Corrigé TD : Primitives et intégrales

Solution 1.

1. $t \mapsto -\frac{1}{6}e^{-3t^2}$
2. $t \mapsto -\frac{1}{3(\ln t)^3}$
3. $t \mapsto \ln|\operatorname{sh} t|$
4. $t \mapsto \frac{1}{3}\ln(1+t^3)$
5. $t \mapsto \ln(1+\sin^2 t)$
6. $t \mapsto \tan t - t$
7. $t \mapsto 2\sqrt{\tan t}$
8. $t \mapsto \ln(\ln t)\ln t - \ln t$
9. $t \mapsto e^{e^t}$
10. $t \mapsto \arctan(\ln t)$
11. $t \mapsto \operatorname{th} t$

Solution 2.

1. Si $m = n = 0$, $I_{m,n} = 2\pi$.
   Si $m = n \neq 0$,
   $$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos^2(mt)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos(2mt))\,dt = \pi$$
   Enfin si $m \neq n$, on obtient en linéarisant
   $$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)t\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)t\,dt = 0$$
2. Si $m = n = 0$, $J_{m,n} = 0$.
   Si $m = n \neq 0$,
   $$J_{m,n} = \int_0^{2\pi} \sin^2(mt)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos(2mt))\,dt = \pi$$
   Enfin si $m \neq n$, on obtient en linéarisant
   $$J_{m,n} = \int_0^{2\pi} \sin(mt)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)t\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)t\,dt = 0$$
3. Si $m = n = 0$, $K_{m,n} = 0$.
   Si $m = n \neq 0$,
   $$K_{m,n} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2mt)\,dt = 0$$
   Enfin si $m \neq n$, on obtient en linéarisant
   $$K_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(m+n)t\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(m-n)t\,dt = 0$$

Solution 3.

$$I = \int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = \big[-x\cos x\big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \big[\sin x\big]_0^{\pi/2} = 1\,.$$
$$J = \int_0^1 e^{x/2}\,dx = 2\left[e^{x/2}\right]_0^1 = 2(\sqrt{e}-1)\,,$$
$$K = \frac{2}{\ln 2}\int_0^2 \frac{(\ln 2)2^x\,dx}{2\sqrt{2+2^x}} = \frac{2}{\ln 2}\left[\sqrt{2+2^x}\right]_0^2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\ln\sqrt{2}}\,.$$

Solution 4.

On reconnait la dérivée de l'arcussinus.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}}\,dx \\ &= \left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Première méthode pour B :

$$\begin{aligned} B &= \int_0^\pi \sin x(\sin x)^2 = \int_0^\pi \sin x\left(1-(\cos x)^2\right) \\ &= \int_0^\pi \left(\sin x - \sin x(\cos x)^2\right)\,dx \\ &= \left[-\cos x + \frac{1}{3}(\cos x)^3\right]_0^\pi = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Deuxième méthode pour B : avec l'exponentielle complexe.

$$\begin{aligned} B &= \int_0^\pi (\sin x)^3\,dx = \int_0^\pi \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3\,dx \\ &= \int_0^\pi \frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{-8i}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^\pi (-\sin(3x)+3\sin x)\,dx \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\cos(3x)-3\cos x\right]_0^\pi = \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}+6\right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Première méthode pour C : changement de variables $x = \sin t$, donc $dx = \cos t\,dt$.

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\sin t)^2}\cos t\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cos t\,dt = \left[\sin t\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2 dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-(\cos t)^2\right)\,dt = \frac{\pi}{2} - C \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que le cosinus est positif sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc $\cos t = \sqrt{1-(\sin t)^2}$ dans la première ligne ci-dessus.

Deuxième méthode pour C : intégration par parties.

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 1\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \left[x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= -\int_0^1 \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= -\int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\,dx \\ &= -C + \left[x\arcsin x\right]_0^1 = -C + \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Troisième méthode pour C : on remarque que la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ décrit un arc de cercle. En effet, on l'obtient en isolant y dans l'équation $x^2+y^2=1$. Ainsi l'intégrale C représente un quart de l'aire du disque unité, d'où $C = \frac{\pi}{4}$.

Solution 5.

