Corrigé TD : Dérivabilité

Solution 1.

1. Soit n le degré de P et $a_1 < a_1 < \dots < a_n$ les racines de P. Pour tout $k = 1,\dots,n-1$ il existe, d'après le théorème de Rolle, un $b_k \in [a_k, a_{k+1}]$ tel que $P'(b_k) = 0$. Comme les racines de P sont simples, P' ne s'anulle pas sur les a_k donc en fait b_k est dans l'intervalle ouvert $]a_k, a_{k+1}[$. Ainsi $b_1,\dots,b_{k+1}$ sont $n-1$ racines distinctes de P' et pour raison de degré ce sont toutes.

2. Soit c une racine de $Q = P^2 + \alpha$. Il faut montrer que $Q'(c) \neq 0$. On a certainement $c \notin \mathbb{R}$ car
$$Q(x) = P(x)^2 + \alpha > 0$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier P et P' ne s'anullent pas en c. Ainsi
$$Q'(c) = 2P(c)P'(c) \neq 0,$$
ce qui montre que la racine c de Q est simple.

Solution 2.

Quitte à changer f en $f-\ell$, on peut supposer que $\ell = 0$. Si f est nulle, le résultat est banal. Dans le cas contraire, quitte à changer f en $-f$, on peut supposer qu'elle prend une valeur $\beta > 0$ en α. Puisque
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$$
et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend la valeur $\beta/2$ sur les intervalles $]\alpha,+\infty[$ et $]-\infty,\alpha[$. Ainsi, d'après le lemme de Rolle, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.
Remarque. On peut éviter le recours au lemme de Rolle en prouvant que f admet un extremum local, ce qui n'est d'ailleurs pas plus long à rédiger. ■

Solution 3.

Par récurrence sur n ; si $n = 1$, c'est le théorème de Rolle de base. Supposons que pour un certain n, le résultat soit vrai pour toute fonction f et prouvons qu'il est alors vrai pour $n+1$; soient
$$a_0 = a < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} = b$$
et supposons que
$$f(a_0) = f(a_1) = \dots = f(a_n) = f(a_{n+1}).$$
L'application du théorème de Rolle ordinaire nous donne l'existence de points $c_0 < c_1 < \dots < c_n$ tels que,
$$f'(c_0) = f'(c_1) = \dots = f'(c_n) = 0.$$
L'hypothèse de récurrence appliquée à la fonction f', sur l'intervalle $[c_0, c_n]$, aux points $c_0 < c_1 < \dots < c_n$, nous donne donc l'existence d'un réel $c \in]c_0, c_n[\subset]a, b[$, tel que $(f')^{(n)}(c) = 0$, i.e. $f^{(n+1)}(c) = 0$; la récurrence est établie.

Solution 4.

Notons a et b les abscisses respectives de A et B. Pour simplifier, nous supposerons $a < b$. Le fait que B soit sur la tangente à $\mathscr{C}$ en A se traduit par :
$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) \text{ ou encore } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a)$$

De même, on cherche donc un point M d'abscisse c vérifiant :

$$f(a) = f(c) + f'(c)(a-c)$$

Définissons une fonction g sur I par $\begin{cases} g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{pour } x \in \mathrm{I} \setminus \{a\} \\ g(a) = f'(a) \end{cases}$. g est continue sur $]a, b]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Comme f est dérivable en a, g est continue en a. g est donc continue sur $[a, b]$. De plus, g est dérivable sur $]a, b[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Enfin, $g(b) = g(a) = f'(a)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or pour $x \in]a, b[$, $g'(x) = \dfrac{f'(x)(x-a) - f(x) + f(a)}{(x-a)^2}$. On a donc

$$f'(c)(c-a) - f(c) + f(a) = 0$$

ce qui est bien l'égalité annoncée plus haut.

Solution 5.

1. La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction $t \mapsto \cos(t)$, dont la valeur absolue est majorée par 1; l'application de l'inégalité des accroissements finis entre 0 et x, à la fonction $t \mapsto \sin(t)$, conduit donc à l'inégalité,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leqslant |x|$$

2. La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ a pour dérivée la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$, qui est encadrée entre 0 et 1 sur $\mathbb{R}_+$, d'où l'encadrement,

$$\forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

Solution 6.

Notons f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$x \mapsto x e^{1/x}.$$

Cete fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x > 0$, il existe $u_x \in]x, x+1[$ tel que

$$f(x+1) - f(x) = f'(u_x) = e^{1/u_x} - \frac{e^{1/u_x}}{u_x},$$

puisque $u_x > x$,

$$\lim_{x \to +\infty} u_x = +\infty,$$

et d'après les croissantes comparées et la continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x+1) - f(x)] = 1.$$

Solution 7.

1. Soit φ la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$x \mapsto (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)) - (f(x) - g(a))\big(g(b) - g(a)\big).$$

Cete fonction vérifie les mêmes hypothèses que f et l'on a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, ainsi d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, c'est-à-dire

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

2. D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \neq x_0$, il existe $x' \neq x_0$ tel que

$$g(x) - g(x_0) = (x - x_0)g'(x') \neq 0$$

car g' ne s'annule pas sur I. Ainsi le quotient de l'énoncé est-il défini pour tout $x \neq x_0$. Soit $x \neq x_0$. D'après le résultat de la question **1.**, il existe c_x appartenant à $]x_0, x[$ ou $]x, x_0[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Comme $x_0 < c_x < x$ ou $x < c_x < x_0$, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \to x_0} c_x = x_0,$$

puis par composition des limites,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \ell.$$

3. En appliquant le résultat à $f = \sin$ et $g = id_{\mathbb{R}}$ sur $\mathrm{I} =]-\pi/2, \pi/2[$ et en 0, puisque

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1,$$

on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

c'est-à-dire,

$$\sin(x) = x + o(x).$$

Puisque

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

par application de la r'egle de l'Hospital, on a aussi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2/2} = -1,$$

donc

$$\cos(x) = 1 - x^2/2 + o(x^2).$$

Puisque

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2/2} = -1,$$

par application de la r'egle de l'Hospital, on a aussi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3/6} = -1,$$

donc

$$\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^3).$$

Solution 8.

1. D'après le théorème des accroissements finis, $\forall\, 0<x<1,\ \exists\, 0<\theta<x$,

$$\begin{aligned}\frac{\arcsin(x)}{x}&=\frac{\arcsin(x)-\arcsin(0)}{x-0}=\arcsin'(\theta)\\&=\frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}\end{aligned}$$

Comme $0<\theta<x<1$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

et donc

$$\forall\, 0<x<1,\qquad \arcsin(x)<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. De façon analogue, d'après le théorème des accroissements finis, $\forall x>0\ \exists\, 0<\theta<x$,

$$\begin{aligned}\frac{\arctan(x)}{x}&=\frac{\arctan(x)-\arctan(0)}{x-0}=\arctan'(\theta)\\&=\frac{1}{1+\theta^2}\end{aligned}$$

Comme $0<\theta<x$, on a

$$\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{1+\theta^2},$$

On en déduit que

$$\forall\ x>0,\quad \arctan(x)>\frac{x}{1+x^2}.$$

SOLUTION 9.

1. Comme quotient de fonctions continues, la fonction ϕ est continue sur l'intervalle $]a,b]$. Comme f est dérivable en a,

$$\phi(a)=f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\phi(x),$$

donc ϕ est aussi continue en $x=a$.

On justifie de manière analogue la continuité de ψ sur le segment $[a,b]$.

2. Les fonctions ϕ et ψ sont continues sur le segment $[a,b]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, ϕ prend toutes les valeurs comprises entre $\phi(a)=f'(a)$ et $\phi(b)$ et ψ prend toutes les valeurs comprises entre $\psi(a)$ et $\psi(b)=f'(b)$. Or $\psi(a)=\phi(b)$!

