Continuité

Exercice 1 ★★★

On pose

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que g est continue sur $]-\infty, 1[$.
3. Montrer que

$$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{x} + o(1) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{x\to1^+}{\sim} \frac{1}{1-x} + o(1)$$

Exercice 2 ★ — Transformée de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Justifier que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivation

Exercice 3 — Mines-Ponts MP 2018

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^x \frac{\ln(t)\,\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

Exercice 4 — Mines-Ponts MP 2017

A toute fonction $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on associe la fonction $\mathrm{R}(h)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{R}(h)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x\sin t)\,\mathrm{d}t$$

A toute fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on associe fonction $\mathrm{S}(g)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{S}(g)(x) = g(0) + x\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x\sin t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que R et S sont des applications linéaires à valeurs dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2. On pose $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une relation entre W_n et W_{n+2}.
3. Soit P un polynôme. Montrer que $\mathrm{S} \circ \mathrm{R}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$.
4. Montrer que pour $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $\mathrm{S} \circ \mathrm{R}(g) = g$.

Exercice 5 ★★

On pose

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 t + x^2\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et en déduire $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6 — CCP MP

On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t+1}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner une équation différentielle vérifiée par g sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Donner un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 7 ★★ **Mines Télécom MP 2016**

Soit $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t} \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et paire.
2. Montrer que $|\sin u| \leq |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer F''.
4. Déterminer la fonction F.

Exercice 8 ★★ **Centrale MP 2011**

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} \,\mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)} \,\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

1. Montrer que $f^2 + g$ est constante. Quelle est sa valeur ?
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t$.

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. **a.** Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
   b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. **a.** Montrer que f est solution de $(\mathrm{E}) : y' - y = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{x}}$.
   b. Déterminer la fonction f.

Exercice 10 **Mines-Ponts MP**

On pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{tx}}{t} e^{-t} \,\mathrm{d}t$. Déterminer le domaine de définition de F et expliciter $\mathrm{F}(x)$.

Exercice 11 ★★★ **Intégrale de Poisson**

On pose pour $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1) \,\mathrm{d}\theta$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{D} \setminus \{0\}$, $f(x) = f(1/x) + 2\pi \ln|x|$.
3. Justifier que f est dérivable sur $]-1, 1[$.
4. Montrer que f' est nulle sur $]-1, 1[$.
5. En déduire la valeur de $f(x)$ pour $x \in \mathrm{D}$.

Convergence dominée

Exercice 12

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t$$

Exercice 13 ★★

On pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \ln t \,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^x}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer $f(2)$.
3. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 14

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $x \in [0, n]$,

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$$

En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 15

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nf(t)e^{-nt} \, \mathrm{d}t$$

Exercice 16 ★★ **CCP MP**

On pose $f_n : x \mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ où $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$?
3. Soit g continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) \, \mathrm{d}t = g(0)$$

Exercice 17 **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2019**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

1. Pour quelles valeurs de n l'intégrale est-elle définie ?
2. Calculer la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
4. Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge et calculer sa somme S sous la forme d'une intégrale.
5. Calculer S.

Exercice 18 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2021**

On suppose qu'il existe une partie A de $\mathbb{N}$ telle que

$$\sum_{n\in\mathrm{A}} \frac{x^n}{n!} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}$$

1. Soit I une partie finie de A. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n\in\mathrm{I}} \frac{x^n e^{-x}}{n!} \, \mathrm{d}x$.
2. Montrer que A est fini.
3. Qu'en conclut-on ?

Exercice 19 ★★

Soit f une application continue sur $[0, 1]$. On pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n) \, \mathrm{d}t$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

On pose $f_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-t^n}$ et $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t) \, \mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction

$$f : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ e^{-1} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Alors f est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f_n(t)| \leq \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

et la fonction $t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Intégration terme à terme

Exercice 20 **Mines-Ponts MP**

On définit une fonction f par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{sh}(x\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer ce développement en série entière.
3. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 21 ★ **ENSEA/ENSIIE MP 2015**

1. Montrer que

$$\forall x \in [-1,1],\ \int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$$

2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$

Exercice 22 ★ **CCINP (ou CCP) PSI 2019**

Soit $\sum a_n$ une série complexe absolument convergente.

1. Calculer $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!} x^n$.
3. Pour x réel, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Exercice 23 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

1. Montrer que $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$ est bien définie.
2. Donner la décomposition en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$ et préciser son rayon de convergence.
3. Écrire I comme somme d'une série.
4. Donner la valeur exacte de I sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 24 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I converge.
2. Montrer que $\mathrm{I} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice 25 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2018**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Rappeler le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un segment.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $|x| < \mathrm{R}$.

Exercice 26 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2019**

1. Montrer l'intégrabilité de $f : x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2}{1+x^2}$ sur $]0,1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : x \in]0,1] \mapsto x^{2n}(\ln x)^2$. Montrer l'intégrabilité de u_n sur $]0,1]$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Déterminer une expression de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ sous forme de somme.
4. Soit $\varepsilon > 0$. Proposer une méthode de calcul de I à ε près.

Divers

Exercice 27 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2014**

On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer des équivalents simples de f aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 28 ★★

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent de f en 0^+.

Exercice 29 ★★ **Transformée de Laplace**

Soit f continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{R}$ tel que $t \mapsto f(t)e^{-pt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on pose

$$\alpha = \inf\left\{p \in \mathbb{R},\ t \mapsto f(t)e^{-pt} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}_+\right\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Pour $p \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{F}(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ lorsque cela est possible.

1. Justifier que F est définie sur $]\alpha, +\infty[$.
2. *Théorème de la valeur initiale*. On suppose que $\lim_{0^+} f = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} p\mathrm{F}(p) = \ell$.
3. *Théorème de la valeur finale*. On suppose $\alpha \leq 0$ et $\lim_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{p\to 0^+} p\mathrm{F}(p) = \ell$.