ESPACES VECTORIELS

Axiomes

Exercice 1 ★

Préciser pour chacun des triplets suivants les lois + et · qui les munissent d'une structure d'espace vectoriel ainsi que le vecteur nul.

1. $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

2. $(\mathbb{R}^\mathbb{R}, +, \cdot)$

3. $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, +, \cdot)$

4. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Exercice 2 ★

Vérifier que l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ muni des lois interne et externe suivantes

$$u \boxplus v = uv \quad \text{et} \quad \lambda \boxdot u = u^\lambda,$$

où u et v sont dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Sous-espaces vectoriels

Exercice 3 ★★

Dans l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, on considère les ensembles suivants,

$$\mathrm{F} = \left\{(\lambda - 3\mu, 2\lambda + 3\mu, \lambda) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

et

$$\mathrm{G} = \left\{(x, y, z) \in \mathrm{E} \mid x + 2y = 0\right\}.$$

1. Prouver que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

2. Déterminer le sous-espace vectoriel $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$.

Exercice 4 ★

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X, Y deux parties de E. Prouver que

$$\mathrm{vect}(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}) \subset \mathrm{vect}(\mathrm{X}) \cap \mathrm{vect}(\mathrm{Y}).$$

Donner un exemple où cette inclusion est *stricte*.

Exercice 5

Montrer qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E n'est jamais l'union de deux sous espaces-vectoriels stricts (i.e. distincts de E).

Exercice 6

1. $\mathrm{E}_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

2. $\mathrm{E}_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

3. $\mathrm{E}_3 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0, y = z\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$?

4. $\mathrm{E}_4 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

5. $\mathrm{E}_5 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy \geq 0\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

6. $\mathrm{E}_6 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \geq 0\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 7 ★

$\mathbb{R}$ est-il un sous-espace du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$? du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

Exercice 8

Parmi les parties suivantes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, déterminer celles qui en sont des sous-espaces vectoriels.

1. $E_1 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(1) = 0\}$.
2. $E_2 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 1\}$.
3. L'ensemble E_3 des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. L'ensemble E_4 des fonctions décroissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
5. L'ensemble E_5 des fonctions monotones de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
6. L'ensemble E_6 des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
7. L'ensemble E_7 des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
8. L'ensemble E_8 des fonctions 2π-périodiques.
9. L'ensemble E_9 des fonctions périodiques.

Exercice 9

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1. L'ensemble E_1 des suites réelles convergentes.
2. L'ensemble E_2 des suites réelles divergentes.
3. L'ensemble E_3 des suites réelles constantes.
4. L'ensemble E_4 des suites réelles bornées.
5. L'ensemble E_5 des suites réelles de limite nulle.
6. $E_6 = \left\{u \in E \mid u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(n^2\right)\right\}$.
7. $E_7 = \left\{u \in E \mid u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\right\}$.
8. $E_8 = \left\{u \in E \mid \exists \alpha \in \mathbb{R},\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n}\right\}$.

Sommes de sous-espaces vectoriels

Exercice 10

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y+z=0$ et G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équations $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer la projection de (x,y,z) sur F (resp. G) parallèlement à G (resp. F).

Exercice 11

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe si et seulement si

$$\forall k \in [\![2, p]\!],\ \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap F_k = \{0_E\}$$

Exercice 12

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que $F_1 + \dots + F_p = E$. Montrer qu'il existe des sous-espace vectoriels $G_1, \dots, G_p$ de E tels que $G_k \subset F_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ et $G_1 \oplus \dots \oplus G_p = E$.

Exercice 13

On note E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites réelles de limite nulle et G l'ensemble des suites réelles constantes.

1. Montrer que E, F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 14

Soient E l'ensemble des suites réelles constantes, F l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant $u_{n+1} + u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, G l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant $u_{n+2} + u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et enfin H l'ensemble des suites réelles périodiques de période 4.

1. Montrer que E, F, G, H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Montrer que E, F, G sont inclus dans H.

3. Montrer que $E \oplus F \oplus G = H$.

Exercice 15

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(0) + f(1) = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 16

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(\mathcal{E}) : \ y''' - y = 0 \qquad (\mathcal{F}) : \ y'' + y' + y = 0 \qquad (\mathcal{G}) : \ y' - y = 0$$

On note E, F et G les ensembles respectifs des solutions *à valeurs réelles* de $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{G})$. Les solutions de $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{G})$ sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, ce qu'on ne demande pas de montrer. On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Montrer que $F \subset E$ et $G \subset E$.

3. Donner les solutions des équations différentielles $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{G})$.

4. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et donner pour chacun une famille génératrice.

5. **a.** Soit $y \in E$. On pose $y_1 = 2y - y' - y''$ et $y_2 = y + y' + y''$. Montrer que $y_1 \in F$ et $y_2 \in G$.

b. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

6. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

Exercice 17 ★

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Quelles assertions parmi les suivantes sont vraies en général ?

1. $F \cap G \subset F + G$;

2. $F \cup G \subset F + G$;

3. $F \subset F + G$;

4. $F + F = F$;

5. $F \cup (F \cap G) \subset F + G$;

6. $F + G = G + F$.

