

GROUPES, ANNEAUX, CORPS

1 Notion de loi

1.1 Loi interne

Définition 1.1 Loi interne

Soit E un ensemble. On appelle *loi interne* sur E toute application de $E \times E$ dans E .

Notation 1.1

Si $*$ est une loi interne sur E , l'image d'un couple $(x, y) \in E^2$ par $*$ est notée $x * y$ plutôt que $*(x, y)$. La notation $(E, *)$ signifie l'ensemble E *muni* de la loi interne $*$.

Exemple 1.1

- La loi $+$ est une loi interne sur \mathbb{N} mais pas la loi $-$.
- Soit A un ensemble. Les lois \cup et \cap sont des lois internes sur $\mathcal{P}(A)$.
- Le produit vectoriel est une loi interne sur l'ensemble des vecteurs de l'espace mais le produit scalaire n'en est pas une.

REMARQUE. Un ensemble muni d'une loi interne s'appelle un *magma*.

Si la loi n'est pas une loi usuelle, on appelle souvent l'élément $x * y$ le *produit* de x et y , par analogie avec la multiplication. Bien entendu, si la loi est notée $+$, on parlera plutôt de *somme*. ■

1.2 Associativité

Définition 1.2 Associativité

Soit $*$ une loi interne sur un ensemble E . On dit que $*$ est *associative* si pour tout $(x, y, z) \in E^3$:

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

On peut alors noter $x * y * z$ sans parenthèses.

Exemple 1.2

- La multiplication sur \mathbb{C} est une loi interne associative.
- La soustraction sur \mathbb{Z} est une loi interne non associative.

1.3 Commutativité

Définition 1.3 Commutativité

Soit $*$ une loi interne sur un ensemble E . On dit que $*$ est *commutative* si pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$x * y = y * x$$

REMARQUE. Le symbole $+$ est généralement réservé aux lois commutatives. ■

Exemple 1.3

- L'addition sur \mathbb{R} est commutative.
- La composition sur E^E n'est pas commutative dès que E possède plus de deux éléments.

1.4 Élément neutre et inversibilité

Définition 1.4 Élément neutre

Soit $*$ une loi interne sur un ensemble E . On dit que $e \in E$ est un élément neutre de $(E, *)$ si

$$\forall x \in E, \quad x * e = e * x = x$$

Théorème 1.1 Unicité de l'élément neutre

Soit $*$ une loi interne sur un ensemble E . Si $(E, *)$ possède un élément neutre, il est unique.

REMARQUE. Si la loi est additive (i.e. notée $+$), l'élément neutre est généralement noté 0 . Si la loi est multiplicative (i.e. noté \times), l'élément neutre est généralement noté 1 . ■

REMARQUE. Un ensemble muni d'une loi interne associative et possédant un élément neutre est appelé un *monoïde*. ■

Exemple 1.4

- 1 est l'élément neutre de (\mathbb{C}, \times)
- \emptyset est l'élément neutre de $(\mathcal{P}(E), \cup)$ et E est l'élément neutre de $(\mathcal{P}(E), \cap)$.
- $(\mathbb{N}^*, +)$ ne possède pas d'élément neutre.
- Id_E est l'élément neutre de (E^E, \circ) .

Définition 1.5 Élément inversible

Soit $*$ une loi interne sur un ensemble E possédant un élément neutre e . On dit qu'un élément x de E est *inversible* pour la loi $*$ s'il existe un élément x' tel que

$$x * x' = x' * x = e$$

Un tel x' s'appelle un *inverse* de x .

REMARQUE. L'élément neutre est toujours inversible et il est inverse de lui-même. ■

Exemple 1.5

- Tous les éléments non nuls de (\mathbb{Q}, \times) sont inversibles.
- 1 et -1 sont les seuls éléments inversibles de (\mathbb{Z}, \times) .
- Les éléments inversibles de (E^E, \circ) sont les bijections de E dans E .

Tout ce qui suit n'est valable que pour les lois associatives possédant un élément neutre.

Théorème 1.2 Unicité de l'inverse

Soit E un ensemble muni d'une loi interne *associative* possédant un élément neutre. Tout élément inversible possède un unique inverse.

