Devoir surveillé n°11

NOM : Prénom : Note :

A lire attentivement avant de répondre aux questions

- Cette épreuve comporte 36 questions. Certaines, de numéros consécutifs, sont liées et regroupées dans des parties distinctes.
- Pour chaque question, il peut y avoir 0, 1 ou 2 bonnes réponses.
- Répondre directement sur le sujet : entourer les réponses justes A, B, C, D et barrer les réponses fausses $\cancel{A}$, $\cancel{B}$, $\cancel{C}$,$\cancel{D}$.
- Les questions où toutes les réponses ne sont pas soit entourées soit barrées ne seront pas corrigées.
- Chaque réponse juste entourée et chaque réponse fausse barrée donne 2 points. Inversement, une réponse juste barrée ou une réponse fausse entourée fait perdre 1 point.
- Choisir au plus 24 questions parmi les 36 proposées. Il est inutile de répondre à plus de 24 questions. Seules les 24 premières questions traitées seront corrigées.
- Les calculatrices sont **interdites**.
- Ne pas d'oublier d'indiquer son nom sur le sujet.
- Conseil d'ami : faites marcher votre esprit de déduction et votre bon sens.

Exemple

On considère le polynôme $P = X^2 - 1$.

$\cancel{A}$ 0 est racine de P.	$\cancel{A}$ 0 est racine de P.	$\cancel{A}$ 0 est racine de P.
B 1 est racine de P.	$\cancel{B}$ 1 est racine de P.	B 1 est racine de P.
C -1 est racine de P.	C -1 est racine de P.	C -1 est racine de P.
$\cancel{D}$ P n'admet pas de racine réelle.	$\cancel{D}$ P n'admet pas de racine réelle.	D P n'admet pas de racine réelle.
Question corrigée (8 points)	Question corrigée (5 points)	Question non corrigée (0 point)

Notations

Les lettres $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ désignent respectivement les ensembles des réels, des complexes, des entiers naturels et des entiers relatifs. On rappelle que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, où i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et x est un nombre réel.

Partie I

Question 1

Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. On pose $m = \dfrac{x+y}{2}$, $g = \sqrt{xy}$ et $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$.

On a :

A) $m - x \leqslant 0$
B) $m - x \geqslant 0$
C) $m - y \leqslant 0$
D) $m - y \geqslant 0$

Question 2

La quantité g vérifie :

A) $g - x \geqslant 0$
B) $g - y \geqslant 0$
C) $g - x \leqslant 0$
D) $g - y \leqslant 0$

Question 3

La quantité h vérifie :

A) $h - x \leqslant 0$
B) $h - y \geqslant 0$
C) $h - x \geqslant 0$
D) $h - y \leqslant 0$

Question 4

Les quantités m, g et h vérifient :

A) $m - g \leqslant 0$
B) $h - g \geqslant 0$
C) $m - h \geqslant 0$
D) $h - m \geqslant 0$

Question 5

On en déduit enfin :

A) $x \leqslant m \leqslant g \leqslant h \leqslant y$
B) $x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y$
C) $x \leqslant g \leqslant m \leqslant h \leqslant y$
D) $x \leqslant m \leqslant h \leqslant g \leqslant y$

Partie II

Question 6

Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. On pose $\alpha = z + z^4$ et $\beta = z^2 + z^3$. On montre :

A) $\alpha + \beta = 1$

B) $\alpha + \beta = -1$

C) $\alpha\beta = 1$

D) $\alpha\beta = -1$

Question 7

Les nombres α et β sont les racines du trinôme du second degré :

A) $X^2 + X - 1$

B) $X^2 - X - 1$

C) $X^2 + X + 1$

D) $X^2 - X + 1$

Question 8

On déduit des résultats précédents :

A) $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

B) $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

C) $\cos\frac{6\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin\frac{6\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

D) $\cos\frac{8\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin\frac{8\pi}{5} = -\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

Partie III

Question 9

Soit $I_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, $\forall k \in \mathbb{N}$. On a :

A) $I_0 = \ln(1+\sqrt{2})$

B) $I_0 = \frac{\pi}{2}$

C) $I_1 = \frac{2}{3}\left(1 - 2\sqrt{2}\right)$

D) $I_1 = 1 - \sqrt{2}$

Question 10

Une intégration par parties permet d'exhiber la relation de récurrence :

A) $kI_k = \sqrt{2} + (k-1)I_{k-2}$

B) $kI_k = \sqrt{2} - (k-1)I_{k-2}$

C) $kI_k = -\sqrt{2} + (k-1)I_{k-2}$

D) $kI_k = -\sqrt{2} - (k+1)I_{k-2}$

Question 11

On en déduit :

