Devoir à la maison n°07 : corrigé

Problème 1 — Équation fonctionnelle

1. **a.** En choisissant $x = y = 0$ dans la relation de l'énoncé, on obtient $f(0) = 0$. En choisissant $x = y = 1$, on obtient $f(1) = 0$. Enfin, en choisissant $x = y = -1$, on obtient $f(-1) = 0$.

   b. On se donne $x \in \mathbb{R}$. En choisissant $y = -1$, on obtient $f(-x) = -f(x)$ puisque $f(-1) = 0$. f est donc bien impaire.

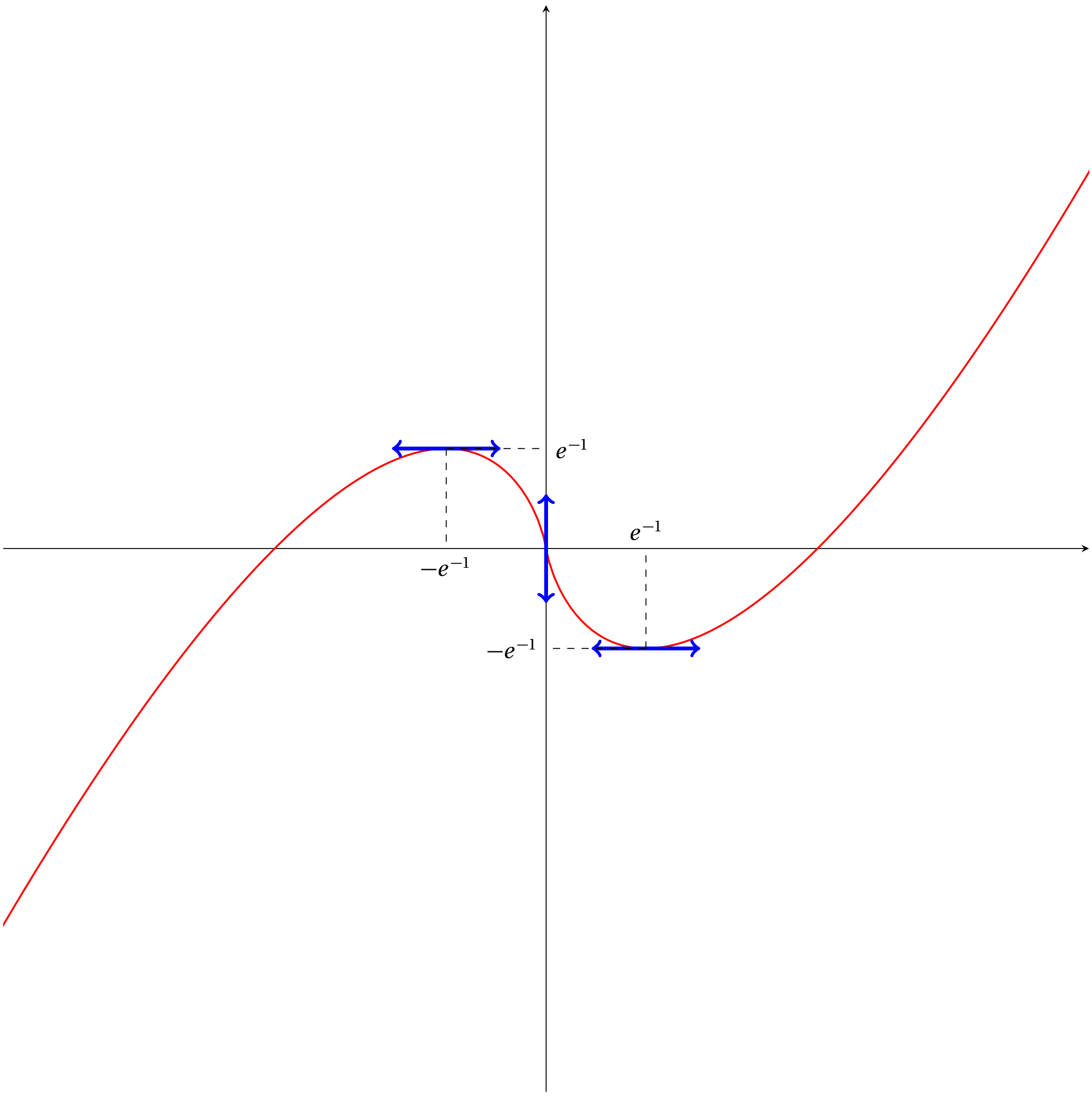
2. **a.** On dérive la relation de l'énoncé par rapport à y :
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ xf'(xy) = xf'(y) + f(x)$$
On fixe alors $y = 1$ de sorte que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xf'(x) - f(x) = xf'(1)$$
Ainsi f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $xy' - y = kx$ avec $k = f'(1)$.

   b. Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par variation de la constante, on trouve que $x \mapsto kx\ln(x)$ est solution particulière. Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation avec second membre sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda x + kx\ln(x)$.
   Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x + kx\ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Or on sait que $f(1) = 0$, ce qui impose $\lambda = 0$. On en déduit que $f(x) = kx\ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est impaire, $f(x) = -f(-x) = kx\ln(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$. Enfin, f est continue en 0 donc $f(0) = \lim_{x\to 0^+} kx\ln(x) = 0$ par croissances comparées.

