

PROBABILITES

Révisions de première année

Solution 1

La probabilité recherchée est $\frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{8}{10} = \frac{4}{55}$.

Solution 2

On définit les événements suivants.

AR La boule tirée dans l'urne A est rouge.

AV La boule tirée dans l'urne A est verte.

X Les deux boules tirées dans l'urne B sont rouges.

La probabilité recherchée est $P(AV|X)$. D'après la formule de Bayes

$$P(AV|X) = \frac{P(X|AV)P(AV)}{P(X|AV)P(AV) + P(X|AR)P(AR)}$$

Il est clair que $P(AV) = \frac{3}{5}$ et $P(AR) = \frac{2}{5}$.

Par ailleurs, $P(X|AV)$ est la probabilité de tirer successivement et sans remise deux boules rouges dans une urne contenant trois boules rouges et trois boules vertes. Autrement dit, $P(X|AV) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

De même, $P(X|AR)$ est la probabilité de tirer successivement et sans remise deux boules rouges dans une urne contenant quatre boules rouges et deux boules vertes. Autrement dit, $P(X|AR) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

Après calcul, on trouve $P(AV|X) = \frac{3}{7}$.

Solution 3

On notera U_k l'événement «l'urne choisie est l'urne numéro k » et B l'événement la boule tirée est blanche.

1. On recherche donc $P(B)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(B|U_k)P(U_k) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{n+1}{2n}$$

2. On recherche $P(U_k|B)$. Par définition

$$P(U_k|B) = \frac{P(B \cap U_k)}{P(B)} = \frac{P(B|U_k)P(U_k)}{P(B)} = \frac{\frac{k}{n} \times \frac{1}{n}}{\frac{n+1}{2n}} = \frac{2k}{n(n+1)}$$

Solution 4

On notera A_n l'événement «le buveur ne boit pas le $n^{\text{ème}}$ jour. L'énoncé signifie que $P(A_{n+1}|A_n) = 0,4$ et $P(A_{n+1}|\overline{A_n}) = 0,8$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose de plus que le buveur ne boit pas le premier jour, autrement dit $P(A_1) = 1$.

1. Pour simplifier, posons $p_n = P(A_n)$. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|\overline{A_n})P(\overline{A_n}) = 0,4p_n + 0,8(1 - p_n) = 0,8 - 0,4p_n$$

2. La suite (p_n) est arithmético-géométrique. On introduit l'unique solution p de l'équation $x = 0,8 - 0,4x$ autrement dit $p = \frac{4}{7}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_{n+1} - p = (0,8 - 0,4p_n) - (0,8 - 0,4p) = -0,4(p_n - p)$$

Une récurrence évidente montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_n - p = (-0, 4)^{n-1}(p_1 - p)$$

Autrement dit

$$p_n = \frac{2}{7} + \left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1} \frac{5}{7}$$

3. Puisque $\left|-\frac{2}{5}\right| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{2}{7}$.

Solution 5

1. S suit évidemment la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$.

2. La loi de F conditionnée par l'événement $S = s$ est la loi $\mathcal{B}\left(s, \frac{1}{2}\right)$.

3. F est clairement à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Soit donc $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(F = k) = \sum_{s=0}^n P(F = k | S = s)P(S = s)$$

Il est clair que $P(F = k | S = s) = 0$ pour $s < k$ donc

$$\begin{aligned} P(F = k) &= \sum_{s=k}^n P(F = k | S = s)P(S = s) \\ &= \sum_{s=k}^n \left(\frac{1}{2}\right)^s \binom{s}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^s \left(\frac{5}{6}\right)^{n-s} \binom{n}{s} \\ &= \sum_{s=k}^n \frac{5^{n-s}}{2^s 6^n} \binom{s}{k} \binom{n}{s} \\ &= \sum_{s=k}^n \frac{5^{n-s}}{2^s 6^n} \binom{n}{k} \binom{n-k}{s-k} \\ &= \binom{n}{k} \sum_{s=0}^{n-k} \frac{5^{n-s-k}}{2^{s+k} 6^n} \binom{n-k}{s} \\ &= \binom{n}{k} \frac{5^n}{10^k 6^n} \sum_{s=0}^{n-k} \frac{1}{10^s} \binom{n-k}{s} \end{aligned}$$

En appliquant la formule du binôme

$$\begin{aligned} P(F = k) &= \binom{n}{k} \frac{5^n}{10^k 6^n} \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} \frac{5^n 11^{n-k}}{10^n 6^n} \\ &= \binom{n}{k} \frac{11^{n-k}}{12^n} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{12}\right)^k \left(\frac{11}{12}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

On en déduit donc que F suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{12}\right)$.

Solution 6

L'événement A est l'événement contraire de l'événement «la famille n'a que des enfants de même sexe», ce dernier événement étant l'union disjointe des événements «la famille a n garçons» et «la famille a n filles». On en déduit que

$$P(A) = 1 - 2 \times \frac{1}{2^n} = 1 - 2^{1-n}$$

L'événement B est la réunion disjointe des événements «la famille n'a aucune fille» et «la famille a exactement une fille». On en déduit que

$$P(B) = \frac{1}{2^n} + \binom{n}{1} \frac{1}{2^n} = (n+1)2^{-n}$$

L'événement $A \cap B$ est l'événement «la famille a une unique fille». Ainsi

$$P(A \cap B) = \binom{n}{1} \frac{1}{2^n} = n2^{-n}$$

Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ autrement dit si et seulement si

$$(1 - 2^{1-n})(n+1)2^{-n} = n2^{-n}$$

ou encore, après simplification,

$$2^n - 2n - 2 = 0$$

Soit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto 2^t - 2t - 2$. f est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée $f' : t \mapsto 2^t \ln 2 - 2$. f' est strictement croissante sur \mathbb{R} et $f'(2) = 4 \ln 2 - 2 > 0$. Ainsi f' est strictement positive sur $[2, +\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$. Puisque $f(3) = 0$, f s'annule uniquement en 3 sur $[2, +\infty[$, ce qui prouve que A et B sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

Solution 7

1. Première méthode :

Soit $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Si $k \geq l$, $P(X = k, Z = l) = 0$. Par contre, si $k < l$,

$$\begin{aligned} P(X = k, Z = l) &= \underbrace{\frac{n-2}{n}}_{1^{\text{er}} \text{ tirage}} \times \underbrace{\frac{n-3}{n-1}}_{2^{\text{e}} \text{ tirage}} \times \cdots \times \underbrace{\frac{n-k}{n-k+2}}_{(k-1)^{\text{e}} \text{ tirage}} \times \underbrace{\frac{2}{n-k+1}}_{k^{\text{e}} \text{ tirage}} \times \underbrace{\frac{n-k-1}{n-k}}_{(k+1)^{\text{e}} \text{ tirage}} \cdots \times \underbrace{\frac{n-l+1}{n-l+2}}_{(l-1)^{\text{e}} \text{ tirage}} \times \underbrace{\frac{1}{n-l+1}}_{l^{\text{e}} \text{ tirage}} \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \end{aligned}$$

Seconde méthode :

L'univers Ω est l'ensemble des permutations des n boules de sorte que $\text{card } \Omega = n!$.

Soit $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Si $k \geq l$, $[X = k] \cap [Y = l]$ est impossible donc $P(X = k, Z = l) = 0$. Supposons maintenant $k < l$. Se donner une issue de $[X = k] \cap [Y = l]$ revient à se donner une permutation des 2 boules rouges et une permutation des $n - 2$ boules rouges. Ainsi $\text{card}([X = k] \cap [Y = l]) = 2!(n-2)!$. Finalement

$$P(X = k, Z = l) = \frac{2!(n-2)!}{n!} = \frac{2}{n(n-1)}$$

2. Soit $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$P(Z = l) = \sum_{k=1}^{l-1} P(X = k, Z = l) = \frac{2(l-1)}{n(n-1)}$$

Solution 8

1. La relation est évidente si $a = b$. Supposons maintenant $a + 1 \leq b$. On utilise la relation du triangle de Pascal.

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^b \binom{k}{a} &= 1 + \sum_{k=a+1}^b \binom{k}{a} \\ &= 1 + \sum_{k=a+1}^b \left(\binom{k+1}{a+1} - \binom{k}{a+1} \right) = 1 + \binom{b+1}{a+1} - \binom{a+1}{a+1} = \binom{b+1}{a+1} \end{aligned}$$

2. Si on note Ω l'univers de l'expérience aléatoire, alors $\text{card}(\Omega) = \binom{N}{n}$.

X est à valeurs dans $\llbracket n, N \rrbracket$. Soit donc $k \in \llbracket n, N \rrbracket$. Choisir n boules dont le plus grand numéro est k revient à choisir $n - 1$ boules parmi celles numérotées de 1 à $k - 1$. Ainsi $\text{card}(X = k) = \binom{k-1}{n-1}$ puis $P(X = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$.

Y est à valeurs dans $\llbracket 1, N - n + 1 \rrbracket$. Soit donc $k \in \llbracket 1, N - n + 1 \rrbracket$. Choisir n boules dont le plus petit numéro est k revient à choisir $n - 1$ boules parmi celles numérotées de $k + 1$ à N . Ainsi $\text{card}(Y = k) = \binom{N-k}{n-1}$ puis $P(Y = k) = \frac{\binom{N-k}{n-1}}{\binom{N}{n}}$.

3. (X, Y) est à valeurs dans $\{(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, i - j \geq n - 1\}$. Soit donc (i, j) dans cet ensemble.

Choisir n boules dont le plus grand numéro est i et le plus petit j revient à choisir $n - 2$ boules parmi celles numérotées de $j + 1$ à $i - 1$. Ainsi $\text{card}([X = i] \cap [Y = j]) = \binom{i-j-1}{n-2}$ puis $P(X = i, Y = j) = \frac{\binom{i-j-1}{n-2}}{\binom{N}{n}}$.

Remarquons que $X - Y$ est à valeurs dans $\llbracket n - 1, N - 1 \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket n - 1, N - 1 \rrbracket$. Alors

$$P(X - Y = k) = \sum_{j=1}^{N-k} P(X - Y = k, Y = j) = \sum_{j=1}^{N-k} P(X = j + k, Y = j) = \frac{(N - k) \binom{k-1}{n-2}}{\binom{N}{n}}$$

4. Tout d'abord

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=n}^N k P(X = k) \\ &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^N k \binom{k-1}{n-1} \\ &= \frac{n}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^N \binom{k}{n} \\ &= \frac{n \binom{N+1}{n+1}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{n(N+1)}{n+1} \end{aligned}$$

Pour le calcul de l'espérance de Y , on peut remarquer que $P(Y = k) = P(X = N + 1 - k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, N - n + 1 \rrbracket$. Ainsi

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{N-n+1} k P(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{N-n+1} k P(X = N + 1 - k) \\ &= \sum_{k=n}^N (N + 1 - k) P(X = k) \\ &= (N + 1) \sum_{k=n}^N P(X = k) - E(X) \\ &= N + 1 - \frac{n(N+1)}{n+1} = \frac{N+1}{n+1} \end{aligned}$$

5. Tout d'abord

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=n}^N k^2 P(X = k) \\
E(X^2) &= \sum_{k=n}^N [k(k+1) - k] P(X = k) \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^N k(k+1) \binom{k-1}{n-1} - E(X) \\
&= \frac{n(n+1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^N \binom{k+1}{n+1} - \frac{n(N+1)}{n+1} \\
&= \frac{n(n+1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n+1}^{N+1} \binom{k}{n+1} - \frac{n(N+1)}{n+1} \\
&= \frac{n(n+1)}{\binom{N}{n}} \binom{N+2}{n+2} - \frac{n(N+1)}{n+1} \\
&= \frac{n(N+1)(N+2)}{n+2} - \frac{n(N+1)}{n+1} \\
&= \frac{(Nn + n + N)(N+1)n}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Enfin

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(Nn + n + N)(N+1)n}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{n(N+1)}{n+1} \right)^2 = \frac{n(N+1)(N-n)}{(n+2)(n+1)^2}$$

En remarquant que $P(Y = k) = P(X = N+1-k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, N-n+1 \rrbracket$ et que $E(Y) = N+1 - E(X)$

$$\begin{aligned}
V(Y) &= E(Y - E(Y))^2 \\
&= \sum_{k=1}^{N-n+1} (k - E(Y))^2 P(Y = k) \\
&= \sum_{k=1}^{N-n+1} (k - (N+1) + E(X))^2 P(X = N+1-k) \\
&= \sum_{k=n}^N (E(X) - k)^2 P(X = k) \\
&= V(X) = \frac{(Nn + n + N)(N+1)n}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

