

# CALCUL DIFFÉRENTIEL

Dans tout ce chapitre,

- $E, F, G$  désignent des  **$\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimensions finies** ;
- $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  désignent des **ouverts** respectifs de  $E$  et  $F$ .

## 1 Différentiabilité

### 1.1 Dérivabilité selon un vecteur

#### Définition 1.1 Dérivée selon un vecteur

Soient  $f : \mathcal{U} \rightarrow F, a \in \mathcal{U}$  et  $v \in E$ . On dit que  $f$  est **dérivable en  $a$  selon le vecteur  $v$**  si l'application  $\varphi_{a,v} : t \mapsto f(a+tv)$  est dérivable en 0. Dans ce cas, on appelle **dérivée de  $f$  en  $a$  selon le vecteur  $v$**  le vecteur  $\varphi'_{a,v}(0)$ , que l'on note  $D_v f(a)$ .

**REMARQUE.** Si on note  $(f_1, \dots, f_n)$  les coordonnées de  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  dans une base  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  de  $F$  (i.e.  $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ g$ ), alors  $f$  est dérivable en  $a$  selon le vecteur  $v$  si et seulement si les  $f_i$  le sont. De plus,

$$D_v f(a) = \sum_{i=1}^n D_v f_i(a) \mathbf{f}_i$$

#### Exemple 1.1

L'application  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, 2xy)$  est dérivable en tout point  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  selon tout vecteur  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  et

$$D_{(u,v)} f(a, b) = 2(au + bv, av + bu)$$

#### Définition 1.2 Dérivées partielles dans une base

Soient  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  une base de  $E, f : \mathcal{U} \rightarrow F$  et  $a \in \mathcal{U}$ . On appelle **dérivées partielles** de  $f$  dans la base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  les applications  $D_{\mathbf{e}_j} f$  si elles sont définies. On les note  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  ou  $\partial_j f$ .

**REMARQUE.** Si  $E = \mathbb{R}^p$  et qu'on ne précise pas la base dans laquelle on considère les dérivées partielles, c'est qu'on considère implicitement la **base canonique** de  $\mathbb{R}^p$ .

**REMARQUE.** Si on note  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  une base de  $E$  et  $(f_1, \dots, f_n)$  les coordonnées de  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  dans une base  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  de  $F$  (i.e.  $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ g$ ), alors  $g$  admet des dérivées partielles en  $a$  dans la base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  si et seulement si c'est également le cas pour les  $f_i$ . De plus,

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \partial_j f(a) = \sum_{i=1}^n \partial_j f_i(a) \mathbf{f}_i$$

**REMARQUE.** Si  $E = \mathbb{R}^2$ , les variables d'une application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow F$  sont notées plus volontiers  $x$  et  $y$  que  $x_1$  et  $x_2$ . Les dérivées partielles dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  seront alors notées  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  plutôt que  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  et  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  ou  $\partial_1 f$  et  $\partial_2 f$ .

De même, si  $E = \mathbb{R}^3$ , les dérivées partielles dans la base canonique seront plutôt notées  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  et  $\frac{\partial f}{\partial z}$ .

**Méthode** Calculer des dérivées partielles

Lorsque  $E = \mathbb{R}^p$  et  $F = \mathbb{R}^n$ , il est très aisé de calculer des dérivées partielles dans la base canonique. Il suffit de dériver chaque composante de la fonction par rapport à une variable les autres étant fixées.

Autrement dit,  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  est la dérivée de l'application  $x_j \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ .

**Exemple 1.2**

L'application  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, 2xy)$  admet des dérivées partielles dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  en tout point  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 2(a, b) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 2(b, a)$$

**Exemple 1.3**

On pose  $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y^2 > 0\}$ . L'application  $f : (x, y, z) \in \mathcal{U} \mapsto (\ln(x + y^2), e^{xz})$  admet des dérivées partielles sur  $\mathcal{U}$  et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \left( \frac{1}{x + y^2}, ze^{xz} \right) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \left( \frac{2y}{x + y^2}, 0 \right) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (0, xe^{xz})$$

**Exemple 1.4**

Les applications  $\pi_i : (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mapsto x_i$  admettent des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^p$  et

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_p) = \delta_{i,j}$$



**ATTENTION !** Une fonction peut admettre des dérivées partielles sans être continue.

**Exemple 1.5**

Considérons la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2$  mais n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

- Par opérations,  $f$  admet clairement des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0 \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}^*, \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$$

donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  existent et  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

- Par contre,  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$  puisque, par exemple,

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, f(t, t) = \frac{1}{2}$$

Ainsi  $(t, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0)$  mais  $f(t, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$ .



**ATTENTION !** Une fonction peut même admettre des dérivées directionnelles selon tout vecteur sans être continue.

### Exemple 1.6

Considérons la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors  $f$  admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur en tout point de  $\mathbb{R}^2$  mais n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

- Par opérations,  $f$  admet clairement des dérivées directionnelles selon tout vecteur en tout point de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Soit  $u = (h, k)$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^2$ . Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \frac{f(tu) - f(0, 0)}{t} = \frac{hk^2}{h^2 + t^2k^4} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{k^2}{h} & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Donc  $f$  admet bien une dérivée directionnelle selon le vecteur  $u$  en  $(0, 0)$ .

- Par contre,  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$  puisque, par exemple,

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, f(t^2, t) = \frac{1}{2}$$

Ainsi  $(t^2, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0)$  mais  $f(t^2, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$ .

## 1.2 Différentiabilité

### Notation 1.1 Négligeabilité

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ . On suppose que  $0_E \in \mathcal{U}$ . Ecrire que  $f(h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} o(h)$  signifie que  $\lim_{h \rightarrow 0_E} \frac{f(h)}{\|h\|} = 0_F$ .

**REMARQUE.** Les normes que l'on choisit sur  $E$  et  $F$  n'importent pas car toutes les normes sur un espace de dimension finie sont équivalentes.

### Définition 1.3 Développement limité à l'ordre 1

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ . Une écriture du type

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} c + L(h) + o(h)$$

avec  $c \in F$  et  $L \in \mathcal{L}(E, F)$  s'appelle un **développement limité** de  $f$  à l'ordre 1 en  $a$ . Si un tel développement limité existe, il est unique i.e. le vecteur  $c$  et l'application linéaire  $L$  sont uniques.

**REMARQUE.** Ceci signifie que

$$\lim_{h \rightarrow 0_E} \frac{f(a + h) - c - L(h)}{\|h\|} = 0_F$$

**Définition 1.4 Différentiabilité en un point**

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est **différentiable** en  $a \in \mathcal{U}$  si  $f$  admet un développement limité à l'ordre 1 en  $a$ . Dans ce cas, il existe une unique application linéaire  $L \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} f(a) + L(h) + o(h)$$

Cette application linéaire s'appelle la **différentielle** de  $f$  en  $a$  et se note  $df(a)$ .

**REMARQUE.** La différentielle de  $f$  en  $a$  est également appelée l'**application linéaire tangente** à  $f$  en  $a$ .

**REMARQUE.** Par souci de lisibilité, l'image d'un vecteur  $v$  par la différentielle de  $f$  en  $a$  se notera  $df(a) \cdot v$  plutôt que  $df(a)(v)$ .