Voici les différents cas possibles, selon la valeur du réel $\gamma=\psi(a)=\phi(b)$:

- si $\gamma<0<f'(b)$, alors il existe $x\in]a,b[$ tel que $\psi(x)=0$;
- si $f'(a)<0<\gamma$, alors il existe $x\in]a,b[$ tel que $\phi(x)=0$;
- si $\gamma=0$, alors $\psi(a)=\phi(b)=0$.

Mais d'après le théorème des accroissements finis,

$$\forall\ x\in]a,b],\ \exists\ c\in]a,b[,\quad \phi(x)=f'(c)$$

et

$$\forall\ x\in[a,b[,\ \exists\ c\in]a,b[,\quad \psi(x)=f'(c).$$

Ainsi, qu'elle soit ou non continue, l'application f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (théorème attribué à Darboux).

Solution 10.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = nx^{n-1} + p \quad \text{et} \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2}.$$

Supposons que n soit pair. Alors f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, tend vers $-\infty$ au voisinage de $-\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$, donc f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est strictement décroissante sur un intervalle de la forme $]-\infty, \alpha]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$: la fonction f peut s'annuler au plus deux fois (une fois sur chacun de ces deux intervalles).
Remarque. On peut préciser que $\alpha = \sqrt[n-1]{-p/n}$, mais ça n'a aucun intérêt. ■

Supposons que n soit impair. Si p est positif, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, tend vers $-\infty$ au voisinage de $-\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$. D'après le théorème d'inversion, f s'annule une seule fois. Si p est strictement négatif, alors f est strictement croissante sur les intervalles $\left]-\infty, -\sqrt[n-1]{-p/n}\right]$ et $\left[\sqrt[n-1]{-p/n}, +\infty\right[$ et strictement décroissante sur le segment $\left[-\sqrt[n-1]{-p/n}, \sqrt[n-1]{-p/n}\right]$. D'après le théorème d'inversion, la fonction f s'annule au plus une fois sur chacun de ces trois intervalles.

Solution 11.

L'inégalité de l'énoncé implique que f est bornée (entre -1 et 1) et que f' est négative. Ainsi f est décroissante sur $\mathbb{R}$ et, d'après le théorème de la limite monotone, admet des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$.
Supposons que f admette une limite non nulle en $+\infty$. Alors il existe $c > 0$ et $A \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \geqslant c$ pour $x \geqslant A$. Si on pose $d = \sqrt{1-c^2} - 1 < 0$, alors $f'(x) \leqslant d$ pour $x \geqslant A$. Mais, d'après le théorème des accroissements finis, $f(x) - f(A) \leqslant d(x - A)$ pour $x \geqslant A$. Ceci implique que $\lim_{+\infty} f = -\infty$ et donc une contradiction. Ainsi $\lim_{+\infty} f = 0$.
On prouve de la même manière que $\lim_{-\infty} f = 0$.
La décroissance de f permet alors de conclure que f est nulle.

Solution 12.

1. g est dérivable donc continue. Elle admet donc un minimum sur le segment $[a, b]$.

2. Si le minimum était atteint en a, on aurait $g(x) \geqslant g(a)$ pour tout $x \in]a, b]$. Par conséquent $g'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \geqslant 0$. Or $g'(a) = f'(a) - y < 0$.
   On démontre de même que le minimum ne peut être atteint en b.

3. Le minimum de g est donc un minimum local : il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$ i.e. $f'(c) = y$.

4. On peut considérer le maximum de g sur $[a, b]$. Ou bien, on applique ce qui précède à la fonction $-f$. On a bien $(-f)'(a) < -y < (-f)'(b)$. Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $(-f)'(c) = -y$ i.e. $f'(c) = y$.

Solution 13.

Posons $g(x) = e^{-x} f(x)$. La fonction g est positive et nulle en $x = 0$. En outre, elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall\, x \geqslant 0, \qquad g'(x) = \big(f'(x) - f(x)\big)e^{-x} \leqslant 0,$$

donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, elle est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$, ainsi que f bien sûr !

Solution 14.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. En dérivant la relation de l'énoncé par rapport à x, on obtient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ y f'(xy) = f'(x)$$

Fixons ensuite $x=1$ dans cette dernière relation, on a donc $f'(y)=\frac{a}{y}$ pour tout $y\in\mathbb{R}_+^*$ en posant $a=f'(1)$. Ceci signifie qu'il existe $\mathrm{C}\in\mathbb{R}$ tel que $f(y)=a\ln y+\mathrm{C}$ pour tout $y\in\mathbb{R}_+^*$. Or $f(1\times 1)=f(1)+f(1)$ donc $f(1)=0$ et $\mathrm{C}=0$.
Réciproquement toute fonction du type $x\mapsto a\ln x$ avec $a\in\mathbb{R}$ vérifie bien les conditions de l'énoncé. Ce sont donc exactement les fonctions recherchées.

Solution 15.

Soit f une fonction vérifiant la condition de l'énoncé. Fixons $y\in\mathbb{R}$. Puisque exp et f sont dérivables en 0, $x\mapsto e^x f(y)+e^y f(x)$ est également dérivable en 0. Ainsi $x\mapsto f(x+y)$ est dérivable en 0 i.e. f est dérivable en y. Puisque le choix de y est arbitraire, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dérivons maintenant la condition de l'énoncé par rapport à la variable y. On obtient

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f'(x+y)=e^x f'(y)+e^y f(x)$$

Fixons maintenant $y=0$. On a donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=f'(0)e^x+f(x)$. Posons $a=f'(0)$. La fonction f est donc solution de l'équation différentielle $y'-y=ae^x$. Les solutions de l'équation homogène $y'-y=0$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda e^x$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. La méthode de variation de la constante fournit une solution particulière de l'équation différentielle $y'-y=ae^x$, à savoir $x\mapsto axe^x$. On en déduit que f est de la forme $x\mapsto axe^x+\lambda e^x$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. Enfin $f(0+0)=e^0f(0)+e^0f(0)$ et donc $f(0)=0$, ce qui impose $\lambda=0$. f est donc de la forme $x\mapsto axe^x$.
Réciproquement soit $a\in\mathbb{R}$ et $f:x\mapsto axe^x$. Alors pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$f(x+y)=a(x+y)e^{x+y}=axe^xe^y+aye^xe^y=e^yf(x)+e^xf(y)$$

Ainsi f vérifie bien la condition de l'énoncé.
Les fonctions recherchées sont donc exactement les fonctions de la forme $x\mapsto axe^x$ avec $a\in\mathbb{R}$.

Solution 16.

► *Soit f une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle de l'énoncé.*

Soit $x\in\mathbb{R}$, on montre facilement par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n}f(x).$$

On traduit alors l'hypothèse *f est dérivable en zéro* : il existe $\ell\in\mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}=\ell.$$

Ainsi, d'après le critère séquentiel pour les limites, pour tout $x\neq 0$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f\left(x/2^n\right)}{x/2^n}=\ell.$$

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{f\left(x/2^n\right)}{x/2^n}=\frac{f(x)}{x},$$

on a donc par passage à la limite, pour tout $x\neq 0$, $f(x)=\ell x$. On remarque que cette relation est encore valable lorsque x est nul puisque

$$f(0)=2f(0)\Longrightarrow f(0)=0.$$

► *Réciproquement*, les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ répondent bien à la question, la vérification est immédiate.

► On a donc montré que *les seules solutions* dérivables en 0 de l'équation proposée sont les fonctions de la forme

$$f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto f_a(x)=ax.$$

Solution 17.

1. La fonction g_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ d'après le théorème sur les produits. En appliquant la formule de Leibniz, on trouve que la dérivée $n+1$-ième de $f_{n+1}: x \mapsto x f_n(x)$ est égale à
$$x \mapsto x f_n^{(n+1)}(x)+(n+1)f_n^{(n)}(x)$$
ainsi , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$g_{n+1} = x g_n'(x)+(n+1)g_n(x)$$

2. Prouvons la formule par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
   - La formule est banale pour $n=1$.
   - Supposons la formule vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors g_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et,
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g_n'(x) = (-1)^n\left[\frac{-(n+1)}{x^{n+2}} - \frac{1}{x^{n+3}}\right]e^{1/x}$$
   On a donc, d'après la formule démontrée à la première question,
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}e^{1/x}$$
   La formule est prouvée au rang $n+1$.
   - La formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après le principe de récurrence.

