Devoir à la maison n°4 : corrigé

Solution 1.

1. **a.** sh est continue est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{-\infty} \operatorname{sh} = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \operatorname{sh} = +\infty$. Ainsi sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

   b. ch est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\operatorname{ch}(0) = 1$ et $\lim_{+\infty} \operatorname{ch} = +\infty$. Ainsi ch induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

   c. th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{-\infty} \operatorname{th} = -1$ et $\lim_{+\infty} \operatorname{th} = 1$. Ainsi th induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

2. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$ et posons $\theta = f(x)$. Par définition de f, $\operatorname{sh}\theta = x$. Or $\operatorname{ch}^2\theta = \operatorname{sh}^2\theta + 1$. Puisque $\operatorname{ch}\theta \geqslant 1 \geqslant 0$, $\operatorname{ch}\theta = \sqrt{\operatorname{sh}^2\theta + 1} = \sqrt{x^2+1}$.

   b. Soit $x \in [1, +\infty[$ et posons $\theta = g(x)$. Par définition de g, $\operatorname{ch}\theta = x$. Or $\operatorname{sh}^2\theta = \operatorname{sh}^2\theta - 1$. Par définition de g, $\theta \in \mathbb{R}_+$ donc $\operatorname{sh}\theta \geqslant 0$. Ainsi $\operatorname{sh}\theta = \sqrt{\operatorname{ch}^2\theta - 1} = \sqrt{x^2-1}$.

3. **a.** sh est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est dérivable sur $\operatorname{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}'(f(x))} = \frac{1}{\operatorname{ch}(f(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

   b. ch est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée sh ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi g est dérivable sur $\operatorname{ch}(\mathbb{R}_+^*) =]1, +\infty[$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$,
$$g'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}'(g(x))} = \frac{1}{\operatorname{sh}(g(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

   c. th est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $1 - \operatorname{th}^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ car th est à valeurs dans $]-1, 1[$. Ainsi h est dérivable sur $\operatorname{th}(\mathbb{R}) =]-1, 1[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$h'(x) = \frac{1}{\operatorname{th}'(h(x))} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2(h(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = f(x)$. On a donc $\operatorname{sh}(y) = x$ et $\operatorname{ch}(y) = \sqrt{x^2+1}$ d'après **2.a**. Ainsi
$$e^y = \operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y) = x + \sqrt{x^2+1}$$
donc
$$f(x) = y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

   b. Soit $x \in [1, +\infty[$. On a donc $\operatorname{ch}(y) = x$ et $\operatorname{sh}(y) = \sqrt{x^2-1}$ d'après **2.b**. Ainsi
$$e^y = \operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y) = x + \sqrt{x^2-1}$$
donc
$$g(x) = y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

   c. Soit $x \in]-1, 1[$. Posons $y = h(x)$. On a donc $\operatorname{th}(y) = x$ i.e. $\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x$ ou encore $e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$. On en déduit que
$$h(x) = y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Remarque. Les fonctions f, g et h s'appellent en fait argsh, argch et argth. ■