Comparaison de fonctions

Solution 1.

1. En 0, on a les équivalents suivants :

$$3+x \sim 3, \qquad \sqrt{x+3} \sim \sqrt{3}, \qquad \sin\sqrt{x} \sim \sqrt{x}$$

Par produit et quotient d'équivalents, on trouve une limite égale à $3\sqrt{3}$.

2. En 0, on a les équivalents suivants :

$$1-e^x \sim -x, \qquad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \qquad 3x^3+2x^4 \sim 3x^3$$

Par produit et quotient d'équivalents, on trouve une limite égale à $-\frac{1}{6}$.

3. On a les équivalents suivants en 0^+:

$$1-\cos x^2 \sim \frac{x^4}{2}, \qquad x^5+x^3 \sim x^3$$

Par conséquent,

$$\frac{(1-\cos x^2)e^{\frac{1}{x}}}{x^5+x^3} \sim \frac{x}{2}e^{\frac{1}{x}}$$

En posant $u=\frac{1}{x}$, on a $u \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et

$$\frac{x}{2}e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^u}{2u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow}$$

4. On pose $u = x-\frac{\pi}{4}$ de telle sorte que $u \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\longrightarrow} 0$. On a alors

$$\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = u\tan\left(\frac{\pi}{2}+u\right) = -\frac{u}{\tan u} \sim -1$$

Donc $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\longrightarrow} -1$.

5. Ecrivons tout d'abord :

$$(\tanh x)^{\ln x} = e^{\ln x \ln(\tanh x)}$$

Or on sait que :

$$\tanh x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Par conséquent,

$$\tanh x - 1 = -\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On connaît un équivalent de $\ln(1+u)$ en 0 :

$$\ln\tanh x = \ln\left(1-\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) \sim -\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \sim -2e^{-2x}$$

On sait que $\ln(x) = o\left(e^{2x}\right)$ en $+\infty$ donc $\ln x\ln(\tanh x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Finalement, $(\tanh x)^{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Solution 2.

1. On met le terme prépondérant en facteur sous la première racine :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^3+1} &= \sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= x\left(1+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\end{aligned}$$

car $u=\frac{1}{x^3}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et $(1+u)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{u}{3}+o(u)$. On met de même le terme prépondérant en facteur sous la deuxième racine :

$$\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Posons $u=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Par conséquent, $(1+u)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{u}{2}+o(u)$. Or $u=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\sim\frac{1}{x}$ car $\frac{1}{x^2}=o\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc

$$1+\frac{u}{2}+o(u)=1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

(on peut remplacer u par un équivalent). Finalement,

$$\begin{aligned}&\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+x+1}\\ &=x\left(1+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-x\left(1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &=x+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-x-\frac{1}{2}+o(1) \qquad \text{(on développe)}\\ &=-\frac{1}{2}+o(1) \qquad \text{car } \frac{1}{x^2}=o(1)\end{aligned}$$

La limite recherchée est donc $-\frac{1}{2}$.

Remarque. Dans tous les calculs, $x\to+\infty$ et $u\to0$. ■

2. Mettons tout d'abord l'expression sous forme exponentielle

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=x\ln(x+1)-x\ln x$$

Or $x\ln x\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$ et $\ln(x+1)\underset{x\to0}{\longrightarrow}\ln 1=0$ donc $x\ln(x+1)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$. Finalement, $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$. Par conséquent, la limite recherchée est $e^0=1$.

Solution 3.

1. Par croissances comparées et car cos est bornée, $\ln(\ln x))^2-\cos^2x+\ln x\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln x$. Par croissances comparées, $2^x-50x^6\underset{x\to+\infty}{\sim}2^x$. Donc

$$\frac{(\ln(\ln x))^2-\cos^2x+\ln x}{2^x-50x^6}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\ln x}{2^x}$$

Par croissances comparées, la limite recherchée est 0.

2. Attention, «$1^{+\infty}$» est une forme indéterminée ! On ne réfléchit pas, on passe à la forme exponentionnelle.

$$\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-x-1}\right)^x = e^{x\ln\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right)}$$

Or $\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc $\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1} = 1+t$ avec $t = \frac{3x-4}{x^2-x+1}$ et $t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $\ln(1+t) \underset{t\to0}{\sim} t$. Donc

$$\ln\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3x-4}{x^2-x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{x}$$

Donc $x\ln\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 3$. La limite recherchée est donc e^3.

3. On a $\cos 3x \underset{x\to0}{=} 1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)$ et $\cos x \underset{x\to0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Donc $\cos 3x - \cos x \underset{x\to0}{=} -4x^2 + o(x^2) \underset{x\to0}{\sim} -4x^2$. Par conséquent, la limite recherchée est -4.

4. On a $a^x = e^{x\ln a} \underset{x\to0}{=} 1 + x\ln a + o(x)$. De même $b^x \underset{x\to0}{=} 1 + x\ln b + o(x)$. Donc

$$a^x - b^x \underset{x\to0}{=} x(\ln a - \ln b) + o(x) \underset{x\to0}{\sim} x\ln\frac{a}{b}$$

La limite recherchée est donc $\ln\frac{a}{b}$.

5. On se ramène en 0 en posant $x = 1+h$. Ainsi $\sqrt{2-x^2} = \sqrt{1-2h-h^2}$. Or $-2h-2h^2 \underset{h\to0}{\longrightarrow} 0$ donc

$$\sqrt{1-2h-h^2} - 1 \underset{h\to0}{\sim} -h-h^2 \underset{h\to0}{\sim} -h$$

On a aussi $\ln x = \ln(1+h) \underset{h\to0}{\sim} h$. La limite recherchée est donc -1.

6. Pas besoin d'équivalent ici. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Par croissance de l'exponentielle, on a donc

$$e^{-1} \leqslant e^{\cos x} \leqslant e$$

Ainsi

$$e^{-1}\sin\frac{1}{x} \leqslant \sin\frac{1}{x}e^{\cos x} \leqslant e\sin\frac{1}{x}$$

Comme $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $\sin$ est continue en 0, on en déduit que $\sin\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que la limite recherchée est nulle.

7. On passe à la forme exponentielle :

$$\left(\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)^{x^2} = e^{x^2\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)}$$

Comme $\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$,

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \cos\left(\frac{1}{\ln x}\right) - 1$$

Comme $\frac{1}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2(\ln x)^2}$$

Finalement,

$$x^2\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{x^2}{2(\ln x)^2}$$

Par croissances comparées, $-\frac{x^2}{2(\ln x)^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. La limite recherchée est donc 0.

8. On se ramène en 0 en effectuant le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} + h$. On a alors

$$(\tan x)(\tan 2x) = \left(\tan\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\right)(\tan(\pi+2h)) = -\frac{\tan 2h}{\tan h} \underset{h\to 0}{\sim} -2$$

La limite recherchée est -2.

9. On se ramène en 0 en effectuant le changement de variable $x = 1 + h$. Occupons nous du numérateur :

$$e^{x^2+x} - e^2 x = e^{2+3h+h^2} - e^{2+2h} = e^{2+2h}(e^{h+h^2}-1) \underset{h\to 0}{\sim} e^2(h+h^2) \underset{h\to 0}{\sim} e^2 h$$

Maintenant le dénominateur :

$$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right) \underset{h\to 0}{\sim} -\frac{\pi h}{2}$$

Par quotient, la limite recherchée est $-\frac{2e^2}{\pi}$.

10. On pourrait s'en sortir avec le changement de variable $x = \frac{\pi}{3} + h$ mais il y a plus astucieux. En effet :

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

La limite recherchée est donc 2.

11. Pas besoin d'équivalent ici. En effet pour tout $x \neq 0$, $-1 \leqslant \sin\frac{1}{x} \leqslant 1$ donc

$$-x \leqslant x\sin\frac{1}{x} \leqslant x$$

Par le théorème des gendarmes, la limite recherchée est nulle.