A) $I_2 = \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{e^{\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}} \right)$

B) $I_3 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$

C) $I_2 = \dfrac{\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$

D) $I_3 = \sqrt{2} - \dfrac{2}{3}$

Partie IV

Question 12

On considère le système linéaire (S) :

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ -2x + y - 2z = -1 \\ x - 2y + 3z = -3 \end{cases}$$

Ce système s'écrit de façon matricielle $AX = B$, avec :

A) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

B) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

C) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

D) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Question 13

Le déterminant de la matrice A vaut :

A) 0, car un des coefficients de la matrice A est nul

B) 1

C) 0, car la somme des coefficients d'une ligne ou d'une colonne de la matrice A est nulle

D) 25

Question 14

Le système (S) :

A) possède une infinité de solutions

B) admet pour unique solution $(x, y, z) = (1, 5, 2)$

C) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^3$

D) admet pour unique solution $(x, y, z) = \left(2, 2, -\dfrac{1}{2}\right)$

Question 15

L'inverse A^{-1} de la matrice A :

A) n'existe pas puisque A n'est pas inversible

B) vaut $A^{-1} = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -3 & 9 & 7 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

C) vaut $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$

D) vaut $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 4 & 9 & 6 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

Partie V

Soit $\theta \in]-\pi;\pi[$. On considère le nombre complexe $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$

Question 16

Le module de z vaut :

A) $|z| = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$

B) $|z| = 2$

C) $|z| = 2\cos(\theta/2)$

D) $|z| = \sqrt{2} + \cos(\theta/2)$

Question 17

Un argument α de z vérifie :

A) $\alpha = (\theta/2) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

B) $\alpha = (\theta/2) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

C) $\tan\alpha = \tan(\theta/2)$

D) $\tan\alpha = \tan(\theta/2) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Question 18

On obtient ainsi :

A) $z = 2\cos(\theta/2)\, e^{i\frac{\theta}{2}}$

B) $z = 2\left|\cos(\theta/2)\right| e^{-i\frac{\theta}{2}}$

C) $z = 2\left|\cos(\theta/2)\right| (\cos|\theta/2| + i\sin|\theta/2|)$

D) $z = 2\cos^2(\theta/2)\,(1 + i\tan(\theta/2))$

Partie VI

Soient a et b des réels vérifiant, pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $a+b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $a-b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Question 19

On a :

A) $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

B) $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

C) $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

D) $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

Question 20

En posant $\theta = \arctan \dfrac{1}{5}$, on en déduit :

A) $\tan(2\theta) = \dfrac{5}{13}$

B) $\tan(2\theta) = \dfrac{5}{12}$

C) $\tan(4\theta) = \dfrac{65}{97}$

D) $\tan(4\theta) = \dfrac{119}{120}$

Question 21

On obtient alors :

A) $\tan\left(4\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{81}{16}$

B) $\tan\left(4\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{239}$

C) $\tan\left(4\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{16}{81}$

D) $\tan\left(4\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{239}$

Question 22

On a :

A) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(\tan x) = x$

B) $\arctan(\tan x) = x$ uniquement si $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$

C) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$

D) $\tan(\arctan x) = x$ uniquement si $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$

Question 23

On déduit des résultats précédents :

A) $\dfrac{\pi}{4} = 4 \arctan \dfrac{1}{5} + \arctan \dfrac{1}{239}$

B) $\dfrac{\pi}{4} = 4 \arctan \dfrac{1}{5} - \arctan \dfrac{1}{239}$

C) $\dfrac{\pi}{4} = 4 \arctan \dfrac{1}{5} + \arctan \dfrac{81}{16}$

D) $\dfrac{\pi}{4} = 4 \arctan \dfrac{1}{5} - \arctan \dfrac{16}{81}$

Question 24

En posant $\varphi = \arctan \frac{1}{2}$ et en calculant $\tan\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$ puis $\tan\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$, on obtient :

A) $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$

B) $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{3}$

C) $\frac{\pi}{4} = 2 \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{7}$

D) $\frac{\pi}{4} = 2 \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{7}$

Partie VII

Dans une entreprise deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. L'atelier n° 1, mieux équipé, a une cadence de production deux fois plus rapide que l'atelier n° 2. Le pourcentage de pièces défectueuses est 3 % pour l'atelier n° 1 et 4 % pour l'atelier n° 2. On prélève au hasard une pièce dans l'ensemble de la production.

