Suites numériques

Solution 1.

Notons ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 les limites respectives des suites :

$$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}.$$

La suite de terme générale u_{6n} étant extraite de $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$ mais également de $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$, elle converge vers ℓ_3 et ℓ_1, d'où $\ell_3 = \ell_1$ par unicité de la limite. De même, la suite de terme générale u_{6n+3} étant extraite de $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$ mais également de $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$, elle converge vers ℓ_3 et ℓ_2, d'où $\ell_3 = \ell_2$ par unicité de la limite. Ainsi $\ell_1 = \ell_2$ et, d'après le cours, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

Solution 2.

Posons $u_n = \{\sqrt{n}\}$. Alors $u_{n^2} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, $n - 1 \leqslant \sqrt{n^2-1} < n$ pour $n \geqslant 1$ donc $\{\sqrt{n^2-1}\} = n$. Enfin

$$\{\sqrt{n^2-1}\} = \sqrt{n^2-1} - (n-1) = 1 + \sqrt{n^2-1} - n = 1 - \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}$$

Les suites $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n^2-1})_{n\geqslant 1}$ sont des suites extraites de la suite (u_n) de limites respectives 0 et 1. La suite (u_n) n'admet donc pas de limite.

Solution 3.

Première méthode

Supposons qu'une des suites ne soit pas majorée – la suite (a_n) pour fixer les idées. Alors on peut extraire une suite $(a_{\varphi(n)})$ qui diverge vers $+\infty$. Puisque $e^{a_{\varphi(n)}} + e^{b_{\varphi(n)}} + e^{c_{\varphi(n)}} \geqslant e^{a_{\varphi(n)}}$, $e^{a_{\varphi(n)}} + e^{b_{\varphi(n)}} + e^{c_{\varphi(n)}}$ tend vers $+\infty$, ce qui contredit le fait que $e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n}$ tend vers 3.
Supposons maintenant qu'une des suites ne soit pas minorée – la suite (a_n) pour fixer les idées. Alors on peut extraire une suite $(a_{\varphi(n)})$ qui diverge vers $-\infty$. Les deux autres suites ne peuvent pas être majorées sinon $a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)} + c_{\varphi(n)}$ tendrait vers $-\infty$. Ainsi une des suites n'est pas majorée et on est ramené au cas précédent dont on a vu qu'il était impossible.
Par conséquent, les trois suites sont bornées.
La suite (a_n) est bornée donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe donc une suite extraite $(a_{\varphi_1(n)})$ convergente. La suite $(b_{\varphi_1(n)})$ est également bornée donc il existe une suite extraite $(b_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})$ convergente. Enfin, la suite $(c_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})$ est bornée donc il existe une suite extraite $(c_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3(n)})$ convergente. Pour simplifier les notations, posons $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3$. Ainsi les suites $(a_{\varphi(n)}), (b_{\varphi(n)}), (c_{\varphi(n)})$ convergent. Notons a, b, c leurs limites. On a donc $a + b + c = 0$ et $e^a + e^b + e^c = 3$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x \geqslant 1 + x$ avec inégalité stricte lorsque $x \neq 0$. Supposons que l'un des réels a, b, c soit non nul – a pour fixer les idées. Alors $e^a > 1 + a$, $e^b \geqslant 1 + b$ et $e^c \geqslant 1 + c$ donc $e^a + e^b + e^c > 3 + a + b + c$ i.e. $3 > 3$ ce qui est absurde. Ainsi $a = b = c = 0$.
Ce qui précède montre que 0 est la seule valeur d'adhérence des suites $(a_n), (b_n), (c_n)$. Il est classique de montrer que 0 est la limite de ces trois suites.

Seconde méthode

Posons $f(x) = e^x - 1 - x$. On montre facilement que f est positive et ne s'annule qu'en 0. D'après l'énoncé $u_n = f(a_n) + f(b_n) + f(c_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. De plus, $0 \leqslant f(a_n) \leqslant u_n$ donc, par encadrement, $(f(a_n))$ converge vers 0. La représentation graphique de f montre bien que (a_n) doit converger vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $m = \min(f(\varepsilon), f(-\varepsilon))$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|f(a_n)| < m$. Les variations de f montrent alors que pour $n \geqslant N$, $|a_n| < \varepsilon$. Ainsi (a_n) converge vers 0. On raisonne de la même manière pour (b_n) et (c_n).

Solution 4.

Supposons (u_n) non majorée. Alors on peut en extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ divergeant vers $+\infty$. Puisque $v_n = (u_n + v_n) - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $(v_{\varphi(n)})$ diverge vers $-\infty$. Mais alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u^p_{\varphi(n)} = +\infty$ et, q étant impair, $\lim\limits_{n\to+\infty} v^q_{\varphi(n)} = -\infty$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u^p_{\varphi(n)} - v^q_{\varphi(n)} = +\infty$, ce qui contredit l'énoncé.

Supposons (u_n) non minorée. Alors on peut en extraire une sous-suite $(u_{\varphi}(n))$ divergeant vers $-\infty$. Puisque $v_n = (u_n + v_n) - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $(v_{\varphi(n)})$ diverge vers $+\infty$. Mais alors, p étant impair, $\lim_{n\to+\infty} u^p_{\varphi(n)} = -\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v^q_{\varphi(n)} = +\infty$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u^p_{\varphi(n)} - v^q_{\varphi(n)} = -\infty$, ce qui contredit l'énoncé.
La suite (u_n) est donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une valeur d'adhérence $l \in \mathbb{R}$. Soit $(u_{\varphi(n)})$ une sous-suite convergeant vers l. Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = 0$, $(v_{\varphi(n)})$ converge vers $-l$. Enfin, puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n^p - v_n^q = 0$, $l^p - (-l)^q = 0$. p et q étant impairs, ceci équivaut à $l^p + l^q = 0$. La fonction $x \mapsto x^p + x^q$ étant strictement croissante (encore une fois, on utilise le fait que p et q sont impairs) et s'annulant en 0, on a donc $l = 0$. 0 est l'unique valeur d'adhérence de la suite (u_n) : on démontre alors classiquement que (u_n) converge vers 0. Puisque $v_n = (u_n + v_n) - u_n$, on en déduit que (v_n) converge vers 0.

Solution 5.

1. Les racines de l'équation caractéristique
$$z^2 - z - 1 = 0,$$
sont
$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$
il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \geqslant 0$,
$$u_n = \lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$
$$u_0 = 0 = \lambda + \mu, \quad u_1 = 1 = -\sqrt{5}\lambda,$$
on aboutit à
$$\lambda = -\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$
On a donc, $\forall n \geqslant 0$,
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\alpha_n = \phi_{n+1}^2 - \phi_n\phi_{n+2}.$$
On a alors ,
$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \phi_{n+1}^2 - \phi_n(\phi_{n+1} + \phi_n) \\
&= \phi_{n+1}^2 - \phi_n^2 - \phi_n\phi_{n+1} \\
&= \phi_{n+1}(\phi_{n+1} - \phi_n) - \phi_n^2 \\
&= \phi_{n+1}\phi_{n-1} - \phi_n^2 \\
&= -\alpha_{n-1}
\end{aligned}$$
La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ est donc géométrique de raison -1 et de premier terme $\alpha_0 = 1$, on a donc pour tout $n \geqslant 0$,
$$\phi_{n+1}^2 = \phi_n\phi_{n+2} + (-1)^n.$$

3. On prouve par une récurrence sans difficulté que
$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n > 0,$$
ce qui justifie l'existence de la somme étudiée que nous noterons σ_n. D'après la formule démontré à la question **2.** , pour tout $k \geqslant 1$,
$$\phi_{k+1}^2 = \phi_k\phi_{k+2} + (-1)^k,$$
d'où en divisant par $\phi_k\phi_{k+1} > 0$,
$$\frac{\phi_{k+1}}{\phi_k} = \frac{\phi_{k+2}}{\phi_{k+1}} + \frac{(-1)^k}{\phi_k\phi_{k+1}},$$

et donc

$$\alpha_k = \frac{(-1)^k}{\phi_k\phi_{k+1}} = \beta_k - \beta_{k+1}$$

où

$$\beta_k = \frac{\phi_k}{\phi_{k+1}}.$$

Après telescopage , il reste donc

$$\sigma_n = \beta_1 - \beta_{n+1}.$$

Or ,

$$\phi_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n,$$

d'où

$$\beta_{n+1} \sim \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

et puisque $\beta_1 = 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Solution 6.

On prouve par une rćurrence sans difficulté que

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n > 0.$$

Posons alors

$$v_n = \frac{1}{u_n}.$$

Pour tout $n \geqslant 0$,

$$v_{n+2} = \frac{1}{2}(v_{n+1} + v_n).$$

On reconnaît une récurrence linéaire d'ordre deux d'équation caractéristique

$$2r^2 - r - 1 = (2r+1)(r-1) = 0$$

Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \geqslant 0, \quad v_n = \lambda + \mu\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n,$$

et plus précisément,

$$\lambda = \frac{v_0 + 2v_1}{3} = \frac{u_1 + 2u_0}{3u_0u_1} > 0$$

et

$$\mu = \frac{2v_0 - 2v_1}{3}.$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lambda,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3u_0u_1}{2u_0 + u_1}.$$

Solution 7.

On prouve par une rćurrence sans difficulté que

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n > 0.$$

Posons alors

$$v_n = \ln(u_n).$$

Pour tout $n \geqslant 0$,

$$v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{3}v_n.$$

Les racines de l'équation caractéristique

$$z^2 - \frac{z+2}{3} = 0,$$

sont 1 et $-\frac{2}{3}$, il existe donc λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que $\forall n \geqslant 0$,

$$v_n = \lambda + \mu\left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lambda.$$

Puisque

$$v_0 = \lambda + \mu, \quad v_1 = \lambda - \frac{2\mu}{3},$$

on aboutit à

$$\lambda = \frac{2v_0 + 3v_1}{5} = \frac{\ln\left(u_0^2 u_1^3\right)}{5},$$

et par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \left(u_0^2 u_1^3\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Solution 8.

1. L'équation caractéristique

$$2x^2 = 3x - 1$$

admet pour solutions 1 et $\frac{1}{2}$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que,

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \lambda + \mu\frac{1}{2^n}.$$

On calcule μ et λ grâce aux deux premiers termes de la suite,

$$\lambda + \mu = -1, \quad \lambda + \mu\frac{1}{2} = 1,$$

ainsi $\lambda = 3$ et $\mu = -4$ et

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = 3 - \frac{4}{2^n}.$$

2. L'équation caractéristique

$$4x^2 = 4x - 1$$

admet la racine double $\frac{1}{2}$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que,

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \frac{\lambda + \mu n}{2^n}.$$

On calcule μ et λ grâce aux deux premiers termes de la suite,

$$\lambda = 1, \quad \frac{\lambda + \mu}{2} = 9,$$

ainsi $\lambda = 1$ et $\mu = 17$ et

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \frac{17n + 1}{2^n}.$$

3. L'équation caractéristique
$$x^2 = x + 1$$
admet pour solutions
$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$
Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que ,
$$\forall n \geqslant 0, \quad v_n = \lambda\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \mu\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
On calcule μ et λ grâce aux deux premiers termes de la suite ,
$$\lambda + \mu = 0, \quad \lambda\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \mu\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,$$
ainsi $\lambda = -\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\forall n \geqslant 0$,
$$v_n = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

4. L'équation caractéristique
$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4) = 0$$
admettant 2 et 4 pour racines, il existe deux nombres réels λ et μ tels que pour tout $n \geqslant 0$,
$$u_n = \lambda 2^n + \mu 4^n.$$
En particulier , pour $n = 0$ et $n = 1$, on a les équations suivantes,
$$u_0 = 1 = \lambda + \mu, \quad u_1 = 1 = 2\lambda + 4\mu.$$
On trouve alors que $\lambda = \frac{3}{2}$ et $\mu = -\frac{1}{2}$ et donc
$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = 3 \times 2^{n-1} - 2^{2n-1}.$$

Solution 9.

1. Soit $\mathrm{HR}(n)$ l'hypothèse de récurrence $u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n$.
On a $u_2 = \sqrt{u_1} \geqslant u_1$ car $u_1 \in]0,1[$. Ainsi $\mathrm{HR}(2)$ est vérifiée.
Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie pour un certain $n \geqslant 2$. Alors $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-2}} \geqslant 0$ d'après notre hypothèse de récurrence. Donc $\mathrm{HR}(n+1)$ est vraie.
On en déduit que (u_n) est croissante.

> **Remarque.** On est obligé d'initialiser au rang 2 car l'étape d'hérédité $\mathrm{HR}(n) \Rightarrow \mathrm{HR}(n+1)$ fait intervenir u_{n-2}.

