Devoir surveillé n° 2 : corrigé

Solution 1.

$$\begin{aligned}\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} &= \frac{1-\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}\\ &= \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cos\left(2\times\frac{\theta}{2}\right) = \cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} &= \frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}\\ &= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}} = \sin\left(2\times\frac{\theta}{2}\right) = \sin\theta\end{aligned}$$

Solution 2.

1. Tout d'abord $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ donc les racines carrées de $1+i$ sont $\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{8}}$ et $-\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{8}}=\sqrt[4]{2}e^{\frac{9i\pi}{8}}$.

2. Soit maintenant z une racine carrée de $1+i$. Posons $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Puisque $z^2=1+i$, on a $x^2-y^2=1$ et $2xy=1$. Par ailleurs, $|z|^2=|z^2|=|1+i|=\sqrt{2}$ donc $x^2+y^2=\sqrt{2}$. On en déduit que $x^2=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ et $y^2=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Puisque $xy=\frac{1}{2}>0$, $\begin{cases} x=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\\ y=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\end{cases}$ ou $\begin{cases} x-=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\\ y=-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\end{cases}$. Les racines carrées de $1+i$ sont donc $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

3. Puisque $\frac{\pi}{8}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\frac{\pi}{8}\geqslant 0$. On peut alors identifier les racines carrées de $1+i$ sous forme exponentielle et algébrique. En particulier,

$$\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{8}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

On en déduit que

$$\sqrt[4]{2}\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \sqrt[4]{2}\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

puis que

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

et enfin que

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

4.

$$\tan\frac{\pi}{8}=\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$$

5. Puisque $\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$,

$$\cos\frac{3\pi}{8}=\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad \sin\frac{3\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \tan\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}}=\sqrt{2}+1$$

Puisque $\frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8}$,

$$\cos\frac{5\pi}{8} = -\cos\frac{3\pi}{8} = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad \sin\frac{5\pi}{8} = \sin\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \tan\frac{5\pi}{8} = -\tan\frac{3\pi}{8} = -\sqrt{2}-1$$

Puisque $\frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$,

$$\cos\frac{7\pi}{8} = -\cos\frac{\pi}{8} = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \sin\frac{7\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad \tan\frac{7\pi}{8} = -\tan\frac{\pi}{8} = 1-\sqrt{2}$$

Solution 3.

1. Soit z une solution de (E). On a donc

$$(1+iz)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$$

En passant au module, on en déduit

$$|1+iz|^3|1-i\tan\alpha| = |1-iz|^3|1+i\tan\alpha|$$

Or $1-i\tan\alpha = \overline{1+i\tan\alpha}$ donc $|1-i\tan\alpha| = |1+i\tan\alpha|$. Comme $1\pm i\tan\alpha \neq 0$, $|1\pm i\tan\alpha| \neq 0$. En simplifiant par $|1\pm i\tan\alpha|$, on obtient $|1+iz|^3 = |1-iz|^3$. Comme la fonction $x\in\mathbb{R}\mapsto x^3$ est bijective, $|1+iz| = |1-iz|$. Puisque $|1+iz| = |i(z-i)| = |z-i|$ et $|1-iz| = |-i(z+i)| = |z+i|$, $|z-i| = |z+i|$. Le point d'affixe z est donc sur la médiatrice du segment reliant les points d'affixes $-i$ et $+i$, c'est-à-dire l'axe des abscisses. Ainsi $z\in\mathbb{R}$.

2. $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \dfrac{\cos\alpha(1+i\tan\alpha)}{\cos\alpha(1-i\tan\alpha)} = \dfrac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha} = \dfrac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = \left(e^{i\alpha}\right)^2$.

