Devoir à la maison n°04 : corrigé

Problème 1 — Équation fonctionnelle

Partie I –

1. D'après l'énoncé, $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.
   Puisque f est strictement monotone, elle est injective donc $f(1) \neq f(0) = 0$.

2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$g(x+y) = \frac{1}{c} f(x+y) = \frac{1}{c} f(x) + \frac{1}{c} f(y) = g(x) + g(y)$$
   On en déduit que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
$$g(x) = g(x-y+y) = g(x-y) + g(y)$$
   et donc que $g(x-y) = g(x) - g(y)$.

3. On sait que $g(0) = \frac{1}{c} f(0) = 0$ et que $g(n+1) = g(n) + g(1) = g(n) + \frac{1}{c} f(1) = g(n) + 1$. La suite de terme général $g(n)$ est donc arithmétique de raison 1 et de premier terme $g(0) = 0$. On en déduit que $g(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$g(x) + g(-x) = g(x-x) = g(0) = 0$$
   donc g est impaire.

5. Soit $r \in \mathbb{Q}$. La suite de terme général $g(nr)$ est arithmétique de premier terme $g(0) = 0$ et de raison $g(r)$. On en déduit que $g(nr) = ng(r)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Puisque $r \in \mathbb{Q}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$. D'une part, $g(qr) = qg(r)$ et d'autre part, $g(qr) = g(p) = p$ puisque $p \in \mathbb{Z}$. Ainsi $qg(r) = p$ puis $g(r) = \frac{p}{q} = r$.

6. D'après l'énoncé, f est strictement monotone.
   Si f est strictement croissante $c = f(1) > f(0) = 0$ donc $g = \frac{1}{c} f$ est strictement croissante.
   Si f est strictement décroissante $c = f(1) < f(0) = 0$ donc $g = \frac{1}{c} f$ est strictement croissante.

7. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) \neq x$. Alors il existe un rationnel r strictement compris entre x et $g(x)$.
   Si $x < r < g(x)$, alors par stricte croissance de g, $g(x) < g(r) = r$, d'où une contradiction.
   Si $g(x) < r < x$, alors par stricte croissance de g, $g(x) > g(r) = r$, d'où une contradiction à nouveau.
   On en déduit que $g(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

8. On a montré que $g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ donc $f = cg = c\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Partie II –

1. f est injective car strictement monotone.

2. D'après l'énoncé, $f(f(0)) = f(0 + f(0)) = f(0) + 0^n = f(0)$. Or f est injective donc $f(0) = 0$.

3. Pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$f(f(y)) = f(0 + f(y)) = f(0) + y^n = y^n$$

4. **a.** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Puisque $n = 1$, $f(f(y)) = y^n = y$. Ainsi
$$f(x+y) = f(x + f(f(y))) = f(x) + f(y)$$

b. La partie précédente montre qu'en posant $c = f(1)$, $f = c\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. De plus, $1 = f(f(1)) = f(c) = c^2$ donc $c = \pm 1$. Ainsi $f = \pm\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
On vérifie aisément que, réciproquement, si $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ ou $f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, on a bien

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + f(y)) = f(x) + y$$

Dans le cas où $n = 1$, les applications recherchées sont donc exactement $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

5. **a.** Supposons n pair. Alors $f(f(1)) = 1^n = 1$ et $f(f(-1)) = (-1)^n = 1$ donc $f\circ f(1) = f\circ f(-1)$. Or f est injective donc $f\circ f$ l'est également. On en déduit une contradiction.

b. Puisque n est impair, le théorème de la bijection montre que l'application $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ y & \longmapsto & y^n\end{array}\right.$ est bijective. Or cette application n'est autre que $f\circ f$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors $f(f(x)) = f(f(y))$ puis $x = y$ par injectivité de $f\circ f$. Ainsi f est injective.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(f(x))$ par surjectivité de $f\circ f$. Ainsi $y \in \operatorname{Im} f$ et f est surjective.

c. Puisque f est bijective, on peut considérer la bijection réciproque f^{-1} de $\mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$f(x + y) = f(x + f(f^{-1}(y))) = f(x) + f^{-1}(y)^n$$

Or $f^{-1}(y)^n = f(f(f^{-1}(y))) = f(y)$ donc $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

d. D'après la partie précédente, $f = c\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ en posant $c = f(1)$. On a donc $f(f(y)) = c^2 y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Or on sait également que $f(f(y)) = y^n$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On en déduit par exemple que $c^2 = y^{n-1}$ pour tout $y \neq 0$. Mais puisque $n > 1$, y^{n-1} prend une infinité de valeurs lorsque y décrit $\mathbb{R}^*$. Ceci est absurde.

e. Dans le cas où $n > 1$, il n'existe aucune application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + f(y)) = f(x) + y^n$$

Solution 1.

