

Groupe symétrique

EXERCICE 1.

1. Soit (i, j) une transposition avec $(i < j)$.
Montrer que $(i, j) = (i, i+1, \dots, j-1, j) \circ (j-1, j-2, \dots, i+1, i)$.
2. Montrer que toute permutation appartenant à S_n peut s'écrire comme le produit de transpositions de la forme $(k, k+1)$.

EXERCICE 2.

Montrer que toute permutation de S_n peut s'écrire comme un produit de transpositions de la forme $(1, i)$ avec $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

EXERCICE 3.

Déterminer la signature de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 4.

Déterminer le centre de S_n .

EXERCICE 5.

On note S_n le groupe des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et on pose $f(\sigma) = \sum_{k=1}^n k\sigma(k)$ pour $\sigma \in S_n$.
Déterminer le minimum et le maximum de f sur S_n .

EXERCICE 6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\sigma \in S_n$, on note P_σ la matrice $(\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Montrer que l'application $P : \sigma \in S_n \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes de S_n dans $GL_n(\mathbb{K})$.
2. Soit $\sigma \in S_n$. Que vaut ${}^t P_\sigma$?
3. Montrer que $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ pour tout $\sigma \in S_n$.

Petits déterminants

EXERCICE 7.

Soient a et x dans \mathbb{K} . Calculer les déterminants suivants,

$$1. \Delta_1 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$2. \Delta_2 = \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}$$

EXERCICE 8.

Soit ω une racine cubique de l'unité. Prouver avec un minimum de calcul que

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0$$

EXERCICE 9.★

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$. Calculer les déterminants suivants, (on factorisera les expressions obtenues !)

$$1. \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$

EXERCICE 10.

Calculer les déterminants suivants :

$$1. \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & a' & b & a'b \\ 1 & a & b' & ab' \\ 1 & a' & b' & a'b' \end{vmatrix};$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{vmatrix};$$

$$3. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$4. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Gros déterminants**EXERCICE 11.★**

Calculer, pour tous x réel et n dans \mathbb{N}^* , le déterminant de

$$\begin{pmatrix} x & 2 & \cdots & n & 1 \\ 1 & x & & \vdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & n & \vdots \\ \vdots & \vdots & & x & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 12.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, \dots, a_n des réels. Calculer le déterminant de

$$(\sin(a_i + a_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

EXERCICE 13.★

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$. Calculer pour $k < n-1$:

$$\begin{vmatrix} (x+1)^k & 2^k & 3^k & \cdots & n^k \\ (x+2)^k & 3^k & 4^k & \cdots & (n+1)^k \\ \vdots & & & & \vdots \\ (x+n)^k & \cdots & \cdots & \cdots & (2n-1)^k \end{vmatrix}.$$

EXERCICE 14.

Calculez le déterminant de la matrice $n \times n$ suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \ddots & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 15.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n k.$$

Calculer, pour tout $n \geq 1$, le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} S_1 & \cdots & \cdots & \cdots & S_1 \\ \vdots & S_2 & \cdots & \cdots & S_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & S_{n-1} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_{n-1} & S_n \end{vmatrix}$$

EXERCICE 16.

Soient a, b et c , trois nombres complexes. On considère la matrice carrée de taille n

$$A = \begin{pmatrix} c & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & c \end{pmatrix}$$

et on note J , la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. On suppose que $a \neq b$.

a. Par des opérations sur les colonnes, démontrer que $x \mapsto \det(A + xJ)$ est une fonction affine.

b. En donnant à x deux valeurs convenables, calculer $\det(A + xJ)$ pour tout $x \in \mathbb{C}$.

2. Comment calculer $\det(A)$ lorsque $a = b$?

EXERCICE 17.

Calculer le déterminant

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

EXERCICE 18.Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \cdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots \\ n-1 & \cdots & 1 & n \end{vmatrix}.$$

EXERCICE 19.Calculer le déterminant de la matrice $\left(\binom{n+i}{j} \right)_{0 \leq i, j \leq p}$ avec $0 \leq p \leq n$.**EXERCICE 20.**Calculer le déterminant de taille $n \geq 2$ suivant :

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

EXERCICE 21.

Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

EXERCICE 22.Calculer le déterminant d'ordre n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

On explicitera les opérations sur les lignes et les colonnes effectuées le cas échéant.

