Séries

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Compléments sur les séries numériques

1.1 Comparaison à une série géométrique

Proposition 1.1 Règle de d'Alembert

Soit (a_n) une suite de **réels strictement positifs** (au moins à partir d'un certain rang).

- Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, alors $\sum a_n$ converge.
- Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, alors $\sum a_n$ diverge grossièrement.

Exemple 1.1

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{n^n}$ converge.

Remarque. On ne peut a priori pas conclure si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ ou si la suite de terme général $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'admet pas de limite.

Exemple 1.2

Posons $a_n = 1$ et $b_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$ mais $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge tandis que $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ converge.

Attention ! Il s'agit bien de **limites** dans l'énoncé de la règle de d'Alembert. Le fait d'avoir $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ou $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ne permet pas de conclure. En prenant $a_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ mais la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ diverge.

Corollaire 1.1

Soit (a_n) une suite de réels non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

- Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, alors $\sum a_n$ converge absolument.
- Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, alors $\sum a_n$ diverge grossièrement.

Exemple 1.3 Série exponentielle

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série exponentielle $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument.

1.2 Comparaison série-intégrale

Méthode Comparaison à une intégrale

On considère une série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ où f est une fonction continue et **monotone** sur $\mathbb{R}_+$. On peut comparer les sommes partielles S_n à une intégrale pour déterminer la nature de la série. Si, par exemple, f est croissante, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [k, k+1]$:

$$f(k) \leq f(t) \leq f(k+1)$$

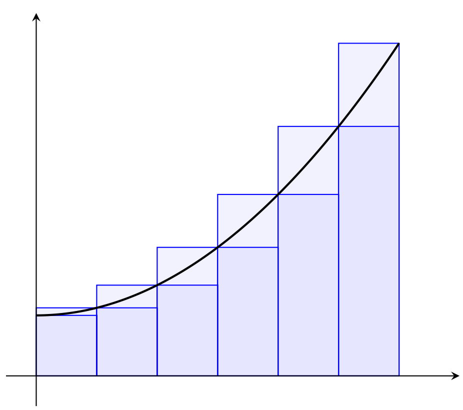
Puis par intégration sur $[k, k+1]$,

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k+1)$$

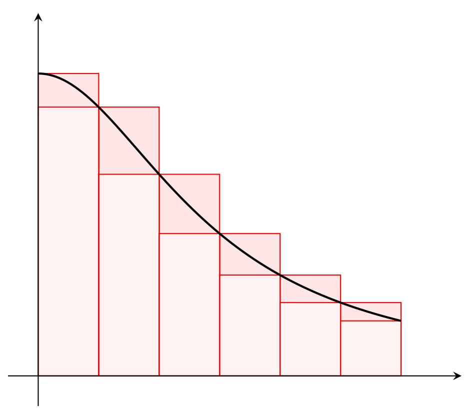
Enfin, en sommant l'inégalité de gauche pour $0 \leq k \leq n$ et celle de droite pour $0 \leq k \leq n-1$, on obtient via la relation de Chasles

$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(0) \leq S_n \leq \int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On a des résultats analogues lorsque f est décroissante.
Les encadrements obtenus permettent éventuellement de déterminer un équivalent de la suite des sommes partielles.
En modifiant légèrement la technique, on peut également obtenir un équivalent de la suite des restes (en cas de convergence).
Graphiquement, la méthode correspond à encadrer l'intégrale de f sur un intervalle par une somme d'aires de rectangles d'où le nom de méthode des rectangles.



Cas d'une fonction croissante



Cas d'une fonction décroissante

Remarque. Il ne s'agit pas de retenir des formules par cœur mais de retenir la méthode permettant d'obtenir des encadrements des sommes partielles et des restes.

Exemple 1.4 Équivalent de la série harmonique

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

Par intégration,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$$

En sommant convenablement, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

ou encore

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

L'inégalité de gauche permet de conclure que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

L'encadrement permet même d'affirmer que donner un équivalent des sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Exemple 1.5 Équivalent du reste de la série $\sum \frac{1}{n^2}$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Par intégration,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Mais en sommant l'encadrement précédent, on a également pour $\mathrm{N} > n \geq 1$

$$\int_{n+1}^{\mathrm{N}+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

ou encore

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{\mathrm{N}+1} \leq \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{\mathrm{N}}$$

Par passage à la limite

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$$

On obtient ainsi un équivalent de la suite des restes de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Exercice 1.1

Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha < 1$ et un équivalent de son reste lorsque $\alpha > 1$.

