COMPARAISON DE FONCTIONS

# Relations de comparaison

### Exercice 1 — Limites via relations de comparaison

Trouver les limites suivantes :

1. $x(3+x)\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}$ en 0
2. $\dfrac{(1-e^x)(1-\cos x)}{3x^3+2x^4}$ en 0
3. $\dfrac{(1-\cos x^2)e^{\frac{1}{x}}}{x^5+x^3}$ en $0^+$
4. $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ en $\frac{\pi}{4}$
5. $(\tanh x)^{\ln x}$ en $+\infty$

### Exercice 2

Calculer, si elles existent, les limites de

1. $\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+x+1}$ en $+\infty$,
2. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ en 0.

### Exercice 3

Etudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln(\ln x))^2-\cos^2 x+\ln x}{2^x-50x^6}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x-1}\right)^x$.
3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$.
4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$ avec $0<a<b$.
5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x}$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{\cos x}$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)\right)^{x^2}$.
8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x)(\tan 2x)$.
9. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$.
10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{3}}$.
11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1+x^2+\sin^3 x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.
12. $\lim\limits_{x\to0}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

### Exercice 4

Soit $f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)$.

1. Démontrer que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\ln x}$.
2. En déduire la limite en $+\infty$ de $\left(e^{f(x)}-1\right)\ln x$.
3. Soit $g(x)=\left[\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x-1\right]\ln x$. Déterminer la limite de $g$ en $+\infty$.

### Exercice 5

$n$ et $p$ désignant deux entiers naturels non nuls, calculer la limite quand $x$ tend vers 1 de

$$\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{x^{p+1}-x^p-x+1}$$

### Exercice 6 ★ — L'inévitable du genre

Soient $a, b$ et $c$ trois réels positifs. Etudier le comportement en $+\infty$ de

$$f(x)=\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}{3}\right)^x.$$

### Exercice 7 — Lève toi et marche !

Lever les formes indéterminées suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos(x)-x\tan(x)}{\sin^3(x)}$ ;
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos(x)-\tan(x)}{\sin(x)(x-\tan(x))}$ ;
3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln(x)}$ ;
4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

### Exercice 8

Classer par ordre de négligeabilité les fonctions $f : x \mapsto x \ln x$, $g : x \mapsto \frac{e^x}{x}$ et $h : x \mapsto \sqrt{x}(\ln x)^2$ au voisinage de $0^+$ et $+\infty$.

### Exercice 9 — Equivalents

Déterminer un équivalent au point considéré des fonctions suivantes :

1. $x\ln(1+x)-(x+1)\ln x$ en $+\infty$.
2. $\lfloor x \rfloor \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$.
3. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}$ en 0.
4. $\dfrac{\sin x+\cos x-1}{\tan(x-x\cos x)}$ en 0.
5. $\dfrac{\sqrt{1+\tan^2 x}-1}{\tan x}$ en 0.
6. $\ln(\cos x)$ en 0.
7. $x(e^{\frac{1}{x}}-\cos\left(\frac{1}{x}\right))$ en $+\infty$.
8. $\dfrac{\ln(\ln x)-\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\left(\frac{1}{x}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^x}$ en $+\infty$.
9. $e^{\sin x}-e^{\tan x}$ en 0.
10. $\tan\left(\dfrac{\pi x}{2x+3}\right)$ en $+\infty$.

### Exercice 10 — Ailleurs qu'en 0

Déterminer des équivalents de :

1. $\cos x$ en $\frac{\pi}{2}$
2. $\tan x$ en $\frac{\pi}{2}$
3. $\sqrt[3]{1+x^3}-x$ en $+\infty$
4. $\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{2}$ en 1

### Exercice 11 — Equivalents de produits et de quotients

Déterminer des équivalents simples des expressions suivantes :

1. $\dfrac{x\sin(x^2)}{e^x-1}$ en 0
2. $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{1-\cos x}$ en 0
3. $\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\tan(x)\arctan(x^3)}$ en 0
4. $\dfrac{x^2\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}-1}$ en $+\infty$

### Exercice 12 — Equivalents de sommes et de différences

Déterminer des équivalents simples des expressions suivantes.

