

DEVOIR À LA MAISON N°01

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

EXERCICE 1.

On considère une suite de *fonctions* (f_n) définies sur $[0, 1]$ de la manière suivante.

- $\forall x \in [0, 1], f_0(x) = 0$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x - f_n(x))^2$.

1. a. Déterminer les fonctions f_1, f_2 et f_3 .
 b. Etudier les variations de f_1, f_2 et f_3 sur $[0, 1]$.
 c. Tracer les courbes des fonctions f_1, f_2 et f_3 .
2. On fixe $x \in [0, 1]$ et on pose $u_n = f_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
 a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \sqrt{x}$.
 b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 c. En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
3. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

- b. Etudier les variations de la fonction $\varphi_n: t \in [0, 1] \mapsto t \left(1 - \frac{t}{2}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- c. On note M_n le maximum de la fonction $x \mapsto \sqrt{x} - f_n(x)$ sur $[0, 1]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq M_n \leq \frac{2}{n+1}$ et en déduire la limite de la suite (M_n) .

EXERCICE 2.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = \sum_{k=1}^n k$$

$$T_n = \sum_{k=1}^n k^3$$

Montrer que $T_n = S_n^2$.

EXERCICE 3.

Une urne contient quatre boules rouges et deux boules noires.

1. On effectue au hasard un tirage simultané et sans remise de deux boules de l'urne. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules noires obtenues.
 Déterminer la loi de X .

2. Après ce premier tirage, il reste donc quatre boules dans l'urne. On effectue à nouveau au hasard un tirage simultané et sans remise de deux boules de l'urne. On note Y le nombre de boules noires obtenues au second tirage.
Déterminer la loi de Y .
3. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire au premier tirage sachant que l'on a tiré une seule boule noire au second tirage ?
4. Déterminer la probabilité de l'événement suivant :
«Il a fallu exactement deux tirages pour extraire les deux boules noires de l'urne».