

# ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

## 1 Produit scalaire et norme

### 1.1 Produit scalaire

#### Définition 1.1

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle **produit scalaire** sur  $E$  toute forme bilinéaire symétrique définie positive i.e. toute application  $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

**Bilinéaire**  $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} \varphi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \varphi(x, y) + \mu \varphi(x, z) \\ \varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \varphi(x, z) + \mu \varphi(y, z) \end{cases} ;$

**Symétrique**  $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x);$

**Définie**  $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E ;$

**Positive**  $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0.$

#### Notation 1.1

Le produit scalaire de deux éléments  $x$  et  $y$  de  $E$  se note généralement  $(x | y)$ ,  $\langle x | y \rangle$ ,  $(x, y)$  ou encore  $\langle x, y \rangle$ .

**REMARQUE.** Le produit scalaire en géométrie est bien un produit scalaire au sens de la définition précédente.

#### Méthode Montrer qu'une application est un produit scalaire

On procède généralement dans l'ordre suivant.

- On vérifie que l'application est bien à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
- On montre la symétrie.
- On montre la linéarité par rapport à la première variable ou la seconde variable. La linéarité par rapport à l'autre variable découle de la symétrie.
- On montre la positivité.
- On finit par la «définition».

#### Exemple 1.1

On appelle produit scalaire **canonique** ou **usuel** sur  $\mathbb{R}^n$  l'application

$$\begin{cases} (\mathbb{R}^n)^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \sum_{k=1}^n x_k y_k \end{cases}$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$ .

**Exemple 1.2**

L'application

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) & \longmapsto X^T Y \end{cases}$$

est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

**Exemple 1.3**

Soit  $[a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$ . Notons  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ . L'application

$$\begin{cases} E^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto \int_a^b f(t)g(t)dt \end{cases}$$

est un produit scalaire.

**Définition 1.2 Espace préhilbertien réel, espace euclidien**

On appelle **espace préhilbertien réel** tout  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un **produit scalaire**.

On appelle **espace euclidien** tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

**Définition 1.3**

Soient  $E$  un espace vectoriel préhilbertien réel. Soit  $(x, y) \in E^2$ . On dit que  $x$  et  $y$  sont **orthogonaux** si  $(x | y) = 0$ . Dans ce cas, on note  $x \perp y$ .

**REMARQUE.** Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

**1.2 Norme associée à un produit scalaire****Définition 1.4**

Soit  $(. | .)$  un produit scalaire sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ . L'application

$$\begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto \sqrt{(x | x)} \end{cases}$$

est appelée **norme associée** au produit scalaire  $(. | .)$ .

**Notation 1.2**

Une norme associée à un produit scalaire se note usuellement  $\|.\|$ .

**Définition 1.5**

Soit  $x$  un vecteur d'un espace préhilbertien réel. On dit que  $x$  est **unitaire** si  $\|x\| = 1$ .

**Proposition 1.1 Relations entre produit scalaire et norme**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$  et d'une norme associée  $\|\cdot\|$ . On a les relations suivantes :

**Identités remarquables :**

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2 \\ \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 - 2(x | y) + \|y\|^2 \\ \|x\|^2 - \|y\|^2 &= (x + y | x - y)\end{aligned}$$

**Identités de polarisation :**  $(x | y) = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$

**Identité du parallélogramme :**  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

**REMARQUE.** Les identités de polarisation permettent donc de retrouver le produit scalaire à partir de la norme.

**REMARQUE.** Si  $x$  et  $y$  sont de même norme, alors  $x + y$  et  $x - y$  sont orthogonaux. Géométriquement, les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

**Proposition 1.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soit  $(\cdot | \cdot)$  un produit scalaire sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  et  $\|\cdot\|$  sa norme associée. Alors pour tous  $x, y \in E$  :

$$|(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$$

avec égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

**REMARQUE.** Si l'on omet la valeur absolue, le cas d'égalité

$$(x | y) = \|x\| \|y\|$$

ne se produit que si  $x$  et  $y$  sont **positivement** colinéaires, autrement dit si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tel que  $x = \lambda y$  ou  $y = \lambda x$ .

**Cauchy-Schwarz pour les intégrales**

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $[a, b]$  à valeurs réelles

$$\left| \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \leq \left( \int_a^b f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b g(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

ou encore

$$\left( \int_a^b f(t) g(t) dt \right)^2 \leq \left( \int_a^b f(t)^2 dt \right) \left( \int_a^b g(t)^2 dt \right)$$

**Cauchy-Schwarz sur  $\mathbb{R}^n$** 

Si  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  sont deux  $n$ -uplets de  $\mathbb{R}^n$

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ou encore

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

**Proposition 1.3 Propriétés de la norme euclidienne**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$  et d'une norme associée  $\|\cdot\|$ .

**Séparation**  $\forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0_E$ ;

**Homogénéité**  $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ;

**Inégalité triangulaire**  $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Norme**

De manière générale, on appelle **norme** sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  toute application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifiant

**Séparation**  $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ ;

**Homogénéité**  $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ ;

**Inégalité triangulaire**  $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ .

## 2 Familles orthogonales

### 2.1 Propriétés des familles orthogonales

**Définition 2.1**

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel. Soit  $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ .

(i) On dit que la famille  $(x_i)_{i \in I}$  est **orthogonale** si les vecteurs  $x_i$  sont orthogonaux deux à deux i.e.

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies (x_i | x_j) = 0$$

(ii) On dit que la famille est **orthonormale** ou **orthonormée** si elle est orthogonale et si les  $x_i$  sont unitaires i.e.

$$\forall (i, j) \in I^2, (x_i | x_j) = \delta_{i,j}$$

**Exemple 2.1**

La base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est orthonormale pour le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 2.1 Liberté des familles orthogonales**

Toute famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. En particulier, toute famille orthonormale est libre.

**Proposition 2.2 Théorème de Pythagore**

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille orthogonale d'un espace préhilbertien réel  $E$ . Alors

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

**REMARQUE.** C'est une généralisation du théorème de Pythagore que vous connaissez en deux dimensions.

## 2.2 Bases orthonormales

### Proposition 2.3 Coordonnées dans une base orthonormale

Soient  $(e_i)_{i \in I}$  une base **orthonormale** d'un espace préhilbertien  $E$  et  $x \in E$ . Alors  $x = \sum_{i \in I} (x | e_i) e_i$ .  
Autrement dit les coordonnées de  $x$  dans la base  $(e_i)_{i \in I}$  sont  $((x | e_i))_{i \in I}$ , ou encore,  $\forall i \in I, e_i^*(x) = (x | e_i)$ .

