DEVOIR À LA MAISON N° 13 : CORRIGÉ

SOLUTION 1.

1. **a.** L'application f^{n-1} n'étant pas constamment nulle, il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

b. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^{n-i}(x) = 0$$

En composant par f^{n-1}, on obtient $\lambda_n f^{n-1}(x) = 0$. Comme $f^{n-1}(x) \neq 0$, $\lambda_n = 0$.
En composant par f^{n-2}, on obtient ensuite $\lambda_{n-1} = 0$ et ainsi de suite. On prouve donc que

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$$

Par conséquent, la famille $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$ est libre. Comme elle est de cardinal $n = \dim E$, c'est une base de E.

2. **a.** La famille $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f^{n-k}(x))$ est une sous-famille de la famille libre $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$. Elle est donc également libre. On en déduit $\dim F_k = k$.

b. Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $f^k(f^{n-i}(x)) = f^{n+k-i}(x) = 0$ car $n+k-i \geqslant n$ et donc $f^{n-i}(x) \in \operatorname{Ker} f^k$. Comme $(f^{n-i}(x))_{1 \leqslant i \leqslant k}$ engendre F_k, $F_k \subset \operatorname{Ker} f^k$. Donc $\dim \operatorname{Ker} f^k \geqslant \dim F_k = k$.
Pour $1 \leqslant i \leqslant n-k$, $f^{n-i}(x) \in \operatorname{Im} f^k$ car $n-i \geqslant k$. Comme $(f^{n-i}(x))_{1 \leqslant i \leqslant n-k}$ engendre F_{n-k}, $F_{n-k} \subset \operatorname{Im} f^k$. D'où $\dim \operatorname{Im} f^k \geqslant \dim F_{n-k} = n-k$. Par le théorème du rang, on a donc $\dim \operatorname{Ker} f^k = n - \dim \operatorname{Im} f^k \leqslant k$. On en déduit que $\dim \operatorname{Ker} f^k = k = \dim F_k$ et, comme $F_k \subset \operatorname{Ker} f^k$, $F_k = \operatorname{Ker} f^k$.
Quitte à remplacer k par $n-k$, on a également $F_k \subset \operatorname{Im} f^{n-k}$. Et comme $f^k \circ f^{n-k} = \mathbf{0}$, on a aussi $\operatorname{Im} f^{n-k} \subset \operatorname{Ker} f^k$. On en déduit que $F_k = \operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Im} f^{n-k}$.

c. On a $F_k = \operatorname{Im} f_{n-k}$ d'après la question précédente. Donc $f(F_k) = \operatorname{Im} f^{n-k+1} \subset \operatorname{Im} f^{n-k} = F_k$. F_k est donc stable par f.

3. **a.** On considère $A = \{k \in \mathbb{N}^* \mid \tilde{f}^k = \tilde{\mathbf{0}}\}$. A est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ puisque $n \in A$. Elle admet donc un plus petit élément $p \geqslant 1$. Si $p = 1$, alors $p - 1 = 0$ mais $\tilde{f}^{p-1} = \operatorname{Id}_F \neq \tilde{\mathbf{0}}$ car $F \neq \{0_E\}$. Si $p \geqslant 2$, alors $p - 1 \in \mathbb{N}^*$ et on ne peut avoir $\tilde{f}^{p-1} = \tilde{\mathbf{0}}$ sinon $p - 1 \in A$, ce qui contredit la minimalité de p. On a donc dans tous les cas $\tilde{f}^{p-1} \neq \tilde{\mathbf{0}}$ et $\tilde{f}^p = \tilde{\mathbf{0}}$.

b. On prouve comme à la question **1.b** que la famille $(y, \tilde{f}(y), \dots, \tilde{f}^{p-1}(y))$ est libre. Comme $k = \dim F$ et que la famille précédente est de cardinal p, on en déduit $p \leqslant k$. Ainsi $\tilde{f}^k = \tilde{\mathbf{0}}$.

c. La question précédente prouve que $F \subset \operatorname{Ker} f^k$. Or on a vu à la question **2.b** que $\dim \operatorname{Ker} f^k = k$. Comme $\dim F = k$, on a donc $F = \operatorname{Ker} f^k$.

