Applications linéaires

Solution 1.

► f_1 n'est pas linéaire car , par exemple ,

$$f_1(e_1+e_2) \neq f_1(e_1)+f_1(e_2)$$

en notant $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant 3}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

► f_2 est linéaire car pour tous

$$\mathrm{U}=(x,y,z), \mathrm{V}=(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} f_2(\lambda \mathrm{U}+\mathrm{V}) &= (\lambda x+a+\lambda y+b, 2\lambda x+2a+5\lambda z+5c, 0) \\ &= \lambda f_2(\mathrm{U})+f_2(\mathrm{V}) \end{aligned}$$

► f_3 n'est pas linéaire car $f_3(0) \neq 0$.

Solution 2.

1. L'application u est clairement linéaire : toute démonstration friserait l'insulte !
2. L'application F n'est pas linéaire car $\mathrm{F}(0) \neq 0$ (0 désignant ici l'application nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
3. L'application G est linéaire par linéarité de la multiplication sur $\mathbb{R}$.
4. L'application G est linéaire par linéarité de l'addition sur $\mathbb{R}$ et de la dérivation.
5. L'application j est linéaire en tant que restriction d'une application linéaire (id_{E} en l'occurrence).
6. L'application T est linéaire. Soient $u=(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $v=(v_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $\lambda u+v=(\lambda u_n+v_n)$, on a $\mathrm{T}(\lambda u+v)=(\lambda u_0+v_0,\dots,\lambda_n u_n+v_n)$ et donc
$$\mathrm{T}(\lambda u+v)=\lambda(u_0,\dots,u_n)+(v_0,\dots,v_n)=\lambda \mathrm{T}(u)+v.$$
7. L'application S est linéaire. Soient $u=(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $v=(v_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $\lambda u+v=(\lambda u_n+v_n)$, on a $\mathrm{S}(\lambda u+v)=(\lambda u_{n+1}+v_{n+1})_{n\geqslant 0}$ et donc
$$\mathrm{S}(\lambda u+v)=\lambda(u_{n+1})_{n\geqslant 0}+(v_{n+1})_{n\geqslant 0}=\lambda \mathrm{S}(u)+v.$$

Solution 3.

1. f et g sont clairement linéaires.

   ► On a immédiatement que g est un isomorphisme d'inverse $g^{-1}=g$.

   ► Pour tous $x,y,x',y' \in \mathbb{R}$, $f(x,y)=(x',y')$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} x' &= x+y \\ y' &= 2x \end{cases}$$

   ie,

$$\begin{cases} x &= y'/2 \\ y &= x'-y'/2 \end{cases}$$

   L'application f est donc un isomorphisme de E et son inverse est défini par $(x,y) \longmapsto (y/2, x-y/2)$.

2. Puisque $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ est une algèbre , $h=f\circ g-g\circ f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

3. On a pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $h(x, y) = (y - x, y - x)$. h n'est donc pas nul ! De plus $(1, 1) \in \mathrm{Ker}(h)$ donc h n'est pas injective.
4. Puisque $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $h(x, y) = (y - x)(1, 1)$, l'image de h vaut $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{vect}((1, 1)) \neq \mathbb{R}^2$ donc h n'est pas surjective.

   Remarque. On peut également appliquer le théorème du rang. ■

Solution 4.

Démontrons la formule par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

► HR(1) est banale car $u \circ v - v \circ u = u$.

► Soit $k \geqslant 1$. Supposons HR(k) vérifiée, i.e.

$$u^k \circ v - v \circ u^k = k u^k.$$

En composant à gauche par u, on obtient :

$$u^{k+1} \circ v - u \circ v \circ u^k = k u^{k+1}.$$

Mais, en composant à droite par u^k dans l'égalité

$$u \circ v - v \circ u = u,$$

on obtient également

$$u \circ v \circ u^k - v \circ u^{k+1} = u^{k+1}.$$

Ainsi, en sommant membre à membre ces égalités, on aboutit à

$$u^{k+1} \circ v - v \circ u^{k+1} = (k+1) u^{k+1}.$$

HR($k+1$) est donc vérifiée.

► HR(k) est donc vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ d'après le principe de récurrence.

Solution 5.

1. Si $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{I} - f)$, alors $(\mathrm{I} - f)(x) = 0_{\mathrm{E}}$, donc $x - f(x) = 0_{\mathrm{E}}$, soit

   $$f(x) = x.$$

   Supposons qu'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $f^k(x) = x$. Alors, par hypothèse de récurrence,

   $$f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) = f^k(x) = x.$$

   Par conséquent, $f^k(x) = x$ pour tout entier $k \geqslant 1$ et en particulier pour $k = n$. Or f^n est l'application identiquement nulle, donc $f^n(x) = 0_{\mathrm{E}}$. Ainsi $x = 0_{\mathrm{E}}$, ce qui démontre que le noyau de $\mathrm{I} - f$ est réduit au vecteur nul, et donc que $\mathrm{I} - f$ est injectif.
2. On peut développer et factoriser dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ comme dans $\mathbb{C}$ (en remplaçant la multiplication complexe par le produit de composition). On en déduit que

   $$(\mathrm{I} - f) \circ (\mathrm{I} + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}) = \mathrm{I} - f^n = \mathrm{I}$$

   puisque f^n est l'endomorphisme nul. De même,

   $$(\mathrm{I} + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}) \circ (\mathrm{I} - f) = \mathrm{I}.$$

   Ces deux relations montrent que $\mathrm{I} - f$ est un automorphisme et ayant pour automorphisme réciproque

   $$(\mathrm{I} + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}).$$
3. On vérifie que l'application réciproque de $\mathrm{I} - f^k$ est

   $$\mathrm{I} + f^k + f^{2k} + \cdots + f^{k(n-1)}.$$

Solution 6.

1. Remarquons que $1_{\mathbb{K}^n} = (1,\dots,1)$. On a bien $f_\sigma(1_{\mathbb{K}^n}) = 1_{\mathbb{K}^n}$.
On vérifie ensuite que f_σ est linéaire et que $f_\sigma(xy) = f_\sigma(x)f_\sigma(y)$ pour $x, y \in \mathbb{K}^n$.
De plus, $f_\sigma(x) = 0$ implique $x = 0$ donc f_σ est injective. Comme $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie, f_σ est un automorphisme d'algèbres. (On peut évidemment montrer la surjectivité de f_σ « à la main ».)

2. Notons $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a $\phi(e_i)^2 = \phi(e_i^2) = \phi(e_i)$ donc $\phi(e_i)(\phi(e_i) - 1_{\mathbb{K}^n}) = 0_{\mathbb{K}^n}$. Ceci signifie que les composantes de $\phi(e_i)$ valent 0 ou 1.
Notons n_i le nombre de composantes égales à 1. Comme ϕ est un automorphisme, $\phi(e_i) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ et donc $n_i \geqslant 1$. Notons ψ la forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$ qui à x associe $\sum_{k=1}^n x_k$. On a donc $\psi(\phi(e_i)) = n_i$. De plus,
$$1_{\mathbb{K}^n} = \phi(1_{\mathbb{K}^n}) = \phi\left(\sum_{i=1}^n e_i\right) = \sum_{i=1}^n \phi(e_i)$$
donc
$$n = \psi(1_{\mathbb{K}^n}) = \psi\left(\sum_{i=1}^n \phi(e_i)\right) = \sum_{i=1}^n n_i$$
Donc $n_i = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Ainsi $\phi(e_i)$ est l'un des e_j : on le note $e_{\sigma(i)}$.
Si $i \neq j$, on a $\phi(e_i)\phi(e_j) = \phi(e_ie_j) = \phi(0_{\mathbb{K}^n}) = 0_{\mathbb{K}^n}$ donc $e_{\sigma(i)}e_{\sigma(j)} = 0_{\mathbb{K}^n}$ et $\sigma(i) \neq \sigma(j)$. Par conséquent, $\sigma \in S_n$.
Posons $\sigma = \tau^{-1}$. La j-ème composante de $f_\sigma(e_i)$ vaut 1 si $\sigma(j) = i$ i.e. $j = \tau(i)$ et 0 sinon. Donc $f_\sigma(e_i) = e_{\tau(i)} = \phi(e_i)$. Ainsi ϕ et f_σ coïncident sur une base : ils sont égaux.

3. Notons $F = \mathbb{K}1_{\mathbb{K}^n}$ et $G = \operatorname{Ker}\psi$. F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ stables par tous les f_σ.
Soit H un sous-espace stable par tous les f_σ. Si $H \subset F$, on a soit $H = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ (qui est évidemment stable), soit $H = F$ car $\dim F = 1$.
Si $H \not\subset F$, alors il existe $x \in H$ avec deux composantes différentes. Quitte à considérer une permutation des composantes, on peut supposer $x_1 \neq x_2$. Notons τ_{12} la transposition de 1 et 2. Alors
$$\frac{1}{x_1 - x_2}(x - f_{\tau_{12}}(x)) = (1, -1, 0, \dots, 0) = e_1 - e_2 \in H$$
En considérant les itérées du cycle $(1, 2, \dots, n)$, on prouve que $f_i = e_i - e_{i+1} \in H$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Or $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$ est une base de G (la famille est libre et G est de dimension $n-1$). Par conséquent, $G \subset H$. Comme G est de dimension $n-1$, on a soit $H = G$, soit $H = \mathbb{K}^n$ (qui est évidemment stable).
Ainsi les seuls sous-espaces stables par tous les f_σ sont $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$, F, G et $\mathbb{K}^n$.

Solution 7.

► L'application f est clairement linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

► Pour tous $x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}$, $f(x, y, z)) = (x', y', z')$ *si et seulement si*
$$\begin{cases} 2x - y = x' \\ -x + y = y' \\ x - z = z' \end{cases}$$
Appliquons la méthode du pivot de Gauss sous sa forme matricielle
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & z' \\ -1 & 1 & 0 & y' \\ 2 & -1 & 0 & x' \end{array}\right]$$
par les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & z' \\ 0 & 1 & -1 & y' + z' \\ 0 & -1 & 2 & x' - 2z' \end{array}\right]$$

puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & z' \\ 0 & 1 & -1 & y'+z' \\ 0 & 0 & 1 & x'+y'-z' \end{array}\right]$$

d'où ,

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & x'+y' \\ y & = & x'+2y' \\ z & = & x'+y'-z' \end{array}\right.$$

ainsi f est un isomorphisme et f^{-1} est défini sur $\mathbb{R}^3$ par

$$(x,y,z) \mapsto (x+y, x+2y, x+y-z).$$

Solution 8.

1. Prouvons que la famille $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant 2}$ est libre. Soient λ_0, λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0,$$

c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_0 e^{2x} + \lambda_1 x e^{2x} + \lambda_2 x^2 e^{2x} = 0,$$

ie,

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 = 0,$$

et puisque une fonction polynôme est nulle *si et seulement si* tous ses cœfficients sont nuls ,

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

La famille $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant 2}$ est donc libre et E est de dimension 3.

2. C'est parti !

   ► Le caractère linéaire de la dérivation est bien connu, il suffit de vérifier que $D(E) \subset E$. On remarque sans peine que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_0'(x) = 2e^{2x},\ f_1'(x) = 2xe^{2x} + e^{2x},\ f_2'(x) = 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}.$$

   Ainsi $D(f_0) = 2f_0, D(f_1) = f_0 + 2f_1$ et $D(f_2) = 2f_1 + 2f_2$, d'où $D(E) \subset E$ et $D \in \mathscr{L}(E)$.

3. Prouvons que l'image de (f_0, f_1, f_2) par D est une base de E. Puisque E est de dimension 3, il suffit de prouver que le rang de la famille image est trois. D'après les calculs précédents, il s'agit de déterminer le rang de la famille suivante,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Cette dernière étant de rang 3, le résultat est acquis. L'image d'une base de E par D étant une base de E, D est un isomorphisme de E : $D \in GL(E)$.

Solution 9.

1. Puisque les quatre composantes de $\Phi(U)$ sont linéaires en U, Φ est linéaire (on ne va tout de même pas y passer la soirée !)

2. Un vecteur (x, y, z) appartient au noyau de Φ *si et seulement si* ,

$$y-z=x+z=x+y+z=x-y-z=0,$$

ie $x=y=z=0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(\Phi)=\{0\}$ et Φ est injective.

3. Puisque Φ est injective, en notant $\mathscr{B}=(e_k)_{1\leqslant k\leqslant 3}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'image de $\mathscr{B}$ par Φ est une base de l'image de Φ. $\mathrm{Im}(\Phi)$ est donc de dimension 3 strictement inférieure à $4=\dim(\mathbb{R}^4)$: Φ n'est pas surjective. Posons

$$u=\Phi(e_1)=(1,0,1,1) \ \ , \ \ v=\Phi(e_2)=(0,1,1,-1)$$

et $w=\Phi(e_3)=(1,-1,1,-1)$; (u, v, w) est une base de $\mathrm{Im}(\Phi)$ puisque Φ est injective.

Solution 10.

Calcul du noyau.
Un vecteur (x, y, z, t) appartient à $\mathrm{Ker}(f_\alpha)$ *si et seulement si* ,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & \alpha z & + & t & = & 0 \\ x & & & + & z & + & t & = & 0 \\ & & y & + & z & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Appliquons la méthode du pivot de Gauss sous sa forme matricielle ; par l'opération $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2$,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-1 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

puis $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3$,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

► *Cas 1 : $\alpha=2$.*

Un vecteur (x, y, z, t) appartient à $\mathrm{Ker}(f_2)$ *si et seulement si* ,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & + & t & = & 0 \\ & & y & + & z & & & = & 0 \end{array}\right.$$

ainsi,

$$\mathrm{Ker}(f_2)=\{(x, y, -y, y-x) \ \ , \ \ x, y \in \mathbb{R}\},$$

ie $\mathrm{Ker}(f_2)=\mathrm{vect}(u_1, u_2)$ où $u_1=(1,0,0,-1)$ et $u_2=(0,1,-1,1)$. La famille (u_1, u_2) est clairement libre dans $\mathbb{R}^4$ et s'agit donc d'une base de $\mathrm{Ker}(f_2)$.

► *Cas 2 : $\alpha \neq 2$.*

Un vecteur (x, y, z, t) appartient à $\mathrm{Ker}(f_\alpha)$ *si et seulement si* ,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & \alpha z & + & t & = & 0 \\ & & y & + & z & & & = & 0 \\ & & & & z & & & = & 0 \end{array}\right.$$

ainsi,

$$\mathrm{Ker}(f_\alpha)=\{x(1,0,0,-1) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

ie $\mathrm{Ker}(f_\alpha)=\mathrm{vect}(u)$ où $u=(1,0,0,-1)$.

