# Semaine du 18/01 au 22/01

## 1 Cours

### Groupes, anneaux, corps

**Notion de loi interne** Définition. Associativité, commutativité. Définition d'un élément neutre, unicité sous réserve d'existence. Inversibilité, unicité de l'inverse si la loi est associative.

**Groupes** Définition. Sous-groupe : définition et caractérisation.

**Morphismes de groupes** Définition, image de l'élément neutre et d'un inverse, composition de morphismes. Images directe et réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupes. Noyau et image d'un morphisme de groupes. Caractérisation de l'injectivité par le noyau (et de la surjectivité par l'image). Le noyau et l'image sont des sous-groupes. Isomorphisme : définition, la bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

**Anneaux** Définition. Groupe des éléments inversibles. Règles de calcul dans les anneaux. Intégrité. Formule du binôme de Newton et factorisation de $a^n - b^n$ si **commutativité**. Sous-anneaux : définition et caractérisation. Morphismes d'anneaux. Images directe et réciproque d'un sous-anneau par un morphisme d'anneaux.

**Corps** Définition. Tout corps est intègre. Sous-corps : définition et caractérisation. Morphismes de corps.

## 2 Méthodes à maîtriser

- Dans un anneau, on prendra garde à se méfier des habitudes de calcul.
  - La seconde loi n'est pas toujours commutative.
  - Un produit d'éléments d'un anneau non intègre peut-être nul sans qu'aucun des facteurs soit nul.
  - Un élément d'un anneau n'est pas forcément inversible.
- Pour montrer qu'un ensemble est un groupe/anneau/corps, on peut montrer que c'est un sous-groupe/sous-anneau/sous-corps d'un groupe/anneau/corps déjà connu.
- Dans un corps, on calcul comme on en a l'habitude.

## 3 Questions de cours

- Soient $(G, \star)$ et $(G', .)$ deux groupes et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Montrer que si $H$ est un sous-groupe de $(G, \star)$, alors $f(H)$ est un sous-groupe de $(G', .)$.
- Soient $(G, \star)$ et $(G', .)$ deux groupes et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Montrer que si $H$ est un sous-groupe de $(G', .)$, alors $f^{-1}(H)$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.
- Soient $(A, +, \times)$ un anneau et $(x, y) \in A^2$. Montrer que si $x$ et $y$ sont nilpotents et commutent, $x + y$ est nilpotent.
- Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Montrer que si $x \in A$ est nilpotent, $1_A - x$ est inversible et déterminer son inverse.
- Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$ et déterminer ses éléments inversibles.