Devoir surveillé n°08

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

$\boxed{1}$ **1.a** ln est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \leq 0$ donc ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.b Si l'un des a_i est nul, l'inégalité est triviale. Sinon, par concavité de ln,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(a_i) \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)$$

On obtient alors l'inégalité voulue par croissance de exp.

$\boxed{2}$ **2.a** Soit $s \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. Alors il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de s.
Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^\top\mathrm{SP}$ soit diagonale.

2.b On calcule $\chi_\mathrm{S} = \mathrm{X}^2$. Ainsi $\mathrm{Sp(S)} = \{0\}$. Si S était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle donc nulle. S n'est donc pas diagonalisable.

$\boxed{3}$ **3.a** Comme β est une base orthonormée, $x = \sum_{i=1}^n \langle x \mid \varepsilon_i\rangle\varepsilon_i$. Alors $s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\langle x \mid \varepsilon_i\rangle\varepsilon_i$. Comme β est orthonormée,

$$\mathrm{R}_s(x) = \langle s(x) \mid x\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i\langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2$$

3.b Soit $x \in \mathrm{S}(0,1)$. Alors $\|x\|^2 \sum_{i=1}^n \langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2 = 1$. Comme $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_1\langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i\langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_n\langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2$$

ou encore

$$\lambda_1 \leq \mathrm{R}_s(x) \leq \lambda_n$$

$\boxed{4}$ Notons s l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base β est S. On sait que $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que β est orthonormée donc $s \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. De plus, $\mathrm{Sp}(s) = \mathrm{Sp(S)} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.
Comme β est orthonormée, $s_{i,j} = \langle s(\varepsilon_j) \mid \varepsilon_i\rangle$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Comme la base β est normée, $\varepsilon_i \in \mathrm{S}(0,1)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. D'après la question précédente, $\mathrm{R}_s(\varepsilon_i) = \langle s(\varepsilon_i) \mid \varepsilon_i\rangle \in [\lambda_1, \lambda_n]$ ou encore

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n$$

$\boxed{5}$ L'application $\varphi :\ \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^\top\mathrm{M} - \mathrm{I}_n$ est polynomiale en les coefficients de M donc continue.
On peut aussi remarquer que, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, l'application linéaire $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application bilinéaire $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ sont continues. Ainsi l'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ est continue comme composée des applications continues $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\mathrm{M}^\top, \mathrm{M})$ et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. L'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{I}_n$ est constante donc continue. Par différence, φ est continue.

$\boxed{6}$ On sait que les colonnes de A sont toutes de norme 1 i.e.

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$$

Comme les $a_{i,j}^2$ sont positifs, on en déduit que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ |a_{i,j}| \leq 1$$

$\boxed{7}$ Le singleton $\{0\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
D'après la question précédente, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est borné. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact car fermé et borné.

$\boxed{8}$ **8.a** D'après le théorème spectral, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{S} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^\mathsf{T} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1}$. Par propriété de la trace,

$$\mathrm{T}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{AS}) = \mathrm{tr}(\mathrm{AP}\Delta\mathrm{P}^{-1}) = \mathrm{tr}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\Delta)$$

Comme $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

8.b T est une forme linéaire sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi T est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, T admet un maximum t sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

8.c Si on note $\mathrm{B} = (b_{i,j})$,

$$\mathrm{T}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{B}\Delta) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,i}\lambda_i$$

Mais comme B est orthogonale, $b_{i,i} \leq 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Enfin, les λ_i sont positifs car $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc

$$\mathrm{T}(\mathrm{A}) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}(\mathrm{S})$$

Ainsi $\mathrm{tr}(\mathrm{S})$ est un majorant de T sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. De plus, $\mathrm{T}(\mathrm{I}_n) = \mathrm{tr}(\mathrm{S})$ et $\mathrm{I}_n \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ donc $t = \mathrm{tr}(\mathrm{S})$.

$\boxed{9}$ Comme S est diagonalisable, $\det(\mathrm{S}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{S}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Comme les λ_i sont positifs, d'après la question **1.b**,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

ou encore

$$\det(\mathrm{S})^{1/n} \leq \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(\mathrm{S})$$

Par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient

$$\det(\mathrm{S}) \leq \left(\frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(\mathrm{S})\right)^n$$

$\boxed{10}$ Tout d'abord,

$$\mathrm{S}_\alpha^\mathsf{T} = \mathrm{D}^\mathsf{T}\mathrm{S}^\mathsf{T}\mathrm{D} = \mathrm{D}^\mathsf{T}\mathrm{SD} = \mathrm{S}_\alpha$$

car S est symétrique. Ainsi S_α est également symétrique.
Pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{S}_\alpha\mathrm{X} = (\mathrm{DX})^\mathsf{T}\mathrm{S}(\mathrm{DX}) \geq 0$$

car $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On en déduit que $\mathrm{S}_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Enfin,

$$\mathrm{tr}(\mathrm{S}_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 s_{i,i}$$