Solution 18.

Notons u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par,
$$u(x) = x^2+1\ \ ,\ \ v(x) = e^x.$$
ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, la fonction $f = uv$ est donc aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ et d'après la formule de Leibniz, $\forall n \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(x)e^x = \sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}u^{(k)}(x)e^x \\ &= (x^2+2nx+n(n-1)+1)e^x \end{aligned}$$

Solution 19.

1. Aplliquons la formule de Leibniz au produit de fonctions polynômes (qui sont donc de classe $\mathscr{C}^\infty$) définissant P_n. $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} \mathrm{P}_n^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{n!}{k!}\dots(x-a)^{n-k}(x-b)^k \\ &= n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(x-a)^{n-k}(x-b)^k \end{aligned}$$

2. Lorsque $a=b$, on a bien-sûr

$$\mathrm{P}_{(n)}^{n}(x)=\frac{(2n)!}{n!}(x-a)^n.$$

3. Lorsque $a=b$, on a donc, $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\frac{(2n)!}{n!}(x-a)^n=\left[n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\right](x-a)^n,$$

ainsi

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!^2}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

Solution 20.

1. Prouvons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que f est de classe $\mathscr{C}^n$ et qu'il existe un polynôme réel P_n tel que $\forall x\in\mathrm{I}$,

$$f^{(n)}(x)=\frac{\mathrm{P}_n(x)}{\left(1-x^2\right)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

► L'hypothèse est banale au rang 0 puisque f est continue sur I et que $\mathrm{P}_0=1$ convient.

► Supposons la propriété vérifiée au rang n. D'après le théorème de dérivation des quotients , $g=f^{(n)}$ est dérivable et pour tout $x\in\mathrm{I}$,

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{\mathrm{P}_n'(x)(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}+(2n+1)x\mathrm{P}_n(x)(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{2n+1}}\\&=\frac{\mathrm{P}_n'(x)(1-x^2)+(2n+1)x\mathrm{P}_n(x)}{(1-x^2)^{n+1+\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

En posant pour tout x réel

$$\mathrm{P}_{n+1}(x)=\mathrm{P}_n'(x)(1-x^2)+(2n+1)x\mathrm{P}_n(x),$$

on a bien le résultat au rang $n+1$ puisque P_{n+1} est une fonction polynôme et que $f^{(n+1)}$ est clairement continue donc $f^{(n+1)}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.

► La propriété est donc vérifiée pour tout $n\in\mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

2. Prouvons le résultat par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

► Le résultat est banal au rang 0 puisque $\mathrm{P}_0=1$.

► Supposons le résultat vrai au rang n. Puisque pour tout x réel ,

$$\mathrm{P}_{n+1}(x)=\mathrm{P}_n'(x)(1-x^2+(2n+1)x\mathrm{P}_n(x)$$

et que $\mathrm{P}_n'(x)$ est un polynôme de degré $n-1$(avec la convention degré de 0=-1) dont le monôme de plus haut degré a pour cœfficient $nn!$, $\mathrm{P}_n'(x)(1-x^2)$ est un polynôme de degré $n+1$ dont le monôme de plus haut degré a pour coefficient $-nn!$. De plus , $(2n+1)x\mathrm{P}_n(x)$ est un polynôme de degré $n+1$ dont le monôme de plus haut degré a pour coefficient $(2n+1)n!$, donc P_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ dont le monôme de plus haut degré a pour cœfficient $(2n+1-n)n!=(n+1)!$. D'où le résultat au rang $n+1$.

► La propriété est donc vérifiée pour tout $n\in\mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

3. On a $\forall x\in\mathrm{I}$,

$$f'(x)=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

donc $(1-x^2)f'(x)-xf(x)=0$.

4. D'après la formule de Leibniz , la dérivée n-ième de $x \longmapsto xf(x)$ est
$$x \longmapsto xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x).$$
De même , la dérivée n-ième de $x \longmapsto (1-x^2)f'(x)$ est donnée par l'expression :
$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x) - 2x(n+1)f^{(n)}(x) - 2\frac{n(n-1)}{2}f^{(n-1)}(x).$$
Ces deux fonctions étant égale d'après la question précédente , on a pour tout $x \in \mathrm{I}$,
$$\frac{x\mathrm{P}_n(x)}{\left(1-x^2\right)^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{n\mathrm{P}_{n-1}(x)}{\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}} =$$
$$\frac{\mathrm{P}_{n+1}(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} - 2nx\frac{\mathrm{P}_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} - n(n-1)\frac{\mathrm{P}_{n-1}(x)}{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}},$$
soit en multipliant cette égalité par $(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}$,
$$x\mathrm{P}_n(x) + n(1-x^2)\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_{n+1} - 2nx\mathrm{P}_n(x)$$
$$-n(n-1)(1-x^2)\mathrm{P}_{n-1}(x),$$
donc
$$\mathrm{P}_{n+1}(x) = (2n+1)x\mathrm{P}_n(x) + n^2(1-x^2)\mathrm{P}_{n-1}(x).$$

5. D'après la question précédente , $\forall n \geqslant 1$,
$$\mathrm{P}_{n+1}(0) = n^2\mathrm{P}_{n-1}(0).$$
On prouve donc par une récurence sans difficulté que , $\forall n \geqslant 0$,
$$\mathrm{P}_{2n+1}(0) = 0$$
et
$$\mathrm{P}_{2n}(0) = \left((2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times 1\right)^2 = \left(\frac{(2n)!}{2^n n!}\right)^2.$$

6. Puisque $\forall n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathrm{I}$,
$$\mathrm{P}_{n+1}(x) = \mathrm{P}_n'(x)(1-x^2) + (2n+1)x\mathrm{P}_n(x),$$
mais aussi
$$\mathrm{P}_{n+1}(x) = (2n+1)x\mathrm{P}_n(x) + n^2(1-x^2)\mathrm{P}_{n-1}(x),$$
d'où , après simplification par $1-x^2 \neq 0$,
$$\mathrm{P}_n'(x) = n^2\mathrm{P}_{n-1}(x).$$

7. D'après ce qui précède , on peut calculer les polynômes P_n par intégrations sucessives en utilisant le calcul de $\mathrm{P}_n(0)$ entrepris à la question **5**. On obtient successivement ,
$$\mathrm{P}_1(x) = x,\ \ \mathrm{P}_2(x) = 2x^2+1,\ \ \mathrm{P}_3(x) = 6x^3+9x,$$
$$\mathrm{P}_4(x) = 24x^4+72x^2+9,$$
et $\mathrm{P}_5(x) = 120x^5+600x^3+225x$.

Solution 21.

1. Soit HR(n) l'hypothèse de récurrence :

«Il existe un polynôme P_{n-1} tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{\mathrm{P}_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}$.»

HR(1) est vraie : il suffit de prendre $P_0 = 1$.
Supposons HR(n) pour un certain $n \geqslant 1$. Alors pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P'_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n} - \frac{2nxP_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{(1+x^2)P'_{n-1}(x) - 2nxP_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Il suffit donc de prendre $P_n = (1+X^2)P'_{n-1} - 2nXP_{n-1}$.
Par récurrence, HR(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Si P_{n-1} et Q_{n-1} sont deux polynômes vérifiant la condition de l'énoncé, alors ils coïncident sur $\mathbb{R}$. Ils sont donc égaux. D'où l'unicité.

2. Commençons par la parité. Soit HR(n) l'hypothèse de récurrence :

«P_n a la parité de n.»

HR(0) est vraie puisque $P_0 = 0$ est pair. Supposons HR($n-1$) pour un certain $n \geqslant 1$.

