Devoir surveillé n°07 : corrigé

Solution 1.

1.

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_4 &= \{1, i, -1, -i\}\\ \mathbb{U}_6 &= \left\{1, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}, -1, e^{\frac{4i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{3}}\right\}\\ \mathbb{U}_4 \cap \mathbb{U}_6 &= \{-1, 1\} = \mathbb{U}_2\\ \mathrm{G} &= \left\{1, e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{i\pi}{3}}, i, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}, -1, e^{\frac{7i\pi}{6}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}, -i, e^{\frac{5i\pi}{3}}, e^{\frac{11i\pi}{6}}\right\} = \mathbb{U}_{12}\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{card}\mathbb{U}_4 = 4$, $\operatorname{card}\mathbb{U}_6 = 6$, $\operatorname{card}\mathbb{U}_4 \cap \mathbb{U}_6 = 2$ et $\operatorname{card}\mathrm{G} = 12$.

2. Soit $z \in \mathbb{U}_{m\wedge n}$. On a donc $z^{m\wedge n} = 1$. Puisque m et n sont des multiples de $m \wedge n$, on a également $z^m = 1$ et $z^n = 1$. Donc $z \in \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$. Ainsi $\mathbb{U}_{m\wedge n} \subset \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$.

3. Soit $z \in \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$. On a donc $z^m = 1$ et $z^m = 1$. D'après le théorème de Bezout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $mu + nv = m \wedge n$. Ainsi $z^{m\wedge n} = (z^m)^u (z^n)^v = 1$ et $z \in \mathbb{U}_{m\wedge n}$. Ainsi $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_{m\wedge n}$.

4. Soit $z \in \mathrm{G}$. Il existe donc $z_1 \in \mathbb{U}_m$ et $z_2 \in \mathbb{U}_n$ tels que $z = z_1 z_2$. Dans ce cas, $z^{m\vee n} = z_1^{m\vee n} z_2^{m\vee n}$. Mais comme $m \vee n$ est un multiple de m, $z_1^{m\vee n} = 1$. De même, $m \vee n$ étant un multiple de n, $z_2^{m\vee n} = 1$. Ainsi $z^{m\vee n} = 1$ et $z \in \mathbb{U}_{m\vee n}$. Ainsi $\mathrm{G} \subset \mathbb{U}_{m\vee n}$.

5. Soit $z \in \mathbb{U}_{m\vee n}$. Par le théorème de Bezout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $um + vn = m \wedge n$. Posons $m' = \frac{m}{m\wedge n}$ et $n' = \frac{n}{m\wedge n}$. Remarquons que m' et n' sont entiers. On peut alors poser $z_1 = z^{vn'}$ et $z_2 = z^{um'}$. On a bien $z = z_1 z_2$ puisque $um' + vn' = 1$. De plus, $\frac{mn}{m\wedge n} = m \vee n$ donc $z_1^m = z^{v(m\vee n)} = 1$ et $z_2^n = z^{u(p\vee n)} = 1$. Ainsi $z = z_1 z_2$ avec $z_1 \in \mathbb{U}_m$ et $z_2 \in \mathbb{U}_n$. Donc $z \in \mathrm{G}$. Ainsi $\mathbb{U}_{m\vee n} \subset \mathrm{G}$.

Solution 2.

1. **a.** Puisque $a > 1$ et $n > 0$, $a^n + 1 > 2$. Puisque $a^n + 1$ est premier et distinct de 2, il est impair. Ainsi a^n est pair et donc a est pair.

   b. On a $a^k \equiv -1\left[a^k + 1\right]$, puis $(a^k)^m \equiv -1\left[a^k + 1\right]$. Puisque m est impair, $a^{km} \equiv -1\left[a^k + 1\right]$ i.e. $a^n + 1 \equiv 0\left[a^k + 1\right]$. Ainsi $a^k + 1$ divise $a^n + 1$. Puisque $a^n + 1$ est premier, on en déduit que $a^k + 1 = 1$, ce qui est exclu, ou $a^k + 1 = a^n + 1$. Puisque $a > 1$, on obtient $k = n$ et donc $m = 1$, ce qui est impossible car $m \geqslant 3$.

   c. On déduit de la question précédente que n n'admet pas de diviseur premier impair. Le seul diviseur premier de n est donc 2. Le théorème de décomposition en facteurs premiers assure alors que n est une puissance de 2.

2. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

   $$\mathrm{F}_{n+1} - 1 = 2^{2^{n+1}} = \left(2^{2^n}\right)^2 = (\mathrm{F}_n - 1)^2$$

   b. On raisonne par récurrence. On a bien $\mathrm{F}_1 - 2 = 3 = \mathrm{F}_0$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{F}_{n+1} = (\mathrm{F}_n - 1)^2 + 1$. Alors, d'après la question précédente

   $$\mathrm{F}_{n+1} - 2 = (\mathrm{F}_n - 1)^2 - 1 = \mathrm{F}_n(\mathrm{F}_n - 2) = \mathrm{F}_n \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{F}_k = \prod_{k=0}^{n} \mathrm{F}_k$$

   Par récurrence, $\mathrm{F}_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{F}_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   c. On a $n \in \mathbb{N}^*$ et on peut appliquer la question précédente. Ainsi $\mathrm{F}_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{F}_k$ ou encore $\mathrm{F}_n - \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{F}_k = 2$. D'une part, $\mathrm{F}_m \wedge \mathrm{F}_n$ divise F_n et, d'autre part, $\mathrm{F}_m \wedge \mathrm{F}_n$ divise F_m donc $\prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{F}_k$ puisque $m < n$. Ainsi $\mathrm{F}_m \wedge \mathrm{F}_n$ divise 2. Par ailleurs, F_n est impair donc $\mathrm{F}_m \wedge \mathrm{F}_n = 1$.

3. **a.** Puisque p divise F_n, $2^{2^n} \equiv -1[p]$. En élevant au carré, $2^{2^{n+1}} \equiv 1[p]$ donc $2^{n+1} \in \mathrm{A}$.

   b. A est une partie non vide (d'après la question précédente) de $\mathbb{N}^*$: elle admet donc un minimum.

c. Notons q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de 2^{n+1} par m. On a donc $2^{n+1} = qm + r$ avec $0 \leqslant r < m$. De plus, $q \in \mathbb{N}$ puisque 2^{n+1} et m sont positifs. Ainsi $2^{2^{n+1}} = (2^m)^q \cdot 2^r$. Or $m \in \mathrm{A}$ donc $2^m \equiv 1[p]$ puis $(2^m)^q \equiv 1[p]$. Finalement $2^{2^{n+1}} \equiv 2^r[p]$. Or $2^{n+1} \in \mathrm{A}$ donc $2^r \equiv 1[p]$. Si on avait $r > 0$, on aurait $r \in \mathrm{A}$ et $r < m$, ce qui est impossible car $m = \min \mathrm{A}$. Ainsi $r = 0$ de sorte que m divise 2^{n+1}.

d. Il s'ensuit que m est une puissance de 2. Il existe donc un entier naturel $q \leqslant n+1$ tel que $m = 2^q$. Supposons $q \leqslant n$. Puisque $2^{2^q} \equiv 1[p]$, on obtient en élevant à la puissance 2^{n-q}, $2^{2^n} \equiv 1[p]$. Or p divise F_n donc $2^{2^n} \equiv -1[p]$. Ainsi $2 \equiv 0[p]$ i.e. p divise 2. Puisque p est premier, on aurait $p = 2$, ce qui est impossible car F_n est impair.

e. Puisque F_n est impair, $p \neq 2$ et donc p est impair. En particulier, 2 est premier avec p. D'après le petit théorème de Fermat, $2^{p-1} \equiv 1[p]$ et $p - 1 \in \mathrm{A}$.

f. En écrivant à nouveau la division euclidienne de $p-1$ par m, la minimalité de m montre que m divise $p-1$ i.e. $p \equiv 1[m]$. Puisque $m = 2^{n+1}$, $p \equiv 1\left[2^{n+1}\right]$.

Solution 3.

