# Devoir à la maison n°10

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

**Solution 1**

1. C'est du calcul.

2. **a.** Supposons que $x$ et $y$ admettent un diviseur premier commun $p$. Alors $p$ divise $x^2$ et $y^2$. Puisque $z^2 = x^2 + y^2$, $p$ divise $z^2$. Puisque $p$ est premier, $p$ divise $z$. Ainsi $p$ est un diviseur premier commun de $x$, $y$ et $z$, ce qui est absurde puisque $x$, $y$ et $z$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Ainsi $x$ et $y$ ne possèdent pas de diviseur premier commun : ils sont premiers entre eux.
On prouve de même que $x$ et $z$ d'une part et $y$ et $z$ d'autre part sont premiers entre eux.

   **b.** Comme $x$ et $y$ sont premiers entre eux, ils ne peuvent pas être tous deux pairs.
Remarquons maintenant que le carré d'un entier pair est congru à 0 modulo 4 tandis que le carré d'un entier impair est congru à 1 modulo 4. Supposons $x$ et $y$ impairs. Alors $z^2 \equiv 2[4]$, ce qui est impossible puisque le carré d'un entier est congru à 0 ou 1 modulo 4.
Finalement $x$ et $y$ sont de parités distinctes. Dans ce cas, $z^2 \equiv 1[4]$, ce qui signifie que $z$ est impair.

3. **a.** Notons $\delta$ le pgcd de $z - x$ et $z + x$. Tout d'abord, $z$ et $x$ étant impairs, $z - x$ et $z + x$ sont pairs donc 2 divise $\delta$. De plus, $2x = (z + x) - (z - x)$ et $2z = (z + x) + (z - x)$ donc $\delta$ divise $2x$ et $2z$. Par conséquent, $\delta$ divise $2x \wedge 2z = 2(x \wedge z) = 2$. Finalement $\delta = 2$.

   **b.** Puisque le pgcd de $z - x$ et $z + x$ est 2, $b$ et $c$ sont premiers entre eux. De plus, $y^2 = z^2 - x^2 = (z - x)(z + x)$ i.e. $a^2 = bc$.
Puisque $x, y, z$ sont strictement positifs, $a > 0$ et $b > 0$. Puisque $a^2 = bc$, on a également $c > 0$. On peut donc considérer les valuations $p$-adiques de $a, b, c$.
Soit alors $p$ un nombre premier. Alors $v_p(a^2) = v_p(bc)$ i.e. $2v_p(a) = v_p(b)+v_p(c)$. Puisque $b$ et $c$ sont premiers entre eux, l'une des deux valuations $v_p(b)$ ou $v_p(c)$ est nulle tandis que l'autre vaut $2v_p(a)$. Quoi qu'il en soit, les deux valuations $v_p(b)$ et $v_p(c)$ sont paires. Ceci étant vrai pour tout nombre premier $p$, $b$ et $c$ sont des carrés d'entiers.

4. Soit $(x, y, z)$ un triplet solution.

   - Si l'un des deux réels $x$ et $y$ est nul, on peut supposer que $y = 0$ quitte à permuter $x$ et $y$. Alors $x^2 = z^2$. Si $x$ et $z$ sont de même signe, on a bien $x = d(u^2 - v^2)$, $y = 2duv$ et $z = d(u^2 + v^2)$ avec $d = x = z$, $u = 1$ et $v = 0$. Sinon, il suffit de poser $d = z = -x$, $u = 0$ et $v = 1$.
   - Si $z = 0$, alors $x = y = 0$ et on a bien $x = d(u^2 - v^2)$, $y = 2duv$ et $z = d(u^2 + v^2)$ avec $d = 0$ et $u, v$ quelconques.

   On suppose donc maintenant que $x, y, z$ sont non nuls et même strictement positifs. Notons $d$ le pgcd de $x$, $y$ et $z$. Alors $\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d}\right)$ est encore un triplet solution formé d'entiers naturels non nuls premiers entre eux dans leur ensemble. D'après ce qu'il précède, quitte à échanger $x$ et $y$, il existe des entiers $b$ et $c$ tels que $\frac{z+x}{d} = 2b$ et $\frac{z-x}{d} = 2c$ avec $b$ et $c$ des carrés d'entiers naturels non nuls que l'on peut noter $u$ et $v$. On a alors $z + x = 2du^2$ et $z - x = 2dv^2$ puis, par somme et différence, $z = d(u^2 + v^2)$ et $x = d(u^2 - v^2)$. Enfin, $y^2 = (z - x)(z + x) = 4d^2u^2v^2$ puis $y = 2duv$ puisque $y, d, u, v$ sont positifs.
Enfin, si $x, y, z$ sont non nuls mais pas forcément positifs, $(|x|, |y|, |z|)$ est encore solution de (E) de sorte que, quitte à permuter $x$ et $y$, il existe $(d, u, v) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $|x| = d(u^2 - v^2)$, $|y| = 2duv$ et $|z| = d(u^2 + v^2)$. On a quand même $(x, y, z)$ de la forme voulue quitte à

   - échanger $u$ et $v$ si $x < 0$, $y > 0$ et $z > 0$ ;

- changer $u$ en $-u$ si $x > 0$, $y < 0$ et $z > 0$ ;
- changer $d$ en $-d$, $u$ en $-v$ et $v$ en $u$ si $x > 0$, $y > 0$ et $z < 0$ ;
- changer $u$ en $-v$ et $v$ en $u$ si $x < 0$, $y < 0$ et $z > 0$ ;
- changer $d$ en $-d$ et échanger $u$ et $v$ si $x > 0$, $y < 0$ et $z < 0$ ;
- changer $d$ en $-d$ et $u$ en $-u$ si $x < 0$, $y > 0$ et $z < 0$ ;
- changer $d$ en $-d$ si $x < 0$, $y < 0$ et $z < 0$.