3. Comme $1-iz\neq 0$ et $1-i\tan\alpha\neq 0$, l'équation (E) équivaut à $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$. D'après la question précédente, ceci équivaut à $\left(e^{i\phi}\right)^6 = \left(e^{i\alpha}\right)^2$. Cette dernière équation équivaut à $6\phi \equiv 2\alpha \pmod{2\pi}$ i.e. $\phi \equiv \frac{\alpha}{3} \pmod{\frac{\pi}{3}}$. Les solutions sont donc les réels de la forme $\frac{\alpha}{3}+k\frac{\pi}{3}$ avec $k\in\mathbb{Z}$ tels que $-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{3}+k\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$. Comme $-\frac{\pi}{6} < \frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{6}$, ceci équivaut à $k\in\{-1,0,1\}$. Les solutions de l'équation en ϕ sont donc $\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\alpha}{3}$ et $\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{3}$.

4. On a vu que les solutions de (E) étaient nécessairement réelles. De plus, $z=\tan\phi$ est solution de (E) *si et seulement si* $\phi\in\left\{\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{3}, \frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{3}\right\}$. On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\tan\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{3}\right), \tan\frac{\alpha}{3}, \tan\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right\}$.

Solution 4.

1. Si on avait $\omega = 1$, on aurait $\frac{\pi}{n}\equiv 0[2\pi]$ puis $1\equiv 0[2n]$, ce qui est faux. Ainsi $\omega\neq 1$.

2. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\omega\neq 1$. Ainsi

$$A_n = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{1-e^{i\pi}}{1-\omega} = \frac{2}{1-\omega}$$

3. Classiquement

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Re}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Re}\left(\omega^k\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k\right) = \mathrm{Re}(A_n)$$
$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Im}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Im}\left(\omega^k\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k\right) = \mathrm{Im}(A_n)$$

En utilisant la méthode de l'arc-moitié :

$$A_n = \frac{2}{e^{\frac{i\pi}{2n}}\left(e^{-\frac{i\pi}{2n}} - e^{\frac{i\pi}{2n}}\right)} = \frac{2e^{-\frac{i\pi}{2n}}}{-2i\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{ie^{-\frac{i\pi}{2n}}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{i\left(\cos\frac{\pi}{2n} - i\sin\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2n} + i\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = 1 + i\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

On en déduit les résultats voulus.

4. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\omega^{2k} - 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 2ie^{\frac{ik\pi}{n}} \sin\frac{k\pi}{n}$$

Puisque $\frac{k\pi}{n} \in [\![0, n-1]\!]$, $\sin\frac{k\pi}{n} \geqslant 0$ de sorte que

$$|\omega^{2k} - 1| = 2|i| \left|e^{\frac{ik\pi}{n}}\right| \left|\sin\frac{k\pi}{n}\right| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$$

Ainsi

$$B_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = 2S_n = \frac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

Solution 5.

1. Les points A et B sont confondus *si et seulement si* $z = 1$.
Les points A et C sont confondus *si et seulement si* $z^2 = 1$ i.e. $z = 1$ ou $z = -1$.
Les points A et D sont confondus *si et seulement si* $z^3 = 1$ i.e. $z = 1$, $z = j$ ou $z = j^2$.
Les points B et C sont confondus *si et seulement si* $z^2 = z$ i.e. $z = 0$ ou $z = 1$.
Les points B et D sont confondus *si et seulement si* $z^3 = z$ i.e. $z = 0$, $z = -1$ ou $z = 1$.
Les points C et D sont confondus *si et seulement si* $z^3 = z^2$ i.e. $z = 0$ ou $z = 1$.
Ainsi les points A, B, C, D sont deux à deux distincts *si et seulement si* $z \notin \{0, 1, -1, j, j^2\}$.

2. $ABCD$ est un parallélogramme *si et seulement si* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire *si et seulement si* $z - 1 = z^2 - z^3$ ou encore $-z^3 + z^2 - z + 1 = 0$. Puisque $z \neq -1$, $-z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{(-z)^4 - 1}{-z-1} = -\frac{z^4-1}{z-1}$. Ainsi $ABCD$ est un parallélogramme *si et seulement si* $z^4 = 1$. Puisque les racines quatrièmes de l'unité sont $1, i, -1, -i$ et que $z \notin \{-1, 1\}$, $ABCD$ est un parallélogramme *si et seulement si* $z = i$ ou $z = -i$.
Si $z = i$, A, B, C, D sont les points d'affixes respectifs $1, i, -1, -i$ donc $ABCD$ est un carré.
Si $z = -i$, A, B, C, D sont les points d'affixes respectifs $1, -i, -1, i$ donc $ABCD$ est à nouveau un carré.

