Devoir à la maison n°11

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 Si s_1 et s_2 sont les racines de $a\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+c$, on a : $a\mathrm{X}^2+bx+c = a(\mathrm{X}-s_1)(\mathrm{X}-s_2)$ donc $\boxed{\sigma_1 = s_1+s_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } \sigma_2 = s_1s_2 = \frac{c}{a}}$

2 On note (C) l'équation caractéristique

- Si r_1 et r_2 sont deux solutions réelles distinctes de (C). Alors $\boxed{\exists(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2 | \forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \mathrm{A}r_1^n+\mathrm{B}r_2^n}$
- Si r est solution double de (C). Alors $\boxed{\exists(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2 | \forall n\in\mathbb{N},\ u_n = (\mathrm{A}n+\mathrm{B})r^n}$
- Si (C) possède deux racines r_1 et r_2 non réelles conjuguées. On note ces racines $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ avec $r\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in]0,\pi[$. Alors $\boxed{\exists(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2 | \forall n\in\mathbb{N},\ u_n = (\mathrm{A}\cos(n\theta)+\mathrm{B}\sin(n\theta))r^n}$

3 La suite $\left(\frac{1}{\operatorname{ch} n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels indexée par $\mathbb{Z}$ telle que les sous-suites $\left(\frac{1}{\operatorname{ch} n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(-n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Par ailleurs ce n'est pas une suite constante. On a bien trouvé une suite non constante élément de $\mathcal{C}$.

4
- $\mathcal{C}$ est une partie non vide de E (contient la suite précédente).
- Soit $(x,x')\in\mathcal{C}^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. On pose $y=\alpha x+\beta x'$ et on note x_n, x'_n, y_n les termes généraux des suites x, x', y'.
  On a : $\forall n\in\mathbb{Z}, y_n = \alpha x_n+\beta x'_n$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, y_n = \alpha x_n+\beta x'_n$ et $\forall n\in\mathbb{N}, y_{-n} = \alpha x_{-n}+\beta x'_{-n}$.
  Comme les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Comme les suites $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$.
  Ainsi $y\in\mathcal{C}$. Et donc $\mathcal{C}$ est stable par combinaison linéaire.

Donc par caractérisation des sous-espaces vectoriels, $\boxed{\mathcal{C} \text{ est un sous-espace de E}}$

5 Soit $x=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathcal{C}$.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $\mathrm{A}>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}, |x_n|\leq\mathrm{A}$.
De même, la suite $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $\mathrm{B}>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}, |x_{-n}|\leq\mathrm{B}$.
On pose alors $\mathrm{C}=\max(\mathrm{A},\mathrm{B})$, et on a : $\forall n\in\mathbb{Z}, |x_n|\leq\mathrm{C}$: la suite x est bornée.
Ainsi $\boxed{\text{toute suite dans } \mathcal{C} \text{ est bornée}}$

6 Soit $x=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathcal{C}$. Soit $y=\mathrm{T}(x)=(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. On a : $\forall n\in\mathbb{Z}, y_n = x_{n-1}+x_{n+1}$. Ainsi :

- $\forall n\in\mathbb{N}^*, y_n = x_{n-1}+x_{n+1}$ donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la somme des suites $(x_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui sont extraites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc qui convergent. Ainsi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et donc, comme la convergence d'une suite ne dépend pas des premiers termes, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- De même $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Ainsi $y\in\mathcal{C}$.
On en déduit que T est une application de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$.
Montrons la linéarité. Soit $(x,x')\in\mathcal{C}^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. On pose $y=\mathrm{T}(x)$, $y'=\mathrm{T}(x')$, $z=\alpha x+\beta x'$, et $w=\mathrm{T}(z)$ et $v=\alpha y+\beta y'$. On doit établir : $\mathrm{T}(\alpha x+\beta x') = \alpha\mathrm{T}(x)+\beta\mathrm{T}(x')$ i.e. $v=w$. On note $x_n, x'_n, y_n, y'_n, z_n, w_n, v_n$ les termes généraux des suites x, x', y, y', z, w, v. On a, pour tout $n\in\mathbb{Z}$:
$v_n = \alpha y_n+\beta y'_n = \alpha(x_{n-1}+x_{n+1})+\beta\left(x'_{n-1}+x'_{n+1}\right) = (\alpha x_{n-1}+\beta x'_{n-1})+\left(\alpha x_{n+1}+\beta x'_{n+1}\right)$. Or dans ces derniers termes on reconnaît $z_{n-1}+z_{n+1}=w_n$. Donc $v=w$.
Ainsi T est bien une application linéaire de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$ i.e. $\boxed{\mathrm{T} \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{C}}$

