Devoir à la maison n°12 : corrigé

Solution 1.

1. **a.** L'application f^{n-1} n'étant pas constamment nulle, il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

   b. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x) = 0$$
On montre alors que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ par récurrence.
Initialisation : En composant par f^{n-1}, on obtient
$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^{n-1+i}(x) = 0_E$$
Or pour $i \geqslant 1$, $n-1+i \geqslant n$ donc $f^{n-1+i}(x) = 0$. On en déduit que $\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0$. Comme $f^{n-1}(x) \neq 0$, $\lambda_0 = 0$.
Hérédité : Supposons qu'il existe $k \in [\![0, n-2]\!]$ tel que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, k]\!]$. On a alors
$$\sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i f^i(x) = 0$$
En composant par f^{n-k-2}, on obtient ensuite
$$\sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i f^{n-k-2+i}(x) = 0$$
Or pour $i \geqslant k+2$, $n-k-2+i \geqslant n$ donc $\lambda_i = 0$. Il reste finalement $\lambda_{k+1} f^{n-1}(x) = 0$ puis $\lambda_{k+1} = 0$ puisque $f^{n-1}(x) \neq 0$.
Conclusion : Par récurrence, $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.
Par conséquent, la famille $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$ est libre. Puisqu'elle comporte n éléments et que $n = \dim E$, c'est une base de E.

2. **a.** La famille $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f^{n-k}(x))$ est une sous-famille de la famille libre $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$. Elle est donc également libre. On en déduit $\dim F_k = k$.

   b. Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $f^k(f^{n-i}(x)) = f^{n+k-i}(x) = 0$ car $n+k-i \geqslant n$ et donc $f^{n-i}(x) \in \operatorname{Ker} f^k$. Comme $(f^{n-i}(x))_{1 \leqslant i \leqslant k}$ engendre F_k, $F_k \subset \operatorname{Ker} f^k$. Donc $\dim \operatorname{Ker} f^k \geqslant \dim F_k = k$.
Pour $1 \leqslant i \leqslant n-k$, $f^{n-i}(x) \in \operatorname{Im} f^k$ car $n-i \geqslant k$. Comme $(f^{n-i}(x))_{1 \leqslant i \leqslant n-k}$ engendre F_{n-k}, $F_{n-k} \subset \operatorname{Im} f^k$. D'où $\dim \operatorname{Im} f^k \geqslant \dim F_{n-k} = n-k$. Par le théorème du rang, on a donc $\dim \operatorname{Ker} f^k = n - \dim \operatorname{Im} f^k \leqslant k$. On en déduit que $\dim \operatorname{Ker} f^k = k = \dim F_k$ et, comme $F_k \subset \operatorname{Ker} f^k$, $F_k = \operatorname{Ker} f^k$.
Quitte à remplacer k par $n-k$, on a également $F_k \subset \operatorname{Im} f^{n-k}$. Et comme $f^k \circ f^{n-k} = \mathbf{0}$, on a aussi $\operatorname{Im} f^{n-k} \subset \operatorname{Ker} f^k$. On en déduit que $F_k = \operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Im} f^{n-k}$.

   c. On a $F_k = \operatorname{Im} f^{n-k}$ d'après la question précédente. Donc $f(F_k) = \operatorname{Im} f^{n-k+1} \subset \operatorname{Im} f^{n-k} = F_k$. F_k est donc stable par f.

3. **a.** On considère $A = \{k \in \mathbb{N}^* \mid \tilde{f}^k = \tilde{\mathbf{0}}\}$. A est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ puisque $n \in A$. Elle admet donc un plus petit élément $p \geqslant 1$. Si $p = 1$, alors $p-1 = 0$ mais $\tilde{f}^{p-1} = \mathrm{Id}_F \neq \tilde{\mathbf{0}}$ car $F \neq \{0_E\}$. Si $p \geqslant 2$, alors $p-1 \in \mathbb{N}^*$ et on ne peut avoir $\tilde{f}^{p-1} = \tilde{\mathbf{0}}$ sinon $p-1 \in A$, ce qui contredit la minimalité de p. On a donc dans tous les cas $\tilde{f}^{p-1} \neq \tilde{\mathbf{0}}$ et $\tilde{f}^p = \tilde{\mathbf{0}}$.

   b. On prouve comme à la question **1.b** que la famille $(y, \tilde{f}(y), \dots, \tilde{f}^{p-1}(y))$ est libre. Comme $k = \dim F$ et que la famille précédente est de cardinal p, on en déduit $p \leqslant k$. Ainsi $\tilde{f}^k = \tilde{\mathbf{0}}$.

   c. La question précédente prouve que $F \subset \operatorname{Ker} f^k$. Or on a vu à la question **2.b** que $\dim \operatorname{Ker} f^k = k$. Comme $\dim F = k$, on a donc $F = \operatorname{Ker} f^k$.

d. On vient de voir que tous les sous-espaces stables de dimension k avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$ était de la forme $\operatorname{Ker} f^k$. Réciproquement, on a vu à la question **2** que les sous-espaces $\operatorname{Ker} f^k$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$ étaient stables par f. Il reste à remarquer que le seul sous-espace de dimension 0 i.e. le sous-espace nul et que le seul sous-espace de dimension n i.e. E tout entier sont évidemment stables par f. Enfin, comme $f^0 = \operatorname{Id}_E$ et $f^n = \mathbf{0}$, on a $\{0\} = \operatorname{Ker} f^0$ et $E = \operatorname{Ker} f^n$.
Les sous-espaces stables par f sont donc exactement les sous-espaces $\operatorname{Ker} f^k$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

