

Familles libres, liées, génératrices et bases

EXERCICE 1.

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et a, b, c trois vecteurs de l'espace E .

1. Soient $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ quatre scalaires. Critiquer l'implication suivante,

$$\lambda a + \mu b = \lambda' a + \mu' b \implies \lambda = \lambda' \text{ et } \mu = \mu'.$$

2. Critiquer l'implication suivante,

$$(a, b) \text{ liée} \implies b \in \text{vect}(a).$$

3. Critiquer l'implication suivante,

$$(a, b, c) \text{ liée} \implies c \in \text{vect}(a, b).$$

EXERCICE 2.

Soient $m \in \mathbb{R}$. Donner une *condition nécessaire et suffisante* sur m pour que la famille

$$(m, 1, 1), (2m, -1, m), (1, 5, 2)$$

soit libre dans \mathbb{R}^3 .

EXERCICE 3.

Montrer de deux manières que la famille

$$x \mapsto e^x \quad x \mapsto x^2 \quad x \mapsto \ln(x)$$

est libre dans l'espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} .

EXERCICE 4.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $u = (a, 1, 1)$, $v = (1, a, 1)$ et $w = (1, 1, a)$. Déterminer une CNS pour que (u, v, w) soit libre dans $E = \mathbb{R}^3$.

EXERCICE 5.

Parmi les familles suivantes, déterminer les familles génératrices de \mathbb{R}^3 :

1. $(u_1, u_2) = ((1, 2, 3), (2, 1, 0))$;
2. (u_1, u_2, u_3) vaut $((1, 1, 1), (0, 1, 2), (3, 2, -1))$;
3. (u_1, u_2, u_3) vaut $((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$;
4. (u_1, u_2, u_3) vaut $((1, -1, 1), (-1, 1, -1), (2, 3, -1))$;
5. (u_1, u_2, u_3) vaut $((1, 2, -1), (1, -3, 4), (3, 1, 2))$;
6. (u_1, u_2, u_3, u_4) vaut $((1, 0, 3), (0, 2, 1), (3, 1, 1), (2, 1, -1))$.

EXERCICE 6.

Soient dans \mathbb{R}^4 les vecteurs

$$e_1 = (1, 2, 3, 4) \quad \text{et} \quad e_2 = (1, -2, 3, -4).$$

1. Peut-on déterminer x et y pour que

$$(x, 1, y, 1) \in \text{vect}(e_1, e_2) \quad ?$$

2. Même question pour $(x, 1, 1, y) \in \text{vect}(e_1, e_2)$?

EXERCICE 7.

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a : x \mapsto e^{ax}$. Montrer que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

EXERCICE 8.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $f_a : x \mapsto |x - a|$. Montrer que $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

EXERCICE 9.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \sin(nx)$.

1. Pour $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, calculer $\int_0^{2\pi} f_m(t) f_n(t) dt$.

2. En déduire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

EXERCICE 10.

Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille libre du \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{R} .

EXERCICE 11.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $f : x \mapsto \sin(x + a)$, $g : x \mapsto \sin(x + b)$ et $h : x \mapsto \sin(x + c)$. Déterminer le rang de la famille (f, g, h) .

EXERCICE 12.

Soit (v_1, \dots, v_n) une famille libre de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .

1. La famille $(v_1 - v_2, v_2 - v_3, \dots, v_{n-1} - v_n, v_n - v_1)$ est-elle libre ?
2. La famille $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1)$ est-elle libre ?
3. On pose $w_k = \sum_{j=1}^k v_j$. La famille (w_1, \dots, w_n) est-elle libre ?

EXERCICE 13. ★★

Soient $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre d'un espace vectoriel E et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $y = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$. Donner une *condition nécessaire et suffisante* sur les α_i pour que $(y + x_i)_{1 \leq i \leq n}$ soit une famille libre.

Dimension d'un espace vectoriel

EXERCICE 14.

Soient F le sous-ensemble de \mathbb{R}^4 défini par l'équation

$$x + z = t + y,$$

et G défini par $y + t = x - y - z = 0$.

