Devoir surveillé n°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

On définit la suite (F_n) par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite (F_n) est positive.
2. Montrer que la suite (F_n) est croissante.
   En particulier, $F_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ de sorte que l'on peut poser $G_n = \arctan\left(\frac{1}{F_n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $F_nF_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que $F_{2n+1} = \dfrac{F_{2n+2}F_{2n+3} - 1}{F_{2n+2} + F_{2n+3}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que $G_{2n+1} = G_{2n+2} + G_{2n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. En déduire que pour pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$G_{2n+1} + \sum_{k=1}^{n} G_{2k} = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 2.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $\operatorname{sh}(\alpha) = 1$.
2. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^\alpha \operatorname{sh}(t)^n \,dt$. Déterminer le sens de variation de la suite (I_n).
3. Justifier que (I_n) converge. On ne cherchera pas à calculer sa limite pour l'instant.
4. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \displaystyle\int_0^\alpha \operatorname{sh}(t)^n \operatorname{ch}(t)^2 \,dt$. Montrer que $I_n + I_{n+2} = J_n$.
5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_n = \dfrac{1}{n+1}\operatorname{ch}(\alpha) - \dfrac{1}{n+1}I_{n+2}$. En déduire une relation entre I_{n+2} et I_n.
6. En déduire la limite de la suite (I_n).

EXERCICE 3.

1. Soit g une fonction paire, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\int_0^{2\pi} g(t)\ dt = 2\int_0^{\pi} g(t)\ dt$$
2. On pose pour $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$,
$$f_r(\theta) = r^2 - 2r\cos\theta + 1$$
Montrer que
$$\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ f_r(\theta) > 0$$
3. On pose pour $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
$$I(r) = \int_0^{\pi} \ln(f_r(\theta))\ d\theta$$
A l'aide d'un changement de variable, montrer que
$$\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ I(-r) = I(r)$$
4. En remarquant que $2I(r) = I(r) + I(-r)$, montrer que
$$\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ 2I(r) = I(r^2)$$
5. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ 2^n I(r) = I(r^{2^n})$$
6. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $|r| < 1$. Montrer que
$$2\pi\ln(1 - |r|) \leqslant I(r) \leqslant 2\pi\ln(1 + |r|)$$
7. En déduire que $I(r) = 0$ lorsque $|r| < 1$.
8. Montrer également que
$$\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ I\left(\frac{1}{r}\right) = I(r) - 2\pi\ln(|r|)$$
9. En déduire la valeur de $I(r)$ lorsque $|r| > 1$.

EXERCICE 4.

Tracer les graphes des fonctions $f = \arcsin \circ \cos$ et $g = \arccos \circ \sin$ sur l'intervalle $[-4\pi, 4\pi]$.
On justifiera ces tracés.