Devoir surveillé n°08

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 —

Partie I –

Notons E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ et $D : f \in E \mapsto f'$. Il est clair que D est un endomorphisme de E.

1. Déterminer le noyau et l'image de D.

On considère les trois fonctions

$$f_1 \colon t \in \mathbb{R} \mapsto e^t \qquad f_2 \colon t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \qquad f_3 \colon t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$$

Nous noterons $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et G le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{B}$.
Nous allons montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre de vecteurs de E.
Soient a, b et c des réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3$ soit la fonction nulle.

2. L'étudiante Antoinette observe que $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$ pour tout réel t. Elle choisit (adroitement) trois valeurs de t, obtient un système de trois équations à trois inconnues a, b et c, qu'elle résout ; il ne lui reste plus qu'à conclure.
Faites comme elle !

3. L'étudiante Lucie propose d'exploiter le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0.
Faites comme elle !

4. L'étudiante Nicole décide de s'intéresser au comportement de $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de $+\infty$.
Faites comme elle !

La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de G et ce sous-espace est de dimension 3.

5. Montrer que G est stable par D c'est-à-dire que $D(G) \subset G$.

Nous noterons $\widehat{D}$ l'endomorphisme de G induit par D, c'est-à-dire l'endomorphisme de G défini par $\widehat{D}(f) = D(f)$ pour $f \in G$.

6. Montrer que $\widehat{D}^3 = \mathrm{Id}_G$.

7. En déduire que $\widehat{D}$ est un automorphisme de G et exprimer $(\widehat{D})^{-1}$ en fonction de $\widehat{D}$.

Partie II –

Nous nous intéressons dans cette partie à l'équation différentielle $y''' = y$, que nous noterons $(\mathcal{E})$. Une solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{E})$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f'''(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

8. Montrer que toute solution f de $(\mathcal{E})$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Notons $T = D^3 - \mathrm{Id}_E$, où Id_E est l'identité de E, et $D^3 = D \circ D \circ D$.
Le noyau de T est donc l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

9. Montrer que G est contenu dans le noyau de T.

Nous allons établir l'inclusion inverse ; ainsi G sera exactement l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.
Soit f une solution de $(\mathcal{E})$; nous noterons $g = f'' + f' + f$.

10. Montrer que g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.

11. Décrivez rapidement l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

12. Résolvez l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$. Vous donnerez une base de l'ensemble des solutions à valeurs réelles.

13. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Décrivez l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$.

14. Et maintenant, concluez !

Problème 2 —

On note I l'application identité de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire l'application

$$\mathrm{I}\colon \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y) \end{array} \right.$$

On note également S l'application

$$\mathrm{S}\colon \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array} \right.$$

Enfin, pour $p \in \mathbb{R}$, on pose $U_p = p\mathrm{S} + (1-p)\mathrm{I}$.

Partie I – Préliminaires

1. Vérifier que S est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Que peut-on dire de S^2 ?

2. Soit $p \in \mathbb{R}$. Justifier que U_p est également un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

3. Donner des bases du noyau et l'image de $U_{\frac{1}{2}}$.

Partie II – Un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathbb{R})^2$

4. Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$U_p \circ U_q = U_q \circ U_p = U_r$$

5. Soit $p \in \mathbb{R}$. Montrer que U_p est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ *si et seulement si* $p \neq \frac{1}{2}$ et que, dans ce cas, il existe un réel q tel que $U_p^{-1} = U_q$.

6. On note

$$G = \left\{ U_p,\ p \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

Montrer que G est un sous-groupe de $(GL(\mathbb{R}^2), \circ)$.

Partie III – Puissances d'un endomorphisme

On fixe $p \in \mathbb{R}$ dans cette partie et on souhaite calculer les puissances de U_p.

7. Montrer que $(S + I) \circ U_p = S + I$ et que $(S - I) \circ U_p = (1 - 2p)(S - I)$

8. Déterminer $(S + I) \circ U_p^n$ et $(S - I) \circ U_p^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de U_p^n en fonction de S et I.

Partie IV – Application

On considère deux récipients A et B. Le récipient A contient initialement un volume V de grenadine tandis que le récipient B contient initialement un volume V d'eau. On appelle «opération» la procédure suivante :

- on prélève un volume v de liquide dans le récipient A que l'on verse dans le récipient B (le récipient A contient alors un volume $V - v$ et le récipient B un volume $V + v$) ;
- on mélange le contenu du récipient B ;
- on prélève alors un volume v de liquide du récipient B que l'on verse dans le récipient A (les récipients A et B contiennent alors à nouveau le même volume V de liquide) ;
- on mélange le contenu du récipient A.

On procède à plusieurs «opérations» successives et on note a_n et b_n les proportions respectives de grenadine dans les récipients A et B après n «opérations». On a donc notamment initialement $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.
On suppose enfin que $0 < v < V$.

10. Montrer qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_{n+1}, b_{n+1}) = U_p(a_n, b_n)$.

11. En déduire les termes généraux des suites (a_n) et (b_n) ainsi que leurs limites.

Exercice 1.

Soient E, F et G trois espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $F = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g)$ *si et seulement si* $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$ *si et seulement si* $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.