1. On trouve sans peine que $\mathrm{F} = \mathrm{vect}((1,1,0),(0,1,1))$ donc F est bien un sous-espace vectoriel de E.
   Par ailleurs,
   $$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ x=z \end{cases}$$
   donc $\mathrm{G} = \mathrm{vect}((1,0,1))$. Ainsi G est bien un sous-espaces vectoriel de E.

2. Une résolution de système montre que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{(0,0,0)\}$. Par ailleurs, la question précédente montre que $\dim \mathrm{F} = 2$ et $\dim \mathrm{G} = 1$ puisque les familles $((1,1,0),(0,1,1))$ et $((1,0,1))$ sont clairement libres. Ainsi $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} \dim \mathrm{E}$ donc F et G sont bien supplémentaires dans E.

3. On remarque que $(1,2,3) = (0,2,2) + (1,0,1)$. On vérifie sans peine que $(0,2,2) \in \mathrm{F}$ et que $(1,0,1) \in \mathrm{G}$. Ainsi $(0,2,2)$ est le projeté de $(1,2,3)$ sur F parallélement à G tandis que $(1,0,1)$ est le projeté de $(1,2,3)$ sur G parallélement à F.

Solution 4.

1. Les solutions de $(\mathscr{F})$ sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   Les solutions de $(\mathscr{G})$ sont les fonctions $t \mapsto \lambda \cos t + \mu \sin t$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2. Soit f une solution de $(\mathscr{E})$. On raisonne par récurrence. f est manifestement de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$. Supposons que f soit de classe $\mathscr{C}^{4n}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $f^{(4)} = f$ est de classe $\mathscr{C}^{(4n)}$ sur $\mathbb{R}$. Finalement f est de classe $\mathscr{C}^{4n+4}$ autrement dit de classe $\mathscr{C}^{4(n+1)}$ sur $\mathbb{R}$. Par récurrence, f est de classe $\mathscr{C}^{(4n)}$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $f \in \mathrm{F}$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $f'' = f$. Par conséquent $f^{(4)} = f'' = f$ donc $f \in \mathrm{E}$. Ainsi $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.
   Soit $f \in \mathrm{G}$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $f'' = -f$. Par conséquent $f^{(4)} = -f'' = f$ donc $f \in \mathrm{E}$. Ainsi $\mathrm{G} \subset \mathrm{E}$.

4. D'après les questions précédentes, $\mathrm{F} \subset \mathrm{E} \subset \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\mathrm{F} = \mathrm{vect}(t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-t})$. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   De la même manière, $\mathrm{G} \subset \mathrm{E} \subset \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\mathrm{G} = \mathrm{vect}(\cos, \sin)$. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

5. Remarquons que
   $$(f'' + f)'' - (f'' + f) = f^{(4)} - f = 0$$
   donc $f'' + f \in \mathrm{F}$.
   De même,
   $$(f'' - f)'' + (f'' - f) = f^{(4)} - f = 0$$
   donc $f'' - f \in \mathrm{G}$.

6. Tout d'abord, $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{G} \subset \mathrm{E}$ donc $\mathrm{F} + \mathrm{G} \subset \mathrm{E}$. Réciproquement, soit $f \in \mathrm{E}$. Alors $f = \frac{1}{2}(f'' + f) - \frac{1}{2}(f'' - f) \in \mathrm{F} + \mathrm{G}$ d'après la question précédente. Ainsi $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$.
   Enfin, soit $f \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. Alors $f = f'' = -f$ donc f est nulle. Ainsi $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$. Finalement, $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

7. Puisque
$$\mathrm{E}=\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}=\operatorname{vect}(t\mapsto e^t,t\mapsto e^{-t})\oplus\operatorname{vect}(\cos,\sin)=\operatorname{vect}(t\mapsto e^t,t\mapsto e^{-t},\cos,\sin)$$
les solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme
$$t\mapsto\alpha e^t+\beta e^{-t}+\gamma\cos t+\delta\sin t$$
avec $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$.

Solution 5.

