

## SOMMES ET PRODUITS

### SOLUTION 1.

---

Il s'agit bien évidemment à chaque fois d'une somme de termes d'une suite arithmétique.

1. Les termes extrêmes de la somme valent 4 et  $3n-5$  et le nombre de termes est  $n-2$ . Ainsi

$$S_n = \frac{(3n-1)(n-2)}{2}$$

2. Les termes extrêmes de la somme valent  $-3$  et  $2n+1$  et le nombre de termes est  $n+3$ . Ainsi

$$T_n = \frac{(2n-2)(n+3)}{2} = (n-1)(n+3)$$

3. Les termes extrêmes de la somme valent  $4-n$  et  $-3-n$  et le nombre de termes est 8. Ainsi

$$U_n = \frac{(1-2n) \times 8}{2} = 4(1-2n)$$

4. Les termes extrêmes de la somme valent  $n-1$  et  $2n-1$  et le nombre de termes est  $n+1$ . Ainsi

$$V_n = \frac{(3n-2)(n+1)}{2}$$

### SOLUTION 2.

---

Il s'agit à chaque fois d'une somme de termes d'une suite géométrique.

1. La raison vaut 3, le premier terme est 1 et le nombre de termes est  $n-2$ . Ainsi

$$S_n = \frac{3^{n-2}-1}{3-1} = \frac{3^{n-2}-1}{2}$$

2. La raison vaut 2, le premier terme est  $\frac{1}{4}$  et le nombre de termes est  $n+3$ . Ainsi

$$T_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{2^{n+3}-1}{2-1} = \frac{2^{n+3}-1}{4}$$

3. La raison vaut  $\frac{1}{2}$ , le premier terme est  $\frac{16}{2^n}$  et le nombre de termes est 8. Ainsi

$$U_n = \frac{16}{2^n} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{255}{2^{n+3}}$$

4. La raison vaut  $\frac{2}{3}$ , le premier terme est  $\frac{2^{n-1}}{3^{n+2}}$  et le nombre de termes est  $n+1$ . Ainsi

$$V_n = \frac{2^{n-1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2^{n-1}(3^{n+1}-4)}{3^{2n+2}}$$

### SOLUTION 3.

---

On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \ln(k+1) - \ln(k) \right) \\ &= \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) \end{aligned}$$

#### SOLUTION 4.

---

1. Banalissima formula !

$$\sum_{k=p}^q (u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p.$$

2. No comment ...

$$\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1}) = u_q + u_{q-1} - u_{p-4} - u_{p-3}.$$

#### SOLUTION 5.

---

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{(k+2) - k}{2k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \cdot k! &= \sum_{k=1}^n (k+1-1) \cdot k! \\ &= \sum_{k=1}^n ((k+1) \cdot k! - 1 \cdot k!) \\ &= \sum_{k=1}^n ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1 \end{aligned}$$

4. Posons  $u_k = (ak + b)2^k$  et cherchons  $a$  et  $b$  tels que, pour tout entier  $k$ ,  $u_{k+1} - u_k = (k+2)2^k$ . On remarque que

$$\begin{aligned} u_{k+1} - u_k &= (a(k+1) + b)2^{k+1} - (ak + b)2^k \\ &= 2^k (2(a(k+1) + b) - (ak + b)) \\ &= (ak + 2a + b)2^k \end{aligned}$$

En prenant  $a = 1$  puis  $b = 0$  (de sorte que  $2a + b = 2$ ), ou encore, en posant  $u_k = k2^k$  pour tout entier  $k$ , on a bien  $u_{k+1} - u_k = (k+2)2^k$ , d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k+2)2^k &= \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) \\ &= u_{n+1} - u_0 = (n+1)2^{n+1} \end{aligned}$$

5. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= \ln(n+1) - \ln(1) = \ln n \end{aligned}$$

6. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Notons  $S_n$  la somme de l'énoncé.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n (\sin(x/2 + kx) + \sin(x/2 - kx)) \\ &= \sum_{k=0}^n (\sin((k+1/2)x) - \sin((k-1/2)x)) \\ &= \sin((n+1/2)x) - \sin(-x/2) \\ &= \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

#### SOLUTION 6.

L'ensemble  $\{1, \dots, 2n\}$  est la réunion des parties deux à deux disjointes  $\{2p-1, 2p\}$  pour  $p$  variant de 1 à  $n$ . Or  $(-1)^{2p-1}(2p-1) + (-1)^{2p}2p = 2p - (2p-1) = 1$  pour tout  $1 \leq p \leq n$ , donc la somme est égale à  $n$ .

#### SOLUTION 7.

Par linéarité, on décompose cette somme en une différence de deux sommes égales (changement d'indice  $k \leftarrow n+1-k$  dans la deuxième somme). La somme est donc nulle.

#### SOLUTION 8.

On calcule la somme double en sommant d'abord sur  $j$  :

$$\sum_{1 \leq j \leq k \leq n} 2^k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k 2^k = \sum_{k=1}^n k 2^k.$$

On calcule la même somme en sommant d'abord sur  $k$ . D'après la formule de sommation géométrique,

$$\sum_{1 \leq j \leq k \leq n} 2^k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n 2^k = \sum_{j=1}^n (2^{n+1} - 2^j) = n2^{n+1} - (2^{n+1} - 2) = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

#### SOLUTION 9.

$$\sum_{k=2}^n \log\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \log \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \log \frac{(n-1)!(n+1)!}{2(n!)^2} = \log \frac{n+1}{2n}.$$

#### SOLUTION 10.

1. Puisque pour tout  $t \neq \pm 1$ ,

$$\frac{\alpha}{t-1} + \frac{\beta}{t+1} = \frac{(\alpha+\beta)t + \alpha - \beta}{t^2 - 1},$$

il suffit de choisir  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\alpha + \beta = 0 \quad \text{et} \quad \alpha - \beta = 1,$$

c'est-à-dire  $\alpha = -\beta = 1/2$ .

2. On a

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

#### SOLUTION 11.

1. En convenant que  $A_{-1} = 0$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k B_k &= \sum_{k=0}^n (A_k - A_{k-1}) B_k \\ &= \sum_{k=0}^n A_k B_k - \sum_{k=0}^n A_{k-1} B_k \\ &= \sum_{k=0}^n A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{k+1} \\ &= A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (B_k - B_{k+1}) \\ &= A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k \end{aligned}$$

2. On pose  $a_n = 2^n$  et  $B_n = n$ . Avec les conventions de l'énoncé, on a  $A_n = 2^{n+1} - 1$  et  $b_n = 1$ . On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n 2^k k &= (2^{n+1} - 1)n - \sum_{k=0}^{n-1} (2^{k+1} - 1) \\ &= (2^{n+1} - 1)n - 2(2^n - 1) + n \\ &= 2^{n+1}(n - 1) + 2\end{aligned}$$

### SOLUTION 12.

1. On peut considérer  $S_n$  et  $T_n$  comme des fonctions d'une variable réelle. Dans ce cas,  $S_n(x) = xT'_n(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,

$$T_n(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

donc

$$T'_n(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

puis

$$S_n(x) = \frac{x(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1)}{(x-1)^2}$$

De plus, il est clair que  $S_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}$ .