Notation 1.2

L'inverse est généralement noté x^{-1} ou encore x^{*-1} s'il y a un risque d'ambiguïté sur la loi interne. Si la loi est notée $+$, on parle *d'opposé* plutôt que d'inverse et on le note $-x$ plutôt que x^{-1} .

Théorème 1.3 Propriétés de l'inverse

Soit E un ensemble muni d'une loi interne *associative* possédant un élément neutre.

- (i) Soit $x \in E$ inversible. Alors x^{-1} est inversible et $(x^{-1})^{-1} = x$.
- (ii) Soit $(x, y, z) \in E^3$ avec x inversible. Alors

$$(x * y = x * z \text{ ou } y * x = z * x) \implies y = z$$

- (iii) Soit $(x, y) \in E^2$. Si x et y sont inversibles, alors $x * y$ est inversible et $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.

REMARQUE. La deuxième propriété signifie que l'on peut simplifier à gauche et à droite. ■



ATTENTION ! L'inverse de $x * y$ n'est pas $x^{-1} * y^{-1}$ mais bien $y^{-1} * x^{-1}$.

1.5 Puissances**Notation 1.3 Puissance**

Soit E un ensemble muni d'une loi interne associative $*$ et d'un élément neutre e .

Soient x un élément de E et $n \in \mathbb{N}^*$.

- L'élément $\underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois}}$ se note x^{*n} ou encore x^n s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la loi.
- Par convention, on pose $x^0 = e$.
- Si x est inversible, on pose $x^{-n} = (x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$.

REMARQUE. Si la loi est noté additivement $+$, on parle plutôt de *multiple* que de puissance et le «multiple $k^{\text{ème}}$ » de x s'écrit kx plutôt que x^{+k} . ■

Proposition 1.1 Règles de calcul

Soit E un ensemble muni d'une loi interne associative $*$ et d'un élément neutre e .
Soient x un élément de E .

1. Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $x^n * x^p = x^{n+p}$.
2. Si x est inversible, alors pour tout $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$, $x^n * x^p = x^{n+p}$.



ATTENTION ! En général $(x * y)^n \neq x^n * y^n$, à moins d'avoir commutativité de $*$.

1.6 Distributivité**Définition 1.6 Distributivité**

Soit E un ensemble et $*$ et \top deux lois internes sur E . On dit que la loi $*$ est distributive par rapport à \top si :

$$\forall (x, y, z) \in E^2, \quad x * (y \top z) = (x * y) \top (x * z) \quad \text{et} \quad (y \top z) * x = (y * x) \top (z * x)$$

Exemple 1.6

- La loi \times est distributive sur la loi $+$ dans \mathbb{Z} .
- Pour tout ensemble E , l'union \cup et l'intersection \cap sont deux lois distributives l'une sur l'autre dans $\mathcal{P}(E)$.

2 Groupes**2.1 Définition****Définition 2.1**

On appelle *groupe* tout ensemble G muni d'une loi interne $*$ vérifiant les conditions suivantes :

- (i) $*$ est associative,
- (ii) $(E, *)$ possède un élément neutre,
- (iii) tout élément est inversible.

REMARQUE. Il peut arriver qu'on parle d'un groupe sans préciser sa loi. Le produit de deux éléments x et y de G se notera alors simplement xy . ■

Définition 2.2 Groupe commutatif

Soit $(G, *)$ un groupe. Si la loi $*$ est commutative, on dit que le groupe $(G, *)$ est *commutatif* ou *abélien*.

2.2 Groupes classiques**Proposition 2.1 Ensembles de nombres**

- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes commutatifs d'élément neutre 0.
- (\mathbb{Q}^*, \times) , (\mathbb{R}^*, \times) et (\mathbb{C}^*, \times) sont des groupes commutatifs d'élément neutre 1.

REMARQUE. Quand on parle du groupe \mathbb{R} sans préciser la loi, on parle toujours du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$. De même, quand on parle du groupe \mathbb{C}^* sans préciser la loi, on parle toujours du groupe multiplicatif (\mathbb{C}^*, \times) . ■

Proposition 2.2 Groupe symétrique

Soit E un ensemble. L'ensemble des bijections de E sur E est noté $\mathfrak{S}(E)$. $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ est un groupe d'élément neutre Id_E .

