Devoir surveillé n°4

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 —

Partie I – Résolution de deux équations différentielles simples

On considère les équations différentielles

$$z'' + 4z = 0 \tag{E_1}$$
$$z'' - 4z = 0 \tag{E_2}$$

1. Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle (E_1).

2. Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle (E_2).

3. Montrer que l'ensemble des solutions de (E_2) peut en fait s'écrire

$$\left\{t \mapsto \lambda \operatorname{ch}(2t) + \mu \operatorname{sh}(2t),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Partie II – Résolution d'une seconde équation différentielle par changement de variable

On considère l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0 \tag{F}$$

4. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]-1, 1[$. On pose $g = f \circ \cos$. Montrer que g est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0, \pi[$.

5. Montrer que f est solution de (F) sur $]-1, 1[$ *si et seulement si* g est solution sur $]0, \pi[$ d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants à déterminer.

6. En déduire que les solutions de (F) sur $]-1, 1[$ sont les fonctions

$$x \in]-1, 1[\mapsto \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x\sqrt{1 - x^2}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Partie III – La fonction argument cosinus hyperbolique

7. Montrer que la fonction ch induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$. On notera argch la bijection réciproque de cette bijection induite.

8. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{sh} \circ \operatorname{argch}(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

9. Justifier que la fonction argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et déterminer une expression de sa dérivée.

10. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(2\theta) = 2\operatorname{ch}^2(\theta) - 1$ et $\operatorname{sh}(2\theta) = 2\operatorname{ch}(\theta)\operatorname{sh}(\theta)$.

11. En déduire pour $x \in \mathbb{R}$ des expressions de $\operatorname{ch}(2\operatorname{argch}(x))$ et $\operatorname{sh}(2\operatorname{argch}(x))$ ne faisant pas intervenir la fonction argch.

Partie IV – Un problème de raccord

12. En considérant cette fois-ci une fonction f deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$ et en posant $g = f \circ \operatorname{ch}$, montrer que les solutions de l'équation différentielle (F) sur $]1, +\infty[$ sont les fonctions

$$x \in]1, +\infty[\mapsto \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x\sqrt{x^2 - 1}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

13. En déduire les solutions de l'équation différentielle (F) sur $]-\infty, -1[$.

14. Déterminer les solutions de (F) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E) : \quad (1+x^2)y' - 3xy = 1$$

1. Résoudre l'équation homogène (E_H) associée à (E).
2. Rechercher une solution particulière de (E) sous la forme d'une fonction polynomiale de degré 3.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Montrer que $(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \underset{x\to+\infty}{=} x^3 + \frac{3}{2}x + o(1)$.
5. On pose $g : x \mapsto \frac{2}{3}x^3 + x - \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$. Vérifier que g est l'unique solution de (E) admettant une limite finie en $+\infty$.
6. Déterminer les variations de g. On précisera ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^n t \, dt$.

1. Calculer I_0, J_0, I_1, J_1.
2. Montrer que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. **a.** Montrer que pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \sin t$.

   b. En déduire que $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   c. Montrer que la suite de terme général $\frac{J_n}{I_n}$ converge vers 0.
5. **a.** Montrer que $I_{n+2} = \frac{1}{2}\left((n+1)(n+2)J_n - (n+2)^2 J_{n+2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   b. En déduire que $\frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{2}{(n+2)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite de terme général S_n converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.