# Devoir à la maison n°12

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

## Problème 1

On note $f$ l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $(X^2-1)P'' + 4XP'$.

On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré *inférieur ou égal* à $n$. Notamment $\mathbb{R}_{-1}[X] = \{0\}$.

On notera également $I_n$ l'identité de $\mathbb{R}_n[X]$.

### Partie I – Étude d'un endomorphisme

**1.** Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

**2.** On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $f(P) = \lambda P$. En considérant le coefficient dominant de P, montrer que l'on a nécessairement $\lambda = n(n+3)$ où $n$ désigne le degré de P.

**3.** Dans la suite de l'énoncé, on pose $\lambda_n = n(n+3)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul vérifie $f(P) = \lambda_n P$, alors $\deg P = n$.

**4.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f$ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, autrement dit que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par $f$. On notera $f_n$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par $f$.

**5.** Dans cette question, on pose $F_n = \operatorname{Ker}(f_n - \lambda_n I_n)$ et $G_n = \operatorname{Im}(f_n - \lambda_n I_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  **a.** Montrer $G_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Que peut-on en déduire sur la dimension de $F_n$ ?

  **b.** Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = F_n \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

  **c.** En déduire la dimension de $F_n$ puis l'existence d'un unique polynôme $P_n$ unitaire tel que $f(P_n) = \lambda_n P_n$. On précisera le degré de $P_n$.

**6.** On pose $Q_n = (-1)^n P_n(-X)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f(Q_n) = \lambda_n Q_n$. Que peut-on en déduire sur la parité de $P_n$ ?

**7.** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, le coefficient de $X^{n-2}$ dans $P_n$ est $-\dfrac{n(n-1)}{2(2n+1)}$.

**8.** Calculer $P_0$, $P_1$ et $P_2$.

**9.** On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = (X^2-1)P_n' - nXP_n$.

  **a.** Montrer que $R_n' = (n+2)(nP_n - XP_n')$ puis calculer $f(R_n)$ en fonction de $R_n$ seulement.

  **b.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R_n + \frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1} = 0$$

**c.** En dérivant cette dernière relation, montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\mathrm{P}_n - \mathrm{XP}_{n-1} + \frac{n^2-1}{4n^2-1}\mathrm{P}_{n-2} = 0$$

## Partie II – Comportement asymptotique d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)$ de premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{10}{9}$ et telle que pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{9}\left[u_{n-1} - u_{n-2} + \frac{3}{4n^2-1}u_{n-2}\right]$$

**10.** Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{4\mathrm{X}^2-1}$. En déduire un expression simple de $\mathrm{S}_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$ pour tout entier $n \geq 2$ ainsi que la limite de la suite $(\mathrm{S}_n)$.

**11.** **a.** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq u_{n-1} \geq 1$.

**b.** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n = u_1 + \frac{1}{9}\left[u_{n-1} - u_0 + \sum_{k=2}^{n} \frac{3}{4k^2-1}u_{k-2}\right]$$

**c.** En déduire que $u_n \leq \frac{6}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire la convergence de la suite $(u_n)$.

**12.** On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$

$$f_n(t) = \frac{2^n}{e^{nt}}\mathrm{P}_n(\operatorname{ch} t)$$

**a.** Déterminer les fonctions $f_0$ et $f_1$ et montrer que pour tout entier $n \geq 2$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) - f_{n-1}(t) = e^{-2t}\left[f_{n-1}(t) - f_{n-2}(t) + \frac{3}{4n^2-1}f_{n-2}(t)\right]$$

**b.** Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $f_{n-1}$ et $f_n - f_{n-1}$ sont positives et décroissantes sur $\mathbb{R}$.

**13.** Montrer que la fonction ch induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$. On note argch sa bijection réciproque. Préciser le sens de variation de argch.

**14.** **a.** On pose $\alpha = \operatorname{argch}(5/3)$. Déterminer $e^\alpha$ et montrer que $u_n = f_n(\alpha)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

**b.** On se donne un réel $x \geq \frac{5}{3}$. Montrer que la suite de terme général $f_n(\operatorname{argch} x)$ converge vers une limite strictement positive $\ell(x)$ que l'on ne demande pas de déterminer.
En déduire un équivalent de $\mathrm{P}_n(x)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ que l'on exprimera à l'aide de $\ell(x)$.