Devoir à la maison n°7 : corrigé

Problème 1 — Densité parmi les entiers

Partie I –

1. **a.** On a clairement $\nu_n(\mathbb{N}^*) = n$ et donc $\delta_n(\mathbb{N}^*) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $\delta_n(\mathbb{N}^*) = 1$.

b. Comme E est fini, il admet un plus grand élément. Posons $N = \max E$. Pour $n \geqslant N$, $\nu_n(E) = N$ et donc $\delta_n(E) = \frac{N}{n}$. On en déduit que $\delta(E) = 0$.

c. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\nu_{2k}(2\mathbb{N}) = k$ et $\nu_{2k+1}(2\mathbb{N}) = k+1$. Par conséquent, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{2} \leqslant \nu_n(2\mathbb{N}) \leqslant \frac{n+1}{2}$ et donc $\frac{1}{2} \leqslant \delta_n(2\mathbb{N}) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$. Par encadrement, $\delta(2\mathbb{N}) = \frac{1}{2}$.

d. Les carrés compris entre 1 sont de la forme k^2 avec $1 \leqslant k^2 \leqslant n$ i.e. $1 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}$. On a donc $\nu_n(C) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. On en déduit l'encadrement $\frac{\sqrt{n}-1}{n} < \delta_n(C) \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n}$. Par encadrement, $\delta(C) = 0$.

e. On a $A \cap [\![1, 2^{2n}]\!] = \bigcup_{k=0}^{n-1}]\!]2^{2k}, 2^{2k+1}]\!]$. Comme $\operatorname{card}\left(]\!]2^{2k}, 2^{2k+1}]\!]\right) = 2^{2k}$,

$$\nu_{2^{2n}}(A) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{2k} = \frac{2^{2n}-1}{3}$$

On a également $A \cap [\![1, 2^{2n+1}]\!] = \bigcup_{k=0}^{n}]\!]2^{2k}, 2^{2k+1}]\!]$. Donc

$$\nu_{2^{2n+1}}(A) = \sum_{k=0}^{n} 2^{2k} = \frac{2^{2(n+1)}-1}{3}$$

On a donc $\delta_{2^{2n}}(A) = \frac{2^{2n}-1}{3.2^{2n}}$ et $\delta_{2^{2n+1}}(A) = \frac{2^{2n+2}-1}{3.2^{2n+1}}$. On en déduit que les suites $(\delta_{2^{2n}}(A))$ et $(\delta_{2^{2n+1}}(A))$ convergent respectivement vers $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Comme ce sont des suites extraites de $(\delta_n(A))$, cette suite ne converge pas. Ainsi A n'a pas de densité.

f. Remarquons qu'il existe 9^k entiers à k chiffres ne comportant pas de zéro dans leur écriture décimale. On en déduit que pour $p \geqslant 1$, $\nu_{10^p} = \sum_{k=1}^{p} 9^k = \frac{9^{p+1}-1}{8}$. Soit n un entier et posons $p = \lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$ de sorte que $n \leqslant 10^p$. On a donc

$$0 \leqslant \nu_n(D) \leqslant \frac{9^{p+1}-1}{8} \leqslant \frac{9^{\log_{10}(n)+2}-1}{8} = \frac{81n^{\log_{10}(9)}-1}{8}$$

Par conséquent

$$0 \leqslant \delta_n(D) \leqslant \frac{81n^{\log_{10}(9)}-1}{8n}$$

Comme $\log_{10}(9) < 1$, on a par encadrement $\delta(D) = 0$.

