Devoir à la maison n°14 : corrigé

Solution 1.

1. Il est clair que $\lim_0 g = 0$. g est donc prolongeable par continuité en 0.

2. g est dérivable sur $]0,1]$ et pour tout $x \in]0,1]$,
$$g'(x) = 1 + \ln(x)$$
Ainsi g' est strictement négative sur $]0, e^{-1}[$, s'annule en e^{-1} et est strictement positive sur $]e^{-1}, 1]$.
g est donc strictement décroissante sur $[0, e^{-1}]$ et strictement croissante sur $[e^{-1}, 1]$.

3. Tout d'abord, $-g(x) - x = -x(\ln x + 1) \geq 0$ pour tout $x \in]0, e^{-1}]$. En particulier, $-g(t_0) \geq t_0$. On a évidemment $t_0 \leq t_n \leq e^{-1}$ pour $n = 0$. Supposons que ce soit vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de $-g$ sur $[0, e^{-1}]$, $-g(t_0) \leq -g(t_n) \leq -g(e^{-1})$ donc a fortiori $t_0 \leq t_{n+1} \leq e^{-1}$. On a donc bien montré par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_0 \leq t_n \leq e^{-1}$$

4. Fixons $x \in [t_0, e^{-1}]$. Comme g est de classe $\mathscr{C}^2$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) sur $[x, e^{-1}]$, on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.
$$\left|g(x) - g(e^{-1}) - g'(e^{-1})(x - e^{-1})\right| \leq \frac{|x - e^{-1}|^2 \max_{[x,e^{-1}]} |g''|}{2}$$
Or $g'(e^{-1}) = 1 + \ln(e^{-1}) = 0$ et
$$\max_{[x,e^{-1}]} |g''| = \max_{t \in [x,e^{-1}]} \frac{1}{t} = \frac{1}{x \leq \frac{1}{t_0}}$$
On en déduit que
$$\left|g(x) - g(e^{-1})\right| \leq \frac{|x - e^{-1}|^2}{2t_0}$$

5. D'après la question précédente,
$$|t_1 - e^{-1}| = |g(t_0) - g(e^{-1})| \leq \frac{|t_0 - e^{-1}|^2}{2t_0} = \frac{(e^{-1} - t_0)^2}{2t_0}$$
Donc l'inégalité à établir est vraie lorsque $n = 1$.
Supposons qu'elle le soit pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors
$$|t_{n+1} - e^{-1}| = |g(t_n) - g(e^{-1})| \leq \frac{|t_n - e^{-1}|^2}{2t_0} \leq \frac{1}{2t_0}\left(2t_0\left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n}\right)^2 = 2t_0\left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^{n+1}}$$
Par récurrence, l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Remarquons que
$$\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0} = \frac{e^{-1}}{2t_0} - \frac{1}{2}$$
Puisque $t_0 \in \left]\frac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$,
$$\frac{1}{2} < \frac{e^{-1}}{2t_0} < \frac{3}{2}$$
Ainsi
$$0 < \frac{e^{-1} - t_0}{2t_0} < 1$$
Posons $q = \frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}$. La suite géométrique (q^n) converge donc vers 0. Sa suite extraite (q^{2^n}) converge également vers 0. Puisque
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |t_n - e^{-1}| \leq 2t_0 q^n$$
la suite (t_n) converge vers e^{-1}.

Solution 2.

1. On reconnaît une somme de Riemann. Puisque $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $[0,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \int_0^1 \ln(1+x)\, \mathrm{d}x = [(1+x)\ln(1+x)-(1+x)]_0^1 = 2\ln 2 - 1 = \ln(4)-1$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord,

$$\begin{aligned}\ln(u_n) &= \ln(4)+\ln(n)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(k)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln(k)\\ &= \ln(4)+\ln(n)-\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\ln(k)\\ &= \ln(4)+\ln(n)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\\ &= \ln(4)+\ln(n)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n)\\ &= \ln(4)-\mathrm{S}_n\end{aligned}$$

Ainsi la suite $(\ln(u_n))$ converge vers 1. On en déduit que la suite (u_n) converge vers e.

Solution 3.

1. Il est clair que $\lim_0 f = 0$ de sorte que f est prolongeable par continuiét en 0. Une étude rapide montre que f est strictement croissante sur $[0, e^{-1}]$ et strictement décroissante sur $[e^{-1}, 1]$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Comme exp est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,t]$, on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left|e^t - \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\right| \le \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\max_{[0,t]}\left|\exp^{(n+1)}\right|$$

Or $t \ge 0$ donc $|t| = t$ et

$$\max_{[0,t]}\left|\exp^{(n+1)}\right| = \max_{[0,t]}\exp = e^t$$

Finalement,

$$|\mathrm{R}_n(t)| \le \frac{t^{n+1}e^t}{(n+1)!}$$

3.
$$\left|\mathrm{I}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\mathrm{I}_{k,k}\right| = \left|\int_0^1\left(e^{f(x)}\,\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n}\int_0^1\frac{(f(x))^k}{k!}\right)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^1 \mathrm{R}_n(f(x))\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^1 |\mathrm{R}_n(f(x))|\,\mathrm{d}x$$

Soit $x \in [0,1]$. Alors $f(x) \ge 0$ et, d'après la question **2**,

$$|\mathrm{R}_n(f(x))| \le \frac{(f(x))^{n+1}e^{f(x)}}{(n+1)!}$$

D'après les variations de f, $0 \le f(x) \le f(e^{-1} = e^{-1}$ donc

$$|\mathrm{R}_n(f(x))| \le \frac{(e^{-1})^{n+1}e^{e^{-1}}}{(n+1)!} = \frac{e^{e^{-1}}}{e^{n+1}(n+1)!}$$

Finalement,

$$\left|\mathrm{I}-\sum_{k=0}^{n}\int_0^1(-1)^k\mathrm{I}_{k,k}\right| \le \int_0^1\frac{e^{e^{-1}}}{e^{n+1}(n+1)!}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{e^{-1}}}{e^{n+1}(n+1)!}$$

4. Par intégration par parties,

$$\mathrm{I}_{p,q} = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(\ln x)^q\right]_0^1 - \int_0^1\frac{x^{p+1}}{p+1}\cdot q\cdot\frac{1}{x}\cdot(\ln x)^{q-1} = -\frac{q}{p+1}\mathrm{I}_{p,q-1}$$

Fixons $p \in \mathbb{N}$. Par télescopage

$$\mathrm{I}_{p,q} = \mathrm{I}_{p,0}\prod_{k=1}^{q}\frac{\mathrm{I}_{p,k}}{\mathrm{I}_{p,k-1}} = \frac{1}{p+1}\prod_{k=1}^{q}\frac{-k}{p+1} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{p+1}}$$

5. Notamment pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{k,k} = \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{I} - \sum_{k=0}^{n} \frac{-1)^k}{k!}\mathrm{I}_k = \mathrm{I} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{k+1}} = \mathrm{I} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^k}$$

puis, d'après la question **3**

$$\left|\mathrm{I} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^k}\right| \leq \frac{e^{e^{-1}}}{e^{n+1}(n+1)!}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{e^{-1}}}{e^{n+1}(n+1)!} = 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^k} = \mathrm{I}$$

Ainsi la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} = \mathrm{I}$.