Interrogation écrite n°08

NOM : Prénom : Note :

1. Soit G un groupe dont l'élément neutre sera noté e. On pose $\mathrm{Z} = \{a \in \mathrm{G},\ \forall x \in \mathrm{G},\ ax = xa\}$. Montrer que Z est un sous-groupe de G.

   - Tout d'abord, pour tout $x \in \mathrm{G}$, $ex = xe = x$ donc $e \in \mathrm{Z}$.
   - Soient $(a, b) \in \mathrm{Z}^2$ et $x \in \mathrm{G}$. Alors

   $$\begin{aligned} (ab)x &= a(bx) && \text{par associativité} \\ &= a(xb) && \text{car } b \in \mathrm{Z} \\ &= (ax)b && \text{par associativité} \\ &= (xa)b && \text{car } a \in \mathrm{Z} \\ &= x(ab) && \text{par associativité} \end{aligned}$$

   Ainsi $ab \in \mathrm{Z}$ de sorte que Z est stable par produit.
   - Soient $a \in \mathrm{Z}$ et $x \in \mathrm{G}$. Alors $ax = xa$, puis $a^{-1}ax = a^{-1}xa$ i.e. $x = a^{-1}xa$. Enfin $xa^{-1} = a^{-1}xaa^{-1} = a^{-1}x$ de sorte que $a^{-1} \in \mathrm{Z}$. Z est donc stable par inversion.

   Ainsi Z est un sous-groupe de G.

2. On pose $\mathbb{Q}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$. Montrer que $(\mathbb{Q}[i], +\times)$ est un corps.

   On va montrer que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-corps du corps $(\mathbb{C}, +\times)$.

   - $1 = 1 + 0i \in \mathbb{Q}[i]$ car $(1, 0) \in \mathbb{Q}^2$.
   - Soit $(x, y) \in \mathbb{Q}[i]^2$. Il existe donc $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $x = a + ib$ et $y = c + id$. Alors $x - y = (a - c) + i(b - d) \in \mathbb{Q}[i]$ car $(a - c, b - d) \in \mathbb{Q}^2$.
   - Supposons $y \neq 0$ i.e. $(c, d) \neq (0, 0)$. Alors

   $$xy^{-1} = \frac{x}{y} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} \in \mathbb{Q}[i]$$

   car $\left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) \in \mathbb{Q}^2$.

   On en déduit que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-corps du corps $(\mathbb{C}, +\times)$. $(\mathbb{Q}[i], +, \times)$ est donc un corps.

3. Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ n'admet pas de limite.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 0$ et $u_{2n+1} = \frac{1}{2}$. (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc deux suites extraites de la suite (u_n) convergeant vers deux limites distinctes (0 et $\frac{1}{2}$). La suite (u_n) ne converge donc pas.

4. Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^{2021} par 10.

   $3^2 = 9$ donc $3^2 \equiv -1[10]$ puis $3^4 \equiv 1[10]$. 2020 est clairement divisible par 4 donc $2021 \equiv 1[4]$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $2021 = 4n+1$. Alors $3^{2021} = (3^4)^n \times 3$ donc $3^{2021} \equiv 1^n \times 3[10]$ i.e. $3^{2021} \equiv 3[10]$. Comme $0 \leq 3 < 10$, 3 est le reste de la division euclidienne de 3^{2021} par 10.

5. Soit $(a, b, q, r) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $a = bq + r$. Montrer que $a \wedge b = b \wedge r$.

   Posons $d_1 = a \wedge b$ et $d_2 = b \wedge r$.

   - d_1 divise a et b donc d_1 divise $a - bq = r$. d_1 divise b et r donc d_1 divise leur PGCD d_2.
   - d_2 divise b et r donc d_2 divise $bq + r = a$. d_2 divise a et b donc d_2 divise leur PGCD d_1

   $d_1 \mid d_2$ et $d_2 \mid d_1$ donc $d_1 = d_2$ car d_1 et d_2 sont positifs.