**Proposition 1.1**

Si on note  $(f_1, \dots, f_n)$  les coordonnées de  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  dans une base  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  de  $F$  (i.e.  $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ g$ ), alors  $f$  différentiable en  $a$  si et seulement si les  $f_i$  le sont. De plus,

$$\forall v \in E, \quad df(a) \cdot v = \sum_{i=1}^n (df_i(a) \cdot v) \mathbf{f}_i$$

**Exemple 1.7**

Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, 2xy)$  Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, \quad f((a, b) + (h, k)) = f(a, b) + 2(ah + bk, bh + ak) + (h^2 + k^2, 2hk)$$

L'application

$$L : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (h, k) & \longmapsto 2(ah + bk, bh + ak) \end{cases}$$

est bien linéaire et

$$(h^2 + k^2, 2hk) \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{=} o((h, k))$$

En effet, si l'on munit  $\mathbb{R}^2$  de la norme définie par  $\|(u, v)\| = |u| + |v|$

$$\|(h^2 + k^2, 2hk)\| = (|h| + |k|)^2 = \|(h, k)\|^2$$

de sorte que

$$\frac{\|(h^2 + k^2, 2hk)\|}{\|(h, k)\|} = \|(h, k)\| \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que  $f$  est différentiable en  $(a, b)$  et que  $df(a, b)$  est l'endomorphisme  $(h, k) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 2(ah + bk, bh + ak)$ .

**Exemple 1.8 Différentielle de l'inversion matricielle**

On considère l'application  $f : M \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1}$ . On va montrer que  $f$  est différentiable sur  $GL_n(\mathbb{R})$  et calculer sa différentielle.

Soit  $M \in GL_n(\mathbb{R})$ . Comme  $GL_n(\mathbb{R})$  est ouvert, il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de 0 tel que  $M + H$  est inversible pour tout  $H \in \mathcal{V}$ . Remarquons maintenant que

$$f(M + H) - f(M) = (M + H)^{-1} - M^{-1} = (M + H)^{-1}(I_n - (M + H)M^{-1}) = -(M + H)^{-1}HM^{-1}$$

puis

$$\begin{aligned} f(M + H) - f(M) + M^{-1}HM^{-1} &= M^{-1}HM^{-1} - (M + H)^{-1}HM^{-1} \\ &= (M + H)^{-1}((M + H)M^{-1} - I_n)HM^{-1} \\ &= f(M + H)(HM^{-1})^2 \end{aligned}$$

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  d'une norme d'algèbre  $\|\cdot\|$  de sorte que

$$\|f(M + H)(HM^{-1})^2\| \leq \|f(M + H)\| \|M^{-1}\|^2 \|H\|^2$$

puis pour  $H \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ ,

$$\frac{\|f(M + H)(HM^{-1})^2\|}{\|H\|} \leq \|f(M + H)\| \|M^{-1}\|^2 \|H\|$$

$f$  est continue sur  $GL_n(\mathbb{R})$ <sup>a</sup> donc  $\lim_{H \rightarrow 0} f(M + H) = f(M)$  puis  $\lim_{H \rightarrow 0} \|f(M + H)\| = \|f(M)\|$ . On en déduit que

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{\|f(M + H)(HM^{-1})^2\|}{\|H\|} = 0$$

ou encore

$$f(M + H)(HM^{-1})^2 \underset{H \rightarrow 0}{=} o(H)$$

Finalement,

$$f(M + H) \underset{H \rightarrow 0}{=} f(M) - M^{-1}HM^{-1} + o(H)$$

L'application  $H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$  est clairement linéaire :  $f$  est donc différentiable en  $M$  et  $df(M)$  est l'application  $H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$ .

<sup>a</sup>Classique : utiliser la formule de la comatrice.

**Proposition 1.2**

Si  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  est **différentiable** en  $a \in \mathcal{U}$ , alors

- $f$  est **continue** en  $a$ ;
- $f$  admet des dérivées en  $a$  selon tout vecteur  $v \in E$ ;
- $\forall v \in E, df(a) \cdot v = D_v f(a)$ .

**Définition 1.5 Différentiabilité sur un ouvert**

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est **différentiable** sur  $\mathcal{U}$  si  $f$  est différentiable en tout point de  $\mathcal{U}$ . L'application

$$df : \begin{cases} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, F) \\ a & \longmapsto & df(a) \end{cases}$$

s'appelle la **différentielle** de  $f$  sur  $\mathcal{U}$ .

**Proposition 1.3 Cas particuliers**

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ .

- Si  $f$  est **constante** sur  $\mathcal{U}$ , alors  $f$  est différentiable sur  $\mathcal{U}$  et  $df$  est **nulle** sur  $\mathcal{U}$ .
- Si  $f$  est la restriction à  $\mathcal{U}$  d'une **application linéaire** de  $E$  dans  $F$ , alors  $f$  est différentiable sur  $\mathcal{U}$  et  $df = f$ .
- Si  $\mathcal{U}$  est un intervalle ouvert de  $E = \mathbb{R}$ , alors  $f$  est différentiable en  $a \in \mathcal{U}$  si et seulement si  $f$  est dérivable en  $a$  et, dans ce cas,  $f'(a) = df(a) \cdot 1$ .

**Exemple 1.9**

Les applications  $\pi_i : (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mapsto x_i$  sont différentiables sur  $\mathbb{R}^p$  et  $d\pi_i = \pi_i$ .

**1.3 Lien avec les dérivées partielles****Proposition 1.4 Lien entre différentielle et dérivées partielles**

Soient  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ . Si  $f$  est **différentiable** en  $a$ , alors  $f$  admet des **dérivées partielles** en  $a$  dans la base  $(e_1, \dots, e_p)$  et

$$\forall v \in E, df(a) \cdot v = \sum_{j=1}^p \partial_j f(a) e_j^*(v)$$

ou plus simplement

$$df(a) = \sum_{j=1}^p \partial_j f(a) e_j^*$$

**REMARQUE.** On en déduit un lien entre les dérivées directionnelles et les dérivées partielles si la fonction est **différentiable**. En effet

$$\forall v \in E, D_v f(a) = df(a) \cdot v = \sum_{j=1}^p \partial_j f(a) e_j^*(v)$$

**REMARQUE.** Dans le cas où  $E = \mathbb{R}^n$ , les formes linéaires  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto x_i$  sont souvent notées  $dx_i$ . Dans ce cas, on peut écrire pour  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  différentiable en  $a \in \mathcal{U}$ ,

$$d(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

**Exemple 1.10**

Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, 2xy)$  Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On a vu que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 2(a, b) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 2(b, a)$$

Comme  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ ,

$$df(a, b) \cdot (h, k) = 2h(a, b) + 2k(b, a) = 2(ah + bk, bh + ak)$$



**ATTENTION !** Une fonction peut-être continue et admettre des dérivées selon tout vecteur sans pour autant être différentiable.

**Exemple 1.11**

Considérons la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2$  mais n'est pas différentiable en  $(0, 0)$ .

- Par opérations,  $f$  est clairement continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Par ailleurs, on a classiquement  $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, |f(x, y)| \leq \frac{1}{2}|y|$$

On en déduit que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

donc  $f$  est continue en  $(0, 0)$ .

