Fractions rationnelles, sous-espaces affines

Exercice 1.

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{1}{X^n-1}$
2. $\dfrac{X^{n-1}}{X^n-1}$
3. $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$

Exercice 2.

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{X^n(1-X)^n}$.

Exercice 3.

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$:

1. $F = \dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$.
2. $F = \dfrac{4}{(X^2+1)^2}$.
3. $F = \dfrac{1}{X(X-1)^3}$.
4. $F = \dfrac{2X}{X^2+1}$.
5. $F = \dfrac{1}{X^2+X+1}$.
6. $F = \dfrac{X}{(X^2-1)^3}$.

Exercice 4.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ dont les racines sont réelles et simples. Montrer que le polynôme $Q = P'^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles.

Exercice 5.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Quel est son degré ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les racines de T_n ?
3. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{T_n}$.

Exercice 6.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A_n \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A_n\left(X+\dfrac{1}{X}\right) = X^n + \dfrac{1}{X^n}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les racines de A_n sont les $x_k = 2\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
3. Décomposer $\dfrac{1}{A_n}$ en éléments simples.

Exercice 7.

Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X-k)$.

1. En considérant $f_n = \dfrac{P_n'}{P_n}$, montrer que P_n' admet une unique racine x_n dans $]0,1[$.
2. Montrer que (x_n) converge vers 0.
3. Montrer que $x_n \sim \frac{1}{\ln n}$.

Exercice 8.

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 9.

Calculer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2+k}$
2. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k^2-1}$
3. $w_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2-1}$
4. $z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k-2}{k^3+3k^2+2k}$

Exercice 10.

Soit $F = \frac{X^2+1}{(X-1)(X+1)^6}$.

1. Déterminer la partie polaire de F relative au pôle 1.
2. On pose $G = (X+1)^6F$. Ecrire un développement limité de $G(x)$ à l'ordre 5 en -1.
3. En déduire la décomposition en éléments simples de F.

Exercice 11.

Décomposer en éléments simple sur $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes.

1. $F = \dfrac{X+1}{(X^2+1)(X^2-X+1)}$.
2. $F = \dfrac{1}{X^2(X^2+1)^2}$.
3. $F = \dfrac{X^2+1}{X(X^2+X+1)^2}$.
4. $F = \dfrac{2X+3}{X(X^2+X+3)^2}$.

EXERCICE 12.

Trouver une primitive de la fonction

$$\varphi : \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{4x}{x^4-1}.$$

EXERCICE 13.

Démontrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $R \in \mathbb{K}(X)$ telle que $R' = \frac{1}{X}$.

EXERCICE 14.

Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t\,dt}{4-\cos^2 t}$.

EXERCICE 15.

Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2}$.
2. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$.
3. $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$.
4. $\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16}$.
5. $\int_0^3 \frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}\,dx$.
6. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6}$.
7. $\int_{-1}^1 \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}\,dx$.
8. $\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx$.
9. $\int_{-1}^0 \frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2}\,dx$.
10. $\int_1^2 \frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}\,dx$.
11. $\int_0^a \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\,dx$ pour $a \in \mathbb{R}$. Y a-t-il une limite quand $a \to +\infty$?
12. $\int_0^2 \frac{dx}{x^4+1}$.

EXERCICE 16.

Calculer

1. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t\,dt}{4-\cos^2 t}$ en posant $u = \cos t$;
2. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{dt}{\sin t}$ pour $x \in]0,\pi[$ en posant $u = \cos t$;
3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t}$ en posant $u = \sin t$;
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t + \cos t}$ en posant $u = \tan\frac{t}{2}$.

EXERCICE 17.

Le but est de déterminer l'ensemble $\mathcal{A}$ de toutes les suites réelles (u_n) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_n = n - 1$$

1. Trouver une suite réelle vérifiant cette relation de récurrence.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. On précisera la direction de $\mathcal{A}$ et on en donnera une base.

EXERCICE 18.

Montrer que $\mathcal{F} = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid X^2P'' - 3XP' + 4P = 4 - X\right\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer sa direction.

EXERCICE 19.

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) - f(x) = x^2$$

1. Déterminer une fonction polynomiale P élément de E.
2. Montrer que E est un sous-espace affine de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ et donner sa direction.

EXERCICE 20.

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E de direction respectives F et G.

1. Montrer que si $E = F + G$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$.
2. Montrer que si $E = F \oplus G$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un singleton.