

DEVOIR À LA MAISON N°09

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 –

Partie I – Étude de deux suites

Soient a et b deux réels positifs. On considère désormais les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{aligned} u_0 &= a & v_0 &= b \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= \sqrt{u_n v_n} & \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \end{aligned}$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont alors bien définies et positives, ce que l'on ne demande pas de prouver.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$.
2. Déterminer le sens de variation des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq v_n - u_n \leq \frac{|v_1 - u_1|}{2^{n-1}}$$

5. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune que l'on notera $M(a, b)$.

Partie II – Propriétés de la moyenne arithmético-géométrique

Soient a et b deux réels positifs.

1. Montrer que $M(a, b) = M(b, a)$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$.
3. Montrer que $\sqrt{ab} \leq M(a, b) \leq \frac{a+b}{2}$.
4. Montrer que $M(a, b) = M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$.

Partie III – Étude d'une fonction

On pose $F(x) = M(1, x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.
2. Montrer que F est positive sur \mathbb{R}_+ .
3. Montrer que f est croissante sur \mathbb{R}_+ .
4. a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\sqrt{x} \leq F(x) \leq \frac{1+x}{2}$$

- b. Montrer que F est dérivable en 1 et calculer $F'(1)$.
5. a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$F(x) = \frac{1}{2}(1+x)F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

- b. En déduire que F est continue en 0. F est-elle dérivable en 0 ?
6. a. Préciser la limite de F en $+\infty$.
- b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$F(x) = xF\left(\frac{1}{x}\right)$$

- c. En déduire que $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$.
- d. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$F(x) = \sqrt{x}F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$$

- e. En déduire que $\sqrt{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(F(x))$.
7. a. Écrire une fonction en Python d'arguments $x \in \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ donnant une valeur approchée de $F(x)$ à ε près.
- b. Représenter sur le même graphe, les courbes représentatives des fonctions F , $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \frac{1+x}{2}$. On effectuera si possible le tracé à l'aide du package `matplotlib` du langage Python ou, à défaut, à la main.