4. **a.** La famille $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$ étant une base de E, il existe un unique n-uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ de réels tel que :

$$g(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x)$$

Ce sont les coordonnées de $g(x)$ dans la base $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$.

b. Si g commute avec f, g commute avec f^i pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Par conséquent,

$$g\left(f^i(x)\right) = f^i(g(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^{k+i}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k\right)\left(f^i(x)\right)$$

On en déduit que les endomorphismes g et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$ coïncident sur la base $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$.
Ceci prouve que

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = \alpha_0 \operatorname{Id}_E + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$$

c. Notons $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par la famille $(\operatorname{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ et $\mathcal{C}'$ l'ensemble des endomorphismes commutant avec f. La question précédente montre que $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$. Mais comme toute puissance de f commute avec f, il est clair que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$. Ainsi $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$. Comme la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$ est une famille libre de E, a fortiori la famille $(\operatorname{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$. On en déduit que $\dim \mathcal{C} = n$.

Solution 2.

1. On a :

$$(u - r_1 \operatorname{Id}_E) \circ (u - r_2 \operatorname{Id}_E) = u^2 - (r_1 + r_2)u + r_1 r_2 \operatorname{Id}_E$$

Comme r_1 et r_2 sont les racines de $X^2 + aX + b$, on a $r_1 + r_2 = -a$ et $r_1 r_2 = b$. D'où

$$(u - r_1 \operatorname{Id}_E) \circ (u - r_2 \operatorname{Id}_E) = u^2 + au + b \operatorname{Id}_E$$

On prouve de même que

$$(u - r_2 \operatorname{Id}_E) \circ (u - r_1 \operatorname{Id}_E) = u^2 + au + b \operatorname{Id}_E$$

2. Comme $(u - r_1 \operatorname{Id}_E) \circ (u - r_2 \operatorname{Id}_E) = u^2 + au + b \operatorname{Id}_E$, on a $\operatorname{Ker}(u - r_2 \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u^2 + au + b \operatorname{Id}_E)$ i.e. $F_2 \subset F$.
On prouve de même que $F_1 \subset F$.

3. Soient $x \in F_1 \cap F_2$. On a alors $u(x) = r_1 x = r_2 x$. Mais, comme $r_1 \neq r_2$, $x = 0_E$. D'où $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.
Comme $F_1 \subset F$ et $F_2 \subset F$, on a $F_1 + F_2 \subset F$. Prouvons l'inclusion réciproque. Soit $x \in F$.
Analyse : On suppose qu'il existe $(y, z) \in F_1 \times F_2$ tel que $x = y + z$. Remarquons que $u(y) = r_1 y$ et $u(z) = r_2 z$. On a alors

$$(u - r_1 \operatorname{Id}_E)(x) = (u - r_1 \operatorname{Id}_E)(z) = (r_2 - r_1)z$$

et

$$(u - r_2 \operatorname{Id}_E)(x) = (u - r_2 \operatorname{Id}_E)(y) = (r_1 - r_2)y$$

Synthèse : Posons $z = \frac{1}{r_2 - r_1}(u(x) - r_1 x)$ et $y = \frac{1}{r_2 - r_1}(r_2 x - u(x))$. On voit facilement que $y + z = x$. De plus,

$$(u - r_1 \operatorname{Id}_E)(y) = (u - r_1 \operatorname{Id}_E) \circ (u - r_2 \operatorname{Id}_E)(x) = (u^2 + au + b \operatorname{Id}_E)(x) = 0_E \text{ car } x \in F$$
$$(u - r_2 \operatorname{Id}_E)(z) = (u - r_2 \operatorname{Id}_E) \circ (u - r_1 \operatorname{Id}_E)(x) = (u^2 + au + b \operatorname{Id}_E)(x) = 0_E \text{ car } x \in F$$

donc $y \in F_1$ et $z \in F_2$.
En conclusion, on a bien $F = F_1 \oplus F_2$.

4. **a.** Soit f une solution de $(\mathcal{E})$. f est deux fois dérivable.
Supposons avoir montré que f est n fois dérivable pour un entier $n \geqslant 2$ et montrons que f est $n+1$ fois dérivable. On a $f'' = -af' - bf$. f est n fois dérivable donc, a fortiori, $n-1$ fois dérivable. f' est également $n-1$ fois dérivable. Par conséquent f'' est $n-1$ fois dérivable. Donc f est $n+1$ fois dérivable.
Par récurrence, f est n fois dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b. On a prouvé à la question précédente que toutes les solutions de $(\mathcal{E})$ sont des éléments de E. De plus, pour tout $f \in E$:

$$f \text{ solution de } (\mathcal{E}) \iff (u^2 + au + b\,\mathrm{Id}_E)(f) = 0 \iff f \in \mathrm{Ker}(u^2 + au + b\,\mathrm{Id}_E)$$

Ainsi F est bien l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

c. Notons $f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{r_1 t} \end{array} \right.$ et $f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{r_2 t} \end{array} \right.$. On a, d'après le cours $F_1 = \mathrm{vect}(f_1)$ et $F_2 = \mathrm{vect}(f_2)$.

d. D'après la question **3**, $F = \mathrm{vect}(f_1, f_2)$ et on retrouve bien le résultat du cours souhaité.