2. Montrons par récurrence double que (u_n) est majorée par 4. On a bien $u_0 \leqslant 4$ et $u_1 \leqslant 4$. Supposons que $u_n \leqslant 4$ et $u_{n+1} \leqslant 4$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+2} \leqslant \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$.

> **Remarque.** Comment trouver le majorant ? On choisit un majorant M qui nous arrange i.e. tel que $\sqrt{M}+\sqrt{M} \leqslant M$. On vérifie ensuite qu'il convient.

(u_n) est croissante et majorée donc elle converge. Par continuité de la racine carrée, sa limite l vérifie $l = \sqrt{l} + \sqrt{l}$ donc $l = 4$.

Solution 10.

1. On raisonne par récurrence double. Tout d'abord, $u_0, u_1 \in]0,1[$. On suppose alors que $u_n, u_{n+1} \in]0,1[$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sqrt{u_n}, \sqrt{u_{n+1}} \in]0,1[$ puis $u_{n+2} \in]0,1[$. On conclut que $u_n \in]0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $u_n \leqslant u_{n+1}$, alors $v_n = u_n$. De plus, $u_{n+2} \geqslant \sqrt{u_n} \geqslant u_n$ puisque $u_n \in]0,1[$. On a donc $v_{n+1} = \min(u_{n+1}, u_{n+2}) \geqslant u_n = v_n$.
- Si $u_n \geqslant u_{n+1}$, alors $v_n = u_{n+1}$. De plus, $u_{n+2} \geqslant \sqrt{u_{n+1}} \geqslant u_{n+1}$ puisque $u_{n+1} \in]0,1[$. On a donc $v_{n+1} = \min(u_{n+1}, u_{n+2}) = u_{n+1} = v_n$.

Dans les deux cas, $v_{n+1} \geqslant v_n$. Ainsi (v_n) est croissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $u_n \leqslant u_{n+1}$, alors $v_n = u_n$. De plus, $u_{n+2} \geqslant \sqrt{u_n} \geqslant u_n$ puisque $u_n \in]0,1[$. Donc $\sqrt{u_{n+2}} \geqslant \sqrt{u_n}$. On a également $u_{n+3} \geqslant \sqrt{u_n}$ puisque $\sqrt{u_{n+1}} \geqslant \sqrt{u_n}$ et $\sqrt{u_{n+2}} \geqslant \sqrt{u_n}$. On a montré que $u_{n+2} \geqslant \sqrt{u_n}$ et $u_{n+3} \geqslant \sqrt{u_n}$ donc $v_{n+2} \geqslant \sqrt{u_n} = \sqrt{v_n}$.
- Si $u_n \geqslant u_{n+1}$, alors $v_n = u_{n+1}$. De plus, $u_{n+2} \geqslant \sqrt{u_{n+1}} = \sqrt{v_n} \geqslant v_n$ puisque $v_n = u_{n+1} \in]0,1[$. On a également $u_{n+3} \geqslant \sqrt{v_n}$ puisque $u_{n+2} \geqslant v_n$ et $u_{n+1} = v_n$. On a alors $u_{n+2} \geqslant \sqrt{v_n}$ et $u_{n+3} \geqslant \sqrt{v_n}$ donc $v_{n+2} \geqslant \sqrt{v_n}$.

Dans les deux cas, $v_{n+2} \geqslant \sqrt{v_n}$.

4. On a $v_n \in]0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (v_n) est bornée et croissante ; elle converge. Notons l sa limite. On a bien entendu $l \in [0,1]$. De plus, $v_{n+2} \geqslant \sqrt{v_n}$ donc par passage à la limite (la fonction racine carrée est continue), $l \geqslant \sqrt{l}$ et donc $l \geqslant 1$. Ainsi $l = 1$.
De plus $v_n \leqslant u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc, d'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers 1.

Solution 11.

L'équation caractéristique associée à cette suite récurrente est $X^2 - (3-2i)X + 5 - 5i = 0$. Son discriminant est $\Delta = -15+8i$. Soit $\delta = x+iy$ une raciné carrée de Δ. On a donc $\begin{cases} x^2+y^2 = 17 \\ x^2-y^2 = -15 \\ 2xy = 8 \end{cases}$. On en déduit $\delta = \pm(1+4i)$. Les racines de l'équation caractéristique sont donc $\frac{3-2i+1+4i}{2} = 2+i$ et $\frac{3-2i-1-4i}{2} = 1-3i$. On en déduit que le terme général u_n est de la forme $\lambda(2+i)^n + \mu(1-3i)^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Les conditions $u_0 = 1$ et $u_1 = 1+4i$ donnent $\begin{cases} \lambda+\mu = 0 \\ \lambda(2+i)+\mu(1-3i) = 1+4i \end{cases}$.
On trouve $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. Ainsi $u_n = (2+i)^n - (1-3i)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 12.

Tout d'abord, une récurrence simple montre que (u_n) est bien définie et positive.
Supposons que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$. Alors pour tout $n \geqslant 2$, $1 + u_n u_{n-1} \geqslant u_n$ et donc $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 1 à partir du rang 2 : elle converge vers une certaine limite l vérifiant $l = \frac{l^2}{1+l^2}$, ce qui équivaut à $l(1-l+l^2) = 0$. Or $1 - l + l^2 \neq 0$ (considérer le discriminant du trinôme) donc $l = 0$, ce qui est absurde puisque (u_n) est minorée par 1.
On en déduit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0} < 1$. De plus, $u_{n+1} \leqslant u_n^2 \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant n_0$. La suite (u_n) est décroissante à partir du rang n_0 et minorée par 0. On en déduit qu'elle converge mais ce qui précède montre que (u_n) ne peut converger que vers 0.

Solution 13.

1. Puisque $\forall n \geqslant 0$, on a $a_{5n} = 0$ et $a_{5n+1} = -1/5$, la suite (a_n) n' a pas de limite lorsque n tend $+\infty$.

2. Puisque $\forall n \geqslant 2$, on a

$$b_n - b_{n-1} = \cos\left(\frac{n\pi}{5}\right),$$

cette suite est donc périodique non constante et ne converge donc pas vers 0 ; la suite $(b_n)_{n\geqslant1}$ n'est donc pas convegeante.

3. Puisque $\forall n \geqslant 0$, on a
$$\frac{n^2-3n+1}{n+2} = n-5\frac{11}{n+2},$$
on a
$$c_n = (-1)^{n+1}\cos\left(\frac{11\pi}{n+2}\right),$$
et donc, par continuité de la fonction cosinus,
$$\lim_{n+\infty} c_{2n} = -1$$
et
$$\lim_{n+\infty} c_{2n+1} = 1.$$
La suite (a_n) n' a donc pas de limite lorsque n tend $+\infty$.

Solution 14.

1. Pour tout $n \geqslant 1$,
$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0,$$
la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ est donc croissante. On en déduit, d'après le théorème des suites monotones , qu'elle est soit majorée et convergente, soit non majorée et tend vers $+\infty$ avec n.

2. Pour tout $n \geqslant 1$,
$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k},$$
or $\forall n+1 \leqslant k \leqslant 2n$,
$$\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n},$$
d'où
$$H_{2n} - H_n \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$
On montre que H_n tend vers $+\infty$ par l'absurde : supposons le contraire , d'après le résultat de la question **1.**, $(H_n)_{n\geqslant 1}$ est donc convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$. La suite extraite $(H_{2n})_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers ℓ, d'où par passage à la limite dans l'inégalité obtenue à la question **2.** :
$$0 \geqslant \frac{1}{2},$$
ce qui est absurde. Ainsi,
$$\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty.$$

Solution 15.

1. On a bien-sûr que la suite (α_n) est nulle donc elle converge vers 0.

2. *Etude de* $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$n^2+3n-(n+1)^2 = n-1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad (n+2)^2 - n^2 - 3n = n+4 > 0$$
ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)^2 \leqslant n^2+3n < (n+2)^2.$$

b. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n+1 \leqslant \sqrt{n^2+3n} < n+2,$$

et donc $\lfloor\sqrt{n^2+3n}\rfloor = n+1$ puis $\beta_n = \sqrt{n^2+3n} - (n+1)$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\beta_n = \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{(n+1)^2} = \frac{n^2+3n-(n+1)^2}{\sqrt{n^2+3n}+n+1} = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+3n}+n+1}$$

Ainsi,

$$\beta_n = \frac{n-1}{n(\sqrt{1+3/n}+1+1/n)} \sim \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

et la suite (β_n) est convergente de limite $1/2$.

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas car admet deux sous-suites (α_n) et (β_n) convergente mais de limites différentes.

Solution 16.

1. En utilisant les formules d'addition on a pour tout n :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \sin(n\alpha+\alpha) &= \sin(\alpha)\cos(n\alpha)+\cos(\alpha)\sin(n\alpha) &= \sin(\alpha)v_n+\cos(\alpha)u_n \\ v_{n+1} &= \cos(n\alpha+\alpha) &= \cos(\alpha)\cos(n\alpha)-\sin(\alpha)\sin(n\alpha) &= \cos(\alpha)v_n-\sin(\alpha)u_n\,. \end{cases}$$

Puisque $\sin(\alpha) \neq 0$ grâce à l'hypothèse sur α, on en déduit les relations

$$v_n = \frac{1}{\sin(\alpha)}\big(u_{n+1}-\cos(\alpha)u_n\big)\,. \tag{1}$$

et

$$u_n = \frac{1}{\sin(\alpha)}\big(\cos(\alpha)v_n - v_{n+1}\big)\,. \tag{2}$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, la relation (1) entraîne que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell\big(1-\cos(\alpha)\big)}{\sin(\alpha)}$. De même, si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ', la relation (2) entraîne que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell'\big(\cos(\alpha)-1\big)}{\sin(\alpha)}$.

2. Si les deux suites sont convergentes de limites respectives ℓ et ℓ', on a alors d'après la question précédente le système suivant :

$$\begin{cases} \ell' &= \frac{\ell\left(1-\cos(\alpha)\right)}{\sin(\alpha)} \\ \ell &= \frac{\ell'\left(\cos(\alpha)-1\right)}{\sin(\alpha)} \end{cases}$$

Il en découle que $\ell = -\frac{\left(1-\cos\alpha\right)^2}{\sin^2\alpha}\ell$, ce qui implique $\ell = 0$, car $\frac{\left(1-\cos\alpha\right)^2}{\sin^2\alpha} \geqslant 0 > -1$). Comme $\ell = 0$, on a donc aussi $\ell' = 0$.
Par ailleurs, puisque pour tout $n \geq 0$, on a la relation $u_n^2 + v_n^2 = \sin^2(n\alpha)+\cos^2(n\alpha) = 1$, en passant à la limite on obtient $\ell^2 + \ell'^2 = 1$, ce qui est impossible si $\ell = \ell' = 0$.
L'hypothèse de départ que les suites convergent **toutes les deux** était donc fausse. **De plus**, on a vu à la question précédente, que si l'une des deux converge, alors l'autre converge aussi : on en conclut qu'aucune des deux suites ne peut converger.

Solution 17.

1. Nous avons

$$\sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{u_n + \sqrt{u_{n+1}}}.$$

En ajoutant u_{n-1} à chaque membre et en prenant la racine carrée, on en déduit que

$$\sqrt{u_{n-1}+\sqrt{u_n}} \leqslant \sqrt{u_{n-1}+\sqrt{u_n+\sqrt{u_{n+1}}}}.$$

En procédant ainsi, on obtient $v_n \leqslant v_{n+1}$; la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est donc croissante.

2. Si a est la valeur de la suite constante $(u_n)_{n\geqslant 1}$, notons $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sa suite associée, c'est-à-dire celle qui vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$. Montrons par récurrence sur n, que si $\ell = \sqrt{a+\ell}$, alors il majore $(a_n)_{n\geqslant 1}$. Nous avons $a_1 = \sqrt{a} \leqslant l$; supposons que $a_n \leqslant \ell$; en ajoutant a à chaque membre et en prenant la racine, on obtient

$$a_{n+1} = \sqrt{a + a_n} \leqslant \sqrt{a+\ell} = \ell.$$

La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée et croissante, donc convergente.

3. Si a est un majorant de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant a_n$; comme $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est donc convergente, car croissante et majorée.

Solution 18.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $E_n = \{u_p, p \geqslant n\}$. $E_{n+1} \subset E_n$ donc $\sup E_{n+1} \leqslant \sup E_n$ et $\inf E_{n+1} \geqslant \inf E_n$ i.e. $v_{n+1} \leqslant v_n$ et $w_{n+1} \geqslant w_n$. Ainsi (v_n) est décroissante et (w_n) est croissante.

2. On a $E_n \subset E_0$ donc $\sup E_n \geqslant \inf E_0$ et $\inf E_n \leqslant \sup E_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci signifie que (v_n) est minorée et que (w_n) est majorée. Ainsi (v_n) et (w_n) convergent.

