

# RÉDUCTION GÉOMÉTRIQUE

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne un corps qui en pratique sera  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 Rappels

### 1.1 Matrices semblables

#### Définition 1.1 Matrices semblables

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $B$  est **semblable** à  $A$  si et seulement si il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $B = P^{-1}AP$ .

#### Proposition 1.1

La relation de similitude («être semblable à») est une relation d'équivalence.

**REMARQUE.** Si deux matrices sont semblables, l'une est inversible si et seulement si l'autre l'est.

**REMARQUE.** Si  $A$  et  $B$  sont semblables, alors  $A^n$  et  $B^n$  sont semblables pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  si  $A$  est inversible). Plus précisément, s'il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $B = P^{-1}AP$ , alors  $B^n = P^{-1}A^nP$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  si  $A$  est inversible).

### 1.2 Sous-espaces stables

#### Définition 1.2 Sous-espace stable

Soient  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On dit que  $F$  est stable par  $u$  si  $u(F) \subset F$ .

**REMARQUE.** Si  $F$  est un sous-espace stable par  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $u$  induit un endomorphisme de  $F$ .

#### Exercice 1.1

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  qui commutent i.e.  $u \circ v = v \circ u$ . Montrer que si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ , alors  $v(F)$  est également stable par  $u$ .

#### Définition 1.3 Base adaptée à un sous-espace vectoriel

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On dit qu'une base de  $E$  est adaptée à  $F$  si ses premiers éléments forment une base de  $F$ .

**Proposition 1.2 Matrice et stabilité**

Soient  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  est adaptée à  $F$  si et seulement si la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est triangulaire par blocs. Plus précisément, en notant  $n = \dim E$  et  $p = \dim F$ , il existe  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$  telles que  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$ .

**1.3 Endomorphismes nilpotents et matrices nilpotentes****Définition 1.4 Endomorphisme nilpotent**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel. On dit que  $u$  est **nilpotent** s'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^p = 0$ . Le plus petit entier  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^p = 0$  est appelé l'**indice de nilpotence** de  $u$ .

**Définition 1.5 Matrice nilpotente**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est **nilpotente** s'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^p = 0$ . Le plus petit entier  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^p = 0$  est appelé l'**indice de nilpotence** de  $A$ .

**Exemple 1.1**

Toute matrice triangulaire stricte est nilpotente d'indice de nilpotence inférieure ou égale à sa taille.

**Exemple 1.2**

Soit  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $J$  est nilpotente d'indice  $n$ .

**Proposition 1.3 Majoration de l'indice de nilpotence**

- (i) L'indice de nilpotence d'un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie est inférieur ou égal à  $\dim E$ .
- (ii) L'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inférieur ou égal à  $n$ .

**2 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée****2.1 Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme****Proposition 2.1**

Soient  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et  $x \in E$ . La droite  $\text{vect}(x)$  est stable par  $u$  si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u(x) = \lambda x$ .

**Définition 2.1 Valeur propre et vecteur propre d'un endomorphisme**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

- On dit qu'un vecteur **non nul**  $x \in E$  est un **vecteur propre** de  $u$  s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u(x) = \lambda x$ .
- On dit qu'un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre** de  $u$  s'il existe  $x \in E$  **non nul** tel que  $u(x) = \lambda x$ .

Dans chacun de ces deux cas, on dit que  $x$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**REMARQUE.** Un vecteur propre est forcément **non nul**.

**Exemple 2.1**

0 est une valeur propre d'un endomorphisme  $u$  si et seulement si celui-ci est non injectif.

**Exemple 2.2**

Soit  $D$  l'endomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  qui à une application associe sa dérivée. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , l'application  $x \mapsto e^{\lambda x}$  est un vecteur propre de  $D$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**Exemple 2.3**

Si  $x$  est un vecteur propre de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors  $x$  est également un vecteur propre de  $u^n$  associé à la valeur propre  $\lambda^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (et pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  si  $u$  est un automorphisme).

**Exemple 2.4**

L'unique valeur propre d'un endomorphisme nilpotent est 0.

