

# SÉRIES

$\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 Compléments sur les séries numériques

### 1.1 Comparaison à une série géométrique

#### Proposition 1.1 Règle de d'Alembert

Soit  $(a_n)$  une suite de **réels strictement positifs** (au moins à partir d'un certain rang).

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , alors  $\sum a_n$  converge.
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , alors  $\sum a_n$  diverge grossièrement.

#### Exemple 1.1

La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n!}{n^n}$  converge.

**REMARQUE.** On ne peut a priori pas conclure si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$  ou si la suite de terme général  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  n'admet pas de limite.

#### Exemple 1.2

Posons  $a_n = 1$  et  $b_n = \frac{1}{(n+1)^2}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$  mais  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  diverge tandis que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  converge.



**ATTENTION !** Il s'agit bien de **limites** dans l'énoncé de la règle de d'Alembert. Le fait d'avoir  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  ou  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  ne permet pas de conclure. En prenant  $a_n = \frac{1}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  mais la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$  diverge.

#### Corollaire 1.1

Soit  $(a_n)$  une suite de réels non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ , alors  $\sum a_n$  converge absolument.
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ , alors  $\sum a_n$  diverge grossièrement.

**Exemple 1.3 Série exponentielle**

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , la série exponentielle  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$  converge absolument.

**1.2 Comparaison série-intégrale****Méthode** Comparaison à une intégrale

On considère une série  $\sum_{n \geq 0} f(n)$  où  $f$  est une fonction continue et **monotone** sur  $\mathbb{R}_+$ . On peut comparer les sommes partielles  $S_n$  à une intégrale pour déterminer la nature de la série. Si, par exemple,  $f$  est croissante, on en déduit que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $t \in [k, k+1]$  :

$$f(k) \leq f(t) \leq f(k+1)$$

Puis par intégration sur  $[k, k+1]$ ,

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k+1)$$

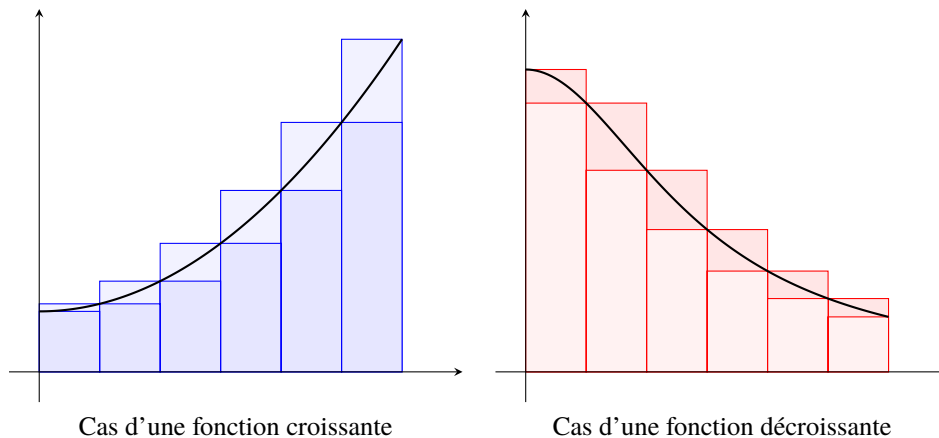
Enfin, en sommant l'inégalité de gauche pour  $0 \leq k \leq n$  et celle de droite pour  $0 \leq k \leq n-1$ , on obtient via la relation de Chasles

$$\int_0^n f(t) dt + f(0) \leq S_n \leq \int_0^{n+1} f(t) dt$$

On a des résultats analogues lorsque  $f$  est décroissante.

Les encadrements obtenus permettent éventuellement de déterminer un équivalent de la suite des sommes partielles. En modifiant légèrement la technique, on peut également obtenir un équivalent de la suite des restes (en cas de convergence).

Graphiquement, la méthode correspond à encadrer l'intégrale de  $f$  sur un intervalle par une somme d'aires de rectangles d'où le nom de méthode des rectangles.



**REMARQUE.** Il ne s'agit pas de retenir des formules par cœur mais de retenir la méthode permettant d'obtenir des encadrements des sommes partielles et des restes.

**Exemple 1.4 Équivalent de la série harmonique**

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On en déduit que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in [k, k+1]$ ,

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

Par intégration,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$$

En sommant convenablement, on obtient pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t}$$

ou encore

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

L'inégalité de gauche permet de conclure que la série harmonique  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

L'encadrement permet même d'affirmer que donner un équivalent des sommes partielles  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$ .

**Exemple 1.5 Équivalent du reste de la série  $\sum \frac{1}{n^2}$** 

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On en déduit que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in [k, k+1]$ ,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Par intégration,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Mais en sommant l'encadrement précédent, on a également pour  $N > n \geq 1$

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^2}$$

ou encore

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$$

Par passage à la limite

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$$

On obtient ainsi un équivalent de la suite des restes de la série  $\sum \frac{1}{n^2}$ .

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

**Exercice 1.1**

Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  lorsque  $\alpha < 1$  et un équivalent de son reste lorsque  $\alpha > 1$ .