6. Tout d'abord

$$\begin{aligned}
E((X - Y)^2) &= \sum_{k=n-1}^{N-1} k^2 P(X - Y = k) \\
&= \sum_{k=n-1}^{N-1} \frac{k^2 (N-k) \binom{k-1}{n-2}}{\binom{N}{n}} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \left(N \sum_{k=n-1}^{N-1} k^2 \binom{k-1}{n-2} - \sum_{k=n-1}^{N-1} k^3 \binom{k-1}{n-2} \right)
\end{aligned}$$

Posons $S_m = \sum_{k=n-1}^{N-1} k^m \binom{k-1}{n-2}$. On trouve successivement

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=n-1}^{N-1} k \binom{k-1}{n-2} \\ &= (n-1) \sum_{k=n-1}^{N-1} \binom{k}{n-1} \\ &= (n-1) \binom{N}{n} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=n-1}^{N-1} k^2 \binom{k-1}{n-2} \\ &= \sum_{k=n-1}^{N-1} k(k+1) \binom{k-1}{n-2} - \sum_{k=n-1}^{N-1} k \binom{k-1}{n-2} \\ &= (n-1)n \sum_{k=n-1}^{N-1} \binom{k+1}{n} - S_1 \\ &= (n-1)n \sum_{k=n}^N \binom{k}{n} - (n-1) \binom{N}{n} \\ &= (n-1)n \binom{N+1}{n+1} - (n-1) \binom{N}{n} \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k=n-1}^{N-1} k^3 \binom{k-1}{n-2} \\ &= \sum_{k=n-1}^{N-1} k(k+1)(k+2) \binom{k-1}{n-2} - 3S_2 - 2S_1 \\ &= (n-1)n(n+1) \sum_{k=n-1}^{N-1} \binom{k+2}{n+1} - 3 \left((n-1)n \binom{N+1}{n+1} - (n-1) \binom{N}{n} \right) - 2(n-1) \binom{N}{n} \\ &= (n-1)n(n+1) \sum_{k=n+1}^{N+1} \binom{k}{n+1} - 3(n-1)n \binom{N+1}{n+1} + (n-1) \binom{N}{n} \\ &= (n-1)n(n+1) \binom{N+2}{n+2} - 3(n-1)n \binom{N+1}{n+1} + (n-1) \binom{N}{n} \end{aligned}$$

Il vient enfin

$$\begin{aligned} E((X-Y)^2) &= \frac{1}{\binom{N}{n}} (NS_2 - S_3) \\ &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \left(N(n-1)n \binom{N+1}{n+1} - N(n-1) \binom{N}{n} - (n-1)n(n+1) \binom{N+2}{n+2} + 3(n-1)n \binom{N+1}{n+1} - (n-1) \binom{N}{n} \right) \\ &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \left((n-1)n(N+3) \binom{N+1}{n+1} - (n-1)(N+1) \binom{N}{n} - (n-1)n(n+1) \binom{N+2}{n+2} \right) \\ &= \frac{(n-1)n(N+3)(N+1)}{n+1} - (n-1)(N+1) - \frac{(n-1)n(N+2)(N+1)}{n+2} \\ &= \frac{(n-1)(N+1)(nN+n-2)}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
 V(X - Y) &= E((X - Y)^2) - E(X - Y)^2 \\
 &= \frac{(n-1)(N+1)(nN+n-2)}{(n+1)(n+2)} - (E(X) - E(Y))^2 \\
 &= \frac{(n-1)(N+1)(nN+n-2)}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{n(N+1)}{n+1} - \frac{N+1}{n+1} \right)^2 \\
 &= \frac{2(n-1)(N+1)(N-n)}{(n+1)^2(n+2)}
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{2}(V(X) + V(Y) - V(X - Y)) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2(Nn+n+N)(N+1)n}{(n+1)(n+2)} - \frac{2(n-1)(N+1)(N-n)}{(n+1)^2(n+2)} \right) \\
 &= \frac{n(n+1)(N+1)(Nn+n+N) - (n-1)(N+1)(N-n)}{(n+1)^2(n+2)} \\
 &= \frac{(N+1)(2n^2N + n^3N + 2n^2 + n^3 + N - n)}{(n+1)^2(n+2)}
 \end{aligned}$$

Solution 9

On calcule dans un premier temps $P(X = Y)$. L'événement $X = Y$ est la réunion disjointes des événements $(X = k) \cap (Y = k)$ pour k décrivant $\llbracket 1, n \rrbracket$. On en déduit que

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^n P([X = k] \cap [Y = k])$$

Or les variables aléatoires X et Y sont indépendantes donc

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^n P(X = k)P(Y = k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

On en déduit que

$$P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y) = 1 - \frac{1}{n}$$

Solution 10

1.

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \sum_{k=1}^N kP(Y = k) \\
 &= \sum_{k=1}^N k(P(Y > k-1) - P(Y > k)) \\
 &= \sum_{k=1}^N kP(Y > k-1) - \sum_{k=1}^N kP(Y > k) \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)P(Y > k) - \sum_{k=1}^N kP(Y > k) \quad \text{par changement d'indice} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)P(Y > k) - \sum_{k=0}^N kP(Y > k) \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} P(Y > k) - NP(Y > N) \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} P(Y > k) \quad \text{car } P(Y > n) = 0
 \end{aligned}$$

2. a. Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

$$P(T_n \leq k) = P(X_1 \leq k, X_2 \leq k, \dots, X_n \leq k) = P(X_1 \leq k)P(X_2 \leq k) \dots P(X_n \leq k)$$

car les variables X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes. Mais comme chacune de ces variables suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$

$$P(T_n \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

- b. Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$P(T_n = k) = P(T_n \leq k) - P(T_n \leq k-1) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$$

c.

$$\begin{aligned} E(T_n) &= \sum_{k=1}^N k \left(\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n \right) \\ &= \sum_{k=1}^N k \left(\frac{k}{N}\right)^n - \sum_{k=1}^N k \left(\frac{k-1}{N}\right)^n \\ &= \sum_{k=1}^N k \left(\frac{k}{N}\right)^n - \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) \left(\frac{k}{N}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^N k \left(\frac{k}{N}\right)^n - \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) \left(\frac{k}{N}\right)^n \\ &= N - a_n(N) \end{aligned}$$

3. a. Soit $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$.

$$P(Z_n > k) = P(X_1 > k, X_2 > k, \dots, X_n > k) = P(X_1 > k)P(X_2 > k) \dots P(X_n > k)$$

car les variables X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes. Mais comme chacune de ces variables suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$

$$P(Z_n > k) = \left(\frac{N-k}{N}\right)^n$$

- b. En utilisant la première question

$$E(Z_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{N-k}{N}\right)^n = \sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

via un changement d'indice. Autrement dit, $E(Z_n) = 1 + a_n(N)$.

4. a. Pour $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, $0 \leq \frac{k}{N} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{k}{N}\right)^n = 0$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(N) = 0$. Or $E(T_n) = N - a_n(N)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n) = N$.

- b. Par linéarité, $E(S_n) = E(T_n) + E(Z_n) - 1 = N$ en utilisant les questions précédentes.

Solution 11

1. Posons $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$. Alors $M = XX^\top$. La matrice M est donc de rang au plus 1 (toutes ses colonnes sont colinéaires à X). Ainsi M suit une loi de Bernoulli. De plus, par indépendance des X_i ,

$$\mathbb{P}(\text{rg } M = 0) = \mathbb{P}(M = 0) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n X_i = 0\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = 0) = (1-p)^n$$

Ainsi $\text{rg } M$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1-p)^n$.

2. Remarquons que $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Mais comme les X_i sont à valeurs dans $\{0, 1\}$, $X_i^2 = X_i$. Finalement, $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi binomiale de paramètres n et p car les X_i sont indépendantes.

Solution 12

1. U suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{u}{b}\right)$. Son espérance est $\frac{nu}{b}$ et sa variance est $\frac{nu}{b}\left(1 - \frac{u}{b}\right)$.

De même, D et T suivent respectivement les lois binomiales $\mathcal{B}\left(n, \frac{d}{b}\right)$ et $\mathcal{B}\left(n, \frac{t}{b}\right)$.

2. On peut par exemple remarquer que $P(U = n) \neq 0$ et $P(D = n) \neq 0$ tandis que $P(U = n, D = n) = 0$. Ainsi $P(U = n, D = n) \neq P(U = n)P(D = n)$, ce qui prouve que U et D ne sont pas indépendantes.

3. Puisque $U + D + T = n$, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$P(U + D = k) = P(T = n - k)$$

On en déduit aisément que $U + D$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, 1 - \frac{t}{b}\right)$.

De plus,

$$E(U + D) = E(n - T) = n - E(T) = n - \frac{nt}{b} = \frac{n(b - t)}{b}$$

Enfin,

$$V(U + D) = V(n - T) = V(T) = \frac{nt}{b}\left(1 - \frac{t}{b}\right)$$

4. On sait que

$$\text{Cov}(U, D) = \frac{1}{2} (V(U + D) - V(U) - V(D))$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U, D) &= \frac{1}{2} \left(\frac{nt}{b} \left(1 - \frac{t}{b}\right) - \frac{nu}{b} \left(1 - \frac{u}{b}\right) - \frac{nd}{b} \left(1 - \frac{d}{b}\right) \right) \\ &= \frac{n}{2b^2} (t(b - t) - u(b - u) - d(b - d)) \\ &= \frac{n}{2b^2} ((b - u - d)(u + d) - u(b - u) - d(b - d)) \\ &= -\frac{nud}{b^2} \end{aligned}$$

Solution 13

1. D'après la formule de transfert

$$E(Z) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} |i - j| P(X = i, Y = j)$$

Mais les variables X et Y étant indépendantes,

$$E(Z) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} |i - j| P(X = i) P(Y = j) = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} |i - j|$$

On peut alors découper la somme double

$$\begin{aligned}
 E(Z) &= \frac{1}{(n+1)^2} \left(\sum_{0 \leq i < j \leq n} |i-j| + \sum_{0 \leq j < i \leq n} |i-j| + \sum_{k=0}^n |k-k| \right) \\
 &= \frac{2}{(n+1)^2} \sum_{0 \leq i < j \leq n} j-i \\
 &= \frac{2}{(n+1)^2} \left(\sum_{0 \leq i < j \leq n} j - \sum_{0 \leq i < j \leq n} i \right) \\
 &= \frac{2}{(n+1)^2} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{j-1} j - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n i \right) \\
 &= \frac{2}{(n+1)^2} \left(\sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)i \right) \\
 &= \frac{2}{(n+1)^2} \left(\sum_{j=0}^n j^2 - \sum_{i=0}^n (n-i)i \right) \\
 &= \frac{2}{(n+1)^2} \left(2 \sum_{k=0}^n k^2 - n \sum_{k=0}^n k \right) \\
 &= \frac{2}{(n+1)^2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n^2(n+1)}{2} \right) \\
 &= \frac{2n}{n+1} \left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n}{2} \right) \\
 &= \frac{n(n+2)}{3(n+1)}
 \end{aligned}$$

2. On remarque que

$$T = \frac{1}{2} (X + Y - Z)$$

donc par linéarité de l'espérance

$$E(T) = \frac{1}{2} (E(X) + E(Y) - E(Z)) = \frac{1}{2} \left(n - \frac{n(n+2)}{3(n+1)} \right) = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)}$$

3. Puisque $Z^2 = X^2 + Y^2 - 2XY$, on obtient par linéarité de l'espérance

$$E(Z^2) = E(X^2) + E(Y^2) - 2E(XY)$$

Mais les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, $E(XY) = E(X)E(Y)$. Puisqu'elles sont de même loi

$$E(Z^2) = 2E(X^2) - 2E(X)^2 = 2V(X)$$

REMARQUE. On peut montrer que

$$V(X) = \frac{n(n+2)}{12}$$

Solution 14

D'après la formule de transfert,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{1}{X(X+1)}\right) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \mathbb{P}(X=k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Solution 15

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons X_k la variable aléatoire valant 1 si la boule numéro k a été tirée lors des n tirages et 0 sinon. Chaque X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$. Puisque $X = \sum_{k=1}^n X_k$, on obtient par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right)$$

On montre classiquement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$. Ainsi $\mathbb{E}(X) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

Solution 16

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_k la variable aléatoire qui à une permutation associe 1 si k est un point fixe et 0 sinon. On a donc $X = \sum_{k=1}^n X_k$.