2. **a.** $A \cap [\![1, a_n]\!] = \{a_1, \dots, a_n\}$ donc $\nu_{a_n}(A) = n$.

b. La suite $(\delta_{a_n}(A))$ est une suite extraite de la suite $(\delta_n(A))$ car la suite (a_n) est strictement croissante. Elle possède donc la même limite $\delta(A)$. Il suffit de remarquer que $\delta_{a_n}(A) = \dfrac{n}{a_n}$.

c. Si $A \cap [\![1, n]\!] = \varnothing$, alors $\nu_n(A) = 0$. De plus, cela signifie qu'aucun des a_n n'appartient à $[\![1, n]\!]$. En particulier, $a_1 > n$. Sinon $A \cap [\![1, n]\!] = \{a_1, \dots, a_k\}$. Comme $k = \operatorname{card}(\{a_1, \dots, a_k\})$, on a donc $k = \nu_n(A)$. Or $a_k \in [\![1, n]\!]$ donc $a_{\nu_n(A)} \leqslant n$. De plus, $a_{k+1} \notin [\![1, n]\!]$ donc $a_{\nu_n(A)+1} > n$.

d. D'après la question précédente, $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{a_{\nu_n(A)}}$ puis $\frac{\nu_n(A)}{n} \leqslant \frac{\nu_n(A)}{a_{\nu_n(A)}}$.
De même, $\frac{1}{a_{\nu_n(A)+1}} < \frac{1}{n}$ puis $\frac{\nu_n(A)+1}{a_{\nu_n(A)+1}} < \frac{\nu_n(A)+1}{n}$ et enfin $\frac{\nu_n(A)+1}{a_{\nu_n(A)+1}} - \frac{1}{n} < \frac{\nu_n(A)}{n}$.
La suite $(\nu_n(A))$ est croissante et non majorée puisque A est infini : elle diverge donc vers $+\infty$. Comme la suite $\left(\frac{n}{a_n}\right)$ converge vers l, les suites $\left(\frac{\nu_n(A)}{a_{\nu_n(A)}}\right)$ et $\left(\frac{\nu_n(A)+1}{a_{\nu_n(A)+1}}\right)$ convergent également vers l. Par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\nu_n(A)}{n} = l$ i.e. $\delta(A) = l$.

3. On utilise le résultat de la question précédente.

a. Posons $a_n = p + nq$ de sorte que $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. La suite (a_n) est strictement croissante car $q > 0$. On a donc $\delta(A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a_n} = \frac{1}{q}$.

b. Posons $a_n = \lfloor n\alpha \rfloor$. On a $a_n \leqslant n\alpha$ et $a_{n+1} > (n+1)\alpha - 1 \geqslant n\alpha$ car $\alpha \geqslant 1$. Ainsi la suite (a_n) est strictement croissante. Comme $(n-1)\alpha < a_n \leqslant n\alpha$, $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\alpha$. Donc $\delta(A) = \lim \frac{n}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$.

Partie II –

1. Notons $A_n = A \cap [\![1, n]\!]$ et $B_n = B \cap [\![1, n]\!]$. On sait que

$$\operatorname{card}(A_n) + \operatorname{card}(B_n) = \operatorname{card}(A_n \cup B_n) + \operatorname{card}(A_n \cap B_n)$$

c'est-à-dire $\nu_n(A) + \nu_n(B) = \nu_n(A \cup B) + \nu_n(A \cap B)$. On en déduit que $\delta_n(A) + \delta_n(B) = \delta_n(A \cup B) + \delta_n(A \cap B)$. Si trois de ces suites ont une limite, alors la quatrième également et dans ce cas, $\delta(A) + \delta(B) = \delta(A \cap B) + \delta(A \cup B)$.

2. Si A et B sont disjoints, alors $A \cap B = \varnothing$ possède une densité nulle. D'après la question précédente, $A \cup B$ possède une densité et $\delta(A \cup B) = \delta(A) + \delta(B)$.

3. $A \cup \overline{A} = \mathbb{N}^*$ possède une densité égale à 1. $A \cap \overline{A} = \varnothing$ possède une densité nulle. On en déduit que $\overline{A}$ possède une densité et que $\delta\left(\overline{A}\right) = 1 - \delta(A)$.

4. Soit A un ensemble négligeable et $B \subset A$. On a donc $0 \leqslant \nu_n(B) \leqslant \nu_n(B)$ puis $0 \leqslant \delta_n(B) \leqslant \delta_n(A)$. Par encadrement, B possède une densité et $\delta(B) = 0$. Donc B est également négligeable.