3. **a.** La question précédente montre que $\varphi(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ x\ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \ln x$. Ainsi $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$, ce qui prouve que f n'est pas dérivable en 0.

   Remarque. On prouve de même que $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$. On peut en déduire que la courbe de f admet une tangente verticale en son point d'abscisse 0. ■

   b. On se contente d'étudier f sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque f est impaire. On trouve que $f'(x) = \ln(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi f est strictement décroissante sur $]0, 1/e]$ et strictement croissante sur $[1/e, +\infty[$. Par opérations sur les limites, $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
   Puisque f est impaire, f est strictement croissante sur $[-1/e, 0[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, 1/e]$ et $\lim_{-\infty} f = -\infty$.



4. **a.** Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
On fixe alors $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(xt) = xf(t) + tf(x)$$

On se donne maintenant $y \in \mathbb{R}$ et on intègre la relation précédente entre 0 et y. Ainsi

$$\int_0^y f(xt)\,\mathrm{d}t = x\mathrm{F}(y) + \frac{y^2}{2}f(x)$$

On multiplie cette relation par x :

$$\int_0^y xf(xt)\,\mathrm{d}t = x^2\mathrm{F}(y) + \frac{xy^2}{2}f(x)$$

En effectuant le changement de variable $u = xt$ dans la première intégrale, on obtient

$$\mathrm{F}(xy) = x^2\mathrm{F}(y) + \frac{xy^2}{2}f(x)$$

b. En choisissant $y = 1$ dans le relation précédente, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \frac{2}{x}\left(\mathrm{F}(x) - x^2\mathrm{F}(1)\right)$$

Or F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que primitive. Par opérations, f est donc elle-même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. D'après la question **.2**, il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=kx\ln|x|$ pour $x\neq 0$ et $f(0)=0$.
Réciproquement, on vérifie aisément qu'une telle fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (seule la continuité en 0 pose éventuellement problème mais $\lim_{x\to 0} x\ln|x|=0$). On vérifie également que

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(xy)=xf(y)+yf(x)$$

quitte à distinguer les cas où $x=0$ ou $y=0$.
On a donc démontré que $\mathscr{E}=\mathrm{vect}(\varphi)$.

Solution 1.

1. **a.** φ est deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ en tant que produit de fonctions deux fois dérivables sur cet intervalle et pour tout $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\varphi''(t)=\cos(t)z''(t)-2\sin(t)z'(t)-\cos(t)z(t)$$

b. D'après la question précédente, z est solution de (E) *si et seulement si* φ'' est nulle sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Or φ'' est nulle sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *si et seulement si* il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(t)=\lambda t+\mu$ pour tout $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que les solutions de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sont les fonctions

$$t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\mapsto\frac{\lambda t+\mu}{\cos t}\text{ où }(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

2. **a.** Puisque $z(t)=y(\sin t)$, pour tout $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $y(x)=z(\arcsin x)$ pour tout $x\in]-1,1[$. On en déduit que pour tout $x\in]-1,1[$

$$y'(x)=\frac{z'(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\qquad\qquad y''(x)=\frac{z''(\arcsin x)}{1-x^2}+\frac{xz'(\arcsin x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

b. y est solution de (F) *si et seulement si*

$$\forall x\in]-1,1[,\ (1-x^2)y''(x)-3xy'(x)-y(x)=0$$

ce qui équivaut d'après la question précédente à

$$\forall x\in]-1,1[,\ z''(\arcsin x)-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}z'(\arcsin x)-z(\arcsin x)=0$$

Puisque sin prend toute les valeurs dans $]-1,1[$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, ceci équivaut encore à

$$\forall t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ z''(\arcsin(\sin t))-\frac{2\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}z'(\arcsin(\sin t))-z(\arcsin(\sin t))=0$$

Or pour tout $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$ car cos est positive sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $\arcsin(\sin t)=t$.
Finalement, y est solution de (F) *si et seulement si*

$$\forall t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ z''(t)-\frac{2\sin t}{\cos t}z'(t)-z(t)=0$$

autrement dit, *si et seulement si* z est solution de (E).
Les solutions de (E) étant les fonctions

$$t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\mapsto\frac{\lambda t+\mu}{\cos t}\text{ où }(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

celles de (F) sont les fonctions

$$x\in]-1,1[\mapsto\frac{\lambda\arcsin x+\mu}{\cos(\arcsin x)}\text{ où }(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

ou encore les fonctions

$$x\in]-1,1[\mapsto\frac{\lambda\arcsin x+\mu}{\sqrt{1-x^2}}\text{ où }(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

