Devoir à la maison n°09 : corrigé

Solution 1.

1. C'est du calcul.

2. **a.** Supposons que x et y admettent un diviseur premier commun p. Alors p divise x^2 et y^2. Puisque $z^2 = x^2+y^2$, p divise z^2. Puisque p est premier, p divise z. Ainsi p est un diviseur premier commun de x, y et z, ce qui est absurde puisque x, y et z sont premiers entre eux dans leur ensemble. Ainsi x et y ne possèdent pas de diviseur premier commun : ils sont premiers entre eux.
On prouve de même que x et z d'une part et y et z d'autre part sont premiers entre eux.

   b. Comme x et y sont premiers entre eux, ils ne peuvent pas être tous deux pairs.
Remarquons maintenant que le carré d'un entier pair est congru à 0 modulo 4 tandis que le carré d'un entier impair est congru à 1 modulo 4. Supposons x et y impairs. Alors $z^2 \equiv 2[4]$, ce qui est impossible puisque le carré d'un entier est congru à 0 ou 1 modulo 4.
Finalement x et y sont de parités distinctes. Dans ce cas, $z^2 \equiv 1[4]$, ce qui signifie que z est impair.

3. **a.** Notons δ le pgcd de $z-x$ et $z+x$. Tout d'abord, z et x étant impairs, $z-x$ et $z+x$ sont pairs donc 2 divise δ. De plus, $2x = (z+x)-(z-x)$ et $2z = (z+x)+(z-x)$ donc δ divise $2x$ et $2z$. Par conséquent, δ divise $2x \wedge 2z = 2(x \wedge z) = 2$. Finalement $\delta = 2$.

   b. Puisque le pgcd de $z-x$ et $z+x$ est 2, b et c sont premiers entre eux. De plus, $y^2 = z^2-x^2 = (z-x)(z+x)$ i.e. $a^2 = bc$.
Puisque x, y, z sont strictement positifs, $a > 0$ et $b > 0$. Puisque $a^2 = bc$, on a également $c > 0$. On peut donc considérer les valuations p-adiques de a, b, c.
Soit alors p un nombre premier. Alors $v_p(a^2) = v_p(bc)$ i.e. $2v_p(a) = v_p(b) + v_p(c)$. Puisque b et c sont premiers entre eux, l'une des deux valuations $v_p(b)$ ou $v_p(c)$ est nulle tandis que l'autre vaut $2v_p(a)$. Quoi qu'il en soit, les deux valuations $v_p(b)$ et $v_p(c)$ sont paires. Ceci étant vrai pour tout nombre premier p, b et c sont des carrés d'entiers.

4. Soit (x, y, z) un triplet solution.

   ▶ Si l'un des deux réels x et y est nul, on peut supposer que $y = 0$ quitte à permuter x et y. Alors $x^2 = z^2$. Si x et z sont de même signe, on a bien $x = d(u^2-v^2)$, $y = 2duv$ et $z = d(u^2+v^2)$ avec $d = x = z$, $u = 1$ et $v = 0$. Sinon, il suffit de poser $d = z = -x$, $u = 0$ et $v = 1$.

   ▶ Si $z = 0$, alors $x = y = 0$ et on a bien $x = d(u^2-v^2)$, $y = 2duv$ et $z = d(u^2+v^2)$ avec $d = 0$ et u, v quelconques.

   On suppose donc maintenant que x, y, z sont non nuls et même strictement positifs. Notons d le pgcd de x, y et z. Alors $\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d}\right)$ est encore un triplet solution formé d'entiers naturels non nuls premiers entre eux dans leur ensemble. D'après ce qu'il précède, quitte à échanger x et y, il existe des entiers b et c tels que $\frac{z+x}{d} = 2b$ et $\frac{z-x}{d} = 2c$ avec b et c des carrés d'entiers naturels non nuls que l'on peut noter u et v. On a alors $z+x = 2du^2$ et $z-x = 2dv^2$ puis, par somme et différence, $z = d(u^2+v^2)$ et $x = d(u^2-v^2)$. Enfin, $y^2 = (z-x)(z+x) = 4d^2u^2v^2$ puis $y = 2duv$ puisque y, d, u, v sont positifs.
Enfin, si x, y, z sont non nuls mais pas forcément positifs, $(|x|, |y|, |z|)$ est encore solution de (E) de sorte que, quitte à permuter x et y, il existe $(d, u, v) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $|x| = d(u^2-v^2)$, $|y| = 2duv$ et $|z| = d(u^2+v^2)$. On a quand même (x, y, z) de la forme voulue quitte à

   ▶ échanger u et v si $x < 0$, $y > 0$ et $z > 0$;
   ▶ changer u en $-u$ si $x > 0$, $y < 0$ et $z > 0$;
   ▶ changer d en $-d$, u en $-v$ et v en u si $x > 0$, $y > 0$ et $z < 0$;
   ▶ changer u en $-v$ et v en u si $x < 0$, $y < 0$ et $z > 0$;
   ▶ changer d en $-d$ et échanger u et v si $x > 0$, $y < 0$ et $z < 0$;
   ▶ changer d en $-d$ et u en $-u$ si $x < 0$, $y > 0$ et $z < 0$;
   ▶ changer d en $-d$ si $x < 0$, $y < 0$ et $z < 0$.

