Devoir surveillé n°16

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

1. Evident.

2. **a.** Comme $X \in \mathcal{S}$, $X' = AX$. Comme l'application $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mapsto AU$ est linéaire, AX est de classe $\mathcal{C}^1$ et $(AX)' = AX' = A(AX)$. Ainsi $AX \in \mathcal{S}$.

b. D'après la question précédente, $AV = \begin{pmatrix} -\sin \\ -\cos \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda V + \mu AV = 0$. En évaluant en 0, on obtient $\lambda = \mu = 0$. Ainsi (V, AV) est libre. Comme $\dim \mathcal{S} = 2$, (V, AV) est une base de $\mathcal{S}$.

3. **a.** V et AV sont clairement bornées sur $\mathbb{R}$. Comme (V, AV) est une base de $\mathcal{S}$, $X \in \mathcal{S}$ est une combinaison linéaire des deux applications bornées V et AV. Ainsi X est bornée sur $\mathbb{R}$.

b. Posons $X = PY$. Comme expliqué précédemment, X est de classe $\mathcal{C}^1$ et $X' = PY'$. Alors

$$X' = PY' = PMY = PMP^{-1}X = AX$$

D'après la question précédente, X est bornée sur $\mathbb{R}$. Comme l'application $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mapsto P^{-1}U$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, elle est continue et il existe donc $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ N(P^{-1}U) \leq CN(U)$ où N désigne une norme sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Notamment,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ N(Y(t)) = N(P^{-1}X(t)) \leq CN(X(t))$$

Comme X est bornée sur $\mathbb{R}$, Y l'est également.

4. Le produit scalaire est bilinéaire et X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc $f : t \mapsto (X(t) \mid X(t))$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) &= (X'(t) \mid X(t)) + (X(t) \mid X'(t)) \\
&= 2(X(t) \mid X'(t)) = 2X(t)^\top X'(t) \\
&= 2X(t)^\top (A + b(t)I_2)X(t) \\
&= 2X(t)^\top AX(t) + 2b(t)X(t)^\top X(t) \\
&= 2X(t)^\top AX(t) + 2b(t)f(t)
\end{aligned}$$

Or la matrice A est antisymétrique donc pour tout $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en remarquant que $U^\top AU$ est un scalaire,

$$U^\top AU = (U^\top AU)^\top = U^\top A^\top U = -U^\top AU$$

puis $U^\top AU = 0$.

Remarque. On peut aboutir au même résultat en calculant directement $U^\top AU$ à l'aide des coefficients de A et U mais il est intéressant de savoir que le résultat est valide pour toute matrice antisymétrique de taille quelconque.

Finalement, on obtient bien

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = 2b(t)f(t)$$

5. Posons $\mathrm{B} : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^t b(u) \, \mathrm{d}u$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, B est une primitive de b de sorte que $f(t) = f(0) \exp(2\mathrm{B}(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme b est intégrable sur $\mathbb{R}$, les intégrales $\int_{-\infty}^0 |b(u)| \, \mathrm{d}u$ et $\int_0^{+\infty} |b(u)| \, \mathrm{d}u$ convergent et, par inégalité triangulaire,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ |\mathrm{B}(t)| \leq \int_0^t |b(u)| \, \mathrm{d}u \leq \int_0^{+\infty} |b(u)| \, \mathrm{d}u$$
$$\forall t \in \mathbb{R}_-, \ |\mathrm{B}(t)| \leq \int_t^0 |b(u)| \, \mathrm{d}u \leq \int_{-\infty}^0 |b(u)| \, \mathrm{d}u$$

La fonction B est donc bornée. Par conséquent, f est bornée puis X également.