3. Comme $u_n \in E_n$, on a $w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - w_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$. (u_n) converge d'après le théorème des gendarmes.
Si (u_n) converge, notons l sa limite. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (u_n) converge vers l, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $E_N \subset [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$. Donc $0 \leqslant v_N - w_N \leqslant 2\varepsilon$. Comme $(v_n - w_n)$ est décroissante, on a $0 \leqslant v_n - w_n \leqslant 2\varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Ceci prouve que $(v_n - w_n)$ tend vers 0.

Solution 19.

1. Appliquons le lemme de Césaro à la suite de terme général

$$v_n = u_{n+1} - u_n.$$

La suite de terme général

$$S_{n-1} = \frac{v_0 + \ldots + v_n}{n} = \frac{u_n - u_0}{n}$$

tend vers ℓ et puisque u_0/n tend vers 0,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \ell.$$

2. Puisque $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est à termes positifs, ℓ appartient à $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

- Cas où $\ell > 0$. Alors u_n est strictement positif à partir d'un certain rang et par continuité du logarithme,

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\right] = \ln(\ell),$$

et donc , d'après le résultat de la question **1.**,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{n} = \ln(\ell),$$

et par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell.$$

- Cas où $\ell = +\infty$. Alors u_n est strictement positif à partir d'un certain rang et

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\right] = +\infty,$$

et donc , d'après le résultat de la question **1.**,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{n} = +\infty,$$

et par composition des limites,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty.$$

On remarque que $\forall n \geqslant 1$,

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{4n+2}{n+1},$$

ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = 4,$$

et d'après le résultat de la question **2.**,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 4.$$

On remarque que $\forall n \geqslant 1$,

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}.$$

Or,

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

et d'après le résultat de la question **2.**,

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{e}.$$

Solution 20.

1. Puisque

$$k\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \sim -1,$$

on a par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{k\to+\infty} \left(1-\frac{1}{k}\right)^k = \frac{1}{e},$$

et d'après le lemme de Césaro,

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{e}.$$

2. Puisque

$$\ln(\beta_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k} \frac{\ln(k)}{k},$$

et que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln(k)}{k} = 0,$$

on a d'après le lemme de Césaro,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(\beta_n) = 0,$$

et par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n\to+\infty} \beta_n = 1.$$

Solution 21.

On montre par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n. On en déduit que (u_n) est strictement croissante puisque

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0.$$

Si (u_n) était majorée, elle convergerait vers une limite l qui vérifierait $l = l + \frac{1}{l}$, ce qui est impossible. Ainsi (u_n) est croissante et non majorée : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + \frac{1}{u_n^2}$$

Donc la suite (v_n) de terme général $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$ converge vers 2. Le lemme de Césaro nous permet de dire que

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} v_k}{n} = \frac{u_n^2 - u_0^2}{n}$$

tend aussi vers 2. Ainsi $u_n^2 \sim 2n$. Comme (u_n) est une suite positive, on en déduit $u_n \sim \sqrt{2n}$.

Solution 22.

1. Tout d'abord, une récurrence évidente montre que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. Puisque $v_0 - u_0 > 0$, on en déduit par une récurrence évidente que $v_n - u_n > 0$ i.e. $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit également que la suite de terme général $v_n - u_n$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}(\sqrt{u_n v_n} - u_n) = \frac{\sqrt{u_n}}{2}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \geqslant 0 \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2}(\sqrt{u_n v_n} - v_n) = \frac{\sqrt{v_n}}{2}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}) \leqslant 0 \end{aligned}$$

Ainsi (u_n) est croissante tandis que (v_n) est décroissante.
Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes : elles convergent donc vers une limite commune l.

2. On rappelle l'inégalité classique $\ln(1+u) \leqslant u$ pour tout $u \in]-1, +\infty[$.
Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \ln y - \ln x &= \ln \frac{y}{x} = \ln\left(1 + \frac{y-x}{x}\right) \leqslant \frac{y-x}{x} \\ \ln x - \ln y &= \ln \frac{x}{y} = \ln\left(1 + \frac{x-y}{y}\right) \leqslant \frac{x-y}{y} \end{aligned}$$

On en déduit alors facilement l'inégalité voulue en tenant compte du fait que $y - x > 0$ et $x - y < 0$.

3. On a vu à la question **1** que $0 < u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui justifie que (c_n) est bien définie.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{v_{n+1} - u_{n+1}}{\ln v_{n+1} - \ln u_{n+1}} \\ &= \frac{v_n - u_n}{\ln(v_n + \sqrt{u_n v_n}) - \ln(u_n + \sqrt{u_n v_n})} \\ &= \frac{v_n - u_n}{\ln(\sqrt{v_n}(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})) - \ln(\sqrt{u v_n}(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}))} \\ &= \frac{v_n - u_n}{\ln v_n - \ln u_n} = c_n \end{aligned}$$

Ainsi la suite (c_n) est bien constante.

4. D'après la question **2** et le fait que $0 < u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{v_n} \leqslant \frac{\ln v_n - \ln u_n}{v_n - u_n} \leqslant \frac{1}{u_n}$ i.e. $u_n \leqslant c_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le théorème des gendarmes assure que (c_n) converge vers l. Mais comme (c_n) est constante,

$$l = c_0 = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$$

Solution 23.

1. Posons pour tout $n \geqslant 0$,
$$\beta_n = u_n - v_n.$$
On a alors $\forall n \geqslant 0$,
$$\beta_{n+1} = (p-q)\beta_n,$$
ainsi $\forall n \geqslant 0$,
$$\beta_n = (p-q)^n(u_0 - v_0).$$
Puisque $p + q = 1$ et $0 < q < p$, on a
$$0 < p - q < 1$$
et donc
$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0.$$
De plus, $\forall n \geqslant 0$,
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -(v_{n+1} - v_n) \\ &= -q\beta_n \end{aligned}$$
Lorsque $u_0 = v_0$, les deux suites sont constantes. Dans le cas contraire, les calculs précédents prouvent que les deux suites sont monotones de sens de variation contraires :elles sont donc adjacentes.
2. On remarque que la suite de terme général
$$\alpha_n = u_n + v_n$$
est constante. Si on note ℓ la limite commune des deux suites, on a donc par passage à la limite
$$2\ell = u_0 + v_0$$
d'où
$$\ell = \frac{u_0 + v_0}{2}.$$

Solution 24.

Puisque $u_0 \leqslant v_0$ et $\forall n \geqslant 0$,
$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)^2}{2} \geqslant 0,$$
$v_n \geqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 0$. De plus
$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0,$$
et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante minorée par u_0 donc converge vers ℓ_1. De même,
$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}\left[\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right] \geqslant 0,$$
et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante majorée par v_0 donc converge vers ℓ_2. Et puisque $\forall n \geqslant 0$,
$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2},$$
par passage à la limite,
$$\ell_2 = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2},$$
et donc $\ell_1 = \ell_2$: les deux suites sont adjacentes.

Solution 25.

1. Soient a et b strictement positifs , on remarque que

$$\frac{2}{a+b} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

si et seulement si

$$\frac{2}{a+b} \leqslant \frac{a+b}{2ab}$$

ie

$$4ab \leqslant (a+b)^2$$

soit encore

$$0 \leqslant (a-b)^2.$$

La dernière inégalité étant acquise , le résultat est démontré.

2. Par une récurrence immédiate , on a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_n > 0 \quad \text{et} \quad b_n > 0.$$

Les deux suites sont donc bien définies. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{n+1} \leqslant a_n$$

si et seulement si

$$b_n \leqslant b_{n+1}$$

si et seulement si

$$b_n \leqslant a_n.$$

Il suffit donc de démontrer les inégalités

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n \leqslant a_n.$$

- Montrons le cas $n = 0$: c'est l'hypothèse $b_0 \leqslant a_0$ de l'énoncé.
- Montrons les cas $n \geqslant 1$; on a alors $n-1 \geqslant 0$, d'où , en appliquant le résultat de la question **a.** pour $a = a_{n-1}$ et $b = b_{n-1}$,

  $$\frac{2}{a_{n-1}+b_{n-1}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{b_{n-1}}\right)$$

  soit encore

  $$\frac{1}{a_n} \leqslant \frac{1}{b_n},$$

  c'est-à-dire

  $$b_n \leqslant a_n$$

  puisque $a_n > 0$.

3. Démontrons l'inégalité par récurrence sur n. Notons , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}_n$ la proposition :

$$0 \leqslant a_n - b_n \leqslant \frac{a_0 - b_0}{2^n}.$$

- $\mathcal{I}_0$ est vérifiée puisque $0 \leqslant a_0 - b_0 \leqslant a_0 - b_0$.
- Montrons que la propriété $\mathcal{I}_n$ est héréditaire. Supposons $\mathcal{I}_n$ vérifiée. On a alors

  $$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{a_n+b_n}{2} - \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} \\ &= \frac{(a_n-b_n)^2}{2(a_n+b_n)} \\ &= \frac{a_n-b_n}{2} \times \frac{a_n-b_n}{a_n+b_n} \end{aligned}$$

  Or , on a démontré à la question **c.** que

  $$a_n - b_n \geqslant 0,$$

d'où

$$0 \leqslant \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} \leqslant \frac{a_n}{a_n + b_n} \leqslant 1$$

puisque $a_n > 0$ et $b_n > 0$ ainsi

$$0 \leqslant a_{n+1} - b_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

$\mathcal{I}_{n+1}$ est donc vérifiée.

▶ D'après le principe de récurrence , l'inégalité $\mathcal{I}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. D'après le résultat de la question **b.** , $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante , de plus , on déduit de l'inégalité établie à la question **c.** et du théorème d'encadrement que

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0.$$

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = a_nb_n.$$

la suite $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante. Soit ℓ la limite commune de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_nb_n = a_0b_0,$$

$\ell^2 = a_0b_0$, , et par passage à la limite dans l'inégalité

$$a_n \geqslant 0,$$

on a $\ell \geqslant 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \sqrt{a_0b_0}.$$

Solution 26.

1. Etudions les variations de P_n sur $[0,1]$. La fonction polynôme P_n est continue sur $[0,1]$ or $P_n(0) = 1$ et $P_n(1) = 2 - n \leqslant 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet donc de conclure qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $P_n(c) = 0$. P_n est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1[$,

$$P_n'(x) = n(x^{n-1} - 1) < 0.$$

La fonction polynôme P_n est donc strictement décroissante sur $[0,1]$, il existe donc une unique racine u_n de P_n sur $[0,1]$.

2. Pour tout $n \geqslant 2$, $P_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n - nu_{n+1} + 1$. Or $P_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ i.e. $u_{n+1}^{n+1} - (n+1)u_{n+1} + 1 = 0$ et donc $nu_{n+1} = u_{n+1}^{n+1} - u_{n+1} + 1$. On en déduit que

$$P_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n - u_{n+1}^{n+1} + u_{n+1} = u_{n+1}^n(1 - u_{n+1}) + u_{n+1}$$

Puisque $u_{n+1} \in [0,1]$, $P_n(u_{n+1}) \geqslant 0$. Or P_n est strictement décroissante sur $[0,1]$ et $P_n(u_n) = 0$ donc $u_{n+1} \leqslant u_n$.

3. Pour tout $n \geqslant 2$,

$$nu_n - 1 = u_n^n \leqslant 1,$$

d'où

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n}$$

ainsi , d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

4. On reprend l'encadrement de la question précédente,

$$0 \leqslant nu_n - 1 \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^n,$$

on a donc d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} (nu_n - 1) = 0$$

et ainsi

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$

Solution 27.

On a $g_n(0) = -1$ et $g_n(1) = 1$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires g_n s'annule sur $[0, -1]$. La fonction g_n étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme de fonctions strictement croissantes sur cet intervalle , elle ne prend qu'une seule fois la valeur 0, d'où l'existence et l'unicité de a_n. Remarquons que

$$\begin{aligned} g_{n+1}(a_n) &= a_n^{n+1} + a_n - 1 \\ &= a_n^{n+1} - a_n^n \\ &= a_n^n(a_n - 1) < 0 \end{aligned}$$

Ainsi $a_n \leqslant a_{n+1}$ d'après les variations de g_{n+1}. La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ étant positive, croissante et majorée par 1, elle converge vers une limite $0 \leqslant \ell \leqslant 1$. Prouvons que $\ell = 1$ par l'absurde en supposant $\ell < 1$. Dans ce cas, $\forall n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant a_n \leqslant \ell^n,$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^n = 0,$$

et donc, puisque $1 - a_n = a_n^n$,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 \neq \ell,$$

ce qui absurde. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1.$$

Solution 28.