1. $\sin(x)+\tan(x)$ en 0
2. $x^3+e^x-1$ en 0
3. $\arcsin(x)+\cos(x)-1$ en 0
4. $\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}$ en $+\infty$

### Exercice 13 — Un équivalent

Déterminer un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = 2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}.$$

**Exercice 14** **Pont aux ânes**

Déterminer des équivalents simples en 0 des expressions suivantes,

1. $\arccos(x) - \pi/2$ ;
2. $x^4 + x + x^2$ ;
3. $\arcsin(x) + x + x^2$ ;
4. $\arctan(x) + x$ ;
5. $\dfrac{1}{1-x} - 1 + x$ ;
6. $\dfrac{x^2}{1+x} - x$.

**Exercice 15** **Où s'arrêter ?**

Donner un équivalent en 0 de l'expression

$$\ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right) - \frac{4x+x^2}{8}.$$

**Exercice 16 ★** **King size**

Donner un équivalent en 0 de l'expression

$$\sin(\mathrm{sh}(x)) - \mathrm{sh}(\sin(x)).$$

## Développements limités

**Exercice 17** **Petit joueur**

Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**Exercice 18 ★** **Variations sur les DL classiques**

Calculer le développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de 0 des expressions suivantes :

1. $e^x \sin(x)$ et $n = 3$ ;
2. $\sin^3(x) - x^3\cos(x)$, pour $n = 6$ ;
3. $x^3\sqrt{1+x}$ et $n = 5$ ;
4. $\dfrac{1}{2+x}$ et $n = 3$ ;
5. $\dfrac{1}{3-x^2}$ et $n = 5$ ;
6. $\sqrt{1+2x}$ et $n = 3$ ;
7. $\sqrt{4-x}$ et $n = 3$ ;
8. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$ et $n = 3$ ;
9. $\ln(2+x)$ et $n = 3$ ;
10. $\exp(3-x)$ et $n = 3$ ;
11. $(1+x)^{1/x}$ et $n = 2$.

**Exercice 19 ★** **DL d'une bijection réciproque**

On considère la fonction numérique $f$ définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = ]-1, 1[$ par

$$f(x) = x + \ln(1+x).$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $f(x)$ au voisinage de 0.
2. Démontrer que $f$ réalise une bijection de I sur un intervalle J qu'on explicitera.
3. En admettant qu'il existe, déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $f^{-1}(x)$ au voisinage de 0.

**Exercice 20** ★ **Au-delà de zéro…**

*Développements en vrac.*

1. Calculer les développements limités à l'ordre 4 des expressions suivantes au voisinage de $x_0$ :

   **a.** $e^x$, $x_0 = 1$ ;
   **b.** $\cos(x)$, $x_0 = \pi/4$ ;
   **c.** $\sin(x)$, $x_0 = \pi/6$ ;
   **d.** $\ln(x)$, $x_0 = e$ ;
   **e.** $\dfrac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 1$ ;
   **f.** $\arctan(x)$, $x_0 = 1$ ;
   **g.** $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, $x_0 = +\infty$ ;
   **h.** $(\tan(x))^{\tan(2x)}$, $x_0 = \pi/4$ ;

2. Calculer les développements limités

   **a.** à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ de
   $$\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2} ;$$
   **b.** à l'ordre 2 au voisinage de $\pi/4$ de
   $$\cos(x) + \sin(x) ;$$
   **c.** à l'ordre 2 au voisinage de $\pi/4$ de $\tan(x)$.

**Exercice 21** ★ **Spanish torture**

Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de
$$f(x) = x(\mathrm{ch}(x))^{1/x}.$$

**Exercice 22** ★ **Dead again**

Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction g définie par
$$g : x \longmapsto (1+\arctan(x))^{\frac{x}{\sin^2(x)}}.$$

**Exercice 23** **Attention à la constante**

Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f : x \longmapsto \ln(3e^x + e^{-x}).$$

**Exercice 24** **Petit piège**

Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de la fonction définie par,
$$f(x) = \frac{1}{1+\cos(x)}.$$

**Exercice 25** **Easy**

Chercher un développement limité d'ordre 5 de la fonction
$$f(x) = \frac{x^2\sin(x)}{1+x}.$$

**Exercice 26**

Déterminer un $\mathrm{DL}_4(0)$ des expressions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1-x}}$ ;
2. $g(x) = \sqrt{1+\cos(x)}$ ;
3. $h(x) = e^{\cos(x)}$ ;
4. $i(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+x^2}$.

