Intégrales Impropres

Convergences

Solution 1

1. On effectue le changement de variable $t = x - n\pi$ et on remarque que

$$\sin^2(t+n\pi) = ((-1)^n \sin t)^2 = \sin^2 t$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $0 \leq x \leq \pi$

$$(n\pi)^4 \leq (x+n\pi)^4 \leq ((n+1)\pi)^4$$

puis comme $\sin^2 x \geq 0$

$$(n\pi)^4 \sin^2 x \leq (x+n\pi)^4 \sin^2 x \leq ((n+1)\pi)^4 \sin^2 x$$

et enfin

$$\frac{1}{((n+1)\pi)^4 \sin^2 x} \leq \frac{1}{(x+n\pi)^4 \sin^2 x} \leq \frac{1}{(n\pi)^4 \sin^2 x}$$

On intégre les dernières inégalités entre 0 et π de sorte que $v_{n+1} \leq u_n \leq v_n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{dx}{1+(n\pi)^4 \sin^2 x}$ étant π-périodique, on a

$$v_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(n\pi)^4 \sin^2 x}$$

Les règles de Bioche nous conseillent d'effectuer le changement de variable $t = \tan x$. On trouve en effet

$$\begin{aligned} v_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+(n\pi)^4)\,t^2+1} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{1+(n\pi)^4}} \arctan\left(\sqrt{1+(n\pi)^4}\, t\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^4}} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+((n+1)\pi)^4}} \leq u_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^4}}$$

puis que $u_n \sim \frac{1}{n^2\pi}$.

4. Puisque l'intégrande est positif, $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{1+x^4 \sin^2 x}$ est croissante et admet donc une limite (éventuellement infinie) en $+\infty$. De plus, $F(N\pi) = \sum_{n=0}^{N} u_n$ pour $N \in \mathbb{N}$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge d'après la question précédente. Ainsi $F(N\pi)$ tend vers une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$. Cette limite est également celle de F en $+\infty$, ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4 \sin^2 x}$ converge.

Solution 2

1. Soit A un réel tel que P′ ne s'annule pas sur $[A, +\infty[$. L'intégrale I est de même nature que l'intégrale $\int_A^{+\infty} \cos(P(x))\, dx$. On réécrit cette intégrale sous la forme $\int_A^{+\infty} \frac{1}{P'(x)} P'(x) \cos(P(x))\, dx$. Puisque $x \mapsto \frac{\sin(P(x)}{P'(x)}$ admet une limite nulle en $+\infty$ ($\deg P' \geq 1$), l'intégration par parties montre que l'intégrale $\int_A^{+\infty} \cos(P(x))\, dx$ est de même nature que l'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{P''(x)}{P'(x)^2} \sin(P(x))\, dx$. Puisque $\deg P \geq 2$, $\frac{P''(x)}{P'(x)^2} \sin(P(x)) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. L'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{P''(x)}{P'(x)^2} \sin(P(x))\, dx$ est donc convergente de même que I.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|\cos(\mathrm{P}(x))| \geq \cos^2(\mathrm{P}(x)) = \frac{1+\cos(2\mathrm{P}(x))}{2}$. D'après la première question, $\int_0^{+\infty} \cos(2(\mathrm{P}(x))\,\mathrm{d}x$ converge et $\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x$ diverge vers $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} |\cos(\mathrm{P}(x))|\,\mathrm{d}x$ diverge vers $+\infty$.

3. Par le changement de variable $t = x^2$, $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ puis, par intégration par parties, $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$. En posant $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$, on a $\mathrm{I} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On vérifie que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées. On en déduit que I est du signe de u_0, c'est-à-dire positif.

Solution 3

---

1. ln est continue sur $]0,1]$ et $\ln(x) \underset{x\to0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ par croissances comparées. Comme $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable au voisinage de 0^+ ($\frac{1}{2} < 1$), ln est intégrable sur $]0,1]$. Finalement, $\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge.

2. $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (puisque $e^{-u} \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u}\right)$). Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ ($2 > 1$), $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Finalement, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

3. Tout d'abord, $x \mapsto x\sin(x)e^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Comme sin est bornée, $x\sin(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(xe^{-x}\right)$. De plus, $xe^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^2}$ par croissances comparées. Ainsi $x\sin(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^2}$. Or $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty[$ donc $x \mapsto x\sin(x)e^{-x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Finalement, $\int_0^{+\infty} x\sin(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge.

4. Tout d'abord, $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus, $\ln(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \ln(t)$ et on a vu que ln était intégrable au voisinage de 0^+ donc $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est également intégrable au voisinage de 0^+. Par croissances comparées, $\ln(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est également intégrable au voisinage de $+\infty$. Finalement, $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

5. $\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \underset{t\to1^-}{\sim} \frac{1}{1-t}$ et $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ n'est pas intégable au voisinage de 1^-. L'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$ diverge.

6. Tout d'abord, $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2+1}$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus, $\frac{\ln t}{t^2+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \ln(t)$ et on a vu que ln était intégrable au voisinage de 0^+ donc $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est également intégrable au voisinage de 0^+. Par croissances comparées, $\frac{\ln t}{t^2+1} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ donc $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2+1}$ est également intégrable au voisinage de $+\infty$. Finalement, $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2+1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ converge.

7. $\ln x \underset{x\to1^+}{\sim} x-1$ donc $\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \underset{x\to1^+}{\sim} \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$. Ainsi $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 1^+ par comparaison à une intégrale de Riemann.
Par croissances comparées, $\sqrt{\ln x} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(x^{\frac{1}{4}}\right)$ donc $\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}\right)$ donc $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ par comparaison à une intégrale de Riemann.
Finalement, $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge.

Solution 4

---

1. Supposons $\alpha > 1$. Donnons-nous $\gamma \in]1,\alpha[$ (par exemple $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$). Comme $\gamma < \alpha$, $\frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \underset{t\to+\infty}{=} \frac{1}{t^\gamma}$ par croissances comparées. Or $\gamma > 1$ donc $t \mapsto \frac{1}{t^\gamma}$ est intégrable sur $[e,+\infty[$. On en déduit que $\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ converge.
Supposons $\alpha < 1$. Alors $\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\right)$ par croissances comparées. Or $\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge donc $\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ diverge également.
Supposons enfin $\alpha = 1$. Si $\beta \neq 1$,

$$\int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} = \frac{1}{1-\beta}\left[\ln(t)^{1-\beta}\right]_e^x = \frac{1}{1-\beta}\left(\ln(x)^{1-\beta} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta < 1 \\ \frac{1}{\beta-1} & \text{si } \beta > 1 \end{cases}$$

Enfin, si $\beta = 1$,

$$\int_e^x \frac{dt}{t\ln t} = [\ln(\ln t)]_e^x = \ln(\ln x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Pour récapitutler, $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

2. Via le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dt}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$ est de même nature que l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{du}{u^{2-\alpha}(\ln u)^\beta}$. D'après la question précédente, cette intégrale converge si et seulement si $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Solution 5

1. Posons $f : x \mapsto e^{-x}\ln x$. f est bien continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \ln x$ et $\ln x \underset{x\to0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ par croissances comparées. Ainsi $f(x) \underset{x\to0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et f est intégrable au voisinage de 0^+.
Enfin $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées de sorte que f est intégrable au voisinage de $+\infty$.
L'intégrale I converge bien.

2. Par relation de Chasles,

$$\mathrm{I} = \int_0^1 e^{-x}\ln x\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx$$

En effectuant le changement de variable $x \mapsto 1/x$ dans la première intégrale,

$$\mathrm{I} = -\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\ln x\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx = \int_1^{+\infty}\left(1 - \frac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2}\right)e^{-x}\ln x\,dx = \int_1^{+\infty}(1-e^{\varphi}(x))\,e^{-x}\ln x\,dx$$

en posant

$$\varphi : x \mapsto x - \frac{1}{x} - 2\ln x$$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2} \geq 0$$

Ainsi φ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme $\varphi(1) = 1$, φ est positive sur $[1, +\infty[$. On en déduit que

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ (1-e^{\varphi}(x))\,e^{-x}\ln x \leq 0$$

Par conséquent, $\mathrm{I} \leq 0$. Bien entendu, $x \mapsto (1-e^{\varphi}(x))\,e^{-x}\ln x$ est continue et non constamment nulle sur $[1, +\infty[$ donc $\mathrm{I} < 0$.