- Par opérations,  $f$  admet clairement des dérivées directionnelles selon tout vecteur en tout point de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Soit  $u = (h, k)$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^2$ . Alors

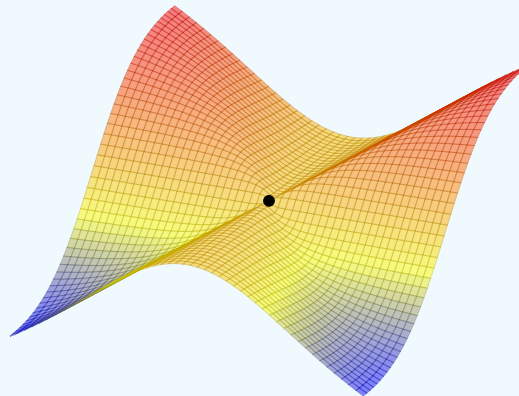
$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \frac{f(tu) - f(0, 0)}{t} = f(h, k) = f(u)$$

Ainsi  $f$  admet une dérivée en  $(0, 0)$  selon le vecteur  $u$  et  $D_u f(0, 0) = f(u)$ .

- Si  $f$  était différentiable en  $(0, 0)$ , alors on aurait

$$\forall u = (h, k) \in \mathbb{R}^2, D_u f(0, 0) = h \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = h D_{(1, 0)} f(0, 0) + k D_{(0, 1)} f(0, 0) = 0$$

Mais, par exemple,  $D_{(1, 1)} f(0, 0) = \frac{1}{2} \neq (0, 0)$ .

**Proposition 1.5 Matrice d'une différentielle dans un couple de bases**

Soient  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  une base de  $F$  et  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ . Notons  $(f_1, \dots, f_n)$  les coordonnées de  $f$  dans la base  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  (i.e.  $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ g$ ).

Si  $f$  est différentiable en  $a \in \mathcal{U}$ , alors la matrice de  $df(a)$  dans les bases  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  est  $(\partial_j f_i(a))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ .



**Définition 1.6 Matrice jacobienne**

Supposons  $E = \mathbb{R}^n$  et  $F = \mathbb{R}^p$ . Si  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est différentiable en  $a$ , la matrice de  $df(a)$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^n$  s'appelle la **matrice jacobienne** de  $f$  en  $a$ .

**Exemple 1.12**

L'application  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, xy)$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ . Sa matrice jacobienne en un point  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  est  $\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix}$ .

**Exemple 1.13**

On pose  $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y^2 > 0\}$ . L'application  $f : (x, y, z) \in \mathcal{U} \mapsto (\ln(x + y^2), e^{xz})$  est différentiable sur  $\mathcal{U}$ . Sa matrice jacobienne en un point  $(x, y, z) \in \mathcal{U}$  est  $\begin{pmatrix} \frac{1}{x + y^2} & \frac{2y}{x + y^2} & 0 \\ ze^{xz} & 0 & xe^{xz} \end{pmatrix}$ .

**1.4 Gradient d'une fonction numérique**

Dans ce paragraphe,  $F = \mathbb{R}$ .

**Définition 1.7 Gradient**

On suppose que  $E$  est un espace euclidien. Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  est différentiable en  $a \in \mathcal{U}$ , on appelle **gradient** de  $f$  en  $a$ , l'unique vecteur  $\nabla f(a)$  de  $E$  tel que

$$\forall v \in E, df(a) \cdot v = \langle \nabla f(a), v \rangle$$

**REMARQUE.** On peut toujours munir un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie d'une structure d'espace euclidien. En effet, si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $E$ , l'application

$$(x, y) \in E^2 \mapsto \sum_{k=1}^p e_k^*(x) e_k^*(y)$$

est un produit scalaire. De plus,  $(e_1, \dots, e_p)$  est alors une base orthonormale pour ce produit scalaire.

**Exemple 1.14 Gradient du carré de la norme**

Soit  $E$  un espace euclidien. Posons  $f : x \in E \mapsto \|x\|^2$ . Fixons  $a \in E$ .

$$\forall h \in E, f(a + h) = f(a) + 2\langle a, h \rangle + \|h\|^2$$

donc

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} f(a) + 2\langle a, h \rangle + o(h)$$

Ainsi  $f$  est différentiable en  $a$  et  $\nabla f(a) = 2a$ .

**Proposition 1.6 Coordonnées du gradient dans une base orthonormale**

On suppose que  $E$  est un espace euclidien. Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable en  $a \in \mathcal{U}$ . Les coordonnées de  $\nabla f(a)$  dans une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_p)$  de  $E$  sont les dérivées partielles de  $f$  dans cette base :

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^p \partial_j f(a) e_j$$

**REMARQUE.** Si  $E = \mathbb{R}^p$  est muni de son produit scalaire usuel, la base canonique est orthonormale. Par conséquent, si  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable en  $a \in \mathcal{U}$ , alors

$$\nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \leq j \leq n}$$

**Interprétation géométrique du gradient**

Si  $\nabla f(a) \neq 0_E$ ,  $\nabla f(a)$  est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de  $f$  en  $a$  est maximale. Il suffit en effet de remarquer que pour tout vecteur  $v$  unitaire

$$D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle \leq \| \nabla f(a) \| \| v \| = \| \nabla f(a) \|^2$$

avec égalité si et seulement si  $v$  et  $\nabla f(a)$  sont colinéaires et de même sens (inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité).

**Exemple 1.15**

Considérons l'application  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$ .  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2$  car polynomiale. On munit  $\mathbb{R}^2$  de son produit scalaire usuel de sorte que la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  est orthonormale. Alors

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (2x, 2y)$$

On peut retrouver la différentielle de  $f$ .

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, df(x, y) \cdot (h, k) = \langle \nabla f(x, y), (h, k) \rangle = 2(xh + yk)$$

**Exemple 1.16 Gradient et différentielle du déterminant**

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de son produit scalaire usuel  $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$  et on considère l'application  $\det : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(M)$ . Cette application est différentiable sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  car polynomiale en les coefficients de la matrice.

Fixons  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . En développant le  $\det(M)$  par rapport à sa  $j^{\text{ème}}$  colonne, on obtient

$$\det(M) = \sum_{i=1}^n M_{i,j} \text{com}(M)_{i,j}$$

On en déduit notamment que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \partial_{(i,j)} \det(M) = \text{com}(M)_{i,j}$$

où les  $\partial_{(i,j)} \det$  désignent les dérivées partielles de  $\det$  dans la base canonique  $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Comme cette base est orthonormée,

$$\nabla \det(M) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \text{com}(M)_{i,j} E_{i,j} = \text{com}(M)$$

On peut alors retrouver la différentielle du déterminant :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d(\det)(M) \cdot H = \langle \nabla \det(M), H \rangle = \text{tr}(\text{com}(M)^T H)$$

## 2 Opérations sur les fonctions différentiables

### Proposition 2.1 Combinaison linéaire

Soient  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  et  $g : \mathcal{U} \rightarrow F$ . Si  $f$  et  $g$  sont différentiables en  $a \in \mathcal{U}$ , alors pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda f + \mu g$  est différentiable en  $a$  et  $d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a)$ .

