

FONCTIONS À VALEURS VECTORIELLES

Dans tout ce chapitre, les fonctions considérées sont des fonctions définies sur un **intervalle** I de \mathbb{R} à valeurs dans un \mathbb{K} -**espace vectoriel normé** E de **dimension finie** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

1 Dérivabilité

1.1 Définition

Définition 1.1 Dérivabilité en un point

Soit $f : I \rightarrow E$. On dit que f est **dérivable** en $a \in I$ si $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite en a . Dans ce cas, cette limite est notée $f'(a)$.

Définition 1.2 Négligeabilité

Soient f une fonction à valeurs dans E et g une fonction à valeurs dans \mathbb{K} , toutes deux définies sur un voisinage de a (éventuellement non définies en a). On dit que f est **négligeable** devant g en a si $\lim_a \frac{f}{g} = 0$. On note alors $f = o(g)$.

Proposition 1.1 Dérivabilité et développement limité

Une fonction $f : I \rightarrow E$ est dérivable en $a \in I$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en a . Dans ce cas, ce développement limité est

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

Proposition 1.2

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Alors $f : I \rightarrow E$ est dérivable en $a \in I$ si et seulement si les fonctions $f_i = e_i^* \circ f$ sont dérivables en a . Dans ce cas,

$$f'(a) = \sum_{i=1}^n f'_i(a)e_i$$

Définition 1.3 Dérivabilité à gauche, à droite

Soit $f : I \rightarrow E$.

Alors f est **dérivable à droite** en $a \in I$ si $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à droite en a .

De même, f est **dérivable à gauche** en $a \in I$ si $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à gauche en a .

1.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 1.3 Combinaison linéaire

Soient f et g deux fonctions de I dans \mathbb{R} dérivables en $a \in I$ (resp. sur I). Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a (resp. sur I). De plus, $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

Proposition 1.4 Composition par une application linéaire

Soit $f : I \rightarrow E$ dérivable en $a \in I$ (resp. sur I) et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $L \circ f$ est dérivable en a (resp. sur I). De plus, $(L \circ f)' = L \circ f'$.

Proposition 1.5 Dérivabilité et application bilinéaire

Soient $f : I \rightarrow E$ et $g : I \rightarrow F$ dérivables en $a \in I$ (resp. sur I). Soit $B : E \times F \rightarrow G$ une application **bilinéaire**. Alors $B(f, g)$ est dérivable en a (resp. sur I). De plus, $B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$.

REMARQUE. E et F sont deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés de dimension finie.

Exercice 1.1

Soit $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une application dérivable. Montrer que si $A(t)$ et $A'(t)$ commutent pour tout $t \in I$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est dérivable sur I et que $(A^n)' = nA'A^{n-1} = nA^{n-1}A'$.

Corollaire 1.1

Soient E un espace euclidien, $f : I \rightarrow E$ et $g : I \rightarrow E$ deux fonctions dérivables en $a \in I$ (resp. sur I). Alors $\langle f, g \rangle$ est dérivable en a (resp. sur I) et $\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$.

Exemple 1.1

Si E est un espace euclidien et $f : I \rightarrow E$ est une fonction dérivable sur I **ne s'annulant pas sur I** , alors $\|f\|$ est dérivable sur I et $\|f\|' = \frac{\langle f', f \rangle}{\|f\|}$.

Proposition 1.6 Composition

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} , $\varphi : I \rightarrow J$ dérivable sur I et $f : J \rightarrow E$ dérivable sur J . Alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et $(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi)$.

1.3 Fonctions de classe \mathcal{C}^k **Définition 1.4 Fonction de classe \mathcal{C}^k**

Soient $f : I \rightarrow E$ et $k \in \mathbb{N}$. On dit que f est de classe \mathcal{C}^k sur I si f est dérivable k fois sur I et si $f^{(k)}$ est continue sur I . On dit que f est de classe \mathcal{C}^∞ si f est indéfiniment dérivable sur I .

Notation 1.1

On note $\mathcal{C}^k(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^k sur I à valeurs dans E .

Proposition 1.7 Combinaison linéaire

Soit $(f, g) \in \mathcal{C}^k(I, E)^2$, où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^k(I, E)^2$.
De plus, si $k \in \mathbb{N}$, $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$.

