

## Continuité

### Exercice 1

#### Point fixe de l'exponentielle complexe

Le but de cet exercice est de montrer l'existence de points fixes de l'exponentielle complexe, c'est-à-dire qu'il existe  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $e^z = z$ .

1. L'exponentielle admet-elle des points fixes sur  $\mathbb{R}$  ? On justifiera sa réponse.
2. Pour  $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , on pose

$$f(x) = \exp\left(\frac{x}{\tan x}\right) - \frac{x}{\sin x}$$

Déterminer les limites de  $f$  en 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .

3. En déduire qu'il existe  $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  tel que  $f(b) = 0$ .

4. On pose  $a = \frac{b}{\tan b}$  et  $z = a + ib$ . Montrer que  $e^z = z$ .

### Exercice 2

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une application continue telle que  $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}_+}$ . Déterminer  $f$ .

### Exercice 3 ★★

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application continue. Soit  $D$  une droite de  $\mathbb{R}^2$  et  $P^+$  et  $P^-$  les demi-plans de  $\mathbb{R}^2$  délimités par  $D$ . On suppose qu'il existe  $(a, b) \in I^2$  tel que  $f(a) \in P^+$  et  $f(b) \in P^-$ . Montrer qu'il existe  $c \in I$  tel que  $f(c) \in D$ .

### Exercice 4 ★★

Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $I = [a, b]$  telle que  $I \subset f(I)$ .

1. Montrer que  $f$  prend les valeurs  $a$  et  $b$  sur  $I$ .
2. En déduire que  $f$  admet un point fixe.

### Exercice 5 ★★

Soit  $f$  une fonction décroissante et continue sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  admet un unique point fixe.

## Dérivabilité

### Exercice 6 ★★★

#### Equation fonctionnelle de l'exponentielle matricielle

Déterminer les applications  $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dérivables en 0 vérifiant :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, M(s+t) = M(s)M(t)$$

### Exercice 7 ★★★

#### Banque Mines-Ponts MP 2019

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\text{tr}(A) > 0$ , et  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , telle que  $\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = Ax(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ .

Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle  $\ell$ , telle que  $\forall t \in \mathbb{R}, \ell(x(t)) = 0$ .

### Exercice 8 ★★

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ . Soient  $f$  et  $g$  deux applications de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  continues sur  $[a, b]$  et dérivables sur  $]a, b[$ . On pose pour  $x \in [a, b]$  :

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que  $\Delta$  est continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  et calculer  $\Delta'(x)$  pour  $x \in ]a, b[$ .
2. En déduire qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$(g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c)$$

**Exercice 9 ★★**

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f : \mathbb{R} \rightarrow E$  dérivable en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$$

Montrer que  $f$  est linéaire.

**Exercice 10 ★★**

On considère deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui commutent.

1. Montrer que  $A$  commute avec  $\exp(B)$ .
2. On considère l'application  $\varphi : t \in [0, 1] \mapsto \exp(t(A + B)) \exp(-tB) \exp(-tA)$ . Justifier que  $\varphi$  est dérivable et calculer sa dérivée.
3. En déduire que  $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$ .

**Exercice 11 ★★**

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c)$  est colinéaire à  $f(b) - f(a)$ .

**Exercice 12 ★★****Mouvement à force centrale**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^2$  tel que pour tout  $t \in I$ ,  $f(t)$  et  $f''(t)$  soient colinéaires. On suppose de plus qu'il existe  $t_0 \in I$  tel que  $(f(t_0), f'(t_0))$  est libre.

1. Montrer que  $f$  est à valeurs dans un plan vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . On pourra utiliser le produit vectoriel.
2. Montrer que l'aire orientée du triangle porté par les vecteurs  $f(t)$  et  $f'(t)$  est constante.

**Exercice 13 ★★**

Soit  $f : x \mapsto \arctan(x)$ .

1. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique polynôme  $P_{n-1}$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}.$$
2. Préciser le degré, la parité et le coefficient dominant de  $P_n$ .
3. Déterminer les limites de  $f^{(n)}$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  pour  $n \geq 1$ .
4. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , toutes les racines de  $P_n$  sont réelles et simples. Raisonner par récurrence en utilisant le théorème de Rolle.

**Exercice 14 ★★**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2n}}$$

2. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 15 ★★★****Centrale MP**

Soient  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $A$  et  $B$  deux points distincts de sa courbe représentative  $\mathcal{C}$  tels que  $B$  est sur la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $A$ . Montrer qu'il existe un point  $M$  de  $\mathcal{C}$ , distinct de  $A$ , tel que  $A$  est sur la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M$ .

**Intégration**

**Exercice 16 ★★★**

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  d'une norme d'algèbre  $\|\cdot\|$ . On se donne  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

1. On suppose dans cette question que  $\|A\| < 1$ . Montrer que  $I_n - A$  est inversible et que  $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ .
2. Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| > \|A\|$ . Montrer que  $zI_n - A$  est inversible et exprimer son inverse sous la forme d'une somme de série.
3. Soit  $r \in \mathbb{R}$  tel que  $r > \|A\|$ . Justifier que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\theta})^{k+1} (re^{i\theta} I_n - A)^{-1} d\theta = A^k$$

4. Justifier que

$$\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} re^{i\theta} \operatorname{com}(re^{i\theta} I_n - A)^{\top} d\theta$$

5. En déduire une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

**Exercice 17 ★★★**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f : [a, b] \rightarrow E$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

1. On suppose  $f(a) = 0$ . Montrer que

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{t \in [a, b]} \|f'(t)\|$$

2. On suppose maintenant que  $f(a) = f(b) = 0$ . Montrer que

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \frac{(b-a)^3}{4} \max_{t \in [a, b]} \|f'(t)\|$$