Calcul de l'image.

► Cas 1 : $\alpha = 2$.

Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$f_2(x, y, z, t) = (x+t)e_1 + y e_2 + z e_3,$$

où $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (1,0,1)$ et $e_3 = (2,1,1) = e_1 + e_2$. Ainsi

$$\mathrm{Im}(f_2) = \mathrm{vect}(e_1, e_2, e_3) = \mathrm{vect}(e_1, e_2).$$

On montre sans difficulté que la famille (e_1, e_2) est libre dans $\mathbb{R}^3$ et qu'il s'agit ainsi d'une base de $\mathrm{Im}(f_2)$.

► Cas 2 : $\alpha = 2$.

Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$f_\alpha(x, y, z, t) = (x+t)e_1 + y e_2 + z e_3$$

où $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (1,0,1)$ et $e_3' = (\alpha, 1, 1)$. Ainsi $\mathrm{Im}(f_\alpha) = \mathrm{vect}(e_1, e_2, e_3')$. La famille (e_1, e_2, e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$ car, d'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}(f_\alpha)$ est de dimension $4 - 1 = 3$. On a donc $\mathrm{Im}(f_\alpha) = \mathbb{R}^3$.

Solution 11.

1. ► *Base de* $\mathrm{Im}(f)$.

   On a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(e_1, e_3)$, la famille (e_1, e_3) étant libre (car extraite d'une base), il s'agit d'une base de $\mathrm{Im}(f)$.

   ► *Base de* $\mathrm{Ker}(f)$.

   $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}(f)$ *si et seulement si* il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{X} = (x, y, z)$ et $x = y = 0$. Ainsi

   $$\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = vect(e_3).$$

2. ► Puisque $\mathrm{E} = \mathrm{vect}(e_1, e_2)$, on a

   $$f(\mathrm{E}) = \mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2)) = \mathrm{vect}(e_1, e_3).$$

   ► $\mathrm{X} \in f^{-1}(\mathrm{E})$ *si et seulement si* il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{X} = (x, y, z)$ et $f(\mathrm{X}) \in \mathrm{E}$, ce qui est équivalent à l' existence de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{X} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(x, 0, y) \in \mathrm{E}$. Or, $(x, 0, y) \in \mathrm{E}$ *si et seulement si* $y = 0$. Ainsi $\mathrm{X} = (x, y, z) \in f^{-1}(\mathrm{E})$ *si et seulement si* $y = 0$, ie $\mathrm{X} \in \mathrm{vect}(e_1, e_3)$. Ona donc $f^{-1}(\mathrm{E}) = \mathrm{vect}(e_1, e_3)$.

Solution 12.

1. E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ puisque toute combinaison linéaire de fonctions continues est une fonction continue.
2. E est de dimension infinie infinie car contient une famille libre infinie,

   $$x \geqslant 0 \mapsto x^k \quad , \quad k \in \mathbb{N}.$$

3. Soient f_1, f_2 deux vecteurs de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons

   $$g = \psi(f_1 + \lambda f_2).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_0^x t\big(f_1+\lambda f_2\big)(t)\,dt \\
&= \int_0^x t\big(f_1(t)+\lambda f_2(t)\big)\,dt \\
&\text{(par définition des opérations sur } \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}\text{)} \\
&= \int_0^x t f_1(t)\,dt + \lambda \int_0^x t f_2(t)\,dt \\
&\text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \psi(f_1)(x)+\lambda\psi(f_2)(x) \\
&= \psi(f_1+\lambda f_2)(x) \\
&\text{(par définition des opérations sur } \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}\text{)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\psi(f_1+\lambda f_2) = \psi(f_1)+\lambda\psi(f_2)$ et $\psi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

4. ► Soit $f \in \mathrm{Ker}(f)$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^x t f(t)\,dt = 0.$$

La fonction $t \mapsto t f(t)$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$, l'application

$$x \longmapsto \int_0^x t f(t)\,dt$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée

$$x \longmapsto x f(x).$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x f(x) = 0.$$

En particulier $\forall x > 0$, $f(x) = 0$ puis $f(0) = 0$ par continuité de f en zéro. Le noyau de f est donc réduit à 0 et f est injective.

► L'application ψ n'est pas surjective puisque

$$\forall f \in \mathrm{E} \ , \ \psi(f)(0) = 0$$

et qu'il existe des fonctions $g \in \mathrm{E}$ telles que $g(0) \neq 0$ comme $g = \cos$.

► L'endomorphisme Ψ étudié dans cet exercice est un contre-exemple en dimension infinie de l'équivalence en dimension finie entre l'injectivité et la surjectivité des endomorphismes.

5. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{Ker}(\psi - \lambda\, id_{\mathrm{E}})$.

► *Cas 1 : $\lambda = 0$.*

On a montré à la question précédente que $\mathrm{Ker}(\psi) = \{0\}$.

► *Cas 2 :$\lambda \neq 0$.*

Pour tout x positif ,

$$\int_0^x t f(t)\,dt - \lambda f(x) = 0.$$

D'après les mêmes arguments qu' à la question précédente, la fonction

$$x \mapsto \int_0^x t f(t)\,dt$$

est dérivable de dérivée
$$x \mapsto xf(x).$$
Or
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \,,\; f(x) = \frac{1}{\lambda}\int_0^x tf(t)dt.$$
La fonction f est donc dérivable et
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \,,\; xf(x) - \lambda f'(x) = 0.$$
La fonction f est donc solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle $y' - \frac{1}{\lambda}ty = 0$. De plus ,
$$f(0) = \frac{1}{\lambda}\int_0^0 tf(t)dt = 0.$$
D'après le théorème d'unicité appliqué au problème de Cauchy
$$y' - \frac{1}{\lambda}ty = 0 \,,\; y(0) = 0$$
sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, $f = 0$. Ainsi
$$\mathrm{Ker}(\psi - \lambda id_{\mathrm{E}}) = \{0\}.$$

Remarque. Il n'est pas indispensable de résoudre explicitement l'équation différentielle pour répondre à la dernière question de l'exercice : tout le travail a déjà été fait dans les paragraphes concernant les problèmes de Cauchy du cours sur les équations différentielles. ■

Solution 13.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $u(z) = -2\,\mathrm{Im}(z)$. Donc, par $\mathbb{R}$-linéarité de la partie imaginaire, $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C})$.
2. On a, d'après le calcul précédent,
$$\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}.$$
3. Toujours d'après le calcul initial, pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$, $u^2(z) = u(u(z)) = 0$. On a donc $u^2 = 0$.
4. Posons $v = id_{\mathbb{C}} + 2u$. Puisque $u^2 = 0$, on a
$$(v - id_{\mathbb{C}})^2 = v^2 - 2v + id_{\mathbb{C}} = 0.$$
On a donc
$$v \circ (2id_{\mathbb{C}} - v) = (2id_{\mathbb{C}} - v) \circ v = id_{\mathbb{C}}.$$
L'endomorphisme v est donc un isomorphisme et
$$v^{-1} = 2id_{\mathbb{C}} - v = id_{\mathbb{C}} - 2u.$$

Solution 14.

1. On a :
$$(u - r_1\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \circ (u - r_2\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = u^2 - (r_1 + r_2)u + r_1 r_2\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$$
Comme r_1 et r_2 sont les racines de $\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b$, on a $r_1 + r_2 = -a$ et $r_1 r_2 = b$. D'où
$$(u - r_1\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \circ (u - r_2\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = u^2 + au + b\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$$
On prouve de même que
$$(u - r_2\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \circ (u - r_1\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = u^2 + au + b\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$$

2. Comme $(u-r_1\,\mathrm{Id_E})\circ(u-r_2\,\mathrm{Id_E})=u^2+a\,u+b\,\mathrm{Id_E}$, on a $\mathrm{Ker}(u-r_2\,\mathrm{Id_E})\subset\mathrm{Ker}(u^2+a\,u+b\,\mathrm{Id_E})$ i.e. $\mathrm{F}_2\subset\mathrm{F}$. On prouve de même que $\mathrm{F}_1\subset\mathrm{F}$.

3. Soient $x\in\mathrm{F}_1\cap\mathrm{F}_2$. On a alors $u(x)=r_1x=r_2x$. Mais, comme $r_1\neq r_2$, $x=0_\mathrm{E}$. D'où $\mathrm{F}_1\cap\mathrm{F}_2=\{0_\mathrm{E}\}$.
Comme $\mathrm{F}_1\subset\mathrm{F}$ et $\mathrm{F}_2\subset\mathrm{F}$, on a $\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_2\subset\mathrm{F}$. Prouvons l'inclusion réciproque. Soit $x\in\mathrm{F}$.
Analyse : On suppose qu'il existe $(y,z)\in\mathrm{F}_1\times\mathrm{F}_2$ tel que $x=y+z$. Remarquons que $u(y)=r_1y$ et $u(z)=r_2z$. On a alors

$$(u-r_1\,\mathrm{Id_E})(x)=(u-r_1\,\mathrm{Id_E})(z)=(r_2-r_1)z$$

et

$$(u-r_2\,\mathrm{Id_E})(x)=(u-r_2\,\mathrm{Id_E})(y)=(r_1-r_2)y$$

Synthèse : Posons $z=\frac{1}{r_2-r_1}(u(x)-r_1x)$ et $y=\frac{1}{r_2-r_1}(r_2x-u(x))$. On voit facilement que $y+z=x$. De plus,

$$(u-r_1\,\mathrm{Id_E})(y)=(u-r_1\,\mathrm{Id_E})\circ(u-r_2\,\mathrm{Id_E})(x)=(u^2+a\,u+b\,\mathrm{Id_E})(x)=0_\mathrm{E}\text{ car }x\in\mathrm{F}$$
$$(u-r_2\,\mathrm{Id_E})(z)=(u-r_2\,\mathrm{Id_E})\circ(u-r_1\,\mathrm{Id_E})(x)=(u^2+a\,u+b\,\mathrm{Id_E})(x)=0_\mathrm{E}\text{ car }x\in\mathrm{F}$$

donc $y\in\mathrm{F}_1$ et $z\in\mathrm{F}_2$.
En conclusion, on a bien $\mathrm{F}=\mathrm{F}_1\oplus\mathrm{F}_2$.

4. **a.** Soit f une solution de $(\mathscr{E})$. f est deux fois dérivable.
Supposons avoir montré que f est n fois dérivable pour un entier $n\geqslant 2$ et montrons que f est $n+1$ fois dérivable. On a $f''=-af'-bf$. f est n fois dérivable donc, a fortiori, $n-1$ fois dérivable. f' est également $n-1$ fois dérivable. Par conséquent f'' est $n-1$ fois dérivable. Donc f est $n+1$ fois dérivable.
Par récurrence, f est n fois dérivable pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc de classe $\mathscr{C}^\infty$.

b. On a prouvé à la question précédente que toutes les solutions de $(\mathscr{E})$ sont des éléments de E. De plus, pour tout $f\in\mathrm{E}$:

$$f\text{ solution de }(\mathscr{E})\iff(u^2+a\,u+b\,\mathrm{Id_E})(f)=0\iff f\in\mathrm{Ker}(u^2+a\,u+b\,\mathrm{Id_E})$$

Ainsi F est bien l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$.

c. Notons $f_1:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{C}\\ t&\longmapsto&e^{r_1t}\end{array}\right.$ et $f_2:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{C}\\ t&\longmapsto&e^{r_2t}\end{array}\right.$. On a, d'après le cours $\mathrm{F}_1=\mathrm{vect}(f_1)$ et $\mathrm{F}_2=\mathrm{vect}(f_2)$.

d. D'après la question **3**, $\mathrm{F}=\mathrm{vect}(f_1,f_2)$ et on retrouve bien le résultat du cours souhaité.

Solution 15.

1. Φ est linéaire par linéarité de l'intégrale. De plus, pour $x,y\in[0,1]$:

$$\left|\Phi(f)(x)-\Phi(f)(y)\right|\leqslant\int_0^1|\min(x,t)-\min(y,t)||f(t)|\,\mathrm{d}t$$

On établit facilement $|\min(x,t)-\min(y,t)|\leqslant|x-y|$ (considérer les différents ordres possibles des réels x, y et t). En posant $\mathrm{K}=\displaystyle\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t$, on a $\left|\Phi(f)(x)-\Phi(f)(y)\right|\leqslant\mathrm{K}|x-y|$. Ainsi $\Phi(f)$ est K-lipschitzienne et a fortiori continue.
Par conséquent, Φ est un endomorphisme de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

2. Pour $t\in[0,x]$, $\min(x,t)=t$ et pour $t\in[x,1]$, $\min(x,t)x$. Ainsi

$$\Phi(f)(x)=\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t+\int_x^1 x\,f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t+x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Posons $g=\Phi(f)$.
La fonction $x\mapsto\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable comme primitive de la fonction $x\mapsto x\,f(x)$ et sa dérivée est donc $x\mapsto x\,f(x)$.
La fonction $x\mapsto\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est également dérivable puisque c'est une primitive de $-f$ et sa dérivée est donc $-f$.
Par conséquent, g est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x\in[0,1]$, $g'(x)=x\,f(x)+\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t-x\,f(x)=\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. g' est à nouveau dérivable et pour tout $x\in[0,1]$, $g''(x)=-f(x)$.
Comme f est continue, g'' l'est également. Ainsi g est de classe $\mathscr{C}^2$.

3. Soit $f \in \operatorname{Ker}\Phi$. On a donc $\Phi(f)=0$. D'après ce qui précède, $f=-\Phi(f)''=0$. Ainsi $\operatorname{Ker}\Phi=\{0\}$.
Soit $g \in \operatorname{Im}\Phi$. Il existe donc $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $g=\Phi(f)$. D'après la question précédente, g est de classe $\mathscr{C}^2$ et $g''=-f$ i.e. $f=-g''$. Ainsi $g=-\Phi(g'')$. Or pour $x\in[0,1]$:

$$\begin{aligned}\Phi(g'')(x) &= \int_0^x t g''(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 g''(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[t g'(t)\right]_0^x - \int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t + x(g'(1)-g'(x)) && \text{par intégration par parties}\\ &= -g(x)+g(0)+xg'(1)\end{aligned}$$

Donc, on doit avoir $g(0)+xg'(1)=0$ pour tout $x\in[0,1]$. Ceci implique que $g(0)=0$ et $g'(1)=0$.
Réciproquement si $g\in\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ vérifie $g(0)=0$ et $g'(1)=0$, on a bien $g=\Phi(-g'')\in\operatorname{Im}\Phi$. Ainsi $\operatorname{Im}\Phi=\left\{g\in\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R} \mid g(0)=g'(1)=0\right\}$

Solution 16.