Solution 6

1. On procède par intégration par parties : comme $x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ admet une limite finie (nulle) en $+\infty$, les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}$ sont de même nature. Puisque $\frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$, la seconde intégrale converge ($3/2 > 1$) et donc la première également.

2. **ATTENTION !** On pourrait naïvement penser que, puisque $\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, cette intégrale converge également. Mais $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ n'est pas de signe constant !

Remarquons que, comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$,

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

On a vu que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge et $3/2 > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\,\mathrm{d}x$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$. Or

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos(2x)}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos(2x)}{2x}$$

On montre à nouveau à l'aide d'une intégration par parties que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x$ converge mais $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x}$ diverge donc $int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge. Finalement, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\,\mathrm{d}x$ diverge.

Solution 7

Tout d'abord, $t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ quelle soit la valeur de α.
Etude en 0. $\frac{\sin t}{t^\alpha} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ donc $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ i.e. $\alpha < 2$.
Etude en $+\infty$. Supposons d'abord $\alpha > 0$. Comme $\lim_{t\to+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} = 0$, les intégrales $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}$ sont de même nature par intégration par parties. Or $\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$ donc $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ converge. Il en est donc de même de $\int_p i^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.
Supposons $\alpha \leq 0$. Posons $\mathrm{F}(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. Comme sin est positive sur $[2n\pi, (2n+1)\pi]$ et comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\mathrm{F}((2n+1)\pi) - \mathrm{F}(2n\pi) = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \geq (2n\pi)^{-\alpha} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = 2(2n\pi)^{-\alpha}$$

Ainsi $\mathrm{F}((2n+1)\pi) - \mathrm{F}(2n\pi)$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Donc F n'admet pas de limite en $+\infty$ i.e. l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge.
En conclusion, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $0 < \alpha < 2$.

Solution 8

Soit $x \in [1, +\infty[$. Par intégration par parties

$$\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{f(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{f(t)^2}{t^2}\right]_1^x + 2\int_1^x \frac{f(t)f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t = f(1)^2 - \frac{f(x)^2}{x^2} + 2\int_1^x \frac{f(t)f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leq 2\int_1^x \frac{f(t)f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t \leq f(1)^2 + 2\sqrt{\int_1^x f(t)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_1^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t} \leq f(1)^2 + 2\sqrt{\int_1^x f(t)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_1^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

Posons $\mathrm{A} = f(1)^2$, $\mathrm{B} = \sqrt{\int_1^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t}$ et $h(x) = \sqrt{\int_1^x f(t)^2\,\mathrm{d}t}$. Alors

$$h(x)^2 \leq \mathrm{A} + 2\mathrm{B}h(x)$$

ou encore

$$(h(x) - \mathrm{B})^2 \leq \mathrm{A} + \mathrm{B}^2$$

puis

$$0 \leq h(x) \leq \mathrm{B} + \sqrt{\mathrm{A} + \mathrm{B}^2}$$

et enfin

$$\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t = h(x)^2 \leq (\mathrm{B} + \sqrt{\mathrm{A} + \mathrm{B}^2})^2$$

L'application $x \mapsto \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t$ est donc croissante (intégrande positive) et majorée : elle admet donc une limite en $+\infty$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc i.e. g est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Solution 9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\int_0^n \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t$$

Or via le changement de variable $u = t - (k-1)\pi$,

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} |\sin(u + (k-1)\pi)|\ \mathrm{d}u = \int_0^{\pi} |(-1)^{k-1}|\sin u|\ \mathrm{d}u = \int_0^{\pi} \sin u\ \mathrm{d}u = 2$$

Finalement,

$$\int_0^n \frac{|\sin t|}{t}\ \mathrm{d}t \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Or la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{|\sin t|}{t}\ \mathrm{d}t = +\infty$$

La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est donc pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorie

Solution 10

1. Supposons $\ell \neq 0$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $\ell > 0$. Puisque f admet ℓ pour limite en $+\infty$, il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) \geq \frac{\ell}{2}$ pour $x \geq \mathrm{A}$. Mais alors, pour $x \geq \mathrm{A}$:

$$\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{A}} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{\mathrm{A}}^x f(t)\ \mathrm{d}t \geq \int_0^{\mathrm{A}} f(t)\ \mathrm{d}t + \ell(x - \mathrm{A})$$

Par minoration $\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui contredit l'énoncé.

2. Supposons que f n'admette pas 0 pour limite en $+\infty$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$, il existe $x \geq \mathrm{A}$ tel que $|f(x)| \geq \varepsilon$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, $|x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge, on peut choisir $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x, y \geq \mathrm{A}$:

$$\left|\int_x^y f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \frac{\alpha\varepsilon}{3}$$

Soit alors $x \geq \mathrm{A}$ tel que $|f(x)| \geq \varepsilon$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f(x) \geq \varepsilon$. Pour tout $t \in [x, x+\alpha]$, $|f(t) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et en particulier $f(t) \geq f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit :

$$\int_x^{x+\alpha} f(t)\ \mathrm{d}t \geq \frac{\alpha\varepsilon}{2}$$

On aboutit donc à une contradiction.

Solution 11

Supposons que f soit M-lipschitzienne avec $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge, il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \geq \mathrm{A}$ et pour tout $y > x$, $\left|\int_x^y f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon^2}{2\mathrm{M}}$. Soit donc (x, y) tel que $\mathrm{A} \leq x < y$. Puisque f est M-lipschitzienne,

$$\forall t \in [x, y],\ -\mathrm{M}(t - x) \leq f(t) - f(x) \leq \mathrm{M}(t - x)$$

En intégrant sur $[x, y]$, on obtient

$$-M\frac{(y-x)^2}{2} \leq \int_x^y f(t)\,dt - (y-x)f(x) \leq M\frac{(y-x)^2}{2}$$

On en déduit que pour tout $y > x$,

$$|f(x)| \leq \frac{\varepsilon^2}{2M(y-x)} + M\frac{y-x}{2}$$

Une étude rapide de la fonction $g : t \mapsto \frac{\varepsilon^2}{2Mt} + \frac{Mt}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ montre que g admet un minimum en $\frac{\varepsilon}{M}$ valant ε. En posant $y = x + \frac{\varepsilon}{M}$ dans l'inégalité précédente, on obtient donc $|f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \geq A$.
Ceci prouve alors que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

Solution 12

---

1. Puisque $(ff')' = f'^2 + ff''$, le théorème fondamental de l'analyse permet d'affirmer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)f'(x) = f(0)f'(0) + \int_0^x f'^2(t)\,dt + \int_0^x f(t)f''(t)\,dt$$

Par ailleurs, ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque $|ff''| \leq \frac{1}{2}\left(f^2 + f''^2\right)$. En particulier, $x \mapsto \int_0^x f(t)f''(t)\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$.
Par ailleurs, puisque f'^2 étant positive $x \mapsto \int_0^x f'(t)^2\,dt$ admet une limite finie ou égale à $+\infty$ en $+\infty$. Supposons que cette limite soit $+\infty$. Alors la relation précédente montre que $\lim_{+\infty} ff' = +\infty$. Mais comme $(f^2)' = 2ff'$, on peut affirmer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)^2 = f(0)^2 + 2\int_0^x f(t)f'(t)\,dt$$

Ainsi on peut classiquement montrer que $\lim_{+\infty} f^2 = +\infty$, ce qui contredit l'intégrabilité de f^2 sur $\mathbb{R}$. Finalement, $x \mapsto \int_0^x f'(t)^2\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$, ce qui signifie que f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
On montre de manière similaire que f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_-$ de telle sorte que f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. On exploite à nouveau le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)f'(x) = f(0)f'(0) + \int_0^x f'^2(t)\,dt + \int_0^x f(t)f''(t)\,dt$$

Puisque f'^2 et ff' sont intégrables, on peut affirmer que ff' admet une limite finie en $+\infty$. Mais on rappelle alors que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

$$f(x)^2 = f(0)^2 + 2\int_0^x f(t)f'(t)\,dt$$

Ainsi ff' ne peut avoir une limite non nulle en $+\infty$ car alors $\lim_{+\infty} f^2 = +\infty$, ce qui contredirait l'intégrabilité de f^2. Finalement, ff' admet une limite nulle en $+\infty$. On montre de la même manière que ff' admet une limite nulle en $-\infty$.
Par intégration par parties

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)^2 = [ff']_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f''(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f''(t)\,dt$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f''(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2\,dt\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)^2\,dt\right)$$

ce qui permet d'obtenir l'inégalité voulue.

