

EXERCICE 1.

Trouver les limites suivantes :

$$1. x(3+x) \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}} \text{ en } 0$$

$$2. \frac{(1-e^x)(1-\cos x)}{3x^3+2x^4} \text{ en } 0$$

$$3. \frac{(1-\cos x^2)e^{\frac{1}{x}}}{x^5+x^3} \text{ en } 0^+$$

$$4. \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ en } \frac{\pi}{4}$$

$$5. (\tanh x)^{\ln x} \text{ en } +\infty$$

EXERCICE 2.

Calculer, si elles existent, les limites de

$$1. \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x+1} \text{ en } +\infty,$$

$$2. \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \text{ en } 0.$$

EXERCICE 3.

Etudier les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(\ln x))^2 - \cos^2 x + \ln x}{2^x - 50x^6}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x - 1} \right)^x.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \text{ avec } 0 < a < b.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x^2} - 1}{\ln x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) e^{\cos x}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right) \right)^{x^2}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)(\tan 2x).$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + x^2 + \sin^3 x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

EXERCICE 4.

$$\text{Soit } f(x) = x \ln \left(1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\ln x} \right).$$

$$1. \text{ Démontrer que } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}.$$

$$2. \text{ En déduire la limite en } +\infty \text{ de } \left(e^{f(x)} - 1 \right) \ln x.$$

$$3. \text{ Soit } g(x) = \left[\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^x - 1 \right] \ln x. \text{ Déterminer la limite de } g \text{ en } +\infty.$$

EXERCICE 5.

n et p désignant deux entiers naturels non nuls, calculer la limite quand x tend vers 1 de

$$\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{x^{p+1} - x^p - x + 1}$$

EXERCICE 6. ★

Soient a, b et c trois réels positifs. Etudier le comportement en $+\infty$ de

$$f(x) = \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x} + c^{1/x}}{3} \right)^x.$$

EXERCICE 7.

Lever les formes indéterminées suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x) - x \tan(x)}{\sin^3(x)};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - \tan(x)}{\sin(x)(x - \tan(x))};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}.$$

EXERCICE 8.

Classer par ordre de négligeabilité les fonctions $f : x \mapsto x \ln x$, $g : x \mapsto \frac{e^x}{x}$ et $h : x \mapsto \sqrt{x}(\ln x)^2$ au voisinage de 0^+ et $+\infty$.

EXERCICE 9.

Déterminer un équivalent au point considéré des fonctions suivantes :

- $x \ln(1+x) - (x+1) \ln x$ en $+\infty$.
- $\lfloor x \rfloor \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$.
- $\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}$ en 0.
- $\frac{\sin x + \cos x - 1}{\tan(x - x \cos x)}$ en 0.
- $\frac{\sqrt{1+\tan^2 x} - 1}{\tan x}$ en 0.
- $\ln(\cos x)$ en 0.
- $x(e^{\frac{1}{x}} - \cos(\frac{1}{x}))$ en $+\infty$.
- $\frac{\ln(\ln x) - (\frac{1}{2})^x}{(\frac{1}{x})^3 - (\frac{1}{3})^x}$ en $+\infty$.
- $e^{\sin x} - e^{\tan x}$ en 0.
- $\tan\left(\frac{\pi x}{2x+3}\right)$ en $+\infty$.

EXERCICE 10.

Déterminer des équivalents de :

- $\cos x$ en $\frac{\pi}{2}$
- $\tan x$ en $\frac{\pi}{2}$
- $\sqrt[3]{1+x^3} - x$ en $+\infty$
- $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}$ en 1

EXERCICE 11.

Déterminer des équivalents simples des expressions suivantes :

- $\frac{x \sin(x^2)}{e^x - 1}$ en 0
- $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{1 - \cos x}$ en 0
- $\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\tan(x) \arctan(x^3)}$ en 0
- $\frac{x^2 \sin(\frac{1}{x^3})}{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}$ en $+\infty$

EXERCICE 12.

