

DEVOIR SURVEILLÉ N°13

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

1. a. Le théorème fondamental de l'analyse nous apprend que F est une primitive de la fonction continue f . Ainsi F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- b. Supposons que f vérifie (E_1) . Via le changement de variable affine $u = x - t$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - \int_0^x (2x - u)f(u) du = 1 - 2xF(x) + \int_0^x uf(u) du$$

Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente, $x \mapsto \int_0^x uf(u) du$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Par opérations, f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

2. Supposons que f est solution de (\mathcal{P}) . En évaluant (E_1) en 0, on obtient $f(0) = 1$. On a montré à la question précédente que f était de classe \mathcal{C}^1 . De plus, en dérivant la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - 2xF(x) + \int_0^x uf(u) du$$

on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2F(x) - 2xF'(x) + xf(x) = -2F(x) - xf(x)$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + xf(x) + 2 \int_0^x f(u) du = 0$$

Ainsi f est solution de \mathcal{P}_1 .

Réciproquement, supposons que f est solution de (\mathcal{P}_1) . Comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , elle est a fortiori continue sur \mathbb{R} . Notons g la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = f(x) - 1 + \int_0^x (t + x)f(x - t) dt = f(x) - 1 + 2xF(x) + \int_0^x uf(u) du$$

Alors g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x) + xf(x) + 2F(x) = 0$$

Ainsi g est constante sur \mathbb{R} . De plus, $g(0) = 0$ donc f est nulle sur \mathbb{R} . Ainsi f est solution de (\mathcal{P}_1) .

3. Il suffit de constater que $F' = f$. D'après la question précédente, f est solution de (\mathcal{P}) si et seulement si $f = F'$ est solution de (\mathcal{P}) ce qui équivaut à F solution de (\mathcal{P}_2) .
4. a. Comme le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supposé infini, H est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme

$$\forall x \in \mathbb{R}, H'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, xH'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$$

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, H''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, H''(x) + xH'(x) + 2H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_n] x^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_n = 0$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+1}$$

De plus, $a_0 = H(0) = 0$ et $a_1 = H'(0) = 1$.

b. Comme $a_0 = 0$, la relation $a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+1}$ montre que $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n) \times (2n-2) \times \dots \times 2} a_1 = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n n!} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2/2)^n}{n!} = x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

5. On vérifie que $H : x \mapsto x e^{-\frac{x^2}{2}}$ est bien solution du problème (\mathcal{P}_2) . De plus, la solution de (\mathcal{P}_2) est unique. En effet, si F est solution de (\mathcal{P}_2) , on a nécessairement $F(0) = 0$ en évaluant la seconde relation en 0. Ainsi, toute solution de F est l'unique

solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0. \text{ Ainsi l'unique solution de } (\mathcal{P}) \text{ est } H : x \mapsto (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}. \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Solution 2

1. Soit $x \in J$. Puisque $x > 0$, la suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{1+nx}}$ est décroissante et de limite nulle. D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum f_n(x)$ converge. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur J .

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_{\infty, J} = \sup_{x \in J} \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série à termes positifs divergente donc $\sum \|f_n\|_{\infty, J}$ diverge également. Autrement dit, $\sum f_n$ ne converge pas normalement.

3. Comme la série $\sum f_n$ converge simplement sur J , il suffit de montrer que la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle sur J . Posons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$. D'après le critère spécial des séries alternées,

$$\forall x \in J, |R_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Ainsi

$$\|R_n\|_{\infty, J} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, J} = 0$ i.e. (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur J . Par conséquent, $\sum f_n$ converge uniformément sur J .

