CALCUL DIFFÉRENTIEL

Dérivées partielles

Exercice 1 — **CCINP (ou CCP) PSI 2019**

Soit la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$.

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
3. Étudier l'existence de dérivées partielles secondes de f en $(0,0)$.

Exercice 2

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées ou dérivées partielles des fonctions suivantes en fonction des dérivées partielles de f.

1. $g(x,y) = f(y,x)$
2. $g(x) = f(x,x)$
3. $g(x,y) = f(y, f(x,x))$
4. $g(x) = f(x, f(x,x))$

Exercice 3

Etudier l'existence de dérivées partielles pour les fonctions suivantes.

1. $f(x,y) = \max(|x|,|y|)$.
2. $f(x,y) = |x| + |y|$.
3. $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{\sin x^2 + \sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$.

Exercice 4

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. f est-elle de classe $\mathcal{C}^0$? $\mathcal{C}^1$? $\mathcal{C}^2$?

Exercice 5 — **Laplacien en polaires**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On appelle *laplacien* de f l'application $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Donner une expresion du laplacien en coordonnées polaires.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(e^t \cos t, \ln(1+t^2))$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 7 — **Une équation fonctionnelle**

Le but de l'exercice est de déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation :

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{$*$}$$

1. Déterminer les solutions constantes de $(*)$.
2. Soit f une solution non constamment nulle de $(*)$.
   - **a.** Montrer que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
   - **b.** Montrer que f est une fonction paire.
3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x,y) = f(x+y) + f(x-y)$$

   - **a.** Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   - **b.** Calculer les dérivées partielles secondes de F.
   - **c.** On suppose que f est une solution non constamment nulle de $(*)$. Des expressions de $\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y^2}$, déduire que f vérifie une équation différentielle de la forme $z'' - \alpha z = 0$.
   - **d.** Donner les solutions de l'équation différentielle $z'' - \alpha z = 0$ suivant les valeurs de α.
4. Déterminer toutes les solutions de $(*)$.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de f.
2. **a.** Prouver l'existence de dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
   b. Etudier la continuité des dérivées partielles premières de f.
   c. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 9 **Centrale-Supélec MP 2016**

On note $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = y\}$.
Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \Delta & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y} \end{cases}$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$.
2. Montrer que f est prolongeable en une application $\tilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $\tilde{f}$ admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
5. Montrer que $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. On pourra écrire $\tilde{f}(x,y)$ comme une intégrale entre 0 et 1.
6. Justifier l'existence pour $\tilde{f}$ d'un minimum et d'un maximum sur $\mathbb{R}^2$ et les déterminer.

Exercice 10 **Mines-Ponts MP 2016**

On se donne $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_+^*$ et on définit $\mathrm{U} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < \mathrm{R}^2\right\}$.
Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\Delta f = 0$.
On définit $\mathrm{F} : \begin{cases}]-\mathrm{R},\mathrm{R}[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,t) & \longmapsto & f(r\cos t, r\sin t) \end{cases}$.

1. Trouver une relation entre les dérivées partielles de F et f.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On définit

$$\varphi_n : \begin{cases}]-\mathrm{R},\mathrm{R}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ r & \longmapsto & \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{F}(r,t)e^{-int}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

   Trouver une équation différentielle vérifiée par φ_n et la résoudre.

Différentiation

Exercice 11 **Banque Mines-Ponts MP 2019**

On note $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et E^* son dual.
On définit

$$\mathrm{D} = \left\{\varphi \in \mathrm{E}^*, \forall (f,g) \in \mathrm{E}^2, \varphi(fg) = f(0)\varphi(g) + g(0)\varphi(f)\right\}$$

1. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de E^* non réduit à 0.
2. Montrer que l'application $a \in \mathbb{R}^n \mapsto (f \in \mathrm{E} \mapsto \mathrm{d}f(0)\cdot a)$ est injective.
3. Donner une base de D.
   Indication : On pourra utiliser la relation fondamentale de l'analyse pour $t \in \mathbb{R} \mapsto f(tx)$.

