Problème 1 – D'après ESCP 1988

Partie I – Étude d'un endomorphisme

1. Évident.

2. Notons a_n le coefficient dominant de P. On a donc $a_n \neq 0$. Le coefficient de X^n dans $(X^2-1)P'' + 4XP'$ est alors $n(n-1)a_n + 4na_n$. Puisque $f(P) = \lambda P$, $n(n-1)a_n + 4na_n = \lambda a_n$ et donc $\lambda = n(n+3)$ puisque $a_n \neq 0$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $f(P) = \lambda_n P$. En notant d son degré, la question précédente montre que $\lambda_n = d(d+3)$ i.e. $n(n+3) = d(d+3)$. La fonction $x \mapsto x(x+3)$ est strictement croissante et donc injective sur $\mathbb{R}_+$ de sorte que $n = d$.

4. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $\deg P \leq n$ donc $\deg P' \leq n-1$ et $\deg P'' \leq n-2$. On en déduit que $\deg XP' \leq n$ et $\deg(X^2-1)P'' \leq n$ puis que $\deg f(P) \leq n$. Ainsi $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. $\mathbb{R}_n[X]$ est donc stable par f et f induit alors un endomorphisme f_n de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. **a.** Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et notons a le coefficient de X^n dans P (éventuellement nul). Alors le coefficient de X^n dans $f_n(P) - \lambda_n P$ est $n(n-1)a + 4na - n(n+3)a = 0$. Ainsi $f_n(P) - \lambda_n P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On en déduit que

$$G_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

Puisque $f_n - \lambda_n I_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$,

$$\dim \mathbb{R}_n[X] = \mathrm{rg}(f_n - \lambda_n I_n) + \dim \mathrm{Ker}(f_n - \lambda_n I_n) = \dim F_n + \dim G_n$$

d'après le théorème du rang. Or $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ et $\dim G_n \leq \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$ puisque $G_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On en déduit que $\dim F_n \geq 1$.

b. Soit $P \in F_n \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Supposons P non nul. Puisque $f(P) = \lambda_n P$, la question **I.3** montrer que $\deg P = n$, ce qui est absurde puisque $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi $P = 0$ et $F_n \cap \mathbb{R}_{n-1}[X] = \{0\}$. On peut alors affirmer que

$$\dim(F_n \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]) = \dim F_n + \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] \geq 1 + n = n+1$$

Par ailleurs, $F_n \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$ donc $\dim(F_n \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]) \leq n+1$. Finalement, $\dim(F_n \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]) = n+1$ et donc $F_n \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathbb{R}_n[X]$.

c. On déduit de la question précédente que

$$\dim F_n = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = 1$$

Notamment, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que $F_n = \mathrm{vect}(P_n)$. Puisque $P_n \in F_n$, $f(P_n) = f_n(P_n) = \lambda_n P_n$. Quitte à diviser P_n par son coefficient dominant, on peut supposer P_n unitaire.
De plus, $f(P_n) = \lambda_n P_n$ et $P_n \neq 0$ donc $\deg P_n = n$ d'après la question **I.3**.
Reste à prouver l'unicité. Soit alors $Q \in \mathbb{R}[X]$ unitaire tel que $f(Q) = \lambda_n Q$. A nouveau, la question **I.3** montre que $\deg Q = n$. Ainsi $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ de sorte que $f_n(Q) = f(Q) = \lambda_n P$ et donc $Q \in F_n = \mathrm{vect}(P_n)$. Finalement, Q et P_n sont donc colinéaires mais comme ils sont tous deux unitaires, ils sont égaux.

6. Remarquons que $Q_n' = -(-1)^n P_n'(-X)$ et $Q_n'' = (-1)^n P_n''(-X)$. Or on sait que

$$(X^2-1)P_n'' + 4XP_n' = n(n+3)P_n$$

donc en substituant $-X$ à X,

$$(X^2-1)P_n''(-X) - 4XP_n'(-X) = n(n+3)P_n(-X)$$

puis en multipliant par $(-1)^n$

$$(X^2-1)(-1)^n P_n''(-X) - 4X(-1)^n P_n'(-X) = n(n+3)(-1)^n P_n(-X)$$

ou encore $f(Q_n) = \lambda_n Q_n$. Or on vérifie aisément que Q_n est unitaire puisque P_n l'est. L'unicité du polynôme P_n montre alors que $P_n = Q_n$. Ceci signifie que P_n a la parité de n.