Proposition 2.3 Ensembles de transformations du plan

On note P le plan. Les ensembles suivants munis de la loi de composition sont des groupes d'élément neutre Id_P :

- l'ensemble des homothéties du plan de rapport non nul,
- l'ensemble des translations du plan,
- l'ensemble des rotations du plan,
- l'ensemble des similitudes directes du plan de rapport non nul,
- l'ensemble des similitudes du plan de rapport non nul.

REMARQUE. Les éléments inversibles d'un monoïde forment un groupe. ■

2.3 Sous-groupes

Définition 2.3 Sous-groupe

Soient $(G, *)$ un groupe et H un ensemble. On dit que H est un *sous-groupe* de G si :

- (i) $H \subset G$
- (ii) H contient l'élément neutre,
- (iii) H est stable pour la loi $*$ i.e. $\forall (h, h') \in H^2, h * h' \in H$,
- (iv) H est stable par passage à l'inverse i.e. $\forall h \in H, h^{-1} \in H$.

Exemple 2.1

Soit G un groupe d'élément neutre e . Alors G et $\{e\}$ sont des sous-groupes de G .

REMARQUE. Si H est un sous-groupe d'un groupe $(G, *)$. Alors pour tout $(h, n) \in H \times \mathbb{Z}$, $h^n \in H$. ■

Proposition 2.4

Soient $(G, *)$ un groupe et H un sous-groupe de G . Alors $(H, *)$ est un groupe. De plus,

- (i) l'élément neutre de $(H, *)$ est l'élément neutre de $(G, *)$;
- (ii) si $h \in H$, l'inverse de h en tant qu'élément du groupe $(H, *)$ est égal à son inverse en tant qu'élément du groupe $(G, *)$.

REMARQUE. Si on voulait être rigoureux, il faudrait munir H de la restriction de $*$ à H . ■

REMARQUE. Si K est un sous-groupe de H qui est un sous-groupe de G , alors K est un sous-groupe de G . ■

Théorème 2.1 Caractérisation des sous-groupes

Soient $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e et H un ensemble. Alors H est un sous-groupe *si et seulement si*

- (i) $H \subset G$;
- (ii) H contient l'élément neutre ;
- (iii) $\forall (h, k) \in H^2, h * k^{-1} \in H$.

Méthode **Sous-groupes en pratique**

Il est souvent plus facile de montrer qu'un ensemble muni d'une loi interne est un groupe en montrant qu'il est un sous-groupe d'un groupe connu.

Exemple 2.2

- $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$ qui est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$.
- (\mathbb{Q}^*, \times) est un sous-groupe de (\mathbb{R}^*, \times) qui est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. (\mathbb{U}_n, \times) est un sous-groupe de (\mathbb{U}, \times) qui est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .
- Les homothéties de rapport non nul, les translations, les rotations et les similitudes directes forment des sous-groupes du groupe des similitudes.
- Soient E un ensemble et $a \in E$. Les éléments de $\mathfrak{S}(E)$ fixant a forment un sous-groupe de $\mathfrak{S}(E)$.

2.4 Morphismes de groupes (hors-programme)**Définition 2.4 Morphisme de groupes**

Soient $(G, *)$ et (G', \cdot) deux groupes. On appelle *morphisme (de groupes)* de G dans G' toute application f de G dans G' telle que :

$$\forall (x, y) \in G^2, f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$$

On appelle *endomorphisme (de groupe)* de G tout morphisme de G dans G .

Exemple 2.3

- L'exponentielle est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans (\mathbb{R}^*, \times) .
- Le logarithme est un morphisme de (\mathbb{R}^*, \times) dans $(\mathbb{R}, +)$.
- Le module est un morphisme de (\mathbb{C}^*, \times) dans (\mathbb{R}^*, \times) .
- La valeur absolue est un endomorphisme de (\mathbb{R}^*, \times) .

Proposition 2.5 Morphisme, élément neutre et inverse

Soit f un morphisme de $(G, *)$ dans (G', \cdot) . On note e et e' les éléments neutres respectifs de G et G' . Alors

- (i) $f(e) = e'$,
- (ii) $\forall x \in G, f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.
- (iii) $\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}, f(x^n) = f(x)^n$.

