DEVOIR À LA MAISON N°02

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Partie I –

1. **a.** On sait que $\frac{e^t}{\arcsin t} \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t}$ et l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge. Par intégration d'une relation d'équivalence par rapport à une fonction positive,

$$\int_x^1 \frac{e^t}{\arcsin t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x$$

b. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_{x^2}^1 \frac{e^t}{\arcsin t}\,\mathrm{d}t &\underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x^2)+o\left(\ln(x^2)\right)\\ &\underset{x\to0^+}{=} -2\ln x+o(\ln x)\\ \int_{x^3}^1 \frac{e^t}{\arcsin t}\,\mathrm{d}t &\underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x^3)+o\left(\ln(x^3)\right)\\ &\underset{x\to0^+}{=} -3\ln x+o(\ln x)\end{aligned}$$

donc, par relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{\arcsin t}\,\mathrm{d}t &= \int_{x^3}^1 \frac{e^t}{\arcsin t}\,\mathrm{d}t - \int_{x^2}^1 \frac{e^t}{\arcsin t}\,\mathrm{d}t\\ &\underset{x\to0^+}{=} -3\ln x+2\ln x+o(\ln x)\\ &\underset{x\to0^+}{=} -\ln x+o(\ln x)\\ &\underset{x\to0^+}{\sim} -\ln x\end{aligned}$$

2. **a.** Les applications $t\mapsto t$ et $t\mapsto \frac{1}{\ln t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2,+\infty[$ donc, par intégration par parties,

$$\forall x\in[2,+\infty[,\ \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \left[\frac{t}{\ln t}\right]_2^x + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2} = \frac{x}{\ln x}-\frac{2}{\ln 2}+\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}$$

Or $\frac{1}{(\ln t)^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln t}\right)$ et l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ diverge (par exemple, $\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln t}\right)$) don

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\right)$$

On en déduit que

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}-\frac{2}{\ln 2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$$

b. On montre par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}_n : \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!x}{\ln^{k+1}(x)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2k!}{\ln^{k+1}(2)} + (n+1)! \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^{n+2}}$$

On a montré $\mathcal{P}_0$ dans la question précédente. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties,

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^{n+2}} = \left[\frac{t}{(\ln t)^{n+2}}\right]_2^x + (n+2)\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^{n+3}} = \frac{x}{(\ln x)^{n+2}} - \frac{2}{(\ln 2)^{n+2}} + (n+2)\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^{n+3}}$$

de sorte que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par conséquent, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a vu que

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^{n+2}} = \frac{x}{(\ln x)^{n+2}} - \frac{2}{(\ln 2)^{n+2}} + (n+2)\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^{n+3}}$$

Or $\frac{1}{(\ln t)^{n+3}} \underset{t\to+\infty}{=} \frac{1}{(\ln t)^{n+2}}$ et $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^{n+2}}$ diverge donc

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^{n+3}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^{n+2}}\right)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^{n+2}} &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{(\ln x)^{n+2}} - \frac{2}{(\ln 2)^{n+2}} \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{(\ln x)^{n+2}} \\ &\underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

On en déduit bien que

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \underset{x\to+\infty}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{k!x}{\ln^{k+1}(x)} + o\left(\frac{x}{\ln^{n+1}(x)}\right)$$

3. Posons

$$\mathrm{F}(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \frac{e^x}{x^2} - \frac{2e^x}{x^3} + 3e$$

et

$$\mathrm{G}(x) = \frac{e^x}{x^3} - e$$

Alors

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{e^x}{x^2+1} - \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} - \frac{2e^x}{x^3} + \frac{6e^x}{x^4} = \frac{(5x^2-6)e^x}{x^4(x^2+1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{5e^x}{x^4}$$

et

$$\mathrm{G}'(x) = \frac{e^x}{x^3} - \frac{3e^x}{x^4} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^3}$$

On en déduit notamment que

$$\mathrm{F}'(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} o\left(\mathrm{G}'(x)\right)$$