On détermine ensuite la loi de X_k par dénombrement. Le nombre de permutations fixant k est $(n-1)!$ et comme la probabilité sur S_n est uniforme, $\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Ainsi X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$ de sorte que $\mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{n}$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = 1$$

Pour le calcul de la variance, il faut prendre garde au fait que les variables aléatoires X_k ne sont pas indépendantes. Néanmoins

$$\mathbb{V}(X) = \text{Cov}\left(\sum_{k=1}^n X_k, \sum_{l=1}^n X_l\right) = \sum_{1 \leq k, l \leq n} \text{Cov}(X_k, X_l) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) + \sum_{1 \leq k \neq l \leq n} \text{Cov}(X_k, X_l)$$

Puisque les X_k sont des variables aléatoires de Bernoulli, $\mathbb{V}(X_k) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et pour $k \neq l$,

$$\text{Cov}(X_k, X_l) = \mathbb{E}(X_k X_l) - \mathbb{E}(X_k) \mathbb{E}(X_l) = \mathbb{P}(X_k = 1, X_l = 1) - \frac{1}{n^2}$$

A nouveau, on calcule $\mathbb{P}(X_k = 1, X_l = 1)$ par dénombrement. Le nombre de permutations pour lesquelles k et l sont fixes est $(n-2)!$ donc $\mathbb{P}(X_k = 1, X_l = 1) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$. Ainsi $\text{Cov}(X_k, X_l) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$. Finalement,

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \sum_{1 \leq k \neq l \leq n} \frac{1}{n^2(n-1)} = 1 - \frac{1}{n} + n(n-1) \frac{1}{n^2(n-1)} = 1$$

car $\text{card}(\{(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, k \neq l\}) = n(n-1)$.

Solution 17

Notons F la variable aléatoire qui désigne le nombre de «faces» obtenus avec n lancers. Alors $F \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $p = 1/2$. Donc $\mathbb{E}(F) = np =$

$n/2$ et $V(F) = np(1-p) = n/4$.

Notons $X = F/n$ la fréquence des «faces» parmi les n lancers.

$$E(X) = E\left(\frac{F}{n}\right) = \frac{E(F)}{n} = \frac{1}{2},$$

$$V(X) = V\left(\frac{F}{n}\right) = \frac{V(F)}{n^2} = \frac{1}{4n}.$$

D'après l'inégalité de Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Dans notre cas,

$$P(|X - 0,5| > \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Par passage au contraire cela s'écrit

$$1 - P(|X - 0,5| \leq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

ou encore

$$P(|X - 0,5| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

En prenant $\varepsilon = 0,05$, on a donc

$$P(0,45 \leq X \leq 0,55) \geq 1 - \frac{100}{n}$$

En prenant $n = 1000$, on a alors bien

$$P(0,45 \leq X \leq 0,55) \geq 0,9$$

Dénombrabilité

Solution 18

On rappelle que \mathbb{Q} est dénombrable.

Supposons qu'il existe une telle application f . Alors $f(\mathbb{Q})$ est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis. En effet, $f(\mathbb{Q}) = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{f(x)\}$. Par ailleurs, $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ donc $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est également au plus dénombrable. Enfin, $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{Q}) \cup f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est au plus dénombrable comme réunion de deux tels ensembles.

On remarque maintenant que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle de \mathbb{R} comme image de l'intervalle \mathbb{R} par une application continue. Mais les intervalles non réduits à un point ne sont pas finis ou dénombrables donc $f(\mathbb{R})$ est un point $\{a\}$. Mais alors $f(\mathbb{Q}) = f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{a\}$ et donc $\{a\} \subset \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$, ce qui est absurde.

Solution 19

Notons A l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{Z}[X]$ et A_d l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{Z}[X]$ de degré d . Remarquons que l'ensemble des entiers algébriques est

$$E = \bigcup_{P \in A} P^{-1}(\{0\}) = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} \bigcup_{P \in A_d} P^{-1}(\{0\})$$

Pour tout $P \in A$, l'ensemble $P^{-1}(\{0\})$ est fini. De plus, l'ensemble A_d est dénombrable puisqu'il est en bijection avec \mathbb{Z}^d via l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^d & \longrightarrow & A_d \\ (a_0, \dots, a_{d-1}) & \longmapsto & X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k \end{array} \right.$$

et que \mathbb{Z}^d est lui-même dénombrable comme produit cartésien fini d'ensembles dénombrables. Ainsi pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{P \in A_d} P^{-1}(\{0\})$ est au plus dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis. Finalement, E est également au plus dénombrable comme union dénombrable de tels ensembles. De plus, E n'est clairement pas fini puisque $\mathbb{Z} \subset E$ (tout entier relatif n est racine du polynôme $X - n$) donc E est dénombrable.

Solution 20

Supposons (i) et montrons (ii). On sait qu'il existe une bijection de A sur \mathbb{N} . Cette bijection est a fortiori une injection de A dans l'ensemble dénombrable \mathbb{N} .

Supposons (ii) et montrons (i). Il existe une injection f de A sur un ensemble dénombrable B . Par définition, il existe une bijection g de B sur \mathbb{N} . Alors $g \circ f$ est une injection de A sur \mathbb{N} donc une bijection de A sur $g \circ f(A)$, qui est une partie de \mathbb{N} . Ainsi A est dénombrable.

Supposons (i) et montrons (iii). On sait qu'il existe une bijection de \mathbb{N} sur A . Cette bijection est a fortiori une surjection de l'ensemble dénombrable \mathbb{N} sur A .

Supposons (iii) et montrons (i). Il existe une surjection g d'un ensemble dénombrable B sur A . Par définition, il existe une bijection f de \mathbb{N} sur B . Alors $f \circ g$ est une surjection de \mathbb{N} sur A . Considérons une application qui à tout élément de A associe l'un de ses antécédents par $f \circ g$ (il en existe toujours au moins un par surjectivité de $f \circ g$). Par construction, cette application est une bijection de A sur une partie de \mathbb{N} (l'ensemble des antécédents choisis) de sorte que A est dénombrable.

Solution 21

Remarquons que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $S_\varepsilon = \{j \in J, |a_j| \geq \varepsilon\}$ est fini car $(a_j)_{j \in J}$ est sommable. Il suffit alors de remarquer que $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} S_{1/n}$ de sorte que S est au plus dénombrable en tant que réunion dénombrable d'ensembles finis.

Généralités**Solution 22**

1. a. La suite (B_n) est décroissante pour l'inclusion. Ainsi, par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n)$$

- b. Par ailleurs,

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

Ainsi $\mathbb{P}(B_n)$ est majorée par le reste d'une série convergente donc $\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$.

2. a. Soit $k \in \llbracket n, n+p \rrbracket$. Par convexité de l'exponentielle,

$$\mathbb{P}(\overline{A_k}) = 1 - \mathbb{P}(A_k) \leq \exp(-\mathbb{P}(A_k))$$

Ainsi

$$\prod_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(\overline{A_k}) \leq \prod_{k=n}^{n+p} \exp(-\mathbb{P}(A_k))$$

Comme les $\overline{A_k}$ sont mutuellement indépendants,

$$\prod_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{A_k}\right)$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{A_k}\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(A_k)\right)$$

- b. Posons $C_{n,p} = \bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{A_k}$. Fixons $n \in \mathbb{N}$. La suite $(C_{n,p})_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion. Par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}(\overline{B_n}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{p \in \mathbb{N}} C_{n,p}\right) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_{n,p})$$

Comme la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ diverge vers $+\infty$, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(A_k) = +\infty$ et donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} \exp\left(-\sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(A_k)\right) = 0$. D'après la question précédente, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_{n,p}) = 0$. On en déduit que $\mathbb{P}(\overline{B_n}) = 0$. Ainsi

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_n}\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\overline{B_n}) = 0$$

Finalement, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 0$ et donc $\mathbb{P}(A) = 1$.

Solution 23

1. L'événement $A_{k,p}$: «le joueur J_k gagne au $p^{\text{ème}}$ tour» correspond à

- les joueurs J_1, \dots, J_n perdent leurs $p - 1$ premiers tours ;
- les joueurs J_1, \dots, J_{k-1} perdent lors du $p^{\text{ème}}$ tour ;
- le joueur J_k gagne.

Ainsi

$$\mathbb{P}(A_{k,p}) = (q_1 \dots q_n)^{p-1} (q_1 \dots q_{k-1}) p_k$$

Comme $G_k = \bigsqcup_{p \in \mathbb{N}^*} A_{k,p}$,

$$\mathbb{P}(G_k) = \sum_{p=1}^{+\infty} (q_1 \dots q_n)^{p-1} (q_1 \dots q_{k-1}) p_k = \frac{(q_1 \dots q_{k-1}) p_k}{1 - q_1 \dots q_n}$$

2. Posons pour simplifier, $u_k = \prod_{i=1}^k q_i$ (en convenant que $u_0 = 1$). Alors

$$\mathbb{P}(G_k) = \frac{u_{k-1} - u_k}{1 - u_n}$$

En notant $G = \bigsqcup_{k=1}^n G_k$ l'événement «l'un des joueurs gagne» i.e. «le jeu se finit», on a par télescopage

$$\mathbb{P}(G) = \sum_{k=1}^n \frac{u_{k-1} - u_k}{1 - u_n} = \frac{u_0 - u_n}{1 - u_n} = 1$$

Le jeu se finit donc presque sûrement.

3. Le jeu est équitable si et seulement si $\mathbb{P}(G_{k+1}) = \mathbb{P}(G_k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ i.e. $p_k = q_k p_{k+1}$ ou encore $\frac{1}{p_{k+1}} = \frac{1}{p_k} - 1$.

Ceci équivaut à $\frac{1}{p_k} = \frac{1}{p_1} - (k-1)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour que les p_k soient bien des probabilités, il faut que $\frac{1}{p_k} \geq 1$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ i.e. $\frac{1}{p_1} \geq k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ou encore $p_1 \geq \frac{1}{n}$.

4. Notons T le nombre de coups joués. Comme T est une variable aléatoire positive, elle admet une espérance (éventuellement infinie). Remarquons que pour $(p, k) \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 1, n \rrbracket$, $\{T = n(p-1) + k\} = A_{k,p}$. Remarquons également que

$$\mathbb{N}^* = \bigsqcup_{k=1}^n \{n(p-1) + k, p \in \mathbb{N}^*\}$$

Par sommation par paquets (licite car tous les termes sont positifs),

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(T) &= \sum_{t=1}^{+\infty} t \mathbb{P}(T = t) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{+\infty} (n(p-1) + k) \mathbb{P}(T = n(p-1) + k) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{+\infty} u_n^{p-1} (u_{k-1} - u_k) (n(p-1) + k) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{p=0}^{+\infty} u_n^p (u_{k-1} - u_k) (np + k) \\
 &= \sum_{k=1}^n (u_{k-1} - u_k) \left[n \sum_{p=0}^{+\infty} p u_n^p + k \sum_{p=0}^{+\infty} u_n^p \right] \\
 &= \sum_{k=1}^n (u_{k-1} - u_k) \left[\frac{nu_n}{(1-u_n)^2} + \frac{k}{1-u_n} \right] \\
 &= \frac{nu_n}{(1-u_n)^2} \sum_{k=1}^n u_{k-1} - u_k + \frac{1}{1-u_n} \sum_{k=1}^n k(u_{k-1} - u_k) \\
 &= \frac{nu_n}{1-u_n} + \frac{1}{1-u_n} \left(\sum_{k=1}^n ((k-1)u_{k-1} - ku_k) + \sum_{k=1}^n u_{k-1} \right) \\
 &= \frac{nu_n}{1-u_n} + \frac{1}{1-u_n} \left(-nu_n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k \right) \\
 &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} u_k}{1-u_n}
 \end{aligned}$$

Solution 24

1. On note B_{2n-1} l'événement « A_1 touche la cible au tour $2n-1$ » et C_{2n} l'événement « A_2 touche la cible au tour $2n$ ». On note également D_{2n+1} l'événement « A_1 l'emporte au tour $2n+1$ ». Alors

$$D_{2n+1} = \left(\bigcap_{i=1}^n \overline{B_{2i-1}} \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n C_{2i} \right) \cap B_{2n+1}$$

Par indépendance des tirs,

$$\mathbb{P}(D_{2n+1}) = \left(\prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\overline{B_{2i-1}}) \right) \left(\prod_{i=1}^n \mathbb{P}(C_{2i}) \right) \mathbb{P}(B_{2n+1}) = (1-p_1)^n (1-p_2)^n p_1$$

2. Notons E_{2n+2} l'événement « A_2 l'emporte au tour $2n+2$ ». De la même manière

$$\mathbb{P}(E_{2n+2}) = (1-p_1)^{n+1} (1-p_2)^n p_2$$

3. Notons D l'événement « A_1 l'emporte» et E l'événement « A_2 l'emporte». Alors $D = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} D_{2n+1}$ et $E = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} E_{2n+2}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(D) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(D_{2n+1}) = \frac{p_1}{1 - (1-p_1)(1-p_2)} \\
 \mathbb{P}(E) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_{2n+2}) = \frac{(1-p_1)p_2}{1 - (1-p_1)(1-p_2)}
 \end{aligned}$$

Notons F l'événement «le jeu dure indéfiniment». Alors $\bar{F} = D \sqcup E$ donc

$$\mathbb{P}(\bar{F}) = \frac{p_1}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)} + \frac{(1 - p_1)p_2}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)}$$

En posant $q_i = 1 - p_i$, on a donc

$$\mathbb{P}(\bar{F}) = \frac{1 - q_1 + q_1(1 - q_2)}{1 - q_1q_2} = 1$$

puis $\mathbb{P}(F) = 0$.