REMARQUE. Ceci signifie que $\mathcal{C}^k(I, E)$ est un \mathbb{K} -**espace vectoriel** et, plus précisément, un sous-espace vectoriel de E^I .

Proposition 1.8 Composition par une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$, où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $L \circ f \in \mathcal{C}^k(I, F)$.
De plus, si $k \in \mathbb{N}$, $(L \circ f)^{(k)} = L \circ f^{(k)}$.

Proposition 1.9 Composition

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} , $\varphi \in \mathcal{C}^k(I, J)$ et $f \in \mathcal{C}^k(J, E)$, où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Alors $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^k(I, E)$.

2 Intégration

2.1 Définition et propriétés générales

Définition 2.1 Fonctions continues par morceaux

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow E$ est dite **continue par morceaux** si ses coordonnées dans une base de E le sont.
Une fonction $f : I \rightarrow E$ est dite **continue par morceaux** si elle est continue par morceaux sur **tout segment** de I .

REMARQUE. La continuité par morceaux ne dépend pas de la base choisie.

Notation 2.1

On notera $\mathcal{C}_m(I, E)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans E .

Définition 2.2 Intégrale d'une fonction vectorielle

Soient $f \in \mathcal{C}_m([a, b], E)$ et (e_1, \dots, e_n) une base de E . La quantité

$$\sum_{k=1}^n \left(\int_a^b e_k^* \circ f(t) \, dt \right) e_k$$

est indépendante de la base de E choisie. On la note $\int_a^b f(t) \, dt$, $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f$.

Les propriétés des intégrales des fonctions à valeurs **vectorielles** sont quasiment les mêmes que celles des intégrales à valeurs **numériques**.

Proposition 2.1 Linéarité de l'intégrale

Soit $(f, g) \in \mathcal{C}_m([a, b], E)^2$. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

REMARQUE. Ceci signifie que l'application $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$ est une **application linéaire** de $\mathcal{C}_m([a, b], E)$ dans E .

Exercice 2.1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $L \in \mathcal{L}(E, F)$ et $f \in \mathcal{C}_m([a, b], E)$. Montrer que

$$L\left(\int_a^b f(t) dt\right) = \int_a^b L(f(t)) dt$$

Proposition 2.2 Relation de Chasles

Soient a, b, c trois réels tels que $a \leq c \leq b$ et f continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans E . Alors

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

REMARQUE. On en déduit notamment que $\int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$.

Proposition 2.3 Inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b], E)$. Alors

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$



ATTENTION ! L'ordre des bornes importe. On doit avoir $a \leq b$.

2.2 Sommes de Riemman**Définition 2.3 Somme de Riemann**

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b], E)$. On appelle **somme de Riemann** de f l'une des deux sommes suivantes :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \qquad R'_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k)$$

où $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et n est un entier non nul.

Proposition 2.4 Convergence des sommes de Riemann

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b], E)$. Alors les suites $(R_n(f))$ et $(R'_n(f))$ convergent vers $\int_a^b f(t) dt$.

REMARQUE. L'ordre des bornes n'est pas important.

2.3 Théorème fondamental de l'analyse et conséquences

Définition 2.4 Primitive

Soit $f \in \mathcal{C}(I, E)$. On dit que $F : I \rightarrow E$ est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Théorème 2.1 Théorème fondamental de l'analyse

Soient $f \in \mathcal{C}(I, E)$ et $a \in I$. Alors $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'**unique primitive de f sur I s'annulant en a** .

Corollaire 2.1

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], E)$. Si F est une **primitive** de f sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Corollaire 2.2 Inégalité des accroissements finis

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$. Si $\|f'\| \leq K$ sur I , alors

$$\forall (a, b) \in I^2, \|f(b) - f(a)\| \leq K|b - a|$$

REMARQUE. Il est essentiel que I soit un **intervalle**.

REMARQUE. Ceci signifie que f est K -lipschitzienne sur I .

REMARQUE. Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur un **segment** $[a, b]$, $\|f'\|$ est continue sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} : elle y admet donc un maximum M . f est alors M -lipschitzienne.