5. $A \cap B$ est une partie de B donc est négligeable i.e. possède une densité nulle. Comme A et B possèdent également une densité, $A \cup B$ possède une densité et $\delta(A \cup B) = \delta(A) + \delta(B) - \delta(A \cap B) = \delta$.

Partie III –

1. Si (u_n) converge, (u_{p_n}) converge également vers la même limite puisque (p_n) diverge vers $+\infty$.
Réciproquement supposons que (u_{p_n}) converge vers une limite l. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $K \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \geqslant K \implies \|u_{p_k} - l\| < \varepsilon$. Posons $N = p_K$ et donnons-nous $n \geqslant N$. Notons $E = \{k \in \mathbb{N}^* \mid p_k > n\}$. E est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ puisque (p_k) diverge vers $+\infty$. Elle possède donc un plus petit élément. Posons $k_0 = \min E - 1$. On a donc $p_{k_0} \leqslant n < p_{k_0+1} \leqslant p_{k_0} + 1$. D'où $n = p_{k_0}$. De plus, $p_K \geqslant n$ donc $K \notin E$. Ainsi $K < \min E$ i.e. $K \leqslant \min E - 1 = k_0$. Ainsi

$$\|u_n - l\| = \|u_{p_{k_0}} - l\| < \varepsilon$$

On en déduit la convergence de (u_n) vers l.

2. Comme B est infini, B est non vide. On a donc $\nu_n(B) \geqslant 1$ pour n suffisamment grand.

$$\delta_n(A \cap B) = \frac{\nu_n(A \cap B)}{n} = \frac{\nu_n(A \cap B)}{\nu_n(B)} \frac{\nu_n(B)}{n}$$

Or $\nu_n(A \cap B) = \operatorname{card}(A \cap B \cap [\![1, n]\!] = \operatorname{card}(A \cap \{b_1, \dots, b_{\nu_n(B)}\}$ puisque $\operatorname{card}(B \cap [\![1, n]\!]) = \nu_n(B)$. Finalement, $\delta_n(A \cap B) = \delta_{\nu_n(B)}(A|B)\delta_n(B)$.

Comme $(\delta_n(B))$ a une limite non nulle, on peut écrire $\delta_{\nu_n(B)}(A|B) = \frac{\delta_n(A \cap B)}{\delta_n(B)}$ à partir d'un certain rang. On en déduit que la suite $(\delta_{\nu_n(B)}(A|B))$ converge vers $\dfrac{\delta(A\cap B)}{\delta(B)}$. Enfin, $\nu_{n+1}(B) = \nu_n(B)$ si $n+1 \notin B$ et $\nu_{n+1}(B) = \nu_n(B)+1$ si $n+1 \in B$. On a donc $\nu_n(B) \leqslant \nu_{n+1}(B) \leqslant \nu_n(B)+1$. D'après le lemme, $\delta_n(A|B)$ converge également vers $\dfrac{\delta(A\cap B)}{\delta(B)}$. Ainsi A possède une densité relative par rapport à B et celle-ci vaut $\dfrac{\delta(A\cap B)}{\delta(B)}$.

3. **a.** Soient A un ensemble négligeable et B un ensemble possédant une densité. Comme $A\cap B$ est une partie de A, on déduit de la question **II.4** que $A\cap B$ est également négligeable. On a donc $\delta(A\cap B) = \delta(A)\delta(B) = 0$.

   b. Si A et B sont indépendants, alors A, B et $A\cap B$ possèdent une densité et $\delta(A\cap B) = \delta(A)\delta(B)$. D'après la question **III.2**, A possède une densité relative dans B et $\delta(A|B) = \dfrac{\delta(A\cap B)}{\delta(B)} = \delta(A)$.

   Réciproquement, si A possède une densité relative dans B et $\delta(A|B) = \delta(A)$, $A\cap B$ possède une densité et $\delta(A\cap B) = \delta(A|B)\delta(B) = \delta(A)\delta(B)$ d'après la question **III.2**. Ainsi A et B sont indépendants.

