Fonctions à valeurs vectorielles

Dans tout ce chapitre, les fonctions considérées sont des fonctions définies sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un $\mathbb{K}$**-espace vectoriel normé** E **de dimension finie** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

1 Dérivabilité

1.1 Définition

Définition 1.1 Dérivabilité en un point

Soit $f : I \to E$. On dit que f est **dérivable** en $a \in I$ si $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite en a. Dans ce cas, cette limite est notée $f'(a)$.

Définition 1.2 Négligeabilité

Soient f une fonction à valeurs dans E et g une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$, toutes deux définies sur un voisinage de a (éventuellement non définies en a). On dit que f est **négligeable** devant g en a si $\lim_a \frac{f}{g} = 0$. On note alors $f \underset{a}{=} o(g)$.

Proposition 1.1 Dérivabilité et développement limité

Une fonction $f : I \to E$ est dérivable en $a \in I$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en a. Dans ce cas, ce développement limité est

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

Proposition 1.2

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $f : I \to E$ est dérivable en $a \in I$ si et seulement si les fonctions $f_i = e_i^* \circ f$ sont dérivables en a. Dans ce cas,

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) e_i$$

Définition 1.3 Dérivabilité à gauche, à droite

Soit $f : I \to E$.
Alors f est **dérivable à droite** en $a \in I$ si $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à droite en a.
De même, f est **dérivable à gauche** en $a \in I$ si $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à gauche en a.

1.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 1.3 Combinaison linéaire

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ dérivables en $a \in \mathrm{I}$ (resp. sur I). Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a (resp. sur I). De plus, $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

Proposition 1.4 Composition par une application linéaire

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ dérivable en $a \in \mathrm{I}$ (resp. sur I) et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ où F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Alors $\mathrm{L} \circ f$ est dérivable en a (resp. sur I). De plus, $(\mathrm{L} \circ f)' = \mathrm{L} \circ f'$.

Proposition 1.5 Dérivabilité et application bilinéaire

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ et $g : \mathrm{I} \to \mathrm{F}$ dérivables en $a \in \mathrm{I}$ (resp. sur I). Soit $\mathrm{B} : \mathrm{E} \times \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ une application **bilinéaire**. Alors $\mathrm{B}(f, g)$ est dérivable en a (resp. sur I). De plus, $\mathrm{B}(f, g)' = \mathrm{B}(f', g) + \mathrm{B}(f, g')$.

Remarque. E, F, G sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.

Exercice 1.1

Soit $\mathrm{A} : \mathrm{I} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une application dérivable. Montrer que si $\mathrm{A}(t)$ et $\mathrm{A}'(t)$ commutent pour tout $t \in \mathrm{I}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est dérivable sur I et que $(\mathrm{A}^n)' = n\mathrm{A}'\mathrm{A}^{n-1} = n\mathrm{A}^{n-1}\mathrm{A}'$.

Corollaire 1.1

Soient E un espace euclidien, $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ et $g : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ deux fonctions dérivables en $a \in \mathrm{I}$ (resp. sur I). Alors $\langle f, g \rangle$ est dérivable en a (resp. sur I) et $\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$.

Exemple 1.1

Si E est un espace euclien et $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ est une fonction dérivable sur I **ne s'annulant pas sur** I, alors $\|f\|$ est dérivable sur I et $\|f\|' = \frac{\langle f', f \rangle}{\|f\|}$.

Proposition 1.6 Composition

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ dérivable sur I et $f : \mathrm{J} \to \mathrm{E}$ dérivable sur J. Alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et $(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi)$.

1.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 1.4 Fonction de classe $\mathcal{C}^k$

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ et $k \in \mathbb{N}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si f est dérivable k fois sur I et si $f^{(k)}$ est continue sur I. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est indéfiniment dérivable sur I.

Notation 1.1

On note $\mathcal{C}^k(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans E.

Proposition 1.7 Combinaison linéaire

Soit $(f, g) \in \mathcal{C}^k(\mathrm{I}, \mathrm{E})^2$, où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^k(\mathrm{I}, \mathrm{E})^2$.
De plus, si $k \in \mathbb{N}$, $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$.