EXERCICE 23.Calculer en établissant une relation de récurrence le déterminant d'ordre n suivant.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) \\ 1 & (0) & 1 \end{vmatrix}$$

EXERCICE 24.Calculer le déterminant de taille n

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

EXERCICE 25.Soient n un entier supérieur ou égal à 2, a_1, \dots, a_n des complexes et $P = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$. Calculer

$$D(x) = \begin{vmatrix} \frac{P(x)}{x-a_1} & \frac{P(x)}{x-a_2} & \cdots & \frac{P(x)}{x-a_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \text{ pour } x \in \mathbb{C}.$$

EXERCICE 26.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Montrer que le polynôme $P = X^n - X + 1$ admet n racines distinctes dans \mathbb{C} .
2. On note z_1, \dots, z_n les racines de P . Calculer le déterminant de la matrice $A = (1 + \delta_{ij} z_i)_{1 \leq i, j \leq n}$.

EXERCICE 27. ★★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n des complexes tels que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_i + b_j \neq 0$.

0. On pose alors $D_n = \det \left(\left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right)$.

1. Que peut-on dire de D_n lorsque deux des a_i ou deux des b_j sont égaux ?
2. On suppose maintenant les a_i (resp. les b_j) distincts deux à deux.
Dans le déterminant définissant D_n , on remplace a_n par X et on note $F(X)$ le déterminant obtenu. Montrer que F est une fraction rationnelle d'indéterminée X . Que peut-on dire de son degré ?
3. Justifier que F peut s'écrire sous la forme

$$F(X) = \frac{P(X)}{\prod_{j=1}^n (X + b_j)}$$

Que peut-on dire du degré de P ?

4. Déterminer $n - 1$ racines de P . En déduire une expression de D_n en fonction des a_i et des b_j .

EXERCICE 28.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

EXERCICE 29.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice carrée de taille n dont le coefficient en position (i, j) vaut

$$\begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \text{ et on pose } D_n = \det(A_n). \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Ecrire les matrices A_3, A_4 et A_5 .
2. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (D_n) .
3. En déduire D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminants d'endomorphismes**EXERCICE 30.**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ défini par

$$P \longmapsto P + P'.$$

Calculer $\det(f)$. Que peut-on déduire ?

EXERCICE 31.

Soient E un espace vectoriel de dimension n et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de F et G . Calculer le déterminant de la projection sur F parallèlement à G et de la symétrie par rapport à F parallèlement à G en fonction des dimensions de F et G .

EXERCICE 32.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

1. Soit p un projecteur de E . Que vaut $\det p$?
2. Soit s une symétrie de E . Que vaut $\det s$?
3. Application : On considère f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui à une matrice associe sa transposée. Que vaut $\det f$?

EXERCICE 33.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $m_A : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{cases}$.

1. Justifier que m_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\det m_A = (\det A)^2$.
3. Généraliser en dimension quelconque.

EXERCICE 34.

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit une application $u_\sigma : \begin{cases} \mathbb{R}_n & \longrightarrow & \mathbb{R}_n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $u_\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
2. Pour $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, que vaut $u_\sigma \circ u_\tau$?
3. En déduire que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, u_σ est un automorphisme et que $U : \begin{cases} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \text{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \sigma & \longmapsto & u_{\sigma^{-1}} \end{cases}$ est un morphisme de groupes.
4. Calculer $\det(u_\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

EXERCICE 35.

Soit f l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ associe le polynôme \tilde{P} tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{P}(x) = \int_x^{x+1} P(t) dt$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f induit un endomorphisme f_n de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $\det(f_n)$ en fonction de n .

EXERCICE 36.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

1. On suppose qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 + \text{Id}_E = 0$. Montrer que $\dim E$ est paire.
2. On suppose qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 + u + \text{Id}_E = 0$. Montrer que $\dim E$ est paire.

EXERCICE 37.