4. Comme $M_p = \{pn, n\in\mathbb{N}^*\}$, $\delta(M_p) = \frac{1}{p}$ d'après la question **I.2**. $M_p\cap M_q$ est l'ensemble des multiples communs de p et q donc $M_p\cap M_q = M_{p\vee q}$ où $p\vee q$ désigne le ppcm de p et q. Ainsi M_p et M_q sont indépendants *si et seulement si* $\frac{1}{p\vee q} = \frac{1}{pq}$ i.e. $p\vee q = pq$, ce qui équivaut à p et q premiers entre eux.

5. Supposons que A soit négligeable. A_B est une partie de A donc est également négligeable. Ainsi $\delta(A_B) = \delta(A)\delta(B) = 0$. Supposons maintenant que A n'est pas négligebale. Puisque $A_B\cap\{a_1,\dots,a_n\} = \{a_{b_k} \mid b_k \leqslant n\}$, $\operatorname{card}(A_B\cap\{a_1,\dots,a_n\}) = \operatorname{card}(\{B\cap[\![1,n]\!]\}) = \nu_n(B)$. Ainsi $\delta_n(A_B|A) = \dfrac{\nu_n(B)}{n} = \delta_n(B)$. Ainsi A_B possède une densité dans A et $\delta(A_B|A) = \delta(B)$. En reprenant le raisonnement de la question **III.2**, on montre que $\delta_n(A_B\cap A) = \delta_{\nu_n(A)}(A_B|A)\delta_n(A)$ i.e. $\delta_n(A_B) = \delta_{\nu_n(A)}(A_B|A)\delta_n(A)$. On en déduit que A_B possède une densité et que $\delta(A_B) = \delta(A_B|A)\delta(A) = \delta(B)\delta(A)$.

   Remarque. On peut aussi utiliser la question **I.2**. En effet, la suite (a_{b_n}) est croissante et $\dfrac{n}{a_{b_n}} = \dfrac{b_n}{a_{b_n}}\dfrac{n}{b_n}$. La suite $\left(\dfrac{b_n}{a_{b_n}}\right)$ est extraite de la suite $\left(\dfrac{n}{a_n}\right)$ et converge donc vers $\delta(A)$. Par ailleurs, la suite $\left(\dfrac{n}{b_n}\right)$ converge vers $\delta(B)$. Ainsi la suite $\left(\frac{n}{a_{b_n}}\right)$ converge vers $\delta(A)\delta(B)$, ce qui prouve que A_B possède une densité égale à $\delta(A)\delta(B)$. ■

Partie IV –

1. **Première méthode**

   Montrons par récurrence sur k que pour tout k-uplet d'ensembles $(B_1,\dots,B_k)$ vérifiant

$$(*) \qquad \forall I\subset[\![1,k]\!],\ \bigcap_{i\in I} B_i \text{ a une densité et } \delta\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \prod_{i\in I}\delta(B_i)$$

$\displaystyle\bigcap_{i=1}^k \overline{B_i}$ possède une densité et $\displaystyle\delta\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{B_i}\right) = \prod_{i=1}^k \delta(\overline{B_i})$.

L'initialisation au rang $k=1$ est évidente. Supposons la propriété vraie à un rang $k\in\mathbb{N}^*$ et montrons-la au rang $k+1$. Soit donc $(B_1,\dots,B_{k+1})$ un k+1-uplet d'ensembles vérifiant la propriété $(*)$. Montrons que le k-uplet $(B_1,\dots,B_{k-1},B_k\cup B_{k+1})$ vérifie également la propriété $(*)$. Il suffit de vérifier que pour $I\subset[\![1,k-1]\!]$, $\displaystyle\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)\cap(B_k\cup B_{k+1})$ admet une densité et que

$$\delta\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)\cap(B_k\cup B_{k+1}) = \left(\prod_{i\in I}\delta(B_i)\right)\delta(B_k\cup B_{k+1})$$