D'abord on *linéarise* :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right)^3 \frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2} \\
&= \frac{(e^{i6x}-e^{-i6x}-3e^{i2x}+3e^{-i2x})(e^{i3x}+e^{-i3x})}{-16i} \\
&= \frac{e^{i9x}-e^{-i9x}-3(e^{i5x}-e^{-i5x})+e^{i3x}-e^{-i3x}+3(e^{ix}-e^{-ix})}{-16i} \\
&= -\frac{1}{8}\sin(9x)+\frac{3}{8}\sin(5x)-\frac{3}{8}\sin(x)-\frac{1}{8}\sin(3x)\,.
\end{aligned}$$

Donc une primitive de f est la fonction donnée par

$$F(x) = \frac{1}{72}\cos(9x) - \frac{3}{40}\cos(5x) + \frac{3}{8}\cos(x) + \frac{1}{24}\cos(3x)\,.$$

Solution 6.

L'intégrale est nulle, puisqu'on intègre une fonction impaire sur un intervalle centré en 0.

Pour ceux qui ne l'ont pas vu, voici les calculs qu'ils auraient pu faire.

$$\sin(2x)^3 = \left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{i6x}-e^{-i6x}-3(e^{i2x}-3e^{-i2x})}{-4\times 2i} = -\frac{1}{4}\sin(6x)+\frac{3}{4}\sin(2x)\,.$$

Donc

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin(2x)^3 dx = \left[\frac{1}{24}\cos(6x)-\frac{3}{8}\cos(2x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0\,.$$

Solution 7.

- Si $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x (x-t)dt + \int_x^1 (t-x)dt \\
&= x^2/2 + (1-x)^2/2 = x^2 - x + 1/2
\end{aligned}$$

- Si $x \leqslant 0$,

$$f(x) = \int_0^1 (t-x)dt = -x + 1/2$$

- Si $x \geqslant 1$,

$$f(x) = \int_0^1 (x-t)dt = x - 1/2$$

Solution 8.

1. Effectuons le changement de variable $u = \tan(t)$. On obtient :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1+u^2}}{1+u^2}\,du = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} \\ &= \operatorname{argsh}(1) = \ln(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

2. Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{x}$. On obtient :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}\,du = \int_0^1 \frac{2u\,du}{u+1} \\ &= 2\left(\int_0^1 du - \int_0^1 \frac{du}{u+1}\right) \\ &= 2(1-\ln(2)) \end{aligned}$$

3. Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{e^x - 1}$. On obtient :

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1} = \int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^2}\,du \\ &= 2\left(\int_0^1 du - \int_0^1 \frac{du}{1+u^2}\right) = 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

4. Effectuons le changement de variable $x = \sqrt{u^2+u+1} - u$. On obtient :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+u+1}} = 2\int_{\sqrt{3}-1}^1 \frac{dt}{2t-1} \\ &= -\ln(2\sqrt{3}-3) \end{aligned}$$

5. Effectuons le changement de variable $u = \sin(x)$. On obtient :

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos(x)} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \ln(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

6. Effectuons le changement de variable $u = \cos(x)$. On obtient :

$$\begin{aligned} N &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin(x)} = \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) - \frac{1}{2}\ln(3) \\ &= \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(\sqrt{3}) \end{aligned}$$

7. Effectuons le changement de variable $u = \cos(x)$. On obtient :

$$\begin{aligned} O &= \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^3(x)\,dx = \int_0^1 u^2(1-u^2)\,du \\ &= 1/3 - 1/5 = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

8. Effectuons le changement de variable $u = \cos(2x)$. On obtient :

$$\begin{aligned} O &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = \int_0^1 \frac{du}{3+u} \\ &= \ln(4/3) \end{aligned}$$

9. Effectuons le changement de variable $x = \cos(2u)$. On obtient :

$$\begin{aligned}
O &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = 4\int_0^{\pi/4} \sin^2(u) du \\
&= 2\int_0^{\pi/4} (1-\cos(2u)) du = \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}$$

10. Effectuons le changement de variable $u = x^{1/4}$. On obtient :

$$\begin{aligned}
O &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x}+x^{1/4}}{\sqrt{x}+1} dx = 4\int_0^1 \frac{u^5+u^4}{u^2+1} du \\
&= 4\int_0^1 (u^3+u^2-u-1) du + 2\int_0^1 \frac{2u du}{u^2+1} + 4\int_0^1 \frac{du}{u^2+1} \\
&= 4(1/4+1/3-1/2-1) + 2\ln(2) + \pi \\
&= -\frac{11}{3} + 2\ln(2) + \pi
\end{aligned}$$

Solution 9.