Problème 1

1 On peut remarquer que si $u \in \mathcal{T}(\mathrm{E})$ est non nul alors $-u \notin \mathcal{T}(\mathrm{E})$. Ainsi $\mathcal{T}(\mathrm{E})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

2 **2.a** On calcule la trace à l'aide des coefficients :

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\mathrm{AB}) &= \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{AB})_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{i,j}\mathrm{B}_{j,i}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{B}_{j,i}\mathrm{A}_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}(\mathrm{BA})_{j,j} = \operatorname{tr}(\mathrm{BA})\end{aligned}$$

2.b Il existe alors $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. Alors, d'après la question précédente :

$$\operatorname{tr}(\mathrm{B}) = \operatorname{tr}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}) = \operatorname{tr}(\mathrm{APP}^{-1}) = \operatorname{tr}(\mathrm{A})$$

2.c La trace d'un endomorphisme de E est trace de la matrice de cet endomorphisme dans une base quelconque de E. La formule de changement de base et la question précédente montrent que cette trace est indépendante de la base choisie.

3 Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $p-1$.

3.a De manière générale, le complémentaire d'un sous-espace vectoriel de E n'est pas un sous-espace vectoriel de E puisqu'il ne contient pas le vecteur nul. Ainsi G n'est pas un sous-espace vectoriel de E

3.b Soit $a \in \mathrm{G}$. Comme dit précédemment, $a \neq 0_\mathrm{E}$ donc $\dim \operatorname{vect}(a) = 1$. Ainsi d'abord, $\dim \mathrm{H} + \dim \operatorname{vect}(a) = p - 1 + 1 = p = \dim \mathrm{E}$. De plus, soit $x \in \mathrm{H} \cap \operatorname{vect}(a)$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda a$. Supposons $\lambda \neq 0$. Alors $a = \frac{1}{\lambda}x \in \mathrm{H}$, ce qui n'est pas. Ainsi $\lambda = 0$ puis $x = 0_\mathrm{E}$. Finalement $\mathrm{H} \cap \operatorname{vect}(a) = \{0_\mathrm{E}\}$. On en déduit que $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \operatorname{vect}(a)$.

3.c Soit $a \in \mathrm{H}^\perp$ non nul. On ne peut avoir $a \in \mathrm{H}$ car alors $a \in \mathrm{H} \cap \mathrm{H}^\perp = \{0_\mathrm{E}\}$. D'après la question précédente, $\operatorname{vect}(a)$ est un supplémentaire de H dans E.

3.d tr est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Ainsi $\operatorname{Ker} \operatorname{tr}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

3.e D'après le théorème du rang, un endomorphisme de E est de rang 1 si et seulement si son noyau est de dimension $p-1$, autrement dit si et seulement si son noyau est un hyperplan de E.

4 Soit $(f, g) \in \mathcal{S}(\mathrm{E})^2$. On note A et B leurs matrices respectives dans une base de E.

- Tout d'abord, $\operatorname{tr}(f \circ g) = \operatorname{tr}(\mathrm{AB}) = \operatorname{tr}(\mathrm{BA}) = \operatorname{tr}(g \circ f)$ donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.
- Soient $(f, g, h) \in \mathcal{S}(\mathrm{E})^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\langle \lambda f + \mu g, h \rangle = \operatorname{tr}((\lambda f + \mu g) \circ h) = \operatorname{tr}(\lambda f \circ h + \mu g \circ h) = \lambda \operatorname{tr}(f \circ h) + \mu \operatorname{tr}(g \circ h) = \lambda\langle f, h \rangle + \mu\langle g, h \rangle$$

  Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche et symétrique donc bilinéaire.
- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et A sa matrice dans une base orthonormée de E. Alors, d'après un calcul précédent,

$$\langle f, f \rangle = \operatorname{tr}(\mathrm{A}^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{i,j}\mathrm{A}_{j,i}$$

  Mais A est la matrice d'un endomorphisme auto-adjoint dans une base orthonormée donc elle est symétrique. Ainsi

$$\langle f, f \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{i,j}^2 \geq 0$$

- Supposons maintenant $\langle f, f \rangle = 0$. Une somme de termes positifs ne pouvant être nulle que si chacun des termes est nul, $\mathrm{A}_{i,j} = 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Ainsi $\mathrm{A} = 0$ puis $f = 0$.

On en conclut que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire.

