

Devoir à la maison n°6 : corrigé

Problème 1 — Equation de Legendre

Partie I – Résolution de (E_0)

- En posant $z = y'$, l'équation (E_0) est équivalente sur $] -1, 1[$ à $(E'_0) : z' + \frac{2x}{x^2-1}z = 0$.
Une primitive de $x \mapsto \frac{2x}{x^2-1}$ sur Ω est $x \mapsto \ln(1-x^2)$: les solutions de (E'_0) sur $] -1, 1[$ sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda}{1-x^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Les solutions de (E_0) sont les primitives de ces fonctions, c'est-à-dire les fonctions $x \mapsto \lambda \operatorname{argth}(x) + \mu$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- Avec les notations précédentes, on a f solution de (E_0) , $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ si et seulement si $\mu = 0$ et $\lambda = 1$. L'unique fonction f adéquate est donc la fonction argth .

Partie II – Résolution de (E_1)

- Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ une solution polynomiale de (E_1) avec $a_n \neq 0$. On a alors

$$(x^2 - 1)P''(x) + 2xP'(x) - 2P(x) = a_n[n(n-1) + 2n-2]x^n + Q(x) = a_n[n^2 + n - 2]x^n + Q(x)$$

avec Q une fonction polynomiale de degré inférieur à $n-1$. Ainsi $n^2 + n - 2 = (n-1)(n+2) = 0$, d'où $n = 1$. Ainsi, les seules éventuelles solutions polynomiales non nulles de (E_1) sont de degré un. On trouve sans peine, en posant $P(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$, que P est solution si et seulement si $b = 0$ i.e. $P(x) = ax$.

- On a pour tout $x \in \Omega^*$, $y(x) = xz(x)$, $y'(x) = xz'(x) + z(x)$ et $y''(x) = xz''(x) + 2z'(x)$ d'où z est solution sur Ω^* de l'équation

$$(E'_1) : x(x^2 - 1)z'' + (4x^2 - 2)z' = 0$$

c'est-à-dire

$$(E'_1) : z'' + \frac{4x^2 - 2}{x(x^2 - 1)}z' = 0$$

- Soient α, β et γ trois réels. Pour tout x dans Ω^* , on a

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x+1} = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\beta - \gamma)x - \alpha}{x(x^2 - 1)}$$

En choisissant α, β et γ tels que

$$\alpha + \beta + \gamma = 4 \qquad \beta - \gamma = 0 \qquad -\alpha = -2$$

i.e. $\alpha = 2$ et $\beta = \gamma = 1$, on a bien l'égalité voulue sur Ω^* . Ainsi,

$$\forall x \in \Omega^*, \quad \frac{4x^2 - 2}{x(x^2 - 1)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

- Une primitive de $x \mapsto \frac{4x^2 - 2}{x(x^2 - 1)}$ sur $] -1, 0[$ et sur $] 0, 1[$ est donc $x \mapsto \ln(x^2(1-x^2))$. Les solutions de (E'_1) sur $] -1, 0[$ et $] 0, 1[$ sont les primitives des fonctions $x \mapsto \frac{\lambda}{x^2(1-x^2)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or pour tout $x \in \Omega^*$

$$\frac{1}{x^2(1-x^2)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2}$$

donc les solutions de (E'_1) sur $] -1, 0[$ et $] 0, 1[$ sont les fonctions $x \mapsto -\frac{\lambda}{x} + \lambda \operatorname{argth}(x) + \mu$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- d. Soit y une solution de (E_1) sur Ω . Alors, d'après la question **II.2.a**, la fonction $x \mapsto z(x) = y(x)/x$ vérifie (E'_1) et donc, d'après la question **II.2.c**, qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ dans \mathbb{R}^4 tel que

$$\forall x \in]-1, 0[, z(x) = -\frac{\lambda_1}{x} + \lambda_1 \operatorname{argth}(x) + \mu_1 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, 1[, z(x) = -\frac{\lambda_2}{x} + \lambda_2 \operatorname{argth}(x) + \mu_2$$

et donc

$$\forall x \in]-1, 0[, y(x) = -\lambda_1 + \lambda_1 x \operatorname{argth}(x) + \mu_1 x \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, 1[, z(x) = -\lambda_2 + \lambda_2 x \operatorname{argth}(x) + \mu_2 x$$

Comme y est continue en 0, on doit avoir $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ i.e. $\lambda_1 = \lambda_2$. On a alors en particulier $y(0) = \lambda_1 = \lambda_2$. Comme y est dérivable en 0, on doit aussi avoir $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x}$, ce qui équivaut, après tout calcul, à $\mu_1 = \mu_2$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in]-1, 1[, y(x) = -\lambda + \lambda x \operatorname{argth}(x) + \mu x$$