Question 25

La probabilité qu'une pièce provienne de l'atelier 1 est :

A) $p(A_1) = \frac{2}{3}$

B) $p(A_1) = \frac{4}{7}$

La probabilité qu'une pièce provienne de l'atelier 2 est :

C) $p(A_2) = \frac{2}{3}$

D) $p(A_2) = \frac{3}{7}$

Question 26

La probabilité qu'une pièce provienne de l'atelier 1 et soit défectueuse est :

A) $p_1 = \frac{3}{100}$

B) $p_1 = \frac{1}{60}$

La probabilité qu'une pièce provienne de l'atelier 2 et soit défectueuse est :

C) $p_2 = \frac{4}{100}$

D) $p_2 = \frac{1}{75}$

Question 27

La probabilité qu'une pièce soit défectueuse est :

A) $p_3 = \frac{7}{200} = 0,035$

B) $p_3 = \frac{1}{30}$

La probabilité qu'une pièce provienne de l'atelier 1 sachant qu'elle est défectueuse est :

C) $p_4 = \frac{4}{7}$

D) $p_4 = \frac{5}{9}$

Partie VIII

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2, pour lequel l'application

$$\Psi : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ (P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt \end{array}$$

définit un produit scalaire sur E. On considère la base (P_0, P_1, P_2) de E, où $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$ et $P_2(t) = t^2$.

Question 28

En posant $Q_0(t) = P_0(t)$, une base orthogonale de E est (Q_0, Q_1, Q_2) avec :

A) $Q_1(t) = t$

B) $Q_1(t) = t + 1$

C) $Q_2(t) = t^2 - \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{3}$

D) $Q_2(t) = t^2 - \dfrac{1}{3}$

Question 29

La base orthonormée associée est alors (R_0, R_1, R_2) avec :

A) $R_0(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et $R_1(t) = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\dfrac{(t+1)}{2}$

B) $R_0(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et $R_1(t) = t\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

C) $R_2(t) = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}\left(t^2 - \dfrac{1}{3}\right)$

D) $R_2(t) = 3\sqrt{\dfrac{10}{31}}\left(t^2 - \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{3}\right)$

Question 30

En posant $S_0(t) = P_2(t)$, une base orthogonale de E est (S_0, S_1, S_2) avec :

A) $S_1(t) = t$

B) $S_1(t) = t - \dfrac{5}{4}t^2$

C) $S_2(t) = 1 - \dfrac{5}{3}t^2$

D) $S_2(t) = t^2 - \dfrac{1}{3}$

Question 31

La base orthonormée associée est alors (T_0, T_1, T_2) avec :

A) $T_0(t) = \sqrt{\dfrac{5}{2}}t^2$, et $T_1(t) = 2\sqrt{\dfrac{6}{31}}\left(t - \dfrac{5}{4}t^2\right)$

B) $T_0(t) = \sqrt{\dfrac{5}{2}}t^2$, et $T_1(t) = t\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

C) $T_2(t) = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\left(1 - \dfrac{5}{3}t^2\right)$

D) $T_2(t) = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}\left(t^2 - \dfrac{1}{3}\right)$

Partie IX

Équations : les questions 32 à 36 peuvent être traitées de façon indépendante.

Question 32

L'équation $\sin 4x + \sin 3x = \sin x$ admet pour solutions :

A) $S = \left\{ \pi + 2k\pi ; -\pi + 2k\pi ; \dfrac{2k\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ \text{avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

B) $S = \left\{ \pi + 4k\pi ; -\pi + 4k\pi ; \dfrac{k\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ \text{avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

C) $S = \left\{ \pi + 4k\pi ; -\pi + 2k\pi ; \dfrac{2k\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{4},\ \text{avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

D) $S = \left\{ \pi + 2k\pi ; -\pi + 4k\pi ; \dfrac{2k\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ \text{avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

Question 33

Les solutions de l'équation $\cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2}$ sont :

A) $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

B) $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

C) $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

D) $x = \dfrac{-7\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

Question 34

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $\sin z = 3$:

A) admet des solutions de la forme $z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi - i \ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$

B) admet des solutions de la forme $z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi - i \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$

C) admet des solutions de la forme $z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi + i \ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$

D) n'admet pas de solution

Question 35

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère le système d'équations :

$$(S) \quad \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

A) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, le système admet une solution unique

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1+a}{2+a}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2} \right)$$

B) Si $a = -2$, le système (S) admet une infinité de solutions

C) Si $a = 0$, alors tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est solution de (S)

D) Si $a = 1$, le système (S) admet une infinité de solutions

Question 36

Soit le système d'équations

$$(S) \quad \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{3} \\ \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Les solutions de (S) sont :

A) $\left\{\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\left(-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

B) $\left\{\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, -\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{2k\pi}{3}\right), k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\left(-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2} - 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

C) $\left\{\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, -\dfrac{\pi}{6} - 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\left(-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} - 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

D) $\left\{\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}\right), k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\left(-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$