2. L'idée est de faire apparaître un télescope. Pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,

$$(x-1)S_n(x) = \sum_{k=0}^n kx^{k+1} - kx^k = \sum_{k=0}^n (k+1)x^{k+1} - kx^k - \sum_{k=0}^n x^{k+1} = (n+1)x^{n+1} - \frac{x(x^{n+1} - 1)}{x-1}$$

et on trouve à nouveau

$$S_n(x) = \frac{x(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1)}{(x-1)^2}$$

Comme précédemment,  $S_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}$ .

### SOLUTION 13.

On a

$$S_n = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} 3^{n-k+1} \binom{n}{k} = \frac{3}{2} \left[ \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k} \binom{n}{k} - 1 \right] = \frac{3}{2} [(2+3)^n - 1] = \frac{3}{2} [5^n - 1].$$

### SOLUTION 14.

On fixe  $n \in \mathbb{N}$ . Cette formule se prouve alors par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}$ . Elle est banale pour  $p = 0$ . Si elle est vraie au rang  $p$ , on a

$$\sum_{k=0}^{p+1} \binom{n+k}{n} = \sum_{k=0}^p \binom{n+k}{n} + \binom{n+p+1}{n} = \binom{n+p+1}{n+1} + \binom{n+p+1}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$$

d'après la relation de Pascal.

**SOLUTION 15.**

1. Soit  $n \geq 2$ . Posons, pour tout réel  $x$ ,

$$P(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Pour tout réel  $x$ , on a

$$\begin{aligned} P'(x) &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1} \\ &= n(1+x)^{n-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P''(x) &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2} \\ &= n(n-1)(1+x)^{n-2}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} &= P'(1) + P''(1) \\ &= n(n+1)2^{n-2}. \end{aligned}$$

On remarque que cette formule est encore valable pour  $n=0$  et  $n=1$ .

2. Supposons  $n \geq 2$ . Adaptons la méthode précédente. Pour tout réel  $x$ , posons

$$P(x) = \frac{(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}}{2} = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} x^{2k}.$$

Pour tout réel  $x$ , on a

$$\begin{aligned} P'(x) &= \sum_{k=1}^n 2k \binom{2n}{2k} x^{2k-1} \\ &= 2n \frac{(1+x)^{2n-1} - (1-x)^{2n-1}}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P''(x) &= \sum_{k=1}^n 2k(2k-1) \binom{n}{k} x^{2k-2} \\ &= 2n(2n-1) \frac{(1+x)^{2n-2} + (1-x)^{2n-2}}{2}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} &= \frac{P'(1) + P''(1)}{4} \\ &= n(2n+1)2^{2n-4}. \end{aligned}$$

Pour  $n=0$ , la somme est nulle. Pour  $n=1$ , elle vaut 1.

**SOLUTION 16.**

1. D'après la formule du binôme de Newton,  $S_1 = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$  et  $S_2 = (1-1)^{2n} = 0$  car  $n \neq 0$ .
2. En séparant les termes d'indices pairs et d'indices impairs,  $S_1 = T_1 + T_2$  et  $S_2 = T_1 - T_2$ . On en déduit que  $T_1 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2) = 2^{2n-1}$  et  $T_2 = \frac{1}{2}(S_1 - S_2) = 2^{2n-1}$ .
3. Posons  $X_1 = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k}$  et  $X_2 = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (-1)^k$ . Comme précédemment,  $X_1 = (1+1)^{2n-1} = 2^{2n-1}$  et  $X_2 = (1-1)^{2n-1} = 0$ . Puis  $X_1 = U_1 + U_2$  et  $X_2 = U_1 - U_2$  en séparant termes d'indices pairs et impairs. On en déduit à nouveau que  $U_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) = 2^{2n-2}$  et  $U_2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2) = 2^{2n-2}$ .
4. Via un changement de variable et la symétrie des coefficients binomiaux,

$$V_1 = \sum_{\ell=0}^n (n-\ell) \binom{2n}{2n-2\ell} = nT_1 - V_1$$

Ainsi  $V_1 = 2^{2n-2}n$ .

De la même manière,

$$V_2 = \sum_{\ell=0}^{n-1} (n-1-\ell) \binom{2n}{2n-2\ell-1} = (n-1)T_2 - V_2$$

Ainsi  $V_2 = 2^{2n-2}(n-1)$ .

5. Tout d'abord, si  $n = 1$ , il est clair que  $W_1 = W_2 = 0$ . Supposons maintenant  $n \geq 2$ .

D'une part,

$$W_1 + W_2 = \sum_{k=0}^{n-1} k \left( \binom{2n-1}{2k} + \binom{2n-1}{2k+1} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{2n}{2k+1} = V_2 = 2^{2n-2}(n-1)$$

D'autre part,

$$\sum_{k=0}^{2n-1} k(-1)^k \binom{2n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} 2k(-1)^{2k} \binom{2n-1}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)(-1)^{2k+1} \binom{2n-1}{2k+1} = 2W_1 - 2W_2 - U_2$$

et

$$\sum_{k=0}^{2n-1} k(-1)^k \binom{2n-1}{k} = (2n-1) \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \binom{2n-2}{k-1} = -(2n-1) \sum_{k=0}^{2n-2} (-1)^k \binom{2n-2}{k} = -(2n-1)(1-1)^{2n-2} = 0$$

Finalement,  $W_1 + W_2 = 2^{2n-2}(n-1)$  et  $2W_1 - 2W_2 = U_2 = 2^{2n-2}$  donc  $W_1 = 2^{2n-4}(2n-1)$  et  $W_2 = 2^{2n-4}(2n-3)$ .

## SOLUTION 17.

1. C'est parti !

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \max(i, j) + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \max(i, j) + \sum_{i=1}^n \max(i, i) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \max(i, j) + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \max(i, j) + \sum_{i=1}^n i \end{aligned}$$

On remarque alors que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \max(i, j) = \sum_{1 \leq j < i \leq n} \max(i, j),$$

pour ceux qui ne sont pas convaincus, on effectué le changement de variables (muettes !)

$$k = j, \quad l = i,$$

en remarquant que

$$1 \leq k < l \leq n \iff 1 \leq j < i \leq n \quad \text{et} \quad \max(k, l) = \max(i, j).$$

Ainsi

$$U_n = 2S_n + \frac{n(n+1)}{2}$$

, et donc :

$$U_n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.$$

2. C'est immédiat ...

$$V_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i j = \left( \sum_{i=1}^n i \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

3. Ça vire à la routine ...

$$W_n = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=i}^n (j-i) \right) = \sum_{i=1}^n \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i(i+1)}{2}$$

où l'on a effectué le changement de variable (muette !)

$$l = n - i,$$

en remarquant que

$$i \in \llbracket 1, n \rrbracket \iff l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket,$$

ainsi

$$2W_n = \sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}$$

d'où

$$W_n = \frac{n(n^2-1)}{6}.$$

4. Une autre bataille ...

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} i = \sum_{i=1}^{n-1} \left( i \sum_{j=i+1}^n 1 \right) = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) \\ &= n \sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n(n-1)(3n-(2n-1))}{6} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}. \end{aligned}$$

