

DEVOIR À LA MAISON N° 7 : CORRIGÉ

Problème 1 — Densité parmi les entiers

Partie I –

1. a. On a clairement $v_n(\mathbb{N}^*) = n$ et donc $\delta_n(\mathbb{N}^*) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $\delta_n(\mathbb{N}^*) = 1$.
- b. Comme E est fini, il admet un plus grand élément. Posons $N = \max E$. Pour $n \geq N$, $v_n(E) = N$ et donc $\delta_n(E) = \frac{N}{n}$. On en déduit que $\delta(E) = 0$.
- c. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{2k}(2\mathbb{N}) = k$ et $v_{2k+1}(2\mathbb{N}) = k + 1$. Par conséquent, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{2} \leq v_n(2\mathbb{N}) \leq \frac{n+1}{2}$ et donc $\frac{1}{2} \leq \delta_n(2\mathbb{N}) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$. Par encadrement, $\delta(2\mathbb{N}) = \frac{1}{2}$.
- d. Les carrés compris entre 1 sont de la forme k^2 avec $1 \leq k^2 \leq n$ i.e. $1 \leq k \leq \sqrt{n}$. On a donc $v_n(C) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. On en déduit l'encadrement $\frac{\sqrt{n}-1}{n} < \delta_n(C) \leq \frac{\sqrt{n}}{n}$. Par encadrement, $\delta(C) = 0$.
- e. On a $A \cap [1, 2^{2n}] = \bigcup_{k=0}^{n-1} [2^{2k}, 2^{2k+1}]$. Comme $\text{card}([2^{2k}, 2^{2k+1}]) = 2^{2k}$,

$$v_{2^{2n}}(A) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{2k} = \frac{2^{2n} - 1}{3}$$

On a également $A \cap [1, 2^{2n+1}] = \bigcup_{k=0}^n [2^{2k}, 2^{2k+1}]$. Donc

$$v_{2^{2n+1}}(A) = \sum_{k=0}^n 2^{2k} = \frac{2^{2(n+1)} - 1}{3}$$

On a donc $\delta_{2^{2n}}(A) = \frac{2^{2n}-1}{3 \cdot 2^{2n}}$ et $\delta_{2^{2n+1}}(A) = \frac{2^{2n+2}-1}{3 \cdot 2^{2n+1}}$. On en déduit que les suites $(\delta_{2^{2n}}(A))$ et $(\delta_{2^{2n+1}}(A))$ convergent respectivement vers $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Comme ce sont des suites extraites de $(\delta_n(A))$, cette suite ne converge pas. Ainsi A n'a pas de densité.

- f. Remarquons qu'il existe 9^k entiers à k chiffres ne comportant pas de zéro dans leur écriture décimale. On en déduit que pour $p \geq 1$, $v_{10^p} = \sum_{k=1}^p 9^k = \frac{9^{p+1}-1}{8}$. Soit n un entier et posons $p = \lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$ de sorte que $n \leq 10^p$. On a donc

$$0 \leq v_n(D) \leq \frac{9^{p+1}-1}{8} \leq \frac{9^{\log_{10}(n)+2}-1}{8} = \frac{81n^{\log_{10}(9)}-1}{8}$$

Par conséquent

$$0 \leq \delta_n(D) \leq \frac{81n^{\log_{10}(9)}-1}{8n}$$

Comme $\log_{10}(9) < 1$, on a par encadrement $\delta(D) = 0$.

2. a. $A \cap [1, a_n] = \{a_1, \dots, a_n\}$ donc $v_{a_n}(A) = n$.
- b. La suite $(\delta_{a_n}(A))$ est une suite extraite de la suite $(\delta_n(A))$ car la suite (a_n) est strictement croissante. Elle possède donc la même limite $\delta(A)$. Il suffit de remarquer que $\delta_{a_n}(A) = \frac{n}{a_n}$.
- c. Si $A \cap [1, n] = \emptyset$, alors $v_n(A) = 0$. De plus, cela signifie qu'aucun des a_n n'appartient à $[1, n]$. En particulier, $a_1 > n$.
Sinon $A \cap [1, n] = \{a_1, \dots, a_k\}$. Comme $k = \text{card}(\{a_1, \dots, a_k\})$, on a donc $k = v_n(A)$. Or $a_k \in [1, n]$ donc $a_{v_n(A)} \leq n$. De plus, $a_{k+1} \notin [1, n]$ donc $a_{v_n(A)+1} > n$.

d. D'après la question précédente, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{a_{v_n(A)}} \leq \frac{v_n(A)}{n}$ puis $\frac{v_n(A)}{n} \leq \frac{v_n(A)}{a_{v_n(A)}}$.

