Devoir surveillé n° 3 : corrigé

Solution 1.

1. On rappelle que $\cos(\arccos x) = x$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

- Pour tout $x \in [-1, 1]$, $T_0(x) = \cos(0) = 1$.
- Pour tout $x \in [-1, 1]$, $T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$.
- Pour tout $x \in [-1, 1]$, $T_2(x) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$.

2.

$$\begin{aligned} T_n(0) &= \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \\ T_n(1) &= \cos(0) = 1 \\ T_n(-1) &= \arccos(n\pi) = (-1)^n \end{aligned}$$

3. **a.** Soit $x \in [-1, 1]$. D'une part, $\cos(\arccos(-x)) = -x$. D'autre part, $\cos(\pi - \arccos(x)) = -\cos(\arccos(x)) = -x$. Ainsi $\cos(\arccos(-x)) = \cos(\pi - \arccos(x))$.
De plus, $\arccos(-x) \in [0, \pi]$ et $\arccos(x) \in [0, \pi]$ donc $\pi - \arccos(x) \in [0, \pi]$. Les réels $\arccos(-x)$ et $\pi - \arccos(x)$ appartiennent tous deux à l'intervalle $[0, \pi]$ et ont la même image par cos qui est injective sur $[0, \pi]$ car strictement monotone sur cet intervalle. On en déduit que $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$.

b. Pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} T_n(-x) &= \cos(n \arccos(-x)) \\ &= \cos(n(\pi - \arccos(x))) && \text{d'après la question précédente} \\ &= \cos(n\pi - n\arccos(x)) \\ &= (-1)^n \cos(-n\arccos(x)) \\ &= (-1)^n \cos(n\arccos(x)) && \text{par parité de cos} \\ &= (-1)^n T_n(x) \end{aligned}$$

On en déduit que T_n a la parité de n.

4. **a.** Pour $t \in [0, \pi]$, $\arccos(\cos(t)) = t$ donc $T_n(\cos(t)) - \cos(nt) = \cos(nt) - \cos(nt) = 0$. Autrement dit, g_n est nulle sur $[0, \pi]$.

b. g_n est paire car cos est paire donc g_n est également nulle sur $[-\pi, \pi]$. De plus, g_n est 2π-périodique par 2π-périodicité de cos donc g_n est nulle sur $\mathbb{R}$. On en déduit le résultat demandé.

5. Soit $x \in [-1, 1]$. Posons $t = \arccos x$ de sorte que $x = \cos t$. Alors

$$T_m \circ T_n(x) = T_m(T_n(\cos t)) = T_m(\cos(nt)) = \cos(mnt) = T_{mn}(\cos t) = T_{mn}(x)$$

d'après la question **4.b**.

6. **a.** D'après la question **4.b**, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(t)) - 2\cos(t)T_{n+1}(\cos(t)) + T_n(\cos t) &= \cos((n+2)t) - 2\cos(t)\cos((n+1)t) + \cos(nt) \\ &= \cos((n+2)t) + \cos(nt) - 2\cos(t)\cos((n+1)t) \\ &= 2\cos\left(\frac{(n+2)t + nt}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+2)t - nt}{2}\right) - 2\cos(t)\cos((n+1)t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Soit $x \in [-1, 1]$. Posons $t = \arccos x$ de sorte que $x = \cos t$. Il suffit alors d'appliquer la relation précédente pour obtenir

$$T_{n+2}(x) - 2xT_{n+1}(x) + T_n(x) = 0$$

b. Pour tout $x \in [-1,1]$,

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x$$
$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3-3x) - (2x^2-1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

7. **a.** T_0 et T_1 sont clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$. Supposons T_n et T_{n+1} de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Puisque $x \mapsto x$ est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$, $x \mapsto 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ autrement dit T_{n+2} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$. Par récurrence double, T_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. L'expression définissant T_n permet seulement de montrer que T_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ puisque arccos n'est de classe $\mathcal{C}^\infty$ que sur $]-1,1[$ et non sur $[-1,1]$.

b. On sait d'après la question **4.b** que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$$

En dérivant une première fois cette relation, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$-\sin(t)T_n'(\cos(t)) = -n\sin(nt)$$

