

DEVOIR SURVEILLÉ N°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 ★★

Calcul de $\zeta(2)$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^n dt$.

1. Calculer I_0, J_0, I_1, J_1 .
2. Montrer que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4.
 - a. Montrer que pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)$.
 - b. En déduire que $0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4} (I_n - I_{n+2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - c. Montrer que la suite de terme général $\frac{J_n}{I_n}$ converge vers 0.
5.
 - a. Montrer que $I_{n+2} = \frac{1}{2}(n+2)((n+1)J_n - (n+2)J_{n+2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - b. En déduire que $\frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{2}{(n+2)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite de terme général S_n converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2 ★★

Soient $I =]0, +\infty[$ et

$$(E) : (1 - e^{-t})y' + y = e^{-t}.$$

1. En remarquant que $\forall t \in \mathbb{R}, 1 - e^{-t} = e^{-t}(e^t - 1)$, résoudre l'équation homogène (E_H) sur I .
2. Résoudre (E) sur I .
3. On cherche à prouver que (E) admet une unique solution sur I admettant une limite finie en 0^+ .
 - a. Établir que pour tout $x \in I, x \leq e^x - 1 \leq xe^x$.
 - b. En déduire qu'il existe une unique solution de (E) sur I , notée f , admettant en 0^+ une limite finie ℓ . On précisera la valeur de ℓ .
4. Etude de f sur I . On prolonge désormais f en 0 en posant $f(0) = \ell$. Puisque $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \ell = f(0)$, la fonction f ainsi prolongée est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .
 - a. Étudier les variations de f sur I . On précisera la limite de f en $+\infty$.
 - b. Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}e^x.$$

- c. En déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
- d. Tracer le graphe de f sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 3 ★★**Équation fonctionnelle**

On note \mathcal{E} l'ensemble des fonctions f continues sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

1. Soit $f \in \mathcal{E}$.
 - a. Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
 - b. Démontrer que la fonction f est impaire.
2. On suppose que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .
 - a. Montrer que f est solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle $xy' - y = kx$ où $k = f'(1)$.
 - b. En déduire $f(x)$ en fonction de k pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. On note φ l'unique élément de \mathcal{E} dérivable sur \mathbb{R}_+^* vérifiant $\varphi'(1) = 1$.
 - a. φ est-elle dérivable en 0?
 - b. Déterminer les variations et les limites de φ en $+\infty$ et $-\infty$ puis tracer son graphe.
4. On considère $f \in \mathcal{E}$ que l'on suppose seulement continue sur \mathbb{R} . On note alors F l'unique primitive de f s'annulant en 0.
 - a. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, F(xy) = x^2F(y) + \frac{xy^2}{2}f(x)$.
 - b. En déduire que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .
 - c. Déterminer l'ensemble \mathcal{E} .

Exercice 4 ★★

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t) \, dt$$

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer les relations suivantes

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(a-b) &= \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) \\ \operatorname{ch}(a-b) &= \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)\end{aligned}$$

2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)g(t) \, dt$$

3. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 et que f est solution de l'équation différentielle $y'' - y = g$.
4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' - y = g$.