Devoir surveillé n°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 **BECEAS 2021 – Un calcul de** $\zeta(2)$

On pose, pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{C}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x$$

1. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité

$$\mathrm{C}_n = (2n-1)(\mathrm{C}_{n-1} - \mathrm{C}_n)$$

2. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les égalités

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2(\cos x)^{2n-2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{C}_n}{2n-1} = \frac{\mathrm{C}_{n-1}}{2n}$$

3. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité

$$\mathrm{C}_n = (2n-1)n\mathrm{D}_{n-1} - 2n^2\mathrm{D}_n$$

4. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité

$$\frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{\mathrm{D}_{n-1}}{\mathrm{C}_{n-1}} - \frac{\mathrm{D}_n}{\mathrm{C}_n}\right)$$

5. **a.** Justifier, pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la minoration $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la majoration

$$\mathrm{D}_n \leq \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\mathrm{C}_n}{2n+2}$$

6. Prouver l'égalité

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 2 **EM Lyon 2022 – Etude de séries oscillantes**

Soit d un entier, $d \geq 2$. Soit $\omega = (\omega_n)_{n\geq 1}$ une suite périodique de période d, c'est-à-dire telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \omega_{n+d} = \omega_n$$

Dans ce problème, on s'intéresse à la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum u_n(\lambda)$ de terme général

$$\forall n \geq 1,\ u_n(\lambda) = \frac{\omega_n + \lambda}{n}$$

où λ est un complexe. On note plus simplement $u_n = u_n(0)$ pour tout $n \geq 1$.

1. Supposons, dans cette question uniquement, qu'il existe un complexe λ tel que $\sum u_n(\lambda)$ converge. Montrer que pour tout complexe $\mu \neq \lambda$, la série $\sum u_n(\mu)$ diverge.

2. Dans cette question, on choisit $\lambda = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la somme partielle associée à la série $\sum u_n$, c'est-à-dire $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{k}$.

a. Pour tout entier naturel m, exprimer $\frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k}$ en fonction de $\Omega = \sum_{k=1}^{d} \omega_k$.

b. Montrer que

$$S_{(m+1)d} - S_{md}\frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k} + \underset{m\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

c. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur Ω pour la que la série $\sum_{m\in\mathbb{N}} (S_{(m+1)d} - S_{md})$ converge.

d. Montrer *très soigneusement* que la condition obtenue à la question précédente est une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ converge.

3. Montrer qu'il existe une unique complexe λ tel que la série $\sum u_n(\lambda)$ converge.

4. **Une généralisation.** Dans cette question, on se donne une suite croissante $(a_n)_{n\geq 1}$ de réels, telle que $a_1 > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. On suppose que $\Omega = 0$. On pose pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{\omega_n}{a_n} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} \omega_k$$

Par souci de commodité, on note également $T_0 = 0$.

a. Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{T_n}{a_{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} T_k\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

c. Montrer que la série $\sum T_k\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$ converge.

d. Montrer que la série $\sum u_k$ converge.

Problème 1 – D'après EM Lyon 2000

Dans tout ce problème, a est un réel tel que $0 < a < 1$.

I Calcul d'une somme et d'une intégrale

$\boxed{1}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, \pi]$, on note

$$\mathrm{C}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

Montrer que pour tout $x \in]0, \pi]$

$$\frac{1}{2} + \mathrm{C}_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$\boxed{2}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de l'intégrale $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \,\mathrm{d}x$ et calculer sa valeur.

$\boxed{3}$ Soit φ l'application définie sur $]0, \pi]$ par $\varphi(x) = \dfrac{\cos(ax) - 1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$. Justifier que φ peut se prolonger en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

$\boxed{4}$ On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(x) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) \,\mathrm{d}x$. Justifier que la suite (I_n) converge vers 0.

II Calcul de la somme d'une série

On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(ax)\cos(nx) \,\mathrm{d}x$.

$\boxed{5}$ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2}\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n$$

$\boxed{6}$ En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et calculer sa somme.

$\boxed{7}$ Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n en fonction de a et n.

$\boxed{8}$ Etablir que

$$2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}a}{n^2 - a^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a}$$

III Calcul d'une intégrale

Dans cette partie, α désigne un réel tel que $\alpha > 1$.

$\boxed{9}$ Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

On note alors

$$\mathrm{F}(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} \qquad \mathrm{G}(\alpha) = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} \qquad \mathrm{H}(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$$

$\boxed{10}$ **10.a** Justifier que pour tout réel $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}$$

10.b Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} = 0$$

10.c En déduire que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$ converge et que $\mathrm{G}(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$.

$\boxed{11}$ **11.a** A l'aide du changement de variable $u = t^{1-\alpha}$, montrer que

$$\mathrm{H}(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}\mathrm{G}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$$

et en déduire que

$$\mathrm{H}(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha-1}$$

11.b Etablir que

$$\mathrm{F}(\alpha) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2-1}$$

$\boxed{12}$ Conclure que

$$\mathrm{F}(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$$