Dérivées partielles

Exercice 1 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2019**

Soit la fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{array}\right.$.

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
3. Étudier l'existence de dérivées partielles secondes de f en $(0,0)$.

Exercice 2 ★★

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées ou dérivées partielles des fonctions suivantes en fonction des dérivées partielles de f.

1. $g(x,y)=f(y,x)$
2. $g(x)=f(x,x)$
3. $g(x,y)=f(y,f(x,x))$
4. $g(x)=f(x,f(x,x))$

Exercice 3 ★★

Etudier l'existence de dérivées partielles pour les fonctions suivantes.

1. $f(x,y)=\max(|x|,|y|)$.
2. $f(x,y)=|x|+|y|$.
3. $\begin{cases} f(x,y)=\dfrac{\sin x^2+\sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \\ f(0,0)=0 \end{cases}$.

Exercice 4 ★★

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ pour $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$. f est-elle de classe $\mathcal{C}^0$? $\mathcal{C}^1$? $\mathcal{C}^2$?

Exercice 5 ★★★ **Laplacien en polaires**

Soit $f : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On appelle *laplacien* de f l'application $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Donner une expression du laplacien en coordonnées polaires.

Exercice 6 ★

Soit $f : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ g(t)=f(e^t\cos t,\ln(1+t^2))$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 7 ★★ **Une équation fonctionnelle**

Le but de l'exercice est de déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \tag{$*$}$$

1. Déterminer les solutions constantes de $(*)$.
2. Soit f une solution non constamment nulle de $(*)$.
   a. Montrer que $f(0)=1$ et $f'(0)=0$.
   b. Montrer que f est une fonction paire.
3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par
   $$\forall x,y\in\mathbb{R},\ \mathrm{F}(x,y)=f(x+y)+f(x-y)$$
   a. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   b. Calculer les dérivées partielles secondes de F.
   c. On suppose que f est une solution non constamment nulle de $(*)$. Des expressions de $\dfrac{\partial^2\mathrm{F}}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2\mathrm{F}}{\partial y^2}$, déduire que f vérifie une équation différentielle de la forme $z''-\alpha z=0$.
   d. Donner les solutions de l'équation différentielle $z''-\alpha z=0$ suivant les valeurs de α.
4. Déterminer toutes les solutions de $(*)$.

Exercice 8 ★★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de f.
2. **a.** Prouver l'existence de dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
   b. Etudier la continuité des dérivées partielles premières de f.
   c. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 9 ★★★★ **Centrale-Supélec MP 2016**

On note $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = y\}$.
Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \Delta & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y} \end{cases}$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$.
2. Montrer que f est prolongeable en une application $\tilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $\tilde{f}$ admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
5. Montrer que $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. On pourra écrire $\tilde{f}(x,y)$ comme une intégrale entre 0 et 1.
6. Justifier l'existence pour $\tilde{f}$ d'un minimum et d'un maximum sur $\mathbb{R}^2$ et les déterminer.

Exercice 10 ★★★★ **Mines-Ponts MP 2016**

On se donne $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_+^*$ et on définit $\mathrm{U} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < \mathrm{R}^2\right\}$. Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\boldsymbol{\Delta} f = 0$. On définit

$$\mathrm{F} : \begin{cases}]-\mathrm{R},\mathrm{R}[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases}$$

1. Trouver une relation entre les dérivées partielles de F et f.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On définit

$$\varphi_n : \begin{cases}]-\mathrm{R},\mathrm{R}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ r & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(r,\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

   Trouver une équation différentielle vérifiée par φ_n et la résoudre. En déduire φ_n.

Exercice 11 ★★

Soit U un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ est harmonique si $\boldsymbol{\Delta} f = 0$ sur U. On rappelle que $\boldsymbol{\Delta} f = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.
Montrer que si f et f^2 sont harmoniques sur U, alors f est constante sur U.

Différentiation

Exercice 12 ★★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2019**

On note $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et E^* son dual.
On définit

$$\mathrm{D} = \left\{\varphi \in \mathrm{E}^*, \forall (f,g) \in \mathrm{E}^2, \varphi(fg) = f(0)\varphi(g) + g(0)\varphi(f)\right\}$$

1. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de E^* non réduit à 0.
2. Montrer que l'application $a \in \mathbb{R}^n \mapsto (f \in \mathrm{E} \mapsto \mathrm{d}f(0)\cdot a)$ est injective.
3. Donner une base de D.
   Indication : On pourra utiliser la relation fondamentale de l'analyse pour $t \in \mathbb{R} \mapsto f(tx)$.

Exercice 13 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2018**

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable, telle que $\mathrm{d}f(x)$ soit injective pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et vérifiant $\|f(x)\| \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
Le but de cet exercice est de montrer que f est surjective. On pose pour cela $g : x \to \|f(x) - a\|^2$ où $a \in \mathbb{R}^n$.