1. On pose $z = \alpha + i$. Ainsi

$$H(x) = \operatorname{Re}\left(e^{ix}\overline{z}\right) + 2 = |z|\cos(x-\varphi) + 2 = \sqrt{\alpha^2+1}\cos(x-\varphi) + 2$$

où φ est un argument de z. H ne peut s'annuler que si $-\frac{2}{\sqrt{\alpha^2+1}}$ appartient à $[-1,1]$. Or

$$-1 \leqslant -\frac{2}{\sqrt{\alpha^2+1}} \leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad 0 \leqslant \frac{4}{\alpha^2+1} \leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha^2 \geqslant 3 \quad\Leftrightarrow\quad |\alpha| \geqslant \sqrt{3}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que H ne s'annule pas est $|\alpha| < \sqrt{3}$.

2. La fonction $\frac{1}{H}$ est continue comme comme inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas. Ainsi l'intégrale définissant $F(x)$ est bien définie. De plus, F est une primitive de $\frac{1}{H}$ donc F est continue (et même de classe $\mathcal{C}^1$).
Soit $x \in]-\pi,\pi[$. On a $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\alpha\cos t + \sin t + 2}$. On peut effectuer le changement de variables $u = \tan\frac{t}{2}$ puisque $t \mapsto \tan\frac{t}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$ (ou $[x,0]$). On utilise alors le paramétrage rationnel du cercle trigonométrique pour exprimer $\cos t$ et $\sin t$ en fonction de u

$$F(x) = \int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{2du}{(1+u^2)\left(\alpha\frac{1-u^2}{1+u^2} + \frac{2u}{1+u^2} + 2\right)} = \int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{2du}{(2-\alpha)u^2 + 2u + 2 + \alpha}$$

On ne peut avoir $\alpha = 2$ puisque $|\alpha| < \sqrt{3}$.

$$F(x) = \frac{2}{2-\alpha}\int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{du}{u^2 + \frac{2}{2-\alpha}u + \frac{2+\alpha}{2-\alpha}} = \frac{2}{2-\alpha}\int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{du}{\left(u+\frac{1}{2-\alpha}\right)^2 + \frac{3-\alpha^2}{(2-\alpha)^2}}$$

Or $|\alpha| < \sqrt{3}$ donc $3-\alpha^2 > 0$. Posons $\beta = \frac{\sqrt{3-\alpha^2}}{2-\alpha}$.

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{2}{2-\alpha}\int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{du}{\left(u+\frac{1}{2-\alpha}\right)^2 + \beta^2} = \frac{2}{2-\alpha}\frac{1}{\beta}\left(\arctan\left(\frac{1}{\beta}\left(\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2-\alpha}\right)\right) - \arctan\left(\frac{1}{\beta}\frac{1}{2-\alpha}\right)\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3-\alpha^2}}\left(\arctan\left(\frac{2-\alpha}{\sqrt{3-\alpha^2}}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3-\alpha^2}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3-\alpha^2}}\right)\right)
\end{aligned}$$

3. Par 2π-périodicité de H, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{H(t)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{H(t)}$. Ainsi $F(2\pi) = F(\pi) - F(-\pi)$. Comme F est continue, $F(\pi) = \lim_{x\to\pi^-} F(x)$ et $F(-\pi) = \lim_{x\to-\pi^+} F(x)$. En utilisant l'expression précédente valable pour $x \in]-\pi,\pi[$, on trouve :

$$F(2\pi) = F(\pi) - F(-\pi) = \frac{2\pi}{\sqrt{3-\alpha^2}}$$

Solution 10.

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

2. On a $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Or pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\alpha+\beta\cos^2 t} \geqslant \dfrac{1}{\alpha}$. Ainsi pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$F(x) \geqslant \int_0^x \frac{dt}{\alpha} = \frac{x}{\alpha}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\alpha} = +\infty$, on a également $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

3. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Comme tan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$ (ou $[x,0]$), on peut effectuer le changement de variable $u = \tan t$ dans l'intégrale définissant f. Remarquons de plus que $\cos^2 t = \frac{1}{1+\tan^2 t}$. Ainsi :

$$F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{(1+t^2)\left(\alpha+\frac{\beta}{1+t^2}\right)} = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{\alpha t^2+\alpha+\beta} = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\tan x\right)$$

4. $49 - 45\sin^2 x = 4 + 45\cos^2 x$. Il suffit donc de poser $\alpha = 4$ et $\beta = 45$ pour se ramener au cas précédent. Comme f est π-périodique et paire,

$$I = 2\int_0^{\pi} f(t)dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = 4F\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et notamment en $\frac{\pi}{2}$. En utilisant l'expression déterminée à la question précédente, on trouve :

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\tan x\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}$$

Finalement, $I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{4(4+45)}} = \dfrac{\pi}{7}$.