Remarque. Ceci signifie que $\mathcal{C}^k(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ est un $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** et, plus précisément, un sous-espace vectoriel de E^{I}.

Proposition 1.8 Composition par une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{C}^k(\mathrm{I}, \mathrm{E})$, où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ où F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Alors $\mathrm{L} \circ f \in \mathcal{C}^k(\mathrm{I}, \mathrm{F})$.
De plus, si $k \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{L} \circ f)^{(k)} = \mathrm{L} \circ f^{(k)}$.

Proposition 1.9 Composition

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^k(\mathrm{I}, \mathrm{J})$ et $f \in \mathcal{C}^k(\mathrm{J}, \mathrm{E})$, où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Alors $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^k(\mathrm{I}, \mathrm{E})$.

2 Intégration

2.1 Définition et propriétés générales

Définition 2.1 Fonctions continues par morceaux

Une fonction $f : [a, b] \to \mathrm{E}$ est dite **continue par morceaux** si ses coordonnées dans une base de E le sont.
Une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ est dite **continue par morceaux** si elle est continue par morceaux sur **tout segment** de I.

Remarque. La continuité par morceaux ne dépend pas de la base choisie.

Notation 2.1

On notera $\mathcal{C}_m(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans E

Définition 2.2 Intégrale d'une fonction vectorielle

Soient $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathrm{E})$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. La quantité

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b e_k^* \circ f(t) \, \mathrm{d}t \right) e_k$$

est indépendante de la base de E choisie. On la note $\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$, $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f$.

Les propriétés des intégrales des fonctions à valeurs **vectorielles** sont quasiment les mêmes que celles des intégrales à valeurs **numériques**.

Proposition 2.1 Linéarité de l'intégrale

Soit $(f,g) \in \mathcal{C}_m([a,b],\mathrm{E})^2$. Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. Ceci signifie que l'application $f \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une **application linéaire** de $\mathcal{C}_m([a,b],\mathrm{E})$ dans E.

Exercice 2.1

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $f \in \mathcal{C}_m([a,b],\mathrm{E})$. Montrer que

$$\mathrm{L}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{L}(f(t))\,\mathrm{d}t$$

Proposition 2.2 Relation de Chasles

Soient a, b, c trois réels tels que $a \leq c \leq b$ et f continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans E. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. On en déduit notamment que $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Proposition 2.3 Inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a,b],\mathrm{E})$. Alors

$$\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Attention ! L'ordre des bornes importe. On doit avoir $a \leq b$.

2.2 Sommes de Riemman

Définition 2.3 Somme de Riemann

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a,b],\mathrm{E})$. On appelle **somme de Riemann** de f l'une des deux sommes suivantes :

$$\mathrm{R}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \qquad \mathrm{R}'_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

où $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ et n est un entier non nul.

Proposition 2.4 Convergence des sommes de Riemann

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a,b],\mathrm{E})$. Alors les suites $(\mathrm{R}_n(f))$ et $(\mathrm{R}'_n(f))$ convergent vers $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque. L'ordre des bornes n'est pas important.

2.3 Théorème fondamental de l'analyse et conséquences

Définition 2.4 Primitive

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathrm{I},\mathrm{E})$. On dit que $\mathrm{F} : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et $\mathrm{F}' = f$.

Théorème 2.1 Théorème fondamental de l'analyse

Soient $f \in \mathcal{C}(\mathrm{I},\mathrm{E})$ et $a \in \mathrm{E}$. Alors $\mathrm{F}_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'**unique primitive de** f **sur** I **s'annulant en** a.

Corollaire 2.1

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathrm{E})$. Si F est une **primitive** de f sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

Corollaire 2.2 Inégalité des accroissements finis

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I},\mathrm{E})$. Si $\|f'\| \leq \mathrm{K}$ sur I, alors

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2,\ \|f(b) - f(a)\| \leq \mathrm{K}|b-a|$$

Remarque. Il est essentiel que I soit un **intervalle**.

Remarque. Ceci signifie que f est K-lipschitzienne sur I.

Remarque. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un **segment** $[a,b]$, $\|f'\|$ est continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$: elle y admet donc un maximum M. f est alors M-lipschitzienne.

