NOMBRES COMPLEXES

Formes algébrique et exponentielle

EXERCICE 1.

1. Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe $4\sqrt{2}(-1+i)$.
2. Trois nombres complexes ont pour produit $4\sqrt{2}(-1+i)$. Leurs modules sont en progression géométrique de raison 2 et leurs arguments sont en progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$. On note z_1, z_2 et z_3 ces trois nombres, où la numérotation respecte l'ordre des modules. Sachant que z_1 a un argument compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, déterminer le module et un argument de chacun des trois nombres z_1, z_2 et z_3.
3. Construire les images M_1, M_2 et M_3 des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 dans le plan complexe.

EXERCICE 2.

Déterminer des racines carrées de $\sqrt{3}+i$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 3.

1. Déterminer les racines carrées complexes de $1+i$ sous forme exponentielle.
2. Déterminer les racines carrées complexes de $1+i$ sous forme algébrique.
3. En déduire que $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.
4. Montrer que $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.
5. Déterminer les valeurs de

$$\begin{array}{ccc}
\cos\frac{3\pi}{8} & \sin\frac{3\pi}{8} & \tan\frac{3\pi}{8}\\
\cos\frac{5\pi}{8} & \sin\frac{5\pi}{8} & \tan\frac{5\pi}{8}\\
\cos\frac{7\pi}{8} & \sin\frac{7\pi}{8} & \tan\frac{7\pi}{8}
\end{array}$$

EXERCICE 4.

On note $j=e^{2i\pi/3}$.

1. Calculer j^3, $1+j+j^2$, $1+j^2+j^4$, j^{-1} et $\overline{j}$ en fonction de j.
2. Simplifier l'expression
$$\frac{1+j}{(1-i)^2}+\frac{1-j}{(1+i)^2}.$$

EXERCICE 5.

Voici quelques calculs pour se délier les doigts...

1. Représenter sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :
$$\frac{2-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i},\quad \frac{(2+i)(3+2i)}{2-i},\quad \frac{3+4i}{(2+3i)(4+i)}.$$
2. On considère les nombres complexes
$$z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\quad\text{et}\quad z_2=\frac{1}{\sqrt{3}+i}.$$
Représenter sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :
   - **a.** z_1+z_2
   - **b.** z_1z_2
   - **c.** z_1/z_2
   - **d.** $z_1^2+z_2^2$
   - **e.** $z_1^3+z_2^3$

EXERCICE 6.

Voici un peu d'entraînement...

1. On pose $z_1=\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=1+i$.
   - **a.** Représenter le quotient z_1/z_2 sous forme polaire.
   - **b.** En déduire les valeurs de $\cos(7\pi/12)$ et de $\sin(7\pi/12)$.
2. En précisant pour quelles valeurs des réels x et y, elles ont un sens, mettre sous forme polaire les expressions suivantes :
   - **a.** $1+\sin x-i\cos x$
   - **b.** $\dfrac{1}{1+i\tan x}$
   - **c.** $\dfrac{1+\cos x+i\sin x}{1-\cos x-i\sin x}$
   - **d.** $\dfrac{e^{ix}+e^{iy}}{1+e^{i(x+y)}}$
   - **e.** $\dfrac{(1-i\sqrt{3})(\cos x+i\sin x)}{\cos x+\sin x+i(\cos x-\sin x)}$

EXERCICE 7.★

Voici quelques calculs de puissances.

1. Pour tout entier naturel n, simplifier les expressions suivantes :

   a. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^n$

   b. $\dfrac{(1-i)^n-\sqrt{2}^n}{(1+i)^n-\sqrt{2}^n}$

   c. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^n$

   d. $(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n$

   e. $\dfrac{(1+i)^n-(1-i)^n}{i}$

2. Pour quelles valeurs de l'entier relatif n le nombre complexe $(\sqrt{3}+i)^n$ appartient-il à $\mathbb{R}_+$? Pour quelles valeurs est-il imaginaire pur ?

EXERCICE 8.★

Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et $z_\theta=-\sin(2\theta)+2i\cos^2(\theta)$.