Solution 4.

1. Tout d'abord, $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ car $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent, $u(x) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln x$. Donc $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(1+u(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} u(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\ln x}$. Finalement, $f(x) \sim \frac{1}{\ln x}$.

2. Comme $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent, $e^{f(x)} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}$.
Donc $\left(e^{f(x)}-1\right)\ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ et la limite recherchée est 1.

3. Il suffit de remarquer que :

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln x} = \frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$$

En mettant sous forme exponentielle :

$$g(x) = \left[e^{x\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)} - 1\right]\ln x = \left(e^{f(x)}-1\right)\ln x$$

D'après la question précédente, $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Solution 5.

Posons $P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ et $Q(x) = x^{p+1} - x^p - x + 1$. On a $P(1) = Q(1) = 0$. Puisque

$$P'(x) = n(n+1)x^n - n(n+1)x^{n-1} \quad \text{et} \quad Q'(x) = (p+1)x^p - px^{p-1} - 1$$

on a également $P'(1) = Q'(1) = 0$. Enfin,

$$P''(x) = n^2(n+1)x^{n-1} - n(n-1)(n+1)x^{n-2} \quad \text{et} \quad Q''(x) = p(p+1)x^{p-1} - p(p-1)x^{p-2}$$

ces expressions étant encore valables lorsque $n = 1$ ou $p = 1$ puisqu'alors le coefficient de x^{n-2} ou x^{p-2} est nul. On trouve $P''(1) = n(n+1)$ et $Q''(1) = 2p$. On a donc

$$P(x) \underset{x \to 1}{=} \frac{n(n+1)}{2}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right) \quad \text{et} \quad Q(x) \underset{x \to 1}{=} p(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$$

D'où $\lim_{x \to 1} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{n(n+1)}{2p}$.

Solution 6.

On a clairement

$$\frac{a^t + b^t + c^t}{3} \underset{0+}{=} 1 + \frac{\ln(abc)}{3}t + o(t)$$

d'où

$$\ln(f(1/t)) \underset{0+}{=} \ln\left(\sqrt[3]{abc}\right) + o(1).$$

Donc, par continuité de l'exponentielle en $\ln\left(\sqrt[3]{abc}\right)$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt[3]{abc}.$$

Solution 7.

1. On a, au voisinage de 0,

$$x\cos(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

et

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Ainsi,

$$x\cos(x) - \tan(x) = -\frac{5}{6}x^3 + o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{5}{6}x^3.$$

D'où, puisque $\sin^3(x) \underset{0}{\sim} x^3$,

$$\frac{x\cos(x) - \tan(x)}{\sin^3(x)} \underset{0}{\sim} -\frac{5}{6}$$

et donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cos(x) - \tan(x)}{\sin^3(x)} = -\frac{5}{6}.$$

2. Reprenons les résultats établis au numéro précédent...

$$x - \tan(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{3}x^3,$$

d'où

$$\frac{x\cos(x) - \tan(x)}{\sin(x)(x - \tan(x))} \underset{0}{\sim} -\frac{5/6\,x^3}{-1/3\,x^4} = \frac{5}{2x}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to0+} \frac{x\cos(x) - \tan(x)}{\sin(x)(x - \tan(x))} = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to0-} \frac{x\cos(x) - \tan(x)}{\sin(x)(x - \tan(x))} = -\infty.$$

3. Posons $x = 1 + h$ et notons $g(x)$ l'expression de l'énoncé. On a

$$g(x) = \frac{1+h}{h} - \frac{1}{\ln(1+h)}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(1+h)} &\underset{0}{=} \frac{1}{h(1 - h/2 + o(h))} = \frac{1 + h/2 + o(h)}{h} \\ &\underset{0}{=} \frac{1}{h} + \frac{1}{2} + o(1)\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1+h}{h} - \frac{1}{\ln(1+h)} \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2} + o(1) = \frac{1}{2} + o(1).$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to1} g(x) = \frac{1}{2}.$$

4. Posons $x = 1 + h$ et notons $g(x)$ l'expression de l'énoncé. On a

$$g(x) = \frac{(1+h)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+h)^{\frac{1}{3}} - 1}.$$

Or,pour $\alpha \neq 0$,

$$(1+h)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha h$$

et donc

$$\frac{(1+h)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+h)^{\frac{1}{3}} - 1} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{1}{2}h}{\frac{1}{3}h} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to1} g(x) = \frac{3}{2}.$$

Solution 8.

► Comparons f, g et h au voisinage de $+\infty$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 \ln x}{e^x} = \frac{x^3}{e^x} \cdot \frac{\ln x}{x}$$

Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ou encore $f \underset{+\infty}{=} o(g)$.
Pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\frac{h(x)}{f(x)} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{f(x)} = 0$ ou encore $h \underset{+\infty}{=} o(f)$.

▶ Comparons f, g et h au voisinage de 0^+.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{x^{\frac{3}{2}}(\ln x)^2}{e^x}$$

Par croissances comparées, $\lim_{x\to0^+} x^{\frac{3}{2}}(\ln x)^2 = 0$ et par continuité de l'exponentielle en 0, $\lim_{x\to0} e^x = 1$. Donc $\lim_{x\to0^+} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$ ou encore $h \underset{0^+}{=} o(g)$.
Pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$$

Puisque $\lim_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0$ et $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$, on obtient $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$ par opérations sur les limites. Ceci signifie que $f \underset{0^+}{=} o(h)$.

Solution 9.

1. On a d'abord :

$$\ln(1+x) = \ln\left(x(1+\frac{1}{x}\right) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Comme $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$. Par conséquent,

$$x\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{=} x\ln x + 1 + o(1)$$

Il vient donc :

$$x\ln(1+x) - (x+1)\ln x \underset{x\to+\infty}{=} -\ln x + 1 + o(1)$$

Comme $1 \underset{x\to+\infty}{=} o(\ln x)$, on a $x\ln(1+x) - (x+1)\ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln x$.

2. Comme $\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$. De plus on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$. Donc, pour $x > 0$:

$$1 - \frac{1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leqslant 1$$

Ceci prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$. Par conséquent, $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$. Par produit, on obtient :

$$\lfloor x \rfloor \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

3. On a d'une part

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x)$$

et d'autre part

$$\sqrt{1+x^2} \underset{x\to0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to0}{=} 1 + o(x)$$

Par conséquent,

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2} \underset{x\to0}{=} x + o(x) \underset{x\to0}{\sim} x$$

4. Cherchons d'abord un équivalent du numérateur. On a $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. Or $-\frac{x^2}{2} \underset{x\to 0}{=} o(x)$. Donc $\sin x + \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$. Cherchons maintenant un équivalent du dénominateur. On remarque que $x - x\cos x = x(1-\cos x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\tan(x - x\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} x(1-\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{2}$$

Par quotient, $\dfrac{\sin x + \cos x - 1}{\tan(x - x\cos x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$.

5. Comme $\tan^2 x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\sqrt{1+\tan^2 x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\tan^2 x}{2}$. Par conséquent,

$$\frac{\sqrt{1+\tan^2 x}-1}{\tan x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\tan x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

6. On a $\ln(\cos x) = \ln(1 + (\cos x - 1))$. Or $\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\ln(\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

7. Comme $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $e^{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x}$ et $\cos\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to+\infty}{=} 1 + o(x)$. Par conséquent,

$$e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

Et par produit, $x(e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$.

8. Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(\ln x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $\left(\frac{1}{2}\right)^x \underset{x\to+\infty}{=} \ln(\ln x)$. D'où

$$\ln(\ln x) - \left(\frac{1}{2}\right)^x \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(\ln x)$$

Par croissances comparées, $\left(\frac{1}{3}\right)^x \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Par conséquent,

$$\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$$

Par quotient, on obtient :

$$\frac{\ln(\ln x) - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3 \ln(\ln x)$$

9. Factorisons dans un premier temps :

$$e^{\sin x} - e^{\tan x} = e^{\tan x}(e^{\sin x - \tan x} - 1)$$

Comme $e^{\tan x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, on a clairement $e^{\tan x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$. De plus, $\sin x - \tan x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $e^{\sin x - \tan x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \sin x - \tan x$. Mais on a :

$$\sin x - \tan x = \tan x(\cos x - 1) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$$

Finalement, $e^{\sin x} - e^{\tan x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$.

10. Remarquons que $\dfrac{\pi x}{2x+3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$. On a donc $\dfrac{\pi x}{2x+3} = \frac{\pi}{2} + t$ avec $t = -\dfrac{3\pi}{4x+6}$ et $t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or

$$\tan\left(\frac{\pi x}{2x+3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\frac{1}{\tan t} \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{1}{t}$$

Par conséquent,

$$\tan\left(\frac{\pi x}{2x+3}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{4x+6}{3\pi} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{4x}{3\pi}$$

Solution 10.

1. En posant $u = x - \frac{\pi}{2}$, on a $u \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$ et $\cos x = -\sin u$. Or $\sin u \underset{u\to0}{\sim} u$ donc $\cos x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2} - x$.

2. En posant $u = x - \frac{\pi}{2}$, on a $u \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$ et $\tan x = -\frac{1}{\tan u}$. Or $\tan u \underset{u\to0}{\sim} u$ donc $\tan x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$.

3. $\sqrt[3]{1+x^3} - x = (x^3+1)^{\frac{1}{3}} - x = x\left(\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right)$. Or $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3x^3}$. Finaalement, $\sqrt[3]{1+x^3} - x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3x^2}$.

4. En posant $u = x - 1$, on a $u \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2+u} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{u}{2}} - 1\right)$. Or $\frac{1}{1+\frac{u}{2}} - 1 \equiv u \to 0 - \frac{u}{2}$ donc $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \underset{x\to1}{\sim} \frac{1-x}{4}$.

Solution 11.

1. Puisque $x^2 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, $\sin(x^2) \underset{x\to0}{\sim} x^2$. De plus, $e^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x$. Donc
$$\frac{x\sin(x^2)}{e^x-1} \underset{x\to0}{\sim} \frac{x\times x^2}{x} = x^2$$

2. $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to0}{\sim} \frac{x}{2}$ et $1 - \cos x \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ donc
$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{1-\cos x} \underset{x\to0}{\sim} \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{x}$$

3. Puisque $\sqrt{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, $\ln(1+\sqrt{x}) \underset{x\to0}{\sim} \sqrt{x}$. De plus, $\tan x \underset{x\to0}{\sim} x$. Enfin, puisque $x^3 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, $\arctan(x^3) \underset{x\to0}{\sim} x^3$. Finalement,
$$\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\tan(x)\arctan(x^3)} \underset{x\to0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x\times x^3} = \frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}$$

4. Puisque $\frac{1}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\sin\left(\frac{1}{x^3}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$. De même, $\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $e^{\frac{1}{x^2}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$. Finalement
$$\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\times\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = 1$$

Solution 12.

1. On sait que $\sin(x) \underset{x\to0}{=} x + o(x)$ et $\tan(x) \underset{x\to0}{=} x + o(x)$. Donc $\sin(x) + \tan(x) \underset{x\to0}{=} 2x + o(x)$. On en déduit que $\sin(x) + \tan(x) \underset{x\to0}{\sim} 2x$.

2. On sait que $e^x - 1 \underset{x\to0}{=} x + o(x)$ et $x^3 \underset{x\to0}{=} o(x)$ donc $x^3 + e^x - 1 \underset{x}{=} + o(x)$. Autrement dit, $x^3 + e^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x$.

3. On sait que $\arcsin(x) \underset{x\to0}{=} x + o(x)$ et $\cos(x) \underset{x\to0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. A fortiori, $\cos(x) \underset{x\to0}{=} 1 + o(x)$ donc $\arcsin(x) + \cos(x) - 1 \underset{x\to0}{=} x + o(x)$. Autrement dit $\arcsin(x) + \cos(x) - 1 \underset{x\to0}{\sim} x$.

4. Puisque $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\sqrt{1+\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. De même, $\frac{1}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$. A fortiori, $\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$. On en déduit que $\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Autrement dit, $\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

Solution 13.

On a

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} &= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}\\ &= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sqrt{n-1} &= \sqrt{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1/2}\\ &= \sqrt{n}\left(1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\end{aligned}$$

donc

$$u_n = \frac{1}{4n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Ainsi

$$u_n \sim \frac{1}{4n^{3/2}}.$$

Solution 14.

1. On a au voisinage de 0,
$$\arccos(x) - \frac{\pi}{2} = -\arcsin(x) \underset{0}{\sim} -x.$$

2. On a au voisinage de 0,
$$x^4 + x + x^2 \underset{0}{\sim} x.$$

3. On a au voisinage de 0,
$$\arcsin(x) + x + x^2 = x + x + o(x) \underset{0}{\sim} 2x.$$

4. On a au voisinage de 0,
$$\arctan(x) + x = x + x + o(x) \underset{0}{\sim} 2x.$$

5. On a pour $x \neq 1$,
$$\frac{1}{1-x} - 1 + x = \frac{2x - x^2}{1-x},$$
ainsi au voisinage de 0,
$$\frac{1}{1-x} - 1 + x \underset{0}{\sim} \frac{2x}{1} = 2x.$$

6. On a
$$\frac{x^2}{1+x} \underset{0}{=} o(x),$$
ainsi
$$\frac{x^2}{1+x} - x = -x + o(x) \underset{0}{\sim} -x.$$

Solution 15.

On a au voisinage de 0,

$$\frac{e^x+1}{2} \underset{0}{=} 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{48}x^4+o(x^4)$$

de plus,

$$\ln(1+u) \underset{0}{=} u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4+o(u^4)$$

Posons

$$u=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{48}x^4$$

et appliquons le théorème de composition des DL.

u	$\frac{x}{2}$	$\frac{x^2}{4}$	$\frac{x^3}{12}$	$\frac{x^4}{48}$
$-\frac{u^2}{2}$	0	$-\frac{x^2}{8}$	$-\frac{x^3}{8}$	$-\frac{7x^4}{96}$
$\frac{u^3}{3}$	0	0	$\frac{x^3}{24}$	$\frac{x^4}{16}$
$-\frac{u^4}{4}$	0	0	0	$-\frac{x^4}{64}$
$\ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right)$	$\frac{x}{2}$	$\frac{x^2}{8}$	0	$-\frac{x^4}{192}$

D'où

$$f(x) \underset{0}{=} -\frac{1}{192}x^4+o(x^4)$$

et donc

$$f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{192}x^4.$$

Solution 16.

On a au voisinage de 0,

$$\sin(x) \underset{0}{=} x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+o(x^7)$$

et

$$\text{sh}(x) \underset{0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^7}{5040}+o(x^7)$$

Posons

$$y=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^7}{5040}$$

et appliquons le théorème de composition des DL.

y	x	$\frac{x^3}{6}$	$\frac{x^5}{120}$	$\frac{x^7}{5040}$
$-\frac{y^3}{6}$	0	$-\frac{x^3}{6}$	$-\frac{x^5}{12}$	$-\frac{13x^7}{720}$
$\frac{y^5}{120}$	0	0	$\frac{x^5}{120}$	$\frac{x^7}{144}$
$-\frac{y^7}{5040}$	0	0	0	$-\frac{x^7}{5040}$
$\sin\circ\text{sh}$	x	0	$-\frac{1}{15}x^5$	$-\frac{x^7}{90}$

Posons

$$u = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

et appliquons le théorème de composition des DL.

u	x	$-\frac{x^3}{6}$	$\frac{x^5}{120}$	$-\frac{x^7}{5040}$
$\frac{u^3}{6}$	0	$\frac{x^3}{6}$	$-\frac{x^5}{12}$	$\frac{13x^7}{720}$
$\frac{u^5}{120}$	0	0	$\frac{x^5}{120}$	$-\frac{x^7}{144}$
$\frac{u^7}{5040}$	0	0	0	$\frac{x^7}{5040}$
$(\text{sh}\circ\sin)(x)$	x	0	$-\frac{1}{15}x^5$	$\frac{x^7}{90}$

ainsi,

$$\sin(\text{sh}(x)) - \text{sh}(\sin(x)) \underset{0}{=} -\frac{1}{90}x^7 + o(x^7),$$

et donc

$$\sin(\text{sh}(x)) - \text{sh}(\sin(x)) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{90}x^7.$$

Solution 17.

