

Axiomes

Exercice 1 ★

Préciser pour chacun des triplets suivants les lois $+$ et \cdot qui les munissent d'une structure d'espace vectoriel ainsi que le vecteur nul.

1. $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$
2. $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$
3. $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$
4. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Exercice 2 ★

Vérifier que l'ensemble \mathbb{R}_+^* muni des lois interne et externe suivantes

$$u \boxplus v = uv \quad \text{et} \quad \lambda \boxdot u = u^\lambda,$$

où u et v sont dans \mathbb{R}_+^* et $\lambda \in \mathbb{R}$, est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Sous-espaces vectoriels

Exercice 3 ★★

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les ensembles suivants,

$$F = \{(\lambda - 3\mu, 2\lambda + 3\mu, \lambda) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

et

$$G = \{(x, y, z) \in E \mid x + 2y = 0\}.$$

1. Prouver que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$.

Exercice 4 ★

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et X, Y deux parties de E . Prouver que

$$\text{vect}(X \cap Y) \subset \text{vect}(X) \cap \text{vect}(Y).$$

Donner un exemple où cette inclusion est *stricte*.

Exercice 5

Montrer qu'un \mathbb{K} -espace vectoriel E n'est jamais l'union de deux sous-espaces-vectoriels stricts (i.e. distincts de E).

Exercice 6

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 ?
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 ?
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0, y = z\}$ est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 ?
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$ est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 ?
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy \geq 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 ?
6. $E_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \geq 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 ?

Exercice 7 ★

\mathbb{R} est-il un sous-espace du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} ? du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} ?

Exercice 8

Parmi les parties suivantes du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, déterminer celles qui en sont des sous-espaces vectoriels.

1. $E_1 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(1) = 0\}$.
2. $E_2 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 1\}$.
3. L'ensemble E_3 des fonctions croissantes de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
4. L'ensemble E_4 des fonctions décroissantes de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
5. L'ensemble E_5 des fonctions monotones de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
6. L'ensemble E_6 des fonctions paires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
7. L'ensemble E_7 des fonctions impaires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
8. L'ensemble E_8 des fonctions 2π -périodiques.
9. L'ensemble E_9 des fonctions périodiques.

Exercice 9

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1. L'ensemble E_1 des suites réelles convergentes.
2. L'ensemble E_2 des suites réelles divergentes.
3. L'ensemble E_3 des suites réelles constantes.
4. L'ensemble E_4 des suites réelles bornées.
5. L'ensemble E_5 des suites réelles de limite nulle.
6. $E_6 = \left\{u \in E \mid u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(n^2)\right\}$.
7. $E_7 = \left\{u \in E \mid u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}\right\}$.
8. $E_8 = \left\{u \in E \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}, u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n}\right\}$.

Sommes de sous-espaces vectoriels**Exercice 10**

Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 d'équation $x+y+z=0$ et G le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 d'équations $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer la projection de (x, y, z) sur F (resp. G) parallèlement à G (resp. F).

Exercice 11

Soient F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Montrer que F_1, \dots, F_p sont en somme directe si et seulement si

$$\forall k \in \llbracket 2, p \rrbracket, \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j \right) \cap F_k = \{0_E\}$$

Exercice 12

Soient F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie tels que $F_1 + \dots + F_p = E$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels G_1, \dots, G_p de E tels que $G_k \subset F_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $G_1 \oplus \dots \oplus G_p = E$.

Exercice 13

On note E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites réelles de limite nulle et G l'ensemble des suites réelles constantes.

1. Montrer que E, F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 14

Soient E l'ensemble des suites réelles constantes, F l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant $u_{n+1} + u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, G l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant $u_{n+2} + u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et enfin H l'ensemble des suites réelles périodiques de période 4.

1. Montrer que E, F, G, H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que E, F, G sont inclus dans H .
3. Montrer que $E \oplus F \oplus G = H$.

Exercice 15

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f(0) + f(1) = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions constantes sur \mathbb{R} .

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

Exercice 16

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(\mathcal{E}) : y''' - y = 0 \quad (\mathcal{F}) : y'' + y' + y = 0 \quad (\mathcal{G}) : y' - y = 0$$

On note E, F et G les ensembles respectifs des solutions à valeurs réelles de $(\mathcal{E}), (\mathcal{F})$ et (\mathcal{G}) . Les solutions de $(\mathcal{E}), (\mathcal{F})$ et (\mathcal{G}) sont toutes de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , ce qu'on ne demande pas de montrer. On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} .

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que $F \subset E$ et $G \subset E$.
3. Donner les solutions des équations différentielles (\mathcal{F}) et (\mathcal{G}) .
4. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et donner pour chacun une famille génératrice.
5.
 - a. Soit $y \in E$. On pose $y_1 = 2y - y' - y''$ et $y_2 = y + y' + y''$. Montrer que $y_1 \in F$ et $y_2 \in G$.
 - b. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
6. En déduire l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}) .

Exercice 17 ★

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Quelles assertions parmi les suivantes sont vraies en général ?

