

Normes

Exercice 1 ★★★

CCP MP 2016

Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels distincts ($n \geq 1$). On pose $N(P) = \sum_{k=0}^n |P(\alpha_k)|$. Montrer que N est une norme non euclidienne sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2 ★★★

On considère un espace euclidien E de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que l'on munit d'une norme N (qui n'est pas nécessairement la norme euclidienne associée au produit scalaire précédent). On note S la sphère unité pour la norme N i.e. $S = \{y \in E, N(y) = 1\}$ et on pose pour $x \in E$

$$N^*(x) = \sup_{y \in S} |\langle x, y \rangle|$$

1. Montrer que l'application N^* est bien définie sur E .
2. Montrer que N^* est une norme sur E .
3. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}^n$ et que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n .
Déterminer N^* lorsque N est la norme $\|\cdot\|_2$, la norme $\|\cdot\|_\infty$ et la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 3 ★★★

Quelques normes matricielles

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on pose

$$N_1(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |A_{i,j}|$$

$$N_2(A) = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|$$

$$N_3(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p A_{i,j}^2}$$

$$N_4(A) = \sqrt{\max \text{Sp}(A^T A)}$$

1. Montrer que N_1, N_2, N_3 et N_4 sont des normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $n = p$, ce sont des normes d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 ★★

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max \{\|x + y\|, \|x - y\|\}$$

2. Montrer que l'on peut avoir l'égalité même si x et y sont non nuls.

3. Désormais la norme est euclidienne. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$

$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2} \max \{\|x + y\|, \|x - y\|\}$$

Peut-on améliorer la constante $\sqrt{2}$?

Exercice 5 ★★

Comparaison de normes usuelles de \mathbb{K}^n

On pose pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad N_\infty(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Montrer que

$$N_\infty \leq N_1 \leq n N_\infty \quad N_\infty \leq N_2 \leq \sqrt{n} N_\infty \quad N_2 \leq N_1 \leq \sqrt{n} N_2$$

et montrer que chacune des ces inégalités est optimale.

Exercice 6 ★

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. On se donne $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Montrer que l'application

$$N : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}_+^n \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\| \end{cases}$$

est une norme sur \mathbb{R}^n si et seulement si (x_1, \dots, x_n) est une famille libre.

Exercice 7 ★★

Soit E un espace vectoriel que l'on munit de deux normes N_1 et N_2 . On définit les deux boules unités $B_1 = \{x \in E, N_1(x) \leq 1\}$ et $B_2 = \{x \in E, N_2(x) \leq 1\}$. Montrer que $N_1 = N_2$ si et seulement si $B_1 = B_2$.

Exercice 8 ★★★

Inégalités de Hölder et Minkowski

Soient p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Prouver l'inégalité de Young,

$$\forall (u; v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

2. Soient x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_n des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité de Hölder,

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

3. Soient $p > 1$, x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_n des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité de Minkowski,

$$\left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n y_k^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Distance

Exercice 9 ★★

On considère $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que l'on munit de la norme uniforme. On pose $u : n \in \mathbb{N} \mapsto (-1)^n$. Calculer la distance de u au sous-espace vectoriel F de E formé des suites convergentes.

Exercice 10 ★★

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E . Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2, |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

Equivalence de normes

Exercice 11 ★★★

On pose $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et pour $f \in E$, $N(f) = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$.

1. Montrer que N est une norme sur E . N est-elle équivalente à $\|\cdot\|_{\infty}$?
2. Pour $f \in E$, on pose $N'(f) = |f(0)| + \|f'\|_{\infty}$. Montrer que N' est une norme et qu'elle est équivalente à N .

Exercice 12 ★★★

Centrale MP 2010

Donner un exemple de deux normes non équivalentes sur un espace vectoriel normé.

Exercice 13 ★★★

Centrale PSI 2010

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_{\infty} = \sup_{[0,1]} |f|$ et $\|f\|_2 = \left(\int_{[0,1]} f^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

1. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall f \in E, \|f\|_2 \leq b\|f\|_{\infty}$.
2. Soit V un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall f \in V, \|f\|_{\infty} \leq c\|f\|_2$.
3. Soit V un sous-espace vectoriel de E . On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall f \in V, \|f\|_{\infty} \leq n\|f\|_2$. Montrer que V est de dimension finie et que $\dim V \leq n^2$.

Exercice 14 ★★★

D'après Centrale MP 2006

On note E l'ensemble des fonctions f de classe \mathcal{C}^2 telles que $f(0) = f'(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose

$$N_\infty(f) = \sup_{[0,1]} |f| \quad N(f) = N_\infty(f + f'') \quad N_1(f) = N_\infty(f) + N_\infty(f'')$$

1. Montrer que N_∞ , N et N_1 sont des normes sur E .
2. Montrer que N_∞ n'est équivalente ni à N ni à N_1 .
3. Soit $f \in E$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)(f(t) + f''(t)) dt$$

4. Montrer que N et N_1 sont équivalentes.

Exercice 15 ★★

Comparaison de normes usuelles de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$

On pose pour $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$,

$$N_1(x) = \int_a^b |f(t)| dt \quad N_2(x) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \quad N_3(x) = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

1. Montrer que

$$N_1 \leq (b-a)N_\infty \quad N_2 \leq \sqrt{b-a}N_\infty \quad N_1 \leq \sqrt{b-a}N_2$$

et montrer que chacune des ces inégalités est optimale.