On a

$$\arcsin(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6)$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^5).$$

D'après le théorème sur les produits de DL, on a donc

$$f(x) \underset{0}{=} x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{15}x^5 + o(x^5).$$

Solution 18.

1. Produit de développements limités connus :

$$e^x \sin(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

2. Comme la valuation de $\sin(x)$ est égale à 1, on trouve le développement limité à l'ordre 6 de $\sin^3(x)$ en partant du développement limité à l'ordre 4 de $\sin(x)$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Le développement limité de $\cos x$ à l'ordre 3 est

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

On trouve finalement

$$\sin^3(x) - x^3\cos(x) = o(x^6)...$$

3. Le cours dit comment calculer le développement limité à l'ordre 2 de $(1+x)^{1/2}$.

$$x^3\sqrt{1+x} = x^3 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{8} + o(x^5).$$

4. On se ramène à un développement limité connu par une transformation simple :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+x} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(x/2)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3).\end{aligned}$$

5. Même chose.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3-x^2} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(x^2/3)} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^4}{27} + o(x^5).\end{aligned}$$

6. C'est immédiat :

$$\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

7. C'est sans soucis :

$$\begin{aligned}\sqrt{4-x} &= 2\sqrt{1-(x/4)} \\ &= 2 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{64} - \frac{x^3}{512} + o(x^3).\end{aligned}$$

8. D'après les formules d'addition,

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x).$$

Il ne reste plus qu'à appliquer les formules connues :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{\sqrt{3}x^3}{12} + o(x^3).$$

9. On se ramène à la seule forme connue :

$$\ln(2+x) = \ln(2) + \ln[1+(x/2)]$$

et on en déduit que

$$\ln(2+x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3).$$

10. Même chose.

$$\begin{aligned}\exp(3-x) &= e^3\exp(-x)\\ &= e^3 - e^3x + \frac{e^3x^2}{2} - \frac{e^3x^3}{6} + o(x^3).\end{aligned}$$

11. On passe par la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/x} &= e^{\ln(1+x)/x} = e^{1-x/2+x^2/3+o(x^2)}\\ &= e.e^{-x/2+x^2/3+o(x^2)}\\ &= e.\Big(1-x/2+x^2/8+x^2/3+o(x^2)\Big)\end{aligned}$$

donc :

$$(1+x)^{1/x} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2).$$

Solution 19.

1.

$$x+\ln(1+x) = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

2. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I (comme somme de fonctions continues et strictement croissantes). D'après le théorème d'inversion, la fonction f réalise une bijection de I sur l'intervalle

$$J = \left]f(-1^+), f(1^-)\right[=]-\infty, 1+\ln 2[.$$

3. Admettons que

$$f^{-1}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$$

pour des réels a_k convenables. Comme $f(0)=0$, alors $f^{-1}(0)=0$ et, par continuité de f^{-1}, on sait déjà que $a_0 = 0$.
Comme $f^{-1}(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on peut prendre

$$u = f^{-1}(x) = \mathcal{O}(x)$$

dans le développement limité

$$f(u) = 2u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

Or

$$\begin{aligned} u^2 &= a_1^2x^2 + 2a_1a_2x^3 + o(x^3) \\ u^3 &= a_1^3x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} f\big(f^{-1}(x)\big) &= 2a_1x + \frac{(4a_2 - a_1^2)}{2}x^2 \\ &\quad + \frac{(6a_3 - 3a_1a_2 + a_1^3)}{3}x^3 \\ &\quad + o(x^3) \\ &= x \qquad (\forall\, x \in J) \\ &= x + o(x^3). \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que

$$\begin{cases} 2a_1 & & & = 1 \\ -a_1^2 & + & 4a_2 & = 0 \\ a_1^3 & - & 3a_1a_2 + 6a_3 & = 0 \end{cases}$$

donc

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{16},\ a_3 = \frac{-1}{192}.$$

Remarque. f^{-1} admet un développement limité d'ordre 3 en 0 car elle est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $f(I)$. En effet, c'est la bijection réciproque d'une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, à savoir f, dont la dérivée ne s'annule pas sur I puisque pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x} > 0$$

■

Solution 20.

1. **a.** On pose $u = x - x_0$ et on trouve
$$e^{(1+u)} = e\Big(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)\Big).$$

 b. On applique les formules d'addition en posant $u = x - \pi/4$:
$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(1 - u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)\Big).$$

 c. Idem avec $u = x - \pi/6$:
$$\sin(x) = \frac{1}{2}\Big(1 + \sqrt{3}u - \frac{u^2}{2} - \frac{\sqrt{3}u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)\Big).$$

 d. On pose $u = x - e$ et
$$\begin{aligned} \ln(x) &= 1 + \ln\Big(1 + \frac{u}{e}\Big) \\ &= 1 + \frac{u}{e} - \frac{u^2}{2e^2} + \frac{u^3}{3e^3} - \frac{u^4}{4e^4} + o(u^4). \end{aligned}$$

e. On se ramène à une forme connue avec $u = x - 1$:

$$\frac{1}{1+(1+u)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(u+u^2/2)}$$

et on considère maintenant l'infiniment petit

$$v = u + \frac{u^2}{2} = \mathcal{O}(u).$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} v^2 &= u^2 + u^3 + \frac{u^4}{4}, \\ v^3 &= u^3 + \frac{3u^4}{2} + o(u^4), \\ v^4 &= u^4 + o(u^4), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} - \frac{u^4}{8} + o(u^4).$$

f. On intègre le résultat précédent, puisque

$$\arctan(1+u) = \arctan(1) + \int_1^{1+u} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Par conséquent,

$$\arctan(1+u) = \frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{4} + \frac{u^3}{12} + o(u^4).$$

g. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

h. Notons $f(x)$ l'expression de l'énoncé. Avec $h = x - \pi/4$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\tan(\pi/2+2h)\ln(\tan(h+\pi/4))} \\ &= e^{-\ln(\tan(h+\pi/4))/\tan(2h)} \end{aligned}$$

d'où

$$f(\pi/4 + h) = \exp\left(-\frac{\ln\left(\frac{1+\tan(h)}{1-\tan(h)}\right)}{\tan(2h)}\right).$$

Développons à l'ordre 5 $\ln(1+\tan(h))$. On a

$$v = \tan(h) = h + \frac{h^3}{3} + \frac{2h^5}{15} + o(h^5).$$

De plus,

$$\ln(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} + \frac{v^5}{5} + o(v^5).$$

