Devoir surveillé n°1
MPSI
2 heures

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

1. Déterminer le terme général de la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et telle que $u_{n+1} = u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit (u_n) la suite de premier terme $u_0 = 1$ et telle que $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le sens de variation de (u_n) et montrer que (u_n) converge vers un réel à préciser.
3. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k = 2+4+6+\cdots+2n$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2+4+8+16\cdots+2^n$.
6. Mettre sous forme algébrique le complexe $z = \overline{\left(\dfrac{5-3i}{-2+i}\right)}$.
7. Mettre sous forme trigonométrique le complexe $z = -\sqrt{6}+i\sqrt{2}$.
8. Résoudre sur $[-\pi, \pi]$ l'équation $\sin(x)\cos(x) = \dfrac{1}{4}$.
9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2x+1}{x+2} \geqslant \dfrac{3x-1}{x+1}$.
10. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+3| \leqslant |2x-1|$.
11. Déterminer les variations de la fonction f telle que $f(x) = (2x^2+2x-31)e^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
12. Déterminer les variations de la fonction f telle que $f(x) = \ln(1+|x^2-1|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
13. Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation $2x^3-9x^2+12x = \dfrac{9}{2}$.
14. A l'aide de formules trigonométriques, déterminer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

15. Calculer $I = \int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\, dt$.

16. Soit f la fonction telle que $f(x) = e^{\cos(2x)} \sin(2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer une primitive de f.

17. Soit f la fonction telle que $f(x) = \frac{\sin(x^3)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Déterminer la limite de f en 0.

18. Soit f la fonction telle que $f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Déterminer la limite de f en 0.

19. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement et avec remise $n-1$ boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois la boule numéro n ? Même question lorsque le tirage s'effectue sans remise.

20. Un joueur tire une boule dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à $2n$. Si le numéro de la boule est pair, il *gagne* autant d'euros que le numéro inscrit sur la boule. Si le numéro est impair, il *perd* autant d'euros que le numéro inscrit sur la boule. Calculer l'espérance du gain du joueur.