Déterminer des équivalents simples des expressions suivantes.

- $\sin(x) + \tan(x)$ en 0
- $x^3 + e^x - 1$ en 0
- $\arcsin(x) + \cos(x) - 1$ en 0
- $\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}$ en $+\infty$

EXERCICE 13.

Déterminer un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

EXERCICE 14.

Déterminer des équivalents simples en 0 des expressions suivantes,

- $\arccos(x) - \pi/2$;
- $x^4 + x + x^2$;
- $\arcsin(x) + x + x^2$;
- $\arctan(x) + x$;
- $\frac{1}{1-x} - 1 + x$;
- $\frac{x^2}{1+x} - x$.

EXERCICE 15.

Donner un équivalent en 0 de l'expression

$$\ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right) - \frac{4x + x^2}{8}.$$

EXERCICE 16.★

Donner un équivalent en 0 de l'expression

$$\sin(\operatorname{sh}(x)) - \operatorname{sh}(\sin(x)).$$

EXERCICE 17.

Déterminer le $DL_5(0)$ de

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

EXERCICE 18.★

Calculer le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 des expressions suivantes :

1. $e^x \sin(x)$ et $n = 3$;
2. $\sin^3(x) - x^3 \cos(x)$, pour $n = 6$;
3. $x^3 \sqrt{1+x}$ et $n = 5$;
4. $\frac{1}{2+x}$ et $n = 3$;
5. $\frac{1}{3-x^2}$ et $n = 5$;
6. $\sqrt{1+2x}$ et $n = 3$;
7. $\sqrt{4-x}$ et $n = 3$;
8. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ et $n = 3$;
9. $\ln(2+x)$ et $n = 3$;
10. $\exp(3-x)$ et $n = 3$;
11. $(1+x)^{1/x}$ et $n = 2$.

EXERCICE 19.★

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]-1, 1[$ par

$$f(x) = x + \ln(1+x).$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $f(x)$ au voisinage de 0.
2. Démontrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J qu'on explicitera.
3. En admettant qu'il existe, déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $f^{-1}(x)$ au voisinage de 0.

EXERCICE 20.★

Développements en vrac.

1. Calculer les développements limités à l'ordre 4 des expressions suivantes au voisinage de x_0 :

- | | |
|---------------------------------|--|
| a. $e^x, x_0 = 1$; | f. $\arctan(x), x_0 = 1$; |
| b. $\cos(x), x_0 = \pi/4$; | g. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}, x_0 = +\infty$; |
| c. $\sin(x), x_0 = \pi/6$; | h. $(\tan(x))^{\tan(2x)}, x_0 = \pi/4$; |
| d. $\ln(x), x_0 = e$; | |
| e. $\frac{1}{1+x^2}, x_0 = 1$; | |

2. Calculer les développements limités

- a. à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ de

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2};$$

- b. à l'ordre 2 au voisinage de $\pi/4$ de

$$\cos(x) + \sin(x);$$

- c. à l'ordre 2 au voisinage de $\pi/4$ de $\tan(x)$.

EXERCICE 21.★

Déterminer le $DL_4(0)$ de

$$f(x) = x(\operatorname{ch}(x))^{1/x}.$$

EXERCICE 22.★

Déterminer le $DL_2(0)$ de la fonction g définie par

$$g : x \mapsto (1 + \arctan(x))^{\frac{x}{\sin^2(x)}}.$$

EXERCICE 23.

Déterminer le $DL_3(0)$ de la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f : x \mapsto \ln(3e^x + e^{-x}).$$

EXERCICE 24.

Déterminer le $DL_4(0)$ de la fonction définie par,

$$f(x) = \frac{1}{1 + \cos(x)}.$$

EXERCICE 25.

Chercher un développement limité d'ordre 5 de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 \sin(x)}{1+x}.$$

EXERCICE 26.

