Devoir à la maison n°17

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – CCP PSI 2006

Si n est un entier naturel non nul, on note

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

et on pose $\sigma_0 = 0$.

A toute suite complexe a, on associee la suite a^* définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

I Deux exemples

1 **Cas d'une suite constante.**
Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. On suppose que la suite a est définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha$.

1.a Expliciter $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1.b Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$.

1.c La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ (resp. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n^*$) est-elle convergente ?

2 **Cas d'une suite géométrique.**
Soit $z \in \mathbb{C}$; on suppose que la suite a est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = z^n$.

2.a Exprimer a_n^* en fonction de z et n.

2.b On suppose que $|z| < 1$.

2.b.i Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ et expliciter sa somme $\mathrm{A}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

2.b.ii Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de $\mathrm{A}(z)$.

2.c On suppose que $|z| \geq 1$.

2.c.i Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$?

2.c.ii Quelle est la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n^*$ si $z = -2$?

2.c.iii On suppose $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$.
Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$.

II Etude du procédé de sommation

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que a est à valeurs réelles.

3 Comparaison des convergences des deux suites.

3.a Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une entier k fixé, $k \in [\![0, n]\!]$.

3.a.i Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3.a.ii En déduire la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3.b Soit a une suite réelle et q un entier naturel fixé.
On considère pour $n > q$ la somme $\mathrm{S}_q(n, a) = \sum_{k=0}^{q} \binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $\mathrm{S}_q(n, a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

3.c On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

3.d On suppose que a_n tend vers ℓ (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

3.e La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

4 Comparaison des convergences des séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $\mathrm{T}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^*$, $\mathrm{U}_n = 2^n\mathrm{T}_n$.

4.a Pour $n \in [\![0, 3]\!]$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k, c'est à dire sous la forme $\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}\mathrm{S}_k$.

4.b On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k pour $k \in [\![0, n]\!]$:

$$(\mathcal{E}) : \ \mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}\mathrm{S}_k \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

4.b.i A quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte-tenu des résultats obtenus à la question précédente ?

4.b.ii Etablir la formule $(\mathcal{E})$ par récurrence sur l'entier n (on pourra remarquer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = \mathrm{S}_k - \mathrm{S}_{k-1}$ avec la convention $\mathrm{S}_{-1} = 0$).

4.c On suppose que la série $\sum a_n$ est convergente. Montrer que la série $\sum a_n^*$ est convergente et exprimer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

4.d La convergence de la série $\sum a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum a_n^*$?

III Une étude de fonctions

Pour x réel, lorsque cela a du sens, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_n x^n}{n!} \qquad \phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n x^n$$

5 **Etude de f.**

5.a Vérifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

5.b Expliciter $xf(x)$ pour tout x réel.

5.c Expliciter $e^{-x}f(x)$ pour tout x réel.

6 **Etude de g.**

6.a Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

6.b On désigne par g' la dérivée de la fonction g. Exprimer $g' - g$ en fonction de f.

6.c Montrer que pour tout x réel :

$$g(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\, \mathrm{d}t$$

7 **La fonction F.**
On condidère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x e^{-t} f(t)\, \mathrm{d}t$$

7.a Montrer que la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et expliciter son développement.

7.b Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\gamma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k \cdot k!(n-k)!}$. Exprimer γ_n en fonction de n et σ_n.

8 **Etude de la fonction ϕ.**

8.a Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sigma_n x^n$.

8.b Préciser l'ensemble de définition Δ de la fonction ϕ, et étudier ses variations sur $[0, \mathrm{R}[$.

8.c Justifier que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente et déterminer sa somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

8.d **Valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.**

En utilisant les résultats de la partie II et de la question **8.c**, expliciter la valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.

8.e Expliciter $\phi(x)$ pour $x \in \Delta$ et retrouver la valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.