5. La cerise sur le gâteau ...

$$Y_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i j - \sum_{1 \leq j < i \leq n} i j - \sum_{i=1}^n i^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i j - Y_n - \sum_{i=1}^n i^2$$

En effet ,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} i j = \sum_{1 \leq j < i \leq n} i j,$$

ainsi

$$\begin{aligned} 2Y_n &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} i j - \sum_{i=1}^n i^2 = V_n - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

et finalement

$$Y_n = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{24}.$$



**SOLUTION 18.**

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=n+1}^N \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{0 \leq k, n \leq N} \frac{(-1)^k}{k^2} \mathbb{1}_{(0 \leq n < k \leq N)} = \sum_{k=1}^N \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k^2} k.$$

**SOLUTION 19.**

1. On décompose la première somme pour obtenir deux sommes simples à calculer,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n i + \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} j = \sum_{i=1}^n i(n-i) + \sum_{j=1}^n j(j-1).$$

L'indice de sommation étant une variable muette,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j) = \sum_{i=1}^n (i(n-i) + i(i-1)) = \sum_{i=1}^n (n-1)i = \frac{(n-1)n(n+1)}{2}.$$

2. On a,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij = \sum_{j=2}^n j \left( \sum_{i=1}^{j-1} i \right) = \sum_{j=1}^n \frac{j^2(j-1)}{2} = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n j^3 - \sum_{j=1}^n j^2 \right) = \frac{n(n-1)(3n+2)(n+1)}{24}$$

puisque  $\sum_{1 \leq k \leq n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$  et  $\sum_{1 \leq k \leq n} k^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4}.$

**SOLUTION 20.**

On a

$$S = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2j} = \sum_{j=1}^n \frac{j+1}{2} = \frac{n(n+3)}{4}$$

**SOLUTION 21.**

Soit  $n \geq 1$ . On a

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^k \frac{1}{\ell} = \sum_{1 \leq \ell \leq k \leq n} \frac{1}{\ell} \\ &= \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=\ell}^n \frac{1}{\ell} = \sum_{\ell=1}^n \frac{n+1-\ell}{\ell} \\ &= \sum_{\ell=1}^n \frac{n+1}{\ell} - \sum_{\ell=1}^n 1 = (n+1)S_n - n \end{aligned}$$

**SOLUTION 22.**

On calcule la somme double en sommant d'abord sur  $j$  :

$$\sum_{1 \leq j \leq k \leq n} 2^k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k 2^k = \sum_{k=1}^n k 2^k.$$

On calcule la même somme en sommant d'abord sur  $k$ . D'après la formule de sommation géométrique,

$$\sum_{1 \leq j \leq k \leq n} 2^k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n 2^k = \sum_{j=1}^n (2^{n+1} - 2^j) = n 2^{n+1} - (2^{n+1} - 2) = (n-1) 2^{n+1} + 2.$$

### SOLUTION 23.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} S_j(n) &= \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} \sum_{k=0}^n k^j \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} k^j \quad \text{par interversion de l'ordre de sommation} \\ &= \sum_{k=0}^n \left( \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} k^j \right) - k^{p+1} \\ &= \sum_{k=0}^n (k+1)^{p+1} - k^{p+1} = (n+1)^{p+1} \quad \text{via la formule du binôme} \end{aligned}$$

### SOLUTION 24.

On a

$$\begin{aligned} P &= \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{1}{k}\right) \\ &= \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{n+1}{2} \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

### SOLUTION 25.

On trouve  $V = (n!)^{2n}$ ,  $W = (n!)^{2n-2}$ .  $W = \frac{XY}{(n!)^4}$  et  $X = Y$  par symétrie, d'où  $X = (n!)^{n-1} (n!)^2 = (n!)^{n+1}$ , et enfin  $Z = \frac{X}{(n!)^2} = (n!)^{n-1}$ .

### SOLUTION 26.

Pour tout entier naturel  $k \geq 1$ ,  $\frac{1}{k(k+1)} = 1/k - 1/(k+1)$ , donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

et donc

$$\prod_{k=1}^n 2^{1/k(k+1)} = \prod_{k=1}^n \exp\left(\frac{\log 2}{k(k+1)}\right) = \exp\left(\log 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}\right) = \frac{2}{\sqrt[n+1]{2}}.$$

### SOLUTION 27.

1. Soit  $k \geq 2$ . On a

$$\frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{(k+1)(k^2 - k + 1)} = \frac{k-1}{k+1} \times \frac{v_k}{v_{k-1}}$$

en posant  $v_k = k^2 + k + 1$  puisqu'alors  $v_{k-1} = (k-1)^2 + k - 1 + 1 = k^2 - k + 1$ .

2. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} \times \prod_{k=2}^n \frac{v_k}{v_{k-1}} \\ &= \frac{2(n-1)!}{(n+1)!} \frac{v_n}{v_1} = \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)} \end{aligned}$$

après télescopage.

3. On a

$$u_n = \frac{2}{3} \left[ 1 + \frac{1}{n(n+1)} \right]$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}.$$

### SOLUTION 28.

On a pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\cos \frac{\alpha}{2^k} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{\alpha}{2^k}}$  car  $\frac{\alpha}{2^k} \in ]0, \pi[$  et donc le dénominateur de la fraction précédente est non nul. Par conséquent

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=0}^n \frac{\sin \frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{\alpha}{2^k}} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sin 2\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2^n}} \end{aligned}$$

en utilisant un télescopage. Pour déterminer la limite, on écrit :

$$P_n = \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin \frac{\alpha}{2^n}}$$

Or  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$ .

### SOLUTION 29.

Par la méthode du pivot de Gauss...

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{-1} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} -1 \\ \\ + \end{array} \\
 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{2} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Le système de l'énoncé est donc équivalent au système

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ -y - 2t = 1 \\ z - 4t = 1 \end{cases}$$

qu'on résoud en remontant du bas vers le haut. On trouve

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-7t \\ -1-2t \\ 1+4t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi l'ensemble de solutions est une droite  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}^4$ , à savoir

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**SOLUTION 30.**

---

Par la méthode du pivot de Gauss...

$$\begin{pmatrix} -3 & 9 & -2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 8 & -24 & 4 & -12 & -4 & -8 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 7 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ | \cdot \frac{1}{4} \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -3 & 9 & -2 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 7 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow + \left[ \begin{array}{l} 3 \\ -2 \end{array} \right] \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ | \cdot (-1) \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système de l'énoncé est donc équivalent au système

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ \phantom{x_1} \phantom{-3x_2} \phantom{+} x_3 \phantom{-x_4} - x_5 = 4 \\ \phantom{x_1} \phantom{-3x_2} \phantom{+} \phantom{x_3} x_4 - 2x_5 = -2 \end{cases}$$

qu'on résout en remontant du bas vers le haut. On trouve

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 3x_2 + 3x_5 \\ x_2 \\ 4 + x_5 \\ -2 + 2x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \text{où } (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi l'ensemble de solutions est un plan  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{R}^5$ , à savoir

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**SOLUTION 31.**

Par la méthode du pivot de Gauss...