3. **a.** Remarquons tout d'abord que f est deux fois dérivable en tant que solution d'une équation différentielle d'ordre 2.
De plus, pour tout $x \in]-1,1[$,
$$f''(x) = \frac{3xf'(x)}{1-x^2} + \frac{f(x)}{1-x^2}$$
Supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que f soit n fois dérivable sur $]-1,1[$. A fortiori, f est $n-1$ fois dérivable sur $]-1,1[$. f' est également $n-1$ fois dérivable sur $]-1,1[$. Puisque $x \mapsto \frac{3x}{1-x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ sont indéfiniment dérivables donc a fortiori $n-1$ fois dérivables sur $]-1,1[$, f'' est $n-1$ fois dérivable sur $]-1,1[$.
Autrement dit f est $n+1$ fois dérivable sur $]-1,1[$.
Par récurrence, f est indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$.

b. Notons HR(n) l'hypothèse de récurrence suivante
$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+1)}(x) - (n+1)^2 f^{(n)}(x) = 0$$
HR(0) est vraie puisque f est solution de (F). Supposons que HR(n) soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors en dérivant (ceci est licite car les fonctions en jeu sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$), on obtient
$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)f^{(n+3)}(x) - 2xf^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+2)}(x) - (2n+3)f^{(n+1)}(x) - (n+1)^2 f^{(n+1)}(x) = 0$$
ou encore
$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)f^{(n+3)}(x) - (2n+5)xf^{(n+2)}(x) - (n+2)^2 f^{(n+1)}(x) = 0$$
puisque $(n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$.
Par récurrence, HR(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Remarque. On peut prouver directement la relation demandée sans récurrence à l'aide de la formule de Leibniz en dérivant n fois la relation
$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)f''(x) - 3xf'(x) - f(x) = 0$$
■

c. En évaluant la relation de la question précédente en $x = 0$, on obtient $a_{n+2} = (n+1)^2 a_n$.

d. Récurrences sans aucune difficulté.

4. **a.** C'est du cours
$$f(x) \underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

b. g est bien solution de (F) (prendre $\lambda = 1$ et $\mu = 0$ dans la solution générale). On a évidemment $g(0) = 0$. De plus, $g(x) \underset{x\to0}{\sim} x$ de sorte que $g'(0) = 1$. En reprenant les notations de la question précédente, $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$a_{2p} = 0 \qquad\qquad a_{2p+1} = 2^{2p}\left(p!\right)^2$$
En appliquant la formule de Taylor-Young à g en 0 à l'ordre $2n+1$ (ceci est licite puisque g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'après la question **3.a**), on a donc
$$g(x) \underset{x\to0}{=} \sum_{p=0}^{n} \frac{2^{2p}\left(p!\right)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1} + o(x^{2n+1})$$

c. h est bien solution de (F) (prendre $\lambda = 0$ et $\mu = 1$ dans la solution générale). On a évidemment $h(0) = 1$. De plus, $h(x) \underset{x\to0}{=} 1 + o(x)$ de sorte que $h'(0) = 0$. En reprenant les notations de la question précédente, $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$a_{2p} = \frac{\left((2p)!\right)^2}{2^{2p}\left(p!\right)^2} \qquad\qquad a_{2p+1} = 0$$
En appliquant la formule de Taylor-Young à h en 0 à l'ordre $2n$ (ceci est licite puisque h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'après la question **3.a**), on a donc
$$h(x) \underset{x\to0}{=} \sum_{p=0}^{n} \frac{(2p)!}{2^{2p}\left(p!\right)^2} x^{2p} + o(x^{2n})$$
ou encore
$$h(x) \underset{x\to0}{=} \sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}} x^{2p} + o(x^{2n})$$

d. Puisque k est une primitive de h sur $]-1,1[$,

$$k(x) \underset{x\to 0}{=} k(0) + \sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{2p}{p}}{(2p+1)2^{2p}} x^{2p+1} + o(x^{2n+1})$$

et donc

$$k(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{2p}{p}}{(2p+1)2^{2p}} x^{2p+1} + o(x^{2n+1})$$

5. Le coefficient de x^{2n+1} dans le développement limité de g en 0 est $\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
D'autre part, dans le produit hk, un terme en x^{2n+1} est obtenu comme le produit d'un terme en x^{2p+1} dans le développement limité de k en 0 et d'un terme en $x^{2(n-p)}$ dans le développement limité de h en 0. Par unicité du développement limité

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{2p}{p}}{(2p+1)2^{2p}} \frac{\binom{2(n-p)}{n-p}}{2^{2(n-p)}} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

ou encore

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1} \binom{2p}{p} \binom{2(n-p)}{n-p} = \frac{2^{4n}}{(n+1)\binom{2n+1}{n}}$$