Semaine du 28/05 au 01/06

1 Cours

Déterminants

Groupe symétrique Permutation. Structure de groupe de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$. Transposition et cycle. Décomposition d'une permutation en produits de transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Signature : unique morphisme non trivial de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1,+1\}, \times)$.

Applications multilinéaires Définition et exemples. Application multilinéaire symétrique, antisymétrique, alternée. Une application multilinéaire est antisymétrique **si et seulement si** elle est alternée.

Déterminant d'une famille de vecteurs Le déterminant $\det_{\mathcal{B}}$ dans une base $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel E de dimension n est l'unique forme n-linéaire alternée sur E valant 1 en $\mathcal{B}$. Toute forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$. Formule de changement de base. Une famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs de E est une base **si et seulement si** $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$. Interprétation géométrique du déterminant en dimension 2 ou 3.

Déterminant d'une matrice carrée Définition comme déterminant des vecteurs colonnes. Le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base est égal au déterminant de sa matrice dans cette base. Propriétés : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$; $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$; $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$; $\det({}^tA) = \det(A)$. Effet sur le déterminant des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire ou triangulaire par blocs. Déterminants de Vandermonde. Comatrice : définition. ${}^t\operatorname{com}(A)A = A\,{}^t\operatorname{com}(A) = \det(A)I_n$.

Déterminant d'un endomorphisme Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ est indépendant de $\mathcal{B}$. C'est le déterminant de f noté $\det(f)$. Le déterminant d'un endomorphisme est égal au déterminant de sa matrice dans une base. Propriétés : $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$; $f \in GL(E) \iff \det(f) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$; $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire et norme Définition d'un produit scalaire. Orthogonalité. Espace préhilbertien réel, espace euclidien. Norme associée à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Inégalité triangulaire. Identités de polarisation.

Familles orthogonales Définition d'une famille orthogonale et d'une famille orthonormale. Une famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. Théorème de Pythagore. Expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale à l'aide du produit scalaire. Expression du produit scalaire et de la norme à l'aide des coordonnées dans une base orthonormale.

2 Méthodes à maîtriser

- Caractériser le fait qu'une famille de vecteurs est une base, qu'un endomorphisme est un automorphisme, qu'une matrice est inversible via le déterminant.
- Calculer un déterminant par la méthode du pivot de Gauss.
- Développer un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- Établir des relations de récurrence pour calculer un déterminant.
- Montrer qu'une application est un produit scalaire. Dans l'ordre : symétrie, linéarité par rapport à l'**une** des deux variables (la linéarité par rapport à la seconde variable s'obtient par symétrie), positivité, définition.
- Montrer qu'une famille est orthonormale.

3 Questions de cours

- On note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients entiers, inversibles et dont l'inverse est à coefficients entiers. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z}) \iff \det(M) = \pm 1$.
- **Banque CCP 76** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot \mid \cdot)$. On pose $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ pour $x \in E$.

  1. (a) Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

2. On note E l'ensemble des fonctions continues et strictement positives sur $[a, b]$. Prouver que l'ensemble

$$\left\{ \left(\int_a^b f(t)\, dt \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\, dt \right),\ f \in E \right\}$$

admet une borne inférieure m et la déterminer.

- ► Montrer que l'application

$$(f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})^2 \mapsto \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\, dt$$

définit un produit scalaire.

- ► Montrer que l'application

$$(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^\intercal B)$$

définit un produit scalaire.

- ► Montrer que l'application

$$(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2 \mapsto \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$$

définit un produit scalaire.

- ► **Banque CCP 6** Soient (u_n) une suite de réels strictement positifs et $\ell \in [0, 1[$.

1. Montrer que si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.
   On pourra majorer u_n par le terme général d'une suite géométrique pour n assez grand.

2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^n}$?