Devoir surveillé n°05 : corrigé

Problème 1 — D'après Petites Mines 2009

Partie I – Etude d'une fonction

1. Puisque $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0 et que sh est impaire, f est paire.

2. **a.** On sait que $\operatorname{sh} X \underset{X\to 0}{\sim} X$. On en déduit que $\operatorname{sh}\frac{1}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ puis que $\lim_{\pm\infty} f = 1$.

   b. Puisque pour tout $X \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh} X = \frac{e^X+e^{-X}}{2}$, $\operatorname{sh} X \underset{X\to+\infty}{\sim} \frac{e^X}{2}$. Ainsi $\frac{\operatorname{sh} X}{X} \underset{X\to+\infty}{\sim} \frac{e^X}{2X}$. Par croissances comparées, $\lim_{X\to+\infty} \frac{\operatorname{sh} X}{X} = +\infty$. Via le changement de variables $X = \frac{1}{x}$, on obtient donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
   Par parité de f, $\lim x \to 0^- f(x) = +\infty$ et donc $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

3. Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sh est dérivable sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{sh}\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition. Ainsi f est également dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
   $$f'(x) = \operatorname{sh}\frac{1}{x} - x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{ch}\frac{1}{x} = \left(\operatorname{th}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)\operatorname{ch}\frac{1}{x}$$

4. Soit $g\colon X \mapsto \operatorname{th} X - X$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $X \in \mathbb{R}$, $g'(X) = \operatorname{th}^2 X$. Ainsi g' est positive sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 0 : g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $g(0) = 0$, $g(X) > 0$ i.e. $\operatorname{th} X < X$ pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$.

5. On sait que ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et la question précédente nous apprend que $\operatorname{th}\frac{1}{x} < \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. f' est donc strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par parité de f, on obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

6. On sait que
   $$\operatorname{sh} X \underset{X\to 0}{=} X + \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{120} + o\left(X^5\right)$$
   On en déduit
   $$\frac{\operatorname{sh} X}{X} \underset{X\to 0}{=} 1 + \frac{X^2}{6} + \frac{X^4}{120} + o\left(X^4\right)$$

7. En effectuant le changement de variable $x = \frac{1}{X}$, on obtient
   $$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$
   Autrement dit
   $$a_0 = 1 \qquad a_1 = 0 \qquad a_2 = \frac{1}{6} \qquad a_3 = 0 \qquad a_4 = \frac{1}{120}$$

8. D'après la question précédente,

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x)$$

On en déduit que $\lim_0 g = 1$. Ainsi g est prolongeable par continuité en 0. Comme g est déjà continue sur $\mathbb{R}^*$, son prolongement G est continu sur $\mathbb{R}$.
Par ailleurs $G(0) = 1$. Or, pour $x \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{G(x)-G(0)}{x-0} = \frac{g(x)-1}{x} \underset{x\to 0}{=} o(1)$$

Ainsi $\lim_{x\to 0} \frac{G(x)-G(0)}{x-0} = 0$ de sorte que G est dérivable en 0 (et $G'(0) = 0$). Comme g est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$, G l'est également. Finalement, G est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Partie II – Une équation différentielle

9. Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle (E) équivaut à

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\operatorname{ch} x}{x}$$

L'équation différentielle homogène associée est

$$y' + \frac{1}{x}y = 0$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
On recherche une solution particulière de l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\operatorname{ch} x}{x}$$

sous la forme $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$ avec λ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$ est solution *si et seulement si* $\lambda' = \operatorname{ch}$. Il suffit donc de choisir $\lambda = \operatorname{sh}$. Une solution particulière de

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\operatorname{ch} x}{x}$$

est donc $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\operatorname{sh} x}{x}$.
Les solutions de cette équation différentielle et donc de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\operatorname{sh} x + \lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

10. Les solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $x \in \mathbb{R}_-^* \mapsto \frac{\operatorname{sh} x + \mu}{x}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