Déterminer un $DL_4(0)$ des expressions suivantes :

$$1. f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x}};$$

$$3. h(x) = e^{\cos(x)};$$

$$2. g(x) = \sqrt{1+\cos(x)};$$

$$4. i(x) = \frac{\cos(x)}{1+x^2}.$$

EXERCICE 27.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de

$$x \mapsto \ln \left(\sum_{k=0}^n x^k \right)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de

$$x \mapsto \ln \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right)$$

3. Déterminer le développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de

$$x \mapsto \int_x^{x^2} e^{-t^2/2} dt$$

EXERCICE 28.

Chercher trois termes du développement asymptotique de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE 29.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

2. Montrer que $\sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

EXERCICE 30.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\cos x = nx$ possède une unique solution $x_n \in [0, 1]$.

2. Déterminer la limite de (x_n) .

3. Étudier la monotonie de (x_n) .

4. Établir que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

5. Déterminer un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$.

EXERCICE 31.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $x = \ln x + n$ admet deux solutions sur \mathbb{R}_+^* . On note x_n la plus petite et y_n la plus grande de ces deux solutions.

2. a. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

- b. Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n}$.

- c. On pose $u_n = x_n - e^{-n}$ pour $n \geq 2$. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-2n}$.

- d. Déterminer un équivalent simple de $u_n - e^{-2n}$.

3. a. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$.

- b. Montrer que $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

- c. On pose $v_n = y_n - n$ pour $n \geq 2$. Montrer que $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.

- d. Déterminer un équivalent simple de $v_n - \ln n$.

EXERCICE 32.

Déterminer les réels a et b tels que

$$f(x) = \cos(x) - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$$

soit, au voisinage de 0, un infiniment petit d'ordre le plus grand possible.

EXERCICE 33.

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f .

1. Montrer que f est continue en 0.
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Etudier les variations de f .
5. Etudier les branches infinies de \mathcal{C} .
6. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de f .
7. Préciser l'équation de la tangente T à \mathcal{C} au point d'abscisse 1. Préciser la position relative de T et \mathcal{C} au voisinage du point d'abscisse 1.
8. Tracer \mathcal{C} avec soin. On placera notamment la tangente T déterminée à la question précédente.

EXERCICE 34.

Soit $f : x \mapsto xe^x$.

1. Montrer que f est une bijection de \mathbb{R}_+ sur un ensemble à déterminer.
2. Déterminer le développement limité de f^{-1} à l'ordre 2 au voisinage de 0.
3. Donner un équivalent simple de f^{-1} en $+\infty$.

EXERCICE 35.★

On cherche à déterminer le comportement au voisinage de 0 de la fonction f définie par l'expression

$$\frac{1}{\arcsin(x)} - \frac{1}{x}.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Prouver que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f ce prolongement.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
4. Étudier la position relative du graphe de f et de sa tangente au voisinage de l'origine.

EXERCICE 36.

Soit f la fonction définie par

$$x \mapsto (1+x)e^{1/x}.$$

Etudier les branches infinies de f et déterminer la position des asymptotes par rapport à la courbe.

EXERCICE 37.

Démontrer que la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$$

a pour asymptote la droite d'équation $y = 2x$ en $+\infty$.

EXERCICE 38.

Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x}e^{\frac{1}{x}}$.

EXERCICE 39.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une *dérivée symétrique* en $a \in \mathbb{R}$ lorsque le rapport

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

admet une limite lorsque h tend vers 0.

1. Prouver que la dérivabilité en a est une *condition suffisante* de dérivabilité symétrique en a .
2. Est-ce une condition nécessaire ?

EXERCICE 40.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite en 0 du quotient

$$\frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

EXERCICE 41.

On pose $u_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{dt}{1+t^2}$. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

EXERCICE 42.

On pose pour $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

1. Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.
2. A l'aide d'une intégration par parties, donner un développement asymptotique à deux termes de u_n .