la décomposition en facteurs irréductibles de $X^{2n} + 1$ sur $\mathbb{R}[X]$:

$$X^{2n} + 1 = \prod_{k=1}^n (X^2 - 2X \cos(x_k) + 1)$$

Chacun de ces facteurs est bien irréductible puisque les e^{ix_k} ne sont pas réels. En effet, $x_k \notin \pi\mathbb{Z}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

c. D'après la question précédente,

$$S_n(f) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \ln(a^2 - 2a \cos(x_k) + 1) = \frac{\pi}{n} \ln \left(\prod_{k=1}^n (a^2 - 2a \cos(x_k) + 1) \right) = \frac{\pi}{n} \ln(a^{2n} + 1)$$

d. D'après 1, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = I(f)$.

Si $a \in]0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{2n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = 0$. Ainsi $I(f) = 0$.

Si $a \in]1, +\infty[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^{2n}} = 0$. Donc

$$S_n(f) = \frac{\pi}{n} \ln(a^{2n} + 1) = \frac{\pi}{n} \left(2n \ln(a) + \ln \left(1 + \frac{1}{a^{2n}} \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\pi \ln(a)$$

Ainsi $I(f) = 2\pi \ln(a)$.

e. Si $a \in]0, 1[$, alors

$$S_n(f) - I(f) = S_n(f) = \frac{\pi}{n} \ln(a^{2n} + 1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a^{2n}\pi}{n}$$

car $a^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

Si $a \in]1, +\infty[$,

$$S_n(f) - I(f) = \frac{\pi}{n} \ln(a^{2n} + 1) - 2\pi \ln(a) = \frac{\pi}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{a^{2n}} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{na^{2n}}$$

car $\frac{1}{a^{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.