1. Il suffit de montrer que $\mathscr{B}$ est libre. Soient $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tels que $a\sin+b\cos+c\operatorname{sh}+d\operatorname{ch}=0$. On évalue cette identité en 0 et on trouve $b+d=0$. On dérive puis on évalue en 0 et on trouve $a+c=0$. On dérive deux fois puis on évalue en 0 et on trouve $-b+d=0$. On dérive trois fois puis on évalue en 0 et on trouve $-a+c=0$. On a alors nécessairement $a=b=c=d=0$. La famille $\mathscr{B}$ est libre et génératrice de F par définition de F : c'est une base de F.

2. $\mathrm{D}(\sin)=\cos\in\mathrm{F}$, $\mathrm{D}(\cos)=-\sin\in\mathrm{F}$, $\mathrm{D}(\operatorname{sh})=\operatorname{ch}\in\mathrm{F}$ et $\mathrm{D}(\operatorname{ch})=\operatorname{sh}\in\mathrm{F}$. Ainsi $\mathrm{D}(\mathscr{B})\subset\mathrm{F}$. Comme $\mathscr{B}$ engendre F, on a par linéarité de D : $\mathrm{D}(\mathrm{F})\subset\mathrm{F}$.

3. D'après la question précédente $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$. Posons $\mathrm{J}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ et $\mathrm{K}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. On a donc $\mathrm{M}=\left(\begin{array}{c|c}\mathrm{J}&\mathbf{0}_2\\\hline\mathbf{0}_2&\mathrm{K}\end{array}\right)$. Notons I_2 la matrice identité de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
On a $\mathrm{J}^2=-\mathrm{I}$ donc $\mathrm{J}^3=-\mathrm{J}$ et $\mathrm{J}^4=\mathrm{I}_2$. On en déduit que $\mathrm{J}^n=\mathrm{I}_2$ si $n\equiv0[4]$, $\mathrm{J}^n=\mathrm{J}$ si $n\equiv1[4]$, $\mathrm{J}^n=-\mathrm{I}_2$ si $n\equiv2[4]$, $\mathrm{J}^n=-\mathrm{J}$ si $n\equiv3[4]$.
On a également $\mathrm{K}^2=\mathrm{I}_2$. On en déduit que $\mathrm{K}^n=\mathrm{I}_2$ si $n\equiv0[2]$ et $\mathrm{K}^n=\mathrm{K}$ si $n\equiv1[2]$.
Un calcul par blocs donne $\mathrm{M}^n=\left(\begin{array}{c|c}\mathrm{J}^n&\mathbf{0}_2\\\hline\mathbf{0}_2&\mathrm{K}^n\end{array}\right)$. Donc $\mathrm{M}^n=\left(\begin{array}{c|c}\mathrm{I}_2&\mathbf{0}_2\\\hline\mathbf{0}_2&\mathrm{I}_2\end{array}\right)$ si $n\equiv0[4]$, $\mathrm{M}^n=\left(\begin{array}{c|c}\mathrm{J}&\mathbf{0}_2\\\hline\mathbf{0}_2&\mathrm{K}\end{array}\right)$ si $n\equiv1[4]$, $\mathrm{M}^n=\left(\begin{array}{c|c}-\mathrm{I}_2&\mathbf{0}_2\\\hline\mathbf{0}_2&\mathrm{I}_2\end{array}\right)$ si $n\equiv2[4]$ et $\mathrm{M}^n=\left(\begin{array}{c|c}-\mathrm{J}&\mathbf{0}_2\\\hline\mathbf{0}_2&\mathrm{K}\end{array}\right)$ si $n\equiv3[4]$.

4. La question précédente montre que $\mathrm{M}^4=\mathrm{I}_4$ où I_4 est la matrice identité de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. Ainsi M est inversible d'inverse $\mathrm{M}^{-1}=\mathrm{M}^3$. Par conséquent, d est inversible est la matrice de d^{-1} dans la base $\mathscr{B}$ est $\mathrm{M}^{-1}=\mathrm{M}^3=\left(\begin{array}{c|c}-\mathrm{J}&\mathbf{0}_2\\\hline\mathbf{0}_2&\mathrm{K}\end{array}\right)$.

5. La matrice de $d-\mathrm{Id}$ dans la base $\mathscr{B}$ est $\mathrm{M}-\mathrm{I}_4$. On voit facilement que $\operatorname{Im}(\mathrm{M}-\mathrm{I}_4)=\operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$. De plus, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\in\operatorname{Ker}(\mathrm{M}-\mathrm{I}_4)$. Or $\dim\operatorname{Ker}(\mathrm{M}-\mathrm{I}_4)=1$ donc ce vecteur engendre $\operatorname{Ker}(\mathrm{M}-\mathrm{I}_4)$. On en déduit que $\operatorname{Im}(d-\mathrm{Id})=\operatorname{vect}(-\sin+\cos,-\sin-\cos,\operatorname{ch}-\operatorname{sh})$ et que $\operatorname{Ker}(d-\mathrm{Id})=\operatorname{vect}(\operatorname{ch}+\operatorname{sh})$. Remarquons que $\operatorname{ch}-\operatorname{sh}$ est la fonction $\frac{1}{\exp}$ et que $\operatorname{ch}+\operatorname{sh}$ est la fonction exp.

6. On a $g\circ f=d^2-\mathrm{Id}$. La matrice de $g\circ f$ est donc $\mathrm{M}^2-\mathrm{I}_4=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. On a clairement $\operatorname{Im} g\circ f=\operatorname{vect}(\sin,\cos)$ et $\operatorname{Ker} g\circ f=\operatorname{vect}(\operatorname{ch},\operatorname{sh})$.

Solution 17.

1. On ne vérifie pas que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (on devrait), on espère que le lecteur est assez grand pour s'en rendre compte. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. L'égalité $f(x,y,z)=(a,b,c)$ est traduite par le système

$$\begin{cases} 2x + y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y + 2z = c \end{cases}$$

qui est équivalent au système triangulaire suivant :

$$\begin{cases} x + y + 2z = c \\ y - z = b-c \\ -4z = a+b-4c \end{cases}$$

qui admet une unique solution, quel que soit le vecteur (a,b,c). Par conséquent, l'application f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, le noyau de f est réduit au vecteur nul (et une base de ce noyau est donc l'ensemble vide…), tandis que l'image de f est égale à $\mathbb{R}^3$ (pas de représentation cartésienne…).

2. Mêmes notations. Le système

$$\begin{cases} y + z = a \\ x + z = b \\ x + y = c \end{cases}$$

est équivalent au système triangulaire

$$\begin{cases} 2z = a+b-c \\ -y + z = b-c \\ x + y = c \end{cases}$$

qui admet une unique solution, quel que soit le vecteur (a,b,c). Même conclusion.

3. Mêmes notations. Le système

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x - y - z = b \\ x + 2y + 2z = c \end{cases}$$

est équivalent au système triangulaire

$$\begin{cases} x = 2a-c \\ y + z = c-a \\ 0 = -5a+b+3c \end{cases}$$

Ce système admet des solutions si, et seulement si, $5a-b-3c=0$ (représentation cartésienne de $\mathrm{Im}(f)$) et le vecteur (x,y,z) appartient au noyau de f si, et seulement si, il existe un paramètre $t\in\mathbb{R}$ tel que

$$(x,y,z)=t(0,1,-1).$$

Le vecteur $(0,1,-1)$ est donc un vecteur directeur de $\mathrm{Ker}(f)$.

Remarque. Lorsqu'un espace vectoriel admet une base réduite à un seul vecteur, il vaut mieux parler de *vecteur directeur* que de base. ■

4. Mêmes notations. Le système

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ x + 2y - z = b \\ 2x + 4y - 2z = c \end{cases}$$

est équivalent au système triangulaire

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ 0 = b-a \\ 0 = c-2a \end{cases}$$

qui admet des solutions si, et seulement si, $b-a=c-2a=0$ (représentation cartésienne de l'image de f). Le vecteur (x,y,z) appartient au noyau de f si, et seulement si, il existe deux paramètres s et t tels que

$$(x,y,z)=s(1,0,1)+t(2,-1,0).$$

Une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est donc le couple $\big((1,0,1),(2,-1,0)\big)$.

Solution 18.

Les vérifications de linéarité sont immédiates.

1. On clairement
$$\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{vect}((0,0,1))$$
et
$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{vect}((1,0,0),(0,1,0)).$$

2. De même $\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$ et
$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{vect}((1,1,1),(-1,1,2)).$$

3. On trouve $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$ et
$$\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{vect}((3,1,0),(-2,0,1)).$$

Solution 19.

Raisonnons en deux temps.

► Supposons que $\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Ker}(g)=\mathrm{E}$. Comme l'inclusion $\mathrm{Im}(g\circ f)\subset\mathrm{Im}(g)$ est toujours vérifiée, il suffit d'établir l'inclusuion réciproque. Soit $y\in\mathrm{Im}(g)$. Il existe $x\in\mathrm{E}$ tel que $y=g(x)$. Or, il existe $x_1\in\mathrm{Im}(f)$ et $x_2\in\mathrm{Ker}(g)$ tels que $x=x_1+x_2$. Soit $x_1'\in\mathrm{E}$ tel que $x_1=f(x_1')$. On a alors :

$$\begin{aligned}y&=g(x)=g(x_1+x_2)=g(x_1)+g(x_2)\\&=g(x_1)=g(f(x_1'))=(g\circ f)(x_1')\end{aligned}$$

d'où $y\in\mathrm{Im}(g\circ f)$.

► Supposons que $\mathrm{Im}(g\circ f)=\mathrm{Im}(g)$. L'inclusion $\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Ker}(g)$ étant banale, il suffit de prouver l'inclusion réciproque. Soit $x\in\mathrm{E}$. Comme

$$g(x)\in\mathrm{Im}(g)=\mathrm{Im}(g\circ f),$$

il existe $x'\in\mathrm{E}$ tel que $g(x)=g(f(x'))$ et donc
$$g(x-f(x'))=0.$$
Ainsi $x-f(x')\in\mathrm{Ker}(g)$ et
$$x=[f(x')]+[x-f(x')]\subset\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Ker}(g),$$
d'où le résultat.

Solution 20.

On remarque que
$$(g\circ f)^2=g\circ f\ \text{ et }\ (f\circ g)^2=f\circ g,$$
les endomorphismes $f\circ g$ et $g\circ f$ sont donc repsectivement des projecteurs de F et E. Ainsi

$$\mathrm{E}=\mathrm{Ker}(g\circ f)\oplus\mathrm{Im}(g\circ f).$$

Or, on a $\operatorname{Im}(g\circ f)\subset\operatorname{Im}(g)$ (c'est une inclusion banale) et on déduit sans peine de l'égalité

$$g\circ f\circ g=g$$

que $\operatorname{Im}(g)\subset\operatorname{Im}(g\circ f)$. Vérifions maintenant que

$$\operatorname{Ker}(g\circ f)=\operatorname{Ker}(f).$$

Il est clair que $\operatorname{Ker}(f)\subset\operatorname{Ker}(g\circ f)$. Réciproquement, si $x\in\operatorname{Ker}(g\circ f)$, i.e. $(g\circ f)(x)=0$, alors

$$f(x)=(f\circ g\circ f)(x)=f((g\circ f)(x))=f(0)=0$$

et donc $x\in\operatorname{Ker}(f)$. Ainsi :

$$\mathrm{E}=\operatorname{Ker}(f)\oplus\operatorname{Im}(g).$$

Les endomorphismes f et g jouant des rôles symétriques, on a aussi

$$\mathrm{F}=\operatorname{Ker}(g)\oplus\operatorname{Im}(f).$$

Solution 21.

1. La proposition est fausse en général (en fait dès que $\mathrm{E}\neq\{0\}$). Par exemple, pour $f=0$ et $g=id_{\mathrm{E}}$, on a

$$\mathrm{E}=\operatorname{Ker}(g\circ f)\neq\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Ker}(g)=\{0\}.$$

2. La proposition est fausse en général (en fait dès que $\mathrm{E}\neq\{0\}$). Par exemple, pour $f=id_{\mathrm{E}}$ et $g=0$, on a

$$\mathrm{E}=\operatorname{Ker}(g\circ f)\not\subset\operatorname{Ker}(f)=\{0\}.$$

3. La proposition est vraie. Soit $x\in\operatorname{Ker}(f)$. On a donc $(g\circ f)(0)=g(f(x))=g(0)=0$ car $f(x)=0$ et que g est linéaire. Ainsi $x\in\operatorname{Ker}(g\circ f)$.
4. La proposition est vraie. On a $f\circ g=0$ *si et seulement si* pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f\big(g(x)\big)=0$, c'est-à-dire $g(x)\in\operatorname{Ker}(f)$, ainsi $f\circ g=0$ *si et seulement si* $\operatorname{Im}(g)\subset\operatorname{Ker}(f)$.

Solution 22.

► Supposons que $\operatorname{Ker}(f^2)=\operatorname{Ker}(f)$.

Soit $y\in\operatorname{Im}(f)\cap\operatorname{Ker}(f)$. Il existe alors $x\in\mathrm{E}$ tel que $y=f(x)$ et $f(y)=0$. Ainsi $f^2(x)=f(y)=0$ d'où $x\in\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Ker}(f^2)$ et donc $y=f(x)=0$. On a donc $\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Im}(f)\subset\{0\}$, l'inclusion étant banale car $\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

► Supposons que $\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Im}(f)=\{0\}$.

L'application f étant linéaire, l'annulation de f en un vecteur x entraîne celle de f^2 en x, on a donc $\operatorname{Ker}(f)\subset\operatorname{Ker}(f^2)$. Etablissons l'inclusion réciproque. Soit $x\in\operatorname{Ker}(f^2)$, c'est-à-dire $f^2(x)=f(f(x))=0$. Le vecteur $f(x)$ appartient à $\operatorname{Im}(f)\cap\operatorname{Ker}(f)=\{0\}$ donc $f(x)=0$, c'est-à-dire $x\in\operatorname{Ker}(f)$.

