Devoir surveillé n°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

Partie I –

1. **a.** D'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$$

b. D'après la question précédente, $a_n^*=\alpha$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

c. Comme α n'est pas nul, les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$ sont grossièrement divergentes.

2. **a.** Toujours d'après la formule du binôme,

$$a_n^*=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k=\frac{1}{2^n}(z+1)^n$$

b. **i.** La série $\sum a_n$ est une série géométrique de raison z avec $|z|<1$: elle converge. De plus, $\mathrm{A}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$.

ii. La série $\sum a_n^*$ est à nouveau une série géométrique de raison $\frac{1}{2}(z+1)$. Par inégalité triangulaire $|z+1|\leq|z|+1<2$ de sorte que $\left|\frac{1}{2}(1+z)\right|<1$. La série $\sum a_n^*$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n^*=\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}=\frac{2}{1-z}=2\mathrm{A}(z)$$

c. **i.** La série $\sum a_n$ diverge grossièrement.

ii. Si $z=-2$, alors $a_n^*=\frac{(-1)^n}{2^n}$. La série $\sum a_n^*$ est alors une série géométrique convergente puisque $|-1/2|=1/2<1$.

iii. Par la méthode de l'arc-moitié

$$\frac{z+1}{2}=\frac{e^{i\theta}+1}{2}=e^{\frac{i\theta}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Comme $0<|\theta|<\pi|$,

$$\left|\frac{z+1}{2}\right|=|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|<1$$

donc la série géométrique $\sum a_n^*$ converge. Par ailleurs, toujours par la méthode de l'arc-moitié

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n^*=\frac{1}{1-\frac{e^{i\theta}+1}{2}}=\frac{2}{1-e^{i\theta}}=\frac{1}{-ie^{i\theta}2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{ie^{-\frac{i\theta}{2}}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}=1+i\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Partie II –

1. **a.** **i.** Comme k est fixé

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(n-j) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

ii. D'après la question précédente

$$\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k!}\cdot\frac{n^k}{2^n}$$

Par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = 0$.

b. La somme définissant $\mathrm{S}_q(n,a)$ est <u>finie</u> et chacun de ses termes tend vers 0 d'après la question précédente donc $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_q(n,a) = 0$.

c. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme (a_n) converge vers 0, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n > q$, $|a_n| \leq \varepsilon/2$. Mais comme la suite de terme général $\mathrm{S}_q(n,a)$ converge vers 0, il existe $\mathrm{N} \geq q$ tel que pour tout entier $n \geq \mathrm{N}$, $|\mathrm{S}_q(n,a)| \leq \varepsilon/2$. Alors pour $n \geq \mathrm{N}$,

$$\begin{aligned}
|a_n^*| &= \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\right| \\
&\leq |\mathrm{S}_q(n,a)| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}|a_k| && \text{par inégalité triangulaire} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right) && \text{par positivité des coefficients binomiaux} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon && \text{d'après la question } \mathbf{1.a}
\end{aligned}$$

Par définition de la limite, (a_n^*) converge vers 0.

d. Posons $b_n = a_n - \ell$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité (évidente ?) de l'application $u \mapsto u^*$ et d'après la question **1.b**

$$b_n^* = a_n^* - \ell$$

Comme (b_n) converge vers 0, (b_n^*) converge également vers 0 d'après la question précédente de sorte que (a_n^*) converge vers ℓ.

e. Dans la question **2.c.ii**, on a montré que lorsque $a_n = (-2)^n$, alors $a_n^* = (-1/2)^n$. La suite (a_n^*) peut converger sans que la suite (a_n) converge.

2. **a.** On trouve

$$\mathrm{U}_0 = \mathrm{S}_0 \qquad \mathrm{U}_1 = 2\mathrm{S}_0 + \mathrm{S}_1\mathrm{U}_2 \qquad = \mathrm{S}_2 + 3\mathrm{S}_1 + 3\mathrm{S}_0\mathrm{U}_3 \qquad = \mathrm{S}_3 + 4\mathrm{S}_2 + 6\mathrm{S}_1 + 4\mathrm{S}_0$$

b. **i.** On peut conjecturer que

$$\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\mathrm{S}_k$$

ii. La relation $(\mathcal{E})$ est vraie pour $n \in \{0,1,2,3\}$. Supposons la vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Remarquons d'abord que

$$\mathrm{U}_{n+1} = 2^{n+1}\mathrm{T}_{n+1} = 2^{n+1}(\mathrm{T}_n + a_{n+1}^*) = 2\mathrm{U}_n + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a_k$$

Suivant l'indication de l'énoncé,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a_k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(\mathrm{S}_k - \mathrm{S}_{k-1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\mathrm{S}_k - \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\mathrm{S}_{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\mathrm{S}_k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\mathrm{S}_k && \text{en réindexant et car } \mathrm{S}_{-1} = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1}\right)\mathrm{S}_k
\end{aligned}$$

En utilisant maintenant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= 2U_n + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a_k \\
&= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k + \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1}\right)S_k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1}\right)S_k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+2}{k+1}S_k \qquad \text{d'après la formule du triangle de Pascal}
\end{aligned}$$

La relation $(\mathcal{E})$ est donc établie par récurrence.

c. Remarquons qu'avec la convention $S_{-1} = 0$,

$$T_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}U_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}S_k = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_{k-1}$$

En notant $s_n = S_{n-1}$, on a donc $T_{n-1} = 2s_n^*$. Notons S la série de la série $\sum a_n$. Alors (s_n) converge vers S et, d'après la question **1.d**, (s_n^*) converge également vers S. Ainsi (T_{n-1}) converge vers 2S. La série $\sum a_n^*$ converge donc bien et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

d. L'exemple de la question **2.c.ii** montre que $\sum a_n$ peut diverger alors que $\sum a_n^*$ converge.

