

## 1 Cours

### Intégrales impropres (révisions)

#### Familles sommables

**Ensembles dénombrables** Définition. Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement si il est en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$ .  
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}^2$  et  $\mathbb{Q}$  sont dénombrables mais  $\mathbb{R}$  ne l'est pas.

**Familles sommables** Définition de la sommabilité. Linéarité de la somme. Lien entre série et famille sommable. Théorème de sommation par paquets. Invariance de la sommabilité et de la somme par permutation des indices.

**Séries doubles** Sommabilité d'une famille indexée par  $\mathbb{N}^2$  et interversion de l'ordre de sommation. Produit de Cauchy.

## 2 Méthodes à maîtriser

- Pour le théorème de sommation par paquets, les partitions classiques sont

$$- \mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (\{n\} \times \mathbb{N}) \text{ (colonnes);}$$

$$- \mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{N} \times \{n\}) \text{ (lignes);}$$

$$- \mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{(p, q) \in \mathbb{N}^2, p + q = n\} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{(k, n - k), k \in [0, n]\} \text{ (diagonales).}$$

## 3 Questions de cours

**Retour sur le DS n°01** Soit  $f : t \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, 1[ \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{t}$ .

1. Justifier que  $f$  se prolonge en une fonction continue sur  $] - \infty, 1[$  que l'on note encore  $f$ .
2. On pose  $L : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ . Justifier que  $L$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - \infty, 1[$  et calculer sa dérivée.
3. Déterminer le sens de variation de  $L$ .
4. Justifier que  $L$  peut se prolonger en une fonction continue sur  $] - \infty, 1]$ .
5. Déterminer la limite de  $L$  en  $-\infty$ .

**Retour sur le DS n°01** On considère à nouveau les fonctions  $f$  et  $L$  de la question de cours précédente.

1. Résoudre l'équation différentielle  $xz' + z = \frac{1}{1-x}$  sur  $] - \infty, 0[$  et  $]0, 1[$ . On exprimera les solutions à l'aide de la fonction  $f$ .
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle  $xy'' + y' = \frac{1}{1-x}$ . On exprimera les solutions à l'aide de la fonction  $L$ .

**Retour sur le DS n°01** On considère l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{t(t^2+1)} - \frac{1}{t(4t^2+1)} \right) dt$ .

1. Justifier la convergence de  $I$ .
2. Calculer la valeur de  $I$  à l'aide d'une décomposition en éléments simples.

**Série exponentielle et produit de Cauchy** On admet que pour  $z \in \mathbb{C}$ ,  $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ . Montrer que  $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$ ,  $e^{a+b} = e^a e^b$ .

**Série géométrique et produit de Cauchy** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres complexes distincts de module strictement inférieur à 1. Montrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-b}$ .