De même, $\frac{1}{a_{v_n(A)+1}} < \frac{1}{n}$ puis $\frac{v_n(A)+1}{a_{v_n(A)+1}} < \frac{v_n(A)+1}{n}$ et enfin $\frac{v_n(A)+1}{a_{v_n(A)+1}} - \frac{1}{n} < \frac{v_n(A)}{n}$.

La suite $(v_n(A))$ est croissante et non majorée puisque A est infini : elle diverge donc vers $+\infty$. Comme la suite

$\left(\frac{n}{a_n}\right)$ converge vers l , les suites $\left(\frac{v_n(A)}{a_{v_n(A)}}\right)$ et $\left(\frac{v_n(A)+1}{a_{v_n(A)+1}}\right)$ convergent également vers l . Par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n(A)}{n} = l \text{ i.e. } \delta(A) = l.$$

3. On utilise le résultat de la question précédente.

a. Posons $a_n = p + nq$ de sorte que $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. La suite (a_n) est strictement croissante car $q > 0$. On a donc $\delta(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a_n} = \frac{1}{q}$.

b. Posons $a_n = \lfloor n\alpha \rfloor$. On a $a_n \leq n\alpha$ et $a_{n+1} > (n+1)\alpha - 1 \geq n\alpha$ car $\alpha \geq 1$. Ainsi la suite (a_n) est strictement croissante. Comme $(n-1)\alpha < a_n \leq n\alpha$, $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha$. Donc $\delta(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$.

Partie II –

1. Notons $A_n = A \cap \llbracket 1, n \rrbracket$ et $B_n = B \cap \llbracket 1, n \rrbracket$. On sait que

$$\text{card}(A_n) + \text{card}(B_n) = \text{card}(A_n \cup B_n) + \text{card}(A_n \cap B_n)$$

c'est-à-dire $v_n(A) + v_n(B) = v_n(A \cup B) + v_n(A \cap B)$. On en déduit que $\delta_n(A) + \delta_n(B) = \delta_n(A \cup B) + \delta_n(A \cap B)$. Si trois de ces suites ont une limite, alors la quatrième également et dans ce cas, $\delta(A) + \delta(B) = \delta(A \cap B) + \delta(A \cup B)$.

2. Si A et B sont disjoints, alors $A \cap B = \emptyset$ possède une densité nulle. D'après la question précédente, $A \cup B$ possède une densité et $\delta(A \cup B) = \delta(A) + \delta(B)$.

3. $A \cup \overline{A} = \mathbb{N}^*$ possède une densité égale à 1. $A \cap \overline{A} = \emptyset$ possède une densité nulle. On en déduit que \overline{A} possède une densité et que $\delta(\overline{A}) = 1 - \delta(A)$.

4. Soit A un ensemble négligeable et $B \subset A$. On a donc $0 \leq v_n(B) \leq v_n(A)$ puis $0 \leq \delta_n(B) \leq \delta_n(A)$. Par encadrement, B possède une densité et $\delta(B) = 0$. Donc B est également négligeable.

5. $A \cap B$ est une partie de B donc est négligeable i.e. possède une densité nulle. Comme A et B possèdent également une densité, $A \cup B$ possède une densité et $\delta(A \cup B) = \delta(A) + \delta(B) - \delta(A \cap B) = \delta$.

Partie III –

1. Si (u_n) converge, (u_{p_n}) converge également vers la même limite puisque (p_n) diverge vers $+\infty$.

Réciproquement supposons que (u_{p_n}) converge vers une limite l . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $K \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \geq K \implies \|u_{p_k} - l\| < \varepsilon$. Posons $N = p_K$ et donnons-nous $n \geq N$. Notons $E = \{k \in \mathbb{N}^* \mid p_k > n\}$. E est une partie non vide de \mathbb{N}^* puisque (p_k) diverge vers $+\infty$. Elle possède donc un plus petit élément. Posons $k_0 = \min E - 1$. On a donc $p_{k_0} \leq n < p_{k_0+1} \leq p_{k_0} + 1$. D'où $n = p_{k_0}$. De plus, $p_K \geq n$ donc $K \notin E$. Ainsi $K < \min E$ i.e. $K \leq \min E - 1 = k_0$. Ainsi

$$\|u_n - l\| = \|u_{p_{k_0}} - l\| < \varepsilon$$

On en déduit la convergence de (u_n) vers l .