7 • Méthode 1. On a clairement $S \circ S = \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$. Donc comme l'énoncé nous dit que S est un endomorphisme de $\mathcal{C}$, on en déduit que S est une symétrie de $\mathcal{C}$ et donc son axe, $\mathrm{Ker}(S - \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$, et sa direction, $\mathrm{Ker}(S + \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$, sont supplémentaires dans $\mathcal{C}$.
Or on a tout aussi clairement $F = \{x \in \mathcal{C}; \forall n \in \mathbb{Z}, x_n = x_{-n}\} = \{x \in \mathcal{C}; S(x) = x\} = \mathrm{Ker}(S - \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$ et $G = \mathrm{Ker}(S + \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$, donc $\boxed{\text{F et G sont deux sous-espaces supplémentaires dans } \mathcal{C}}$

• Méthode 2. On a $F = \mathrm{Ker}(S - \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$ et $G = \mathrm{Ker}(S + \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$ donc ce sont des sous-espaces de $\mathcal{C}$, propres pour l'endomorphisme S, associés à des valeurs propres différentes : 1 et -1. Donc F et G sont en somme directe i.e. $F + G = F \oplus G$.
De plus, si $x \in \mathcal{C}$, $x' = \frac{1}{2}(x + S(x))$ et $x'' = \frac{1}{2}(x - S(x))$, on montre aisément $x = x' + x''$, $x' \in F$ et $x'' \in G$, donc tout élément de S s'écrit comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Donc comme ce sont des sous-espaces de $\mathcal{C}$, on a $\mathcal{C} = F + G$.
Ainsi par caractérisation des sous-espaces supplémentaires, $\boxed{\text{F et G sont supplémentaires dans } \mathcal{C}}$

8 En reprenant ce qui a été fait dans la méthode 1 dans la question précédente, on a :
$\boxed{\text{S symétrie d'axe F et de direction G}}$

9 **9.a** Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_{n-1} + x_{n+1} = \lambda x_n$. En particulier :
$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} - \lambda x_{n+1} + x_n = 0$ et, en posant $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}, x'_{n+2} - \lambda x'_{n+1} + x'_n = 0$. On considère donc l'équation caractéristique $\mathcal{C}$ de ces suites récurrentes linéaires doubles : $X^2 - \lambda X + 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = \lambda^2 - 4$ donc est non nul car λ est différent de 2 et de -2

• Si $\Delta > 0$. Alors les racines de $\mathcal{C}$ sont réelles, distinctes et de produit 1. Donc l'une d'entre elles est de module strictement supérieur à 1 et l'autre est son inverse. On note r la racine de module strictement supérieur à 1.
D'après l'expression des suites récurrentes linéaires doubles, On a l'existence de 4 réels A, B, C, D tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = Ar^n + \frac{B}{r^n}$ et $x'_n = Cr^n + \frac{D}{r^n}$. Or les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent donc $A = 0 = C$.
De plus $x_0 = x'_0$ donc $B = D$. Enfin $x'_1 + x_1 = \lambda x_0$ donc $(\lambda - 2r)\,B = 0$. Or les racines de $\mathcal{C}$ sont $\frac{\lambda\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ donc $|\lambda - 2r| = \sqrt{\Delta} \neq 0$. Ainsi $B = D = 0$ et donc x est la suite nulle. Donc $\mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) \subset \{0_{\mathcal{C}}\}$
S'agissant d'un sous-espace, on en déduit que $\mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}$

• Si $\Delta < 0$. Alors les racines de $\mathcal{C}$ sont complexes non réelles et conjugués distinctes et de produit 1. Donc elles sont de module 1 et on peut les écrire sous la forme $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$.
D'après l'expression des suites récurrentes linéaires doubles réelles, On a l'existence de 4 réels A, B, α, β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = A(\cos(n\theta + \alpha))$ et $x'_n = B(\cos(n\theta + \beta))$. Or les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent alors que les suites $(\cos(n\theta + \alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(n\theta + \beta))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent[1] car θ n'est pas un multiple de 2π donc $A = 0 = B$. Donc x est la suite nulle. Donc $\mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) \subset \{0_{\mathcal{C}}\}$
S'agissant d'un sous-espace, on en déduit que $\mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}$

Ainsi si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$, $\boxed{\mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}}$

9.b On applique le résultat précédent avec $\lambda = 0$. On a $\mathrm{Ker}(T) = \{0_{\mathcal{C}}\}$, donc par caractérisation de l'injectivité des applications linéaires, $\boxed{\text{T est injectif}}$

9.c • Si $\lambda = 2$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$. Donc en généralisant le résultat du cours, comme l'équation caractéristique possède une solution double : 1, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = A + Bn$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a $B = 0$ et donc x est une suite constante.
Réciproquement, les suites constantes sont clairement dans $\mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$.
Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) \text{ est l'ensemble des suites constantes}}$

• Si $\lambda = -2$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(T + 2\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0$. Donc en généralisant le résultat du cours, comme l'équation caractéristique possède une solution double : -1, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = (A + Bn)(-1)^n$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on a $B = 0$ et, comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a $A = 0$ donc x est la suite nulle.
Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(T + 2\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}}$

9.d Avec les 3 questions précédentes, on a établi que $\boxed{\text{T ne possède qu'une valeur propre : 2}}$

10 **10.a** Soit $x \in \mathcal{C}$. D'après la question 2, on sait que x est bornée, donc il existe $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, |x_n| \leq A$. Ainsi, si on pose $u_n = \frac{|x_n|+|x_{-n}|}{2^n}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{2A}{2^n}$ qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi $\sum u_n$ converge i.e. $\boxed{N(x) \text{ est bien définie}}$.

