Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 1 ★

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto te^{-3t^2}$
2. $t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^4}$
3. $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{th} t}$
4. $t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^3}$
5. $t \mapsto \dfrac{\sin(2t)}{1+\sin^2 t}$
6. $t \mapsto \tan^2 t$
7. $t \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan t}}$
8. $t \mapsto \dfrac{1}{t+\sqrt{t}}$
9. $t \mapsto \dfrac{\ln(\ln t)}{t}$
10. $t \mapsto e^{e^t+t}$
11. $t \mapsto \dfrac{1}{t+t(\ln t)^2}$
12. $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$

Exercice 2 ★

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer

1. $\mathrm{I}_{m,n} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\ \mathrm{d}t$
2. $\mathrm{J}_{m,n} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(mt)\sin(nt)\ \mathrm{d}t$
3. $\mathrm{K}_{m,n} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(mt)\sin(nt)\ \mathrm{d}t$

Exercice 3 ★

Calculer les intégrales suivantes.

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} x\sin x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \mathrm{J} = \int_0^1 \sqrt{e^x}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \mathrm{K} = \int_0^2 \frac{2^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2+2^x}}\,.$$

Exercice 4 ★★

Calculer les intégrales suivantes

$$\mathrm{A} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \mathrm{B} = \int_0^{\pi} (\sin x)^3\,\mathrm{d}x\,, \qquad \mathrm{C} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Exercice 5 ★

Déterminer une primitive de la fonction $f(x) = (\sin(2x))^3\cos(3x)$.

Exercice 6 ★

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(2x)^3\mathrm{d}x$.

Exercice 7 ★ **Calcul par morceaux**

Calculer, en fonction du nombre réel x, l'intégrale suivante

$$f(x) = \int_0^1 |x-t|\ \mathrm{d}t.$$

Exercice 8 ★ **Changements de variables**

Calculer :

1. $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2(t)}dt$ en posant $u = \tan(t)$;
2. $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$ en posant $u = \sqrt{x}$;
3. $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1}dx$ en posant $u = \sqrt{e^x-1}$;
4. $\mathrm{L} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+u+1}}$ en posant $x = \sqrt{u^2+u+1} - u$;
5. $\mathrm{M} = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos(x)}$ en posant $u = \sin(x)$;
6. $\mathrm{N} = \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin(x)}$ en posant $u = \cos(x)$;
7. $\mathrm{O} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^3(x)dx$ en posant $u = \cos(x)$;
8. $\mathrm{P} = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)dx}{1+\cos^2(x)}$ en posant $u = \cos(2x)$;
9. $\mathrm{Q} = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ en posant $x = \cos(2u)$;
10. $\mathrm{R} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+x^{1/4}}{\sqrt{x}+1}dx$ en posant $u = x^{1/4}$.

Exercice 9 ★★

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et H la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{H}(x) = \alpha\cos x + \sin x + 2$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que H ne s'annule pas.
2. On suppose la condtion précédente satisfaite et on pose pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{H}(t)}$. Justifier que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour $x \in]-\pi,\pi[$.
3. Calculer l'intégrale $\mathrm{F}(2\pi)$.

Exercice 10 ★★

Soient α et β deux réels strictement positifs. On définit une fonction f par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\alpha+\beta\cos^2 x}$$

1. Justifier que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On note F celle qui s'annule en 0.
2. Montrer que $\mathrm{F}(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Déterminer une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
4. Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{49-45\sin^2 t}$.

Exercice 11 ★★★ **TPE MP**

Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{a^2}^{b^2} x\sqrt{(x-a^2)(b^2-x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 12 ★

Calculer

1. $\displaystyle\int x\arctan^2(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int e^x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$ en posant $u=\ln x$
4. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}}$ en posant $u=\sqrt{1+x}$.
5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x}$

Exercice 13 ★★

On pose $\mathrm{S}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{C}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que S et C sont bien définies.
2. Montrer que $\mathrm{S}=\mathrm{C}$ par changement de variable.
3. Que vaut $\mathrm{S}+\mathrm{C}$? En déduire S et C.
4. En déduire $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}$.