Exercice 12 **Banque Mines-Ponts MP 2018**

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable, telle que $\mathrm{d}f(x)$ soit injective pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et vérifiant $\|f(x)\| \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
Le but de cet exercice est de montrer que f est surjective. On pose pour cela $g : x \to \|f(x) - a\|^2$ où $a \in \mathbb{R}^n$.

1. Justifier que g est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer $\mathrm{d}g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que g admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$.
3. Conclure.

Exercice 13 ★★★

Soit $\mathrm{A} : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable telle que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{A}(s)$ et $\mathrm{A}(t)$ commutent.

1. Justifier que $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \exp(\mathrm{M})$ est différentiable en 0 et calculer sa différentielle en 0.
2. En déduire que $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(\mathrm{A}(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = \mathrm{A}'(t)\exp(\mathrm{A}(t)) = \exp(\mathrm{A}(t))\mathrm{A}'(t)$$

Exercice 14 ★★

Montrer que $f : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^2$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en tout point de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Gradient

Exercice 15 ★★

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E et $u \in \mathrm{E}$. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \varphi(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle + \langle u, x\rangle$$

1. Justifier que φ est différentiable sur E.
2. Calculer le gradient de φ en tout point de E.

Exercice 16 ★★★

Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. Pour $x \in \mathrm{E}\setminus\{0_\mathrm{E}\}$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2}$.
On n'utilisera pas le théorème spectral dans tout cet exercice.

1. Calculer le gradient de φ en tout point de $\mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$.
2. Montrer que $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$ est un vecteur propre de f si et seulement si $\nabla\varphi(x) = 0$.
3. Montrer que φ admet un maximum sur $\mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$.
4. En déduire que f admet un vecteur propre.

Jacobienne

Exercice 17 ★★

Soit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$g(x,y) = \left(x + 2\sin y, y + \frac{1}{3}\sin x\right)$$

1. Justifier que g est différentiable en tout point et écrire la matrice jacobienne de g en un point (x,y). En déduire que $\mathrm{d}g$ est à valeurs dans $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$.
2. Montrer que g est une bijection.
3. On admet que g^{-1} est différentiable. Déterminer la matrice jacobienne de g^{-1} au point $(0,0)$.

Exercice 18 ★

Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sin(x^2-y^2) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$$

1. Justifier que les fonctions f et g sont différentiables en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et écrire les matrices jacobiennes de ces deux fonctions au point (x,y).

2. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image du vecteur $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $\mathrm{d}(f \circ g)(x,y)$

   a. en calculant $f \circ g$;

   b. en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

Espace tangent

Exercice 19 ★★

1. Montrer que si $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (espace des matrices antisymétriques), alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{t\mathrm{A}} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

2. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ au point I_n.

Exercice 20 ★★

Soit $\mathrm{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^3+3xy+z=0\right\}$ et $u=(0,-1,1)$. Déterminer l'ensemble des points de S en lesquels le vecteur u est tangent à S.

Exercice 21

Soit $\mathrm{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x=8yz\right\}$. Déterminer les points de S en lesquels le plan tangent contient la droite d'équations $\begin{cases} y=1 \\ x+4z+2=0 \end{cases}$.

Optimisation

Exercice 22

Déterminer les extrema locaux des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = x^3+y^3$.
2. $f(x,y) = x^2+xy+y^2-3x-6y$.
3. $f(x,y) = 2y^4-3xy^2+x^2$.
4. $f(x,y) = x^3-y^2-x$.

Exercice 23

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2(1+y)^3+y^4 \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la fonction f admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f admet un minimimum local mais pas global en ce point critique.

Exercice 24 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2018**

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un endomorphisme symétrique f de E dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

1. Montrer que : $\forall h \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, $(f(h) \mid h) > 0$.

2. Soient $u \in \mathrm{E}$ fixé et $g : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) \mid x) - (u \mid x)$.

   a. Montrer que g est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point de E.

   b. Montrer qu'il existe un unique vecteur $z_0 \in \mathrm{E}$ point critique de g.

   c. Montrer que g admet un minimum global en z_0.

Exercice 25 ★★ **CCP PSI 2015**

On considère les ensembles

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$$

et

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x < y < 1\}$$

ainsi que la fonction F définie sur K par

$$F(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y(1-x) & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. La fonction F admet-elle des extrema locaux sur T ?
2. La fonction F admet-elle un minimum sur K ? un maximum sur K. Si oui, déterminer leurs valeurs.