En dérivant une seconde fois, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$-\cos(t)T_n'(\cos(t)) + \sin^2(t)T_n''(\cos(t)) = -n^2\cos(nt)$$

ou encore

$$\sin^2(t)T_n''(\cos(t)) - \cos(t)T_n'(\cos(t)) + n^2\cos(nt) = 0$$

ce qui, d'après la question **4.b** s'écrit encore

$$\sin^2(t)T_n''(\cos(t)) - \cos(t)T_n'(\cos(t)) + n^2T_n(\cos t) = 0$$

On peut également dire que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(1-\cos^2(t))T_n''(\cos(t)) - \cos(t)T_n'(\cos(t)) + n^2T_n(\cos t) = 0$$

Soit $x \in [-1,1]$. En posant $t = \arccos x$ de sorte que $x = \cos t$ et en appliquant la relation précédente, on obtient le résultat voulu.

8. **a.**

$$\begin{aligned}
& T_n(x) = 0 \\
\iff & \cos(n\arccos(x)) = 0 \\
\iff & n\arccos(x) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \\
\iff & \exists k \in \mathbb{Z},\ n\arccos x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\
\iff & \exists k \in \mathbb{Z},\ \arccos x = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \\
\iff & \exists k \in [\![0,n-1]\!],\ \arccos x = \frac{(2k+1)\pi}{2n} && \text{car arccos est à valeurs dans } [0,\pi] \\
\iff & \exists k \in [\![0,n-1]\!],\ x = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) && \text{car } \frac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0,\pi] \text{ pour tout } k \in [\![0,n-1]\!]
\end{aligned}$$

L'équation $T_n(x) = 0$ admet donc pour solutions les réels $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k \in [\![0,n-1]\!]$. Ces réels sont bien distincts deux à deux puisque $\frac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0,\pi]$ pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$ et que cos est injective sur $[0,\pi]$.

b. Puisque cos est à valeurs dans $[-1,1]$, T_n l'est également. On cherche donc les réels $x \in [-1,1]$ tels que $T_n(x) = 1$ ou $T_n(x) = -1$.

$$\begin{aligned}
& T_n(x) = 1 \text{ OU } T_n(x) = -1 \\
\iff & \cos(n\arccos(x)) = 1 \text{ OU } \cos(n\arccos x) = -1 \\
\iff & n\arccos(x) \equiv 0[\pi] \\
\iff & \exists k \in \mathbb{Z},\ n\arccos x = k\pi \\
\iff & \exists k \in \mathbb{Z},\ \arccos x = \frac{k\pi}{n} \\
\iff & \exists k \in [\![0,n]\!],\ \arccos x = \frac{k\pi}{n} && \text{car arccos est à valeurs dans } [0,\pi] \\
\iff & \exists k \in [\![0,n]\!],\ x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) && \text{car } \frac{k\pi}{n} \in [0,\pi] \text{ pour tout } k \in [\![0,n]\!]
\end{aligned}$$

T_n admet donc ses extrema en les $\cos\frac{k\pi}{n}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

9. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\cos t) = \cos(nt) = \frac{1}{2}\left(e^{int} + e^{-int}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(e^{it}\right)^n + \left(e^{-it}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\left[(\cos(t) + i\sin(t))^n + (\cos(t) - i\sin(t))^n\right]$$

Soit $x \in [-1, 1]$. Posons $t = \arccos x$. La relation précédente donne

$$T_n(\cos(\arccos x)) = \frac{1}{2}\left[(\cos(\arccos x) + i\sin(\arccos x))^n + (\cos(\arccos x) - i\sin(\arccos x))^n\right]$$

autrement dit

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right]$$

Solution 2.

1. $F_0 = 1 \geqslant 0$ et $F_1 = 1 \geqslant 0$. Supposons $F_n \geqslant 0$ et $F_{n+1} \geqslant 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \geqslant 0$. Par récurrence double, $F_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (F_n) est donc positive.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+1} - F_n = F_{n-1} \geqslant 0$ et $F_1 - F_0 = 0 \geqslant 0$. Finalement, $F_{n+1} - F_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui prouve la croissance de la suite (F_n).

