

Parties convexes

Exercice 1 ★★

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et \mathcal{C} une partie de E . Montrer que \mathcal{C} est convexe si et seulement si tout barycentre de points de \mathcal{C} à coefficients positifs est dans \mathcal{C} .

Exercice 2 ★★★★★

ENS MP 2010

Déterminer les matrices $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que A et A^{-1} appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 3 ★★

Epigraphe

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle de \mathbb{R} . On appelle épigraphe de f l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y \geq f(x)\}$$

Montrer que f est convexe si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de \mathbb{R}^2 .

Exercice 4 ★★

Enveloppe convexe et théorème de Carathéodory

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et \mathcal{A} une partie de E . On note \mathcal{C} l'enveloppe convexe de \mathcal{A} autrement dit la plus petite partie convexe de E (au sens de l'inclusion) contenant \mathcal{A} .

1. Montrer que \mathcal{C} est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de \mathcal{A} .
2. On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Montrer que \mathcal{C} est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de $n + 1$ points de \mathcal{A} .

Exercice 5 ★

Un carré est convexe

Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. Montrer que C est une partie convexe de \mathbb{R}^2 .

Exercice 6 ★

Somme de deux convexes

Soient C_1 et C_2 deux convexes. Montrer que l'ensemble

$$C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2, (x_1, x_2) \in C_1 \times C_2\}$$

est également convexe.

Inégalités

Exercice 7 ★

Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

Exercice 8 ★

1. Montrer que $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x \ln x$ est convexe.
2. En déduire que pour tout $x \in]0, 1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 9 ★★★

Inégalité de Jensen

Soit f continue sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R}_+^* .

1. Montrer que $\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln(f(t)) dt \leq \ln \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right)$.
2. Application : calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_1^n \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t dt$.

Exercice 10 ★★★★★

ENS PC 2010

Soient $n \geq 3$ et Γ un cercle. Parmi les polygones convexes à n côtés inscrits dans Γ , montrer que ce sont les polygones réguliers qui maximisent l'aire.

Exercice 11 ★★★

Inégalité de Jensen

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et φ une fonction continue et convexe sur $f([a, b])$. Montrer que

$$\varphi \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f(t) dt$$

Exercice 12 ★★★**X MP**

Soit f une application de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} continue et concave telle que $f(0) = 1$. Montrer que

$$\int_0^1 x f(x) \, dx \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^1 f(x) \, dx \right)^2$$

Exercice 13 ★★★

Soit a_1, \dots, a_n des réels strictement positifs. On pose

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \quad G_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \quad H_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}$$

Montrer que $H_n \leq G_n \leq A_n$.

Exercice 14 ★★

1. Etudier la convexité de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \ln(1 + e^x)$.
2. Soient x_1, \dots, x_n des réels strictement positifs. Montrer que

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right)^{\frac{1}{n}}$$

3. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n b_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k) \right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 15 ★★★**Inégalités de Hölder et Minkowski**

Soient p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Prouver l'inégalité de Young,

$$\forall (u; v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

2. Soient x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_n des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité de Hölder,

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

3. Soient $p > 1$, x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_n des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité de Minkowski,

$$\left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n y_k^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Exercice 16 ★★**Entropie**

Soient p_1, \dots, p_n des réels strictement positifs et de somme 1. On pose $H(p) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i)$.

1. Montrer que $0 \leq H(p) \leq \ln(n)$.
2. Soient q_1, \dots, q_n des réels strictement positifs et de somme 1. Montrer que

$$H(p) \leq - \sum_{i=1}^n p_i \ln(q_i)$$

Théorie**Exercice 17 ★★★★★****X MP**

Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$, $(b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t) \, dt$. Montrer que f est convexe.

Exercice 18 ★★★

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, F(y) - F(x) \geq (y - x)f(x)$$

1. Montrer que f est croissante et que F est convexe.
2. Montrer que F est une primitive de f .

Exercice 19 ★★★**Convexité entière**

Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) \geq \frac{f(n+1) + f(n-1)}{2}$$

On suppose de plus que f est minorée. Montrer que f est constante.

Exercice 20 ★★★★★**ENS MP 2010**

Soit f une fonction positive sur \mathbb{R} . Montrer qu'il existe une unique fonction g convexe sur \mathbb{R} telle que pour toute fonction h convexe sur \mathbb{R} telle que $h \geq f$, on ait $h \leq g$.

Exercice 21 ★★★★★**ENS Ulm/Lyon/Cachan MP 2001**

Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, on note

$$E_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > f(x)\}$$

l'épigraphe de f .

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

1. Montrer qu'il existe une unique application $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $E_h = E_f + E_g$.
2. On suppose f et g convexes. Montrer que h est convexe.
3. Montrer que f et g peuvent être de classe \mathcal{C}^∞ sans que h le soit.

Exercice 22 ★★★**X-ENS 2017 PC**

Que peut-on dire d'une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et impaire ?

Exercice 23 ★★★**Fonctions convexes majorées**

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. Prouver que f est constante.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. A-t-on la même conclusion qu'à la question précédente ?

Exercice 24 ★★

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que si f admet un minimum local en $a \in I$, alors f admet un minimum global en a .

Divers**Exercice 25 ★★**

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que $f \geq 0$ sur $[a, b]$ et on souhaite montrer qu'il n'existe qu'une solution non nulle de l'équation différentielle $y'' - fy = g$ s'annulant en a et b .

Soient donc φ_1 et φ_2 deux solutions de l'équation différentielle $y'' - fy = g$ s'annulant en a et b .

1. Montrer que $(\varphi_1 - \varphi_2)^2$ est convexe.
2. En déduire que $\varphi_1 = \varphi_2$.

Exercice 26 ★★

Soient f une application convexe sur un intervalle I , $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ une série à termes positifs convergente de somme 1 et (x_n) une suite d'éléments de I . Montrer que si les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n f(x_n)$ convergent, alors

$$f\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(x_n)$$

Exercice 27 ★★**TPE**

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 convexe sur $[0, 2\pi]$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) \, dt \geq 0$$