Partie III –

1. **a.** D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(n+1)!}$ est infini. On en déduit que f est définie, continue et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = e^x - 1$$

c. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{-x}f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. **a.** On a clairement $\sigma_n \leq n$ donc

$$0 \leq \frac{\sigma_n}{n!} \leq \frac{1}{(n-1)!}$$

Comme la série entière $\sum \frac{x^n}{(n-1)!}$ est de rayon de convergence infini par la règle de d'Alembert, il en est de même de la série entière $\sum \frac{\sigma_n x^n}{n!}$. Ainsi g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. A fortiori, elle est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. Comme g est définie par une série entière de rayon de convergence infini, on obtient sa dérivée sur $\mathbb{R}$ en dérivant terme à terme :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sigma_n x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sigma_{n+1}x^n}{n!}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) - g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sigma_{n+1}-\sigma_n)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!} = f(x)$$

c. On pourrait résoudre l'équation différentielle $y' - y = f$. On peut aussi remarquer qu'en posant $h(x) = e^{-x}g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = e^{-x}(g'(x) - g(x)) = e^{-x}f(x)$$

Sachant que $h(0) = g(0) = 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_0^x h'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^x e^{-t}f(t)\ \mathrm{d}t$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^x \int_0^x e^{-t}f(t)\ \mathrm{d}t$$

3. **a.** D'après la question **1.c**,

$$e^{-x}f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Or $e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^n} n!$ donc

$$e^{-x}f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{n-1}}{n!}$$

On peut primitiver terme à terme cette série entière de rayon de convergence infini

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = \int_0^x e^{-t}f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n \cdot n!}$$

b. Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_n x^n}{n!} \qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n \cdot n!} \qquad g(x) = e^x\mathrm{F}(x)$$

donc, par produit de Cauchy,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k \cdot k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n x^n$$

Par unicité du développement en série entière, $\gamma_n = \frac{\sigma_n}{n!}$.

4. **a.** **i.** Par des DL usuels,

$$w_k = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \underset{t\to+\infty}{=} \frac{1}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{k}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)\right) \underset{k\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Comme $\sum \frac{1}{k^2}$ est une série convergente à termes positifs, $\sum w_k$ converge.

ii. En notant $v_k = \sigma_k - \ln(k)$, on a $w_k = v_k - v_{k+1}$. Ainsi la série télescopique $\sum v_k - v_{k+1}$ converge i.e. la suite (v_k) admet une limite nulle.

b. En séparant les termes de rangs pairs et impairs,

$$\tau_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \left(\sigma_{2n} - \frac{1}{2}\sigma_n\right) - \frac{1}{2}\sigma_n = \sigma_{2n} - \sigma_n$$

c. En notant γ la limite de la suite (v_n), $\sigma_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ puis $\sigma_{2n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(2n) + \gamma + o(1)$ et enfin $\tau_{2n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(2) + o(1)$. Ainsi (τ_{2n}) converge vers $\ln(2)$. Comme $\tau_{2n+1} = \tau_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, (τ_{2n+1}) converge également vers $\ln(2)$. Ainsi (τ_n) converge vers $\ln(2)$ i.e. la série $\sum_{k\geq1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge et sa somme vaut $\ln(2)$.

5. **a.** D'après ce qui précède, $\sigma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ puis

$$\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} = 1$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \sigma_n x^n$ vaut donc 1.

b. On peut déjà garantir que $]-1,1[\subset \Delta \subset [-1,1]$. Comme σ_n diverge vers $+\infty$, les série $\sum \sigma_n$ et $\sum(-1)^n\sigma_n$ divergent grossièrement. Finalement, $\Delta =]-1,1[$. De plus, pour tout $x \in \Delta$,

$$\phi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\sigma_n x^{n-1}$$

Il est alors clair que ϕ' est positive sur $[0,1[$. Ainsi ϕ est croissante sur $[0,1[$.

c. Puisque $\sigma_n = n!\gamma_n$,

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}n!}{k\cdot k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Ainsi, en posant $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 = 0$, $\frac{\sigma_n}{2^n} = a_n^*$. D'après la question **4.c**, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ln 2$ et d'après la question **2.c**, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2\ln 2$ ou encore, comme $a_0^* = a_0 = 0$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{2^n} = \ln 2$$

Ceci signifie que $\phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

d. On peut remarquer que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sigma_n x^n$ est le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$. Ainsi

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

On retrouve alors $\phi\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln 2$.