4. Le jeu est équitable à condition que $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(E)$ i.e. $p_1 = (1 - p_1)p_2$ i.e. $p_2 = \frac{p_1}{1 - p_1}$. Si $p_1 > 1/2$, alors $1 - p_1 < 1/2$ donc $\frac{p_1}{1 - p_1} > 1$ et il est impossible d'avoir $p_2 > 1$. Le jeu n'est donc pas équitable.

Probabilités conditionnelles

Solution 25

- On a clairement $p_0 = 0$ et $p_1 = 1 - p$.
- Comme $D_n \subset D_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (p_n) est croissante. Comme elle est majorée par 1 (c'est une suite de probabilités), elle converge.
- Notons A l'événement «la fleur F_0 a des descendants».
 - Si la fleur F_0 n'a pas de descendants, alors sa lignée est éteinte à l'instant $n + 1$ i.e. $\mathbb{P}(D_{n+1} | \bar{A}) = 1$.
 - Si la fleur F_0 a des descendants, sa lignée est éteinte à l'instant $n + 1$ si chacun de ses deux descendants à sa lignée éteinte à l'instant $n + 1$. Les deux lignées étant indépendantes, on a par translation $\mathbb{P}(D_{n+1} | A) = p_n^2$.

D'après la formule des probabilités totales

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(D_{n+1}) = \mathbb{P}(D_{n+1} | \bar{A})\mathbb{P}(\bar{A}) + \mathbb{P}(D_{n+1} | A)\mathbb{P}(A) = (1 - p) + pp_n^2$$

4. On sait que (p_n) converge vers $\ell \in [0, 1]$. Elle converge alors nécessairement vers un point fixe de $f : x \mapsto px^2 + 1 - p$. Si $p = 0$, ce point fixe est évidemment 1, sinon c'est une racine du trinôme $pX^2 - X + 1 - p$, à savoir 1 ou $\frac{1-p}{p}$. Si $p < \frac{1}{2}$, $\frac{1-p}{p} > 1$ donc $\ell = 1$. Sinon $\frac{1-p}{p} \leq 1$ et, comme f est croissante sur \mathbb{R}_+ , on prouve aisément que $\left[0, \frac{1-p}{p}\right]$ est stable par f . Comme $p_0 = 0 \in \left[0, \frac{1-p}{p}\right]$, (p_n) est à valeurs dans $\left[0, \frac{1-p}{p}\right]$ et donc $\ell = \frac{1-p}{p}$.

Pour récapituler, (p_n) converge vers 1 si $p < \frac{1}{2}$ et 0 sinon.

On peut vérifier à l'aide d'une simulation avec Python.

```
>>> import numpy.random as rd
>>>
>>> rd.seed(0)
>>>
>>> def proba_simulee(p):
...     N=100
...     morts=0
...     nb=10000
...     for _ in range(nb):
...         n=1
...         cpt=0
...         while n!=0 and n<N:
...             n=sum(2*rd.binomial(1,p,n))
```



```

...         cpt+=1
...         if n==0:
...             morts+=1
...         return morts/nb
...
>>> def proba_theorique(p):
...     return 1 if p<1/2 else (1-p)/p
...
>>> nb_tests=20
>>> [(i/nb_tests, proba_simulee(i/nb_tests), proba_theorique(i/nb_tests)) for i in
    range(nb_tests+1)]
[(0.0, 1.0, 1), (0.05, 1.0, 1), (0.1, 1.0, 1), (0.15, 1.0, 1), (0.2, 1.0, 1), (0.25, 1.0, 1),
  (0.3, 1.0, 1), (0.35, 1.0, 1), (0.4, 1.0, 1), (0.45, 1.0, 1), (0.5, 0.9893, 1.0), (0.55,
  0.8185, 0.818181818181818), (0.6, 0.6606, 0.666666666666667), (0.65, 0.5432,
  0.5384615384615384), (0.7, 0.4315, 0.4285714285714286), (0.75, 0.3384, 0.3333333333333333),
  (0.8, 0.2465, 0.2499999999999999), (0.85, 0.1801, 0.17647058823529416), (0.9, 0.1165,
  0.1111111111111111), (0.95, 0.0549, 0.05263157894736847), (1.0, 0.0, 0.0)]

```

Solution 26

Notons F (resp. P) l'événement «on a obtenu face (resp. pile) au premier lancer» ainsi que G_n l'événement «on a obtenu exactement n points au cours du jeu». D'après la formule des probabilités totales :

$$g_{n+2} = \mathbb{P}(G_{n+2}) = \mathbb{P}(G_{n+2} \mid P_1)\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}(G_{n+2} \mid F_1)\mathbb{P}(F_1)$$

Or il est clair que $\mathbb{P}(G_{n+2} \mid P_1) = g_{n+1}$ et $\mathbb{P}(G_{n+2} \mid F_1) = g_n$. Ainsi

$$g_{n+2} = pg_{n+1} + qg_n$$

Le polynôme caractéristique est $X^2 - pX - q = X^2 - pX + p - 1$. Son discriminant est $p^2 - 4p + 4 = (p - 2)^2$ donc ses racines sont $p - 1$ et 1. On en déduit qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, g_n = A + B(p - 1)^n$$

Or $g_0 = 1$ et $g_1 = \mathbb{P}(P_1) = p$. On en déduit que

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A + B(p - 1) = p \end{cases}$$

On en déduit que $A = \frac{1}{2-p}$ et $B = \frac{1-p}{2-p}$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_n = \frac{1 - (p - 1)^{n+1}}{2 - p}$$

REMARQUE. On peut être plus rigoureux pour déterminer la relation de récurrence. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_k = 2) = q$. Posons $S_p = \sum_{k=1}^p X_k$ pour $p \in \mathbb{N}$ (en particulier, $S_0 = 0$). Alors

$$G_n = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{S_p = n\}$$

puis

$$G_{n+2} = (G_{n+2} \cap \{X_1 = 1\}) \sqcup (\mathbb{P}(G_{n+2} \cap \{X_1 = 2\}))$$

Or pour $j \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned}
 G_{n+2} \cap \{X_1 = j\} &= \bigcup_{p \in \mathbb{N}} (\{S_p = n+2\} \cap \{X_1 = j\}) && \text{par distributivité de l'intersection sur l'union} \\
 &= \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} (\{S_p = n+2\} \cap \{X_1 = j\}) && \text{car } S_0 = 0 \text{ et } n+2 > 0 \\
 &= \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \left(\left\{ \sum_{k=2}^p X_k = n+2-j \right\} \cap \{X_1 = j\} \right) \\
 &= \left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \left\{ \sum_{k=2}^p X_k = n+2-j \right\} \right) \cap \{X_1 = j\} && \text{par distributivité de l'intersection sur l'union}
 \end{aligned}$$

D'après le lemme des coalitions, $\sum_{k=2}^p X_k$ et X_1 sont indépendantes donc

$$\mathbb{P}(G_{n+2} \cap \{X_1 = j\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \left\{ \sum_{k=2}^p X_k = n+2-j \right\}\right) \mathbb{P}(\{X_1 = j\})$$

Or $\sum_{k=2}^p X_k$ a la même loi que S_{p-1} . En effet, les X_k étant indépendantes et de même loi,

$$G_{\sum_{k=2}^p X_k} = \prod_{k=2}^p G_{X_k} = \prod_{k=1}^{p-1} G_{X_k} = G_{S_{p-1}}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \left\{ \sum_{k=2}^p X_k = n+2-j \right\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \{S_{p-1} = n+2-j\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{S_p = n+2-j\}\right) = g_{n+2-j}$$

Finalement

$$g_{n+2} = \mathbb{P}(G_{n+2} \cap \{X_1 = 1\}) + \mathbb{P}(G_{n+2} \cap \{X_1 = 2\}) = g_{n+1} \mathbb{P}(X_1 = 1) + g_n \mathbb{P}(X_1 = 2) = pg_{n+1} + qg_n$$

Solution 27

Notons A l'événement «obtenir deux piles consécutifs». Dans la suite, on notera F_n (resp. P_n) l'événement «on a obtenu "pile" (resp. "face") au $n^{\text{ème}}$ lancer.

On va plutôt s'intéresser à l'événement \bar{A} et on note $q = \mathbb{P}(\bar{A})$. Remarquons que $F_1, P_1 \cap F_2$ et $P_1 \cap P_2$ forment un système complet d'événements. On écrit la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(\bar{A} \mid F_1) \mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(\bar{A} \mid P_1 \cap F_2) \mathbb{P}(P_1 \cap F_2) + \mathbb{P}(\bar{A} \mid P_1 \cap P_2) \mathbb{P}(P_1 \cap P_2)$$

- Si on a obtenu une face au premier lancer, il suffit de ne pas obtenir deux piles consécutifs au cours des lancers suivants. Autrement dit, $\mathbb{P}(\bar{A} \mid F_1) = q$.
- Si on a obtenu une pile puis une face, il suffit encore de ne pas obtenir deux piles consécutifs au cours des lancers suivants. Autrement dit, $\mathbb{P}(\bar{A} \mid P_1 \cap F_2) = q$.
- Enfin, il est clair que $\mathbb{P}(\bar{A} \mid P_1 \cap P_2) = 0$.

Ainsi $q = (1-p)q + p(1-p)q$ ou encore $qp^2 = 0$. Comme $p > 0$, $q = 0$ puis $\mathbb{P}(A) = 1$.

Variables aléatoires

Solution 28

1. Posons $I_k = \int_0^1 x^k(1-x)^r dx$. Comme les I_k sont clairement positifs, il s'agit de montrer que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} rI_k$ converge et a pour somme 1.

Première méthode :

On prouve par une suite d'intégration par parties que

$$\forall k \in \mathbb{N}, I_k = \frac{k!}{\prod_{i=1}^{k+1} (r+i)}$$

On fait apparaître un télescopage en remarquant que $r = (r+k+1) - (k+1)$. Ainsi $rI_k = u_k - u_{k+1}$ en posant $u_k = \frac{k!}{\prod_{i=1}^k (r+i)}$.

On montre maintenant que la suite (u_k) converge vers 0. En effet,

$$\ln(u_k) = -\sum_{i=1}^k \ln\left(1 + \frac{r}{i}\right)$$

Or $\ln\left(1 + \frac{r}{i}\right) \underset{i \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{r}{i}$, donc, par sommation de relations de comparaison pour des séries à termes positifs divergente,

$$\ln(u_k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\sum_{i=1}^k \frac{r}{i}$$

Comme la série harmonique diverge vers $+\infty$, la suite $(\ln(u_k))$ diverge vers $-\infty$ et la suite (u_k) converge donc vers 0. La série télescopique $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k - u_{k+1}$ i.e. la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} rI_k$ converge donc et a pour somme $u_0 = 1$.

