Semaine du 15/06 au 19/06

1 Cours

Probabilités

Expérience aléatoire Univers, issue, événement, événement élémentaire, événement contraire, événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.

Espaces probabilisés finis Probabilité. Définition et propriétés. Probabilité uniforme.

Probabilités conditionelles Définition. Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formule de Bayes.

Evénements indépendants Couple d'événements indépendants. Famille d'événements mutuellement indépendants.

Variable aléatoire Définition. Loi. Lois usuelles : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.

Couples et n-uplets de variables aléatoires Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle. Extension aux n-uplets de variables aléatoires. Couples de variables aléatoires indépendantes. Variables aléatoires mutuellement indépendantes. Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Espérance, covariance, variance Définition et propriétés de l'espérance. Espérance des lois usuelles. Formule de transfert. Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Définition et propriétés de la covariance. La covariance de deux variables indépendantes est nulle. Variance et écart-type : définition et propriétés. Variance des lois usuelles.

Inégalités Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2 Méthodes à maîtriser

- Modéliser une expérience aléatoire à l'aide d'événements et de variables aléatoires.
- Partitionner un événement pour en calculer la probabilité.
- Calculer les lois marginales à partir de la loi conjointe.
- Utiliser la formule de transfert pour calculer l'espérance de l'image d'une variable aléatoire.
- Calculer la variance d'une variable aléatoire à l'aide de la formule de transfert.
- Appliquer la formule des probabilités totales à un système complet d'événements, typiquement $\{X = x\}_{x \in X(\Omega)}$ où X est une variable aléatoire. Application aux chaînes de Markov.

3 Questions de cours

- **BCCP 95** Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.
  1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées. On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
     (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
     (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
  2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
     (a) Déterminer la loi de X.
     (b) Déterminer la loi de Y.
- **BCCP 98** Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0;1[$). Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.
  1. Donner la loi de X. Justifier.
  2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
     (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = k \mid X = i)$.

(b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$

(c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

- **BCCP 99**

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Prouver que :
$$\forall \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{V}(Y_1)}{na^2}$$
3. Application. On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. A partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du ième tirage.

- **BCCP 102** Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer $\mathbb{P}(X_i \leq n)$, puis $\mathbb{P}(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leq i \leq N}(X_i)$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(Y > n)$.
   En déduire $\mathbb{P}(Y \leq n)$, puis $\mathbb{P}(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

- **BCCP 104** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3. On lance simultanément les n boules. Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X = 2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. (a) Calculer $\mathbb{E}(X)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X)$. Interpréter ce résultat.

- **BCCP 106**

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut 1/2.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $lim_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

- **BCCP 107** On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement «la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche» et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ p_{n+1} = \frac{4}{7} - \frac{6}{35} p_n$$
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

- **BCCP 109** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

  1. Déterminer la loi de X.
  2. Déterminer la loi de Y.