Exercice 18 **Questions ouvertes**

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Que pensez-vous de la proposition suivante,

$$\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{F} \text{ si et seulement si } \mathrm{F} \supset \mathrm{G} \text{ ?}$$

2. Que pensez-vous de la proposition suivante,

$$\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{F} + \mathrm{H} \implies \mathrm{G} = \mathrm{H}?$$

Exercice 19 ★★

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que

$$\mathrm{F} + \mathrm{H} = \mathrm{G} + \mathrm{H}, \quad \mathrm{F} \cap \mathrm{H} = \mathrm{G} \cap \mathrm{H},$$

et $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$. Prouver que $\mathrm{F} = \mathrm{G}$.

Exercice 20 ★ **Parties paires et impaires d'une fonction**

On note $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, P le sous-ensemble de E formé par les fonctions paires et I le sous-ensemble de E formé par les fonctions impaires.

1. Montrer que P et I sont deux sous-espaces supplémentaires dans E.

2. Pour tout $f \in \mathrm{E}$, la projection du vecteur f sur P parallèlement à I est appelée *partie paire de* f. On définit de même la *partie impaire de* f. Calculer les parties paire et impaire des fonctions suivantes :le cosinus, le sinus, l'exponentielle, $f : x \mapsto x^4 + x$.

Exercice 21 ★★ **Un petit pas vers Lagrange**

Soient $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$, et $\mathcal{A}$ l'ensemble des éléments de E s'annulant en 1.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

2. Montrer que $\mathcal{C}$ est également un supplémentaire dans E du sous-espace suivant

$$\mathcal{N} = \left\{ f \in \mathrm{E} \mid \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}.$$

3. Calculer les projections sur $\mathcal{C}$ parallèlement à $\mathcal{A}$ puis à $\mathcal{N}$ d'une fonction $f \in \mathrm{E}$.

4. Donner d'autres exemples de supplémentaires de $\mathcal{C}$ dans E.

Exercice 22 **Somme de deux plans**

On note $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et

$$\mathrm{F} = \{(x, y, z) \in \mathrm{E} \mid x + y - z = 0\}$$

et

$$\mathrm{G} = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Etablir que F et G sont des sev de E.

2. Déterminer $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$.

3. Prouver que $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{E}$. La somme est-elle directe ?

Exercice 23 ★★

Soient A, B et C trois sev d'un $\mathbb{K}$-ev E. On note

$$\mathrm{F} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}), \quad \mathrm{G} = \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} + (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}))$$

et $\mathrm{H} = \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} + \mathrm{C})$.

1. Montrer que F et G sont des sev de H.

2. Etablir que $\mathrm{F} = \mathrm{G}$.

3. A-t-on toujours $\mathrm{F} = \mathrm{G} = \mathrm{H}$?

Exercice 24 ★★ **Calcul d'une intersection**

Soient F, G, F′ et G′ quatre sev d'un $\mathbb{K}$-ev E tels que $F \cap G = F' \cap G'$. Etablir que

$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F.$$

Exercice 25

On note E l'espace vectoriel réel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient $\mathcal{N}$ et $\mathcal{A}$ les sous-ensembles de E définis par,

$$\mathcal{A} = \{f \in E \mid f \text{ affine}\}$$

et

$$\mathcal{N} = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}.$$

1. Prouver que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}$ sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}$ sont supplémentaires dans E.
3. Déterminer la projection sur $\mathcal{A}$ parallèlement à $\mathcal{N}$ d'une fonction $f \in E$.

   Remarque. On rappelle qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est affine si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = at + b$.

Familles de vecteurs

Exercice 26

Soit $\mathcal{F} = ((1, -2, 1), (2, -3, 1), (-1, 3, -2))$.

1. Le vecteur $(2, 1, 3)$ est-il combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F}$?
2. Même question pour le vecteur $(2, 5, -7)$.

Exercice 27 ★★★

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n : x \mapsto \cos^n(x) \quad \text{et} \quad g_n : x \mapsto \cos(nx).$$

Montrer que pour tout n positif,

$$\text{vect}(f_k, 0 \leqslant k \leqslant n) = \text{vect}(g_k, 0 \leqslant k \leqslant n).$$

Exercice 28

Soient $a \in \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^3$ et

$$u = (1, -1, 1), \quad v = (0, 1, a).$$

Déterminer une condition *nécessaire et suffisante* portant sur a pour que $(1, 1, 2) \in \text{vect}(u, v)$.

Exercice 29

Donner une famille génératrice des espaces vectoriels suivants.

1. Le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$.
2. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$.
3. Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites (u_n) à valeurs complexes vérifiant $u_{n+2} + (2 - 3i)u_{n+1} - (5 + i)u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 30

On définit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants

$$a = (1, 2, -3) \qquad b = (3, 2, -2) \qquad c = (-1, 2, -4) \qquad c = (-6, -8, 11)$$

Montrer que $\text{vect}(a, b) = \text{vect}(c, d)$.