Devoir surveillé n°9

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 —

On considère dans tout ce problème les deux fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad G(x) = \frac{1-\cos(x)}{x}$$

Partie I – Etude de deux fonctions

1. **a.** Montrer que les fonctions F et G sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b. Montrer que F et G sont prolongeables par continuité en 0. On notera encore F et G ces prolongements.

2. **a.** Montrer que les fonctions F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer leurs dérivées.

   b. Démontrer, à l'aide de développements limités, que les fonctions F et G sont dérivables en 0. Préciser les valeurs de $F'(0)$ et $G'(0)$.

3. **a.** Montrer que les réels strictement positifs tels que $F(x) = 0$ constituent une suite $(a_k)_{k\geqslant 1}$ strictement croissante. On donnera explicitement la valeur de a_k.

   b. Montrer que les réels strictement positifs tels que $G(x) = 0$ constituent une suite $(b_k)_{k\geqslant 1}$ strictement croissante. Y-a-t'il un lien entre les suites $(a_k)_{k\geqslant 1}$ et $(b_k)_{k\geqslant 1}$?

4. **a.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer sans calcul qu'il existe un réel $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.

   b. Montrer que la fonction F' est de même signe que $h : x \mapsto x\cos(x) - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   c. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction h est strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$.

   d. En déduire l'unicité du réel x_k défini dans la question **I.4.a**.

   e. Etablir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ x_k \in \left]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}\right[$.

   f. Calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k$ puis déterminer un équivalent simple de la suite (x_k).

5. Tracer l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}_F$ de la fonction F lorsque l'abscisse x varie dans $[0, 4\pi]$. On se placera dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que $\|\vec{\imath}\| = 1\text{cm}$ et $\|\vec{\jmath}\| = 10\text{cm}$. On fera apparaître clairement les tangentes horizontales à la courbe et on précisera les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_F$ avec l'axe $(O, \vec{\imath})$.

Partie II – Deux fonctions définies par des intégrales

Dans toute cette partie, E désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Si f appartient à E, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$I_f(x) = \int_0^1 f(t)\cos(xt)\,dt \qquad\qquad J_f(x) = \int_0^1 f(t)\sin(xt)\,dt$$

Soit f une fonction appartenant à E.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que les deux réels $I_f(x)$ et $J_f(x)$ sont bien définis. On dispose donc de deux fonctions I_f et J_f définies sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la parité des fonctions I_f et J_f.
3. On se propose de calculer dans cette question les limites de I_f et J_f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   a. Etablir que : $\forall x > 0,\ I_f(x) + iJ_f(x) = \dfrac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} - \dfrac{1}{ix}\displaystyle\int_0^1 f'(t)e^{ixt}\,dt.$
   b. Expliquer rapidement pourquoi les fonctions f et f' sont bornées sur $[0,1]$. On posera par la suite $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $M' = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)|$.
   c. En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x > 0,\ |I_f(x) + iJ_f(x)| \leqslant \dfrac{A}{x}$.
   d. A l'aide de la question **II.3.c**, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (I_f(x) + iJ_f(x))$.
   En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} I_f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} J_f(x)$.
   e. En utilisant une propriété obtenue sur les fonctions I_f et J_f, calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} I_f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} J_f(x)$.
4. L'objectif de cette question est de prouver que les fonctions I_f et J_f sont continues sur $\mathbb{R}$.
   a. Soient p et q deux réels. Rappeler la formule liant $\cos(p) - \cos(q)$ à $\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.
   b. Démontrer que : $\forall u \in \mathbb{R},\ |\sin(u)| \leqslant |u|$ (on pourra par exemple utiliser l'inégalité des accroissements finis).
   c. Soient x et y deux réels. Etablir que : $|I_f(x) - I_f(y)| \leqslant |x-y| \displaystyle\int_0^1 t|f(t)|dt$.
   d. En déduire que la fonction I_f est continue sur $\mathbb{R}$.
   Par un raisonnement analogue, on pourrait démontrer que la fonction J_f est continue sur $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas demandé ici.
5. A l'aide d'une fonction f judicieusement choisie, établir un lien entre les fonctions F et G de la partie I, et les fonctions I_f et J_f de la partie II.

Problème 2 —

L'objet de ce problème est de s'intéresser à résoudre dans certains cas l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = g(x) \tag{1}$$

où f est une fonction inconnue supposée continue sur $\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels et g une fonction donnée définie sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que la fonction sh *est définie par* $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ *et la fonction* ch *par* $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Partie I –

Dans cette partie on suppose que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les fonctions f solutions de (1) sont elles aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elles vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - f(x) = g''(x) \tag{2}$$

2. En déduire la solution de l'équation (1) quand :

   a. g est la fonction nulle ;

   b. g est une fonction constante ;

   c. g est une fonction affine.

3. Déduire aussi que l'équation (1) (que g soit de classe $\mathcal{C}^2$ ou pas) a au plus une solution.

4. Montrer que toute fonction f de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x}{2}\left[\int_0^x e^{-t} g''(t)\,dt + k_A\right] - \frac{e^{-x}}{2}\left[\int_0^x e^{t} g''(t)\,dt + k_B\right]$$

   où k_A et k_B sont des constantes réelles est solution de (2).

5. Montrer qu'une solution f de (2) vérifiant :

$$f(0) = g(0) \quad \text{et} \quad f'(0) = g'(0)$$

   est également solution de (1).

6. Déduire des deux questions précédentes la solution f de (1) quand g est la fonction exponentielle.

Partie II –

Dans cette partie on suppose que la fonction g est seulement continue.

On note E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On définit l'application A qui à une fonction f de E associe la fonction (notée $A(f)$) par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A(f)(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\,dt$$

1. Montrer que pour $f \in E$, $A(f)$ et de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer $A(f)'$ et $A(f)''$ en fonction de f.

2. Montrer que l'application A est un endomorphisme injectif de E.

3. On définit une application U de E dans E par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ U(f)(x) = \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)f(t)\,dt$$

   Montrer que $U \circ A = U - A$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A^n la n-ème itérée de l'application A :

$$A^2(f) = A(A(f)),\ \dots,\ A^n(f) = A(A^{n-1}(f))$$

   Montrer que pour tout $f \in E$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(t)\,dt$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = A + A^2 + \dots + A^n$.

a. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|\operatorname{sh}(u) - \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!}\right| \leqslant \frac{\operatorname{ch}(u)|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

b. En déduire que pour toute fonction f de E, pour tout réel x et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leqslant \frac{\operatorname{ch}(x)|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\left|\int_0^x |f(t)|\,dt\right|$$

puis que $U(f)(x) - U_n(f)(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

c. En déduire que $A \circ U = U - A$.

6. **a.** On note I l'application identité de E dans E.
Montrer que les applications $I - A$ et $I + U$ sont (pour la composition des applications) des bijections de E dans E réciproques l'une de l'autre.

b. En déduire la fonction f de E solution de l'équation (1).

c. Expliciter f pour la fonction g paire et telle que

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \in [0, 1[\\ 2 - x & \text{pour } x \in [1, 2[\\ 0 & \text{pour } x \geqslant 2 \end{cases}$$