

# DEVOIR À LA MAISON N°17

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1

**1** 1.a D'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

1.b D'après la question précédente,  $a_n^* = \alpha$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1.c Comme  $\alpha$  n'est pas nul, les séries  $\sum a_n$  et  $\sum a_n^*$  sont grossièrement divergentes.

**2** 2.a Toujours d'après la formule du binôme,

$$a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k = \frac{1}{2^n} (z+1)^n$$

2.b 2.b.i La série  $\sum a_n$  est une série géométrique de raison  $z$  avec  $|z| < 1$  : elle converge. De plus,  $A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ .

2.b.ii La série  $\sum a_n^*$  est à nouveau une série géométrique de raison  $\frac{1}{2}(z+1)$ . Par inégalité triangulaire  $|z+1| \leq |z| + 1 < 2$  de sorte que  $\left| \frac{1}{2}(z+1) \right| < 1$ . La série  $\sum a_n^*$  converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}} = \frac{2}{1-z} = 2A(z)$$

2.c 2.c.i La série  $\sum a_n$  diverge grossièrement.

2.c.ii Si  $z = -2$ , alors  $a_n^* = \frac{(-1)^n}{2^n}$ . La série  $\sum a_n^*$  est alors une série géométrique convergente puisque  $|-1/2| = 1/2 < 1$ .

2.c.iii Par la méthode de l'arc-moitié

$$\frac{z+1}{2} = \frac{e^{i\theta} + 1}{2} = e^{\frac{i\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Comme  $0 < |\theta| < \pi$ ,

$$\left| \frac{z+1}{2} \right| = \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| < 1$$

donc la série géométrique  $\sum a_n^*$  converge. Par ailleurs, toujours par la méthode de l'arc-moitié

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{1}{1 - \frac{e^{i\theta} + 1}{2}} = \frac{2}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1}{-ie^{i\theta/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{ie^{-\frac{i\theta}{2}}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 1 + i \cotan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

**3** 3.a 3.a.i Comme  $k$  est fixé

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (n-j) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

**3.a.ii** D'après la question précédente

$$\frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n^k}{2^n}$$

Par croissances comparées,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} = 0$ .

**3.b** Chacun des termes de la somme  $S_q(n, a)$  tend vers 0 d'après la question précédente et  $q$  est fixé donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_q(n, a) = 0$ .

**3.c** Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Comme  $(a_n)$  converge vers 0, il existe  $q \in \mathbb{N}$  tel que pour tout entier  $n > q$ ,  $|a_n| \leq \varepsilon/2$ . Mais comme la suite de terme général  $S_q(n, a)$  converge vers 0, il existe  $N \geq q$  tel que pour tout entier  $n \geq N$ ,  $|S_q(n, a)| \leq \varepsilon/2$ . Alors pour  $n \geq N$ ,

$$\begin{aligned} |a_n^*| &= \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \right| \\ &\leq |S_q(n, a)| + \frac{1}{2^n} \sum_{k=q+1}^n \binom{n}{k} |a_k| \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{1}{2^n} \sum_{k=q+1}^n \binom{n}{k} \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \right) \quad \text{par positivité des coefficients binomiaux} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{d'après la question 1.a} \end{aligned}$$

Par définition de la limite,  $(a_n^*)$  converge vers 0.

**3.d** Posons  $b_n = a_n - \ell$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par linéarité (évidente ?) de l'application  $u \mapsto u^*$  et d'après la question 1.b

$$b_n^* = a_n^* - \ell$$

Comme  $(b_n)$  converge vers 0,  $(b_n^*)$  converge également vers 0 d'après la question précédente de sorte que  $(a_n^*)$  converge vers  $\ell$ .

**3.e** Dans la question 2.c.ii, on a montré que lorsque  $a_n = (-2)^n$ , alors  $a_n^* = (-1/2)^n$ . La suite  $(a_n^*)$  peut converger sans que la suite  $(a_n)$  converge.

**4** **4.a** On trouve

$$U_0 = S_0 \quad U_1 = 2S_0 + S_1 \quad U_2 = S_2 + 3S_1 + 3S_0 \quad U_3 = S_3 + 4S_2 + 6S_1 + 4S_0$$

**4.b 4.b.i** On peut conjecturer que

$$U_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k$$

**4.b.ii** La relation  $(\mathcal{E})$  est vraie pour  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Supposons la vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Remarquons d'abord que

$$U_{n+1} = 2^{n+1} T_{n+1} = 2^{n+1} (T_n + a_{n+1}^*) = 2U_n + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k$$

Suivant l'indication de l'énoncé,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (S_k - S_{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k - \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k \quad \text{en réindexant et car } S_{-1} = 0 \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left( \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right) S_k \end{aligned}$$

En utilisant maintenant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
 U_{n+1} &= 2U_n + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k \\
 &= 2 \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k + \sum_{k=0}^{n+1} \left( \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right) S_k \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \left( \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} \right) S_k \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+2}{k+1} S_k \quad \text{d'après la formule du triangle de Pascal}
 \end{aligned}$$

La relation  $(\mathcal{E})$  est donc établie par récurrence.