Solution 13

---

1. Il est clair que si $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge, alors la suite $n \mapsto \int_0^n f(t)\, \mathrm{d}t$ converge.
Réciproquement, supposons que $n \mapsto \int_0^n f(t)\, \mathrm{d}t$ converge. Notons ℓ sa limite. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq \mathrm{N},\ \left|\int_0^n f(t)\, \mathrm{d}t - \ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme $\lim_{+\infty} f = 0$, il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \geq \mathrm{A},\ |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $\mathrm{B} = \max(\mathrm{A}+1, \mathrm{N}+1)$. Soit $x \geq \mathrm{B}$. Posons $\mathrm{M} = \lfloor x \rfloor$. Alors

$$\left|\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t - \ell\right| = \left|\int_0^{\mathrm{M}} f(t)\, \mathrm{d}t - \ell + \int_{\mathrm{M}}^x f(t)\, \mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_0^{\mathrm{M}} f(t)\, \mathrm{d}t - \ell\right| + \left|\int_{\mathrm{M}}^x f(t)\, \mathrm{d}t\right|$$

Comme $\mathrm{M} \geq x - 1 \geq \mathrm{N}$,

$$\left|\int_0^{\mathrm{M}} f(t)\, \mathrm{d}t - \ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Par inégalité triangulaire et comme $\mathrm{A} \leq \mathrm{M} \leq x \leq \mathrm{M}+1$,

$$\left|\int_{\mathrm{M}}^x f(t)\, \mathrm{d}t\right| \leq \int_{\mathrm{M}}^x |f(t)|\, \mathrm{d}t \leq \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}+1} \frac{\varepsilon}{2}\, \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2}$$

On en déduit que

$$\forall x \geq \mathrm{B},\ \left|\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t - \ell\right| \leq \varepsilon$$

Par conséquent $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t = \ell = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n f(t)\, \mathrm{d}t$$

2. Une des implications reste évidemment vraie : si $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge, alors la suite $n \mapsto \int_0^n f(t)\, \mathrm{d}t$ converge.
La réciproque est fausse en genéral. On peut par exemple considérer $f : t \mapsto \cos(\pi t)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^n f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\sin(\pi t)\right]_0^n = 0$$

Mais

$$\int_0^{2n+1/2} f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\sin(\pi t)\right]_0^{2n+1/2} = \frac{1}{\pi}$$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ diverge.

Calculs

Solution 14

Première méthode :

L'intégrale converge puisque $t \mapsto e^{-a^2t^2-\frac{b^2}{t^2}}$ est prolongeable par continuité en 0 et que $e^{-a^2t^2-\frac{b^2}{t^2}} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-a^2t^2}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$.
Posons $u = at - \frac{b}{t}$. Ceci définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. On a alors $t = \frac{u+\sqrt{u^2+4ab}}{2a}$ (on retient uniquement la solution positive de l'équation $u = at - \frac{b}{t}$). Remarquons que $u^2 = a^2t^2 + \frac{b^2}{t^2} - 2ab$. On a alors

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2-\frac{b^2}{t^2}}\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-2ab}\left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2+4ab}}\right)\frac{\mathrm{d}u}{2a} \\
&= \frac{e^{-2ab}}{2a}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-u^2}}{\sqrt{u^2+4ab}}\, \mathrm{d}u\right)
\end{aligned}$$

Le passage a dernière ligne est valide puisque les deux dernières intégrales sont convergentes. De plus, on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-u^2}}{\sqrt{u^2+4ab}}\,\mathrm{d}u = 0$ car la fonction $u \mapsto \frac{ue^{-u^2}}{\sqrt{u^2+4ab}}$ est impaire. Par conséquent :

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2-\frac{b^2}{t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-2ab}\sqrt{2\pi}}{2a}$$

Deuxième méthode :
Posons $f(b,t) = e^{-a^2t^2-\frac{b^2}{t^2}}$ et $\mathrm{I}(b) = \int_0^{+\infty} f(b,t)\,\mathrm{d}t$. La fonction $b \mapsto f(b,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial b}(b,t) = -\frac{2b}{t^2}f(b,t)$$

De plus $b \mapsto \frac{\partial f}{\partial b}(b,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $t \in]0,+\infty[$. Enfin, pour $b \in [b_1,b_2]$ avec $0 < b_1 < b_2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial b}(b,t)\right| \leq \frac{2b_2}{t^2}e^{-a^2t^2-\frac{b_1^2}{t^2}}$$

cette dernière expression étant intégrable sur $]0,+\infty[$. Le théorème de dérivation sous l'intégrale nous donne donc $\mathrm{I}'(b) = -\int_0^{+\infty} \frac{2b}{t^2}f(b,t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $b > 0$. Posons alors $u = \frac{b}{at}$. On a alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2b}{t^2}f(b,t)\,\mathrm{d}t = 2a\int_0^{+\infty} e^{-\frac{b^2}{u^2}-a^2u^2}\,\mathrm{d}u = 2a\mathrm{I}(b)$$

La fonction $b \mapsto \mathrm{I}(b)$ est donc solution de l'équation différentielle $y' = -2ay$ sur $]0;+\infty[$. Il existe donc $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{I}(b) = \mathrm{C}e^{-2ab}$ pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$. Enfin $b \mapsto f(b,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in]0,+\infty[$ et $|f(b,t)| \leq e^{-a^2t^2}$ pour tout $b \in \mathbb{R}$. Le théorème de continuité sous l'intégrale nous dit donc que $b \mapsto \mathrm{I}(b)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et notamment en 0. Par continuité, $\mathrm{I}(b) = \mathrm{C}e^{-2ab}$ pour tout $b \geq 0$. En particulier $\mathrm{C} = \mathrm{I}(0)$. Or $\mathrm{I}(0) = \int_0^{+\infty} e^{-a^2}t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}$ en effectuant le changement de variable $u = at$. On obtient donc :

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2-\frac{b^2}{t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-2ab}\sqrt{2\pi}}{2a}$$

Solution 15

---

1. Posons $f_{n,\alpha}(x) = \frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}}$. $f_{n,\alpha}$ est continue sur $[0,1[$ car le dénominateur ne s'y annule pas. De plus, $f_{n,\alpha}(x) \underset{x\to1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$. Or $x \mapsto (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ est intégrable sur un voisinage de 1. On en déduit que $f_{n,\alpha}$ est intégrable sur $[0,1[$.