7. Soit un entier $n \geq 2$. Puisque P_n est unitaire, de degré n et de même parité que n, on peut affirmer qu'il existe un réel α_n et un polynôme $\tilde{\mathrm{P}}_n \in \mathbb{R}_{n-3}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{X}^n + \alpha_n \mathrm{X}^{n-2} + \tilde{\mathrm{P}}_n$$

Par linéarité de f,

$$f(\mathrm{P}_n) = f(\mathrm{X}^n) + \alpha_n f(\mathrm{X}^{n-2}) + f(\tilde{\mathrm{P}}_n)$$

Or

$$\begin{aligned} f(\mathrm{X}^n) &= n(n+3)\mathrm{X}^n - n(n-1)\mathrm{X}^{n-2} \\ f(\mathrm{X}^{n-2}) &= (n-2)(n+1)\mathrm{X}^{n-2} - (n-2)(n-3)\mathrm{X}^{n-4} \end{aligned}$$

et $f(\mathrm{P}_n) \in \mathbb{R}_{n-3}[\mathrm{X}]$ car $\mathbb{R}_{n-3}[\mathrm{X}]$ est stable par f d'après la question **I.4**. Ainsi il existe un polynôme $\hat{\mathrm{P}}_n \in \mathbb{R}_{n-3}[\mathrm{X}]$ tel que

$$f(\mathrm{P}_n) = n(n+3)\mathrm{X}^n + (\alpha_n(n-2)(n+1) - n(n-1))\mathrm{X}^{n-2} + \hat{\mathrm{P}}_n$$

Mais on sait que

$$f(\mathrm{P}_n) = \lambda_n \mathrm{P}_n = \lambda_n \mathrm{X}^n + \lambda_n \alpha_n \mathrm{X}^{n-2} + \lambda_n \tilde{\mathrm{P}}_n$$

En identifiant les coefficients de X^{n-2}, on obtient,

$$\alpha_n(n-2)(n+1) - n(n-1) = \lambda_n \alpha_n = n(n+3)\alpha_n$$

ou encore

$$\alpha_n = -\frac{n(n-1)}{2(2n+1)}$$

8. Puisque P_0 est unitaire et de degré 0, $\mathrm{P}_0 = 1$.
P_1 est impair, unitaire et de degré 1 donc $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}$.
Enfin, P_2 est pair, unitaire, de degré 2 et son coefficient constant est $-\frac{1}{5}$ d'après la question **I.7**. Ainsi $\mathrm{P}_2 = \mathrm{X}^2 - \frac{1}{5}$.

9. **a.** Tout d'abord

$$\mathrm{R}_n' = 2\mathrm{X}\mathrm{P}_n' + (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n'' - n\mathrm{P}_n - n\mathrm{X}\mathrm{P}_n' = (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n'' - (n-2)\mathrm{X}\mathrm{P}_n' - n\mathrm{P}_n$$

Or $f(\mathrm{P}_n) = \lambda_n \mathrm{P}_n$ donc

$$(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n'' = \lambda_n \mathrm{P}_n - 4\mathrm{X}\mathrm{P}_n' = n(n+3)\mathrm{P}_n - 4\mathrm{X}\mathrm{P}_n'$$

Ainsi

$$\mathrm{R}_n' = n(n+3)\mathrm{P}_n - 4\mathrm{X}\mathrm{P}_n' - (n-2)\mathrm{X}\mathrm{P}_n' - n\mathrm{P}_n = n(n+2)\mathrm{P}_n - (n+2)\mathrm{X}\mathrm{P}_n' = (n+2)(n\mathrm{P}_n - \mathrm{X}\mathrm{P}_n')$$

On en déduit ensuite que

$$\mathrm{R}_n'' = (n+2)(n\mathrm{P}_n' - \mathrm{P}_n' - \mathrm{X}\mathrm{P}_n'') = (n+2)(n-1)\mathrm{P}_n' - (n+2)\mathrm{X}\mathrm{P}_n''$$

puis que

$$(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{R}_n'' = (n+2)(n-1)(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n' - (n+2)\mathrm{X}(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n''$$

Or on rappelle que

$$(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n'' = n(n+3)\mathrm{P}_n - 4\mathrm{X}\mathrm{P}_n'$$

donc

$$\begin{aligned} (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{R}_n'' &= (n+2)(n-1)(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n' - (n+2)\mathrm{X}(n(n+3)\mathrm{P}_n - 4\mathrm{X}\mathrm{P}_n') \\ &= (n+2)(n-1)(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n' - n(n+2)(n+3)\mathrm{X}\mathrm{P}_n + 4(n+2)\mathrm{X}^2\mathrm{P}_n' \end{aligned}$$