Solution 23.

1. Soit $x \in \operatorname{Ker}(g)$. On a alors $g(x)=0$ et, puisque f est linéaire :
$$f(g(x))=f(0)=0=x$$
car $f \circ g = id_E$. Ainsi $\operatorname{Ker}(g)=\{0\}$ et g est injective. Comme $\forall x \in E$,
$$x=(f\circ g)(x)=f(g(x)) \in E,$$
$E \subset \operatorname{Im}(f)$ et puisque l'inclusiuon réciproque est banale on a $\operatorname{Im}(f)=E$: f est surjective.

2. On a clairement, par associativité de la composition :
$$\begin{aligned}(g\circ f)\circ(g\circ f) &= g\circ(f\circ g)\circ f = g\circ id_E \circ f\\ &= g\circ f\end{aligned}$$
Comme $p = g\circ f \in \mathscr{L}(E)$ en tant que composée d'endomorphismes de E, on en déduit que p est un projecteur de E.

3. On a
$$\operatorname{Im}(p)=g(f(E))=g(E)=\operatorname{Im}(g)$$
car la surjectivité de f (voir la question 1.) équivaut à $f(E)=E$. De plus, $p(x)=g(f(x))=0$ équivaut à $f(x)=0$ par injectivité de g (idem). On a donc $\operatorname{Ker}(p)=\operatorname{Ker}(f)$.

4. Puisque p est un projecteur de E, on a :
$$E=\operatorname{Ker}(p)\oplus\operatorname{Im}(p)=\operatorname{Ker}(f)\oplus\operatorname{Im}(g).$$

Solution 24.

Pour montrer l'égalité $\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Im}(f)=f(\operatorname{Ker}(f^2))$, nous montrons la double inclusion.

- Soit $y\in\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Im}(f)$, alors $f(y)=0$ et il existe x tel que $y=f(x)$. De plus $f^2(x)=f(f(x))=f(y)=0$ donc $x\in\operatorname{Ker}(f^2)$. Comme $y=f(x)$ alors $y\in f(\operatorname{Ker}(f^2))$. Donc $\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Im}(f)\subset f(\operatorname{Ker}(f^2))$.
- Pour l'autre inclusion, nous avons déjà que $f(\ker f^2)\subset f(E)=\operatorname{Im}(f)$. De plus $f(\operatorname{Ker}(f^2))\subset\operatorname{Ker}(f)$, car si $y\in f(\operatorname{Ker}(f^2))$ il existe $x\in\operatorname{Ker}(f^2)$ tel que $y=f(x)$, et $f^2(x)=0$ implique $f(y)=0$ donc $y\in\operatorname{Ker}(f)$. Par conséquent $f(\operatorname{Ker}(f^2))\subset\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Im}(f)$.

Solution 25.

1. Soit $x\in K_p$. Alors $u^p(x)=0_E$ et donc $u^{p+1}(x)=u(0_E)=0_E$. Donc $x\in K_{p+1}$. On en déduit que $K_p\in K_{p+1}$.
Soit $y\in I_{p+1}$. Il existe $x\in E$ tel que $y=u^{p+1}(x)=u^p(u(x))$. Donc $y\in I_p$. On en déduit que $I_{p+1}\in I_p$.

2. Comme u est injectif, u^p est également injectif pour tout $p\in\mathbb{N}$. Donc $K_p=\{0\}$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.
Pour tout $p\in\mathbb{N}$, u^p est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie donc également surjectif. On en déduit $I_p=E$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.

3.
   a. Notons $A=\{p\in\mathbb{N}\mid K_p=K_{p+1}\}$. Si on suppose A vide, on a donc $K_p\subsetneq K_{p+1}$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.La suite $(\dim K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc une suite strictement croissante d'entiers. Mais cette suite est majorée par n. Il y a donc contradiction. A est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$: elle admet un plus petit élément r. De plus, pour $p<r$, on a $K_p\subsetneq K_{p+1}$ donc $\dim K_p+1\leqslant\dim K_{p+1}$. En additionnant ces inégalités pour k variant de 0 à $r-1$, on obtient : $\dim K_0+r\leqslant\dim K_r$. Or $\dim K_0=0$ et $\dim K_r\leqslant n$ donc $r\leqslant n$.

   b. Par le théorème du rang on a donc, $\dim I_r=\dim I_{r+1}$. Or $I_r\subset I_{r+1}$ donc $I_r=I_{r+1}$.
Soit l'hypothèse de récurrence $\mathrm{HR}(p)$: $K_r=K_{r+p}$.
$\mathrm{HR}(0)$ est clairement vérifiée. Supposons $\mathrm{HR}(p)$ pour un certain $p\in\mathbb{N}$. Soit $x\in K_{r+p+1}$. Alors $u^{r+p+1}(x)=u^{r+1}(u^p(x))=0_E$. Donc $u^p(x)\in\operatorname{Ker}u^{r+1}=\operatorname{Ker}u^r$. Donc $u^r(u^p(x))=0_E$. D'où $x\in K_{r+p}=K_r$ d'après $\mathrm{HR}(p)$.
Ainsi $\mathrm{HR}(p)$ est vraie pour tout $p\in\mathbb{N}$.
On a clairement $I_{r+p}\subset I_r$ pour tout $p\in\mathbb{N}$. Comme $K_r=K_{r+p}$ pour tout $p\in\mathbb{N}$, le théorème du rang nous donne : $\dim I_{r+p}=\dim I_r$ pour tout $p\in\mathbb{N}$. On a donc $I_r=I_{r+p}$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.

c. D'après le théorème du rang, on a $\dim E = \dim K_r + \dim I_r$. Il nous suffit de prouver que $I_r \cap K_r = \{0_E\}$.
Soit donc $x \in I_r \cap K_r$. On a donc $u^r(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = u^r(y)$. On a alors $u^{2r}(y) = 0_E$. D'où $y \in K_{2r} = K_{r+r} = K_r$ d'après la question **3.b**. Donc $x = u^r(y) = 0_E$.

4. Considérons et $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$. On a $K_p = \mathbb{K}_{p-1}[X]$. La suite (K_p) est donc une suite strictement croissante (pour l'inclusion) d'espaces vectoriels.

Solution 26.

1. Si $g \circ f$ est surjective, alors $\operatorname{Im} g \circ f = E$. Or $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g \subset E$ donc $\operatorname{Im} g = E$ et g est surjective.

2. $g(E) = g(\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g) = g(\operatorname{Im} f) + g(\operatorname{Ker} g) = \operatorname{Im} g \circ f + \{0\} = \operatorname{Im} g \circ f$. Or g est surjective donc $g(E) = E$. Ainsi $\operatorname{Im} g \circ f = E$ et $g \circ f$ est surjective.

3. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. En effet, si $g \circ f$ est injective, $\operatorname{Ker} g \circ f = \{0\}$ puis $\{0\} \subset \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g \circ f = \{0\}$. Donc $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et donc f est injective.
Si f est injective et si $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$, alors $g \circ f$ est injective. En effet, $(g \circ f)^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(g^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(\operatorname{Ker} g) = f^{-1}(\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f) = f^{-1}\{0\}$ (pour une application f pas forcément linéaire et une partie A de l'ensemble d'arrivée, $f^{-1}(A) = f^{-1}(A \cap \operatorname{Im} f)$). Or f est injective donc $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Ainsi $(g \circ f)^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ et $g \circ f$ est injective.

Remarque. On aurait pu travailler sur les vecteurs plutôt que sur les sous-espaces vectoriels. Il faut savoir faire les deux. ■

Solution 27.

1. Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Alors $v(y) = v \circ u(x) = u \circ v(x)$ car u et v commutent. Donc $v(y) \in \operatorname{Im} u$. Ainsi $\operatorname{Im} u$ est stable par v.
Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. Alors $u(x) = 0$. De plus, $u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(0) = 0$. Donc $v(x) \in \operatorname{Ker} u$. Ainsi $\operatorname{Ker} u$ est stable par v.

2. Soit $y \in \operatorname{Im} v$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = v(x)$. Comme $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker} v$, il existe $x_1 \in \operatorname{Ker} u$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} v$ tel que $x = x_1 + x_2$. Par conséquent, $y = v(x_1) + v(x_2) = v(x_1)$ car $x_2 \in \operatorname{Ker} v$. Mais $v(x_1) \in \operatorname{Ker} u$ car $x_1 \in \operatorname{Ker} u$ et car $\operatorname{Ker} u$ est stable par v.
Les rôles de u et v étant symétriques, on montre comme à la première question que $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} v$ sont stables par u puis que $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$.

3. D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg} u = \dim E - \dim \operatorname{Ker} u$. Or $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker} v$ donc $\dim E - \dim \operatorname{Ker} u = \dim \operatorname{Ker} v$. Ainsi $\dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$ donc $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} v$.
Evidemment, les rôles de u et v étant symétriques, on a également $\operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u$.

Solution 28.

1. Soit $x \in f(G+H)$. Il existe donc $y \in G$ et $z \in H$ tels que $x = f(y+z)$. Par linéarité de f, $x = f(y+z) = f(y) + f(z) \in f(G) + f(H)$.
Soit $x \in f(G) + f(H)$. Il existe donc $y \in G$ et $z \in H$ tels que $x = f(y) + f(z)$. Par linéarité de f, $x = f(x) + f(y) = f(x+y) \in f(G+H)$.
Par double inclusion, $f(G+H) = f(G) + f(H)$.

2. On suppose sue G et H sont en somme directe et que f est injective. On a montré à la question précédente que $f(G \oplus H) = f(G+H) = f(G) + f(H)$. Il suffit donc de voir que la dernière somme est directe. Soit $x \in f(G) \cap f(H)$. Il existe donc $y \in G$ et $z \in H$ tels que $x = f(y) = f(z)$. Ainsi $f(y-z) = f(y) - f(z) = 0$. Comme f est injective, $y - z = 0$ i.e. $y = z$. Ainsi $y \in G \cap H$. Comme G et H sont en somme directe, $y = 0$ et finalement $x = 0$.

Solution 29.

Supposons que $\mathrm{E} = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$. L'inclusion $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ est classique. Prouvons l'inclusion réciproque. Soit donc $x \in \operatorname{Im} f$. Il existe donc $y \in \mathrm{E}$ tel que $x = f(y)$. Or $\mathrm{E} = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$ par hypothèse donc il existe $u \in \operatorname{Im} f$ et $v \in \operatorname{Ker} f$ tels que $y = u + v$. Ainsi $x = f(u) + f(v) = f(u)$ car $v \in \operatorname{Ker} f$. Or $u \in \operatorname{Im} f$ donc $x = f(u) \in \operatorname{Im} f^2$.
Supposons maintenant que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$. Soit $x \in \mathrm{E}$. Alors $f(x) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$. Donc il existe $y \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = f^2(y)$ i.e. $f(x - f(y)) = 0$. Posons $u = f(y)$ et $v = x - f(y)$. On a bien $x = u + v$, $u \in \operatorname{Im} f$ et $v \in \operatorname{Ker} f$. D'où $\mathrm{E} = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$.

Solution 30.

1. Supposons que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$. Soit $x \in \mathrm{E}$. Comme $g(x) \in \operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$, $f(g(x)) = g(x)$. De même, $f(x) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$ donc $g(f(x)) = f(x)$.
   Supposons que $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$. Alors $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f \circ g \subset \operatorname{Im} f$. De même, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$. Donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$.

2. Montrons que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ *si et seulement si* $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$.
   Supposons que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$. Soit $x \in \mathrm{E}$. Comme $x - g(x) \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$, $f(g(x)) = f(x)$. De même, $x - f(x) \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ donc $g(f(x)) = g(x)$.
   Supposons que $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$. Alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f \circ g = \operatorname{Ker} g$. De même, $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} g \circ f \subset \operatorname{Ker} f$. Donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.

Solution 31.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Evident.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ On a classiquement $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$. Prouvons l'inclusion réciproque. Soit donc $x \in \operatorname{Im} f$. Il existe donc $y \in \mathrm{E}$ tel que $x = f(y)$. Or $\mathrm{E} = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$ par hypothèse donc il existe $u \in \operatorname{Im} f$ et $v \in \operatorname{Ker} f$ tels que $y = u + v$. Ainsi $x = f(u) + f(v) = f(u)$ car $v \in \operatorname{Ker} f$. Or $u \in \operatorname{Im} f$ donc $x = f(u) \in \operatorname{Im} f^2$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ On a classiquement $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$. D'après le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{E} = \operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f = \operatorname{rg} f^2 + \dim \operatorname{Ker} f^2$$

Or $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ par hypothèse donc $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$. Par conséquent, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2$. Puisque $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Montrons d'abord que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont en somme directe. Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. Puisque $x \in \operatorname{Im} f$, il existe $y \in \mathrm{E}$ tel que $x = f(y)$. Par ailleurs, $x \in \operatorname{Ker} f$, donc $f(x) = f^2(y) = 0$. Ainsi $y \in \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$. Donc $x = f(y) = 0$. Puisque $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont en somme directe,

$$\dim(\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f) = \operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathrm{E}$$

en invoquant le théorème du rang. Donc $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = \mathrm{E}$.

Solution 32.

- Supposons (i) et montrons(ii). D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{E} = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = 2 \operatorname{rg} f$ puisque $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. Ainsi $\dim \mathrm{E}$ est paire.

- Supposons (ii) et montrons (i). Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dim \mathrm{E} = 2n$. Soit $(e_1, \dots, e_{2n})$ une base de E. On définit f de la manière suivante :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = 0_{\mathrm{E}}\ f(e_{i+n}) = e_i$$

  Il est alors clair que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(e_1, \dots, e_n)$.

Solution 33.

1. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f(x) = 0_F$ puis $g(f(x)) = g(0_F) = 0_G$ i.e. $g \circ f(x) = 0_G$. Ainsi $x \in \operatorname{Ker} g \circ f$. D'où $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g \circ f$.
2. Soit $y \in \operatorname{Im} g \circ f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x)$. Ainsi $y = g(f(x)) \in \operatorname{Im} g$. D'où $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$.
3. Supposons $g \circ f = 0$. Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = 0_G$. D'où $y \in \operatorname{Ker} g$. On en déduit $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.
   Suuposons $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$. Soit $x \in E$. Alors $f(x) \in \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$. Donc $g \circ f(x) = g(f(x)) = 0_G$. D'où $g \circ f = 0$.

Solution 34.