2. Tout d'abord

$$\mathrm{I}_0(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = -2\left[\sqrt{1-x}\right]_0^1 = 2$$

Ensuite,

$$t^2 = \frac{1+\alpha x}{1-x} = \frac{\alpha+1}{1-x} - \alpha$$

On en déduit que

$$2t\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha+1}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Or

$$t(1-x) = \sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}} = \frac{2(1-x)}{\alpha+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+\alpha}$$

Ainsi

$$\mathrm{I}_0(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+\alpha}$$

- Si $\alpha = 0$, on a déjà vu que $\mathrm{I}_0(0) = 0$.
- Si $\alpha > 0$, alors

$$\mathrm{I}_0(\alpha) = \left[\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{t}{\sqrt{\alpha}}\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \arctan \sqrt{\alpha}$$

- Si $\alpha < 0$, alors on effectue le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ et

$$\mathrm{I}_0(\alpha) = \int_0^1 \frac{2\ \mathrm{d}u}{1 + \alpha u^2} = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}} \operatorname{argth} \sqrt{-\alpha}$$

On voit facilement qu'avec les expressions obtenues, les limites à droite et à gauche de I_0 en 0 sont égales à 2. Or $\mathrm{I}_0(0) = 2$ donc I_0 est continue en 0.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u(x) = \sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}$ et $g(x) = x^n u(x)$. On a

$$\begin{aligned} g'(x) &= nx^{n-1}u(x) + \frac{1}{2}x^n \frac{\alpha - 1 - 2\alpha x}{u(x)} \\ &= n\frac{x^{n-1}(1-x)(1+\alpha x)}{u(x)} + \frac{\alpha - 1}{2}\frac{x^n}{u(x)} - \alpha\frac{x^{n+1}}{u(x)} \\ &= n\frac{x^{n-1}}{u(x)} + \left(n + \frac{1}{2}\right)(\alpha - 1)\frac{x^n}{u(x)} - (n+1)\alpha\frac{x^{n+1}}{u(x)} \end{aligned}$$

En intégrant cette dernière égalité sur $[0, 1]$, on obtient :

$$n\mathrm{I}_{n-1}(\alpha) + \left(n + \frac{1}{2}\right)(\alpha - 1)\mathrm{I}_n(\alpha) - (n+1)\alpha\mathrm{I}_{n+1}(\alpha) = g(1) - g(0) = 0$$

- Pour $\alpha = 0$, la relation devient :

$$n\mathrm{I}_{n-1}(0) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\mathrm{I}_n(0) = 0$$

  Par récurrence, on a donc

$$\mathrm{I}_n(0) = \frac{(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 5 \times 3}{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2}\mathrm{I}_0$$

  On a $\mathrm{I}_0(0) = 2$ et on multiplie au numérateur et au dénominateur par $(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2$ de sorte que :

$$\mathrm{I}_n(0) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n-1}(n!)^2} = \frac{2n+1}{2^{2n-1}}\binom{2n}{n}$$

- Pour $\alpha = 1$, la relation devient :

$$n\mathrm{I}_{n-1}(1) - (n+1)\mathrm{I}_{n+1}(1) = 0$$

  Par récurrence, on obtient :

$$\mathrm{I}_{2p}(1) = \frac{(2p-1) \times (2p-3) \times \cdots \times 3 \times 1}{(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 4 \times 2}\mathrm{I}_0(1) = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\mathrm{I}_0(1) = \frac{\pi}{2^{2p+1}}\binom{2p}{p}$$

  car $\mathrm{I}_0(1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. On obtient également par récurrence :

$$\mathrm{I}_{2p+1}(1) = \frac{(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 4 \times 2}{(2p+1) \times (2p-1) \times \cdots \times 5 \times 3}\mathrm{I}_1(1) = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p}}{(2p+1)\binom{2p}{p}}$$

  car $\mathrm{I}_1(1) = 1$.

Solution 16

Notons f la fonction intégrée. Cette fonction est continue sur $]0, +\infty[$. De plus,

$$f(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} -2\ln(t)$$

donc

$$f(t) \underset{t\to 0^+}{=} o(1/\sqrt{t})$$

Ainsi f est intégrable sur $]0,1]$. De plus,

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

donc f est également intégrable sur $[1,+\infty[$. L'intégrale définissant I converge donc.

On écrit alors

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} 1\cdot\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$$

et on intègre par parties. D'après les équivalents précédents,

$$tf(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} -2t\ln(t)$$

et

$$tf(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

donc

$$\lim_{t\to 0^+} tf(t) = \lim_{t\to+\infty} tf(t) = 0$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= [tf(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tf'(t)\,\mathrm{d}t\\
&= -\int_0^{+\infty} t\cdot\frac{-2/t^3}{1+1/t^2}\,\mathrm{d}t\\
&= 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\
&= 2\left[\arctan(t)\right]_0^{+\infty} = \pi
\end{aligned}$$

Solution 17

Posons

$$\mathrm{J}(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

pour $x>0$. En effectuant le changement de variable $u=\frac{t}{x}$, on trouve

$$\mathrm{J}(x) = \frac{\ln x}{x}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

D'une part

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \lim_{+\infty}\arctan - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$

D'autre part en effectuant le changement de variable $v=\frac{1}{u}$ dans $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$, on obtient $\mathrm{I}=-\mathrm{I}$ d'où $\mathrm{I}=0$. Ainsi pour tout $x>0$,

$$\mathrm{J}(x) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ln x}{x}$$

On a

$$\mathrm{J}'(x) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$$

d'où $\mathrm{J}'(x)>0$ pour $x<e$ et $\mathrm{J}'(x)<0$ pour $x>e$. Ainsi J admet un maximum en e et celui-ci vaut $\mathrm{J}(e)=\frac{\pi}{2e}$.

Solution 18

1. Posons $f_a(t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$. Tout d'abord, f_a est clairement continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Lorsque $a > 0$, $f_a(t) \underset{t\to 0}{\sim} 1$ et $f_a(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{a+2}}$ donc f_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ ($a + 2 > 1$).
Lorsque $a = 0$, $f_a(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$ et $f_a(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2t^2}$ donc f_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Lorsque $a < 0$, $f_a(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^a}$ et $f_a(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc f_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ ($a < 1$).
Finalement, I est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Par la relation de Chasles,
$$\mathrm{J}(a) = \int_0^1 f_a(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f_a(t)\,\mathrm{d}t$$
Par le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$,
$$\int_1^{+\infty} f_a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f_{-a}(t)\,\mathrm{d}t$$
On en déduit la formule demandée.

3.
$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(a) &= \mathrm{J}(a) + \mathrm{J}(-a)\\
&= \int_0^1 (f_a(t) + f_{-a}(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \frac{(1+t^{-a}) + (1+t^a)}{(1+t^2)(1+t^a)(1+t^{-a})}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \frac{2+t^a+t^{-a}}{(1+t^2)(2+t^a+t^{-a})}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Solution 19

1. Posons $f(x,t) = \frac{\ln t}{x^2+t^2}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Si $x \neq 0$, $f(x,t) \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$ et $f(x,t) \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ par croissance comparées donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Enfin, $\frac{1}{t} \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{\ln t}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto f(0,t)$ n'est pas intégrable au voisinage de 0^+.
Le domaine de définition de F est donc $\mathbb{R}^*$.

2. Effectuons le changement de variable $u = 1/t$:
$$\mathrm{F}(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{+\infty}^0 \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = -\mathrm{F}(1)$$
Ainsi $\mathrm{F}(1) = 0$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Effectuons le changement de variable $u = x/t$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x) &= -\int_{+\infty}^{0} \frac{\ln(x/u)}{x^2 + x^2/u^2} \cdot \frac{x \, \mathrm{d}u}{u^2} \\
&= \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) - \ln(u)}{1 + u^2} \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x} \left(\ln(x) \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} - \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2} \, \mathrm{d}u \right) \\
&= \frac{1}{x} \left(\frac{\pi \ln x}{2} - \mathrm{F}(1) \right) \\
&= \frac{\pi \ln x}{2x}
\end{aligned}$$

Comme F est clairement paire, $\mathrm{F}(x) = \frac{\pi \ln |x|}{2|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

Solution 20

1. Tout d'abord, $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0, \pi]$ puisque $\sin t \underset{t \to 0}{\sim} t$ donc l'intégrale $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$ converge.
Ensuite, une primitive de sin sur $[\pi, +\infty[$ est $-\cos$ et la dérivée de $t \mapsto \frac{1}{t}$ est $t \mapsto \frac{1}{t^2}$. De plus, le crochet $\left[-\frac{\cos t}{t} \right]_\pi^{+\infty}$ converge car cos est bornée. Par intégrations par parties, $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$ et $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} \, \mathrm{d}t$ sont de même nature. Comme $\frac{\cos t}{t^2} \underset{t \to +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} \, \mathrm{d}t$ converge donc $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$ converge également.
Finalement, $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$ converge.

Remarque. On peut régler les «problèmes» en 0 et en $+\infty$ par une seule intégration par parties en choisissant $t \mapsto 1 - \cos t$ comme primitive de sin. Le crochet $\left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]_0^{+\infty}$ converge car $1 - \cos(t) \underset{t \to 0}{=} o(t)$.