### Proposition 2.4 Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base **orthonormale** d'un espace préhilbertien  $E$ . Soit  $(x, y) \in E^2$ . Alors

$$(x | y) = \sum_{i \in I} e_i^*(x) e_i^*(y) = \sum_{i \in I} (x | e_i) (y | e_i) \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i \in I} e_i^*(x)^2 = \sum_{i \in I} (x | e_i)^2$$

### Interprétation matricielle du produit scalaire

Si on note  $X$  et  $Y$  les matrices colonnes de deux vecteurs  $x$  et  $y$  dans une base orthonormale, alors  $(x | y) = X^T Y$ .  
En effet,  $X^T Y$  est une matrice carrée de taille 1 qu'on peut identifier à un réel.

### Proposition 2.5

Tout espace **euclidien** admet une base orthonormale.

Le résultat précédent peut être démontré grâce au procédé suivant qui permet de **construire** explicitement une famille orthonormale à partir d'une famille libre.

### Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille libre d'un espace préhilbertien réel  $E$ . On cherche à construire une famille **orthonormale**  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $E$  telle que :

$$\text{vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{vect}(f_1, \dots, f_n)$$

On va raisonner par récurrence finie.

L'hypothèse de récurrence est la suivante :

HR( $p$ ) : «il existe une famille orthonormale  $(f_1, \dots, f_p)$  telle que  $\text{vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{vect}(f_1, \dots, f_p)$ .»

**Initialisation** L'initialisation est évidente, il suffit de normaliser  $e_1$  i.e. de prendre  $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ .

**Hérédité** On suppose HR( $p$ ) pour  $1 \leq p \leq n-1$ . Le but est de construire  $f_{p+1}$ . On cherche d'abord un vecteur  $g$  orthogonal à  $f_1, \dots, f_p$  sous la forme

$$g = e_{p+1} - \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k$$

On a alors nécessairement  $\lambda_k = (f_k | e_{p+1})$  pour  $1 \leq k \leq p$ . Il suffit alors de normaliser  $g$  i.e. de prendre  $f_{p+1} = \frac{g}{\|g\|}$ . Par construction,  $f_{p+1}$  est unitaire et orthogonal à tous les  $f_i$  et  $\text{vect}(e_1, \dots, e_{p+1}) = \text{vect}(f_1, \dots, f_{p+1})$ .

Astuce de calcul : par le théorème de Pythagore,  $\|g\|^2 = \|e_{p+1}\|^2 - \sum_{k=1}^p \lambda_k^2$ .

**Conclusion** Par récurrence finie, HR( $n$ ) est vraie.

**Exercice 2.1**

Orthonormaliser la famille  $(1, X, X^2)$  pour le produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$  suivant :

$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

**Corollaire 2.1**

Soit  $E$  un espace **euclidien**. Toute famille orthonormale de  $E$  peut être complétée en une base orthonormale de  $E$ .

**REMARQUE.** Si l'on se donne une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie, il est facile de trouver un produit scalaire pour lequel  $\mathcal{B}$  est orthonormale. Il suffit de choisir

$$\begin{cases} E \times E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \sum_{k=1}^n e_k^*(x)e_k^*(y) \end{cases} .$$

### 3 Orthogonalité

#### 3.1 Sous-espaces orthogonaux

**Définition 3.1** Sous-espaces orthogonaux

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont orthogonaux et on note  $F \perp G$  si tout vecteur de  $F$  est orthogonal à tout vecteur de  $G$ .

**Proposition 3.1**

Deux sous-espaces orthogonaux sont en somme directe.

**Définition 3.2** Orthogonal d'une partie

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $A$  une partie  $E$ . On appelle **orthogonal** de  $A$ , noté  $A^\perp$ , l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de  $A$ .

**Exemple 3.1**

$$E^\perp = \{0_E\} \text{ et } \{0_E\}^\perp = E.$$

**Proposition 3.2**

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $A$  une partie  $E$ .  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . De plus,  $A^\perp = \text{vect}(A)^\perp$ .

**REMARQUE.** Si  $F$  est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel,  $F$  et  $F^\perp$  sont orthogonaux.



**ATTENTION !** Dire que deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux ne signifie pas forcément que l'un est l'orthogonal de l'autre. Par exemple, deux droites de  $\mathbb{R}^3$  peuvent être orthogonales sans que l'une soit l'orthogonal de l'autre puisque l'orthogonal d'une droite dans  $\mathbb{R}^3$  est un plan. En fait,

$$F \perp G \iff F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp$$

### Exercice 3.1

Soit  $A$  une partie d'un espace préhilbertien réel. Montrer que  $A \subset (A^\perp)^\perp$ .

### Exercice 3.2

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un espace préhilbertien réel. Montrer que si  $A \subset B$ , alors  $B^\perp \subset A^\perp$ . Montrer à l'aide d'un contre-exemple que la réciproque est fausse.

### Proposition 3.3 Propriétés de l'orthogonal

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- (i) Si  $F$  admet un supplémentaire orthogonal  $G$  dans  $E$ , alors  $G = F^\perp$ . De plus, dans ce cas,  $(F^\perp)^\perp = F$ .
- (ii) Si  $F$  est de **dimension finie**, alors  $F^\perp$  est l'unique supplémentaire orthogonal de  $F$  dans  $E$ . On a alors  $(F^\perp)^\perp = F$ .
- (iii) Si  $E$  est un espace euclidien,  $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ .

**REMARQUE.** Si  $F$  est de **dimension finie** (et a fortiori quand  $E$  est lui-même de dimension finie), on a toujours  $E = F \oplus F^\perp$ .



**ATTENTION !** Si  $F$  n'est pas de dimension finie,  $F^\perp$  n'est pas nécessairement un supplémentaire de  $F$  : on peut seulement affirmer que  $F$  et  $F^\perp$  sont en somme directe.

On ne peut pas non plus affirmer que  $(F^\perp)^\perp = F$  mais seulement que  $F \subset (F^\perp)^\perp$ .

### Exemple 3.2

Munissons  $E = \mathbb{R}[X]$  de son produit scalaire «usuel»

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n \right) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

et considérons  $F = \{P \in E, P(1) = 0\}$ . Soit  $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in F^\perp$ . Notamment,  $\langle P, X^{n+1} - X^n \rangle = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  i.e.  $a_{n+1} = a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La suite  $(a_n)$  est donc constante. Mais comme cette suite est presque nulle, elle est en fait constamment nulle. On en déduit que  $P = 0$  puis que  $F^\perp = \{0\}$ . Par conséquent,  $F \oplus F^\perp = F \neq E$  et  $F \subsetneq (F^\perp)^\perp = E$ .

### Exercice 3.3

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel  $E$ .

1. Montrer que  $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$  et que, si  $F$  et  $G$  sont de dimension finie,  $G^\perp \subset F^\perp \implies F \subset G$ .
2. Montrer que  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ .
3. Montrer que  $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$  et que, si  $E$  est de dimension finie,  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ .

**Exemple 3.3**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 4 muni d'une base orthonormale  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel défini par le système d'équation  $\begin{cases} -x + y - 3z + 2t = 0 \\ 3x + 4y - z + t = 0 \end{cases}$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Alors  $F^\perp = \text{vect}(-e_1 + e_2 - 3e_3 + 2e_4, 3e_1 + 4e_2 - e_3 + e_4)$ .

**3.2 Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales****Définition 3.3 Projecteur orthogonal**

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Si  $E = F \oplus F^\perp$ , on appelle **projecteur orthogonal** sur  $F$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

**REMARQUE.** La projection orthogonale sur  $F$  est notamment définie lorsque  $F$  est de dimension finie.

**Proposition 3.4 Expression de la projection orthogonale dans une base orthonormale**

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de  $E$ . On se donne une base orthonormale  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $F$ . Soient  $p$  le projecteur orthogonal sur  $F$  et  $x \in E$ . Alors

$$p(x) = \sum_{k=1}^n (x | f_k) f_k$$

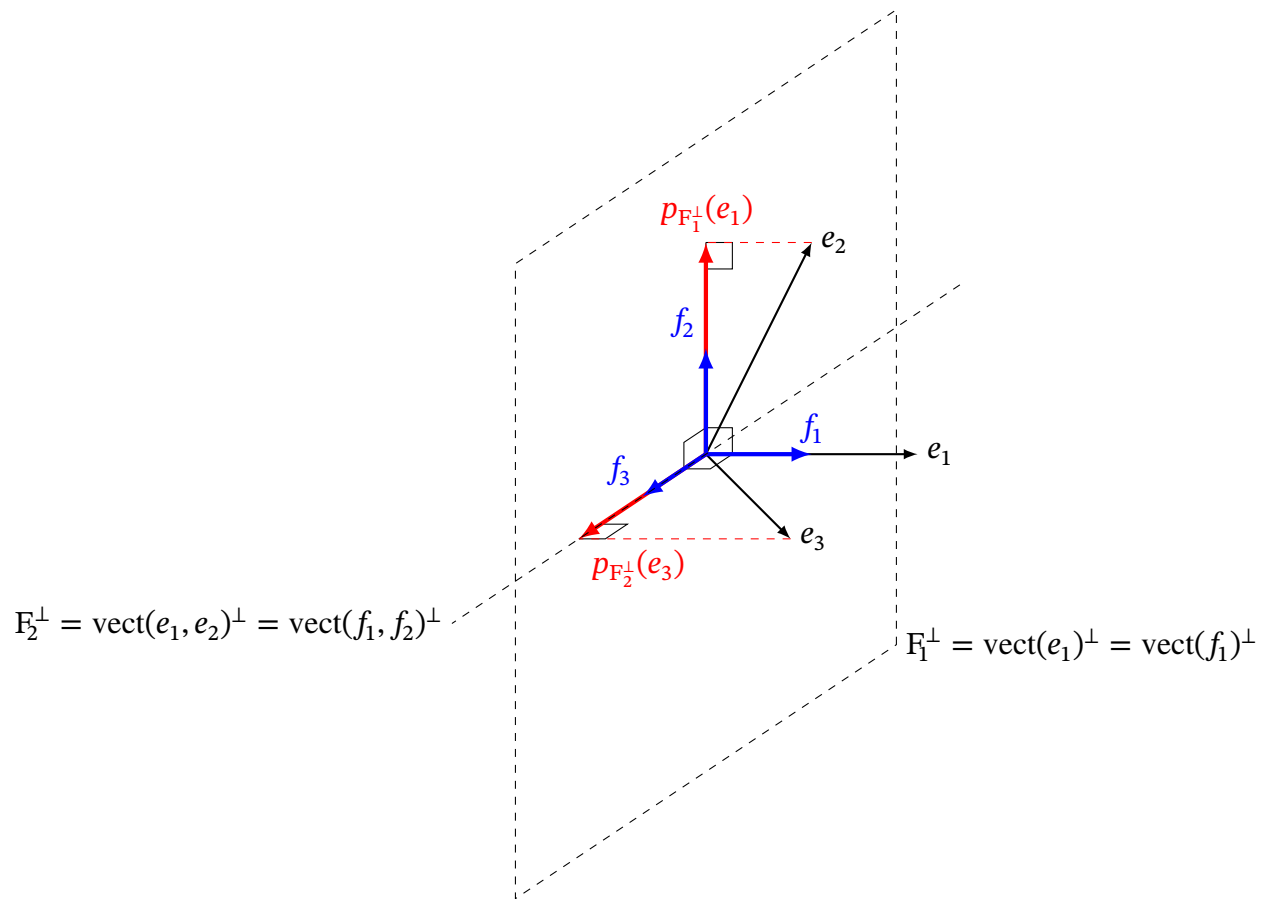
**REMARQUE.** En particulier la projection d'un vecteur  $x$  sur une droite vectorielle  $\text{vect}(u)$  est  $\frac{(x | u)}{\|u\|^2} u$ . Si  $u$  est normé, alors cette projection est simplement  $(x | u)u$ .

**REMARQUE.** On peut donner une interprétation géométrique de la méthode de Gram-Schmidt. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille libre d'un espace préhilbertien réel  $E$ . On sait qu'on peut construire une famille **orthonormale**  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $E$  telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{vect}(f_1, \dots, f_k) = F_k$$

Alors, en convenant que  $F_0 = \{0\}$ , pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $f_{k+1} = \frac{p_{F_k^\perp}(e_{k+1})}{\|p_{F_k^\perp}(e_{k+1})\|}$ .





### Exercice 3.4

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien  $E$ . On se donne  $\mathcal{B}$  une base orthonormale de  $E$  et  $\mathcal{F}$  une base orthonormale de  $F$ . On note enfin  $M$  la matrice de  $\mathcal{F}$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Montrer que la matrice du projecteur orthogonal sur  $F$  dans la base  $\mathcal{B}$  est  $MM^T$ .

### Définition 3.4 Symétrie orthogonale

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Si  $E = F \oplus F^\perp$ , on appelle **symétrie orthogonale** par rapport à  $F$  la symétrie par rapport  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .  
Si  $F$  est un hyperplan de  $E$ , on parle plutôt de **réflexion** par rapport à  $F$ .

**REMARQUE.** La symétrie orthogonale sur  $F$  est notamment définie lorsque  $F$  est de dimension finie.

### Exercice 3.5

Montrer que  $\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^T \end{cases}$  est une symétrie orthogonale pour le produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  défini par  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ .

## 3.3 Distance à un sous-espace vectoriel

**Définition 3.5 Distance à un sous-espace vectoriel**

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel,  $x \in E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de  $E$ . La distance de  $x$  à  $F$  est :

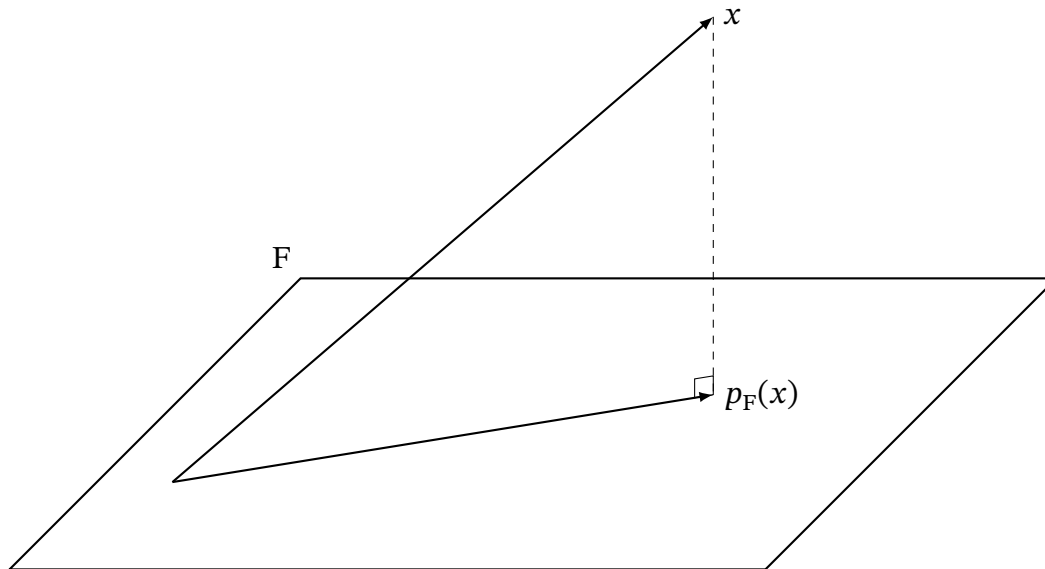
$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

**Proposition 3.5**

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel,  $x \in E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de  $E$ . La distance de  $x$  à  $F$  est atteinte en  $p_F(x)$ , où  $p_F$  désigne la projection orthogonale sur  $F$ . Autrement dit,

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$$

De plus,  $p_F(x)$  est l'unique vecteur  $y$  de  $F$  tel que  $d(x, F) = \|x - y\|$ .



**REMARQUE.** D'après Pythagore, on a :  $\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$ . En particulier, si  $(f_1, \dots, f_n)$  est une base orthonormale de  $F$ ,

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n (x | f_k)^2$$

Cette remarque peut avoir un intérêt pour le calcul pratique de distance.

**REMARQUE.** Puisque  $x - p_F(x) = p_{F^\perp}(x)$ , on a également  $d(x, F) = \|p_{F^\perp}(x)\|$ .

**3.4 Hyperplans****Proposition 3.6 Hyperplans vectoriels**

Soient  $E$  un espace euclidien. Pour  $u \in E$ , on note  $\varphi_u : x \in E \mapsto (u | x)$ . On a donc  $\varphi_u \in E^*$ .

Soit  $n$  un vecteur non nul de  $E$ . Alors  $\text{Ker } \varphi_n$  est l'hyperplan  $\text{vect}(n)^\perp$ .

Réciproquement, soit  $H$  un hyperplan de  $E$  de vecteur normal non nul  $n$ . Alors  $H = \text{Ker } \varphi_n$ .

**Proposition 3.7 Hyperplans affines**

Soient  $E$  un espace euclidien.

Soient  $A$  un point de  $E$ ,  $\vec{n}$  un vecteur non nul de  $E$  et  $k \in \mathbb{R}$ . L'ensemble  $\{M \in E \mid \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = k\}$  est un hyperplan affine de  $E$  de direction  $\text{vect}(\vec{n})^\perp$ .

Réciproquement, soit  $\mathcal{H}$  un hyperplan affine de  $E$  de vecteur normal non nul  $\vec{n}$ . Alors il existe  $A \in E$  et  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathcal{H} = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = k\}$ .

**Corollaire 3.1 Équation d'un hyperplan affine**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et de repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$  où  $O$  est un point de  $E$  et  $\mathcal{B}$  une base orthonormale de  $E$ .

Soit  $\mathcal{H}$  un hyperplan affine de  $E$  de vecteur normal non nul  $\vec{n}$  de coordonnées  $(a_1, \dots, a_n)$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Alors il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathcal{H}$  ait pour équation  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = k$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

Réciproquement, soient  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  non nul et  $k \in \mathbb{R}$ . Alors l'ensemble d'équation  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = k$  dans le repère  $\mathcal{R}$  est un hyperplan affine de vecteur normal le vecteur de coordonnées  $(a_1, \dots, a_n)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Exemple 3.4 Droite affine**

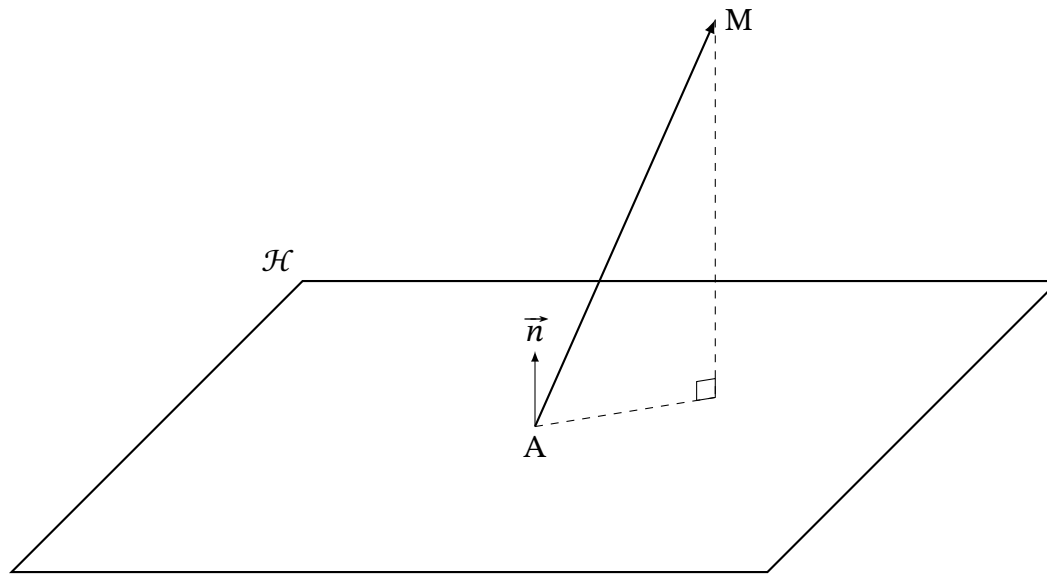
Une partie de  $\mathbb{R}^2$  est une droite affine si et seulement si elle admet une équation du type  $ax + by + c = 0$  avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $(a, b) \neq (0, 0)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $\mathbb{R}^2$  est muni de sa structure euclidienne canonique, alors  $(a, b)$  est un vecteur normal à cette droite.