1. Déterminer le module et un argument de z_θ. On discutera en fonction des valeurs de θ.

2. Déterminer l'ensemble des nombres réels θ tels que $|z_\theta|=|z_\theta-1|$.

EXERCICE 9.

Soit

$$v=\frac{\sqrt{3}+i}{i-1}.$$

Ecrire v^{2002} sous forme polaire puis sous forme algébrique.

EXERCICE 10.

On pose $\omega=\sqrt{3}+i$. Déterminer $n\in\mathbb{Z}$ tel que $\omega^n\in\mathbb{R}$. Même question avec $\omega^n\in i\mathbb{R}$.

EXERCICE 11.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $2z+3\overline{z}=4-3i$

2. $3z-2\overline{z}=-5+i$

Réels et imaginaires purs

EXERCICE 12.

Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

1. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur *si et seulement si* $z\in\mathbb{U}$.

2. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1}\in\mathbb{U}$ *si et seulement si* z est imaginaire pur.

EXERCICE 13.★

Soient a et b de module 1 tels que $a\neq\pm b$.

1. Prouver que $\dfrac{1+ab}{a+b}\in\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b}\in i\mathbb{R}.$$

Module et argument

EXERCICE 14.

On pose $\varphi(z)=|z^3-z+2|$ pour $z\in\mathbb{C}$. On souhaite déterminer la valeur maximale de $\varphi(z)$ lorsque z décrit $\mathbb{U}$.

1. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.

2. Soit $z\in\mathbb{U}$ et θ un de ses arguments. Exprimer $|z^3-z+2|^2$ uniquement en fonction de $\cos\theta$.

3. Soit f la fonction définie par

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=4x^3-x^2-4x+2$$

   Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. On regroupera ces informations dans un tableau de variations.

4. Répondre à la question initialement posée. On précisera pour quelle(s) valeur(s) de $z\in\mathbb{U}$ cette valeur maximale est atteinte.

EXERCICE 15.

On définit une suite de complexes (z_n) par son premier terme $z_0 \in \mathbb{C}$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$$

1. Que peut-on dire de la suite (z_n) si $z_0 \in \mathbb{R}_+$? si $z_0 \in \mathbb{R}_-$?
2. On suppose que $z_0 \notin \mathbb{R}_-$ jusqu'à la fin de l'énoncé. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \notin \mathbb{R}_-$.
3. On admet que tout complexe non nul admet un unique argument dans $]-\pi,\pi]$ appelé *argument principal*. Que peut-on dire de cet argument si ce complexe n'appartient pas à $\mathbb{R}_-$?
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note r_n le module et θ_n l'argument principal de z_n. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$ et $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.
5. Exprimer θ_n en fonction de θ_0. Quelle est la limite de la suite (θ_n) ?
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$r_n = r_0 \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$$
7. Montrer que $\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2\sin x}$ (on précisera pour quels réels x cette égalité a un sens).
8. On suppose maintenant que $z_0 \notin \mathbb{R}$ jusqu'à la fin de l'énoncé. En déduire une expression de r_n en fonction de n, θ_0 et r_0 sans le symbole $\prod$.
9. Déterminer la limite de la suite (r_n) et en déduire celle de la suite (z_n).

EXERCICE 16.✯

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ de module 1. Montrer que

$$|a+b+c| = |ab+bc+ac|.$$

EXERCICE 17.✯

Déterminer les nombres complexes z tels que z, $1/z$ et $1+z$ soient de même module.

EXERCICE 18.✯

Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1 tels que $a \neq c$. Montrer que

$$\frac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2} \in \mathbb{R}_+.$$

EXERCICE 19.

Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer que

$$\left|z+z'\right|^2 + \left|z-z'\right|^2 = 2(|z|^2 + \left|z'\right|^2)$$

EXERCICE 20.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 = \overline{z}$
2. $z^3 = \overline{z}$
3. $z^2 = 2\overline{z}$
4. $z^2 = -\overline{z^2}$
5. $z^4 = \frac{32}{\overline{z}}$.
6. $z^2 = \frac{1}{\overline{z^2}}$
7. $z^3 = -\frac{1}{\overline{z^3}}$

Equations dans $\mathbb{C}$

EXERCICE 21.