### Proposition 2.2

Soient  $F_1, \dots, F_p$  des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimensions finies,  $f_1, \dots, f_p$  des applications de  $\mathcal{U}$  à valeurs respectivement dans  $F_1, \dots, F_p$  et  $M : \prod_{i=1}^p F_i \rightarrow G$  une application multilinéaire. Si  $f_1, \dots, f_p$  sont différentiables en  $a \in \mathcal{U}$ , alors  $M(f_1, \dots, f_p)$  est différentiable en  $a$  et

$$d(M(f_1, \dots, f_p))(a) = M(df_1(a), f_2(a), \dots, f_p(a)) + M(f_1(a), df_2(a), \dots, f_p(a)) + \dots + M(f_1(a), \dots, f_{p-1}(a), df_p(a))$$

**REMARQUE.** De manière plus claire,

$$\forall h \in E, d(M(f_1, \dots, f_p))(a) \cdot h = M(df_1(a) \cdot h, f_2(a), \dots, f_p(a)) + \dots + M(f_1(a), \dots, f_{p-1}(a), df_p(a) \cdot h)$$

### Exemple 2.1

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ . Posons  $\varphi(x) = \langle f(x), x \rangle$  pour tout  $x \in E$ . Comme  $f$  et  $\text{Id}_E$  sont différentiables sur  $E$  en tant qu'applications linéaires,  $\varphi$  est également différentiable sur  $E$  car le produit scalaire est bilinéaire. De plus,  $df = f$  et  $d\text{Id}_E = \text{Id}_E$  de sorte que

$$\forall (x, h) \in E^2, d\varphi(x) \cdot h = \langle f(h), x \rangle + \langle f(x), h \rangle$$

### Proposition 2.3 Composition

Soient  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  et  $g : \mathcal{V} \rightarrow G$  telles que  $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ . Si  $f$  est différentiable en  $a \in \mathcal{U}$  et  $g$  est différentiable en  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  est différentiable en  $a$  et  $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$ .

**REMARQUE.** Soient  $\mathcal{E}$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{F}$  une base de  $F$  et  $\mathcal{G}$  une base de  $G$ . Si  $A$  est la matrice de  $df(a)$  dans les bases de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  et  $B$  est la matrice de  $dg(f(a))$  dans les bases  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ , alors  $BA$  est la matrice de  $d(g \circ f)(a)$  dans les bases  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{G}$ .

### Corollaire 2.1 Dérivée le long d'un arc

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\gamma : I \rightarrow E$  et  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  telles que  $\gamma(I) \subset \mathcal{U}$ . Si  $\gamma$  est dérivable en  $t \in I$  et  $f$  est différentiable en  $\gamma(t)$ , alors  $f \circ \gamma$  est dérivable en  $t$  et  $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ .

### Exemple 2.2 Dérivée le long d'une droite

Si  $\gamma(t) = x + th$ , alors  $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot h = D_h f(\gamma(t))$ .

**Exemple 2.3**

Si  $E = \mathbb{R}^p$  et  $\gamma = (x_1, \dots, x_p)$ , alors

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{j=1}^p x_j'(t) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))$$

**Corollaire 2.2 Dérivées partielles d'une composée**

Soient  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  et  $g : \mathcal{V} \rightarrow G$  telles que  $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ . On note  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  les dérivées partielles de  $f$  dans une base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  de  $E$  et  $\frac{\partial g}{\partial y_i}$  les dérivées partielles de  $g$  dans une base  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  de  $F$ . Si  $f$  est différentiable en  $a \in \mathcal{U}$  et si  $g$  est différentiable en  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  admet des dérivées partielles en  $a$  dans la base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  et

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \partial_j(g \circ f)(a) = \sum_{i=1}^n \partial_i g(f(a)) \partial_j f_i(a)$$

où  $(f_1, \dots, f_n)$  désignent les coordonnées de  $f$  dans la base  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  (i.e.  $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ f$ ).

**Méthode Règle de la chaîne**

Soient  $x_1, \dots, x_n$  sont des fonctions différentiables sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^m$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $f$  est une fonction différentiable sur un ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose de plus que  $(x_1, \dots, x_n)(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ . Alors

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial u_j}(u_1, \dots, u_m) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m)) \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(u_1, \dots, u_m)$$

où on considère les dérivées partielles dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$ .

Par abus de notation, on pourra tout simplement écrire

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$$

à condition de bien comprendre ce que l'on manipule.

**Exemple 2.4 Coordonnées polaires**

Soit  $f$  différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ . On pose

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2, g(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$$

avec

$$x(r, \theta) = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y(r, \theta) = r \sin \theta$$

D'après la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) \\ &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta) \\ &= -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \end{aligned}$$

Inversement, pour  $r \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \end{aligned}$$

**Exemple 2.5 Gradient en coordonnées polaires**

Soit  $f$  différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ . On pose

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2, g(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$$

avec

$$x(r, \theta) = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y(r, \theta) = r \sin \theta$$

On a montré précédemment que, pour  $r \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) &= -\sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) + \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \end{aligned}$$

En notant  $R$  la matrice de rotation d'angle  $\theta$ , on a donc

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \end{pmatrix} = R^{-1} \nabla f(x(r, \theta), y(r, \theta))$$

Ainsi en posant

$$\mathbf{u}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

les coordonnées de  $\nabla f(x(r, \theta), y(r, \theta))$  dans la base orthonormée  $(\mathbf{u}_\theta, \mathbf{v}_\theta)$  sont

$$\left( \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta), \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \right)$$

### 3 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

#### 3.1 Applications de classe $\mathcal{C}^1$

**Définition 3.1 Application de classe  $\mathcal{C}^1$** 

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$  si elle est différentiable sur  $\mathcal{U}$  et si  $df$  est continue sur  $\mathcal{U}$ .

**Théorème 3.1 Classe  $\mathcal{C}^1$  et dérivées partielles**

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ . Alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$  si et seulement si

- $f$  admet des dérivées partielles (dans une certaine base de  $E$ ) en tout point de  $\mathcal{U}$ ;
- ces dérivées partielles sont continues sur  $\mathcal{U}$ .



**ATTENTION !** Une fonction peut-être différentiable sans qu'elle soit de classe  $\mathcal{C}^1$ . Notamment, les dérivées partielles d'une application différentiable ne sont pas nécessairement continues.

**Exemple 3.1**

Considérons la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$  mais ses dérivées partielles n'y sont pas continues.

- Si l'on munit  $\mathbb{R}^2$  de la norme euclidienne,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, f(x, y) = \|(x, y)\|^2 \sin\left(\frac{1}{\|(x, y)\|^2}\right)$$

Comme  $\sin$  est bornée, il est clair que  $f(x, y) \underset{(x, y) \rightarrow (0, 0)}{=} o(\|(x, y)\|)$ . Ainsi  $f$  est bien différentiable en  $(0, 0)$  et  $df(0, 0)$  est nulle.

- Tout d'abord, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} &= x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} &= y \sin\left(\frac{1}{y^2}\right) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Pourtant,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ \forall y \in \mathbb{R}^*, \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) &= 2y \sin\left(\frac{1}{y^2}\right) - \frac{2}{y} \cos\left(\frac{1}{y^2}\right) \end{aligned}$$

donc  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)$  et  $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(0, y)$  n'admettent pas de limite en 0 car la fonction  $t \mapsto t \sin(1/t^2)$  admet une limite nulle en 0 mais la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t} \cos(1/t^2)$  n'admet pas de limite en 0. Ainsi  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  n'admettent pas de limite en  $(0, 0)$ . A fortiori, elles n'y sont pas continues.

**Proposition 3.1 Intégrale curviligne**

Soient  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$  et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ . Alors

$$f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

**Corollaire 3.1 Applications constantes**

On suppose  $\mathcal{U}$  **connexe par arcs**. Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$ . Alors  $f$  est constante sur  $\mathcal{U}$  si et seulement si  $df$  est nulle sur  $\mathcal{U}$ .

**3.2 Applications de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ )**

On peut définir des dérivées partielles de dérivées partielles.

