# Devoir à la maison n°13 : corrigé

## Solution 1.

**1.** **a.** On a évidemment $[(1-X)+X]^{2n-1} = 1$. En développant le membre de gauche à l'aide de la formule du binôme de Newton, on obtient

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{2n-1-k} = 1$$

En séparant la somme en deux parties, on a également

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{2n-1-k} + \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{2n-1-k} = 1$$

ou encore

$$(1-X)^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k} + X^n \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^{k-n} (1-X)^{2n-1-k} = 1$$

Il suffit donc de poser

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k} \qquad G_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^{k-n} (1-X)^{2n-1-k}$$

$F_n$ et $G_n$ ainsi définis sont des combinaisons linéaires de polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

**b.** Soit $(F, G)$ un couple de polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant

$$(1-X)^n F + X^n G = 1$$

Alors

$$(1-X)^n (F - F_n) + X^n (G - G_n) = 0$$

Ainsi $X^n$ divise $F-F_n$. Or $\deg(F-F_n) \leqslant n-1$ donc $F = F_n$. De même, $(1-X)^n$ divise $G-G_n$ mais $\deg(G-G_n) \leqslant n-1$ donc $G = G_n$.

**2.** **a.** En substituant $1-X$ à $X$ dans l'égalité $(1-X)^n F_n(X) + X^n G_n(X) = 1$, on obtient

$$(1-X)^n G_n(1-X) + X^n F_n(1-X) = 1$$

Mais l'unicité des polynômes $F_n$ et $G_n$ prouvée à la question **1.b** montre que $F_n(1-X) = G_n(X)$ et que $G_n(1-X) = F_n(X)$.

**b.** En évaluant l'égalité $(1-X)^n F_n(X) + X^n G_n(X) = 1$ en $0$, on obtient $F_n(0) = 1$. En évaluant cette même égalité en $\frac{1}{2}$, on obtient

$$\frac{1}{2^n} F_n\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^n} G_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Or $G_n\left(\frac{1}{2}\right) = F_n\left(1-\frac{1}{2}\right) = F_n\left(\frac{1}{2}\right)$ d'après la question **2.a**. Ainsi $F_n\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{n-1}$.
Enfin, on a prouvé à la question **1.a** que

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k}$$

Ainsi $F_n(1) = \binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n}$.

**3.** **a.** Pour $x \neq 1$,

$$F_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n} - \frac{x^n G_n(x)}{(1-x)^n} = \frac{1}{(1-x)^n} - x^{n-1} \frac{x G_n(x)}{(1-x)^n}$$

Or $\lim_{x\to 0} \frac{x G_n(x)}{(1-x)^n} = 0$ car $G_n$ est continue en $0$. Il s'ensuit donc que

$$F_n(x) \underset{x\to 0}{=} (1-x)^{-n} + o\left(x^{n-1}\right)$$

**b.** Le développement limité de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en $0$ est usuel.

$$\begin{aligned}
(1-x)^{-n} &\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(-n-j)}{k!}(-x)^k + o\left(x^{n-1}\right)\\
&\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k\prod_{j=0}^{k-1}(n+j)}{k!}(-x)^k + o\left(x^{n-1}\right)\\
&\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(n+j)}{k!}x^k + o\left(x^{n-1}\right)\\
&\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}x^k + o\left(x^{n-1}\right)\\
&\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k}x^k + o\left(x^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Puisque $\deg F_n \leqslant n-1$, on a par unicité du développement limité, on a pour $x$ au voisinage de $0$

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

Comme tout voisinage de $0$ est infini

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}X^k$$

**4.** **a.** **Première méthode :** En dérivant la relation $(1-X)^n + X^nG_n = 1$, on obtient

$$-n(1-X)^{n-1}F_n + (1-X)^nF_n' + nX^{n-1}G_n + X^nG_n' = 0$$

ou encore

$$(1-X)^{n-1}\left(nF_n - (1-X)F_n'\right) = X^{n-1}\left(nG_n + F_n'\right)$$

Comme $X^{n-1}$ et $(1-X)^{n-1}$ sont premiers entre eux, $X^{n-1}$ divise $nF_n - (1-X)F_n'$. De plus,

$$\deg(nF_n - (1-X)F_n' \leqslant n-1$$

donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $nF_n - (1-X)F_n' = kX^{n-1}$. En évaluant cette égalité en $1$, on obtient $k = nF_n(1) = n\binom{2n-1}{n}$.