- Si n est pair, $n-1$ est impair donc P_{n-1} est impair d'après HR($n-1$). Mais alors P'_{n-1} et XP_{n-1} sont pairs. Or $P_n = (1+X^2)P'_{n-1} - 2nXP_{n-1}$ donc P_n est pair.
- Si n est impair, $n-1$ est pair donc P_{n-1} est pair d'après HR($n-1$). Mais alors P'_{n-1} et XP_{n-1} sont impairs. Or $P_n = (1+X^2)P'_{n-1} - 2nXP_{n-1}$ donc P_n est impair.

Donc HR(n) est vraie. Par récurrence, HR(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Occupons-nous maintenant du degré et du coefficient dominant. Soit HR(n) l'hypothèse de récurrence :

«$\deg P_n = n$ et le coefficient dominant de P_n est $(n+1)!$ si n est pair, $-(n+1)!$ si n est impair.»

HR(0) est vraie puisque $P_0 = 1$. Supposons HR($n-1$) pour un certain $n \geqslant 1$. On a donc $\deg P_{n-1} = n-1$.

- Si n est pair, $n-1$ est impair et le coefficient dominant de P_{n-1} est $-n!$. On a $\deg P'_{n-1} = n-2$ (éventuellement $-\infty$ si $n=1$) et le coefficient dominant de P'_{n-1} est $-(n-1)n!$ (pas de coefficient dominant si $n=1$). Donc $\deg(1+X^2)P'_{n-1} = n$ (éventuellement $-\infty$ si $n=1$) et le coefficient dominant de $(1+X^2)P'_{n-1}$ est $-(n-1)n!$ (pas de coefficient dominant si $n=1$). De même, $\deg 2nXP_{n-1} = n$ et le coefficient dominant de $2nXP_{n-1}$ est $-2nn!$. Puisque $-(n-1)n! + 2nn! = (n+1)! \neq 0$, on en déduit que $\deg P_n = n$ et que le coefficient dominant de P_n est $(n+1)!$.
- Si n est impair, $n-1$ est pair et le coefficient dominant de P_{n-1} est $n!$. On a $\deg P'_{n-1} = n-2$ (éventuellement $-\infty$ si $n=1$) et le coefficient dominant de P'_{n-1} est $(n-1)n!$ (pas de coefficient dominant si $n=1$). Donc $\deg(1+X^2)P'_{n-1} = n$ (éventuellement $-\infty$ si $n=1$) et le coefficient dominant de $(1+X^2)P'_{n-1}$ est $(n-1)n!$ (pas de coefficient dominant si $n=1$). De même, $\deg 2nXP_{n-1} = n$ et le coefficient dominant de $2nXP_{n-1}$ est $2nn!$. Puisque $(n-1)n! - 2nn! = -(n+1)! \neq 0$, on en déduit que $\deg P_n = n$ et que le coefficient dominant de P_n est $-(n+1)!$.

Ainsi HR(n) est vraie. Par conséquent, HR(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Comme $\deg P_{n-1} = n-1 < 2n$ pour $n \geqslant 1$, $P_{n-1}(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} (1+x^2)^n$. On en déduit que $\lim_{x\to\pm\infty} f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

4. Remarquons tout d'abord que les zéros de $f^{(n)}$ sont les zéros de P_{n-1}. Soit HR(n) l'hypothèse de récurrence :

«$f^{(n}$ s'annule au moins $n-1$ fois.»

HR(1) est évidemment vraie. Supposons HR(n) pour un certain $n \geqslant 1$. Si $n=1$, $\lim_{x\to+\infty} f^{(2)}(x) = 0$, donc $f^{(2)}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ d'après une généralisation classique du théorème de Rolle. Si $n > 1$, $f^{(n)}$ possède au moins $n-1$ zéros que nous noterons $x_1 < \dots < x_{n-1}$. En appliquant le théorème de Rolle à $f^{(n)}$ sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, on montre que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. En appliquant la même généralisation du théorème de Rolle à $f^{(n)}$ sur les intervalles $]-\infty, x_1]$ et $[x_{n-1}, +\infty[$, on montre que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[$ et $]x_{n-1}, +\infty[$. On fait le compte : on a monté que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins n fois. Ainsi HR(n) est vraie. Par récurrence HR(n) est vraie pour tout $n \geqslant 1$.
Comme les zéros de $f^{(n+1)}$ sont les zéros de P_n, on a prouvé que P_n admet au moins n racines réelles distinctes. Comme $\deg P_n = n$, P_n admet au plus n racines comptées avec multiplicité. On en déduit que toutes les racines de P_n sont réelles et simples.

Solution 22.

1. Une primitive de $x \mapsto nx-1$ étant $\frac{nx^2}{2}-x$, les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto \lambda \exp\left(\frac{nx^2}{2}-x\right)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc $f_n(x)=\exp\left(\frac{nx^2}{2}-x\right)$.

2. On a $f_n'(x)=(nx-1)\exp\left(\frac{nx^2}{2}-x\right)$. On en déduit que f_n admet un maximum en $\frac{1}{n}$. On a donc $u_n=\frac{1}{n}$ et $v_n=f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\exp\left(-\frac{1}{2n}\right)$. On a donc $u=0$ et $v=1$. Comme $-\frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $v_n-v \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.

3. Notons $g_n(x)=nx-1$. Comme f_n est solution de (E), on a $f_n'=g_nf_n$. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On dérive cette identité $2p$ fois en utilisant la formule de Leibniz :
$$f^{(2p+1)}=\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}g_n^{(k)}f_n^{(2p-k)}$$
Or $g_n^{(k)}=0$ pour $k\geqslant 2$. La somme précédente se réduit donc à deux termes :
$$f^{(2p+1)}(x)=g_n(x)f_n^{(2p)}+2pg_n'(x)f_n^{(2p-1)}(x)$$
Or $g_n\left(\frac{1}{n}\right)=0$ et $g_n'=n$. Donc
$$f^{(2p+1)}\left(\frac{1}{n}\right)=2npf^{(2p-1)}\left(\frac{1}{n}\right)$$
Soit HR(p) l'hypothèse de récurrence $f^{(2p+1)}\left(\frac{1}{n}\right)=0$. HR(0) est vraie puisque $f'-n\left(\frac{1}{n}\right)=0$. De plus, l'égalité précédente montre que HR($p-1$) implique HR(p). Par récurrence, HR(p) est vraie pour tout $p\in\mathbb{N}$ et notamment pour $p=n$, ce qui nous donne le résultat voulu.

> **Attention !** Si on avait directement dérivé $2n$ fois, on aurait obtenu
> $$f^{(2n+1)}\left(\frac{1}{n}\right)=2n^2f^{(2n-1)}\left(\frac{1}{n}\right)$$
> et on n'aurait pas pu effectuer de récurrence sur n.

Solution 23.

1. On note HR(n) la propriété à démontrer.
HR(0) est vraie en posant $\mathrm{P}_0=1$. Supposons HR(n) vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$. Alors il existe $\mathrm{P}_n\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que
$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(t)=\frac{\mathrm{P}_n(t)e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2n}}$$
En dérivant, on obtient
$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ f^{(n+1)}(t)=\frac{\left(t^2\mathrm{P}_n'(t)-2nt\mathrm{P}_n(t)+\mathrm{P}_n(t)\right)e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2(n+1)}}$$
En posant $\mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{X}^2\mathrm{P}_n'-2n\mathrm{X}\mathrm{P}_n+\mathrm{P}_n$, on e donc
$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ f^{(n+1)}(t)=\frac{\mathrm{P}_{n+1}(t)e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2(n+1)}}$$
Ainsi HR($n+1$) est vraie.
Par récurrence, HR(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2. Notons g la restriction de f à $\mathbb{R}^*$. g est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. Par croissances comparées, $\lim_{t\to0^+}g^{(n)}(t)=0$ et on a évidemment $\lim_{t\to0^-}g^{(n)}(t)=0$ puisque $g^{(n)}$ est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$. Ainsi $\lim_{t\to0}g^{(n)}(t)=0$. Ceci prouve que g est prolongeable par continuité en 0 en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Mais puisque f est continue en 0 (étudier les limites en 0^+ et 0^-), $f=g$ et donc f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Solution 24.