Réciproquement, on vérifie sans peine que les fonctions $x \mapsto -\lambda + \lambda x \operatorname{argth}(x) + \mu x$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ sont solution de l'équation (E_1) . Les solutions de cette équation sur Ω sont donc les fonctions

$$x \mapsto -\lambda + \lambda x \operatorname{argth}(x) + \mu x$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Partie III – Cas général

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(x^2 - 1)P''(x) + 2xP'(x) - 2P(x) = a_q[q(q-1) + 2q - n(n+1)]x^q + Q(x) = a_q[q^2 + q - n(n+1)]x^q + Q(x)$$

avec Q une fonction polynomiale de degré inférieur à $q-1$. Ainsi $q^2 + q - n(n+1) = (q-n)(q+n+1) = 0$, d'où $q = n$ car $q \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$Q(x) = [2(n-1) + (n-1)(n-2) - n(n+1)]a_{n-1}x^{n-1} + R(x) = -2na_{n-1} + R(x)$$

où R est une fonction polynomiale de degré inférieur à $n-2$. On en déduit que $-2na_{n-1} = 0$ et puisque $n \neq 0$, $a_{n-1} = 0$.

2. On suppose que $P \in \mathcal{P}_n$. On sait alors, d'après la question précédente, que P est de degré n et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \text{ avec } a_{n-1} = 0.$$

- a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} -n(n+1)P(x) &= \sum_{k=0}^n -n(n+1)a_k x^k \\ 2xP'(x) &= \sum_{k=0}^n 2ka_k x^k \\ x^2P''(x) &= \sum_{k=0}^n k(k-1)a_k x^k \\ -P''(x) &= \sum_{k=2}^n -k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{n-2} -(k+2)(k+1)a_{k+2} x^k \end{aligned}$$

et donc, puisque les termes de degrés n s'éliminent et $a_{n-1} = 0$,

$$(x^2 - 1)P''(x) + 2xP'(x) - n(n+1)P(x) = \sum_{k=0}^{n-2} [-n(n+1)a_k + 2ka_k + k(k-1)a_k - (k+2)(k+1)a_{k+2}]x^k$$

Ainsi P est solution de (E_n) si et seulement si

$$\forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, -n(n+1)a_k + 2ka_k + k(k-1)a_k - (k+2)(k+1)a_{k+2} = 0$$

i.e.

$$\forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, a_{k+2} = \frac{k^2 + k - n^2 - n}{(k+1)(k+2)} a_k = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)} a_k$$

- b.** Comme $a_{n-1} = 0$, on déduit de la relation établie à la question précédente par une récurrence immédiate que pour tout entier naturel k tel que $2k + 1 \leq n$, $a_{n-2k-1} = 0$.
- c.** Raisonnons pour un entier naturel k tel que $2k \leq n$, on note

$$HR(k) : a_{n-2k} = (-1)^k \frac{\binom{2n-2k}{n-k} \binom{n-k}{k}}{\binom{2n}{n}} a_n$$

- $HR(0)$ est évidemment vraie.
- Soit k un entier naturel tel que $2k + 2 \leq n$. On suppose $HR(k)$ vraie. On a alors, d'après la formule de récurrence établie à la question **III.2.a**,

$$\begin{aligned} a_{n-2k-2} &= -\frac{(n-2k)(n-2k-1)}{2(k+1)(2n-2k-1)} a_{n-2k} \\ &= -\frac{(n-2k)(n-2k-1)}{2(k+1)(2n-2k-1)} \times (-1)^k \frac{\binom{2n-2k}{n-2k} \binom{n-2k}{k}}{\binom{2n}{n}} a_n \end{aligned}$$

D'après une relation sur les coefficients binomiaux

$$(n-2k-1)(n-2k) \binom{2n-2k}{n-2k} = (n-2k-1)(2n-2k) \binom{2n-2k-1}{n-2k-1} = 2(n-k)(2n-2k-1) \binom{2n-2k-2}{n-2k-2}$$

de sorte que

$$a_{n-2k-2} = (-1)^{k+1} \frac{(n-k) \binom{2n-2k-2}{n-2k-2} \binom{n}{k}}{(k+1) \binom{2n}{n}}$$

Enfin on montre sans peine que $\frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$. Finalement,

$$a_{n-2k-2} = (-1)^{k+1} \frac{\binom{2n-2k-2}{n-2k-2} \binom{n}{k+1}}{\binom{2n}{n}}$$

Ainsi $HR(k+1)$ est vraie.

Par récurrence finie, $HR(k)$ est vraie pour tout entier naturel k tel que $2k \leq n$.

- d.** D'après ce qui précède, les solutions polynomiales de (E_n) sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \sum_{0 \leq 2k \leq n} \frac{(-1)^k \binom{2n-2k}{n-k} \binom{n-k}{k}}{\binom{2n}{n}} x^{n-2k}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

- e.** Après calcul,

$$\mathcal{P}_4 = \left\{ x \mapsto \lambda \left(x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35} \right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$