Or

$$4\mathrm{X}\mathrm{R}_n' = 4\mathrm{X}(n+2)(n\mathrm{P}_n - \mathrm{X}\mathrm{P}_n') = 4n(n+2)\mathrm{X}\mathrm{P}_n - 4(n+2)\mathrm{X}^2\mathrm{P}_n'$$

donc

$$\begin{aligned} f(\mathrm{R}_n) &= (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{R}_n'' + 4\mathrm{X}\mathrm{R}_n' \\ &= (n+2)(n-1)(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n' - n(n+2)(n+3)\mathrm{X}\mathrm{P}_n + 4n(n+2)\mathrm{X}\mathrm{P}_n \\ &= (n+2)(n-1)(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n' - n(n+2)(n-1)\mathrm{X}\mathrm{P}_n \\ &= (n+2)(n-1)((\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n' - n\mathrm{X}\mathrm{P}_n) = (n+2)(n-1)\mathrm{R}_n = \lambda_{n-1}\mathrm{R}_n \end{aligned}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La question **I.5.c** montrer que R_n est colinéaire à P_{n-1}. Il existe donc $\beta_n \in \mathbb{R}$ tel que $R_n = \beta_n P_{n-1}$. Puisque P_{n-1} est unitaire, β_n est en fait le coefficient de X^{n-1} dans R_n.
En reprenant les notations de la question **I.7**,

$$P_n = X^n + \alpha_n X^{n-2} + \tilde{P}_n$$

où l'on rappelle que $\tilde{P}_n \in \mathbb{R}_{n-3}[X]$. Cette relation est valable même si $n = 1$, puisque $\alpha_1 = 0$. Un calcul donne alors

$$R_n = -(n + 2\alpha_n)X^{n-1} - (n-2)X^{n-3} + (X^2-1)\tilde{P}_n' - nX\tilde{P}_n$$

ou encore, en posant $\hat{P}_n = -(n-2)X^{n-3} + (X^2-1)\tilde{P}_n' - nX\tilde{P}_n$,

$$R_n = -(n+2\alpha_n)X^{n-1} + \hat{P}_n$$

avec $\deg \hat{P}_n \le n-2$. Ainsi le coefficient de X^{n-1} dans R_n est

$$\beta_n = -(n+2\alpha_n) = -n + \frac{n(n-1)}{2n+1} = -\frac{n(n+2)}{2n+1}$$

On en déduit donc bien que

$$R_n + \frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1} = 0$$

c. En dérivant la relation de la question précédente, on obtient

$$R_n' + \frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1}' = 0$$

Or on a vu que $R_n' = (n+2)(nP_n - XP_n')$ de sorte que

$$(n+2)(nP_n - XP_n') + \frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1}' = 0$$

ou même, en simplifiant par $n+2$

$$nP_n - XP_n' + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}' = 0$$

En multipliant par (X^2-1), on obtient

$$n(X^2-1)P_n - X(X^2-1)P_n' + \frac{n}{2n+1}(X^2-1)P_{n-1}' = 0$$

Or

$$(X^2-1)P_n' = R_n + nXP_n = -\frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1} + nXP_n$$

et

$$(X^2-1)P_{n-1}' = R_{n-1} + (n-1)XP_{n-1} = -\frac{(n-1)(n+1)}{2n-1}P_{n-2} + (n-1)XP_{n-1}$$

donc

$$n(X^2-1)P_n + \frac{n(n+2)}{2n+1}XP_{n-1} - nX^2P_n - \frac{(n-1)n(n+1)}{4n^2-1}P_{n-2} + \frac{n(n-1)}{2n+1}XP_{n-1} = 0$$

En simplifiant par n

$$(X^2-1)P_n + \frac{n+2}{2n+1}XP_{n-1} - X^2P_n - \frac{(n-1)(n+1)}{4n^2-1}P_{n-2} + \frac{n-1}{2n+1}XP_{n-1} = 0$$

ce qui donne

$$-P_n + XP_{n-1} - \frac{n^2-1}{4n^2-1}P_{n-2} = 0$$

et enfin, en passant à l'opposé,

$$P_n - XP_{n-1} + \frac{n^2-1}{4n^2-1}P_{n-2} = 0$$

Partie II – Comportement asymptotique d'une suite

10. On a clairement

$$\frac{1}{4X^2-1} = \frac{1}{(2X-1)(2X+1)} = \frac{1}{2}\frac{(2X+1)-(2X-1)}{(2X+1)(2X-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2X-1} - \frac{1}{2X+1}\right)$$

