Intégrales à paramètres

$\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Passage à la limite

Théorème 1.1 Convergence dominée

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I ;
- (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f ;
- f est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq \varphi$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\mathrm{I}} f(t)\ \mathrm{d}t$$

Remarque. L'intégrabilité des f_n sur I est garantie par la condition de domination.

Exemple 1.1

On pose $f_n : t \in \mathbb{R}_+ \frac{1}{t^n + e^t}$ et $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction

$$f : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} e^{-t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \dfrac{1}{1+e} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Alors f est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ |f_n(t)| \leq e^{-t}$$

et la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-t}\ \mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{e}$$

Théorème 1.2 Interversion limite/intégrale

Soient $f : \mathrm{J} \times \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathrm{J}}$ (éventuellement $a = \pm\infty$). On suppose que :

- pour tout $x \in \mathrm{J}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- pour tout $t \in \mathrm{I}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x,t) = g(t)$ où g est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x,t) \in \mathrm{J} \times \mathrm{I},\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors

$$\lim_{x\to a} \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\ \mathrm{d}t = \int_{\mathrm{I}} g(t)\ \mathrm{d}t$$

Théorème 1.3 Intégration terme à terme

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **intégrable** sur I ;
- $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction f ;
- f est continue par morceaux sur I ;
- la série $\sum \int_{\mathrm{I}} |f_n(t)|\ \mathrm{d}t$ converge.

Alors f est intégrable sur I et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\mathrm{I}} f(t)\ \mathrm{d}t$$

2 Continuité

Théorème 2.1

Soient $f : \mathrm{A} \times \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et A une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose que :

- pour tout $x \in \mathrm{J}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto \mathrm{g}(x,t)$ est continue sur A ;
- il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x,t) \in \mathrm{A} \times \mathrm{I},\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors $\mathrm{F} : x \in \mathrm{A} \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est continue sur A.

Remarque. La dernière condition est une condition dite de **domination**.

Remarque. La continuité étant une notion locale, on peut remplacer la condition de domination sur A par la domination au

voisinage de tout point de A. En particulier, il suffit de montrer la dpmination sur tout compact de A.
Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, il suffit de montrer la domination sur tout segment de A.

3 Dérivabilité

Théorème 3.1

Soient $f : \mathrm{J} \times \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- pour tout $x \in \mathrm{J}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I et intégrable sur I ;
- pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J ;
- pour tout $x \in \mathrm{J}$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x,t) \in \mathrm{J} \times \mathrm{I},\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

Alors $\mathrm{F} : x \in \mathrm{J} \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et

$$\forall x \in \mathrm{J},\ \mathrm{F}'(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. La dérivabilité étant une notion locale, on peut remplacer la domination sur J par la domination sur tout segment de J.

Corollaire 3.1

Soient $f : \mathrm{J} \times \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J ;
- pour tout $x \in \mathrm{J}$ et pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue par morceaux sur I et intégrable sur I ;
- il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x,t) \in \mathrm{J} \times \mathrm{I},\ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

Alors $\mathrm{F} : x \in \mathrm{J} \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et

$$\forall j \in [\![0, k]\!],\ \forall x \in \mathrm{J},\ \mathrm{F}^{(j)}(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. A nouveau, la domination sur tout segment de J suffit.

Corollaire 3.2

Soient $f : \mathrm{J} \times \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J ;
- pour tout $x \in \mathrm{J}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une fonction positive φ_k **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x,t) \in \mathrm{J} \times \mathrm{I},\ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi_k(t)$$

Alors $\mathrm{F} : x \in \mathrm{J} \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathrm{J},\ \mathrm{F}^{(k)}(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. A nouveau, la domination sur tout segment de J suffit.

Exercice 3.1

Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.