

# DEVOIR SURVEILLÉ N°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1 – CCP PSI 2006

Si  $n$  est un entier naturel non nul, on note

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

et on pose  $\sigma_0 = 0$ .

A toute suite complexe  $a$ , on associe la suite  $a^*$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$$

### Partie I – Deux exemples

#### 1. Cas d'une suite constante.

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ . On suppose que la suite  $a$  est définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \alpha$ .

- Expliciter  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- Expliciter  $a_n^*$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- La série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  (resp.  $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ ) est-elle convergente ?

#### 2. Cas d'une suite géométrique.

Soit  $z \in \mathbb{C}$  ; on suppose que la suite  $a$  est définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = z^n$ .

- Exprimer  $a_n^*$  en fonction de  $z$  et  $n$ .
- On suppose que  $|z| < 1$ .
  - Justifier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  et expliciter sa somme  $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .
  - Justifier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n^*$  et expliciter sa somme  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$  en fonction de  $A(z)$ .
- On suppose que  $|z| \geq 1$ .
  - Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  ?
  - Quelle est la nature de  $\sum_{n \geq 0} a_n^*$  si  $z = -2$  ?

- iii. On suppose  $z = e^{i\theta}$ , avec  $\theta$  réel tel que  $0 < |\theta| < \pi$ .  
 Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n^*$  est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$ .

## Partie II – Etude du procédé de sommation

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que  $a$  est à valeurs réelles.

### 1. Comparaison des convergences des deux suites.

- a. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère une entier  $k$  fixé,  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .
- Préciser un équivalent de  $\binom{n}{k}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
  - En déduire la limite de  $\frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- b. Soit  $a$  une suite réelle et  $q$  un entier naturel fixé.  
 On considère pour  $n > q$  la somme  $S_q(n, a) = \sum_{k=0}^q \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$ . Quelle est la limite de  $S_q(n, a)$  lorsque l'entier  $n$  tend vers  $+\infty$  ?
- c. On suppose que  $a_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Montrer que  $a_n^*$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- d. On suppose que  $a_n$  tend vers  $\ell$  (limite finie) lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Quelle est la limite de  $a_n^*$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?
- e. La convergence de la suite  $(a_n)$  est-elle équivalente à la convergence de la suite  $(a_n^*)$  ?

### 2. Comparaison des convergences des séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ,  $T_n = \sum_{k=0}^n a_k^*$ ,  $U_n = 2^n T_n$ .

- a. Pour  $n \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ , exprimer  $U_n$  comme combinaison linéaire des sommes  $S_k$ , c'est à dire sous la forme  $U_n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} S_k$ .
- b. On se propose de déterminer l'expression explicite de  $U_n$  comme combinaison linéaire des sommes  $S_k$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$(\mathcal{E}) \quad U_n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} S_k \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

- A quelle expression des coefficients  $\lambda_{n,k}$  (en fonction de  $n$  et  $k$ ) peut-on s'attendre compte-tenu des résultats obtenus à la question précédente ?
  - Etablir la formule  $(\mathcal{E})$  par récurrence sur l'entier  $n$  (on pourra remarquer que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $a_k = S_k - S_{k-1}$  avec la convention  $S_{-1} = 0$ ).
- c. On suppose que la série  $\sum a_n$  est convergente. Montrer que la série  $\sum a_n^*$  est convergente et exprimer la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$  en fonction de la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .
- d. La convergence de la série  $\sum a_n$  est-elle équivalente à la convergence de la série  $\sum a_n^*$  ?

## Partie III – Une étude de fonctions.

Pour  $x$  réel, lorsque cela a du sens, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n x^n}{n!}$$

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n$$

### 1. Etude de $f$ .

- Vérifier que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Expliciter  $xf(x)$  pour tout  $x$  réel.
- Expliciter  $e^{-x}f(x)$  pour tout  $x$  réel.

### 2. Etude de $g$ .

- Montrer que  $g$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- On désigne par  $g'$  la dérivée de la fonction  $g$ . Exprimer  $g' - g$  en fonction de  $f$ .
- Montrer que pour tout  $x$  réel :

$$g(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt$$

### 3. La fonction $F$ .

On considère la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t} f(t) dt$$

- Montrer que la fonction  $F$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  et expliciter son développement.
- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k \cdot k!(n-k)!}$ . Exprimer  $\gamma_n$  en fonction de  $n$  et  $\sigma_n$ .

### 4. La série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ .

- Soit  $w_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1}$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .
  - Montrer que la série  $\sum_{k \geq 1} w_k$  est convergente.
  - En déduire que la suite de terme général  $\sigma_n - \ln(n)$  admet une limite finie (que l'on ne demande pas de calculer) lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $\tau_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ . Exprimer  $\tau_{2n}$  en fonction de  $\sigma_{2n}$  et  $\sigma_n$ .
- Montrer en utilisant les questions précédentes que la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  est convergente et déterminer sa somme  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ .

### 5. Etude de la fonction $\phi$ .

- Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum_{n \geq 1} \sigma_n x^n$ .
- Préciser l'ensemble de définition  $\Delta$  de la fonction  $\phi$ , et étudier ses variations sur  $[0, R[$ .
- Valeur de  $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$ .  
En utilisant les résultats de la partie II et de la question 4.c, expliciter la valeur de  $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$ .
- Expliciter  $\phi(x)$  pour  $x \in \Delta$  et retrouver la valeur de  $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$ .