**Exercice 1.2 Constante  $\gamma$  d'Euler**

Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une application continue par morceaux et décroissante.

1. Montrer que la série  $\sum f(n)$  et l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  sont de même nature.
2. Montrer que la série de terme général  $\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$  converge.
3. Application. Montrer qu'il existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ .

**1.3 Sommation des relations de comparaison****Proposition 1.2**

Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  deux séries numériques. On suppose de plus que  $(v_n)$  est à **termes positifs** à partir d'un certain rang.

**Domination** On suppose que  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ .

- Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  converge, alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge et  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ .
- Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  diverge, alors  $\sum_{k=0}^n u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$ .

**Négligeabilité** On suppose que  $u_n = o(v_n)$ .

- Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  converge, alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge et  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ .
- Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  diverge, alors  $\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$ .

**Equivalence** On suppose que  $u_n \sim v_n$ .

- Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  converge, alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge et  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ .
- Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  diverge, alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge et  $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$ .



**ATTENTION !** Il est essentiel que la suite de référence soit de signe constant à partir d'un certain rang.

**REMARQUE.** Dans les cas de convergence, les résultats restent vrais même si les sommes partielles débutent à un indice non nul.

**Lemme de Césaro**

Soit  $(u_n)$  est une suite numérique convergente de limite  $\ell$ . Posons  $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (suite des moyennes).

- Si  $\ell \neq 0$ ,  $u_n \sim \ell$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ell$  diverge. Ainsi  $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n \ell = (n+1)\ell$  i.e.  $v_n \sim \ell$ . Donc  $(v_n)$  converge vers  $\ell$ .
- Si  $\ell = 0$ ,  $u_n = o(1)$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} 1$  diverge. Ainsi  $\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n 1\right)$  i.e.  $v_n = o(1)$ . Donc  $(v_n)$  converge vers 0.

Dans les deux cas,  $(v_n)$  est de même limite que  $(u_n)$ .

**Exemple 1.6**

On veut déterminer un équivalent de la somme partielle de la série harmonique. On remarque que

$$\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

Comme la série  $\sum \frac{1}{n}$  est une série à termes positifs divergente

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

**Exemple 1.7**

On veut déterminer un équivalent du reste de la série  $\sum \frac{1}{n^2}$ . On remarque que

$$\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

La série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série à termes positifs convergente donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{n}$$

**Exercice 1.3**

On pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Montrer que

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right)$$

**2 Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé****2.1 Définitions**

**Définition 2.1 Série**

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. On appelle **série de terme général**  $u_n$  la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$  où

$$\forall n \geq n_0, S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$$

Cette série est noté  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  ou plus simplement  $\sum u_n$  s'il n'y a pas ambiguïté sur le premier terme.

Pour  $n \geq n_0$ ,  $S_n$  est appelée **somme partielle de rang  $n$**  de cette série.

**REMARQUE.** Une série est donc un cas particulier de suite.

**Exemple 2.1**

On appelle série télescopique toute série dont le terme général est de la forme  $u_n = v_n - v_{n-1}$ . La somme partielle de rang  $n$  de la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  est  $v_n - v_0$ .

**2.2 Nature et somme d'une série****Définition 2.2 Convergence et divergence**

On dit qu'une série à valeurs dans un espace vectoriel normé converge (resp. diverge) si la suite de ses sommes partielles converge (resp. diverge).

**REMARQUE.** En dimension infinie, la convergence/divergence peut dépendre de la norme, ce qui n'est pas le cas en dimension finie puisque toutes les normes sont alors équivalentes.

**REMARQUE.** La convergence d'une série ne dépend pas du premier rang i.e. les séries  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  et  $\sum_{n \geq n_1} u_n$  sont de même nature.

**Définition 2.3 Somme d'une série**

Si la série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge, la limite de la suite des sommes partielles est appelée **somme** de la série et est notée  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ .

**REMARQUE.** On a donc  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^n u_k$ .



**ATTENTION!** La notation  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$  n'a de sens que si la série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge. Il faut donc prouver la convergence de la série avant d'employer cette notation.

**Proposition 2.1 Lien suite/série**

La série  $\sum (u_n - u_{n-1})$  et la suite  $(u_n)$  sont de même nature (i.e. elles convergent toutes les deux ou elles divergent toutes les deux).

De plus, si  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell$ ,  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - u_{n-1} = \ell - u_{n_0-1}$ .

## 2.3 Divergence grossière

### Proposition 2.2

Soit  $\sum u_n$  une série convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé. Alors la suite  $(u_n)$  converge vers 0.



**ATTENTION !** La réciproque est absolument fausse. Par exemple, la suite de terme général  $\frac{1}{n}$  converge vers 0 tandis que la série harmonique diverge.

### Définition 2.4 Divergence grossière

Une série  $\sum u_n$  est dite **grossièrement divergente** lorsque la suite  $(u_n)$  ne converge pas vers 0.

### Exemple 2.2

Si  $|q| \geq 1$ , la série  $\sum q^n$  diverge grossièrement.

La série  $\sum \frac{1}{n}$  ne diverge pas grossièrement.