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{+\infty} f_n = 0$ et $\lim_{+\infty} f_0 = 1$. Comme $\sum f_n$ converge uniformément sur $J = [1, +\infty[$, on peut utiliser le théorème d'interversion série/limite :

$$\lim_{+\infty} \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n = 1$$

5. a. Il s'agit à nouveau du critère spécial des séries alternées.

b. Remarquons que

$$\forall x \in J, \varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right)$$

Remarquons que

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right| = \frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{\sqrt{1+nx} - \sqrt{nx}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{(\sqrt{1+nx} + \sqrt{nx})\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} \leq \frac{1}{2(nx)^{3/2}}$$

Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in J, \left| \varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2(nx)^{3/2}} = \frac{K}{x^{3/2}}$$

en posant $K = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. On en déduit bien que

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Solution 3

- Supposons qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ convergent. Par différence, $\int_a^{+\infty} \left(\frac{\lambda-f(t)}{t} - \frac{\lambda-f(t)}{t} \right) dt = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda-\mu}{t} dt$ converge. Comme $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, ceci n'est possible que si $\lambda - \mu = 0$ i.e. $\lambda = \mu$.
- D'après le théorème fondamental de l'analyse, H_λ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$ de dérivée $t \mapsto \lambda - f(t)$. Par ailleurs, $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$ de dérivée $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$. Par intégration par parties,

$$I(\lambda) = \left[\frac{H_\lambda(t)}{t} \right]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$$

Cette intégration par parties est légitime, car H_λ étant bornée, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t} = 0$. Ainsi

$$\left[\frac{H_\lambda(t)}{t} \right]_a^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t} - \frac{H_\lambda(a)}{a} = 0$$

puis

$$I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$$

- a. Posons $G_\lambda(x) = H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a déjà montré que H_λ était de classe \mathcal{C}^1 donc G_λ également et

$$\forall x \in \mathbb{R}, G'_\lambda(x) = H'_\lambda(x+T) - H'_\lambda(x) = (\lambda - f(x+T)) - (\lambda - f(x)) = f(x) - f(x+T) = 0$$

Ainsi G_λ est constante sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) &= G_\lambda(0) = H_\lambda(T) - H_\lambda(0) \\ &= \int_a^T (\lambda - f(t)) dt - \int_a^0 (\lambda - f(t)) dt \\ &= \int_0^T (\lambda - f(t)) dt \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= \lambda T - \int_0^T f(t) dt \end{aligned}$$

b. Par télescopage

$$H_\lambda(a+nT) - H_\lambda(a) = \sum_{k=0}^{n-1} H_\lambda(a+(k+1)T) - H_\lambda(a+kT) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda T - \int_0^T f(t) dt = n \left(\lambda T - \int_0^T f(t) dt \right)$$

Ainsi la suite $(H_\lambda(a+nT))$ est bornée si et seulement si $\lambda T - \int_0^T f(t) dt$ i.e. si et seulement si $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$.

c. Dans ce cas,

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_{\lambda_0}(x+T) - H_{\lambda_0}(x) = 0$$

Ainsi H_{λ_0} est T -périodique. Comme H_{λ_0} est continue, elle est bornée sur le segment $[0, T]$. Par T -périodicité, elle est bornée sur \mathbb{R} .

d. Remarquons que $\frac{H_{\lambda_0}(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$, donc $t \mapsto \frac{H_{\lambda_0}(t)}{t^2}$ également. Ainsi $I(\lambda_0)$ converge.

D'après la question 1, λ_0 est l'unique valeur de λ pour laquelle $I(\lambda)$ converge.

e. Soit $x \in [a, +\infty[$. Alors

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt = - \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt + \int_a^x \frac{\lambda_0}{t} dt = - \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt + \lambda_0(\ln x - \ln a)$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt = I(\lambda_0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda_0 \ln x = \pm\infty$ car $\lambda_0 \neq 0$. On en déduit que

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_0 \ln x$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $t \mapsto \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$ est continue sur $]0, \pi/2]$ et comme $\sin u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)} = n$. Ainsi $t \mapsto \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$ se prolonge en une application continue sur le segment $[0, \pi/2]$. L'intégrale A_n est donc bien définie. Le même argument montre également que B_n est bien définie.