Comme

$$\begin{aligned} -\frac{v^2}{2} &= -\frac{1}{2}\left(h^2 + \frac{2h^4}{3} + o(h^5)\right), \\ \frac{v^3}{3} &= \frac{1}{3}(h^3 + h^5 + o(h^5)), \\ -\frac{v^4}{4} &= -\frac{1}{4}(h^4 + o(h^5)), \end{aligned}$$

et

$$\frac{v^5}{5} = \frac{1}{5}(h^5 + o(h^5)),$$

d'où

$$\ln(1+\tan(h)) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{2h^3}{3} - \frac{7h^4}{12} + \frac{2h^5}{15} + o(h^5)$$

donc

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1+\tan(h)}{1-\tan(h)}\right) &= \ln(1+\tan(h)) - \ln(1+\tan(-h)) \\ &= 2u + \frac{4u^3}{3} + \frac{4u^5}{3} + o(u^5)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\ln(f(h+\pi/4)) &= \frac{2h + \frac{4h^3}{3} + \frac{4h^5}{3} + o(h^5)}{2h + 8h^3/3 + 64h^5/15 + o(h^5)} \\ &= \frac{1 + \frac{2h^2}{3} + \frac{2h^4}{3} + o(h^4)}{1 + 4h^2/3 + 32h^4/15 + o(h^4)} \\ &= -1 + \frac{2h^2}{3} + \frac{26h^4}{45} + o(h^4)\end{aligned}$$

En posant

$$u = \frac{2h^2}{3} + \frac{26h^4}{45} + o(h^4)$$

On a

$$f(h+\pi/4) = e^{-1}\left(1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right)$$

avec

$$u^2 = 4h^4/9 + o(h^4)$$

d'où finalement :

$$f(\pi/4+h) = \frac{1}{e} + \frac{2}{3e}h^2 + \frac{4}{5e}h^4 + o(h^4).$$

2. **a.** Tout d'abord, pour tout $x > 0$,

$$\sqrt[3]{x^3+x^2} = x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3}$$

et on applique la formule du cours avec l'infiniment petit

$$u = \frac{1}{x}$$

pour trouver

$$\sqrt[3]{x^3+x^2} = x + \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + \frac{5}{81x^2} - \frac{10}{243x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

De même,

$$\sqrt[3]{x^3-x^2} = x - \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} - \frac{5}{81x^2} - \frac{10}{243x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Donc

$$\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2} = \frac{2}{3} + \frac{10}{81x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

b. On prend bien entendu

$$u = x - \frac{\pi}{4}$$

pour infiniment petit. D'après les formules d'addition,

$$\begin{aligned}\cos(x) + \sin(x) &= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right).\end{aligned}$$

c. On pose $u = x - \pi/4$ et d'après les formules d'addition,

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \frac{\cos(u) + \sin(u)}{\cos(u) - \sin(u)} \\ &= \frac{1 + u - u^2/2 + o(u^2)}{1 - u - u^2/2 + o(u^2)}.\end{aligned}$$

En prenant

$$v = u + \frac{u^2}{2} + o(u^2) = \mathcal{O}(u)$$

pour infiniment petit, on retrouve une forme connue :

$$\frac{1}{1-v} = 1 + u + \frac{3u^2}{2} + o(u^2)$$

et on en déduit que

$$\tan(x) = 1 + 2u + 2u^2 + o(u^2).$$

Solution 21.

On a au voisinage de 0,

$$\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Posons $u = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ et appliquons le théorème de composition des DL...

u	0	$\frac{x^2}{2}$	0	$\frac{x^4}{24}$
$-\frac{u^2}{2}$	0	0	0	$-\frac{x^4}{8}$
$\ln(1+\mathrm{ch}(x))$	0	$\frac{x^2}{2}$	0	$-\frac{x^4}{12}$

Ainsi,

$$\frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{x} \underset{0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3).$$

Posons $v = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}$ et appliquons à nouveau le théorème de composition des DL.

v	$\frac{x}{2}$	0	$-\frac{x^3}{12}$
$\frac{v^2}{2}$	0	$\frac{x^2}{8}$	0
$\frac{v^3}{6}$	0	0	$\frac{x^2}{48}$
$f(x) - 1$	$\frac{x}{2}$	$\frac{x^2}{2}$	$-\frac{x^3}{16}$

Ainsi,

$$f(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{16} + o(x^4).$$

Solution 22.

▶ On a au voisinage de 0 ,

$$\arctan(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

et

$$\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

Posons $u = x - \frac{x^3}{3}$ et appliquons le théorème de composition des DL.

u	x	0	$-\frac{x^3}{3}$
$-\frac{u^2}{2}$	0	$-\frac{x^2}{2}$	0
$\frac{u^3}{3}$	0	0	$\frac{x^3}{3}$
$\ln(1+\arctan(x))$	x	$-\frac{x^2}{2}$	0

Ainsi,

$$\ln(1+\arctan(x)) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

▶ On a au voisinage de 0,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

ainsi, après une banale comoposition de DL,

$$\frac{x}{\sin^2(x)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right).$$

On a donc après un simple produit de DL,

$$\ln(h(x)) \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

◇ On a au voisinage de 0,

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

Posons $u = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}$ et appliquons à nouveau le théorème de composition des DL.

u	$-\frac{x}{2}$	$\frac{x^2}{3}$
$\frac{u^2}{2}$	0	$\frac{x^2}{8}$
$\frac{h(x)}{e} - 1$	$-\frac{x}{2}$	$\frac{11x^2}{24}$

Ainsi,

$$h(x) \underset{0}{=} e - \frac{ex}{2} + \frac{11ex^2}{24} + o(x^2).$$

Solution 23.

On a au voisinage de 0,

$$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

ainsi,

$$3e^x + e^{-x} \underset{0}{=} 4 + 2x + 2x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

On a donc au voisinage de 0,

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

Posons $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12}$ et appliquons le théorème de composition des DL.

u	$\frac{x}{2}$	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{12}$
$-\frac{u^2}{2}$	0	$-\frac{x^2}{8}$	$-\frac{x^3}{4}$
$\frac{u^3}{3}$	0	0	$\frac{x^3}{24}$
$f(x) - \ln(4)$	$\frac{x}{2}$	$\frac{3x^2}{8}$	$-\frac{x^3}{8}$

Ainsi,

$$f(x) \underset{0}{=} \ln(4) + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{8} + o(x^3).$$

Solution 24.

On a au voisinage de 0 ,

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

ainsi

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + o(x^4)}.$$

Or ,au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1 + u + u^2 + o(u^2).$$

Posons $u = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{48}x^4$. Puisque $u = \mathcal{O}(x^2)$, le développement à l'ordre 2 en u indiqué ci-dessus est suffisant pour développer $f(x)$ à l'ordre 4. Appliquons la méthode de calcul du DL d'une composée.

u	$\frac{1}{4}x^2$	$-\frac{1}{48}x^4$
u^2	0	$\frac{1}{16}x^4$
$\frac{1}{1-u}-1$	$\frac{1}{4}x^2$	$\frac{1}{24}x^4$

D'où

$$f(x) \underset{0}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + o(x^4).$$

Solution 25.

Nous allons considérer $f(x)$ comme le produit de $g(x) = x^2\sin(x)$ et de $h(x) = 1/(1+x)$, et nous allons développer chacun des termes à l'ordre 5.

- Commençons par g. La fonction g est elle-même un produit. Le premier terme x^2 est un polynôme de degré 2, son développement à l'ordre 5 est donc égal à x^2. Nous connaissons aussi un développement de $\sin x$ à l'ordre 5 : $\sin(x) = x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^5)$. Le produit des deux termes conduit donc à

  $$x^2\sin(x) = x^3 - x^5/6 + o(x^5),$$

  puisqu'on ne tient compte dans le produit que des termes de degré $\leqslant 5$. Notons donc qu'il aurait été suffisant de développer $\sin(x)$ seulement à l'ordre 3. Il est souvent possible d'utiliser ce type de raccourci, mais il est plus sûr au début d'appliquer strictement les règles de calcul, au prix de quelques lourdeurs.
- Passons maintenant à $1/(1+x)$. On sait que

  $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + o(x^5).$$
- En utilisant la règle du produit, il vient donc

  $$\begin{aligned} f(x) &= (x^3 - x^5/6 + o(x^5)) \times \\ &\qquad (1 - x + x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + o(x^5)) \\ &= x^3 - x^4 + 5x^5/6 + o(x^5) \end{aligned}$$

Notons que, là encore, il aurait été possible de ne développer $1/(1+x)$ qu'à l'ordre 2, puisque x^3 est en facteur dans le premier terme g.

