Applications, fonctions d'une variable réelle

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application croissante telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Prouver que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$. Déterminer les ensembles suivants :

1. $f(\mathbb{R})$;
2. $f([-3, 2])$;
3. $f([-3, 3])$;
4. $f^{-1}([9, 10])$;
5. $f^{-1}([-5, -3[)$;
6. $f^{-1}([-4, 4[)$;
7. $f^{-1}(f([0, 1]))$;
8. $f(f^{-1}([-1, 4]))$;
9. $f(f^{-1}(\mathbb{R}_-))$.

Exercice 3.

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_1(x) = |x - 2|$;
2. $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_2(x) = \frac{x}{x^2+1}$;
3. $f_3 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_3(x) = \frac{3x+1}{4x+1}$;
4. $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3$;
5. $f_5 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto x^3$.

Exercice 4.

Montrer que la fonction définie par

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto f(x) = 2xe^x$$

réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un ensemble à déterminer.

Exercice 5.

Soient E un ensemble, A et B deux parties *fixées* de E, et Ψ l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par

$$\forall X \subset E, \qquad \Psi(X) = (X \cap A, X \cap B).$$

1. *Etude de l'injectivité de* Ψ.
   a. Calculer $\Psi(\varnothing)$.
   b. Calculer $\Psi(\overline{A \cup B})$.
   c. Prouver que Ψ est injective *si et seulement si* $A \cup B = E$.
2. *Etude de la surjectivité de* Ψ.
   a. Le couple $(\varnothing, B)$ admet-il un antécédent par Ψ ?
   b. Déterminer *une condition nécessaire et suffisante* sur A, B et E pour que Ψ soit surjective.

Exercice 6.

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$. A est le point d'affixe 2. On définit une application

$$\mathcal{T} : \mathcal{P} \setminus \{A\} \longrightarrow \mathcal{P}$$

par $\mathcal{T}(m) = M$ où m est d'affixe z et M d'affixe

$$Z = 2z + 3 + \frac{6}{z - 2}.$$

1. Etudier l'injectivité et la surjectivité de $\mathcal{T}$.
2. Déterminer l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ invariants par $\mathcal{T}$.
3. Deux points m et m' sont dits associés s'ils ont la même image par $\mathcal{T}$. Montrer que les points m et m', d'affixes respectives z et z', sont associés *si et seulement si* $z = z'$ ou
$$(z - 2)(z' - 2) = 3.$$
4. On note $\mathcal{E}$ l'axe réel privé du point A. Déterminer l'ensemble $\mathcal{T}(\mathcal{E})$.
5. Soient B et C les points d'affixes $7 - 4\sqrt{3}$ et $7 + 4\sqrt{3}$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{T}^{-1}([BC])$.

EXERCICE 7.

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$\begin{cases} f(n) = n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ f(n) = \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Etudier l'injectivité et la surjectivité de f.

EXERCICE 8.★★

Soient f et g deux applications de E dans lui-même, telles que $g \circ f \circ g = f$ et $f \circ g \circ f = g$.

1. On suppose que f est injective. Démontrer que f et g sont bijectives.
2. On suppose que g est surjective. Démontrer que f et g sont bijectives.

EXERCICE 9.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que la restriction de f à $[1, +\infty[$ est une bijection sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à préciser.

EXERCICE 10.

Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. On considère les ensembles $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$ et $F = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}\right\}$.
   a. Si on identifie $\mathbb{C}$ au plan, donner la nature géométrique de E et F, et donner leurs équations cartésiennes.
   b. Vérifier que $f(E \setminus \{0\}) \subset F$.
   c. Montrer que f induit une bijection de $E \setminus \{0\}$ sur F.

EXERCICE 11.

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image de l'ensemble I par la fonction f :

1. $I = [-5, 1[$ et $f(x) = \dfrac{5x-2}{1-x}$.
2. $I = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$ et $f(x) = \dfrac{5x^2-1}{1-x}$.
3. $I =]-1, 1[$ et $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$.
4. $I =]1, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^3}$.
5. $I =]-\pi, \pi[\setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right\}$ et $f(x) = \tan x$.

EXERCICE 12.

On considère la fonction réelle définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Montrer que le point $(1, 0)$ est le seul point de la courbe où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

EXERCICE 13.

Soit E un ensemble non vide et A et B deux parties de E.

1. Montrer que si $A \cap B = \varnothing$, alors pour toute partie X de E

$$(X \cup A) \cap (X \cup B) = X$$

2. Soit l'application $f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E)^2 \\ X & \longmapsto & (X \cup A, X \cup B) \end{cases}$.
   a. Montrer que f n'est pas surjective.
   b. Montrer que f est injective *si et seulement si* $A \cap B = \varnothing$.