$\boxed{11}$ Par propriété du déterminant

$$\det(\mathrm{S}_\alpha) = \det(\mathrm{S})\det(\mathrm{D})^2 = \det(\mathrm{S})\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^2 = \frac{\det(\mathrm{S})}{\prod_{i=1}^{n} s_{i,i}}$$

La question précédente montre que $\operatorname{tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 s_{i,i} = n$. On applique l'inégalité de la question **9** à S_α et on obtient

$$\frac{\det(S)}{\prod_{i=1}^{n} s_{i,i}} \leq 1$$

ou encore

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$$

12 Les valeurs propres de S_ε sont $\lambda_1 + \varepsilon, \dots, \lambda_n + \varepsilon$. Puisque les valeurs propres de S sont positives, les valeurs propres de S_ε son strictement positives. De plus, les coefficients diagonaux de S_ε sont les $s_{i,i} + \varepsilon$. En appliquant la question précédente à S_ε, on obtient donc

$$\det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^{n} (s_{i,i} + \varepsilon)$$

Comme S_ε est encore diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1 + \varepsilon, \dots, \lambda_n + \varepsilon$, ceci équivaut à

$$\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + \varepsilon) \leq \prod_{i=1}^{n} (s_{i,i} + \varepsilon)$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient bien par passage à la limite

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$$

13 Comme A est symétrique, il est clair que B l'est également. De plus, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\Omega X \neq 0$ car Ω est inversible de sorte que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^\top B X = (\Omega X)^\top A (\Omega X) > 0$$

car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
On sait que $\det(\Omega) = 1$ car $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ donc, par propriété du déterminant,

$$\det(B) = \det(\Omega)^2 \det(A) = 1$$

car $A \in \mathcal{U}$. Ainsi $B \in \mathcal{U}$.
Enfin, par propriété de la trace,

$$\operatorname{tr}(AS) = \operatorname{tr}(A\Omega\Delta\Omega^\top) = \operatorname{tr}(\Omega^\top A \Omega \Delta) = \operatorname{tr}(B\Delta)$$

14 La question précédente montre l'inclusion $\{\operatorname{tr}(AS),\ A \in \mathcal{U}\} \subset \{\operatorname{tr}(B\Delta),\ B \in \mathcal{U}\}$.
Inversement, si on se donne $B \in \mathcal{U}$ et si l'on pose $A = \Omega B \Omega^\top$, on vérifie que $A \in \mathcal{U}$ et que $\operatorname{tr}(AS) = \operatorname{tr}(B\Delta)$, ce qui donne l'inclusion réciproque.
Par double inclusion, $\{\operatorname{tr}(AS),\ A \in \mathcal{U}\} = \{\operatorname{tr}(B\Delta),\ B \in \mathcal{U}\}$.
Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. D'après la question **4**, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $b_{i,i} \geq \min \operatorname{Sp}(B) > 0$ car $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi

$$\forall B \in \mathcal{U},\ \operatorname{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i} > 0$$

L'ensemble $\{\operatorname{tr}(AS),\ A \in \mathcal{U}\} = \{\operatorname{tr}(B\Delta),\ B \in \mathcal{U}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée : il addmet donc une borne inférieure.

15 On a montré à la question précédente que

$$\forall B \in \mathcal{U},\ \operatorname{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i}$$

et on a vu que les $\lambda_i b_{i,i}$ étaient positifs. On peut donc appliquer la question **1.b** pour affirmer que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i} \right)^{1/n}$$

ou encore

$$\operatorname{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i} \geq n \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^{1/n} \left(\prod_{i=1}^{n} b_{i,i} \right)^{1/n}$$

16 Comme $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on peut appliquer l'inégalité d'Hadamard :

$$\prod_{i=1}^{n} b_{i,i} \geq \det(\mathrm{B}) = 1$$

puisque $\mathrm{B} \in \mathcal{U}$. En combinant avec l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$$\mathrm{tr}(\mathrm{B}\Delta) \geq n\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1/n} = n\det(\mathrm{S})^{1/n}$$

17 Il est clair que $\mathrm{D} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. De plus,

$$\det(\mathrm{D}) = \prod_{k=1}^{n} \mu_k = \frac{\det(\mathrm{S})}{\prod_{k=1}^{n} \lambda_k} = 1$$

donc $\mathrm{B} \in \mathcal{U}$. Enfin,

$$\mathrm{tr}(\mathrm{D}\Delta) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \lambda^k = n\det(\mathrm{S})^{1/n}$$

On en déduit que $m = n\det(\mathrm{S})^{1/n}$ (cette borne inférieure est en fait un minimum).