   La première question permet donc de conclure que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{(d(u^2-v^2), 2duv, d(u^2+v^2)),\ (d,u,v) \in \mathbb{Z}^3\right\} \cup \left\{(2duv, d(u^2-v^2), d(u^2+v^2)),\ (d,u,v) \in \mathbb{Z}^3\right\}$$

Solution 2.

1. Puisque toutes les solutions de $(\mathcal{E})$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, $E \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La fonction nulle est clairement solution de $(\mathcal{E})$ donc appartient à E. Soient $(y_1, y_2) \in E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)''' - (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1(y_1''' - y_1) + \lambda_2(y_2''' - y_2) = 0$$

donc $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in E$.
E est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2. Soit $y \in F$. Alors $y'' + y' + y = 0$. Puisque y est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on obtient en dérivant la relation précédente, $y''' + y'' + y' = 0$. En soustrayant ces deux relations, on obtient $y''' - y = 0$ de sorte que $y \in E$. Ainsi $F \subset E$.
Soit $y \in G$. Alors $y' = y$. En dérivant, on obtient $y'' = y' = y$. En dérivant à nouveau, on obtient $y''' = y' = y$. Ainsi $y \in E$. Finalement, $G \subset E$.

3. Le polynôme caractéristique associé à $(\mathcal{F})$ est $X^2 + X + 1$ dont les racines sont $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de $(\mathcal{F})$ sont donc les fontions

$$t \mapsto \left(\lambda \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} + \mu \sin \frac{t\sqrt{3}}{2}\right) e^{-\frac{t}{2}} \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

En posant $f_1 : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{t\sqrt{3}}{2}$ et $f_2 : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{t\sqrt{3}}{2}$, on a donc $F = \operatorname{vect}(f_1, f_2)$ de sorte que (f_1, f_2) est une famille génératrice de F.
Les solutions de $(\mathcal{G})$ sont les fonctions $t \mapsto \nu e^t$ avec $\nu \in \mathbb{R}$. Ainsi $G = \operatorname{vect}(f_3)$ en posant $f_3 : t \mapsto e^t$. Ainsi (f_3) est une famille génératrice de G.

4. **a.** Puisque $y \in E$, $y''' = y$ et donc $y^{(4)} = y'$. Ainsi

$$\begin{aligned} y_1'' + y_1' + y_1 &= (2y - y' - y'')'' + (2y - y' - y'')' + (2y - y' - y'') \\ &= (2y'' - y''' - y^{(4)}) + (2y' - y'' - y''') + (2y - y' - y'') \\ &= (2y'' - y - y') + (2y' - y'' - y) + (2y - y' - y'') = 0 \end{aligned}$$

donc $y_1 \in F$. De plus

$$y_2' = (y + y' + y'')' = y' + y'' + y''' = y' + y'' + y = y_2$$

donc $y_2 \in G$.

b. Soit $y \in F \cap G$. Puisque $y \in G$, $y' = y$ donc $y'' = y' = y$. Or $y'' + y' + y = 0$ car $y \in F$ donc $3y = 0$ puis $y = 0$. Finalement $F \cap G = \{0\}$.
Puisque $F \subset E$ et $G \subset E$, $F + G \subset E$. Soit maintenant $y \in E$. Posons $y_1 = 2y - y' - y''$ et $y_2 = y + y' + y''$. On a vu que $y_1 \in F$ et $y_2 \in G$. Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels, $\frac{1}{3}y_1 \in F$ et $\frac{1}{3}y_2 \in G$. Puisque $y = \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2$, $y \in F + G$. Ainsi $E \subset F + G$. Par double inclusion, $E = F + G$.
Mais puisque $F \cap G = \{0\}$, $E = F \oplus G$. Ainsi F et G sont supplémentaires dans E.

5. On déduit de la question précédente que

$$E = F \oplus G = \operatorname{vect}(f_1, f_2) + \operatorname{vect}(f_3) = \operatorname{vect}(f_1, f_2, f_3)$$

Autrement dit, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les combinaisons linéaires de f_1, f_2 et f_3, c'est-à-dire les fonctions

$$t \mapsto \left(\lambda \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} + \mu \sin \frac{t\sqrt{3}}{2}\right) e^{-\frac{t}{2}} + \nu e^t \text{ avec } (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$$