1. Posons pour tout $x > 0$,

$$f(x) = x - n\ln(x).$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sur cet intervalle,

$$f'(x) = \frac{x - n}{x}.$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0, n]$ et strictement croissante sur $[n, +\infty[$. On a de plus

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

et d'après les croissances comparées,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Puisque $n \geqslant 3 \geqslant e$, on a

$$f(n) = n - n\ln(n) < 0.$$

L'équation $f(x) = 0$ admet donc exactement deux solutions $u_n < n < v_n$.

2. Puisque $v_n > n$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$

Puisque $f(2) = 2 - n\ln(2) < 0$, on a

$$0 < u_n < 2,$$

d'où

$$0 < \ln(u_n) = \frac{u_n}{n} < \frac{2}{n}$$

et d'après le théorème d' encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0,$$

et par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Solution 29.

1. Notons f_n l'application suivante :

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 \end{array}$$

L'application f_n est clairement continue et même dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n'(x) = nx^{n-1} + \cdots + 1 > 0.$$

f_n est donc strictement croissante. De plus, $f_n(0) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. L'application f_n induit donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[-1;+\infty[$. L'équation $f_n(x) = 0$ admet donc une unique solution strictement positive a_n.

2. On constate que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(a_{n+1}) = -a_{n+1}^{n+1} < 0 = f_n(a_n).$$

La stricte croissance de f_n permet donc que conclure que $a_{n+1} < a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge. Remarquons que

$$a_n^{n+1} - 1 = (a_n - 1)(a_n^n + a_n^{n-1} + \cdots + a_n + 1) = 2(a_n - 1)$$

Comme (a_n) est strictement décroissante et positive,

$$0 \leqslant a_n < a_2 < a_1 = 1 \text{ pour } n \geqslant 3.$$

On en déduit donc que $0 \leqslant a_n^{n+1} \leqslant a_2^{n+1}$ pour $n \geqslant 3$. De plus, $\lim_{n\to+\infty} a_2^{n+1} = 0$ car $0 \leqslant a_2 < 1$. Donc $\lim_{n\to+\infty} a_n^{n+1} = 0$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} 2(a_n - 1) = \lim_{n\to+\infty} a_n^{n+1} - 1 = -1$$

Pra conséquent, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Solution 30.

1. Il suffit d'étudier la fonction $x \mapsto \tan x - x$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

2. On a $-\frac{\pi}{2} + n\pi \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{2} + n\pi$. On en déduit

$$1 - \frac{2}{n} \leqslant \frac{u_n}{n\pi} \leqslant 1 + \frac{2}{n}$$

Le théorème des gendarmes nous dit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n\pi} = 1$ i.e. $u_n \sim n\pi$.

3. Par π-périodicité de tan, on a $\tan v_n = u_n$. Remarquons que $-\frac{\pi}{2} < v_n < \frac{\pi}{2}$. On a donc

$$v_n = \arctan(\tan v_n) = \arctan(u_n)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{\pi}{2}$.

4. Posons $w_n = v_n - \frac{\pi}{2}$. On a donc $u_n = w_n + \frac{\pi}{2} + n\pi$. Et donc $-\frac{1}{\tan v_n} = u_n$. D'après la question précédente, $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\tan w_n \sim w_n$. De plus, $u_n \sim n\pi$. Donc $w_n \sim -\frac{1}{n\pi}$. Un développement asymptotiques à 3 termes de (u_n) est donc :

$$u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Solution 31.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $f_n : x \mapsto \cos x - nx$. f_n est dérivable et $f_n'(x) = -\sin x - n < 0$ pour tout $x \in [0,1]$. f_n est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$. De plus, $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = \cos(1) - n < 0$. On en déduit que f_n s'annule une unique fois sur $[0,1]$. D'où l'existence et l'unicité de x_n.

2. On a $\cos x_n = nx_n$ et donc $x_n = \frac{\cos x_n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $|x_n| \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis que (x_n) converge vers 0.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $f_n \geqslant f_{n+1}$ sur $[0,1]$. Donc $f_n(x_{n+1}) \geqslant f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n)$. La stricte décroissance de f_n implique que $x_{n+1} \leqslant x_n$. Par conséquent la suite (x_n) est décroissante.

4. Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que cos est continue en 0, $\cos x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos 0 = 1$. Donc $x_n = \frac{\cos x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

5. Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\cos x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2)$. Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $\cos x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi $x_n = \frac{\cos x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. On en déduit que $x_n - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^3}$.

Solution 32.

1. Soit $n \geqslant 2$. On étudie la fonction f_n définie par $f_n(x) = x - \ln x - n$ pour $x > 0$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f_n'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. f_n est donc strictement croissante sur $]0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. De plus, $\lim\limits_{n\to0^+} f_n(x) = +\infty$, $f_n(1) = 1 - n < 0$ car $n \geqslant 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ par croissances comparées. Comme f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de la bijection appliqué à f_n sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ assure qu'il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$ sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty$. Comme 1 n'est évidemment pas solution, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

2.

a. Comme x_n est la plus petite des deux solutions, $x_n \in]0,1[$ pour tout $n \geqslant 2$. Or $\ln x_n = x_n - n$ pour tout $n \geqslant 2$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln x_n = -\infty$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

b. Puisque pour $n \geqslant 2$, $\ln x_n = -n + x_n$, $x_n = e^{-n}e^{x_n}$. Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $e^{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ceci prouve que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$.

c. Remarquons dèjà que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{-n})$. On a pour tout $n \geqslant 2$, $x_n = \ln(e^{-n} + u_n) + n = \ln(1 + e^n u_n)$. Or $e^n u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ donc $\ln(1 + e^n u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n u_n$. Ainsi $e^n u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$. D'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-2n}$.

d. Posons $s_n = u_n - e^{-2n}$ pour $n \geqslant 2$ de sorte que $s_n \underset{n\to+\infty}{=} e^{-2n}$. On rappelle que

$$x_n = \ln(1 + e^n u_n) = \ln(1 + e^{-n} + e^n s_n)$$

D'une part,

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} e^{-n} + e^{-2n} + o(e^{-2n})$$

et d'autre part, en posant $\alpha_n = e^{-n} + e^n s_n$,

$$\ln(1 + \alpha_n) \underset{n\to+\infty}{=} \alpha_n - \frac{\alpha_n^2}{2} + o\left(\alpha_n^2\right)$$

Or $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$ donc

$$\ln(1+\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{=} e^{-n} + e^n s_n - \frac{e^{-2n}}{2} + o(e^{-2n})$$

On en déduit que $e^n s_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{3}{2}e^{-2n} + o(e^{-2n})$ ou encore $s_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2}e^{-3n}$.

3. **a.** Pour tout $n \geqslant 2$, $y_n \geqslant 1$ donc $y_n = \ln y_n + n \geqslant n$. En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

b. Comme $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\ln y_n \underset{n\to+\infty}{=} o(y_n)$. Donc $n = y_n - \ln y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$.

c. Remarquons tout d'abord que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$. On a pour tout $n \geqslant 2$,

$$v_n = y_n - n = \ln y_n = \ln(n+v_n) = \ln n + \ln\left(1+\frac{v_n}{n}\right)$$

Comme $\frac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, $\ln\left(1+\frac{v_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{n}$. A fortiori, $\ln\left(1+\frac{v_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. Ceci prouve que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

d. Posons $t_n = v_n - \ln n$ pour $n \geqslant 2$. On rappelle que pour $n \geqslant 2$, $v_n = \ln n + \ln\left(1+\frac{v_n}{n}\right)$. Ainsi

$$t_n = \ln\left(1+\frac{v_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$$

Solution 33.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\forall t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k},$$

on obtient après intégration sur $[k, k+1]$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{1+k}.$$

2. Etudions le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0_1}$. $\forall n \geqslant 0_1$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

En appliquant le résultat de la question **1.** à $k = n$, on obtient

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

ainsi $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle croisssante.

Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{k} \frac{1}{k}$$

et

$$u_n = S_n - \ln(n).$$

En additionnant les $n-1$ inégalités de la question **1.** correspondant aux valeurs entières k comprises entre 1 et $n-1$, on obtient :

$$S_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant S_n - \frac{1}{n},$$

et donc

$$\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1.$$

la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante majorée par 1 , elle est donc convergente.

Solution 34.

Puisque la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout entier naturel k non nul, on a

$$\forall k \leqslant t \leqslant k+1 \quad , \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k},$$

ce qui entraîne par positivité de l'intégrale,

$$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leqslant \frac{dt}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}.$$

Soit $n \geqslant 1$. En additionnant les inégalités précédentes pour k variant de n à $2n$, on obtient en appliquant la relation de Chasles pour les intégrales,

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_n^{2n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k},$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} \leqslant \ln(2n+1) - \ln(n) \leqslant u_n,$$

ie

$$u_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} \leqslant \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) \leqslant u_n,$$

et finalement,

$$\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}.$$

La fonction ln étant continue en 2, le théorème d'encadrement permet de conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ln(2).$$

Solution 35.

Les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes donc bornées. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \text{ ET } |b_n - b| < \varepsilon$$

Soit maintenant $n \geqslant 2N$. On va couper la somme suivante en 3 parties :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k b_{n-k} + \sum_{k=N}^{n-N} a_k b_{n-k} + \sum_{k=n-N+1}^{n} a_k b_{n-k}$$

(ceci est valide car on a bien $N \leqslant n - N$). Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} - ab &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N-1} (a_k b_{n-k} - ab) \\ &+ \frac{1}{n+1} \sum_{k=N}^{n-N} (a_k b_{n-k} - ab) \\ &+ \frac{1}{n+1} \sum_{k=n-N+1}^{n} (a_k b_{n-k} - ab)\end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, on a donc :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} - ab\right| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N-1} |a_k b_{n-k} - ab| \\ + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N}^{n-N} |a_k b_{n-k} - ab| \\ + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n-N+1}^{n} |a_k b_{n-k} - ab|\end{aligned}$$

Pour $0 \leqslant k \leqslant N-1$, on a par une majoration brutale :

$$|a_k b_{n-k} - ab| \leqslant |a_k b_{n-k}| + |ab| \leqslant 2M^2$$

De même, pour $n-N+1 \leqslant k \leqslant N$, on a

$$|a_k b_{n-k} - ab| \leqslant 2M^2$$

Enfin, pour $N \leqslant k \leqslant n-N$, on a à la fois $k \geqslant N$ et $n-k \geqslant N$. Donc $|a_k - a| < \varepsilon$ et $|b_{n-k} - b| < \varepsilon$. De manière classique :

$$\begin{aligned}|a_k b_{n-k} - ab| &= |a_k b_{n-k} - a_k b + a_k b - ab| \\ &\leqslant |a_k||b_{n-k} - b| + |b||a - a_k| \leqslant 2M\varepsilon\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} - ab\right| &\leqslant \frac{4NM^2}{n+1} + \frac{2M(n-2N)\varepsilon}{n+1} \\ &\leqslant \frac{4NM^2}{n+1} + 2M\varepsilon\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4NM^2}{n+1} = 0$ donc il existe N' tel que

$$n \geqslant N' \Rightarrow \frac{4NM^2}{n+1} < \varepsilon$$

Pour $n \geqslant \max(N, N')$, on a donc :

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} - ab\right| \leqslant (1+2M)\varepsilon$$

Quitte à changer ε en $\frac{\varepsilon}{1+2M}$, on a le résultat voulu.

Solution 36.

1. On sait (ou on redémontre) que pour $m, k \in \mathbb{N}^*$, $k\binom{m}{k} = m\binom{m-1}{k-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il suffit alors de prendre $m = n+p+1$ et $k = n+1$.
2. On utilise le principe de la sommation d'Abel :

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (k+1-k)u_k = \sum_{k=1}^{n} (k+1)u_k - \sum_{k=1}^{n} ku_k \\ &= (n+1)u_{n+1} - u_1 + \sum_{k=1}^{n} (k+1)u_k - \sum_{k=1}^{n} (k+1)u_{k+1} = (n+1)u_{n+1} - u_1 + \sum_{k=1}^{n} (k+1)(u_k - u_{k+1})\end{aligned}$$

Or d'après la question précédente, $(k+1)(u_{k+1} - u_k) = pu_{k+1}$, d'où :

$$S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 + p\sum_{k=1}^{n} u_{k+1} = (n+1)u_{n+1} - u_1 + p(S_n - u_1 + u_{n+1}) = (n+p+1)u_{n+1} - (p+1)u_1 + pS_n$$

Or $u_1 = \frac{1}{p+1}$ donc $S_n = \dfrac{1}{p-1}\left(1 - (n+p+1)u_{n+1}\right)$.

3. On majore brutalement :

$$0 \leqslant (n+p)u_n = \frac{n!p!}{(n+p-1)!} = \frac{p!}{\prod_{k=n+1}^{n+p-1} k} \leqslant \frac{p!}{\prod_{k=n+1}^{n+p-1} n} = \frac{p!}{n^{p-1}}$$

Comme $p \geqslant 2$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{p-1}} = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

4. On a $S_n = \frac{1}{p-1}(1-v_{n+1})$. On en déduit que (S_n) converge vers $\frac{1}{p-1}$.

Solution 37.