**Exercice 27**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de 0 de
$$x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de 0 de
$$x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right)$$
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de
$$x \mapsto \int_x^{x^2} e^{-t^2/2} dt$$

**Exercice 28**

Chercher trois termes du développement asymptotique de la fonction $f$ définie par
$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$
au voisinage de $+\infty$.

**Exercice 29**

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

**Exercice 30** **ENSEA**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\cos x = nx$ possède une unique solution $x_n \in [0,1]$.
2. Déterminer la limite de $(x_n)$.
3. Etudier la monotonie de $(x_n)$.
4. Etablir que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
5. Déterminer un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$.

**Exercice 31**

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $x = \ln x + n$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$. On note $x_n$ la plus petite et $y_n$ la plus grande de ces deux solutions.
2. 
   a. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.
   b. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$.
   c. On pose $u_n = x_n - e^{-n}$ pour $n \geq 2$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-2n}$.
   d. Déterminer un équivalent simple de $u_n - e^{-2n}$.
3. 
   a. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.
   b. Montrer que $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
   c. On pose $v_n = y_n - n$ pour $n \geq 2$. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
   d. Déterminer un équivalent simple de $v_n - \ln n$.

**Exercice 32**

Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que
$$f(x) = \cos(x) - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$$
soit, au voisinage de 0, un infiniment petit d'ordre le plus grand possible.

# Allures locales

**Exercice 33**

Soit $f$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f$.

1. Montrer que $f$ est continue en 0.
2. $f$ est-elle dérivable en 0 ?
3. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
4. Etudier les variations de $f$.
5. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}$.
6. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de $f$.
7. Préciser l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1. Préciser la position relative de T et $\mathcal{C}$ au voisinage du point d'abscisse 1.
8. Tracer $\mathcal{C}$ avec soin. On placera notamment la tangente T déterminée à la question précédente.

**Exercice 34**

Soit $f : x \mapsto xe^x$.

1. Montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un ensemble à déterminer.
2. Déterminer le développement limité de $f^{-1}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
3. Donner un équivalent simple de $f^{-1}$ en $+\infty$.

**Exercice 35 ★** **Une étude locale**

On cherche à déterminer le comportement au voisinage de 0 de la fonction $f$ définie par l'expression

$$\frac{1}{\arcsin(x)} - \frac{1}{x}.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?
2. Prouver que $f$ est prolongeable par continuité en 0. On note encore $f$ ce prolongement.
3. La fonction $f$ est-elle dérivable en 0 ?
4. Étudier la position position relative du graphe de $f$ et de sa tangente au voisinage de l'origine.

**Exercice 36** **Asymptote**

Soit $f$ la fonction définie par

$$x \longmapsto (1+x)e^{1/x}.$$

Etudier les branches infinies de $f$ et déterminer la position des asymptotes par rapport à la courbe.

**Exercice 37**

Démontrer que la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

a pour asymptote la droite d'équation $y = 2x$ en $+\infty$.

**Exercice 38**

Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de $f$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + xe^{\frac{1}{x}}}$.

# Formules de Taylor

**Exercice 39** **Approximations de $f''$**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite en 0 de

$$\tau : h \mapsto \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$$

**Exercice 40** **La dérivée symétrique**

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet *une dérivée symétrique* en $a \in \mathbb{R}$ lorsque le rapport

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

admet une limite lorsque $h$ tend vers 0.

1. Prouver que la dérivabilité en $a$ est *une condition suffisante* de dérivabilité symétrique en $a$.
2. Est-ce une condition nécessaire ?

## Suites d'intégrales

**Exercice 41** **CCP PC**

On pose $u_n = \displaystyle\int_{n^2}^{n^3} \frac{dt}{1+t^2}$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

**Exercice 42**

On pose pour $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^n}$.

1. Montrer que $(u_n)$ converge et donner sa limite.
2. A l'aide d'une intégration par parties, donner un développement asymptotique à deux termes de $u_n$.