5. On utilise le fait que $\sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$:

$$\varphi(t) = \frac{\sin(t) - t}{t \sin(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-t^3/6}{t^2} = -\frac{1}{6}$$

6. D'après la question précédente, φ est prolongeable par continuité sur le segment $[0, \pi/2]$. Elle y est donc bornée. Par inégalité triangulaire

$$|A_n - B_n| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(nt)| |\varphi(t)| dt \leq \frac{\pi}{2} \|\varphi\|_\infty$$

La suite $(A_n - B_n)$ est donc bornée.

7. Via le changement de variable linéaire $u = nt$,

$$B_n = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du = B_1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du$$

Remarquons que $|\sin|$ est π -périodique donc, avec les notations de la question 3 et $a = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) dt = \frac{2}{\pi} \neq 0$$

On en déduit que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{|\sin(u)|}{u} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_0 \ln(x) = \frac{2}{\pi} \ln(x)$$

et donc

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{n\pi}{2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln(n)}{\pi}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(n)}{\pi} = +\infty$,

$$B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln(n)}{\pi}$$

Puisque $(A_n - B_n)$ est bornée et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = +\infty$ d'après l'équivalent précédente,

$$A_n = B_n + (A_n - B_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln(n)}{\pi}$$

Solution 4

1.

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}(b' = 1 \mid b = 1) & 1 - p &= \mathbb{P}(b' = 0 \mid b = 1) \\ q &= \mathbb{P}(b' = 0 \mid b = 0) & 1 - q &= \mathbb{P}(b' = 1 \mid b = 0) \end{aligned}$$

2. On recherche $\mathbb{P}(b' = 1)$. Comme $\{b = 0\}$ et $\{b = 1\}$ forment un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne

$$\mathbb{P}(b' = 1) = \mathbb{P}(b' = 1 \mid b = 0)\mathbb{P}(b = 0) + \mathbb{P}(b' = 1 \mid b = 1)\mathbb{P}(b = 1) = (1 - q)(1 - \alpha) + p\alpha$$

3. On recherche $\mathbb{P}(b = 1 \mid b' = 1)$. D'après la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(b = 1 \mid b' = 1) = \frac{\mathbb{P}(b' = 1 \mid b = 1)\mathbb{P}(b = 1)}{\mathbb{P}(b' = 1)} = \frac{p\alpha}{(1 - q)(1 - \alpha) + p\alpha}$$

4. Si le bit envoyé est un 1, on compte le nombre de bits transmis avec succès (probabilité p pour chacun d'entre eux). On peut supposer les transmissions dans chacun des canaux indépendantes. Ainsi la loi de X conditionné par l'événement $\{b = 1\}$ est une loi binomiale de paramètres n et p :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k \mid b = 1) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

De même si le bit envoyé est 0, on compte le nombre de bits transmis avec erreur (probabilité $1 - q$ pour chacun d'entre eux). La loi de X conditionné par l'événement $\{b = 0\}$ est une loi binomiale de paramètres n et $1 - q$:

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k \mid b = 0) = \binom{n}{k} (1 - q)^k q^{n-k}$$

A nouveau, $\{b = 0\}$ et $\{b = 1\}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(X = k \mid b = 0)\mathbb{P}(b = 0) + \mathbb{P}(X = k \mid b = 1)\mathbb{P}(b = 1) \\ &= \binom{n}{k} (\alpha p^k (1 - p)^{n-k} + (1 - \alpha)(1 - q)^k q^{n-k}) \end{aligned}$$

5.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) = \alpha \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} + (1 - \alpha) \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} (1 - q)^k q^{n-k}$$

On reconnaît dans les deux sommes l'espérance de lois binomiales de paramètres respectifs (n, p) et $(n, 1 - q)$. Ainsi

$$\mathbb{E}(X) = \alpha np + (1 - \alpha)n(1 - q) = n(\alpha p + (1 - \alpha)(1 - q))$$

