Semaine du 02/12 au 06/12

1 Cours

Comparaison de fonctions

Négligeabilité Définition et notation : $f \underset{a}{=} o(g) \iff \lim_a \frac{f}{g} = 0$. Règles de calcul et opérations interdites. Changement de variable. Exemples usuels : croissances comparées. Lien avec les limites : $\lim_a f = \ell \iff f \underset{a}{=} \ell + o(1)$.

Équivalence Définition et notation : $f \underset{a}{\sim} g \iff \lim_a \frac{f}{g} = 1$. Lien avec les petits o : $f \underset{a}{\sim} g \iff f \underset{a}{=} g + o(g)$. Règles de calcul et opérations interdites. Changement de variable. Équivalents usuels en 0 et formules avec petits o associées. Lien avec les limites : si deux fonctions sont équivalentes alors elles admettent toutes deux la même limite ou elles n'admettent pas de limites ; si ℓ est un réel **non nul** alors $f \underset{a}{\sim} \ell \iff \lim_a f = \ell$.

Domination Définition et notation : $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g) \iff \frac{f}{g}$ bornée au voisinage de a.

Développements limités

Définitions et propriétés Définition du développement limité d'une fonction. Unicité du développement limité. Une fonction est équivalente au monôme non nul de plus bas degré d'un DL (s'il existe). Lien avec la continuité (existence d'un DL d'ordre 0) et la dérivabilité (existence d'un DL d'ordre 1). DL et parité : le DL en 0 d'une fonction paire (resp. impaire) ne comporte que des puissances paires (resp.impaires).

Intégration et dérivation des DL, formule de Taylor-Young

- Intégration : si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors toute primitive F de f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ et le DL de F s'obtient en intégrant terme à terme celui de f.
- Taylor-Young : Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un voisinage de a, alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par la formule de Taylor-Young.

Développements limités usuels $\frac{1}{1 \pm x}$, e^x, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ en 0.

Calculs sur les DL Somme, produit, composition, inverse, quotient.

Application à l'étude de courbes Tangentes, asymptotes et positions locales relatives.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour les comparaisons de fonctions, on retiendra surtout les erreurs à ne pas commettre :
  1. On ne compose pas à gauche.
  2. On n'additionne pas des équivalents.
  3. On n'additionne pas des relations avec des petits o différents.
  4. On ne mélange pas équivalents et petits o dans une même ligne.
- Passage par les petits o pour déterminer l'équivalent d'une somme.
- Déterminer des limites à partir d'équivalents ou de petits o.
- Savoir se ramener en 0 par un changement de variable.
- Mettre les développements limités sous forme normalisée pour calculer des produits de DL.
- N'additionner que des développements limités de même ordre.
- Déterminer les ordres auxquels il faut développer les différentes composantes d'une expression pour obtenir un DL d'ordre donné de cette expression.
- Se ramener en 0 par changement de variable.

3 Questions de cours

- **Banque CCP Exo 56**
  On considère la fonction H définie sur $]1,+\infty[$ par

$$\mathrm{H}(x)=\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$$

1. Montrer que H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction u définie par $u(x)=\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en 1.
3. En utilisant la fonction u de la question 2, calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

- **DL de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$ en 0**
  Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)$$

- **Formule de Taylor-Young**
  Montrer par récurrence que si f est de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de a, alors

$$f(a+h)\underset{h\to0}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k+o(x^n)$$

- Déterminer un développement limité de tan à l'ordre 5 en 0.

- **Souvenir**
  Soit $(\theta,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}$. Calculer $\mathrm{S}_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$ et $\mathrm{C}_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$.