Techniques de calcul

Puisque l'intégrale d'une fonction vectorielle est définie à l'aide des intégrales de ses coordonnées dans une base (i.e. des intégrales de fonctions numériques), les techniques de calcul vues en première année s'appliquent encore :

- intégration par parties ;
- changement de variable.

3 Formules de Taylor

Proposition 3.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathrm{E})$. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. L'ordre de a et b n'importe pas.

Proposition 3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathrm{E})$. Alors

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max_{[a,b]} \left\| f^{(n+1)} \right\|$$

Remarque. L'ordre de a et b n'importe pas.

Remarque. $\left\| f^{(n+1)} \right\|$ admet bien un maximum sur le **segment** $[a,b]$ puisqu'elle y est **continue**.

Proposition 3.3 Formule de Taylor-Young

Soient $f \in \mathcal{C}^n(\mathrm{I},\mathrm{E})$ et $a \in \mathrm{I}$. Alors f admet un développement limité d'ordre n en a donné par

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$

4 Arcs paramétrés

4.1 Définition

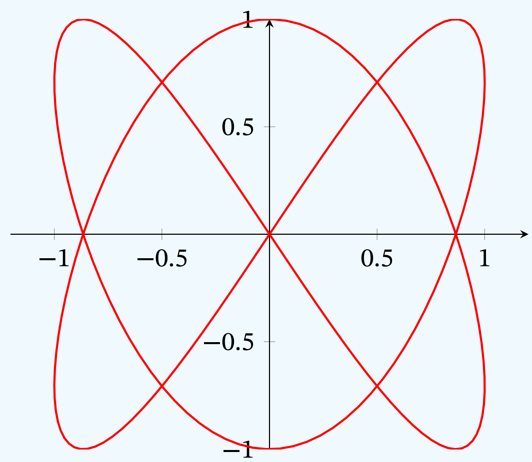
Définition 4.1 Arc paramétré

On appelle **arc paramétré** à valeurs dans E tout couple (I,γ) où I est un intervalle et γ une application de I dans E.
L'ensemble $\gamma(\mathrm{I})$ est appelé le **support** de l'arc paramétré.
On dira que (I,γ) est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ si γ l'est.

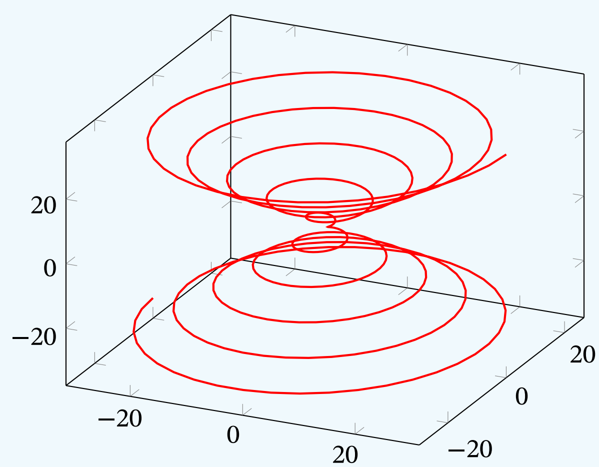
Remarque. Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, on parle d'**arc plan**.

Remarque. Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ ou $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, le support de l'arc paramétré est une **courbe**.

Exemple 4.1 Support de l'arc paramétré $t \in \mathbb{R} \mapsto (\sin(2t), \sin(3t))$



Exemple 4.2 Support de l'arc paramétré $t \in \mathbb{R} \mapsto (t\cos(t), t\sin(t), t)$



Définition 4.2 Paramètre régulier

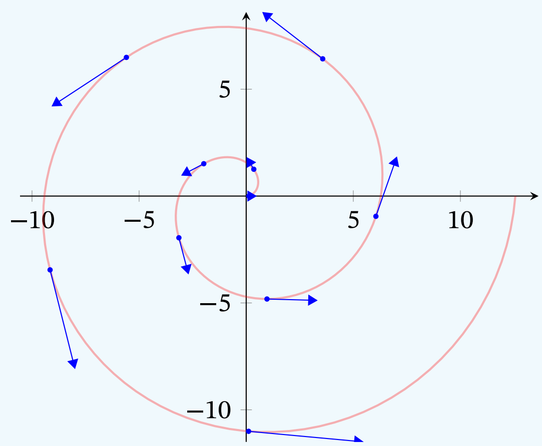
Soit (I, γ) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans E. On dira que $t_0 \in \mathrm{I}$ est un **paramètre régulier** si $\gamma'(t_0) \neq 0_{\mathrm{E}}$.

