Comparaison de fonctions

Croissances comparées

Au voisinage de $+\infty$

- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha < \beta \iff x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$.
- Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $a < b \iff e^{ax} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{bx})$.
- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $(\ln x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$.
- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\alpha x})$.

Au voisinage de 0

- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha > \beta \iff x^\alpha \underset{x\to0}{=} o(x^\beta)$.
- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $|\ln x|^\alpha \underset{x\to0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$.

Au voisinage de $-\infty$

- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $e^{\alpha x} \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{|x|^\beta}\right)$.
- Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $a > b \iff e^{ax} \underset{x\to-\infty}{=} o(e^{bx})$.

Équivalents usuels

Logarithme, exponentielle, puissance

Un polynôme est équivalent en 0 (resp. en $\pm\infty$) à son monôme de plus bas (resp. haut) degré.

$$\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad \ln(1+x) \underset{x\to0}{=} x + o(x)$$

$$e^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad e^x \underset{x\to0}{=} 1 + x + o(x)$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to0}{\sim} \alpha x \quad \text{i.e.} \quad (1+x)^\alpha \underset{x\to0}{=} 1 + \alpha x + o(x)$$

Fonctions circulaires

$$\sin x \underset{x\to0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad \sin x \underset{x\to0}{=} x + o(x)$$

$$1 - \cos x \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad \text{i.e.} \quad \cos x \underset{x\to0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\tan x \underset{x\to0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad \tan x \underset{x\to0}{=} x + o(x)$$

Fonctions circulaires réciproques

$$\arcsin x \underset{x\to0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad \arcsin x \underset{x\to0}{=} x + o(x)$$

$$\arctan x \underset{x\to0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad \arctan x \underset{x\to0}{=} x + o(x)$$

Fonctions hyperboliques

$$\operatorname{sh} x \underset{x\to0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad \operatorname{sh} x \underset{x\to0}{=} x + o(x)$$

$$\operatorname{ch} x - 1 \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad \text{i.e.} \quad \operatorname{ch} x \underset{x\to0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\operatorname{th} x \underset{x\to0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad \operatorname{th} x \underset{x\to0}{=} x + o(x)$$