**Définition 2.2 Spectre d'un endomorphisme**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**. On appelle **spectre** de  $u$ , noté  $\text{Sp}(u)$ , l'ensemble des valeurs propres de  $u$ .

**REMARQUE.** En dimension infinie, la définition est légèrement différente.

**Définition 2.3 Sous-espace propre d'un endomorphisme**

Soient  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ . Le sous-espace vectoriel  $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$  est appelé **sous-espace propre** de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . C'est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre  $\lambda$  et du vecteur nul.

**REMARQUE.** Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est le noyau.

**REMARQUE.** Si  $\lambda$  n'est pas une valeur propre de  $u$ , on peut convenir que  $E_\lambda(u) = \{0_E\}$ .

**Exemple 2.5**

Considérons l'endomorphisme  $T$  de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  qui à la suite  $(u_n)$  associe la suite  $(u_{n+2})$ .  
 Pour  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ,  $E_\lambda(T^2) = \text{vect}((\alpha^n), ((-\alpha)^n))$  où  $\alpha$  est une racine carrée de  $\lambda$ .

**Proposition 2.2**

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un même espace vectoriel qui commutent. Montrer que tout sous-espace propre de  $u$  est stable par  $v$ .

**Méthode** Déterminer les éléments propres d'un endomorphisme

Pour déterminer les éléments propres d'un endomorphisme  $u$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , on recherche les scalaires  $\lambda \in \mathbb{K}$  tels que l'équation  $u(x) = \lambda x$  possède des solutions non nulles. Lesdites solutions sont alors les vecteurs propres associés à la valeur propre  $\lambda$ .

**Exercice 2.1 ★★**

Soit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$  défini par  $\varphi(P) = XP'$  pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Déterminer les éléments propres de  $\varphi$ .

**2.2 Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'une matrice carrée****Définition 2.4 Valeur propre et vecteur propre d'une matrice carrée**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- On dit qu'une matrice colonne **non nulle**  $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  est un **vecteur propre** de  $A$  s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $AX = \lambda X$ .
- On dit qu'un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre** de  $A$  s'il existe  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  non nulle tel que  $AX = \lambda X$ .

Dans chacun de ces deux cas, on dit que  $X$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**REMARQUE.** Un vecteur propre est forcément **non nul**.

**Exemple 2.6**

0 est une valeur propre d'une matrice carrée si et seulement si elle est non inversible.

**Exemple 2.7**

Soit  $D$  une matrice diagonale de coefficients diagonaux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . En notant  $(E_1, \dots, E_n)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $E_k$  est un vecteur propre de  $D$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$ .

**Exemple 2.8**

Si  $X$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors c'est également un vecteur propre de  $A^n$  associé à la valeur propre  $\lambda^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (et pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  si  $A$  est inversible).

**Exemple 2.9**

L'unique valeur propre d'une matrice carrée nilpotente est 0.

**Définition 2.5 Spectre d'une matrice carrée**

Soit  $A$  une matrice carrée. On appelle **spectre** de  $A$ , noté  $\text{Sp}(A)$ , l'ensemble des valeurs propres de  $A$ .

**Définition 2.6 Sous-espace propre d'une matrice carrée**

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Le sous-espace vectoriel  $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$  est appelé **sous-espace propre** de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . C'est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre  $\lambda$  et de la matrice colonne nulle.

**REMARQUE.** Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est le noyau.

**REMARQUE.** Si  $\lambda$  n'est pas une valeur propre de  $A$ , on peut convenir que  $E_\lambda(A) = \{0\}$ .

**Proposition 2.3 Lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice**

Soient  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie et  $A$  sa matrice dans une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Alors

- (i)  $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(A)$ ;
- (ii)  $x \in E$  est un vecteur propre de  $u$  si et seulement si  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(x)$  est un vecteur propre de  $A$ ;
- (iii) Pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u) = \text{Sp}(A)$ , l'isomorphisme  $\begin{cases} E & \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto \text{mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{cases}$  induit un isomorphisme de  $E_\lambda(u)$  sur  $E_\lambda(A)$ .

**Proposition 2.4**

Deux matrices semblables ont même spectre.