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ -2 & -3 & 3 & b \\ 1 & 1 & -2 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[\leftarrow_+]{\begin{matrix} \boxed{-}^2 \\ \downarrow \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b+2a \\ 0 & -1 & -1 & c-a \end{pmatrix} \xrightarrow{\leftarrow_+} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b+2a \\ 0 & 0 & 0 & a+b+c \end{pmatrix}$$

Le système de l'énoncé est donc équivalent au système

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ \phantom{x} + y + z = b + 2a \\ \phantom{x} + \phantom{y} + 0 = a + b + c \end{cases}$$

qui admet une solution *si et seulement si*  $a + b + c = 0$ . Géométriquement cela signifie qu'un point de  $\mathbb{R}^3$  est une image par l'application

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+2y-z \\ -2x-3y+3z \\ x+y-2z \end{pmatrix}$$

si et seulement si il est dans le plan d'équation  $x + y + z = 0$ .

Dans ce cas le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ y + z = a - c \end{cases}$$

qu'on résoud en remontant du bas vers le haut. On trouve

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c - a + 3z \\ a - c - z \\ z \end{pmatrix} \quad \text{où } z \in \mathbb{R}.$$

Ainsi l'ensemble de solutions est une droite  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}^3$ , à savoir

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 2c - a \\ a - c \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**SOLUTION 32.**

Par la méthode du pivot de Gauss...

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ a & 3 & -1 & 3 \\ 5 & -8 & 1 & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \right] \begin{array}{l} a \\ 5 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \end{array} \begin{array}{l} 5 \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3+2a & -1-a & 3+2a \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3+2a & -1-a & 3+2a \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} -\frac{3}{2}-a \\ -\frac{3}{2}-a \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 5+3a & \frac{3}{2}+a \end{pmatrix}$$

Le système de l'énoncé est donc équivalent au système

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 2 \\ 2y - 4z = 1 \\ (5+3a)z = \frac{3}{2} + a \end{cases}$$

Si  $a = -\frac{5}{3}$ , la dernière ligne se lit  $0 = -\frac{1}{6}$  et donc  $E_{-\frac{5}{3}} = \emptyset$ .

Si  $a \neq -\frac{5}{3}$ , on résout en remontant du bas vers le haut et on trouve une solution unique (dont le calcul n'est pas demandé). Ainsi  $E_a$  n'est jamais un ensemble infini.

### SOLUTION 33.

Méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} -2 \\ \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Le système initial est donc équivalent au système

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 4y - z = -6 \\ \frac{3}{2}z = 3 \end{cases}$$

qu'on résout en remontant. On trouve l'unique solution  $(1, -1, 2)$ .

### SOLUTION 34.

Méthode du pivot de Gauss :

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \leftarrow -2 \\ \leftarrow + \end{array} \right] \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow + \end{array} \right] \\ |2 \leftarrow + \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

Le système initial est donc équivalent au système

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 4y - z = -6 \\ 0 = 6. \end{cases}$$

Puisqu'il n'existe pas de  $x, y, z$  tels que  $0 = 6$ , le système n'a pas de solution.

### SOLUTION 35.

Méthode du pivot de Gauss :

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & a & 2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \leftarrow -1 \\ \leftarrow + \end{array} \right] \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & a-2 & 4 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \leftarrow -1 \\ \leftarrow + \end{array} \right] \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 6+a-a^2 & 3-a \end{array} \right)$$

On factorise  $6+a-a^2 = (3-a)(2+a)$ . Ainsi le système

1. a une seule solution si et seulement si  $(3-a)(2+a) \neq 0$ , ce qui revient à dire que  $a \in \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$ ,
2. n'a pas de solution si et seulement si  $(3-a)(2+a) = 0$  et  $3-a \neq 0$ , ce qui revient à dire que  $a = -2$ ,
3. possède une infinité de solutions  $(3-a)(2+a) = 0$  et  $3-a = 0$ , ce qui revient à dire que  $a = 3$ .

### SOLUTION 36.



## 1. Pivot de Gauss :

$$\left( \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -3 & 17 \\ 5 & -3 & 8 & -10 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{-3} \\ |2 \leftarrow + \\ |2 \leftarrow + \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 7 & -18 & 46 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} \\ |7 \leftarrow + \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 7 & -18 & 46 \\ 0 & 0 & -46 & 46 \end{array} \right)$$

Le système initial est donc équivalent au système

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = -4 \\ \quad 7y - 18z = 46 \\ \quad \quad -46z = 46 \end{cases}$$

qu'on résout facilement en commençant par le bas. On trouve l'unique solution  $(2, 4, -1)$ .

## 2.

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 6 & -11 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{-3} \\ \leftarrow + \\ \quad \quad 02 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -9 & -1 \\ 0 & 5 & -9 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{-1} \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Le système initial est donc équivalent à un système dont une équation est  $0x + 0y + 0z = -1$ , ou encore  $0 = -1$ . Il n'y a pas de  $(x, y, z)$  vérifiant cette équation. Par conséquent le système n'a pas de solution.

**REMARQUE.** On aurait déjà pu le voir une étape plus tôt, car elle contient les équations contradictoires  $5y - 9 = -1$  et  $5y - 9 = -2$ .

■

3. On commence par une permutation de lignes pour obtenir un pivot en haut à gauche.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -5 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -5 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow + \end{array}^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow + \end{array}^{-3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système initial est donc équivalent au système

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2y - z = -2 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

La dernière équation est vérifiée pour tout choix de  $(x, y, z)$ . Elle est donc superflue et peut être omise. En résout les deux équations restantes.

$$\begin{cases} x = 2 - y - z = 2 - y - (2 + 2y) = -3y \\ z = 2 + 2y. \end{cases}$$

Le système admet donc une infinité de solutions, à savoir tous les triplets  $(-3y, y, 2+2y)$  avec  $y \in \mathbb{R}$ . L'ensemble de solutions s'écrit aussi comme

$$\{(0, 0, 2) + y(-3, 1, 2) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

ou encore,

$$(0, 0, 2) + \mathbb{R}(-3, 1, 2).$$

Il s'agit de la droite passant par le point  $(0, 0, 2)$  est dirigée par le vecteur  $(-3, 1, 2)$ .

4. On commence par une permutation de lignes puisque le pivot le plus simple à manipuler est 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \\ 2 & -3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow^{-3} \\ \leftarrow^{-2} \\ \leftarrow^{-2} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & -1 & 18 & -6 \\ 0 & -1 & 9 & -1 \\ 0 & -5 & 22 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow^{-1} \\ \leftarrow^{-5} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & -1 & 18 & -6 \\ 0 & 0 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & -68 & 31 \end{pmatrix}$$

La troisième équation donne  $z = -5/9$  tandis que la quatrième donne  $z = -68/31 \neq -5/9$ . Par conséquent le système n'a pas de solution.