Exercice 26 ★★

Déterminer le minimum et le maximum éventuels de $f : (x,y) \mapsto \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$ sur $K = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$.

Exercice 27 ★★★ **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E un espace euclidien, que l'on munit de sa norme euclidienne, et $f : E \to E$ différentiable, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{d}f(x)$ soit injective, et vérifiant $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$. Le but de cet exercice est de montrer que f est surjective. On pose pour cela $g : x \in E \mapsto \|f(x) - a\|^2$ où $a \in E$.

1. Pour $x \in E$, calculer $\mathrm{d}g(x)$.
2. Montrer que g admet un minimum sur E.
3. Conclure.

Equations aux dérivées partielles

Exercice 28

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$$

Exercice 29

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

Exercice 30

Résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) : $\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = x + y$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ en effectuant le changement de variables $\begin{cases} x = u \\ y = \frac{u^2}{2} + v \end{cases}$.
Déterminer la solution vérifiant $f(0,y) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 31

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est *homogène de degré* α si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t > 0,\ f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y)$$

Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$$

Exercice 32

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est *homogène de degré* α si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t > 0,\ f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$$

1. Montrer que si f est homogène de degré α, alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y) \tag{$*$}$$

2. Réciproquement, on suppose que f vérifie la relation $(*)$.

a. On fixe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $\varphi(t) = f(tx,ty) - t^\alpha f(x,y)$ pour $t > 0$. Montrer que φ vérifie une équation différentielle du premier ordre sans second membre et préciser celle-ci.

b. En déduire que f est homogène de degré α.

3. Montrer que si f est homogène de degré α, les dérivées partielles de f sont également homogènes et préciser leur degré.

Exercice 33 **Problème de Dirichlet et principe du maximum**

Soient U un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On note $\partial \mathrm{U} = \overline{\mathrm{U}} \setminus \mathrm{U}$ la frontière de U.
On se donne une fonction f à valeurs réelles continue sur $\overline{\mathrm{U}}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. On pose alors

$$\forall x \in \mathrm{U},\ \Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

1. Montrer que f admet un maximum sur $\overline{\mathrm{U}}$. On note alors $\bar{x}$ un point de $\overline{\mathrm{U}}$ où ce maximum est atteint.

2. On suppose que $\Delta f > 0$ sur U. Montrer que $\bar{x} \in \partial \mathrm{U}$.

A partir de maintenant, on suppose $\Delta f = 0$ sur U.

3. On se donne $\varepsilon > 0$ et on pose

$$\forall x \in \overline{\mathrm{U}},\ f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \|x\|^2 = f(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Montrer que f_ε est continue sur $\overline{\mathrm{U}}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que $\Delta f_\varepsilon > 0$ sur U.

4. En déduire que le maximum de f sur $\overline{\mathrm{U}}$ est atteint sur $\partial \mathrm{U}$.

5. Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues sur $\overline{\mathrm{U}}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et vérifiant $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$ sur U. On suppose en outre que $f_1 = f_2$ sur $\partial \mathrm{U}$. Montrer que $f_1 = f_2$ sur U.

Exercice 34 **CCP PC 2018**

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $\mathrm{E} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{F} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et on considère $\phi : f \in \mathrm{E} \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x} - af$.

1. Montrer que ϕ est une application linéaire de E dans F.

2. On pose $f(x,y) = \sin(y)\exp(ax)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\phi(f)$.

3. Soit $\mathrm{G} = \left\{(x,y) \mapsto \alpha(y)\exp(ax),\ \alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\right\}$. Montrer que $\mathrm{G} \subset \mathrm{Ker}(\phi)$. ϕ est-elle injective ?

4. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{F}$. On pose $f(x,y) = \exp(ax)\displaystyle\int_0^x \mathrm{A}(t,y)\exp(-at)\,\mathrm{d}t$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et les calculer. Montrer que $\phi(f) = \mathrm{A}$.

5. Montrer que $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(\phi)$.

6. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathrm{E}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - af(x,y) = 2x - 3y$$