Exercice 1.2 Constante γ d'Euler

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une application continue par morceaux et décroissante.

1. Montrer que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ sont de même nature.
2. Montrer que la série de terme général $\int_{n-1}^{n} f(t)\, \mathrm{d}t - f(n)$ converge.
3. Application. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

1.3 Sommation des relations de comparaison

Proposition 1.2

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques. On suppose de plus que (v_n) est **à termes positifs** à partir d'un certain rang.

Domination On suppose que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

Négligeabilité On suppose que $u_n = o(v_n)$.

- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

Equivalence On suppose que $u_n \sim v_n$.

- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.
- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge et $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Attention ! Il est essentiel que la suite de référence soit de signe constant à partir d'un certain rang.

Remarque. Dans les cas de convergence, les résultats restent vrais même si les sommes partielles débutent à un indice non nul.

Lemme de Césaro

Soit (u_n) est une suite numérique convergente de limite ℓ. Posons $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (suite des moyennes).

- Si $\ell \neq 0$, $u_n \sim \ell$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell$ diverge. Ainsi $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} \ell = (n+1)\ell$ i.e. $v_n \sim \ell$. Donc (v_n) converge vers ℓ.
- Si $\ell = 0$, $u_n = o(1)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1$ diverge. Ainsi $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right)$ i.e. $v_n = o(1)$. Donc (v_n) converge vers 0.

Dans les deux cas, (v_n) est de même limite que (u_n).

Exemple 1.6

On veut déterminer un équivalent de la somme partielle de la série harmonique. On remarque que

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs divergente

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Exemple 1.7

On veut déterminer un équivalent du reste de la série $\sum \frac{1}{n^2}$. On remarque que

$$\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est un série à termes positifs convergente donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{n}$$

Exercice 1.3

On pose $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que

$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right)$$

2 Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé

2.1 Définitions

Définition 2.1 Série

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. On appelle **série de terme général** u_n la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geq n_0}$ où

$$\forall n \geq n_0,\ \mathrm{S}_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

Cette série est noté $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ ou plus simplement $\sum u_n$ s'il n'y a pas ambiguïté sur le premier terme.

Pour $n \geq n_0$, S_n est appelée **somme partielle de rang** n de cette série.

Remarque. Une série est donc un cas particulier de suite.

Exemple 2.1

On appelle série télescopique toute série dont le terme général est de la forme $u_n = v_n - v_{n-1}$. La somme partielle de rang n de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est $v_n - v_0$.

2.2 Nature et somme d'une série

Définition 2.2 Convergence et divergence

On dit qu'une série à valeurs dans un espace vectoriel normé converge (resp. diverge) si la suite de ses sommes partielles converge (resp. diverge).

Remarque. En dimension infinie, la convergence/divergence peut dépendre de la norme, ce qui n'est pas le cas en dimension finie puisque toutes les normes sont alors équivalentes.

Remarque. La convergence d'une série ne dépend pas du premier rang i.e. les séries $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq n_1} u_n$ sont de même nature.

Définition 2.3 Somme d'une série

Si la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ converge, la limite de la suite des sommes partielles est appelée **somme** de la série et est notée $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Remarque. On a donc $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$.

Attention ! La notation $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ n'a de sens que si la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ converge. Il faut donc prouver la convergence de la série **avant** d'employer cette notation.

Proposition 2.1 Lien suite/série

La série $\sum(u_n - u_{n-1})$ et la suite (u_n) sont de même nature (i.e. elles convergent toutes les deux ou elles divergent toutes les deux).

De plus, si (u_n) converge vers une limite ℓ, $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n - u_{n-1} = \ell - u_{n_0-1}$.

2.3 Divergence grossière

Proposition 2.2

Soit $\sum u_n$ une série convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé. Alors la suite (u_n) converge vers 0.

Attention ! La réciproque est absolument fausse. Par exemple, la suite de terme général $\frac{1}{n}$ converge vers 0 tandis que la série harmonique diverge.

Définition 2.4 Divergence grossière

Une série $\sum u_n$ est dite **grossièrement divergente** lorsque la suite (u_n) ne converge pas vers 0.

Exemple 2.2

Si $|q| \geq 1$, la série $\sum q^n$ diverge grossièrement.
La série $\sum \frac{1}{n}$ ne diverge pas grossièrement.