1. Déterminer la dimension ainsi qu'une base de F . Soit $a = (3, 1, 2, 4)$. Déterminer les coordonnées de a dans cette base.
2. Déterminer la dimension ainsi qu'une base de G . Soit $b = (4, 1, 3, -1)$. Déterminer les coordonnées de b dans cette base.
3. Déterminer la dimension et une base de $F \cap G$.

EXERCICE 15. ★

Revenons un instant aux équations différentielles ...

1. Soit

$$\mathcal{S} = \{y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \mathcal{C}^2 \mid y'' + y' + y = 0\}.$$

Déterminer une base de \mathcal{S} en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

2. Déterminer une base de \mathcal{S} en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
3. Donner une base du sous-espace vectoriel \mathcal{S}' de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par la condition suivante,

$$f'' + 4f = 0, \quad f(\pi) = 0.$$

EXERCICE 16.

Soit E le sous-ensemble de \mathbb{R}^4 défini par les équations suivantes,

$$x = 2y - z, \quad t = x + y + z.$$

Prouver que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 . Quelle est sa dimension ? En donner une base.

EXERCICE 17.

Courage !...

1. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs

$$a = (1, 2, 0) \quad \text{et} \quad b = (-1, 1, 1)?$$

2. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs

$$a = (3, 0, -2), \quad b = (0, 3, 1) \quad \text{et} \quad c = (-1, 4, 2)?$$

3. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs

$$a = (1, 1, -2), \quad b = (1, 3, 1), \quad c = (-2, 1, 2),$$

$$d = (1, -1, 1), e = (0, 1, 2), f = (-3, 1, 0), g = (4, 5, 1)?$$

EXERCICE 18.★

Le corps \mathbb{C} peut-être considéré comme un \mathbb{R} ou un \mathbb{C} -espace vectoriel...

1. Déterminer la dimension et une base de \mathbb{C} considéré comme espace vectoriel sur lui-même. Quels sont alors les sous-espaces vectoriels de \mathbb{C} ?
2. Déterminer la dimension et une base de \mathbb{C} considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{R} . Décrire alors les sous-espaces vectoriels de \mathbb{C} .

EXERCICE 19.★

Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites arithmétiques ? En déterminer une base.

EXERCICE 20.

Soit

$$F = \{(\lambda + \mu, 2\lambda - \mu, 3\lambda + 4\mu, 2\mu) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}.$$

1. Montrez que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^4 .
2. Déterminez la dimension de F .

EXERCICE 21.

Expliquez pourquoi les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 et déterminez leurs dimensions.

1. $E = \text{vect}((1, 2, 3), (3, 2, 1), (1, 1, 1))$;
2. $F = \{(x, y, z) \mid x = y\}$;
3. $G = \{(x, y, z) \mid x + 3y = y + z = 2x - z = 0\}$;
4. $H = \{(x, y, z) \mid x + 3y = y + z = x + 2y - z = 0\}$;
5. $L = \{(x, y, z) \mid x + 3y = y + z = 2x - z\}$.

EXERCICE 22.

Dans \mathbb{R}^4 , on considère la famille de vecteurs suivante :

$$u_1 = (1, 2, -1, 3), \quad u_2 = (2, 3, -3, 2), \quad u_3 = (0, 1, 1, 4)$$

et $u_4 = (1, 0, -3, -5)$. Déterminer le rang de cette famille, préciser les relations de liaison entre ces vecteurs et donner une base de $\text{vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

EXERCICE 23.★

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun dans E si et seulement si $\dim(F) = \dim(G)$.

EXERCICE 24.

On pose

$$u_1 = (\alpha, 1, \beta, 1), \quad u_2 = (1, \alpha, \beta, \alpha),$$

$$u_3 = (\alpha, \beta, \alpha, 1), \quad u_4 = (\alpha, \beta, \alpha, \beta),$$

et $u_5 = (1, \alpha, 1, \beta)$, pour α et β réels. Discuter le rang du système $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$.

