Espaces vectoriels normés

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'objectif de ce chapitre est d'étendre les notions topologiques (limite, continuité) vues en première année dans le cadre réel au cadre des espaces vectoriels.

1 Normes

1.1 Définition

Définition 1.1 Norme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle **norme** sur E toute application $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes.

Séparation $\forall x \in \mathrm{E}, \mathrm{N}(x) = 0 \implies x = 0_{\mathrm{E}}$.

Homogénéité $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E}, \mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\mathrm{N}(x)$.

Inégalité triangulaire $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \mathrm{N}(x + y) \leq \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$.

Remarque. L'homogénéité montre que si $x = 0_{\mathrm{E}}$, alors $\mathrm{N}(x) = 0$. En effet, $\mathrm{N}(0_{\mathrm{E}}) = \mathrm{N}(0.0_{\mathrm{E}}) = |0|\mathrm{N}(0_{\mathrm{E}}) = 0$.

Remarque. Une norme est souvent notée non comme une application mais à l'aide d'un symbole comme $\|\ \|$.

Remarque. Si N est une norme sur un espace vectoriel E, on a également la seconde inégalité triangulaire

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \mathrm{N}(x - y) \geq |\mathrm{N}(x) - \mathrm{N}(y)|$$

Exemple 1.1

- La valeur absolue est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.
- Le module est une norme sur $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Définition 1.2 Vecteur unitaire

On appelle vecteur unitaire tout vecteur de norme 1.

Remarque. Si $x \neq 0_{\mathrm{E}}$, alors $\frac{x}{\mathrm{N}(x)}$ est unitaire.

Définition 1.3 Espace vectoriel normé

On appelle espace vectoriel normé tout couple (E, N) où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N une norme sur E.

Proposition 1.1 Norme associée à un produit scalaire

Soit $(\mathrm{E}, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel. L'application $\|\cdot\|$ définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ est une norme sur E appelée norme associée au produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

Norme d'algèbre

On appelle **norme d'algèbre** d'une $\mathbb{K}$-algèbre $(E, +, ., \times)$ toute norme N sur l'espace vectoriel E vérifiant de plus

$$\forall (x, y) \in \mathbb{E}^2,\ N(x \times y) \leq N(x)N(y)$$

1.2 Normes usuelles

Définition 1.4 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Remarque. La norme $\|\cdot\|_2$ n'est autre que la norme associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{K}^n$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
En notant X la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à $x \in \mathbb{K}^n$, alors $\|x\|_2^2 = X^\top X$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\|x\|_2^2 = \overline{X^\top} X$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Normes matricielles

Si on identifie $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^{np}$, on étend naturellement les définitions précédentes à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Autrement dit pour $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$\|M\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} |M_{ij}| \qquad \|M\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} |M_{ij}|^2} \qquad \|M\|_\infty = \max_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} |M_{ij}|$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut encore remarquer que $\|\cdot\|_2$ est la norme associée au produit scalaire $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2 \mapsto \operatorname{tr}(A^\top B)$.
De plus, $\|M\|_2^2 = \operatorname{tr}(M^\top M)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\|M\|_2^2 = \operatorname{tr}(\overline{A^\top} A)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 1.5 Norme de la convergence uniforme

Soit X un ensemble. On note $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications **bornées** de X dans $\mathbb{K}$. Pour $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_X |f|$$

$\|\cdot\|_\infty$ est un norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel$\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$.

Remarque. En particulier, si $X = \mathbb{N}$, on définit une suite sur le sous-espace vectoriel des suites bornées de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$. Plus précisément,

$$\forall u \in \mathbb{K}^\mathbb{N},\ \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

Par ailleurs, une suite presque nulle est nécessairement bornée donc, en identifiant un polynôme à la suite presque nulle de ses coefficients, on peut étendre cette norme à $\mathbb{K}[X]$. Plus précisément, pour $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$

$$\|P\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

Définition 1.6 Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique

Pour $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$$

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

Remarque. Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire $(f,g)\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^2 \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 1.1 Quelques normes matricielles

Pour $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on pose

$$\mathrm{N}_1(\mathrm{A}) = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^p |\mathrm{A}_{i,j}| \qquad \mathrm{N}_2(\mathrm{A}) = \max_{1\le j\le p}\sum_{i=1}^n |\mathrm{A}_{i,j}| \qquad \mathrm{N}_3(\mathrm{A}) = \sqrt{\max \mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A})}$$

1. Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $n=p$, ce sont des normes d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1.3 Distance associée à une norme

Définition 1.7 Distance associé à une norme

Soit (E,N) un espace vectoriel normé. On appelle **distance** associée à N l'application $d : \mathrm{E}^2 \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall (x,y)\in\mathrm{E}^2,\ d(x,y) = \|x-y\|$$

Proposition 1.2 Propriétés de la distance

Soit (E,N) un espace vectoriel normé et d la distance associée à N.

Séparation $\forall (x,y)\in\mathrm{E}^2, d(x,y)=0 \implies x=y$.

Symétrie $\forall (x,y)\in\mathrm{E}^2, d(x,y)=d(y,x)$.

Inégalité triangulaire $\forall (x,y,z)\in\mathrm{E}^3, d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$.

Invariance par translation $\forall (x,y,z)\in\mathrm{E}^3, d(x+z,y+z)=d(x,y)$.

Remarque. On a encore une fois la seconde inégalité triangulaire

$$\forall (x,y,z)\in\mathrm{E}^3\ d(x,y)\ge |d(x,z)-d(z,y)|$$

Définition 1.8 Distance à une partie

Soient (E, N) un espace vectoriel normé, $x \in \mathrm{E}$ et A une partie non vide de A. On appelle **distance** de x à A le réel positif

$$d(x, \mathrm{A}) = \inf\left\{d(x, y), y \in \mathrm{A}\right\}$$

Attention ! La borne inférieure n'est pas forcément atteinte.

