Devoir à la maison n°03 : corrigé

Solution 1.

1. **a.** L'équation $X^2 - zX - \frac{p}{3} = 0$ est une équation du second degré donc elle admet deux solutions complexes u et v éventuellement confondues. Les liens entre coefficients et racines d'une équation du second degré nous disent alors que $u+v=z$ et $uv=-\frac{p}{3}$.

   b. Tout d'abord
$$u^3v^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = -\frac{p^3}{27}$$
   Ensuite
$$u^3+v^3 = (u+v)^3 - 3u^2v - 3uv^2 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) = z^3 + pz = -q$$
   puisque z est solution de (E).

   c. D'après le cours, u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $X^2 - (u^3+v^3)X + u^3v^3 = 0$, c'est-à-dire de l'équation (E′).

   d. On utilise le fait que $u^3+v^3=-q$ et $uv=-\frac{p}{3}$.
$$\begin{aligned}(ju+j^2v)^3 + p(ju+j^2v) + q &= u^3 + 3ju^2v + 3j^2uv^2 + v^3 + p(ju+j^2v) + q\\ &= 3uv(ju+j^2v) + p(ju+j^2v) \qquad \text{car } u^3+v^3=-q\\ &= 0 \qquad \text{car } uv = -\frac{p}{3}\\ (j^2u+jv)^3 + p(j^2u+jv) + q &= u^3 + 3j^2u^2v + 3juv^2 + v^3 + p(j^2u+jv) + q\\ &= 3uv(j^2u+jv) + p(j^2u+jv) \qquad \text{car } u^3+v^3=-q\\ &= 0 \qquad \text{car } uv = -\frac{p}{3}\end{aligned}$$

   Ainsi $ju+j^2v$ et j^2u+jv sont bien solutions de (E).

2. Avec les notations de l'énoncé $p=-3i$ et $q=1-i$. L'équation (E′) est alors
$$X^2 + (1-i)X - i = 0$$
   Son discriminant est $(1-i)^2+4i=2i$. Une racine carrée de ce discriminant est $1+i$. Les solutions de (E′) sont alors -1 et i. Une racine cubique de -1 est $u=-1$ et une racine cubique de i est $v=-i$ et on a bien $uv=i=-\frac{p}{3}$. Les solutions de (E) sont donc
$$\begin{aligned}u+v &= -1-i\\ ju+j^2v &= -j-j^2i = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)\\ j^2u+jv &= -j^2-ji = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)(1+i)\end{aligned}$$

Solution 2.

Soit $z=a+ib$ un point fixe éventuel de l'exponentielle complexe. On a donc
$$e^ae^{ib} = a+ib$$
et en passant aux parties réelle et imaginaire
$$e^a\cos b = a \qquad\qquad e^a \sin b = b$$
On en déduit que $\tan b = \frac{b}{a}$ i.e. $a = \frac{b}{\tan b}$ et donc que $\exp\left(\frac{b}{\tan b}\right) = \frac{b}{\sin b}$.

Considérons donc la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{x}{\tan x}} - \frac{x}{\sin x}$. On constate que f est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e-1>0$ et $f(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 1-\frac{\pi}{2}<0$. Il existe donc $b\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(b)=0$. On pose alors $a=\frac{b}{\tan b}$.
On a alors $e^a = \frac{b}{\sin b}$ puis $e^a\cos b = \frac{b}{\tan b} = a$ et $e^a \sin b = b$. On en déduit que $e^z=z$.