### SOLUTION 37.

En utilisant en cascade la formule de duplication du sinus,

$$\begin{aligned} p \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) \end{aligned}$$

et puisque  $\pi/7 + 5\pi/14 = \pi/2$ ,

$$\begin{aligned} p \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) &= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) \\ &= \frac{1}{4} \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) \end{aligned}$$

et puisque  $2\pi/7 + 3\pi/14 = \pi/2$ ,

$$p \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) = \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) = \frac{1}{8} \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

et puisque  $\frac{3\pi}{7} + \frac{\pi}{14} = \frac{\pi}{2}$ ,

$$p \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) = \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\pi}{14}\right).$$

Comme  $\pi/14 \notin \pi/2[2\pi]$ ,  $\cos(\pi/14) \neq 0$  d'où  $p = \frac{1}{8}$ .

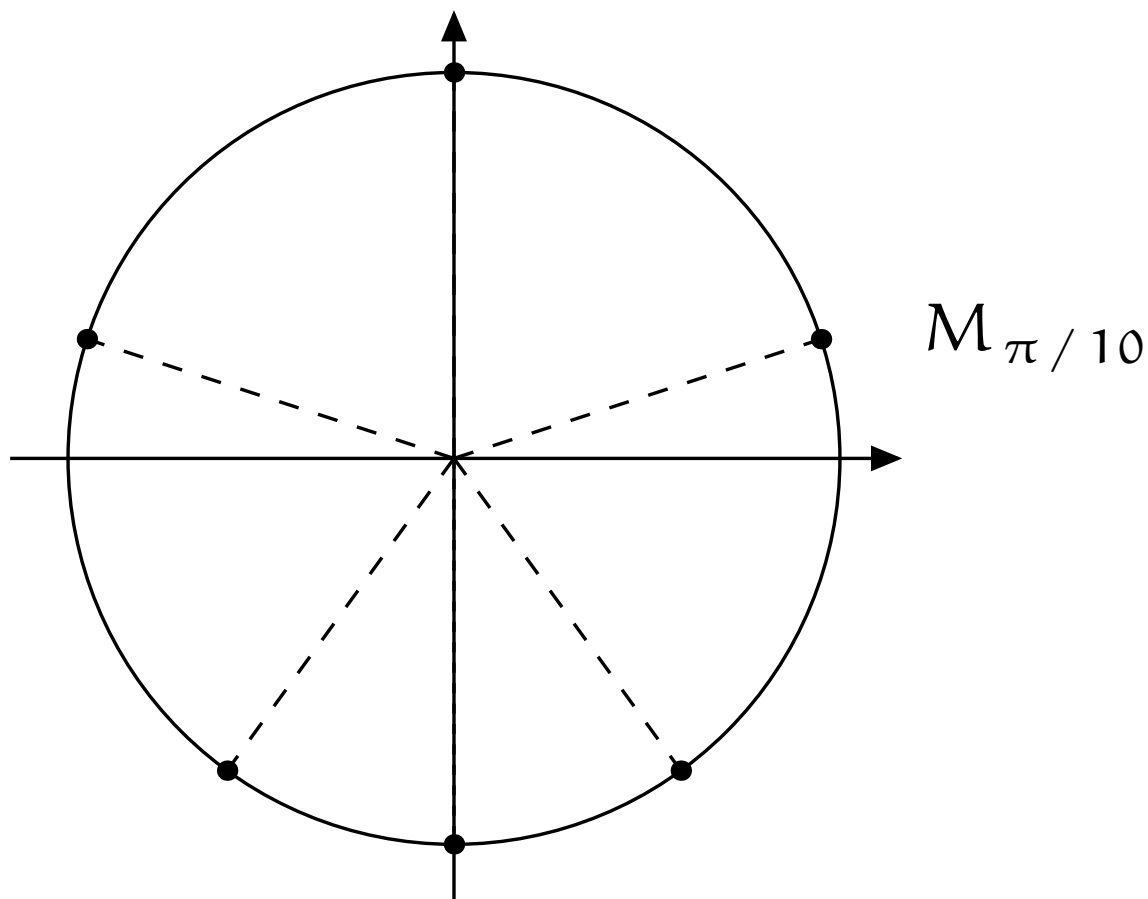
### SOLUTION 38.

1. L'équation est équivalente à  $\cos(3x) = \cos(\pi/2 - 2x)$ . Un réel  $x$  est donc solution *si et seulement si*  $3x \equiv \pi/2 - 2x[2\pi]$  ou  $3x \equiv 2x - \pi/2[2\pi]$ , ie  $5x \equiv \pi/2[2\pi]$  ou  $x \equiv -\pi/2[2\pi]$ , c'est-à-dire  $x \equiv \pi/10[2\pi/5]$  ou  $x \equiv -\pi/2[2\pi]$ . L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}\mathbb{Z} \cup -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}.$$

**REMARQUE.** Voici la représentation géométrique de l'ensemble des solutions.

$$M_{\pi/10 + 2\pi/5}$$



■

2. Posons  $\alpha = \cos(\pi/10)$  et  $\beta = \sin(\pi/10)$ . On sait que pour tout réel  $x$ ,

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Puisque le nombre  $\frac{\pi}{10}$  est une solution de l'équation étudiée à la question 1, on a  $4\alpha^3 - 3\alpha = 2\beta\alpha$ , et comme  $\alpha$  est non nul et  $\alpha^2 = 1 - \beta^2$ , on a  $4(1 - \beta^2) - 3 = 2\beta$ , ie  $4\beta^2 + 2\beta - 1 = 0$ . Ainsi  $\beta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ . Puisque  $0 < \frac{\pi}{10} < \pi$ , on a  $\beta > 0$  et donc  $\beta = \sin(\pi/10) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ . Comme  $\alpha^2 = 1 - \beta^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$ , on a

$$\cos(\pi/5) = 2\cos^2(\pi/10) - 1 = 2\alpha^2 - 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4},$$

puis

$$\sin(\pi/5) = \sqrt{1 - \cos^2(\pi/5)} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$$

**SOLUTION 39.**

Ô formulaire ...

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha}{2} &= \frac{\frac{1}{2}\cos(\pi/18) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\pi/18)}{\sin(\pi/18)\sin(\pi/18)} \\
 &= \frac{\cos(\pi/3)\cos(\pi/18) - \sin(\pi/3)\sin(\pi/18)}{\frac{1}{2}\sin(2 \times \pi/18)} \\
 &= \frac{\cos(\pi/3 + \pi/18)}{\frac{1}{2}\sin(\pi/9)} = \frac{\cos(7\pi/18)}{\frac{1}{2}\sin(\pi/9)} \\
 &= \frac{\sin(\pi/2 - 7\pi/18)}{\frac{1}{2}\sin(\pi/9)} = \frac{\sin(\pi/9)}{\frac{1}{2}\sin(\pi/9)} = 2
 \end{aligned}$$

Ainsi  $\alpha = 4$ .

#### SOLUTION 40.

1. C'est l'esprit de l'exercice 7 qui souffle ici ...

$$\begin{aligned}
 p \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) \\
 &= \frac{1}{4} \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) \\
 &= \frac{1}{8} \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{1}{8} \sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\frac{1}{8} \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)
 \end{aligned}$$

et puisque  $\pi/7 \notin 0[\pi]$ ,  $\sin(\pi/7) \neq 0$  d'où  $p = -\frac{1}{8}$ .

