DEVOIR À LA MAISON N°11

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Solution 1

1. On remarque que pour $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} & \mathrm{M}^2 + p\mathrm{M} + q\mathrm{I}_n = 0 \\ \iff\ & \mathrm{P}(\mathrm{M}^2 + p\mathrm{M} + q\mathrm{I}_n)\mathrm{P}^{-1} = 0 \\ \iff\ & (\mathrm{PMP}^{-1})^2 + p\mathrm{PMP}^{-1} + q\mathrm{I}_n = 0 \end{aligned}$$

On en déduit bien que si M est solution de $(\mathcal{E}_{p,q})$, alors toute matrice de E(M) l'est également.

2. **a.** Soit M une solution de $(\mathcal{E}_{-(a+b),ab})$. On constate que $\mathrm{X}^2 - (a+b)\mathrm{X} + ab = (\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$ est un polynôme annulateur de M. Comme $a \neq b$, ce polynôme est scindé à racines simples. Ainsi M est diagonalisable.

b. On peut également affirmer que si M est solution de $(\mathcal{E}_{-(a+b),ab})$, alors $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) \subset \{a, b\}$. Posons $\mathrm{M}_k = \left(\begin{array}{c|c} a\mathrm{I}_k & 0 \\ \hline 0 & b\mathrm{I}_{n-k} \end{array}\right)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$. On vérifie aisément que M_k est effectivement solution de l'équation $(\mathcal{E}_{-(a+b),b})$. Les questions précédentes montrent alors que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_{-(a+b),ab})$ est

$$\bigsqcup_{k=0}^{n} \mathrm{E}(\mathrm{M}_k)$$

3. **a.** Puisque $\mathrm{M}^2 = 0$, $f^2 = 0$. On en déduit immédiatement que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$.

b. Le théorème du rang stipule que si

- E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ;
- E est de dimension finie
- $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$;

alors

- f est de rang fini ;
- $\dim \mathrm{E} = \mathrm{rg}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f$.

c. Puisque $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{rg}\, f \leq \dim \mathrm{Ker}\, f$. Ainsi

$$n = \dim \mathrm{E}\, \mathrm{rg}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f \geq 2\, \mathrm{rg}\, f$$

ou encore $\mathrm{rg}\, f \leq \dfrac{n}{2}$.

d. Notons S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, f$ dans $\mathbb{R}^n$. D'après le théorème du rang

$$\dim \mathrm{S} = \dim \mathbb{R}^n - \dim \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{rg}\, f = p$$

Donnons-nous une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$ de S. Puisque $f^2 = 0$, $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une famille de vecteurs de $\mathrm{Ker}\, f$. De plus, on sait que f induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}\, f$: notamment f est injectif sur S. On en déduit que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}\, f$. On peut alors la compléter en une base $\mathcal{B}_2$ de $\mathrm{Ker}\, f$. Puisque $\mathbb{R}^n = \mathrm{S} \oplus \mathrm{Ker}\, f$, la concaténation des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ forme une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$. Par construction, la matrice de f dans cette base est

$$\mathrm{J}_p = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \mathrm{I}_p & 0 \end{array}\right)$$

e. Les questions précédentes montrent qu'une solution de $(\mathcal{E}_{0,0})$ est nécessairement semblable à une matrice J_p où p est un entier naturel inférieur ou égal à $n/2$. De plus, on vérifie que J_p pour $p \leq n/2$ est effectivement solution de $(\mathcal{E}_{0,0})$ (l'endomorphisme f canoniquement associé vérifie clairement $f^2 = 0$). On en déduit que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_{0,0})$ est

$$\bigsqcup_{0 \leq p \leq n/2} \mathrm{E}(\mathrm{J}_p)$$

4. a. C'est évident puisque

$$\mathrm{N}^2 = (\mathrm{M} - a\mathrm{I}_n)^2 = \mathrm{M}^2 - 2a\mathrm{M} + a^2\mathrm{I}_n$$

b. D'après la question précédente, M est solution de $(\mathcal{E}_{-2a,a^2})$ si et seulement si $\mathrm{M} - a\mathrm{I}_n$ est solution de $\mathcal{E}_{0,0}$. On en déduit donc que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_{-2a,a^2})$ est

$$\bigsqcup_{0 \leq p \leq n/2} \left(a\mathrm{I}_n + \mathrm{E}(\mathrm{J}_p)\right)$$