2. Puisque

$$\lim_{t \to 0} \frac{\cos(t) \sin(2nt)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(2nt)}{t} = 2n$$

les fonctions $t \mapsto \frac{\cos(t) \sin(2nt)}{t}$ et $t \mapsto \frac{\sin(2nt)}{t}$ sont prolongeables en des fonctions continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. u_n et v_n sont donc bien définies.

3. Remarquons que

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t) \left(\sin((2n+2)t) - \sin(2nt)\right)}{\sin(t)} \, \mathrm{d}t$$

Or $\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ donc

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(t) \cos((2n+1)t) \, \mathrm{d}t$$

Or $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$ donc

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+2)t) \, \mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nt) \, \mathrm{d}t = \left[\frac{\sin((2n+2)t)}{2n+2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\sin(2nt)}{2n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

La suite (u_n) est donc constante. De plus,

$$u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t) \sin(2t)}{\sin(t)} \, \mathrm{d}t = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2t)) \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

4. Il s'agit du lemme de Riemann-Lebesgue (hors programme). Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut intégrer par parties :

$$\int_a^b \varphi(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\lambda}\left[\varphi(t)\cos(\lambda t)\right]_a^b + \frac{1}{\lambda}\int_a^b \varphi'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \frac{\varphi(a)\cos(\lambda a)}{\lambda} - \frac{\varphi(b)\cos(\lambda b)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b \varphi'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t$$

Comme cos est bornée,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\varphi(a)\cos(\lambda a)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\varphi(b)\cos(\lambda b)}{\lambda} = 0$$

Enfin, par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_a^b \varphi'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |\varphi'(t)||\cos(\lambda t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\int_a^b \varphi'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Par conséquent

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b h(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$$

5. h est bien continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus,

$$h(t) = \frac{\sin t - t\cos t}{t \sin t}$$

et $t\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$ et $\sin t - t\cos(t) \underset{t\to 0}{=} o(t^2)$ donc $h(t) \underset{t\to 0}{=} o(1)$ i.e. $\lim_{t\to 0} h(t) = 0$.
Par ailleurs, h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$h'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{\sin^2 t} = \frac{t^2 - \sin^2(t)}{t^2\sin^2(t)}$$

Or $t^2\sin^2(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^4$ et

$$\sin^2(t) \underset{t\to 0}{=} t^2\left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)^2 = t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4)$$

donc $t^2 - \sin^2(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{3}t^4$. Par conséquent, $\lim_{t\to 0} h'(t) = \frac{1}{3}$.
D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, h se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ que l'on notera encore h dans la suite.

6. Remarquons que

$$u_n - v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t)\sin(2nt)\,\mathrm{d}t$$

Comme h est $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$ d'après le lemme de Riemman-Lebesgue.
Or (u_n) est constante égale à $\frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\pi}{2}$.

7. Par le changement de variable $u = 2nt$,

$$v_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Comme l'intégrale I converge

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\pi}{2}$$

Solution 21

1. Soit $x \in [1, +\infty[$.
$$\int_1^x \frac{f(at)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{f(at)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
En effectuant le changement de variable $u = at$ dans la première intégrale
$$\int_1^x \frac{f(at)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_a^{ax} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
Enfin, d'après la relation de Chasles,
$$\int_1^x \frac{f(at)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^a \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

2. Soit $x \in [1, +\infty[$. Comme f est continue, elle admet un minimum m_x et un maximum M_x sur le segment $[x, ax]$. Alors
$$m_x \int_x^{ax} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{M}_x \int_x^{ax} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$
ou encore
$$m_x \ln(a) \leq \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{M}_x \ln(a)$$
Si $a > 1$,
$$m_x \leq \frac{1}{\ln(a)} \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{M}_x$$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c_x \in [x, a_x]$ tel que
$$f(c_x) = \frac{1}{\ln(a)} \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
ou encore
$$\int_x^{ax} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = f(c_x)\ln(a)$$
Ceci est encore valable si $a = 1$ (prendre $c_x = x$ par exemple). Comme $c_x \geq x$, $\lim_{x\to+\infty} f(c_x) = \ell$ de sorte que
$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \ell \ln(a)$$
On en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{f(at)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et que
$$\int_1^{+\infty} \frac{f(at)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \ell\ln(a) - \int_1^a \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Solution 22

---

1. Tout d'abord, $t \mapsto \ln(\sin t)$ est bien continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par ailleurs,
$$\sin t \underset{t\to0^+}{=} t + o(t)$$
donc
$$\ln(\sin t) \underset{t\to0^+}{=} \ln(t) + \ln(1+o(1)) \underset{t\to+\infty}{=} \ln(t) + o(1)$$
A fortiori, comme $\lim_{t\to0^+} \ln(t) = -\infty$
$$\ln(\sin t) \underset{t\to0^+}{\sim} \ln(t)$$
Par croissances comparées, on a donc
$$\ln(\sin t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/\sqrt{t})$$
Par conséquent, $t \mapsto \ln(\sin t)$ est intégrable sur $]0, 1]$. L'intégrale définissant I converge.

2. Il suffit d'effectuer le changement de variable $u = \pi/2 - t$.

3. Via le changement de variable $u = \pi - t$,

$$\mathrm{I} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)\ \mathrm{d}u$$

Via la relation de Chasles

$$2\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\ \mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \ln(\sin t)\ \mathrm{d}t$$

4.

$$\begin{aligned}
2\mathrm{I} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\ \mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)\cos(t))\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)/2)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\ \mathrm{d}t - \frac{\pi \ln 2}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\ \mathrm{d}u - \frac{\pi \ln 2}{2} \qquad \text{via le changement de variable } u = 2t \\
&= \mathrm{I} - \frac{\pi \ln 2}{2}
\end{aligned}$$

Finalement, $\mathrm{I} = -\frac{\pi \ln 2}{2}$.

Solution 23

Tout d'abord, l'intégrande est continu sur $\mathbb{R}_+^*$. Par croissances comparées,

$$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \underset{t \to +\infty}{=} o(1/t^2)$$

et par DL usuel

$$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \underset{t \to 0}{=} b - a + o(1)$$

On en déduit que $t \mapsto \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ensuite, pour $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\ \mathrm{d}t = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\ \mathrm{d}t - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t}\ \mathrm{d}t$$

Les deux intégrales convergent encore par croissances comparées. Via les changements de variables $u = at$ et $u = bt$,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\ \mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\ \mathrm{d}u - \int_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\ \mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\ \mathrm{d}u$$

Comme $\frac{e^{-u}}{u} \underset{u \to 0^+}{=} \frac{1}{u} + \varphi(u)$ avec $\varphi(u) \underset{u \to 0^+}{=} \mathcal{O}(1)$,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\ \mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \varphi(u)\ \mathrm{d}u = \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \varphi(u)\ \mathrm{d}u$$

et

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \varphi(u)\ \mathrm{d}u = 0$$

Finalement,

$$\mathrm{I} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Solution 24

- Notons, pour tout x positif

  $$f(x) = \frac{1}{1+x^3}$$

  La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et

  $$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$$

  On déduit donc du théorème de comparaison aux intégrales de Riemann que I converge.