**Seconde méthode :** D'après **3.b**, $F_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}X^k$. Ainsi

$$\begin{aligned}
nF_n - (1-X)F_n' &= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}X^k - (1-X)\sum_{k=1}^{n-1}k\binom{n+k-1}{k}X^{k-1}\\
&= n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}X^k - \sum_{k=1}^{n-1}k\binom{n+k-1}{k}X^{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1}k\binom{n+k-1}{k}X^k\\
&= n + \sum_{k=1}^{n-1}(n+k)\binom{n+k-1}{k}X^k - \sum_{k=1}^{n-1}k\binom{n+k-1}{k}X^{k-1}\\
&= n + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)\binom{n+k}{k+1}X^k - \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\binom{n+k}{k+1}X^k\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\binom{n+k}{k+1}X^k - \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\binom{n+k}{k+1}X^k\\
&= n\binom{2n-1}{n}X^{n-1}
\end{aligned}$$

**b.** Le polynôme $X^{n-1}(1-X)^{n-1}$ admet évidemment une primitive $P_n \in \mathbb{R}[X]$. Alors, en posant $H_n = P_n - P_n(0)$, on a bien $H_n' = X^{n-1}(1-X)^{n-1}$ et $H_n(0)$.
Si $K_n \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $K_n' = X^{n-1}(1-X)^{n-1}$ et $K_n(0) = 0$ alors $K_n' = H_n'$ donc $H_n$ et $K_n$ sont égaux à une constante additive près. Puisque $H_n(0) = K_n(0)$, $H_n$ et $K_n$ sont égaux. On en déduit l'unicité de $H_n$.

**c.** En utilisant la question **4.a**,

$$\begin{aligned}
((1-X)^n F_n)' &= -n(1-X)^{n-1}F_n + (1-X)^n F_n' \\
&= -(1-X)^{n-1}\left(nF_n - (1-X)F_n'\right) \\
&= -n\binom{2n-1}{n}(1-X)^{n-1}X^{n-1} \\
&= -n\binom{2n-1}{n}H_n' = \left(1 - n\binom{2n-1}{n}H_n\right)'
\end{aligned}$$

Les polynômes $(1-X)^n F_n$ et $1 - n\binom{2n-1}{n}H_n$ sont donc égaux à une constante additive près. Par ailleurs, puisque $F_n(0) = 1$ et $H_n(0) = 0$, ces deux polynômes coïncident en $0$ : ils sont donc égaux.

**5. a.** Puisque $(1-X)^n F_n = 1 - n\binom{2n-1}{n}H_n$, on obtient $H_n(1) = \frac{1}{n\binom{2n-1}{n}}$.

**b.** Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_n'(x) = x^{n-1}(1-x)^{n-1}$.

- Si $n$ est impair, $H_n'$ est positive sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en $0$ et $1$. $H_n$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\deg H_n = 2n-1 \geqslant 1$ donc les limites de $H_n$ en $-\infty$ et $+\infty$ sont infinies. Les variations de $H_n$ imposent $\lim_{-\infty} H_n = -\infty$ et $\lim_{+\infty} H_n = +\infty$.
- Si $n$ est pair, $H_n'$ est négative sur $]-\infty, 0]$, positive sur $[0,1]$, négative sur $[1,+\infty[$ et ne s'annule qu'en $0$ et $1$. Ainsi $H_n$ est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$, strictement croissante sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. Pour les mêmes raisons que précédemment, les limites de $H_n$ en $-\infty$ et $+\infty$ sont infinies et les variations de $H_n$ imposent $\lim_{-\infty} H_n = +\infty$ et $\lim_{+\infty} H_n = -\infty$.

**c.** Puisque $(1-X)^n F_n = 1 - n\binom{2n-1}{n}H_n$ et que $F_n(1) \neq 0$, les racines réelles de $F_n$ sont exactement les antécédents distincts de 1 de $\frac{1}{n\binom{2n-1}{n}}$ par $H_n$.

- Si $n$ est impair, les variations et la continuité de $H_n$ montrent que $\frac{1}{n\binom{2n-1}{n}}$ admet un unique antécédent par $H_n$. Puisque $H_n(1) = \frac{1}{n\binom{2n-1}{n}}$, 1 est l'unique antécédent de $\frac{1}{n\binom{2n-1}{n}}$ par $H_n$. Mais celui-ci est à exclure puisque $F_n(1) \neq 0$. Ainsi $F_n$ n'admet pas de racine réelle.
- Si $n$ est pair, les variations et la continuité de $H_n$ montrent que $\frac{1}{n\binom{2n-1}{n}}$ admet un unique antécédent par $H_n$ sur $]-\infty,0]$. Puisque $H_n(1) = \frac{1}{n\binom{2n-1}{n}}$, les variations de $H_n$ montrent que le seul autre antécédent de $\frac{1}{n\binom{2n-1}{n}}$ par $H_n$ est 1. Mais celui-ci est à exclure puisque $F_n(1) \neq 0$. Ainsi $F_n$ admet une unique racine réelle et on peut même préciser que celle-ci est strictement négative.