EXERCICE 25.★

Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Prouver que $n \geq 2$.
2. Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

EXERCICE 26.

Soit $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ une subdivision de $[0; 1]$ et F l'ensemble des fonctions de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} dont la restriction à chaque intervalle $[x_i; x_{i+1}]$ est affine. Donner la dimension de F ainsi qu'une base.

EXERCICE 27.

1. Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose $u_i = (\delta_{in})_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille (u_0, u_1, \dots, u_k) est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Que peut-on en déduire quant à la dimension du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose $f_i : x \in \mathbb{R} \mapsto x^i$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille (f_0, f_1, \dots, f_k) est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire quant à la dimension de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ pour $n \in \mathbb{N}$, de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

EXERCICE 28.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note E_p l'ensemble des suites réelles p -périodiques.

1. Montrer que E_p est un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Pour $0 \leq k \leq p-1$, on définit la suite u^k par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv k[p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $(u^0, u^1, \dots, u^{p-1})$ est une base de E_p .

3. Que peut-on en déduire quant à la dimension de E_p ?
4. Justifier que E_2 est un sous-espace vectoriel de E_4 .
5. On note F l'ensemble des suites $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + u_n = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E_4 .
6. Montrer que F est un supplémentaire de E_2 dans E_4 .
7. Que peut-on en déduire quant à la dimension de F ?
8. On définit deux suites x, y de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $x_n = \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right)$ et $y_n = \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (x, y) est une base de F .

EXERCICE 29.

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel dont on précisera la dimension.

EXERCICE 30.

Soient F et G deux plans vectoriels de \mathbb{R}^3 . On suppose F et G distincts. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F + G$. La somme est-elle directe ?

Sommes et dimension

EXERCICE 31.

Soient E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles et $F = \left\{ f \in E \mid \forall k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket, f\left(\frac{1}{k}\right) = 0 \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E .

EXERCICE 32.

1. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ et $G = \text{vect}((1, 1, 1))$.
 - a. Donner la dimension de G .
 - b. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base de F . En déduire sa dimension.
 - c. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
 - d. On pose $a = (1, 2, 3)$. Déterminer la projection de a sur F parallèlement à G et la projection de a sur G parallèlement à F .
2. On se donne maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathbb{R}^n$, $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$ et $G = \text{vect}((1, \dots, 1))$.
 - a. Donner la dimension de G .
 - b. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base de F . En déduire sa dimension.
 - c. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
3. On suppose maintenant que E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne F un hyperplan de E et $G = \text{vect}(u)$ où $u \in E \setminus F$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

EXERCICE 33.

On note $E = \mathbb{R}^4$,

$$G = \{(x, y, z, t) \in E \mid z = t = 0\}$$

et on pose $F = A \cap B$ où

$$A = \{(x, y, z, t) \in E \mid x - y + z - t = 0\}$$

et

$$B = \{(x, y, z, t) \in E \mid 2x - y + 3z - 4t = 0\}.$$

1. Prouver que F et G sont des sous-espaces vectoriels de l'espace E .
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E . Trouver une base de E adaptée à cette décomposition en somme directe.
3. Calculer la projection sur F parallèlement à G d'un vecteur (x, y, z, t) de E . Même question en permutant F et G .

EXERCICE 34.

On note $E = \mathbb{R}^3$ et

$$F = \{(x, y, z) \in E \mid x + z = 0\}$$

et

$$G = \{(x, y, z) \mid x = 2y = z\}.$$

1. Etablir que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .
2. Calculer la projection du vecteur $X = (x, y, z)$ de E sur F parallèlement à G .

EXERCICE 35.★

Soient $n \geq 2$, H le sous-ensemble de $E = \mathbb{R}^n$ défini par l'équation

$$x_1 + \dots + x_n = 0,$$

et $u = (1, \dots, 1) \in E$.

1. H et $\mathbb{R}u$ sont-ils supplémentaires dans E ?
2. Soit $v \notin H$. Que dire de $\mathbb{R}v$?