

Exercice 1 ★★

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

$$1. \frac{1}{X^n - 1} \quad 2. \frac{X^{n-1}}{X^n - 1} \quad 3. \frac{1}{(X-1)(X^n - 1)}$$

Exercice 2 ★★★

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $F = \frac{1}{X^n(1-X)^n}$.

Exercice 3 ★★

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$:

$$1. F = \frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}. \quad 3. F = \frac{1}{X(X-1)^3}. \quad 5. F = \frac{1}{X^2 + X + 1}.$$

$$2. F = \frac{4}{(X^2 + 1)^2}. \quad 4. F = \frac{2X}{X^2 + 1}. \quad 6. F = \frac{X}{(X^2 - 1)^3}.$$

Exercice 4 ★★★

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ dont les racines sont réelles et simples. Montrer que le polynôme $Q = P'^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles.

Exercice 5 ★★★

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Quel est son degré ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les racines de T_n ?
3. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{T_n}$.

Exercice 6 ★★★**Mines-Ponts MP**

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A_n \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A_n\left(X + \frac{1}{X}\right) = X^n + \frac{1}{X^n}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les racines de A_n sont les $x_k = 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $0 \leq k \leq n-1$.
3. Décomposer $\frac{1}{A_n}$ en éléments simples.

Exercice 7 ★★★

Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $P_n = \prod_{k=0}^n (X - k)$.

1. En considérant $f_n = \frac{P'_n}{P_n}$, montrer que P'_n admet une unique racine x_n dans $]0, 1[$.
2. Montrer que (x_n) converge vers 0.
3. Montrer que $x_n \sim \frac{1}{\ln n}$.

Exercice 8 ★★

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P .

Exercice 9 ★★**Télescopes**

Calculer les limites des suites suivantes :

$$1. u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k} \quad 3. w_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$$

$$2. v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} \quad 4. z_n = \sum_{k=1}^n \frac{k-2}{k^3 + 3k^2 + 2k}$$

Exercice 10 ★★

Soit $F = \frac{X^2 + 1}{(X - 1)(X + 1)^6}$.

1. Déterminer la partie polaire de F relative au pôle 1.
2. On pose $G = (X + 1)^6 F$. Ecrire un développement limité de $G(x)$ à l'ordre 5 en -1 .
3. En déduire la décomposition en éléments simples de F .

Exercice 11 ★★

Décomposer en éléments simple sur $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes.

1. $F = \frac{X + 1}{(X^2 + 1)(X^2 - X + 1)}$.
2. $F = \frac{1}{X^2(X^2 + 1)^2}$.
3. $F = \frac{X^2 + 1}{X(X^2 + X + 1)^2}$.
4. $F = \frac{2X + 3}{X(X^2 + X + 3)^2}$.

Exercice 12 ★★

Trouver une primitive de la fonction

$$\varphi : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{4x}{x^4 - 1}.$$

Exercice 13 ★★

Démontrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $R \in \mathbb{K}(X)$ telle que $R' = \frac{1}{X}$.

Exercice 14 ★★

Calculer $\int_0^\pi \frac{\sin t \, dt}{4 - \cos^2 t}$.

Exercice 15 ★★

Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2}$.
2. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1 - x^2}$.
3. $\int_2^3 \frac{2x + 1}{x^2 + x - 3} \, dx$.
4. $\int_0^2 \frac{x \, dx}{x^4 + 16}$.
5. $\int_0^3 \frac{x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{(x - 4)^3} \, dx$.
6. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3 - 7x + 6}$.
7. $\int_{-1}^1 \frac{2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 17x + 30}{x^3 + 8} \, dx$.
8. $\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4 - 1} \, dx$.
9. $\int_{-1}^0 \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 - 3x + 2} \, dx$.
10. $\int_1^2 \frac{2x^8 + 5x^6 - 12x^5 + 30x^4 + 36x^2 + 24}{x^4(x^2 + 2)^3} \, dx$.
11. $\int_0^a \frac{-2x^2 + 6x + 7}{x^4 + 5x^2 + 4} \, dx$ pour $a \in \mathbb{R}$. Y a-t-il une limite quand $a \rightarrow +\infty$?
12. $\int_0^2 \frac{dx}{x^4 + 1}$.

Exercice 16 ★★**Règles de Bioche**

Calculer

1. $\int_0^\pi \frac{\sin t \, dt}{4 - \cos^2 t}$ en posant $u = \cos t$;
2. $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{dt}{\sin t}$ pour $x \in]0, \pi[$ en posant $u = \cos t$;
3. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t}$ en posant $u = \sin t$;
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t + \cos t}$ en posant $u = \tan \frac{t}{2}$.

Exercice 17 ★★Le but est de déterminer l'ensemble \mathcal{A} de toutes les suites réelles (u_n) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_n = n - 1$$

1. Trouver une suite réelle vérifiant cette relation de récurrence.
2. Montrer que \mathcal{A} est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On précisera la direction de \mathcal{A} et on en donnera une base.

Exercice 18 ★★Montrer que $\mathcal{F} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid X^2 P'' - 3XP' + 4P = 4 - X\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer sa direction.**Exercice 19 ★★**Soit E l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) - f(x) = x^2$$

1. Déterminer une fonction polynomiale P élément de E .
2. Montrer que E est un sous-espace affine de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ et donner sa direction.

Exercice 20 ★★Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines de E de direction respectives F et G .

1. Montrer que si $E = F + G$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.
2. Montrer que si $E = F \oplus G$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un singleton.