Exemple 1.2

Si on considère l'espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, |\cdot|)$,

$$d(0,]1, 2]) = d(0, [1, 2]) = 1$$

1.4 Boules et sphères

Définition 1.9 Boule et sphère

Soient (E, N) un espace vectoriel normé, $a \in \mathrm{E}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

Boule ouverte On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\mathrm{B}(a, r) = \left\{x \in \mathrm{E}, d(a, x) < r\right\}$$

Boule fermée On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\mathrm{B}_f(a, r) = \left\{x \in \mathrm{E}, d(a, x) \leq r\right\}$$

Sphère On appelle **sphère** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\mathrm{S}(a, r) = \left\{x \in \mathrm{E}, d(a, x) = r\right\}$$

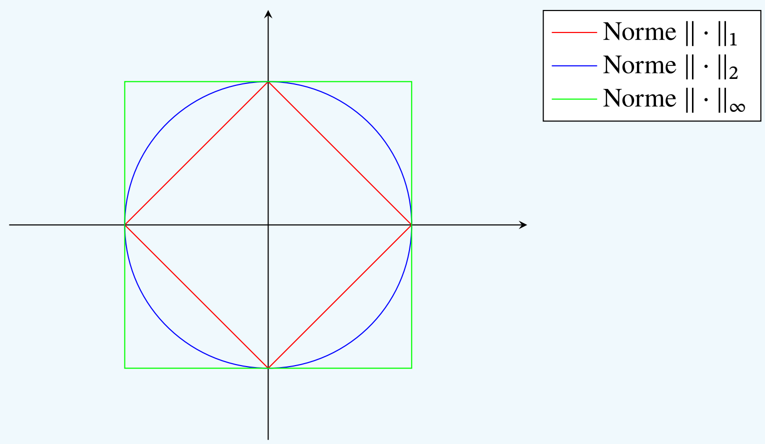
Exemple 1.3

Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $\mathrm{B}(a, r) =]a - r, a + r[$, $\mathrm{B}_f(a, r) = [a - r, a + r]$ et $\mathrm{S}(a, r) = \{a - r, a + r\}$.

Remarque. $\mathrm{B}_f(a, r)$ est l'union disjointe de $\mathrm{B}(a, r)$ et $\mathrm{S}(a, r)$.

Remarque. La boule (ouverte ou fermée) de centre 0_E et de rayon 1 est appelée **boule unité** (ouverte ou fermée). La sphère de centre 0_E et de rayon 1 est appelée **sphère unité**.

Exemple 1.4 Sphères unité de $\mathbb{R}^2$ pour les normes « classiques »



Exemple 1.5

Dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, $\mathrm{B}(a, r)$ est le disque ouvert de centre a et de rayon r, $\mathrm{B}_f(a, r)$ est le disque fermé de centre a et de rayon r et $\mathrm{S}(a, r)$ est le cercle de centre a et de rayon r.

Proposition 1.3 Convexité des boules

Les **boules** d'un espace vectoriel normé sont des parties **convexes**.

1.5 Normes équivalentes

Définition 1.10 Normes équivalentes

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que N_2 est **équivalente** à N_1 si

$$\exists(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \forall x \in \mathrm{E},\ \alpha \mathrm{N}_1(x) \leq \mathrm{N}_2(x) \leq \beta \mathrm{N}_1(x)$$

Proposition 1.4

La relation «être équivalente à» est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. On pourra alors dire sans ambiguïté que deux normes sont équivalentes plutôt que de dire que l'une est équivalente à l'autre.

Propriétés inchangées par passage à une norme équivalente

L'équivalence des normes est une notion essentielle. On verra en effet que bon nombre de propriétés de parties d'un espace vectoriel, de suites ou de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé restent inchangées si on change une norme en une norme équivalente, notamment :

- le caractère borné ;
- la limite, la convergence ou la divergence des suites ;
- les ouverts, les fermés, les voisinages, les intérieurs, les adhérences, la densité ;
- la limite et la continuité des fonctions ;
- la compacité ;
- la connexité par arcs.

Méthode **Montrer que deux normes ne sont pas équivalentes**

Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, il suffit de trouver une suite (u_n) d'éléments de E vérifiant l'une des deux conditions :

- l'une des deux suites $(N_1(u_n))$ et $(N_2(u_n))$ est bornée tandis que l'autre ne l'est pas ;
- l'une des deux suites $(N_1(u_n))$ et $(N_2(u_n))$ converge vers 0 tandis que l'autre ne converge pas vers 0.

Exemple 1.6

Posons pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \qquad\qquad \|P\|_\infty = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$. On vérifie sans peine que $\|P_n\|_1 = n+1$ et $\|P_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite de terme général $\|P_n\|_\infty$ est bornée (et même constante) tandis que la suite de terme général $\|P_n\|_1$ ne l'est pas (elle diverge vers $+\infty$). Ceci permet de conclure que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
On aurait pu aboutir au même résultat en considérant $Q_n = \frac{1}{n+1} P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, la suite de terme général $\|Q_n\|_\infty$ converge vers 0 à la différence de la suite de terme général $\|Q_n\|_1$ qui est constante égale à 1.

Théorème 1.1 Équivalence des normes en dimension finie

Toutes les normes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie** sont **équivalentes**.

Remarque. Ce théorème est faux si $\mathbb{K}$ n'est pas un corps «complet» (notion hors-programme) – par exemple, si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

1.6 Parties, suites et fonctions bornées

Le caractère borné d'une partie d'un espace vectoriel normé, d'une suite ou d'une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé est invariant si l'on change la norme en une norme équivalente.

Définition 1.11 Partie bornée

Soient (E, N) un espace vectoriel normé et A une partie de E. On dit que A est **bornée** s'il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que $N(x) \leq R$ pour tout $x \in E$.

Remarque. Autrement dit, une partie est bornée si elle est incluse dans une boule (centrée en 0_E).

Exemple 1.7

Les boules et les sphères sont des parties bornées.

Exemple 1.8

$O(n)$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car pour tout $M \in O(n)$, $\|M\|_2^2 = \operatorname{tr}(M^\top M) = \operatorname{tr}(I_n) = n$.

Définition 1.12 Suite bornée

Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite (u_n) est **bornée** s'il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que $N(u_n) \leq R$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
L'ensemble des suites bornées est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.

Définition 1.13 Application bornée

Soient X un ensemble, (E, N) un espace vectoriel normé et $f \in E^X$. On dit que f est **bornée** s'il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que $N(f(x)) \leq R$ pour tout $x \in X$.
L'ensemble des applications bornées est un sous-espace vectoriel de E^X.

Attention ! Le caractère borné peut dépendre de la norme considérée.

Exemple 1.9

On munit $\mathbb{R}[X]$ des normes N_1 et N_2 définies par

$$N_1 : P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \mapsto \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$
$$N_2 : P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

La suite de terme général $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$ est borné pour la norme N_1 puisque $N_1(P_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais elle ne l'est pas pour la norme N_2 puisque $N_2(P_n) = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.7 Produit d'espaces vectoriels normés

Proposition 1.5 Produit d'espaces vectoriels normés

Soit $(\mathrm{E}_k, \mathrm{N}_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille finie d'espace vectoriels normés et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Alors on définit une norme N sur $\prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}_k$ en posant

$$\forall x \in \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}_k,\ \mathrm{N}(x) = \left\|(\mathrm{N}_1(x_1), \dots, \mathrm{N}_n(x_n))\right\|$$

Si on change la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$, la norme N est transformée en une norme équivalente.

2 Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

Toutes les propriétés des suites vues dans cette section (limite, convergence, divergence, valeurs d'adhérence) restent inchangées si on remplace la norme de l'espace vectoriel normé considéré par une norme équivalente.