**ATTENTION !** La réciproque est fausse. Par exemple, le spectre de  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  est  $\{0\}$  mais ces deux matrices ne sont évidemment pas semblables.

**Proposition 2.5 Spectre et sous-corps**

Si  $\mathbb{K}$  est un sous-corps d'un corps  $\mathbb{L}$  et si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{L}}(A)$ .



**ATTENTION !** L'inclusion peut être stricte. Par exemple, la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  peut être considérée comme une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ou  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . On peut vérifier que  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$  et que  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, +i\}$ .

## 2.3 Propriétés des sous-espaces propres

### Proposition 2.6

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée est directe.

### Corollaire 2.1

Une famille de vecteurs propres d'un endomorphisme associés à des valeurs propres distinctes est libre.

### Corollaire 2.2 Cardinal d'un spectre

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**  $n$  ou d'une matrice carrée de taille  $n$  est un ensemble **fini** de cardinal inférieur ou égal à  $n$ .

### Proposition 2.7

Soient deux endomorphismes d'un même espace vectoriel qui commutent. Alors tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

## 2.4 Polynôme caractéristique

### Définition 2.7 Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Le polynôme  $\chi_A = \det(XI_n - A)$  de  $\mathbb{K}[X]$  est appelé **polynôme caractéristique** de  $A$ .

### Exemple 2.10

Le polynôme caractéristique de  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  est  $(X-1)(X-4) - 2 \times 3 = X^2 - 5X - 2$ .

### Exemple 2.11 Matrice compagnon

Soient  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ . Alors en développant par rapport à la dernière colonne,

$$\chi_A = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

**REMARQUE.** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\chi_A = \chi_{A^T}$ .

**Proposition 2.8**

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.



**ATTENTION !** La réciproque est fausse. Par exemple, les matrices  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ont même polynôme caractéristique mais ne sont évidemment pas semblables.

**Définition 2.8 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de **dimension finie**. Le polynôme  $\chi_u = \det(X \text{Id}_E - u)$  de  $\mathbb{K}[X]$  est appelé **polynôme caractéristique** de  $u$ .

**REMARQUE.** Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  admet pour matrice  $M$  dans une base de  $E$ , alors  $\chi_u = \chi_M$ .

**Méthode Déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme**

Pour déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il suffit de déterminer la matrice de cet endomorphisme dans une base de  $E$  et de calculer le polynôme caractéristique de cette matrice.

**Exemple 2.12**

Soit  $r$  la rotation d'angle  $\theta$  du plan euclidien orienté. La matrice de  $r$  dans une base orthonormée directe est  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .  
On en déduit que  $\chi_r = (X - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = X^2 - 2 \cos \theta + 1$ .

**Proposition 2.9 Spectre et polynôme caractéristique**

- (i) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\text{Sp}(A)$  est l'ensemble des racines de  $\chi_A$ .
- (ii) Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de **dimension finie**. Alors  $\text{Sp}(u)$  est l'ensemble des racines de  $\chi_u$ .



**ATTENTION !** Le corps de base peut avoir son importance. Par exemple, si  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , alors  $\chi_A = X^2 + 1$ . Ainsi  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$  tandis que  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, +i\}$ .

**Exemple 2.13**

Toute matrice carrée réelle de taille impaire possède une valeur propre réelle.  
De même, tout endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension impaire possède une valeur propre réelle.

**Exemple 2.14**

Si  $A$  est une matrice carrée **réelle**, les valeurs propres **complexes** de  $A$  sont conjuguées deux à deux.

**REMARQUE.** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\text{Sp}(A^T) = \text{Sp}(A)$ . En effet,  $\chi_A = \chi_{A^T}$ .

**Méthode** Déterminer les éléments propres d'une matrice

Pour déterminer les éléments propres d'une matrice  $M$ , il suffit de

1. calculer  $\chi_M$ ;
2. déterminer les racines de  $\chi_M$ , ce qui fournit  $\text{Sp}(M)$ ;
3. pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ , résoudre l'équation  $MX = \lambda X$ , ce qui fournit  $E_\lambda(M)$ .