1. $f(z)$ est défini *si et seulement si* $e^z + e^{-z} \neq 0$. Or

$$e^z + e^{-z} = 0 \iff e^{2z} = -1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2z = (2k+1)i\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = i\frac{\pi}{2} + ik\pi$$

Donc $f(z)$ est défini pour $z \notin i\frac{\pi}{2} + i\pi\mathbb{Z}$.

2. $f(z) = 0$ équivaut à $e^z - e^{-z} = 0$. Or

$$e^z - e^{-z} = 0 \iff e^{2z} = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2z = 2ik\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = ik\pi$$

L'ensemble des solutions est donc $i\pi\mathbb{Z}$.

3. Posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
|f(z)| < 1 &\iff \left|e^z - e^{-z}\right|^2 < \left|e^z + e^{-z}\right|^2\\
&\iff \left(e^z - e^{-z}\right)\overline{\left(e^z - e^{-z}\right)} < \left(e^z + e^{-z}\right)\overline{\left(e^z + e^{-z}\right)}\\
&\iff \left(e^z - e^{-z}\right)\left(e^{\overline{z}} - e^{-\overline{z}}\right) < \left(e^z + e^{-z}\right)\left(e^{\overline{z}} + e^{-\overline{z}}\right)\\
&\iff -e^{z-\overline{z}} - e^{\overline{z}-z} < e^{z-\overline{z}} + e^{\overline{z}-z}\\
&\iff e^{2iy} + e^{-2iy} > 0\\
&\iff \cos(2y) > 0
\end{aligned}$$

Donc $\begin{cases}|\operatorname{Im} z| < \dfrac{\pi}{2}\\ |f(z)| < 1\end{cases} \iff \begin{cases}|y| < \dfrac{\pi}{2}\\ \cos(2y) > 0\end{cases} \iff |y| < \dfrac{\pi}{4}$.

4. Soit $z \in \Delta$. D'après la question précédente, $|f(z)| < 1$ i.e. $f(z) \in \mathcal{D}$. Ainsi tout élément de Δ a pour image par f un élément de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire que $f(\Delta) \subset \mathcal{D}$.

5. **Existence :** Puisque Z est non nul, Z possède des arguments. De plus, les arguments de Z étant égaux à un multiple de 2π près, il existe un argument θ de Z appartenant à $]-\pi,\pi]$. On ne peut avoir $\theta=\pi$ sans quoi Z serait un réel négatif. Considérons également le module r de Z, qui est strictement positif puisque Z est non nul. On peut alors poser $z=\ln r+i\theta$ de sorte que $e^z=\mathrm{Z}$ et $\mathrm{Im}(z)=\theta\in]-\pi,\pi[$.
Unicité : Supposons qu'il existe deux complexes z et z' tels que $e^z=e^{z'}=\mathrm{Z}$ et les réels $\mathrm{Im}(z)$ et $\mathrm{Im}(z')$ soient dans l'intervalle $]-\pi,\pi[$. Puisque $e^z=e^{z'}$, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $z'=z+2ik\pi$. En partiulier, $\mathrm{Im}(z')-\mathrm{Im}(z)=2k\pi$. Mais comme les réels $\mathrm{Im}(z)$ et $\mathrm{Im}(z')$ soient dans l'intervalle $]-\pi,\pi[$, $-2\pi<\mathrm{Im}(z')-\mathrm{Im}(z)<2\pi$, de sorte que $-1<k<1$. Puisque k est entier k est nul puis $z'=z$.

6. Remarquons que
$$\frac{1+u}{1-u}=\frac{(1+u)(1-\overline{u})}{|1-u|^2}=\frac{1-|u|^2+2i\,\mathrm{Im}(u)}{|1-u|^2}$$
On en déduit que si $\frac{1+u}{1-u}\in\mathbb{R}_-$, alors $1-|u|^2\leqslant 0$ i.e. $|u|\geqslant 1$. Par contraposition, si $u\in\mathscr{D}$, $\frac{1+u}{1-u}\notin\mathbb{R}_-$.

7. Montrons que tout élément de $\mathscr{D}$ admet un unique antécédent dans Δ. Soit $u\in\mathscr{D}$ et $z\in\mathbb{C}$. On a facilement $f(z)=u\iff e^{2z}=\frac{1+u}{1-u}$. D'après la question **6**, $\frac{1+u}{1-u}\notin\mathbb{R}_-$. D'après la question **5**, cette équation admet une unique solution telle que $\mathrm{Im}(2z)\in]-\pi,\pi[$ i.e. $\mathrm{Im}(z)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Notons encore z cette solution. Comme on a également $|f(z)|<1$, la question **3** montre que $|\mathrm{Im}\,z|<\frac{\pi}{4}$ i.e. $z\in\Delta$. L'équation $f(z)=u$ admet donc une unique solution dans Δ.
Puisqu'on a également montré que $f(\Delta)\subset\mathscr{D}$, f réalise bien une bijection de Δ sur $\mathscr{D}$.