## 2.4 Reste d'une série convergente

### Définition 2.5 Reste d'une série convergente

Soit  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  une série convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé. Pour tout  $n \geq n_0$ , la série  $\sum_{k \geq n+1} u_k$  est convergente et on appelle sa somme le **reste de rang  $n$**  de la série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$ . Autrement dit, le reste de rang  $n$  de la série

$$\sum_{n \geq n_0} u_n \text{ est } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

### Proposition 2.3

Soit  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  une série convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé. Alors pour tout  $n \geq n_0$

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

**REMARQUE.** Si on note  $S_n$  la somme partielle de rang  $n$ ,  $R_n$  le reste de rang  $n$  et  $S$  la somme de la série, on a donc  $S_n + R_n = S$  pour tout  $n \geq n_0$ .

### Exemple 2.3

Lorsque  $|q| < 1$ , le reste de rang  $n$  de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$  est  $\frac{q^{n+1}}{1-q}$ .

**Corollaire 2.1**

La suite des restes d'une série convergente converge vers 0.

**2.5 Opérations sur les séries**

La proposition suivante n'est qu'une conséquence de la linéarité de la limite.

**Proposition 2.4 Linéarité de la somme**

Soient  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  et  $\sum_{n \geq n_0} v_n$  deux séries convergentes à valeurs dans un espace vectoriel normé et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ . Alors la série  $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$  converge et

$$\sum_{n \geq n_0}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n \geq n_0}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n \geq n_0}^{\infty} v_n$$

**REMARQUE.** En termes plus savants, les séries numériques convergentes forment un espace vectoriel et l'application qui à une série convergente associe sa somme est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.



**ATTENTION !** La réciproque est fautive en général. Par exemple, si  $\sum (u_n + v_n)$  converge, on ne peut rien dire de  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  (prendre par exemple,  $u_n = -v_n = 2^n$ ).

On évitera à tout prix d'écrire des égalités du type  $\sum_{n=n_0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} v_n$  **avant** d'avoir prouvé la convergence des séries  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  et  $\sum_{n \geq n_0} v_n$ .

**2.6 Absolue convergence****Définition 2.6 Absolue convergence**

Une série  $\sum u_n$  à valeurs dans un espace vectoriel normé est dite **absolument convergente** si  $\sum \|u_n\|$  converge.

**REMARQUE.** A nouveau, en dimension infinie, l'absolue convergence peut dépendre de la norme.

**Exemple 2.4**

On munit  $\mathbb{R}[X]$  des normes  $N : P \mapsto \max_{t \in [0,1]} |P(t)|$  et  $N' : P \mapsto \int_0^1 |P(t)| dt$ . Alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{X^n}{n}$  converge absolument pour  $N'$  mais pas pour  $N$ . En effet,  $N(X^n/n) = \frac{1}{n}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$  diverge tandis que  $N'(X^n/n) = \frac{1}{n(n+1)}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}$  converge.

**Théorème 2.1**

Une série absolument convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé de **dimension finie** est convergente. Dans ce

cas,  $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$ .





**ATTENTION !** La réciproque est fausse. La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  converge tandis que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge.



**ATTENTION !** Le fait que l'espace vectoriel normé considéré soit de **dimension finie** est important. Si ce n'est pas le cas, une série peut converger absolument sans être convergente.

### Exemple 2.5

Munissons  $\mathbb{R}[X]$  de la norme

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{R}[X] \mapsto \|P\| = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

Puisque  $\left\| \frac{X^n}{(n+1)^2} \right\| = \frac{1}{(n+1)^2}$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{X^n}{(n+1)^2}$  converge absolument. Supposons qu'elle converge vers un polynôme  $P = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p X^p$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| P - \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{(k+1)^2} \right\| = 0$$

Fixons  $p \in \mathbb{N}$ . Par définition de la norme  $\|\cdot\|$ , pour tout  $n \geq p$

$$\left| a_p - \frac{1}{(p+1)^2} \right| \leq \left\| P - \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{(k+1)^2} \right\|$$

En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on en déduit que  $a_p = \frac{1}{(p+1)^2}$ . Par conséquent, la suite  $(a_p)$  n'est pas presque nulle, ce qui est impossible car  $P$  est un polynôme.

### Exercice 2.1

Soient  $\|\cdot\|$  une norme d'algèbre sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  vérifiant  $\|A\| < 1$ . Montrer que

- la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} A^n$  est absolument convergente ;
- $I_p - A$  est inversible et  $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_p - A)^{-1}$ .

### Exercice 2.2

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\|\cdot\|$  une norme d'algèbre sur  $\mathcal{L}(E)$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$  vérifiant  $\|u\| < 1$ . Montrer que

- la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u^n$  est absolument convergente ;
- $\text{Id}_E - u$  est inversible et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n = (\text{Id}_E - u)^{-1}$ .

### Définition 2.7 Exponentielle d'une matrice

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . La série  $\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{A^p}{p!}$  converge absolument. On note  $\exp(A) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{p!}$ .

**Définition 2.8 Exponentielle d'un endomorphisme**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. La série  $\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{f^p}{p!}$  converge absolument. On note  $\exp(f) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^p}{p!}$ .