- Après une décomposition en éléments simples élémentaires, on aboutit à :

  $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)$$

  d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$

  $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}\right) \end{aligned}$$

  ainsi, pour tout u positif

  $$\mathrm{I}(u) = \frac{1}{3}\left(\ln(u+1) - \ln\left(\sqrt{u^2-u+1}\right)\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan(2(u-1/2)/\sqrt{3}) + \arctan(1/\sqrt{3})\right)$$

  puis

  $$\mathrm{I} = \lim_{u\to+\infty} \mathrm{I}(u) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Solution 25

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|\cos(t)e^{-at}| \leq e^{-at} \qquad \text{et} \qquad |\sin(t)e^{-at}| \leq e^{-at}$$

et $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (par exemple, $e^{-at} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$). Ainsi $t \mapsto \cos(t)e^{-at}$ et $t \mapsto \sin(t)e^{-at}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.
Remarquons que

$$\mathrm{I} + i\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} e^{it}e^{-at}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{(i-a)t}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(i-a)t}}{i-a}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a-i} = \frac{a+i}{a^2+1}$$

En effet,

$$\left|\frac{e^{(i-a)t}}{i-a}\right| = \frac{e^{-at}}{|i-a|}$$

donc $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{(i-a)t}}{i-a} = 0$.
Comme I et J sont réelles,

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \mathrm{Re}\left(\frac{a+i}{a^2+1}\right) = \frac{a}{a^2+1} \\ \mathrm{J} &= \mathrm{Im}\left(\frac{a+i}{a^2+1}\right) = \frac{1}{a^2+1} \end{aligned}$$

Solution 26

1.
$$I = \frac{1}{2}\left[\arctan(t/2)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

2. Par décomposition en éléments simples :
$$\frac{1}{4-t^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2-t}+\frac{1}{2+t}\right)$$
Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{4-t^2}$ est donc $t \mapsto \frac{1}{4}(-\ln(2-t)+\ln(2+t))$. Puisque $\lim_{t\to 2^-} \frac{1}{4}(-\ln(2-t)+\ln(2+t)) = +\infty$, l'intégrale J diverge.

3. Une primitive de sin est $-\cos$, qui n'admet pas de limite en $+\infty$ donc l'intégrale K diverge.

4.
$$L = [t\ln t - t]_0^1 = -1$$

5.
$$M = -\frac{1}{a}\left[e^{-at}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}$$

6.
$$N = \frac{1}{3}\left[\arcsin(3t)\right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{6}$$

7. Par une décomposition en éléments simples :
$$\frac{1}{t^2-3t+2} = \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}$$
Ainsi
$$O = \left[\ln\left(\frac{t-2}{t-1}\right)\right]_3^{+\infty} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$$

8. Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$ sur $[2,+\infty[$ est $t \mapsto \ln(\ln t)$, qui admet une limite infinie en $+\infty$. L'intégrale P diverge.

Comportements asymptotiques

Solution 27

Notons F l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ s'annulant en 0. On a donc $F' + F = \varphi$. Par variation de la constante, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = e^{-x}\int_0^x e^t\varphi(t)\ dt + \lambda e^{-x}$$
Notons ℓ la limite de φ en $+\infty$. On a donc
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x \varphi(t)e^t\ dt = \int_0^x \ell e^t\ dt + \int_0^x (\varphi(t)-\ell)e^t\ dt = \ell(e^x-1) + \int_0^x (\varphi(t)-\ell)e^t\ dt$$
Puisque $(\varphi(t)-\ell)e^t \underset{t\to+\infty}{=} o(e^t)$, que $t \mapsto e^t$ est positive et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^t\ dt$ diverge, on a par intégration des relations de comparaison
$$\int_0^x (\varphi(t)-\ell)e^t\ dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_0^x e^t\ dt\right)$$
ou encore
$$\int_0^x (\varphi(t)-\ell)e^t\ dt \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$$
Ainsi
$$\int_0^x \varphi(t)e^t\ dt \underset{x\to+\infty}{=} \ell e^x + o(e^x)$$
puis
$$F(x) \underset{x\to+\infty}{=} \ell + o(1)$$
Ainsi F admet également pour limite ℓ en $+\infty$. Puisque $f = \varphi - F$, f admet pour limite 0 en $+\infty$.

Solution 28

1. Posons $g = f' + af$. Par variation de la constante, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) = e^{-ax}\int_0^x e^{at}g(t)\,\mathrm{d}t + \lambda e^{-ax}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Puisque $g \underset{+\infty}{=} o(1)$,
$$\int_0^x e^{at}g(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_0^x |e^{at}|\,\mathrm{d}t\right)$$
Or pour $x \in \mathbb{R}_+$,
$$\int_0^x |e^{at}|\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{\mathrm{Re}(a)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{Re}(a)}\left(e^{\mathrm{Re}(a)x} - 1\right)$$
On en déduit que
$$\int_0^x e^{at}g(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\mathrm{Re}(a)x})$$
puis finalement que
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-ax}\int_0^x e^{at}g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
Par ailleurs, il est clair que $\lim_{x\to+\infty} e^{-ax} = 0$ puisque $\mathrm{Re}(a) < 0$. Finalement, on a bien $\lim_{+\infty} f = 0$.

2. Posons $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $g = f' - jf$. Alors $g' - \overline{j}g = f'' + f' + f$ admet une limite nulle en $+\infty$. Puisque $\mathrm{Re}(\overline{j}) < 0$, la première question montre que g admet une limite nulle en $+\infty$. Puisque $g = f' - jf$ et $\mathrm{Re}(j) < 0$, la première question montre à nouveau que f admet une limite nulle en $+\infty$.

3. Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ dont les racines sont toutes de parties réelles strictement négatives et D l'opérateur de dérivation. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ (avec $n = \deg \mathrm{P}$) telle que $\lim_{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{D})(f) = 0$, alors $\lim_{+\infty} f = 0$. Il suffit de raisonner par récurrence sur le degré n de P.
Si $n = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons le résultat vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit alors $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ de degré $n+1$ dont les racines sont de parties réelles strictement négatives et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{D})(f) = 0$. Soit a une racine de P. On peut donc écrire $\mathrm{P} = (\mathrm{X} - a)\mathrm{Q}$ avec $\deg \mathrm{Q} = n$. Posons $g = \mathrm{Q}(a)(f)$. Alors $g' - ag = \mathrm{P}(\mathrm{D})(f)$ admet une limite nulle en $+\infty$. Puisque $\mathrm{Re}(a) < 0$, la première question montre que $\lim_{+\infty} g = 0$. Or $g = \mathrm{Q}(\mathrm{D})(f)$ et $\deg \mathrm{Q} = n$ donc, par hypothèse de récurrence, $\lim_{+\infty} f = 0$. Par récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 29

1. D'après la théorème fondamental de l'analyse, $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$. De plus,
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0)}{x - 0} = g(x)$$
donc $\lim_{x\to0} g(x) = \mathrm{F}'(0) = f(0)$.

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |\mathrm{F}(x)| = \left|\int_0^x 1 \cdot f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_0^x \mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t} \leq \sqrt{x}\sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t}$$
En posant $\mathrm{C} = \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t}$,
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ |g(x)| \leq \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{x}}$$
donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par intégration par parties,

$$\int_0^x g(t)^2 \, dt = \int_0^x \frac{1}{t^2} F(t)^2 \, dt = -\left[\frac{F(t)^2}{t}\right]_0^x + 2\int_0^x \frac{F(t)F'(t)}{t} \, dt$$

L'intégration par parties est légitime car, par continuité de F en 0,

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(t)^2}{t} = \lim_{t \to 0} g(t)F(t) = g(0)F(0) = 0$$

Ainsi

$$\int_0^x g(t)^2 \, dt = -\frac{F(x)^2}{x} + 2\int_0^x g(t)f(t) \, dt \leq 2\int_0^x g(t)f(t) \, dt$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^x g(t)^2 \, dt \leq 2\sqrt{\int_0^x g(t)^2 \, dt}\sqrt{\int_0^x f(t)^2 \, dt} \leq 2C\sqrt{\int_0^x g(t)^2 \, dt}$$

puis

$$\int_0^x g(t)^2 \, dt \leq 4C^2$$

La fonction $x \mapsto \int_0^x g(t)^2 \, dt$ est croissante (intégrande positive) et majorée donc admet une limite en $+\infty$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)^2 \, dt$ converge donc i.e. g est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Solution 30

En remarquant que $e^{t^2} \geq 1$, il est clair que $\lim_{+\infty} F = +\infty$. Par commodité, on posera dans la suite $G = F - F(1)$. Par intégration par parties,

$$G(x) = \int_1^x e^{t^2} \, dt = \int_1^x \frac{2te^{t^2}}{2t} \, dt = \left[\frac{e^{t^2}}{2t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} \, dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} \, dt$$

Il est clair que $\frac{e}{2} \underset{x \to +\infty}{=} o(G(x))$. De plus, $\frac{e^{t^2}}{2t^2} \underset{t \to +\infty}{=} o(e^{t^2})$. Or $t \mapsto e^{t^2}$ est positive et $\int_1^{+\infty} e^{t^2} \, dt$ diverge donc

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} \, dt \underset{x \to +\infty}{=} o(G(x))$$

Ainsi

$$G(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{e^{x^2}}{2x} + o(G(x))$$

ou encore

$$G(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$$

Comme $\lim_{+\infty} F = +\infty$, $G = F - F(1) \underset{+\infty}{\sim} F$. Ainsi $F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$.

