Semaine du 04/06 au 08/06

1 Cours

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire et norme Définition d'un produit scalaire. Orthogonalité. Espace préhilbertien réel, espace euclidien. Norme associée à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Inégalité triangulaire. Identités de polarisation.

Familles orthogonales Définition d'une famille orthogonale et d'une famille orthonormale. Une famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. Théorème de Pythagore. Expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale à l'aide du produit scalaire. Expression du produit scalaire et de la norme à l'aide des coordonnées dans une base orthonormale. Procédé d'orthnormalisation de Gram-Schmidt. Tout espace euclidien admet une base orthonormale. Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

Sous-espaces orthogonaux Sous-espaces vectoriels orthogonaux. Orthogonal d'une partie. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace vectoriel. L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie est son unique supplémentaire orthogonal. Dimension de l'orthogonal. Projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Distance à un sous-espace vectoriel. Cas d'un sous-espace vectoriel de dimension finie : expression de la distance à l'aide de la projection orthogonale.

Automorphismes orthogonaux Définition : conservation de la norme et du produit scalaire. Groupe orthogonal $O(E)$. Automorphismes orthogonaux positifs/négatifs (ou isométries vectorielles directes/indirectes). Groupe spécial orthogonal $SO(E)$. Un endomorphisme est un automorphisme orthogonal (positif) **si et seulement si** il envoie une base orthonormée (directe) sur une base orthonormée (directe).

Matrices orthogonales Définition. Groupe orthogonal $O(n)$. Matrices orthogonales positives et négatives. Groupe spécial orthogonal $SO(n)$.

2 Méthodes à maîtriser

- Montrer qu'une application est un produit scalaire. Dans l'ordre : symétrie, linéarité par rapport à l'**une** des deux variables (la linéarité par rapport à la seconde variable s'obtient par symétrie), positivité, définition.
- Montrer qu'une famille est orthonormale.
- Orthonormaliser une famille libre par le procédé de Gram-Schmidt.
- Calculer la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel à l'aide d'une base orthonormale de ce sous-espace vectoriel.
- Calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.

3 Questions de cours

- **Banque CCP 77** Soit E un espace euclidien.
  1. Soit A un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $A = (A^\perp)^\perp$.
  2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
     (a) Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
     (b) Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
- **Banque CCP 78** Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E. On note $(x \mid y)$ le produit scalaire de x et de y et
  $\mathrm{cdot}\|$ la norme euclidienne associée.
  1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.
     (a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.
     (b) Démontrer que u est bijectif.
  2. Démontrer que l'ensemble $O(E)$ des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Prouver que : $u \in O(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

► **Banque CCP 79** Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\, dx = 0 \implies h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continue sur $[a, b]$.
   On pose : $\forall (f, g) \in E^2$, $\displaystyle (f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)\, dt$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\, dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

► **Banque CCP 80** Soit E l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\displaystyle (f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\, dt$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par $f\colon x \mapsto \cos(x)$ et $g\colon x \mapsto \cos(2x)$.
   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u\colon x \mapsto \sin^2(x)$.

► **Banque CCP 81** On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}({}^tAA')$.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

► **Banque CCP 82** Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.
On admet que pour tout $x \in E$, il existe un unique $y_0 \in F$ tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.
Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

► **Banque CCP 92** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

1. Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
   Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E. On admet que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
   Déterminer $F^\perp$.