

Théorème de Rolle**EXERCICE 1.**

Soit P un polynôme réel non-constant dont les racines sont réelles et simples.

1. Montrer que les racines de P' sont aussi réelles et simples.
2. En déduire que pour tout $\alpha > 0$ les racines de $P^2 + \alpha$ sont simples.

EXERCICE 2.★

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable admettant une limite ℓ en $+\infty$ et en $-\infty$. Prouver l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

EXERCICE 3.★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et f une fonction de classe C^{n-1} sur $[a, b]$, n fois dérivable sur $]a, b[$. Soient

$$a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$$

et supposons que

$$f(a_0) = f(a_1) = \dots = f(a_n).$$

Montrer qu'il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

EXERCICE 4.

Soient f dérivable sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} , A et B deux points distincts de sa courbe représentative \mathcal{C} tels que B est sur la tangente à \mathcal{C} en A . Montrer qu'il existe un point M de \mathcal{C} , distinct de A , tel que A est sur la tangente à \mathcal{C} en M .

Théorème des accroissements finis**EXERCICE 5.**

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$;
2. $\forall x \geq 0, 0 \leq \ln(1+x) \leq x$.

EXERCICE 6.★

Etudier la limite en $+\infty$ de l'expression

$$(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}.$$

EXERCICE 7.★★

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f et g deux fonctions de $[a, b]$ dans \mathbb{R} continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

2. Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $x_0 \in I$, f et g deux fonctions définies et continues sur I , dérivables sur $I \setminus \{x_0\}$ telles que $\forall x \in I \setminus \{x_0\}, g'(x) \neq 0$ et telles que le rapport

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tende vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ lorsque x tend vers x_0 . Montrer que le rapport

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

est défini pour tout $x \neq x_0$ et qu'il tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0 .
Le résultat démontré s'appelle la *règle de l'Hospital*.

3. Retrouver, en utilisant la règle de l'Hospital, les développements limités suivants au point 0,

$$\sin(x) = x + o(x), \quad \cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

EXERCICE 8.★

Démontrer que :

1. $\forall 0 < x < 1, \arcsin(x) < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$
2. $\forall x > 0, \arctan(x) > \frac{x}{1+x^2}.$

EXERCICE 9.★★

Soit f , une application dérivable de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On ne suppose pas que la dérivée f' est continue sur $[a, b]$.

1. On considère les fonctions définies par

$$\phi(x) = \begin{cases} f'(a) & \text{si } x = a, \\ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } a < x \leq b. \end{cases}$$

et

$$\psi(x) = \begin{cases} f'(b) & \text{si } x = b, \\ \frac{f(b) - f(x)}{b - x} & \text{si } a \leq x < b. \end{cases}$$

Démontrer que ϕ et ψ sont continues sur $[a, b]$.

2. Démontrer que l'application dérivée f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires : si $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$, alors il existe $a < c < b$ tel que $f'(c) = 0$.

Variations**EXERCICE 10.**

Soient p et q , deux nombres réels et n , un entier strictement positif. Démontrer que le polynôme $X^n + pX + q$ ne peut avoir plus de trois racines réelles distinctes.

EXERCICE 11.★★

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dérivable telle que $f^2 + (1 + f')^2 \leq 1$. Montrer que f est nulle.

EXERCICE 12.

Soit f une application dérivable de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On ne suppose pas que la dérivée f' est continue. On va cependant montrer que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Soit y un réel strictement compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On souhaite donc montrer que f' prend la valeur y sur l'intervalle $]a, b[$. Pour simplifier, on supposera dans un premier temps $f'(a) < f'(b)$.

- On pose $g(x) = f(x) - xy$ pour $x \in [a, b]$. Justifier que g admet un minimum sur $[a, b]$.
- Montrer que ce minimum ne peut être atteint ni en a ni en b .
- Conclure.
- Traiter le cas où $f'(a) > f'(b)$.

EXERCICE 13.

Soit f , une application de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ , telle que $f(0) = 0$ et vérifiant

$$\forall x \geq 0, \quad f'(x) \leq f(x).$$

En étudiant les variations de la fonction $g : x \mapsto e^{-x} f(x)$, démontrer que la fonction f est identiquement nulle.

Equations fonctionnelles**EXERCICE 14.**

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$

EXERCICE 15.

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

EXERCICE 16.★★

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = 2f(x).$$

Dérivées successives**EXERCICE 17.★**

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_n(x) = x^{n-1} e^{1/x}$$

On pose $g_n = f_n^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de g_n et prouver que,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g_{n+1}(x) = x g_n'(x) + (n+1) g_n(x)$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{1/x}$$

EXERCICE 18.

Calculer la dérivée n -ième de la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + 1)e^x$.