**Exemple 3.5 Plan affine**

Une partie de  $\mathbb{R}^3$  est un plan affine si et seulement si elle admet une équation du type  $ax + by + cz + d = 0$  avec  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  et  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $\mathbb{R}^3$  est muni de sa structure euclidienne canonique, alors  $(a, b, c)$  est un vecteur normal à ce plan.

**Proposition 3.8 Distance d'un point à un hyperplan affine**

Soit  $E$  un espace euclidien,  $M$  un point de  $E$ ,  $\vec{n}$  un vecteur **unitaire** de  $E$  et  $\mathcal{H}$  l'hyperplan  $A + \text{vect}(\vec{n})^\perp$ . Alors pour tout point  $M$  de  $E$  la distance de  $M$  à  $\mathcal{H}$  est  $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|$ .

**Exemple 3.6**

Pour le produit scalaire usuel, la distance d'un point  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  à la droite d'équation  $ax + by + c = 0$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  est  $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

**Exemple 3.7**

Pour le produit scalaire usuel, La distance d'un point  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  au plan d'équation  $ax + by + cz + d = 0$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est  $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ .

**Proposition 3.9 Orientation induite sur un hyperplan**

Soient  $E$  un espace vectoriel orienté,  $H$  un hyperplan de vecteur normal  $n$  non nul,  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux bases de  $H$ . On note  $\mathcal{B}'_1$  et  $\mathcal{B}'_2$  les concaténations respectives de  $\mathcal{B}_1$  et  $n$  d'une part et  $\mathcal{B}_2$  et  $n$  d'autre part. Alors  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  ont la même orientation si et seulement si  $\mathcal{B}'_1$  et  $\mathcal{B}'_2$  ont la même orientation.

**REMARQUE.** Il n'est pas nécessaire de considérer un vecteur  $n$  normal à  $H$ . Le résultat reste valable pour tout vecteur  $n \notin H$ .

**Orientation induite sur un hyperplan**

L'orientation d'un espace euclidien  $E$  et la donnée d'un vecteur non nul  $n$  normal à un hyperplan  $H$  permet donc d'orienter  $H$ . En décrétant qu'une base de  $H$  sera directe (resp. indirecte) si et seulement si sa concaténation avec  $n$  est une base directe (resp. indirecte) de  $E$ , on définit bien une orientation de  $E$ .

**REMARQUE.** Seul le **sens** de  $n$  importe dans la définition de l'orientation induite.

**Théorème de Riesz**

Soient  $E$  un espace euclidien et  $\varphi \in E^*$ . Alors il existe un unique  $a \in E$  tel que  $\varphi(x) = (a | x)$  pour tout  $x \in E$ .  
Cela revient à montrer que l'application

$$\Phi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E^* \\ a & \longmapsto & (x \in E \mapsto (a | x)) \end{cases}$$

est bijective. On montre facilement que  $\Phi$  est linéaire. Puisque  $E$  est de dimension finie,  $\dim E = \dim E^*$ . Il suffit alors de montrer l'injectivité de  $\Phi$  pour avoir sa bijectivité. Soit donc  $a \in \text{Ker } \Phi$ . Ceci signifie que l'application  $x \in E \mapsto (a | x)$  est nulle. Ainsi  $a \in E^\perp = \{0_E\}$ . Par conséquent,  $\text{Ker } \Phi = \{0_E\}$  de sorte que  $\Phi$  est injective puis bijective.

## 4 Automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales

Dans ce paragraphe  $E$  désigne un **espace euclidien orienté**.

### 4.1 Isométries vectorielles et automorphismes orthogonaux

#### Définition 4.1 Isométrie vectorielle

On appelle **isométrie vectorielle** de  $E$  tout endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  conservant la norme i.e tel que  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ .

#### Proposition 4.1

Une isométrie vectorielle de  $E$  est un automorphisme de  $E$ .

#### Proposition 4.2 Conservation du produit scalaire

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est une isométrie vectorielle si et seulement si il conserve le produit scalaire (i.e.  $\forall (x, y) \in E^2, (u(x) | u(y)) = (x | y)$ ).

**REMARQUE.** C'est pourquoi une isométrie vectorielle est également appelée **automorphisme orthogonal**.

#### Exemple 4.1

Une symétrie est un automorphisme orthogonal si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.



**ATTENTION!** Une projection orthogonale distincte de l'identité n'est pas un automorphisme orthogonal. Ce n'est même pas un automorphisme.

#### Définition 4.2 Groupe orthogonal

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de  $E$  forment un sous-groupe de  $\text{GL}(E)$  appelé **groupe orthogonal** de  $E$  et noté  $O(E)$ .

**Proposition 4.3 Caractérisation par les bases orthonormales**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $u$  est un automorphisme orthogonal.
- (ii) L'image par  $u$  d'une base orthonormale de  $E$  est une base orthonormale de  $E$ .

**Proposition 4.4 Sous-espaces stables**

Soient  $u \in O(E)$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Si  $F$  est stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $u$ .

**Définition 4.3 Automorphismes orthogonaux positifs et négatifs**

Soit  $u \in O(E)$ . Si  $\det u > 0$ , alors on dit que  $u$  est un **automorphisme orthogonal positif**; si  $\det u < 0$ , on dit que  $u$  est un **automorphisme orthogonal négatif**. On parle également d'**isométries vectorielles directes ou indirectes**.

**Proposition 4.5**

Une réflexion est un automorphisme orthogonal négatif.

**Exercice 4.1**

Soit  $E$  un espace euclidien. Montrer que  $O(E)$  est engendré par les réflexions.

**Définition 4.4 Groupe spécial orthogonal**

L'ensemble des automorphismes orthogonaux positifs de  $E$  forment un sous-groupe de  $O(E)$  appelé **groupe spécial orthogonal** de  $E$  et noté  $SO(E)$ .

**Proposition 4.6 Caractérisation par les bases orthonormales directes**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $u$  est un automorphisme orthogonal positif.
- (ii) L'image par  $u$  d'une base orthonormale directe de  $E$  est une base orthonormale directe de  $E$ .

**REMARQUE.** Le caractère positif ou négatif d'un automorphisme orthogonal ne dépend pas de l'orientation puisque le déterminant d'un endomorphisme est indépendant de la base.

**4.2 Matrices orthogonales****Définition 4.5 Matrice orthogonale**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On dit que  $A$  est orthogonale si  $AA^T = A^T A = I_n$ .

**REMARQUE.** En pratique, il suffit de vérifier  $AA^T = I_n$  ou  $A^T A = I_n$ .

**REMARQUE.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  orthogonale. Alors  $A$  est inversible et  $A^{-1} = A^T$ . De plus,  $\det(A) = \pm 1$ .

#### Proposition 4.7

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors  $A$  est une matrice orthogonale si et seulement si la famille de ses colonnes (resp. de ses lignes) forment une base orthonormale pour le produit scalaire usuel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ ).

