

# DEVOIR À LA MAISON N° 12 : CORRIGÉ

## Problème 1 —

### Partie I – Un espace vectoriel

1. Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$e_k(x+1) = e^{2ik\pi(x+1)} = e^{2ik\pi x} e^{2ik\pi} = e^{2ik\pi x} = e_k(x)$$

Ainsi  $e_k$  est 1-périodique i.e.  $e_k \in E$ .

2. La fonction nulle sur  $\mathbb{R}$  est 1-périodique donc appartient à  $E$ .  
Soient  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$  et  $(f, g) \in E^2$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$(\lambda f + \mu g)(x+1) = \lambda f(x+1) + \mu g(x+1) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$$

Ainsi  $\lambda f + \mu g$  est 1-périodique donc appartient à  $E$ .

Ceci prouve que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ .

3. Supposons  $k \neq l$ . Alors

$$\int_0^1 e_k(x) e_{-l}(x) dx = \int_0^1 e^{2i(k-l)\pi x} dx = \frac{1}{2i(k-l)\pi} [e^{2i(k-l)\pi x}]_0^1 = 0$$

Supposons maintenant  $k = l$ . Alors

$$\int_0^1 e_k(x) e_{-l}(x) dx = \int_0^1 dx = 1$$

4. Soit  $(\lambda_k)_{-n \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^{2n+1}$  tel que

$$\sum_{k=-n}^n \lambda_k e_k = 0$$

Fixons  $l \in \llbracket -n, n \rrbracket$ . Alors

$$\int_0^1 \left( \sum_{k=-n}^n \lambda_k e_k(x) \right) e_{-l}(x) dx = 0$$

Par linéarité de l'intégrale

$$\sum_{k=-n}^n \lambda_k \int_0^1 e_k(x) e_{-l}(x) dx = 0$$

Mais d'après la question précédente,  $\int_0^1 e_k(x) e_{-l}(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Il en résulte que  $\lambda_l = 0$ . Ceci étant vrai quelque soit le choix de  $l \in \llbracket -n, n \rrbracket$ , la famille  $(e_k)_{-n \leq k \leq n}$  est libre.

5. Puisque la famille  $(e_k)_{-n \leq k \leq n}$  est libre et engendre  $E_n$  (par définition de  $E_n$ ), c'est une base de  $E_n$ . Comme elle comporte  $2n+1$  vecteurs,  $\dim E_n = 2n+1$ .

### Partie II – Un endomorphisme

1. Soient  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$  et  $(f, g) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{R}})^2$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T(\lambda f + \mu g)(x) &= \frac{1}{2} \left( (\lambda f + \mu g) \left( \frac{x}{2} \right) + (\lambda f + \mu g) \left( \frac{x+1}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \lambda f \left( \frac{x}{2} \right) + \mu g \left( \frac{x}{2} \right) + \lambda f \left( \frac{x+1}{2} \right) + \mu g \left( \frac{x+1}{2} \right) \right) \\ &= \frac{\lambda}{2} \left( f \left( \frac{x}{2} \right) + f \left( \frac{x+1}{2} \right) \right) + \frac{\mu}{2} \left( g \left( \frac{x}{2} \right) + g \left( \frac{x+1}{2} \right) \right) \\ &= \lambda T(f)(x) + \mu T(g)(x) = (\lambda T(f) + \mu T(g))(x) \end{aligned}$$

Ainsi  $T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$ .

De plus, pour  $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ ,  $T(f) \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$  donc  $T$  est bien un endomorphisme de  $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ .

2. Soit  $f \in E$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} T(f)(x+1) &= \frac{1}{2} \left( f \left( \frac{x+1}{2} \right) + f \left( \frac{x+2}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( f \left( \frac{x+1}{2} \right) + f \left( \frac{x}{2} + 1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( f \left( \frac{x+1}{2} \right) + f \left( \frac{x}{2} \right) \right) \\ &= T(f)(x) \end{aligned}$$

Ainsi  $T(f)$  est 1-périodique i.e.  $T(f) \in E$ .

Ceci prouve que  $E$  est stable par  $T$ .

3. Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T(e_k)(x) &= \frac{1}{2} \left( e_k \left( \frac{x}{2} \right) + e_k \left( \frac{x+1}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} (e^{ik\pi x} + e^{ik\pi(x+1)}) \\ &= \frac{1}{2} e^{ik\pi x} (1 + e^{ik\pi}) \\ &= \begin{cases} e^{ik\pi x} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi  $T(e_k) = e_{\frac{k}{2}}$  si  $k$  est pair et  $T(e_k) = 0$  si  $k$  est impair.

De manière équivalente, on peut dire que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $T(e_{2k}) = e_k$  et  $T(e_{2k+1}) = 0$ .

4. Soit  $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$ .

► Si  $k$  est pair,  $T(e_k) = e_{\frac{k}{2}}$  et  $\frac{k}{2} \in \llbracket -n, n \rrbracket$ . Ainsi  $T(e_k) \in E_n$ .

► Si  $k$  est impair,  $T(e_k) = 0 \in E_n$ .

