

# DEVOIR SURVEILLÉ N°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1 – D'après INT 1991

### Notations

- La suite complexe de terme général  $\alpha_n$  est notée  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ou  $(\alpha_n)$  ou plus simplement  $\alpha$ .
- La série de terme général  $u_n$  est notée  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  ou plus simplement  $\sum u_n$ .

### Partie I –

Dans cette partie, on note  $S_{AC}$  l'ensemble des suites  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telles que  $\sum u_n$  converge *absolument*. On admet que  $S_{AC}$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

1. a. Soit  $u$  une suite à termes strictement positifs tel que  $\sum u_n$  converge. Montrer qu'il existe une suite  $\alpha$  de réels positifs, tendant vers  $+\infty$  en croissant, telle que la série  $\sum \alpha_n u_n$  converge.  
On pourra utiliser la suite  $\alpha$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}}$  où  $R_n$  est le reste de rang  $n$  de la série  $\sum u_n$ .
- b. Soit  $u$  une suite à termes strictement positifs tel que  $\sum u_n$  diverge. Montrer, de façon analogue, qu'il existe une suite  $\alpha$  de réels positifs, tendant vers 0 en décroissant, telle que la série  $\sum \alpha_n u_n$  diverge.
2. Normes sur  $S_{AC}$ .

- a. Soit  $\alpha$  une suite *strictement* positive et majorée. Montrer que l'application  $N_\alpha$  définie par

$$\forall u \in S_{AC}, N_\alpha(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |u_n|$$

est bien définie et que c'est une norme sur  $S_{AC}$ .

- b. Soit  $\alpha$  une suite strictement positive et majorée. Pour  $p \in \mathbb{N}$ , on note  $\delta^p$  la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui de rang  $p$  qui vaut 1, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \delta_n^p = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ 1 & \text{si } n = p \end{cases}$$

Que vaut  $N_\alpha(\delta^p)$  ?

- c. Dans cette question uniquement, on suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \beta_n = \frac{1}{n!}$$

Les normes  $N_\alpha$  et  $N_\beta$  sont-elles équivalentes sur  $S_{AC}$  ?

- d. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux suites strictement positives et majorées. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $N_\alpha$  et  $N_\beta$  soient équivalentes.

### Partie II –

Dans cette partie, on considère une suite  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\sum u_n$  converge et on note  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ .

1. Dans cette question uniquement, on se donne  $q \in \mathbb{C}$  tel que  $|q| < 1$  et on suppose que  $u_n = q^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

a. Déterminer  $R_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

b. Montrer que la série  $\sum u_n$  converge et calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$ .

2. Dans cette question uniquement, on se donne  $\alpha > 1$  et on suppose que  $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a. Montrer que

$$\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$$

b. En déduire un équivalent de  $R_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

c. Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la série  $\sum R_n$  converge-t-elle ?

d. Montrer que dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

On pourra s'intéresser à la famille  $(v_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}}$  où  $v_{k,n} = \begin{cases} \frac{1}{k^\alpha} & \text{si } k > n \\ 0 & \text{si } k \leq n \end{cases}$ .

3. Dans cette question uniquement, on se donne  $a \in \mathbb{R}$  et on suppose que  $u_n = \frac{a^n}{n!}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

a. Que vaut  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  ? On ne demande pas de justification.

b. Justifier la série  $\sum R_n$  converge et montrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = ae^a$ .

On pourra s'intéresser à la famille  $(v_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}}$  où  $v_{k,n} = \begin{cases} \frac{a^k}{k!} & \text{si } k > n \\ 0 & \text{si } k \leq n \end{cases}$ .

4. Dans cette question, on suppose seulement  $u$  positive.

a. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} R_k = nR_n + \sum_{k=1}^n ku_k$$

b. On suppose que la série  $\sum R_n$  converge. Montrer que la série  $\sum nu_n$  converge puis que la suite  $(nR_n)$  converge vers 0.

### Partie III –

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on pose  $N(A) = \max_{1 \leq i, j \leq n} |A_{i,j}|$ . On admet que  $N$  est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note  $I$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

1.
  - a. Montrer que pour  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ ,  $N(AB) \leq nN(A)N(B)$ .
  - b. En déduire que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $N(A^p) \leq n^{p-1}N(A)^p$ .
  - c. Montrer que la série  $\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{A^p}{p!}$  converge. On pose alors  $\exp(A) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{p!}$ .

2. Dans cette question, on suppose  $n = 3$  et on pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

- a. Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $A^2 = aA + bI$ .
- b. Déterminer deux suites  $\alpha$  et  $\beta$  telles que

$$\forall p \in \mathbb{N}, A^p = \alpha_p A + \beta_p I$$

- c. Déterminer deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\exp(A) = \lambda A + \mu I$ .

- d. On pose  $R_p = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ . Montrer que la série  $\sum_{p \in \mathbb{N}} R_p$  converge et calculer  $\sum_{p=0}^{+\infty} R_p$  sous la forme  $cA + dI$  où  $c$  et  $d$  sont deux réels.