2. Comme B est infini, B est non vide. On a donc $v_n(B) \geq 1$ pour n suffisamment grand.

$$\delta_n(A \cap B) = \frac{v_n(A \cap B)}{n} = \frac{v_n(A \cap B)}{v_n(B)} \frac{v_n(B)}{n}$$

Or $v_n(A \cap B) = \text{card}(A \cap B \cap \llbracket 1, n \rrbracket) = \text{card}(A \cap \{b_1, \dots, b_{v_n(B)}\})$ puisque $\text{card}(B \cap \llbracket 1, n \rrbracket) = v_n(B)$. Finalement, $\delta_n(A \cap B) = \delta_{v_n(B)}(A|B)\delta_n(B)$.

Comme $(\delta_n(B))$ a une limite non nulle, on peut écrire $\delta_{v_n(B)}(A|B) = \frac{\delta_n(A \cap B)}{\delta_n(B)}$ à partir d'un certain rang. On

en déduit que la suite $(\delta_{\nu_n(B)}(A|B))$ converge vers $\frac{\delta(A \cap B)}{\delta(B)}$. Enfin, $\nu_{n+1}(B) = \nu_n(B)$ si $n+1 \notin B$ et $\nu_{n+1}(B) = \nu_n(B) + 1$ si $n+1 \in B$. On a donc $\nu_n(B) \leq \nu_{n+1}(B) \leq \nu_n(B) + 1$. D'après le lemme, $\delta_n(A|B)$ converge également vers $\frac{\delta(A \cap B)}{\delta(B)}$. Ainsi A possède une densité relative par rapport à B et celle-ci vaut $\frac{\delta(A \cap B)}{\delta(B)}$.

3. a. Soient A un ensemble négligeable et B un ensemble possédant une densité. Comme $A \cap B$ est une partie de A , on déduit de la question **II.4** que $A \cap B$ est également négligeable. On a donc $\delta(A \cap B) = \delta(A)\delta(B) = 0$.
b. Si A et B sont indépendants, alors A , B et $A \cap B$ possèdent une densité et $\delta(A \cap B) = \delta(A)\delta(B)$. D'après la question **III.2**, A possède une densité relative dans B et $\delta(A|B) = \frac{\delta(A \cap B)}{\delta(B)} = \delta(A)$.
Réciproquement, si A possède une densité relative dans B et $\delta(A|B) = \delta(A)$, $A \cap B$ possède une densité et $\delta(A \cap B) = \delta(A|B)\delta(B) = \delta(A)\delta(B)$ d'après la question **III.2**. Ainsi A et B sont indépendants.

4. Comme $M_p = \{pn, n \in \mathbb{N}^*\}$, $\delta(M_p) = \frac{1}{p}$ d'après la question **I.2**. $M_p \cap M_q$ est l'ensemble des multiples communs de p et q donc $M_p \cap M_q = M_{p \vee q}$ où $p \vee q$ désigne le ppcm de p et q . Ainsi M_p et M_q sont indépendants *si et seulement si* $\frac{1}{p \vee q} = \frac{1}{p} \frac{1}{q}$ i.e. $p \vee q = pq$, ce qui équivaut à p et q premiers entre eux.

5. Supposons que A soit négligeable. A_B est une partie de A donc est également négligeable. Ainsi $\delta(A_B) = \delta(A)\delta(B) = 0$.

Supposons maintenant que A n'est pas négligeable. Puisque $A_B \cap \{a_1, \dots, a_n\} = \{a_{b_k} \mid b_k \leq n\}$, $\text{card}(A_B \cap \{a_1, \dots, a_n\}) = \text{card}(\{B \cap \llbracket 1, n \rrbracket\}) = \nu_n(B)$. Ainsi $\delta_n(A_B|A) = \frac{\nu_n(B)}{n} = \delta_n(B)$. Ainsi A_B possède une densité dans A et $\delta(A_B|A) = \delta(B)$. En reprenant le raisonnement de la question **III.2**, on montre que $\delta_n(A_B \cap A) = \delta_{\nu_n(A)}(A_B|A)\delta_n(A)$ i.e. $\delta_n(A_B) = \delta_{\nu_n(A)}(A_B|A)\delta_n(A)$. On en déduit que A_B possède une densité et que $\delta(A_B) = \delta(A_B|A)\delta(A) = \delta(B)\delta(A)$.

