Devoir à la maison n°11 : corrigé

Problème 1 — Fonctions 1-périodiques

Partie I – Un espace vectoriel

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e_k(x+1) = e^{2ik\pi(x+1)} = e^{2ik\pi x} e^{2ik\pi} = e^{2ik\pi x} = e_k(x)$$

Ainsi e_k est 1-périodique i.e. $e_k \in \mathrm{E}$.

2. La fonction nulle sur $\mathbb{R}$ est 1-périodique donc appartient à E.
Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(f, g) \in \mathrm{E}^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(\lambda f + \mu g)(x+1) = \lambda f(x+1) + \mu g(x+1) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$$

Ainsi $\lambda f + \mu g$ est 1-périodique donc appartient à E.
Ceci prouve que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.

3. Supposons $k \neq l$. Alors

$$\int_0^1 e_k(x)e_{-l}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{2i(k-l)\pi x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2i(k-l)\pi}\left[e^{2i(k-l)\pi x}\right]_0^1 = 0$$

Supposons maintenant $k = l$. Alors

$$\int_0^1 e_k(x)e_{l-}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 dx = 1$$

4. Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{(\mathbb{Z})}$ une famille presque nulle telle que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k e_k = 0$$

On notera bien que cette somme est *finie*. Fixons $l \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\int_0^1 \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k e_k(x)\right) e_{-l}(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Par linéarité de l'intégrale

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k \int_0^1 e_k(x)e_{-l}(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Mais d'après la question précédente, $\int_0^1 e_k(x)e_{-l}(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Il en résulte que $\lambda_l = 0$. Ceci étant vrai quelque soit le choix de $l \in \mathbb{Z}$, la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est libre.

Partie II – Un endomorphisme

1. Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ et $(f,g)\in\left(\mathbb{C}^{\mathbb{R}}\right)^2$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(\lambda f+\mu g)(x) &= \frac{1}{2}\left((\lambda f+\mu g)\left(\frac{x}{2}\right)+(\lambda f+\mu g)\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\lambda f\left(\frac{x}{2}\right)+\mu g\left(\frac{x}{2}\right)+\lambda f\left(\frac{x+1}{2}\right)+\mu g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)\\
&= \frac{\lambda}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+\frac{\mu}{2}\left(g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)\\
&= \lambda\mathrm{T}(f)(x)+\mu\mathrm{T}(g)(x)=(\lambda\mathrm{T}(f)+\mu\mathrm{T}(g))(x)
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{T}(\lambda f+\mu g)=\lambda\mathrm{T}(f)+\mu\mathrm{T}(g)$.
De plus, pour $f\in\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, $\mathrm{T}(f)\in\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ donc T est bien un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.

2. Soit $f\in\mathrm{E}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(f)(x+1) &= \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x+1}{2}\right)+f\left(\frac{x+2}{2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x+1}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}+1\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x+1}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}\right)\right)\\
&= \mathrm{T}(f)(x)
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{T}(f)$ est 1-périodique i.e. $\mathrm{T}(f)\in\mathrm{E}$.
Ceci prouve que E est stable par T.

3. Soit $k\in\mathbb{Z}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(e_k)(x) &= \frac{1}{2}\left(e_k\left(\frac{x}{2}\right)+e_k\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{ik\pi x}+e^{ik\pi(x+1)}\right)\\
&= \frac{1}{2}e^{ik\pi x}\left(1+e^{ik\pi}\right)\\
&= \begin{cases} e^{ik\pi x} & \text{si } k \text{ est pair}\\ 0 & \text{si } k \text{ est impair}\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{T}(e_k)=e_{\frac{k}{2}}$ si k est pair et $\mathrm{T}(e_k)=0$ si k est impair.
De manière équivalente, on peut dire que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\mathrm{T}(e_{2k})=e_k$ et $\mathrm{T}(e_{2k+1})=0$.

4. Soit $k\in\mathbb{Z}$.

   - Si k est pair, $\mathrm{T}(e_k)=e_{\frac{k}{2}}\in\tilde{\mathrm{E}}$.
   - Si k est impair, $\mathrm{T}(e_k)=0\in\tilde{\mathrm{E}}$.

   Comme $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ engendre $\tilde{\mathrm{E}}$, $\mathrm{T}(\tilde{\mathrm{E}})\subset\tilde{\mathrm{E}}$ par linéarité de T. $\tilde{\mathrm{E}}$ est donc stable par T.

5. Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im}\tilde{\mathrm{T}}$ est engendré par la famille $(\mathrm{T}(e_k))_{k\in\mathbb{Z}}$. Puisque $\mathrm{T}(e_k)=0$ pour k pair, $\operatorname{Im}\mathrm{T}_n$ est engendré par la famille $(\mathrm{T}(e_{2k}))_{k\in\mathbb{Z}}$, c'est-à-dire par la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dont on sait qu'elle est libre. La famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est donc une base de $\operatorname{Im}\tilde{\mathrm{T}}=\tilde{\mathrm{E}}$.
Soit $f\in\tilde{\mathrm{E}}$. Comme $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base de $\tilde{\mathrm{E}}$, il existe une famille presque nulle $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{C}^{(\mathbb{Z})}$ telle que $f=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\lambda_k e_k$. f appartient à $\operatorname{Ker}\tilde{\mathrm{T}}$ *si et seulement si* $\tilde{\mathrm{T}}(f)=0$ autrement dit *si et seulement si*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\lambda_k\mathrm{T}(e_k)=0$$

par linéarité de T. Puisque $\mathrm{T}(e_k)=0$ pour k impair et $\mathrm{T}(e_k)=e_{\frac{k}{2}}$ pour k pair, ceci équivaut à

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\lambda_{2k}e_k=0$$

Mais la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ étant libre, ceci équivaut à $\lambda_{2k}=0$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$. Ainsi $f\in\operatorname{Ker}\tilde{\mathrm{T}}$ *si et seulement si* $\lambda_{2k}=0$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$. On en déduit que $\operatorname{Ker}\tilde{\mathrm{T}}=\operatorname{vect}((e_{2k+1})_{k\in\mathbb{Z}})$. La famille $(e_{2k+1})_{k\in\mathbb{Z}}$ étant de plus libre en tant que sous-famille de la famille libre $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, elle est une base de $\operatorname{Ker}\tilde{\mathrm{T}}$.

Partie III – Deux projecteurs

1. Il suffit de remarquer que $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base de $\tilde{\mathrm{E}}$.

2. Soit $k\in\mathbb{Z}$. Alors$\mathrm{Q}(e_k)=\tilde{\mathrm{T}}\circ\mathrm{S}(e_k)=\tilde{\mathrm{T}}(e_{2k})=e_k$. Comme $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base de $\tilde{\mathrm{E}}$, on peut affirmer que $\mathrm{Q}=\mathrm{Id}_{\tilde{\mathrm{E}}}$.

3. Soit $k\in\mathbb{Z}$.
Si k est pair, il existe $p\in\mathbb{Z}$ tel que $k=2p$. Alors $\mathrm{P}(e_k)=\mathrm{S}\circ\tilde{\mathrm{T}}(e_k)=\mathrm{S}(e_p)=e_{2p}=e_k$. A fortiori, $\mathrm{P}\circ\mathrm{P}(e_k)=\mathrm{P}(e_k)=e_k$.
Si k est impair, $\mathrm{P}(e_k)=\mathrm{S}\circ\tilde{\mathrm{T}}(e_k)=\mathrm{S}(0)=0$. A fortiori, $\mathrm{P}\circ\mathrm{P}(e_k)=\mathrm{P}(e_k)=0$.
Comme $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base de $\tilde{\mathrm{E}}$, $\mathrm{P}\circ\mathrm{P}=\mathrm{P}$ et donc P est un projecteur.
Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im}\mathrm{P}$ est engendré par la famille $(\mathrm{P}(e_k))_{k\in\mathbb{Z}}$ et donc par la famille $(e_{2p})_{p\in\mathbb{Z}}$ d'après ce qui précède. Ainsi $\operatorname{Im}\mathrm{P}=\operatorname{vect}\big((e_{2p})_{p\in\mathbb{Z}}\big)$.
Soit $f\in\tilde{\mathrm{E}}$. Comme $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base de $\tilde{\mathrm{E}}$, il existe une famille presque nulle $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{C}^{(\mathbb{Z})}$ telle que $f=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\lambda_k e_k$. f appartient à $\operatorname{Ker}\mathrm{P}$ *si et seulement si* $\tilde{\mathrm{P}}(f)=0$ autrement dit *si et seulement si*
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\lambda_k\mathrm{P}(e_k)=0$$
par linéarité de T. Puisque $\mathrm{P}(e_k)=0$ pour k impair et $\mathrm{P}(e_k)=e_k$ pour k pair, ceci équivaut à
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\lambda_{2k}e_{2k}=0$$
Mais la famille $(e_{2k})_{k\in\mathbb{Z}}$ étant libre, ceci équivaut à $\lambda_{2k}=0$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$. Ainsi $f\in\operatorname{Ker}\mathrm{P}$ *si et seulement si* $\lambda_{2k}=0$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$. On en déduit que $\operatorname{Ker}\mathrm{P}=\operatorname{vect}((e_{2k+1})_{k\in\mathbb{Z}})$. La famille $(e_{2k+1})_{k\in\mathbb{Z}}$ étant de plus libre, elle est une base de $\operatorname{Ker}\mathrm{P}$.