11. Soit y une fonction solution de (E) sur $\mathbb{R}$. D'après les deux questions précédentes, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = \frac{\operatorname{sh} x + \lambda}{x}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ y(x) = \frac{\operatorname{sh} x + \mu}{x}$$

y doit être dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, a fortiori, continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 0. Ceci impose que les limites à gauche et à droite de y en 0 doivent être finies. Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$, ceci impose $\lambda = \mu = 0$ et donc $y(x) = G(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Par ailleurs, y est dérivable en 0 donc continue en 0 donc $y(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1 = G(0)$. Finalement, $y = G$.
Réciproquement, G est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. De plus, d'après la question **I.8**, $G(0) = 1$ et $G'(0) = 0$ donc G est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Remarque. On aurait également pu montrer que G était de classe $\mathcal{C}^1$ par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$. Ainsi l'identité $xG'(x) + G(x) = \operatorname{ch}(x)$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ aurait pu être étendu à tout $x \in \mathbb{R}$ par continuité de $x \mapsto xG'(x) + G(x)$ et $\operatorname{ch} x$ en 0. ■

Partie III – Une fonction définie par une intégrale

12. Fixons $x \in \mathbb{R}^*$. En effectuant le changement de variable $t \mapsto -t$, on obtient via la parité de f

$$J(x) = -\int_{-\frac{x}{2}}^{-x} f(-t)\ dt = -\int_{-\frac{x}{2}}^{-x} f(t)\ dt = -J(-x)$$

Ainsi J est impaire.

13. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$2\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x$$

14. f est coninue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet une primitive F sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $J(x) = F(x) - F\left(\frac{x}{2}\right)$. F est dérivable en tant que primitive et $x \mapsto F\left(\frac{x}{2}\right)$ est dérivable car $x \mapsto \frac{x}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi J est dérivable comme différence de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
J'(x) &= F'(x) - \frac{1}{2}F'\left(\frac{x}{2}\right)\\
&= f(x) - \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)\\
&= f(x) - \frac{x}{4}\operatorname{sh}\frac{2}{x}\\
&= f(x) - \frac{x}{2}\operatorname{sh}\frac{1}{x}\operatorname{ch}\frac{1}{x} \quad \text{d'après la question } \textbf{III.13}\\
&= f(x)\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{ch}\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

15. f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ car sh l'est.

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2}\operatorname{ch}\frac{1}{x} = 0 &\iff \operatorname{ch}\frac{1}{x} = 2\\
&\iff e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}} = 4\\
&\iff X + \frac{1}{X} = 4 \quad \text{en posant } X = e^{\frac{1}{x}}\\
&\iff X^2 - 4X + 1 = 0\\
&\iff X = 2 + \sqrt{3} \text{ ou } X = 2 - \sqrt{3}\\
&\iff x = \frac{1}{\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)} \text{ ou } x = \frac{1}{\ln\left(2 - \sqrt{3}\right)}
\end{aligned}$$

Or $2 - \sqrt{3} < 1$ donc $\frac{1}{\ln(2-\sqrt{3})} < 0$. On en déduit que $\varphi \colon x \mapsto 1 - \frac{1}{2}\operatorname{ch}\frac{1}{x}$ ne s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$ qu'en $\alpha = \frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}$.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Il vient ensuite que φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi φ est strictement négative sur $]0, \alpha[$, nulle en α et strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$.
Puisque $J' = f\varphi$, J' est également strictement négative sur $]0, \alpha[$, nulle en α et strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$.

16. **a.** Posons pour $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\psi(t) = \operatorname{sh} t - t - \frac{t^3}{6}$$

ψ est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\psi'(t) = \operatorname{ch} t - 1 - \frac{t^2}{2}$$
$$\psi''(t) = \operatorname{sh} t - t\psi'''(t) = \operatorname{ch} t - 1$$

Les variations de ch nous enseignent que ψ''' est positive sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi ψ'' est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\psi''(0) = 0$, ψ'' est positive sur $\mathbb{R}_+$. A nouveau, ψ' est croissante sur $\mathbb{R}_+$ est nulle en 0 donc positive sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, on peut affirmer que ψ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ est nulle en 0 donc positive sur $\mathbb{R}_+$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question précédente, pour tout $t \in \left[\frac{x}{2}, x\right]$, $f(t) \geqslant 1+\frac{1}{6t^2}$. Par positivité de l'intégrale

$$J(x) \geqslant \int_{\frac{x}{2}}^{x} \left(1+\frac{1}{6t^2}\right)\,dt = \frac{x}{2}+\frac{1}{6x}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{2}+\frac{1}{6x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2}+\frac{1}{6x} = +\infty$, il vient $\lim\limits_{x\to 0^+} J(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} J(x) = +\infty$ par théorème de minoration.