On en déduit par télescopage que

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

puis que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{6}$$

11. **a.** On a clairement $u_1 \geq u_0 \geq 1$. Supposons que $u_{n-1} \geq u_{n-2} \geq 1$ pou un certain entier $n \geq 2$. Alors

$$\frac{1}{9}\left[u_{n-1} - u_{n-2} + \frac{3}{4n^2-1}\right] \geq 0$$

donc $u_n \geq u_{n-1}$. Mais on sait déjà que $u_{n-1} \geq 1$ donc $u_n \geq u_{n-1} \geq 1$. Par récurrence, ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Soit un entier $n \geq 2$. Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,

$$u_k = u_{k-1} + \frac{1}{9}\left[u_{k-1} - u_{k-2} + \frac{3}{4k^2-1}u_{k-2}\right]$$

En additionnant ces inégalités et en télescopant, on obtient le résultat voulu.

c. On a clairement $u_0 \leq u_1 \leq \frac{6}{5}$. De plus, pour $n \geq 2$,

$$u_n = u_1 + \frac{1}{9}\left[u_{n-1} - u_0 + \sum_{k=2}^{n} \frac{3}{4k^2-1}u_{k-2}\right] \leq u_1 + \frac{1}{9}(u_n - u_0 + S_n u_n) = 1 + \frac{1}{9}u_n + \frac{1}{3}S_n u_n$$

par croissance de la suite (u_n) et car (S_n) est positive. Par ailleurs, la suite (S_n) est également croissante (évident) et converge vers $\frac{1}{6}$ donc elle est majorée par $\frac{1}{6}$. On en déduit

$$u_n \leq 1 + \frac{1}{9}u_n + \frac{1}{18}u_n = 1 + \frac{1}{6}u_n$$

On en déduit immédiatement que $u_n \leq \frac{6}{5}$.
La suite (u_n) étant croissante et majorée, elle converge.

12. **a.** On rappelle que $P_0 = 1$ et $P_1 = X$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_0(t) = 1 \qquad\qquad f_1(t) = \frac{2\operatorname{ch} t}{e^t} = 1 + e^{-2t}$$

Soit maintenant un entier $n \geq 2$. On rappelle que

$$P_n - XP_{n-1} + \frac{n^2-1}{4n^2-1}P_{n-2} = 0$$

En fixant $t \in \mathbb{R}$ et en évaluant en $\operatorname{ch} t$, on obtient

$$P_n(\operatorname{ch} t) - \operatorname{ch}(t)P_{n-1}(\operatorname{ch} t) + \frac{n^2-1}{4n^2-1}P_{n-2}(\operatorname{ch} t) = 0$$

ou encore

$$\frac{e^{nt}}{2^n}f_n(t) - \operatorname{ch}(t)\frac{e^{(n-1)t}}{2^{n-1}}f_{n-1}(t) + \frac{n^2-1}{4n^2-1}\frac{e^{(n-2)t}}{2^{n-2}}f_{n-2}(t) = 0$$

En multipliant par $\frac{2^n}{e^{nt}}$, on obtient

$$f_n(t) - 2\operatorname{ch}(t)e^{-t}f_{n-1}(t) + \frac{4(n^2-1)}{4n^2-1}e^{-2t}f_{n-2}(t) = 0$$

ou encore

$$f_n(t) - (1 + e^{-2t})f_{n-1}(t) + \left(1 - \frac{3}{4n^2-1}\right)e^{-2t}f_{n-2}(t) = 0$$

puis

$$f_n(t) - f_{n-1}(t) = e^{-2t}\left[f_{n-1}(t) - f_{n-2}(t) + \frac{3}{4n^2-1}f_{n-2}(t)\right]$$

b. Tout d'abord, $f_0 : t \mapsto 1$ et $f_1 - f_0 : t \mapsto e^{-2t}$ sont bien positives et décroissantes sur $\mathbb{R}$. Supposons que f_{n-2} et $f_{n-1} - f_{n-2}$ soient positives et décroissantes sur $\mathbb{R}$ pour un certain entier $n \geq 2$.
Tout d'abord, $f_{n-1} = f_{n-2} + (f_{n-1} - f_{n-2})$ est positive et décroissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de telles fonctions.
Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_n(t) - f_{n-1}(t) = e^{-2t}\left[f_{n-1}(t) - f_{n-2}(t) + \frac{3}{4n^2-1}f_{n-2}(t)\right]$$

