INTERROGATION ÉCRITE N°08

NOM : Prénom : Note :

1. Justifier que $x \mapsto \arctan x$ est développable en série entière et donner ce développement en série entière ainsi que son rayon de convergence.

   On sait que $\sum(-1)^n x^{2n}$ *est de rayon de convergence* 1 *(série géométrique) et que*

   $$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$$

   On peut primitiver terme à terme cette série entière sur l'intervalle ouvert de convergence

   $$\forall x \in]-1,1[,\ \arctan(x) = \arctan(0) + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

   et on sait que le développement en série entière est de même rayon de convergence que le précédent, à savoir 1. ■

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n\cos(n)z^n$.

   Notons R *le rayon de convergence recherché. On sait que* $\sum n\cos(n)z^n$ *est de même rayon de convergence que* $\sum \cos(n)z^n$. *Or* $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée donc* $\mathrm{R} \geq 1$. *Mais elle ne converge pas vers* 0 *donc* $\mathrm{R} \leq 1$. *Finalement* $\mathrm{R} = 1$. ■

3. On lance une infinité de fois une pièce équilibrée, les lancers étant supposés indépendants. Déterminer rigoureusement la probabilité de n'obtenir que des «face».

   Notons F_n *l'événement «on a obtenu un face au* $n^{\text{ème}}$ *lancer». L'événement dont on recherche la probabilité est* $\mathrm{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\mathrm{F}_n$. *Posons* $\mathrm{A}_n = \bigcap_{k=1}^{n}\mathrm{F}_k$. *Alors* $\mathrm{A}_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\mathrm{A}_n$ *et la suite* (A_n) *est clairement décroissante. Ainsi, par continuité décroissante,*

   $$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$$

   Par indépenance des événement F_n,

   $$\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{F}_k) = \frac{1}{2^n}$$

   On en déduit que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 0$. ■

4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramétre p. On suppose $\frac{1}{2} < p \leq 1$. Justifier que $Y = 2^X$ admet une espérance finie et la calculer.

D'après la formule de transfert, Y *admet une espérance finie si et seulement si la série* $\sum 2^n \mathbb{P}(X = n)$ *converge. Mais pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n \mathbb{P}(X = n) = 2^n q^{n-1} p = 2(2q)^{n-1} p$ *avec* $0 \leq q = 1 - p < \frac{1}{2}$. *Ainsi* $0 \leq 2q < 1$ *donc la série géométrique* $\sum 2(2q)^{n-1} p$ *converge. D'après la formule de transfert,*

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2p(2q)^{n-1} = 2p \sum_{n=0}^{+\infty} (2q)^n = \frac{2p}{1-2q} = \frac{2p}{2p-1}$$

■

5. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est la probabilité que X soit paire ?

$$\mathbb{P}(X \in 2\mathbb{N}) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{X = 2n\}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = e^{-\lambda} \operatorname{ch}(\lambda) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}$$

■

6. On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$. Justifier que f est définie et continue sur $]-1, 1]$.

Le rayon de convergence de $\sum \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$ *est* 1 *(en utilisant la règle de d'Alembert par exemple). On sait donc que* f *est définie et continue sur* $]-1, 1[$.
Soit $x \in [0, 1]$. *La suite de terme général* $\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ *est décroissante et de limite nulle donc* $\sum \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$ *converge d'après le critère spécial des séries alternées. En posant* $f_n : \mapsto \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$, $\sum f_n$ *converge simplement vers* f *sur* $[0, 1]$ *donc* f *est définie sur* $[0, 1]$ *et donc finalement sur* $]-1, 1]$. *Toujours d'après le critère spécial des séries alternées,*

$$\forall x \in [0, 1], \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

puis, en posant $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$,

$$\|R_n\|_{\infty,[0,1]} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} \|R_n\|_{\infty,[0,1]} = 0$ *i.e.* (R_n) *converge uniformément vers la fonction nulle sur* $[0, 1]$. *On en déduit que* $\sum f_n$ *converge uniformément vers* f *sur* $[0, 1]$. *Comme chaque* f_n *est continue sur* $[0, 1]$, f *est continue sur* $[0, 1]$. *Finalement,* f *est définie et continue sur* $]-1, 1]$. ■