Solution 11.

Pour simplifier, on supposera $a^2 \leqslant b^2$. On effectue le changement de variable $x = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}\sin\theta$. Ainsi

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}\sin\theta\right)\sqrt{\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\,\frac{b^2-a^2}{2}\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}\sin\theta\right)\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta \qquad \text{car } \frac{b^2-a^2}{2} \geqslant 0 \\
&= \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}\sin\theta\right)\cos^2\theta\,d\theta \qquad \text{car } \cos\theta \geqslant 0 \text{ pour } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
&= \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2 \left[\frac{a^2+b^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta + \frac{b^2-a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^2\theta\,d\theta\right] \\
&= \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2 \frac{a^2+b^2}{2}\,\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{16}(b^2-a^2)^2(a^2+b^2)\pi
\end{aligned}$$

Si $a^2 \geqslant b^2$, on trouve pour I l'opposé de cette valeur.

Solution 12.

1. Notons $F(x) = \int x \arctan^2(x)\, dx$ et intégrons par parties,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^2}{2}\arctan^2(x) - \int \frac{x^2}{x^2+1}\arctan(x)\, dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) + \int \frac{\arctan(x)}{x^2+1}\, dx - \int \arctan(x)\, dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan^2(x) + \frac{1}{2}\arctan^2(x) - \int \arctan(x)\, dx \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \int \arctan(x)\, dx &= x\arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1}\, dx \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \end{aligned}$$

D'où

$$\int x\arctan^2(x)\, dx = \frac{x^2+1}{2}\arctan^2(x) - x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

2. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$,

$$\int e^x \sin^2(x)\, dx = \int \frac{e^x}{2}\, dx - \int \frac{e^x\cos(2x)}{2}\, dx$$

Puisque $e^x\cos(2x) = \mathrm{Re}(e^{(1+2i)x})$, on calcule

$$\int e^{(1+2i)x}\, dx = \frac{e^x e^{2ix}}{1+2i} = \frac{1-2i}{5}e^x e^{2ix}$$

dont la partie réelle vaut

$$\int e^x \cos(2x)\, dx = \frac{e^x}{5}\left(\cos(2x) + 2\sin(2x)\right)$$

On a donc

$$\int e^x \sin^2(x)\, dx = \frac{e^x}{2} - \frac{e^x}{10}\left(\cos(2x) + 2\sin(2x)\right)$$

3. En posant $u = \ln x$,

$$\int \cos(\ln x)\, dx = \int e^u \cos u\, du$$

Via un passage en complexes ou une intégration par parties

$$\int e^u \cos u\, du = \frac{1}{2}e^u(\cos u + \sin u)$$

On en déduit

$$\int \cos(\ln x)\, dx = \frac{1}{2}x\left(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right)$$

4. En posant $u = \sqrt{1+x}$,

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x}} = 2\int (u^2-1)\, du = \frac{2}{3}u^3 - 2u = \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3 - 2\sqrt{1+x} = \frac{2}{3}\sqrt{1+x}(x-2)$$

5. En posant $u = e^x$, on a

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u = \arctan(e^x)$$

SOLUTION 13.

1. Il faut montrer que $t \mapsto \sin t + \cos t$ ne s'annule pas sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t > 0$ et $\cos t \geqslant 0$ donc $\sin t + \cos t > 0$. De plus, $\sin 0 + \cos 0 = 1 > 0$.
   Ainsi $t \mapsto \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}$ et $t \mapsto \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}$ sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et S et C sont bien définies.
2. Il suffit d'effectuer le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$.
3. On a clairement $S + C = \frac{\pi}{2}$. On en déduit $S = C = \frac{\pi}{4}$.
4. On effectue le changement de variable $t = \sin u$. On en déduit

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin u + |\cos u|}\, du$$

   Mais pour $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos u \geqslant 0$ donc

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin u + \cos u}\, du = C = \frac{\pi}{4}$$

Solution 14.