REMARQUE. On peut aussi utiliser la question **I.2**. En effet, la suite (a_{b_n}) est croissante et $\frac{n}{a_{b_n}} = \frac{b_n}{a_{b_n}} \frac{n}{b_n}$. La suite $\left(\frac{b_n}{a_{b_n}}\right)$ est extraite de la suite $\left(\frac{n}{a_n}\right)$ et converge donc vers $\delta(A)$. Par ailleurs, la suite $\left(\frac{n}{b_n}\right)$ converge vers $\delta(B)$. Ainsi la suite $\left(\frac{n}{a_{b_n}}\right)$ converge vers $\delta(A)\delta(B)$, ce qui prouve que A_B possède une densité égale à $\delta(A)\delta(B)$.

Partie IV –

1. Première méthode

Montrons par récurrence sur k que pour tout k -uplet d'ensembles (B_1, \dots, B_k) vérifiant

$$(*) \quad \forall I \subset \llbracket 1, k \rrbracket, \bigcap_{i \in I} B_i \text{ a une densité et } \delta\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \prod_{i \in I} \delta(B_i)$$

$\bigcap_{i=1}^k \overline{B_i}$ possède une densité et $\delta\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{B_i}\right) = \prod_{i=1}^k \delta(\overline{B_i})$.

L'initialisation au rang $k = 1$ est évidente. Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \mathbb{N}^*$ et montrons-la au rang $k + 1$. Soit donc (B_1, \dots, B_{k+1}) un $k + 1$ -uplet d'ensembles vérifiant la propriété $(*)$. Montrons que le k -uplet $(B_1, \dots, B_{k-1}, B_k \cup B_{k+1})$ vérifie également la propriété $(*)$. Il suffit de vérifier que pour $I \subset \llbracket 1, k - 1 \rrbracket$,

$\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \cap (B_k \cup B_{k+1})$ admet une densité et que

$$\delta\left(\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \cap (B_k \cup B_{k+1})\right) = \left(\prod_{i \in I} \delta(B_i)\right) \delta(B_k \cup B_{k+1})$$

Soit donc $I \subset \llbracket 1, k - 1 \rrbracket$. On a

$$\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \cap (B_k \cup B_{k+1}) = \left(\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \cap B_k\right) \cup \left(\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \cap B_{k+1}\right)$$

Or $\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \cap B_k$ et $\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \cap B_{k+1}$ ont une densité et

$$\left(\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \cap B_k\right) \cap \left(\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \cap B_{k+1}\right) = \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \cap B_k \cap B_{k+1}$$

a donc également une densité. De plus,

$$\begin{aligned} \delta\left(\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \cap (B_k \cup B_{k+1})\right) &= \delta\left(\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \cap B_k\right) + \delta\left(\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \cap B_{k+1}\right) \\ &\quad - \delta\left(\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \cap B_k \cap B_{k+1}\right) \\ &= \left(\prod_{i \in I} \delta(B_i)\right) (\delta(B_k) + \delta(B_{k+1}) - \delta(B_k \cap B_{k+1})) \\ &= \left(\prod_{i \in I} \delta(B_i)\right) (\delta(B_k) + \delta(B_{k+1}) - \delta(B_k \cap B_{k+1})) \\ &= \left(\prod_{i \in I} \delta(B_i)\right) \delta(B_k \cup B_{k+1}) \end{aligned}$$

en appliquant (*) en remplaçant I par $I \cup k, I \cup \{k+1\}$ et $\{k, k+1\}$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence au k -uplet $(B_1, \dots, B_{k-1}, B_k \cup B_{k+1})$. Ainsi

$$\begin{aligned} \delta(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k+1}}) &= \delta(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap \overline{B_k \cup B_{k+1}}) \\ &= \delta(\overline{B_1}) \dots \delta(\overline{B_{k-1}}) \delta(\overline{B_k \cup B_{k+1}}) \end{aligned}$$

Or en utilisant (*) en remplaçant I par $\{k, k+1\}$, on a :

$$\begin{aligned} \delta(\overline{B_k \cup B_{k+1}}) &= 1 - \delta(B_k \cup B_{k+1}) = 1 - \delta(B_k) - \delta(B_{k+1}) + \delta(B_k \cap B_{k+1}) \\ &= 1 - \delta(B_k) - \delta(B_{k+1}) + \delta(B_k) \delta(B_{k+1}) = (1 - \delta(B_k))(1 - \delta(B_{k+1})) = \delta(\overline{B_k}) \delta(\overline{B_{k+1}}) \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

Il suffit enfin de remarquer que (A_1, \dots, A_k) vérifie (*) puisque pour $I \subset \llbracket 1, k \rrbracket$, $\bigcap_{i \in I} A_i = \{np_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$ admet une densité et que

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \frac{1}{\prod_{i \in I} p_i} = \prod_{i \in I} \delta(A_i)$$

On en déduit que

$$\delta\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i}\right) = \prod_{i=1}^k \delta(\overline{A_i}) = \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Seconde méthode

Rappelons tout d'abord que $\delta(A_i) = \frac{1}{p_i}$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

On fait l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\text{HR}(k) : \bigcap_{i=1}^k \overline{A_i} \text{ admet une densité et } \delta\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i}\right) = \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

L'initialisation au rang $k = 1$ est évidente. Supposons donc HR(k) pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.

