INTERROGATION ÉCRITE N°10

NOM : Prénom : Note :

1. On considère la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (-1, 0, 3)$ et $u_3 = (2, 2, -2)$. Calculer le rang de $\mathcal{F}$. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$? Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$?

2. On note E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et pour $f \in E$, on pose $D(f) = f'$. Montrer que D est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau et son image. D est-il injectif ? surjectif ?

3. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Quelles inclusions ou égalités existe-il *toujours* entre les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im}(g \circ f)$, $\operatorname{Ker}(g \circ f)$, $\operatorname{Im} g$, $\operatorname{Ker} g$, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$? On justifiera ces inclusions.

4. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ des suites arithmétiques réelles est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Donner une base et la dimension de $\mathcal{A}$. On justifiera sa réponse.

5. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que $f((x, y, z)) = (2x - 3y + 4z, -x + y + 5z, 8x - 11y + 2z)$. Déterminer des bases respectives du noyau et de l'image de f.

6. Montrer que la famille $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \cos, \sin)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.