2.1 Convergence et divergence

Définition 2.1 Limite

Soient (E, N) un espace vectoriel normé, $(u_n) \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathrm{E}$. On dit que (u_n) admet ℓ pour **limite** si $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{N}(u_n - \ell) = 0$.

Remarque. Si (u_n) est une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé, cela n'a pas de sens de dire que (u_n) admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ (hormis si cet espace vectoriel est $\mathbb{R}$). Par contre, dire que la suite $(\mathrm{N}(u_n))$ admet $+\infty$ pour limite a un sens puisqu'il s'agit d'une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Proposition 2.1 Unicité de la limite

Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $(u_n) \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) admet une limite, alors celle-ci est unique.

Attention ! Comme en première année, il faut toujours justifier l'**existence** de la limite avant de parler de celle-ci.

Définition 2.2 Convergence et divergence

Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $(u_n) \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$.

(i) On dit que (u_n) **converge** si (u_n) admet une limite.

(ii) Dans le cas contraire, on dit que (u_n) **diverge**.

Proposition 2.2 Convergence et caractère borné

Toute suite **convergente** à valeurs dans un espace vectoriel normée est **bornée**.

Attention ! La réciproque est fausse. Par exemple, la suite de terme général $(-1)^n$ est bornée mais n'est pas convergente.

Attention ! La convergence d'une suite peut dépendre de la norme considérée.

Exemple 2.1

On munit $\mathbb{R}[X]$ des normes N_1 et N_2 définies par

$$N_1 : P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \mapsto \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$
$$N_2 : P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

La suite de terme général $P_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} X^k$ converge vers 0 la norme N_1 puisque $N_1(P_n) = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais elle ne converge pas pour la norme N_2. En effet, supposons que (P_n) converge vers un polynôme P. Puisque $N_1 \leq N_2$, (P_n) convergerait vers P pour la norme N_1 et donc $P = 0$ par unicité de la limite. Mais (P_n) ne peut pas converger vers 0 pour la norme N_2 puisque $N_2(P_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Opérations algébriques

Proposition 2.3

Soient (λ_n) une suite convergente de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et (u_n) une suite convergente d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Alors la suite $(\lambda_n u_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n u_n = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n\right)\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)$.

Proposition 2.4

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes d'un espace vectoriel normé. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \mu \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Attention ! Comme les suites considérées sont à valeurs dans un espace vectoriel et non un corps, cela n'a a priori pas de sens de parler de produit ou de quotient de telles suites.

2.3 Valeurs d'adhérence

Définition 2.3 Suite extraite

Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** de (u_n) toute suite du type $(u_{\varphi(n)})$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Proposition 2.5 Convergence et suite extraite

Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) converge vers $\ell \in E$, alors toute suite extraite de (u_n) converge également vers ℓ.

Attention ! Il ne suffit pas qu'une suite extraire admette une limite pour garantir l'existence d'une limite pour la suite initiale.

Proposition 2.6

Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite $\ell \in E$, alors (u_n) converge vers ℓ.

Définition 2.4 Valeur d'adhérence

Soient (E, N) un espace vectoriel normé, $(u_n) \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathrm{E}$. On dit que (u_n) admet ℓ pour valeur d'adhérence s'il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers ℓ.

Remarque. Dans le cadre des suites réelles, une valeur d'adhérence est forcément un réel. Cela n'est pas correct stricto sensu de dire que $+\infty$ ou $-\infty$ sont des valeurs d'adhérence bien qu'on puisse donner un sens à de telles affirmations.

Attention ! Si une suite converge, son unique valeur d'adhérence est sa limite mais la réciproque est fausse : une suite admettant une unique valeur d'adhérence ne converge pas nécessairement.

Exemple 2.2

La suite de terme général $n \sin \frac{n\pi}{2}$ admet 0 pour unique valeur d'adhérence mais ne converge pas (elle n'est même pas bornée).

Méthode **Prouver qu'une suite diverge**

Pour montrer qu'une suite diverge, il suffit d'exhiber deux valeurs d'adhérence.

Exemple 2.3

La suite de terme général $(-1)^n$ admet 1 et -1 pour valeurs d'adhérences donc elle diverge.

Exercice 2.1

2.1 Soit (u_n) une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Montrer que $\ell \in \mathrm{E}$ est une valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, la boule $\mathrm{B}(\ell, \varepsilon)$ contient une infinité de termes de la suite (u_n).

3 Topologie d'un espace vectoriel normé

Toutes les propriétés des parties vues dans cette section (ouvert, fermé, voisinage, intérieur, adhérence, densité, frontière) restent inchangées si on remplace la norme de l'espace vectoriel normé considéré par une norme équivalente.

3.1 Ouverts et fermés

Définition 3.1 Ouvert et fermé

Soient E un espace vectoriel et A une partie de E.

i On dit que A est une **partie ouverte** ou un **ouvert** de E si pour tout $a \in \mathrm{A}$, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $\mathrm{B}(a, \varepsilon) \subset \mathrm{A}$.

ii On dit que A est une **partie fermée** ou un **fermé** de E si $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$ est un ouvert de E.

Exemple 3.1 Boules ouvertes et fermées, sphères

Une boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée ou une sphère sont des fermés.

Exemple 3.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ (i.e. de la forme $]a, b[$) sont des ouverts (ce sont des boules ouvertes), de même que les intervalles de la forme $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$ et $]-\infty, +\infty[$.
Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ (i.e. de la forme $[a, b]$) sont des fermés (ce sont des boules fermées), de même que les intervalles de la forme $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$ et $]-\infty, +\infty[$.

Attention ! L'erreur classique consiste à penser que fermé est le contraire d'ouvert.
Une partie peut être à la fois un ouvert et un fermé : c'est le cas de l'ensemble vide et de l'espace total (ce sont d'ailleurs les seules parties à la fois ouvertes et fermées d'un espace vectoriel normé).
Une partie peut n'être ni un ouvert ni un fermé. Par exemple, l'intervalle $[0, 1[$ n'est ni un ouvert ni un fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 3.1

Montrer que les seules parties à la fois ouvertes et fermées d'un espace vectoriel normé E sont $\varnothing$ et E.

Proposition 3.1 Réunion et intersection d'ouverts ou de fermés

(i) Une réunion quelconque ou une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.

(ii) Une intersection quelconque ou une réunion **finie** de fermés est un fermé.

Attention ! Une intersection infinie d'ouverts peut ne pas être un ouvert. Par exemple,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$$

De même, une réunion infinie de fermés peut ne pas être un fermé. Par exemple,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1\right] =]0, 1]$$

Proposition 3.2 Caractérisation séquentielle des fermés

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé. Alors A est un fermé si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A admet sa limite dans A.