Soit donc $I\subset[\![1,k-1]\!]$. On a

$$\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)\cap(B_k\cup B_{k+1}) = \left(\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)\cap B_k\right)\cup\left(\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)\cap B_{k+1}\right)$$

Or $\displaystyle\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)\cap B_k$ et $\displaystyle\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)\cap B_{k+1}$ ont une densité et

$$\left(\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)\cap B_k\right)\cap\left(\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)\cap B_{k+1}\right) = \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)\cap B_k\cap B_{k+1}$$

a donc également une densité. De plus,

$$\begin{aligned}
\delta\left(\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)\cap(B_k\cup B_{k+1})\right) &= \delta\left(\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)\cap B_k\right)+\delta\left(\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)\cap B_{k+1}\right)\\
&\quad -\delta\left(\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)\cap B_k\cap B_{k+1}\right)\\
&= \left(\prod_{i\in I}\delta(B_i)\right)(\delta(B_k)+\delta(B_{k+1})-\delta(B_k)\delta(B_{k+1}))\\
&= \left(\prod_{i\in I}\delta(B_i)\right)(\delta(B_k)+\delta(B_{k+1})-\delta(B_k\cap B_{k+1}))\\
&= \left(\prod_{i\in I}\delta(B_i)\right)\delta(B_k\cup B_{k+1})
\end{aligned}$$

en appliquant $(*)$ en remplaçant I par $I\cup k, I\cup\{k+1\}$ et $\{k,k+1\}$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence au k-uplet $(B_1,\dots,B_{k-1},B_k\cup B_{k+1})$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\delta(\overline{B_1}\cap\dots\cap\overline{B_{k+1}} &= \delta(\overline{B_1}\cap\dots\cap\overline{B_{k-1}}\cap\overline{B_k\cup B_{k+1}})\\
&= \delta(\overline{B_1})\dots\delta(\overline{B_{k-1}})\delta(\overline{B_k\cup B_{k+1}})
\end{aligned}$$

Or en utilisant $(*)$ en remplaçant I par $\{k,k+1\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\delta(\overline{B_k\cup B_{k+1}}) &= 1-\delta(B_k\cup B_{k+1}) = 1-\delta(B_k)-\delta(B_{k+1})+\delta(B_k\cap B_{k+1})\\
&= 1-\delta(B_k)-\delta(B_{k+1})+\delta(B_k)\delta(B_{k+1}) = (1-\delta(B_k))(1-\delta(B_{k+1})) = \delta(\overline{B_k})\delta(\overline{B_{k+1}})
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.
Il suffit enfin de remarquer que $(A_1,\dots,A_k)$ vérifie $(*)$ puisque pour $I\subset[\![1,k]\!]$, $\bigcap_{i\in I} A_i = \{np_1 \mid \in\mathbb{N}^*\}$ admet une densité et que

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \frac{1}{\prod_{i\in I} p_i} = \prod_{i\in I}\delta(A_i)$$

On en déduit que

$$\delta\left(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}\right) = \prod_{i=1}^{k}\delta(\overline{A_i}) = \prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

Seconde méthode
Rappelons tout d'abord que $\delta(A_i)=\frac{1}{p_i}$ pour tout $i\in\mathbb{N}^*$.
On fait l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\mathrm{HR}(k) : \bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i} \text{ admet une densité et } \delta\left(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}\right) = \prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right).$$

L'initialisation au rang $k=1$ est évidente. Supposons donc $\mathrm{HR}(k)$ pour un certain $k\in\mathbb{N}^*$.
On montre d'abord que $\bigcap_{i=1}^{k+1}\overline{A_i}$ possède une densité dans A_{k+1}.

$$\delta_n\left(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}|A_k\right) = \frac{\operatorname{card}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}\right)\cap\{jp_{k+1}\mid 1\leqslant j\leqslant n\}\right)}{n}$$

Or un entier de la forme jp_{k+1} n'est pas multiple de $p_1,\dots,p_k$ *si et seulement si* j n'est pas multiple de $p_1,\dots,p_k$. Autrement dit,

$$\operatorname{card}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}\right)\cap\{jp_{k+1}\mid 1\leqslant j\leqslant n\}\right) = \nu_n\left(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}\right)$$

On a donc $\delta_n\left(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}|A_k\right) = \delta_n\left(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}\right)$. Ainsi $\bigcap_{i=1}^{k+1}\overline{A_i}$ possède une densité dans A_{k+1} et $\delta\left(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}|A_k\right) = \delta\left(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}\right)$.