**Méthode** Déterminer les éléments propres d'un endomorphisme

Pour déterminer les éléments propres d'un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel  $E$  de **dimension finie**, il suffit de

1. déterminer la matrice  $M$  de  $u$  dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ ;
2. déterminer les éléments propres de  $M$ .

On sait alors que  $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(M)$  et l'isomorphisme  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k e_k \in E$  permet de récupérer le sous-espace propre  $E_\lambda(u)$  à partir du sous-espace propre  $E_\lambda(M)$ .

**Exercice 2.2**

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  défini par  $\varphi(P) = (X+1)P' - P$  pour tout  $P \in \mathbb{R}_3[X]$ .

**Proposition 2.10** Degré et coefficients du polynôme caractéristique

- (i) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\chi_A$  est un polynôme unitaire de degré  $n$ . De plus, le coefficient constant de  $\chi_A$  est  $(-1)^n \det(A)$  et le coefficient du monôme de degré  $n-1$  est  $-\text{tr}(A)$ .
- (ii) Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de **dimension finie**. Alors  $\chi_u$  est un polynôme unitaire de degré  $n$ . De plus, le coefficient constant de  $\chi_u$  est  $(-1)^n \det(u)$  et le coefficient du monôme de degré  $n-1$  est  $-\text{tr}(u)$ .

**Exemple 2.15**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors  $u$  est un automorphisme si et seulement si  $\chi_u(0) \neq 0$  i.e. si et seulement si le coefficient constant de  $\chi_u$  est non nul.

On en déduit que dans ce cas, il existe un polynôme  $P$  tel que  $u^{-1} = P(u)$ . Plus précisément,  $P = \frac{\chi_u(0) - \chi_u}{\chi_u(0)X}$ .



**Exemple 2.16**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $A$  est inversible si et seulement si  $\chi_A(0) \neq 0$  i.e. si et seulement si le coefficient constant de  $\chi_A$  est non nul.

On en déduit que dans ce cas, il existe un polynôme  $P$  tel que  $A^{-1} = P(A)$ . Plus précisément,  $P = \frac{\chi_A(0) - \chi_A}{\chi_A(0)X}$ .

**Exemple 2.17**

Si  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , alors  $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$ .

**Proposition 2.11 Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice triangulaire de coefficients diagonaux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Alors  $\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ .

**REMARQUE.** C'est a fortiori vrai pour les matrices diagonales.

**REMARQUE.** On peut montrer que le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des polynômes caractéristiques des blocs triangulaires.

**Proposition 2.12 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit**

Soient  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . Si on note  $u|_F$  l'endomorphisme de  $F$  induit par  $u$ , alors  $\chi_{u|_F}$  divise  $\chi_u$ .

**Définition 2.9 Multiplicité d'une valeur propre**

- (i) Soient  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ . On appelle **multiplicité** de la valeur propre  $\lambda$ , notée  $m_\lambda(u)$ , la multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine du polynôme caractéristique  $\chi_u$ .
- (ii) Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $A$ . On appelle **multiplicité** de la valeur propre  $\lambda$ , notée  $m_\lambda(A)$ , la multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine du polynôme caractéristique  $\chi_A$ .

**REMARQUE.** On peut convenir qu'une valeur propre de multiplicité nulle n'est tout simplement pas une valeur propre.

**REMARQUE.** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , alors  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda(A) = n$ .

De même, si  $u$  est un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie, alors  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m_\lambda(u) = \dim E$ .

**Proposition 2.13**

- (i) Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ ,  $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$ .
- (ii) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ ,  $1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m_\lambda(A)$ .

### 3 Diagonalisabilité

#### 3.1 Endomorphisme diagonalisable

##### Définition 3.1 Endomorphisme diagonalisable

Un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel  $E$  de **dimension finie** est dit **diagonalisable** s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.

Dans ce cas, les coefficients diagonaux de cette matrice sont les valeurs propres de  $u$ , chaque valeur propre apparaissant autant de fois que sa multiplicité dans  $\chi_u$ .

##### Exemple 3.1

Une homothétie, un projecteur ou une symétrie d'un espace vectoriel de dimension finie sont diagonalisables.