**Définition 3.2 Dérivées partielles d'ordre  $k$** 

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ . On appelle **dérivée partielle d'ordre  $k$**  dans une base de  $E$  une dérivée partielle de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \left( \frac{\partial}{\partial x_{j_{k-1}}} \left( \dots \left( \frac{\partial f}{\partial x_{j_1}} \right) \right) \right) = \partial_{j_k} (\partial_{j_{k-1}} (\dots (\partial_{j_1} f)))$$

que l'on notera plus simplement

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \partial x_{j_{k-1}} \dots \partial x_{j_1}} = \partial_{j_k} \partial_{j_{k-1}} \dots \partial_{j_1} f$$

**REMARQUE.** A priori, l'ordre des indices compte. Dans la définition, on dérive d'abord par rapport à la  $j_1^{\text{ème}}$  coordonnée, puis par rapport à la  $j_2^{\text{ème}}$  coordonnée, ..., et enfin par rapport à la  $j_k^{\text{ème}}$  coordonnée.

**REMARQUE.**  $\partial_i(\partial_i f)$  se note plus simplement  $\partial_i^2 f$ . De manière générale,  $\partial_i^k f = \partial_i(\partial_i(\dots(\partial_i f)))$  ( $k$  dérivées partielles).

**REMARQUE.**  $\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$  se note plus simplement  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ . De manière générale,  $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \dots \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right) \right)$  ( $k$  dérivées partielles).

**Exemple 3.2**

Soit  $f : (x, y) \mapsto xy^3 \ln(x^2 + y)$  définie sur l'ouvert  $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y > 0\}$ . Alors  $f$  admet des dérivées partielles dans la base canonique en tout point de  $\mathcal{U}$  et

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y^3 \ln(x^2 + y) + \frac{2x^2 y^3}{x^2 + y} \\ \forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 3xy^2 \ln(x^2 + y) + \frac{xy^3}{x^2 + y} \end{aligned}$$

Ces dérivées partielles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en tout point de  $\mathcal{U}$  et pour tout  $(x, y) \in \mathcal{U}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{6xy^3}{x^2 + y} - \frac{4x^3 y^3}{(x^2 + y)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{6x^2 y^2}{x^2 + y} - \frac{2x^2 y^3}{(x^2 + y)^2} + 3y^2 \ln(x^2 + y) + \frac{y^3}{x^2 + y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{6x^2 y^2}{x^2 + y} - \frac{2x^2 y^3}{(x^2 + y)^2} + 3y^2 \ln(x^2 + y) + \frac{y^3}{x^2 + y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 6xy \ln(x^2 + y) + \frac{6xy^2}{x^2 + y} - \frac{xy^3}{(x^2 + y)^2} \end{aligned}$$

On constate notamment que  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ , ce qui n'est pas évident a priori même si ce n'est pas le fruit du hasard...



**Définition 3.3 Applications de classe  $\mathcal{C}^k$** 

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) sur  $\mathcal{U}$  si toutes ses dérivées partielles d'ordre  $k$  existent et sont continues sur  $\mathcal{U}$ .

On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{U}$  si elle est de classe  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

**Exemple 3.3**

Toute application polynomiale sur  $\mathbb{R}^n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 3.2 Schwarz**

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathcal{U}$ . Alors

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$$



**ATTENTION !** L'hypothèse que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  est primordiale.

**Exemple 3.4**

Soit en effet

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Tout d'abord,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  existe en  $(x, y) \neq (0, 0)$  par opérations et en  $(0, 0)$  (taux d'accroissement). De plus

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0 \end{aligned}$$

Comme  $f(x, y) = -f(y, x)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existe également en tout point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x) = -\frac{x(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= -\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

A l'aide de taux d'accroissement, on montre que  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  existent et que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} = 1 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$$

Le théorème de Schwarz permet en particulier d'affirmer que  $f$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Opérateurs différentiels

Hormis le gradient, on peut définir d'autres opérateurs différentiels.

- Si  $f = (f_1, \dots, f_n)$  est un **champ de vecteurs** différentiable, autrement dit une application différentiable de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on peut définir sa **divergence** :

$$\mathbf{div} f = \sum_{i=1}^n \partial_i f_i$$

Par exemple, si  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$  est un champ électrique,

$$\mathbf{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

- Si  $f = (f_x, f_y, f_z)$  est un champ de vecteurs différentiable de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ , on peut définir son **rotationnel** :

$$\mathbf{rot} f = \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right)$$

- Si  $f$  une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , on peut définir son **laplacien** :

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f$$

Par exemple, si  $V = (V_x, V_y, V_z)$  est un potentiel,

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

#### Exercice 3.1

1. Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que

$$\mathbf{div}(\nabla f) = \Delta f$$

2. Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que

$$\mathbf{rot}(\nabla f) = 0$$

3. Soit  $f = (f_x, f_y, f_z)$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} f) = \nabla(\mathbf{div} f) - \Delta f_x - \Delta f_y - \Delta f_z$$

### 3.3 Opérations

#### Proposition 3.2 Combinaison linéaire

Soient  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  et  $g : \mathcal{U} \rightarrow F$ . Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathcal{U}$ , alors pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda f + \mu g$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathcal{U}$ .

**Proposition 3.3**

Soient  $f: \mathcal{U} \rightarrow F$ ,  $g: \mathcal{U} \rightarrow G$  et  $B: F \times G \rightarrow H$  une application **bilinéaire**. Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathcal{U}$ , alors  $B(f, g)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathcal{U}$ .

**Proposition 3.4 Composition**

Soient  $f: \mathcal{U} \rightarrow F$  et  $g: \mathcal{V} \rightarrow G$  telles que  $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathcal{U}$  et  $g$  est différentiable sur  $\mathcal{V}$ , alors  $g \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathcal{U}$ .

## 4 Tangence et orthogonalité

### 4.1 Vecteurs tangents

**Définition 4.1 Vecteur tangent à une partie**

Soient  $X$  une partie de  $E$  et  $x \in X$ . On dit que  $v \in E$  est **tangent** à  $X$  en  $x$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  et un arc  $\gamma: ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow X$  dérivable en 0 tel que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma'(0) = v$ .

**Notation 4.1**

On note  $T_x X$  l'ensemble des vecteurs tangents à  $X$  en  $x$ .

**REMARQUE.** Si  $x \in \overset{\circ}{X}$ , alors tout vecteur est tangent à  $X$  en  $x$  i.e.  $T_x X = E$ .

Soit  $v \in E$ . Comme  $x \in X$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset X$ . Posons  $\varepsilon = \frac{r}{\|v\| + 1}$ . Alors  $\gamma: ]-\varepsilon, \varepsilon[ \mapsto x + tv$  est bien à valeurs dans  $B(x, r) \subset X$ ,  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma'(0) = v$ .

**Exemple 4.1 Vecteurs tangents à la sphère unité**

On suppose que  $E$  est un espace euclidien. Soit  $S = \{x \in E, \|x\| = 1\}$ . Donnons-nous  $x \in S$ .

Soit  $v$  un vecteur tangent à  $S$  en  $x$ . Alors il existe  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow S$  dérivable en 0 tel que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma'(0) = v$ . L'application  $\varphi = \|\gamma\|^2 = \langle \gamma, \gamma \rangle$  est donc constante égale à 1. Par bilinéarité du produit scalaire,  $\varphi$  est dérivable en 0 et

$$0 = \varphi'(0) = 2\langle \gamma'(0), \gamma(0) \rangle = \langle v, x \rangle$$

Ainsi  $v \in \text{vect}(x)^\perp$ .