Deuxième méthode :

On utilise le théorème de convergence dominée. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1[, 0 \leq \sum_{k=1}^n x^{k-1}(1-x)^r \leq \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k-1}(1-x)^r = (1-x)^{r-1}$$

Or la fonction $x \mapsto (1-x)^{r-1}$ est intégrable sur $[0, 1[$ par critère de Riemann ($r-1 > -1$). On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) = r \int_0^1 (1-x)^{r-1} dx = 1$$

2. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k\mathbb{P}(X = k)$ converge, c'est-à-dire si et seulement si la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} r(k+1)I_k$ converge, l'espérance étant alors la somme de cette série. Les calculs précédents montrent que

$$\forall k \in \mathbb{N}, (k+1)I_k = \frac{(k+1)!}{\prod_{i=1}^{k+1} (r+i)}$$

Si $r \leq 1$,

$$(k+1)I_k \geq \frac{(k+1)!}{\prod_{i=1}^{k+1} (1+i)} = \frac{1}{k+2}$$

donc la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} r(k+1)I_k$ diverge par comparaison à la série harmonique.

On montre maintenant la convergence dans le cas $r > 1$.

Première méthode : On peut à nouveau faire apparaître un télescopage en remarquant que

$$r(k+1)I_{k+1} = \frac{r}{r-1}(v_k - v_{k+1})$$

avec $v_k = \frac{(k+1)!}{\prod_{i=1}^k (r+i)}$. En posant $s = r-1 > 0$, on a donc

$$v_k = (r+1) \frac{(k+1)!}{\prod_{i=1}^{k+1} (s+i)}$$

Quitte à changer r en s dans la question précédente, on a $v_k = (r+1)u_{k+1}$ de sorte que (v_k) converge encore vers 0. La série télescopique $\sum_{k \in \mathbb{N}} v_k - v_{k+1}$ converge donc et a pour somme $v_0 = 1$. La série $\sum_{k \in \mathbb{N}} r(k+1)I_k$ converge donc également et a pour somme $\frac{r}{r-1}$ qui est donc l'espérance de X .

Deuxième méthode : On peut encore utiliser le théorème de convergence dominée. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1[, \sum_{k=1}^n kx^{k-1}(1-x)^r \leq \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}(1-x)^r = (1-x)^{r-2}$$

Or la fonction $x \mapsto (1-x)^{r-2}$ est intégrable sur $[0, 1[$ par critère de Riemann ($r-2 > -1$). On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X=k) = r \int_0^1 (1-x)^{r-1} dx = 1$$

Solution 29

Le fait qu'une suite réelle (u_n) converge vers 0 s'écrit :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, -\varepsilon \leq u_p \leq \varepsilon$$

On montre aisément que ceci équivaut à

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, -\frac{1}{2^k} \leq u_p \leq \frac{1}{2^k}$$

On en déduit que

$$A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} \left\{ X_p \in \left[-\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k} \right] \right\}$$

Comme les X_p sont des variables aléatoires, les $\left\{ X_p \in \left[-\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k} \right] \right\}$ sont des événements. Ainsi A est un événement comme réunions et intersections dénombrables d'événements.

Solution 30

1. Y est à valeurs dans $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$. Notons X_k la variable aléatoire donnant le numéro du jeton obtenu au tirage $n^{\circ}i$. Alors pour entier $n \geq 2$

$$\{Y = n\} = \bigsqcup_{i=1}^3 \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \{X_k = i\} \right) \cap \{X_n \neq i\}$$

Par indépendance des tirages,

$$\mathbb{P}(Y = n) = 3 \cdot \frac{1}{3}^{n-1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3^{n-1}}$$

2. $Y - 1$ est à valeurs dans \mathbb{N}^* et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y - 1 = n) = \mathbb{P}(Y = n + 1) = \frac{2}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}$$

Ainsi Y suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

3. On sait alors que $\mathbb{E}(Y - 1) = 3$ et $\mathbb{V}(Y - 1) = 6$. Donc $\mathbb{E}(Y) = 4$ et $\mathbb{V}(Y) = 6$.
4. Remarquons que (Y, Z) est à valeurs dans $\{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2, 2 \leq k < \ell\} \cup \{(+\infty, +\infty)\}$. De plus, pour $2 \leq k < \ell$,

$$\mathbb{P}((Y, Z) = (k, \ell)) = \mathbb{P}(Y = k) \mathbb{P}(Z = \ell \mid Y = k) = \frac{2}{3^{k-1}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-k-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2^{\ell-k}}{3^{\ell-1}}$$

5. \mathbb{Z} est à valeurs dans $\llbracket 3, +\infty \rrbracket$. Pour tout entier $\ell \geq 3$,

$$\mathbb{P}(Z = \ell) = \sum_{k=2}^{\ell-1} \mathbb{P}((Y, Z) = (k, \ell)) = \sum_{k=2}^{\ell-1} \frac{2^{\ell-k}}{3^{\ell-1}} = \frac{2^{\ell-1}}{3^{\ell-1}} \left(1 - \frac{1}{2^{\ell-2}}\right)$$

On peut vérifier avec Python.

```
from random import randint

def Z():
    X=randint(1,3)
    Y=randint(1,3)
    n=2
    while X==Y:
        Y=randint(1,3)
        n+=1
    Z=randint(1,3)
    n+=1
    while Y==Z or X==Z:
        Z=randint(1,3)
        n+=1
    return n

def frequencies(l):
    proba_theorique = lambda i: 2**(i-1)/3**(i-1)*(1-1/2**(i-2))
    proba_empirique = lambda i: l.count(i)/len(l)
    return [(proba_theorique(i), proba_empirique(i)) for i in range(3,max(l)+1)]

>>> frequencies([Z() for _ in range(100000)])
[(0.2222222222222222, 0.22267), (0.2222222222222222, 0.22117), (0.1728395061728395, 0.17327),
 (0.1234567901234568, 0.12389), (0.0850480109739369, 0.08669), (0.05761316872427984, 0.05584),
 (0.03871361073007164, 0.03852), (0.025910684346898336, 0.02558), (0.017307659740215753,
 0.01737), (0.011549729885349455, 0.01163), (0.007703583276412622, 0.00785),
 (0.005136976635223854, 0.00512), (0.003425069240465493, 0.00335), (0.0022835188770824145,
 0.00239), (0.001522392379201194, 0.00155), (0.0010149437398495463, 0.00111),
 (0.0006766343222492809, 0.00064), (0.00045109126894938174, 0.00051), (0.00030072808622731934,
 0.00026), (0.00020048558201634563, 0.00028), (0.00013365711841027467, 9e-05),
 (8.910476685108673e-05, 7e-05), (5.9403184982136813e-05, 4e-05), (3.9602125681895316e-05,
 8e-05), (2.6401417908087134e-05, 2e-05), (1.760094553433262e-05, 0.0),
 (1.1733963776979923e-05, 0.0), (7.82264254712823e-06, 0.0), (5.215095041132692e-06, 1e-05)]
```

Solution 31

On rappelle que pour $|q| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

1. On doit avoir $\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j, Y = k) = 1$. Or

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{j+k}{2^{j+k}} = 2 \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} \right) = 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 8$$

donc $a = \frac{1}{8}$.

2. Pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = j) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j, Y = k) = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{j+k}{2^{j+k}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^j} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} + j \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \right) = \frac{1}{2^{j+3}} (2 + 2j) = \frac{j+1}{2^{j+2}}$$

Par symétrie, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{k+1}{2^{k+2}}$$

3. On remarque par exemple que

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)$$

Ainsi X et Y ne sont pas indépendantes.

4. Remarquons que

$$\{X = Y\} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{X = n\} \cap \{Y = n\}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = n) = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n}{2^{2n}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{9}$$

Lois usuelles

Solution 32

Z est à valeurs dans \mathbb{N}^* puisque X et Y le sont. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $\{Z \geq k\} = \{X \geq k\} \cap \{Y \geq k\}$ donc par indépendance de X et Y :

$$\mathbb{P}(Z \geq k) = \mathbb{P}(\{X \geq k\} \cap \{Y \geq k\}) = \mathbb{P}(X \geq k)\mathbb{P}(Y \geq k)$$

Puisque $\{X \geq k\} = \bigsqcup_{n=k}^{+\infty} \{X = n\}$,

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} (1 - p_1)^{n-1} p_1 = (1 - p_1)^{k-1}$$

REMARQUE. On aurait pu se passer du calcul de somme de série puisqu'une loi géométrique représente la loi du premier succès.

De la même manière

$$\mathbb{P}(Y \geq k) = (1 - p_2)^{k-1}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(Z \geq k) = (1 - p_1)^{k-1} (1 - p_2)^{k-1}$$

On constate enfin que

$$\{Z \geq k\} = \{Z = k\} \sqcup \{Z \geq k+1\}$$

donc

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \geq k) - \mathbb{P}(Z \geq k+1) = (1 - p_1)^{k-1} (1 - p_2)^{k-1} - (1 - p_1)^k (1 - p_2)^k$$

Solution 33

1. Remarquons que

$$\{X = Y\} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} (\{X = n\} \cap \{Y = n\})$$

Ainsi par indépendance de X et Y ,

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} ((1 - p)^{n-1} p)^2 = p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - p)^{2n} = \frac{p^2}{1 - (1 - p)^2} = \frac{p}{2 - p}$$

2. $X + Y$ est à valeurs dans $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$. Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. Remarquons que

$$\{X + Y = n\} = \bigsqcup_{k=1}^{n-1} (\{X = k\} \cap \{Y = n - k\})$$

A nouveau par indépendance de X et Y ,

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k) = \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k-1} p (1-p)^{n-k-1} p = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

REMARQUE. On aurait aussi pu utiliser les fonctions génératrices de X et Y .

3. Puisque $\{Z > n\} = \bigsqcup_{k \geq n+1} \{Z = k\}$,

$$\mathbb{P}(Z > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p = p(1-p)^n \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = (1-p)^n$$

REMARQUE. Ceci est cohérent avec l'interprétation de la loi géométrique comme loi du premier succès.

4. On remarque que

$$\{Z > X + Y\} = \bigsqcup_{n \geq 2} (\{Z > n\} \cap \{X + Y = n\})$$

Par indépendance de Z et $X + Y$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z > X + Y) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(Z > n) \mathbb{P}(X + Y = n) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} (1-p)^n (n-1)p^2(1-p)^{n-2} \\ &= p^2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)(1-p)^{2n-2} \\ &= p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{2n} \\ &= p^2(1-p)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{2(n-1)} \\ &= \frac{p^2(1-p)^2}{(1-(1-p)^2)^2} \end{aligned}$$

car $\sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$ pour $t \in]-1, 1[$. En simplifiant

$$\mathbb{P}(Z > X + Y) = \frac{(1-p)^2}{(2-p)^2}$$

On peut vérifier avec Python.

```
>>> import numpy.random as rd
>>>
>>> rd.seed(0)
>>>
>>> p=.2
>>> n=10000
```

```
>>> X=rd.geometric(p,n)
>>> Y=rd.geometric(p,n)
>>> Z=rd.geometric(p,n)
>>> sum(Z>X+Y)/n
0.2008
>>> (1-p)**2/(2-p)**2
0.19753086419753088
```

Solution 34

1. La loi de X est une loi géométrique de paramètre $1/2$.
2. Notons B l'événement consistant à obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience. Alors

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (B \cap \{X = n\})$$

Or

$$\mathbb{P}(B \cap X = n) = \mathbb{P}_{X=n}(B) \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n}$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n}$$

Comme

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

on obtient par intégration

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(B) = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

On peut vérifier avec Python.

```
>>> from random import random, seed
>>> from math import log
>>>
>>> seed(0)
>>>
>>> def simul():
...     nb=1
...     while random()<.5:
...         nb+=1
...     return random()<1/nb
...
>>> N=10**5
>>> sum([simul() for n in range(N)])/N
0.69218
>>> log(2)
0.6931471805599453
```


Solution 35

1. X et Y sont à valeurs dans \mathbb{N}^* et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = (1 - p)^{n-1}p$$

2. a. U et V sont respectivement à valeurs dans \mathbb{N}^* et \mathbb{Z} . Soit alors $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$.
Traisons d'abord le cas où $m = 0$. Alors

$$\{(U, V) = (n, 0)\} = \{X = n\} \cap \{Y = n\}$$

donc, par indépendance de X et Y

$$\mathbb{P}((U, V) = (n, 0)) = \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = n) = p^2(1 - p)^{2n-2}$$

Traisons maintenant le cas $m > 0$. Alors

$$\{(U, V) = (n, m)\} = (\{X = n + m\} \cap \{Y = n\})$$

A nouveau, par indépendance de X et Y ,

$$\mathbb{P}((U, V) = (n, m)) = \mathbb{P}(X = n + m)\mathbb{P}(Y = n) = p^2(1 - p)^{2n+m-2}$$

En intervertissant X et Y , on trouve que si $m < 0$,

$$\mathbb{P}((U, V) = (n, m)) = p^2(1 - p)^{2n-m-2}$$

Dans tous les cas,

$$\mathbb{P}((U, V) = (n, m)) = p^2(1 - p)^{2n+|m|-2}$$

On retrouve alors les lois marginales.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U = n) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(U = n, V = m) \\ &= p^2(1 - p)^{2n-2} + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} p^2(1 - p)^{2n+m-2} \\ &= p^2(1 - p)^{2n-2} + 2p^2(1 - p)^{2n-1} \sum_{m=1}^{+\infty} (1 - p)^{m-1} \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{m=1}^{+\infty} (1 - p)^{m-1} = \frac{1}{1 - (1 - p)} = \frac{1}{p}$$

donc

$$\mathbb{P}(U = n) = p(1 - p)^{2n-2}(2 - p) = ((1 - p)^2)^{n-1}(1 - (1 - p)^2)$$

Notamment, U suit la loi géométrique de paramètre $1 - (1 - p)^2$.

