Devoir à la maison n°03 : corrigé

Problème 1 —

Partie I – Étude d'une application

1. Il s'agit de déterminer les solutions éventuelles de l'équation $f(z) = i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$. Cette équation équivaut à $z^2 - iz + 1 = 0$ qui est une équation du second degré dont le discriminant est égal à $-5 = (i\sqrt{5})^2$. Les solutions de cette équation sont donc $\frac{i(1+\sqrt{5})}{2}$ et $\frac{i(1-\sqrt{5})}{2}$ qui sont donc également les antécédents de i par f.

2. On vient de voir que i admettait deux antécédents par f : f n'est donc pas injective.

3. Soit $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à l'équation (E) : $\ f(z) = \mathrm{Z}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Celle-ci équivaut à $z^2 - z\mathrm{Z} + 1 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré dont 0 n'est manifestement pas solution. Cette dernière équation admet donc toujours au moins une solution non nulle donc Z admet au moins un antécédent par f. L'application f est donc surjective.

4. Puisque $\mathbb{U} = \left\{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\right\}$,
$$f(\mathbb{U}) = \left\{f\left(e^{i\theta}\right),\ \theta \in \mathbb{R}\right\} = \left\{e^{i\theta} + e^{-i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\right\} = \{2\cos\theta,\ \theta \in \mathbb{R}\}$$
Puisque $\operatorname{Im}(\cos) = [-1, 1]$, $f(\mathbb{U}) = [-2, 2]$.

5. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors
$$\begin{aligned}
z \in f^{-1}(\mathbb{R}) &\iff f(z) \in \mathbb{R} \\
&\iff f(z) = \overline{f(z)} \\
&\iff z + \frac{1}{z} = \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}} \\
&\iff z - \overline{z} - \frac{z - \overline{z}}{z\overline{z}} = 0 \\
&\iff (z - \overline{z})\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) = 0 \\
&\iff \overline{z} = z \text{ ou } |z| = 1 \\
&\iff z \in \mathbb{R}^* \text{ ou } z \in \mathbb{U}
\end{aligned}$$
Ainsi $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}$.

6. On étudie pour cela l'application $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \frac{1}{x} \end{array}\right.$. φ est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Les variations de φ montrent que $\operatorname{Im}(\varphi) \subset]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$. Mais la continuité de φ montre via le théorème des valeurs intermédiaires que φ prend toutes les valeurs dans $]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$. Il en résulte que $f(\mathbb{R}^*) = \operatorname{Im}(\varphi) =]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$.

7. Soit $Z \in f(D)$. Il existe donc $z \in D$ tel que $Z = f(z)$. Il s'agit maintenant de montrer que $f(z) \notin [-2,2]$. On peut raisonner par l'absurde. Supposons que $f(z) \in [-2,2]$. A fortiori, $f(z) \in \mathbb{R}$ i.e. $z \in f^{-1}(\mathbb{R})$. D'après la question **I.5**, $z \in \mathbb{R}$ ou $z \in \mathbb{U}$. Or on ne peut avoir $z \in \mathbb{U}$ puisque $z \in D$. C'est donc que $z \in \mathbb{R}$. Mais alors $f(z) \in f(\mathbb{R}) =]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$. Or $f(z) \in [-2,2]$ donc $f(z) = -2$ ou $f(z) = 2$. Les variations de φ nous disent alors que $z = -1$ ou $z = 1$, ce qui est à nouveau impossible puisque $z \in D$.
On en conclut par l'absurde que $f(z) \notin [-2,2]$. Ainsi on a bien $f(D) \subset \mathbb{C} \setminus [-2,2]$.

8. Soit $Z \in \mathbb{C} \setminus [-2,2]$. On rappelle que les antécédents de Z par f sont les solutions de l'équation $z^2 - Zz + 1 = 0$. Cette équation du second degré admet pour discriminant $Z^2 - 4$ qui est non nul puisque $Z \notin \{-2,2\}$. Elle admet donc deux solutions. Ainsi Z admet exactement deux antécédents par f dans $\mathbb{C}^*$. Notons α et β les deux antécédents de Z par f. Puisqu'ils sont solutions de l'équation $z^2 - Zz + 1 = 0$, $\alpha\beta = 1$.

9. On reprend les notations de la question précédente. Il s'agit maintenant de voir qu'un seul des deux antécédents de Z par f appartient à D. Puisque $\alpha\beta = 1$, on a également $|\alpha||\beta| = 1$. On ne peut avoir $|\alpha| = 1$ ou $|\beta| = 1$ puisqu'alors $Z = f(\alpha) = f(\beta)$ appartiendrait à $f(\mathbb{U}) = [-2,2]$. Ainsi α et β sont de module distincts de 1. Puisque $|\alpha||\beta| = 1$, l'un de ces deux modules est strictement inférieur à 1 et l'autre est strictement supérieur à 1. Un seul de ces deux complexes appartient donc à D (ils sont évidemment tous deux de module non nul puisqu'ils appartiennent à $\mathbb{C}^*$). Ainsi Z admet un unique antécédent dans D par f. Ceci prouve que f induit une bijection de D sur $\mathbb{C} \setminus [-2,2]$.