1. **a.** On a $W' = u''v - uv'' = (q-p)uv$.

   b. Supposons que v ne s'annule pas sur $[a,b]$. Comme u et v sont continues, elles restent de signe constant respectivement sur $]a,b[$ et $[a,b]$. Quitte à changer u en $-u$ et/ou v en $-v$ (qui sont aussi solution des mêmes équations différentielles que u et v), on peut supposer $u > 0$ sur $]a,b[$ et $v > 0$ sur $[a,b]$. Alors $W' \geqslant 0$ sur $[a,b]$ et donc W est croissante sur $]a,b[$. De plus, $W(a) = u'(a)v(a)$ et $W(b) = u'(b)v(b)$. On a $u'(a) \geqslant 0$ et $u'(b) \leqslant 0$ en considérant la limite du taux de variation de u en a^+ et b^-. Vous verrez en seconde année qu'on ne peut avoir $u'(a) = 0$ ou $u'(b) = 0$ sinon u serait nulle. Par conséquent, $u'(a) > 0$ et $u'(b) < 0$. Ainsi $W(a) > 0$ et $W(b) < 0$ ce qui contredit la décroissance de W. On en déduit que v s'annule sur $[a,b]$.

2. **a.** Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $u : x \mapsto \sin(M(x-a))$ vérifie $u'' + M^2 u = 0$. De plus, u s'annule en a et $a + \frac{\pi}{M}$ mais ne s'annule pas sur $\left]a, a+\frac{\pi}{M}\right[$. On déduit de la question précédente que f s'annule sur $\left[a, a+\frac{\pi}{M}\right]$.

   b. Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{M}\right[$. La fonction $v : x \mapsto \sin(M(x-a+\varepsilon))$ vérifie $v'' + M^2 v = 0$. La question précédente montre que v s'annule sur $[a,b]$. Comme v ne s'annule pas sur $\left[a, \frac{a}{+}\frac{\pi}{M} - \varepsilon\right[$, on a $b \geqslant a + \frac{\pi}{M} - \varepsilon$ i.e. $b - a \geqslant \frac{\pi}{M} - \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{M}\right[$, $b - a \geqslant \frac{\pi}{M}$.

Solution 25.

1. Comme f est nulle sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, $f^{(n)}(x) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > \frac{1}{2}$. Comme f est $\mathscr{C}^\infty$, les $f^{(n)}$ sont continues et donc $f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange entre $\frac{1}{2}$ et 0 :

   $$\left| f(0) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k k!} f^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leqslant \frac{1}{2^n n!} \sup_{[0;\frac{1}{2}]} \left| f^{(n)} \right|$$

   On a vu précédemment que $f^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Par ailleurs, $\sup\limits_{[0;\frac{1}{2}]} \left|f^{(n)}\right| \leqslant \sup\limits_{\mathbb{R}_+} \left|f^{(n)}\right|$ (on a même égalité). Enfin, $f(0) = 1$ par hypothèse donc on obtient le résultat voulu.

2. Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\sup\limits_{\mathbb{R}_+} \left|f^{(n)}\right| = 2^n n!$ et posons

   $$g(x) = f(x) - (1-2x)^n, \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

   On a donc $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - (-1)^n 2^n n!$. Montrons par récurrence finie décroissante sur $k \in [\![1;n]\!]$ que $g^{(k)}$ est de signe constant sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. D'après notre hypothèse, c'est clair pour $k = n$. Supposons $g^{(k)}$ de signe constant pour un certain k tel que $1 < k \leqslant n$. Alors $g^{(k-1)}$ est monotone. Or

   $$g^{(k-1)}(x) = f^{(k-1)}(x) - \frac{n!}{(n-k+1)!}(1-2x)^{n-k+1}$$

   donc $g^{(k-1)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ (puisque $n - k + 1 > 0$). Ainsi $g^{(k-1)}$ est de signe constant sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Donc, par récurrence, g' est de signe constant sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et g est monotone sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Comme $g(0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, g est nulle sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Or $g^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = -(-1)^n 2^n n! \neq 0$. Il y a donc contradiction.

Solution 26.

Soit $x \in \left]-\frac{1}{\lambda};\frac{1}{\lambda}\right[$. L'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et x au rang n donne :

$$|f(x)| \leqslant \frac{|x|^n}{n!} \sup_{[0;x]} \left|f^{(n)}\right| \leqslant |\lambda x|^n < 1.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $f(x)=0$.

Montrons par récurrence sur $k\in\mathbb{N}^*$ que f est nulle sur $\left]-\frac{k}{\lambda};\frac{k}{\lambda}\right[$. On a vu que c'était vrai pour $k=1$. Supposons-le vrai pour un $k\in\mathbb{N}^*$. Considérons les fonctions :

$$g_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f\left(x-\frac{k}{\lambda}\right) \end{array} \quad \text{et } g_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f\left(x+\frac{k}{\lambda}\right) \end{array}$$

Comme f est nulle sur $\left]-\frac{k}{\lambda};\frac{k}{\lambda}\right[$ par hypothèse de récurence et que les $f^{(n)}$ sont continues, on a donc :

$$f^{(n)}\left(-\frac{k}{\lambda}\right)=f^{(n)}\left(\frac{k}{\lambda}\right)=0, \forall n\in\mathbb{N},$$

c'est-à-dire

$$g_1^{(n)}(0)=g_2^{(n)}(0)=0\forall n\in\mathbb{N}.$$

De plus $\sup_{\mathbb{R}}\left|g_1^{(n)}\right|=\sup_{\mathbb{R}}\left|g_2^{(n)}\right|=\sup_{\mathbb{R}}\left|f^{(n)}\right|$. Donc g_1 et g_2 vérifient les mêmes hypothèses que f : elles sont donc nulles sur $\left]-\frac{1}{\lambda};\frac{1}{\lambda}\right[$. Par conséquent, f est nulle sur $\left]-\frac{k+1}{\lambda};\frac{k+1}{\lambda}\right[$.

Par récurrence, f est donc nulle sur tout intervalle $\left]-\frac{k}{\lambda};\frac{k}{\lambda}\right[$ où $k\in\mathbb{N}^*$: elle est donc nulle sur $\mathbb{R}$.

Solution 27.

On a clairement $\varphi(b)=0$. On choisit donc A tel que $\varphi(a)=0$. Il suffit ainsi de choisir A tel que :

$$\mathrm{A}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k-f(b) \qquad (*)$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$, φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c\in]a,b[$ tel que $\varphi'(c)=0$. Or, pour $x\in]a,b[$:

$$\varphi'(x)=-\sum_{k=0}^{n}f^{(k+1)}(x)k!(b-x)^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}-\mathrm{A}\frac{(b-x)^n}{n!}$$

Par télescopage, on obtient :

$$\varphi'(x)=-\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n-\mathrm{A}\frac{(b-x)^n}{n!}$$

Comme $\varphi'(c)=0$, on obtient :

$$\mathrm{A}+f^{(n+1)}(c)=0$$

Il suffit alors d'utiliser la relation $(*)$ pour obtenir l'égalité voulue.

Solution 28.

1. Soit l'hypothèse de récurrence : «$\forall x\in]-1,+\infty[,\ f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$».
   Initialisation : Pour tout $x\in]-1,+\infty$, $f'(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{(-1)^0 0!}{(1+x)^0}$. Donc HR(1) est vraie.
   Hérédité : On suppose HR(n) vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$. On a donc pour tout $x\in]-1,+\infty[$, $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. En dérivant, on obtient
   $$\forall x\in]-1,+\infty[,\ f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$
   Conclusion : HR(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1 à un ordre $n\in\mathbb{N}^*$ quelconque. Pour $t\in[0,1]$, $|f^{(n+1)}(t)|\leqslant n!$ donc
   $$\left|f(1)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k\right|\leqslant n!\frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

On en déduit que

$$|\ln 2 - u_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

3. Il est immédiat que (u_n) converge vers $\ln(2)$.

Remarque. On peut alors noter $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$. ■

Solution 29.