2. Rappelons que  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b).$$

Retroussons nos manches ...

$$2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

d'où

$$4p = 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right).$$

Continuons dans cette voie ...

$$2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)$$

et

$$2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7}\right),$$

ainsi

$$4p = -1 + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7}\right).$$

Puisque  $\frac{5\pi}{7} = \pi - \frac{2\pi}{7}$ ,  $\frac{3\pi}{7} = \pi - \frac{4\pi}{7}$  et  $\frac{\pi}{7} = \pi - \frac{6\pi}{7}$ , on a

$$4p = -1 - s$$

et donc  $s = -\frac{1}{2}$ .

**SOLUTION 41.**

1. Soit  $x \notin 0[\pi]$ . Posons  $t = \tan(x/2)$ . On a alors

$$\frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{2t^2}{2t} = t = \tan(x/2).$$

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après les formules de factorisation, on a

$$\begin{aligned} \sin(x - 2\pi/3) + \sin(x + 2\pi/3) &= 2 \cos(-2\pi/3) \sin(x) \\ &= -\sin(x) \end{aligned}$$

3. Soit  $x \notin \pi/4[\pi/2]$ . On a  $\pi/4 - x = \pi/2 - (x + \pi/4)$ , donc

$$\alpha = \tan(\pi/4 - x) = \frac{1}{\tan(x + \pi/4)}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \alpha + \frac{1}{\alpha} &= \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = \frac{1}{\cos^2(\pi/4 - x)} \times \frac{1}{\tan(\pi/4 - x)} \\ &= \frac{1}{\cos(\pi/4 - x) \sin(\pi/4 - x)} = \frac{2}{\sin(2(\pi/4 - x))} \\ &= \frac{2}{\sin(\pi/2 - 2x)} = \frac{1}{\cos(2x)} \end{aligned}$$

4. Soit  $x \notin 0[\pi/2]$ . On a

$$\frac{1}{\tan(x)} - \tan(x) = \frac{1 - \tan^2(x)}{\tan(x)} = \frac{2}{\tan(2x)}$$

**SOLUTION 42.**

1. On utilise une formule de factorisation :

$$\sin(x) + \sin(5x) = 2 \sin(3x) \cos(2x),$$

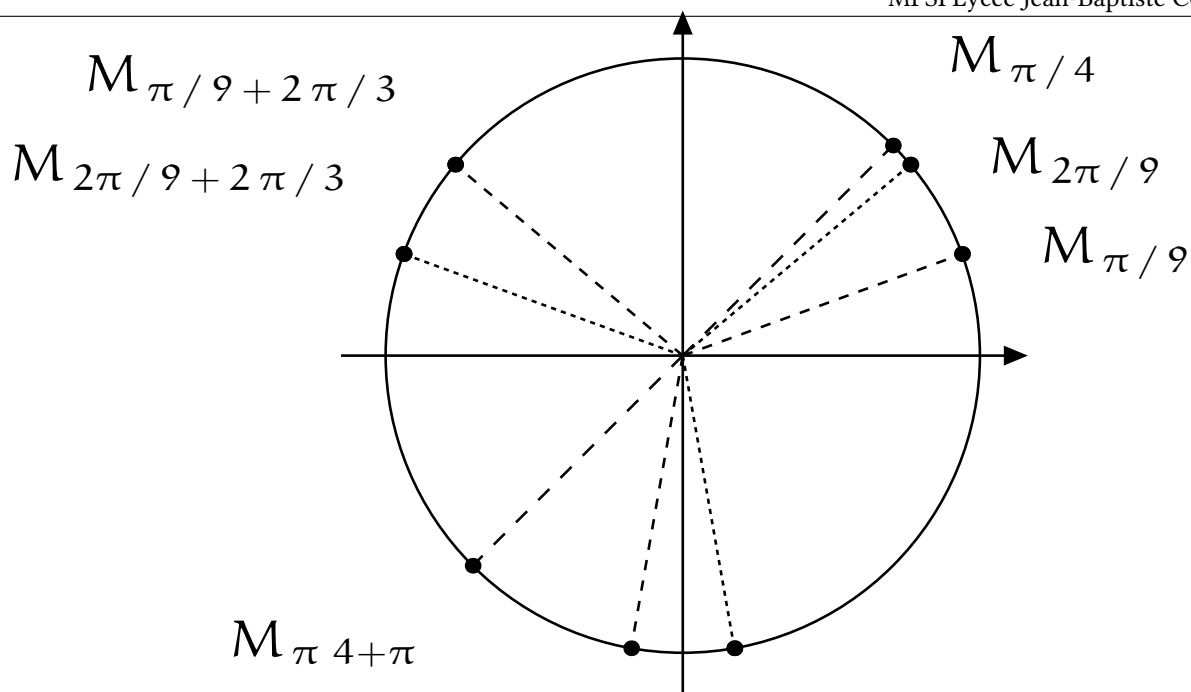
la première équation est donc équivalente à

$$\cos(2x) [\sin(3x) - \sqrt{3}/2] = 0.$$

- Or,  $\cos(2x) = 0$  si et seulement si  $2x \equiv \pi/2[\pi]$  c'est-à-dire  $x \equiv \pi/4[\pi/2]$ .
- On a  $\sin(3x) = \sqrt{3}/2 = \sin(\pi/3)$  si et seulement si  $3x \equiv \pi/3[2\pi]$  ou  $3x \equiv 2\pi/3[2\pi]$ , c'est-à-dire  $x \equiv \pi/9[2\pi/3]$  ou  $x \equiv 2\pi/9[2\pi/3]$ .
- L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \cup \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\mathbb{Z} \cup \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}.$$