On montre d'abord que $\bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{A_i}$ possède une densité dans A_{k+1} .

$$\delta_n\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i} | A_k\right) = \frac{\text{card}\left(\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i}\right) \cap \{jp_{k+1} \mid 1 \leq j \leq n\}\right)}{n}$$

Or un entier de la forme $j p_{k+1}$ n'est pas multiple de p_1, \dots, p_k si et seulement si j n'est pas multiple de p_1, \dots, p_k . Autrement dit,

$$\text{card} \left(\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i} \right) \cap \{j p_{k+1} \mid 1 \leq j \leq n\} \right) = v_n \left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i} \right)$$

On a donc $\delta_n \left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i} | A_k \right) = \delta_n \left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i} \right)$. Ainsi $\bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{A_i}$ possède une densité dans A_{k+1} et $\delta \left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i} | A_k \right) = \delta \left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i} \right)$.

On en déduit ensuite que $\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i} \right) \cap A_{k+1}$ possède une densité et que $\delta \left(\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i} \right) \cap A_{k+1} \right) = \delta \left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i} \right) \delta(A_{k+1})$.

Puisque $\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i}$ est l'union disjointe de $\bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{A_i}$ et $\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i} \right) \cap A_{k+1}$ et que ces trois ensembles possèdent une densité :

$$\begin{aligned} \delta \left(\bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{A_i} \right) &= \delta \left(\bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{A_i} \right) - \delta \left(\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i} \right) \cap A_{k+1} \right) \\ &= \delta \left(\bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{A_i} \right) (1 - \delta(A_{k+1})) = \prod_{i=1}^{k+1} \left(1 - \frac{1}{p_i} \right) \end{aligned}$$

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit p_k le plus grand nombre premier et M la plus grande puissance intervenant dans les décompositions en facteurs premiers des entiers de 1 à N . Pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{p_i^m} \geq \sum_{m=0}^M \frac{1}{p_i^m}$$

On en déduit que

$$\frac{1}{p_k} = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} \geq \prod_{i=1}^k \sum_{m=0}^M \frac{1}{p_i^m} = \sum_{(m_1, \dots, m_k) \in \llbracket 0, M \rrbracket^k} \frac{1}{p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}}$$

Par définition de k et M , on retrouve tous les entiers de 1 à N parmi les entiers $p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$ lorsque m_1, \dots, m_k décrivent $\llbracket 0, M \rrbracket$. Ainsi $\frac{1}{p_k} \geq \sum_{n=0}^N \frac{1}{n}$. On démontre classiquement que la suite $\left(\sum_{m=0}^n \frac{1}{m} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$. Ceci montre que la suite $\left(\frac{1}{p_k} \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée. Par ailleurs, cette suite est croissante puisque pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $0 < 1 - \frac{1}{p_i} < 1$. On en déduit que $\left(\frac{1}{p_k} \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$, ce qui prouve que la suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

3. Pour $j \geq k+1$, p_j est premier avec les p_i pour $1 \leq i \leq k$ donc appartient à $\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i}$. On a donc $v_n(\mathbb{P}) \leq k + v_n \left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i} \right)$

dès que $n > p_k$. Ainsi $\delta_n(\mathbb{P}) \leq \frac{k}{n} + \delta_n \left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i} \right)$ pour $n > p_k$. En passant à la limite supérieure, on obtient l'inégalité demandée.

4. Puisque $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(\mathbb{P}) \leq P_k$, on a en faisant tendre k vers $+\infty$, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(\mathbb{P}) \leq 0$. Comme par ailleurs, $\delta_n(\mathbb{P}) \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, on a également $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(\mathbb{P}) \geq 0$. Puisque $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(\mathbb{P}) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(\mathbb{P})$, on a $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(\mathbb{P}) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(\mathbb{P}) = 0$ et donc $(\delta_n(\mathbb{P}))$ converge vers 0, ce qui signifie que \mathbb{P} est de densité nulle.