1. Puisque $p \circ p = p$ et $f = p \circ f - f \circ p$, $p \circ f = p \circ f - p \circ f \circ p$. Ainsi $p \circ f \circ p = 0$ et $f \circ p = p \circ f \circ p - f \circ p = -f \circ p$, d'où $f \circ p = 0$, puis $f = p \circ f = 0$. Ainsi, par associativité de $\circ$, $f^2 = (p \circ f \circ p) \circ f = 0 \circ f = 0$. Donc $(**)$ est vérifiée.
2. Soit $x \in E$. Il existe un unique couple (x_1, x_2) appartenant à $\operatorname{Ker}(f) \times S$ tel que $x = x_1 + x_2$. Ainsi

$$\begin{aligned}(p \circ f - f \circ p)(x) &= (p \circ f - f \circ p)(x_1) + (p \circ f - f \circ p)(x_2) \\ &= (p \circ f)(x_1) - (f \circ p)(x_1) + (p \circ f)(x_2) \\ &\quad - (f \circ p)(x_2)\end{aligned}$$

   Or $\operatorname{Ker}(p) = S$ et $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(f)$, ainsi

$$(p(x_1), p(x_2)) \in (\operatorname{Ker}(f))^2$$

   et $(f(x_1), f(x_2)) \in (\operatorname{Im}(p))^2$ d'où

$$(p \circ f - f \circ p)(x) = f(x_1) + 0 + f(x_2) - 0 = f(x_1 + x_2) = f(x).$$

   Ainsi $f = p \circ f - f \circ p$ et f vérifie $(*)$.

Solution 35.

1. Soit $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant 2}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. L' endomorphisme défini par

$$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = 0$$

   et non nul et nilpotent car $f^2 = 0$.
2. $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ étant un groupe , si u est un automorphisme de E alors , pour tout entier naturel n, u^n est un automorphisme de E. En particulier $u^n \neq 0$. Le résultat en découle par contraposition.
3. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et pour tout $i \leqslant n$, soit p_i tel que $u^{p_i}(e_i) = 0$. Notons

$$p = \max(p_1, \dots, p_n).$$

   L'endomorphisme u^p s'annulant sur les vecteurs de la base $\mathscr{B}$, on a $u^p = 0$.
4. On remarque qu'après telescopage ,

$$(id_E - u) \circ \left(\sum_{k=0}^{\beta} u^k \right) = id_E$$

   et

$$\left(\sum_{k=0}^{\beta} u^k \right) \circ (id_E - u) = id_E$$

car $u^{\beta+1} = u^\beta = 0$. Ainsi
$$id_E - u \in GL(E)$$
et
$$(id_E - u)^{-1} = \sum_{k=0}^{\beta-1} u^k.$$

Remarque. Le lecteur fera l'analogie entre le calcul précédent et la formule de la série géoméritque pour un nombre complexe z de module strictement inférieur à 1,
$$(1-z)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k.$$

■

Solution 36.

1. Puisque $f^2 = 0$ est équivalent à $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$, on a
$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$
De plus,
$$\mathrm{Im}(f) \neq \mathrm{Ker}(f)$$
car sinon, en appliquant le théorème du rang, on obtiendrait $2\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$! Ainsi $\dim(\mathrm{Im}(f)) < \dim(\mathrm{Ker}(f))$. Puisque f est non-nulle,
$$1 \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f)) \text{ et } \dim(\mathrm{Ker}(f)) \leqslant 2.$$
D'où
$$1 \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f)) < \dim(\mathrm{Ker}(f)) \leqslant 2.$$
Ainsi $\mathrm{rg}(f) = 1$.

2. Puisque $f^3 = 0$ équivaut à $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$, on a
$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f^2)).$$
► De plus, $f^2 \neq 0$ (donc a fortiori $f \neq 0$) ainsi
$$1 \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f)) \text{ et } \dim(\mathrm{Ker}(f^2)) \leqslant 2.$$
D'où
$$1 \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f^2)) \leqslant 2.$$
On a donc $\mathrm{rg}(f) = 1$ ou 2.

► Raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathrm{rg}(f) = 1$. Puisque $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ et $f^2 \neq 0$, on a
$$\dim(\mathrm{Im}(f^2)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$$
et d'après l'inclusion précédente,
$$\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f).$$
Ainsi $f^2(E) = f(E)$ et donc
$$f^3(E) = f(f^2(E)) = f^2(E) = f(E)$$
ce qui est absurde car $f^3(E) = \{0\}$. On a donc,
$$\mathrm{rg}(f) = 2.$$

Remarque. On peut aussi utiliser le résultat de l'exercice **23.** qui prouve l'existence d'une « bonne » base de E, ie adaptée aux calculs où f intervient. ■

Solution 37.

1. *Supposons l'existence d'un projecteur p tel que $u = p \circ u - u \circ p$.*

   a. D'après les règles de calcul dans l'algèbre $\mathscr{L}(\mathrm{E})$,

   $$p \circ u = p \circ (p \circ u - u \circ p) = p^2 \circ u - p \circ u \circ p.$$

   Puisque p est un projecteur de E , $p^2 = p$ et donc après simplification par $p \circ u$,

   $$p \circ u \circ p = 0.$$

   Il s'agit du zéro de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, ie de l'application nulle de E dans E.

   b. D'après les règles de calcul dans l'algèbre $\mathscr{L}(\mathrm{E})$,

   $$u \circ p = (p \circ u - u \circ p) \circ p = p \circ u \circ p - u \circ p^2.$$

   Puisque p est un projecteur de E , $p^2 = p$ et puisque $p \circ u \circ p = 0$,

   $$2(u \circ p) = 0,$$

   ainsi $u \circ p = 0$.

   c. Puisque $u \circ p = 0$, on a $u = p \circ u - u \circ p = p \circ u$. Donc

   $$u^2 = (p \circ u)^2 = p \circ u \circ p \circ u,$$

   et par associativité de la composition des endomorphismes ,

   $$u^2 = (p \circ u \circ p) \circ u = 0 \circ u = 0.$$

2. *Supposons que $u^2 = 0$.*

   a. Pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$, $u\big(u(x)\big) = 0$, ie $u(x) \in \mathrm{Ker}(u)$. On a donc

   $$\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u).$$

   b. Puisque pour tout $x \in \mathrm{E}$, $u(x) \in \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{H} = \mathrm{Im}(q)$, on a

   $$q\big(u(x)\big) = u(x).$$

   De plus , $q(x) \in \mathrm{H} \subset \mathrm{Ker}(u)$, donc

   $$u\big(q(x)\big) = 0.$$

   Ainsi , pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$,

   $$u(x) = (q \circ u - u \circ q)(x),$$

   et donc $u = q \circ u - u \circ q$.

3. Notons $\mathscr{P}$ la proposition suivante : il existe un projecteur p de E tel que

   $$u = p \circ u - u \circ p.$$

   ► D'après l'étude entreprise à la question **1.** , $u^2 = 0$ est une condition *nécessaire* de $\mathscr{P}$.

   ► Supposons $u^2 = 0$. Posons $\mathrm{H} = \mathrm{Im}(u)$ et soit S un supplémentaire de H dans E. Les sous-espaces vectoriels H et S vérifient les hypothèses de la question **2.b** , donc en notant p la projection sur H parallèlement à S , on a $u = p \circ u - u \circ p$. La proposition $\mathscr{P}$ est donc vérifiée : la condition $u^2 = 0$ est une condition *suffisante* de $\mathscr{P}$.

Solution 38.

- Supposons $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Im}(f)$. Soit $x\in\mathrm{E}$, alors $f(x)\in\mathrm{Im}(f)$ donc $f(x)\in\mathrm{Ker}(f)$, cela entraine $f(f(x))=0$; donc $f^2=0$. De plus d'après la formule du rang
$$\dim(\mathrm{Ker}(f))+\mathrm{rg}(f)=n,$$
mais
$$\dim(\mathrm{Ker}(f))=\dim(\mathrm{Im}(f))=\mathrm{rg}(f),$$
ainsi $2\,\mathrm{rg}(f)=n$.
- Si $f^2=0$ alors $\mathrm{Im}(f)\subset\mathrm{Ker}(f)$ car pour $y\in\mathrm{Im}(f)$ il existe x tel que $y=f(x)$ et $f(y)=f^2(x)=0$. De plus si $2\,\mathrm{rg}(f)=n$ alors par la formule du rang
$$\dim(\mathrm{Ker}(f))=\mathrm{rg}(f)$$
c'est-à-dire
$$\dim(\mathrm{Ker}(f))=\dim(\mathrm{Im}(f)).$$
Nous savons donc que $\mathrm{Im}(f)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(f)$ mais ces espaces sont de même de dimension donc sont égaux :
$$\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Im}(f).$$

Solution 39.

1. On va montrer l'égalité par récurrence sur p. L'égalité est vraie au rang 0. Supposons la vraie au rang p.
$$\begin{aligned}\Phi^{p+1}(g)&=\Phi(\Phi^p(g))\\&=f\circ\left(\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}f^{p-k}\circ g\circ f^k\right)\\&\quad-\left(\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\left(\binom{p}{k}\right)f^{p-k}\circ g\circ f^k\right)\circ f\\&=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}f^{p-k+1}\circ g\circ f^k\\&\quad+\sum_{k=0}^{p}(-1)^{k+1}\binom{p}{k}f^{p-k}\circ g\circ f^{k+1}\end{aligned}$$
En réindexant la deuxième somme, on obtient :
$$\begin{aligned}\Phi^{p+1}(g)&=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}f^{p-k+1}\circ g\circ f^k\\&\quad+\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^k\binom{p}{k-1}f^{p-k+1}\circ g\circ f^k\\&=f^{p+1}\circ g+(-1)^{p+1}g\circ f^{p+1}\\&\quad+\sum_{k=1}^{p}\left(\binom{p}{k}+\binom{p}{k-1}\right)f^{p+1-k}\circ g\circ f^k\end{aligned}$$
En utilisant la formule du triangle de Pascal, on obtient enfin :
$$\Phi^{p+1}(g)=\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\binom{p+1}{k}f^{p+1-k}\circ g\circ f^k$$
Dans la formule écrite au rang $p=2n-1$, pour $0\leqslant k\leqslant p$, on a soit $k\geqslant n$, soit $p-k\geqslant n$ donc tous les termes de la somme précédente sont nuls. Φ est donc nilpotent d'indice inférieur ou égal à $2n-1$.

2. Soit $a \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, a$. a induit un isomorphisme $\tilde{a}$ de S sur $\mathrm{Im}\, a$. Soit T un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, a$. On pose $b(x) = \tilde{a}^{-1}(x)$ pour $x \in \mathrm{Im}\, a$ et $b(y) = 0$ pour $y \in \mathrm{T}$. Ainsi on a bien $a \circ b \circ a = a$.
Montrons que Φ est d'ordre $2n-1$ exactement. Pour $p = 2n-2$ et $0 \leqslant k \leqslant p$, on a soit $k \leqslant n$, soit $p-k \leqslant n$ sauf pour $k = n-1$. Ainsi
$$\Phi^{2n-2}(g) = (-1)^{n-1}\binom{2n-2}{n-1} f^{n-1} \circ g \circ f^{n-1}$$
D'après ce qui précéde, il existe $g_0 \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que
$$f^{n-1} \circ g_0 \circ f^{n-1} = f^{n-1}.$$
Par conséquent, $\Phi^{2n-2}(g_0) = f^{n-1} \neq 0$.

Solution 40.

1. On a clairement
$$\mathrm{F} = \mathrm{vect}(f_1, f_2)$$
où $f_1 = (1,0,0,0)$ et $f_2 = (0,1,0,-1)$. Les deux vecteurs n'étant pas colinéaires , F est un plan vectoriel de E. De même,
$$\mathrm{G} = \mathrm{vect}(g_1, g_2)$$
où $g_1 = (0,0,0,1)$ et $g_2 = (0,1,-1,0)$. Les deux vecteurs n'étant pas colinéaires, F est un plan vectoriel de E. De même,

2. Puisque F et G sont des plans vectoriels de E qui est de dimension quatre , F et G sont supplémentaires dans E *si et seulement si*
$$\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}.$$
Soit donc $(x, y, z, t) \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. On a
$$x = z = 0 = y + t = y + z,$$
ainsi $x = y = z = t = 0$.

3. Soit $\mathrm{X} = (x, y, z, t)$. La projection $p(\mathrm{X})$ de X sur F parallèlement à G est l'unique vecteur X_1 de F tel que $\mathrm{X} - \mathrm{X}_1$ appartienne à G. Or $\mathrm{X}_1 = \alpha f_1 + \beta f_2$ vérifie $\mathrm{X} - \mathrm{X}_1 \in \mathrm{G}$ *si et seulement si*
$$(x-\alpha, y-\beta, z, t+\beta) \in \mathrm{G},$$
ie $\alpha = x$ et $\beta = y + z$. On a donc ,
$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}_1 = (x, y+z, 0, -y-z),$$
et puisque $s = -id_{\mathrm{E}} + 2p$,
$$s(\mathrm{X}) = (x, y+2z, -z, -y-z-t).$$

Solution 41.

1. $\mathscr{A}$ et $\mathscr{N}$ sont deux ensembles non vides de E (ils contiennent tous deux la fonction nulle) et clairement stables par combinaison linéaire : ce sont deux sous-espaces vectoriels de E.

► Puisque toute fonction affine s'annulant en deux points distincts est la fonction nulle, $\mathscr{A} \cap \mathscr{N} = \{0\}$.

► Soit $f \in \mathrm{E}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons
$$a(x) = [f(1) - f(0)]x + f(0) \ \text{ et } \ n(x) = f(x) - a(x).$$
On a clairement $f = n + a$, $n \in \mathscr{N}$ et $a \in \mathscr{A}$ donc $\mathrm{E} \subset \mathscr{A} \oplus \mathscr{N}$ et puisque l'inclusion réciproque est triviale , $\mathrm{E} = \mathscr{A} \oplus \mathscr{N}$.
Remarque. Les formules de n et a s'obtiennent naturellement par Analyse-synthèse. ■

2. Il suffit de reprndre les calculs précédents ; la projection $p(f)$ de $f \in \mathrm{E}$ sur $\mathscr{A}$ parallèlement à $\mathscr{N}$ est

$$x \longmapsto [f(1) - f(0)]x + f(0).$$

3. Puisque $s = 2p - id_{\mathrm{E}}$, le symétrique $s(f)$ de f par rapport à $\mathscr{A}$ parallèlement à $\mathscr{N}$ est

$$x \longmapsto 2[f(1) - f(0)]x + 2f(0) - f(x).$$

Solution 42.