5 Calculons d'abord le polynôme caractéristique de A :

$$
\begin{aligned}
\chi_{\mathrm{A}} &= \begin{vmatrix} \mathrm{X}+5 & -1 & -1 \\ -1 & \mathrm{X}+5 & -1 \\ -1 & -1 & \mathrm{X}+5 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \mathrm{X}+3 & -1 & -1 \\ \mathrm{X}+3 & \mathrm{X}+5 & -1 \\ \mathrm{X}+3 & -1 & \mathrm{X}+5 \end{vmatrix} && \text{en effectuant } \mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 \\
&= (\mathrm{X}+3)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & \mathrm{X}+5 & -1 \\ 1 & -1 & \mathrm{X}+5 \end{vmatrix} && \text{en factorisant la première colonne} \\
&= (\mathrm{X}+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \mathrm{X}+6 & 0 \\ 1 & 0 & \mathrm{X}+6 \end{vmatrix} && \text{en effectuant } \mathrm{C}_2 \leftarrow \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 \text{ et } \mathrm{C}_3 \leftarrow \mathrm{C}_3 + \mathrm{C}_1 \\
&= (\mathrm{X}+3)(\mathrm{X}+6)^2
\end{aligned}
$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{-3, -6\}$.
Comme A est symétrique réelle, A est diagonalisable. La dimension des sous-espaces propres est donc égale à la multiplicité de la valeur propre dans le polynôme caractéristique. Ainsi $\dim \mathrm{E}_{-3}(\mathrm{A}) = 1$ et $\dim \mathrm{E}_{-6}(\mathrm{A}) = 2$. On vérifie aisément que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{E}_{-3}(\mathrm{A})$ donc $\mathrm{E}_{-3}(\mathrm{A}) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Comme A est symétrique réelle, ses sous-espaces propres sont orthogonaux. On en déduit que $\mathrm{E}_{-6}(\mathrm{A}) = \mathrm{E}_{-3}(\mathrm{A})^{\perp}$. Par exemple, $\mathrm{E}_{-6}(\mathrm{A}) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

6 Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. Alors

$$(u_a(x) \mid y) = ((x \mid a)a \mid y) = (x \mid a)(a \mid y)$$

et

$$(x \mid u_a(y)) = (x \mid (y \mid a)a) = (y \mid a)(x \mid a)$$

Par symétrie du produit scalaire, $(u_a(x) \mid y) = (x \mid u_a(y))$ donc $u_a \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. De plus,

$$(u_a(x) \mid x) = ((x \mid a)a \mid x) = (x \mid a)^2 \geq 0$$

Enfin, $\mathrm{Im}(u_a) =\subset \mathrm{vect}(a)$ donc $\mathrm{rg}(u_a) \leq 1$. Ainsi $u_a \in \mathcal{T}(\mathrm{E})$.

7 **7.a** On a $u_a(a) = (a \mid a)a$ et $u_a(x) = 0$ pour $x \in \mathrm{vect}(a)^{\perp}$ donc la matrice de u_a dans la base $\mathcal{B}$ est

$$
\mathrm{M}_a = \left(\begin{array}{c|c} (a \mid a) & 0 \ \dots \ 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{array}\right)
$$

7.b On en déduit que $\mathrm{tr}(u_a) = \mathrm{tr}(\mathrm{M}_a) = (a \mid a) = \|a\|^2$. De plus, en effectuant un produit par blocs,

$$
\mathrm{M}_a^2 = \left(\begin{array}{c|c} (a \mid a)^2 & 0 \ \dots \ 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{array}\right)
$$

donc $\mathrm{tr}(u_a^2) = \mathrm{tr}(\mathrm{M}_a^2) = (a \mid a)^2 = \|a\|^4$.

7.c Tout d'abord, $f \circ u_a(a) = (a \mid a)f(a)$. On écrit $f(a) = \lambda a + z$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathrm{vect}(a)^{\perp}$. Alors $(f(a) \mid a) = \lambda(a \mid a)$ donc $f \circ u_a(a) = (f(a) \mid a)a + (a \mid a)z$. De plus, pour $x \in \mathrm{vect}(a)^{\perp}$, $f \circ u_a(x) = 0_{\mathrm{E}}$. Le premier coefficient diagonal de la matrice de $f \circ u_a$ dans la base $\mathcal{B}$ est donc $(f(a) \mid a)$ et les autres sont nuls.

