Devoir surveillé n°14

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 Par définition de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k)\\ &= \sum_{k=1}^{m-1} k\mathbb{P}(X=k) + \sum_{k=m}^{n} k\mathbb{P}(X=k)\\ &\leq (m-1)\sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}(X=k) + n\sum_{k=m}^{n} \mathbb{P}(X=k)\\ &= (m-1)\mathbb{P}(X\leq m-1) + n\mathbb{P}(X\geq m)\\ &\leq (m-1) + n\mathbb{P}(X\geq m)\end{aligned}$$

2 Supposons $n \geq 2$ et donnons-nous $k \in [\![2, n]\!]$. Comme ln est croissante sur $[k-1, k]$,

$$\forall t \in [k-1,k],\ \ln(t) \leq \ln(k)$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\int_{k-1}^{k} \ln(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_{k-1}^{k} \ln(k) = \ln(k)$$

Ainsi

$$\int_{1}^{n} \ln(t)\ \mathrm{d}t \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} \ln(t)\ \mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n}\ln(k) = \sum_{k=1}^{n}\ln(k)$$

Comme une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ est $t \mapsto t\ln(t) - t$,

$$n\ln(n) - n + 1 \leq \sum_{k=1}^{n}\ln(k)$$

Cette inégalité est encore vraie si $n = 1$. On peut encore écrire

$$n\ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!)$$

puis par croissance de l'exponentielle

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n e \leq n!$$

Or $e \geq 1$ donc

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!$$

3 Comme u est bornée, U_n est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne inférieur et une borne supérieure, ce qui justifie la définition de $\underline{u}_n$ et $\overline{u}_n$.
Puisque $\mathrm{U}_{n+1} \subset \mathrm{U}_n$, $\inf(\mathrm{U}_n) \leq \inf(\mathrm{U}_{n+1})$ et $\sup(\mathrm{U}_n) \geq \sup(\mathrm{U}_{n+1})$. Les suites $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont donc respectivement croissante et décroissante.
Enfin, u étant bornée, les suites $\underline{u}$ et $\overline{u}$ le sont également. Elles convergent d'après le théorème de convergence monotone.

4 Soit v une suite décroissante et plus grande que u. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\forall k \geq n, u_k \leq v_k \leq v_n$$

Ainsi

$$\overline{u}_n = \sup_{k \geq n} u_k \leq v_n$$

Donc $\overline{u} \preceq v$: $\overline{u}$ est donc la plus petite suite décroissante et plus grande que u.
De même, soit v une suite croissante et plus petite que u. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\forall k \geq n, u_k \geq v_k \geq v_n$$

Ainsi

$$\overline{u}_n = \inf_{k \geq n} u_k \geq v_n$$

Donc $v \preceq \underline{u}$: $\underline{u}$ est donc la plus grande suite croissante et plus petite que u.

5 Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout entier $k \geq n$, $u_k \leq v_k$ puis $\sup_{k \geq n} u_n \leq \sup_{k \geq n} v_k$ ou encore $\overline{u}_n \leq \overline{v}_n$. On en déduit que $\lim \overline{u} \leq \lim \overline{v}$.

6 Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{u}_n \leq u_n \leq \overline{u}_n$.
Si $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont adjacentes, elles convergent vers la même limite. D'après le théorème d'encadrement, u converge également (vers cette même limite).
Supposons que u converge. On sait déjà que $\overline{u}$ et $\overline{u}$ sont respectivement croissante et décroissante. Notons ℓ la limite de u et donnons-nous $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq p$, $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$. Si l'on se donne un entier $n \geq p$, alors pour tout entier $k \geq n$, on a encore $\ell - \varepsilon \leq u_k \leq \ell + \varepsilon$. Ainsi

$$\ell - \varepsilon \leq \inf_{k \geq n} u_k \leq \sup_{k \geq n} u_k \leq \ell + \varepsilon$$

Finalement,

$$\forall n \geq p,\ \ell - \varepsilon \leq \underline{u}_n \leq \overline{u}_n \leq \ell + \varepsilon$$

Ceci montre que $\underline{u}$ et $\overline{u}$ convergent toutes deux vers ℓ. Elles sont donc adjacentes.
On a également montré que dans ce cas, $\lim u = \lim \underline{u} = \lim \overline{u}$.