$f_n - f_{n-1}$ est bien positive sur $\mathbb{R}$. De plus, les fonctions $t \mapsto e^{-2t}$ et $f_{n-1} - f_{n-2} + \frac{3}{4n^2-1}f_{n-2}$ sont décroissantes sont décroissante et *positives* sur $\mathbb{R}$ (la seconde est une somme de fonctions décroissantes) : leur produit $f_n - f_{n-1}$ est donc décroissant sur $\mathbb{R}$.
Par récurrence, f_{n-1} et $f_n - f_{n-1}$ sont bien positives et décroissantes sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

13. ch est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $\mathrm{ch}(0) = 1$ et $\lim_{+\infty} \mathrm{ch} = +\infty$, elle induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$. Sa bijection réciproque est également strictement croissante.

14. **a.** Par définition, $\mathrm{ch}\,\alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} = \frac{5}{3}$. Ainsi $e^\alpha + e^{-\alpha} = \frac{10}{3}$ ou encore $e^{2\alpha} - \frac{10}{3}e^\alpha + 1 = 0$. Les racines du polynôme $X^2 - \frac{10}{3}X + 1$ sont $\frac{1}{3}$ et 3. Or $\alpha \geq 0$ par définition de argch de sorte que $e^\alpha \geq 1$. Ainsi $e^\alpha = 3$.
On a clairement $u_1 = 1 = f_0(\alpha)$. De plus, $f_1(\alpha) = 1 + e^{-2\alpha} = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$. Supposons que $u_{n-1} = f_{n-1}(\alpha)$ et $u_{n-2} = f_{n-2}(\alpha)$ pour un certain entier $n \geq 2$. Alors

$$\begin{aligned} f_n(\alpha) &= f_{n-1}(\alpha) + e^{-2\alpha}\left[f_{n-1}(\alpha) - f_{n-2}(\alpha) + \frac{3}{4n^2-1}f_{n-2}(\alpha)\right] \\ &= u_{n-1} + \frac{1}{9}\left[u_{n-1} - u_{n-2} + \frac{3}{4n^2-1}u_{n-2}\right] = u_n \end{aligned}$$

Par récurrence double, $u_n = f_n(\alpha)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la fonction $f_n - f_{n-1}$ est positive sur $\mathbb{R}$, $f_n(\mathrm{argch}\, x) \geq f_{n-1}(\mathrm{argch}\, x)$. La suite de terme général $f_n(\mathrm{argch}\, x)$ est donc croissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de argch, $\mathrm{argch}\, x \geq \alpha$. Par décroissance de f_n,

$$f_n(\mathrm{argch}\, x) \leq f_n(\alpha) = u_n \leq \frac{6}{5}$$

La suite de terme général $f_n(\mathrm{argch}\, x)$ est donc également majorée par $\frac{6}{5}$.
Cette suite étant croissante et majorée, elle converge vers un réel $\ell(x)$. Par ailleurs, la croissance de la suite de terme général $f_n(\mathrm{argch}\, x)$ montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(\mathrm{argch}\, x) \geq f_0(\mathrm{argch}\, x) = 1$. Par passage à la limite, $\ell(x) \geq 1 > 0$.
Par définition de f_n,

$$P_n(x) = \frac{e^{n\,\mathrm{argch}\, x}}{2^n}f_n(\mathrm{argch}\, x)$$

Comme $\ell(x) \neq 0$, on peut alors affirmer que

$$P_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell(x)e^{n\,\mathrm{argch}\, x}}{2^n}$$

Si on pose $u = \mathrm{argch}\, x$, alors $x = \mathrm{ch}(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$. Ainsi e^u est racine du polynôme $X^2 - 2xX + 1$. Ses racines sont $x + \sqrt{x^2-1}$ et $x - \sqrt{x^2-1}$. Ces deux racines sont positives et leur produit vaut 1. Or $u \geq 0$ donc $e^u \geq 1$: e^u est la plus grande de ces deux racines, c'est-à-dire $x + \sqrt{x^2-1}$. Finalement,

$$e^{n\,\mathrm{argch}\, x} = (e^u)^n = \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n$$

Finalement,

$$P_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{2}\right)^n \ell(x)$$