3. Puisque $F_2 = F_0 + F_1 = 2$, $F_0F_2 = 2 = F_1^2 + (-1)^0$. Supposons que $F_nF_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
F_{n+1}F_{n+3} &= F_{n+1}(F_{n+1} + F_{n+2}) \\
&= F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_{n+2} \\
&= F_nF_{n+2} - (-1)^n + F_{n+1}F_{n+2} \\
&= F_{n+2}(F_n + F_{n+1}) + (-1)^{n+1} \\
&= F_{n+2}^2 + (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

Par récurrence, $F_nF_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
F_{2n+1}(F_{2n+2} + F_{2n+3}) &= F_{2n+1}F_{2n+2} + F_{2n+1}F_{2n+3} \\
&= F_{2n+1}F_{2n+2} + F_{2n+2}^2 + (-1)^{2n+1} && \text{d'après la question}\mathbf{3} \\
&= F_{2n+2}(F_{2n+1} + F_{2n+2}) - 1 \\
&= F_{2n+2}F_{2n+3} - 1
\end{aligned}$$

On en déduit que $F_{2n+1} = \dfrac{F_{2n+2}F_{2n+3} - 1}{F_{2n+2} + F_{2n+3}}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, $G_{2n+1} = \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. La suite (F_n) étant croissante, $F_{2n+2} \geqslant F_2 = 2 > 1$ et $F_{2n+3} \geqslant F_2 = 2 > 1$ donc $0 \leqslant \frac{1}{F_{2n+2}} < 1$ et $0 \leqslant \frac{1}{F_{2n+3}} < 1$. Par stricte croissance de arctan, $0 \leqslant G_{2n+2} < \frac{\pi}{4}$ et $0 \leqslant G_{2n+3} < \frac{\pi}{4}$ et a fortiori, $G_{2n+2} + G_{2n+3} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Par ailleurs, $\tan(G_{2n+1}) = \frac{1}{F_{2n+1}}$ et

$$\begin{aligned}
\tan(G_{2n+2} + G_{2n+3}) &= \frac{\tan(G_{2n+2}) + \tan(G_{2n+3})}{1 - \tan(G_{2n+2})\tan(G_{2n+3})} \\
&= \frac{\frac{1}{F_{2n+2}} + \frac{1}{F_{2n+3}}}{1 - \frac{1}{F_{2n+2}}.\frac{1}{F_{2n+3}}} \\
&= \frac{F_{2n+2} + F_{2n+3}}{F_{2n+2}F_{2n+3} - 1} \\
&= \frac{1}{F_{2n+1}} && \text{d'après la question précédente} \\
&= \tan(G_{2n+1})
\end{aligned}$$

Puisque la fonction tan est injective sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $G_{2n+1} = G_{2n+2} + G_{2n+3}$.

6. D'après la question **5** $G_{2n} = G_{2n-1} - G_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} G_{2k} &= \sum_{k=1}^{n} G_{2k-1} - G_{2k+1} \\
&= G_1 - G_{2n+1} \qquad \text{par télescopage} \\
&= \arctan(1) - G_{2n+1} \\
&= \frac{\pi}{4} - G_{2n+1}
\end{aligned}$$

On en déduit le résultat demandé.

Solution 3.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) \geqslant 1 > 0$ et th est définie sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Le domaine de définition de $\mathbb{R}$ est bien symétrique par rapport à 0. Il alors suffit d'utiliser le fait que ch est paire et que th est impaire.

3. ch induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$. Comme $e \in [1, +\infty[$, e admet un unique antécédent par ch dans $\mathbb{R}_+$. L'équation $\text{ch}(x) = e$ admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.

4. On sait que ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, si $0 \leqslant x < a$, $\text{ch}(x) < e$ et donc $\ln(\text{ch}(x)) < 1$ par stricte croissance de ln. De même, si $x > a$, $\text{ch}(x) > e$ puis $\ln(\text{ch}\, x) > 1$.
Comme la fonction $x \mapsto \ln(\text{ch}\, x)$ est paire, on a également $\ln(\text{ch}\, x) < 1$ si $-a < x \leqslant 0$ et $\ln(\text{ch}\, x) > 1$ si $x < -a$.
En résumé, si $|x| < a$, $\ln(\text{ch}\, x) < 1$ et si $|x| > a$, $\ln(\text{ch}\, x) > 1$.

5. ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\ln \circ \text{ch}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme th est également dérivable sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \text{th}(x)\ln(\text{ch}\, x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Puisque $x \mapsto x$ est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 - \frac{\ln(\text{ch}(x))}{\text{ch}^2 x} - \text{th}(x)^2 \\
&= \frac{1 - \ln(\text{ch}(x))}{\text{ch}^2 x}
\end{aligned}$$

6. Comme $\frac{1}{\text{ch}^2 x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(\text{ch}(x))$. D'après la question précédente, $f'(x) < 0$ pour $|x| < a$ et $f'(x) < 0$ pour $|x| > a$.
La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty, -a]$, strictement croissante sur $[-a, a]$ puis strictement décroissante sur $[a, +\infty[$.

7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\ln(\text{ch}(x)) &= \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\
&= \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-2x}) - \ln(2) \\
&= x - \ln(2) + \ln(1 + e^{-2x})
\end{aligned}$$

8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x(1 - \text{th}(x)) = \frac{2xe^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Par croissances comparées, on déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - \text{th}(x)) = 0$.

9. D'après une question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x - \text{th}(x)\ln(\text{ch}(x)) \\
&= x - \text{th}(x)[x - \ln(2) + \ln(1 + e^{-2x})] \\
&= \ln(2)\,\text{th}(x) + x(1 - \text{th}(x)) - \text{th}(x)\ln(1 + e^{-2x})
\end{aligned}$$

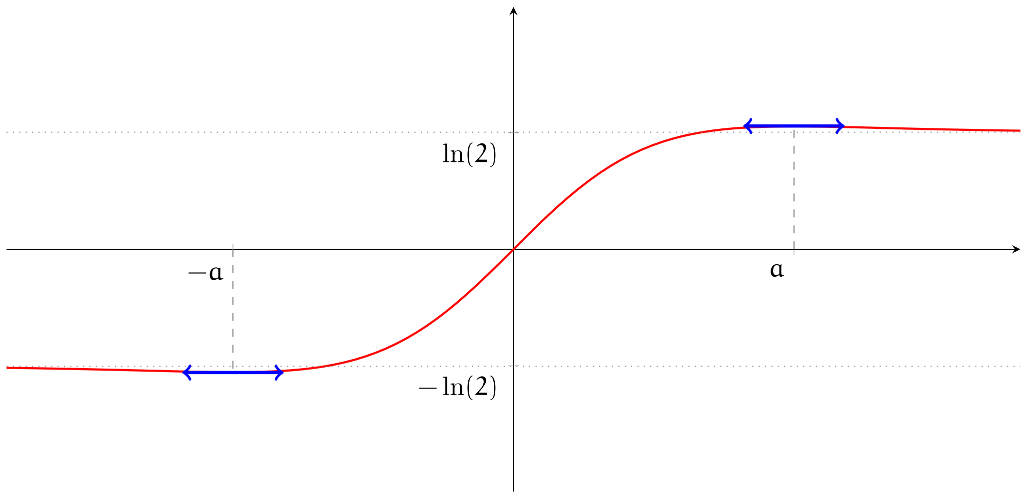
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - \text{th}(x)) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{th}(x) = 1$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln(2)$$

puis par imparité de f :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\ln(2)$$

10. On déduit des questions précédentes l'allure du graphe de f :



Solution 4.

---

1. $f(z)$ est défini *si et seulement si* $e^z + e^{-z} \neq 0$. Or

$$e^z + e^{-z} = 0 \iff e^{2z} = -1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 2z = (2k+1)i\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = i\frac{\pi}{2} + ik\pi$$

Donc $f(z)$ est défini pour $z \notin i\frac{\pi}{2} + i\pi\mathbb{Z}$.