Exercice 14 ★★ **Règles de Bioche**

Calculer

1. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{4-\cos^2 t}$ en posant $u=\cos t$;
2. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$ pour $x\in]0,\pi[$ en posant $u=\cos t$;
3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t}$ en posant $u=\sin t$;
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}$ en posant $u=\tan\frac{t}{2}$.

Exercice 15 ★★

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose

$$\mathrm{I}_n(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}$$

1. Déterminer une relation entre $\mathrm{I}_{n+1}(x)$ et $\mathrm{I}_n(x)$.
2. En déduire l'existence et une expression simple de $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{I}_n(x)$.

Exercice 16 ★

Calculer une primitive des fonctions suivantes.

1. $t\mapsto\dfrac{1}{1+t+t^2}$
2. $t\mapsto\dfrac{2-5t}{1+t^2}$
3. $t\mapsto\dfrac{3t+2}{2t^2-4t+3}$

Suites d'intégrales

Exercice 17 ★★

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{I}_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt.$$

1. Trouver une relation de récurrence entre I_{n-1} et I_n.
2. Calculer I_0 puis I_n pour tout $n\geqslant 0$.
3. Calculer I_n d'une autre manière et montrer que

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+3}\binom{n}{k}=2^{2n+2}\frac{n!(n+2)!}{(2n+4)!}.$$

Exercice 18 ★★

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \, \mathrm{d}x$.

1. Montrer que (I_n) converge vers 0.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
3. En déduire que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Exercice 19 ★★

On considère la suite de terme général $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

1. Déterminer la limite de (I_n).
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
3. On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer S_n en fonction de I_n.
4. En déduire la convergence et la limite de (S_n).

Exercice 20 ★★

Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$\mathrm{I}_{n,p} = \int_0^1 t^n (1-t)^p \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{I}_{n,p} = \frac{n}{p+1} \mathrm{I}_{n-1,p+1}$$

2. En déduire un expression de $\mathrm{I}_{n,p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21 ★★ **D'après Centrale PSI 2016**

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathrm{sh}(\alpha) = 1$.
2. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \int_0^\alpha \mathrm{sh}(t)^n \, \mathrm{d}t$. Déterminer le sens de variation de la suite (I_n).
3. Justifier que (I_n) converge. On ne cherchera pas à calculer sa limite pour l'instant.
4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (n+2)\mathrm{I}_{n+2} = \mathrm{ch}(\alpha) - (n+1)\mathrm{I}_n$$

5. En déduire la limite de la suite (I_n).

Fonctions intégrales

Exercice 22 ★

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Etablir la dérivabilité puis calculer la dérivée de la fonction ψ définie par

$$x \longmapsto \int_0^1 f(t+x) dt.$$

Exercice 23 ★

Justifier que $f : x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} \frac{t}{1+e^t} \, \mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 24 ★★★

Calculer les limites suivantes. On ne cherchera pas à calculer les intégrales.

1. $\lim_{x \to 0} \int_{-x}^{x} \sin(t^2)\, \mathrm{d}t$.
2. $\lim_{x \to +\infty} \int_{x}^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.
3. $\lim_{x \to +\infty} \int_{x}^{2x} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$.

Exercice 25 ★

On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f(t) = \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$$

1. Simplifier l'expression
$$\mathrm{F}(x) = \int_1^x f(t)\, \mathrm{d}t$$
2. Etudier les variations de F sur $\mathbb{R}_+^*$. Préciser les limites éventuelles de F en 0^+ et $+\infty$.
3. Tracer l'allure du graphe de F.

Exercice 26 ★★

Calculer pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t})\, \mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t})\, \mathrm{d}t$$