EXERCICE 19. ★★

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et P_n la fonction polynôme définie sur \mathbb{R} par

$$x \mapsto P_n(x) = (x - a)^n(x - b)^n.$$

1. Calculer à l'aide de la formule de Leibniz $P_n^{(n)}(x)$ pour tout x dans \mathbb{R} .
2. Calculer d'une autre manière $P_n^{(n)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ lorsque $a = b$.
3. En déduire la formule de Vandermonde

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

EXERCICE 20.

Soit f la fonction à valeurs réelles définie sur $I =]-1, 1[$ par

$$f : x \in I \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, sa dérivée n -ème s'écrit

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

où P_n est un polynôme réel.

2. Montrer que le monôme de plus haut degré de P_n est $n!x^n$.

3. Prouver que $\forall x \in I$:

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 0.$$

4. Prouver, en utilisant la formule de Leibniz, que pour tout $n \geq 1$ et $\forall x \in I$,

$$P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) + n^2(1-x^2)P_{n-1}(x).$$

5. En déduire la valeur de $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (On distinguera les cas n pair et n impair et on exprimera le résultat sous la forme d'un quotient de factorielles).
6. Prouver que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in I$,

$$P'_n(x) = n^2 P_{n-1}(x).$$

7. En déduire une technique de calcul des polynômes P_n . A titre d'exemple, expliciter $f^{(5)}(x)$ pour tout x réel.

EXERCICE 21.

Soit $f : x \mapsto \arctan(x)$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme P_{n-1} tel que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}.$$
2. Préciser le degré, la parité et le coefficient dominant de P_n .
3. Déterminer les limites de $f^{(n)}$ en $-\infty$ et $+\infty$ pour $n \geq 1$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, toutes les racines de P_n sont réelles et simples. Raisonner par récurrence en utilisant le théorème de Rolle.

EXERCICE 22.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'équation différentielle d'inconnue y suivante :

$$(E): \quad y' - (nx - 1)y = 0$$

1. Résoudre (E) et déterminer la solution f_n telle que $f_n(0) = 1$.
2. Trouver l'extremum de cette fonction. On note (u_n, v_n) les coordonnées du point correspondant sur le graphe de f_n .
3. Déterminer les limites u et v des suites (u_n) et (v_n) et donner un équivalent de $v_n - u$.
4. En utilisant la formule de Leibniz, montrer que $f_n^{(2n+1)}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

EXERCICE 23.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2n}}$$

2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

EXERCICE 24.

1. Soient p et q deux fonctions continues sur \mathbb{R} telles que $p \leq q$ sur \mathbb{R} . Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 telles que $u'' + pu = 0$ et $v'' + qv = 0$. On suppose que u s'annule en des réels a et b avec $a < b$ mais qu'elle ne s'annule pas sur $]a, b[$.
 - a. On pose $W = u'v - uv'$. Déterminer W' .
 - b. En déduire que v s'annule sur $[a, b]$.
2. Application. Soient r une fonction continue sur \mathbb{R} , f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} telle que $f'' + rf = 0$ et $M \in \mathbb{R}_+^*$.
 - a. On suppose $r \geq M^2$. Montrer que tout intervalle fermé de longueur $\frac{\pi}{M}$ contient au moins un zéro de f .
 - b. On suppose $r \leq M^2$. On suppose que f s'annule en des réels a et b tels que $a < b$ mais qu'elle ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer que $b - a \geq \frac{\pi}{M}$.

Formules de Taylor**EXERCICE 25.★★**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ tel que $f(0) = 1$ et $\forall x \geq \frac{1}{2}, f(x) = 0$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{\mathbb{R}_+} |f^{(n)}| \geq 2^n n!$.
2. Montrer que pour $n \geq 1, \sup_{\mathbb{R}_+} |f^{(n)}| > 2^n n!$.

EXERCICE 26.★★

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$. On suppose de plus que :

$$\exists \lambda > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{\mathbb{R}} |f^{(n)}| \leq \lambda^n n!$$

Montrer que f est nulle sur $\left]-\frac{1}{\lambda}; \frac{1}{\lambda}\right[$ puis sur \mathbb{R} .

EXERCICE 27.

Soit f une fonction de classe C^n sur $[a, b]$ et $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

On appliquera le théorème de Rolle à la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k + A \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec une constante A bien choisie.

REMARQUE. La formule établie plus haut s'appelle *formule de Taylor-Lagrange*. ■

EXERCICE 28.

On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ pour $n \geq 1$.

1. Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Déterminer par récurrence une expression de $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1, montrer que $|u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la convergence et la limite de (u_n) .

EXERCICE 29.

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} . On suppose que f , f' et f'' sont bornées sur \mathbb{R} et on pose

$$M_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \quad M_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| \quad M_2 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f''(t)|$$

On souhaite montrer que $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

1. Démontrer l'inégalité demandée dans le cas où $M_0 = 0$ ou $M_2 = 0$. Dans la suite de l'énoncé on supposera M_0 et M_2 strictement positifs.
2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Justifier que

$$|f(x+h) - f(x) - f'(x)h| \leq \frac{M_2 h^2}{2}$$

3. En déduire que

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$$

4. Soient a et b deux réels strictement positifs. On pose $g : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{a}{t} + b t$. Étudier les variations de g sur \mathbb{R}_+^* . En déduire que g admet un minimum sur \mathbb{R}_+^* et calculer celui-ci en fonction de a et b .
5. Conclure.

