

DEVOIR SURVEILLÉ N°2 : CORRIGÉ

SOLUTION 1.

On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned}
 (S) &\iff \begin{cases} x + y + az = 1 \\ (a-1)y + (1-a)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (1-a)y + (1-a^2)z = 1-a & L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + y + az = 1 \\ (a-1)y + (1-a)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (2-a-a^2)z = 1-a & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + y + az = 1 \\ (a-1)y + (1-a)z = 0 \\ (2+a)(1-a)z = 1-a \end{cases}
 \end{aligned}$$

► Si $a = 1$, alors

$$(S) \iff x + y + z = 1$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\{(1-y-z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$.

► Si $a = -2$, alors

$$(S) \iff \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0 = 4 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est vide.

► Si $a \neq -2$ et $a \neq 1$, alors

$$\begin{aligned}
 (S) &\iff \begin{cases} x + y + az = 1 \\ y - z = 0 \\ (2+a)z = 1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2+a} \\ y = \frac{1}{2+a} \\ z = \frac{1}{2+a} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\left\{\left(\frac{1}{2+a}, \frac{1}{2+a}, \frac{1}{2+a}\right)\right\}$.

SOLUTION 2.

Ces égalités ont un sens dès lors que $\tan \frac{\theta}{2}$ est défini, c'est-à-dire pour les réels θ tels que $\frac{\theta}{2} \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou encore $\theta \neq \pi[2\pi]$.

$$\begin{aligned}
 \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} &= \frac{1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}} \\
 &= \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \cos \left(2 \times \frac{\theta}{2}\right) = \cos \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} &= \frac{2 \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}} \\ &= \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sin \left(2 \times \frac{\theta}{2} \right) = \sin \theta\end{aligned}$$

SOLUTION 3.

1. On trouve

$$\begin{array}{ccccc}a_0 = 1 & a_1 = 1 & a_2 = 2 & a_3 = 5 & a_4 = 14 \\ S_0 = 1 & S_1 = 2 & S_2 = 5 & S_3 = 14 & S_4 = 42\end{array}$$

On remarque que $S_n = a_{n+1}$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue le changement d'indice $l = n - k$ de sorte que

$$T_n = \sum_{l=0}^n (n-l) a_{n-l} a_l = \sum_{k=0}^n (n-k) a_k a_{n-k}$$

Ainsi

$$2T_n = \sum_{k=0}^n k a_k a_{n-k} + \sum_{k=0}^n (n-k) a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^n (k+n-k) a_k a_{n-k} = n S_n$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(n+2) a_{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n!^2} = \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!^2} = 2(2n+1) a_n$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}S_{n+1} + T_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k a_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} k a_k a_{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (k+1) a_k a_{n+1-k} \\ &= a_0 a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1) a_k a_{n+1-k} \\ &= a_{n+1} + \sum_{k=0}^n (k+2) a_{k+1} a_{n-k}\end{aligned}$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+2) a_{k+1} = 2(2k+1) a_k$ d'après la question 3 donc

$$\begin{aligned}S_{n+1} + T_{n+1} &= a_{n+1} + 2 \sum_{k=0}^n (2k+1) a_k a_{n-k} \\ &= a_{n+1} + 4 \sum_{k=0}^n k a_k a_{n-k} + 2 \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \\ &= a_{n+1} + 4T_n + 2S_n\end{aligned}$$

Or on a vu à la question 2 que $2T_n = n S_n$ donc

$$S_{n+1} + T_{n+1} = a_{n+1} + 2n S_n + 2S_n = a_{n+1} + 2(n+1) S_n$$

D'après la question 2, $2T_{n+1} = (n+1) S_{n+1}$ donc

$$S_{n+1} + T_{n+1} = S_{n+1} + \frac{n+1}{2} S_{n+1} = \frac{n+3}{2} S_{n+1}$$

On en déduit que

$$\frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1) S_n$$

5. D'après la question 1, $S_0 = a_1 = 1$.

Supposons maintenant que $S_n = a_{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$. Or on a supposé que $S_n = a_{n+1}$ donc

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} = (2n+3)a_{n+1}$$

Or d'après la question 3, $(n+3)a_{n+2} = 2(2n+3)a_{n+1}$ donc

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = \frac{n+3}{2}a_{n+2}$$

puis $S_{n+1} = a_{n+2}$ puisque $\frac{n+3}{2} \neq 0$.

Par récurrence, $S_n = a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Tout d'abord $a_0 = 1$ est un entier naturel. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tels que a_0, a_1, \dots, a_n soient des entiers naturels. Alors S_n est également un entier naturel en tant que somme de produits de ces derniers entiers naturels. Puisque $a_{n+1} = S_n$, $a_n + 1$ est également un entier naturel. Par récurrence forte, a_n est donc un entier naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

SOLUTION 4.

1.