17. D'après les questions **III.15** et **III.16.b**, on a le tableau de variations suivant.

x	0		α		$+\infty$
$J'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
J	‖ $+\infty$	$\searrow$	$J(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

18. **a.** Comme $\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, $h(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{6}+o(1)$. Ainsi $\lim_0 h = \frac{1}{6}$ et h est prolongeable par continuité en 0.

b. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Remarquons que

$$J(x)-\frac{x}{2} = \int_{\frac{x}{2}}^{x} (f(t)-1)\,dt$$

A l'aide du changement de variable $u=\frac{1}{t}$,

$$J(x)-\frac{x}{2} = -\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{1}{x}} (f(1/u)-1)\frac{du}{u^2} = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} h(u)\,du$$

c. Comme h est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive H sur $\mathbb{R}$ dont on peut supposer qu'elle s'annule en 0. En «primitivant» le dévéloppement limité de h obtenu précédemment, on obtient

$$H(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{6}+o(x)$$

Par changement de variable,

$$H(1/x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{6x}+o(1/x)$$
$$H(2/x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{3x}+o(1/x)$$

puis

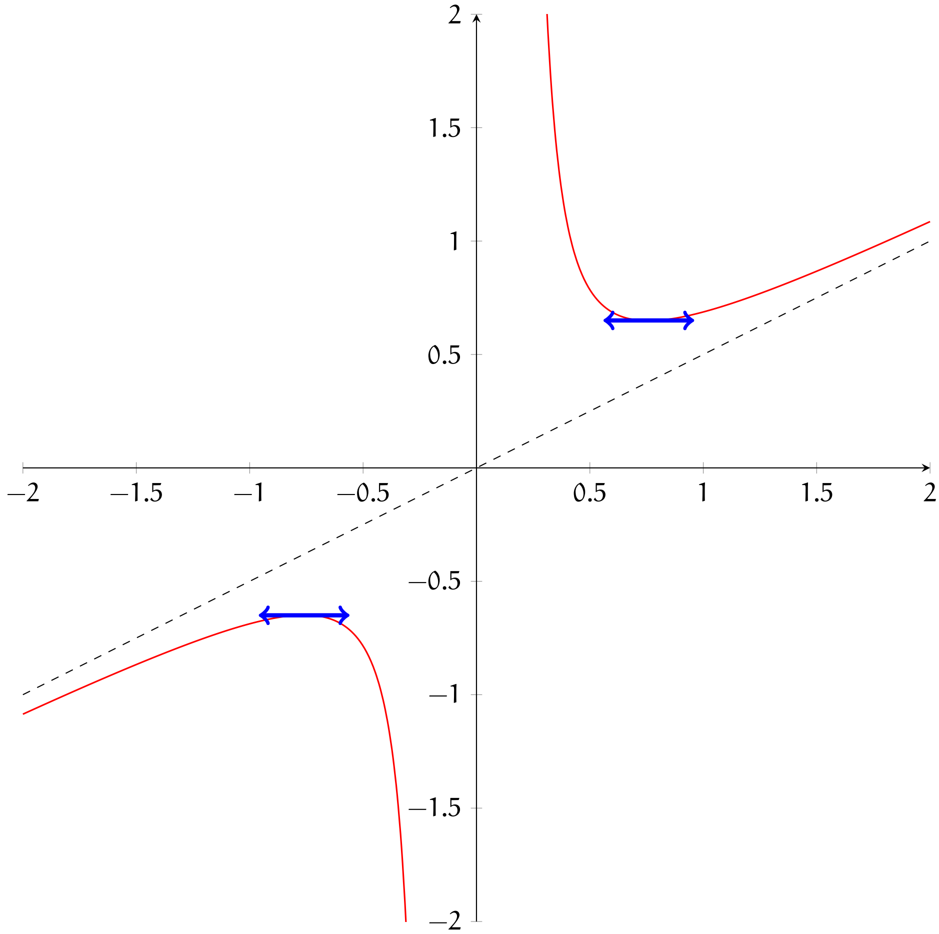
$$J(x)-\frac{x}{2} = H(2/x)-H(1/x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{6x}+o(1/x)$$

19. Puisque $J(x)-\frac{x}{2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6x}$, $\lim_{x\to+\infty} J(x)-\frac{x}{2} = 0$. Ainsi la courbe de J admet une asymptote oblique d'équation $y=\frac{x}{2}$ en $+\infty$.
De plus, on a vu à la question **III.16.b** que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ J(x) \geqslant \frac{x}{2}+\frac{1}{6x} > \frac{x}{2}$$

Ainsi la courbe de J est-elle au-dessus de son asymptote dans le demi-plan d'équation $x>0$. Comme J est impaire, la courbe de J admet cette même asymptote en $-\infty$ mais la courbe de J est au-dessous de cette asymptote dans le demi-plan d'équation $x<0$.

