

DEVOIR SURVEILLÉ N°7

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 –

Partie I –

Notons E le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^∞ et $D : f \in E \mapsto f'$. Il est clair que D est un endomorphisme de E .

1. Déterminer le noyau et l'image de D .

Soient $f_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t$, $f_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ et $f_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$.

Nous noterons $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et G le sous-espace vectoriel de E engendré par \mathcal{B} .

Nous allons montrer que \mathcal{B} est une famille libre de vecteurs de E .

Soient a , b et c des réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3$ soit la fonction nulle.

2. L'étudiante Antoinette observe que $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$ pour tout réel t . Elle choisit (adroitement) trois valeurs de t , obtient un système de trois équations à trois inconnues a , b et c , qu'elle résout ; il ne lui reste plus qu'à conclure.

Faites comme elle !

3. L'étudiante Lucie propose d'exploiter le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0.

Faites comme elle !

4. L'étudiante Nicole décide de s'intéresser au comportement de $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Faites comme elle !

La famille \mathcal{B} est donc une base de G et ce sous-espace est de dimension 3.

5. Montrer que G est stable par D c'est-à-dire que $D(G) \subset G$.

Nous noterons \widehat{D} l'endomorphisme de G induit par D , c'est-à-dire l'endomorphisme de G défini par $\widehat{D}(f) = D(f)$ pour $f \in G$.

6. Montrer que $\widehat{D}^3 = \text{Id}_G$.

7. En déduire que \widehat{D} est un automorphisme de G et exprimer $(\widehat{D})^{-1}$ en fonction de \widehat{D} .

Partie II –

Nous nous intéressons dans cette partie à l'équation différentielle $y''' = y$, que nous noterons (\mathcal{E}) . Une solution sur \mathbb{R} de (\mathcal{E}) est une fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , trois fois dérivable sur \mathbb{R} , vérifiant $f'''(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que toute solution f de (\mathcal{E}) est C^∞ .

Notons $T = D^3 - \text{Id}_E$, où Id_E est l'identité de E , et $D^3 = D \circ D \circ D$.

Le noyau de T est donc l'ensemble des solutions de (\mathcal{E})

2. Montrer que G est contenu dans le noyau de T .

Nous allons établir l'inclusion inverse ; ainsi, G sera exactement l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}) .

Soit f une solution de (\mathcal{E}) ; nous noterons $g = f'' + f' + f$.

3. Montrer que g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.
4. Décrivez rapidement l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y' - y = 0$.
5. Résolvez l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$. Vous donnerez une base de l'ensemble des solutions à valeurs réelles.
6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Décrivez l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$.
7. Et maintenant, concluez !

EXERCICE 1. ★

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est *stable* par un endomorphisme f de E si $f(F) \subset F$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq \mathbf{0}$ et $f^n = \mathbf{0}$ où $\mathbf{0}$ désigne l'endomorphisme nul de E .

a. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

b. Montrer que, pour un tel vecteur x , la famille $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$ est une base de E .

Dans toute la suite de l'exercice, f est un endomorphisme de E tel que $f^{n-1} \neq \mathbf{0}$ et $f^n = \mathbf{0}$ et x un vecteur de E tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

2. Pour k un entier tel que $1 \leq k \leq n$, on pose $F_k = \text{vect} \left((f^{n-i}(x))_{1 \leq i \leq k} \right)$.

a. Déterminer la dimension de F_k .

b. Montrer que $F_k = \text{Ker}(f^k) = \text{Im}(f^{n-k})$.

c. Montrer que F_k est stable par f .

3. Soit F un sous-espace vectoriel stable par f . On suppose que F est de dimension k avec $1 \leq k \leq n-1$. On note \tilde{f} l'endomorphisme de F défini par : $\forall y \in F, \tilde{f}(y) = f(y)$.

a. Montrer qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $\tilde{f}^{p-1} \neq \tilde{\mathbf{0}}$ et $\tilde{f}^p = \tilde{\mathbf{0}}$ où $\tilde{\mathbf{0}}$ désigne l'endomorphisme nul de F .

b. Soit $y \in F$ tel que $\tilde{f}^{p-1}(y) \neq 0$. Que peut-on dire de la famille $(y, \tilde{f}(y), \dots, \tilde{f}^{p-1}(y))$? En déduire que $\tilde{f}^k = \tilde{\mathbf{0}}$.

c. Montrer que $F = \text{Ker } f^k$.

d. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels stables par f .

4. On veut déterminer tous les endomorphismes g de E qui commutent avec f , c'est-à-dire tels que $f \circ g = g \circ f$.

a. Soit g un endomorphisme de E . Montrer qu'il existe un unique n -uplet de nombres réels $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ tel que :

$$g(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x)$$

b. En déduire que si g commute avec f alors,

$$g = \alpha_0 \text{Id}_E + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sont les réels définis à la question précédente.

c. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et préciser sa dimension.