Solution 26.

1. On a

   $$(1-x)^{-1/2} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + o(x^4)$$

   et

   $$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

   d'où, après produit des deux DL :

   $$f(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{49}{384}x^4 + o(x^4).$$

2. Comme $1+\cos(x) \underset{0}{=} 2-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$, on a,

$$g(x) \underset{0}{=} \sqrt{2}\left[1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{48}+o(x^4)\right].$$

Puisque $\sqrt{1+u} \underset{0}{=} 1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o(u^2)$, on déduit du théorème de composition des DL que,

$$g(x) \underset{0}{=} \sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}x^2}{8}+\frac{\sqrt{2}x^4}{384}+o(x^4).$$

3. Comme $\cos(x) \underset{0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$, on a,

$$h(x) \underset{0}{=} e\times\exp\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right).$$

Puisque $e^u \underset{0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)$, on déduit du théorème de composition des DL que,

$$h(x) \underset{0}{=} e-\frac{ex^2}{2}+\frac{ex^4}{6}+o(x^4).$$

4. Comme

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

et

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1-x^2+x^4+o(x^4),$$

on a :

$$\frac{\cos(x)}{1+x^2} \underset{0}{=} 1-\frac{3}{2}x^2+\frac{37}{24}x^4+o(x^4).$$

Solution 27.

1. Pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

donc pour x au voisinage de 0

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = \ln\left(1-x^{n+1}\right)-\ln(1-x)$$

Or $\ln\left(1-x^{n+1}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -x^{n+1}$ donc $\ln\left(1-x^{n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^n\right)$ et

$$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right)$$

donc

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right)$$

2. On sait que

$$e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right)$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k - e^x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^n}{n!}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\ln\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right) &= \ln\left(e^x + \sum_{k=0}^{n-1} x^k - e^x\right) \\ &= x + \ln\left(1 + e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k - e^x\right)\right)\end{aligned}$$

Or d'après ce qui précède,

$$e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k - e^x\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^n}{n!}$$

Puisque $n \geqslant 1$,

$$e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k - e^x\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

et donc

$$\begin{aligned}\ln\left(1 + e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k - e^x\right)\right) &\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^n}{n!} \\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right) = x - \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

3. La fonction $t \mapsto e^{-t^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$e^{-\frac{t^2}{2}} \underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + o(t^5)$$

Comme $x \mapsto \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ est une primitive de $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$, on obtient en intégrant terme à terme :

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + o\left(x^6\right)$$

Par conséquent,

$$\int_0^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{40} + o\left(x^{12}\right)$$

et a fortiori

$$\int_0^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^6}{6} + o\left(x^6\right)$$

D'après la relation de Chasles, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_x^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \int_0^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

On en déduit que

$$\int_x^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^6}{6} + o\left(x^6\right)$$

Solution 28.

Il est possible d'obtenir certains développements asymptotiques au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$ en posant $x = 1/u$, ce qui ramène le problème à 0^+ (ou 0^-). Posant $x = 1/u$, on se ramène à u tendant vers 0^+. Or,

$$\begin{aligned} f(1/u) &= \sqrt{1/u^2 + 1/u} = \frac{\sqrt{1+u}}{u} \\ &= \frac{1 + u/2 - u^2/8 + o(u^2)}{u} \\ &= 1/u + 1/2 - u/8 + o(u) \end{aligned}$$

d'où

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o(1/x).$$

Bien entendu, on aurait pu aussi mettre directement le terme dominant en facteur en écrivant $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$, ce qui ramène au problème de $\sqrt{1+u}$ au voisinage de 0.

Solution 29.

1. On pourrait procéder par étude de fonctions mais comme on connaît la formule de Taylor avec reste intégral, autant en profiter. D'abord à l'ordre 1.
$$\sin x = x + \int_0^x (x-t)(-\sin t)\, dt$$
Pour $x \in [0,1]$, $\sin t \geqslant 0$ et l'intégrale est négative. On en déduit que $\sin x \leqslant x$. Puis à l'ordre 3
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \sin t\, dt$$
Pour les mêmes raisons que précédemment, l'intégrale est positive. On en déduit que $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6}$.

2. Notons $S_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2}$. En utilisant la question précédente :
$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^6} \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$
Or $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$. Ainsi
$$\left| S_n - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) \right| \leqslant \frac{1}{6}\sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^6} \leqslant \frac{1}{6}\sum_{k=1}^n \frac{n^3}{n^6} = \frac{1}{6n^2}$$
Finalement, $S_n - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Solution 30.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $f_n : x \mapsto \cos x - nx$. f_n est dérivable et $f_n'(x) = -\sin x - n < 0$ pour tout $x \in [0,1]$. f_n est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$. De plus, $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = \cos(1) - n < 0$. On en déduit que f_n s'annule une unique fois sur $[0,1]$. D'où l'existence et l'unicité de x_n.

2. On a $\cos x_n = nx_n$ et donc $x_n = \frac{\cos x_n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $|x_n| \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis que (x_n) converge vers 0.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $f_n \geqslant f_{n+1}$ sur $[0, 1]$. Donc $f_n(x_{n+1}) \geqslant f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n)$. La stricte décroissance de f_n implique que $x_{n+1} \leqslant x_n$. Par conséquent la suite (x_n) est décroissante.

4. Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que cos est continue en 0, $\cos x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos 0 = 1$. Donc $x_n = \frac{\cos x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

5. Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\cos x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2)$. Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $\cos x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi $x_n = \frac{\cos x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. On en déduit que $x_n - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^3}$.

Solution 31.

1. Soit $n \geqslant 2$. On étudie la fonction f_n définie par $f_n(x) = x - \ln x - n$ pour $x > 0$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f_n'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. f_n est donc strictement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. De plus, $\lim\limits_{n\to 0^+} f_n(x) = +\infty$, $f_n(1) = 1 - n < 0$ car $n \geqslant 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ par croissances comparées. Comme f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de la bijection appliqué à f_n sur les intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ assure qu'il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$ sur chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty$. Comme 1 n'est évidemment pas solution, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

2.
   a. Comme x_n est la plus petite des deux solutions, $x_n \in]0, 1[$ pour tout $n \geqslant 2$. Or $\ln x_n = x_n - n$ pour tout $n \geqslant 2$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln x_n = -\infty$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

   b. Puisque pour $n \geqslant 2$, $\ln x_n = -n + x_n$, $x_n = e^{-n}e^{x_n}$. Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $e^{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ceci prouve que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$.

   c. Remarquons déjà que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{-n})$. On a pour tout $n \geqslant 2$, $x_n = \ln(e^{-n} + u_n) + n = \ln(1 + e^n u_n)$. Or $e^n u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ donc $\ln(1 + e^n u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n u_n$. Ainsi $e^n u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$. D'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-2n}$.

   d. Posons $s_n = u_n - e^{-2n}$ pour $n \geqslant 2$ de sorte que $s_n \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{-2n})$. On rappelle que
$$x_n = \ln(1 + e^n u_n) = \ln(1 + e^{-n} + e^n s_n)$$
   D'une part,
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} e^{-n} + e^{-2n} + o(e^{-2n})$$
   et d'autre part, en posant $\alpha_n = e^{-n} + e^n s_n$,
$$\ln(1 + \alpha_n) \underset{n\to+\infty}{=} \alpha_n - \frac{\alpha_n^2}{2} + o\left(\alpha_n^2\right)$$
   Or $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$ donc
$$\ln(1 + \alpha_n) \underset{n\to+\infty}{=} e^{-n} + e^n s_n - \frac{e^{-2n}}{2} + o(e^{-2n})$$
   On en déduit que $e^n s_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{3}{2}e^{-2n} + o(e^{-2n})$ ou encore $s_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2}e^{-3n}$.