De la même manière

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V = m) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(U = n, V = m) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p^2(1 - p)^{2n+|m|-2} \\ &= p^2(1 - p)^{|m|} \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - p)^{2(n-1)} \\ &= p^2(1 - p)^{|m|} \cdot \frac{1}{1 - (1 - p)^2} = \frac{p(1 - p)^{|m|}}{2 - p} \end{aligned}$$

b. Il s'agit d'une simple vérification :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}, \mathbb{P}(U = n)\mathbb{P}(V = m) = p(1-p)^{2n-2}(2-p) \cdot \frac{p(1-p)^{|m|}}{2-p} = p^2(1-p)^{2n+|m|-2} = \mathbb{P}(\{U = n\} \cap \{V = m\})$$

3. L'énoncé suppose implicitement que U et V sont respectivement à valeurs dans \mathbb{N}^* et \mathbb{Z} . Puisque $X = U + \max(V, 0)$ et $Y = U - \min(V, 0)$, X et Y sont à valeurs dans \mathbb{N}^* .

Posons $p_n = \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par indépendance de U et V d'une part et de X et Y d'autre part,

$$\mathbb{P}(U = n)\mathbb{P}(V = 0) = \mathbb{P}(U = n, V = 0) = \mathbb{P}(X = n, Y = n) = p_n^2$$

De même,

$$\mathbb{P}(U = n)\mathbb{P}(V = 1) = \mathbb{P}(U = n, V = 1) = \mathbb{P}(X = n+1, Y = n) = p_n p_{n+1}$$

Par hypothèse ces deux quantités ne sont pas nulles, donc en divisant membre à membre

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\mathbb{P}(V = 1)}{\mathbb{P}(V = 0)}$$

La suite de terme général $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ est donc constante i.e. la suite (p_n) est géométrique. En notant $1-p$ sa raison, $p_n = (1-p)^{n-1}p_1$.

Mais comme $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$, $p_1 = p$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = (1-p)^{n-1}p$$

donc X et Y suivent bien la loi géométrique de paramètre p .

On a vu plus haut que $1-p = \frac{\mathbb{P}(V = 1)}{\mathbb{P}(V = 0)}$ i.e. $p = 1 - \frac{\mathbb{P}(V = 1)}{\mathbb{P}(V = 0)}$.

Solution 36

1. a. Les variables aléatoires Y_k sont mutuellement indépendantes.

On a clairement $Y_1 = 1$.

b. Y_k suit la loi géométrique de paramètre $\frac{n-k+1}{n} = 1 - \frac{k-1}{n}$. On en déduit que $\mathbb{E}(Y_k) = \frac{n}{n-k+1}$ et que $\mathbb{V}(Y_k) = \frac{\frac{k-1}{n}}{\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2} = \frac{n(k-1)}{(n-k+1)^2}$.

2. On a clairement $X = \sum_{k=1}^n Y_k$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_k) = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n-k+1} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = nH_n$$

3. Par comparaison série/intégrale, on obtient classiquement $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$. Par conséquent, $\mathbb{E}(X) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln n$.

Solution 37

1. D'après une identité de polarisation :

$$2 \operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{V}(V + Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)$$

Or une loi de Poisson a une variance égale à son espérance donc

$$2 \operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X + Y) - \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = 0$$

par linéarité de l'espérance.

2. Soient λ et μ deux réels strictement positifs. Posons $a_n = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ et $b_n = \frac{e^{-\mu}\mu^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Posons également $p_{i,j} = a_i b_j$ pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ de manière générale sauf

$$p_{0,1} = a_0 b_1 - \alpha \quad p_{1,0} = a_1 b_0 + \alpha \quad p_{0,2} = a_0 b_2 + \alpha \quad p_{2,0} = a_2 b_0 - \alpha$$

où l'on choisit par exemple $\alpha = \min\{a_0 b_1, a_2 b_0\}$. La famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est une famille sommable de somme 1 via Fubini. La famille $(p_{i,j})$ est donc également une famille sommable de réels positifs (on a choisi α pour cela) de somme 1. Il existe donc une variable aléatoire Z à valeurs dans \mathbb{N}^2 telle que $\mathbb{P}(Z = (i, j)) = p_{i,j}$. Posons $Z = (X, Y)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_{n,k} = a_n \quad \mathbb{P}(Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_{k,n} = b_n$$

de telle sorte que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ .

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n p_{k,n-k} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!}$$

via la formule du binôme de Newton (l'égalité reste encore valable pour $n = 1$ et $n = 2$ car les α se simplifient). Ainsi $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Enfin, X et Y ne sont pas indépendantes. Par exemple, $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = p_{0,1}$ et $\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 1) = a_0 b_1 \neq p_{0,1}$ puisque $\alpha > 0$.

Solution 38

1. Si n voitures sont passées en 1H, chacune de ces voitures a une probabilité $\frac{1}{m}$ de choisir le guichet n°1. Ainsi la loi de X conditionnée par l'événement $N = n$ est une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{m}$. Autrement dit

$$\mathbb{P}(X = k \mid N = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{m}\right)^k \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k}$$

2. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid N = n) \mathbb{P}(N = n)$$

Or $\mathbb{P}(X = k \mid N = n) = 0$ lorsque $k > n$ donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid N = n) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid N = n+k) \mathbb{P}(N = n+k) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} \left(\frac{1}{m}\right)^k \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!} \\ &= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

3. On reconnaît la somme d'une série exponentielle

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \frac{1}{n!} = e^{\lambda(1-\frac{1}{m})}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\frac{\lambda}{m}} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \frac{1}{k!}$$

Par conséquent, X suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{m}$.

4. C'est du cours : $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \frac{\lambda}{m}$.

Solution 39

1. L'application $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} et $t^n e^{-t^2} = \frac{1}{t^2}$ par croissances comparées. donc l'intégrale I_n converge par comparaison à une intégrale de Riemann.

2. Remarquons que

- $t \mapsto t^{n+1}/(n+1)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ;
- $t \mapsto e^{-t^2}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t^2} = 0$.

Donc, par intégration par parties

$$I_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t^{n+2}}{n+1} e^{-t^2} dt$$

ou encore

$$2I_{n+2} = (n+1)I_n$$

Comme $t \mapsto t e^{-t^2}$ est impaire, $I_1 = 0$. Ainsi $I_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, On montre également que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$$

3. On utilise la formule de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) I_n \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n I_n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n} I_{2n}}{(2n)!} \\ &= e^{-\lambda} \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{2^{2n} n!} \\ &= e^{-\lambda} \sqrt{\pi} e^{\frac{\lambda^2}{4}} \\ &= \sqrt{\pi} e^{-\lambda + \frac{\lambda^2}{4}} \end{aligned}$$

L'utilisation de la formule de transfert est justifiée a posteriori puisque le calcul précédent montre que la série à termes positifs $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = n) I_n$ converge.

Espérance et variance

Solution 40

On utilise la formule de transfert. En posant $q = 1 - p$,

$$\mathbb{E}(1/X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} q^{k-1} p = \frac{p}{q} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q^{k+1}}{k+1}$$

On sait que la série entière $\sum_{k \in \mathbb{N}} x^k$ a pour rayon de convergence 1 et pour somme $\frac{1}{1-x}$. Par intégration d'une série entière

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-q) = -\ln(p)$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}(1/X) = -\frac{p \ln p}{q} = -\frac{p \ln p}{1-p}$$

Solution 41

1. Z est à valeurs dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\{Z \geq k\} = \bigcup_{I \in \mathcal{P}_k(\mathbb{N})} \bigcap_{i \in I} E_i$$

où $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ désigne l'ensemble des parties de \mathbb{N} de cardinal k . L'ensemble $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ est dénombrable puisque l'application qui à une partie $\{x_1, \dots, x_k\}$ de \mathbb{N} (avec $x_1 < \dots < x_k$) associe (x_1, \dots, x_k) est une injection de $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ dans l'ensemble dénombrable \mathbb{N}^k . Par conséquent, $\{Z \geq k\}$ est un événement en tant qu'union dénombrable d'événements. Ensuite

$$\{Z = k\} = \{Z \geq k\} \setminus \{Z \geq k+1\}$$

donc $\{Z = k\}$ est aussi un événement.

Enfin

$$\{Z = \infty\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{Z \geq k\}$$

donc $\{Z = \infty\}$ est aussi un événement comme intersection dénombrable d'événement. Ceci prouve que Z est bien une variable aléatoire.

2. Remarquons que

$$\bar{F} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k$$

donc F est un événement. De plus,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(E_k)$$

Comme la série $\sum \mathbb{P}(E_n)$ converge, la suite de ses restes converge vers 0 i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(E_k) = 0$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right) = 0$$

La suite $\left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour l'inclusion donc, par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}(\bar{F}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right) = 0$$

puis $\mathbb{P}(F) = 1$.

3.

Solution 42

1. On pose $q = 1 - p$. Notons U le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier «pile» et V le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le deuxième «pile» après avoir obtenu le premier «pile». Alors U et V sont des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p . On rappelle que $G_U(t) = G_V(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1} q t^n$. Comme U et V sont indépendantes, $G_{U+V}(t) = G_U(t)G_V(t)$ donc, par produit de Cauchy,

$$G_{U+V}(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) q^{n-2} p t^n$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$, $\mathbb{P}(U + V = n) = (n-1) q^{n-2} p^2$. Or il est clair que $X = U + V - 2$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(U + V = n + 2) = (n+1) q^n p^2$$

2. Par linéarité de l'espérance, X est d'espérance finie et

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(U) + \mathbb{E}(V) - 2 = \frac{2}{p} - 2 = \frac{2q}{p}$$

3. La loi de Y conditionnée par l'événement $X = n$ est la loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k \mid X = n) \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) q^n p^2 = p^2 \frac{q^k}{1-q} = p q^k$$

Autrement dit, $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p . Ainsi $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$.

4. Tout d'abord, Z est à valeurs dans \mathbb{N} puisque $Y \leq X$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$[Z = k] = \bigsqcup_{n=k}^{+\infty} [X = n] \cap [Y = n - k]$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = n - k]) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n - k \mid X = n) \mathbb{P}(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) q^n p^2 \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} q^n p^2 = p^2 \cdot \frac{q^k}{1-q} = p q^k \end{aligned}$$

Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z = k] \cap [Y = n]) &= \mathbb{P}([X = n + k] \cap [Y = n]) \\ &= \mathbb{P}(Y = n \mid X = n + k) \mathbb{P}(X = n + k) \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) q^{n+k} p^2 \\ &= p q^k \cdot p q^n = \mathbb{P}(Z = k) \mathbb{P}(Y = n) \end{aligned}$$

Ceci prouve que Z et Y sont indépendantes.

Solution 43

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, par indépendance de X et Y ,

$$\mathbb{P}(Z > n) = \mathbb{P}([X > n] \cap [Y > n]) = \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(Y > n)$$

De plus

$$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}p = p(1-p)^n \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = \frac{p(1-p)^n}{1-(1-p)} = (1-p)^n$$

De même, $\mathbb{P}(Y > n) = (1-q)^n$. D'après la formule d'antirépartition,

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z > n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n(1-q)^n = \frac{1}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{1}{p+q-pq}$$

Fonctions génératrices**Solution 44**

Comme les X_k sont indépendantes,

$$G_S(t) = \prod_{k=1}^n G_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^n \prod_{k=1}^n e^{\lambda_k(t-1)} = e^{\Lambda(t-1)}$$

en notant $\Lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$. On en déduit que S suit la loi de Poisson de paramètre Λ .

