Devoir à la maison n°08

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Partie I – Étude de deux suites

Soient a et b deux réels positifs. On considère désormais les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = a \qquad\qquad v_0 = b$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont alors bien définies et positives, ce que l'on ne demande pas de prouver.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$.

2. Déterminer le sens de variation des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$0 \leq v_n - u_n \leq \frac{v_1 - u_1}{2^{n-1}}$$

5. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune que l'on notera $\mathrm{M}(a, b)$.

Partie II – Propriétés de la moyenne arithmético-géométrique

Soient a et b deux réels positifs.

1. Montrer que $\mathrm{M}(a, b) = \mathrm{M}\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$.

2. Montrer que $\mathrm{M}(a, b) = \mathrm{M}(b, a)$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\mathrm{M}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathrm{M}(a, b)$.

4. Montrer que $\sqrt{ab} \leq \mathrm{M}(a, b) \leq \frac{a+b}{2}$.

Partie III – Étude d'une fonction

On pose $F(x) = M(1, x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

2. Montrer que F est positive sur $\mathbb{R}_+$.

3. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

4. **a.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\sqrt{x} \leq F(x) \leq \frac{1+x}{2}$$

b. Montrer que F est dérivable en 1 et calculer $F'(1)$.

5. **a.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$F(x) = \frac{1}{2}(1+x)F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

b. En déduire que F est continue en 0. F est-elle dérivable en 0 ?

6. **a.** Préciser la limite de F en $+\infty$.

b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$F(x) = xF\left(\frac{1}{x}\right)$$

c. En déduire que $F(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(x)$.

d. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$F(x) = \sqrt{x}F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$$

e. En déduire que $\sqrt{x} \underset{x \to +\infty}{=} o(F(x))$.

7. **a.** Écrire une fonction en Python d'arguments $x \in \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ donnant une valeur approchée de $F(x)$ à ε près.

b. Représenter sur le même graphe, les courbes représentatives des fonctions F, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \frac{1+x}{2}$. On effectuera si possible le tracé à l'aide du package `matplotlib` du langage Python ou, à défaut, à la main.