Devoir à la maison n°5 : corrigé

Problème 1 — Fonction Γ

Partie I –

1. $\forall t > 0, g_a(t) = e^{a \ln t}$.
Si $a > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} a \ln(t) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{t \to 0} g_a(t) = 0$.
Si $a = 0$, alors $\forall t > 0,\ g_a(t) = 1$ et donc $\lim\limits_{t \to 0} g_a(t) = 1$.
Ainsi, dans tous les cas, g_a a une limite finie en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $g_a(0) = 0$ pour $a > 0$, ou $g_0(0) = 1$.
Soit $a \geqslant 1$. Sur $]0; +\infty[$, g_a est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall t > 0,\ g_a'(t) = \dfrac{a}{t} t^a = a t^{a-1} = a g_{a-1}(t)$.
Or $a \geqslant 1$ et donc g_a' a une limite finie en 0 (voir étude de g_a).
Ainsi g est continue sur $[0; +\infty[$, g_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et g_a' a une limite finie en 0.
Alors, par application du théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, g_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$ et $g_a' = a g_{a-1}$.

2. $t \mapsto 1 - t$ est continue sur $[0, 1]$ à valeur dans $[0, 1]$ et g_b est continue sur $[0, 1]$ donc $t \mapsto g_b(1 - t)$ est continue sur $[0; 1]$ comme composée de fonctions continues. Alors $I(a, b)$ est l'intégrale au sens de Riemann de la fonction $t \mapsto g_a(t) g_b(1 - t)$ continue sur $[0; 1]$.
Posons $u = 1 - t$. Alors $I(a, b) = \displaystyle\int_1^0 g_a(1 - u) g_b(u)(-du) = I(b, a)$.

3. $I(a + 1, b) = \displaystyle\int_0^1 g_{a+1}(t) g_b(t) dt$, avec g_{a+1} et g_{b+1} de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$. Intégrons alors par parties :

$$I(a+1, b) = \left[-\frac{1}{b+1} t^{a+1} (1-t)^{b+1} \right]_0^1 + \frac{a+1}{b+1} \int_0^1 t^a (1-t)^{b+1} dt$$

$a + 1$ et $b + 1$ sont supérieurs à 1, on déduit $g_{a+1}(0) = g_{b+1}(0) = 0$. Ainsi $I(a + 1, b) = \dfrac{a+1}{b+1} I(a, b + 1)$ ou encore

$$\boxed{\frac{I(a+1, b)}{a+1} = \frac{I(a, b+1)}{b+1}}.$$

4. Tout d'abord, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $I(a, 0) = \displaystyle\int_0^1 t^a dt = \frac{1}{a+1}$. On formule l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\mathcal{P}_n :\ \forall a \in \mathbb{R}_+,\ I(a, n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)}$$

Tout d'abord, $\mathcal{P}_0$ est vraie puisque $I(a, 0) = \frac{1}{a+1}$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit alors $a \in \mathbb{R}_+$. D'après la question précédente,

$$I(a, n+1) = \frac{n+1}{a+1} I(a+1, n)$$

et d'après $\mathcal{P}_n$ [1],

$$I(a+1, n) = \frac{n!}{(a+2)(a+3)\cdots(a+n+2)}$$

Il en découle que

$$I(a, n+1) = \frac{(n+1)n!}{(a+1)(a+2)(a+3)\cdots(a+n+2)} = \frac{(n+1)!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n+2)}$$

Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est-elle vraie.
Par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Notez l'importance du «$\forall a \in \mathbb{R}_+$» dans cette hypothèse de récurrence

5. Pour p et q entiers naturels,
$I(p,q) = \dfrac{q!}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q+1)} = \dfrac{p!}{p!}\dfrac{q!}{(p+1)\cdots(p+q+1)} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

6. Posons $u = \sin^2\theta$; alors $du = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$ et $(\cos\theta)^{2q} = (\cos^2\theta)^q = (1-u)^q$.
Donc $J(p,q) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 u^p(1-u)^q du = \dfrac{1}{2}I(p,q)$.

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p+1}(\cos\theta)^{2q+1}d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{p!q!}{(p+q+1)!}}$$

Partie II –

1. $f_a(x)$ est défini pour x tel que $1 - \dfrac{a}{x} > 0$ i.e. pour x tel que $\dfrac{x-a}{x} > 0$.
Donc f_a est définie sur $]-\infty;0[\cup]a;+\infty[$

2. Posons $\varphi(x) = \ln x - \ln(x-a) - \dfrac{a}{x} = \ln\left(\dfrac{x}{x-a}\right) - \dfrac{a}{x}$ pour $x > a$.
Pour $x > a$,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-a} + \frac{a}{x^2} = \frac{x(x-a) - x^2 + a(x-a)}{x^2(x-a)} = -\frac{a^2}{x^2(x-a)} < 0$$

donc φ décroît strictement sur $]a;+\infty[$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x-a} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a}{x} = 0$ conduisent à $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.
Des variations de φ et de sa limite en $+\infty$ on conclut $\varphi(x) \geqslant 0$ i.e. $\ln(x) - \ln(x-a) \geqslant \dfrac{x}{a}$ pour tout $x > a$.

