

# DEVOIR À LA MAISON N°09 : CORRIGÉ

## Problème 1 – Moyenne arithmético-géométrique

### Partie I – Etude du cas général

1. Tout d'abord,  $u_0 \leq v_0$  puisque  $\min(a, b) \leq \max(a, b)$ . Soit maintenant  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$v_n - u_n = \frac{(\sqrt{v_{n-1}} - \sqrt{u_{n-1}})^2}{2} \geq 0$$

donc  $u_n \leq v_n$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \geq 0 \qquad v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$$

Ceci prouve que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont respectivement croissante et décroissante.

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$v_{n+1} - u_{n+1} - \frac{v_n - u_n}{2} = u_n - \sqrt{u_n v_n} = \sqrt{u_n}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}) \leq 0$$

donc

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$$

4. Tout d'abord,  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  donc  $v_n - u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Ensuite  $v_0 - u_0 = \max(a, b) - \min(a, b) = |a - b| \leq \frac{|a - b|}{2^0}$ . Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $v_n - u_n \leq \frac{|a - b|}{2^n}$ . Alors

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2} \leq \frac{|a - b|}{2^{n+1}}$$

Par récurrence,  $v_n - u_n \leq \frac{|a - b|}{2^n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

5. Le théorème des gendarmes garantit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$ . Puisque  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont respectivement croissante et décroissante, elles sont adjacentes et convergent vers une limite commune  $M(a, b)$ .

### Partie II – Propriétés de la moyenne arithmético-géométrique

On reprend les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  de la partie I.

- Puisque  $\min(a, b) = \min(b, a)$  et  $\max(a, b) = \max(b, a)$ , les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont inchangées par échange de  $a$  et  $b$ . On en déduit que  $M(a, b) = M(b, a)$ .
- Définissons deux suites  $(u'_n)$  et  $(v'_n)$  suivant les mêmes relations de récurrence que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  mais de premier terme  $u'_0 = \lambda a$  et  $v'_0 = \lambda b$ . On prouve par récurrence que  $u'_n = \lambda u_n$  et  $v'_n = \lambda v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers  $M(a, b)$  tandis que les suites  $(u'_n)$  et  $(v'_n)$  convergent vers  $M(\lambda a, \lambda b)$ . Puisque  $u'_n = \lambda u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on obtient  $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$ .
- Puisque  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont respectivement croissante et décroissante et convergent vers  $M(a, b)$ ,  $u_n \leq M(a, b) \leq v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En particulier,  $u_1 \leq M(a, b) \leq v_1$ , ce qui donne le résultat escompté.
- Les suites  $(u_{n+1})$  et  $(v_{n+1})$  sont de premier terme  $\sqrt{ab}$  et  $\frac{a+b}{2}$  et suivent les mêmes relations de récurrence que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  donc convergent vers  $M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$ . Par ailleurs, ce sont des suites extraites de  $(u_n)$  et  $(v_n)$  donc elles convergent vers  $M(a, b)$ . On en déduit que  $M(a, b) = M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$ .

## Partie III – Etude d'une fonction

- En reprenant les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  de la partie I avec  $a = 1$  et  $b = 0$ , on prouve sans peine que la suite  $(u_n)$  est constamment nulle. On en déduit que  $F(0) = 0$ .  
La question II.3 montre que  $1 \leq M(1, 1) \leq 1$  i.e.  $F(1) = 1$ .
- Soit  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ . Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies dans la partie I sont positives donc leur limite commune l'est également i.e.  $M(a, b) \geq 0$ .  
On en déduit que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $F(x) = M(1, x) \geq 0$ .
- Soit  $(x, x') \in (\mathbb{R}_+)^2$  tel que  $x \leq x'$ . On définit les suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$ ,  $(u'_n)$  et  $(v'_n)$  telles que  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = x$ ,  $u'_0 = 1$  et  $v'_0 = x'$  et vérifiant pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad u'_{n+1} = \sqrt{u'_n v'_n} \quad v'_{n+1} = \frac{u'_n + v'_n}{2}$$

On prouve par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq u'_n$  et  $v_n \leq v'_n$ . Par ailleurs, les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers  $F(x)$  tandis que les suites  $(u'_n)$  et  $(v'_n)$  convergent vers  $F(x')$ . Par passage à la limite,  $F(x) \leq F(x')$ . Ceci prouve la croissance de  $F$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

- Il suffit d'appliquer la question II.3 avec  $a = 1$  et  $b = x$ .
  - On rappelle que  $F(1) = 1$ . A l'aide de l'inégalité de la question précédente, on a donc pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ ,

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \leq \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \leq \frac{1}{2}$$

et pour tout  $x \in [0, 1[$ ,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \leq \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

ou encore pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{x} - 1} \leq \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \leq \frac{1}{2}$$

et pour tout  $x \in ]0, 1[$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \leq \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \frac{1}{2}$  et donc  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \frac{1}{2}$ . Finalement,  $F$  est dérivable en 1 et  $F'(1) = \frac{1}{2}$ .

- Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ .

$$\begin{aligned} F(x) &= M(1, x) \\ &= M\left(\sqrt{x}, \frac{1+x}{2}\right) && \text{d'après II.4} \\ &= M\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right) && \text{d'après II.1} \\ &= \frac{1+x}{2} M\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) && \text{d'après II.2} \\ &= \frac{1+x}{2} F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \end{aligned}$$

- Puisque  $F$  est croissante et positive, elle admet une limite finie  $\ell$  à droite en 0. Or  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{1+x} = 0^+$  donc la question précédente montre que  $\ell = \frac{\ell}{2}$  et donc  $\ell = 0$ . Il s'ensuit que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F = 0 = F(0)$  donc  $F$  est continue en 0.  
D'après la question III.4.a,  $F(x) \geq \sqrt{x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Il s'ensuit que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{F(x)}{x} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Par théorème de minoration,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = +\infty$  donc  $F$  n'est pas dérivable en 0. On peut même dire que la courbe représentative de  $F$  admet une tangente verticale en l'origine.

6. a. Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $F(x) \geq \sqrt{x}$  donc, par théorème de minoration,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F = +\infty$ .  
 b. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

$$\begin{aligned} F(x) &= M(1, x) \\ &= xM\left(\frac{1}{x}, 1\right) && \text{d'après II.2} \\ &= xM\left(1, \frac{1}{x}\right) && \text{d'après II.1} \\ &= xF\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

- c. D'après la question précédente, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\frac{F(x)}{x} = F\left(\frac{1}{x}\right)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{u \rightarrow 0^+} F(u) = 0$$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$  i.e.  $F(x) = o(x)$ .

- d. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . D'après la question III.5.a

$$F(x) = \frac{1}{2}(1+x)F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

Mais d'après la question III.6.b

$$F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$$

On en déduit le résultat voulu.

- e. D'après la question précédente, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\frac{F(x)}{\sqrt{x}} = F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{2\sqrt{x}} = +\infty$  et  $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right) = +\infty$ . Ceci signifie que  $\sqrt{x} = o(F(x))$ .

7. `from matplotlib.pyplot import plot`  
`from math import sqrt`  
`from numpy import logspace`

```
def F(x,eps) :
    u=1
    v=x
    while abs(u-v)>eps:
        u,v=sqrt(u*v), (u+v)/2
    return (u+v)/2
```

```
x=logspace(-3,1,1000)
y=[F(t,1e-3) for t in x]
plot(x,y)
y=[sqrt(t) for t in x]
plot(x,y)
y=[(1+t)/2 for t in x]
plot(x,y)
```