4.2 Tangentes et normales

Proposition 4.1 Vecteur tangent

Soient (I, γ) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ et $t_0 \in \mathrm{I}$ un paramétre régulier. Alors $\gamma'(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe représentative de (I, γ).

Exemple 4.3 Vecteurs tangents à l'arc paramétré $t \in \mathbb{R} \mapsto (t\cos t, t\sin t)$



Méthode Déterminer la tangente à un arc plan

Soient (I, γ) un arc paramétré à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et $t_0 \in I$ un paramètre régulier. La tangente $\mathcal{T}_{t_0}$ à la courbe représentative de (I, γ) est $\gamma(t_0) + \operatorname{vect}(\gamma'(t_0))$.
On peut déterminer une équation cartésienne de cette tangente en remarquant que

$$M \in \mathcal{T}_{t_0} \iff \operatorname{Det}(M - \gamma(t_0), \gamma'(t_0)) = 0$$

Remarque. La notation Det désigne ici le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Mais en fait, peu importe la base choisie puisque la colinéarité est indépendante de cette base.

Méthode Déterminer la normale à un arc plan

Soient (I, γ) un arc paramétré à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et $t_0 \in I$ un paramètre régulier. La normale $\mathcal{N}_{t_0}$ à la courbe représentative de (I, γ) est $\gamma(t_0) + \operatorname{vect}(\gamma'(t_0))^{\perp}$.
On peut déterminer une équation cartésienne de cette tangente en remarquant que

$$M \in \mathcal{N}_{t_0} \iff \langle M - \gamma(t_0), \gamma'(t_0)\rangle = 0$$

Remarque. On a muni ici $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne usuelle.

Exemple 4.4 Cercle trigonométrique

Posons $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin(t)$ et étudions l'arc paramétré $t \mapsto (x(t), y(t))$.

Courbe Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$ donc la courbe représentative de cet arc paramétré est le cercle trigonométrique.

Tangente Soit $t_0 \in \mathbb{R}^2$. La tangente au point de paramètre t_0 a pour équation

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

autrement dit

$$x\cos(t_0) + y\sin(t_0) = 1$$

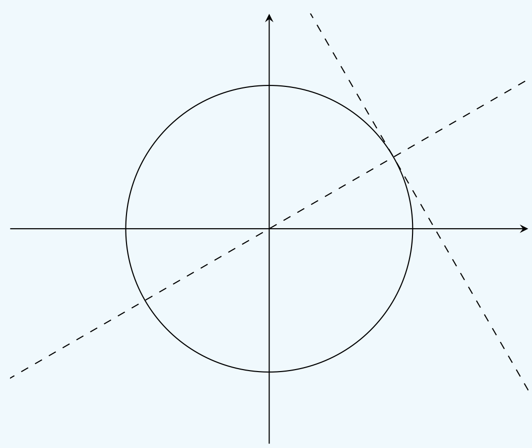
Normale Soit $t_0 \in \mathbb{R}^2$. La normale au point de paramètre t_0 a pour équation

$$\begin{pmatrix} x - x(t_0) \\ y - y(t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} = 0$$

autrement dit

$$x\sin(t_0) - y\cos(t_0) = 0$$

Tracé On représente le cercle trigonométrique ainsi que la tangente et la normale au point de paramètre $\pi/6$.



Remarque. On retrouve notamment de manière analytique le fait qu'une normale à un cercle passe par le centre de ce cercle. Voilà qui est rassurant !

4.3 Premier exemple

On pose $x(t) = \sin(t)$ et $y(t) = \sin(2t)$. On souhaite représenter le support de l'arc paramétré $\gamma = (x, y)$.

Domaine d'étude et symétrie

On cherche d'abord à restreindre le domaine d'étude en repérant des symétries.