Reprenons la même démarche avec $\psi : x \mapsto \ln x - \ln(x-a) - \dfrac{a}{x-a} = \ln\left(\dfrac{x}{x-a}\right) - \dfrac{a}{x-a}$.
Pour $x > a$,

$$\psi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-a} + \frac{a}{(x-a)^2} = \frac{a^2}{x(x-a)^2} > 0$$

donc ψ croît strictement sur $]a;+\infty[$.
On démontre de même que précédemment que $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$.
Ainsi ψ croît sur $]a,+\infty[$ et a pour limite 0 en $+\infty$, donc $\psi(x) \leqslant 0$ i.e. $\ln(x) - \ln(x-a) \leqslant \dfrac{a}{x-a}$ pour tout $x > a$.

Remarque. De manière plus expéditive, on peut utiliser l'inégalité classique $\ln(1+u) \leqslant u$ valable pour tout $u \in]-1,+\infty[$. Alors pour tout $x \in]a,+\infty[$,

$$\ln(x) - \ln(x-a) = -\ln\left(1 - \frac{a}{x}\right) \geqslant \frac{x}{a}$$
$$\ln(x) - \ln(x-a) = \ln\left(1 + \frac{a}{x-a}\right) \leqslant \frac{a}{x-a}$$

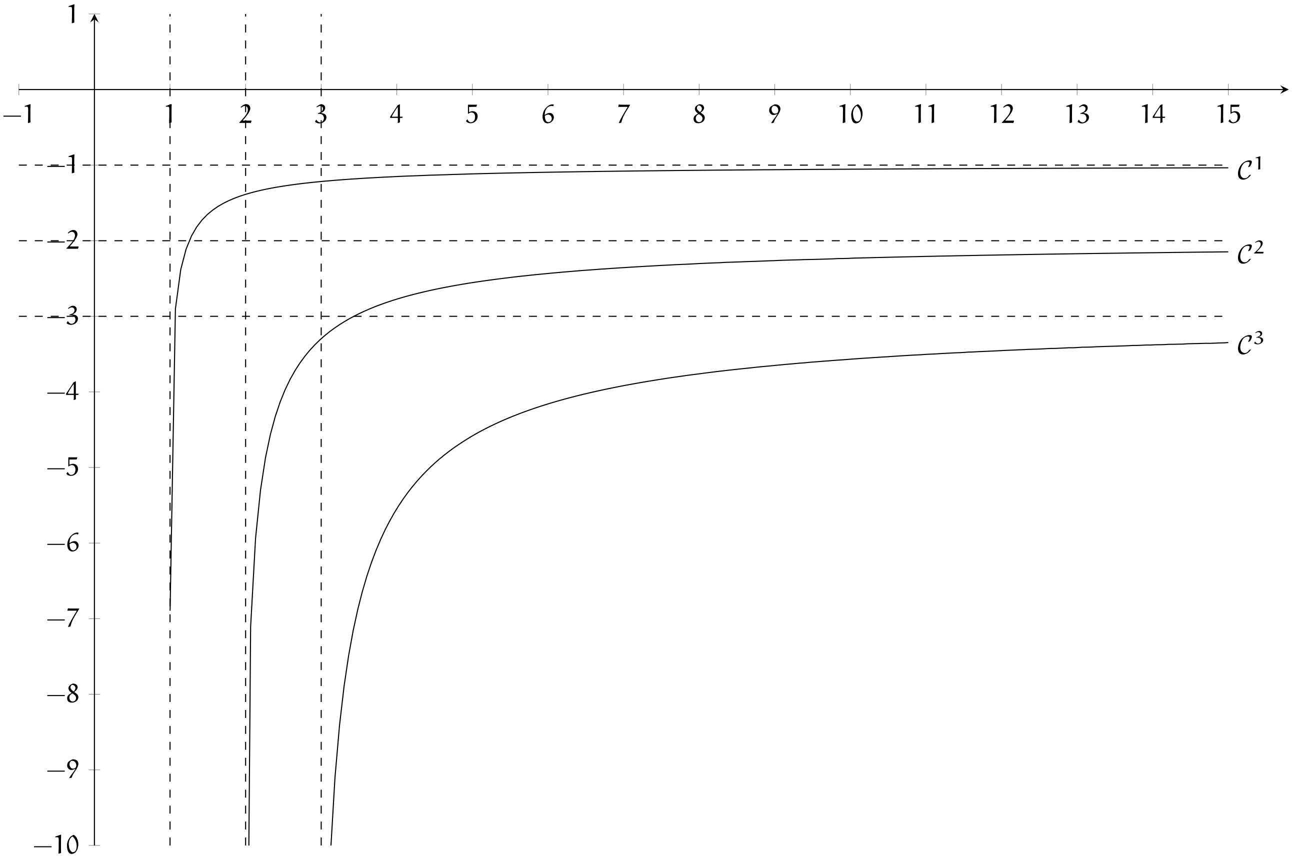
■

3. f_a est dérivable sur $]a;+\infty[$ et pour $x > a$,

$$f_a'(x) = \ln(x-a) - \ln(x) + \frac{a}{x-a} \geqslant 0$$

Ainsi f_a croît sur $]a;+\infty[$.
De plus, pour tout $x > a$, $f_a(x) = -x(\ln(x) - \ln(x-a)$ donc $-\frac{ax}{x-a} \leqslant f_a(x) \leqslant -a$ d'après **II.2**. Par encadrement, $\lim_{+\infty} f_a = -a$. Donc $\mathcal{C}_a$ admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = -a$.
Il est clair que $\lim_{a^+} f_a = -\infty$ donc $\mathcal{C}_a$ admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = a$.
On en déduit le tableau de variations :