1. L'implication $\Leftarrow$ étant banale, nous ne détaillerons que la réciproque.

Supposons que $p \circ q + q \circ p = 0$. Alors,

$$p \circ (p \circ q + q \circ p) = p \circ 0 = 0$$

ainsi

$$p \circ q + p \circ q \circ p = 0.$$

De même,

$$(p \circ q + q \circ p) \circ p = 0 \circ p = 0,$$

c'est-à-dire $p \circ q \circ p + q \circ p = 0$. On a donc $p \circ q = q \circ q$ et puisque $p \circ q = -q \circ p$, on aboutit à $p \circ q = q \circ p = 0$.

2. Puisque $p + q$ est un endomorphisme de E, $p + q$ est un projecteur *si et seulement si*

$$(p + q) \circ (p + q) = p + q,$$

c'est-à-dire

$$p^2 + p \circ q + q^2 + q \circ p = p + q,$$

soit encore,

$$p + q + p \circ q + q \circ p = p + q,$$

et finalement ,

$$p \circ q + q \circ p = 0.$$

Or , d'après la question précédente ,

$$p \circ q + q \circ p = 0$$

si et seulement si

$$p \circ q = q \circ p = 0.$$

3. ► *Montrons que* $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$ par double inclusion.

⋆ Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. Alors $p(x) + q(x) = 0 + 0 = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(p + q)$.

⋆ Soit $x \in \mathrm{Ker}(p + q)$. On a alors $p(x) + q(x) = 0$ et donc $p(x) = -q(x)$. Ainsi $p(x) = -(p \circ q)(x) = 0$ et donc $p(x) = q(x) = 0$, ie $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

► *Montrons que* $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ par double inclusion.

⋆ Soit $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$, il existe deux vecteurs x et x' tels que $y = p(x) + q(x')$. Alors $(p + q)(y) = p(x) + q(x') = y$ ainsi $y \in \mathrm{Im}(p + q)$.

⋆ Soit $y \in \mathrm{Im}(p + q)$. Alors $y = (p + q)(y) = p(y) + q(y)$, d'où $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

► *Montrons que la somme précédente est directe.*

Soit $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Alors $y = p(y) = q(y)$ et $y = (q \circ p)(y) = 0$, ainsi $\mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$.

Solution 43.

1. L'application ψ est un endomorphisme de E en tant que composée de deux endomorphismes de E. Prouvons que $\psi \circ \psi = \psi$.

$$\begin{aligned}\psi \circ \psi &= (p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q \\ &\quad (\text{ par associativité de la loi } \circ\,) \\ &= p \circ (p \circ q) \circ q \\ &\quad (\text{ car } p \circ q = q \circ p \\ &= (p \circ p) \circ (q \circ q) \\ &\quad (\text{ par associativité de la loi } \circ\,) \\ &= p \circ q = \psi \\ &\quad (\text{ car } p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs })\end{aligned}$$

2. Procédons par double inclusion.

► *Prouvons que* $\mathrm{Im}(\psi) \subset \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.

Pour tout vecteur x de E ,

$$\psi(x) = p(q(x)) \in \mathrm{Im}(p) \text{ et } \psi(x) = q(p(x)) \in \mathrm{Im}(q),$$

et ainsi $\psi(x) \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.

► *Prouvons que* $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(\psi)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$, puisque p et q sont des projecteurs, $y = p(y) = q(y)$ et donc $y = p((q(y)) = \psi(y) \in \mathrm{Im}(\psi)$.

Remarque. On a utilisé une propriété des projecteurs qui abrège bien des démonstrations : si γ est un projecteur de E, $\gamma(y) = y$ *si et seulement si* $y \in \mathrm{Im}(\gamma)$. ■

3. Procédons par double inclusion.

► *Prouvons que* $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$.

Soient $x_1 \in \mathrm{Ker}(p)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(q)$, on a

$$\begin{aligned}\psi(x_1 + x_2) &= \psi(x_1) + \psi(x_2) \\ &= q\big(p(x)\big) + p\big(q(x)\big) \\ &= q(0) + p(0) = 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

et ainsi $x_1 + x_2 \in \mathrm{Ker}(\psi)$.

► *Prouvons que* $\mathrm{Ker}(\psi) \subset \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(\psi)$. Posons

$$x_1 = q(x) \text{ et } x_2 = x - q(x).$$

On a bien $x = x_1 + x_2$, de plus

$$p(x_1) = \psi(x) = 0$$

et

$$q(x_2) = q(x) - q^2(x) = 0$$

car q est un projecteur de E.

Solution 44.

$$p^2 = \frac{1}{|A|^2}\sum_{g\in A}\sum_{f\in A} g\circ f$$

Fixons g dans A et remarquons que l'application

$$\phi_g : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ f & \longmapsto & g\circ f \end{array}$$

est bien définie puisque par stabilité de A, $g\circ f\in A$ pour tous $f,g\in A$. ϕ_g est injective car g est inversible. Comme les ensembles de départ et d'arrivée sont de même cardinal fini, ϕ_g est bijective et

$$\sum_{f\in A} g\circ f = \sum_{f\in A} f.$$

Et donc $p^2 = p$.

Solution 45.

Injectivité : Soit $x\in\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}+\lambda p)$. Ainsi $x+\lambda p(x)=0$. En composant par p, on obtient $(1+\lambda)p(x)=0$.

- Si $\lambda\neq-1$ alors $p(x)=0$ et donc $x=0$. p est donc injectif.
- Si $\lambda=-1$ alors $\operatorname{Im} p\subset\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}+\lambda p)$. Si $\operatorname{Im} p\neq\{0\}$, alors $\mathrm{Id}+\lambda p$ n'est pas injectif. Si $\operatorname{Im} p=\{0\}$, alors $p=0$ et $\mathrm{Id}+\lambda p$ est évidemment injectif pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$.

Surjectivité : Soit $y\in\operatorname{Im}(\mathrm{Id}+\lambda p)$. Il existe $x\in E$ tel que $y=x+\lambda p(x)$. En composant par p, on obtient $p(y)=(1+\lambda)p(x)$.

- Si $\lambda\neq-1$, $p(x)=\frac{1}{1+\lambda}p(y)$ et donc $x=y-\frac{\lambda}{1+\lambda}p(y)$. Ainsi $\mathrm{Id}+\lambda p$ est surjectif. En effet, pour tout $y\in E$, $y=(\mathrm{Id}+\lambda p)\left(y-\frac{\lambda}{1+\lambda}p(y)\right)$.
- Si $\lambda=-1$, $\operatorname{Im}(\mathrm{Id}+\lambda p)\subset\operatorname{Ker} p$. Si $\operatorname{Ker} p\neq E$, alors $\mathrm{Id}+\lambda p$ n'est pas surjectif. Si $\operatorname{Ker} p=E$, alors $p=0$ et $\mathrm{Id}+\lambda p$ est évidemment injectif pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$.

En conclusion, si $p=0$, $\mathrm{Id}+\lambda p$ est un automorphisme pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$. Sinon $\mathrm{Id}+\lambda p$ est un automorphisme pour $\lambda\neq-1$.

Solution 46.

1. En utilisant le fait que $p\circ q=q\circ p$, $p^2=p$ et $q^2=q$, on a :
$$\begin{aligned}(p\circ q)^2 &= p\circ q\circ p\circ q = p\circ p\circ p\circ q\circ q = p\circ q\\ (p+q-p\circ q)^2 &= (p+q)^2+(p\circ q)^2-(p+q)\circ p\circ q - p\circ q\circ(p+q)\\ &= p^2+q^2+p\circ q+q\circ p+p\circ q-p^2\circ q-q\circ p\circ q-p\circ q\circ p-p\circ q^2 = p+q-p\circ q\end{aligned}$$

2. Soit $x\in\operatorname{Ker}(p\circ q)$. On pose $u=x-p(x)$ et $v=p(x)$. On a alors $p(u)=p(x)-p^2(x)=0$ car $p=p^2$ et $q(v)=q\circ p(x)=p\circ q(x)$ car $x\in\operatorname{Ker} p\circ q$. Donc $x=u+v\in\operatorname{Ker} p+\operatorname{Ker} q$. Ainsi $\operatorname{Ker}(p\circ q)\subset\operatorname{Ker} p+\operatorname{Ker} q$.
Soit $x\in\operatorname{Ker} p+\operatorname{Ker} q$. Il existe donc $u\in\operatorname{Ker} p$ et $v\in\operatorname{Ker} q$ tels que $x=u+v$. On a alors $p\circ q(x)=p\circ q(u)+p\circ q(v)=q\circ p(u)+p\circ q(v)=0$ car $u\in\operatorname{Ker} p$ et $v\in\operatorname{Ker} q$. Ainsi $\operatorname{Ker} p+\operatorname{Ker} q\subset\operatorname{Ker}(p\circ q)$.
On a $\operatorname{Im}(p\circ q)\subset\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im}(p\circ q)=\operatorname{Im}(q\circ p)\subset\operatorname{Im} q$ donc $\operatorname{Im}(p\circ q)\subset\operatorname{Im} p\cap\operatorname{Im} q$.
Soit $y\in\operatorname{Im} p\cap\operatorname{Im} q$. Alors $q(y)=y$ car $y\in\operatorname{Im} q$ puis $p\circ q(y)=p(y)=y$ car $y\in\operatorname{Im} p$. Donc $y\in\operatorname{Im} p\circ q$. Ainsi $\operatorname{Im} p\cap\operatorname{Im} q\subset\operatorname{Im}(p\circ q)$.

3. On a toujours $\operatorname{Ker} p\cap\operatorname{Ker} q\subset\operatorname{Ker}(p+q-p\circ q)$. Soit $x\in\operatorname{Ker}(p+q-p\circ q)$. On a donc $p(x)+q(x)=p\circ q(x)$. En composant par p, on obtient $p(x)=0$. En composant par q, on obtient $q(x)=0$. Donc $x\in\operatorname{Ker} p\cap\operatorname{Ker} q$. Ainsi $\operatorname{Ker}(p+q-p\circ q)\subset\operatorname{Ker} p\cap\operatorname{Ker} q$.
On a toujours $\operatorname{Im}(p+q-p\circ q)\subset\operatorname{Im} p+\operatorname{Im} q$. Soit $x\in\operatorname{Im} p+\operatorname{Im} q$. Il existe donc $u\in\operatorname{Im} p$ et $v\operatorname{Im} q$ tels que $x=u+v$. On a alors $p(x)=p(u)+p(v)=u+p(v)$ car $u\in\operatorname{Im} p$, $q(x)=q(u)+q(v)=q(u)+v$ car $v\in\operatorname{Im} q$ et $p\circ q(x)=q\circ p(u)+p\circ q(v)=q(u)+p(v)$ pour les mêmes raisons. Donc $(p+q-p\circ q)(x)=u+v=x$. Donc $x\in\operatorname{Im}(p+q-p\circ q)$. Ainsi $\operatorname{Im} p+\operatorname{Im} q\subset\operatorname{Im}(p+q-p\circ q)$.

Solution 47.

1. Comme $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n) = H_1 + H_2$, tout élément de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ – en particulier Id – peut s'écrire comme la somme d'un élément de H_1 et d'un élément de H_2.

2. On compose l'identité $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}$ par p_1 une fois à gauche et une fois à droite pour obtenir :
$$p_1^2 + p_1 \circ p_2 = p_1 \qquad\qquad p_1^2 + p_2 \circ p_1 = p_1$$
On additionne ces deux égalités de sorte que
$$2p_1^2 + p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = 2p_1$$
Mais comme $p_1 \in H_1$ et $p_2 \in H_2$, $p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = 0$. Ainsi $2p_1^2 = 2p_1$ et finalement $p_1^2 = p_1$. Donc p_1 est un projecteur.
Quitte à échanger p_1 et p_2, on démontre de même que p_2 est un projecteur.

3. Soit $f \in H_1$. On a donc $f \circ p_2 + p_2 \circ f = 0$. Comme p_2 est un projecteur, il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de p_2 est $P_2 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \hline \mathbf{0}_{n-r,r} & \mathbf{0}_r \end{array}\right)$ où $r = \operatorname{rg} p_2$. Notons $F = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ la matrice de f dans cette même base $\mathscr{B}$ avec $A \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C \in \mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_{n-r}(\mathbb{R})$. On a donc $FP_2 + P_2F = 0$, ce qui entraîne $A = B = C = 0$. Par conséquent, $F = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_r & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \hline \mathbf{0}_{n-r,r} & D \end{array}\right)$.
Notons Φ l'isomorphisme qui associe à un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sa matrice dans la base $\mathscr{B}$. On a donc $\Phi(H_1) \subset G$ où G est le sous-espace vectoriel des matrices de la forme $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_r & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \hline \mathbf{0}_{n-r,r} & D \end{array}\right)$ où $D \in \mathscr{M}_{n-r}(\mathbb{R})$. Par conséquent $\dim H_1 \leqslant \dim G$. Or $\dim G = (n-r)^2$.
Ainsi $\dim H_1 \leqslant (n-r)^2 = (n - \operatorname{rg} p_2)^2$.
On prouve de la même manière que $\dim H_2 \leqslant (n - \operatorname{rg} p_1)^2$.