EXERCICE 30.

Soient $R > 0$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ avec $I =]-R, R[$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ et $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$.

1. Soit $r \in]0, R[$ et $x \in]-r, r[$. Montrer que $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}} R_n(r)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que pour tout $x \in I$, $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

EXERCICE 31.

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$ nulle en 0. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ pour $n \geq 1$. Étudier la limite de (S_n) . On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

EXERCICE 32.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet *une dérivée symétrique* en $a \in \mathbb{R}$ lorsque le rapport

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

admet une limite lorsque h tend vers 0.

1. Prouver que la dérivabilité en a est *une condition suffisante* de dérivabilité symétrique en a .
2. Est-ce une condition nécessaire ?

EXERCICE 33.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite en 0 du quotient

$$\frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

EXERCICE 34. ★

Etablir que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

EXERCICE 35.

Etablir que

$$\forall x \leq 0, \quad 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Familles de polynômes**EXERCICE 36.**

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} .
2. Soit n un entier naturel. On pose

$$P_n(x) = (1+x^2)^{n+1} f^{(n)}(x)$$

où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de f .

a. Montrer que l'on a :

$$(1+x^2)P'_n(x) = 2(n+1)xP_n(x) + P_{n+1}(x).$$

b. Etablir que P_n est un polynôme dont le terme de plus haut degré est égal à $(-1)^n(n+1)!x^n$.

3. Soit a un réel et g une fonction continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$, dérivable sur l'intervalle $]a, +\infty[$ et qui vérifie

$$g(a) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

a. On considère la fonction G définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$G : x \mapsto \begin{cases} g(1/x + a - 1) & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que G est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.

b. Montrer que G' s'annule en un point de $]0, 1[$. En déduire que g' s'annule en un point de $]a, +\infty[$.

4. Soit h une fonction qui est continue sur l'intervalle $]-\infty, a]$, dérivable sur l'intervalle $]-\infty, a[$, telle que

$$h(a) = 0 \quad \text{et telle que} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0.$$

Montrer que la fonction h' s'annule en un point de l'intervalle $]-\infty, a[$.

5. Montrer par récurrence sur n que le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes.

EXERCICE 37.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur \mathbb{R} à racines simples.

1. Montrer qu'il en est de même de P' .
2. Montrer que le polynôme $P^2 + 1$ n'a que des racines simples dans \mathbb{C} .

EXERCICE 38.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Q_n = (X^2 - 1)^n$ et $P_n = \frac{1}{2^n n!} Q_n^{(n)}$. On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

1. Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3 .
2. Quel est le degré de P_n ?
3. Montrer que P_n a la parité de n . En déduire $P_n(0)$ pour n impair et $P'_n(0)$ pour n pair.
4. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $P_n(0)$ pour n pair et $P'_n(0)$ pour n impair. On exprimera les résultats à l'aide de factorielles.
5. a. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (X^2 - 1)Q'_n = 2nXQ_n$$

- b. En dérivant $n + 1$ fois cette relation, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (X^2 - 1)P''_n + 2XP'_n = n(n + 1)P_n$$

6. a. Montrer que $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$.
b. En appliquant le théorème de Rolle et à l'aide d'une récurrence, montrer que P_n admet exactement n racines réelles distinctes dans $] -1, 1[$.

Etude de suites**EXERCICE 39.**

Étudier la suite définie par la relation de récurrence

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

EXERCICE 40.

Étudier la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}.$$

EXERCICE 41.

Étudier la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4} \sin\left(\frac{1}{u_n}\right) + 1.$$

Divers**EXERCICE 42.**

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Montrer que f est dérivable mais n'est pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

EXERCICE 43.★

Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes. On précisera systématiquement sur quelle partie de \mathbb{R} ces fonctions sont dérivables.

1. $f(x) = \ln(\ln(x))$;
2. $f(x) = \arctan(\ln(x))$;
3. $f(x) = \ln(\sqrt{1 - 2\sin^2(x)})$;
4. $f(x) = \frac{\cos(x) + x \sin(x)}{\sin(x) - x \cos(x)}$;
5. $f(x) = \left(\cos^2(x) + \frac{3}{2}\right) \sin(2x)$;
6. $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$.

EXERCICE 44.

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur \mathbb{R}_+ ($n \geq 1$).

1. On suppose dans cette question que $n = 1$ et que f admet une limite finie en $+\infty$. Prouver à l'aide d'un contre-exemple que f' peut n'admettre aucune limite en $+\infty$.
2. On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

Etablir que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. L'entier n est désormais quelconque. On suppose que f et $f^{(n)}$ admettent des limites finies en $+\infty$. Etablir que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) = 0.$$