Techniques de calcul

Puisque l'intégrale d'une fonction vectorielle est définie à l'aide des intégrales de ses coordonnées dans une base (i.e. des intégrales de fonctions numériques), les techniques de calcul vues en première année s'appliquent encore :

- intégration par parties ;
- changement de variable.

3 Formules de Taylor

Proposition 3.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], E)$. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

REMARQUE. L'ordre de a et b n'importe pas.

Proposition 3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], E)$. Alors

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max_{[a,b]} \|f^{(n+1)}\|$$

REMARQUE. L'ordre de a et b n'importe pas.

REMARQUE. $\|f^{(n+1)}\|$ admet bien un maximum sur le **segment** $[a, b]$ puisqu'elle y est **continue**.

Proposition 3.3 Formule de Taylor-Young

Soient $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$ et $a \in I$. Alors f admet un développement limité d'ordre n en a donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

4 Arcs paramétrés

4.1 Définition

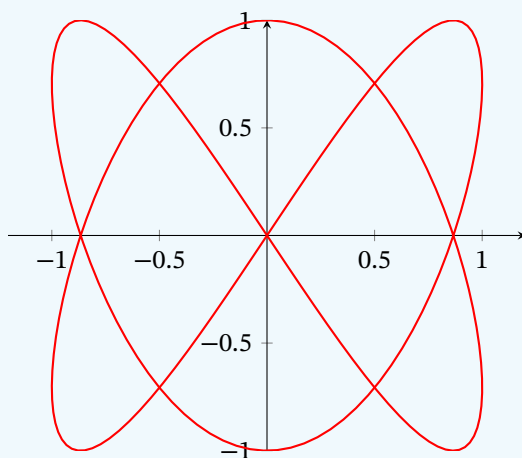
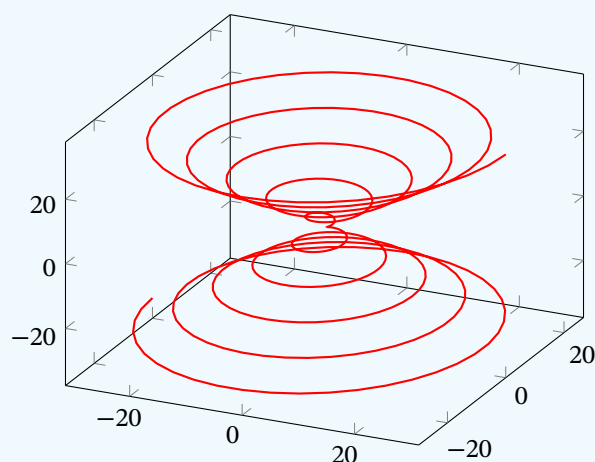
Définition 4.1 Arc paramétré

On appelle **arc paramétré** à valeurs dans E tout couple (I, γ) où I est un intervalle et γ une application de I dans E . L'ensemble $\gamma(I)$ est appelé le **support** de l'arc paramétré.

On dira que (I, γ) est un arc paramétré de classe \mathcal{C}^k si γ l'est.

REMARQUE. Si $E = \mathbb{R}^2$, on parle d'**arc plan**.

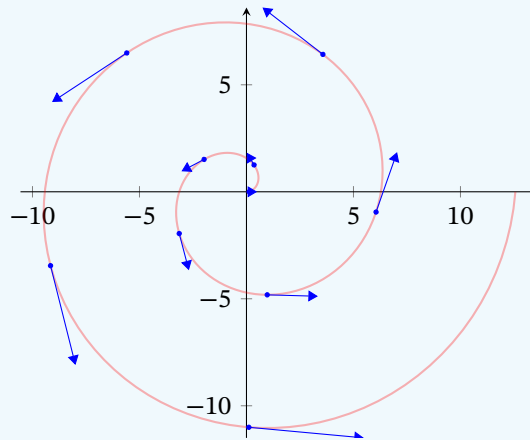
REMARQUE. Si $E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^3$, le support de l'arc paramétré est une **courbe**.

Exemple 4.1 Support de l'arc paramétré $t \in \mathbb{R} \mapsto (\sin(2t), \sin(3t))$ **Exemple 4.2** Support de l'arc paramétré $t \in \mathbb{R} \mapsto (t \cos(t), t \sin(t), t)$ **Définition 4.2** Paramètre régulier

Soit (I, γ) un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 à valeurs dans E . On dira que $t_0 \in I$ est un **paramètre régulier** si $\gamma'(t_0) \neq 0_E$.