Exemple 3.3

Un singleton est fermé.

Définition 3.2 Voisinage

Soit a un élément d'un espace vectoriel normé E. On appelle **voisinage** de a toute partie de E contenant un ouvert de E comprenant a.

Proposition 3.3

Soit a un élément d'un espace vectoriel normé E. Une partie V de E est un voisinage de a si et seulement si il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset V$.

Exemple 3.4

Un ouvert est un voisinage de chacun de ses points.

Remarque. Les notions de limite ou de valeur d'adhérence peuvent se traduire en terme de voisinage. Notons $\mathcal{V}(\ell)$ l'ensemble des voisinages d'un point ℓ de E.

- (u_n) converge vers $\ell \in E$ si et seulement si

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \in V$$

- $\ell \in E$ est une valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ u_n \in V$$

3.2 Intérieur et adhérence

Définition 3.3 Intérieur d'une partie

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On dit que $a \in E$ est **intérieur** à A si A est un voisinage de a ou, de manière équivalente si,

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ B(a, \varepsilon) \subset A$$

L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'**intérieur** de A et se note $\mathring{A}$.

Exemple 3.5

Pour $a \in E$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, l'intérieur de la boule fermée $B_f(a, \varepsilon)$ est la boule ouverte $B(a, \varepsilon)$.

Exemple 3.6

L'intérieur d'un intervalle non vide est l'intervalle ouvert de mêmes extrémités.

Proposition 3.4

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Alors $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.
En particulier, A est un ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$.

Exercice 3.2

3.2 Soient A et B des parties d'un espace vectoriel normé E. Montrer que

1. $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$
2. $A \subset B \implies \mathring{A} \subset \mathring{B}$
3. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$
4. $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$

Dans le dernier cas, on donnera un exemple d'inclusion stricte.

Définition 3.4 Adhérence d'une partie

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On dit que $a \in E$ est **adhérent** à A si l'intersection de tout voisinage de a avec A est non vide ou, de manière équivalente, si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ B(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$$

L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'**adhérence** de A et se note $\overline{A}$.

Exemple 3.7

Pour $a \in E$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, l'adhérence de la boule ouverte $B(a, \varepsilon)$ est la boule fermée $B_f(a, \varepsilon)$.

Exemple 3.8

L'adhérence d'un intervalle borné non vide est l'intervalle fermé de mêmes extrémités.

Remarque. Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on dira que $+\infty$ est adhérent à A si A est non majorée et que $-\infty$ est adhérent à A si A est non minorée.

Proposition 3.5

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Alors $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
En particulier, A est un fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

Exercice 3.3

3.3 Soient A et B des parties d'un espace vectoriel normé E. Montrer que

1. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
2. $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
4. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

Dans le dernier cas, on donnera un exemple d'inclusion stricte.

Proposition 3.6 Caractérisation séquentielle de l'adhérence

Soient A une partie d'un espace vectoriel normé E et $a \in E$. Alors $a \in \overline{A}$ si et seulement si il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$.

Remarque. Ceci signifie que $\overline{A}$ est l'ensemble des limites des suites convergentes à valeurs dans A.

Définition 3.5 Densité

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On dit que A est dense si $\overline{A} = E$ ou, de manière équivalente, si

$$\forall x \in E,\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$$

Proposition 3.7 Caractérisation séquentielle de la densité

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Alors A est dense si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe une suite à valeurs dans A de limite x.

Exemple 3.9 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite de terme général de terme $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ est à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et de limite x.

Exemple 3.10 Densité de $GL_n(\mathbb{K}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$

$GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et posons $M_p = M + \frac{1}{p}I_n$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. On a clairement $\lim_{n\to+\infty} M_p = M$. De plus, la suite (M_p) est injective (elle prend une infinité de valeurs) et M ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres. Par conséquent, la suite (M_p) est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{K})$ à partir d'un certain rang.

Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$

Les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont soit monogènes (i.e. de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$) soit denses.

Définition 3.6 Frontière

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On appelle **frontière** de A l'ensemble $\mathrm{F}r(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Exemple 3.11

La frontière de la boule $B(a,\varepsilon)$ est la sphère $S(a,\varepsilon)$.

Proposition 3.8

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Alors $\mathrm{F}r(A)$ est un fermé.

3.3 Topologie relative à une partie

Définition 3.7 Ouvert et fermé relatifs

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.

(i) On appelle **ouvert relatif** à A toute partie de la forme $A \cap U$ où U est un ouvert de E.

(ii) On appelle **fermé relatif** à A toute partie de la forme $A \cap F$ où F est un fermé de E.

Exemple 3.12

$[0,1[$ est un ouvert relatif à $\mathbb{R}_+$ car $[0,1[=]-1,1[\cap\mathbb{R}_+$ est $]-1,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
$]0,1]$ est un fermé relatif à $\mathbb{R}_+^*$ car $]0,1]=[0,1]\cap\mathbb{R}_+^*$ est $[0,1]$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 3.8 Voisinage relatif

Soient A une partie d'un espace vectoriel normé E et $a \in E$. On appelle **voisinage relatif** de a à A toute partie de la forme $A \cap V$ où V est un voisinage de a.

Définition 3.9 Densité relative

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Une partie X de A est dense dans A si $A \subset \overline{X}$.

4 Limite d'une application

Toutes les propriétés des applications vues dans cette section restent inchangées si on remplace les normes des espaces vectoriels normés considérés par des normes équivalentes.

4.1 Définition et propriétés de la limite

Définition 4.1 Limite

Soient (E, N_1) et (F, N_2) deux espaces vectoriels normés, A une partie de E, f une application de A dans F, a un point adhérent à A et $\ell \in F$.
On dit que f admet pour **limite** ℓ en a si pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage U de a relatif à A tel que $f(U) \subset V$ ou, de manière équivalente, si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ f(B(a,\alpha)\cap A) \subset B(\ell,\varepsilon)$$

ou encore

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in A,\ N_1(x-a) < \alpha \implies N_2(f(x)-\ell) < \varepsilon$$

Remarque. On obtient une définition équivalente en remplaçant les boules ouvertes par des boules fermées ou les inégalités strictes par des inégalités larges.

Remarque. La partie A peut avoir son importance. Par exemple, si on considère $f : (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto \arctan(y/x)$. Alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} = \frac{\pi}{2}$.
Mais si on considère $g : (x,y) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R} \mapsto \arctan(y/x)$. Alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} = -\frac{\pi}{2}$

Proposition 4.1 Unicité de la limite

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E, f une application de A dans F et a un point adhérent à A.
Si f admet une limite en a, alors celle-ci est unique.