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 + (5-2i)z + 5 - 5i = 0$;
2. $z^2 + (-3+i)z + 4 - 3i = 0$;
3. $z^2 - (9-2i)z + 26 = 0$;
4. $z^4 + (3-6i)z^2 + 2(16-63i) = 0$;
5. $z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0$;
6. $z^4 - z^3 - z + 1 = 0$;
7. $z^4 + 2 - i\sqrt{12} = 0$.

EXERCICE 22.✯

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + 8|z| - 3 = 0.$$

EXERCICE 23.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(3+i)z^2 - (8+6i)z + 25 + 5i = 0$;
2. $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$;
3. $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$;
4. $(1-5i)z^2 - (20+4i)z + 61 + 7i = 0$;
5. $z^6 - 2\cos(\theta)z^3 + 1 = 0$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 24.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $(z+i)^3 + iz^3 = 0$;
2. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

EXERCICE 25.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i$.

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ a une unique solution imaginaire pure que l'on déterminera.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.
3. Etudier dans le plan complexe la nature du triangle ayant pour sommets les images des trois racines de cette équation.

EXERCICE 26.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. Montrer que $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i \operatorname{cotan} \dfrac{\theta}{2}$ où $\operatorname{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$.
2. Résoudre l'équation $(z-1)^5 = (z+1)^5$. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction cotan.

EXERCICE 27.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. Montrer que $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i \operatorname{cotan} \dfrac{\theta}{2}$ où $\operatorname{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$.
2. Résoudre de deux façons l'équation $(z-1)^5 = (z+1)^5$. En déduire les valeurs de $\operatorname{cotan} \dfrac{\pi}{5}$, $\operatorname{cotan} \dfrac{2\pi}{5}$, $\operatorname{cotan} \dfrac{3\pi}{5}$ et $\operatorname{cotan} \dfrac{4\pi}{5}$.

EXERCICE 28.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0$;
2. $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$ (exprimer les solutions à l'aide de la fonction cot) ;
3. $(1+iz)^n + (1-iz)^n = 0$ (distinguer les cas n pair et n impair et exprimer les solutions à l'aide de la fonction tan).

EXERCICE 29.★

Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel non nul.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$$
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation
$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1$$
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0\left[\dfrac{2\pi}{n}\right]$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{in\theta}$$
4. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation
$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 2\cos(n\theta)$$
On traitera le cas général, $\theta \in \mathbb{R}$ sans aucune restriction.

EXERCICE 30.

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre sur l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$
$$z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$$
On précisera le nombre de solutions suivant la valeur de θ.
2. En déduire la résolution sur $\mathbb{C}$ de l'équation
$$z^{2n} - 2z^n \cos(n\theta) + 1 = 0$$
On précisera le nombre de solutions suivant la valeur de θ.

EXERCICE 31.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Résoudre l'équation
$$(z+i)^n = (z-i)^n$$
d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On vérifiera en particulier que les solutions sont réelles et on précisera leur nombre.

NOMBRES COMPLEXES

Applications à la trigonométrie

EXERCICE 32.

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

1. Déterminer une équation du second degré dont les racines sont α et β.
2. En déduire $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.
3. En déduire $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{\pi}{5}$.

EXERCICE 33.

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{11}}$ ainsi que

$$S = \omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9 \qquad T = \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$$

1. **a.** Montrer que $\sin\frac{6\pi}{11} + \sin\frac{18\pi}{11} > 0$. En déduire que $\mathrm{Im}(S) > 0$.
   b. Montrer que $S + T = -1$ et $ST = 3$.
   c. En déduire une équation du second degré dont sont solutions S et T puis les valeurs de S et T.
2. **a.** Montrer que $\omega - \omega^{10} = 2i\sin\frac{2\pi}{11}$.
   b. Montrer que $\frac{1-\omega^3}{1+\omega^3} = -i\tan\frac{3\pi}{11}$.
   c. Montrer que $\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k = \frac{1-\omega^3}{1+\omega^3}$.
   d. En déduire que $\tan\frac{3\pi}{11} + 4\sin\frac{2\pi}{11} = i(T-S) = \sqrt{11}$.

