Semaine du 17/04 au 21/04

1 Cours

Dérivabilité

Définition et premières propriétés Définition comme limite du taux de variation. Équation de la tangente. Fonction dérivée. Opérations sur les dérivées (somme, produit, quotient, composée, application réciproque).

Étude globale des fonctions dérivables Condition nécessaire d'extremum local. Théorème de Rolle. Théorèmes d'égalité et d'inégalité des accroissements finis. Une fonction dérivable à dérivée bornée est lipschitzienne. Application aux suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$. Dérivée et sens de variation. Théorème de la limite de la dérivée.

Dérivées successives Dérivée $n^{\text{ème}}$. Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$. Opérations sur les dérivées successives (somme, produit, quotient, composée, application réciproque). Formule de Leibniz. Théorème de prolongement $\mathcal{C}^k$. Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange.

Fonctions à valeurs complexes Définition de la dérivabilité. Une fonction est dérivable/$\mathcal{C}^k$ **si et seulement si** ses parties réelle et imaginaire le sont. Inégalité des accroissements finis lorsque le module de la dérivée est majorée.

2 Méthodes à maîtriser

- Démontrer qu'une fonction est dérivable ou de classe $\mathcal{C}^n$ par opérations.
- Établir des inégalités via les accroissements finis.
- Étudier la convergence d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est K-lipschitzienne avec $K \in [0, 1[$.
- Utiliser la formule de Leibniz dans le cas où un des facteurs est un polynôme de faible degré.
- Utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange pour prouver la convergence de séries (sommes infinies).

3 Démonstrations classiques

- Montrer que $f : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto e^{-\frac{1}{t}}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.
- Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$ à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- Montrer que si f est n fois dérivable sur un intervalle I (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et s'annule $n + 1$ fois sur I, alors $f^{(n)}$ s'annule sur I.
- Démontrer la formule de Taylor avec reste intégral : si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$, alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$