7.d On en déduit que $\operatorname{tr}(f \circ u_a) = (f(a) \mid a)$.

8 **8.a** Puisque u est de rang 1 et que $b \in \operatorname{Im}(u)$ est non nul, $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{vect}(b)$. Notamment, $u(b) \in \operatorname{vect}(b)$. Il existe donc $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $u(b) = \mu u$. De plus, $(u(b) \mid b) = \mu(b \mid b) \geq 0$ et $(b \mid b) > 0$ donc $\mu \geq 0$.

8.b Soit $x \in \mathrm{E}$. Alors $u(x) \in \operatorname{Im}(u) = \operatorname{vect}(b)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda b$. Alors $(u(x) \mid b) = \lambda(b \mid b) = \|b\|^2$. Mais comme u est auto-adjoint $(u(x) \mid b) = (x \mid u(b)) = (x \mid \mu b) = \mu(x \mid b)$. Ainsi $\lambda = \dfrac{\mu(x \mid b)}{\|b\|^2}$ puis $u(x) = \dfrac{\mu(x \mid b)}{\|b\|^2} b$.

8.c On sait que $\mu \geq 0$ mais μ ne peut être nul sinon u le serait également d'après la question précédente. Ainsi $\mu > 0$.

8.d Posons $a = \dfrac{\sqrt{\mu}}{\|b\|} b$ de sorte que $b = \dfrac{\|b\|}{\sqrt{\mu}} a$. Alors

$$\forall x \in \mathrm{E},\ u(x) = \frac{\mu}{\|b\|^2}(x \mid b)b = (x \mid a)a = u_a(x)$$

9 Remarquons que si $u \in \mathcal{T}(\mathrm{E})$ est nul, alors $u = \varphi(0_{\mathrm{E}})$. Si $u \in \mathcal{T}(\mathrm{E})$ est non nul, la question précédente montre qu'il existe $a \in \mathrm{E}$ tel que $u = \varphi(a)$. Ainsi φ est surjective.
Remarquons que pour tout $a \in \mathrm{E}$, $\varphi(a) = \varphi(-a)$ donc φ n'est pas injective.

Attention ! φ n'est manifestement pas linéaire. Cela n'aurait aucun sens de considérer son noyau pour étudier son injectivité.

10 Φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc elle est minorée par 0 : elle admet donc une borne inférieure sur E.

11 Soit $x \in \mathrm{E}$. On rappelle que N est la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ainsi, par identité remarquable,

$$\Phi(x) = \mathrm{N}(f)^2 - 2\langle f, u_x \rangle + \mathrm{N}(u_x) = \mathrm{N}(f)^2 - 2\operatorname{tr}(f \circ u_x) + \operatorname{tr}(u_x^2)$$

D'après les résultats de la question **7**, $\operatorname{tr}(f \circ u_x) = (f(x) \mid x)$ et $\operatorname{tr}(u_x^2) = \|x\|^4$. Ainsi

$$\Phi(x) = [\mathrm{N}(f)]^2 - 2(x \mid f(x)) + \|x\|^4$$

12 On reprend la question précédente :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h_x(t) = \Phi(x + ty) = [\mathrm{N}(f)]^2 - 2(x + ty \mid f(x + ty)) + \|x + ty\|^4$$

D'une part, comme f est auto-adjoint,

$$\begin{aligned}(x + ty \mid f(x + ty)) &= (x + ty \mid f(x) + tf(y))\\ &= (x \mid f(x)) + t(y \mid f(x)) + t(x \mid f(y)) + t^2(y \mid f(y))\\ &= (x \mid f(x)) + 2t(y \mid f(x)) + t^2(y \mid f(y))\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t(x \mid y) + t^2\|y\|^4 = \|x\|^2 + 2t(x \mid y) + t^2$$

donc

$$\|x + ty\|^4 = \|x\|^4 + 4t^2(x \mid y)^2 + t^4 + 4t\|x\|^2(x \mid y) + 4t^3(x \mid y) + 2t^2\|x\|^2$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ h_x(t) = \left[\mathrm{N}(f)^2 - 2(x \mid f(x)) + \|x\|^4\right] + 4\left[\|x\|^2(x \mid y) - (y \mid f(x))\right] t\\ + 2\left[\|x\|^2 + 2(x \mid y)^2 - (y \mid f(y))\right] t^2 + 4(x \mid y)t^3 + t^4\end{aligned}$$