EXERCICE 34.

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. On pose $A = \omega + \omega^4$ et $B = \omega^2 + \omega^3$.

1. Montrer que $A = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $B = 2\cos\frac{4\pi}{5}$.
2. Calculer $A+B$ et AB. En déduire les valeurs exactes de A et B.
3. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{3\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

EXERCICE 35.★

En linéarisant $\sin^4 x$, calculer une expression simple de la somme

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right).$$

Racines de l'unité

EXERCICE 36.

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $\alpha = \omega + \frac{1}{\omega}$.

1. Montrer que $\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} + 1 + \omega + \omega^2 = 0$.
2. En déduire que α est solution d'une équation du second degré que l'on précisera.
3. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ puis de $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

EXERCICE 37.

Soient $n \geqslant 1$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{km}$. On distinguera suivant que m est ou non multiple de n.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose
$$S(z) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(z + \omega^k\right)^n$$
Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $S(z) = n(z^n + 1)$.
3. Calculer $S\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)$. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = 0$$

EXERCICE 38.★

Soit ω une racine septième de l'unité distincte de 1. Simplifier le nombre

$$\alpha = \frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} + \frac{\omega^3}{1+\omega^6}.$$

Inégalites

Exercice 39.

Déterminer les parties bornées non vides de $\mathbb{C}$ stables par $z \mapsto z^2+z+1$ et $z \mapsto z^2-z+1$.

Exercice 40.

Etablir par un calcul que $\mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2}$ équivaut à

$$\left|\frac{z}{z-1}\right| < 1.$$

Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 41.☆

Soit λ un nombre réel irrationnel. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\lambda\pi}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(\lambda\pi)|}.$$

Exercice 42.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$1+z+\cdots+z^{n-1}-nz^n = 0.$$

Montrer que $|z| \leqslant 1$.

Exercice 43.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Montrer que

$$\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leqslant \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}.$$

Exercice 44.☆

Prouver que

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, |a|+|b| \leqslant |a+b|+|a-b|.$$

étudier les cas d'égalité.

Exercice 45.☆

Soient $n \geqslant 2$ et $z_1, z_2, \dots, z_n$ appartenant à $\mathbb{C}^*$. Prouver que

$$|z_1+\ldots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|$$

avec égalité *si et seulement si*

$$\arg(z_1) \equiv \arg(z_2) \equiv \ldots \equiv \arg(z_n)[2\pi]$$

Géométrie

Exercice 46.☆

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$
2. $\mathrm{Im}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$
3. $\mathrm{Re}(z^3) = \mathrm{Im}(z^3)$

Exercice 47.

Soient A, B, C, D quatre points du plan distincts deux à deux. On suppose de plus A, B, C non alignés et on introduit le cercle $\mathscr{C}$ de centre O circonscrit au triangle ABC.
On choisit un repère orthonormé du plan de centre O tel que $\mathscr{C}$ ait pour rayon 1. On note a, b, c, d les affixes respectifs de A, B, C, D.
On pose enfin $\mathrm{Z} = \frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b}$.

1. Dans cette question, on suppose que D appartient à $\mathscr{C}$.
   - **a.** Justifier que $\overline{a} = \frac{1}{a}$, $\overline{b} = \frac{1}{b}$, $\overline{c} = \frac{1}{c}$, $\overline{d} = \frac{1}{d}$.
   - **b.** Montrer que Z est un réel.
   - **c.** En déduire que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})[\pi]$.
2. Réciproquement, on suppose que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})[\pi]$ et on veut montrer que D appartient à $\mathscr{C}$.
   - **a.** Que peut-on dire de Z ?
   - **b.** Exprimer d en fonction de a, b, c, Z.
   - **c.** Calculer $\overline{d}$ et en déduire que D appartient à $\mathscr{C}$.

EXERCICE 48.

Soit z un nombre complexe. On note A, B, C, D les points d'affixes respectifs $1, z, z^2, z^3$ dans un repère orthonormé du plan.