1. $F \cap G \subset F + G$;
2. $F \cup G \subset F + G$;
3. $F \subset F + G$;
4. $F + F = F$;
5. $F \cup (F \cap G) \subset F + G$;
6. $F + G = G + F$.

Exercice 18**Questions ouvertes**

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .

1. Que pensez-vous de la proposition suivante,

$$F + G = F \text{ si et seulement si } F \supset G ?$$

2. Que pensez-vous de la proposition suivante,

$$F + G = F + H \implies G = H ?$$

Exercice 19 ★★

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E tels que

$$F + H = G + H, \quad F \cap H = G \cap H,$$

et $F \subset G$. Prouver que $F = G$.

Exercice 20 ★**Parties paires et impaires d'une fonction**

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, P le sous-ensemble de E formé par les fonctions paires et I le sous-ensemble de E formé par les fonctions impaires.

1. Montrer que P et I sont deux sous-espaces supplémentaires dans E .
2. Pour tout $f \in E$, la projection du vecteur f sur P parallèlement à I est appelée *partie paire de f* . On définit de même la *partie impaire de f* . Calculer les parties paire et impaire des fonctions suivantes : le cosinus, le sinus, l'exponentielle, $f : x \mapsto x^4 + x$.

Exercice 21 ★★**Un petit pas vers Lagrange**

Soient $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, \mathcal{C} l'ensemble des fonctions constantes sur $[0, 1]$, et \mathcal{A} l'ensemble des éléments de E s'annulant en 1.

1. Montrer que \mathcal{C} et \mathcal{A} sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .
2. Montrer que \mathcal{C} est également un supplémentaire dans E du sous-espace suivant

$$\mathcal{N} = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}.$$

3. Calculer les projections sur \mathcal{C} parallèlement à \mathcal{A} puis à \mathcal{N} d'une fonction $f \in E$.
4. Donner d'autres exemples de supplémentaires de \mathcal{C} dans E .

Exercice 22**Somme de deux plans**

On note $E = \mathbb{R}^3$ et

$$F = \{(x, y, z) \in E \mid x + y - z = 0\}$$

et

$$G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Etablir que F et G sont des sev de E .
2. Déterminer $F \cap G$.
3. Prouver que $F + G = E$. La somme est-elle directe ?

Exercice 23 ★★

Soient A, B et C trois sev d'un \mathbb{K} -ev E . On note

$$F = (A \cap B) + (A \cap C), \quad G = A \cap (B + (A \cap C))$$

et $H = A \cap (B + C)$.

1. Montrer que F et G sont des sev de H .
2. Etablir que $F = G$.
3. A-t-on toujours $F = G = H$?

Exercice 24 ★★**Calcul d'une intersection**

Soient F, G, F' et G' quatre sev d'un \mathbb{K} -ev E tels que $F \cap G = F' \cap G'$. Etablir que

$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F.$$

Exercice 25

On note E l'espace vectoriel réel des fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soient \mathcal{N} et \mathcal{A} les sous-ensembles de E définis par,

$$\mathcal{A} = \{f \in E \mid f \text{ affine}\}$$

et

$$\mathcal{N} = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}.$$

1. Prouver que \mathcal{A} et \mathcal{N} sont deux sous-espaces vectoriels de E .
2. Montrer que \mathcal{A} et \mathcal{N} sont supplémentaires dans E .
3. Déterminer la projection sur \mathcal{A} parallèlement à \mathcal{N} d'une fonction $f \in E$.

REMARQUE. On rappelle qu'une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est affine si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = at + b$.

Familles de vecteurs**Exercice 26**

Soit $\mathcal{F} = ((1, -2, 1), (2, -3, 1), (-1, 3, -2))$.

1. Le vecteur $(2, 1, 3)$ est-il combinaison linéaire de la famille \mathcal{F} ?
2. Même question pour le vecteur $(2, 5, -7)$.

Exercice 27 ★★★

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n : x \mapsto \cos^n(x) \quad \text{et} \quad g_n : x \mapsto \cos(nx).$$

Montrer que pour tout n positif,

$$\text{vect}(f_k, 0 \leq k \leq n) = \text{vect}(g_k, 0 \leq k \leq n).$$

Exercice 28

Soient $a \in \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^3$ et

$$u = (1, -1, 1), \quad v = (0, 1, a).$$

Déterminer une condition *nécessaire et suffisante* portant sur a pour que $(1, 1, 2) \in \text{vect}(u, v)$.

Exercice 29

Donner une famille génératrice des espaces vectoriels suivants.

1. Le plan de \mathbb{R}^3 d'équation $x + y + z = 0$.
2. Le \mathbb{R} -espace vectoriel des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$.
3. Le \mathbb{C} -espace vectoriel des suites (u_n) à valeurs complexes vérifiant $u_{n+2} + (2 - 3i)u_{n+1} - (5 + i)u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 30

On définit les vecteurs de \mathbb{R}^3 suivants

$$a = (1, 2, -3) \quad b = (3, 2, -2) \quad c = (-1, 2, -4) \quad d = (-6, -8, 11)$$

Montrer que $\text{vect}(a, b) = \text{vect}(c, d)$.