**ATTENTION !** La diagonalisabilité peut dépendre du corps de base. L'endomorphisme  $\begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & iz \end{cases}$  est diagonalisable en tant qu'endomorphisme du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  mais ne l'est pas en tant qu'endomorphisme du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ .

##### Exemple 3.2

Si  $u$  est un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie possédant une unique valeur propre  $\lambda$ , alors  $u = \lambda \text{Id}_E$ .

##### Proposition 3.1

Un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel  $E$  de **dimension finie** est diagonalisable si et seulement si il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

##### Proposition 3.2 Diagonalisabilité et sous-espaces propres

Un endomorphisme  $u$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de **dimension finie** est diagonalisable si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :

- (i)  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ ;
- (ii)  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$ ;
- (iii)  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ ,  $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u)$ .

##### Exercice 3.1

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. On suppose  $u$  diagonalisable. Montrer que  $u$  et  $v$  commutent si et seulement si tout sous-espace propre de  $u$  est stable par  $v$ .

**Proposition 3.3**

Un endomorphisme  $u$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de **dimension finie**  $n \in \mathbb{N}^*$  est diagonalisable si une des deux conditions équivalentes suivantes est réalisée :

- (i)  $u$  possède  $n$  valeurs propres distinctes ;
- (ii)  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  à racines simples.



**ATTENTION !** Il s'agit d'une condition suffisante mais pas nécessaire. Par exemple, si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 2, alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda \text{Id}_E$  est diagonalisable mais possède  $\lambda$  comme unique valeur propre et son polynôme caractéristique  $(X - \lambda)^n$  admet  $\lambda$  comme racine de multiplicité  $n$ .

**Exemple 3.3**

La matrice de l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  défini par  $u(P) = XP' - P''$  est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont  $0, 1, \dots, n$ . Son polynôme caractéristique est  $\prod_{k=0}^n (X - k)$  qui est scindé à racines simples. Ainsi  $u$  est diagonalisable.

**Décomposition spectrale**

Soit  $u$  un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Notons  $(p_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(u)}$  la famille de projecteurs associée à la décomposition en somme directe  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ . Alors  $u = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda p_\lambda$ . Cette écriture s'appelle la décomposition spectrale de  $u$ .

**3.2 Matrice diagonalisable****Définition 3.2 Matrice diagonalisable**

On dit qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale. Dans ce cas, les coefficients diagonaux de cette matrice diagonale sont les valeurs propres de  $A$ , chaque valeur propre apparaissant autant de fois que sa multiplicité dans  $\chi_A$ .

**Proposition 3.4**

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  qui lui est canoniquement associé est diagonalisable.  
Un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie est diagonalisable si et seulement si sa matrice dans une base de  $E$  est diagonalisable.



**ATTENTION !** La diagonalisabilité peut dépendre du corps de base. Par exemple,  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est diagonalisable en tant que matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  mais ne l'est pas en tant que matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Proposition 3.5**

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable si et seulement si il existe une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  formée de vecteurs propres de  $A$ .

**Proposition 3.6 Diagonalisabilité et sous-espace propre**

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :

- (i)  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_\lambda(A)$ ;
- (ii)  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = n$ ;
- (iii)  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ ,  $\dim E_\lambda(A) = m_\lambda(A)$ .

**Proposition 3.7**

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable si une des deux conditions équivalentes suivantes est réalisée :

- (i)  $A$  possède  $n$  valeurs propres distinctes ;
- (ii)  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  à racines simples.



**ATTENTION !** Il s'agit d'une condition suffisante mais pas nécessaire. Par exemple, si  $n \geq 2$ , alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda I_n$  est diagonalisable mais possède  $\lambda$  comme unique valeur propre et son polynôme caractéristique  $(X - \lambda)^n$  admet  $\lambda$  comme racine de multiplicité  $n$ .

**Méthode Diagonalisation d'une matrice**

Diagonaliser une matrice diagonalisable  $A$  consiste à trouver une matrice diagonale  $D$  et une matrice inversible  $P$  telles que  $A = PDP^{-1}$ . La marche à suivre est la suivante.