3. Le triangle ABC est rectangle isocèle en A *si et seulement si* $AB = AC$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. En termes d'affixes, ABC est rectangle isocèle en A *si et seulement si* $\begin{cases} |z-1| = |z^2-1| \\ \arg\dfrac{z^2-1}{z-1} \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} \left|\dfrac{z^2-1}{z-1}\right| = 1 \\ \arg\dfrac{z^2-1}{z-1} \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$. Puisque $\frac{z^2-1}{z-1} = z+1$, ceci équivaut à $\begin{cases} |z+1| = 1 \\ \arg(z+1) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$ ou encore $z + 1 = \pm i$.
Finalement, ABC est rectangle isocèle en A *si et seulement si* $z = -1 \pm i$.

4. On sait que $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$. Le triangle ABD est rectangle isocèle en A *si et seulement si* $AB = AD$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. En termes d'affixes, ABD est rectangle isocèle en A *si et seulement si* $\begin{cases} |z-1| = |z^3-1| \\ \arg\dfrac{z^3-1}{z-1} \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} \left|\dfrac{z^3-1}{z-1}\right| = 1 \\ \arg\dfrac{z^3-1}{z-1} \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$. Puisque $\frac{z^3-1}{z-1} = z^2 + z + 1$, ceci équivaut à $\begin{cases} |z^2+z+1| = 1 \\ \arg(z^2+z+1) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$ ou encore $z^2 + z + 1 = \pm i$.
Finalement, ABC est rectangle isocèle en A *si et seulement si* z est solution d'une des deux équations (E_1) : $Z^2 + Z + 1 + i = 0$ ou (E_2) : $Z^2 + Z + 1 - i = 0$.
Le discriminant de (E_1) est $-3-4i = (1-2i)^2$. Les solutions de (E_1) sont donc $\frac{-1+(1-2i)}{2} = -i$ et $\frac{-1-(1-2i)}{2} = -1+i$.
Puisque les coefficients de l'équation (E_2) sont les conjugués de ceux de l'équation (E_1), les solutions de (E_2) sont les conjuguées de celles de l'équation (E_1), c'est-à-dire i et $-1-i$.
Le triangle ABD est rectangle isocèle en A *si et seulement si* $z \in \{i, -i, 1+i, 1-i\}$.

Solution 6.

1. Deux cas se présentent.

- Si m est un multiple de n, $\omega^m = 1$ et donc
$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{km} = n$$

- Sinon $\omega^m \neq 1$ et ainsi,
$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{km} = \frac{\omega^{nm}-1}{\omega^m-1} = 0$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Appliquons la formule du binôme de Newton.

$$\begin{aligned}
S(z) &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\omega^{lk}z^l \\
&= \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{l}\omega^{lk}z^l \qquad \text{en permutant les sommes} \\
&= \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}z^l\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{lk}
\end{aligned}$$

D'après la première question, pour tout $l \in [\![1, n-1]\!]$,
$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{lk} = 0$$
et pour $l = 0$ ou $l = n$,
$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{lk} = n$$
Ainsi $S(z) = n\,(z^n + 1)$.

3. Tout d'abord, $S\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right) = e^{i\pi} + 1 = 0$ d'après la question précédente. Mais on a également

$$\begin{aligned}
S\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{i\pi}{n}} + e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(2e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)^n \qquad \text{par arc-moitié} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 2^n e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2}}\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \\
&= 2^n\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\pi}e^{\frac{i\pi}{2}}\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \\
&= 2^n i\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité demandée.