2. Montrer que ces trois normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 16 ★★★

TPE-EIVP MP 2012

On pose pour une partie A de \mathbb{R} et $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_A = \sup_{x \in A} |P(x)|$.

A quelle condition nécessaire et suffisante N_A est-elle une norme sur $\mathbb{R}[X]$?

Suites

Exercice 17 ★★★

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.

1. Montrer que $E = \text{Ker}(\text{Id}_E - u) \oplus \text{Im}(\text{Id}_E - u)$.
2. Soit $x \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)$. Montrer que (x_n) converge vers la projection de x sur $\text{Ker}(\text{Id}_E - u)$ parallèlement à $\text{Im}(\text{Id}_E - u)$.

Exercice 18 ★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite de terme général A^n converge vers L . Montrer que L est une matrice de projecteur.

Exercice 19 ★★★

CCP MP 2019

Soit E un espace préhilbertien réel muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

On dit qu'une suite $(x_n) \in E^\mathbb{N}$ converge *fortement* vers $x \in E$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0$ et que (x_n) converge *faiblement* vers x si $\forall y \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n - x, y \rangle = 0$.

1. a. Montrer que si (x_n) converge faiblement, sa limite est unique.
b. Montrer que la convergence forte implique la convergence faible.
2. Montrer que (x_n) converge fortement vers x si et seulement si (x_n) converge faiblement vers x et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = \|x\|$.
3. Montrer que, en dimension finie, ces deux modes de convergence sont équivalents.
4. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 20 ★★★★★

1. Soit (u_n) une suite à valeurs réelles telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle.
2. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue et (u_n) définie par $u_0 \in [a, b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$.

Exercice 21 ★

Soit A une matrice antisymétrique réelle telle que $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Montrer que la limite est nulle.

Exercice 22 ★★★

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$.

Exercice 23 ★★

Soient A le point d'affixe i et B le point d'affixe $-i$. On définit la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points du plan par M_0, M_1 le milieu de $[AM_0]$, M_2 le milieu de $[BM_1]$, M_3 le milieu de $[AM_2]$, M_4 le milieu de $[BM_3]$ et ainsi de suite.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Préciser la définition des points M_{2n} et M_{2n+1} .
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n l'affixe de M_n . Montrer que les suites $(z_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont arithmético-géométriques.
3. Etudier la convergence des suites $(M_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(M_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Que dire de la suite $(M_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 24 ★★

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

1. On note x_n et y_n les parties réelle et imaginaire de z_n .
 - a. Déterminer une relation de récurrence liant y_n et y_{n+1} . En déduire la limite de (y_n) .
 - b. Déterminer le sens de variation de $(|z_n|)$.
 - c. Déterminer le sens de variation de (x_n) .
 - d. En déduire la convergence de (x_n) . On ne cherchera pas à calculer la limite de cette suite.
 - e. En déduire la convergence de (z_n) . Que peut-on dire de sa limite ?
 - f. Déterminer la limite de (z_n) si $z_0 \in \mathbb{R}_+$ et si $z_0 \in \mathbb{R}_-$.
2. On note r_n le module et θ_n l'argument principal (i.e. appartenant à $] -\pi, \pi]$) de z_n .
 - a. En exprimant z_{n+1} sous forme exponentielle, exprimer d'une part r_{n+1} en fonction de r_n et θ_n et d'autre part θ_{n+1} en fonction de θ_n .
 - b. Déterminer la limite de (θ_n) .
 - c. Soit $\alpha \in] -\pi, 0[\cup] 0, \pi[$. En remarquant que pour $a \neq 0[\pi]$, $\cos a = \frac{\sin 2a}{2 \sin a}$, donner une expression simplifiée de $S_n = \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que (S_n) converge vers $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$.
 - d. En déduire la limite de (r_n) puis celle de (z_n) en fonction de r_0 et θ_0 .

Séries

Exercice 25 ★★

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, $k \in [0, 1[$ et $f : E \rightarrow E$ tels que

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En considérant la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n+1} - u_n$, montrer que u converge.

Exercice 26 ★

Petites Mines 2016

Soit $\sum u_n$ une série numérique absolument convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{u_{n-k}}{2^k}$.

1. Montrer que la série $\sum v_n$ converge et calculer sa somme.
2. Reprendre la question précédente lorsque $\sum u_n$ est une série absolument convergente à termes dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

Suites extraites

Exercice 27 ★★

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - [x]$ la partie fractionnaire de x . Montrer que la suite $(\{\sqrt{n}\})$ n'admet pas de limite.

Exercice 28 ★★★

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels et p et q deux entiers naturels impairs tels que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^p - v_n^q &= 0 \end{aligned}$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Exercice 29 ★★★

Centrale PC 2016

Soient (x_n) et (y_n) deux suites telles que $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n} \\ y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n} \end{cases}$$

1. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont bien définies.
2. On suppose que les deux suites convergent. Déterminer rigoureusement leur(s) limite(s) possible(s).
3. Montrer que (x_n) et (y_n) convergent.