1. Justifier que g est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer $\mathrm{d}g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que g admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$.
3. Conclure.

Exercice 14 ★★★

Soit $\mathrm{A} : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable telle que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{A}(s)$ et $\mathrm{A}(t)$ commutent.

1. Justifier que $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \exp(\mathrm{M})$ est différentiable en 0 et calculer sa différentielle en 0.
2. En déduire que $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(\mathrm{A}(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = \mathrm{A}'(t)\exp(\mathrm{A}(t)) = \exp(\mathrm{A}(t))\mathrm{A}'(t)$$

Exercice 15 ★★

Montrer que $f : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^2$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en tout point de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16 ★★★

Soit Ω un ouvert non vide et borné d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E de dimension finie. On se donne $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{\Omega}$, différentiable sur Ω et constante sur $\mathrm{Fr}(\Omega) = \overline{\Omega} \setminus \Omega$. Montrer que $\mathrm{d}f$ s'annule sur Ω.

Gradient

Exercice 17 ★★

Soit f un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E et $u \in \mathrm{E}$. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \varphi(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle + \langle u, x\rangle$$

1. Justifier que φ est différentiable sur E.
2. Calculer le gradient de φ en tout point de E.

Exercice 18 ★★★

Soit f un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E. Pour $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2}$.
On n'utilisera pas le théorème spectral dans tout cet exercice.

1. Calculer le gradient de φ en tout point de $\mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$.
2. Montrer que $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$ est un vecteur propre de f si et seulement si $\nabla\varphi(x) = 0$.
3. Montrer que φ admet un maximum sur $\mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$.
4. En déduire que f admet un vecteur propre.

Jacobienne

Exercice 19 ★★

Soit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$g(x,y) = \left(x + 2\sin y, y + \frac{1}{3}\sin x\right)$$

1. Justifier que g est différentiable en tout point et écrire la matrice jacobienne de g en un point (x,y). En déduire que $\mathrm{d}g$ est à valeurs dans $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$.
2. Montrer que g est une bijection.
3. On admet que g^{-1} est différentiable. Déterminer la matrice jacobienne de g^{-1} au point $(0,0)$.

Exercice 20 ★

Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sin(x^2-y^2) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$$

1. Justifier que les fonctions f et g sont différentiables en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et écrire les matrices jacobiennes de ces deux fonctions au point (x,y).
2. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image du vecteur $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $\mathrm{d}(f \circ g)(x,y)$
   - **a.** en calculant $f \circ g$;
   - **b.** en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

Espace tangent

Exercice 21 ★★

1. Montrer que si $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (espace des matrices antisymétriques), alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{t\mathrm{A}} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ au point I_n.

Exercice 22 ★★

Soit $\mathrm{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^3+3xy+z=0\right\}$ et $u = (0,-1,1)$. Déterminer l'ensemble des points de S en lesquels le vecteur u est tangent à S.

Exercice 23 ★★★

Soit $\mathrm{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 8yz\right\}$. Déterminer les points de S en lesquels le plan tangent contient la droite D d'équations $\left\{ \begin{array}{r} y = 1 \\ x+4z+2=0 \end{array} \right.$.

Optimisation

Exercice 24 ★★

Déterminer les extrema locaux des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = x^3+y^3$.
2. $f(x,y) = x^2+xy+y^2-3x-6y$.
3. $f(x,y) = 2y^4-3xy^2+x^2$.
4. $f(x,y) = x^3-y^2-x$.

Exercice 25 ★★

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2(1+y)^3+y^4 \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la fonction f admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f admet un minimimum local mais pas global en ce point critique.

Exercice 26 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2018**

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un endomorphisme auto-adjoint f de E dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

1. Montrer que : $\forall h \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$, $(f(h) \mid h) > 0$.
2. Soient $u \in \mathrm{E}$ fixé et $g :\ x \mapsto \dfrac{1}{2}(f(x) \mid x) - (u \mid x)$.
   - **a.** Montrer que g est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point de E.
   - **b.** Montrer qu'il existe un unique vecteur $z_0 \in \mathrm{E}$ point critique de g.
   - **c.** Montrer que g admet un minimum global en z_0.

Exercice 27 ★★ **CCP PSI 2015**

On considère les ensembles

$$\mathrm{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$$

et

$$\mathrm{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x < y < 1\}$$

ainsi que la fonction F définie sur K par

$$\mathrm{F}(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y(1-x) & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. La fonction F admet-elle des extrema locaux sur T ?
2. La fonction F admet-elle un minimum sur K ? un maximum sur K. Si oui, déterminer leurs valeurs.

Exercice 28 ★★

Déterminer le minimum et le maximum éventuels de $f : (x, y) \mapsto \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$ sur $\mathrm{K} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$.