1. Si $M_0 = 0$, alors f est constamment nulle donc $M_0 = M_1 = M_2 = 0$ et l'inégalité est vérifiée.
Si $M_2 = 0$, alors f est affine. Mais comme f est bornée, f est constante. On a donc $M_1 = 0$ et l'inégalité est encore vérifiée.

2. Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$, on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre x et $x+h$, ce qui donne le résultat voulu.

3. Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
|f'(x)h| &\leqslant |f'(x)h + f(x) - f(x+h)| + |f(x+h) - f(x)| \\
&\leqslant \frac{M_2 h^2}{2} + |f(x+h)| + |f(x)| \\
&\leqslant \frac{M_2 h^2}{2} 2 + 2M_0
\end{aligned}$$

Puisque $h > 0$,

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_2 h}{2} + \frac{2M_0}{h}$$

4. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(t) = b - \frac{a}{t^2}$. On a donc $g'(t) \leqslant 0$ pour $0 < t \leqslant \sqrt{\frac{a}{b}}$ et $g'(t) \geqslant 0$ pour $t \geqslant \sqrt{\frac{a}{b}}$. On en déduit que g admet un minimum en $\sqrt{\frac{a}{b}}$ et que celui-ci vaut $g\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right) = 2\sqrt{ab}$.

5. L'inégalité

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_2 h}{2} + \frac{2M_0}{h}$$

étant valable pour tout $h > 0$, elle est notamment valable pour h minimisant le membre de droite. Il suffit alors d'appliquer la question précédente avec $a = 2M_0$ et $b = \frac{M_2}{2}$. On en déduit que

$$|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{2M_0 \times \frac{M_2}{2}} = 2\sqrt{M_0 M_2}$$

Cette dernière inégalité étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a par passage à la borne supérieure :

$$M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$$

Solution 30.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de Taylor avec reste intégral assure que $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$. En effectuant le changement de variable $t = xu$, on obtient

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,du$$

Comme $f^{(n+1)}$ est positive,

$$|\mathrm{R}_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$$

De même,

$$\mathrm{R}_n(r) = \frac{r^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ru)\,\mathrm{d}u$$

Mais $f^{(n+1)}$ est croissante sur I puisque $f^{(n+2)}$ est positive sur I. Ainsi puisque $x < r$, $f^{(n+1)}(xu) \leqslant f^{(n+1)}(ru)$ pour tout $u \in [0,1]$ puis

$$\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ru)\,\mathrm{d}u$$

On en déduit l'inégalité demandée.

2. Soit $x \in \mathrm{I}$. Il existe $r \in]0,\mathrm{R}[$ tel que $|x| < r$. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}}\mathrm{R}_n(r)$$

D'une part, l'expression intégrale de $\mathrm{R}_n(r)$ montre que $\mathrm{R}_n(r) \geqslant 0$. D'autre part, $f(r) = \mathrm{S}_n(r) + \mathrm{R}_n(r)$ et $\mathrm{S}_n(r) \geqslant 0$ en tant que somme de termes positifs. Ainsi $\mathrm{R}_n(r) \leqslant f(r)$. La suite $(\mathrm{R}_n(r))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée. Puisque $|x| < r$, $\frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}}\mathrm{R}_n(r) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $\mathrm{R}_n(x) \underset{n\to+\infty 0}{\longrightarrow}$ i.e. $(\mathrm{S}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Solution 31.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\left[0,\frac{k}{n^2}\right]$ donc on peut utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour f sur $\left[0,\frac{k}{n^2}\right]$ au premier ordre :

$$\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0)\frac{k}{n^2}\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2$$

où M est un majorant de $|f''$ sur $[0,1]$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$\left|\mathrm{S}_n - f'(0)\sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2}\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{2}\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^4}$$

Or on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ainsi

$$\left|\mathrm{S}_n - f'(0)\frac{n(n+1)}{2n^2}\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{2}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4}$$

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{S}_n = \frac{f'(0)}{2}$.

Solution 32.

1. Supposons f dérivable en a. On a alors

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$$

et

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + o(h),$$

ainsi

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \frac{2hf'(a)+o(h)}{2h} = f'(a)+o(1)$$

et donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

2. La fonction *valeur absolue* n'est pas dérivable en 0 mais admet une dérivée symétrique en 0 car

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|-|-h|}{2h} = 0.$$

Solution 33.

Ecrivons la formule de Taylor-Young à l'ordre deux en x_0 ,

$$f(x_0+h) \underset{0}{=} f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+o\left(h^2\right).$$

On a donc aussi

$$f(x_0-h) \underset{0}{=} f(x_0)-hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+o\left(h^2\right).$$

D'où , en notant $\tau(h)$ le quotient

$$\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2},$$

on a ,

$$\tau(h) = f''(x_0)+o(1),$$

ainsi

$$\lim_{h\to 0} \tau(h) = f''(x_0).$$

Solution 34.

Fixons $x\in\mathbb{R}$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et x.

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}\sup_{[0,x]}\exp^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

et donc

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}\max(1,e^x)}{(n+1)!}$$

Par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}\max(1,e^x)}{(n+1)!} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Solution 35.

D'après la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'exponentielle (qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$), on pour tout $n \geqslant 0$,

$$e^x - \left(1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^x \, dx.$$

Lorsque n est impair, cette expression est positive pour $x \leqslant 0$ (intégration d'une fonction négative pour des bornes dans le sens décroissant) alors qu'elle est négative lorsque n est pair. On en déduit en particulier que

$$\forall x \leqslant 0, \quad 1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Solution 36.

1. La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ étant strictement positive sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$. La fonction f, qui est son inverse, est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

2. **a.** Si
$$\mathrm{P}_n(x) = (1+x^2)^{n+1} f^{(n)}(x),$$
alors
$$\mathrm{P}_n'(x) = (n+1)2x(1+x^2)^n f^{(n)}(x) + (1+x^2)^{n+1} f^{(n+1)}(x)$$
et un calcul immédiat donne
$$(1+x^2)\mathrm{P}_n'(x) = 2(n+1)x\mathrm{P}_n(x) + \mathrm{P}_{n+1}(x)$$

   b. Montrons le résultat demandé par récurrence sur n.
   - $\mathrm{P}_0 = 1$ vérifie l'hypothèse.
   - Supposons l'hypothèse vérifiée pour tout $k \leq n$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{n+1}(x) &= (1+x^2)\mathrm{P}_n'(x) - 2(n+1)x\mathrm{P}_n(x) \\
&= (1+x^2)[(-1)^n(n+1)!nx^{n-1} + \mathrm{R}'(x)] - 2(n+1)x((-1)^n(n+1)!x^n + \mathrm{R}(x)) \\
&= (-1)^{n+1}(n+2)!x^{n+1} + \mathrm{Q}(x)
\end{aligned}$$

3. **a.** La fonction G est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 par $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Par composition, elle est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout x dans cet intevalle :
$$\mathrm{G}'(x) = \frac{-1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x} + a - 1\right).$$

   b. On peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction G et on en déduit qu'il existe $\mathrm{C} \in]0,1[$ tel que $\mathrm{G}'(\mathrm{C}) = 0$. Donc, il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $g'(c) = 0$, avec $c = \dfrac{1}{\mathrm{C}} + a - 1$.

4. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la fonction g définie par
$$g(x) = h(-x).$$

5. Montrons le résultat par récurrence.
   - On vérifie que P_0 et P_1 admettent respectivement 0 et une racine sur $\mathbb{R}$.
   - Supposons que le polynôme P_n admette n racines distinctes $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. La fonction $f^{(n)}$ s'annule donc en ces points. Du théorème de Rolle appliqué à chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on déduit que $f^{(n+1)}$ (donc P_{n+1}) s'annule en $(n-1)$ point distincts $b_2 < b_3 < \dots < b_n$, avec pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$: $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$. Or la fonction $f^{(n)}$ est continue sur l'intervalle $[a_n, +\infty[$, dérivable sur $]a_n, +\infty[$ et vérifie $f^{(n)}(a_n) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f^{(n)}(x) = 0$. D'après la question **3.**, il existe $b_{n+1} > a_n$ tel que $f^{(n+1)}(b_{n+1}) = 0$. De même, en appliquant la question **4.** à $f^{(n)}$ sur l'intervalle $]-\infty, a_1[$, on trouve $b_1 < a_1$ tel que $f^{(n+1)}(b_1) = 0$. On a ainsi trouvé $(n+1)$ points distincts où P_{n+1} s'annule. Ce polynôme étant de degré $(n+1)$, il n'admet pas d'autres racines.

Solution 37.

1. Le résultat est clair pour un polynôme P de degré inférieur ou égal à 1. Si $\deg(\mathrm{P}) \geqslant 2$ et P admet n racines simples, alors en appliquant le lemme de Rolle à P entre ses racines, on obtient $n-1$ racines deux à deux distinctes de P'. Comme $\deg(\mathrm{P}') = n-1$, P' est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

2. Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'une racine multiple $\alpha \in \mathbb{C}$ de $\mathrm{Q} = \mathrm{P}^2 + 1$. On a alors
$$\mathrm{Q}(\alpha) = \mathrm{Q}'(\alpha) = 0,$$
ie
$$\mathrm{P}^2(\alpha) = -1, \quad 2\mathrm{P}(\alpha)\mathrm{P}'(\alpha) = 0,$$
d'où $\mathrm{P}'(\alpha) = 0$. Comme P' est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ (d'après la question **1.**), on a $\alpha \in \mathbb{R}$ d'où, comme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$,
$$\mathrm{P}(\alpha)^2 \in \mathbb{R}_+$$
ce qui est absurde car $\mathrm{P}^2(\alpha) = -1$.

Solution 38.

1. On trouve $\mathrm{P}_0 = 1$, $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}$, $\mathrm{P}_2 = \frac{3}{2}\mathrm{X}^2 - \frac{1}{2}$ et $\mathrm{P}_3 = \frac{5}{2}\mathrm{X}^3 - \frac{3}{2}\mathrm{X}$.

2. On a $\deg \mathrm{Q}_n = n \deg(\mathrm{X}^2 - 1) = 2n$. Ainsi $\deg \mathrm{P}_n = \deg \mathrm{Q}_n - n = n$.

3. Comme Q_n est pair, sa dérivée $n^{\text{ème}}$ P_n est paire si n est pair et impaire si n est impair.
Si n est impair, P_n est impair : on a donc $\mathrm{P}_n(0) = 0$.
Si n est pair, P_n est pair donc P'_n est impair : on a donc $\mathrm{P}'_n(0) = 0$.

4. Via la formule du binôme
$$\mathrm{Q}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \mathrm{X}^{2k}$$
La formule de Taylor en 0 donne également
$$\mathrm{Q}_n = \sum_{l=0}^{2n} \frac{\mathrm{Q}_n^{(l)}(0)}{l!} \mathrm{X}^l$$
Supposons n pair. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. En identifiant les coefficients de X^n dans ces deux expressions, on obtient
$$\frac{\mathrm{Q}^{(n)}(0)}{n!} = \binom{2p}{p} (-1)^p$$
puis
$$\mathrm{P}_n(0) = \frac{(-1)^p \binom{2p}{p}}{2^{2p}} = \frac{(-1)^p (2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$$
Supposons n impair. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$. En identifiant les coefficients de X^{n+1} dans les deux expressions précédentes, on obtient
$$\frac{\mathrm{Q}^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = \binom{2p+1}{p+1} (-1)^p$$
puis
$$\mathrm{P}'_n(0) = \frac{(2p+2)(-1)^p \binom{2p+1}{p+1}}{2^{2p+1}} = \frac{(-1)^p (2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2}$$

5. **a.** Pour $n \geqslant 1$, on a $\mathrm{Q}'_n = 2n\mathrm{X}(\mathrm{X}^2 - 1)^{n-1}$ et donc $(\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{Q}'_n = 2n\mathrm{X}(\mathrm{X}^2 - 1)^n = 2n\mathrm{X}\mathrm{Q}_n$. On vérifie que cette égalité est encore valable pour $n = 0$ puisque $\mathrm{Q}_0 = 1$.

b. On utilise la formule de Leibniz. Comme les dérivées de X^2-1 sont nulles à partir de l'ordre 3 et que celles de X sont nulles à partir de l'ordre 2, on a

$$\binom{n+1}{0}(X^2-1)Q_n^{(n+2)}+2\binom{n+1}{1}XQ_n^{(n+1)}+2\binom{n+1}{2}Q_n^{(n)}=2n\binom{n+1}{0}XQ_n^{(n+1)}+2n\binom{n+1}{1}Q_n^{(n)}$$

Autrement dit

$$(X^2-1)Q_n^{(n+2)}+2(n+1)XQ_n^{(n+1)}+n(n+1)Q_n^{(n)}=2nXQ_n^{(n+1)}+2n(n+1)Q_n^{(n)}$$

ou encore

$$(X^2-1)Q_n^{(n+2)}+2XQ_n^{(n+1)}=n(n+1)Q_n^{(n)}$$

Par définition de P_n, on a donc

$$(X^2-1)P_n''+2XP_n'=n(n+1)P_n$$

6. **a.** $Q_n=(X-1)^n(X+1)^n$ ce qui prouve que 1 et -1 sont des racines de Q_n de multiplicité n. On a donc $Q_n^{(k)}(\pm 1)=0$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$.

b. On fait l'hypothèse de récurrence HR(k) suivante :

$Q_n^{(k)}$ possède au moins k racines distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$

HR(0) est vraie puisque les seules racines de Q_n sont -1 et 1 (pas de racine du tout si $n=0$).
Supposons que HR(k) soit vraie pour un certain $k\in[\![0,n-1]\!]$. Posons $\alpha_0=-1$, $\alpha_{k+1}=1$ et α_i pour $1\leqslant i\leqslant k$ k racines distinctes de $Q_n^{(k)}$ dans l'intervalle $]-1,1[$ rangées dans l'ordre croissant. D'après la question précédente, $Q_n^{(k)}$ s'annule en α_0 et α_{k+1}. De plus, $Q_n^{(k)}$ s'annule en les α_i pour $1\leqslant i\leqslant k$. Comme Q_n est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de Rolle entre α_i et α_{i+1} pour $0\leqslant i\leqslant k$. Ceci prouve que la dérivée de $Q_n^{(k)}$, à savoir $Q_n^{(k+1)}$ s'annule $k+1$ fois.
Par récurrence finie, $Q_n^{(n)}$ et donc P_n possède au moins n racines dans l'intervalle $]-1,1[$. Comme $\deg P_n=n$, P_n possède au plus n racines réelles. On en déduit que P_n possède exactement n racines réelles toutes situées dans l'intervalle $]-1,1[$.

Solution 39.

- *Définition de la suite* : Introduisons la fonction

$$f:[0,2[\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\sqrt{2-x}.$$

Cette fonction laisse stable l'intervalle $[0,2]$ donc la suite est bien définie pour tout $u_0\in[0,2]$. Son seul point fixe est clairement 1.

- *Convergence de la suite* : notons $I=[0,\sqrt{2}]$. Cet intervalle est stable par f et pout tout $u_0\in[0,2]$, on a $u_1\in I$. la fonction f est dérivable sur I, de dérivée

$$\forall x\in I,\quad f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}.$$

On a

$$\sup_{x\in I}\frac{1}{2\sqrt{2-x}}=\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}<1.$$

Appliquons l'inégalité des accroissements finis sur I

$$\forall x,y\in I,\quad |f(x)-f(y)|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}|x-y|.$$

Donc, $\forall n\geqslant 1$, puisque $u_{n+1}=f(u_n)$ et $f(1)=1$,

$$\forall n\geqslant 1,\quad |u_{n+1}-4|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{12}}|u_n-4|,$$

et par une récurrence immédiate,

$$\forall n\geqslant 1,\quad |u_n-1|\leqslant\left(\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)^{n-1}|u_1-1|.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=1.$$

Solution 40.

