Devoir à la maison n°06

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1.

1. Soit g une fonction paire, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} g(t)\,dt = 2\int_0^{\pi} g(t)\,dt$$

2. On pose pour $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f_r(\theta) = r^2 - 2r\cos\theta + 1$$

Montrer que

$$\forall r \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \forall\theta \in \mathbb{R},\ f_r(\theta) > 0$$

3. On pose pour $r \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

$$\mathrm{I}(r) = \int_0^{\pi} \ln(f_r(\theta))\,d\theta$$

A l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\forall r \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \mathrm{I}(-r) = \mathrm{I}(r)$$

4. En remarquant que $2\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}(r) + \mathrm{I}(-r)$, montrer que

$$\forall r \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ 2\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}(r^2)$$

5. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ 2^n\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}(r^{2^n})$$

6. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $|r| < 1$. Montrer que

$$2\pi\ln(1-|r|) \leqslant \mathrm{I}(r) \leqslant 2\pi\ln(1+|r|)$$

7. En déduire que $\mathrm{I}(r) = 0$ lorsque $|r| < 1$.

8. Montrer également que

$$\forall r \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \mathrm{I}\left(\frac{1}{r}\right) = \mathrm{I}(r) - 2\pi\ln(|r|)$$

9. En déduire la valeur de $\mathrm{I}(r)$ lorsque $|r| > 1$.