Exercice 29 ★★★ **Mines-Ponts MP 2018**

Soit E un espace euclidien, que l'on munit de sa norme euclidienne, et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ différentiable, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{d}f(x)$ soit injective, et vérifiant $\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$. Le but de cet exercice est de montrer que f est surjective. On pose pour cela $g : x \in \mathrm{E} \mapsto \|f(x) - a\|^2$ où $a \in \mathrm{E}$.

1. Pour $x \in \mathrm{E}$, calculer $\mathrm{d}g(x)$.
2. Montrer que g admet un minimum sur E.
3. Conclure.

Exercice 30 ★★ **CCP PSI 2021**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence d'extrema de f.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Expliciter des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0, 0)$ tels que $f(x, y) < 0$.
   Expliciter de même des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0, 0)$ tels que $f(x, y) > 0$.
   La fonction f admet-elle en $(0, 0)$ un maximum local, un minimum local, aucun des deux ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u, v) = f(1+u, 1+v) - f(1, 1)$$

3. Calculer, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u, v)$, puis, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $g(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
4. Prouver que pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on a

$$g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geq 3r^2\left(\frac{1}{2} - 2r\right)$$

   Que peut-on en conclure ?
5. La fonction f possède-t-elle un ou des extrema globaux ?

Exercice 31 ★★★ **Entropie**

Soit un entier $n \geq 2$. On pose

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ f(x_1, \dots, x_n) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \ln(x_i)$$

On note

$$\mathrm{C} = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$$

1. Justifier que f admet un maximum sur C.
2. Déterminer la valeur de ce maximum et le point où il est atteint.

Exercice 32 ★★

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy$. Déterminer le minimum et le maximum éventuels de f sur $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$.

Exercice 33 ★

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$. Déterminer les extrema locaux éventuels de f.

Exercice 34 ★★

Etudier les extrema globaux de $f : (x, y) \mapsto 2x - y$ sous la contrainte $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$.

Equations aux dérivées partielles

Exercice 35 ★★

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

Exercice 36 ★★

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Exercice 37 ★★

Résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) : $\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = x + y$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ en effectuant le changement de variables $\begin{cases} x = u \\ y = \frac{u^2}{2} + v \end{cases}$.
Déterminer la solution vérifiant $f(0, y) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 38 ★★★

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est *homogène de degré* α si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t > 0,\ f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

Exercice 39 ★★★

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est *homogène de degré* α si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t > 0,\ f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

1. Montrer que si f est homogène de degré α, alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y) \qquad (*)$$

2. Réciproquement, on suppose que f vérifie la relation $(*)$.
   a. On fixe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $\varphi(t) = f(tx, ty) - t^\alpha f(x, y)$ pour $t > 0$. Montrer que φ vérifie une équation différentielle du premier ordre sans second membre et préciser celle-ci.
   b. En déduire que f est homogène de degré α.
3. Montrer que si f est homogène de degré α, les dérivées partielles de f sont également homogènes et préciser leur degré.

Exercice 40 ★★★★ **Problème de Dirichlet et principe du maximum**

Soient U un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On note $\partial U = \overline{U} \setminus U$ la frontière de U.
On se donne une fonction f à valeurs réelles continue sur $\overline{U}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. On pose alors

$$\forall x \in U,\ \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

1. Montrer que f admet un maximum sur $\overline{U}$. On note alors $\bar{x}$ un point de $\overline{U}$ où ce maximum est atteint.

2. On suppose que $\Delta f > 0$ sur U. Montrer que $\bar{x} \in \partial U$.

A partir de maintenant, on suppose $\Delta f = 0$ sur U.

3. On se donne $\varepsilon > 0$ et on pose

$$\forall x \in \overline{U},\ f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon\|x\|^2 = f(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Montrer que f_ε est continue sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que $\Delta f_\varepsilon > 0$ sur U.

4. En déduire que le maximum de f sur $\overline{U}$ est atteint sur ∂U.

5. Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et vérifiant $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$ sur U. On suppose en outre que $f_1 = f_2$ sur ∂U. Montrer que $f_1 = f_2$ sur U.

Exercice 41 ★★ **CCP PC 2018**

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et E l'ensemble des applications $f \in F$ telles que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ et appartient à F. On considère $\phi : f \in E \mapsto \frac{\partial f}{\partial x} - af$.

1. Montrer que ϕ est une application linéaire de E dans F.

2. On pose $f(x, y) = \sin(y)\exp(ax)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\phi(f)$.

3. Soit $G = \{(x, y) \mapsto \alpha(y)\exp(ax),\ \alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$. Montrer que $G \subset \operatorname{Ker}(\phi)$. ϕ est-elle injective ?

4. Soit $A \in F$. On pose $f(x, y) = \exp(ax)\int_0^x A(t, y)\exp(-at)\,dt$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $f \in E$ et que $\phi(f) = A$.

5. Montrer que $G = \operatorname{Ker}(\phi)$.

6. Trouver toutes les fonctions $f \in E$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - af(x, y) = 2x - 3y$$