4.2 Tangentes et normales**Proposition 4.1** Vecteur tangent

Soient (I, γ) un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 et $t_0 \in I$ un paramètre régulier. Alors $\gamma'(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe représentative de (I, γ) .

Exemple 4.3 Vecteurs tangents à l'arc paramétré $t \in \mathbb{R} \mapsto (t \cos t, t \sin t)$ **Méthode Déterminer la tangente à un arc plan**

Soient (I, γ) un arc paramétré à valeurs dans \mathbb{R}^2 et $t_0 \in I$ un paramètre régulier. La tangente \mathcal{T}_{t_0} à la courbe représentative de (I, γ) est $\gamma(t_0) + \text{vect}(\gamma'(t_0))$.

On peut déterminer une équation cartésienne de cette tangente en remarquant que

$$M \in \mathcal{T}_{t_0} \iff \text{Det}(M - \gamma(t_0), \gamma'(t_0)) = 0$$

REMARQUE. La notation Det désigne ici le déterminant dans la base canonique de \mathbb{R}^2 . Mais en fait, peu importe la base choisie puisque la colinéarité est indépendante de cette base.

Méthode Déterminer la normale à un arc plan

Soient (I, γ) un arc paramétré à valeurs dans \mathbb{R}^2 et $t_0 \in I$ un paramètre régulier. La normale \mathcal{N}_{t_0} à la courbe représentative de (I, γ) est $\gamma(t_0) + \text{vect}(\gamma'(t_0))^\perp$.

On peut déterminer une équation cartésienne de cette tangente en remarquant que

$$M \in \mathcal{N}_{t_0} \iff \langle M - \gamma(t_0), \gamma'(t_0) \rangle = 0$$

REMARQUE. On a muni ici \mathbb{R}^2 de sa structure euclidienne usuelle.

Exemple 4.4 Cercle trigonométrique

Posons $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin(t)$ et étudions l'arc paramétré $t \mapsto (x(t), y(t))$.

Courbe Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$ donc la courbe représentative de cet arc paramétré est le cercle trigonométrique.

Tangente Soit $t_0 \in \mathbb{R}^2$. La tangente au point de paramètre t_0 a pour équation

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

autrement dit

$$x \cos(t_0) + y \sin(t_0) = 1$$

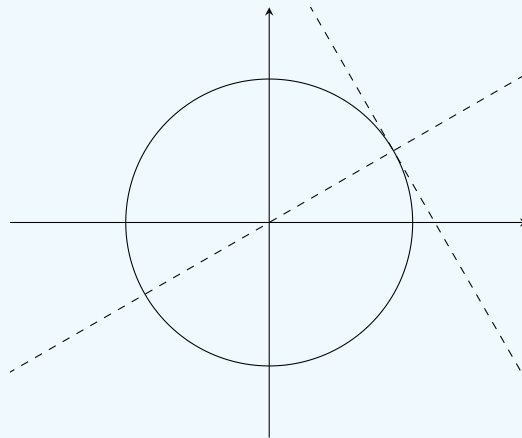
Normale Soit $t_0 \in \mathbb{R}^2$. La normale au point de paramètre t_0 a pour équation

$$\begin{pmatrix} x - x(t_0) \\ y - y(t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} = 0$$

autrement dit

$$x \sin(t_0) - y \cos(t_0) = 0$$

Tracé On représente le cercle trigonométrique ainsi que la tangente et la normale au point de paramètre $\pi/6$.



REMARQUE. On retrouve notamment de manière analytique le fait qu'une normale à un cercle passe par le centre de ce cercle. Voilà qui est rassurant !

4.3 Premier exemple

On pose $x(t) = \sin(t)$ et $y(t) = \sin(2t)$. On souhaite représenter le support de l'arc paramétré $\gamma = (x, y)$.

Domaine d'étude et symétrie

On cherche d'abord à restreindre le domaine d'étude en repérant des symétries.