Or $\int_1^x \mathrm{G}'(t)\,\mathrm{d}t$ diverge puisque

$$\int_1^x \mathrm{G}'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et G' est positive sur $[1, +\infty[$ donc, par intégration de relation de négligeabilité

$$\int_1^x \mathrm{F}'(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_1^x \mathrm{G}'(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

ou encore

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(1) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(1)\right)$$

ce qui donne

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right)$$

Partie II –

1. Remarquons que
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$
Comme $\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge
$$\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \int_a^x \frac{\alpha}{t}\,\mathrm{d}t + o\left(\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)$$
ou encore
$$\ln(f(x)) - \ln(f(a)) \underset{x\to+\infty}{=} \alpha(\ln(x) - \ln(a) + o\,(\ln x - \ln a)$$
Comme $\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,
$$\ln x - \ln a \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$$
$$\ln(f(a)) \underset{x\to+\infty}{=} o(\ln x)$$
$$\alpha\ln(a) \underset{x\to+\infty}{=} o(\ln x)$$
de sorte que
$$\ln(f(x)) \underset{x\to+\infty}{=} \alpha\ln(x) + o\,(\ln x)$$
puis
$$\frac{\ln(f(x))}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{=} \alpha + o(1)$$
ou encore
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(f(x))}{\ln x} = \alpha$$

2. **a.** Puisque $\alpha < -1$, on peut considérer $\beta \in]\alpha, -1[$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(f(x))}{\ln x} - \beta = \alpha - \beta \neq 0$,
$$\ln(f(x)) - \beta\ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} (\alpha - \beta)\ln x$$
donc
$$\lim_{x\to+\infty} \ln(f(x)) - \beta\ln x = -\infty$$
puis par passage à l'exponentielle
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\beta} = 0$$
Ainsi $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$ avec $\beta < -1$ donc f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

b. On sait que
$$xf'(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha f(x)$$
Comme $\alpha \neq -1$, on peut affirmer que
$$xf'(x) + f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} (\alpha+1)f(x)$$
ou encore
$$\frac{xf'(x) + f(x)}{\alpha+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x)$$
Or $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc
$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{tf'(t) + f(t)}{\alpha+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}\left[tf(t)\right]_x^{+\infty}$$
On a vu plus haut que $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t^\beta)$ avec $\beta < -1$ donc $\lim_{t\to+\infty} tf(t) = 0$ de sorte que
$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to\infty}{\sim} -\frac{xf(x)}{\alpha+1}$$

3. **a.** Puisque $\alpha > -1$, on peut considérer $\beta \in]-1, \alpha[$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(f(x))}{\ln x} - \beta = \alpha - \beta \neq 0$,

$$\ln(f(x)) - \beta \ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} (\alpha - \beta) \ln x$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(f(x)) - \beta \ln x = +\infty$$

puis par passage à l'exponentielle

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\beta} = +\infty$$

Ainsi $x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(f(x))$ avec $\beta > -1$ donc f est n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

b. On sait que

$$xf'(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha f(x)$$

Comme $\alpha \neq -1$, on peut affirmer que

$$xf'(x) + f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} (\alpha + 1)f(x)$$

ou encore

$$\frac{xf'(x) + f(x)}{\alpha + 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x)$$

Or $\int_a^{+\infty} f(t) \,\mathrm{d}t$ diverge donc

$$\int_a^x f(t) \,\mathrm{d}t \underset{x\to\infty}{\sim} \int_a^x \frac{tf'(t) + f(t)}{\alpha + 1} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha + 1} [tf(t)]_a^x = \frac{xf(x) - af(a)}{\alpha + 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{xf(x)}{\alpha + 1}$$

car $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t) \,\mathrm{d}t = +\infty$.

4. **a.** Par le changement de variable $u = \ln x$, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta} \,\mathrm{d}x$ est de même nature que $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$: elle converge donc si et seulement si $\beta > 1$. Comme $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est positive, elle est intégrable si et seulement si $\beta > 1$.

b. Posons $f : x \mapsto \frac{1}{x^\gamma (\ln x)^\beta}$. Alors f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et

$$\forall x \in [2, +\infty[, \ \frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln \circ f)'(x) = -\gamma x + \frac{\beta}{x \ln x}$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = -\gamma$$

D'après les questions **2** et **3**,

- si $\gamma > 1$, f est intégrable sur $[2, +\infty[$;
- si $\gamma < 1$, f n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$.