ESPACES VECTORIELS NORMES

Normes

Exercice 1 ★★★ **CCP MP 2016**

Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels distincts ($n \geq 1$). On pose $\mathrm{N}(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{n} |\mathrm{P}(\alpha_k)|$. Montrer que N est une norme non euclidienne sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Exercice 2 ★★★

On considère un espace euclidien E de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que l'on munit d'une norme N (qui n'est pas nécessairement la norme euclidienne associée au produit scalaire précédent). On note S la sphère unité pour la norme N i.e. $\mathrm{S} = \{y \in \mathrm{E},\ \mathrm{N}(y) = 1\}$ et on pose pour $x \in \mathrm{E}$

$$\mathrm{N}^*(x) = \sup_{y \in \mathrm{S}} |\langle x, y \rangle|$$

1. Montrer que l'application N^* est bien définie sur E.
2. Montrer que N^* une norme sur E.
3. Dans cette question, on suppose que $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ et que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.
   Déterminer N^* lorsque N est la norme $\|\cdot\|_2$, la norme $\|\cdot\|_\infty$ et la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 3 ★★★

Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on pose

$$\mathrm{N}_1(\mathrm{A}) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{p} |\mathrm{A}_{i,j}| \qquad \mathrm{N}_2(\mathrm{A}) = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|$$

$$\mathrm{N}_3(\mathrm{A}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \mathrm{A}_{i,j}^2} \qquad \mathrm{N}_4(\mathrm{A}) = \sqrt{\max \mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top \mathrm{A})}$$

1. Montrer que N_1, N_2, N_3 et N_4 sont des normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $n = p$, ce sont des normes d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 ★★

Soit $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$,
$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max \{\|x + y\|, \|x - y\|\}$$
2. Montrer que l'on peut avoir l'égalité même si x et y sont non nuls.
3. Désormais la norme est euclidienne. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$
$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2} \max \{\|x + y\|, \|x - y\|\}$$
   Peut-on améliorer la constante $\sqrt{2}$?

Exercice 5 ★★ **Comparaison de normes usuelles de $\mathbb{K}^n$**

On pose pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\mathrm{N}_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \mathrm{N}_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad \mathrm{N}_\infty(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Montrer que

$$\mathrm{N}_\infty \leq \mathrm{N}_1 \leq n\mathrm{N}_\infty \qquad \mathrm{N}_\infty \leq \mathrm{N}_2 \leq \sqrt{n}\mathrm{N}_\infty \qquad \mathrm{N}_2 \leq \mathrm{N}_1 \leq \sqrt{n}\mathrm{N}_2$$

et montrer que chacune des ces inégalités est optimale.

Exercice 6 ★

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$. On se donne $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E}^n$. Montrer que l'application

$$\mathrm{N} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre.

Exercice 7 ★★

Soit E un espace vectoriel que l'on munit de deux normes N_1 et N_2. On définit les deux boules unités $B_1 = \{x \in E,\ N_1(x) \leq 1\}$ et $B_2 = \{x \in E,\ N_2(x) \leq 1\}$. Montrer que $N_1 = N_2$ si et seulement si $B_1 = B_2$.

Exercice 8 ★★★ **Inégalités de Hölder et Minkowski**

Soient p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Prouver l'inégalité de Young,

$$\forall (u; v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{u^q}{q}$$

2. Soient $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité de Hölder,

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

3. Soient $p > 1$, $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité de Minkowski,

$$\left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Distance

Exercice 9 ★★

On considère $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que l'on munit de la norme uniforme. On pose $u : n \in \mathbb{N} \mapsto (-1)^n$. Calculer la distance de u au sous-espace vectoriel F de E formé des suites convergentes.

Exercice 10 ★★

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2,\ |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

Equivalence de normes

Exercice 11 ★★★

On pose $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et pour $f \in E$, $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

1. Montrer que N est une norme sur E. N est-elle équivalente à $\|.\|_\infty$?

2. Pour $f \in E$, on pose $N'(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$. Montrer que N' est une norme et qu'elle est équivalente à N.

Exercice 12 ★★★ **Centrale MP 2010**

Donner un exemple de deux normes non équivalentes sur un espace vectoriel normé.

Exercice 13 ★★★ **Centrale PSI 2010**

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$ et $\|f\|_2 = \left(\int_{[0,1]} f^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

1. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall f \in E,\ \|f\|_2 \leq b\|f\|_\infty$.

2. Soit V un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall f \in V,\ \|f\|_\infty \leq c\|f\|_2$.

3. Soit V un sous-espace vectoriel de E. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall f \in V,\ \|f\|_\infty \leq n\|f\|_2$. Montrer que V est de dimension finie et que $\dim V \leq n^2$.

Exercice 14 ★★★ **D'après Centrale MP 2006**

On note E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$. Pour $f \in \mathrm{E}$, on pose

$$\mathrm{N}_\infty(f) = \sup_{[0,1]} |f| \qquad \mathrm{N}(f) = \mathrm{N}_\infty(f + f'') \qquad \mathrm{N}_1(f) = \mathrm{N}_\infty(f) + \mathrm{N}_\infty(f'')$$

1. Montrer que N_∞, N et N_1 sont des normes sur E.
2. Montrer que N_∞ n'est équivalente ni à N ni à N_1.
3. Soit $f \in \mathrm{E}$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$,
$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)(f(t) + f''(t))\,\mathrm{d}t$$
4. Montrer que N et N_1 sont équivalentes.