7 Par définition de la division euclidienne

$$m = qn + r = (q-1)n + (n+r)$$

Par définition de la sous-additivité :

$$u_m = u_{(q-1)n+(n+r)} \leq u_{(q-1)n} + u_{n+r}$$

Or on montre aisément par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_{kn} \leq k \leq u_n$. Donc

$$u_m \leq (q-1)u_n + u_{n+r}$$

Ainsi

$$\frac{u_m}{m} \leq \frac{q-1}{m} u_n + \frac{u_{n+r}}{m} = \frac{(q-1)n}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{u_{n+r}}{m}$$

On a vu précédemment que $(q-1)n = m-n-r$. De plus, par définition du reste d'une division euclidienne, $0 \leq r \leq n-1$ donc $n \leq n+r \leq 2n-1$. Ainsi

$$u_{n+r} \leq \max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}$$

Finalement,

$$\frac{u_m}{m} \leq \frac{m-n-r}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}}{m}$$

8 La suite u étant positive, la suite $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par 0.
De plus, en prenant $n = 1$ dans la question précédente, on a $r = 0$ et

$$\forall m \geq 2, \frac{u_n}{m} \leq \frac{m-1}{m} u_1 + \frac{u_1}{m} = u_1$$

La suite $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est donc également majorée.
Reprenons à nouveau la question précédente avec $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

$$\forall m \geq 2n,\ \frac{u_m}{m} \leq \frac{m-n-r}{m}\cdot\frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}}{m} \leq \frac{u_n}{n} + \frac{\mathrm{M}_n}{m}$$

en posant $\mathrm{M}_n = \max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}$. La suite $\left(\frac{u_n}{n}+\frac{\mathrm{M}_n}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge évidemment vers $\frac{u_n}{n}$ donc d'après la question **6**,

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\ \frac{u_n}{n} + \frac{\mathrm{M}_n}{m} = \lim_{m\to+\infty} \frac{u_n}{n} + \frac{\mathrm{M}_n}{m} = \frac{u_n}{n}$$

Mais d'après la question **5** (encore valide si une suite est plus grande qu'une autre *à partir d'un certain rang*),

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\ \frac{u_m}{m} \leq \overline{\lim_{m\to+\infty}}\ \frac{u_n}{n} + \frac{\mathrm{M}_n}{m} = \frac{u_n}{n}$$

9 Posons $\ell = \overline{\lim}_{m\to+\infty} \frac{u_m}{m}$. Ainsi $\ell \leq \frac{u_n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On montre alors comme dans la question **5** que $\ell \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$. Finalement,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ \frac{u_n}{n} \leq \underline{\lim_{n\to+\infty}}\ \frac{u_n}{n}$$

mais l'inégalité inverse est aussi trivialement vraie. Ainsi

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ \frac{u_n}{n} = \underline{\lim_{n\to+\infty}}\ \frac{u_n}{n}$$

D'après la question **6**, la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

10 Soit $\omega \in \bigcap_{k=1}^n \{\mathrm{X}_k < x\}$. Alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{X}_k(\omega) < x$ donc $\mathrm{Y}_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathrm{X}_k(\omega) < \frac{nx}{n} = x$. Ainsi

$$\bigcap_{k=1}^n \{\mathrm{X}_k < x\} \subset \{\mathrm{Y}_n < x\}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \{\mathrm{X}_k < x\}\right) \leq \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n < x)$$

Mais comme $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes,

$$\prod_{k=1}^n \mathbb{P}(\mathrm{X}_k < x) \leq \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n < x)$$

Comme les X_k ont tous la même loi,

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(\mathrm{X}_k < x) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 < x) = 1$$

Finalement, $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n < x) \geq 1$ et donc $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n < x) = 1$.
Soit $\omega \in \bigcap_{k=1}^n \{\mathrm{X}_k \geq x\}$. Alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{X}_k(\omega) \geq x$ donc $\mathrm{Y}_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathrm{X}_k(\omega) \geq \frac{nx}{n} = x$. Ainsi

$$\bigcap_{k=1}^n \{\mathrm{X}_k \geq x\} \subset \{\mathrm{Y}_n \geq x\}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \{\mathrm{X}_k \geq x\}\right) \leq \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \geq x)$$

Mais comme $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes,

$$\prod_{k=1}^n \mathbb{P}(\mathrm{X}_k \geq x) \leq \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \geq x)$$

Comme les X_k ont tous la même loi,

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(\mathrm{X}_k < x) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 < x) > 0$$

Finalement, $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n < x) > 0$.

