Devoir à la maison n°04

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1.

On pose pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$.

1. Pour quels nombres complexes z, $f(z)$ est-il défini ?
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.
3. Montrer que $\begin{cases} |\operatorname{Im}(z)| < \dfrac{\pi}{2} \\ |f(z)| < 1 \end{cases} \iff |\operatorname{Im}(z)| < \dfrac{\pi}{4}$.
4. On pose $\Delta = \left\{z \in \mathbb{C},\ |\operatorname{Im}(z)| < \dfrac{\pi}{4}\right\}$ et $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Vérifier que $f(\Delta) \subset \mathcal{D}$.
5. Soit $Z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Montrer que l'équation $e^z = Z$ d'inconnue z admet une unique solution telle que $\operatorname{Im}(z) \in]-\pi, \pi[$.
6. Soit $u \in \mathcal{D}$. Montrer que $\dfrac{1+u}{1-u} \notin \mathbb{R}_-$.
7. Montrer que l'application f induit une bijection de Δ sur $\mathcal{D}$.

Problème 1 —

1. On considère la fonction f définie sur $I = [0, \pi]$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{5 - 4\cos x}}$.

   a. Montrer que f est bien définie sur I.

   b. Étudier le signe de $f(x) - \sin x$ pour $x \in I$.

   c. Montrer que pour $x \in]0, \pi]$, $\sin x < x$. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = x$ sur I.

2. Étudier les variations de f sur I et tracer son graphe (on tracera notamment les tangentes en 0 et π).

3. On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = \arccos\left(\dfrac{4 - 5\cos x}{5 - 4\cos x}\right)$.

   a. Étudier les variations de $\phi : \begin{cases} [-1,1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \dfrac{4-5t}{5-4t} \end{cases}$. Quelle est l'image de $[-1, 1]$ par ϕ ?

   b. Justifier que g est bien définie sur I.

   c. Donner les variations de g sans calculer la dérivée de g. Quelle est l'image de I par g ?

4. Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

   a. Montrer qu'il existe un unique $z \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$ tel que $f(z) = f(x)$.

   b. Calculer $\cos(g(x))$ et $\sin(g(x))$.

   c. Calculer $f(g(x))$ et en déduire que $z = g(x)$.

5. **a.** Montrer que pour $\theta \in [0, \pi]$, $\cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$ et $\sin\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$.

   b. En déduire que $\cos\left(\dfrac{x+z}{2}\right) = f(x)$ et $\cos\left(\dfrac{z-x}{2}\right) = 2f(x)$.

6. **a.** Prouver que f induit une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ sur un intervalle à préciser. On note h sa bijection réciproque.

   b. Déterminer la fonction h à l'aide de la question précédente.