Montrons que la suite (u_n) est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et étudions $f : x \in [1,n] \mapsto (n+1)\ln\frac{x+1}{n+1} - n\ln\frac{x}{n}$. f est clairement dérivable sur $[1,n]$ et pour tout $x \in [1,n]$, $f'(x) = \frac{n+1}{x+1} - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x(x+1)} \leqslant 0$. Comme $f(n) = 0$, on en déduit que f est positive sur $[1,n]$. En particulier, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $n\ln\frac{k}{n} \leqslant (n+1)\ln\frac{k+1}{n+1}$, ce qui équivaut à $\left(\frac{k}{n}\right)^n \leqslant \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1}$. On en déduit que

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{k}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{n}\right)^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n = u_n$$

La suite (u_n) est donc bien croissante.
Montrons que la suite (u_n) est majorée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a classiquement $\ln x \leqslant x-1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a donc notamment $\ln\frac{k}{n} \leqslant \frac{k}{n} - 1$ puis $n\ln\frac{k}{n} \leqslant k-n$ et finalement $\left(\frac{k}{n}\right)^n \leqslant e^{k-n}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. En utilisant la formule de la série géométrique

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n \leqslant \sum_{k=1}^{n} e^{k-n} = e^{1-n}\frac{e^n-1}{e-1} = \frac{e-e^{1-n}}{e-1} \leqslant \frac{e}{e-1}$$

La suite (u_n) est donc bien majorée.
Elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

Solution 38.

1. Il suffit d'étudier $x \mapsto \ln(1+x) - x$ sur $]-1,+\infty[$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente

$$\ln\left(1+\frac{1}{p}\right) \leqslant \frac{1}{p}$$

ce qui équivaut à

$$\ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leqslant \frac{1}{p}$$

ou encore

$$\ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \frac{1}{p}$$

Toujours d'après la question précédente,

$$\ln\left(1-\frac{1}{p+1}\right) \leqslant -\frac{1}{p+1}$$

ce qui équivaut à

$$\ln\left(\frac{p}{p+1}\right) \leqslant -\frac{1}{p+1}$$

ou encore

$$\ln(p) - \ln(p+1) \leqslant -\frac{1}{p+1}$$

et finalement à

$$\ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \frac{1}{p+1}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \leqslant 0$$

d'après la question précédente. Ainsi (u_n) est-elle décroissante.

4. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k)$$

on obtient pour tout $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k)$$

autrement dit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 \leqslant \ln(n)$$

via un changement d'indice et un télescopage. Ceci équivaut encore à $u_n \leqslant 1$.
De même, puisque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

on obtient pour tout $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

autrement dit

$$\ln(n) \leqslant u_n - \frac{1}{n}$$

via un changement d'indice et un télescopage. Ceci équivaut encore à $u_n \geqslant \frac{1}{n}$. A fortiori, $u_n \geqslant 0$.
La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 0, elle converge vers un réel γ. Mais puisque $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 2$, $\gamma \in [0, 1]$.

> **Remarque.** La majoration par 1 pouvait également être obtenue en utilisant le fait que (u_n) est décroissante et que $u_1 = 1$.

Solution 39.

1. Soit $u \geqslant 0$. On a $\forall t \in [0, u]$,

$$1 - t \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1,$$

d'où, après intégration sur $[0, u]$,

$$\int_0^u (1-t)dt \leqslant \int_0^u \frac{dt}{1+t} \leqslant \int_0^u dt,$$

c'est-à-dire

$$u - \frac{u^2}{2} \leqslant \ln(1+u) \leqslant u.$$

2. On a

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Or, d'après le résultat de la question **1.**, $\forall k \leqslant n$,

$$\frac{k}{n^2} \leqslant \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{n^4},$$

et en additionnant ces n inégalités membre à membre,

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} \leqslant \ln(u_n) \leqslant \frac{n(n+1)}{n^2} + \frac{v_n}{n^4},$$

où

$$v_n = \sum_{k=1} n^2.$$

Or, par un encadrement grossier,

$$0 \leqslant v_n \leqslant n \times n^2 = n^3.$$

et puisque

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} \sim \frac{1}{2},$$

d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n+\infty} \ln(u_n) = \frac{1}{2}.$$

Par continuité de l'exponentielle en $1/2$,

$$\lim_{n+\infty} u_n = \sqrt{e}.$$

Solution 40.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 1$, on a $P_n(x) = 2^{n+1}$. Soit $x \neq 1$. Raisonnons par rćurrence sur n. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons $HR(n)$ l'hypothèse suivante

$$P_n(x) = \frac{x^{2^{n+1}} - 1}{x - 1}.$$

- HR(0) estvraie puisque $P_0(x) = x + 1 = \frac{x^2-1}{x-1}$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons $HR(n)$ vraie. On a

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= P_n(x) \times \left(x^{2^{n+1}} + 1\right) \\ &= \frac{x^{2^{n+1}} - 1}{x - 1} \times \left(x^{2^{n+1}} + 1\right) \\ &= \frac{x^{2 \times 2^{n+1}} - 1}{x - 1} = \frac{x^{2^{n+2}-1}}{x - 1} \end{aligned}$$

  d'où $HR(n+1)$.

2. Distinguons trois cas.

- Si $|x| > 1$ ou $x = 1$, la suite $(P_n(x))_{n \geqslant 0}$ diverge (vers $+\infty$ si $x \geqslant 1$ et vers $-\infty$ si $x < -1$).
- Si $x = -1$, la suite est constante égale à 0.
- Si $|x| < 1$, la suite $(P_n(x))_{n \geqslant 0}$ converge vers $\frac{1}{1-x}$.

Solution 41.

1. Le résultat découle immédiatement de l'inégalité suivante :

$$(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \geqslant 4x(x+1).$$

2. D'apr'es le résultat de la question **1.**, $\forall n \geqslant 0$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

et d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

Solution 42.

Puisque $\forall n \geqslant 0$,

$$1 \leqslant \binom{n}{k} \leqslant 2^n,$$

on a l'encadrement suivant :

$$1 \leqslant u_n \leqslant 2^{n(n+1)/n^3}.$$

Et puisque $x \mapsto 2^x$ est continue en 0,

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n(n+1)/n^3} = 1$$

ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Solution 43.

1. On multiplie au numérateur et au dénominateur par $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) = 2^n n!$ et on trouve $u_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}u_n \leqslant u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0 : elle converge.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = (n+2)u_{n+1}^2 = (n+2)\left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)^2 u_n^2 = \dfrac{n+2}{n+1}\left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)^2 v_n$. Or $(n+2)(2n+1)^2 - (n+1)(2n+2)^2 = -3n-2 < 0$ donc $v_{n+1} \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi (v_n) est décroissante minorée par 0 : elle converge. On a $u_n = \sqrt{\frac{v_n}{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que (u_n) converge vers 0.

Solution 44.

On prouve aisément par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$(1-z)\prod_{k=0}^{n}(1+z^{2^k}) = 1 - z^{2^{n+1}}$$

Puisque $|z| < 1$, $z \neq 1$ et donc

$$\prod_{k=0}^{n}(1+z^{2^k}) = \frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Enfin $\lim_{n\to+\infty} |z|^{2^{n+1}} = 0$ car $|z| < 1$ d'où le résultat demandé.

Solution 45.

Il s'agit de prouver que la suite de terme général

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{n!}$$

converge vers 0. Or,

$$\alpha_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!}.$$

Le plus grand terme de la somme correspondant à l'indice $n-2$ on a l'encadrement suivant,

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leqslant (n-1) \times \frac{(n-2)!}{n!},$$

ainsi,

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leqslant \frac{1}{n},$$

et par encadrement

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0.$$

Solution 46.

Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto \sqrt{x}.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Ainsi, $\forall k \geqslant 1, \quad \forall x \in [k, k+1]$,

$$f(k) \leqslant f(x) \leqslant f(k+1)$$

d'où, $\forall k \geqslant 1$,

$$f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k+1),$$

et en sommant de $k = 1$ à $k = n-1$, pour $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_1^n f(x)dx \leqslant \sum_{k=2}^{n+1} f(k,),$$

c'est-à-dire

$$S_n \leqslant \int_1^n f(x)dx \leqslant S_n + f(n+1) - 1.$$

Or, une primitive de f sur $[1, +\infty[$ est donnée par

$$x \longmapsto F(x) = \frac{2}{3} x^{3/2}$$

d'où $\forall n \geqslant 2$,

$$\frac{2}{3} n^{3/2} - \sqrt{n+1} + \frac{1}{3} \leqslant S_n \leqslant \frac{2}{3} n^{3/2} - \frac{2}{3},$$

Et par croissances comparées,

$$S_n \sim \frac{2}{3} n^{3/2}.$$

Solution 47.

1. Récurrence évidente.
2. Si $u_n \geqslant 1$, alors $u_n \leqslant u_n^2$. De plus, $n \geqslant 1$ donc $1 + u_n \leqslant n + u_n^2$. Par conséquent, $u_{n+1} \leqslant 1$.
   Si $u_n \leqslant 1$, alors $1 + u_n \leqslant 2$. On a aussi $n + u_n^2 \geqslant n$ de manière évidente. Donc $u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{n}$.
3. Si $u_2 \geqslant 1$, alors $u_3 \leqslant 1$.
   Si $u_2 \leqslant 1$, alors $u_3 \leqslant \frac{2}{2} = 1$.

   Montrons par récurrence que pour $n \geqslant 3$, $u_n \leqslant \dfrac{2}{n-1}$.

   Initialisation : On a vu que $u_3 \leqslant 1$ donc l'hypothèse de récurrence est vraie au rang 3.

   Hérédité : Supposons que $u_n \leqslant \dfrac{2}{n-1}$ pour un certain $n \geqslant 3$. On a donc $u_n \leqslant 1$ et donc $u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{n}$ et l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $n+1$. **Conclusion :** L'hypothèse de récurrence est vraie pour tout $n \geqslant 3$.

4. Par le théorème des gendarmes, on conclut que (u_n) converge vers 0.

5. Pour $n \geqslant 2$, on a : $u_n = \dfrac{1+u_{n-1}}{n+u_{n-1}^2}$. Or $u_{n-1} = o(1)$ d'après la question précédente. Donc $1+u_{n-1} \sim 1$ et $n+u_n^2 \sim n$. On en déduit que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

6. Après un calcul laborieux, on trouve :

$$v_{n+1} = \frac{2n^2+n^2v_n+n+nv_n-v_n^2-2v_n-1}{n^3+v_n^2+2v_n+1}$$

7. On a $v_n = o(1)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} 2n^2+n^2v_n+n+nv_n-v_n^2-2v_n-1 &\sim 2n^2 \\ n^3+v_n^2+2v_n+1 &\sim n^3 \end{aligned}$$

Ainsi $v_{n+1} \sim \frac{2}{n}$ et $v_n \sim \frac{2}{n-1} \sim \frac{2}{n}$.

8. Comme $v_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, on a :

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{v_n}{n} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Solution 48.

1. On utilise l'expression factorielle des coefficients binomiaux :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$$

2. Remarquons que les termes de (u_n) sont strictement positifs. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{4^{n+1}}\frac{4^n}{\sqrt{n}}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\frac{2(2n+1)}{n+1} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}$$

Or $(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 > 4n^2+4n = (2\sqrt{n(n+1)})$. On en déduit que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est donc (strictement) croissante.

3. On procède par récurrence comme indiqué dans l'énoncé. Notre hypothèse de récurrence est donc

$\mathsf{HR}(n) \ : \ u_n \leqslant \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$

Initialisation On a $u_0 = 0$ donc $\mathsf{HR}(0)$ est vraie.

