Semaine du 28/01 au 01/02

1 Cours

Espaces vectoriels

Définition et exemples fondamentaux Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Exemples. Si X est un ensemble, on peut munir $\mathbb{K}^X$ d'une struture de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Conséquence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^\mathbb{N}$, $\mathbb{K}^\mathbb{K}$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Sous-espaces vectoriels Définition. Intersection de sous-espaces vectoriels. Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs. Espace vectoriel engendré par une partie ou une famille.

Somme de sous-espaces vectoriels Somme de deux sous-espaces vectoriels. Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces supplémentaires. Si $E = F \oplus G$, définition du projeté de $x \in E$ sur F parallèlement à G. Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.

2 Méthodes à maîtriser

- Savoir montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel.
  - inclusion, vecteur nul, stabilité par combinaison linéaire ;
  - «mettre sous forme d'un vect».
- Savoir déterminer une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel («mettre sous forme d'un vect»).
- Savoir montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans un espace vectoriel (utiliser éventuellement une méthode par analyse/synthèse).
- Savoir montrer qu'un nombre fini de sous-espaces vectoriels sont en somme directe (somme nulle $\implies$ termes nuls).

3 Questions de cours

- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que F et G sont en somme directe **si et seulement si** $F \cap G = \{0_E\}$.
- Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe **si et seulement si**
$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n F_i,\ \sum_{i=1}^n x_i = 0_E \implies \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0_E$$
- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Soit P le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite vectorielle dirigée par le vecteur $(1, 1, 1)$. Montrer que P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
- On note F l'ensembles des suites réelles vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants **au choix de l'examinateur**. Déterminer une famille génératrice de F («mettre sous forme d'un vect»).
- On note F l'ensemble des solutions à valeurs réelles d'une équation différentielle d'ordre 2 homogène à coefficients constants **au choix de l'examinateur**. Déterminer une famille génératrice de F («mettre sous forme d'un vect»).