Proposition 2.6 Morphisme et composition

Soient $f : G \rightarrow G'$ et $g : G' \rightarrow G''$ deux morphismes de groupes. Alors $g \circ f : G \rightarrow G''$ est un morphisme de groupes.

Proposition 2.7 Images directe et réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupes

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes.

- (i) Si H est un sous-groupe de G , alors $f(H)$ est un sous-groupe de G' .
- (ii) Si K est un sous-groupe de G' , alors $f^{-1}(K)$ est un sous-groupe de G .

Définition 2.5 Noyau et image d'un morphisme

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. On note e' l'élément neutre de G' .

- (i) On appelle *noyau* de f l'ensemble $\text{Ker } f = f^{-1}(\{e'\}) = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$.
- (ii) On appelle *image* de f l'ensemble $\text{Im } f = f(G) = \{f(x), x \in G\}$.

REMARQUE. L'image du morphisme f n'est autre que l'image de l'application f . ■

Théorème 2.2

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes.

- (i) $\text{Ker } f$ est un sous-groupe de G .
- (ii) $\text{Im } f$ est un sous-groupe de G' .

Exemple 2.4

Le module est un morphisme de $(\mathbb{C}, *)$ dans $(\mathbb{R}, *)$. Par définition, son noyau est \mathbb{U} qui est donc un sous-groupe de $(\mathbb{C}, *)$.

De même, $\{-1, 1\}$ est un sous-groupe de (\mathbb{R}^*, \times) puisque c'est le noyau de l'endomorphisme «valeur absolue» de (\mathbb{R}^*, \times) .

Proposition 2.8

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. On note e l'élément neutre de G .

- (i) f est injectif si et seulement si $\text{Ker } f = \{e\}$.
- (ii) f est surjectif si et seulement si $\text{Im } f = G'$.

REMARQUE. En ce qui concerne la première proposition, pour prouver l'injectivité de f , il suffit de montrer que $\text{Ker } f \subset \{e\}$ puisque $\text{Ker } f$, étant un sous-groupe, contient nécessairement e . ■

Méthode Injectivité en pratique

Pour prouver l'injectivité d'un morphisme de groupes $f : G \rightarrow G'$, on commence la démonstration par : « Soit $x \in G$ tel que $f(x) = e'$ » et on montre que $x = e$.

Définition 2.6 Isomorphisme, automorphisme

Soient G et G' deux groupes.

On appelle *isomorphisme* de G sur G' tout morphisme bijectif de G dans G' .

On appelle *automorphisme* de G tout endomorphisme bijectif de G . On dit que G est *isomorphe* à G' s'il existe un isomorphisme de G sur G' .

REMARQUE. Dire que deux groupes sont isomorphes veut dire qu'ils ont la même structure. Si on connaît l'un, on connaît l'autre. Toute propriété liée à la structure de groupe qui est vraie dans un groupe est aussi vraie dans un groupe qui lui est isomorphe. ■

Exemple 2.5

- $(\mathbb{C}, +)$ et $(\mathbb{R}^2, +)$ sont isomorphes.
- Notons \vec{P} et \vec{E} le plan et l'espace vectoriel. Alors $(\vec{P}, +)$ et $(\vec{E}, +)$ sont respectivement isomorphes à $(\mathbb{R}^2, +)$ et $(\mathbb{R}^3, +)$.

Théorème 2.3 Réciproque d'un isomorphisme

Soit f un isomorphisme de groupes de G sur G' . Alors f^{-1} est un isomorphisme de groupes de G' sur G .

Théorème 2.4 Groupe des automorphismes

Soit G un groupe. L'ensemble des automorphismes de G , noté $\text{Aut}(G)$, est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(G), \circ)$.

3 Anneaux

3.1 Définition et premières propriétés

Définition 3.1 Anneau

On appelle *anneau* tout triplet $(A, +, \times)$ où A est un ensemble et $+$ et \times sont des lois internes sur A vérifiant les conditions suivantes :

- (i) $(A, +)$ est un groupe commutatif dont l'élément neutre est généralement noté 0_A ou 0 ,
- (ii) \times est associative,
- (iii) A possède un élément neutre pour \times généralement noté 1_A ou 1 ,
- (iv) \times est distributive sur $+$.