Réciproquement soit  $v \in \text{vect}(x)^\perp$ .

- Posons  $\varepsilon = \frac{\|x\|}{\|v\| + 1}$ . Alors,

$$\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[, \|x + tv\| \geq \|x\| - |t|\|v\| > \|x\| - \varepsilon\|v\| = \frac{\|x\|}{\|v\| + 1} \geq 0$$

donc  $\gamma : t \mapsto \frac{x + tv}{\|x + tv\|}$  est bien défini sur  $]-\varepsilon, \varepsilon[$  à valeurs dans  $S$ .

- Comme  $\|x\| = 1$ ,  $\gamma(0) = x$ .
- Comme  $\|x\| = 1$  et  $\langle x, v \rangle = 0$ ,  $\|x + tv\| = \sqrt{1 + t^2\|v\|^2}$ . L'application  $\varphi : t \mapsto x + tv$  est dérivable en 0 et  $\varphi'(0) = v$  et l'application  $\psi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + t^2\|v\|^2}}$  est également dérivable en 0 et  $\psi'(0) = 0$ . Par opérations,  $\gamma$  est dérivable en 0 et

$$\gamma'(0) = \varphi(0)\psi'(0) + \varphi'(0)\psi(0) = v$$

Ainsi  $v$  est bien tangent à  $S$  en  $x$ .

Par double inclusion,  $T_x S = \text{vect}(x)^\perp$ .

**REMARQUE.** De manière générale, si  $x \in S(a, r)$  (sphère de centre  $a$  et de rayon  $r$ ),  $T_x S(a, r) = \text{vect}(x - a)^\perp$ .

**Proposition 4.1 Cas du graphe d'une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$** 

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable sur  $\Omega$ . Notons  $X$  le graphe de  $f$ , c'est-à-dire

$$X = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^3$$

Alors pour tout  $a \in \Omega$ , les vecteurs tangents à  $X$  en  $a$  sont les vecteurs  $(v, df(a) \cdot v) = (v, D_v f(a))$  où  $v \in E$ .

**REMARQUE.** Notamment,  $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a)\right)$  et  $\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$  sont des vecteurs tangents à  $X$  en  $a$ .

### Plan tangent

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable sur  $\Omega$ . L'ensemble des vecteurs tangents en  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  (avec  $(x_0, y_0) \in \Omega$ ) au graphe de  $f$  est le plan vectoriel

$$P = \text{vect} \left( \left( 1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right), \left( 0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \right)$$

On appelle **plan affine tangent** en  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  au graphe de  $f$  le plan affine  $\mathcal{P} = (x_0, y_0, z_0) + P$ . On obtient une équation cartésienne de  $\mathcal{P}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \mathcal{P} &\iff (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \in \text{vect} \left( \left( 1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right), \left( 0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \right) \\ &\iff \begin{vmatrix} x - x_0 & 1 & 0 \\ y - y_0 & 0 & 1 \\ z - f(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff z = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

On peut également remarquer que  $\mathcal{P}$  est le plan passant par  $(x_0, y_0, z_0)$  et de vecteur normal  $\left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$ .

**REMARQUE.** On notera l'extrême similitude de cette équation avec l'équation de la tangente au graphe d'une fonction dérivable  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en un point  $(x_0, f(x_0))$ , à savoir

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

#### Exemple 4.2

Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x^2 + y^2$ . Le plan affine tangent au graphe de  $f$  en  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  admet pour équation

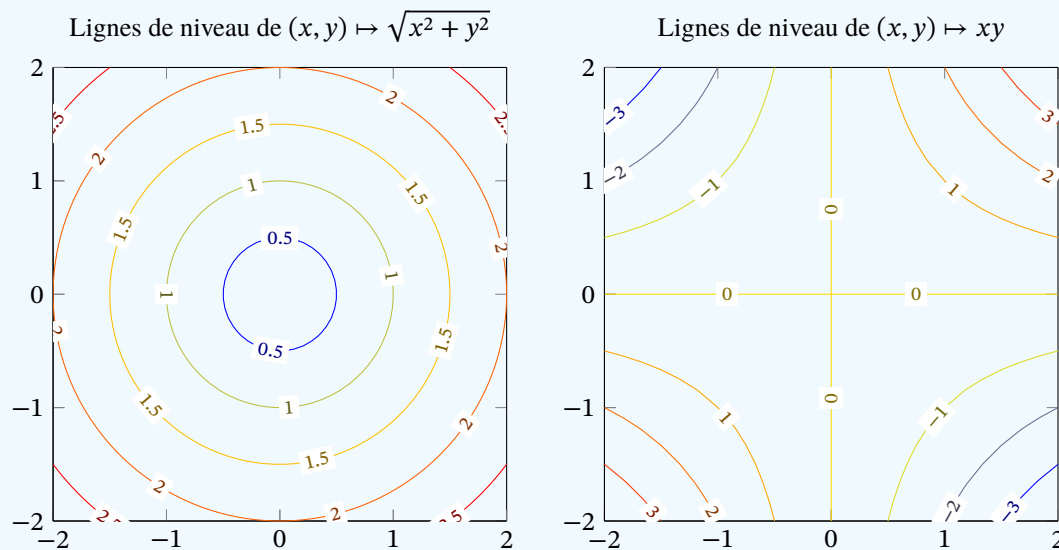
$$z = x_0^2 + y_0^2 + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$$

## 4.2 Lignes de niveau

### Définition 4.2 Ligne de niveau

Soit  $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ . On appelle ligne de niveau  $k \in \mathbb{R}$  de  $f$  l'ensemble

$$E_k = \{x \in \mathcal{U}, f(x) = k\}$$

**Exemple 4.3****Proposition 4.2 Vecteurs tangents à une ligne de niveau**

Soient  $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $X$  une ligne de niveau de  $g$  et  $x \in X$  tel que  $dg(x) \neq 0$ . Alors  $T_x X = \text{Ker } dg(x)$ .

**Proposition 4.3 Gradient et ligne de niveau**

On suppose  $E$  euclidien. Soient  $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $X$  une ligne de niveau de  $g$  et  $x \in X$  tel que  $\nabla g(x) \neq 0$ . Alors  $T_x X = \text{vect}(\nabla g(x))^\perp$ .

**Exemple 4.4 Plan tangent à une surface de  $\mathbb{R}^3$** 

Si  $X$  est une surface de  $\mathbb{R}^3$  d'équation cartésienne  $g(x, y, z) = 0$  i.e.

$$X = \{(x, y, z) \in \mathcal{U}, g(x, y, z) = 0\}$$

alors le plan affine tangent à  $X$  en  $(x_0, y_0, z_0)$  est

$$(x_0, y_0, z_0) + \text{vect}(\nabla g(x_0, y_0, z_0))^\perp = (x_0, y_0, z_0) + \text{vect}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)^\perp$$

Il a donc pour équation

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

**REMARQUE.** Notamment  $X$  est le graphe d'une application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , alors  $X$  est la ligne de niveau 0 de l'application  $g : (x, y, z) \mapsto f(x, y) - z$ . On en déduit que le plan affine tangent à  $X$  en un point  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  est le plan passant par ce point et de vecteur normal

$$\nabla g(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, f(x_0, y_0)), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, f(x_0, y_0)), \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, f(x_0, y_0))\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$$

## 5 Optimisation des fonctions numériques

Dans tout ce paragraphe,  $F = \mathbb{R}$ .