Enfin, on remarque que pour $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$,

$$a\mathrm{I}_n + \mathrm{PMP}^{-1} = \mathrm{P}(a\mathrm{I}_n + \mathrm{M})\mathrm{P}^{-1}$$

de sorte que $a\mathrm{I}_n + \mathrm{E}(\mathrm{M}) = \mathrm{E}(a\mathrm{I}_n + \mathrm{M})$. On peut donc affirmer que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_{-2a,a^2})$ est

$$\bigsqcup_{0 \leq p \leq n/2} \left(\mathrm{E}(a\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_p)\right)$$

5. Supposons que $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit solution de $\mathrm{M}^2 + \mathrm{I}_n = 0$. Alors

$$\det(\mathrm{M})^2 = \det(\mathrm{M}^2) = \det(-\mathrm{I}_n)^2 = (-1)^n$$

Comme $\det(\mathrm{M})^2 \geq 0$, n est pair.
Par contraposition, si n est impair, l'équation $\mathrm{M}^2 + \mathrm{I}_n = 0$ n'admet pas de solution.

6. a. Soit M une solution de $(\mathcal{E}_{0,1})$. Alors le polynôme $\mathrm{X}^2 + 1 = (\mathrm{X} - i)(\mathrm{X} + i)$ annule M et est scindé sur $\mathbb{C}$ donc M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

b. La question précédente montre également que $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) \subset \{i, -i\}$. Puisque M est à coefficients réels, son polynôme caractéristique χ_M l'est également. Ainsi i et $-i$ ont la même multiplicité en tant que racines de χ_M. On en déduit que M est semblable à $\mathrm{D} = \left(\begin{array}{c|c} i\mathrm{I}_p & 0 \\ \hline 0 & -i\mathrm{I}_p \end{array}\right)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Un calcul par blocs montre que la matrice $\mathrm{J} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\mathrm{I}_p \\ \hline \mathrm{I}_p & 0 \end{array}\right)$ vérifie également $\mathrm{J}^2 + \mathrm{I}_n = 0$. De même que M, J est donc semblable à D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par transitivité de la similitude, M est semblable à J dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On montre alors classiquement que, M et J étant à coefficients réels, elles sont alors semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On sait qu'il existe $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MQ} = \mathrm{J}$ i.e. $\mathrm{MQ} = \mathrm{QJ}$. On peut affirmer qu'il existe $(\mathrm{R}, \mathrm{S}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $\mathrm{Q} = \mathrm{R} + i\mathrm{S}$. Comme M et J sont à coefficients réels, on obtient alors $\mathrm{MR} = \mathrm{RJ}$ et $\mathrm{MS} = \mathrm{SJ}$. La fonction $x \in \mathbb{C} \mapsto \det(\mathrm{R} + x\mathrm{S})$ est polynomiale d'après l'expression du déterminant d'une matrice en fonction de ses coefficients. De plus, $\varphi(i) = \det(\mathrm{P}) \neq 0$ car P est inversible. Ainsi φ n'est pas contamment nulle et ne possède alors qu'un nombre fini de racines puisqu'elle est polynomiale. Notamment, φ ne peut pas être constamment nulle sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\alpha) \neq 0$. On a alors $\mathrm{P} = \mathrm{R} + \alpha\mathrm{S} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{MR} = \mathrm{RJ}$ et $\mathrm{MS} = \mathrm{SJ}$, $\mathrm{M}(\mathrm{R} + \alpha\mathrm{S}) = (\mathrm{R} + \alpha\mathrm{S})\mathrm{J}$ i.e. $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \mathrm{J}$.

c. La question précédente montre que l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{0,1})$ est $\mathrm{E}(\mathrm{J})$.