Hérédité On suppose $\mathsf{HR}(n)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $u_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}$ donc en utilisant $\mathsf{HR}(n)$:

$$u_{n+1} \leqslant \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}\sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{n+1}}$$

Or on a les équivalence suivantes

$$\frac{\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{\frac{n+1}{2n+3}} \iff \sqrt{(2n+1)(2n+3)} \leqslant 2(n+1) \iff (2n+1)(2n+3) \leqslant 4(n+1)^2 \iff 4n^2+8n+3 \leqslant 4n^2+8n-$$

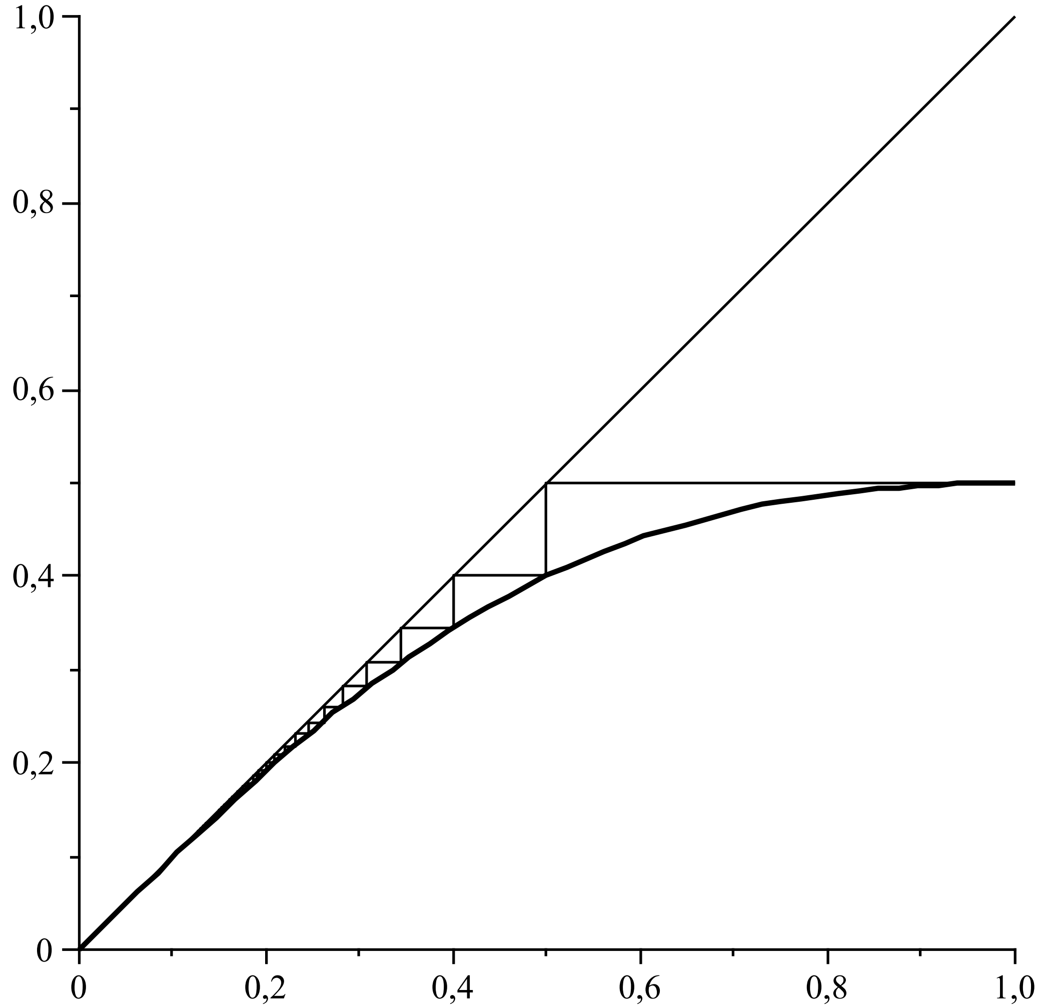
La dernière égalité est toujours vraie : on en déduit que $u_{n+1} \leqslant \sqrt{\dfrac{n+1}{2n+3}}$ i.e. $\mathsf{HR}(n+1)$ est vraie.

Conclusion Par récurrence, $\mathsf{HR}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. D'après la question précédente, $u_n \leqslant \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}} \leqslant \dfrac{1}{\mathsf{sqrt2}}$. La suite (u_n) est croissante et majorée, elle converge vers un réel $\mathsf{K} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. De plus, $u_1 = \frac{1}{2}$ et donc $u_n \geqslant \frac{1}{2}$ pour $n \geqslant 1$. Ainsi $\mathsf{K} \geqslant \frac{1}{2}$. On a donc $\dfrac{a_n\sqrt{n}}{4^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathsf{K}$ i.e. $\dbinom{2n}{n} \sim \mathsf{K}\dfrac{4^n}{\sqrt{n}}$.

Solution 49.

- *Commençons par une figure.*



On conjecture que la suite converge vers 0.

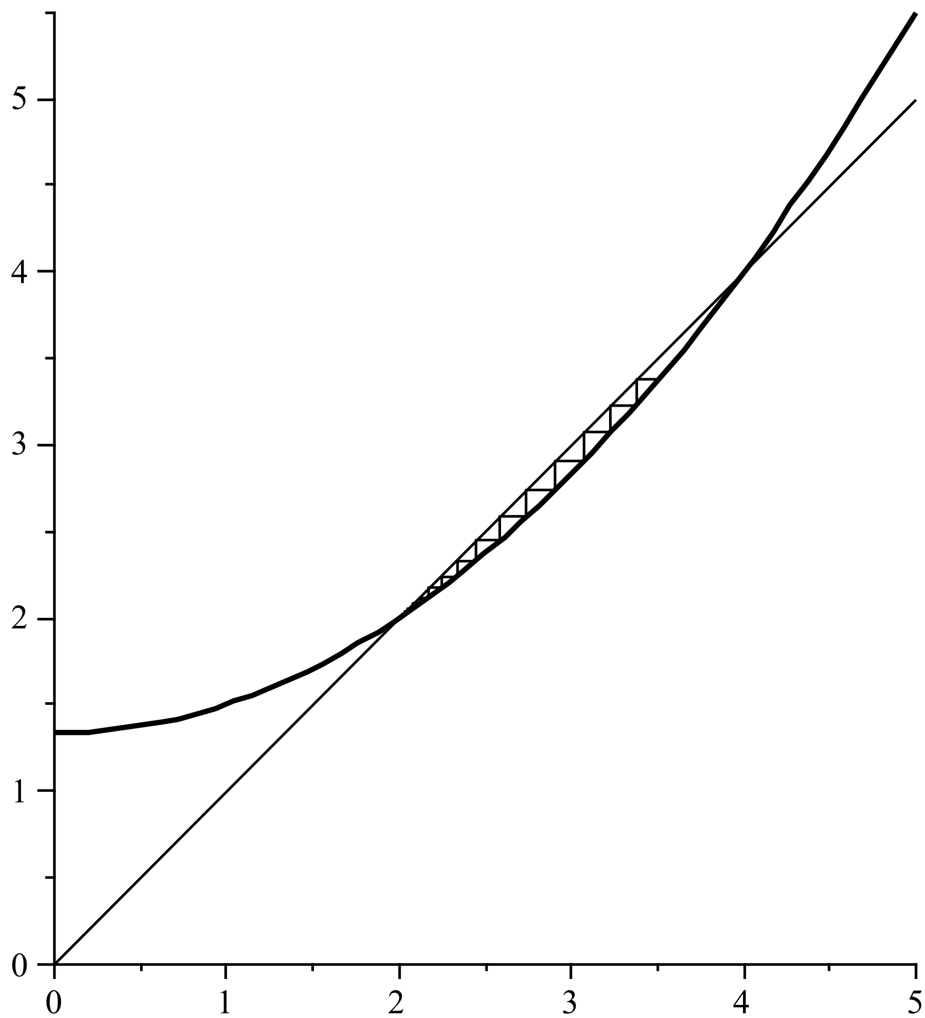
- *La suite est définie* : notons f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$x \longmapsto \frac{x}{1+x^2}.$$
Puisque f est définie sur $\mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie $\forall u_0 \in \mathbb{R}$.

- *Point(s) fixe(s) de* f : Un réel x est point fixe de f *si et seulement si*
$$\frac{x}{1+x^2} = x \iff x^3 = 0,$$
ie $x = 0$.

- *Etude de la convergence* : supposons $u_0 \geqslant 0$. Posons $I = [0, +\infty[$. Puisque I est stable par f , on prouve par une récurrence sans difficulté que
$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n \in I.$$
On a alors , pour tout $n \geqslant 0$,
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2+1} \leqslant u_n.$$
La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante minorée par 0 donc convergente. Puisque sa limite est un point fixe de f qui n'en admet qu'un , 0 , on a
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$
Puisque la fonction f est impaire , pour tout u_0 négatif , la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ croît vers 0.

Solution 50.

▶ *Commençons par une figure.*



On conjecture la convergence de la suite vers 2 pour tout condition initiale $0 \leqslant u_0 < 4$, vers 4 pour pour $u_0 = 4$ (plus précisemment : la suite est constante dans ce cas) et la divergence de la suite pour tout $u_0 > 4$.

▶ *Définition et points fixes* : otons f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto \frac{x^2+8}{6}.$$

Puisque f est définie sur $\mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie $\forall u_0 \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - x = \frac{x^2 - 6x + 8}{6} = \frac{(x-2)(x-4)}{6}.$$

Si $u_0 = 2$ ou 4, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante. Notons

$$I_1 = [0, 2[\ ,\quad I_2 =]2, 4[\ ,\quad I_3 =]4, +\infty].$$

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, les réels 2 et 4 sont des points fixes de f et $f(0) > 0$, donc les trois intervalles I_k sont stables par f.

▶ *Etude de la convergence* : puisque $\forall x \in I_1,\ f(x) \geqslant x$, pour tout $u_0 \in I_1$, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante majorée par 2 donc converge vers l'unique point fixe de f appartenant à $[0, 2]$ ie 2. puisque $\forall x \in I_2,\ f(x) \leqslant x$, pour tout $u_0 \in I_2$,

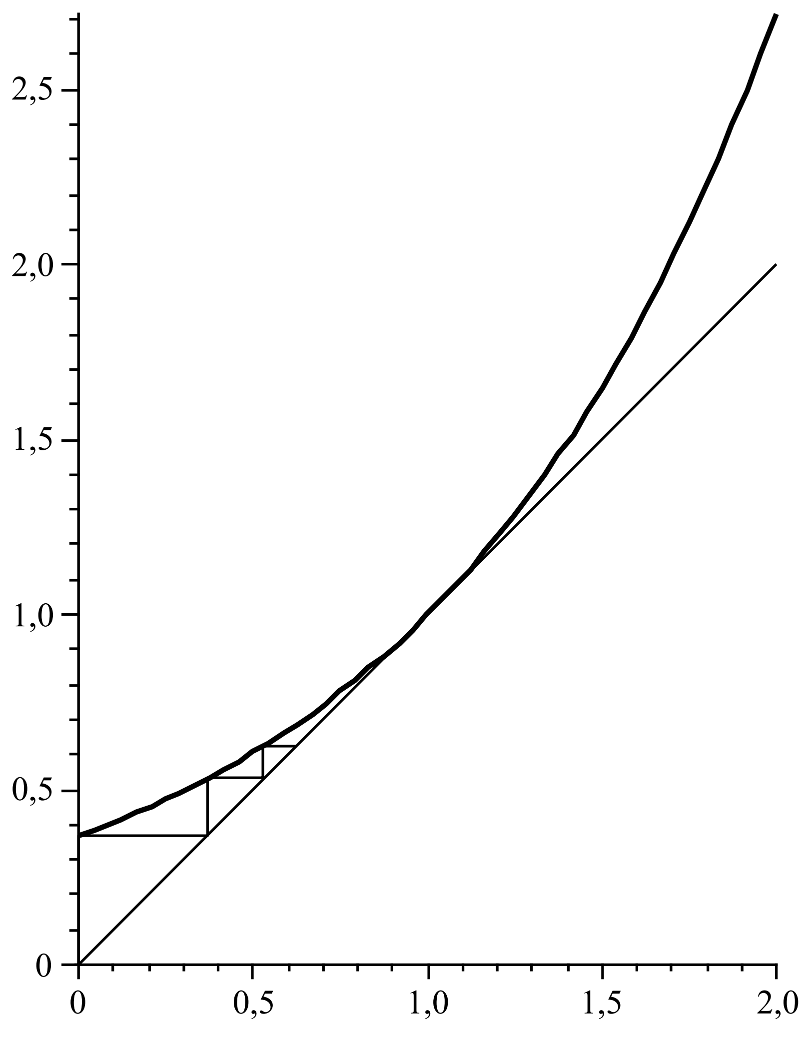
$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante minorée par 2 donc converge vers l'unique point fixe de f appartenant à $[2,4[$ ie 2. Puisque $\forall x \in I_3,\ f(x) \geqslant x$, pour tout $u_0 \in I_3$, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante non convergente car

$$[u_0, +\infty[$$

ne contient aucun point fixe de f. La suite diverge donc vers $+\infty$. On en déduit l'étude de la convergence pour toute condition initiale négative : si $u_0 = -2$ ou -4, on a $u_1 = 2$ ou 4 et la suite est constante à partir du rang 1. Di $u_0 \in]-4, 0]$, on a $u_1 \in [0, 4[$ et la suite converge vers 2. Si $u_0 \in]-\infty, -4[$, on a $u_1 \in]4, +\infty[$ et la suite diverge vers $+\infty$.

Solution 51.