**REMARQUE.** Voici la représentation géométrique de l'ensemble des solutions.



■

2. On utilise une formule de factorisation ...

$$\cos(x) - \cos(2x) = 2 \sin(x/2) \cos(3x/2)$$

la deuxième équation est donc équivalente à

$$2 \sin(x/2) \cos(3x/2) = \sin(3x),$$

c'est-à-dire

$$2 \sin(x/2) \cos(3x/2) = 2 \sin(3x/2) \cos(3x/2),$$

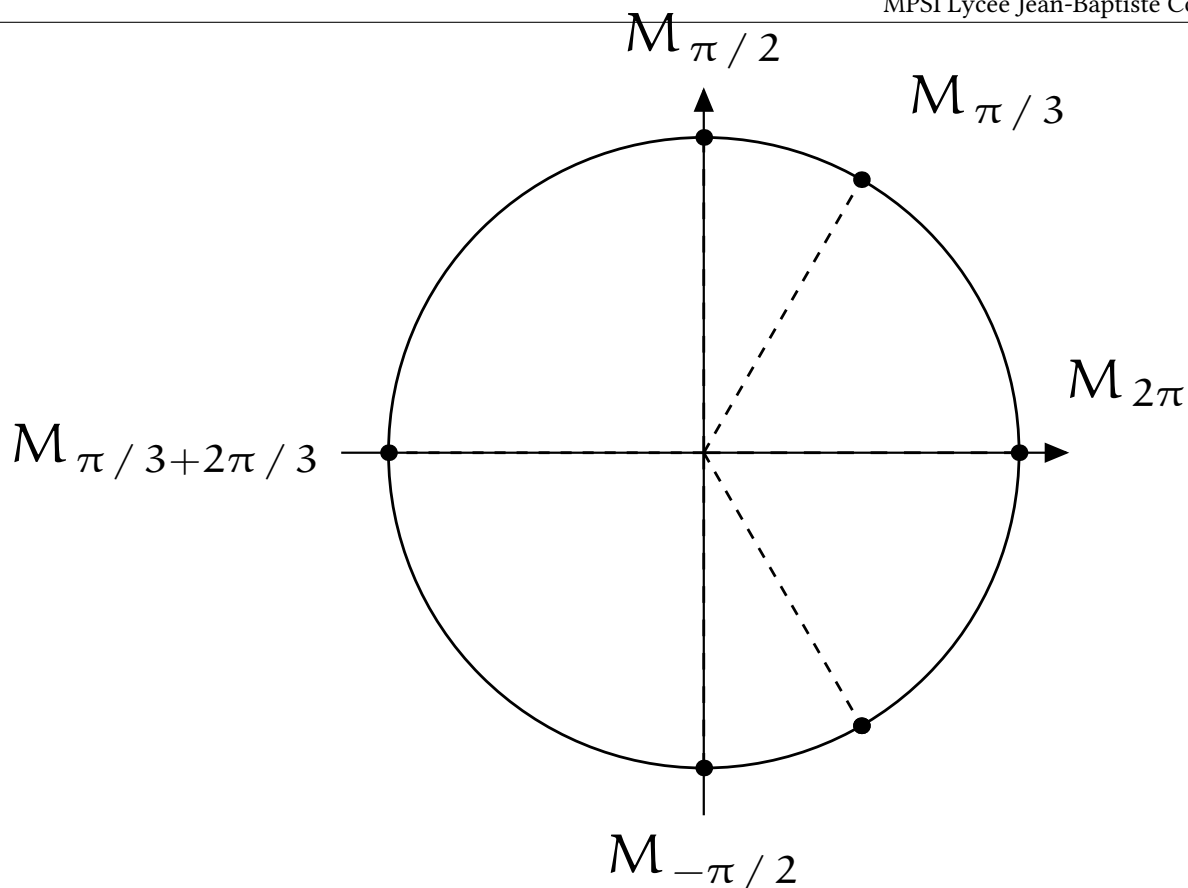
soit finalement :

$$\cos(3x/2) [\sin(x/2) - \sin(3x/2)] = 0.$$

- Or,  $\cos(3x/2) = 0$  si et seulement si  $3x/2 \equiv \pi/2[\pi]$  c'est-à-dire  $x \equiv \pi/3[2\pi/3]$ .
- On a  $\sin(x/2) = \sin(3x/2)$  si et seulement si  $x/2 \equiv 3x/2[2\pi]$  ou  $x/2 \equiv \pi - 3x/2[2\pi]$  c'est-à-dire  $x \equiv 0[2\pi]$  ou  $x \equiv \pi/2[\pi]$ .
- L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = 2\pi\mathbb{Z} \cup \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \cup \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}.$$

**REMARQUE.** Voici la représentation géométrique de l'ensemble des solutions.



■

3. En utilisant une formule de duplication, l'équation s'écrit

$$\sin^2(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x) = 1.$$

► On commence par poser  $y = \sin^2(x)$ ,  $x$  est solution de l'équation *si et seulement si*

$$y + 2y(1 - y) = 1,$$

équation admettant deux racines : 1 et 1/2. Un nombre réel  $x$  est donc solution *si et seulement si*

$$\sin(x) = \pm 1/\sqrt{2} = \sin(\pm\pi/4),$$

ou

$$\sin(x) = \pm 1 = \sin(\pm\pi/2),$$

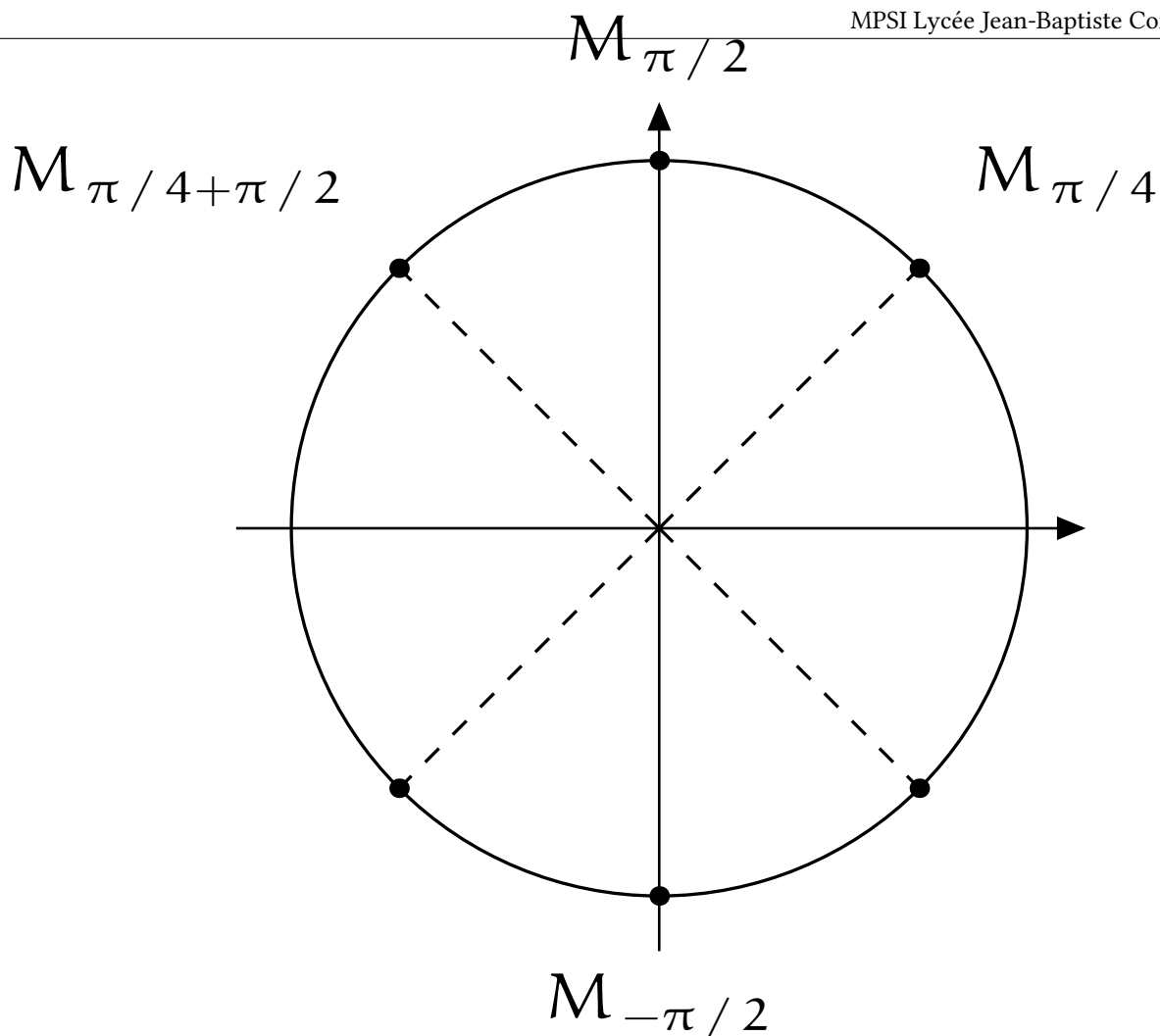
ce qui est équivalent à  $x \equiv \pi/4[\pi]$  ou  $x \equiv 3\pi/4[\pi]$  ou  $x \equiv \pi/2[\pi]$ .