Solution 31

1. Il suffit par exemple de remarquer que $e^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par intégration par parties

$$g(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \int_x^{+\infty} \frac{-2te^{-t^2}}{-2t} \, dt = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} \, dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} \, dt$$

L'intégration par parties est légitimée car $t \mapsto -\frac{e^{-t^2}}{2t}$ admet une limite (nulle) en $+\infty$. De plus, $\frac{e^{-t^2}}{2t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-t^2}\right)$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ est positive et intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o(g(x))$$

On en déduit donc que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.

Solution 32

Remarquons que f est solution de l'équation différentielle $y'+y = g$ avec $g = f + f'$. Les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On applique alors la méthode de variation de la constante. La fonction $x \mapsto \varphi(x)e^{-x}$ où φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de $y' + y = g$ si et seulement si $\varphi'(x)e^{-x} = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On peut donc choisir $\varphi(x) = \int_0^x e^t g(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Une solution particulière de $y' + y = g$ est donc la fonction $x \mapsto e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,\mathrm{d}t$. Les solutions de $y' + y = g$ sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-x} + e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque f est solution de cette équation différentielle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda e^{-x} + e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque $g(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1)$, $e^t g(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^t)$. Or $t \mapsto e^t$ est positive et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^t\,\mathrm{d}t$ diverge donc

$$\int_0^x e^t g(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_0^x e^t\,\mathrm{d}t\right)$$

ou encore

$$\int_0^x e^t g(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$$

Ainsi

$$e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$$

On en déduit donc que $\lim_{+\infty} f = 0$.

Solution 33

1. Soit $x \in \mathrm{I}$. $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x, +\infty[$ et $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées. L'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge donc et f est définie sur I.

2. On peut remarquer que

$$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = f(1) - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc f est dérivable sur I d'après le théorème fondamental de l'analyse et

$$\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$$

3. On sait que $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t}$ et l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge donc

$$f(x) - f(1) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln(x)$$

Comme $\lim_{x\to 0^+} -\ln(x) = +\infty$,

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$$

Par intégration par parties

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t = -\left[\frac{e^{-t}}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\, \mathrm{d}t$$

Comme $\frac{e^{-t}}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{e^{-t}}{t}\right)$ et que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t$ diverge,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\, \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t\right)$$

Ainsi

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$$

4. Tout d'abord, f est continue sur I. De plus, $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$ donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ par croissances comparées. Enfin, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées. Ainsi f est intégrable sur I et $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge.
Par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t = [tf(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tf'(t)\, \mathrm{d}t$$

Cette intégration par parties est légitime car

$$tf(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} -t\ln t \qquad \text{et} \qquad tf(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}$$

de sorte que

$$\lim_{t\to 0^+} tf(t) = \lim_{t\to+\infty} tf(t) = 0$$

Ainsi

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} tf'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, \mathrm{d}t = 1$$

Solution 34

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^2}\, \mathrm{d}t$ converge puisque $\frac{1-e^{-t}}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$. Alors, en posant

$$\mathrm{G}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^2}\, \mathrm{d}t$$

on a donc $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{G}(x) = 0$. Par conséquent,

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(7x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Remarquons que

$$\frac{1-e^{-t}}{t^2} \underset{t\to 0^+}{=} \frac{1}{t} + \mathcal{O}(1)$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 \left(\frac{1-e^{-t}}{t^2} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$ converge. Notons C sa valeur. Alors en posant pour $x > 0$

$$\mathrm{H}(x) = \int_x^1 \left(\frac{1-e^{-t}}{t^2} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$$

on a $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{H}(x) = \mathrm{C}$. Par conséquent,

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{H}(7x) - \mathrm{H}(x) + \int_x^{7x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \mathrm{H}(7x) - \mathrm{H}(x) + \ln(7) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \mathrm{C} - \mathrm{C} + \ln(7) = \ln(7)$$

Solution 35

1. Remarquons que $\frac{\arctan t}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge. Par intégration de relation d'équivalence pour des fonctions positives

$$\int_1^x \frac{\arctan t}{t}\, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x \frac{\pi\, dt}{2t} = \frac{\pi \ln x}{2}$$

2. Remarquons que $\frac{\operatorname{th} t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge. Par intégration de relation d'équivalence pour des fonctions positives

$$\int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{t^2}\, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x}$$

3. Remarquons que $\frac{e^t}{t^3} \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t^3}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^3}$ diverge. Par intégration de relation d'équivalence pour des fonctions positives

$$\int_x^1 \frac{e^t}{t^3}\, dt \underset{x\to0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{2x^2}$$

4. Remarquons que $\frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}}$ converge. Par intégration de relation d'équivalence pour des fonctions positives

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}\, dt \underset{x\to0^+}{\sim} \int_0^x \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{x}$$

Suites d'intégrales

Solution 36

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $t \mapsto f(t)e^{-t/n}$ est continue sur le segment $[0, \pi]$ donc u_n est défini. Cette application est également continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(t)e^{-t/n} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ de sorte que v_n est défini.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque l'intégrale définissant v_n converge, on peut écrire que

$$v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)e^{-t/n}\, dt$$

Mais en effectuant un changement de variable dans chaque intégrale, on obtient

$$v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} f(t+k\pi)e^{-(t+k\pi)/n}\, dt$$

Par π-périodicité de f, on en déduit que

$$v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} \int_0^{\pi} f(t)e^{-t/n}\, dt = u_n \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} = u_n a_n$$

avec

$$a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} = \frac{1}{1 - e^{-\pi/n}}$$

3. Il s'agit jute d'un équivalent classique, à savoir $e^u - 1 \underset{u\to0}{\sim} u$. On en déduit immédiatement que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\pi}$.

4. Remarquons tout d'abord que comme $\int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t = 0$,

$$u_n = \int_0^\pi f(t)(e^{-t/n} - 1)\,\mathrm{d}t$$

On remarque que $e^{-t/n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{t}{n}$, ce qui permet de conjecturer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t$ (ce qui précède n'est en aucun cas une preuve). On en déduirait alors la limite de (v_n). On propose alors deux méthodes.

Avec le théorème de convergence dominée. Posons $f_n : t \mapsto (e^{-t/n} - 1)f(t)$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n| \leq |f|$ sur $[0,\pi]$ et $|f|$ est évidemment intégrable sur $[0,\pi]$. D'après le théorème de convergence dominée, (u_n) converge vers 0.

On remarque ensuite que la suite de fonctions (nf_n) converge simplement vers la fonction $t \mapsto -f(t)$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,\pi],\ |nf_n(t)| = n(1 - e^{-t/n})|f(t)| \leq t|f(t)|$$

en utilisant la convexité de exp. La fonction $t \mapsto t|f(t)|$ est à nouveau intégrable sur le segment $[0,\pi]$ donc, par convergence dominée, (nu_n) converge vers $-\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t$. Puisque $v_n = a_n u_n$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\pi}$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Sans le théorème de convergence dominée. Remarquons que f est continue donc bornée sur le segment $[0,\pi]$ (elle est même bornée sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'elle est π-périodique). En notant M un majorant de $|f|$ sur $[0,\pi]$,

$$|u_n| \leq \mathrm{K}\int_0^\pi (1 - e^{-t/n})\,\mathrm{d}t = \mathrm{K}\left(\pi + n(e^{-\pi/n} - 1)\right)$$

Or via le même équivalent usuel que précédemment,

$$\lim_{n\to+\infty} n(e^{-\pi/n} - 1) = -\pi$$

de sorte que (u_n) converge bien vers 0.

