Devoir surveillé n°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

1. On considère l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + \dfrac{1}{z} \end{array} \right.$$

a. Déterminer les antécédents de i par φ.

b. L'application φ est-elle injective ? Justifier.

c. Montrer que φ est surjective.

d. On se donne $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer les antécédents de $2\cos\theta$ par φ. On précisera le nombre de ces antécédents suivant les valeurs de θ.

2. On considère un entier $n \geqslant 2$ ainsi que l'application

$$\psi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & z^n \end{array} \right.$$

a. Déterminer les antécédents de $2\sqrt{12} - 4i$ par ψ lorsque $n = 3$.

b. On revient au cas général ($n \geqslant 2$). L'application ψ est-elle injective ? surjective ? Justifier.

c. On se donne $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer les antécédents de $e^{in\theta}$ par ψ.

3. On pose $\xi = \varphi \circ \psi$.

a. L'application ξ est-elle injective ? surjective ? Justifier.

b. On se donne $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer les antécédents de $2\cos(n\theta)$ par ξ. On en précisera le nombre suivant les valeurs de θ.

4. On considère l'application

$$\alpha : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array} \right.$$

a. L'application α est-elle injective ? surjective ? Justifier.

b. Déterminer les antécédents de i par $\beta = \varphi \circ \alpha$.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1}$.

1. Ecrire $1 + i$ sous forme exponentielle.

2. Justifier que $S_n + iT_n = (1+i)^{2n}$.

3. En déduire des expressions des sommes S_n et T_n faisant intervenir les fonctions cos et sin.

Exercice 3.

1. On considère l'équation $(E) : \ (1+iz)^5 = (1-iz)^5$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

a. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π. Montrer que $\frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1} = i \tan \theta$.

b. Déterminer les solutions complexes de (E) à l'aide des racines cinquièmes de l'unité. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction tan.

c. Développer $(1+iz)^5$ et $(1-iz)^5$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. En déduire les solutions de (E) sous une autre forme.

d. Déterminer le sens de variation de la fonction tan sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. En déduire les valeurs de $\tan \frac{\pi}{5}$ et $\tan \frac{2\pi}{5}$.

2. On se donne maintenant $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et on considère l'équation

$$(E_\alpha) : \ (1+iz)^5(1 - i\tan\alpha) = (1-iz)^5(1 + i\tan\alpha)$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

a. Montrer que $\frac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha} = e^{2i\alpha}$.

b. Résoudre l'équation $Z^5 = e^{2i\alpha}$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

c. En déduire les solutions de (E_α) que l'on exprimera à l'aide de la fonction tan.

Exercice 4.

1. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

a. Que vaut j^3 ?

b. Calculer $1 + j + j^2$.

c. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Montrer que

$$(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

d. Ecrire $-j$ et $-j^2$ sous forme exponentielle.

2. On considère trois points A, B et C distincts deux à deux d'affixes respectifs a, b et c dans un repère orthonormé. On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

a. Montrer que $\frac{c-a}{b-a} = -j^2$ ou $\frac{c-a}{b-a} = -j$.

b. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.