- Puisque x et y sont 2π-périodiques, on peut restreindre l'étude à $[-\pi, \pi]$.
- Par ailleurs, x et y sont impaires donc on peut étudier sur $[0, \pi]$ et déduire $\gamma([-\pi, 0])$ de $\gamma([0, \pi])$ par la symétrie de centre l'origine.
- Enfin, $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$ donc on peut étudier sur $[0, \pi/2]$ et déduire $\gamma([\pi/2, \pi])$ de $\gamma([0, \pi/2])$ par une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Variations

On a $x'(t) = \cos(t)$ et $y'(t) = 2\cos(2t)$. On trace les variations conjointes de x et y.

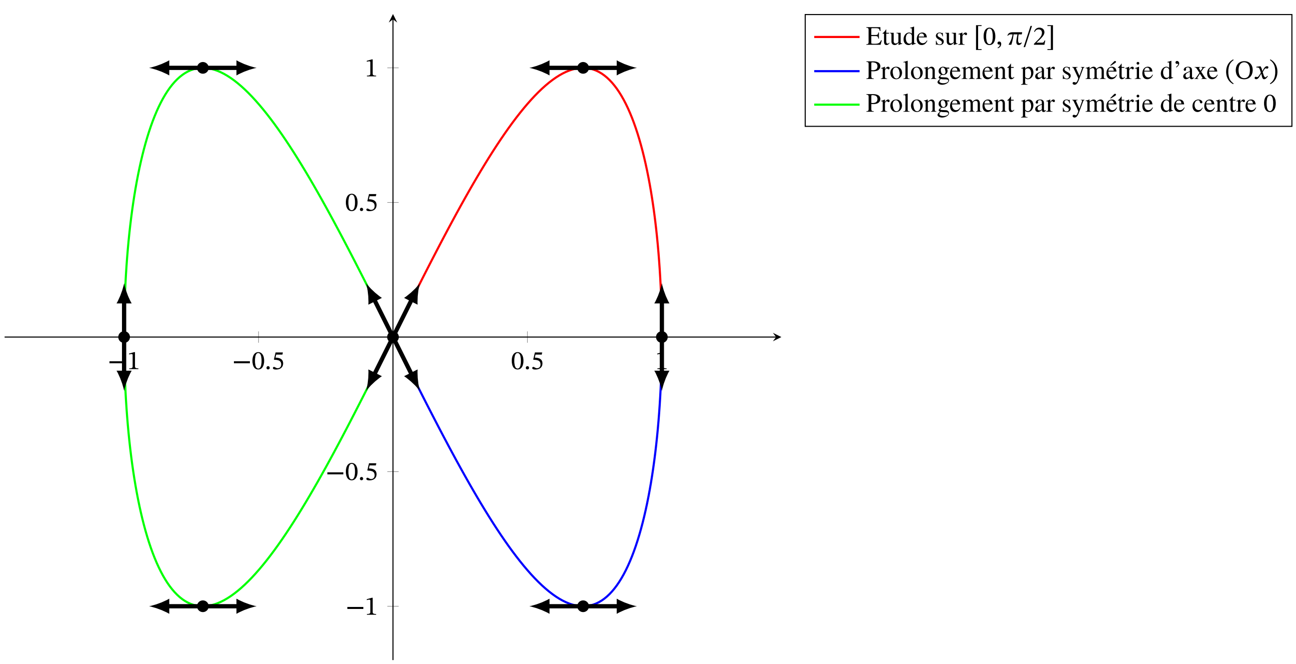
t	0		$\pi/4$		$\pi/2$
Signe de $x'(t)$	1	$+$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+$	0
Variations de x	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1
Variations de y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
Signe de $y'(t)$	2	$+$	0	$-$	-2

Tracé

On peut tracer $\gamma([0, \pi/2])$ et compléter avec les symétries observées précédemment. On peut de plus placer des tangentes remarquables :

- tangente de vecteur directeur $(1, 2)$ en l'origine ;
- tangente horizontale au point de coordonnées $(0, \sqrt{2}/2)$;
- et tangente verticale au point de coordonnées $(1, 0)$;

ainsi que celles obtenues par symétries.



Python

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T=np.linspace(0,2*np.pi,200)
X=np.sin(T)
Y=np.sin(2*T)
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

4.4 Second exemple

On pose $x(t) = t\ln(t)$ et $y(t) = \ln(t)/t$. On souhaite représenter le support de l'arc paramétré $\gamma = (x, y)$.