Proposition 4.2 Passage à la limite

Soient f et g deux applications d'une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant des limites respectives ℓ et ℓ' en $a \in \overline{A}$.
Si $f \leq g$ sur un voisinage de a relatif à A, alors $\ell \leq \ell'$.

Attention ! Ceci n'a bien évidemment aucun sens pour des applications qui ne sont pas à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4.3 Encadrement

Soient f, g et h trois applications d'une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et h admettent la même limite ℓ en $a \in \overline{A}$.
Si $f \leq g \leq h$ sur un voisinage de a relatif à A, alors g admet également pour limite ℓ en a.

Méthode **Déterminer la limite d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$**

Soit f une application d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour déterminer la limite de f en $a \in \overline{A}$, on peut :

- se ramener en $(0, \dots, 0)$ en posant $x = a + h$ de sorte que h tend vers $(0, \dots, 0)$ lorsque x tend vers a ;
- choisir une norme adaptée ;
- tirer parti du fait que pour $x(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x_i| \leq \|x\|$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (que $\|\cdot\|$ soit la norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$).

Exemple 4.1

Soit $f : (x, y, z) \mapsto \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$. Déterminons la limite éventuelle de f en $(0, 0, 0)$.
Munissons $\mathbb{R}^3$ de la norme euclidienne. Alors

$$|f(x, y, z)| = \frac{|x||y||z|}{\|(x, y, z)\|_2^2} \leq \frac{\|(x, y, z)\|_2^3}{\|(x, y, z)\|_2^2} = \|(x, y, z)\|_2$$

On en déduit que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z) = 0$.

Proposition 4.4 Caractérisation séquentielle de la limite

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E, f une application de A dans F, a un point adhérent à A et $\ell \in F$.
Alors $\lim\limits_a f = \ell$ si et seulement si pour toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a, $(f(u_n))$ converge vers ℓ.

Méthode **Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite**

Pour montrer qu'une fonction f définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E n'admet pas de limite en $a \in \overline{A}$, il suffit au choix :

- d'exhiber une suite (u_n) à valeurs dans A et de limite a telle que la suite $(f(u_n))$ n'ait pas de limite ;
- ou d'exhiber deux suites (u_n) et (v_n) à valeurs dans A et de limite a telle que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ aient des limites différentes.

Exemple 4.2

L'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ n'admet pas de limite en $(0, 0)$. En effet, si on pose $u_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ et $v_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les suites (u_n) et (v_n) sont bien à valeurs dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et de limite $(0, 0)$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = \frac{1}{2}$.

Attention ! L'exemple précédent montre en particulier que, si f est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il ne suffit pas que les fonctions $x \mapsto f(x, b)$ et $y \mapsto f(a, y)$ admettent des limites respectives en a et b pour que f admette une limite en (a, b).
En effet, pour $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$, les applications $x \mapsto f(x, 0)$ et $y \mapsto f(0, y)$ admettent bien des limites en 0 puisqu'elles sont constamment nulles et pourtant, f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

Proposition 4.5 Extensions

Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{N}_1)$ et $(\mathrm{F}, \mathrm{N}_2)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie de E, f une application de A dans F, a un point adhérent à A et $\ell \in \mathrm{F}$.

- On suppose A non bornée. Alors $\lim\limits_{\mathrm{N}_1(x)\to+\infty} f(x) = \ell$ signifie que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \mathrm{K} \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathrm{A},\ \mathrm{N}_1(x) \geq \mathrm{K} \implies \mathrm{N}_2(f(x) - \ell) \leq \varepsilon$$

- On suppose que A est une partie non bornée de R. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ signifie que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \mathrm{K} \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathrm{A},\ x \geq \mathrm{K} \implies \mathrm{N}_2(f(x) - \ell) \leq \varepsilon$$

- On suppose que A est une partie non bornée de $\mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ signifie que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \mathrm{K} \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathrm{A},\ x \leq \mathrm{K} \implies \mathrm{N}_2(f(x) - \ell) \leq \varepsilon$$

- On suppose que $\mathrm{F} = \mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ signifie que

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathrm{A},\ \mathrm{N}_1(x-a) \leq \varepsilon \implies f(x) \geq \mathrm{M}$$

- On suppose que $\mathrm{F} = \mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ signifie que

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathrm{A},\ \mathrm{N}_1(x-a) \leq \varepsilon \implies f(x) \leq \mathrm{M}$$

- On suppose A non bornée et $\mathrm{F} = \mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{\mathrm{N}_1(x)\to+\infty} f(x) = +\infty$ signifie que

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{K} \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathrm{A},\ \mathrm{N}_1(x) \geq \mathrm{K} \implies f(x) \geq \mathrm{M}$$

- On suppose A non bornée et $\mathrm{F} = \mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{\mathrm{N}_1(x)\to+\infty} f(x) = -\infty$ signifie que

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{K} \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathrm{A},\ \mathrm{N}_1(x) \geq \mathrm{K} \implies f(x) \leq \mathrm{M}$$

On peut également donner une caractérisation séquentielle de la limite dans chacun de ces cas.

Exemple 4.3

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$. Alors $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x, y) = +\infty$.

Exemple 4.4

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ un polynôme non constant. Alors $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |\mathrm{P}(z)| = +\infty$.

Exemple 4.5

L'application $f : t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t)$ n'admet pas de limite en $+\infty$. En effet, la suite de terme général $n\pi$ est de limite $+\infty$ mais la suite de terme général $f(n\pi)$ n'admet pas de limite. En effet, elle admet deux valeurs d'adhérences, à savoir $(-1, 0)$ et $(1, 0)$.

Exemple 4.6

L'application $f : (x, y) \mapsto \sin(x + y)$ n'admet pas de limite lorsque $\|(x, y)\|$ tend vers $+\infty$. En effet, la suite de terme général $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$ tend bien en norme vers $+\infty$ mais la suite de terme général $f\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$ n'admet pas de limite. En effet, elle admet deux valeurs d'adhérences -1 et 1.

Proposition 4.6 Majoration, minoration

Soient f et g deux applications d'une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $f \leq g$ sur un voisinage de a relatif à A.

(i) Si $\lim\limits_a f = +\infty$, alors $\lim\limits_a g = +\infty$.

(ii) Si $\lim\limits_a g = -\infty$, alors $\lim\limits_a f = -\infty$.

Proposition 4.7 Limite d'une application à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés

Soient $E, F_1, \dots, F_n$ des espaces vectoriels normés, f une application d'une partie A de E dans $\prod\limits_{i=1}^{n} F_i$, $a \in \overline{A}$ et $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \prod_{i=1}^{n} F_i$. On note $f_1, \dots, f_n$ les applications composantes de f.
Alors f admet pour limite ℓ en a si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i admet pour limite ℓ_i en a.