Si \times est commutative, on dit que l'anneau $(A, +, \times)$ est commutatif.

Exemple 3.1

- $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont trois exemples d'anneaux commutatifs.
- $(\mathbb{R}^n, +, \times)$ est un anneau commutatif (l'addition et la multiplication s'effectuant composante par composante).
- $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times)$ est un anneau commutatif.
- L'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} (noté $\mathbb{R}[X]$) est aussi un anneau commutatif.

Notation 3.1

Soit A un anneau. On note A^* l'ensemble des éléments inversibles de A .

Proposition 3.1

Si $(A, +, \times)$ est un anneau, (A^*, \times) est un groupe.

Théorème 3.1 Règle de calcul dans les anneaux

Soient $(A, +, \times)$ un anneau, $(a, b) \in A^2$ et $n \in \mathbb{Z}$.

- (i) $0_A \times a = a \times 0_A = 0_A$,
- (ii) $n(a \times b) = (na) \times b = a \times (nb)$,

REMARQUE. On peut avoir $1_A = 0_A$ mais il est facile de voir que, dans ce cas, tout élément de A est nul i.e. $A = \{0\}$. On appelle cet anneau l'*anneau nul*. ■

Définition 3.2 Anneau intègre

On dit qu'un anneau A est intègre s'il est *non nul* et s'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall (a, b) \in A^2, \quad ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$$

REMARQUE. On peut généraliser à un produit de plus de deux facteurs. ■

Exemple 3.2

Les anneaux \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} et \mathbb{C} sont intègres.

Les anneaux $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times)$ et $(\mathbb{R}^n, +, \times)$ pour $n \geq 2$ ne sont pas intègres.



ATTENTION ! Tous les anneaux ne sont pas intègres. Nous verrons par exemple dans le cadre de l'algèbre linéaire des anneaux non intègres.

3.2 Formules**Définition 3.3**

Soient $(A, +, \times)$ un anneau et $(a, b) \in A^2$. On dit que a et b commutent si $a \times b = b \times a$.

Proposition 3.2

Soient $(A, +, \times)$ un anneau et $(a, b) \in A^2$ tels que a et b *commutent*. Alors

$$(i) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \left[\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right] (a - b),$$

$$(ii) \quad \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

En particulier, ces formules sont toujours vraies dans un anneau commutatif.

3.3 Sous-anneaux**Définition 3.4 Sous-anneau**

Soient $(A, +, \times)$ un anneau et B un ensemble. On dit que B est un sous-anneau de $(A, +, \times)$ si :

- (i) $(B, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$;
- (ii) $1_A \in B$;
- (iii) B est stable par \times .

Proposition 3.3

Si B est un sous-anneau de $(A, +, \times)$, alors $(B, +, \times)$ est un anneau. De plus, $1_B = 1_A$.

Proposition 3.4 Caractérisation des sous-anneaux

Soient $(A, +, \times)$ un anneau et B un ensemble. B est un sous-anneau de $(A, +, \times)$ *si et seulement si* :

- (i) $B \subset A$;
- (ii) $1_A \in B$;
- (iii) $\forall (a, b) \in B^2, a - b \in B$;
- (iv) $\forall (a, b) \in B^2, a \times b \in B$.

Méthode **Sous-anneaux en pratique**

Il est souvent plus facile de montrer qu'un triplet $(A, +, \times)$ est un anneau en montrant qu'il est un sous-anneau d'un anneau connu.

Exemple 3.3

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$ qui est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$ qui est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Exercice 3.1**Entiers de Gauss**

Montrer que $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-anneau de \mathbb{C} .

Exercice 3.2

Soit $d \in \mathbb{N}$ qui ne soit pas un carré d'entier. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est un sous anneau de \mathbb{R} .

Exercice 3.3

Montrer que \mathbb{Z} est le seul sous-anneau de \mathbb{Z} .