Exercice 15 ★★ **Comparaison de normes usuelles de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$**

On pose pour $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$,

$$\mathrm{N}_1(x) = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{N}_2(x) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t} \qquad \mathrm{N}_3(x) = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

1. Montrer que
$$\mathrm{N}_1 \leq (b-a)\mathrm{N}_\infty \qquad \mathrm{N}_2 \leq \sqrt{b-a}\,\mathrm{N}_\infty \qquad \mathrm{N}_1 \leq \sqrt{b-a}\,\mathrm{N}_2$$
et montrer que chacune des ces inégalités est optimale.
2. Montrer que ces trois normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 16 ★★★ **TPE-EIVP MP 2012**

On pose pour une partie A de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{N}_\mathrm{A} = \sup_{x\in\mathrm{A}} |\mathrm{P}(x)|$.
A quelle condition nécessaire et suffisante N_A est-elle une norme sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$?

Suites

Exercice 17 ★★★

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\|u(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

1. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - u) \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - u)$.
2. Soit $x \in \mathrm{E}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)$. Montrer que (x_n) converge vers la projection de x sur $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - u)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - u)$.

Exercice 18 ★

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite de terme général A^n converge. Montrer que A est une matrice de projecteur.

Exercice 19 ★★★ **CCP MP 2019**

Soit E un espace préhilbertien réel muni de son produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
On dit qu'une suite $(x_n) \in \mathrm{E}^\mathbb{N}$ converge *fortement* vers $x \in \mathrm{E}$ si $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$ et que (x_n) converge *faiblement* vers x si $\forall y \in \mathrm{E}$, $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - x, y\rangle = 0$.

1. **a.** Montrer que si (x_n) converge faiblement, sa limite est unique.
   b. Montrer que la convergence forte implique la convergence faible.
2. Montrer que (x_n) converge fortement vers x si et seulement si (x_n) converge faiblement vers x et $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$.
3. Montrer que, en dimension finie, ces deux modes de convergence sont équivalents.
4. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 20 ★★★★

1. Soit (u_n) une suite à valeurs réelles telle que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle.
2. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue et (u_n) définie par $u_0 \in [a,b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$.

Exercice 21 ★

Soit A une matrice antisymétrique réelle telle que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que la limite est nulle.

Exercice 22 ★★★

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} A_n^n = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$.

Exercice 23 ★★

Soient A le point d'affixe i et B le point d'affixe $-i$. On définit la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points du plan par M_0, M_1 le milieu de $[AM_0]$, M_2 le milieu de $[BM_1]$, M_3 le milieu de $[AM_2]$, M_4 le milieu de $[BM_3]$ et ainsi de suite.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Préciser la définition des points M_{2n} et M_{2n+1}.
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n l'affixe de M_n. Montrer que les suites $(z_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont arithmético-géométriques.
3. Etudier la convergence des suites $(M_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(M_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Que dire de la suite $(M_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 24 ★★

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

1. On note x_n et y_n les parties réelle et imaginaire de z_n.
   - **a.** Déterminer une relation de récurrence liant y_n et y_{n+1}. En déduire la limite de (y_n).
   - **b.** Déterminer le sens de variation de $(|z_n|)$.
   - **c.** Déterminer le sens de variation de (x_n).
   - **d.** En déduire la convergence de (x_n). On ne cherchera pas à calculer la limite de cette suite.
   - **e.** En déduire la convergence de (z_n). Que peut-on dire de sa limite ?
   - **f.** Déterminer la limite de (z_n) si $z_0 \in \mathbb{R}_+$ et si $z_0 \in \mathbb{R}_-$.
2. On note r_n le module et θ_n l'argument principal (i.e. appartenant à $]-\pi, \pi]$) de z_n.
   - **a.** En exprimant z_{n+1} sous forme exponentielle, exprimer d'une part r_{n+1} en fonction de r_n et θ_n et d'autre part θ_{n+1} en fonction de θ_n.
   - **b.** Déterminer la limite de (θ_n).
   - **c.** Soit $\alpha \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$. En remarquant que pour $a \not\equiv 0[\pi]$, $\cos a = \dfrac{\sin 2a}{2\sin a}$, donner une expression simplifiée de $S_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\dfrac{\alpha}{2^k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que (S_n) converge vers $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$.
   - **d.** En déduire la limite de (r_n) puis celle de (z_n) en fonction de r_0 et θ_0.

Séries

Exercice 25 ★★

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, $k \in [0,1[$ et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ tels que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

Soit $u \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En considérant la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n+1} - u_n$, montrer que u converge.

Exercice 26 ★ **Petites Mines 2016**

Soit $\sum u_n$ une série numérique absolument convergente.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_{n-k}}{2^k}$.

1. Montrer que la série $\sum v_n$ converge et calculer sa somme.

2. Reprendre la question précédente lorsque $\sum u_n$ est une série absolument convergente à termes dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

Suites extraites

Exercice 27 ★★

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - [x]$ la partie fractionnaire de x. Montrer que la suite $(\{\sqrt{n}\})$ n'admet pas de limite.

Exercice 28 ★★★

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels et p et q deux entiers naturels impairs tels que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n^p - v_n^q = 0$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Exercice 29 ★★★ **Centrale PC 2016**

Soient (x_n) et (y_n) deux suites telles que $(x_0, y_0) = (0,0)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n} \\ y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n} \end{cases}$$

1. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont bien définies.

2. On suppose que les deux suites convergent. Déterminer rigoureusement leur(s) limite(s) possible(s).

3. Montrer que (x_n) et (y_n) convergent.