10.b • N est bien une application de $\mathcal{C}$ vers $\mathbb{R}^+$

[1] Fallait-il démontrer ce résultat classique ici ?

- Séparation. Soit $x \in \mathcal{C}$ telle que $\mathrm{N}(x) = 0$. On note $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $u_n = \frac{|x_n|+|x_{-n}|}{2^n}$. On a $\mathrm{N}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0$ alors que $\sum u_n$ est une série convergente de réels positifs. Donc comme la somme est nulle, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = 0$ i.e. x est la suite nulle.
- Homogénéité. Soit $x \in \mathcal{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $y = \lambda x$, $u_n = \frac{|x_n|+|x_{-n}|}{2^n}$ et $v_n = \frac{|y_n|+|y_{-n}|}{2^n}$ en notant les termes généraux de x et de y sous la forme x_n et y_n. On a :
  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{|\lambda x_n|+|\lambda x_{-n}|}{2^n} = |\lambda| \frac{|x_n|+|x_{-n}|}{2^n} = |u_n|$. Ainsi par linéarité du passage à la somme pour les séries convergentes, $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ i.e. $\underline{\mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\,\mathrm{N}(x)}$
- Inégalité triangulaire. Soit $(x, y) \in \mathcal{C}^2$. Soit $z = x + y$. On note x_n, y_n, z_n les termes généraux de ces suites. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, |z_n| = |x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|$.
  Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{|z_n|+|z_{-n}|}{2^n} \leq \frac{|x_n|+|x_{-n}|}{2^n} + \frac{|y_n|+|y_{-n}|}{2^n}$.
  Donc en passant à la somme, on obtient $\underline{\mathrm{N}(x + y) \leq \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)}$

Ainsi $\boxed{\text{N est une norme sur } \mathcal{C}}$

10.c Soit $x \in \mathcal{C}$ et $x' = \mathrm{S}(x)$. On note $u_n = \frac{|x_n|+|x_{-n}|}{2^n}$ et $v_n = \frac{|x'_n|+|x'_{-n}|}{2^n}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$ donc $\mathrm{N}(x') = \mathrm{N}(x)$.
Ainsi S conserve la norme N i.e. $\boxed{\text{S est une isométrie de l'espace vectoriel normé } (\mathcal{C}, \mathrm{N})}$.
En prenant $k = 1$, on a établi : $\forall x \in \mathcal{C}, \mathrm{N}(\mathrm{S}(x)) \leq k\mathrm{N}(x)$. Ainsi par caractérisation de la continuité des applications linéaires, $\boxed{\text{S est un endomorphisme continu de } (\mathcal{C}, \mathrm{N})}$.

10.d $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ est également une application continue de $(\mathcal{C}, \mathrm{N})$ vers lui-même, donc $\mathrm{R} = \mathrm{S} - \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ est continue sur $(\mathcal{C}, \mathrm{N})$. Donc $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{S} - \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) = \mathrm{R}^{-1}(\{0_{\mathcal{C}}\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue donc $\boxed{\text{F est une partie fermé de l'espace vectoriel normé } (\mathcal{C}, \mathrm{N})}$.
De même $\boxed{\text{G est une partie fermé de l'espace vectoriel normé } (\mathcal{C}, \mathrm{N})}$ car $\mathrm{G} = (\mathrm{S} + \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})^{-1}(\{0_{\mathcal{C}}\})$.

10.e On considère la suite $\left(x^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ la suite d'éléments de $\mathcal{C}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n^{(p)} = 2^n$ si $n \in [\![1, p]\!]$, $x_n^{(p)} = 0$ sinon. Les suites $x^{(p)}$ sont bien dans $\mathcal{C}$ et on a $\mathrm{N}\left(x^{(p)}\right) = \sum_{n=1}^{p} 1 = p$ et $\left\|x^{(p)}\right\|_\infty = 2^p$. Comme la suite $\left(\frac{2^p}{p}\right)_{p\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{\left\|x^{(p)}\right\|_\infty}{\mathrm{N}\left(x^{(p)}\right)}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée, on ne peut pas trouver de constante $\mathrm{K} > 0$ telle que $\forall x \in \mathcal{C}\backslash\{0_{\mathcal{C}}\}, \|x\|_\infty \leq \mathrm{KN}(x)$.
Ainsi $\boxed{\text{les deux normes N et } \|\ \|_\infty \text{ ne sont pas équivalentes}}$