- Puisque x et y sont 2π -périodiques, on peut restreindre l'étude à $[-\pi, \pi]$.
- Par ailleurs, x et y sont impaires donc on peut étudier sur $[0, \pi]$ et déduire $\gamma([-\pi, 0])$ de $\gamma([0, \pi])$ par la symétrie de centre l'origine.
- Enfin, $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$ donc on peut étudier sur $[0, \pi/2]$ et déduire $\gamma([\pi/2, \pi])$ de $\gamma([0, \pi/2])$ par une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Variations

On a $x'(t) = \cos(t)$ et $y'(t) = 2 \cos(2t)$. On trace les variations conjointes de x et y .

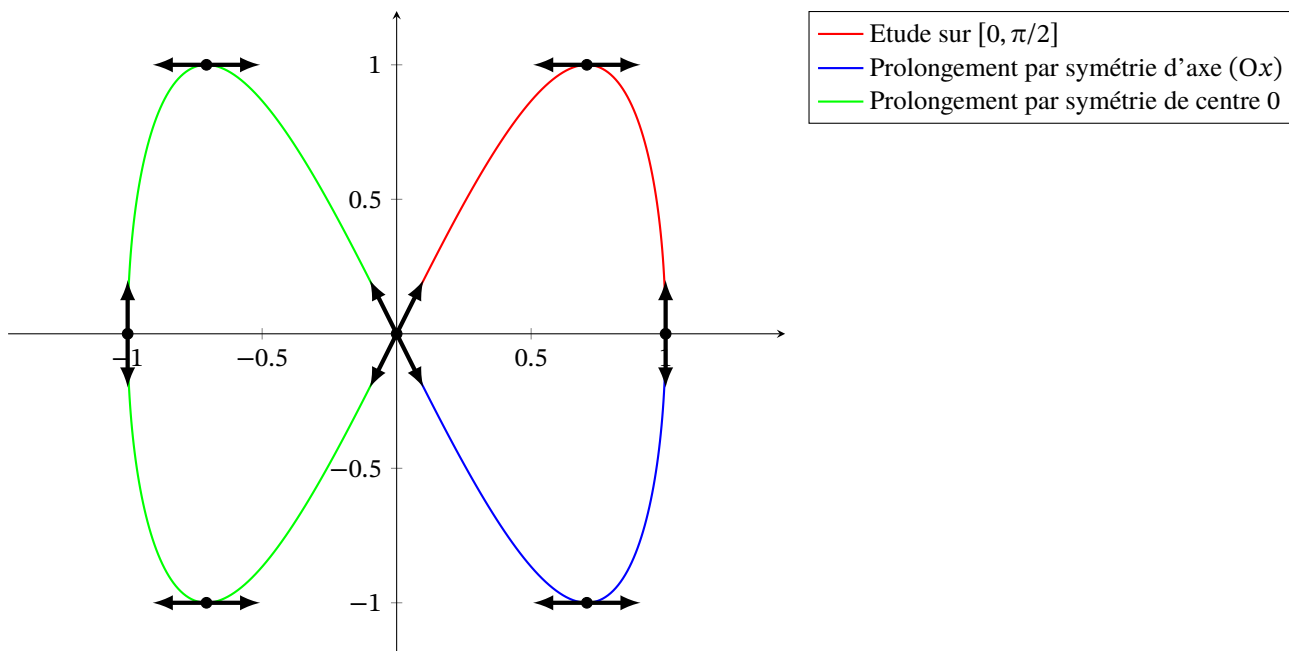
t	0	$\pi/4$	$\pi/2$		
Signe de $x'(t)$	1	+	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	+	0
Variations de x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1		
Variations de y	0	1	0		
Signe de $y'(t)$	2	+	0	-	-2

Tracé

On peut tracer $\gamma([0, \pi/2])$ et compléter avec les symétries observées précédemment. On peut de plus placer des tangentes remarquables :

- tangente de vecteur directeur $(1, 2)$ en l'origine ;
- tangente horizontale au point de coordonnées $(0, \sqrt{2}/2)$;
- et tangente verticale au point de coordonnées $(1, 0)$;

ainsi que celles obtenues par symétries.



Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
T=np.linspace(0,2*np.pi,200)
X=np.sin(T)
Y=np.sin(2*T)
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

4.4 Second exemple

On pose $x(t) = t \ln(t)$ et $y(t) = \ln(t)/t$. On souhaite représenter le support de l'arc paramétré $\gamma = (x, y)$.

