# Devoir à la maison n°1

### Exercice 1.

On considère une suite $(x_n)$ de réels telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2$$

1. Montrer que $x_0$ ne peut prendre que deux valeurs que l'on précisera.
2. Que peut valoir $x_1$ ? On distinguera les cas suivant les deux valeurs possibles de $x_0$.
3. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelles sont les valeurs possibles de $S_0$ ? $S_1$ ?
4. Montrer que, de manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $S_n = \dfrac{m(m+1)}{2}$.

### Exercice 2.

On considère une application $f$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ f(m^2+n^2) = f(m)^2 + f(n)^2$$

et $f(1) \neq 0$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. En déduire successivement $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(8)$ et $f(9)$.
3. Calculer $f(3)$, $f(6)$ et $f(10)$.
4. Calculer $f(50)$ et en déduire $f(7)$.
5. En décomposant 125 de deux façons comme somme de deux carrés, calculer $f(11)$. De même, calculer $f(12)$ en considérant 145.
6. Que peut-on raisonnablement conjecturer sur la valeur de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque ? Prouvez votre conjecture.
   On pourra remarquer que
   $$(2n+1)^2 + (n-2)^2 = (2n-1)^2 + (n+2)^2$$
   $$(2n+2)^2 + (n-4)^2 = (2n-2)^2 + (n+4)^2$$

### Exercice 3.

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on considère l'application

$$P : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^3 + \alpha z^2 + \beta z \end{array} \right.$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

1. Que vaut $1 + j + j^2$ ?

2. Montrer que $P(1)+P(j)+P(j^2)=3$.

3. On note $A_0$, $A_1$ et $A_2$ les points du plan d'affixes respectifs $1$, $j$ et $j^2$. On se donne également $B_1$ et $B_2$ deux points du plan.
Montrer qu'il existe $k\in\{0,1,2\}$ tel que $A_kB_1\cdot A_kB_2\geqslant 1$.
On pourra utiliser le fait que le module d'une somme de complexes est toujours inférieur ou égal à la somme des modules de ces complexes (inégalité triangulaire).