- *Figure.*



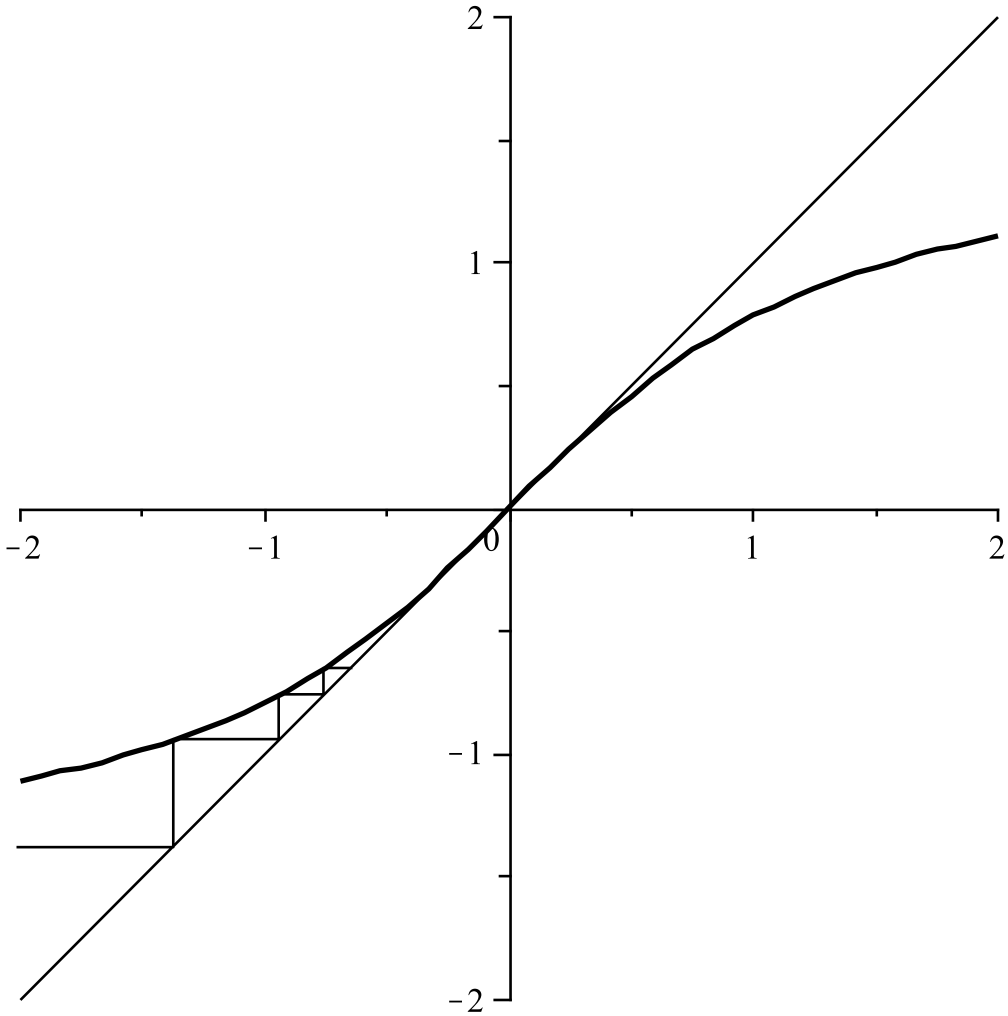
On conjecture que, pour $u_0 > 1$, la suite diverge vers $+\infty$ et, pour $u_0 \leqslant 1$, la suite converge vers 1.

- *Définition de la suite :* comme f est définie sur $\mathbb{R}$, la suite est définie pour toute condition initiale $u_0 \in \mathbb{R}$.
- *Monotonie de la suite :* soit δ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\delta(x) = e^{x-1} - x$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et , pour tout réel x, $\delta'(x) = e^{x-1} - 1$. La fonction δ est donc strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Puisque $\delta(0) = 0$, δ est positive sur $\mathbb{R}$. La fonction f admet donc un unique point fixe valant 0 et , $\forall u_0 \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta(u_n) \geqslant 0$ ie $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite est donc croissante.
- *Convergence de la suite :* supposons que $u_0 \leqslant 1$. Puisque $I =]-\infty, 1]$ est stable par f , on prouve par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \in I$. La suite est croissante majorée par 1 donc convergente. Sa limite est un point

fixe de f , elle vaut donc 1. Supposons $u_0 > 1$. Puisque $I =]1, +\infty[$ est stable par f , on prouve par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \in I$. La suite est croissante minorée par $u_0 > 1$, elle ne peut converger car $[u_0, +\infty[$ ne contient aucun point fixe de f. La suite diverge donc vers $+\infty$ d'après le théorème des suites monotones.

Solution 52.

► *Figure.*



On conjecture que la suite converge toujours vers 0.

► *Définition de la suite :* puisque que arctan est définie sur $\mathbb{R}$, la suite est définie pour toute condition initiale $u_0 \in \mathbb{R}$.

► *Monotonie de la suite :* soit δ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\delta(x) = \arctan(x) - x$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et , pour tout réel x ,

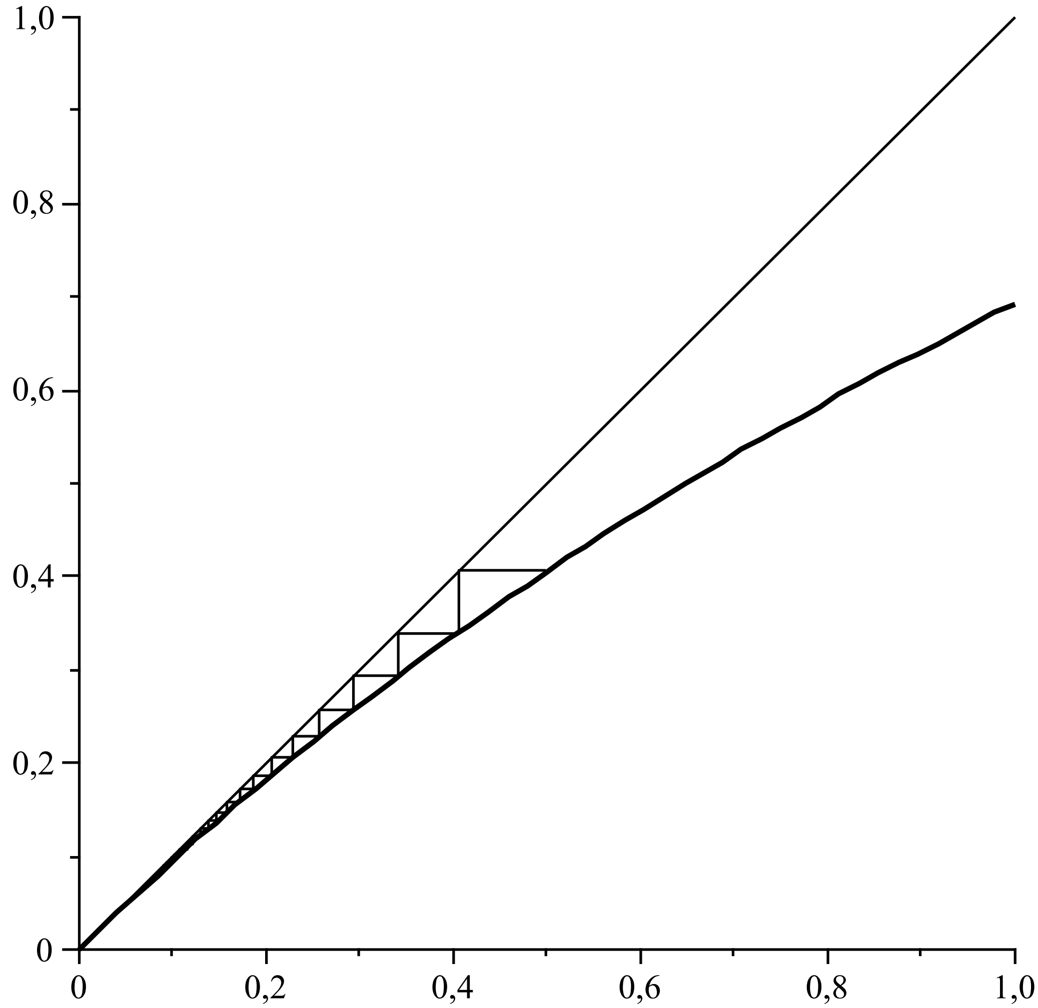
$$\delta'(x) = \frac{1}{x^2+1} - 1 = -\frac{x^2}{x^2+1}.$$

La fonction δ est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $\delta(0) = 0$, δ est négative sur $\mathbb{R}_+$ et positive sur $\mathbb{R}_-$. La fonction f admet donc un unique point fixe valant 0.

► *Convergence de la suite :* si $u_0 \leqslant 0$. Puisque $I =]-\infty, 0]$ est stable par f , on prouve par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \in I$. Ainsi , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta(u_n) \geqslant 0$ ie $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite est donc croissante. Puisqu'elle est majorée par 0 , elle converge. Sa limite est un point fixe de f , elle vaut donc 0. Si $u_0 \leqslant 0$. Puisque $I = [0, +\infty[$ est stable par f , on prouve par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \in I$. Ainsi , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta(u_n) \leqslant 0$ ie $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite est donc décroissante. Puisqu'elle est minorée par 0 , elle converge. Sa limite est un point fixe de f , elle vaut donc 0.

SOLUTION 53.

► *Figure.*



On conjecture que la suite converge vers 0.

► *Définition de la suite :* comme $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, la suite est définie pour toute condition initiale $u_0 \in \mathbb{R}_+$.

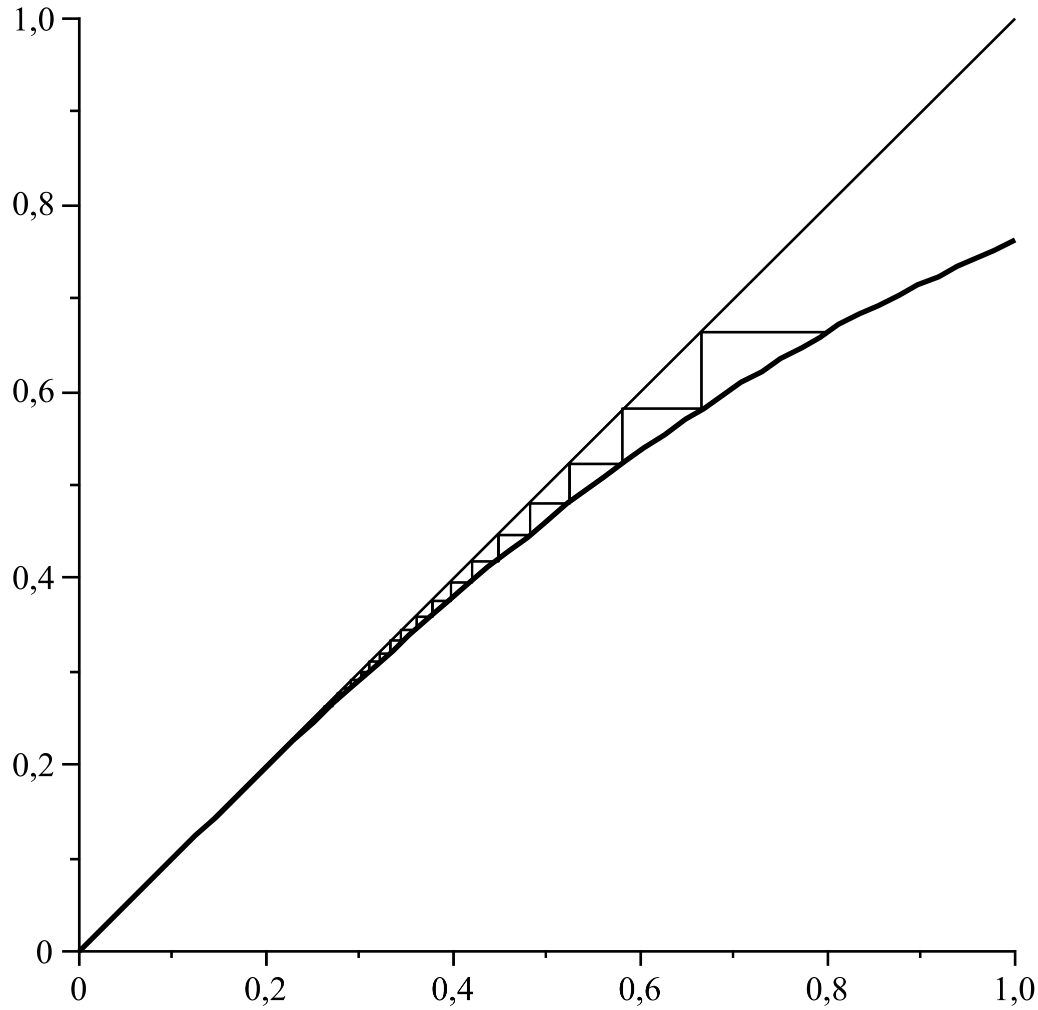
► *Convergence de la suite :* soit δ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\delta(x) = \ln(1+x) - x$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et , pour tout réel x strictement positif ,

$$\delta'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} < 0.$$

La fonction δ est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $\delta(0) = 0$, δ est négative sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f admet donc un unique point fixe valant 0. Puisque $I = [0, +\infty[$ est stable par f , on prouve par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n$ appartient à I. Ainsi , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta(u_n) \leqslant 0$ ie $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite est donc décroissante. Puisqu'elle est minorée par 0 , elle converge. Sa limite est un point fixe de f , elle vaut donc 0.

