SEMAINE DU 25/05 AU 29/05

1 Cours

Déterminants

Groupe symétrique Permutation. Structure de groupe de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$. Transposition et cycle. Décomposition d'une permutation en produits de transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Signature.

Applications multilinéaires Définition et exemples. Application multilinéaire symétrique, antisymétrique, alternée. Une application multilinéaire est antisymétrique **si et seulement si** elle est alternée.

Déterminant d'une famille de vecteurs Le déterminant $\det_{\mathcal{B}}$ dans une base $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel E de dimension n est l'unique forme n-linéaire alternée sur E valant 1 en $\mathcal{B}$. Toute forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$. Formule de changement de base. Une famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs de E est une base **si et seulement si** $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

Déterminant d'un endomorphisme Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ est indépendant de $\mathcal{B}$. C'est le déterminant de f noté $\det(f)$. Propriétés : $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$; $f \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \det(f) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$; $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$ où $n = \dim \mathrm{E}$.

Déterminant d'une matrice carrée Définition comme déterminant des vecteurs colonnes dans la base canonique. Le déterminant d'un endomorphisme est égal au déterminant de sa matrice dans une base. Le déterminant dans une base d'un famille de vecteurs est le déterminant de cette famille de vecteurs dans cette base. Propriétés : $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})$; $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(\mathrm{A}) = 0$ et dans ce cas, $\det(\mathrm{A}^{-1} = \det(\mathrm{A})^{-1}$; si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\mathrm{A}) = \lambda^n \det(\mathrm{A})$.

Calcul de déterminants Effet sur le déterminant des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes. Déterminant d'une transposée. Déterminant d'une matrice triangulaire. Développement par rapport à une ligne ou une colonne.

2 Méthodes à maîtriser

- Décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints.
- Calculer la signature d'une permutation.
- Caractériser le fait qu'une famille de vecteurs est une base via le déterminant.
- Caractériser qu'un endomorphisme est un automorphisme via le déterminant.
- Calculer un déterminant par la méthode du pivot de Gauss.
- Développer un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- Établir des relations de récurrence pour calculer un déterminant.

3 Questions de cours

- **Banque CCP 63** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

  On note D_n le déterminant de A_n.

  1. Démontrer que $\mathrm{D}_{n+2} = 2\mathrm{D}_{n+1} - \mathrm{D}_n$.
  2. Déterminer D_n en fonction de n.

- Soit $p_1, \dots, p_n$ des projecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. Montrer que $\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\, p_i$.
- Soit p un projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$.
- Calculer la signature de la permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ telle que $\sigma(k) = n + 1 - k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On distinguera deux cas suivant la parité de n.
- Montrer qu'une matrice antisymétrique de taille impaire n'est pas inversible.