13 Comme f est auto-adjoint, il existe une base orthonormée $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_p)$ de E formée de vecteurs propres de f. Quitte à réordonner les e_i, on peut supposer que leurs valeurs propres associées sont croissantes.

14 On sait que $\mathrm{N}(f)^2 = \operatorname{tr}(f^2)$. Or la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les λ_i. On en déduit que $\mathrm{N}(f) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2}$.

15 Soit $z \in \mathrm{E}$ de norme 1. Comme $\mathcal{C}$ est une base orthonormée, $z = \sum_{i=1}^{p}(z \mid e_i)e_i$ puis $f(z) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(z \mid e_i)e_i$ puis

$$(z \mid f(z)) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (z \mid e_i)^2 \leq \lambda_p \sum_{i=1}^{p}(z \mid e_i)^2$$

Or $\|z\| = 1$ donc $\sum_{i=1}^{p}(z \mid e_i)^2 = 1$. Finalement, pour tout $z \in \mathrm{E}$ unitaire, $(z \mid f(z)) \leq \lambda_p$. Cette égalité est atteinte pour $z = e_p$ donc

$$\alpha = \sup_{z\in\mathrm{E}, \|z\|=1} (z \mid f(z)) = \lambda_p$$

Soit maintenant $z \in \mathrm{E}$ unitaire tel que $(z \mid f(z)) = \alpha = \lambda_p$. En reprenant les calculs précédents, on a alors

$$\sum_{i=1}^{p}(z \mid e_i)^2(\lambda_p - \lambda_i) = 0$$

A nouveau, une somme de termes positifs ne peut être nuls que si ses termes sont nuls. Ainsi, $(z \mid e_i)^2 = 0$ dès que $\lambda_i \leq \lambda_p$. Finalement, $z \in \mathrm{E}_\alpha(f)$. Réciproquement, si $z \in \mathrm{E}_\alpha(f)$, alors $(z \mid f(z)) = \alpha$.
Finalement, les vecteurs $z \in \mathrm{E}$ unitaires tels que $(z \mid f(z)) = \alpha$ sont les vecteurs unitaires du sous-espace propre associé à la valeur propre α.

16 **16.a** L'expression de h_x déterminée à l'horrible question **12** montre que $h_a'(0) = 4\left[\|a\|^2(a \mid y) - (y \mid f(a))\right]$. Par ailleurs si $m(f)$ est atteint en a, alors h_a admet un minimum en 0 et $h_a'(0) = 0$.

16.b On déduit de la question précédente que $(f(a) \mid y) = \|a\|^2(a \mid y)$ pour tout vecteur unitaire y de E ou encore $(f(a) - \|a\|^2 a \mid y) = 0$. Par bilinéarité du produit scalaire, $(f(a) - \|a\|^2 a \mid y) = 0$ pour tout $y \in \mathrm{E}$ puis $f(a) = \|a\|^2 a$.

16.c On reprend à nouveau l'horrible question **12** sachant que le coefficient de t est nul :

$$\begin{aligned}\Phi(a + ty) - \Phi(a) = h_a(t) - h_a(0) &= 2\left[\|a\|^2 + 2(a \mid y)^2 - (y \mid f(y))\right]t^2 + 4(a \mid y)t^3 + t^4 \\ &= t^2\left[t^2 + 4(a \mid y)t + 4(a \mid y)^2 + 2\left(\|a\|^2 - (y \mid f(y))\right)\right] \\ &= t^2\left[(t + 2(a \mid y))^2 + 2\left(\|a\|^2 - (y \mid f(y))\right)\right]\end{aligned}$$