**4.c** Remarquons qu'avec la convention  $S_{-1} = 0$ ,

$$T_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} U_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} S_k = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{k-1}$$

En notant  $s_n = S_{n-1}$ , on a donc  $T_{n-1} = 2s_n^*$ . Notons  $S$  la série de la série  $\sum a_n$ . Alors  $(s_n)$  converge vers  $S$  et, d'après la question **3.d**,  $(s_n^*)$  converge également vers  $S$ . Ainsi  $(T_{n-1})$  converge vers  $2S$ . La série  $\sum a_n^*$  converge donc bien et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

**4.d** L'exemple de la question **2.c.ii** montre que  $\sum a_n$  peut diverger alors que  $\sum a_n^*$  converge.

**5** **5.a** D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{x^n}{(n+1)!}$  est infini. On en déduit que  $f$  est définie, continue et même de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

**5.b** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = e^x - 1$$

**5.c** On en déduit que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$e^{-x}f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**6** **6.a** On a clairement  $\sigma_n \leq n$  donc

$$0 \leq \frac{\sigma_n}{n!} \leq \frac{1}{(n-1)!}$$

Comme la série entière  $\sum \frac{x^n}{(n-1)!}$  est de rayon de convergence infini par la règle de d'Alembert, il en est de même de la série entière  $\sum \frac{\sigma_n x^n}{n!}$ . Ainsi  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . A fortiori, elle est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**6.b** Comme  $g$  est définie par une série entière de rayon de convergence infini, on obtient sa dérivée sur  $\mathbb{R}$  en dérivant terme à terme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_{n+1} x^n}{n!}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) - g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sigma_{n+1} - \sigma_n) x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = f(x)$$

**6.c** On pourrait résoudre l'équation différentielle  $y' - y = f$ . On peut aussi remarquer qu'en posant  $h(x) = e^{-x}g(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = e^{-x}(g'(x) - g(x)) = e^{-x}f(x)$$

Sachant que  $h(0) = g(0) = 0$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \int_0^x h'(t) dt = \int_0^x e^{-t} f(t) dt$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt$$

**7** **7.a** D'après la question **5.c**,

$$e^{-x}f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Or  $e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$  donc

$$e^{-x}f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{n-1}}{n!}$$

On peut primitiver terme à terme cette série entière de rayon de convergence infini

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x e^{-t}f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n \cdot n!}$$

**7.b** Rappelons que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_n x^n}{n!} \quad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n \cdot n!} \quad g(x) = e^x F(x)$$

donc, par produit de Cauchy,

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k \cdot k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n x^n$$

Par unicité du développement en série entière,  $\gamma_n = \frac{\sigma_n}{n!}$ .

**8** **8.a** D'après ce qui précède,  $\sigma_n \sim \ln(n)$  puis

$$\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$$

Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} = 1$ . Le rayon de convergence de la série entière  $\sum \sigma_n x^n$  vaut donc 1.

**8.b** On peut déjà garantir que  $] -1, 1[ \subset \Delta \subset [-1, 1]$ . Comme  $\sigma_n$  diverge vers  $+\infty$ , les séries  $\sum \sigma_n$  et  $\sum (-1)^n \sigma_n$  divergent grossièrement. Finalement,  $\Delta = ] -1, 1[$ . De plus, pour tout  $x \in \Delta$ ,

$$\phi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \sigma_n x^{n-1}$$

Il est alors clair que  $\phi'$  est positive sur  $[0, 1[$ . Ainsi  $\phi$  est croissante sur  $[0, 1[$ .

**8.c** Comme la suite de terme général  $\frac{1}{k}$  décroît et converge vers 0, la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  converge d'après le critère spécial des séries alternées. La série entière  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$  admet 1 pour rayon de convergence et

$$\forall x \in ] -1, 1[, \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(1+x)$$

D'après le théorème de convergence radiale d'Abel :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \ln 2$$

**8.d** Puisque  $\sigma_n = n! \gamma_n$ ,

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} n!}{k \cdot k! (n-k)!} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Ainsi, en posant  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_0 = 0$ ,  $\frac{\sigma_n}{2^n} = a_n^*$ . D'après la question **8.c**,  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ln 2$  et d'après la question **4.c**,  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2 \ln 2$  ou encore, comme  $a_0^* = a_0 = 0$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{2^n} = 2 \ln 2$$

Ceci signifie que  $\phi\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \ln 2$ .

**8.e** On peut remarquer que la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sigma_n x^n$  est le produit de Cauchy des séries entières  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$ . Ainsi

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_n x^n = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

On retrouve alors  $\phi\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \ln 2$ .