4. Comme $H_1 \oplus H_2 = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $\dim H_1 + \dim H_2 = n^2$. On déduit de la question précédente que
$$n^2 \leqslant (n - \operatorname{rg} p_1)^2 + (n - \operatorname{rg} p_2)^2$$
Comme $n - \operatorname{rg} p_1 \geqslant 0$ et $n - \operatorname{rg} p_2 \geqslant 0$,
$$(n - \operatorname{rg} p_1)^2 + (n - \operatorname{rg} p_2)^2 \leqslant \left[(n - \operatorname{rg} p_1) + (n - \operatorname{rg} p_2)\right]^2 = \left[2n - (\operatorname{rg} p_1 + \operatorname{rg} p_2)\right]^2$$
On sait que $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}$. Donc $\operatorname{rg}(p_1 + p_2) = n$. Or c'est un exercice classique que de montrer que $\operatorname{rg} p_1 + \operatorname{rg} p_2 \geqslant \operatorname{rg}(p_1 + p_2)$. On en déduit que $\operatorname{rg} p_1 + \operatorname{rg} p_2 \geqslant n$. De plus $\operatorname{rg} p_1 + \operatorname{rg} p_2 \leqslant 2n$ donc
$$\left[2n - (\operatorname{rg} p_1 + \operatorname{rg} p_2)\right]^2 \leqslant n^2$$
Finalement,
$$n^2 \leqslant (n - \operatorname{rg} p_1)^2 + (n - \operatorname{rg} p_2)^2 \leqslant \left[2n - (\operatorname{rg} p_1 + \operatorname{rg} p_2)\right]^2 \leqslant n^2$$
On en déduit que $\left[2n - (\operatorname{rg} p_1 + \operatorname{rg} p_2)\right]^2 = n^2$ i.e. $\operatorname{rg} p_1 + \operatorname{rg} p_2 = n$ et que $n^2 = (n - \operatorname{rg} p_1)^2 + (n - \operatorname{rg} p_2)^2$. Notons $r = \operatorname{rg} p_1$. On a alors $n^2 = (n-r)^2 + r^2$ i.e. $r(n-r) = 0$. Deux cas se présentent.
   - Si $r = 0$, alors $p_1 = 0$ et donc $p_2 = \mathrm{Id}$. On a alors $\dim H_1 \leqslant (n - \operatorname{rg} p_2)^2 = 0$. Donc $H_1 = \{0\}$. Par conséquent $H_2 = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.
   - Si $r = n$, alors $p_1 = \mathrm{Id}$. On a alors $\dim H_2 \leqslant (n - \operatorname{rg} p_1)^2 = 0$. Donc $H_2 = \{0\}$. Par conséquent $H_1 = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

   Réciproquement, on vérifie que ces deux couples (H_1, H_2) vérifient bien les hypothèses de l'énoncé.

Solution 48.

1. On remarque que $\frac{3}{2}u - \frac{1}{2}u^2 = \mathrm{Id}_E$ donc, en posant $v = \frac{3}{2}\mathrm{Id}_E - \frac{1}{2}u$, on a $v \circ u = v \circ u = \mathrm{Id}_E$. Ainsi $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $u^{-1} = v = \frac{3}{2}\mathrm{Id}_E - \frac{1}{2}u$.

2. D'une part
$$f\circ g=(u-\mathrm{Id}_E)\circ(2\,\mathrm{Id}_E-u)=-u^2+3u-2\,\mathrm{Id}_E=0$$
D'autre part
$$g\circ f=(2\,\mathrm{Id}_E-u)\circ(u-\mathrm{Id}_E)=-u^2+3u-2\,\mathrm{Id}_E=0$$

3. D'une part
$$f^2=u^2-2u+\mathrm{Id}_E=(u^2-3u+2\,\mathrm{Id}_E)+u-\mathrm{Id}_E=u-\mathrm{Id}_E=f$$
D'autre part
$$g^2=u^2-4u+4\,\mathrm{Id}_E=(u^2-3u+2\,\mathrm{Id}_E)+2\,\mathrm{Id}_E-u=2\,\mathrm{Id}_E-u=g$$
Ainsi f et g sont des projecteurs.

4. Puisque f est un projecteur, $\mathrm{Im}\,f=\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Ker}(u-2\,\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Ker}\,g$.
Puisque g est un projecteur, $\mathrm{Im}\,g=\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E-u)=\mathrm{Ker}\,f$.

5. Puisque f est un projecteur, $E=\mathrm{Ker}\,f\oplus\mathrm{Im}\,f$. Or $\mathrm{Im}\,f=\mathrm{Ker}\,g$ donc $E=\mathrm{Ker}\,f\oplus\mathrm{Ker}\,g$.
Or on a également $\mathrm{Ker}\,f=\mathrm{Im}\,g$ donc $E=\mathrm{Im}\,g\oplus\mathrm{Im}\,f$.

Solution 49.

1. Comme E est de dimension finie, $\mathrm{vect}(u)$ admet un supplémentaire H_u dans E. Comme $E=\mathrm{vect}(u)\oplus H_u$, $\dim E=\dim\mathrm{vect}(u)+\dim H_u$. Comme $u\neq 0_E$, $\dim\mathrm{vect}(u)=1$ et donc $\dim H_u=n-1$.

2. On a $f\circ p_u=p_u\circ f$. Ainsi $f(p_u(u))=p_u(f(u))$. De plus, $p_u(u)=u$ puisque $u\in\mathrm{vect}(u)$. Donc $f(p_u(u))=f(u)$. Par ailleurs $\mathrm{Im}\,p_u=\mathrm{vect}(u)$ donc $p_u(f(u))\in\mathrm{vect}(u)$. Il existe donc $\lambda_u\in\mathbb{K}$ tel que $p_u(f(u))=\lambda_u u$. Finalement, $f(u)=\lambda_u u$.

3. Comme u et v ne sont pas colinéaires, $u+v\neq 0_E$. Il existe donc $\lambda_{u+v}\in\mathbb{K}$ tel que $f(u+v)=\lambda_{u+v}(u+v)$. Mais on a également $f(u+v)=f(u)+f(v)=\lambda_u u+\lambda_v v$. On en déduit $(\lambda_u-\lambda_{u+v})u+(\lambda_v-\lambda_{u+v})v=0_E$. Les vecteurs u et v n'étant pas colinéaires, la famille (u,v) est libre et donc $\lambda_u-\lambda_{u+v}=\lambda_v-\lambda_{u+v}=0$. On en déduit que $\lambda_u=\lambda_v=\lambda_{u+v}$.

4. Comme v est non nul, il existe $\lambda_v\in\mathbb{K}$ tel que $f(v)=\lambda_v v$. Par ailleurs, u et v sont colinéaires et u est non nul, donc il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $v=\lambda u$. Donc $f(v)=\lambda f(u)=\lambda\lambda_u u=\lambda_u v$. Ainsi $\lambda_v v=\lambda_u v$. Puisque v est non nul, $\lambda_u=\lambda_v$.

5. Pour tout $u\in E\setminus\{0_E\}$, il existe $\lambda_u\in\mathbb{K}$ tel que $f(u)=\lambda_u u$. Mais ce qui précède montre que tous les λ_u pour $u\in E\setminus\{0_E\}$ ont la même valeur commune λ. On a donc $f(u)=\lambda u$ pour tout $u\in E\setminus\{0_E\}$ et bien entendu pour $u=0_E$ également. f est donc nécessairement une homothétie. Réciproquement, on vérifie que toute homothétie commute avec tous les endomorphismes.

Solution 50.

On vérifie aisément que $s\in\mathscr{L}(E)$ et $s^2=\mathrm{Id}_E$. s est donc une symétrie. De plus, $\mathscr{P}=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)$ est l'ensemble des applications paires tandis que $\mathscr{I}=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)$ est l'ensemble $\mathscr{P}$ des applications paires. s est la symétrie par rapport à $\mathscr{P}$ parallélement à $\mathscr{I}$.

Solution 51.

1. Puisque pour tout vecteur x de E :
$$x=f(x)+g(x),$$
on a $x\in\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$. Ainsi
$$E\subset\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g).$$

De plus

$$\begin{aligned} n &= \dim\big((f+g)(\mathrm{E})\big) \\ &= \dim\big(f(\mathrm{E})\big)+\dim\big(g(\mathrm{E})\big)-\dim\big(f(\mathrm{E})\cap g(\mathrm{E})\big) \\ &= n-\dim\big(f(\mathrm{E})\cap g(\mathrm{E})\big) \end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g)=\{0\}.$$

Et finalement

$$\mathrm{E}=\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Im}(g).$$

2. Puisque $g=f-id_{\mathrm{E}}$, on a $f\circ g=g\circ f$. Ainsi $\forall x\in\mathrm{E}$,

$$f\big(g(x)\big)=g\big(f(x)\big)\in\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g)=\{0\}$$

et donc $f\circ g=g\circ f=0$. Puisque

$$f=f\circ(f+g)=f^2+f\circ g,$$

on a $f\circ f=f$. De même pour g.

Solution 52.

1. Notons $n=\dim(\mathrm{E})$. Posons $h=f\big|_{\mathrm{Im}(g)}$. L'application h est linéaire en tant que restriction d'une application linéaire de E à un sev de E. Il est clair que $\mathrm{Im}(h)=\mathrm{Im}(f\circ g)$ et $\mathrm{Ker}(h)=\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(g)$. Appliquons le théorème du rang à h :

$$\dim(\mathrm{Im}(g))=\mathrm{rg}(g)=\mathrm{rg}(f\circ g)+\dim(\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(g))$$

Or, d'après le théorème du rang appliqué à g et $f\circ g$:

$$\mathrm{rg}(g)=n-\dim(\mathrm{Ker}(g))$$

et

$$\mathrm{rg}(f\circ g)=n-\dim(\mathrm{Ker}(f\circ g)).$$

On en déduit que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f\circ g))=\dim(\mathrm{Ker}(g))+\dim(\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(g)).$$

Comme $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(g)\subset\mathrm{Ker}(f)$, on en l'inégalité

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(g))\leqslant\dim(\mathrm{Ker}(f))$$

puis

$$\dim(\mathrm{Ker}(f\circ g))\leqslant\dim(\mathrm{Ker}(f))+\dim(\mathrm{Ker}(g)).$$

2. Revprenons les calculs précdents : il y a égalité *si et seulement si*

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(g))=\dim(\mathrm{Ker}(f)),$$

et comme $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(g)\subset\mathrm{Ker}(f)$, cela équivaut également à $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(g)=\mathrm{Ker}(f)$, soit encore $\mathrm{Ker}(f)\subset\mathrm{Im}(g)$.

Solution 53.

► **Solution 1**
Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E. On définit l'application linéaire

$$\Psi: \begin{array}{ccc} \operatorname{Im}\Phi & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathrm{S}, \operatorname{Im} v) \\ g & \longmapsto & g_{|\mathrm{S}}^{|\operatorname{Im} v} \end{array}$$

Cette application est bien définie car, pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\operatorname{Im}(v \circ f \circ u) \subset \operatorname{Im} v$. Montrons que c'est un isomorphisme.
Soit $g \in \operatorname{Ker}\Psi$. Puisque $g \in \operatorname{Im}\Phi$, il existe $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $g = v \circ f \circ u$. Comme $g \in \operatorname{Ker}\Psi$, $g_{|\mathrm{S}} = 0$. Mais on a aussi évidemment $g_{|\operatorname{Ker} u} = 0$. Puisque $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} u \oplus \mathrm{S}$, $g = 0$ et Ψ est injective.
On sait que u induit un isomorphisme $\tilde{u}$ de S sur $\operatorname{Im} u$. De même, v induit un isomorphisme $\tilde{v}$ de T sur $\operatorname{Im} v$ où T est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} v$ dans E. Soit $\tilde{g} \in \operatorname{Im}\Psi$. On définit f de la manière suivante : $f(x) = \tilde{v}^{-1} \circ \tilde{g} \circ \tilde{u}^{-1}(x)$ pour $x \in \operatorname{Im} u$ et $f = 0$ sur un supplémentaire quelconque de $\operatorname{Im} u$. On a alors bien $\Psi(v \circ f \circ u) = \tilde{g}$, ce qui montre que Ψ est surjective.
Par conséquent, $\operatorname{rg}\Phi = \dim \mathcal{L}(\mathrm{S}, \operatorname{Im} v) = \operatorname{rg} u \operatorname{rg} v$.

► **Solution 2**
Notons S un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$ dans E et T un supplémentaire de $\operatorname{Ker} v$ dans E. On pose

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}), \mathrm{S} \subset \operatorname{Ker} f, \operatorname{Im} f \subset \mathrm{T}\}.$$

On vérifie que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrons que Φ induit un isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $\operatorname{Im}\Phi$.
Soit $f \in \mathcal{F} \cap \operatorname{Ker}\Phi$. Par définition de $\mathcal{F}$, $f_{|\mathrm{S}} = 0$. De plus, $v \circ f \circ u = 0$ signifie que $f(\operatorname{Im} u) \subset \operatorname{Ker} v$. Mais, par définition de $\mathcal{F}$, $\operatorname{Im} f \subset \mathrm{T}$. Donc $f(\operatorname{Im} u) \subset \operatorname{Ker} v \cap \mathrm{T} = \{0\}$. D'où $f_{|\operatorname{Im} u} = 0$. Comme $\mathrm{E} = \mathrm{S} \oplus \operatorname{Im} u$, $f = 0$ et la restriction de Φ à $\mathcal{F}$ est injective.
Montrons que $\Phi(\mathcal{F}) = \operatorname{Im}\Phi$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Notons π_1 la projection de E sur $\operatorname{Im} u$ parallèlement à S et π_2 la projection de E sur T parallèlement à $\operatorname{Ker} v$. On vérifie que $\pi_2 \circ f \circ \pi_1 \in \mathcal{F}$. De plus, $\pi_1 \circ u = u$ et $v \circ \pi_2 = v$. Donc $v \circ (\pi_2 \circ f \circ \pi_1) \circ u = v \circ f \circ u$ i.e. $\Phi(\pi_2 \circ f \circ \pi_1) = \Phi(f)$.
Ainsi Φ induit un isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $\operatorname{Im}\Phi$ et donc $\operatorname{rg}\Phi = \dim \mathcal{F}$. Or $\mathcal{F}$ est isomorphe à $\mathcal{L}(\operatorname{Im} u, \mathrm{T})$. De plus, v induit un isomorphisme de T sur $\operatorname{Im} v$ donc $\dim \mathrm{T} = \operatorname{rg} v$. Ainsi $\operatorname{rg}\Phi = \dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{L}(\operatorname{Im} u, \mathrm{T}) = \operatorname{rg} u \operatorname{rg} v$.

► **Solution 3**
Commençons par montrer le lemme suivant : si $w \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est de rang p alors il existe deux bases (e_i) et (ε_i) de E telles que

$$\operatorname{mat}_{(e_i),(\varepsilon_i)}(w) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_{p,n-p} \\ \mathbb{O}_{n-p,p} & \mathbb{O}_{p,p} \end{pmatrix}$$

où n est la dimension de E. En effet, soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} w$. On se donne une base $(e_1, \dots, e_p)$ de S et une base $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ de $\operatorname{Ker} v$. Posons $\varepsilon_i = w(e_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. Comme w induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} w$, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une base de $\operatorname{Im} w$ qu'on complète en une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E. La matrice de w dans ces bases est bien de la forme voulue.
Notons $p = \operatorname{rg} u$ et $q = \operatorname{rg} v$. Notons $(e_i), (\varepsilon_i)$ et $(e'_i), (\varepsilon'_i)$ les bases définies dans le lemme correspondant respectivement à u et v. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{M} = \operatorname{mat}_{(\varepsilon_i),(e'_i)}(f)$. Alors $\operatorname{mat}_{(e_i),(\varepsilon'_i)}(v \circ f \circ u)$ est la sous-matrice de M $(m_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant q}$. Ainsi $\operatorname{Im}\Phi$ est isomorphe à $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et est donc de dimension $pq = \operatorname{rg} u \operatorname{rg} v$.