6. Il s'agit à nouveau de la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(b = 1 \mid X = k) &= \frac{\mathbb{P}(X = k \mid b = 1)\mathbb{P}(b = 1)}{\mathbb{P}(X = k)} \\ &= \frac{\alpha \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}}{\binom{n}{k} (\alpha p^k (1 - p)^{n-k} + (1 - \alpha)(1 - q)^k q^{n-k})} \\ &= \frac{\alpha p^k (1 - p)^{n-k}}{\alpha p^k (1 - p)^{n-k} + (1 - \alpha)(1 - q)^k q^{n-k}} \end{aligned}$$

7. On a donc $p = q$.

a. Dans ce cas,

$$\mathbb{P}(b = 1 \mid X = k) = \frac{\alpha p^k (1 - p)^{n-k}}{\alpha p^k (1 - p)^{n-k} + (1 - \alpha)(1 - p)^k p^{n-k}}$$

et donc

$$\mathbb{P}(b = 0 \mid X = k) = 1 - \mathbb{P}(b = 1 \mid X = k) = \frac{(1 - \alpha)(1 - p)^k p^{n-k}}{\alpha p^k (1 - p)^{n-k} + (1 - \alpha)(1 - p)^k p^{n-k}}$$

On cherche les $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que

$$\mathbb{P}(b = 1 \mid X = k) > \mathbb{P}(b = 0 \mid X = k)$$

Ceci équivaut à

$$\alpha p^k (1 - p)^{n-k} > (1 - \alpha)(1 - p)^k p^{n-k}$$

ou encore à

$$\left(\frac{p}{1-p}\right)^{2k} > \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\frac{p}{1-p}\right)^n$$

Par stricte croissance de \ln , ceci équivaut à

$$2k(\ln(p) - \ln(1-p)) > \ln(1-\alpha) - \ln(\alpha) + n(\ln(p) - \ln(1-p))$$

Puisque $p > \frac{1}{2}$, $p > 1-p$ et donc $\ln(p) - \ln(1-p) > 0$. La condition recherchée est donc

$$k > \frac{\ln(1-\alpha) - \ln(\alpha) + n(\ln(p) - \ln(1-p))}{2(\ln(p) - \ln(1-p))}$$

b. Si $\alpha = \frac{1}{2}$, cette condition se simplifie en $k > \frac{n}{2}$, ce qui est conforme à l'intuition.

8. a.

$$\begin{aligned} f(n) &= \mathbb{P}(\{b = 0\} \cap \{X > n/2\}) + \mathbb{P}(\{b = 1\} \cap \{X < n/2\}) \\ &= \sum_{n/2 < k \leq n} \mathbb{P}(X = k \mid b = 0) \mathbb{P}(b = 0) + \sum_{0 \leq k < n/2} \mathbb{P}(X = k \mid b = 1) \mathbb{P}(b = 1) \end{aligned}$$

En reprenant la question 4 dans le cas $p = q$, on obtient

$$\mathbb{P}(X = k \mid b = 0) = \mathbb{P}(X = k \mid b = 1) = \binom{n}{k} (p^k (1-p)^{n-k} + (1-p)^k p^{n-k})$$

Comme $\mathbb{P}(b = 0) = \mathbb{P}(b = 1) = \frac{1}{2}$,

$$f(n) = \frac{1}{2} \sum_{n/2 < k \leq n} \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k} + \frac{1}{2} \sum_{0 \leq k < n/2} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

En tenant compte de la symétrie des coefficients binomiaux, on peut simplifier :

$$f(n) = \sum_{0 \leq k < n/2} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

b. Vu la question suivante, il vaut mieux calculer la liste des $\binom{n}{k}$ pour un entier naturel n donné. On utilise la formule du triangle de Pascal.

```
def tab_bin(n):
    b=[1]
    for m in range(n):
        b.append(1)
        for k in range(m,0,-1):
            b[k]+=b[k-1]
    return b
```

Si l'on veut réellement le coefficient binomial $\binom{n}{k}$:

```
def binome(n,k):
    return tab_bin(n)[k]
```

c. Il est peut-être plus judicieux de passer p en paramètre.

```
def f(n,p):
    b=tab_bin(n)
    return sum(b[k]*p**k*(1-p)**(n-k) for k in range((n+1)//2))
```