Devoir surveillé n°06

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 ★ **ESTP 1977**

Soit E un espace vectoriel normé. On note respectivement $\mathring{X}$ et $\overline{X}$ l'intérieur et l'adhérence d'une partie X de E. On note également $\alpha(X) = \mathring{\overline{X}}$ et $\beta(X) = \overline{\mathring{X}}$.

1. Montrer que si X est ouvert, alors $X \subset \alpha(X)$ et que si X est fermé, alors $\beta(X) \subset X$.

2. Montrer que, de manière générale, $\alpha(\alpha(X)) = \alpha(X)$ et $\beta(\beta(X)) = \beta(X)$.

3. Dans cette question, on considère $E = \mathbb{R}$. Déterminer les ensembles $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathring{\mathbb{Q}}$.

4. Donner un exemple (dans $\mathbb{R}$ si l'on veut), où les ensembles suivants sont tous distincts :

$$X,\ \mathring{X},\ \overline{X},\ \alpha(X),\ \beta(X),\ \alpha(\mathring{X}), \beta(\overline{X})$$

5. A et B étant deux parties de E, montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Donner un exemple simple où $A \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ sont distincts et un autre où, A n'étant pas ouvert, $A \cap \overline{B}$ n'est pas inclus dans $\overline{A \cap B}$.

Exercice 2 ★★ **CCP MP 2020**

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pourra utiliser librement dans cet exercice le fait que l'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2. Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier que

$$\exists \rho > 0,\ \forall \lambda \in]0, \rho[,\ M - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

En déduire que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Application. Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
A l'aide des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, prouver que le résultat n'est pas vrai pour les polynômes minimaux.

5. Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 3 ★★ **ENSAM Option T 1996**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.

2. Etudier les variations de u_n. Que peut-on conclure pour la convergence de la série $\sum u_n$? La somme S de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

3. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

4. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $\alpha_N > 0$ tel que pour $0 < |x| \leq \alpha_N$, on ait

$$\frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_N(x)}{x} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

En déduire la limite en 0 de $x \mapsto \frac{S(x)}{x}$. S est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 4 ★★ **E3A PSI 2020**

Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$$

1. Déterminer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur J.

On note alors $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in J$..

2. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ne converge pas normalement sur J.

3. Etudier alors sa convergence uniforme sur J.

4. Déterminer $\ell = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

a. Justifier la convergence de la série $\sum u_n$. On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

b. Montrer que l'on a au voisinage de l'infini :

$$\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Exercice 5 ★ **CCP MP 2014**

Soit un entier $n \geq 2$ et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n. On appelle *projecteur* de E, tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$.

1. Soit p un projecteur de E.

a. Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E.

b. En déduire que la trace de p (notée $\mathrm{tr}(p)$) est égale au rang de p (noté $\mathrm{rg}(p)$).

c. Un endomorphisme u de E vérifiant $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{rg}(u)$ est-il nécessairement un projecteur de E ?

2. Donner un exemple de deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 telles que A soit diagonalisable et B ne soit pas diagonalisable. Justifier la réponse.

3. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

a. Démontrer qu'il existe une base $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice $\mathrm{mat}_\beta(u)$ de u dans β soit de la forme :

$$\mathrm{mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont n nombres réels.

b. Démontrer que u est diagonalisable si, et seulement si, la trace de u est non nulle.

c. On suppose que $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{rg}(u) = 1$. Démontrer que u est un projecteur.

d. Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que A est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera l'image et le noyau.

Exercice 6 ★★ **EM Lyon 2022 – Symétries anticommutant**

Dans tout ce problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. L'application identité de E est notée Id. Si f est un endomorphisme de E, pour toute valeur propre λ de f on note $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})$ le sous-espace propre de f relatif à λ.

1. Dans cette question seulement, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n = 4$. On le munit d'une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ et on considère les endomorphismes u et v représentés dans la base $\mathcal{B}$ par les matrices

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 3 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que u et v sont des symétries, et vérifier rapidement que $u \circ v = -v \circ u$.

b. Calculer $\mathrm{tr}(u)$ et $\mathrm{tr}(v)$; montrer que cela permet de déterminer la dimension des sous-espaces propres de u et de v (sans avoir à déterminer ces derniers explicitement).

c. Déterminer une base (e_1, e_2) de $E_1(u)$. Montrer que la famille (e_3, e_4) définie par $e_3 = v(e_1)$ et $e_4 = v(e_2)$ est une base de $E_{-1}(u)$.
Si l'on pose $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, justifier que $\mathcal{E}$ est une base de E et déterminer la matrice représentative de u et de v dans la base $\mathcal{E}$.

On revient au cas général ; n est maintenant supposé quelconque. Soient u et v deux endomorphismes de E vérifiant $u^2 = v^2 = \mathrm{Id}$ et $u \circ v + v \circ u = 0$.

2. Montrer que $\mathrm{tr}(u \circ v) = 0$.

3. Montrer que $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(v) = 0$.

4. Montrer que $E = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$ et expliciter, pour tout vecteur $x \in E$, la décomposition de x dans cette somme directe.

5. Montrer que la dimension de E est paire. On notera $n = 2k$, avec k un entier naturel.

6. Montrer que $v(E_1(u)) = E_{-1}(u)$ et que $v(E_{-1}(u)) = E_1(u)$.

7. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{2k})$ de E dans laquelle les matrices de u et de v s'écrivent, par blocs :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_k \end{array}\right) \text{ et } \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(v) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_k \\ \hline I_k & 0 \end{array}\right)$$