Solution 45

On a alors $G_{X_i}(t) = (1-p+pt)^{n_i}$. Comme les X_i sont indépendantes,

$$G_S(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t) = (1-p+pt)^n$$

en posant $n = \sum_{i=1}^n n_i$. Ainsi $S \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Solution 46

1. Remarquons que S est à valeurs dans \mathbb{N} et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\{S = n\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\{N = n\} \cap \{S_k = n\})$$

en posant $S_k = \sum_{i=0}^k X_i$. Les S_k sont des variables aléatoires comme sommes *finies* de variables aléatoires réelles donc les ensembles $\{S_k = n\}$ sont des événements. Ainsi $\{S = n\}$ est bien un événement comme réunion dénombrable d'événements. S est donc bien une variable aléatoire.

2. Soit $m \in \mathbb{N}$. Puisque $(N = n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements

$$\mathbb{P}(S = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = m, N = n)$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires S et $\sum_{k=1}^n X_k$ coïncident sur l'événement $N = n$ donc

$$\mathbb{P}(S = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n X_k = m, N = n\right)$$

puis par indépendance des variables aléatoires X_1, \dots, X_n, N

$$\mathbb{P}(S = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n X_k = m\right) \mathbb{P}(N = n)$$

Soit $t \in [0, 1]$.

$$G_S(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = m) t^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n X_k = m\right) \mathbb{P}(N = n) t^m$$

Cette égalité et le fait que la famille $\left(\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n X_k = m\right) \mathbb{P}(N = n) t^m\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est une famille de réels positifs permettent d'appliquer le théorème de Fubini de sorte que

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n X_k = m\right) t^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) G_{\sum_{k=1}^n X_k}(t)$$

Or $G_{\sum_{k=1}^n X_k} = G_X^n$ car X_1, \dots, X_n sont indépendantes et de même loi que X donc

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) G_X(t)^n = G_N \circ G_X(t)$$

3. Puisque X et N admettent des espérances finies, G_X est dérivable en 1 et G_N est dérivable en $1 = G_X(1)$. Il s'ensuit que G_S est dérivable en 1 et que

$$G'_S(1) = G'_X(1) G'_N(G_X(1)) = G'_X(1) G'_N(1)$$

Autrement dit, S admet une espérance finie et $E(S) = E(X)E(N)$.

4. Puisque X et N admettent des moments d'ordre deux, G_X est deux fois dérivable en 1 et G_N est deux fois dérivable en $1 = G_X(1)$. Il s'ensuit que G_S est deux fois dérivable en 1 et donc que S admet un moment d'ordre deux. De plus

$$G''_S(1) = G'_X(1)^2 G''_N(G_X(1)) + G''_X(1) G'_N(G_X(1)) = G'_X(1)^2 G''_N(1) + G''_X(1) G'_N(1)$$

puis

$$\begin{aligned} V(S) &= G''_S(1) + G'_S(1) - G'_S(1)^2 \\ &= G'_X(1)^2 G''_N(1) + G''_X(1) G'_N(1) + G'_X(1) G'_N(1) - G'_X(1)^2 G'_N(1)^2 \\ &= G'_X(1)^2 (G''_N(1) + G'_N(1) - G'_N(1)^2) + G'_N(1) (G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2) \\ &= E(X)^2 V(N) + E(N) V(X) \end{aligned}$$

Solution 47

1. Posons $a_n = \frac{n^2 + n + 1}{n!}$. Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 1}{(n^2 + n + 1)(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit que $R = +\infty$.

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1) + 2n + 1}{n!} t^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n}{(n-2)!} t^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+2}}{n!} t^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= t^2 e^t + 2te^t + e^t = (t^2 + 2t + 1)e^t \end{aligned}$$

3. a. On doit avoir $G_X(1) = 1$ donc $\lambda = \frac{1}{4e}$.
- b. On sait que $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$. Or $G'_X(t) = \lambda(t^2 + 4t + 3)e^t$ donc $\mathbb{E}(X) = 2$.
- Par ailleurs, $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$. Or $G''_X(t) = \lambda(t^2 + 6t + 7)e^t$ donc $\mathbb{V}(X) = \frac{7}{2} + 2 - 2^2 = \frac{3}{2}$.

Temps d'arrêt

Solution 48

On note respectivement P_n et F_n le nombre de «piles» et de «faces» obtenus en n coups. En remarquant que $P_n + F_n = n$, l'événement $P_n = 2F_n$ est également l'événement $3F_n = n$. Remarquons que, F_n étant à valeurs entières, l'événement $3F_n = n$ est vide si n n'est pas multiple de 3. Si on note A l'événement dont on recherche la probabilité, alors $\bar{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{F_{3n} = n\}$. $F_{3n} = n$

Notons $T = \min\{n \in \mathbb{N}^*, F_{3n} = n\}$. On convient que $T = \infty$ si F_{3n} n'est jamais égal à n .

Posons $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(F_{3n} = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{2^{3n}}$ et $S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)$.

On vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_{n-k})\mathbb{P}(T = k)$$

$$S_1 = 1 + S_1 S_2$$

$$f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{2^{3n}} = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Finalement

$$\mathbb{P}(T = \infty) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1 - S_2 = \frac{1}{S_1} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + 3}$$

Solution 49

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. T_1 suit la loi géométrique de paramètre p .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\{T_r = n\} = \{S_{n-1} = r-1\} \cap \{X_n = 1\}$$

Or S_{n-1} et X_n sont indépendantes d'après le lemme des coalitions donc

$$\mathbb{P}(T_r = n) = \mathbb{P}(S_{n-1} = r-1) \mathbb{P}(X_n = 1)$$

De plus, S_{n-1} suit la loi de Bernoulli de paramètres $n-1$ et p en tant que somme de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p donc

$$\mathbb{P}(T_r = n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{(n-1)-(r-1)} \cdot p = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

3. **Première méthode.** On remarque que

$$\overline{\{T_r = +\infty\}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{T_r = n\}$$

donc

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(T_r = +\infty) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_r = n) \\ &= \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \\ &= p^r \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} (1-p)^{n-r} \end{aligned}$$

On sait que pour $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

donc en dérivant $r-1$ fois

$$\frac{(r-1)!}{(1-x)^r} = \sum_{n=r-1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-r+1)!} x^{n-r+1}$$

ou encore

$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{n=r-1}^{+\infty} \binom{n}{r-1} x^{n-r+1} = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} x^{n-r}$$

Notamment,

$$\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} (1-p)^{n-r} = \frac{1}{(1-(1-p))^r} = \frac{1}{p^r}$$

On en déduit que $1 - \mathbb{P}(T_r = +\infty) = 1$ i.e. $\mathbb{P}(T_r = +\infty) = 0$.

Deuxième méthode. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\{T_r = +\infty\} \subset \{T_r > n\} = \{S_n \leq r\}$$

donc

$$\mathbb{P}(T_r = +\infty) \leq \mathbb{P}(S_n \leq r)$$

Or

$$\mathbb{P}(S_n \leq r) = \sum_{k=0}^r \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{k=0}^r \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$, $\binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$ donc, par croissances comparées,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 0$$

Par somme finie,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n \leq r) = 0$$

On en déduit à nouveau que $\mathbb{P}(T_r = +\infty) = 0$.

Solution 50

1. Dans la suite, on notera E_n (resp. P_n) l'événement «on a obtenu "pile" (resp. "face") au $n^{\text{ème}}$ lancer.

- $\{X = 2\} = P_1 \cap P_2$ donc $p_2 = \frac{4}{9}$.
- $\{X = 3\} = E_1 \cap P_2 \cap P_3$ donc $p_3 = \frac{4}{27}$.

2. Remarquons que E_1 , $P_1 \cap E_2$ et $P_1 \cap P_2$ forment un système complet d'événements. On écrit la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X = n+2) = \mathbb{P}(X = n+2 \mid E_1) \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(X = n+2 \mid P_1 \cap E_2) \mathbb{P}(P_1 \cap E_2) + \mathbb{P}(X = n+2 \mid P_1 \cap P_2) \mathbb{P}(P_1 \cap P_2)$$

- Lorsque l'on a obtenu face au premier lancer, on doit alors obtenir le premier double pile à la fin des $n+1$ lancers restants. Ainsi $\mathbb{P}(X = n+2 \mid E_1) = p_{n+1}$.
- Lorsque on a déjà obtenu deux piles consécutifs lors des deux premiers lancers, il est désormais impossible d'obtenir le premier double pile au $(n+2)^{\text{ème}}$ lancer. Ainsi $\mathbb{P}(X = n+2 \mid P_1 \cap P_2) = 0$.
- Lorsque l'on a obtenu un pile puis un face lors des deux premiers lancers, on doit alors obtenir le premier double pile à la fin des n lancers restants. Ainsi $\mathbb{P}(X = n+2 \mid P_1 \cap E_2) = p_n$.

Finalement, $p_{n+2} = \frac{1}{3} p_{n+1} + \frac{2}{9} p_n$.

3. Au vu des valeurs de p_2 et p_3 , on doit choisir $p_1 = 0$.

4. Le polynôme caractéristique associé à la relation de récurrence précédente est $X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{2}{9}$. Ses racines sont $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = A \left(\frac{2}{3}\right)^n + B \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

En particulier,

$$\begin{cases} \frac{2}{3}A - \frac{1}{3}B = p_1 = 0 \\ \frac{4}{9}A + \frac{1}{9}B = p_2 = \frac{4}{9} \end{cases}$$

ce qui donne $A = \frac{2}{3}$ et $B = \frac{4}{3}$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

5. On sait que $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$ pour $q \in]-1, 1[$. On en déduit sans peine que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n = \frac{15}{4}$$

Solution 51

1. S_0 est constante égale à 0. Le support de S_1 est clairement $\{-1, 1\}$, $\mathbb{P}(S_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(S_1 = -1) = 1 - p$.

Le support de S_2 est clairement $\{-2, 0, 2\}$, $\mathbb{P}(S_2 = 2) = p^2$, $\mathbb{P}(S_2 = 0) = (1 - p)^2$ et $\mathbb{P}(S_2 = -2) = 2p(1 - p)$.

2. Notons X_n le déplacement vers du point mobile à l'instant n de sorte que $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p$. On suppose implicitement les variables aléatoires X_1, \dots, X_n mutuellement indépendantes. Alors $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ (somme nulle si $n = 0$). Remarquons

que $\frac{1}{2}(X_n + 1)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p . Ainsi $R_n = \frac{1}{2}(S_n + n)$ suit une loi binomiale de paramètres n et p . En particulier, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(R_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Par conséquent, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(S_n = 2k - n) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

On remarque que si n est pair, S_n ne prend que des valeurs paires et que si n est impair, S_n ne prend que des valeurs impaires. Plus précisément,

$$\forall k \in \llbracket -n, n \rrbracket, \mathbb{P}(S_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} (1 - p)^{n-k}$$

et

$$\forall k \in \llbracket -n-1, n \rrbracket, \mathbb{P}(S_{2n+1} = 2k+1) = \binom{2n+1}{n+k+1} p^{n+k+1} (1 - p)^{n-k}$$

3. D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{2n+1} = 0$$

et

$$p_{2n} = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n (1 - p)^n$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in [0, 1]$. La suite (p_n) est donc bornée de sorte que le rayon de convergence de la série entière $\sum p_n t^n$ vaut au moins 1.

On montre classiquement que

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} x^n$$

donc

$$\forall t \in]-1, 1[, P(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n} t^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} (4p(1-p)t^2)^n = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)t^2}}$$

$$\text{car } 0 \leq p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

5. Comme les événements $\{T = n\}$ sont disjoints, la série à termes positifs $\sum q_n$ converge. On en déduit que la série entière $\sum q_n t^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. Notamment sa somme Q est continue sur $[-1, 1]$.
6. En faisant intervenir un produit de Cauchy de deux séries entières, il suffit en fait de prouver que $p_0 = 1$ (ce qui est clair) et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \sum_{k=1}^n p_{n-k} q_k$$

Remarquons que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \{S_n = 0\} &= \bigcup_{k=1}^n \{S_n = 0\} \cap \{T = k\} \\ &= \bigcup_{k=1}^n \left\{ \sum_{j=k+1}^n X_j = 0 \right\} \cap \{T = k\} \end{aligned}$$

Remarquons que l'événement $\{T = k\}$ peut se décrire uniquement à l'aide de X_1, \dots, X_k :

$$\{T = k\} = \left\{ \sum_{j=1}^k X_j = 0 \right\} \cap \left[\bigcap_{\ell=1}^{k-1} \left\{ \sum_{j=1}^{\ell} X_j \neq 0 \right\} \right]$$

donc les événements $\left\{ \sum_{j=k+1}^n X_j = 0 \right\}$ et $\{T = k\}$ sont indépendants d'après le lemme des coalitions. Ainsi

$$p_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{P} \left(\sum_{j=k+1}^n X_j = 0 \right) q_k$$

Or $\sum_{j=k+1}^n X_j$ suit la même loi que S_{n-k} donc

$$p_n = \sum_{k=1}^n p_{n-k} q_k$$

7. Pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$Q(t) = 1 - \frac{1}{P(t)} = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)t^2}$$

En primitivant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[, 1 - \sqrt{1-x} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{2^{2n-1}} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)} x^n$$

On en déduit que

$$\forall t \in]-1, 1[, Q(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)} p^n (1-p)^n t^{2n}$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, q_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)} p^n (1-p)^n \text{ et } \mathbb{P}(T = 2n-1) = 0$$

Enfin $q_0 = 0$.

