# Semaine du 03/02 au 07/02

### Espaces vectoriels

**Définition et exemples fondamentaux** Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Exemples. Si X est un ensemble, on peut munir $\mathbb{K}^X$ d'une struture de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Conséquence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

**Sous-espaces vectoriels** Définition. Intersection de sous-espaces vectoriels. Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs. Espace vectoriel engendré par une partie ou une famille.

**Somme de sous-espaces vectoriels** Somme de deux sous-espaces vectoriels. Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces supplémentaires. Si $E = F \oplus G$, définition du projeté de $x \in E$ sur F parallèlement à G. Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.

### Espaces vectoriels de dimension finie

**Famille de vecteurs** Familles génératrices. Familles libres/liées. Bases. Coordonnées dans une base. Base adaptée à une décomposition en somme directe. Cas particulier des familles de $\mathbb{K}^n$ (pivot de Gauss).

**Dimension d'un espace vectoriel** Théorème de la base incomplète/extraite. Existence de bases. Définition de la dimension. Dans un espace de dimension $n$ une famille génératrice/libre possède au moins/au plus $n$ éléments. Si $\mathscr{B}$ est une famille de $n$ vecteurs d'un espace vectoriel de dimension $n$, alors $\mathscr{B}$ est une base si elle est libre **ou** génératrice.

## 1 Méthodes à maîtriser

- Savoir montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel.
- Savoir déterminer une partie génératrice d'une partie de $\mathbb{K}^n$ définie par des équations linéaires.
- Savoir montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires (utiliser éventuellement une méthode par analyse/synthèse).
- Savoir montrer qu'un nombre fini de sous-espaces vectoriels sont en somme directe (somme nulle $\implies$ termes nuls).
- Montrer qu'une famille est libre.
- Montrer qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre, liée ou génératrice par pivot de Gauss.
- Déterminer une base et la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ défini par un système d'équations cartésiennes (mettre sous forme d'un vect) ou par une famille génératrice (pivot de Gauss).
- Déterminer la dimension d'un espace vectoriel en exhibant une base.
- Utiliser la dimension pour montrer qu'une famille libre/génératrice est une base.

## 2 Questions de cours

**Base adaptée.** Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel E de bases respectives $(f_1, \dots, f_n)$ et $(g_1, \dots, g_p)$. On suppose F et G en somme directe. Montrer que $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ est une base de $F \oplus G$.

**Retour sur le DS n°06.** Soit $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{\sin x}{x(2-\cos x)}$. Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.

**Retour sur le DS n°06.** Soit $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{\sin x}{x(2-\cos x)}$. Déterminer le développement limité de $f$ à l'ordre 2 en $\pi$.

**Retour sur le DS n°06.** On admet que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un anneau. On pose pour $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, $\overline{a + b\sqrt{2}} = a - b\sqrt{2}$. Montrer que $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ **si et seulement si** $|x\overline{x}| = 1$.

**Retour sur le DS n°06.** On définit une suite $(u_n)$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$. Etudier la limite éventuelle de la suite $(u_n)$.