Séries

Exercice 1.

Déterminer, en fonction de $\alpha > 0$, la nature de la série de terme général

$$u_n = \cos^n(1/n^\alpha).$$

Exercice 2.

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n+1}}.$$

Exercice 3.

Convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

Exercice 4.

Soient a, b et $c > 0$. Etudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = a^{1/n} - \frac{b^{1/n} + c^{1/n}}{2}.$$

Exercice 5.

Nature de la série de terme général $u_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1+1/n}$.

Exercice 6.

Nature de la série de terme général : $u_n = e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 7.

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = (\ln(n))^{-\ln(n)}$.

Exercice 8.

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \tan\left(\pi(7+4\sqrt{3})^n\right)$.

Exercice 9.☆

Soit $a > 0$. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$.

Exercice 10.

Soient a et b dans $\mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2).$$

Exercice 11.

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

Exercice 12.

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}$ où $a, b > 0$.

Exercice 13.

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!}$ suivant les valeurs de $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 14.

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} u_p$. Comparer la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{S_n}$.

Exercice 15.

Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ des séries à termes réels strictement positifs. On suppose que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+2}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+2}}{v_n}$$

Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Exercice 16.

1. Soient (u_n) et (v_n) de suites de réels strictement positifs vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang. Montrer que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.
2. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
   a. On suppose $\alpha > 1$. A l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
   b. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.
   c. On suppose $\alpha = 1$. Montrer à l'aide d'exemples qu'on ne peut rien conclure en général.
3. Application. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$.

Exercice 17.

Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge. Etudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$ | **2.** $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{1+a_n}$ | **3.** $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n a_{2n}$ | **4.** $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$

Exercice 18.

Soient $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(B_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites complexes. On définit deux suites $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ de la manière suivante :
$$\forall n \geqslant n_0,\ A_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k,\ b_n = B_{n+1} - B_n$$

1. Montrer que $\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$ pour tout $n \geqslant n_0$.
2. Utiliser la question précédente pour étudier la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin n}{n}$.
3. De manière générale, montrer que si (B_n) converge vers 0, si (A_n) est bornée et si $\sum_{n\geqslant n_0} b_n$ est absolument convergente, alors $\sum_{n\geqslant n_0} a_n B_n$ est convergente.

Exercice 19.

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ des séries à termes strictement positifs vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

1. Montrer que si $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge également.
2. Montrer que si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge également.

Exercice 20.

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.

1. Montrer que la série $\sum \max(u_n, v_n)$ converge.
2. Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.
3. On suppose que $u_n + v_n$ ne s'annule pas. Montrer que la série $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ converge.

EXERCICE 21.

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes *strictement positifs*.

1. Montrer que si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite $l < 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
2. Montrer que si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite $l > 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.
3. Montrer à l'aide de deux exemples que l'on ne peut pas conclure si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet 1 pour limite.
4. Étudier la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^n}$.

EXERCICE 22.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et on s'intéresse à la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$.

1. On suppose $\alpha > 1$. Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.
2. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.
3. On suppose $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$. Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.
4. On suppose $\alpha = 1$ et $\beta > 0$. Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ suivant la valeur de β via une comparaison à une intégrale.

EXERCICE 23.

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On suppose que la suite de terme général $\sqrt[n]{u_n}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. Montrer que si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
3. Montrer à l'aide de deux exemples qu'on ne peut conclure dans le cas $l = 1$.

EXERCICE 24.

On note (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que les suites (S_{2n-1}) et (S_{2n}) sont adjacentes. En déduire la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

EXERCICE 25.

Soit $\sum u_n$ une série réelle.

1. On suppose $\sum u_n$ à termes positifs. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum u_n^2$ converge. La réciproque est-elle vraie ?
2. On ne suppose plus $\sum u_n$ à termes positifs. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que la convergence de la série $\sum u_n$ n'implique pas la convergence de la série $\sum u_n^2$.

EXERCICE 26.

Soit (u_n) une suite décroissante de limite nulle. On note (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum (-1)^n u_n$. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la série $\sum (-1)^n u_n$?

EXERCICE 27.

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$.
2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}\right)$.
3. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$.
4. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\mathrm{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) - \mathrm{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}\right)$.

Exercice 28.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.
2. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$$

Exercice 29.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k$$

A l'aide d'une permutation de sommes, montrer que les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ sont de même nature et, qu'en cas de convergence, elles ont même somme.

Exercice 30.

Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha \leqslant 1$.

Déterminer un équivalent du reste de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.

Exercice 31.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+\sqrt{k}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$S_n = C - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 32.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \ln(n!)$.

1. Par une comparaison à une intégrale montrer que $u_n \sim n \ln n$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{u_n^2}$.
3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$.
4. A l'aide d'une comparaison à une intégrale, déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{u_n}$.

Exercice 33.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\ln(n+2^k)}{k!}$ converge et que pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\ln(n+2^k)}{k!} \underset{n\to+\infty}{=} e \ln n + \sum_{p=1}^{m} \frac{(-1)^{p+1} e^{2^p}}{p n^p} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$$

Exercice 34.

Soit $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)$ et calcul de la somme.

Exercice 35.

Soit p un nombre premier. Calculer $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(pn)!}$.

Exercice 36.

Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{n^4+n^2+1}$.

Exercice 37.

Montrer la convergence et déterminer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{2n-1}{n^3-4n}$.

Exercice 38.

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$ et calcul de la somme.

SÉRIES

EXERCICE 39.

A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange prouver la convergence et déterminer la somme des séries suivantes

1. $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ pour $x \in \mathbb{R}$;
2. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ pour $x \in [0, 1]$.

EXERCICE 40.

Soit $x \in]-1, 1]$. En remarquant que $\frac{x^k}{k} = \int_0^x t^{k-1}\, dt$, montrer la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ et déterminer sa somme.
On pourra distinguer les cas $x \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$.

EXERCICE 41.

En remarquant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\, dt$, montrer la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et déterminer sa somme.

EXERCICE 42.

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose pour $\lambda \in \mathbb{R}$
$$I(\lambda) = \int_a^b f(t) \cos(\lambda t)\, dt \qquad J(\lambda) = \int_a^b f(t) \sin(\lambda t)\, dt$$
Montrer que $\lim_{\lambda \to +\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} J(\lambda) = 0$.
2. Déterminer deux réels u et v tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\int_0^\pi (ux + vx^2) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{n^2}$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour $x \in]0, \pi]$,
$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$
4. Montrer que la fonction $\varphi : x \in]0, \pi] \mapsto \frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
5. A l'aide des questions précédentes, déterminer la somme de la série de Riemann $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$.
6. En adaptant les deux réels u et v de la question **2**, justifier la convergence et déterminer les sommes des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

EXERCICE 43.

Convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2 + 3n}$ et calcul de la somme.

EXERCICE 44.$\star$

Convergence et calcul de la somme de la série de terme général :
$$v_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right).$$

EXERCICE 45.★

Soit $n \geqslant 1$. On note $p(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture de n en base 10. Etablir la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{p(n)}{n(n+1)}.$$

EXERCICE 46.★★

Convergence et calcul de la somme de la série

$$\sum_{n \geqslant 2} (-1)^n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

EXERCICE 47.★★

Convergence et somme de la série

$$\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

EXERCICE 48.

Etudier la convergence et calculer somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1}) \cdots (1+\sqrt{n})}.$$

EXERCICE 49.

On pose $G(x,y) = \int_0^y \frac{t-[t]}{t(t+x)}\,dt$ où $[t]$ représente la partie entière de t.

1. Montrer que G est définie sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.
2. Montrer que $G(x,y)$ tend vers une limite finie $G(x)$ quand y tend vers $+\infty$.
3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G(n,y) = \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t-[t]}{t}\,dt - \int_y^{y+n} \frac{t-[t]}{t}\,dt\right)$$

4. On note $H(n) = nG(n)$. Montrer que la série de terme général $H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n}$ converge et en déduire un équivalent de $G(n)$.

EXERCICE 50.

Soit $x \in]0,1]$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 telle que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n}$.
2. Montrer que x est rationnel *si et seulement si* la suite (q_n) est stationnaire.
3. Montrer que e est irrationnel.

EXERCICE 51.

Montrer que le développement décimal d'un réel est périodique à partir d'un certain rang *si et seulement si* ce réel est rationnel.

EXERCICE 52.

Soient $k \in [0,1[$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tels que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$$

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En considérant la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n+1} - u_n$, montrer que u converge.

EXERCICE 53.

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ k-lipschitzienne avec $k < 1$ et (x_n) une suite telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant k^n |x_1 - x_0|$.
2. En considérant la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_{n+1} - x_n$, montrer que la suite (x_n) converge.
3. En déduire que f admet un unique point fixe.