2.4 Reste d'une série convergente

Définition 2.5 Reste d'une série convergente

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé. Pour tout $n \geq n_0$, la série $\sum_{k \geq n+1} u_k$ est convergente et on appelle sa somme le **reste de rang** n de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$. Autrement dit, le reste de rang n de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Proposition 2.3

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé. Alors pour tout $n \geq n_0$

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Remarque. Si on note S_n la somme partielle de rang n, R_n le reste de rang n et S la somme de la série, on a donc $S_n + R_n = S$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 2.3

Lorsque $|q| < 1$, le reste de rang n de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$ est $\frac{q^{n+1}}{1-q}$.

Corollaire 2.1

La suite des restes d'une série convergente converge vers 0.

2.5 Opérations sur les séries

La proposition suivante n'est qu'une conséquence de la linéarité de la limite.

Proposition 2.4 Linéarité de la somme

Soient $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ deux séries convergentes à valeurs dans un espace vectoriel normé et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. Alors la série $\sum_{n\geq n_0}(\lambda u_n+\mu v_n)$ converge et

$$\sum_{n\geq n_0}^{+\infty}(\lambda u_n+\mu v_n)=\lambda\sum_{n\geq n_0}^{+\infty}u_n+\mu\sum_{n\geq n_0}^{+\infty}v_n$$

Remarque. En termes plus savants, les séries numériques convergentes forment un espace vectoriel et l'application qui à une série convergente associe sa somme est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Attention ! La réciproque est fausse en général. Par exemple, si $\sum(u_n+v_n)$ converge, on ne peut rien dire de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ (prendre par exemple, $u_n=-v_n=2^n$).

On évitera à tout prix d'écrire des égalités du type $\sum_{n=n_0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=n_0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=n_0}^{+\infty}v_n$ **avant** d'avoir prouvé la convergence des séries $\sum_{n\geq n_0}u_n$ et $\sum_{n\geq n_0}v_n$.

2.6 Absolue convergence

Définition 2.6 Absolue convergence

Une série $\sum u_n$ à valeurs dans un espace vectoriel normé est dite **absolument convergente** si $\sum\|u_n\|$ converge.

Remarque. A nouveau, en dimension inifine, l'absolue convergence peut dépendre de la norme.

Exemple 2.4

On munit $\mathbb{R}[X]$ des normes $N : P\mapsto\max_{t\in[0,1]}|P(t)|$ et $N' : P\mapsto\int_0^1|P(t)|\,dt$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{X^n}{n}$ converge absolument pour N' mais pas pour N. En effet, $N(X^n/n)=\frac{1}{n}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ diverge tandis que $N'(X^n/n)=\frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n(n+1)}$ converge.

Théorème 2.1

Une série absolument convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé de **dimension finie** est convergente. Dans ce cas, $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right\|\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\|u_n\|$.

ATTENTION ! La réciproque est fausse. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge tandis que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Définition 2.7 Exponentielle d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La série $\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{A^p}{p!}$ converge absolument. On note $\exp(A) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{p!}$.

Définition 2.8 Exponentielle d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. La série $\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{f^p}{p!}$ converge absolument. On note $\exp(f) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^p}{p!}$.

Exemple 2.5

Si $\|.\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ vérifie $\|A\| < 1$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} A^n$ est absolument convergente, $I_p - A$ est inversible et $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_p - A)^{-1}$.

Exemple 2.6

Si $\|.\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}(E)$ et si $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\|u\| < 1$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u^n$ est absolument convergente, $\mathrm{Id}_E - u$ est inversible et $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n = (\mathrm{Id}_E - u)^{-1}$.

ATTENTION ! Le fait que l'espace vectoriel normé considéré soit de **dimension finie** est important. Si ce n'est pas le cas, une série peut converger absolument sans être convergente.

Exemple 2.7

Munissons $\mathbb{R}[X]$ de la norme

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{R}[X] \mapsto \|P\| = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

Puisque $\left\|\frac{X^n}{(n+1)^2}\right\| = \frac{1}{(n+1)^2}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{X^n}{(n+1)^2}$ converge absolument. Supposons qu'elle converge vers un polynôme $P = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p X^p$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|P - \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{(k+1)^2}\right\| = 0$$

Fixons $p \in \mathbb{N}$. Par définition de la norme $\|\cdot\|$, pour tout $n \geq p$

$$\left|a_p - \frac{1}{(p+1)^2}\right| \leq \left\|P - \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{(k+1)^2}\right\|$$

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $a_p = \frac{1}{(p+1)^2}$. Par conséquent, la suite (a_p) n'est pas presque nulle, ce qui est impossible car P est un polynôme.