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3 de base (e_1, e_2, e_3) et u l'endomorphisme de E défini par

$$u(e_1) = 4e_1 + e_2 + 4e_3$$

$$u(e_2) = -2e_1 + e_2 - 4e_3$$

$$u(e_3) = -e_1 - e_2 + e_3$$

1. Écrire la matrice A de u dans la base (e_1, e_2, e_3) .
2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $V(\lambda) = \det(u - \lambda \text{Id}_E)$. Calculer $V(\lambda)$ sous forme factorisée pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
En déduire que V possède trois racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ telles que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Préciser $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
3. Vérifier que pour tout $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $\text{Ker}(u - \lambda_k \text{Id}_E)$ est de dimension 1 et en donner un vecteur directeur f_k .
4. Justifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de E et donner la matrice D de u dans cette base.
5. Déterminer une matrice $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Expliciter P^{-1} .
6. En déduire la matrice de u^n dans la base (e_1, e_2, e_3) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminants par blocs**EXERCICE 38.**

Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$, on note $A \otimes B$ la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ définie par blocs de la manière suivante : $A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}$.

1. Soit $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^4$. Montrer que $(A \otimes B).(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.
2. Calculer $\det(I_2 \otimes B)$, $\det(A \otimes I_2)$ et $\det(A \otimes B)$ en fonction de $\det A$ et $\det B$.
3. A quelle condition nécessaire et suffisante $A \otimes B$ est-elle inversible ? Quel est alors son inverse ?

EXERCICE 39.

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où $A \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. On pose $S = D - CA^{-1}B$. Montrer que $\det(M) = \det(A)\det(S)$.

EXERCICE 40.★★

Soient $n \geq 1$, A, B, C et D quatre matrices réelles de taille n . Soit M la matrice réelle de taille $2n$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

On suppose que C et D commutent. Prouver que

$$\det(M) = \det(AD - CB).$$

Inégalités**EXERCICE 41.**

Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique réelle est toujours positif.

EXERCICE 42.

On pose, pour $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^t A$.
2. On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Prouver que

$$|\det(A)| \leq 1.$$

Comatrice**EXERCICE 43.**

Soit $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$, $n > 1$. Montrer que $\text{com}(\text{com}(A)) = \det(A)^{n-2} A$.

EXERCICE 44.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que $\det A, \det B \in \mathbb{Z}$.
2. On suppose que $\det A$ et $\det B$ sont premiers entre eux. Montrer qu'il existe deux matrices $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_n$.

EXERCICE 45.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner le rang de $\text{com}(A)$ en fonction de celui de A . On pourra distinguer les cas $\text{rg} A = n$, $\text{rg} A < n - 1$ et $\text{rg} A = n - 1$.

Divers**EXERCICE 46.**

Pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on pose $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ et $\mathcal{K} = \{M(a, b), (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$.

1. A quelle condition un élément de \mathcal{K} est-il inversible ?
2. Montrer que $\mathcal{K} \setminus \{0\}$ muni de la multiplication est un groupe.

EXERCICE 47.

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. On se donne une base \mathcal{B} de E . Pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on pose

$$f(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), x_2, \dots, x_n) + \dots + \det(x_1, \dots, x_{n-1}, u(x_n))$$

Montrer que $f = \text{tr}(u) \det_{\mathcal{B}}$.

EXERCICE 48.

On note $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ inversibles et dont l'inverse est également dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})^2$. On suppose que $A + kB \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$. Que vaut $\det(B)$?

EXERCICE 49.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur \mathbb{C} . Montrer que A et B sont semblables sur \mathbb{R} .

EXERCICE 50.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.
2. A partir de maintenant, on suppose f non nul.
 - a. Justifier l'existence d'un vecteur non nul u de $\text{Im } f$.
 - b. Montrer que $f^2(u) = -u$.
 - c. Montrer que la famille $(u, f(u))$ est libre. Que peut-on en déduire sur $\text{rg } f$?
3. On suppose que $\text{rg } f = 3$.
 - a. Montrer que $f^2 = -\text{Id}$. Aboutir à une contradiction en considérant le déterminant de f^2 .
 - b. Que peut-on en conclure sur les dimensions de $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$?
4. Montrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 51.

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients sont donnés par

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. On note K la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Exprimer K^n en fonction de K .
2. En déduire deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = u_n A + v_n I_p$.
3. On note X le vecteur de \mathbb{R}^p dont toutes les composantes sont égales à 1. Déterminer la limite de $A^n X$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.
5. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I_p)$. Montrer que χ admet deux zéros distincts λ_1 et λ_2 . Que vaut $(A - \lambda_1 I_p)(A - \lambda_2 I_p)$?