#### Définition 4.6 Groupe orthogonal

L'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  forment un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  appelé **groupe orthogonal** d'ordre  $n$  et noté  $O(n)$  ou  $O_n(\mathbb{R})$ .

#### Proposition 4.8 Caractérisation matricielle des bases orthonormales

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormale de  $E$  et  $\mathcal{F}$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$  où  $n = \dim E$ . Alors  $\mathcal{F}$  est une base orthonormale de  $E$  si et seulement si  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$  est une matrice orthogonale.

**REMARQUE.** Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont deux bases orthonormées, on a donc  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \pm 1$ .

#### Proposition 4.9 Caractérisation matricielle des automorphismes orthogonaux

Un endomorphisme de  $E$  est un automorphisme orthogonal si et seulement si sa matrice dans une **base orthonormale** de  $E$  est orthogonale.

**REMARQUE.** Si  $u$  est un automorphisme orthogonal, on a donc  $\det(u) = \pm 1$ . Plus précisément, si  $u$  est un automorphisme orthogonal positif, alors  $\det(u) = +1$  et si  $u$  est un automorphisme orthogonal négatif,  $\det(u) = -1$ .

#### Exemple 4.2

Soient  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  de matrice  $A$  dans une base orthonormale.  $f$  est une symétrie orthogonale si et seulement si deux des trois conditions suivantes sont réalisées :

- (i)  $A^T A = I_n$ .
- (ii)  $A^2 = I_n$ .
- (iii)  $A^T = A$ .

#### Décomposition QR

L'interprétation matricielle de la méthode de Gram-Schmidt est que toute matrice  $A$  de  $GL_n(\mathbb{R})$  peut s'écrire  $A = QR$  où  $A$  est une matrice orthogonale et  $R$  une matrice triangulaire supérieure. En effet, il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$  où  $\mathcal{B}_0$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Le procédé de Gram-Schmidt permet l'obtention d'une base orthonormale (pour le produit scalaire usuel)  $\mathcal{B}'$  à partir de  $\mathcal{B}$ . En posant  $Q = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}')$  et  $R = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ , on a donc  $A = QR$ . Comme  $\mathcal{B}_0$  et  $\mathcal{B}'$  sont orthonormales,  $Q$  est orthogonale. Enfin, si on note  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ , le procédé de Gram-Schmidt assure que pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\text{vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{vect}(f_1, \dots, f_p)$ . En particulier, pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $e_p \in \text{vect}(f_1, \dots, f_p)$  ce qui assure que  $R$  est triangulaire supérieure.

**Définition 4.7**

Soit  $A \in O(n)$ . Si  $\det(A) > 0$ , on dit que  $A$  est **orthogonale positive**; si  $\det(A) < 0$ , on dit que  $M$  est **orthogonale négative**.

**REMARQUE.** Si  $A$  est orthogonale positive,  $\det(A) = 1$ .  
Si  $A$  est orthogonale négative,  $\det(A) = -1$ .

**Définition 4.8 Groupe spécial orthogonal**

L'ensemble des matrices orthogonales positives de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $O(n)$  appelé **groupe spécial orthogonal** d'ordre  $n$  et noté  $SO(n)$  ou  $SO_n(\mathbb{R})$ .

**Proposition 4.10 Caractérisation des bases orthonormales directes**

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormale directe de  $E$  et  $\mathcal{F}$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$  où  $n = \dim E$ . Alors  $\mathcal{F}$  est une base orthonormale directe de  $E$  si et seulement si  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$  est une matrice orthogonale positive.

**Définition 4.9 Produit mixte**

$\det_{\mathcal{B}}$  ne dépend pas de la base **orthonormale directe**  $\mathcal{B}$  de  $E$  choisie. Si  $\dim E = n$ , alors pour  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ , on appelle **produit mixte** du  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  le déterminant de  $(x_1, \dots, x_n)$  dans une base orthonormale directe quelconque de  $E$ . On le note  $[x_1, \dots, x_n]$ .

**Interprétation géométrique**

Si  $\dim E = 2$ , alors pour tout  $(x_1, x_2) \in E^2$ ,  $[x_1, x_2]$  est l'aire orientée du parallélogramme porté par les vecteurs  $x_1$  et  $x_2$ .  
Si  $\dim E = 3$ , alors pour tout  $(x_1, x_2, x_3) \in E^3$ ,  $[x_1, x_2, x_3]$  est le volume orienté du parallélépipède porté par les vecteurs  $x_1, x_2$  et  $x_3$ .  
De manière générale,  $[x_1, \dots, x_n]$  est le «volume orienté» du parallélotope porté par les vecteurs  $x_1, \dots, x_n$ .

**REMARQUE.** Soient  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ ,

$$[f(x_1), \dots, f(x_n)] = \det(f)[x_1, \dots, x_n]$$

Appliquer un endomorphisme à un parallélotope revient donc à multiplier son «volume orienté» par le déterminant.

**Produit vectoriel**

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien orienté de dimension  $n \geq 2$ . Soit  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in E^{n-1}$ .

L'application  $\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto [x_1, \dots, x_{n-1}, x] \end{cases}$  est une forme linéaire sur  $E$ . D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur appelé **produit vectoriel** des vecteurs  $x_1, \dots, x_{n-1}$  noté  $x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$  tel que  $\forall x \in E, \varphi(x) = (x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} | x)$ .

L'application  $\begin{cases} E^{n-1} & \longrightarrow E \\ (x_1, \dots, x_{n-1}) & \longmapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \end{cases}$  est une application  $n-1$  linéaire alternée.

Le produit vectoriel de  $n-1$  vecteurs est orthogonal à chacun de ces vecteurs.



**Proposition 4.11 Caractérisation des automorphismes orthogonaux positifs**

Un endomorphisme de  $E$  est un automorphisme orthogonal positif si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale de  $E$  est orthogonale positive.

**5 Automorphismes orthogonaux du plan et de l'espace****5.1 Automorphismes orthogonaux du plan vectoriel euclidien**

Dans ce paragraphe,  $E$  désigne un espace vectoriel euclidien **orienté de dimension 2**.

**Proposition 5.1**

$O(2)$  est l'ensemble des matrices de la forme  $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  et  $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .  
 $SO(2)$  est l'ensemble des matrices  $R(\theta)$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .

**Proposition 5.2**

$\forall(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2, R(\theta)R(\varphi) = R(\varphi)R(\theta) = R(\theta + \varphi)$ .

**REMARQUE.** L'application  $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \theta & \longmapsto R(\theta) \end{cases}$  est un morphisme de groupes de noyau  $2\pi\mathbb{Z}$  et d'image  $SO(2)$ . Comme  $(\mathbb{R}, +)$  est un groupe commutatif, on en déduit que  $(SO(2), \times)$  et  $(SO(E), \circ)$  (si  $\dim E = 2$ ) sont des groupes commutatifs.

