Devoir surveillé n°1 : corrigé

Solution 1.

1. On montre par récurrence que $u_n = 3^{2^n}$. En effet, $u_0 = 3 = 3^1 = 3^{2^0}$. Si $u_n = 3^{2^n}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n = (3^{2^n})^2 = 3^{2^n \times 2} = 3^{2^{n+1}}$. Ceci prouve par récurrence que $u_n = 3^{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Une récurrence évidente montre que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+u_n^2} \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (u_n) est décroissante. De plus (u_n) est minorée par 0 donc (u_n) converge vers un réel ℓ vérifiant $\ell = \frac{\ell}{1+\ell^2}$ ou encore $\ell(1+\ell^2) = \ell$ ce qui implique $\ell^3 = 0$ et donc $\ell = 0$.

3. On utilise les quantités conjuguées.

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

Ainsi

$$u_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}$$

Par opérations sur les limites, $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

4. Il s'agit d'une somme de termes d'une suite géométrique.

$$S_n = \frac{(2+2n) \cdot n}{2} = n(n+1)$$

5. Il s'agit d'une somme de termes d'une suite géométrique.

$$S_n = 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2$$

6. $$z = \overline{\left(\frac{5-3i}{-2+i}\right)} = \frac{\overline{5-3i}}{\overline{-2+i}} = -\frac{5+3i}{2+i} = -\frac{(5+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = -\frac{1}{5}(13+i)$$

7. $$z = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{6}}$$

8. L'équation

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{4}$$

équivaut à

$$\sin(2x) = \frac{1}{2}$$

ou encore

$$\sin(2x) = \sin\frac{\pi}{6}$$

Un réel x est donc solution s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

ce qui équivaut à

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

L'ensemble des solutions sur $[-\pi, \pi]$ est donc

$$\left\{-\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right\}$$

9. L'inéquation
$$\frac{2x+1}{x+2} \geqslant \frac{3x-1}{x+1}$$
équivaut à
$$\frac{2x+1}{x+2} - \frac{3x-1}{x+1} \geqslant 0$$
ou encore
$$\frac{(2x+1)(x+1)-(3x-1)(x+2)}{(x+2)(x+1)} \geqslant 0$$
ou enfin
$$\frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x+1)} \leqslant 0$$
A l'aide d'un tableau de signes, on trouve que l'ensemble des solutions est
$$[-3,-2[\cup]-1,1]$$

10. Puisque les deux membres ont positifs, l'inéquation
$$|x+3| \leqslant |2x-1|$$
équivaut à
$$|x+3|^2 \leqslant |2x-1|^2$$
ou encore
$$0 \leqslant (2x-1)^2-(x+3)^2$$
Via une identité remarquable, ceci équivaut à
$$0 \leqslant ((2x-1)+(x+3))((2x-1)-(x+3))$$
et finalement à
$$0 \leqslant (3x+2)(x-4)$$
L'ensemble des solutions est donc
$$\left]-\infty,-\frac{2}{3}\right] \cup [4,+\infty[$$

11. f est clairement dérivable en tant que produit de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$f'(x) = 2(2x^2+2x-31)e^{2x} + (4x+2)e^{2x} = 4(x^2+2x-15)e^{2x} = 4(x+5)(x-3)e^{2x}$$
On en déduit que $f' \geqslant 0$ sur $]-\infty,-5]\cup[3,+\infty[$ et $f' \geqslant 0$ sur $[-5,3]$. Ainsi f est croissante sur $]-\infty,-5]\cup[3,+\infty[$ et décroissante sur $[-5,3]$.

12. La fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ étant croissante le sens de variation de f est le même que celui de $g\colon x \mapsto |x^2-1|$. Pour $x \in [-1,1]$, $g(x) = 1-x^2$ donc g est croissante sur $[-1,0]$ et décroissante sur $[0,1]$. Pour $x \in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, $g(x) = x^2-1$ donc g est décroissante sur $]-\infty,-1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$.
Finalement, f est décroissante sur $]-\infty,-1]$, croissante sur $[-1,0]$, décroissante sur $[0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$.

13. On définit une fonction f par $f(x) = 2x^3-9x^2+12x-\frac{9}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 6x^2-18x+12 = 6(x-1)(x-2)$$
On en déduit que f est strictement croissante sur $]-\infty,1]$, strictement décroissante sur $[1,2]$ et strictement croissante sur $[2,+\infty[$. Par ailleurs, $f(1) = \frac{1}{2} > 0$ et $f(2) = -\frac{1}{2}$, $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. La continuité de f et le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones permet alors d'affirmer que f s'annule trois fois (une fois sur chacun des intervalles $]-\infty,1]$, $[1,2]$ et $[2,+\infty[$. L'équation $2x^3-9x^2+12x = \frac{9}{2}$ admet donc exactement trois solutions sur $\mathbb{R}$.

14. On remarque que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. Ainsi
$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$
$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

15.

$$I = \left[\ln(t^2+t+1)\right]_0^1 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$$

16. Il suffit par exemple de prendre la fonction F telle que $F(x) = -\frac{1}{2}e^{\cos(2x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

17. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \frac{\sin(x^3)}{x^3} \cdot x^2$$

On effectue le changement de variable $u = x^3$. Alors $u \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^3} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Par ailleurs, $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, donc, par opérations sur les limites,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \times 0 = 0$$

18. Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

On reconnaît en le premier facteur le taux de variation de exp en 0 de sorte que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$$

Or on sait également que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Par opérations, $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{1} = 1$.

19. Lorsque les tirages s'effectuent avec remise, la probabilité de ne pas piocher la boule n à chaque tirage est $1 - \frac{1}{n}$. Les tirages étant implicitement indépendants, la probabilité de ne pas tirer la boule n au cours des $n-1$ tirages est $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$. La probabilité de tirer la boule n est donc $1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.
Lorsque les tirages s'effectuent avec remise, la formule des probabilités composées montre que la probabilité de ne pas tirer la boule n est

$$\frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{1}{2} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n}$$

La probabilité de tirer la boule n est donc $1 - \frac{1}{n}$.

20. Comme toutes les boules ont une probabilité $\frac{1}{2n}$ d'être tirées, l'espérance recherchée est

$$\frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n} 2k - \sum_{k=1}^{n} 2k - 1\right) = \frac{1}{2n}\left(\frac{n(2n+2)}{2} - \frac{2n^2}{2}\right) = 1$$