4.2 Opérations sur les limites

Proposition 4.8

Soient A une partie d'une espace vectoriel normé E, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, f une application de A dans $\mathbb{K}$ et g une application de A dans F.
Si f et g admettent des limites en $a \in \overline{A}$, alors fg admet une limite en a et $\lim\limits_a fg = (\lim\limits_a f)(\lim\limits_a g)$.

Proposition 4.9

Soient A une partie d'une espace vectoriel normé E, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, f et g deux applications de A dans F.
Si f et g admettent des limites en $a \in \overline{A}$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ admet une limite en a et $\lim\limits_a \lambda f + \mu g = \lambda \lim\limits_a f + \mu \lim\limits_a g$.

Proposition 4.10 Limite et composition

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, A et B des parties respectives de E et F, f une application de A dans F, g une application de B dans G et enfin $a \in \overline{A}$, $b \in F$ et $l \in G$. On suppose que $f(A) \subset B$.
Si $\lim\limits_a f = b$ et $\lim\limits_b g = \ell$, alors $\lim\limits_a g \circ f = \ell$.

Remarque. Puisque $f(A) \subset B$, $\lim\limits_a f = b$ implique $b \in \overline{B}$.

Méthode **Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite**

Pour montrer qu'une fonction f définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E n'admet pas de limite en $a \in \overline{A}$, il suffit au choix :

- d'exhiber une fonction à valeurs dans A et de limite a en b telle que la fonction $f \circ g$ n'ait pas de limite en b ;
- ou d'exhiber deux fonctions g et h à valeurs dans A et de limite a en b telle que les fonctions $f \circ g$ et $f \circ h$ aient des limites différentes en b.

Exemple 4.7

L'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ n'admet pas de limite en $(0, 0)$. En effet, si on pose $g : t \in \mathbb{R} \mapsto (t, 0)$ et $h : t \mapsto (t, t)$, $\lim\limits_0 g = \lim\limits_0 h = (0, 0)$ mais $\lim\limits_0 f \circ g = 0$ tandis que $\lim\limits_0 f \circ h = \frac{1}{2}$.

5 Continuité

Toutes les propriétés des applications vues dans cette section (continuité, uniforme continuité, lipschitzianité) restent inchangées si on remplace les normes des espaces vectoriels normés considérés par des normes équivalentes.

5.1 Définition et premières propriétés

Définition 5.1 Continuité

Soit f une application d'une partie A d'un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \mathrm{N}_1)$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $(\mathrm{F}, \mathrm{N}_2)$.
On dit que f est **continue** en $a \in \mathrm{A}$ si f admet une limite en a. Dans ce cas, $\lim\limits_a f = f(a)$.
Autrement dit, f est continue en a si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \ f(\mathrm{B}(a, \alpha) \cap \mathrm{A}) \subset \mathrm{B}(f(a), \varepsilon)$$

ou encore

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x \in \mathrm{A}, \ \mathrm{N}_1(x - a) < \alpha \implies \mathrm{N}_2(f(x) - f(a)) < \varepsilon$$

On dit que f est continue sur A si f est continue en tout $a \in \mathrm{A}$.

Remarque. On obtient une définition équivalente en remplaçant les boules ouvertes par des boules fermées ou les inégalités strictes par des inégalités larges.

Proposition 5.1 Caractérisation séquentielle de la continuité

Soit f une application d'une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F.
Alors f est continue en A si et seulement si pour toute suite $(u_n) \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a, $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

5.2 Opérations sur les applications continues

Proposition 5.2

Soient A une partie d'une espace vectoriel normé E, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, f une application de A dans $\mathbb{K}$ et g une application de A dans F.
Si f et g sont continues en $a \in \mathrm{A}$ (resp. sur A), alors fg est continue en a (resp. sur A).

Proposition 5.3

Soient A une partie d'une espace vectoriel normé E, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, f et g deux applications de A dans F.
Si f et g sont continues en $a \in \mathrm{A}$ (resp. sur A), alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ est continue en a (resp. sur A).

Proposition 5.4 Continuité et composition

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, A et B des parties respectives de E et F, f une application de A dans F, g une application de B dans G. On suppose que $f(\mathrm{A}) \subset \mathrm{B}$.
Si f est continue en $a \in \mathrm{A}$ (resp. sur A) et g est continue en $f(a)$ (resp. sur B), alors $g \circ f$ est continue en a (resp. sur A).

5.3 Uniforme continuité et lipschitzianité

Définition 5.2 Uniforme continuité

Soit f une application d'une partie A d'un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \mathrm{N}_1)$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \mathrm{N}_2)$. On dit que f est **uniformément continue** sur A si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall a \in \mathrm{A},\ f(\mathrm{B}(a, \alpha) \cap \mathrm{A}) \subset \mathrm{B}(f(a), \varepsilon)$$

ou, de manière équivalente, si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x, y) \in \mathrm{A}^2, \mathrm{N}_1(x - y) < \alpha \implies \mathrm{N}_2(f(x) - f(y)) < \varepsilon$$

Remarque. On obtient une définition équivalente en remplaçant les boules ouvertes par des boules fermées ou les inégalités strictes par des inégalités larges.

Proposition 5.5

Soit f une application d'une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F.
Si f est **uniformément continue** sur A, alors f est **continue** sur A.

Attention ! La réciproque est fausse. La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 5.3 Application lipschitzienne

Soit f une application d'une partie A d'un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \mathrm{N}_1)$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \mathrm{N}_2)$. On dit que f est **lipschitzienne** sur A si

$$\exists \mathrm{K} \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x, y) \in \mathrm{A}^2,\ \mathrm{N}_2(f(x) - f(y)) \leq \mathrm{K}\mathrm{N}_1(x - y)$$

Dans ce cas, on dit que f est lipschitzienne de rapport K ou K-lipschitzienne.

Remarque. La lipschitzianité est inchangée si on change les normes en des normes équivalents. Néanmoins, le **rapport** de lipschitzianité peut changer.

Exemple 5.1

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Par inégalité triangulaire, l'application N est 1-lipschitzienne et en particulier continue.

Proposition 5.6

Soit f une application d'une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F.
Si f est **lipschitzienne** sur A, alors f est **uniformément continue** sur A.

Attention ! La réciproque est fausse. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ mais pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Distance à une partie

Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé (E, N). Pour $x \in A$, on appelle **distance** de x à A le réel positif

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} N(x - a)$$

L'application $x \in E \mapsto d(x, A)$ est lipschitzienne sur E donc uniformément continue sur E donc continue sur E.

Exemple 5.2 Projections canoniques

Soient $F_1, \dots, F_n$ des espaces vectoriels normés. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'application

$$p_k : (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n \mapsto x_k$$

est lipschitzienne donc uniformément continue donc continue.