d. On vient de voir que tous les sous-espaces stables de dimension k avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$ était de la forme $\operatorname{Ker} f^k$. Réciproquement, on a vu à la question **2** que les sous-espaces $\operatorname{Ker} f^k$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$ étaient stables par f. Il reste à remarquer que le seul sous-espace de dimension 0 i.e. le sous-espace nul et que le seul sous-espace de dimension n i.e. E tout entier sont évidemment stables par f. Enfin, comme $f^0 = \operatorname{Id}_E$ et $f^n = \mathbf{0}$, on a $\{0\} = \operatorname{Ker} f^0$ et $E = \operatorname{Ker} f^n$.
Les sous-espaces stables par f sont donc exactement les sous-espaces $\operatorname{Ker} f^k$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

4. **a.** La famille $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$ étant une base de E, il existe un unique n-uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ de réels tel que :

$$g(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x)$$

Ce sont les coordonnées de $g(x)$ dan la base $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$.

b. Si g commute avec f, g commute avec f^i pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Par conséquent,

$$g\left(f^i(x)\right) = f^i(g(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^{k+i}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k\right)\left(f^i(x)\right)$$

On en déduit que les endomorphismes g et $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$ coïncident sur la base $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$. Ceci prouve que

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = \alpha_0 \operatorname{Id}_E + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$$

c. Notons $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par la famille $(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ et $\mathcal{C}'$ l'ensemble des endomorphismes commutant avec f. La question précédente montre que $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$. Mais comme toute puissance de f commute avec f, il est clair que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$. Ainsi $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$. Comme la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$ est une famille libre de E, a fortiori la famille $(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$. On en déduit que $\dim \mathcal{C} = n$.

Solution 2.

1. Soit $x \in K_p$. Alors $u^p(x) = 0_E$ et donc $u^{p+1}(x) = u(0_E) = 0_E$. Donc $x \in K_{p+1}$. On en déduit que $K_p \in K_{p+1}$.
   Soit $y \in I_{p+1}$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u^{p+1}(x) = u^p(u(x))$. Donc $y \in I_p$. On en déduit que $I_{p+1} \in I_p$.
2. Comme u est injectif, u^p est également injectif pour tout $p \in \mathbb{N}$. Donc $K_p = \{0\}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   Pour tout $p \in \mathbb{N}$, u^p est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie donc également surjectif. On en déduit $I_p = E$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
3. **a.** Notons $A = \{p \in \mathbb{N} \mid K_p = K_{p+1}\}$. Si on suppose A vide, on a donc $K_p \subsetneq K_{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.La suite $(\dim K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc une suite strictement croissante d'entiers. Mais cette suite est majorée par n. Il y a donc contradiction. A est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$: elle admet un plus petit élément r. De plus, pour $p < r$, on a $K_p \subsetneq K_{p+1}$ donc $\dim K_p + 1 \leqslant \dim K_{p+1}$. En additionnant ces inégalités pour k variant de 0 à $r-1$, on obtient : $\dim K_0 + r \leqslant \dim K_r$. Or $\dim K_0 = 0$ et $\dim K_r \leqslant n$ donc $r \leqslant n$.

   b. Par le théorème du rang on a donc, $\dim I_r = \dim I_{r+1}$. Or $I_r \subset I_{r+1}$ donc $I_r = I_{r+1}$.
   Soit l'hypothèse de récurrence $\mathsf{HR}(p)$: $K_r = K_{r+p}$.
   $\mathsf{HR}(0)$ est clairement vérifiée. Supposons $\mathsf{HR}(p)$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$. Soit $x \in K_{r+p+1}$. Alors $u^{r+p+1}(x) = u^{r+1}(u^p(x)) = 0_E$. Donc $u^p(x) \in \operatorname{Ker} u^{r+1} = \operatorname{Ker} u^r$. Donc $u^r(u^p(x)) = 0_E$. D'où $x \in K_{r+p} = K_r$ d'après $\mathsf{HR}(p)$.
   Ainsi $\mathsf{HR}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   On a clairement $I_{r+p} \subset I_r$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Comme $K_r = K_{r+p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, le théorème du rang nous donne : $\dim I_{r+p} = \dim I_r$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. On a donc $I_r = I_{r+p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

   c. D'après le théorème du rang, on a $\dim E = \dim K_r + \dim I_r$. Il nous suffit de prouver que $I_r \cap K_r = \{0_E\}$.
   Soit donc $x \in I_r \cap K_r$. On a donc $u^r(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = u^r(y)$. On a alors $u^{2r}(y) = 0_E$. D'où $y \in K_{2r} = K_{r+r} = K_r$ d'après la question **3.b**. Donc $x = u^r(y) = 0_E$.
4. Considérons et $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$. On a $K_p = \mathbb{K}_{p-1}[X]$. La suite (K_p) est donc une suite strictement croissante (pour l'inclusion) d'espaces vectoriels.