1. Notons I l'intégrale à calculer. Le changement de variable $u = \cos t$ donne

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} \frac{du}{4 - u^2} \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2+u} + \frac{1}{2-u} \right) du \\ &= [\ln(2+u)]_{-1}^{1} - [\ln(2-u)]_{-1}^{1} = 2\ln 3 \end{aligned}$$

2. Notons J l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin t\, dt}{1 - \cos^2 t}$$

   Le changement de variable $u = \cos t$ donne

$$\begin{aligned} J &= -\int_0^{\cos x} \frac{du}{1 - u^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\cos x} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \frac{1}{2} \left([\ln(1-u)]_0^{\cos x} - [\ln(u+1)]_0^{\cos x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln(1 - \cos x) - \ln(1 + \cos x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\tan^2 \frac{x}{2}\right) = \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

   car pour $x \in]0, \pi[$, $\tan \frac{x}{2} > 0$.
3. Notons K l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$K = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t\, dt}{(1 - \sin^2 t)^2}$$

   Le changement de variable $u = \sin t$ fournit donc

$$K = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{(1 - u^2)^2}$$

Une décomposition en éléments simples donne ensuite

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(u-1)^2} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u+1)^2} + \frac{1}{u+1}\right) du \\
&= \frac{1}{4}\left(\left[\frac{1}{u-1}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - [\ln(1-u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\frac{1}{u+1}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + [\ln(1+u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) \\
&= \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}
\end{aligned}$$

4. Notons L l'intégrale à calculer. Le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$ allié à la paramétrisation rationnelle du cercle donne

$$L = 2\int_0^1 \frac{du}{1-u^2+2u}$$

Une décomposition en éléments simples donne alors

$$\begin{aligned}
K &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{u+\sqrt{2}-1} - \frac{1}{u-1-\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left[\ln(u+\sqrt{2}-1)\right]_0^1 - \left[\ln(1+\sqrt{2}-u\right]_0^1\right) \\
&= \sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Solution 15.

1. Par une intégration par parties

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^{n+1}}\right]_0^x + (n+1)\int_0^x \frac{2t^2\,dt}{(1+t^2)^{n+2}} \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} + (n+1)\left(2I_n(x) - 2I_{n+1}(x)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$2(n+1)I_{n+1}(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} + (2n+1)I_n(x)$$

2. Le résultat de la question précédente alliée à une récurrence simple garantit l'existence de $\lim_{x\to+\infty} I_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si on pose $l_n = \lim_{x\to+\infty} I_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $l_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} l_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\frac{l_n}{l_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

Puisque $l_0 = \frac{\pi}{2}$, $l_n = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 16.

1. Pour $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{(1-x)^n}{n!}e^x \leqslant \dfrac{(1-x)^n}{n!}e$. On en déduit que :

$$0 \leqslant I_n \leqslant e\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}dx = -e\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^1 = \frac{e}{(n+1)!}$$

D'après le théorème de gendarmes, la suite (I_n) converge vers 0.

2. On effectue une intégration par parties :

$$I_{n+1} = \left[\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x\,dx = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$$

3. On utilise du télescopage. Pour $n \geqslant 1$

$$I_0 - I_n = \sum_{k=0}^{n-1} I_k - I_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

Or $I_0 = \int_0^1 e^x \, dx = e - 1$ donc

$$e - I_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Il suffit alors de passer à la limite.

Solution 17.

1. Pour $t \geqslant 0$, $\frac{1}{1+t} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1}$. On en déduit que (I_n) converge vers 0.

2. $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^n + t^{n+1}}{1+t} \, dt = \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1}$.

3. En utilisant la question précédente, $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}(I_k + I_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} I_k - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k I_{k-1}$. On reconnaît là une somme télescopique donc $S_n = (-1)^{n+1} I_n - (-1)^1 I_0 = I_0 + (-1)^{n+1} I_n$. Le calcul de I_0 donne $I_0 = \ln 2$.

4. Comme (I_n) converge vers 0, Q_n converge vers $\ln 2$.

Solution 18.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Effectuons une intégration par parties (toutes les fonctions en jeu sont de classe $\mathcal{C}^1$),

$$\begin{aligned} I_{n,p} &= \int_0^1 t^n (1-t)^p \, dt = \left[-t^n \frac{(1-t)^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{n t^{n-1} (1-t)^{p+1}}{p+1} \\ &= \frac{n}{p+1} I_{n-1,p+1} \end{aligned}$$

2. On montre par récurrence sur n que

$$I_{n,p} = \frac{n!}{(p+1)\cdots(p+n)} I_{0,p+n} = \frac{n!p!}{(p+n)!} I_{0,p+n}$$

Or $I_{0,n+p} = \int_0^1 t^{n+p} \, dt = \frac{1}{m+n+1}$. Ainsi,

$$I_{n,p} = \frac{n!p!}{(n+p+1)!}$$

Solution 19.