3.4 Morphismes d'anneaux (hors-programme)**Définition 3.5 Morphisme d'anneaux**

Soient $(A, +, \times)$ et (B, \oplus, \otimes) deux anneaux. On appelle *morphisme d'anneaux* de A dans B toute application $f : A \rightarrow B$ telle que :

- (i) $f(1_A) = 1_B$,
- (ii) $\forall (a, b) \in A^2, f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$,
- (iii) $\forall (a, b) \in A^2, f(a \times b) = f(a) \otimes f(b)$,

REMARQUE. En particulier, f est un morphisme de groupes de $(A, +)$ dans (B, \oplus) . On peut donc définir le noyau et l'image d'un morphisme d'anneaux. ■

REMARQUE. On peut également définir des notions d'*endomorphisme*, d'*isomorphisme* et d'*automorphisme* d'anneaux. ■

Proposition 3.5 Images directe et réciproque d'un sous-anneau par un morphisme d'anneaux

Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux.

- (i) Si C est un sous-anneau de A , alors $f(C)$ est un sous-anneau de B .
- (ii) Si D est un sous-anneau de B , alors $f^{-1}(D)$ est un sous-anneau de A .

4 Corps**4.1 Définition et premières propriétés****Définition 4.1 Corps**

On appelle corps tout anneau *commutatif* $(K, +, \times)$ dans lequel tout élément non nul est inversible pour \times .

REMARQUE. En particulier, un corps est un anneau.
Pour tout corps K , $K^* = K \setminus \{0_K\}$. ■

Théorème 4.1 Corps et intégrité

Tout corps est *intègre*.

REMARQUE. On peut donc calculer dans un corps quelconque comme on calculerait dans \mathbb{Q} , \mathbb{R} ou \mathbb{C} . ■

Exemple 4.1

\mathbb{Q} , \mathbb{R} et \mathbb{C} sont des corps.

4.2 Sous-corps

Définition 4.2 Sous-corps

Soit $(K, +, \times)$ un corps et L un ensemble. On dit que L est un sous-corps de $(K, +, \times)$ si

- (i) L est un sous-anneau de $(K, +, \times)$;
- (ii) L est stable par inversion i.e. $\forall x \in L \setminus \{0_K\}, x^{-1} \in L$.

Proposition 4.1

Soient $(K, +, \times)$ un corps et L un sous-corps de $(K, +, \times)$. Alors $(L, +, \times)$ est un corps.

Proposition 4.2 Sous-corps

Soit $(K, +, \times)$ un corps et L un ensemble. L est un sous-corps de $(K, +, \times)$ si et seulement si

- (i) $L \subset K$;
- (ii) $1_K \in L$;
- (iii) $\forall (x, y) \in L^2, x - y \in L$;
- (iv) $\forall (x, y) \in L \times (L \setminus \{0_K\}), x \times y^{-1} \in L$.

Méthode Sous-corps en pratique

Il est souvent plus facile de montrer qu'un triplet $(K, +, \times)$ est un corps en montrant qu'il est un sous-corps d'un corps connu.

Exemple 4.2

$(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$ qui est un sous-corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$. \mathbb{Q} est le plus petit sous-corps de \mathbb{C} .

REMARQUE. Un sous-corps est un sous-anneau mais un sous-anneau d'un corps n'est pas forcément un sous-corps. Par exemple, \mathbb{Q} est bien un sous-anneau de \mathbb{R} car \mathbb{Q} est un sous-corps de \mathbb{R} . Mais \mathbb{Z} n'est pas un sous-corps de \mathbb{Q} bien qu'il soit un sous-anneau de \mathbb{Q} et que \mathbb{Q} soit un corps. ■

Exercice 4.1

Montrer que $\mathbb{Q}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un sous-corps de \mathbb{C} .

Exercice 4.2

Soit $d \in \mathbb{N}$ qui ne soit pas un carré d'entier. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ est un sous-corps de \mathbb{C} .

4.3 Morphismes de corps (hors-programme)

Définition 4.3 Morphisme de corps

Soient $(K, +, \times)$ et (L, \oplus, \otimes) deux corps. On appelle *morphisme de corps* de K dans L tout morphisme d'anneaux de K dans L .

Proposition 4.3

Soit $f : K \rightarrow L$ un morphisme de corps. Alors

1. $\forall x \in K^*, f(x) \in K^*$ et $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.
2. f est injectif.

On peut également définir des notions d'*endomorphisme*, d'*isomorphisme* et d'*automorphisme* de corps.

Exemple 4.3

La conjugaison est un automorphisme de corps de \mathbb{C} .