On en déduit ensuite que $\left(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}\right)\cap A_{k+1}$ possède une densité et que $\delta\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}\right)\cap A_{k+1}\right) = \delta\left(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}\right)\delta(A_{k+1})$.

Puisque $\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}$ est l'union disjointe de $\bigcap_{i=1}^{k+1}\overline{A_i}$ et $\left(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}\right)\cap A_{k+1}$ et que ces trois ensembles possèdent une densité :

$$\begin{aligned}\delta\left(\bigcap_{i=1}^{k+1}\overline{A_i}\right) &= \delta\left(\bigcap_{i=1}^{k+1}\overline{A_i}\right) - \delta\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}\right)\cap A_{k+1}\right)\\ &= \delta\left(\bigcap_{i=1}^{k+1}\overline{A_i}\right)(1-\delta(A_{k+1}) = \prod_{i=1}^{k+1}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\end{aligned}$$

2. Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Soit p_k le plus grand nombre premier et M la plus grande puissance intervenant dans les décompositions en facteurs premiers des entiers de 1 à N. Pour $i\in[\![1,k]\!]$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{p_i^m} \geqslant \sum_{m=0}^{M}\frac{1}{p_i^m}$$

On en déduit que

$$\frac{1}{P_k} = \prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} \geqslant \prod_{i=1}^{k}\sum_{m=0}^{M}\frac{1}{p_i^m} = \sum_{(m_1,\dots,m_k)\in[\![0,M]\!]^k}\frac{1}{p_1^{m_1}\dots p_k^{m_k}}$$

Par définition de k et M, on retrouve tous les entiers de 1 à N parmi les entiers $p_1^{m_1}\dots p_k^{m_k}$ lorsque $m_1,\dots,m_k$ décrivent $[\![0,M]\!]$. Ainsi $\frac{1}{P_k}\geqslant\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n}$. On démontre classiquement que la suite $\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$. Ceci montre que la suite $\left(\frac{1}{P_k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée. Par ailleurs, cette suite est croissante puisque pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, $0<1-\frac{1}{p_i}<1$. On en déduit que $\left(\frac{1}{P_k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$, ce qui prouve que la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

3. Pour $j\geqslant k+1$, p_j est premier avec les p_i pour $1\leqslant i\leqslant k$ donc appartient à $\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}$. On a donc $\nu_n(\mathbb{P})\leqslant k+\nu_n\left(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}\right)$ dès que $n>p_k$. Ainsi $\delta_n(\mathbb{P})\leqslant\frac{k}{n}+\delta_n\left(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{A_i}\right)$ pour $n>p_k$. En passant à la limite supérieure, on obtient l'inégalité demandée.

4. Puisque $\limsup_{n\to+\infty}\delta_n(\mathbb{P})\leqslant P_k$, on a en faisant tendre k vers $+\infty$, $\limsup_{n\to+\infty}\delta_n(\mathbb{P})\leqslant 0$. Comme par ailleurs, $\delta_n(\mathbb{P})\geqslant 0$ pour tout $n\geqslant 1$, on a également $\liminf_{n\to+\infty}\delta_n(\mathbb{P})\geqslant 0$. Puisque $\liminf_{n\to+\infty}\delta_n(\mathbb{P})\leqslant\limsup_{n\to+\infty}\delta_n(\mathbb{P})$, on a $\limsup_{n\to+\infty}\delta_n(\mathbb{P})=\limsup_{n\to+\infty}\delta_n(\mathbb{P})=0$ et donc $(\delta_n(\mathbb{P}))$ converge vers 0, ce qui signifie que $\mathbb{P}$ est de densité nulle.