### 5.1 Point critique

#### Définition 5.1 Point critique

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  est différentiable en  $a \in \mathcal{U}$ , on dit que  $a$  est un **point critique** de  $f$  si  $df(a) = 0_{E^*}$ .

**REMARQUE.**  $a$  est un point critique de  $f$  si et seulement si toutes les dérivées partielles de  $f$  en  $a$  sont nulles.

**REMARQUE.** Si  $E$  est un espace euclidien (on peut toujours le supposer),  $a$  est un point critique de  $f$  si et seulement si  $\nabla f(a) = 0_E$ .

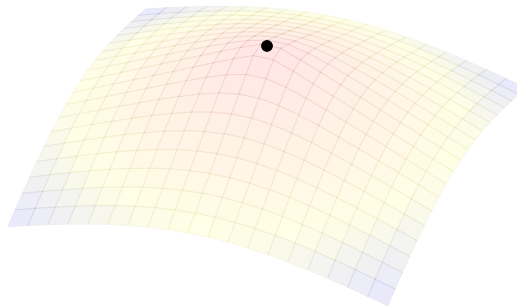
#### Exemple 5.1

Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$ . Puisque  $\nabla f(x, y) = 2(x, y)$ , l'unique point critique de  $f$  est  $(0, 0)$ .

#### Rappel Extremum local

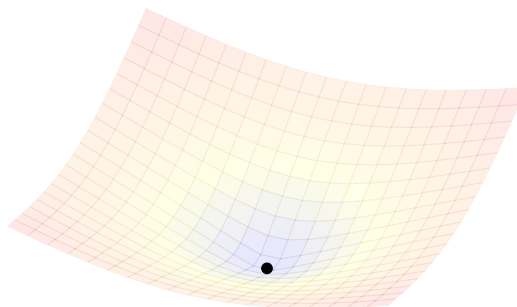
On dit que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  admet un **maximum local** en  $a \in D$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

- $B(a, \varepsilon) \subset D$ ;
- $\forall x \in B(a, \varepsilon), f(x) \leq f(a)$ .



On dit que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  admet un **minimum local** en  $a \in D$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

- $B(a, \varepsilon) \subset D$ ;
- $\forall x \in B(a, \varepsilon), f(x) \geq f(a)$ .



Si  $D$  est **ouvert**, il existe toujours  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(a, \varepsilon) \subset D$ . De manière générale, on ne parle d'extremum local en  $a \in D$  que si  $a$  est un point **intérieur** à  $D$ .



**Proposition 5.1 Condition nécessaire d'existence d'un extremum local**

Soit  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable en  $a \in \mathcal{U}$ . Si  $f$  est différentiable en  $a$  et admet un **extremum local** en  $a$ , alors  $a$  est un **point critique** de  $f$ .



**ATTENTION !** La réciproque est fausse. Considérons  $f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$ . Alors  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2$  et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \nabla f(x, y) = 2(x, -y)$$

Ainsi  $(0, 0)$  est bien l'unique point critique de  $f$ . Cependant

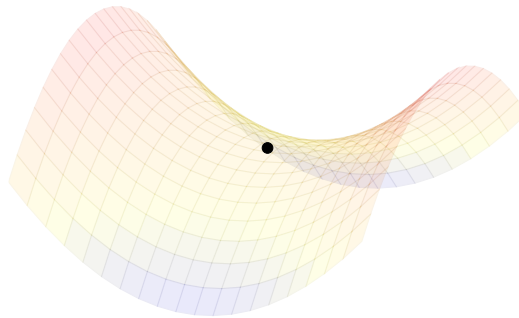
$$\forall \varepsilon > 0, f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > 0 = f(0, 0)$$

donc  $f$  n'admet pas de maximum local en  $(0, 0)$  et

$$\forall \varepsilon > 0, f(0, \varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0 = f(0, 0)$$

donc  $f$  n'admet pas non plus de minimum local en  $(0, 0)$ .

La fonction  $f$  n'admet donc pas d'extrema locaux sur  $\mathbb{R}^2$  (et donc pas non plus d'extrema globaux) comme la représentation graphique suivante permet de s'en convaincre.

**Méthode Recherche d'extrema locaux**

1. On recherche les points critiques.
2. Pour chaque point critique  $a$ , on étudie le signe de  $f(x) - f(a)$  pour  $x$  au voisinage de  $a$ . Pour simplifier, on pose généralement  $u = x - a$  et on étudie le signe de  $f(a + u) - f(a)$  pour  $u$  au voisinage de  $0_{\mathbb{E}}$ .

**Exemple 5.2**

Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ .  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  est un point critique de  $f$  si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Ce système équivaut à

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système i.e. l'unique point critique de  $f$  est  $(0, 3)$ . Pour  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$f(0 + u, 3 + v) - f(0, 3) = u^2 + uv + v^2 = \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 \geq 0$$

Ainsi  $f$  admet un minimum local (et même global) en  $(0, 3)$ .

**Méthode Recherche d'extrema globaux**

Soit  $D$  une partie de  $E$  (non nécessairement ouverte). Les extrema globaux d'une fonction  $f$  à valeurs réelles sur un domaine  $D$  sont

- soit atteints sur  $D \setminus \mathring{D}$ ;
- soit atteints sur  $\mathring{D}$ , auquel cas ce sont des extrema locaux et donc **nécessairement** atteints en des points critiques de  $f$ .

**Exemple 5.3**

On recherche les extrema globaux de  $f \mapsto xy(1 - x - y)$  sur

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

- Tout d'abord,  $D$  est compact et  $f$  est continue donc  $f$  admet bien un minimum global et un maximum global sur  $D$ .
- On remarque d'abord que  $f$  est nulle sur la frontière de  $D$  (puisque alors  $x = 0, y = 0$  ou  $x + y = 1$ ). De plus,  $f$  est clairement positive sur  $D$  donc  $\min_D f = 0$  et ce minimum est atteint en tout point de  $D$ .
- Recherchons les points critiques de  $f$  sur  $\overset{\circ}{D}$ . On résout le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

qui équivaut à

$$\begin{cases} y(1 - 2x - y) = 0 \\ x(1 - x - 2y) = 0 \end{cases}$$

Puisque l'on se situe sur la frontière de  $D$ ,  $x > 0$  et  $y > 0$  donc le système équivaut à

$$\begin{cases} 1 - 2x - y = 0 \\ 1 - x - 2y = 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est  $(1/3, 1/3)$  qui appartient bien à  $D$ . Comme  $f(1/3, 1/3) > 0$ , le maximum de  $f$  ne peut être atteint sur la frontière de  $D$ . Ce maximum global est donc un maximum local qui ne peut être atteint qu'en l'unique point critique  $(1/3, 1/3)$  de  $f$  sur  $\overset{\circ}{D}$ . On en déduit que  $\max_D f = f(1/3, 1/3) = 1/27$ .

**5.2 Optimisation sous contrainte****Proposition 5.2**

Soient  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $X \subset \mathcal{U}$ . Si la restriction de  $f$  à  $X$  admet un extremum local en  $x \in X$  et si  $f$  est différentiable en  $x$ , alors  $df(x)$  est nulle sur  $T_x X$ .

