

# DEVOIR À LA MAISON N°13

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1 – Méthode de Newton

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I = [a, b]$ . On suppose que  $f'$  est strictement négative sur  $I$ , que  $f''$  est positive sur  $I$  et que  $f(a) > 0$  et  $f(b) < 0$ .

### Partie I – Description de la méthode de Newton

1. Montrer qu'il existe un unique réel  $c \in I$  tel que  $f(c) = 0$ .
2.
  - a. Soit  $u$  un réel de  $I$ . Montrer que l'abscisse de l'intersection de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $u$  et de l'axe des abscisses est égale à  $u - \frac{f(u)}{f'(u)}$ .
  - b. Soit  $g$  la fonction définie sur  $I$  par

$$\forall x \in I, g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

On définit la suite  $(x_n)$  par  $x_0 \in [a, c]$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n)$$

Quelle est l'interprétation géométrique de la suite  $(x_n)$ ? On illustrera son propos par une figure soignée.

3.
  - a. Justifier que  $g$  est dérivable sur  $I$  et déterminer sa dérivée.
  - b. En déduire les variations de  $g$  sur  $I$ .
  - c. Établir que  $g([a, c]) \subset [a, c]$ .
  - d. Établir que la suite  $(x_n)$  est à valeurs dans  $[a, c]$ .

### Partie II – Convergence de la méthode de Newton

1.
  - a. Étudier le sens de variation de  $(x_n)$ .
  - b. Prouver que la suite  $(x_n)$  converge vers  $c$ .
2.
  - a. Justifier l'existence de deux réels strictement positifs  $m$  et  $M$  tels que  $|f'| \geq m$  et  $|f''| \leq M$  sur  $I$ .
  - b. A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que

$$\forall x \in I, |g(x) - c| \leq (x - c)^2 \frac{M}{2m}$$

- c. On pose  $K = \frac{M}{2m}$ . Montrer qu'il existe un entier naturel  $N$  tel que  $K|x_N - c| < 1$ . En déduire l'existence de deux constantes  $C > 0$  et  $k \in ]0, 1[$  telles que

$$\forall n \geq N, |x_n - c| \leq Ck^{2^n}$$

- d. Soit  $q \in ]0, 1[$ . Montrer que la suite  $(x_n - c)$  est négligeable devant la suite  $(q^n)$ .