3.
   a. Pour tout $n \geqslant 2$, $y_n \geqslant 1$ donc $y_n = \ln y_n + n \geqslant n$. En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

   b. Comme $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\ln y_n \underset{n\to+\infty}{=} o(y_n)$. Donc $n = y_n - \ln y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$.

   c. Remarquons tout d'abord que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$. On a pour tout $n \geqslant 2$,
$$v_n = y_n - n = \ln y_n = \ln(n + v_n) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{v_n}{n}\right)$$
   Comme $\frac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, $\ln\left(1 + \frac{v_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{n}$. A fortiori, $\ln\left(1 + \frac{v_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. Ceci prouve que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

d. Posons $t_n = v_n - \ln n$ pour $n \geqslant 2$. On rappelle que pour $n \geqslant 2$, $v_n = \ln n + \ln\left(1 + \frac{v_n}{n}\right)$. Ainsi

$$t_n = \ln\left(1 + \frac{v_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$$

Solution 32.

On a

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1+ax^2}{1+bx^2} &\underset{0}{=} (1+ax^2)\big(1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6)\big)\\ &\underset{0}{=} 1 + (a-b)x^2 + (b^2 - ab)x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

d'où

$$f(x) \underset{0}{=} (-1/2 + a - b)x^2 + (1/24 + b^2 - ab)x^4 + o(x^4).$$

Comme le système

$$a - b = 1/2, \ \ 1/24 = ab - b^2 = b(a-b)$$

admet pour unbique solution

$$(a, b) = (7/12, 1/12),$$

L'expression $f(x)$ est un infiniment petit d'ordre le plus grans possible *si et seulement si*

$$a = \frac{7}{12} \ \text{ et } \ b = \frac{1}{12}.$$

Solution 33.

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x}$. Or $\lim\limits_{x\to0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x = -\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$. Par conséquent f est bien continue en 0.

2. Etudions le taux de variation de f en 0 : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Or $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

3. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x > 0$:

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right)f(x) = \frac{f(x)}{x^2}(x + 1 - \ln x)$$

Pour $x > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $g(x) = x + 1 - \ln x$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. g est donc décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$. Comme $g(1) = 2 > 0$, on en déduit que g est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

5. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$. Pour $x > 0$, $f(x) - x = x\left(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1\right)$. Or $e^{\frac{\ln x}{x}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$. Donc $f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty$. $\mathcal{C}$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$.

6. Posons $x = 1+h$, de sorte que $f(x) = f(1+h) = e^{\left(1+\frac{1}{1+h}\right)\ln(1+h)}$. On a d'une part :

$$1 + \frac{1}{1+h} \underset{h\to0}{=} 2 - h + h^2 + o(h^2)$$

et d'autre part :

$$\ln(1+h) \underset{h\to0}{=} h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3) \underset{h\to0}{=} h\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)\right)$$

De sorte que,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{1+h}\right)\ln(1+h) &\underset{h\to0}{=} h\left(2 - 2h + \frac{13}{6}h^2 + o(h^2)\right)\\ &\underset{h\to0}{=} 2h - 2h^2 + \frac{13}{6}h^3 + o(h^3)\end{aligned}$$

Posons $u = 2h - 2h^2 + \frac{13}{6}h^3 + o(h^3)$. On a $u \underset{h\to0}{\longrightarrow} 0$ et $e^u \underset{u\to0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$. On trouve $u^2 \underset{h\to0}{=} 4h^2 - 8h^3 + o(h^3)$ et $u^3 \underset{h\to0}{=} 8h^3 + o(h^3)$. Il vient finalement :

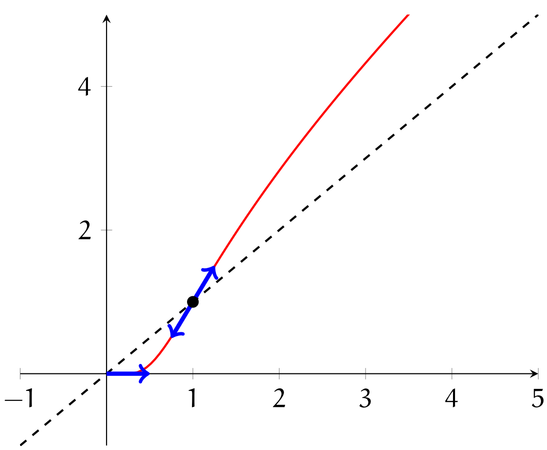
$$f(1+h) \underset{h\to0}{=} 1 + 2h - \frac{1}{2}h^3 + o(h^3)$$

c'est-à-dire :

$$f(x) \underset{x\to1}{=} 1 + 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

7. On déduit de la question précédente que $\mathcal{C}$ admet au point d'abscisse 1 une tangente d'équation $y = 1 + 2(x-1)$ i.e. $y = 2x - 1$. On déduit la position relative de $\mathcal{C}$ et T du signe de $-\frac{1}{2}(x-1)^3$. Au voisinage de 1^-, $\mathcal{C}$ est au-dessus de T et au voisinage de 1^+, $\mathcal{C}$ est au-dessous de T.

8.



Solution 34.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = (x+1)e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. f est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $f(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, f induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même.

2. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée ne s'y annule pas. f^{-1} est donc également $\mathcal{C}^\infty$: elle admet notamment un développement limité en 0 à tout ordre.
On a $f(0) = 0$ donc $f^{-1}(0) = 0$. On a également $f(x) \underset{x\to0}{\sim} x$ donc $f^{-1}(f(x)) \underset{x\to0}{\sim} f^{-1}(x)$ i.e. $f^{-1}(x) \underset{x\to0}{\sim} x$. Le développement limité d'ordre 2 de f^{-1} en 0 est donc $f^{-1}(x) \underset{x\to0}{=} x + ax^2 + o(x^2)$. Posons $u = f^{-1}(x)$. On a $u \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ donc $e^u \underset{u\to0}{=} 1 + u + o(u) \underset{x\to0}{=} 1 + x + o(x)$. Ainsi

$$f(u) = ue^u = x(1 + ax + o(x))(1 + x + o(x)) = x + (a+1)x^2 + o(x^2)$$

Comme $f(u) = x$, on a par unicité du développement limité $a + 1 = 0$ i.e. $a = -1$.

Remarque. Inutile de pousser le développement limité de e^u à un ordre supérieur à 1. ■

3. Posons à nouveau $u = f^{-1}(x)$. On a donc $f(u) = x$ i.e. $ue^u = x$. Ainsi $u + \ln u = \ln x$. Or $u \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\ln u \underset{u\to+\infty}{=} o(u)$ donc $u \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$ i.e. $f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$.

Solution 35.

Un rapide coup d'oeil à l'ensemble de l'exercice permet de conclure qu'un DL (au moins à l'ordre trois !) sera le bienvenu.

1. L'expression est définie sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$. Allons-y, allons-o ...Puisqu'au voisinage de 0,

$$\arcsin'(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5),$$

on obtient d'après le théorème d'intégration des DL,

$$\arcsin(x) = \arcsin(x) - \arcsin(0) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6).$$

Ainsi, pour x voisin de 0 mais non nul,

$$\frac{1}{\arcsin(x)} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + o(x^5)}$$

Déterminons le $DL_4(0)$ du dernier quotient, noté $Q(x)$, en appliquant le théorème de composition des DL. On a, au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1 - u} = 1 + u + u^2 + o(u^2).$$

Posons $u = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{40}x^4$. Les calculs ne présentent aucune difficulté et sont résumés ci-dessous,

u	0	$-\frac{1}{6}x^2$	0	$-\frac{3}{40}x^4$
u^2	0	0	0	$\frac{x^4}{36}$
$Q(x)$	0	$-\frac{1}{6}x^2$	0	$-\frac{17}{360}x^4$

On en déduit qu'au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \times \left[-\frac{1}{6}x^2 - \frac{17}{360}x^4 + o(x^5) \right] \\ &= -\frac{1}{6}x - \frac{17}{360}x^3 + o(x^4) \end{aligned}$$

2. Comme $f(x) \underset{0}{=} o(1)$, la fonction tend vers 0 avec x. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = 0$.