On constate que

$$u_n + \frac{1}{n}\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\left(e^{-\frac{t}{n}} - 1 + \frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange donne pour $t \in \mathbb{R}_+$

$$\left|e^{-\frac{t}{n}} - 1 + \frac{t}{n}\right| \leq \frac{t^2}{2n^2}$$

Par inégalité triangulaire, on obtient donc

$$\left|u_n + \frac{1}{n}\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\mathrm{K}}{2n^2}\int_0^\pi t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{K}\pi^3}{6n^2}$$

En particulier,

$$u_n + \frac{1}{n}\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

A fortiori

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Via l'équivalent de (a_n) précédemment trouvé, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Solution 37

1. Tout d'abord, $\cos(2nt) \underset{t\to0}{\sim} 1$. De plus,

$$\begin{aligned}\ln(\sin t) &\underset{t\to0}{=} \ln(t+o(t))\\ &\underset{t\to0}{=} \ln(t(1+o(1)))\\ &\underset{t\to0}{=} \ln t + \ln(1+o(1))\\ &\underset{t\to0}{=} \ln t + o(1)\\ &\underset{t\to0}{=} \ln t + o(\ln t)\\ &\underset{t\to0}{\sim} \ln t\end{aligned}$$

Finalement, $f_n(t) \underset{t\to0}{\sim} \ln t$. Par croissances comparées, $f_n(t) \underset{t\to0}{=} o\left(1/\sqrt{t}\right)$. Puisque f_n est également continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, elle est intégrable sur cet intervalle par comparaison à une fonction de Riemann intégrable.

2. On intègre par parties. La fonction $t \mapsto \ln(\sin t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et sa dérivée est $t \mapsto \frac{\cos t}{\sin t}$. De même, la fonction $t \mapsto \sin(2nt)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et sa dérivée est $t \mapsto 2n\cos(2nt)$. Enfin, $\sin(2nt)\ln(\sin t) \underset{t\to0}{\sim} 2nt\ln t$ donc $\lim_{t\to0}\sin(2nt)\ln(\sin t) = 0$ par croissances comparées. Cela légitime l'intégration par parties.

$$\mathrm{J}_n = 2n\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2n\cos(2nt)\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = [\sin(2nt)\ln(\sin t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t}\cdot\sin(2nt)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t}\cdot\sin(2nt)\,\mathrm{d}t$$

3.

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_{n+1} - \mathrm{J}_n &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t}\cdot(\sin((2n+2)t) - \sin(2nt))\,\mathrm{d}t\\ &= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t}\cdot\sin(t)\cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t\\ &= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos((2n+2)t) + \cos(2nt))\,\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

Ainsi la suite (J_n) est constante. De plus,

$$\mathrm{J}_1 = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t}\cdot\sin(2t)\,\mathrm{d}t = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2t)+1)\,\mathrm{d}t = -\pi$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{J}_n = -\pi$ et $\mathrm{I}_n = -\frac{\pi}{2n}$.

Solution 38

De manière plus générale, posons $\mathrm{J}_{n,p} = \int_0^1 t^n \ln(t)^p\,\mathrm{d}t$ pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. $\mathrm{J}_{n,0}$ est clairement définie et, pour $p > 0$, $t^n\ln(t)^p \underset{t\to0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées donc $t \mapsto t^n\ln(t)^p$ est intégrable sur $]0,1]$. $\mathrm{J}_{n,p}$ est donc également définie pour $p > 0$.
Par intégration par parties, lorsque $p > 0$,

$$\int_0^1 t^n\ln(t)^p\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)^p\right]_0^1 - \frac{p}{n+1}\int_0^1 t^n\ln(t)^{p-1}\,\mathrm{d}t$$

Cette intégration par parties est légitime car la seconde intégrale, à savoir $\mathrm{J}_{n,p-1}$ converge. De plus, le crochet est nul par croissances comparées. Ainsi

$$\mathrm{J}_{n,p} = -\frac{p}{n+1}\mathrm{J}_{n,p-1}$$

Par une récurrence facile

$$\mathrm{J}_{n,p} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^p}\mathrm{J}_{n,0} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}$$

En particulier,

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{J}_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

Solution 39

1. Par croissances comparées, $\ln^n(x) \underset{x\to 0^+}{=} o(1/\sqrt{})$ donc I_n converge.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On écrit
$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 1 \cdot \ln^n(x)\,\mathrm{d}x$$
et on intégre par parties. Par croissances comparées, $\lim_{x\to 0^+} x\ln^n(x) = 0$ donc
$$\mathrm{I}_n = \left[x\ln^n(x)\right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x} \cdot n \cdot \ln^{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = -n\mathrm{I}_{n-1}$$
3. Comme $\mathrm{I}_0 = 1$. Une récurrence évidente montre que $\mathrm{I}_n = (-1)^n n!$.

Fonctions définies par des intégrales

Solution 40

1.
   - Tout d'abord, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - De plus, $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et la fonction positive $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable au voisinage de 0^+ si et seulement si $x > 0$.
   - Enfin, $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0^+}{=} o(1/t^2)$ et la fonction positive $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

   Ainsi $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x > 0$. Comme cette fonction est positive, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$. Le domaine de définition de Γ est donc $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto t^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $t \mapsto xt^{x-1}$. La fonction $t \mapsto -e^{-t}$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $t \mapsto e^{-t}$. Par intégration par parties,
$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$
L'égalité est assurée par la convergence des deux intégrales. De plus, comme $x > 0$
$$\lim_{t\to 0^+} t^x e^{-t} = 0$$
et, par croissances comparées,
$$\lim_{t\to +\infty} t^x e^{-t} = 0$$
On en déduit que
$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)$$
3. On a donc $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\Gamma(1) = 1$, une récurrence évidente montre que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On peut vérifier avec Python.

```python
from scipy.integrate import quad
from math import factorial
from numpy import exp,inf
def gamma(x):
  return quad(lambda t:t**(x-1)*exp(-t),0,inf)[0]

for n in range(1,10):
  print(gamma(n),factorial(n-1))
```

Solution 41

1. - Tout d'abord, la fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1[$.
   - De plus, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1}$ et la fonction positive $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable au voisinage de 0^+ si et seulement si $x > 0$.
   - Enfin, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to1^-}{\sim} (1-t)^{y-1}$ et la fonction positive $t \mapsto (1-t)^{y-1}$ est intégrable au voisinage de $1-$ si et seulement si $y > 0$.

   Ainsi $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$. Comme cette fonction est positive, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ converge si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

2. Il suffit d'effectuer le changement de variable $u = 1 - t$.

3. Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto (1-t)^y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ de dérivées respectives $t \mapsto xt^{x-1}$ et $t \mapsto -y(1-t)^{y-1}$. Par intégrations par parties,
$$\int_0^1 yt^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = -\left[t^x(1-t)^y\right]_0^1 + \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t$$
L'égalité est assurée par la convergence des deux intégrales. Puisque $x > 0$ et $y > 0$,
$$\lim_{t\to0^+} t^x(1-t)^y = \lim_{t\to1^-} t^x(1-t)^y = 0$$
Ainsi
$$\begin{aligned}
y\mathrm{B}(x+1,y) &= \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t \\
&= x\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t)\,\mathrm{d}t \\
&= x\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t - x\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{car ces deux intégrales convergent} \\
&= x\mathrm{B}(x,y) - x\mathrm{B}(x+1,y)
\end{aligned}$$
ou encore
$$\mathrm{B}(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x,y)$$

4. D'après la question précédente
$$\mathrm{B}(n+1,p+1) = \frac{n}{n+p+1}\mathrm{B}(n,p+1)$$
Par une récurrence facile
$$\mathrm{B}(n+1,p+1) = \frac{n!(p+1)!}{(n+p+1)!}\mathrm{B}(1,p+1) = \frac{n!p!}{(n+p+1)!}$$
On peut vérifier avec Python.

```python
from scipy.integrate import quad
from math import factorial
def beta(x,y):
  return quad(lambda t:t**(x-1)*(1-t)**(y-1),0,1)[0]

for n in range(1,10):
  for p in range(1,10):
    print(beta(n+1,p+1),factorial(n)*factorial(p)/factorial(n+p+1))
```