Semaine du 27/02 au 03/03

1 Cours

Applications linéaires

Définition et premières propriétés Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'une forme linéaire. Exemples en géométrie, dans les espaces de fonctions, dans les espaces de suites et dans les $\mathbb{K}^n$. Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$. Structure d'anneau de $\mathcal{L}(E)$.

Isomorphismes Définition d'un isomorphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme. Définition d'un automorphisme et groupe linéaire $GL(E)$.

Images directe et réciproque par une application linéaire L'image directe ou réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel. Noyau et image d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le noyau et l'image. Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $E = S \oplus \operatorname{Ker} f$, alors f induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Ker} f$.

Image d'une famille de vecteurs L'image d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image. Une application linéaire est injective/surjective/bijective **si et seulement si** l'image d'une base est une famille libre/une famille génératrice/une base.

Formes linéaires et hyperplans Formes coordonnées. Définition d'un hyperplan comme noyau de forme linéaire non nulle. Lien entre hyperplans et droites vectorielles.

2 Méthodes à maîtriser

- Montrer qu'une application est linéaire.
- Calculer avec des endomorphismes comme dans tout anneau **non commutatif** et **non intègre**.
- Savoir déterminer le noyau et l'image d'applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.
- Utiliser le noyau ou l'image d'une application linéaire pour prouver son injectivité ou sa surjectivité.
- Les équivalences $x \in \operatorname{Ker} f \iff f(x) = 0$ et $y \in \operatorname{Im} f \iff \exists x,\ y = f(x)$ doivent être automatiques.

3 Questions de cours

- Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$, alors $\operatorname{Im} g \circ f = \operatorname{Im} g \iff F = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.
- Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$, alors $\operatorname{Ker} g \circ f = \operatorname{Ker} f \iff \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0_F\}$.
- Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrer que f est injective **si et seulement si** $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre et que f est surjective **si et seulement si** $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ engendre F.
- Montrer que si H et D sont respectivement un hyperplan et une droite vectorielle d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $D \not\subset H$, alors $E = H \oplus D$.