3. Comme

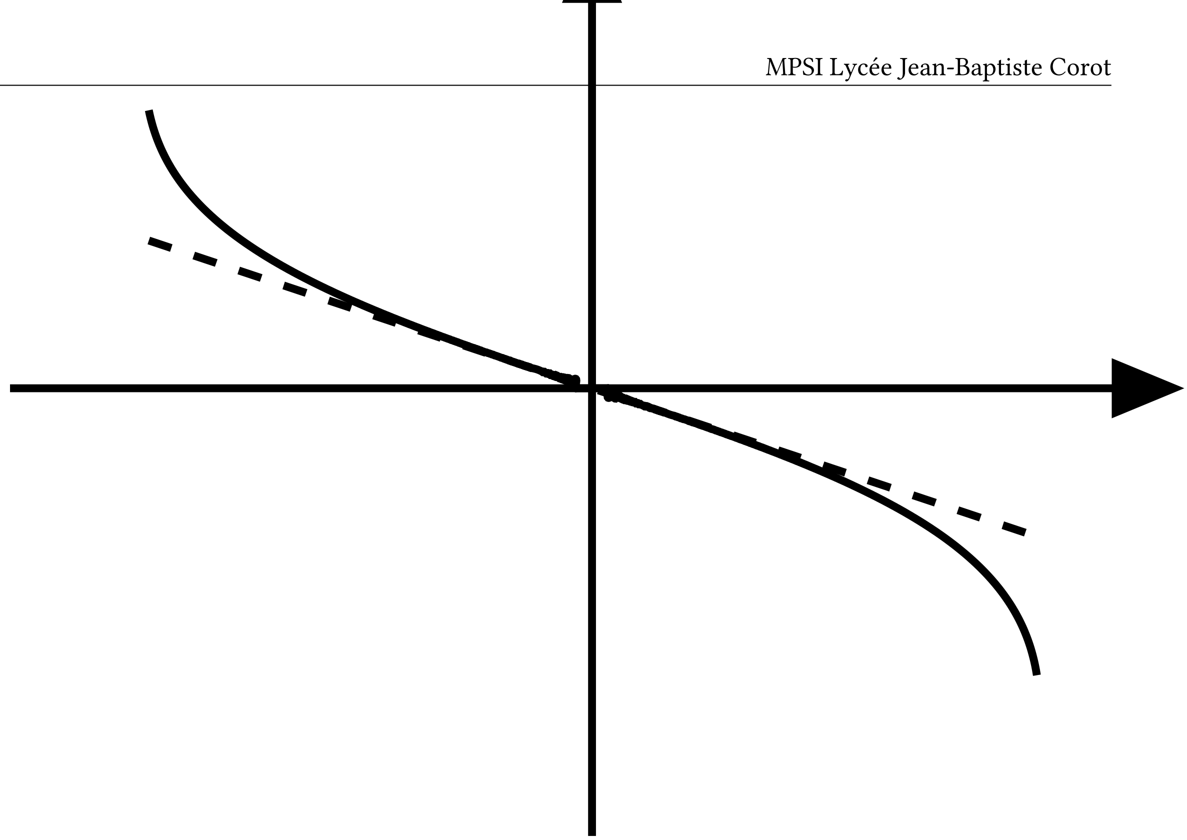
$$f(x) = -\frac{1}{6}x + o(x),$$

la prolongée f (prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 0$) est dérivable en 0 avec $f'(0) = -\frac{1}{6}$.

4. Comme

$$f(x) - \left(-\frac{1}{6}x \right) \underset{0}{=} -\frac{17}{360}x^3,$$

f présente un point d'inflexion en l'origine : la courbe traverse sa tangente.



Solution 36.

On a au voisiange de $\pm\infty$,

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

ainsi

$$f(x) = x + 2 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe admet donc la droite d'équation $y = x+2$ pour asymptote en $\pm\infty$, la courbe étant située au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$, et inversement au voisinage de $-\infty$.

Solution 37.

Il s'agit de montrer que $\lim_{x\to\infty}(f(x) - 2x) = 0$. On pose $t = 1/x$ et on se rapelle que le DL d'ordre 1 de $\ln(1+t)$ en 0 est t. Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(f(x) - 2x) &= \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - \frac{2}{t}\right] \\
&= \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t^2}(\ln(1+t) - \ln(1-t)) - \frac{2}{t}\right] \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^2}(t-(-t)) - \frac{2}{t}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Solution 38.

Les racines de x^2+x sont 0 et -1. f est donc définie sur $]-\infty,-1]\cup]0;+\infty[$. On a d'abord $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ par croissance comparée. La courbe admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote verticale. De plus, en $\pm\infty$

$$\begin{aligned} f(x) &= |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}e^{\frac{1}{x}} \\ &= |x|\left(1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= |x|\left(1+\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

La courbe admet donc la droite d'équation $y = x+\frac{3}{2}$ comme asymptote oblique en $+\infty$ et la droite d'équation $y = -x-\frac{3}{2}$ comme asymptote oblique en $-\infty$.

Solution 39.

1. Supposons f dérivable en a. On a alors
$$f(a+h) = f(a)+hf'(a)+o(h)$$
et
$$f(a-h) = f(a)-hf'(a)+o(h),$$
ainsi
$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \frac{2hf'(a)+o(h)}{2h} = f'(a)+o(1)$$
et donc
$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

2. La fonction *valeur absolue* n'est pas dérivable en 0 mais admet une dérivée symétrique en 0 car
$$\lim_{h\to0}\frac{|h|-|-h|}{2h} = 0.$$

Solution 40.

Ecrivons la formule de Taylor-Young à l'ordre deux en x_0 ,

$$f(x_0+h) \underset{0}{=} f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+o\left(h^2\right).$$

On a donc aussi

$$f(x_0-h) \underset{0}{=} f(x_0)-hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+o\left(h^2\right).$$

D'où , en notant $\tau(h)$ le quotient

$$\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2},$$

on a ,

$$\tau(h) = f''(x_0)+o(1),$$

ainsi

$$\lim_{h\to0}\tau(h) = f''(x_0).$$

Solution 41.

On a $u_n = \arctan n^3 - \arctan n^2$. Or si $n > 0$, n^2 et n^3 son strictement positifs d'où $\arctan n^2 = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{n^2}$ et $\arctan n^3 = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{n^3}$. Ainsi $u_n = \arctan \frac{1}{n^2} - \arctan \frac{1}{n^3}$ pour $n \geqslant 1$. Comme $\arctan u \underset{u \to 0}{\sim} u$, $\arctan \frac{1}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\arctan \frac{1}{n^3} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$. De plus, $\frac{1}{n^3} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

Solution 42.

1. On remarque que l'intégrande tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. Nous ne disposons pas en première année de théorème d'interversion limite/intégrale mais il y a cependant des chances que (u_n) converge vers 1. En effet,

$$1 - u_n = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{1+x^n} \leqslant \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

On en déduit que (u_n) converge vers 1.

2. On a vu que $1 - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \, dx}{1+x^n}$. Soit $n \geqslant 1$: on écrit $\frac{x^n}{1+x^n}$ sous la forme $\frac{x}{n} \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}$ et on effectue une intégration par parties :

$$1 - u_n = \left[\frac{x}{n} \ln(1+x^n)\right]_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$$

En utilisant l'inégalité classique $\ln(1+u) \leqslant u$, on a :

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leqslant \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n) dx \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent,

$$1 - u_n = \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{i.e.} \quad u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$