Devoir à la maison n°07

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles.*
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

Partie I – Étude de deux suites

Soient a et b deux réels positifs. On considère désormais les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = a \qquad\qquad v_0 = b$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont alors bien définies et positives, ce que l'on ne demande pas de prouver.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant v_n$.

2. Déterminer le sens de variation des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2}$$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \frac{|v_1 - u_1|}{2^{n-1}}$$

5. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune que l'on notera $M(a,b)$.

Partie II – Propriétés de la moyenne arithmético-géométrique

Soient a et b deux réels positifs.

1. Montrer que $M(a,b) = M(b,a)$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$.

3. Montrer que $\sqrt{ab} \leqslant M(a,b) \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.

4. Montrer que $M(a,b) = M\left(\sqrt{ab}, \dfrac{a+b}{2}\right)$.

Partie III – Étude d'une fonction

On pose $F(x) = M(1,x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.
2. Montrer que F est positive sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
4. **a.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$\sqrt{x} \leqslant F(x) \leqslant \frac{1+x}{2}$$
b. Montrer que F est dérivable en 1 et calculer $F'(1)$.
5. **a.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$F(x) = \frac{1}{2}(1+x)F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$
b. En déduire que F est continue en 0. F est-elle dérivable en 0 ?
6. **a.** Préciser la limite de F en $+\infty$.
b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$F(x) = xF\left(\frac{1}{x}\right)$$
c. En déduire que $F(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$.
d. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$F(x) = \sqrt{x}F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$$
e. En déduire que $\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{=} o(F(x))$.
7. **a.** Écrire une fonction en Python d'arguments $x \in \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ donnant une valeur approchée de $F(x)$ à ε près.
b. Représenter sur le même graphe, les courbes représentatives des fonctions F, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \frac{1+x}{2}$. On effectuera si possible le tracé à l'aide du package `matplotlib` du langage Python ou, à défaut, à la main.

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $x + \tan x = n$ admet une unique solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On notera u_n cette solution.
2. Justifier que $u_n = \arctan(n - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la limite de (u_n).
3. Montrer que $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
5. Montrer que
$$\frac{1}{n-u_n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{\pi}{2n^2} + \frac{\pi^2-4}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
6. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de arctan.
7. En déduire un développement asymptotique à quatre termes de u_n.