16.d Supposons que $m_f = \Phi(a)$. On a déjà prouvé que $f(a) = \|a\|^2 a$. Par définition de $m(f)$, $\Phi(a + ty) \geq \Phi(a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si on avait $(y \mid f(y)) > \|a\|^2$, la question précédente montrerait que

$$\Phi(a + ty) - \Phi(a) \underset{t\to 0}{\sim} 2\left(\|a\|^2 - (y \mid f(y))\right)t^2$$

et $\Phi(a + ty) - \Phi(a)$ serait donc strictement négatif au voisinage de 0. Par conséquent, $(y \mid f(y)) \leq \|a\|^2$.
Réciproquement, supposons que $f(a) = \|a\|^2 a$ et que pour tout $y \in \mathrm{E}$ de norme 1, $(y \mid f(y)) \leq \|a\|^2$. En reprenant ce qui précède, on montre alors que $\Phi(a + ty) \geq \Phi(a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout vecteur $y \in \mathrm{E}$ unitaire. Mais ceci signifie que $\Phi(x) \geq \Phi(a)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ car tout vecteur $x \in \mathrm{E}$ peut s'écrire sous la forme $x = a + ty$ avec $t \in \mathbb{R}$ et y unitaire. En effet, si $x = a$, on prend $t = 0$ et y unitaire quelconque et sinon, on prend $y = \dfrac{x - a}{\|x - a\|}$ et $t = \|x - a\|$. Finalement, on a bien $m(f) = \Phi(a)$.

17 **17.a** Supposons que $m(f) = \Phi(a)$. D'après la question précédente, $f(a) = \|a\|^2 a$. Supposons a non nul. Ainsi a est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\|a\|^2$. Or les valeurs propres de f sont les λ_i. Comme $\lambda_p \leq 0$, toutes les valeurs propres sont négatives. Ainsi $\|a\|^2 \leq 0$, ce qui est contradictoire avec a non nul. Ainsi $a = 0_{\mathrm{E}}$.
Réciproquement, supposons que $a = 0_{\mathrm{E}}$. Alors on a clairement, $f(a) = \|a\|^2 a$ et pour tout $y \in \mathrm{E}$ unitaire, $(y \mid f(y)) \leq \alpha = \lambda_p \leq 0 = \|a\|^2$. Donc, d'après la question précédente, $m(f) = \Phi(a)$.

17.b Les valeurs propres de f_{A} sont -6 et -3 : elles sont toutes négatives de sorte que

$$m(f_{\mathrm{A}}) = \Phi(0_{\mathrm{E}}) = \mathrm{N}(f_{\mathrm{A}})^2 = (-3)^2 + 2 \cdot (-6)^2 = 81$$

(cf. question **14**).

18 **18.a** Posons $a = \sqrt{\lambda_p}e_p$. Alors $\|a\|^2 = \lambda_p$ et $f(a) = \lambda_p a = \|a\|^2 a$. De plus, pour tout vecteur $y \in \mathrm{E}$ unitaire, $(y \mid f(y)) \leq \alpha = \lambda_p = \|a\|^2$. On en déduit d'après la question **11**,

$$m(f) = \Phi(a) = \mathrm{N}(f)^2 - 2(a \mid f(a)) + \|a\|^4 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 - 2(a \mid \|a\|^2 a) + \|a\|^4 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 - \|a\|^4 = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2$$

18.b Supposons que $m(f) = \Phi(x)$. Alors $f(x) = \|x\|^2 x$ et pour tout $y \in \mathrm{E}$ unitaire, $(y \mid f(y)) \leq \|x\|^2$. Notamment, pour $y = e_p$, on obtient $0 < \lambda_p \leq \|x\|^2$. Notamment, x n'est pas nul et c'est donc un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\|x\|^2$. Mais λ_p est la plus grande valeur propre de f et $\|x\|^2 \geq \lambda_p$. On en déduit que $\|x\|^2 = \lambda_p$ i.e $\|x\| = \sqrt{\lambda_p}$ et donc que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_p i.e. $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_p \mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

Réciproquement, supposons que $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_p \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ et $\|x\| = \sqrt{\lambda_p}$. D'après les questions **11** et **14**,

$$\Phi(x) = \mathrm{N}(f)^2 - 2(x \mid f(x)) + \|x\|^4 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 - 2\lambda_p\|x\|^2 + \|x\|^4 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 - 2\lambda_p^2 + \lambda_p^2 = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2 = m(f)$$

19 **19.a** $(1, \dots, 1)$ est un vecteur propre de f_M associé à la valeur propre 1 ou encore $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.