**Théorème 5.1 Extrema liés**

Soient  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On pose  $X = g^{-1}(\{0\})$ . Si la restriction de  $f$  à  $X$  admet un extremum local en  $x \in X$  et  $dg(x) \neq 0$ , alors  $df(x)$  est colinéaire à  $dg(x)$ .

**REMARQUE.** Si  $E$  est un espace euclidien, alors la condition « $df(x)$  colinéaire à  $dg(x)$ » équivaut à la condition « $\nabla f(x)$  colinéaire à  $\nabla g(x)$ ».

**Méthode** Extrema locaux sous contrainte

Pour déterminer les extrema locaux d'une fonction  $f$  soumis à la contrainte  $g(x) = 0$ , on résout le système

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

sous réserve que  $\nabla f(x) \neq 0$ .

**Exemple 5.4**

Soit  $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 + z^2$  et  $P$  le plan d'équation  $x + 2y + 3z = 7$ . Dans la suite, on munit  $\mathbb{R}^3$  de sa structure euclidienne canonique. On souhaite déterminer le minimum éventuel de  $f$  sur  $P$ .

Justifions déjà l'existence de ce minimum. Remarquons déjà que  $P = g^{-1}(\{0\})$  avec  $g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x + 2y + 3z - 1$ . Notamment  $P$  est fermé car  $g$  est continue. Posons  $K = [-7, 7]^3$ . Il est clair que  $K$  est compact donc  $K \cap P$  est fermé comme intersection d'un compact et d'un fermé. Ainsi  $f$  admet un minimum sur  $K \cap P$ . De plus, pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus K$ ,  $f(x, y, z) > f(7, 0, 0)$  et  $(7, 0, 0) \in P$ . Ceci justifie que le minimum de  $f$  sur  $K \cap P$  est bien le minimum de  $f$  sur  $P$  : la restriction de  $f$  à  $P$  admet donc un minimum en  $(a, b, c) \in P$ .

$f$  est bien de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^3$  et pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\nabla f(x, y, z) = 2(x, y, z)$ .  $g$  est également de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^3$  et pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\nabla g(x, y, z) = (1, 2, 3) \neq (0, 0, 0)$ . D'après le théorème des extrema liés,  $\nabla f(a, b, c)$  est colinéaire à  $\nabla g(a, b, c)$  i.e. il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $(a, b, c) = \lambda(1, 2, 3)$ . Mais comme  $(a, b, c) \in P$ ,  $a + 2b + 3c = 7$  i.e.  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Ainsi le minimum de la restriction de  $f$  à  $P$  est atteint en  $\frac{1}{2}(1, 2, 3)$  : il vaut  $f\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}$ .

**Exemple 5.5**

Soit  $f$  un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien  $E$ . On pose  $\varphi : x \in E \mapsto \langle f(x), x \rangle$ . On a déjà montré que  $\varphi$  était de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $E$  est que  $\nabla f(x) = 2f(x)$  pour tout  $x \in E$ .

La sphère unité  $S$  de  $E$  est compacte et  $f$  est continue donc la restriction de  $f$  à  $S$  admet un maximum en un point  $u \in S$ . Remarquons que  $S = g^{-1}(0)$  avec  $g : x \in E \mapsto \|x\|^2 - 1$ . De plus,  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $E$  et pour tout  $x \in E$ ,  $dg(x) = 2x$ . Notamment,  $g$  ne s'annule pas sur  $S$ .

D'après le théorème des extrema liés,  $df(u)$  est colinéaire à  $dg(u)$  i.e.  $f(u)$  est colinéaire à  $u$  :  $u$  est donc un vecteur propre de  $f$ . On peut alors prouver le théorème spectral par récurrence sur la dimension de  $E$ .

**5.3 Hessienne****Définition 5.2 Matrice hessienne**

Soient  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$ . On appelle **matrice hessienne** de  $f$  au point  $x \in \mathcal{U}$  la matrice

$$H_f(x) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

**REMARQUE.** En vertu du théorème de Schwarz, la matrice hessienne est une matrice **symétrique réelle**. Notamment, le théorème spectral permet d'affirmer qu'elle est orthodiagonalisable.

**Proposition 5.3 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2**

Soient  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $x \in \mathcal{U}$ . Alors

$$f(x+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x) \cdot h, h \rangle + o(\|h\|^2)$$

**REMARQUE.** On munit implicitement  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique et on identifie  $H_f(x)$  à l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  qui lui est canoniquement associé.

**REMARQUE.** En identifiant les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  aux matrices colonnes de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , le développement limité à l'ordre 2 peut également s'écrire :

$$f(x+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(x) + \nabla f(x)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(x) h + o(\|h\|^2)$$

**Proposition 5.4 Condition nécessaire pour un extremum local**

Soient  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$ . Si  $f$  admet un **extremum local** en  $x \in \mathcal{U}$ , alors  $x$  est un **point critique** de  $f$ . De plus,

- si  $f$  admet un **minimum local** en  $x$ , alors  $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ;
- si  $f$  admet un **maximum local** en  $x$ , alors  $-H_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

**REMARQUE.** Dans le cas  $n = 2$ , si  $x$  est un point critique de  $f$  tel que  $\det(H_f(x)) < 0$ ,  $f$  ne peut admettre un extremum local en  $x$  car  $H_f(x)$  possède alors deux valeurs propres non nulles de signes opposés.

**Proposition 5.5 Condition suffisante pour un extremum local**

Soient  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $x \in \mathcal{U}$ .

- Si  $x$  est un point critique de  $f$  et si  $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , alors  $f$  admet un **minimum local strict** en  $x$ .
- Si  $x$  est un point critique de  $f$  et si  $-H_f(x) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , alors  $f$  admet un **maximum local strict** en  $x$ .

**REMARQUE.** Dire que  $f$  admet un **minimum local strict** en  $x$ , signifie qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall h \in B(0, \varepsilon) \setminus \{0\}, f(x+h) > f(x)$$

Dire que  $f$  admet un **maximum local strict** en  $x$ , signifie qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall h \in B(0, \varepsilon) \setminus \{0\}, f(x+h) < f(x)$$

**REMARQUE.** Dans le cas  $n = 2$ ,

$$\begin{aligned} H_f(x) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) &\iff (\det(H_f(x)) > 0 \text{ ET } \text{tr}(H_f(x)) > 0) \\ -H_f(x) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) &\iff (\det(H_f(x)) > 0 \text{ ET } \text{tr}(H_f(x)) < 0) \end{aligned}$$

**Exemple 5.6**

Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 2x^3 - 6xy + 3y^2$ .  $f$  est clairement de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  car polynomiale.

Les points critiques de  $f$  sont les solutions du système  $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$  i.e.  $\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$ . On en déduit que les points

critiques de  $f$  sont  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ .

De manière générale,  $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ .

Notamment,  $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ . Alors  $\det(H_f(0, 0)) = -36 < 0$  donc  $H_f(0, 0)$  admet deux valeurs propres non nulles de signes opposés. Ainsi  $H_f(0, 0) \notin \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$  et  $-H_f(0, 0) \notin \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ . Par conséquent,  $f$  n'admet pas d'extremum local en  $(0, 0)$ .

Par ailleurs,  $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$  donc  $\det(H_f(1, 1)) = 36 > 0$  et  $\text{tr}(H_f(1, 1)) = 18 > 0$ . On en déduit que  $H_f(1, 1) \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ . Ainsi  $f$  admet un minimum local strict en  $(1, 1)$ .

Le tracé des lignes de niveau de  $f$  permet sans doute de mieux comprendre la situation.

