

DEVOIR À LA MAISON N°5

Problème 1 –

Partie I –

Pour tout réel a positif ou nul, on note g_a la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $g_a(t) = t^a$.

1. Montrer que la fonction g_a est prolongeable par continuité en 0 (on notera toujours g_a la fonction ainsi prolongée, qui est donc définie et continue sur \mathbb{R}_+). Préciser la valeur de $g_a(0)$. Montrer que la fonction g_a est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ pour $a \geq 1$.

Soient a et b deux réels positifs ou nuls. On pose

$$I(a, b) = \int_0^1 g_a(t) g_b(1-t) dt .$$

2. Justifier l'existence de l'intégrale $I(a, b)$. Comparer $I(a, b)$ et $I(b, a)$.

On écrira abusivement $I(a, b) = \int_0^1 t^a (1-t)^b dt$.

3. Soient a et b deux réels positifs ou nuls. Trouver une relation entre $I(a+1, b)$ et $I(a, b+1)$.
4. Calculer $I(a, 0)$. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a

$$I(a, n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2) \cdots (a+n+1)} .$$

5. Soient p et q deux entiers naturels. Exprimer $I(p, q)$ à l'aide de factorielles.
6. En déduire la valeur de l'intégrale

$$J(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2p+1} (\cos \theta)^{2q+1} d\theta ,$$

où p et q sont deux entiers naturels.

Partie II –

Pour tout réel a strictement positif, on note f_a la fonction définie par

$$f_a(x) = x \ln \left(1 - \frac{a}{x} \right) .$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f_a .

On note \mathcal{C}_a la courbe représentant la restriction de la fonction f_a à l'intervalle $]a, +\infty[$.

2. Si a et x sont deux réels tels que $0 < a < x$, démontrer l'encadrement

$$\frac{a}{x} \leq \ln x - \ln(x-a) \leq \frac{a}{x-a} .$$

3. En déduire les variations de la fonction f_a sur l'intervalle $]a, +\infty[$ (on dressera un tableau de variations). Préciser la nature des branches infinies de la courbe \mathcal{C}_a .
4. Donner l'allure des courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 sur un même schéma.
5. On fixe $a > 0$ et on considère la suite $y = (y_n)$ définie, pour tout entier naturel n tel que $n > a$, par $y_n = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n$. Étudier le comportement (sens de variation, limite) de la suite (y_n) .

Partie III –

Pour tout réel positif ou nul x et tout entier naturel non nul n , on pose

$$F_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x du.$$

1. Montrer que $F_n(x) = n^{x+1} I(x, n)$.
2. En utilisant les résultats de la partie II, montrer que, pour tout x fixé, la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
3. On fixe $x \geq 0$.
 - a. Montrer l'existence d'un réel strictement positif U tel que

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \quad u \geq U \implies e^{-u} \leq \frac{1}{u^{x+2}}.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , on a

$$F_n(x) \leq \int_0^U e^{-u} u^x du + \frac{1}{U}.$$

- c. Montrer que la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Pour tout réel positif ou nul x , on pose $F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$.

4. Démontrer la relation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x+1) = (x+1)F(x).$$

En déduire la valeur de $F(k)$ pour k entier naturel.