1. Déterminer les valeurs propres de  $A$  et des bases des sous-espaces propres associés.
2. Former la matrice  $P$  dont les colonnes sont les vecteurs des bases des différents sous-espaces propres.
3. Former la matrice diagonale  $D$  constituée des valeurs propres de  $A$ , chaque colonne de  $D$  contenant la valeur propre associée à la colonne correspondante de  $P$ .

**Exemple 3.4**

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -32 & -2 & 14 & -21 & 92 & -69 \\ 6 & 3 & 6 & -32 & 2 & 28 \\ 36 & 12 & 35 & -184 & 8 & 164 \\ 3 & 2 & 8 & -36 & 12 & 23 \\ -15 & -2 & 0 & 17 & 29 & -43 \\ 3 & 0 & -2 & 5 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$

On trouve  $\chi_A = X^6 - 5X^5 + 2X^4 + 10X^3 - 7X^2 - 5X + 4$ . On en déduit que  $\text{Sp}(A) = \{4, -1, 1\}$ . On trouve successivement

$$E_4(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad E_{-1}(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 59 \\ 11 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad E_1(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

On en déduit que  $A = PDP^{-1}$  avec

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 59 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 11 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -7 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

**Calcul de puissance**

Si  $A$  est une matrice carrée diagonalisable, alors il existe une matrice  $D$  diagonale et une matrice  $P$  inversible telles que  $A = PDP^{-1}$ . On a alors  $A^n = PD^nP^{-1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (et même pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  si  $A$  est inversible). Puisque  $D$  est diagonale, le calcul de ses puissances est aisé.

**Exercice 3.2 Commutant**

Soit  $M$  une matrice diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont distinctes deux à deux. Déterminer le commutant de  $M$ , c'est-à-dire l'ensemble des matrices commutant avec  $M$ .

## 4 Trigonalisabilité

### 4.1 Endomorphisme trigonalisable

**Définition 4.1 Endomorphisme trigonalisable**

Un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel  $E$  de **dimension finie** est dit **trigonalisable** s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure.

Dans ce cas, les coefficients diagonaux de cette matrice sont les valeurs propres de  $u$ , chaque valeur propre apparaissant autant de fois que sa multiplicité dans  $\chi_u$ .

**REMARQUE.** On a une définition équivalente en remplaçant «triangulaire supérieure» par «triangulaire inférieure» (il suffit d'inverser l'ordre des vecteurs de la base).

**REMARQUE.** Un endomorphisme diagonalisable est a fortiori trigonalisable.

#### Proposition 4.1 Trigonalisabilité, déterminant et trace

Soit  $u$  un endomorphisme trigonalisable d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} m_{\lambda}(u) \lambda \qquad \det(u) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \lambda^{m_{\lambda}(u)}$$

Autrement dit, la trace et le déterminant sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres **comptées** avec multiplicité.

**REMARQUE.** C'est a fortiori vrai pour les endomorphismes diagonalisables.

#### Proposition 4.2 Trigonalisabilité et polynôme caractéristique

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors  $u$  est trigonalisable si et seulement si  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .



**ATTENTION !** La trigonalisabilité peut donc dépendre du corps de base.

#### Corollaire 4.1

Tout endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.

## 4.2 Matrice trigonalisable

#### Définition 4.2 Matrice trigonalisable

On dit qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Dans ce cas, les coefficients diagonaux de cette matrice triangulaire supérieure sont les valeurs propres de  $A$ , chaque valeur propre apparaissant autant de fois que sa multiplicité dans  $\chi_A$ .

**REMARQUE.** Une matrice diagonalisable est a fortiori trigonalisable.

#### Proposition 4.3

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  qui lui est canoniquement associé est trigonalisable.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie est trigonalisable si et seulement si sa matrice dans une base de  $E$  est trigonalisable.

**Proposition 4.4 Trigonalisabilité, déterminant et trace**

Soit  $A$  une matrice carrée trigonalisable. Alors

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} m_{\lambda}(A) \lambda \qquad \det(A) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \lambda^{\mu_{\lambda}(A)}$$

Autrement dit, la trace et le déterminant sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres **comptées** avec multiplicité.