Proposition 5.7 Cas des applications linéaires

Soient (E, N_1) et (F, N_2) des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est continue sur E si et seulement si

$$\exists C \in \mathbb{R}_+, \ \forall x \in E, \ N_2(f(x)) \leq CN_1(x)$$

Remarque. Pour les applications linéaires, il y a donc équivalence entre continuité, uniforme continuité et lipschitzianité.

Exemple 5.3

On munit l'espace vectoriel E des suires bornées de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$. L'endomorphisme $T : (u_n) \in E \mapsto (u_{n+1} - u_n)$ est continu. Soit en effet $u \in E$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|T(u)_n| = |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2\|u\|_\infty$$

Donc $\|T(u)\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty$.

Méthode **Montrer qu'une application linéaire n'est pas continue**

Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{N}_1)$ et $(\mathrm{F}, \mathrm{N}_2)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Pour montrer qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ n'est pas continue, il suffit de trouver une suite (x_n) d'éléments de E telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{N}_2(f(x_n))}{\mathrm{N}_1(x_n)} = +\infty$$

Exemple 5.4

On munit $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de la norme N définie par $\mathrm{N}(\mathrm{P}) = \sup_{t\in[-1,1]} |\mathrm{P}(t)|$. L'endomorphisme de dérivation

$$\mathrm{D} :\ \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}'$$

n'est pas continu. En effet, si on pose $\mathrm{P}_n = \mathrm{X}^n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{N}(\mathrm{P}_n) = 1$ tandis que $\mathrm{N}(\mathrm{D}(\mathrm{P}_n)) = \mathrm{N}(n\mathrm{X}^{n-1}) = n$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{N}(\mathrm{D}(\mathrm{P}_n))}{\mathrm{N}(\mathrm{P}_n)} = +\infty$$

Définition 5.4

Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{N}_1)$ et $(\mathrm{F}, \mathrm{N}_2)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Proposition 5.8 Continuité des applications linéaires en dimension finie

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Si E est de **dimension finie**, toute application **linéaire** de E dans F est continue i.e. $\mathcal{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{F}) = \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Proposition 5.9 Continuité des applications multilinéaires en dimension finie

Soient $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n, \mathrm{F}$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Si $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n$ sont de **dimension finie**, toute application multilinéaire de $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$ dans F est continue.

Exemple 5.5

Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) \times \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{G}) \\ (f, g) & \longmapsto & g \circ f \end{array} \right.$ est bilinéaire donc continue ($\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $\mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$ sont de dimensions finies car $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ le sont).

Exemple 5.6

L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (\mathrm{A}, \mathrm{B}) & \longmapsto & \mathrm{AB} \end{array} \right.$ est bilinéaire donc continue ($\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sont de dimensions finies).

5.4 Applications polynomiales

Définition 5.5 Application polynomiale

On appelle **application polynomiale** toute application du type

$$\begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n} a_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \end{cases}$$

où $(a_{i_1,\dots,i_n})_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n}$ est une famille presque nulle d'éléments de $\mathbb{K}$.

Proposition 5.10

Toute application **polynomiale** est **continue**.

Exemple 5.7

Le déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue en tant que fonction polynomiale des coefficients de la matrice.

Exemple 5.8

L'application qui à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe sa comatrice est continue car chacun des coefficients de la comatrice est au signe près un déterminant et donc une fonction polynomiale des coefficients de la matrice.

5.5 Continuité et topologie

Proposition 5.11 Caractérisation par les ouverts et les fermés

Soit f une application d'une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F.
Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) f est **continue** sur A.

(ii) L'image réciproque d'un **ouvert** quelconque de F est un **ouvert** de E relatif à A.

(iii) L'image réciproque d'un **fermé** quelconque de F est un **fermé** de E relatif à A.

Exemple 5.9

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car c'est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K}^*$ de $\mathbb{K}$ par le déterminant qui est une application continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathrm{O}(n)$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car c'est l'image réciproque du fermé $\{\mathrm{I}_n\}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par l'application continue $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^\top\mathrm{M}$.
- $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car c'est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par le déterminant qui est une application continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- $\mathrm{SO}(n)$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car c'est l'intersection des fermés $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5.1

5.1 Soit f une application d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F. Montrer que f est continue si et seulement si pour toute partie A de E, $\overline{f^{-1}(\mathrm{A})} \subset f^{-1}(\overline{\mathrm{A}})$.

Proposition 5.12 Densité et continuité

Soient f et g deux applications d'un espace vectoriel normé E à valeur dans un espace vectoriel normé F. Si f et g coïncident sur une partie dense de E, alors elles sont égales.

Exercice 5.2 Endomorphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$

Soit f un endomorphisme **continu** du groupe $(\mathbb{R}, +)$.

1. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1)$.
2. En déduire que $f = f(1)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 5.3 Similitude et comatrice

Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que com(A) et com(B) sont également semblables. On pourra d'abord traiter le cas où A et B sont inversibles.

6 Compacité

6.1 Parties compactes

Définition 6.1 Compact

On dit qu'une partie K d'un espace vectoriel normé E est une **partie compacte** ou un **compact** de E si toute suite **bornée** à valeurs dans K admet une valeur d'adhérence.

Proposition 6.1

Tout compact d'un espace vectoriel normé est fermé et borné.

Attention ! La réciproque est fausse en général en dimension infinie.
Par exemple, si on munit $\mathbb{K}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, la partie $A = \{X^n, n \in \mathbb{N}\}$ est fermée et bornée mais non compacte. Si elle était compacte, on pourrait extraire de la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(X^{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Sa limite appartiendrait à A donc il existerait $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} X^{\varphi(n)} = X^p$$

Or comme $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, $\varphi(n) > \varphi(p) \geq p$ pour tout entier $p > n$. Ainsi $\|X^{\varphi(n)} - X^p\|_\infty = 1$ pour tout $n > p$, ce qui contredit le fait que $(X^{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X^p.

Proposition 6.2

Toute partie fermée d'une partie compacte est compacte.

Proposition 6.3 Compacité et convergence

Une suite à valeurs dans un compact d'un espace vectoriel normé converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Proposition 6.4 Produit de compacts

Soient $E_1, \dots, E_n$ des espaces vectoriels normés et $K_1, \dots, K_n$ des compacts respectifs de ces espaces vectoriels normés. Alors $K_1 \times \dots \times K_n$ est un compact de $E_1 \times \dots \times E_n$.

6.2 Compacité dimension finie

Théorème 6.1 Compacts d'un espace vectoriel de dimension finie

Les compacts d'un espace vectoriel normé de **dimension finie** sont exactement les parties fermées et bornées.

Exemple 6.1

Les boules fermées d'un espace vectoriel de dimension finie sont compactes.

Exemple 6.2

$O(n)$ et $SO(n)$ sont des compacts de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 6.5

Une suite **bornée** à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Attention ! Il est essentiel que la suite soit bornée. Par exemple la suite de terme général $2^n(j^n - 1)$ admet 0 comme unique valeur d'adhérence mais ne converge pas.

