Semaine du 14/11 au 18/11

1 Cours

Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle, puissances, logarithme Étude générale de ces trois types de fonctions, propriétés algébriques, croissances comparées des fonctions exponentielle, puissances et logarithme.

Fonctions trigonométriques Rappel sur les fonctions trigonométriques. Les formules usuelles de trigonométrie (addition, duplication, factorisation) sont à connaître.

Fonctions trigonométriques réciproques Définition. Ensembles de départ et d'arrivée. Dérivées. Étude des fonctions. Formules usuelles.

Primitives et intégrales

Primitives Définition. Théorème fondamental de l'analyse. Application au calcul d'intégral.

Intégrales Linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles, inégalité triangulaire. Une intégrale d'une fonction continue de signe constant est nulle **si et seulement si** cette fonction est nulle.

Méthodes de calcul Intégration par parties. Changement de variable.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour étudier une expression du type $f(x)^{g(x)}$, mettre cette expression sous forme exponentielle $\exp\big(g(x)\ln(f(x))\big)$.
- Savoir utiliser les croissances comparées.
- Connaître les intervalles de validité des identités du type $\arcsin(\sin x) = x$ ou $\sin(\arcsin x) = x$.
- Savoir utiliser l'injectivité des fonctions usuelles sur des intervalles adéquats.
- Savoir établir des identités par dérivation.
- Connaître les graphes de arcsin, arccos, arctan pour retrouver parité, dérivées, ensembles de définition, images, ...
- Dériver une intégrale à bornes variables.
- Passer éventuellement en complexes pour le calcul d'intégrales et de primitives faisant intervenir les fonctions sin et cos.
- Étudier des suites d'intégrale (sens de variation, limite).
- Faire attention à l'ordre des bornes lorsque l'on parle de positivité ou de croissance de l'intégrale.
- Intégrer par parties.
- Changement de variables.

3 Questions de cours

- Donner la définition d'une des trois fonctions arccos, arcsin et arctan au choix de l'examinateur puis déterminer son domaine de dérivabilité et calculer une expression de sa dérivée sur ce domaine.
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
- Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$.
- Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.
- Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$). Montrer que f est nulle sur $[a, b]$ **si et seulement si** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$.
- En considérant la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n e^t}{n!}\,dt$, montrer que $e = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.