4. On obtient le graphe suivant :



5. Pour tout entier $n > a$, $y_n = \exp\left(f_a(n)\right)$. La fonction f_a est croissante sur $]a; +\infty[$ à valeurs dans $]-\infty; -a[$, et exp est croissante sur $\mathbb{R}$. Donc $\exp \circ f_a$ croît sur $]a; +\infty[$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (y_n) \text{ est croissante}}$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_a(n) = -a$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = e^{-a}}$.

Partie III –

1. Soit $h : u \mapsto \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x$. h est continue sur $[0; n]$ car h est la produit de la fonction polynôme $u \mapsto \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n$ par la fonction g_x étudiée dans la partie I. Donc $F_n(x)$ est une intégrale de Riemann.

En effectuant le changement de variable $t = \frac{u}{n}$, $F_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n (nt)^x n\,dt = n^{x+1} \int_0^1 (1-t)^n t^x dt = n^{x+1} I(x, n)$.

2. D'après la question **II.5** pour $u > 0$, $\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leqslant \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1}$. Ce résultat est clairement vrai pour $u = 0$.

Or la fonction $u \mapsto \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x$ est positive sur $[0; n+1]$. alors

$F_n(x) \leqslant \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x du \leqslant \int_0^{n+1} \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x du$

Ainsi, pour x fixé, $\boxed{F_n(x) \leqslant F_{n+1}(x)}$.

3. **a.** $\lim\limits_{u\to+\infty} u^{x+2} e^{-u} = 0$ (étude comparée des exponentielles et fonctions puissances).

Donc $\exists U > 0$, tq $u > U \implies e^{-u} u^{x+2} \leqslant 1$ (prendre $\varepsilon = 1$ dans la définition de la limite nulle en $+\infty$).

Ainsi $\exists U > 0,\ \forall u \in \mathbb{R}^+,\ u \geqslant U \implies e^{-u} \leqslant \frac{1}{u^{x+2}}$.

b. Pour $0 < u < n$, $\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right)$.

Or $n \ln\left(1 - \frac{u}{n}\right) = n(\ln(n-u) - \ln(u)) \leqslant -\frac{u}{n} \cdot n = -u$ (voir inégalité de **II.2**).

Donc $\left(1-\frac{u}{n}\right)^n \leqslant e^{-u}$. Remarquons que cette inégalité reste vraie pour $u = n$ et pour $u = 0$.

Alors $F_n(x) \leqslant \int_0^n e^{-u}u^x\,du$.

► Pour $n \geqslant U$,

$$\begin{aligned} F_n(x) &\leqslant \int_0^U e^{-u}u^x\,du + \int_U^n \frac{1}{u^{x+2}}u^x\,du \leqslant \int_0^U e^{-u}u^x\,du + \int_U^n \frac{1}{u^2}\,du \\ &\leqslant \int_0^U e^{-u}u^x\,du + \left(\frac{1}{U}-\frac{1}{n}\right) \leqslant \int_0^U e^{-u}u^x\,du + \frac{1}{U} \end{aligned}$$

► Pour $n < U$, $F_n(x) = \int_0^n e^{-u}u^x\,dx < \int_0^U e^{-u}u^x\,du \leqslant \int_0^U e^{-u}u^x\,du + \frac{1}{U}$

donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n(x) \leqslant \int_0^U e^{-u}u^x\,du + \frac{1}{U}}$.

c. Remarquons que U ne dépend pas de n (voir **III.3.a**)

Donc pour x fixé, la suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par la constante $\int_0^U e^{-u}u^x\,du + \frac{1}{U}$.

Or cette suite est croissante (**III.2**). Cette suite croissante et majorée converge.

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé.

$$\begin{aligned} F_n(x+1) &= n^{x+2}I(x+1,n) && \textbf{III.1} \\ &= n^{x+2}\frac{x+1}{n+1}I(x,n+1) && \textbf{I.3} \\ &= (x+1)\frac{n^{x+2}}{(n+1)^{x+2}}(n+1)^{x+1}I(x,n+1) \\ &= (x+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{x+2}F_{n+1}(x) && \textbf{III.1} \end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{x+2} = 1$. Alors en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\boxed{F(x+1) = (x+1)F(x)}$.

Alors, pour k entier naturel, $F(k) = k!F(0)$. Il reste donc à calculer $F(0)$.

Mais $F_n(0) = nI(0,n) = n \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n}{n+1}$. Donc $F(0) = \lim_{n\to+\infty} F_n(0) = 1$.

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ F(k) = k!}$