Proposition 6.6 Sous-espaces vectoriels de dimension finie

Tout sous-espace vectoriel de **dimension finie** d'un espace vectoriel normé est fermé.

6.3 Continuité et compacité

Proposition 6.7

Soit f une application d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F.
L'image d'une partie compacte de E par f est une partie compacte de F.

Corollaire 6.1

Soient K un compact d'un espace vectoriel normé E et f une application une application continue sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Exemple 6.3

Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \mathrm{N}_1)$ de dimension finie à valeurs dans un espace vectoriel normé $(\mathrm{F}, \mathrm{N}_2)$. L'application $\varphi : x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\} \mapsto \frac{\mathrm{N}_2(f(x))}{\mathrm{N}_1(x)}$ est bornée et atteint ses bornes. En effet, l'image de $\mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$ par φ est également l'image de la sphère unité par φ et la sphère unité est compacte puisque c'est une partie fermé et bornée d'un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 6.1 Norme d'opérateur (ou norme subordonnée)

Soit (E, N) et $(\mathrm{F}, \mathrm{N}')$ deux espaces vectoriels normés. On suppose E de dimension finie. Pour $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, on pose

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}} \frac{\mathrm{N}'(f(x))}{\mathrm{N}(x)}$$

1. On pose $\mathrm{S} = \{x \in \mathrm{E},\ \mathrm{N}(x) = 1\}$ et $\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E}, \mathrm{N}(x) \leq 1\}$. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, $\|f\|$ est bien défini et que
$$\|f\| = \max_{x \in \mathrm{S}} \mathrm{N}'(f(x)) = \max_{x \in \mathrm{B}} \mathrm{N}'(f(x))$$
2. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.
3. On suppose dans cette question que $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ et $\mathrm{N} = \mathrm{N}'$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.
4. On suppose dans cette question que $\mathrm{E} = \mathbb{R}^p$ et $\mathrm{F} = \mathbb{R}^n$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On considère l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ canoniquement associée à A.
   (a) On suppose que E et F sont munis de leurs normes uniformes respectives. Montrer que
   $$\|f\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{p} |\mathrm{A}_{i,j}|$$
   (b) On suppose que E et F sont munis de leurs normes 1 respectives. Montrer que
   $$\|f\| = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|$$
   (c) On suppose que E et F sont munis de leurs normes 2 respectives. Montrer que
   $$\|f\| = \sqrt{\max \mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top \mathrm{A})}$$

Proposition 6.8 Théorème de Heine

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, K une partie compacte de E et f une application de K dans F.
Si f est continue sur K, alors elle est uniformément continue sur $\mathbb{K}$.

Exemple 6.4

Toute application continue sur un segment de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace vectoriel normé est uniformément continue sur ce segment.

7 Connexité par arcs

7.1 Parties connexes par arcs

Définition 7.1 Chemin continu

Soient E un espace vectoriel normé et $(a, b) \in \mathrm{E}^2$. On appelle **chemin continu** joignant a à b toute application continue γ de $[0, 1]$ dans E telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Définition 7.2 Partie connexe par arcs

Soit C une partie d'un espace vectoriel normé E. On dit que E est **connexe par arcs** si pour tout $(a, b) \in \mathrm{E}^2$, il existe un chemin continu joignant a à b à valeurs dans C.

Exemple 7.1

$\mathbb{U}$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{C}$. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2$. Il existe donc $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z_1 = e^{i\theta_1}$ et $z_2 = e^{i\theta_2}$. Posons

$$\gamma : t \in [0, 1] \mapsto \exp(i((1 - t\theta_1) + t\theta_2))$$

- γ est continue sur $[0, 1]$;
- γ est à valeurs dans $\mathbb{U}$;
- $\gamma(0) = z_1$ et $\gamma(1) = z_2$.

Exemple 7.2

$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est une partie connexe par arcs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2) \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})^2$. Posons $\mathrm{R} : \theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Il existe $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}(\theta_1)$ et $\mathrm{R}_2 = \mathrm{R}_2(\theta_2)$. Posons $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto \mathrm{R}((1 - t)\theta_1 + t\theta_2)$. Alors

- γ est continue ;
- γ est à valeurs dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$;
- $\mathrm{R}_1 = \gamma(0)$ et $\mathrm{R}_2 = \gamma(1)$.

Proposition 7.1

Toute partie **convexe** d'un espace vectoriel normé est **connexe par arcs**.

Exemple 7.3

Les boules fermées et ouvertes d'un espace vectoriel normé sont connexes par arcs.

Définition 7.3 Partie étoilée

Soit A une partie d'un espace vectoriel E. On dit que A est **étoilée** s'il existe $a \in \mathrm{A}$ tel que pour tout $x \in \mathrm{A}$, $[a, x] \subset \mathrm{A}$. Dans ce cas, on dit que A est étoilée par rapport à a.

Exemple 7.4

Une partie convexe est étoilée par rapport à chacun de ses points.

Exemple 7.5

L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est étoilé par rapport à la matrice nulle.

Proposition 7.2

Toute partie **étoilée** d'un espace vectoriel normé est **connexe par arcs**.

Proposition 7.3

Les parties **connexes par arcs de** $\mathbb{R}$ sont les **intervalles**.

Proposition 7.4 Composantes connexes par arcs

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. La relation «être joignable par un chemin continu à valeurs dans A» est une relation d'équivalence sur A.
Les classes d'équivalence sont appelées les **composantes connexes par arcs** de A. Ce sont des parties connexes par arcs.

Exemple 7.6

L'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ admet deux composantes connexes par arcs à savoir ses intersections avec les demi-plans d'équations $x < 0$ et $x > 0$.

7.2 Continuité et connexité par arcs

Proposition 7.5

L'image d'une partie **connexe par arcs** par une application **continue** est **connexe par arcs**.

Exemple 7.7

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. En effet, l'image de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par le déterminant (qui est une application continue) est $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas connexe par arcs (ce n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$).
On prouve de la même manière que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Exemple 7.8

$\mathbb{U}$ est connexe par arcs car c'est l'image de l'intervalle $\mathbb{R}$ par l'application continue $t \mapsto e^{it}$.

Exemple 7.9

$SO_2(\mathbb{R})$ est une partie connexe par arcs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car c'est l'image de l'intervalle $\mathbb{R}$ par l'application continue $t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Corollaire 7.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Soient C une partie **connexe par arcs** d'un espace vectoriel normé E et f une application **continue** sur C à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $f(\mathrm{C})$ est un **intervalle**.
Cela signifie que, si f prend les valeurs a et b sur C, alors f prend toutes les valeurs comprises entre a et b sur C.