Interrogation écrite n°08

NOM : Prénom : Note :

1. Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ n'admet pas de limite.

2. Soit $q \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Montrer que la suite de terme général $u_n = q^n$ n'admet pas de limite.

3. On admet qu'il existe une suite (x_n) telle que $nx_n = \cos(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite de (x_n) puis un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Soit G un groupe. On pose $\mathrm{Z} = \{a \in \mathrm{G}\ \forall x \in \mathrm{G},\ ax = xa\}$. Montrer que Z est un sous-groupe de G.

5. Soit G un groupe. On définit une relation binaire $\sim$ sur G de la manière suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{G}^2,\ x \sim y \iff \exists g \in \mathrm{G},\ y = g^{-1}xg$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

6. On pose $\mathbb{Q}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$. Montrer que $(\mathbb{Q}[i], +\times)$ est un corps.