Devoir surveillé n°2

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

Résoudre le système linéaire $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On distinguera plusieurs cas suivant les valeurs du paramètre réel a.

Exercice 2.

Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Montrer que

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

On précisera pour quels réels θ ces égalités ont un sens.

Exercice 3.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$a_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \qquad S_n=\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k} \qquad T_n=\sum_{k=0}^{n}ka_ka_{n-k}$$

1. Calculer a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 ainsi que S_0, S_1, S_2, S_3, S_4. Que remarque-t-on ?

2. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$T_n=\sum_{k=0}^{n}(n-k)a_{n-k}a_k$$

En déduire que $2T_n=nS_n$.

3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$(n+2)a_{n+1}=2(2n+1)a_n$$

4. Déduire des questions précédentes que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$T_{n+1}+S_{n+1}=a_{n+1}+2(n+1)S_n$$

puis que

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1}=a_{n+1}+2(n+1)S_n$$

5. En déduire par récurrence que $S_n=a_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

6. Montrer que a_n est un entier naturel pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 4.

On pose $\varphi(z) = |z^3 - z + 2|$ pour $z \in \mathbb{C}$. On souhaite déterminer la valeur maximale de $\varphi(z)$ lorsque z décrit $\mathbb{U}$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
2. Soit $z \in \mathbb{U}$ et θ un de ses arguments. Exprimer $|z^3 - z + 2|^2$ uniquement en fonction de $\cos\theta$.
3. Soit f la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 2$$
Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. On regroupera ces informations dans un tableau de variations.
4. Répondre à la question initialement posée. On précisera pour quelle(s) valeur(s) de $z \in \mathbb{U}$ cette valeur maximale est atteinte.

Exercice 5.

On définit une suite de complexes (z_n) par son premier terme $z_0 \in \mathbb{C}$ et par la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$$

1. Que peut-on dire de la suite (z_n) si $z_0 \in \mathbb{R}_+$? si $z_0 \in \mathbb{R}_-$?
2. On suppose que $z_0 \notin \mathbb{R}_-$ jusqu'à la fin de l'énoncé. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \notin \mathbb{R}_-$.
3. On admet que tout complexe non nul admet un unique argument dans $]-\pi, \pi]$ appelé *argument principal*. Que peut-on dire de cet argument si ce complexe n'appartient pas à $\mathbb{R}_-$?
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note r_n le module et θ_n l'argument principal de z_n. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$ et $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.
5. Exprimer θ_n en fonction de θ_0. Quelle est la limite de la suite (θ_n) ?
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$r_n = r_0 \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$$
7. Montrer que $\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2\sin x}$ (on précisera pour quels réels x cette égalité a un sens).
8. On suppose maintenant que $z_0 \notin \mathbb{R}$ jusqu'à la fin de l'énoncé. En déduire une expression de r_n en fonction de n, θ_0 et r_0 sans le symbole $\prod$.
9. Déterminer la limite de la suite (r_n) et en déduire celle de la suite (z_n).