Domaine d'étude et symétrie

On cherche d'abord à restreindre le domaine d'étude en repérant des symétries. On remarque que $x(1/t) = -y(t)$ et $y(1/t) = -x(t)$. On peut donc étudier sur $]0, 1]$ et on obtient $\gamma([1, +\infty[)$ à partir de $\gamma(]0, 1])$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = -x$.

Variations

On a $x'(t) = \ln(t) + 1$ et $y'(t) = \frac{1-\ln(t)}{t^2}$. On trace les variations conjointes de x et y.

t	0		e^{-1}		1
Signe de $x'(t)$	‖	$-$	0	$+$	1
Variations de x	‖ 0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	0
Variations de y	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\nearrow$	0
Signe de $y'(t)$	‖	$+$	$2e^2$	$+$	1

Asymptotes

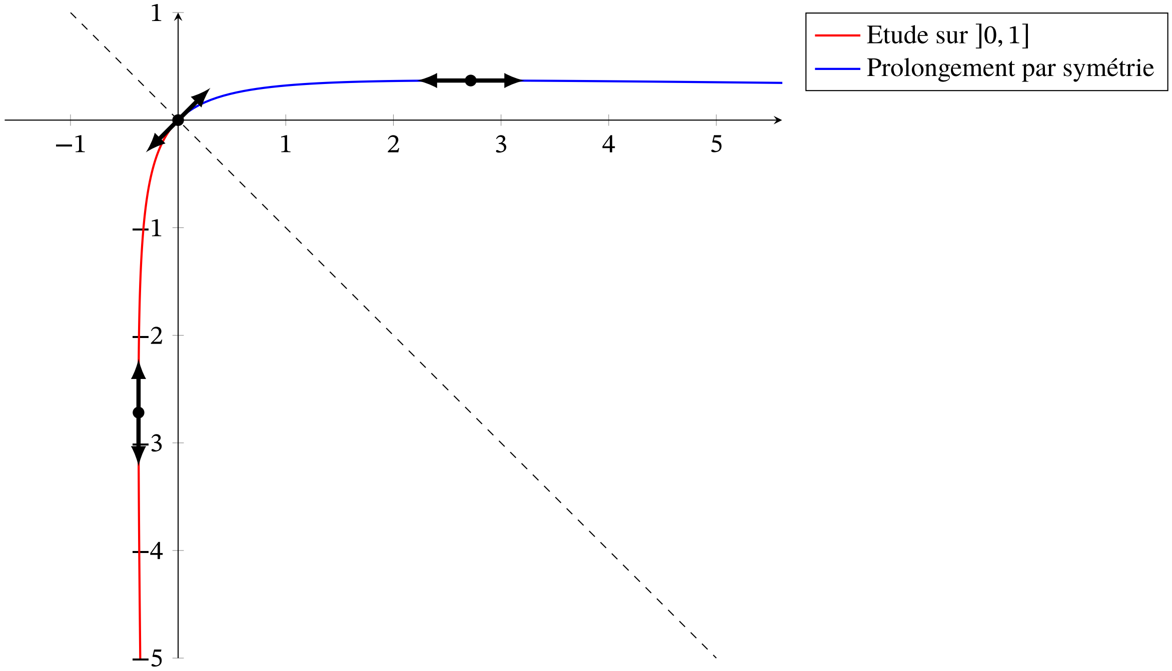
Puisque $\lim_{0^+} x = 0$ et $\lim_{0^+} y = -\infty$, le support de γ admet une asymptote d'équation $x = 0$. On obtient une seconde asymptote par symétrie, à savoir la droite d'équation $y = 0$.

Tracé

On peut tracer $\gamma(]0, 1])$ et compléter avec la symétrie observée précédemment. On peut de plus placer des tangentes remarquables :

- tangente verticale au point de coordonnées $(-e^{-1}, -e)$;
- et tangente de vecteur directeur $(1, 1)$ en l'origine ;

ainsi que celles obtenues par symétries.



Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T=np.linspace(0.2,5,100)
X=T*np.log(T)
Y=np.log(T)/T
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```