

# DEVOIR SURVEILLÉ N°2

- ▶ La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- ▶ On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- ▶ Les calculatrices sont interdites.

## EXERCICE 1.

Résoudre le système linéaire  $(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$  d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On distinguera plusieurs cas suivant les valeurs du paramètre réel  $a$ .

## EXERCICE 2.

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$\cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

On précisera pour quels réels  $\theta$  ces égalités ont un sens.

## EXERCICE 3.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad S_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \quad T_n = \sum_{k=0}^n k a_k a_{n-k}$$

1. Calculer  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  ainsi que  $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4$ . Que remarque-t-on ?
2. Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$T_n = \sum_{k=0}^n (n-k) a_{n-k} a_k$$

En déduire que  $2T_n = nS_n$ .

3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$$

4. Déduire des questions précédentes que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

puis que

$$\frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

5. En déduire par récurrence que  $S_n = a_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
6. Montrer que  $a_n$  est un entier naturel pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**EXERCICE 4.**

On pose  $\varphi(z) = |z^3 - z + 2|$  pour  $z \in \mathbb{C}$ . On souhaite déterminer la valeur maximale de  $\varphi(z)$  lorsque  $z$  décrit  $\mathbb{U}$ .

1. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Exprimer  $\cos(3\theta)$  en fonction de  $\cos \theta$ .
2. Soit  $z \in \mathbb{U}$  et  $\theta$  un de ses arguments. Exprimer  $|z^3 - z + 2|^2$  uniquement en fonction de  $\cos \theta$ .
3. Soit  $f$  la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 2$$

Déterminer les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  ainsi que ses limites en  $+\infty$  et  $-\infty$ . On regroupera ces informations dans un tableau de variations.

4. Répondre à la question initialement posée. On précisera pour quelle(s) valeur(s) de  $z \in \mathbb{U}$  cette valeur maximale est atteinte.

**EXERCICE 5.**

On définit une suite de complexes  $(z_n)$  par son premier terme  $z_0 \in \mathbb{C}$  et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$$

1. Que peut-on dire de la suite  $(z_n)$  si  $z_0 \in \mathbb{R}_+$  ? si  $z_0 \in \mathbb{R}_-$  ?
2. On suppose que  $z_0 \notin \mathbb{R}_-$  jusqu'à la fin de l'énoncé. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_n \notin \mathbb{R}_-$ .
3. On admet que tout complexe non nul admet un unique argument dans  $] -\pi, \pi]$  appelé *argument principal*. Que peut-on dire de cet argument si ce complexe n'appartient pas à  $\mathbb{R}_-$  ?
4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $r_n$  le module et  $\theta_n$  l'argument principal de  $z_n$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$  et  $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$ .
5. Exprimer  $\theta_n$  en fonction de  $\theta_0$ . Quelle est la limite de la suite  $(\theta_n)$  ?
6. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$r_n = r_0 \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$$

7. Montrer que  $\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2 \sin x}$  (on précisera pour quels réels  $x$  cette égalité a un sens).
8. On suppose maintenant que  $z_0 \notin \mathbb{R}$  jusqu'à la fin de l'énoncé. En déduire une expression de  $r_n$  en fonction de  $n$ ,  $\theta_0$  et  $r_0$  sans le symbole  $\prod$ .
9. Déterminer la limite de la suite  $(r_n)$  et en déduire celle de la suite  $(z_n)$ .