1. Soit $n \geqslant 1$. Intégrons par parties...

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}} t^n \right]_0^1 + \frac{2n}{3} \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{\frac{3}{2}} \, dt \\ &= \frac{2n}{3} \int_0^1 t^{n-1} (1-t)\sqrt{1-t} \, dt = \frac{2n}{3} [I_{n-1} - I_n] \end{aligned}$$

D'où,

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}.$$

Remarque. Les intégrations par parties sont légitimes car les fonctions en jeu sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$.

2. On a

$$I_0 = \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Par une récurrence immédiate , on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{(2n)\cdots(2)}{(2n+3)\cdots(5)} I_0 = \frac{(2n)\cdots(2)}{(2n+3)\cdots(5)} \frac{2}{3} \\ &= \frac{2^{n+1} n!}{\frac{(2n+4)!}{2^{n+2}(n+2)!}} = 2^{2n+3} \frac{n!(n+2)!}{(2n+4)!} \end{aligned}$$

3. Effectuons le changement de variable bijectif de $[0,1]$ sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ défini par $t = 1-u^2$. On a $dt = -2udu$ d'où

$$\begin{aligned} I_n &= 2\int_0^1 u^2(1-u^2)^n du \\ &= 2\int_0^1 u^2 \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k u^{2k} \right) du \\ &= 2\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k u^{2k+2} \right) du \\ &= 2\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 u^{2k+2} du \\ &= 2\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{2k+3} \end{aligned}$$

Or,

$$I_n = 2^{2n+3} \frac{n!(n+2)!}{(2n+4)!}$$

donc

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{2k+3} = 2^{2n+2} \frac{n!(n+2)!}{(2n+4)!}.$$

Solution 20.

1. $t \mapsto 2/3\sqrt{3}\arctan\left(1/3\ (2t+1)\sqrt{3}\right)$
2. $t \mapsto -5/2\ \ln\left(t^2+1\right) + 2\ \arctan(t)$
3. $t \mapsto 3/4\ \ln\left(2t^2 - 4t + 3\right) + 5/2\sqrt{2}\arctan\left((t-1)\sqrt{2}\right)$

Solution 21.

Effectuons le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$

$$t = u - x.$$

On obtient alors,

$$\psi(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$$

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle ,

$$\psi'(x) = f(x+1) - f(x).$$

Solution 22.

$g : t \mapsto \frac{t}{1+e^t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc une primitive G sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = G(x^3) - G(x^2)$. Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$, f l'est également et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2G'(x^3) - 2xG'(x^2) = 3x^2g(x^3) - 2xg(x^2) = \frac{3x^5}{1+e^{x^3}} - \frac{2x^3}{1+e^{x^2}}$$

Solution 23.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par inégalité triangulaire
$$\left|\int_{-x}^{x} \sin(t^2)\,dt\right| \leqslant \int_{-x}^{x} |\sin(t^2)|\,dt \leqslant \int_{-x}^{x} dt = 2x$$
Puisque $x \mapsto \int_{-x}^{x} \sin(t^2)\,dt$ est clairement impaire, on a également pour tout $x \in \mathbb{R}_-$
$$\left|\int_{-x}^{x} \sin(t^2)\,dt\right| \leqslant -2x$$
Finalement pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\left|\int_{-x}^{x} \sin(t^2)\,dt\right| \leqslant 2|x|$$
Il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to 0} \int_{-x}^{x} \sin(t^2)\,dt = 0$.
2. Soit $x \in]1, +\infty[$. Pour tout $t \in [x, 2x]$, $0 < \ln t \leqslant \ln(2x)$ et donc $\frac{1}{\ln t} \geqslant \frac{1}{\ln(2x)}$. On en déduit que
$$\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t} \geqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(2x)} = \frac{x}{\ln(2x)}$$
Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(2x)} = +\infty$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t} = +\infty$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Effectuons d'abord une intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,dt &= -\left[\frac{\cos t}{t}\right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2}\,dt \\ &= \frac{\cos x}{x} - \frac{\cos 2x}{2x} - \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2}\,dt\end{aligned}$$
Puisque cos est bornée, on a facilement $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} = 0$.
Supposons $x \in \mathbb{R}_+$. Par inégalité triangulaire
$$\left|\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2}\,dt\right| \leqslant \int_x^{2x} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right|\,dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} = \frac{1}{2x}$$
Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2}\,dt = 0$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,dt = 0$.