Solution 54.

D'après le théorème du rang

$$\operatorname{rg}(h \circ g) = \operatorname{rg}(h_{|\operatorname{Im} g}) = \operatorname{rg} g - \dim(\operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} g)$$
$$\operatorname{rg}(h \circ g \circ f) = \operatorname{rg}(h_{|\operatorname{Im} g \circ f}) = \operatorname{rg}(g \circ f) - \dim(\operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} g \circ f)$$

ou encore

$$\dim(\operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} g) = \operatorname{rg} g - \operatorname{rg}(h \circ g)$$
$$\dim(\operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} g \circ f) = \operatorname{rg}(g \circ f) - \operatorname{rg}(h \circ g \circ f)$$

Or $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$ donc $\operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} g$ et donc

$$\dim(\operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} g \circ f) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} g)$$

On en déduit que
$$\mathrm{rg}(g\circ f)-\mathrm{rg}(h\circ g\circ f)\leqslant \mathrm{rg}\, g-\mathrm{rg}(h\circ g)$$
ce qui s'écrit encore
$$\mathrm{rg}(g\circ f)+\mathrm{rg}(h\circ g)\leqslant \mathrm{rg}(h\circ g\circ f)+\mathrm{rg}(g)$$

Solution 55.

1. Montrons que $\mathrm{Im}(f+g)\subset \mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g$. Soit $y\in\mathrm{Im}(f+g)$. Il existe donc $x\in\mathrm{E}$ tel que $y=(f+g)(x)=f(x)+g(x)$. Ainsi $y\in\mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g$. Ainsi
$$\mathrm{rg}(f+g)=\dim\mathrm{Im}(f+g)=\dim(\mathrm{Im}\, f)+\dim(\mathrm{Im}\, g)\leqslant\dim\mathrm{Im}\, f+\dim\mathrm{Im}\, g=\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)$$
En appliquant l'inégalité précédente à $f+g$ et $-g$, on obtient
$$\mathrm{rg}(f)=\mathrm{rg}(f+g+(-g))\leqslant\mathrm{rg}(f+g)+\mathrm{rg}(-g)$$
On montre aisément que $\mathrm{Im}(-g)=\mathrm{Im}(g)$ donc $\mathrm{rg}(-g)=\mathrm{rg}(g)$. On en déduit que
$$\mathrm{rg}(f)-\mathrm{rg}(g)\leqslant\mathrm{rg}(f+g)$$
Les endomorphismes f et g jouant des rôles symétriques, on a aussi
$$\mathrm{rg}(g)-\mathrm{rg}(f)\leqslant\mathrm{rg}(f+g)$$
et donc
$$|\,\mathrm{rg}(f)-\mathrm{rg}(g)|\leqslant\mathrm{rg}(f+g)$$

2. On a prouvé à la première question que
$$\dim\mathrm{Im}(f+g)\leqslant\dim(\mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g)\leqslant\dim(\mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g)$$
Supposons que $\mathrm{rg}(f+g)=\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)$. Alors
$$\dim\mathrm{Im}(f+g)=\dim(\mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g)=\dim(\mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g)$$
D'après la formule de Grassmann,
$$\dim(\mathrm{Im}\, f\cap\mathrm{Im}\, g)=\dim(\mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g)-\dim(\mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g)=0$$
Ainsi $\mathrm{Im}\, f\cap\mathrm{Im}\, g=\{0_{\mathrm{F}}\}$.
On a prouvé à la première question que $\mathrm{Im}(f+g)\subset\mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g$. Comme $\dim\mathrm{Im}(f+g)=\dim(\mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g)$ donc $\mathrm{Im}(f+g)=\mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g$. Montrons alors que $\mathrm{E}=\mathrm{Ker}\, f+\mathrm{Ker}\, g$. Il est évident que $\mathrm{Ker}\, f+\mathrm{Ker}\, g\subset\mathrm{E}$. Soit alors $x\in\mathrm{E}$. Alors $f(x)\in\mathrm{Im}\, f\subset\mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g=\mathrm{Im}(f+g)$. Il existe donc $a\in\mathrm{E}$ tel que $f(x)=(f+g)(a)=f(a)+g(a)$. Alors $f(x-a)=g(a)\in\mathrm{Im}\, f\cap\mathrm{Im}\, g=\{0_{\mathrm{F}}\}$. On en déduit que $f(x-a)=g(a)=0$, c'est-à-dire que $x-a\in\mathrm{Ker}\, f$ et $a\in\mathrm{Ker}\, g$. Ainsi $x=(x-a)+a\in\mathrm{Ker}\, f+\mathrm{Ker}\, g$. Par double inclusion, $\mathrm{E}=\mathrm{Ker}\, f+\mathrm{Ker}\, g$.
Supposons maintenant que $\mathrm{Im}\, f\cap\mathrm{Im}\, g=\{0_{\mathrm{F}}\}$ et $\mathrm{E}=\mathrm{Ker}\, f+\mathrm{Ker}\, g$. On va d'abord prouver que $\mathrm{Im}(f+g)=\mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g$. L'inclusion $\mathrm{Im}(f+g)\subset\mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g$ est toujours valable. Soit donc $y\in\mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g$. Il existe donc $(u,v)\in\mathrm{E}^2$ tel que $y=f(u)+g(v)$. Comme $\mathrm{E}=\mathrm{Ker}\, f+\mathrm{Ker}\, g$, il existe $(a,b)\in\mathrm{Ker}\, f\times\mathrm{Ker}\, g$ et $(c,d)\in\mathrm{Ker}\, f\times\mathrm{Ker}\, g$ tel que $u=a+b$ et $v=c+d$. Alors
$$y=f(a+b)+g(c+d)=f(a)+f(b)+g(c)+g(d)=f(b)+g(c)$$
Or $g(b)=f(c)=0_{\mathrm{F}}$ donc
$$y=f(b)+f(c)+g(b)+g(c)=(f+g)(b+c)\in\mathrm{Im}(f+g)$$
Par double inclusion, $\mathrm{Im}(f+g)=\mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g$ puis
$$\mathrm{rg}(f+g)=\dim\mathrm{Im}(f+g)=\dim(\mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g)=\dim\mathrm{Im}\, f+\dim\mathrm{Im}\, g-\dim(\mathrm{Im}\, f\cap\mathrm{Im}\, g)=\mathrm{rg}\, f+\mathrm{rg}\, g$$
puisque $\mathrm{Im}\, f\cap\mathrm{Im}\, g=\{0_{\mathrm{F}}\}$.

Solution 56.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$. On a d'une part :
$$f(\lambda x + \mu y) = \varphi(\lambda x + \mu y)$$
et d'autre part :
$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu g(y) = (\lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y))u$$
Comme on a $u \neq 0_E$, on en déduit $\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$. Ainsi u est bien une forme linéaire sur E.
De plus, pour tout $x \in E$,
$$f^2(x) = f(\varphi(x)u) = \varphi(x)f(u) = \varphi(x)\varphi(u)u = \varphi(u)\varphi(x)u = \varphi(u)f(x)$$
Le scalaire λ recherché est donc $g(u)$.

Solution 57.

1. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$. Complétons cette base avec un vecteur e_n. On sait alors que $\varphi(e_n) \neq 0$ et $\psi(e_n) \neq 0$. Soit $\xi \in E^*$ défini par $\xi = \psi - \lambda\varphi$ avec $\lambda = \frac{\psi(e_n)}{\varphi(e_n)}$. On a immédiatement, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\xi(e_i) = 0$. Donc ξ est identiquement nul et $\psi = \lambda\varphi$.
2. On a vu qu'il existait $\varphi \in E^*$ tel que $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\mathrm{Ker}(\lambda\varphi) = H$ si $\lambda \neq 0$ et $\mathrm{Ker}(\lambda\varphi) = E$ si $\lambda = 0$. Dans tous les cas, $H \subset \mathrm{Ker}(\lambda\varphi)$. Ainsi $\mathrm{vect}(\varphi) \subset D(H)$.
φ est non nul sinon on aurait $\mathrm{Ker}\,\varphi = E \neq H$. Soit $\psi \in D(H)$. Si ψ est nul, alors $\psi \in \mathrm{vect}(\varphi)$. Sinon, la question précédente montre qu'on a également $\psi \in \mathrm{vect}(\varphi)$. Ainsi $D(H) \subset \mathrm{vect}(\varphi)$.
Par double inclusion, $D(H) = \mathrm{vect}(\varphi)$. Comme φ est non nul, $\dim D(H) = 1$.
3. **a.** $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E donc de dimension $n - 1 \geqslant 1$ puisque $n \geqslant 2$. Il contient donc un vecteur non nul.
On vérifie d'abord que f est un endomorphisme de E. Or, puisque $u \neq 0_E$,
$$x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \iff \varphi(x)u = 0_E \iff x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$$
Donc la base de f est $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
De plus pour tout $x \in E$, $f(x) - x = \varphi(x)u \in \mathrm{vect}(u)$. Ainsi $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{vect}(u)$. Mais d'après le théorème du rang $\mathrm{rg}(f - \mathrm{Id}_E) = 1$ et donc la direction de f est $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{vect}(u)$.
b. Par le théorème du rang $\mathrm{rg}(f - \mathrm{Id}_E) = 1$ donc il existe un vecteur u non nul de E tel que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{vect}(u)$.
Pour tout $x \in E$, $f(x) - x \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{vect}(u)$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) - x = \lambda u$. Notons $\lambda = \varphi(x)$. Soient $(x, y) \in E^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $f(ax + by) - (ax + by) = \varphi(ax + by)u$. De plus,
$$f(ax + by) - (ax + by) = a(f(x) - x) + b(f(y) - y) = (a\varphi(x) + b\varphi(y))u$$
Comme u est non nul, $\varphi(ax + by) = a\varphi(x) + b\varphi(y)$. Ainsi φ est une forme linéaire.
On a $f(u) = u + \varphi(u)u$ donc $\varphi(u)u = f(u) - u \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. Ainsi $f(\varphi(u)u) = \varphi(u)u$ et donc $\varphi(u)u + \varphi(u)^3 u = \varphi(u)u$. Comme u est non nul, $\varphi(u)^3 = 0$ et donc $\varphi(u) = 0$ de sorte que $u \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Comme précédemment, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ donc $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan. On ne peut avoir φ nulle sinon $\mathrm{Ker}(\varphi) = E$ n'est pas un hyperplan.

Solution 58.

On peut construire une forme linéaire φ ne s'annulant pas en x. En effet, x étant non nul, on peut le compléter en une base de E. Il suffit alors de poser $\varphi(x) = 1$ et φ nulle en les autres vecteurs de la base.
Les conditions de l'énoncé montrent que φ ne peut être combinaison linéaire de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Autrement dit, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ n'engendre pas E^*. Puisque cette famille comporte $n = \dim E^*$ éléments, elle est liée.

Solution 59.

1. G contient la forme linéaire nulle sur E et est clairement stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de E^*. Considérons une base $(e_1, \dots, e_r)$ de F que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Puisque E est de dimension finie, la famille des formes linéaires coordonnées $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ forme une base de E^* (vérifier la liberté ey utiliser la dimension). On remarque alors que $G = \text{vect}(e_{r+1}^*, \dots, e_n^*)$ (procéder par double inclusion). La famille $(e_{r+1}^*, \dots, e_n^*)$ est libre (famille extraite d'une base) donc $\dim G = n - r \dim E - \dim F$.

2. G est un sous-espace vectoriel de E^* en tant qu'intersection d'espaces vectoriels. En effet, $G = \bigcap \varphi \in F \operatorname{Ker} \varphi$.
Considérons une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ de F que l'on complète en une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de E. On considère l'application $\Phi \colon x \in E \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in \mathbb{K}^n$. Elle est clairement linéaire et on vérifie qu'elle est injective. Soit $x \in \operatorname{Ker} \Phi$. Ceci signifie que $\varphi_1(x) = \cdots = \varphi_n(x) = 0$. Supposons que x soit non nul : on pourrait construire une forme linéaire φ non nulle en x. Mais $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* donc il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$ et donc $\varphi(x) = 0$, ce qui est contradictoire. Ainsi Φ est injective, et comme $\dim E = \dim \mathbb{K}^n = n$, Φ est un isomorphisme. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ par Φ. Comme Φ est un isomorphisme, $(e_1, \dots, e_n)$ est aussi une base de E. On vérifie alors que $G = \text{vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$. Il suffit pour cela de remarquer que, par définition de $(e_1, \dots, e_n)$, $\varphi_j(e_i) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. La famille $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ est extraite de la base $(e_1, \dots, e_n)$ donc elle est libre et $\dim G = n - r = \dim E - \dim F$.

3. Il suffit de poser $F = \text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ et d'appliquer la question précédente. En effet, $\dim F = \text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ et, avec les notations de la question précédente, il est aisé de voir que $G = \bigcap_{i=1}^m \operatorname{Ker} \varphi_i$.

Solution 60.

1. Supposons que $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$. Puisque que ces deux sous-espaces sont des hyperplans , on a donc
$$H = \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(g).$$
Soit $\mathbb{K}u$ un supplémentaire de H dans E. Puisque $u \notin H$, $f(u) \neq 0$. Posons alors
$$\lambda = \frac{g(u)}{f(u)}.$$
Ce scalaire est non nul car $u \notin H = \operatorname{Ker}(g)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de H. La famille $\mathscr{B}' = \mathscr{B} \cup \{u\}$ est donc une base de E. Les deux formes linéaires g et λf étant égales en tout vecteur de $\mathscr{B}$ (car elles s'y annulent !) et en u , elles sont égales.

2. D'après la question précédente , f et g définissent le même hyperplans *si et seulement si*
$$\exists \lambda \in K^*, \quad g = \lambda f.$$
Deux équations du type
$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$$
définissent le même hyperplan *si et seulement si* elles sont non nulles et proportionnelles.