Domaine d'étude et symétrie

On cherche d'abord à restreindre le domaine d'étude en repérant des symétries. On remarque que $x(1/t) = -y(t)$ et $y(1/t) = -x(t)$. On peut donc étudier sur $]0, 1]$ et on obtient $\gamma([1, +\infty[)$ à partir de $\gamma(]0, 1])$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = -x$.

Variations

On a $x'(t) = \ln(t) + 1$ et $y'(t) = \frac{1-\ln(t)}{t^2}$. On trace les variations conjointes de x et y .

t	0	e^{-1}	1
Signe de $x'(t)$		- 0 +	1
Variations de x	0	$-e^{-1}$	0
Variations de y	$-\infty$	$-e$	0
Signe de $y'(t)$		+ $2e^2$ +	1

Asymptotes

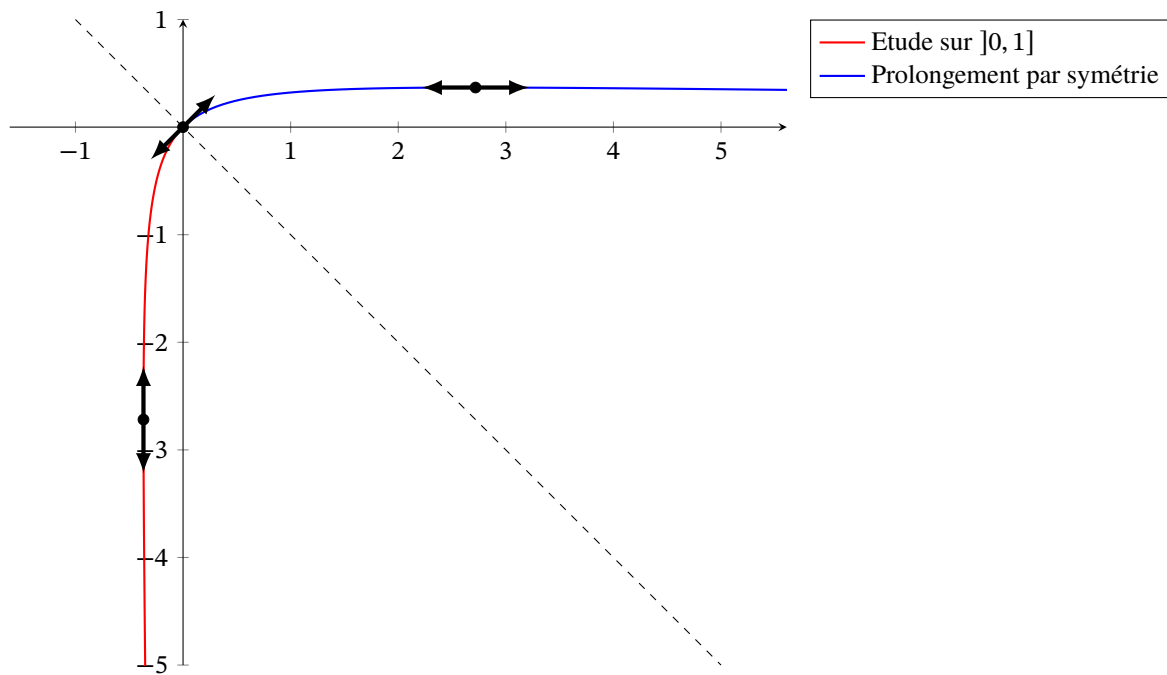
Puisque $\lim_{0+} x = 0$ et $\lim_{0+} y = -\infty$, le support de γ admet une asymptote d'équation $x = 0$. On obtient une seconde asymptote par symétrie, à savoir la droite d'équation $y = 0$.

Tracé

On peut tracer $\gamma(]0, 1])$ et compléter avec la symétrie observée précédemment. On peut de plus placer des tangentes remarquables :

- tangente verticale au point de coordonnées $(-e^{-1}, -e)$;
- et tangente de vecteur directeur $(1, 1)$ en l'origine ;

ainsi que celles obtenues par symétries.



Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
T=np.linspace(0.2,5,100)
X=T*np.log(T)
Y=np.log(T)/T
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```