**REMARQUE.** L'application  $\begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ z & \longmapsto M(z) \end{cases}$  où  $M(z) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z) & -\operatorname{Im}(z) \\ \operatorname{Im}(z) & \operatorname{Re}(z) \end{pmatrix}$  est un morphisme injectif de  $\mathbb{R}$ -algèbres. Elle induit un isomorphisme de groupes de  $\mathbb{U}$  sur  $SO(2)$ . A nouveau, comme  $(\mathbb{U}, \times)$  est un groupe commutatif, on en déduit que  $(SO(2), \times)$  et  $(SO(E), \circ)$  (si  $\dim E = 2$ ) sont des groupes commutatifs.

**Définition 5.1 Rotation**

Soit  $u \in SO(E)$ . Alors il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que la matrice de  $u$  dans toute base orthonormale directe de  $E$  soit  $R(\theta)$ . On appelle alors  $u$  la **rotation (vectorielle) d'angle  $\theta$** .

**REMARQUE.**  $SO(E)$  est donc le groupe (commutatif) des rotations de  $E$ .

**REMARQUE.** L'angle d'une rotation est défini modulo  $2\pi$ .

**REMARQUE.** Si l'on change l'orientation de  $E$ , la rotation d'angle  $\theta$  devient la rotation d'angle  $-\theta$ .

**Proposition 5.3 Classification des automorphismes orthogonaux via le déterminant**

Soit  $u \in O(E)$ .

- Si  $\det(u) = +1$ , alors  $u$  est une rotation.
- Si  $\det(u) = -1$ , alors  $u$  est une réflexion i.e. une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

**REMARQUE.** Il n'existe donc que **deux** types d'isométries vectorielles du plan.

**Exercice 5.1**

On se place dans un plan euclidien. Montrer que la composée de deux réflexions est une rotation et que toute rotation peut s'écrire comme la composée de deux réflexions.

**Proposition 5.4 Classification des automorphismes orthogonaux via les vecteurs invariants**

Soit  $u \in O(E)$ . Notons  $F = \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ .

- Si  $\dim F = 0$ , alors  $u$  est une rotation d'angle non nul (modulo  $2\pi$ ).
- Si  $\dim F = 1$ , alors  $u$  est une réflexion.
- Si  $\dim F = 2$ , alors  $u = \text{Id}_E$ .

**REMARQUE.** La matrice d'une réflexion dans une base orthonormale directe (ou indirecte) est de la forme  $S(\theta)$ ,  $\theta$  dépendant de la base choisie (contrairement aux rotations). De plus, il existe une base orthonormale (directe si on le souhaite) de  $E$  dans laquelle la matrice d'une réflexion est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Proposition 5.5**

Soient  $r$  une rotation d'angle  $\theta$  et  $u$  un vecteur unitaire. Alors  $\cos \theta = (u | r(u))$  et  $\sin \theta = [u, r(u)]$ .

**Méthode Déterminer l'axe d'une réflexion connaissant sa matrice**

Soit  $s$  une réflexion de matrice  $S$  dans une base orthonormale  $\mathcal{B}$ . L'axe de  $s$  est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants. Pour le déterminer, il suffit de résoudre  $SX = X$ .

**Exercice 5.2**

Soit  $s$  une réflexion de matrice  $S(\theta)$  dans une base orthonormée  $(e_1, e_2)$  d'un espace euclidien de dimension 2. Déterminer l'axe de  $s$ .

**Définition 5.2 Angle de vecteurs**

Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs non nuls de  $E$ . Posons  $u' = \frac{u}{\|u\|}$  et  $v' = \frac{v}{\|v\|}$ . Il existe une unique rotation  $r$  telle que  $r(u') = v'$ . On appelle angle de vecteurs  $(u, v)$  l'angle de cette rotation  $r$  (défini modulo  $2\pi$ ).

**REMARQUE.** Si l'on change l'orientation de  $E$ , les angles sont changés en leurs opposés.

**Proposition 5.6 Relation de Chasles**

Pour tous vecteurs  $u, v, w$  de  $E$  non nuls,  $(u, v) + (v, w) = (u, w)$ .

**Proposition 5.7 Lien avec le produit scalaire et le produit mixte**

Pour tous vecteurs  $u, v$  non nuls de  $E$  :

$$(u \mid v) = \|u\| \|v\| \cos(u, v)$$

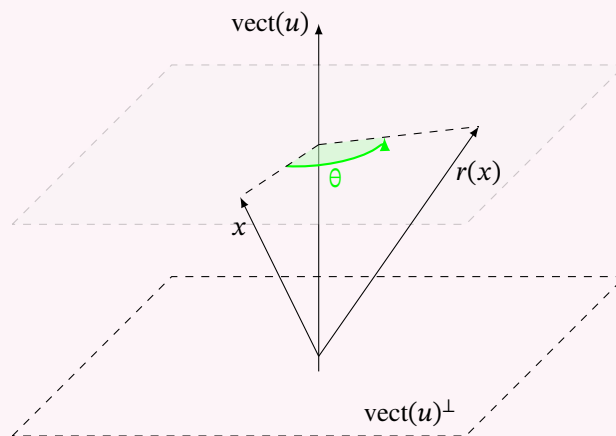
$$[u, v] = \|u\| \|v\| \sin(u, v)$$

**Exercice 5.3**

Montrer que les rotations conservent les angles orientés et que les réflexions changent les angles orientés en leurs opposés.

**5.2 Automorphismes orthogonaux de l'espace vectoriel euclidien (hors programme)**

Dans ce paragraphe,  $E$  désigne un espace vectoriel euclidien **orienté** de dimension 3.

**Définition 5.3 Rotation**

Soient  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $u$  un vecteur non nul de  $E$ . On appelle **rotation (vectorielle) d'angle  $\theta$  et d'axe orienté par  $u$**  l'endomorphisme laissant les vecteurs de  $\text{vect}(u)$  invariants et induisant une rotation d'angle  $\theta$  dans le plan  $\text{vect}(u)^\perp$  dont l'orientation est induite par celle de  $\text{vect}(u)$ .

**REMARQUE.** Si  $u$  et  $u'$  sont deux vecteurs non nuls, colinéaires et de même sens, les rotations d'axes orientés par  $u$  et  $u'$  et de même angle  $\theta$  sont identiques.

Si  $u$  et  $u'$  sont deux vecteurs non nuls, colinéaires et de sens contraire, la rotation d'axe orienté par  $u$  et d'angle  $\theta$  et la rotation d'axe orienté par  $u'$  et d'angle  $-\theta$  sont identiques.

**Proposition 5.8 Matrice d'une rotation**

La matrice de la rotation d'angle  $\theta$  et d'axe orienté par  $u$  dans une base orthonormale directe adaptée à la décomposition

de premier vecteur colinéaire et de même sens que  $u$  est  $R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

**Définition 5.4 Anti-rotation**

Soient  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $u$  un vecteur non nul de  $E$ . On appelle **anti-rotation** d'angle  $\theta$  et d'axe orienté par  $u$  la composée commutative de la rotation d'angle  $\theta$  et d'axe orienté par  $u$  et de la réflexion par rapport au plan  $\text{vect}(u)^\perp$ .