1. Pour quelles valeurs de z les points A, B, C, D sont-il deux à deux distincts ? On suppose cette cette condition remplie dans la suite de l'énoncé.
2. Déterminer les valeurs de z tels que ABCD soit un parallélogramme. Préciser la nature de ce parallélogramme.
3. Déterminer les valeurs de z tels que le triangle ABC soit rectangle isocèle en A.
4. Déterminer les valeurs de z tels que ABD soit rectangle isocèle en A.

EXERCICE 49.

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on considère l'application

$$\mathrm{P} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^3 + \alpha z^2 + \beta z \end{array} \right.$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

1. Que vaut $1 + j + j^2$?
2. Montrer que $\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(j) + \mathrm{P}(j^2) = 3$.
3. On note $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1$ et A_2 les points du plan d'affixes respectifs 1, j et j^2. On se donne également B_1 et B_2 deux points du plan.
   Montrer qu'il existe $k \in \{0, 1, 2\}$ tel que $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_1 \cdot \mathrm{A}_k\mathrm{B}_2 \geqslant 1$.
   On pourra utiliser le fait que le module d'une somme de complexes est toujours inférieur ou égal à la somme des modules de ces complexes (inégalité triangulaire).

EXERCICE 50.

Soient a, b et c trois nombres complexes non nuls de même module et deux à deux distincts. On note A, B, C et H les points d'affixes respectifs a, b, c et $a + b + c$.

1. On pose $w = \overline{b}c - b\overline{c}$. Calculer $\overline{w}$ et en déduire que w est imaginaire pur.
2. Montrer que $(b + c)(\overline{b} - \overline{c})$ est également imaginaires pur.
3. Montrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs d'affixes respectifs z_1 et z_2, alors leur produit scalaire est la partie réelle de $z_1\overline{z_2}$.
4. Montrer que les droites (AH) est (BC) sont perpendiculaires.
5. En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC.

EXERCICE 51.★

Déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe z tels que les points d'affixes 1, z et z^3 soient alignés.

EXERCICE 52.★

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que les points d'affixes respectives z, iz et z^2 soient alignés.

EXERCICE 53.★

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R}$. Déterminer l'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ du plan $\mathscr{P}$ tels que les points d'affixes respectives $1, z^2$ et z^4 soient alignés.

EXERCICE 54.★★

Déterminer les points $\mathrm{M}(z)$ du plan $\mathscr{P}$ tels que $\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^4 \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 55.★★

Soient A, B, C trois points deux à deux distincts d'affixes a, b, c.

1. Prouver que ABC est un triangle équilatéral direct *si et seulement si*
   $$a + jb + j^2c = 0,$$
   et équilatéral indirect *si et seulement si*
   $$a + jc + j^2b = 0.$$
2. Prouver que ABC est un triangle équilatéral *si et seulement si*
   $$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$

EXERCICE 56.★

On se place dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ un triangle inscrit dans un cercle de centre O. On note z_k l'affixe de M_k.

1. Montrer que l'orthocentre H du triangle $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ a pour affixe
   $$h = z_1 + z_2 + z_3.$$
2. En déduire que le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un vrai triangle sont alignés.

EXERCICE 57.★

Soient $\mathscr{E} = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ et $f : \mathscr{E} \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$\forall\, z \in \mathscr{E},\quad f(z) = \frac{z+i}{z-2i}.$$

Déterminer les ensembles suivants :

1. $\mathscr{E}_1 = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; f(z) \in \mathbb{R}\right\}$;
2. $\mathscr{E}_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; f(z) \in i\mathbb{R}\right\}$;
3. $\mathscr{E}_3 = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \arg(f(z)) \equiv \pi/2[2\pi]\right\}$.

EXERCICE 58.

Dans tout l'exercice, le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathscr{R}$.

1. Déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les nombres complexes z, $1/z$ et $1+z$ aient même module.
2. Déterminer les nombres complexes tels que
$$|z-1| = |\overline{z}+1|.$$
Interprétation géométrique ?
3. Déterminer le lieu des points du plan dont l'affixe z vérifie
$$|(1+i)\overline{z} - 2i| = 2.$$

Calcul de sommes

EXERCICE 59.

Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n - x_n \end{cases}$. On pose $z_n = x_n + i\,y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer z_0, z_1, z_2 et z_3.
2. Montrer que (z_n) est une suite géométrique. On donnera sa raison sous formes algébrique et exponentielle.
3. Exprimer $A_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$ en fonction de n à l'aide des fonctions cos et sin.

EXERCICE 60.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \not\equiv 0[2\pi]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k\cos(k\alpha) \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} k\sin(k\alpha)$$

Montrer que

$$S_n = \frac{n\cos(n+1)\alpha - (n+1)\cos(n\alpha) + 1}{2(\cos\alpha - 1)}$$
$$T_n = \frac{n\sin(n+1)\alpha - (n+1)\sin(n\alpha)}{2(\cos\alpha - 1)}$$

EXERCICE 61.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer de deux manières $(1+i)^{2n}$ et en déduire $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1}$.

EXERCICE 62.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument de $z^k - 1$.
2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

EXERCICE 63.

Soit n un entier naturel non nul. On pose $\omega = e^{\frac{i\pi}{n}}$.

1. Justifier que $\omega \neq 1$.
2. On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$. Montrer que $A_n = \dfrac{2}{1-\omega}$.
3. On pose $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\dfrac{k\pi}{n}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\dfrac{k\pi}{n}$. Montrer que $C_n = 1$ et $S_n = \dfrac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$.
4. Calculer $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega^{2k} - 1|$.

EXERCICE 64.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer de deux manières $(1+i)^n$ et en déduire les sommes suivantes

$$\mathrm{S}_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k} \qquad \mathrm{T}_n = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$$

EXERCICE 65.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{D}_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ki\theta}$ et $\mathrm{F}_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{D}_k(\theta)$.

1. Montrer que si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, $\mathrm{D}_n(\theta) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.
   Préciser également la valeur de $\mathrm{D}_n(\theta)$ lorsque $\theta \equiv 0[2\pi]$.
2. Montrer que si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, $\mathrm{F}_n(\theta) = \dfrac{\sin^2\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.
   Préciser également la valeur de $\mathrm{F}_n(\theta)$ lorsque $\theta \equiv 0[2\pi]$.

EXERCICE 66.★

Simplifier la somme

$$\mathrm{S}_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-3)^k \binom{n}{2k}.$$

EXERCICE 67.★

Pour tout entier naturel n, on pose

$$\mathrm{S}_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}, \quad \mathrm{S}_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+1}, \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+2}.$$

1. Calculer $\mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 + \mathrm{S}_3$, puis $\mathrm{S}_1 + j\mathrm{S}_2 + j^2\mathrm{S}_3$ et $\mathrm{S}_1 + j^2\mathrm{S}_2 + j^4\mathrm{S}_3$.
2. En déduire les valeurs de S_1, S_2 et S_3.

EXERCICE 68.★

Soient α et β, deux nombres réels. Simplifier les sommes

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\alpha + k\beta),$$
$$\mathrm{S}'_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(\alpha + k\beta),$$
$$\mathrm{S}''_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos(\alpha + k\beta).$$

EXERCICE 69.★

Soit α, un nombre réel tel que $\cos\alpha \neq 0$. On pose

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos k\alpha}{\cos^k \alpha} \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin k\alpha}{\cos^k \alpha}.$$

Calculer $\mathrm{R}_n + i\mathrm{I}_n$ et en déduire des expressions simplifiées de R_n et de I_n.

EXERCICE 70.

Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{F}_n = \frac{\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cdots + \cos((2n+1)x)}{\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x) + \cdots + \sin((2n+1)x)}.$$

Exponentielle d'un nombre complexe

EXERCICE 71.

Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $e^z = -7$;
2. $e^z = -2i$;
3. $e^z = 1 + i$.

EXERCICE 72.★

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $e^z + e^{-z} = 1$;
2. $e^z + e^{-z} = 2i$.