1. La suite nulle appartient clairement à E. Soient ensuite $(u,v)\in\mathrm{E}^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$(\lambda u+\mu v)_{n+4}+(\lambda u+\mu v)_{n+2}+(\lambda u+\mu v)_n=\lambda(u_{n+4}+u_{n+2}+u_n)+\mu(v_{n+4}+v_{n+2}+v_n)=0$$
Ainsi $\lambda u+\mu v\in\mathrm{E}$.

2. Soit $u\in\mathrm{F}$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors
$$\begin{aligned}u_{n+2}+u_{n+1}+u_n&=0\\u_{n+3}+u_{n+2}+u_{n+1}&=0\\u_{n+4}+u_{n+3}+u_{n+2}&=0\end{aligned}$$
En additionnant la première et la dernière égalité et en retranchant la seconde, on obtient
$$u_{n+4}+u_{n+2}+u_n=0$$
Ainsi $u\in\mathrm{E}$ puis $\mathrm{F}\subset\mathrm{E}$.
Soit $u\in\mathrm{G}$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors
$$\begin{aligned}u_{n+2}-u_{n+1}+u_n&=0\\u_{n+3}-u_{n+2}+u_{n+1}&=0\\u_{n+4}-u_{n+3}+u_{n+2}&=0\end{aligned}$$
En additionnant les trois égalités, on obtient
$$u_{n+4}+u_{n+2}+u_n=0$$
Ainsi $u\in\mathrm{E}$ puis $\mathrm{G}\subset\mathrm{E}$.

3. Les racines de $\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1$ sont $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ donc
$$\mathrm{F}=\operatorname{vect}\left(\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}},\left(\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$
Puisque $\mathrm{F}\subset\mathrm{E}$, F est bien un sous-espace vectoriel de E et la famille $\left(\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}},\left(\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ engendre F.
Les racines de $\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1$ sont $e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{i\pi}{3}}$ donc
$$\mathrm{G}=\operatorname{vect}\left(\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}},\left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$
Puisque $\mathrm{G}\subset\mathrm{E}$, G est bien un sous-espace vectoriel de E et la famille $\left(\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}},\left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ engendre G.

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$v_{n+2}+v_{n+1}+v_n=u_{n+4}-u_{n+3}+u_{n+2}+u_{n+3}-u_{n+2}+u_{n+1}+u_{n+2}-u_{n+1}+u_n=u_{n+4}+u_{n+2}+u_n=0$$
car $u\in\mathrm{E}$. Ainsi $v\in\mathrm{F}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$w_{n+2}-w_{n+1}+w_n=u_{n+4}+u_{n+3}+u_{n+2}-u_{n+3}-u_{n+2}-u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+1}+u_n=u_{n+4}+u_{n+2}+u_n=0$$
car $u\in\mathrm{E}$. Ainsi $w\in\mathrm{F}$.

5. Puisque F et G sont inclus dans E, $\mathrm{F}+\mathrm{G}\subset\mathrm{E}$. Soit $u\in\mathrm{E}$. Alors, en définissant v et w comme à la question précédente, $u=\frac{1}{2}w-\frac{1}{2}v$. Comme $(u,v)\in\mathrm{F}\times\mathrm{G}$, $u\in\mathrm{F}+\mathrm{G}$. Ainsi $\mathrm{E}\subset\mathrm{F}+\mathrm{G}$. Par double inclusion, $\mathrm{E}=\mathrm{F}+\mathrm{G}$.
Soit enfin $u\in\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}u_{n+2}+u_{n+1}+u_n&=0\\u_{n+2}-u_{n+1}+u_n&=0\end{aligned}$$

En soustrayant ces deux égalités, on trouve $u_{n+1}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ i.e. $u_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Enfin, $u_0=-u_1-u_2=0$ donc u est nulle. Finalement $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{(0)_{n\in\mathbb{N}}\}$ puis $\mathrm{E}=\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$.

6. D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}=\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}&=\operatorname{vect}\left(\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}},\left(\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)\oplus\operatorname{vect}\left(\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}},\left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)\\&=\operatorname{vect}\left(\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}},\left(\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}},\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}},\left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)\end{aligned}$$

Par conséquent, les éléments de E sont les suites de la forme

$$n\mapsto\alpha\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+\beta\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+\gamma\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+\delta\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

avec $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$.