11 Soit $\omega \in \left(\{Y_m \geq x\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right\}\right)$. Alors

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} X_k(\omega) \geq x \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k(\omega) \geq x$$

donc

$$\sum_{k=1}^{m} X_k(\omega) \geq mx \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k(\omega) \geq nx$$

puis

$$\sum_{k=1}^{m+n} X_k(\omega) \geq mx + nx = (m+n)x$$

et enfin

$$\frac{1}{m+n}\sum_{k=1}^{m+n} X_k(\omega) \geq x$$

ou encore

$$Y_{m+n}(\omega) \geq x$$

Ainsi $\omega \in \{Y_{m+n} \geq x\}$. On en déduit que

$$\left(\{Y_m \geq x\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right\}\right) \subset \{Y_{m+n} \geq x\}$$

puis

$$\mathbb{P}\left(\{Y_m \geq x\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right\}\right) \leq \mathbb{P}(Y_{m+n}) \geq x$$

D'après le lemme des coalitions, Y_m et $\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ sont indépendantes donc

$$\mathbb{P}\left(\{Y_m \geq x\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right\}\right) = \mathbb{P}(Y_m \geq x)\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right)$$

Comme les X_k sont indépendantes, on a en termes de fonctions génératrices :

$$G_{\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k} = \prod_{k=m+1}^{m+n} G_{X_k}$$

Mais comme les X_k suivent la même loi, elles ont même fonction génératrice. Ainsi

$$G_{\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k} = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k} = G_{\sum_{k=1}^{n} X_k}$$

Par conséquent, $\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ et $\sum_{k=1}^{n} X_k$ ont la même loi. On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq nx\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \geq nx\right)$$

et donc

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq x\right) = \mathbb{P}(Y_n \geq x)$$

Finalement

$$\mathbb{P}(Y_m \geq x)\mathbb{P}(Y_n \geq x) \leq \mathbb{P}(Y_{m+n} \geq x)$$

12 Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $\mathbb{P}(X_1 \geq x) = 0$, alors $\mathbb{P}(X_1 < x) = 1$. D'après la question **10**, $\mathbb{P}(Y_n < x) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $\mathbb{P}(Y_n \geq x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $\left(\mathbb{P}(Y_n \geq x)^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
Si $\mathbb{P}(X_1 \geq x) > 0$, alors $\mathbb{P}(Y_n \geq x) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ toujours d'après la question **10**. On peut alors poser $u_n = -\ln \mathbb{P}(Y_n \geq x)$. La suite (u_n) est alors positive puisqu'une probabilité est inférieure ou égale à 1. D'après la question précédente permet alors d'affirmer que $u_{m+n} \leq u_m + u_n$ pour tout $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. La question **9** montre que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers un réel ℓ. Il en découle de $\left(\mathbb{P}(Y_n \geq x)^{\frac{1}{n}}\right)$ converge vers $e^{-\ell}$.

13 Le résultat est clair lorsque $s = 1$. Supposons-le vrai pour un certain $s \in \mathbb{N}^*$. Donnons-nous alors une liste a de jetons donnant $s+1$ piles. Soit $z = a_j$ une jeton de la pile $s+1$. A un moment précédent, on a donc mis un jeton $z' = a_i$ sur la pile s tel que $i < j$ et $a_i > a_j$. Considérons la liste a' consistant en la liste a privée des éléments de la pile $s+1$. En appliquant le processus de l'énoncé à a', on va donc aboutir aux mêmes s piles qu'avec la liste a. En appliquant l'hypothèse de récurrence, il existe une suite b' vérifiant :

- b' est décroissante et de longueur s ;
- pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, le jeton b'_i est dans la pile i ;
- $b'_s = z'$.

On construit alors b en posant $b_i = b'_i$ pour $i \in [\![1, s]\!]$ et $b_{s+1} = z$.

- b' est décroissante de longueur s et $b_{s+1} = z = a_j < a_i = b_s$ donc b est décroissante de longueur $s+1$.
- Pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $b_i = b'_i$ est bien dans la pile i et b_{s+1} est bien dans la pile $s+1$.
- $b_{s+1} = z$.

Le résultat est donc établi par récurrence.

14 Notons à nouveau s le nombre de piles obtenu à l'aide du processus décrit dans la question précédente. Si $s \geq q+1$, on extrait de a une liste décroissante de longueur s comme dans la question précédente. En prenant les $q+1$ premiers termes de cette liste, on obtient une liste extraite de a décroissante et de longueur $q+1$.
Si $s \leq q$, une des piles contient au moins $p+1$ éléments, sinon le nombre de jetons serait inférieur ou égal à pq. Les éléments de cette pile (du bas vers le haut) forment une suite extraite de a croissante et de longeur supérieure ou égale à $p+1$. En extrayant les $p+1$ premiers termes de cette suite extraite, on obtient une suite extraite de a croissante et de longueur $p+1$.