La première question permet donc de conclure que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{(d(u^2-v^2), 2duv, d(u^2+v^2)),\ (d,u,v)\in\mathbb{Z}^3\right\} \cup \left\{(2duv, d(u^2-v^2), d(u^2+v^2)),\ (d,u,v)\in\mathbb{Z}^3\right\}$$

# Problème 1

### Partie I – Cas particulier

1. $f_0 = g_0$ donc $f_0 \in G_2$. De même, $f_1 = g_1$ donc $f_1 \in G_2$. Enfin, $f_2 = 2g_2 - g_1$ donc $f_2 \in G_2$. Puisque $G_2$ est un sous-espace vectoriel, il est stable par combinaison linéaire. Ainsi $F_2 = \text{vect}(f_0, f_1, f_2) \subset G_2$.

2. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$. En particulier,
$$\begin{cases} \lambda_0 f_0(0) + \lambda_1 f_1(0) + \lambda_2 f_2(0) = 0 \\ \lambda_0 f_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_1 f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_2 f_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \lambda_0 f_0(\pi) + \lambda_1 f_1(\pi) + \lambda_2 f_2(\pi) = 0 \end{cases}$$
ou encore
$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$
On en déduit sans peine que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La famille $(f_0, f_1, f_2)$ est donc libre. Puisqu'elle engendre $F_2$, c'est une base de $F_2$ et $\dim F_2 = 3$.

3. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_0 g_0 + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 = 0$. En particulier,
$$\begin{cases} \lambda_0 g_0(0) + \lambda_1 g_1(0) + \lambda_2 g_2(0) = 0 \\ \lambda_0 g_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_1 g_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_2 g_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \lambda_0 g_0(\pi) + \lambda_1 g_1(\pi) + \lambda_2 g_2(\pi) = 0 \end{cases}$$
ou encore
$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 = 0 \\ \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$
On en déduit sans peine que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La famille $(g_0, g_1, g_2)$ est donc libre. Puisqu'elle engendre $G_2$, c'est une base de $G_2$ et $\dim G_2 = 3$.

4. Puisque $F_2 \subset G_2$ et $\dim F_2 = \dim G_2$, $F_2 = G_2$.

### Partie II – Une inclusion

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\cos((n+2)x) + \cos(nx) = 2\cos\frac{(n+2)x + nx}{2}\cos\frac{(n+2)x - nx}{2} = 2\cos((n+1)x)\cos x$$
Ainsi $f_{n+2} + f_n = 2f_{n+1}f_1$ ou encore $f_{n+2} = 2f_{n+1}f_1 - f_n$.

2. Tout d'abord, $f_0 \in G_0$ puisque $f_0 = g_0$ et $f_1 \in G_1$ puisque $f_1 = g_1$.
Supposons que $f_n \in G_n$ et $f_{n+1} \in G_{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. A fortiori, $f_n \in G_{n+2}$ puisque $G_n \subset G_{n+2}$. De plus, $f_{n+1} \in G_{n+1} = \text{vect}(g_0, \dots, g_{n+1})$ donc
$$f_{n+1}f_1 =\in \text{vect}(g_0\cos, \dots, g_{n+1}\cos) = \text{vect}(g_1, \dots, g_{n+2}) \subset G_{n+2}$$
Donc $f_{n+2} = 2f_{n+1}f_1 - f_n \in G_{n+2}$.
Par récurrence double, $f_n \in G_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f_k \in G_k$ et a fortiori, $f_k \in G_n$. $G_n$ étant stable par combinaison linéaire,
$$F_n = \text{vect}(f_0, \dots, f_n) \subset G_n$$

**Partie III – Utilisation de la dimension**

1. Par linéarisation, on trouve $\mathrm{I}_{k,l} = 0$ si $k \neq l$ et $\mathrm{I}_{k,l} = \pi$ si $k = l \neq 0$ et $\mathrm{I}_{0,0} = 2\pi$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$. Soit $l \in [\![0, n]\!]$. On a donc $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k f_l = 0$. En intégrant sur $[0, 2\pi]$, on obtient par linéarité de l'intégrale $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{I}_{k,l} = 0$ ou encore $\lambda_l = 0$ d'après la question précédente. Ainsi $\lambda_l = 0$ pour tout $l \in [\![0, n]\!]$. La famille $(f_0, \dots, f_n)$ est donc libre.

3. Puisque $(f_0, \dots, f_n)$ est libre et engendre $\mathrm{F}_n$, c'est une base de $\mathrm{F}_n$. Il s'ensuit que $\dim \mathrm{F}_n = n + 1$.

4. $(g_0, \dots, g_n)$ est une famille de $n + 1$ éléments engendrant $\mathrm{G}_n$. On a donc nécessairement $\dim \mathrm{G}_n \leq n + 1$.

5. Puisque $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{G}_n$, $\dim \mathrm{F}_n \leq \mathrm{G}_n$. Or $\dim \mathrm{F}_n = n + 1$ et $\dim \mathrm{G}_n \leq n + 1$ donc $\dim \mathrm{G}_n = \dim \mathrm{F}_n = n + 1$. Ainsi $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{G}_n$ et $\dim \mathrm{F}_n = \dim \mathrm{G}_n$ donc $\mathrm{F}_n = \mathrm{G}_n$.