► L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \cup \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

**REMARQUE.** Voici la représentation géométrique de l'ensemble des solutions.





■

4.  $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) + \cos(3x) = 2 \cos(2x) \cos(x)$ . L'équation est donc équivalente à  $\cos(2x)[1 + 2 \cos(x)] = 0$ . Un réel  $x$  est donc solution si et seulement si  $\cos(2x) = 0$  ou  $\cos(x) = -\frac{1}{2} = \cos(2\pi/3)$ .

- La première équation est équivalente à  $2x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ , c'est-à-dire  $x \equiv \frac{\pi}{4}[\pi/2]$ .
- La seconde équation est équivalente à  $x \equiv \pm \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ .
- L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \cup \frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \cup -\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}.$$

5. Puisque  $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ , l'équation est équivalente à

$$2 \sin(x) [\cos(x) + 1/2] = 0.$$

- Un réel  $x$  est donc solution si et seulement si  $\sin(x) = 0$  ou  $\cos(x) = -1/2 = \cos(2\pi/3)$ , c'est-à-dire  $x \equiv 0[\pi]$  ou  $x \equiv \pm 2\pi/3[2\pi]$ .
- L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \pi\mathbb{Z} \cup \frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \cup -\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}.$$

6. Posons  $y = \cos(x)$ . Un réel  $x$  est solution si et seulement si

$$12y^2 - 8(1 - y^2) = 20y^2 - 8 = 2,$$

ie  $y^2 = 2$ , c'est-à-dire  $y = \pm 1/\sqrt{2}$ .

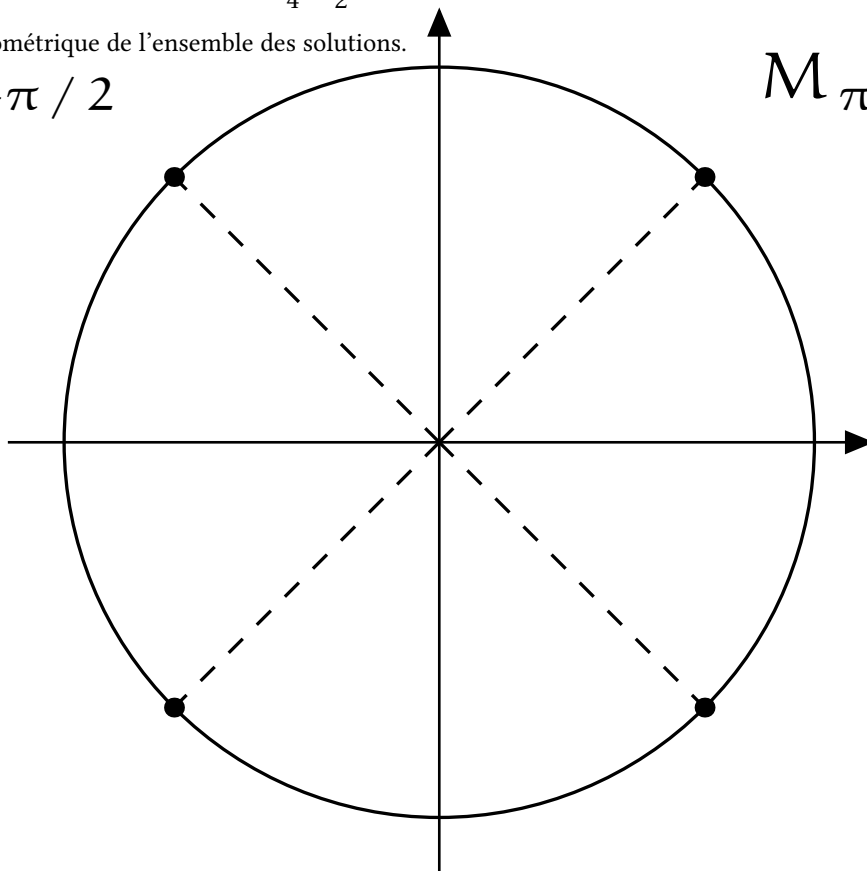
- On a  $\cos(x) = 1/\sqrt{2} = \cos(\pi/4)$  si et seulement si  $x \equiv \pm\pi/4[2\pi]$ .
- On a  $\cos(x) = -1/\sqrt{2} = \cos(3\pi/4)$  si et seulement si  $x \equiv \pm 3\pi/4[2\pi]$ .
- L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

**REMARQUE.** Voici la représentation géométrique de l'ensemble des solutions.

$M_{\pi/4 + \pi/2}$

$M_{\pi/4}$



■

#### SOLUTION 43.

Puisque les fonctions  $x \mapsto \sin x$  et  $x \mapsto \sin 5x$  sont  $2\pi$ -périodiques, on va d'abord résoudre l'équation sur  $[-\pi, \pi]$ .  
 Tout d'abord, les solutions de l'équation  $\sin 5x = \sin x$  sur  $[-\pi, \pi]$  sont  $-\pi, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$  et  $\pi$ .  
 Il s'agit alors de déterminer le signe de  $f : x \mapsto \sin 5x - \sin x$  entre chacune de ces solutions. Puisque  $f$  est continue, elle est de signe constant entre chacune des solutions. Remarquons également que  $f(x) = 2 \sin 2x \cos 3x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

- Puisque  $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} > 0$ ,  $f$  est strictement positive sur  $]0, \frac{\pi}{6}[$ .
- Puisque  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{3\pi}{4} < 0$ ,  $f$  est strictement négative sur  $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$ .
- Puisque  $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 \sin \frac{3\pi}{2} \cos \frac{9\pi}{4} < 0$ ,  $f$  est strictement négative sur  $]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}[$ .
- Puisque  $f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 2 \sin \frac{11\pi}{6} \cos \frac{11\pi}{4} > 0$ ,  $f$  est strictement négative sur  $]\frac{5\pi}{6}, \pi[$ .

Comme  $f$  est impaire, on a facilement le signe de  $f$  entre les racines négatives.  
On en déduit que l'ensemble des solutions de  $\sin 5x \leq \sin x$  sur  $[-\pi, \pi]$  est

$$\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left\{-\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left[-\frac{\pi}{6}, 0\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$$

L'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  est donc

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right] + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\left[-\frac{\pi}{6}, 0\right] + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] + 2\pi\mathbb{Z}\right)$$