Comme  $(e_k)_{-n \leq k \leq n}$  engendre  $E_n$ ,  $T(E_n) \subset E_n$  par linéarité de  $T$ .  $E_n$  est donc stable par  $T$ .

5. Le sous-espace vectoriel  $\text{Im } T_n$  est engendré par la famille  $(T(e_k))_{-n \leq k \leq n}$ . Puisque  $T(e_k) = 0$  pour  $k$  impair,  $\text{Im } T_n$  est engendré par la famille  $(T(e_{2k}))_{-n \leq 2k \leq n}$ , c'est-à-dire par la famille  $(e_k)_{-n \leq 2k \leq n}$ . Cette dernière famille est une sous-famille de la famille  $(e_k)_{-n \leq k \leq n}$ , qui est une base de  $E_n$  et a fortiori une famille libre. La famille  $(e_k)_{-n \leq 2k \leq n}$  est donc également libre : c'est donc une base de  $\text{Im } T_n$ . La dimension de  $\text{Im } T_n$  est le nombre d'entiers pairs compris entre  $-n$  et  $n$ . Si  $n$  est pair,  $\dim \text{Im } T_n = n + 1$  et si  $n$  est impair,  $\dim \text{Im } T_n = n$ .

Le théorème du rang affirme que  $\dim E_n = \dim \text{Im } T_n + \dim \text{Ker } T_n$ . Puisque  $\dim E_n = 2n + 1$ ,  $\dim \text{Ker } T_n = n$  si  $n$  est pair et  $\dim \text{Ker } T_n = n + 1$  si  $n$  est impair.

### Partie III – Deux projecteurs

1. Il suffit de remarquer que  $(e_k)_{k \in \llbracket -n, n \rrbracket}$  est une base de  $E_n$ .

**2.** Soit  $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$ .

Si  $k$  est pair, il existe  $p \in \mathbb{Z}$  tel que  $k = 2p$ . Alors  $P_n(e_k) = S_n \circ T_n(e_k) = S_n(e_p) = e_{2p} = e_k$ . A fortiori,  $P_n \circ P_n(e_k) = P_n(e_k) = e_k$ . Si  $k$  est impair,  $P_n(e_k) = S_n \circ T_n(e_k) = S_n(0) = 0$ . A fortiori,  $P_n \circ P_n(e_k) = P_n(e_k) = 0$ . Comme  $(e_k)_{-n \leq k \leq n}$  est une base de  $E_n$ ,  $P_n \circ P_n = P_n$  et donc  $P_n$  est un projecteur.

Le sous-espace vectoriel  $\text{Im } P_n$  est engendré par la famille  $(P_n(e_k))_{-n \leq k \leq n}$  et donc par la famille  $(e_{2p})_{-n \leq 2p \leq n}$  d'après ce qui précède. Ainsi  $\text{Im } P_n = \text{vect}((e_{2p})_{-n \leq 2p \leq n})$ .

Le sous-espace vectoriel  $\text{Ker } P_n$  contient la famille  $(e_{2p+1})_{-n \leq 2p+1 \leq n}$  d'après ce qui précède. Cette famille est libre en tant que sous-famille d'une base. Le théorème du rang permet alors d'affirmer que la dimension de  $\text{Ker } P_n$  est égal au nombre d'éléments de la famille  $(e_{2p+1})_{-n \leq 2p+1 \leq n}$ . Cette famille est donc une base de  $\text{Ker } P_n$  donc  $\text{Ker } P_n = \text{vect}((e_{2p+1})_{-n \leq 2p+1 \leq n})$ .

**3.** Soit  $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$ .

Si  $|2k| \leq n$ ,  $Q_n(e_k) = T_n \circ S_n(e_k) = T_n(e_{2k}) = e_k$ . A fortiori,  $Q_n \circ Q_n(e_k) = e_k$ . Si  $|2k| > n$ ,  $Q_n(e_k) = T_n \circ S_n(e_k) = T_n(0) = 0$ . A fortiori,  $Q_n \circ Q_n(e_k) = Q_n(e_k) = 0$ .

Comme  $(e_k)_{-n \leq k \leq n}$  est une base de  $E_n$ ,  $Q_n \circ Q_n = Q_n$  et donc  $Q_n$  est un projecteur.

Le sous-espace vectoriel  $\text{Im } Q_n$  est engendré par la famille  $(Q_n(e_k))_{-n \leq k \leq n}$  et donc par la famille  $(e_k)_{|2k| \leq n}$  d'après ce qui précède. Ainsi  $\text{Im } Q_n = \text{vect}((e_k)_{|2k| \leq n})$ .

Le sous-espace vectoriel  $\text{Ker } Q_n$  contient la famille  $(e_k)_{|2k| > n}$  d'après ce qui précède. Cette famille est libre en tant que sous-famille d'une base. Le théorème du rang permet alors d'affirmer que la dimension de  $\text{Ker } Q_n$  est égal au nombre d'éléments de la famille  $(e_k)_{|2k| > n}$ . Cette famille est donc une base de  $\text{Ker } Q_n$  donc  $\text{Ker } Q_n = \text{vect}((e_k)_{|2k| > n})$ .