

## 1 Cours

### Polynômes

**Polynômes à une indéterminée à coefficients dans  $\mathbb{K}$**  Définitions : polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , ensemble  $\mathbb{K}[X]$ .

Deux polynômes sont égaux **si et seulement si** leurs coefficients sont égaux. Polynômes pairs, impairs.  $(\mathbb{K}[X], +, \times)$  est un anneau intègre commutatif.  $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Base canonique de  $\mathbb{K}[X]$ . Degré d'un polynôme. Degré d'une combinaison linéaire, d'un produit. Définition de  $\mathbb{K}_n[X]$ .  $\mathbb{K}_n[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$ . Base canonique de  $\mathbb{K}_n[X]$ . Famille de polynômes à degrés échelonnés. Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine d'un polynôme. Cas des polynômes pairs/impairs et des polynômes à coefficients réels. Polynôme dérivé. La dérivation est linéaire. Formule de Leibniz. Formule de Taylor.

**Arithmétique de  $\mathbb{K}[X]$**  Relation de divisibilité. Division euclidienne. Algorithme de division euclidienne. Un polynôme  $P$  admet  $\alpha$  pour racine **si et seulement si** il est divisible par  $X - \alpha$ . Existence et unicité d'un PGCD unitaire ou nul. Algorithme d'Euclide pour les polynômes. Théorème de Bézout. Polynômes premiers entre eux. Lemme de Gauss. Un polynôme de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines. Polynômes interpolateurs de Lagrange. Existence et unicité d'un PPCM unitaire ou nul.

**Racines multiples** Définition. Un polynôme de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines comptées avec multiplicité. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les dérivées successives.

**Factorisation** Polynômes irréductibles. Définition et décomposition en facteurs irréductibles. Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  et  $\mathbb{R}[X]$ . Polynôme scindé. Un polynôme est scindé **si et seulement si** il possède autant de racines comptées avec multiplicité que son degré. Lien coefficients/racines.

### Fractions rationnelles

**Corps des fractions rationnelles** Définition. Opérations. Degré. Dérivation.  $\mathbb{K}(X)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et un corps.

**Fonctions rationnelles, zéros et pôles** Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle. Zéros et pôles d'une fraction rationnelle. Multiplicité d'un zéro ou d'un pôle.

**Décomposition en éléments simples** Partie entière. Décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  et sur  $\mathbb{R}$ . Décomposition en éléments simples de  $\frac{P'}{P}$  où  $P$  est scindé.

### Sous-espaces affines

**Sous-espaces affines** Définition. Intersection de sous-espaces affines.

**Équations linéaires** Description de l'ensemble des solutions de  $f(x) = b$  d'inconnue  $x \in E$  où  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $b \in F$ .

## 2 Méthodes à maîtriser

- Pour résoudre des équations d'inconnue polynomiale, chercher dans un premier temps à déterminer le degré du polynôme inconnu.
- Déterminer le reste d'une division euclidienne (utiliser les racines du diviseur).
- Montrer qu'un polynôme est nul en montrant qu'il admet une infinité de racines.
- Caractériser la multiplicité d'une racine via les dérivées successives.
- Passer de la décomposition en facteurs irréductibles sur  $\mathbb{C}[X]$  à celle sur  $\mathbb{R}[X]$ .
- Utiliser la parité et le fait qu'un polynôme est à coefficients réels pour obtenir des racines à partir d'une racine donnée.
- Résoudre des systèmes polynomiaux symétriques en les inconnues.
- Exprimer une somme et un produit de racines à l'aide des coefficients du polynôme.
- Déterminer une partie polaire d'une fraction rationnelle relative à un pôle simple ou double.
- Accélérer la décomposition en éléments simples en utilisant :
  - le fait que des pôles soient conjugués ;
  - la parité éventuelle de la fraction rationnelle ;
  - la limite de  $x f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ;
  - des valeurs particulières.
- Calculer des intégrales de fractions rationnelles ou de fractions rationnelles trigonométriques.

### 3 Questions de cours

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer les racines de  $P_n = (X + i)^n - (X - i)^n$ . En déduire les valeurs de  $A_n = \sum_{k=1}^{n-1} \cotan \frac{k\pi}{n}$  et

$$B_n = \prod_{k=1}^{n-1} \cotan \frac{k\pi}{n}.$$

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer la décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{X^n - 1}$  dans  $\mathbb{C}(X)$ .

- Soit  $P = \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{r_k}$ . Montrer que  $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{X - \alpha_k}$ .