**Sommes de Riemann****Exercice 18**

Déterminer un équivalent de  $u_n = \sqrt{1}\sqrt{n-1} + \sqrt{2}\sqrt{n-2} + \dots + \sqrt{n-2}\sqrt{2} + \sqrt{n-1}\sqrt{1}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 19****X PC 2012**

Montrer que

$$X^{2n} - 1 = (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left( X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right)$$

En déduire pour  $r > 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln |1 - re^{i\theta}| d\theta$$

**Exercice 20**

1. On pose  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que la suite  $(S_n)$  converge vers un réel à préciser.
2. On pose  $u_n = \left( \frac{4^n n^n n!}{(2n)!} \right)^{\frac{1}{n}}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers un réel à préciser.

**Exercice 21 ★★★**

Soient  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

**Formules de Taylor**

**Exercice 22**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1]$  nulle en 0. On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$  pour  $n \geq 1$ . Etudier la limite de  $(S_n)$ . On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

**Exercice 23 ★★**

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tel que  $f(0) = 1$  et  $\forall x \geq \frac{1}{2}, f(x) = 0$ .

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{\mathbb{R}_+} |f^{(n)}| \geq 2^n n!$ .
2. Montrer que pour  $n \geq 1, \sup_{\mathbb{R}_+} |f^{(n)}| > 2^n n!$ .

**Exercice 24 ★★**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$ . On suppose de plus que :

$$\exists \lambda > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{\mathbb{R}} |f^{(n)}| \leq \lambda^n n!$$

Montrer que  $f$  est nulle sur  $\left]-\frac{1}{\lambda}; \frac{1}{\lambda}\right[$  puis sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 25 ★★****Formule de Taylor-Lagrange**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[a, b]$  et  $n + 1$  fois dérivable sur  $]a, b[$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

On appliquera le théorème de Rolle à la fonction  $\varphi$  définie par

$$\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k + A \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec une constante  $A$  bien choisie.

**Exercice 26 ★★**

On pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$  pour  $n \geq 1$ .

1. Soit  $f : x \mapsto \ln(1+x)$ . Déterminer par récurrence une expression de  $f^{(n)}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1, montrer que  $|u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3. En déduire la convergence et la limite de  $(u_n)$ .

**Exercice 27 ★★****Inégalité de Hadamard**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f, f'$  et  $f''$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$  et on pose

$$M_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \quad M_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| \quad M_2 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f''(t)|$$

On souhaite montrer que  $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$ .

1. Démontrer l'inégalité demandée dans le cas où  $M_0 = 0$  ou  $M_2 = 0$ . Dans la suite de l'énoncé on supposera  $M_0$  et  $M_2$  strictement positifs.
2. Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ . Justifier que

$$|f(x+h) - f(x) - f'(x)h| \leq \frac{M_2 h^2}{2}$$

3. En déduire que

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$$

4. Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs. On pose  $g : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{a}{t} + bt$ . Étudier les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . En déduire que  $g$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}_+^*$  et calculer celui-ci en fonction de  $a$  et  $b$ .
5. Conclure.

**Exercice 28 ★★★****Fonctions absolument monotones**

Soient  $R > 0$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  avec  $I = ]-R, R[$ . On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in I$ , on pose  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$  et  $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$ .

1. Soit  $r \in ]0, R[$  et  $x \in ]-r, r[$ . Montrer que  $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}} R_n(r)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. En déduire que pour tout  $x \in I$ ,  $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(x)$ .

**Exercice 29 ★★★**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1]$  nulle en 0. On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$  pour  $n \geq 1$ . Etudier la limite de  $(S_n)$ . On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

**Exercice 30**

On considère la fonction  $g : x \in ]0, 1] \mapsto x \ln(x)$ .

1. Montrer que  $g$  est prolongeable par continuité en 0. On note encore  $g$  ce prolongement.
2. Etudier brièvement les variations de  $g$  sur  $[0, 1]$ .
3. On définit la suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $t_0 \in \left] \frac{e^{-1}}{3}, e^{-1} \right[$  et  $t_{n+1} = -g(t_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_0 \leq t_n \leq e^{-1}$ .
4. Montrer que pour tout  $x \in [t_0, e^{-1}]$ ,

$$|g(x) - g(e^{-1})| \leq \frac{|x - e^{-1}|^2}{2t_0}$$

5. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$|t_n - e^{-1}| \leq 2t_0 \left( \frac{e^{-1} - t_0}{2t_0} \right)^{2^n}$$

6. En déduire la limite de la suite  $(t_n)$ .

**Courbes paramétrées****Exercice 31 ★★**

Etudier la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2 - 1} \\ y(t) = \frac{t^2}{t - 1} \end{cases}$$

puis montrer qu'elle admet un point double en lequel ses tangentes sont orthogonales.

**Exercice 32 ★**

---

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe paramétrée par  $\begin{cases} x(t) = t \ln t \\ y(t) = \frac{\ln t}{t} \end{cases}, t \in \mathbb{R}_+^*.$

1. Comparer  $M(t)$  et  $M(\frac{1}{t})$ . En déduire le domaine d'étude.
2. Acheter l'étude et représenter  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 33 ★★★**

---

1. Etudier la courbe  $\mathcal{C}$  paramétrée par  $\begin{cases} x(t) = 4t^3 \\ y(t) = 3t^4 \end{cases}.$
2. Déterminer l'ensemble des points par lesquels passent deux tangentes à  $\mathcal{C}$  perpendiculaires entre elles. Représenter cet ensemble de points.