19.b En procédant comme indiqué dans l'énoncé

$$\lambda x_k = \sum_{j=1}^{p} m_{k,j} x_j$$

Par inégalité triangulaire,

$$|\lambda||x_k| \leq \sum_{j=1}^{p} |m_{k,j}||x_j| = \sum_{j=1}^{p} m_{k,j}|x_j| \leq \sum_{j=1}^{p} m_{k,j}|x_k| = |x_k|$$

Or $|x_k| > 0$ car X n'est pas nul donc $|\lambda| \leq 1$.

19.c D'après la question **18.b**, $m(f_\mathrm{M}) = \Phi(a)$ pour $a \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_p \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ tel que $\|a\| = \sqrt{\lambda_p}$ où λ_p est la plus grande valeur propre de f_M. D'après les questions précédentes, cette plus grande valeur propre est 1. En effet, 1 est effectivement valeur propre et si λ est une valeur propre de f_M, alors soit $\lambda \leq 0 \leq 1$ soit $\lambda \geq 0$ et alors $\lambda = |\lambda| \leq 1$. On cherche donc un vecteur a unitaire dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$. Comme $(1, \dots, 1)$ est dans ce noyau, il suffit de normer ce vecteur i.e. de choisir $a = \frac{1}{\sqrt{p}}(1, \dots, 1)$.

19.d On a alors $m(f_\mathrm{M}) = \mathrm{N}(f - v)^2$ avec $v = u_a$.

19.e Comme a est unitaire, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $v(x) = u_a(x) = (x \mid a)a$ est la projection orthogonale de x sur $\mathrm{vect}(a)$. Par conséquent, v est le projecteur orthogonal sur la droite $\mathrm{vect}((1, \dots, 1))$.

20 On remarque aisément que p est valeur propre de f_B (pour le vecteur propre $(1, \dots, 1)$ par exemple). Comme f_B est de rang 1, 0 est valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé est $p - 1$. Avec les notations de la partie précédente, $\lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$ et $\lambda_p = p > 0$. D'après la question **18.a**,

$$m(f_\mathrm{B}) = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2 = 0$$

D'après la question **18.b**, $m(f_\mathrm{B}) = \Phi(b)$ pour $b \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_p \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ tel que $\|b\| = \sqrt{\lambda_p}$ c'est-à-dire $b \in \mathrm{Ker}(f - p\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \mathrm{vect}((1, \dots, 1))$ et $\|b\| = \sqrt{p}$. On peut donc prendre $b = (1, \dots, 1)$.

21 **21.a** Remarquons que $\mathrm{C} = \mathrm{B} - \mathrm{I}_p$. D'après la question précédente, les valeurs propres de C sont donc $p - 1$ et -1. De plus, $\mathrm{E}_{p-1}(\mathrm{C}) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\dim \mathrm{E}_{-1}(\mathrm{C}) = p - 1$.

21.b Toujours avec les notations de la partie précédente, $\lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = -1$ et $\lambda_p = p - 1 > 0$ car $p > 1$. On en déduit d'après la question **18.a** que

$$m(f_\mathrm{C}) = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2 = p - 1$$

21.c D'après la question **18.b**, $m(f_\mathrm{C}) = \Phi(c)$ pour $c \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_p \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ tel que $\|c\| = \sqrt{\lambda_p}$ c'est-à-dire $c \in \mathrm{Ker}(f - (p-1)\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \mathrm{vect}((1, \dots, 1))$ et $\|c\| = \sqrt{p-1}$. On peut donc prendre $c = \sqrt{\frac{p-1}{p}}(1, \dots, 1)$ puis $w = u_c$.

21.d w n'est pas unique puisque $u_c = u_{-c}$.