**Proposition 5.9 Matrice d'une anti-rotation**

La matrice d'une anti-rotation d'angle  $\theta$  et d'axe orienté par  $u$  dans une base orthonormale directe de premier vecteur colinéaire et de même sens que  $u$  est  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

**REMARQUE.** L'anti-rotation d'angle  $\theta$  et d'axe orienté par  $u$  est également la composée de la rotation d'angle  $\theta + \pi$  et d'axe orienté par  $u$  et de  $-\text{Id}_E$ .

Autrement dit,  $r$  est l'anti-rotation d'angle  $\theta$  et d'axe orienté par  $u$  si et seulement si  $-r$  est la rotation d'angle  $\theta + \pi$  et d'axe orienté par  $u$ .

**REMARQUE.** Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est une rotation d'axe cette droite et d'angle  $\pi$  (peut importe l'orientation).

A nouveau, on peut classifier les automorphismes orthogonaux de  $E$  suivant la dimension du sous-espace des vecteurs invariants.

**Proposition 5.10 Classification des automorphismes orthogonaux**

Soit  $f \in O(E)$ . Notons  $F = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ .

- Si  $\dim F = 0$ , alors  $f$  est une anti-rotation.
- Si  $\dim F = 1$ , alors  $f$  est une rotation d'angle non nul.
- Si  $\dim F = 2$ , alors  $f$  est une réflexion.
- Si  $\dim F = 3$ , alors  $f = \text{Id}_E$ .

On peut également classifier les automorphismes orthogonaux de  $E$  suivant leur caractère positif ou négatif.

**Proposition 5.11 Classification des automorphismes orthogonaux**

Soit  $f \in O(E)$ .

- Si  $\det(f) = +1$ ,  $f$  est une rotation.
- Si  $\det(f) = -1$ , alors  $f$  est une réflexion ou une anti-rotation.

**Méthode Déterminer l'image d'un vecteur par une rotation d'axe et d'angle donnés**

Soit  $r$  une rotation d'angle  $\theta$  d'axe orienté par  $u$ . On suppose  $u$  unitaire. Soit  $x$  un vecteur de  $E$ . On veut déterminer  $r(x)$ .

- On calcule la projection orthogonale  $y$  de  $x$  sur  $\text{vect}(u)$  :  $y = (x | u)u$ . On a alors  $z = x - y \in \text{vect}(u)^\perp$ .
- On calcule l'image de  $z$  :  $r(z) = (\cos \theta)z + (\sin \theta)u \wedge z$ .
- On a alors  $r(x) = y + r(z)$ .

**Méthode Déterminer la matrice d'une rotation d'axe et d'angle donnés**

Soit  $r$  une rotation d'angle  $\theta$  orienté par  $u$ . On suppose  $u$  unitaire. On veut déterminer la matrice  $M$  de  $r$  dans la base canonique.

**Méthode n°1** On note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . La méthode précédente nous permet de calculer  $r(e_1)$ ,  $r(e_2)$  et  $r(e_3)$ . On peut aussi remarquer que  $r(e_3) = r(e_1) \wedge r(e_2)$ . Les colonnes de  $M$  sont les vecteurs colonnes représentant  $r(e_1)$ ,  $r(e_2)$  et  $r(e_3)$  dans la base canonique.

**Méthode n°2** On détermine  $v, w$  tels que  $(u, v, w)$  soient une base orthonormale directe : il suffit de choisir  $v$  orthogonal à  $u$  et de poser  $w = u \wedge v$ . La matrice de  $r$  dans la base  $(u, v, w)$  est  $R(\theta)$ . Si on note  $P$  la matrice de la base  $(u, v, w)$  dans la base canonique, alors la matrice recherchée est  $PR(\theta)P^{-1} = PR(\theta)P^T$ .

**Exercice 5.4**

Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et d'axe dirigé par  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Méthode Déterminer l'axe et l'angle de la rotation associée à une matrice de  $SO(3)$** 

Soit  $r$  une rotation de matrice  $R$  dans une base orthonormale directe  $\mathcal{B}$ .

**Méthode n°1**

- On cherche d'abord un vecteur directeur  $u$  de l'axe en résolvant  $RX = X$ .
- On détermine un vecteur  $v$  non nul et orthogonal à  $u$ .
- On détermine le vecteur  $r(v)$  grâce à  $R$ .
- On a alors  $\cos \theta = \frac{(v | r(v))}{\|v\|^2}$ .
- On détermine  $\theta$  grâce au signe de  $\sin \theta$  : on remarque que  $[u, v, r(v)] = \|u\|\|v\|^2 \sin \theta$  ou que  $v \wedge r(v) = \|v\|^2(\sin \theta) \frac{u}{\|u\|}$ .

**Méthode n°2**

- On cherche d'abord un vecteur directeur  $u$  de l'axe en résolvant  $RX = X$ .
- $R$  et  $R(\theta)$  sont la matrice de  $r$  dans des bases différentes donc  $\text{tr}(R(\theta)) = \text{tr}(R)$  i.e.  $1 + 2 \cos \theta = \text{tr}(R)$ . On en déduit  $\cos \theta$ .
- On détermine  $\theta$  grâce au signe de  $\sin \theta$ . Le signe de  $\sin \theta$  est le même que celui de  $[u, x, r(x)]$  où  $x$  est un vecteur quelconque de  $E$  : en pratique, on prend un vecteur de la base canonique.

**Exercice 5.5**

Soit  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Vérifier que  $A \in SO(3)$ .
2. Déterminer l'axe et l'angle de la rotation associée à  $A$ .

**Méthode** Déterminer le plan d'une réflexion connaissant sa matrice

Soit  $s$  une réflexion de matrice  $S$  dans une base orthonormale directe  $\mathcal{B}$ . Le plan par rapport auquel on effectue la réflexion est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par  $s$ . Pour le déterminer, il suffit de résoudre  $SX = X$ .

**Proposition 5.12 Composée de réflexions**

- (i) La composée de la réflexion de plan  $P_1$  suivie de la réflexion de plan  $P_2$  (avec  $P_1 \neq P_2$ ) est la rotation d'axe  $D = P_1 \cap P_2$  d'angle  $2\theta$  avec  $\theta \equiv (D_1, D_2)[\pi]$  où  $D_1 = P_1 \cap D^\perp$  et  $D_2 = P_2 \cap D^\perp$  (l'orientation de  $D^\perp$  étant induite par l'orientation de  $D$ ).
- (ii) Toute rotation d'axe  $D$  peut s'écrire comme le produit de deux réflexions de plans contenant  $D$ , l'un des plans pouvant être choisi arbitrairement.