- *Définition de la suite* : le terme u_1 est défini *si et seulement si*

$$u_0 \geqslant -\frac{4}{3},$$

et dans ce cas $u_1 \geqslant 0$. Notons $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$ et f l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto \sqrt{4+3x}.$$

La suite est bien définie dès que $u_0 \geqslant -\frac{4}{3}$ puisque l'on a $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.

- *Convergence de la suite* : un réel x est point fixe de f *si et seulement si*

$$x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x^2 = 4+3x,$$

ie $x = 4$. La seule (et éventuelle !) limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc 4. La fonction f est dérivable sur I et sur cet intervalle ,

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{4+3x}} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Appliquons l'inégalités des accroissements finis sur I

$$\forall x, y \in \mathrm{I}, \;\; |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{3}{4}|x-y|.$$

Donc, pour tout $n \geqslant 1$, puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(4) = 4$,

$$|u_{n+1} - 4| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - 4|,$$

et par une récurrence immédiate,

$$|u_n - 4| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} |u_1 - 4|.$$

Ainsi , d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 4.$$

Solution 41.

- *Définition de la suite* : le terme u_1 est défini *si et seulement si*

$$u_0 \neq 0.$$

Notons

$$\mathrm{I} = \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$$

et f l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto 1 + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

La suite est bien définie dès que $u_0 \neq 0$ puisque $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.

► *Etude de la convergence* : prouvons que f admet un unique point fixe appartenant à I. La fonction f est dérivable sur I et sur cet intervalle ,
$$\left|f'(x)\right| = \frac{1}{4x^2}\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant \frac{4}{9}.$$
En notant g la fonction définie sur I par
$$x \in \mathrm{I} \longmapsto f(x) - x.$$
L'application g est dérivable sur I et sur cet intervalle ,
$$g'(x) = f'(x) - 1 \leqslant \frac{4}{9} - 1 < 0.$$
g est donc strictement décroissante sur I. Puisque
$$g(3/4) \geqslant 0, \quad g(5/4) \leqslant 0,$$
g admet un zéro d'après le théorème des valeurs intermédiaires ; ce dernier est unique par stricte croissance de g, notons le ℓ. Appliquons à f l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle I
$$\forall x, y \in \mathrm{I}, \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \frac{4}{9}|x-y|.$$
Donc, pour tout $n \geqslant 1$, puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\ell) = \ell$,
$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - \ell|,$$
et par une récurrence immédiate ,
$$|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}|u_1 - \ell|.$$
Ainsi , d'après le théorème d'encadrement ,
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Solution 42.

En dehors de l'origine, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ par théorèmes généraux ; en 0, elle est dérivable, de dérivée nulle, puisque son taux d'accroissement est $x\sin\frac{1}{x}$, qui tend vers 0 quand x tend vers 0. Cependant, elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puisque sa dérivée, donnée sur $\mathbb{R}^*$ par
$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},$$
ne tend pas vers $f'(0) = 0$ (en fait, elle n'a pas de limite).

Solution 43.

Convenons de dire qu'une fonction est *dérivable* (sans plus de précision) pour signifier qu'elle est dérivable sur son ensemble de définition.

1. La fonction ln (la deuxième) est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et (la première) strictement positive sur $]1,+\infty[$, donc $\ln\circ\ln$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et
$$\forall\ x > 1, \quad (\ln\circ\ln)'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}.$$

2. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\arctan\circ\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$\forall\ x > 0, \quad (\arctan\circ\ln)'(x) = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}.$$

3. La fonction $\sin^2$ est périodique, de période π. La fonction $\sqrt{\cdot}$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction f est (définie et) dérivable au point x si, et seulement si, $1-2\sin^2 x > 0$, c'est-à-dire si x est strictement compris entre $-\pi/4$ et $\pi/4$ (modulo π). Pour de tels x,
$$f'(x) = \frac{-2\sin(x)\cos(x)}{1-2\sin^2(x)} = -\tan(2x).$$
On peut faciliter le calcul de la dérivée en remarquant que
$$\ln\sqrt{1-2\sin^2(x)} = \frac{1}{2}\ln|\cos(2x)|$$
pour tout $x \neq \pi/4 \pmod{\pi/2}$.

4. La fonction f est définie et dérivable en tout point x tel que $\sin(x) \neq x\cos(x)$. Cette équation possède une infinité de solutions, une dans chaque intervalle de la forme $]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[$ (avec $k \in \mathbb{Z}$). En tout point de son ensemble de définition,
$$f'(x) = \frac{-x^2}{(\sin(x)-x\cos(x))^2}.$$

5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin^2(2)x + (1+\cos(2x))\cos(2x) + 3\cos(2x) \\ &= \cos(4x) + 4\cos(2x). \end{aligned}$$

6. Un tableau de signes montre que $(1-x)/(1+x)$ est strictement positif si, et seulement si, $-1 < x < 1$. Par conséquent, la fonction f est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout x dans cet intervalle,
$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

Solution 44.

1. Il suffit de considérer la fonction f définie par :
$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}.$$
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a clairement :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
En revanche, pour tout $x > 0$, on a :
$$f'(x) = -\frac{\sin(x^2)}{x^2} + 2\cos(x)$$
et puisque
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} = 0$$
et $2\cos(x)$ n'admet aucune limite en $+\infty$ (résultat classique qui se démontre en utilisant le critère séquentiel), f' n'admet aucune limite en $+\infty$.

2. Puisque f' tend vers $+\infty$ avec x, il existe $\mathrm{A} > 0$ tel que
$$\forall x \geqslant \mathrm{A}, \ f'(x) \geqslant 1.$$
Mais alors, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \geqslant \mathrm{A}$, il existe $c \in [\mathrm{A}, x]$ tel que
$$f(x) - f(\mathrm{A}) = f'(c)(x-\mathrm{A}).$$
Comme $f'(c) \geqslant 1$, on en déduit que $\forall x \geqslant \mathrm{A}$,
$$f(x) \geqslant f(\mathrm{A}) + (x-\mathrm{A}).$$
Et donc, puisque le membre de droite tend vers $+\infty$ avec x, on a
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Raisonnons par l'absurde en supposant que

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = \ell \neq 0.$$

Quitte à considérer $-f$ au lieu de f, on peut toujours supposer $\ell > 0$. Il existe alors $A > 0$ tel que

$$\forall t \geqslant A,\quad f^{(n)}(t) \geqslant \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}.$$

On déduit alors de l'inégalité (généralisée !) des accroissements finis que $\forall x \geqslant A$:

$$f^{(n-1)}(x) \geqslant f^{(n-1)}(A) + \frac{\ell(x-A)}{2}$$

puis, par les mêmes arguments, on aboutit à $\forall x \geqslant A$:

$$f^{(n-2)}(x) \geqslant f^{(n-2)}(A) + f^{(n-1)}(A)(x-A) + \frac{\ell(x-A)^2}{2\times 2}.$$

Par une récurrence descendante sans difficulté, on prouve que $\forall 0 \leqslant k \geqslant n$ et $\forall x \geqslant A$:

$$f^{(n-k)}(x) \geqslant \sum_{i=1}^{k} f^{(n-i)}(A)\frac{(x-A)^{k-i}}{(k-i)!} + \frac{\ell(x-A)^k}{2\times k!}.$$

En particulier, on a $\forall x \geqslant A$:

$$f^{(n-k)}(x) \geqslant \sum_{i=1}^{n} f^{(n-i)}(A)\frac{(x-A)^{n-i}}{(n-i)!} + \frac{\ell(x-A)^n}{2\times n!}.$$

Comme $\ell > 0$, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers $+\infty$ avec x. Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

ce qui est absurde et ainsi $\ell = 0$.