Partie II – Un petit peu d'exponentielle complexe

1. On a déjà vu que les antécédents de i par f étaient $\frac{i(1+\sqrt{5})}{2}$ et $\frac{i(1-\sqrt{5})}{2}$. Les antécédents de i par g sont donc les antécédents de ces deux nombres par la fonction exponentielle. Les formes exponentielles de ces deux nombres sont

$$\frac{i(1+\sqrt{5})}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} \qquad \frac{i(1-\sqrt{5})}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot e^{\frac{-i\pi}{2}}$$

On en déduit que leurs antécédents par l'exponentielle sont les complexes

$$\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \text{ et } \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

où $k \in \mathbb{Z}$. Il s'agit donc également des antécédents de i par g.

2.

$$g(i\mathbb{R}) = \{g(i\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\} = \{2\cos\theta,\ \theta \in \mathbb{R}\} = [-2,2]$$

3. On sait que $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$. Ainsi $g(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_+^*)$. Les variations de la fonction φ étudiées à la question **I.6** montrent que $f(\mathbb{R}_+^*) = [2,+\infty[$.

Partie III – Une suite d'applications

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_2(z) &= z\varphi_1(z) - \varphi_0(z) = z^2 - 2 \\
\varphi_3(z) &= z\varphi_2(z) - \varphi_1(z) = z^3 - 3z \\
\varphi_4(z) &= z\varphi_3(z) - \varphi_2(z) = z^4 - 4z^2 + 2
\end{aligned}$$

2. Les solutions de l'équation $\varphi_2(z) = 0$ sont clairement $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
De même, les solutions de l'équation $\varphi_3(z) = 0$ sont 0, $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.
L'équation $\varphi_4(z) = 0$ est une équation bicarrée. On la résout classiquement en effectuant le changement de variable $Z = z^2$. Les solutions de l'équation $Z^2 - 4Z + 2 = 0$ sont $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. On en déduit que les solutions de l'équation $\varphi_4(z) = 0$ sont

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}},\ -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}},\ \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}},\ -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

3. On note P_n l'assertion

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \varphi_n(f(z)) = f(z^n)$$

Puisque pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\varphi_0(z) = 2$ et $f(z^0) = f(1) = 2$, P_0 est vraie. De même, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\varphi_1(f(z)) = z + \frac{1}{z}$ et $f(z^1) = z + \frac{1}{z}$ donc P_1 est vraie.
Supposons P_n et P_{n+1} vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+2}(f(z)) &= f(z)\varphi_{n+1}(f(z)) - \varphi_n(f(z))\\
&= f(z)f(z^{n+1}) - f(z^n)\\
&= \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\\
&= z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}} = f(z^{n+2})
\end{aligned}$$

Ainsi P_{n+2} est vraie.
Par récurrence double, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. L'équation $f(z^n) = 0$ équivaut à $z^{2n} = -1$. L'ensemble des solutions de cette équation est donc l'ensemble des racines $2n^{\text{èmes}}$ de -1, c'est-à-dire

$$\mathrm{A}_n = \left\{e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}},\ k \in [\![0, 2n-1]\!]\right\}$$

5. Remarquons que pour $\omega \in \mathrm{A}_n$,

$$\varphi_n(f(\omega)) = f(\omega^n) = 0$$

Donc les $f(\omega)$ pour $\omega \in \mathrm{A}_n$ sont des solutions de l'équation $\varphi_n(z) = 0$. Via une formule d'Euler, ceci signifie que les réels $2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k \in [\![0, 2n-1]\!]$ sont des solutions de l'équation $\varphi_n(z) = 0$.
Réciproquement, soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une solution de l'équation $\varphi_n(z) = 0$. Puisque f est surjective, il existe donc $\omega \in \mathbb{C}^*$ tel que $\alpha = f(\omega)$. Alors $f(\omega^n) = \varphi_n(f(\omega)) = f(\omega^n) = 0$ de sorte que ω est solution de l'équation $f(z^n) = 0$. Il existe donc $k \in [\![0, 2n-1]\!]$ tel que $\alpha = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}$. Mais alors $\alpha = f(\omega) = 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.
Finalement l'ensemble des solutions de l'équations $\varphi_n(z) = 0$ est

$$\mathrm{B}_n = \left\{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k \in [\![0, 2n-1]\!]\right\}$$

On peut remarquer que certains éléments de B_n figurent en double dans la description précédente. En effet,

$$\mathrm{B}_n = \left\{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\} \cup \left\{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k \in [\![n, 2n-1]\!]\right\}$$

On montre alors que les deux ensembles de cette union sont égaux.

$$\begin{aligned}
\left\{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k \in [\![n, 2n-1]\!]\right\} &= \left\{2\cos\left(\frac{(2(k+n)+1)\pi}{2n}\right),\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}\\
&\quad \text{via le "changement d'indice" } k \to k+n\\
&= \left\{2\cos\left(\pi + \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}\\
&= \left\{-2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}\\
&= \left\{-2\cos\left(\frac{(2(n-1-k)+1)\pi}{2n}\right),\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}\\
&\quad \text{via le "changement d'indice" } k \to n-1-k\\
&= \left\{-2\cos\left(\pi - \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}\\
&= \left\{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}
\end{aligned}$$

Finalement, on peut affirmer que

$$\mathrm{B}_n = \left\{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$ et cos est injective sur $[0, \pi]$ puisqu'elle y est strictement décroissante. Les réels $2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont donc deux à deux distincts. Le nombre de solutions de l'équation $\varphi_n(z) = 0$ est donc n.

Remarque. Le lecteur cultivé aura remarqué que les fonctions φ_n sont reliées aux *polynômes de Tchebychev*.