8. L'événement de l'énoncé est $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{T = n\}$. Comme Q est continue en 1,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{T = n\}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = Q(1) = \lim_{t \rightarrow 1} 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)t^2} = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)} = 1 - |2p-1|$$

On remarque notamment que cette probabilité vaut 1 lorsque $p = \frac{1}{2}$.

9. Si $p \neq \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(T = +\infty) = 1 - |2p-1| > 0$ donc T n'est pas d'espérance finie.

Si $p = \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$. On peut alors considérer que $\mathbb{T}(\Omega) = \mathbb{N}$ et Q est alors la fonction génératrice de T . On remarque que Q n'est pas dérivable en 1. En effet,

$$\forall t \in]-1, 1[, \frac{Q(t) - Q(1)}{t - 1} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t} = \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}} \xrightarrow{t \rightarrow 1} +\infty$$

Solution 52

1. a. Le nombre de tirages possibles est $\binom{2n}{n}$.

- b. Notons A l'ensemble des tirages possibles et A_k le nombre de tirages dans lesquels figurent k boules blanches. Alors $A = \bigcup_{k=0}^n A_k$.

De plus, se donner un tirage dans A_k équivaut à choisir k boules parmi les n boules blanches et $n-k$ boules parmi les n noires. Ainsi

$$\binom{2n}{n} = \text{card}(A) = \sum_{k=0}^n \text{card}(A_k) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

2. a. Pour que la puce se retrouve en O , il faut qu'elle est sauté autant de fois à gauche qu'à droite et le nombre de sauts doit donc être pair. Ainsi $\mathbb{P}(C_{2n+1}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, si le nombre de sauts est $2n$, il y faut placer n sauts à droite parmi les $2n$ sauts, le reste des sauts étant à gauche. Ainsi $\mathbb{P}(C_{2n}) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

- b. D'après la formule de Stirling

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Ainsi

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})^2} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

puis

$$\mathbb{P}(C_{2n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_{2n}) = 0$.

3. a. Pour se retrouver à l'origine, il faut, pour les mêmes raisons que précédemment, un nombre pair de déplacements horizontaux et un nombre pair de déplacements verticaux. Ainsi pour se retrouver à l'origine en $2n$ coups :
- on fixe un nombre $2k$ ($k \in \llbracket 0, n \rrbracket$) de déplacements horizontaux (les $2n - 2k$ déplacements restants sont horizontaux);
 - on choisit k déplacements à droite parmi les $2k$ déplacements horizontaux (les k déplacements restants étant à gauche);

- on choisit $n - k$ déplacements vers le haut parmi les $2n - 2k$ déplacements verticaux (les $n - k$ déplacements restants étant vers le bas).

Finalement

$$\mathbb{P}(C_{2n}) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} \binom{2n-k}{n-k} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}^2$$

b. On avait trouvé précédemment

$$\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

donc

$$\binom{2n}{n}^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^{2n}}{\pi n}$$

puis

$$\mathbb{P}(C_{2n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n}$$

et enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_{2n}) = 0$.

Inégalités

Solution 53

1. On fixe $t \in \mathbb{R}$. Soit $x \in [-1, 1]$. Alors $\frac{1}{2}(1-x) \geq 0$, $\frac{1}{2}(1+x) \geq 0$ et $\frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1+x) = 1$. Comme la fonction \exp est convexe, par inégalité de Jensen,

$$\exp\left(\frac{1}{2}(1-x)(-t) + \frac{1}{2}(1+x)t\right) \leq \frac{1}{2}(1-x)\exp(-t) + \frac{1}{2}(1+x)\exp(t)$$

ou encore

$$e^{tx} \leq \frac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)e^t$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On sait que

$$\operatorname{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

Or

$$(2n)! = 2^n n! \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)$$

donc $(2n)! \geq 2^n n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\operatorname{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.

3. Fixons $t \in \mathbb{R}$. Puisque X est à valeurs dans $[-1, 1]$,

$$e^{tX} \leq \frac{1}{2}(1-X)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+X)e^t$$

d'après la première question. Par croissance et linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \frac{1}{2}(1 - \mathbb{E}(X))e^{-t} + \frac{1}{2}(1 + \mathbb{E}(X))e^t$$

Or X est centrée donc $\mathbb{E}(X) = 0$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \frac{e^{-t} + e^t}{2} = \operatorname{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

4. Soit $(t, \varepsilon) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Puisque $x \mapsto e^{tx}$ est strictement croissante ($t > 0$), $[Y \geq \varepsilon] = [e^{tY} \geq e^{t\varepsilon}]$ puis $\mathbb{P}(Y \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{tY} \geq e^{t\varepsilon})$. Comme e^{tY} est positive, l'inégalité de Markov donne

$$\mathbb{P}(e^{tY} \geq e^{t\varepsilon}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tY})}{e^{t\varepsilon}}$$

On en déduit bien que

$$\mathbb{P}(Y \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon} \mathbb{E}(e^{tY})$$

5. Soit $(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(S \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon} \mathbb{E}(e^{tS})$$

Comme les variables aléatoires $\exp(tX_k)$ sont indépendantes,

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n e^{tX_k}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{tX_k})$$

Remarquons maintenant que les X_k/c_k sont à valeurs dans $[-1, 1]$. Ainsi

$$\mathbb{E}(e^{tX_k/c_k}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

Quitte à remplacer t par tc_k , on en déduit que

$$\mathbb{E}(e^{tX_k}) \leq e^{\frac{t^2 c_k^2}{2}}$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(S \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon} \prod_{k=1}^n e^{\frac{t^2 c_k^2}{2}} = e^{\frac{t^2 a}{2} - t\varepsilon}$$

en posant $a = \sum_{k=1}^n c_k^2$. La fonction $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{t^2 a}{2} - t\varepsilon$ admet un minimum en $\frac{\varepsilon}{a}$ et celui-ci vaut $-\frac{\varepsilon^2}{2a}$ donc

$$\mathbb{P}(S \geq \varepsilon) \leq e^{-\frac{\varepsilon^2}{2a}}$$

Enfin, les variables $-X_k$ vérifient les mêmes hypothèses que les variables X_k donc on a également

$$\mathbb{P}(S \leq -\varepsilon) = \mathbb{P}(-S \geq \varepsilon) \leq e^{-\frac{\varepsilon^2}{2a}}$$

Comme $[|S| \geq \varepsilon]$ est l'union disjointe de $[S \leq -\varepsilon]$ et $[S \geq \varepsilon]$,

$$\mathbb{P}(|S| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(S \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(S \leq -\varepsilon) \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2}{2a}}$$

Solution 54

1. Soit $(x, t) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}$. La fonction \exp est convexe sur \mathbb{R} et les réels $\frac{1-x}{2}$ et $\frac{1+x}{2}$ sont positifs et de somme 1. Par convexité

$$\exp\left(-t\frac{1-x}{2} + t\frac{1+x}{2}\right) \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t$$

ou encore

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t$$

2. Comme X est bornée, e^{tX} également donc elle admet une espérance. Comme X est à valeurs dans $[-1, 1]$, on peut appliquer la question précédente pour affirmer que

$$e^{tX} \leq \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^t$$

Par linéarité et croissance de l'espérance

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{-t}\frac{1-\mathbb{E}(X)}{2} + e^t\frac{1+\mathbb{E}(X)}{2}$$

Or X est centrée donc $\mathbb{E}(X) = 0$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \text{ch}(t)$$

Remarquons alors que

$$\text{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

En effet, $2^n n!$ est le produit des entiers naturels pairs inférieurs ou égaux à $2n$ donc $2^n n! \leq (2n)!$.

REMARQUE. On peut également étudier la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{t^2}{2} - \ln(\text{ch } t)$ pour établir cette inégalité.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par indépendance de X_1, \dots, X_n ,

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{tX_i})$$

Comme X_i/a_i est centrée et que $|X_i/a_i| \leq 1$,

$$\mathbb{E}(e^{tX_i}) = \mathbb{E}(e^{ta_i \cdot \frac{X_i}{a_i}}) \leq e^{\frac{(ta_i)^2}{2}} = e^{\frac{t^2 a_i^2}{2}}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq \prod_{i=1}^n e^{\frac{t^2 a_i^2}{2}} = \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2\right)$$

4. Puisque $\{|S_n| \geq a\} = \{S_n \geq a\} \sqcup \{-S_n \geq a\}$,

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq a) = \mathbb{P}(S_n \geq a) + \mathbb{P}(-S_n \geq a)$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Par stricte croissance de $x \mapsto e^{tx}$,

$$\{S_n \geq a\} = \{e^{tS_n} \geq e^{ta}\} \quad \text{et} \quad \{-S_n \geq a\} = \{e^{-tS_n} \geq e^{ta}\}$$

Les variables aléatoires e^{tS_n} et e^{-tS_n} sont positives donc d'après l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(e^{tS_n} \geq e^{ta}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{e^{ta}} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(e^{-tS_n} \geq e^{ta}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{-tS_n})}{e^{ta}}$$

D'après la question précédente,

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq e^{\frac{st^2}{2}}$$

Mais comme les $-X_i$ vérifient les mêmes hypothèses que les X_i , on a également

$$\mathbb{E}(e^{-tS_n}) \leq e^{\frac{st^2}{2}}$$

Finalement

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(|S_n| \geq a) \leq 2 \exp\left(\frac{st^2}{2} - ta\right)$$

L'application $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{st^2}{2} - ta$ admet un minimum en $\frac{a}{s}$ valant $-\frac{a^2}{2s}$. Donc, par croissance de l'exponentielle,

$$\mathbb{E}(e^{-tS_n}) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2s}}$$

Solution 55

1. a. Soit $u \in \mathbb{R}_+$. Alors $(X + u)^2 = X^2 + 2uX + u^2$ puis par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}((X + u)^2) = \mathbb{E}(X^2) + 2u\mathbb{E}(X) + u^2$$

Or $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2)$ donc

$$\mathbb{E}((X + u)^2) = \mathbb{V}(X) + u^2$$

- b. Soit $u \in \mathbb{R}_+$. Remarquons que

$$\{X \geq \lambda\} = \{X + u \geq \lambda + u\} \subset \{(X + u)^2 \geq (\lambda + u)^2\}$$

L'inclusion est justifiée par le fait que $\lambda + u \geq 0$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \mathbb{P}((X + u)^2 \geq (\lambda + u)^2)$$

Comme $(X + u)^2$ est une variable aléatoire positive et comme $(\lambda + u)^2 > 0$, d'après l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}((X + u)^2 \geq (\lambda + u)^2) \leq \frac{\mathbb{E}((X + u)^2)}{(\lambda + u)^2}$$

D'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(X) + u^2}{(\lambda + u)^2}$$

- c. On choisit u de façon à minimiser $\frac{\mathbb{V}(X) + u^2}{\lambda + u^2}$. Une rapide étude de la fonction $u \mapsto \frac{\mathbb{V}(X) + u^2}{(\lambda + u)^2}$ montre qu'elle atteint son minimum en $u = \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda}$. On prend donc $u = \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda}$ dans l'inégalité précédente, ce qui donne

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(X)^2/\lambda^2}{(\lambda + \mathbb{V}(X)/\lambda)^2} = \frac{\lambda^2\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(X)^2}{(\lambda^2 + \mathbb{V}(X))^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda^2 + \mathbb{V}(X)}$$

2. Posons $Y = X - \mathbb{E}(X)$ de sorte que $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X)$. D'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq \lambda) = \mathbb{P}(Y \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{\lambda^2 + \mathbb{V}(Y)} = \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda^2 + \mathbb{V}(X)}$$