

# DEVOIR SURVEILLÉ N°10

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1 —

Dans tout l'énoncé,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note  $T$  l'application qui à tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  associe le polynôme  $T(P) = P(X+1)$ .

On note  $\Delta$  l'application qui à tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  associe le polynôme  $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ .

On note  $\tilde{T}$  l'application qui à toute fonction  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  associe la fonction  $\tilde{T}(f)$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{T}(f)(x) = f(x+1)$$

On note  $\tilde{\Delta}$  l'application qui à toute fonction  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  associe la fonction  $\tilde{\Delta}(f)$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{\Delta}(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

## Partie I —

1. Montrer que  $T$  et  $\Delta$  sont des endomorphismes de  $\mathbb{R}[X]$ .
2.
  - a. Montrer que  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $\Delta$ . On note alors  $\Delta_n$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  induit par  $\Delta$ .
  - b. Déterminer  $\text{Ker } \Delta_n$ .
  - c. Déterminer le rang de  $\Delta_n$ . En déduire  $\text{Im } \Delta_n$ .
3. On pose  $N_0 = 1$  et pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $N_k = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X-j)$ .
  - a. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer  $\Delta(N_k)$  en fonction des polynômes  $N_j$ .
  - b. Soit  $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ . Déterminer  $\Delta^j(N_k)$  puis  $\Delta^j(N_k)(0)$ .
  - c. Montrer que  $(N_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
  - d. Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Déterminer les coordonnées de  $P$  dans la base  $(N_k)_{0 \leq k \leq n}$  en fonction des  $\Delta^j(P)(0)$ .
4.
  - a. Montrer que  $\tilde{T}$  et  $\tilde{\Delta}$  sont des endomorphismes de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .
  - b. Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . Déterminer  $\tilde{T}^k(f)(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
  - c. Soit  $j \in \mathbb{N}$ . Exprimer  $\tilde{\Delta}^j$  en fonction des  $\tilde{T}^k$  pour  $k \in \llbracket 0, j \rrbracket$ . On pourra remarquer que  $\tilde{\Delta} = \tilde{T} - \text{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ .
  - d. Soient  $j \in \mathbb{N}$  et  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . Exprimer  $\tilde{\Delta}^j(f)(0)$  en fonction des  $f(k)$  pour  $k \in \llbracket 0, j \rrbracket$ .

**Partie II –**

On se donne  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . On cherche les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  solutions du problème  $(\mathcal{P})$  suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \deg P \leq n \\ \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(k) = f(k) \end{cases}$$

On pose  $N = \prod_{j=0}^n (X - j)$ .

1. Soit  $\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto (P(k))_{0 \leq k \leq n} \end{cases}$ .

a. Montrer que  $\Phi$  est un isomorphisme.

b. En déduire que le problème  $(\mathcal{P})$  admet une unique solution que l'on notera  $P_f$ .

2. a. Soit  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Comparer  $\tilde{\Delta}^j(f)(0)$  et  $\Delta^j(P_f)(0)$ .

b. En déduire l'expression de  $P_f$  en fonction des  $\tilde{\Delta}^j(f)(0)$  et des polynômes  $N_j$  pour  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

3. Dans cette question, on suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $\mathbb{R}$ .

On note  $M_n = \sup_{t \in [0, n]} |f^{(n+1)}(t)|$ .

a. Soit  $x \in [0, n]$  non entier. Montrer qu'il existe  $c \in ]0, n[$  tel que  $f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} N(x)$ .

On pourra appliquer le théorème de Rolle par récurrence à la fonction  $\varphi : t \mapsto f(t) - P_f(t) - KN(t)$  où  $K$  est choisi tel que  $\varphi(x) = 0$ .

b. En déduire que pour tout  $x \in [0, n]$  (entier ou non),  $|f(x) - P_f(x)| \leq \frac{M_n}{n+1}$ .

**Problème 2 –**

Pour  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , on définit  $f(t) = \exp\left(-\frac{1}{t}\right)$  et  $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ .

**Partie I – Etude de deux suites implicites**

1. Prouver que  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Montrer que  $g$  peut se prolonger en 0 en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . On notera encore  $g$  ce prolongement.
3. Faire un tableau de variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}_+$  puis en faire un graphe.
4. Soit  $H$  la primitive sur  $\mathbb{R}_+^*$  de  $t \mapsto g\left(\frac{1}{t}\right)$  s'annulant en 1.
  - a. Calculer  $H$ .
  - b. En donner un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1.
5. Soit  $n \geq 3$  un entier naturel. On introduit l'équation  $(E_n) : f(t) = \frac{t}{n}$  d'inconnue  $t \in \mathbb{R}_+^*$ .
  - a. En utilisant la question I.3, montrer que  $(E_n)$  a une unique solution dans  $]0, 1[$ , que l'on notera  $\alpha_n$ . Montrer que  $(E_n)$  admet également une unique solution dans  $]1, +\infty[$  que l'on notera  $\beta_n$ .
  - b. Montrer que les suites  $(\alpha_n)_{n \geq 3}$  et  $(\beta_n)_{n \geq 3}$  sont monotones.
  - c. Est-il possible que l'une des deux suites converge vers une limite  $l > 0$ ? En déduire leurs limites.

**Partie II – Etude d'une équation différentielle**

On considère une application  $y$  solution de l'équation différentielle  $(E) : x^2 y' + y = x^2$  sur  $\mathbb{R}_+$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Nous allons, *sans aucun calcul explicite de  $y$* , déterminer entièrement la suite de terme général  $u_n = y^{(n)}(0)$  à partir de l'équation  $(E)$ .

1. Que vaut  $u_0$ ?
2. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
3.  $y$  peut-elle être une application polynomiale de degré inférieur ou égal à 2?
4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .
  - a. On suppose  $n \geq 3$ . Prouver que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  :

$$x^2 y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx) y^{(n)}(x) + n(n-1) y^{(n-1)}(x) = 0$$

En déduire une relation de récurrence entre  $u_n$  et  $u_{n-1}$ .

- b. Donner une expression de  $u_n$  utilisant une factorielle valable pour tout  $n \geq 2$ . En déduire un développement limité (dont on justifiera l'existence) de  $y$  à tout ordre au voisinage de 0.