Intégration

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue T-périodique telle que $\int_0^T f(t)dt = 0$. Montrer que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \int_a^b f(\lambda t)dt \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Que devient le résultat si $\int_0^T f(t)dt \neq 0$?

Exercice 2.

Soient f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant une limite finie l en $+\infty$ et a un réel strictement positif.

1. Montrer que $\lim\limits_{y\to+\infty} \int_y^{y+a} f(t)\,dt = al$.

2. Montrer que $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_0^X (f(t+a) - f(t))\,dt = -\int_0^a f(t)\,dt + al$.

3. Calculer $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_0^X (\arctan(t+1) - \arctan t)\,dt$.

Exercice 3.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ continue.

1. Justifier l'existence de $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(x)^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} = M$.

Exercice 4.

Soit f continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Montrer que $\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f|$ *si et seulement si* f est de signe constant sur $[a, b]$.

Exercice 5.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles. On suppose de plus g positive sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

Exercice 6.

Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une application continue.

1. On suppose que $\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt = 0$. Montrer que f s'annule en un réel $a \in]0, \pi[$.

2. On suppose que $\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt = \int_0^\pi f(t)\cos t\,dt = 0$. Montrer que f s'annule deux fois sur $]0, \pi[$.
On pourra considérer $\int_0^\pi f(t)\sin(t-a)\,dt$.

Exercice 7.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

Exercice 8.

Soient $n \in \mathbb{N}$ f une fonction continue sur $[a, b]$ $(a < b)$ telle que $\int_a^b t^k f(t)\,dt = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer que f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[a, b]$.

Exercice 9.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = \lfloor nt \rfloor$. Montrer que f est en escalier sur $[0, 1]$ et calculer son intégrale.

Exercice 10.★

On note

$$I = \int_0^\pi \frac{t}{2+\sin(t)}dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi \frac{dt}{2+\sin(t)}.$$

1. Trouver une relation simple entre I et J en effectuant le changement de variable $t = \pi - u$.

2. Pour tout réel x , on pose

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{2+\sin(t)}.$$

- **a.** Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
- **b.** Calculer $F(x)$ en fonction de x pour tout $x \in]-\pi, \pi[$.
- **c.** En déduire la valeur de J puis celle de I.

INTÉGRATION

Exercice 11.

Calculer les primitives suivantes

1. $\int \frac{dx}{x^2+5}$;
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$;
3. $\int e^x \sin(e^x) dx$;
4. $\int \tan^3(x) dx$;
5. $\int \frac{1}{\tan^3(x)} dx$;
6. $\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^m} dx$, $m \in \mathbb{N}$;
7. $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$;
8. $\int \frac{\text{ch}(x)dx}{\text{sh}^5(x)}$.

Exercice 12.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et H la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = \alpha \cos x + \sin x + 2$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que H ne s'annule pas.
2. On suppose la condtion précédente satisfaite et on pose pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{H(t)}$. Justifier que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $F(x)$ pour $x \in]-\pi, \pi[$.
3. Calculer l'intégrale $F(2\pi)$.

Exercice 13.

Soient α et β deux réels strictement positifs. On définit une fonction f par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\alpha + \beta \cos^2 x}$$

1. Justifier que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On note F celle qui s'annule en 0.
2. Montrer que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Déterminer une expression de $F(x)$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
4. Calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{49 - 45\sin^2 t}$.

Exercice 14.

Calculer $I = \int_{a^2}^{b^2} x\sqrt{(x-a^2)(b^2-x)}\, dx$.

Exercice 15.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

1. Déterminer une relation entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$.
2. En déduire l'existence et une expression simple de $\lim_{x\to+\infty} I_n(x)$.

Exercice 16.⋆⋆

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto f(x)\,\text{cotan}(\pi x)$ admet une limite (finie) en 0 et en 1. On notera g, le prolongement continu sur $[0,1]$ de cette fonction.
2. On considère la fonction $h = fg$.
   a. Démontrer que h est dérivable sur $]0,1[$ et que, pour tout $0 < x < 1$,
   $$h'(x) = 2f'(x)g(x) - \pi(f(x)^2 + g(x)^2).$$
   En déduire que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
   b. Démontrer que
   $$\forall\ x \in [0,1], \quad h'(x) \leqslant \frac{1}{\pi}f'(x)^2 - \pi f(x)^2.$$
   c. En déduire enfin que
   $$\int_0^1 f'(x)^2 dx \geqslant \pi^2 \int_0^1 f(x)^2 dx.$$

Exercice 17.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $[a,b]$.
D'après le théorème de la bijection, f induit une bijection de $[a,b]$ sur $[f(a), f(b)]$ et f^{-1} est continue sur $[f(a), f(b)]$.

