Devoir à la maison n° 5

Exercice 1.

On suppose par l'absurde que π est rationnel et donc qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ tel que $\pi=\dfrac{a}{b}$.

On pose $I_n=\displaystyle\int_0^\pi \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}\sin x\,dx$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.

2. Calculer I_0 et I_1.

3. Etablir une relation de récurrence entre I_n, I_{n+1} et I_{n+2}.

4. Montrer que la suite (I_n) est stationnaire de limite nulle. En déduire une contradiction.

Exercice 2.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt$ et $J_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^n t\,dt$.

1. Calculer I_0, J_0, I_1, J_1.

2. Montrer que $I_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3. Montrer que $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

4. **a.** Montrer que pour $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}\sin t$.

b. En déduire que $0\leqslant J_n\leqslant\dfrac{\pi^2}{4}(I_n-I_{n+2})$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

c. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{J_n}{I_n}$ converge vers 0.

5. **a.** Montrer que $I_{n+2}=\dfrac{1}{2}\left((n+1)(n+2)J_n-(n+2)^2J_{n+2}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b. En déduire que $\dfrac{J_n}{I_n}-\dfrac{J_{n+2}}{I_{n+2}}=\dfrac{2}{(n+2)^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

6. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite de terme général S_n converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.