Solution 3.

1. Comme φ n'est pas nulle, $\mathrm{rg}(\varphi) > 0$. Or $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$ donc $\mathrm{rg}(\varphi) \leqslant 1$. Ainsi $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$. Le théorème du rang implique $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - \mathrm{rg}(f) = n - 1$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E.
2. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H. On complète cette base en une base de E avec un vecteur e_n. Définissons $\varphi \in E^*$ par $\varphi(e_i) = 0$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $\varphi(e_n) = 1$. On a immédiatement le résultat demandé.
3. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$. Complétons cette base avec un vecteur e_n. On sait alors que $\varphi(e_n) \neq 0$ et $\psi(e_n) \neq 0$. Soit $\xi \in E^*$ défini par $\xi = \psi - \lambda\varphi$ avec $\lambda = \frac{\psi(e_n)}{\varphi(e_n)}$. On a immédiatement, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\xi(e_i) = 0$. Donc ξ est identiquement nul et $\psi = \lambda\varphi$.
4. On a vu qu'il existait $\varphi \in E^*$ tel que $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\mathrm{Ker}(\lambda\varphi) = H$ si $\lambda \neq 0$ et $\mathrm{Ker}(\lambda\varphi) = E$ si $\lambda = 0$. Dans tous les cas, $H \subset \mathrm{Ker}(\lambda\varphi)$. Ainsi $\mathrm{vect}(\varphi) \subset D(H)$.
   φ est non nul sinon on aurait $\mathrm{Ker}\,\varphi = E \neq H$. Soit $\psi \in D(H)$. Si ψ est nul, alors $\psi \in \mathrm{vect}(\varphi)$. Sinon, la question précédente montre qu'on a également $\psi \in \mathrm{vect}(\varphi)$. Ainsi $D(H) \subset \mathrm{vect}(\varphi)$.
   Par double inclusion, $D(H) = \mathrm{vect}(\varphi)$. Comme φ est non nul, $\dim D(H) = 1$.
5. **a.** $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E donc de dimension $n-1 \geqslant 1$ puisque $n \geqslant 2$. Il contient donc un vecteur non nul.
   On vérifie d'abord que f est un endomorphisme de E. Or, puisque $u \neq 0_E$,
   $$x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \iff \varphi(x)u = 0_E \iff x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$$
   Donc la base de f est $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
   De plus pour tout $x \in E$, $f(x) - x = \varphi(x)u \in \mathrm{vect}(u)$. Ainsi $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{vect}(u)$. Mais d'après le théorème du rang $\mathrm{rg}(f - \mathrm{Id}_E) = 1$ et donc la direction de f est $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{vect}(u)$.

b. Par le théorème du rang $\text{rg}(f - \text{Id}_E) = 1$ donc il existe un vecteur u non nul de E tel que $\text{Im}(f - \text{Id}_E) = \text{vect}(u)$. Pour tout $x \in E$, $f(x) - x \in \text{Im}(f - \text{Id}_E) = \text{vect}(u)$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) - x = \lambda u$. Notons $\lambda = \varphi(x)$. Soient $(x, y) \in E^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $f(ax + by) - (ax + by) = \varphi(ax + by)u$. De plus,

$$f(ax + by) - (ax + by) = a(f(x) - x) + b(f(y) - y) = (a\varphi(x) + b\varphi(y))u$$

Comme u est non nul, $\varphi(ax + by) = a\varphi(x) + b\varphi(y)$. Ainsi φ est une forme linéaire.
On a $f(u) = u + \varphi(u)u$ donc $\varphi(u)u = f(u) - u \in \text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$. Ainsi $f(\varphi(u)u) = \varphi(u)u$ et donc $\varphi(u)u + \varphi(u)^3 u = \varphi(u)u$. Comme u est non nul, $\varphi(u)^3 = 0$ et donc $\varphi(u) = 0$ de sorte que $u \in \text{Ker}(\varphi)$.
Comme précédemment, $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ donc $\text{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan. On ne peut avoir φ nulle sinon $\text{Ker}(\varphi) = E$ n'est pas un hyperplan.