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta + \theta) \\ &= \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \\ &= (2\cos^2 \theta - 1) \cos \theta - 2\sin^2 \theta \cos \theta \\ &= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \\ &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta\end{aligned}$$

2. D'après l'énoncé, on a $z = e^{i\theta}$. De plus,

$$\begin{aligned}|z^3 - z + 2|^2 &= (z^3 - z + 2) \overline{(z^3 - z + 2)} \\ &= |z|^6 + |z|^2 + 4 - 2(z + \bar{z}) - |z|^2(z^2 + \bar{z}^2) + 2(z^3 + \bar{z}^3) \\ &= 6 - 4\cos \theta - 2\cos(2\theta) + 4\cos(3\theta) \quad \text{car } |z| = 1 \text{ et en vertu d'une relation d'Euler} \\ &= 6 - 4\cos \theta - 2(2\cos^2 \theta - 1) + 4(4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) \\ &= 8 - 16\cos \theta - 4\cos^2 \theta + 16\cos^3 \theta \\ &= 4f(\cos \theta)\end{aligned}$$

3. f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynomiale. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 12x^2 - 2x - 4 = 2(2x + 1)(3x - 2)$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

| x | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------------------|-------------------------|--------------------|
| $f'(x)$ | + | 0 | 0 | + |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow \frac{13}{4}$ | $\searrow \frac{2}{27}$ | $\nearrow +\infty$ |

4. Puisque $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$, on a en vertu de la première question

$$\max_{z \in \mathbb{U}} \varphi(z) = \max_{\theta \in \mathbb{R}} 2\sqrt{f(\cos \theta)}$$

Mais puisque $\text{Im} \cos = [-1, 1]$,

$$\max_{z \in \mathbb{U}} \varphi(z) = \max_{x \in [-1, 1]} 2\sqrt{f(x)}$$

La question précédente nous renseigne sur les variations de f sur $[-1, 1]$.

| | | | | | |
|-------|----|----------------|----------------|---|---|
| x | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | 1 | |
| f'(x) | + | 0 | - | 0 | + |
| f(x) | 1 | $\frac{13}{4}$ | $\frac{2}{27}$ | 1 | |

On peut en déduire que

$$\max_{z \in \mathbb{U}} \varphi(z) = 2\sqrt{\frac{13}{4}} = \sqrt{13}$$

Ce maximum est atteint en un élément de \mathbb{U} dont l'argument θ est tel que $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ i.e. tel que $\theta \equiv \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.
On en déduit donc que le maximum de φ est atteint en j et j^2 .

SOLUTION 5.

- Si $z_0 \in \mathbb{R}_+$, alors on vérifie par récurrence que $z_n = z_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci est évident lorsque $n = 0$. Supposons-le vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_0 + |z_0|)$. Mais comme $z_0 \in \mathbb{R}_+$, $|z_0| = z_0$ et donc $z_{n+1} = z_0$. Par récurrence $z_n = z_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si $z_0 \in \mathbb{R}_-$, alors $|z_0| = -z_0$ de sorte que $z_1 = 0$. Une récurrence évidente montre alors que $z_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Il s'agit encore d'une récurrence. Par hypothèse, $z_0 \notin \mathbb{R}_-$. Supposons que $z_n \notin \mathbb{R}_-$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On raisonne par l'absurde en supposant que $z_{n+1} \in \mathbb{R}_-$. Alors $z_n = 2z_{n+1} - |z_n| \in \mathbb{R}_-$ car $|z_n| \in \mathbb{R}_+$. Ceci contredit le fait que $z_n \notin \mathbb{R}_-$. Par conséquent $z_{n+1} \notin \mathbb{R}_-$. Finalement, $z_n \in \mathbb{R}_-$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \notin \mathbb{R}_-$ par récurrence.
- Si un complexe n'appartient pas à \mathbb{R}_- , son argument principal ne peut être égal à π : il appartient donc à $] -\pi, \pi[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $z_n \notin \mathbb{R}_-$, $z_n \neq 0$ donc cela a un sens de parler de son argument principal. La question précédente montre également que $\theta_n \in] -\pi, \pi[$. Par ailleurs, par la méthode de l'arc-moitié

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}(r_n e^{i\theta_n} + r_n) = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{\frac{i\theta_n}{2}}$$

Puisque $\theta_n \in] -\pi, \pi[$, $\frac{\theta_n}{2} \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) > 0$. Ainsi

$$r_{n+1} = \left| r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{\frac{i\theta_n}{2}} \right| = r_n \left| \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \right| = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$$

car $r_n \geq 0$ et $\left| e^{\frac{i\theta_n}{2}} \right| = 1$. On en déduit également que $\frac{\theta_n}{2}$ est un argument de z_{n+1} et puisque $\frac{\theta_n}{2} \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\subset] -\pi, \pi[$, c'est son argument principal i.e. $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.

- (θ_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La limite de la suite (θ_n) est nulle.

6. Il s'agit à nouveau d'une récurrence. L'égalité à montrer est vraie pour $n = 0$ puisqu'un produit indexé sur l'ensemble vide vaut 1. Supposons-la vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = r_0 \left[\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) \right] \cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n+1}}\right) = r_0 \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$$

Par récurrence, l'égalité à démontrer est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. On sait que pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ et donc $\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2 \sin(x)}$ pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$.
8. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\theta_0}{2^n} \in]-\frac{\pi}{2^n}, \frac{\pi}{2^n}[\subset]-\pi, \pi[$. De plus, $z_0 \notin \mathbb{R}_+$ donc $\theta_0 \neq 0$ et donc $\frac{\theta_0}{2^n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $\frac{\theta_0}{2^n} \notin \pi\mathbb{Z}$.
D'après les deux questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$r_n = r_0 \prod_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{\theta_0}{2^{k-1}}\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)} = \frac{r_0}{2^n} \prod_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{\theta_0}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)} = \frac{r_0 \sin(\theta_0)}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}$$

car on remarque un produit télescopique.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = \theta_0 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}{\frac{\theta_0}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \theta_0$$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta_0}{2^n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Puisque $\theta_0 \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \frac{r_0 \sin(\theta_0)}{\theta_0}$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \frac{r_0 \sin(\theta_0)}{\theta_0}$$