2. $f(z) = 0$ équivaut à $e^z - e^{-z} = 0$. Or

$$e^z - e^{-z} = 0 \iff e^{2z} = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 2z = 2ik\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = ik\pi$$

L'ensemble des solutions est donc $i\pi\mathbb{Z}$.

3. Posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
|\tanh z| < 1 &\iff \left|e^z - e^{-z}\right|^2 < \left|e^z + e^{-z}\right|^2 \\
&\iff \left(e^z - e^{-z}\right)\overline{\left(e^z - e^{-z}\right)} < \left(e^z + e^{-z}\right)\overline{\left(e^z + e^{-z}\right)} \\
&\iff \left(e^z - e^{-z}\right)\left(e^{\overline{z}} - e^{-\overline{z}}\right) < \left(e^z + e^{-z}\right)\left(e^{\overline{z}} + e^{-\overline{z}}\right) \\
&\iff -e^{z-\overline{z}} - e^{\overline{z}-z} < e^{z-\overline{z}} + e^{\overline{z}-z} \\
&\iff e^{2iy} + e^{-2iy} > 0 \\
&\iff \cos(2y) > 0
\end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} |\operatorname{Im} z| < \dfrac{\pi}{2} \\ |\tanh z| < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |y| < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos(2y) > 0 \end{cases} \iff |y| < \dfrac{\pi}{4}$.

4. Soit $z \in \Delta$. D'après la question précédente, $|f(z)| < 1$ i.e. $f(z) \in U$. Ainsi tout élément de Δ a pour image par f un élément de U, c'est-à-dire que $f(\Delta) \subset U$.

5. **Existence :** Puisque Z est non nul, Z possède des arguments. De plus, les arguments de Z étant égaux à un multiple de 2π près, il existe un argument θ de Z appartenant à $]-\pi, \pi]$. On ne peut avoir $\theta = \pi$ sans quoi Z serait un réel négatif. Considérons également le module r de Z, qui est strictement positif puisque Z est non nul. On peut alors poser $z = \ln r + i\theta$ de sorte que $e^z = Z$ et $\operatorname{Im}(z) = \theta \in]-\pi, \pi[$.
Unicité : Supposons qu'il existe deux complexes z et z' tels que $e^z = e^{z'} = Z$ et les réels $\operatorname{Im}(z)$ et $\operatorname{Im}(z')$ soient dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$. Puisque $e^z = e^{z'}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z' = z + 2ik\pi$. En partiulier, $\operatorname{Im}(z') - \operatorname{Im}(z) = 2k\pi$. Mais comme les réels $\operatorname{Im}(z)$ et $\operatorname{Im}(z')$ soient dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$, $-2\pi < \operatorname{Im}(z') - \operatorname{Im}(z) < 2\pi$, de sorte que $-1 < k < 1$. Puisque k est entier k est nul puis $z' = z$.

6. Remarquons que

$$\frac{1+u}{1-u} = \frac{(1+u)(1-\overline{u})}{|1-u|^2} = \frac{1-|u|^2+2i\,\mathrm{Im}(u)}{|1-u|^2}$$

On en déduit que si $\frac{1+u}{1-u} \in \mathbb{R}_-$, alors $1-|u|^2 \leqslant 0$ i.e. $|u| \geqslant 1$. Par contraposition, si $u \in \mathbb{U}$, $\frac{1+u}{1-u} \notin \mathbb{R}_-$.

7. Montrons que tout élément de $\mathbb{U}$ admet un unique antécédent dans Δ. Soit $u \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}$. On a facilement $f(z) = u \iff e^{2z} = \frac{1+u}{1-u}$. D'après la question **6**, $\frac{1+u}{1-u} \notin \mathbb{R}_-$. D'après la question **5**, cette équation admet une unique solution telle que $\mathrm{Im}(2z) \in]-\pi,\pi[$ i.e. $\mathrm{Im}(z) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Notons encore z cette solution. Comme on a également $|f(z)| < 1$, la question **3** montre que $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4}$ i.e. $z \in \Delta$. L'équation $f(z) = u$ admet donc une unique solution dans Δ.

Puisqu'on a également montré que $f(\Delta) \subset \mathbb{U}$, f réalise bien une bijection de Δ sur $\mathbb{U}$.