1. Montrer que
$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\, dy = bf(b) - af(a)$$
2. Donner une interprétation géométrique de cette formule.

Exercice 18.

Etablir la dérivabilité puis calculer la dérivée de la fonction ψ définie par

$$x \longmapsto \int_{e^{-x}}^{e^x} \sqrt{1+\ln^2(t)}\mathrm{d}t.$$

Exercice 19.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x 3^{-\lfloor t \rfloor}\,\mathrm{d}t$ où $\lfloor t \rfloor$ représente la partie entière du réel t.

1. Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que la suite $(f(n))$ converge et donner sa limite.
3. En déduire que f admet une limite en $+\infty$ et préciser celle-ci.

Exercice 20.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Quel est le signe de f ?
3. Prolonger f par continuité partout où cela est possible.
4. Montrer que f est dérivable et étudier les variations de f. On déterminera également la limite de f en $+\infty$.
5. Étudier la concavité de f.
6. Tracer le graphe de f.

Exercice 21.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(t-x)g(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = g$.

Exercice 22.

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 23.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.
Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_a^b f(t)\sin(tx)\,\mathrm{d}t$ est lipschitzienne.

Exercice 24.★

Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par,

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}.$$

Exercice 25.★

Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par,

$$v_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}.$$

Exercice 26.

Etudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Exercice 27.★★

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose,

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $e^{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}$.

Exercice 28.

Déterminer un équivalent de $u_n = \sqrt{1}\sqrt{n-1} + \sqrt{2}\sqrt{n-2} + \cdots + \sqrt{n-2}\sqrt{2} + \sqrt{n-1}\sqrt{1}$ quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 29.

Montrer que

$$X^{2n}-1=(X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2-2X\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$$

En déduire pour $r>1$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|1-re^{i\theta}\right|\,d\theta$$

EXERCICE 30.

Soit $\lambda\in[-1,1]$. Trouver les fonctions $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f(x)=\int_0^{\lambda x}f(t)dt.$$

EXERCICE 31.★★

On pose pour tout $n\geqslant 0$,

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n(x)dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1.

2. En intégrant par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

3. En déduire une expression de I_{2n} et I_{2n+1} pour tout $n\in\mathbb{N}$ à l'aide de factorielles.

4. Vérifier que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. En déduire que $\frac{n+1}{n+2}I_n\leqslant I_{n+1}\leqslant I_n$.

5. Démontrer que $I_{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}I_n$.

6. Établir que $\forall n\in\mathbb{N},\quad (n+1)I_{n+1}I_n=\frac{\pi}{2}$.

7. En déduire que

$$I_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

EXERCICE 32.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ et $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, on pose $f_{n,\lambda}(x)=\sin(2nx)\ln(\lambda\cos x)$.

1. Etudier la limite de $f_{n,\lambda}(x)$ lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

2. On pose $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_{n,1}(x)\,dx$. Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_{n,\lambda}(x)\,dx=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2n}\ln\lambda+I_n$$

3. Calculer I_1 et I_2.

4. Etablir que

$$I_n=(-1)^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2nx)\ln(\sin x)\,dx$$

et

$$nI_n=(-1)^nJ_n\quad\text{où}\quad J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(nx)\cot x\,dx$$

5. Calculer J_n-J_{n-1} et en déduire I_n selon la parité de n.

EXERCICE 33.★★

On note, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$I_n=\int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{2-\cos(t)}dt.$$

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_{n+2}=4I_{n+1}-I_n$.

2. En déduire une expression de I_n en fonction de n.

EXERCICE 34.★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Prouver que, sur un ensemble à déterminer,

$$\frac{\sin^2(nt)}{\sin(t)} = \sin(t) + \sin(3t) + \cdots + \sin((2n-1)t).$$

2. En déduire une expression de

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin(t)} dt$$

sous la forme d'une somme.

3. Vérifier que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dx}{2x-1} \leqslant \frac{1}{2k-1}.$$

4. En déduire que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin(t)} dt \sim \frac{1}{2} \ln(n).$$

EXERCICE 35.

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Prouver que la suite de terme général

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$$

converge vers 0.