SOLUTION 54.

► *Figure.*



On conjecture que la suite converge vers 0.

- *Définition de la suite* : comme th est définie sur $\mathbb{R}$, la suite est bien définie pour toute condition initiale $u_0 \in \mathbb{R}$.
- *Convergence d ela suite* : soit δ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\delta(x) = \text{th}(x) - x$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et , pour tout réel x non nul ,

$$\delta'(x) = 1 - \text{th}^2(x) - 1 = -\text{th}^2(x) < 0.$$

La fonction δ est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $\delta(0) = 0$, δ est négative sur $\mathbb{R}_+$ et positive sur $\mathbb{R}_-$. La fonction f admet donc un unique point fixe valant 0.

  - *Cas 1 :* $u_0 \leqslant 0$. Puisque $I =]-\infty, 0]$ est stable par f , on prouve par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \in I$. Ainsi , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta(u_n) \geqslant 0$ ie $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite est donc croissante. Puisqu'elle est majorée par 0 , elle converge. Sa limite est un point fixe de f , elle vaut donc 0.
  - *Cas 2 :* $u_0 \leqslant 0$. Puisque $I = [0, +\infty[$ est stable par f , on prouve par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \in I$. Ainsi , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta(u_n) \leqslant 0$ ie $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite est donc décroissante. Puisqu'elle est minorée par 0 , elle converge. Sa limite est un point fixe de f , elle vaut donc 0.

Solution 55.

1. *Pour tout* $n \in_{\mathbb{N}}$, *on pose* $v_n = a^{-n^2+n}u_n$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $a^{-(n+1)^2+n+1} = a^{-n(n+1)}$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= a^{-n(n+1)}(a^{2n}u_n + a^{n^2}) - a^{-n^2+n}u_n \\ &= a^{-n} \end{aligned}$$

b. Après telescopage et puisque $v_0 = 1$, on a pour tout entier naturel n non nul,

$$v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} a^{-k},$$

d'après la question précédente. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a^k}.$$

c. Il y a deux cas à considérer...

- Si $a = 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = n + 1,$$

  et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n + 1.$$

- Si $a \neq 1$, on peut applqiuer la formule de la série géométrique : pour tout entier naturel n non nul,

$$v_n = 1 + \frac{1 - 1/a^n}{1 - 1/a}$$

  et donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_n &= a^{n^2-n} + a^{n^2-n}\frac{1 - 1/a^n}{1 - 1/a} \\ &= \frac{2a^{n^2} - a^{n^2-1} - a^{n^2-n}}{a^n - a^{n-1}} \\ &= a^{n^2-n}\frac{(2 - 1/a - a^{-n})}{1 - 1/a} \end{aligned}$$

2. D'après ce qui précède,

- Si $a = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $a = -1$, on a

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = 1 + \frac{1 - (-1)^n}{2}$$

  et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- Si $|a| > 1$, on a

$$u_n \sim a^{n^2-n}\frac{2 - 1/a}{1 - 1/a}$$

  et la suite diverge vers $+\infty$.
- Si $|a| < 1$, on a

$$u_n \sim -\frac{a^{n^2-2n}}{1 - 1/a}$$

  et la suite tend vers 0.

Solution 56.

1. On prouve par une récurrence forte imméditae que $\forall n \geqslant 0, \ \ u_n \geqslant 0$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

et la suite $(u_{n\geqslant 0})$ est croissante.

2. Prouvons le résultat par récurrence. L'hypothèse au rang n étant que la formule est vraie pour tous les entiers $k \leqslant n$.

- Le cas $n = 1$ est banal. Pour $n = 2$, le résultat est acquis car $u_2 = u_1 + \alpha u_0 < 2u_1$.

- Supposons l'hypothèse au rang $n \geqslant 2$. On a alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leqslant u_1 \prod_{k=0}^{n-1}(1+\alpha^k) \\ &\qquad + \alpha^n u_1 \prod_{k=0}^{n-2}(1+\alpha^k) \\ &\leqslant \alpha^n u_1 \prod_{k=0}^{n-2}(1+\alpha^k) \\ &\qquad \times [\alpha^n + \alpha^{n-1} + 1] \end{aligned}$$

  or,

$$\alpha^n + \alpha^{n-1} + 1 \leqslant (1+\alpha^{n-1})(1+\alpha^n),$$

  donc

$$u_{n+1} \leqslant u_1 \prod_{k=0}^{n}(1+\alpha^k)$$

  et l'hypothèse au rang $n+1$ est vérifiée.
- L'inégalité est acquise pour tout rang $n \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

Soit $u \geqslant 0$, puisque

$$\forall t \in [0,u], \quad \frac{1}{1+t} \leqslant 1,$$

on obtient après intégration sur $[0,u]$,

$$\ln(1+u) \leqslant u.$$

Ainsi,$\forall n \geqslant 1$,

$$\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\alpha^k\right)\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

Or, $\forall n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u^k = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} \leqslant \frac{1}{1-\alpha}.$$

D'après le résultat de la question **2.**, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc majorée. Puisqu' elle est croissante, elle converge.

Solution 57.

1. Par une récurrence immédiate , on prouve que $\forall n \geqslant 1$, $x_n > 0$. On a donc, $\forall n \geqslant 1$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+nx_n^2} \leqslant x_n.$$

La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers un réel $\ell \geqslant 0$. Raisonnons par l'absurde en supposant $\ell > 0$. Alors, $\forall n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant x_{n+1} \leqslant \frac{x_1}{1+n\ell^2},$$

et d'après le théorème d'encadrement,

$$\ell = 0,$$

ce qui est absurde. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.$$

2. Prouvons la propriété par récurrence sur $n \geqslant 2$. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $x(1-x) \leqslant 1/4$, on a

$$x_2 \leqslant \frac{1}{4}.$$

Supposons l'inégalité vérifiée au rang $n \geqslant 2$. Alors $1 - x_n \geqslant 0$ et donc

$$nx_n(1-x_n) \leqslant (1-x_n),$$

ainsi

$$(n+1)x_{n1} \leqslant 1,$$

et la propriété est acquise au rang $n+1$.

3. On remarque que $\forall n \geqslant 1$,

$$\frac{(n+1)x_{n+1}}{nx_n} = \frac{n+1}{n} \times \frac{1}{1+nx_n^2} \geqslant 1$$

si et seulement si

$$n^2 x_n^2 \leqslant 1,$$

ce qui est vrai d'après la question **2.** Puisque $\forall n \geqslant 1$, on en déduit que la suite de terme général nx_n est croissante.

4. On remarque que $\forall n \geqslant 2$ et $\forall k \leqslant n$,

$$1 \geqslant (k-1)x_{k-1} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k-1}}.$$

D'où, en additionnant membre à membre ces $n-1$ inégalités et après telescopage,

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_1} \leqslant n-1,$$

puis,

$$n \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant n - 1 + \frac{1}{x_1},$$

donc

$$\frac{1}{x_n} \sim n,$$

et ainsi

$$x_n \sim \frac{1}{n}.$$

Solution 58.

1. La minoration par 0 est évidente. Prouvons la majoration par 2 par récurrence. On a $u_1 = 1$ donc l'inégalité est vraie au rang 1. Supposons que $\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}} \leqslant 2$ pour un certain $n \geqslant 2$. Alors

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} \leqslant \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}}} \leqslant \sqrt{3} \leqslant 2$$

L'inégalité est donc établie pour tout $n \geqslant 1$.

2. Comme $\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} = \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}} \frac{\sqrt{n-1}}{n}}$, on a en utilisant l'inégalité de la question précédente :

$$1 \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{1 + 2\frac{\sqrt{n-1}}{n}}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geqslant 1}$ converge vers 1.

3. $u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n + u_{n-1}} - \sqrt{n} = \dfrac{u_{n-1}}{\sqrt{n+u_{n-1}} + \sqrt{n}}$. Or d'après la première question $u_{n-1} = \mathcal{O}(\sqrt{n}) = o(n)$ donc $\sqrt{n + u_{n-1}} \sim \sqrt{n}$. Ainsi $\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n+u_{n-1}}+\sqrt{n}} \sim \frac{u_{n-1}}{2\sqrt{n}} \sim \frac{u_{n-1}}{2\sqrt{n-1}}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n-1}}{2\sqrt{n-1}} = \dfrac{1}{2}$ d'après la deuxième question. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n} = \dfrac{1}{2}$.

Solution 59.

1. **a.** Comme $|z_n| \in \mathbb{R}$, $y_{n+1} = \frac{y_n}{2}$. On en déduit que (y_n) converge vers 0.

   b. Par inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|z_{n+1}| \leqslant \frac{|\operatorname{Re}(z_n)| + |z_n|}{2} \leqslant |z_n|$$
   puisque pour tout complexe z, $|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z|$.

   c. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\operatorname{Re}(z_{n+1}) = \frac{\operatorname{Re}(z_n) + |z_n|}{2} \geqslant \operatorname{Re}(z_n)$$
   puisque pour tout complexe z, $\operatorname{Re}(z) \leqslant |z|$. Ainsi (x_n) est croissante.

   d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re}(z_n) \leqslant |z_n| \leqslant |z_0|$ par décroissance de $(|z_n|)$. Ainsi (x_n) est croissante et majorée ; elle converge.

   e. Comme (x_n) et (y_n) convergent, (z_n) converge. Puisque (y_n) converge vers 0, la limite de (z_n) est réelle.

   f. Si $z_0 \in \mathbb{R}_+$, on montre par récurrence que $z_n = z_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc (z_n) converge vers z_0.
   Si $z_0 \in \mathbb{R}_-$, alors $z_1 = 0$ et on montre par récurrence que $z_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc (z_n) converge vers 0.

2. **a.** En appliquant la méthode de l'arc-moitié, on a :
$$z_{n+1} = r_n \cos\frac{\theta_n}{2} e^{i\frac{\theta_n}{2}}$$
   Puisque $\theta_n \in]-\pi, \pi]$, $\frac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $r_n \cos\frac{\theta_n}{2} \geqslant 0$. On en déduit que $r_{n+1} = r_n \cos\frac{\theta_n}{2}$.
   Comme $\frac{\theta_n}{2} \in]-\pi, \pi]$, $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.

   b. On en déduit immédiatement que (θ_n) converge vers 0.

   c. Comme $\alpha \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, $\frac{\alpha}{2^k} \not\equiv 0[\pi]$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On utilise alors l'indication de l'énoncé :
$$S_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2\sin\frac{\alpha}{2^k}}$$
   Par télescopage, on a $S_n = \dfrac{\sin\alpha}{2^n \sin\frac{\alpha}{2^n}}$.
   Comme $\frac{\alpha}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\sin\frac{\alpha}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{2^n}$. Par conséquent, $2^n \sin\frac{\alpha}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$ puis $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

   d. Par une récurrence facile, $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$. On montre aussi facilement que pour $n \geqslant 1$:
$$r_n = r_0 \prod_{k=0}^{n-1} \cos\frac{\theta_k}{2} = r_0 \prod_{k=0}^{n-1} \cos\frac{\theta_0}{2^{k+1}} = r_0 \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta_0}{2^k}$$
   Si $\theta_0 = 0$, $z_0 \in \mathbb{R}_+$ et on a vu que (z_n) est constante égale à z_0. Ainsi (z_n) converge vers z_0.
   Si $\theta_0 = \pi$, $z_0 \in \mathbb{R}_-$ et on a vu que (z_n) est nulle à partir du rang 1. Ainsi (z_n) converge vers 0.
   Si $\theta_0 \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, la question précédente montre que (r_n) converge vers $r_0\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}$. Comme (θ_n) converge vers 0, (z_n) converge également vers $r_0\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}$.

Solution 60.

Supposons que (z_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $z_{2n} = \exp(i\ln 2)z_n$ et par passage à la limite, $l = \exp(i\ln 2)l$. Puisque $\frac{\ln 2}{2\pi}$ est non entier (on a $0 < \frac{\ln 2}{2\pi} < 1$), $\exp(i\ln 2) \neq 1$ et donc $l = 0$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| = 1$ et donc $|l| = 1$, ce qui est absurde. Ainsi (z_n) ne converge pas.