20.



Solution 1.

1. On a notamment
$$f(0+0)+f(0-0)=2f(0)f(0)$$
donc $f(0)=f(0)^2$ de sorte que $f(0)=0$ ou $f(0)=1$.

2. Si $f(0)=0$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$2f(x)=f(x+0)+f(x-0)=2f(x)f(0)=0$$
donc f est la fonction nulle.

3. Soit $x\in\mathbb{R}$. Les fonctions $y\mapsto f(x+y)$, $y\mapsto f(x-y)$ et $y\mapsto f(x)f(y)$ sont toutes dérivables de dérivées respectives $y\mapsto f'(x+y)$, $y\mapsto -f'(x-y)$ et $y\mapsto f(x)f'(y)$. En dérivant par rapport à y la relation (E), on obtient donc
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f'(x+y)-f'(x-y)=2f(x)f'(y)$$
En choisissant $x=y=0$, on obtient $f'(0)-f'(0)=2f(0)f'(0)$ et donc $f'(0)=0$ car $f(0)=1\neq0$.

4. A nouveau, on fixe $x\in\mathbb{R}$ et on remarque que les fonctions $y\mapsto f'(x+y)$, $y\mapsto f'(x-y)$ et $y\mapsto f(x)f'(y)$ sont encore dérivables de dérivées respectives $y\mapsto f''(x+y)$, $y\mapsto -f''(x-y)$ et $y\mapsto f(x)f''(y)$. En dérivant par rapport à y la relation de la question précédente, on obtient donc
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f''(x+y)+f''(x-y)=2f(x)f''(y)$$
En choisissant $y=0$, on obtient alors
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)=f(x)f''(0)=rf(x)$$
Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y''-ry=0$.

- Si $r = 0$, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda x + \mu$$
Or $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ donc $\mu = 1$ et $\lambda = 0$. Ainsi f est-elle constante égale à 1.
- Si $r > 0$, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda e^{x\sqrt{r}} + \mu e^{-x\sqrt{r}}$$
Or $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ donc $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$. Ainsi f est-elle la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x\sqrt{r})$.
- Si $r < 0$, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda \cos(x\sqrt{-r}) + \mu \sin(x\sqrt{-r})$$
Or $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ donc $\lambda = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi f est-elle la fonction $x \mapsto \cos(x\sqrt{-r})$.

5. Il suffit de montrer que la fonction nulle, les fonctions $x \mapsto \operatorname{ch}(rx)$ et $x \mapsto \cos(rx)$ pour $r \in \mathbb{R}$ sont bien de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifient bien la relation (E). On laisse le soin au lecteur de le vérifier.

Les fonctions recherchées sont donc la fonction nulle, les fonctions $x \mapsto \operatorname{ch}(rx)$ et $x \mapsto \cos(rx)$ pour $r \in \mathbb{R}$.

Solution 2.

1. Faux. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

2. Faux. $]0, 1[\cap \mathbb{Q} = \varnothing$.

3. Vrai. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Comme $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $]a, b[\cap \mathcal{A} \neq \varnothing$. Mais $]a, b[\cap \mathcal{A} \subset]a, b[\cap \mathcal{B}$ donc $]a, b[\cap \mathcal{B} \neq \varnothing$.

4. Faux. Supposons qu'il existe une partie $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ bornée et dense dans $\mathbb{R}$. Notons M un majorant de $\mathcal{A}$ (il en existe un car $\mathcal{A}$ est majorée). Alors $]M, M+1[\cap \mathcal{A} \neq \varnothing$. Il existe donc $x \in \mathcal{A}$ tel que $x > M$, ce qui contredit le fait que M est un majorant de $\mathcal{A}$.