Devoir à la maison n°15

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Déterminants de Gram

n et p désignent des entiers naturesl non nuls.
E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Partie I – Lemme préliminaire

I.1 Soit $\mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Y}^\mathsf{T}\mathrm{Y} = 0$ si et seulement si $\mathrm{Y} = 0$.

I.2 Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

I.2.a Montrer que $\operatorname{Ker} \mathrm{A} \subset \operatorname{Ker} \mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{A}$.

I.2.b A l'aide de la question **I.1**, montrer que $\operatorname{Ker} \mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{A} \subset \operatorname{Ker} \mathrm{A}$.

I.2.c En déduire que $\operatorname{rg}(\mathrm{A}) = \operatorname{rg}\left(\mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{A}\right)$.

Partie II – Déterminants de Gram

Si $x_1, \dots, x_n$ sont n vecteurs de E, on pose $\mathrm{G}(x_1, \dots, x_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient en position (i, j) est $\langle x_i, x_j \rangle$.

II.1 Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E et $\mathrm{F} = \operatorname{vect}(x_1, \dots, x_n)$. On note $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de F et A la matrice de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $(e_1, \dots, e_p)$.

II.1.a Montrer que $\mathrm{G}(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{A}$.

II.1.b En déduire que $\det \mathrm{G}(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ et que $\det \mathrm{G}(x_1, \dots, x_n) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.

II.2 Soient F un sous-espace vectoriel de E de base $(e_1, \dots, e_p)$ et x un vecteur de E.

II.2.a Justifier qu'il existe $y \in \mathrm{F}$ et $z \in \mathrm{F}^\perp$ tel que $x = y + z$.

II.2.b Montrer que $\det \mathrm{G}(e_1, \dots, e_p, x) = \|z\|^2 \det \mathrm{G}(e_1, \dots, e_p)$.

II.2.c En déduire que $d(x, \mathrm{F})^2 = \dfrac{\det \mathrm{G}(e_1, \dots, e_p, x)}{\det \mathrm{G}(e_1, \dots, e_p)}$.

Partie III – Applications

III.1 Dans cette question, on suppose $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ du produit scalaire $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\, \mathrm{d}t$. Déterminer $d(\mathrm{X}^3, \mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$.

III.2 Dans cette question, on suppose $\mathrm{E} = \mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_0^\pi f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
Déterminer

$$\mathrm{M} = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi \left(\sin t - at^2 - bt\right)^2\,\mathrm{d}t$$