Devoir à la maison n°13

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathrm{I} = [a, b]$. On suppose que f' est strictement négative sur I, que f'' est positive sur I et que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

Partie I – Description de la méthode de Newton

1. Montrer qu'il existe un unique réel $c \in \mathrm{I}$ tel que $f(c) = 0$.

2. **a.** Soit u un réel de I. Montrer que l'abscisse de l'intersection de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u et de l'axe des abscisses est égale à $u - \dfrac{f(u)}{f'(u)}$.

b. Soit g la fonction définie sur I par

$$\forall x \in \mathrm{I},\ g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

On définit la suite (x_n) par $x_0 \in [a, c]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = g(x_n)$$

Quelle est l'interprétation géométrique de la suite (x_n) ? On illustrera son propos par une figure soignée.

3. **a.** Justifier que g est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.

b. En déduire les variations de g sur I.

c. Établir que $g([a, c]) \subset [a, c]$.

d. Établir que la suite (x_n) est à valeurs dans $[a, c]$.

Partie II – Convergence de la méthode de Newton

1. **a.** Étudier le sens de variation de (x_n).

b. Prouver que la suite (x_n) converge vers c.

2. **a.** Justifier l'existence de deux réels strictement positifs m et M tels que $|f'| \geq m$ et $|f''| \leq \mathrm{M}$ sur I.

b. A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que

$$\forall x \in \mathrm{I},\ |g(x) - c| \leq (x - c)^2 \frac{\mathrm{M}}{2m}$$

c. On pose $\mathrm{K} = \frac{\mathrm{M}}{2m}$. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $\mathrm{K}|x_\mathrm{N} - c| < 1$. En déduire l'existence de deux constantes $\mathrm{C} > 0$ et $k \in]0,1[$ telles que

$$\forall n \geq \mathrm{N},\ |x_n - c| \leq \mathrm{C}k^{2^n}$$

d. Soit $q \in]0,1[$. Montrer que la suite $(x_n - c)$ est négligeable devant la suite (q^n).