**REMARQUE.** C'est a fortiori vrai pour les matrices diagonalisables.

**Proposition 4.5 Trigonalisabilité et polynôme caractéristique**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $A$  est trigonalisable si et seulement si  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .



**ATTENTION !** La trigonalisabilité peut donc dépendre du corps de base.

**Exemple 4.1**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice trigonalisable et  $\operatorname{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ . Alors pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $A^p$  est trigonalisable et  $\operatorname{Sp}(A^p) = \{\lambda_1^p, \dots, \lambda_r^p\}$ .

**Corollaire 4.2**

Toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable.

**Méthode Trigonalisation d'une matrice**

Il s'agit essentiellement de remarquer que si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  admet pour polynôme caractéristique  $\chi_A = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} (X - \lambda)^{m_{\lambda}(A)}$  alors

- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)^{m_{\lambda}(A)}$  d'après le lemme des noyaux (cf. plus loin);
- la suite  $(\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)^k)$  est croissante pour l'inclusion.

L'algorithme suivant fournit alors une matrice  $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$  et une matrice  $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$  telles que  $A = PTP^{-1}$ .

On remarque que  $T$  peut alors s'écrire  $T = D + T'$  avec  $D$  diagonale et  $T'$  triangulaire stricte et que  $D$  et  $T'$  **commutent**.

**Algorithme 1** Trigonalisation d'une matrice**Données :** Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  trigonalisable**Résultat :** Une matrice  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  et une matrice  $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$  telles que  $A = PTP^{-1}$ .Déterminer  $\text{Sp}(A)$ **Pour**  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  **Faire**Déterminer une base  $\mathcal{B}_\lambda$  de  $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$  $k \leftarrow 1$ **Tant que**  $\dim \text{Ker}(A - \lambda I_n)^k < m_\lambda(A)$  **Faire**Ajouter des vecteurs à  $\mathcal{B}_\lambda$  la transformer en une base de  $\text{Ker}(A - \lambda I_n)^k$  $k \leftarrow k + 1$ **Fin Tant que****Fin Pour**Poser  $\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \mathcal{B}_\lambda$ Former la matrice  $P$  dont les colonnes sont les vecteurs de  $\mathcal{B}$ Former la matrice  $T$  dont les colonnes sont constituées des coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  des produits de  $A$  par les vecteurs de  $\mathcal{B}$ **Exemple 4.2**

Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ . On trouve  $\chi_A = (X + 2)(X - 1)^2$ . On calcule ensuite

$$\text{Ker}(A + 2I_3) = \text{vect}(C_1)$$

$$\text{Ker}(A - I_3) = \text{vect}(C_2)$$

$$\text{Ker}(A - I_3)^2 = \text{vect}(C_2, C_3)$$

avec

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$AC_1 = -2C_1$$

$$AC_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_2$$

$$AC_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -C_2 + C_3$$

On en déduit qu'en posant  $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , on a  $A = PTP^{-1}$ .



**Exemple 4.3**

Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . On trouve  $\chi_A = (X + 1)^3$  de sorte que  $\text{Sp}(A) = \{-1\}$ . On calcule ensuite

$$\text{Ker}(A + I_3) = \text{vect}(C_1)$$

$$\text{Ker}(A + I_3)^2 = \text{vect}(C_1, C_2)$$

$$\text{Ker}(A + I_3)^3 = \text{vect}(C_1, C_2, C_3)$$

avec

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$AC_1 = -C_1$$

$$AC_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 - C_2$$

$$AC_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = -C_1 - 2C_2 - C_3$$

On en déduit qu'en posant  $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , on a  $A = PTP^{-1}$ .

**Proposition 4.6 Trigonalisabilité et nilpotence**

- (i) Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est nilpotent si et seulement si il est trigonalisable et admet 0 comme unique valeur propre.
- (ii) Une matrice carrée est nilpotente si et seulement si elle est trigonalisable et admet 0 comme unique valeur propre.

**REMARQUE.** Un endomorphisme nilpotent est nilpotent si et seulement si il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire stricte.

Une matrice est nilpotente si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire stricte.

**Exemple 4.4**

Une matrice nilpotente et diagonalisable est nulle.