EXERCICE 14.

Déterminer les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n$.

EXERCICE 15.

Soit $f : E \to F$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E, $f^{-1}(f(A))) = A$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 16.

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective, telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \leqslant n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$.

Exercice 17.

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{\alpha}z + 1 \neq 0$, on pose $f(z) = \dfrac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{U}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{\alpha}z+1 \neq 0$. Montrer que $z \in \mathbb{U}$ *si et seulement si* $f(z) \in \mathbb{U}$.
3. Montrer que f induit une bijection de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$.

Exercice 18.

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On définit la *différence symétrique* de A et B par :

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$,
$$\mathbb{1}_{A\Delta B} = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2.$$
2. Montrer que $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$,
$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$$
3. Montrer que $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$
$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

Exercice 19.

Soient A, B, C trois ensembles. On pose $X = A \cup (B \cap C)$ et $Y = (A \cup B) \cap C$.

1. Déterminer les fonctions indicatrices de X et Y en fonction de celles de A, B et C.
2. En déduire à quelle condition nécessaire et suffisante (portant sur A et C) les ensembles X et Y sont égaux.

Exercice 20.★★

Soit $f : x \mapsto \sqrt{|x^2 - 1|}$. Etudier la fonction f, puis représenter f graphiquement. On précisera les tangentes remarquables ainsi que les asymptotes.

Exercice 21.

Voici un peu d'entraînement sur la méthode de la quantité conjuguée.

1. Démontrer que
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1.$$
2. Soient m, n des entiers positifs. Etudier
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}.$$
3. Démontrer que
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2} - 1) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 22.

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)}$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$;
6. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$;
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$;
8. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n - 1}$.

Exercice 23.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 - 3x$.
2. *Sans calculs*, tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x+2) - 1 \quad h : x \in \mathbb{R} \mapsto 2f\left(\frac{x}{2}\right) \quad i : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}f(2x-2) + 1$$

Exercice 24.

Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Si f est paire ou impaire, que peut-on dire de la parité de f', de $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$?
2. Si f est périodique, que peut-on dire de la périodicité de f', de $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 25.

Etudier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x^4 - x^2}$
2. $g : x \mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}}$
3. $h : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2-1} - 1\right)$
4. $i : x \mapsto \ln\left(1 - \sqrt{\cos x}\right)$

Exercice 26.

Etudier les fonctions suivantes. On précisera également leurs images.

1. $f : x \mapsto x^x$
2. $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$
3. $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$
4. $f : x \mapsto \sin x - \frac{1}{3}\sin 3x$

Exercice 27.

Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$x \leqslant \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\tan x$$

Exercice 28.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{8\sin x - \sin(2x)}{6} \leqslant x$$

Exercice 29.

Soient $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $f(-1-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire sans justification une symétrie de $\mathcal{C}_f$.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée. En déduire les variations de f que l'on présentera dans un tableau de variations.
   On précisera les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
4. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ dont on déterminera une équation. En déduire sans calcul que $\mathcal{C}_f$ admet également une asymptote oblique en $-\infty$ dont on précisera une équation.
5. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses asymptotes.
6. Tracer $\mathcal{C}_f$. On fera figurer les asymptotes et les tangentes remarquables.

Exercice 30.

On considère la fonction réelle $f : x \longmapsto \dfrac{(x+1)^2}{2x-1}$.

1. Etudiez f, déterminez ses éventuelles asymptotes, puis tracez la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Prouvez que $\mathcal{C}_f$ possède un centre de symétrie.

Exercice 31.

Les fonctions suivantes sont-elles majorées, minorées, bornées ? Justifier.

1. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \sin x$
2. $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{2\sin x + 3\cos x^2}{1+e^x}$
3. $h : x \in \mathbb{R} \mapsto (1+\sin x)\ln(1+x^2)$
4. $i : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2}\sin x$

Exercice 32.

Les fonctions suivantes admettent-elles un minimum ou un maximum ?

1. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2}$
2. $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$
3. $h : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-x}\sqrt{x}$.
4. $i : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x + \dfrac{a}{x}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 33.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 34.✯

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall x \neq \pm 1$,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} - \frac{b}{1-x}.$$

2. Calculer la dérivée n-ième sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Exercice 35.✯

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée n-ième de

$$x \mapsto e^{x\cos(\alpha)}\cos(x\sin(\alpha)).$$