

# DEVOIR SURVEILLÉ N°09 : CORRIGÉ

## Problème 1 – D'après ESCP 1988

### Partie 1 – Étude d'un endomorphisme

1. Évident.
2. Notons  $a_n$  le coefficient dominant de  $P$ . On a donc  $a_n \neq 0$ . Le coefficient de  $X^n$  dans  $(X^2 - 1)P'' + 4XP'$  est alors  $n(n-1)a_n + 4na_n$ . Puisque  $f(P) = \lambda P$ ,  $n(n-1)a_n + 4na_n = \lambda$  et donc  $\lambda = n(n+3)$  puisque  $a_n \neq 0$ .
3. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  non nul tel que  $f(P) = \lambda_n P$ . En notant  $d$  son degré, la question précédente montre que  $\lambda_n = d(d+3)$  i.e.  $n(n+3) = d(d+3)$ . La fonction  $x \mapsto x(x+3)$  est strictement croissante et donc injective sur  $\mathbb{R}_+$  de sorte que  $n = d$ .
4. Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Alors  $\deg P \leq n$  donc  $\deg P \leq n-1$  et  $\deg P'' \leq n-2$ . On en déduit que  $\deg XP' \leq n$  et  $\deg(X^2 - 1)P'' \leq n$  puis que  $\deg f(P) \leq n$ . Ainsi  $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ .  $\mathbb{R}_n[X]$  est donc stable par  $f$  et  $f$  induit alors un endomorphisme  $f_n$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
5. a. Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  et notons  $a$  le coefficient de  $X^n$  dans  $P$  (éventuellement nul). Alors le coefficient de  $X^n$  dans  $f_n(P) - \lambda_n P$  est  $n(n-1)a + 4na - n(n+3)a = 0$ . Ainsi  $f_n(P) - \lambda_n P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . On en déduit que

$$G_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

Puisque  $f_n - \lambda_n I_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ ,

$$\dim \mathbb{R}_n[X] = \text{rg}(f_n - \lambda_n I_n) + \dim \text{Ker}(f_n - \lambda_n I_n) = \dim F_n + \dim G_n$$

d'après le théorème du rang. Or  $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$  et  $\dim G_n \leq \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$  puisque  $G_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . On en déduit que  $\dim F_n \geq 1$ .

- b. Soit  $P \in F_n \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Supposons  $P$  non nul. Puisque  $f(P) = \lambda_n P$ , la question 3 montre que  $\deg P = n$ , ce qui est absurde puisque  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Ainsi  $P = 0$  et  $F_n \cap \mathbb{R}_{n-1}[X] = \{0\}$ . On peut alors affirmer que

$$\dim(F_n \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]) = \dim F_n + \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] \geq 1 + n = n+1$$

Par ailleurs,  $F_n \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$  donc  $\dim(F_n \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]) \leq n$ . Finalement,  $\dim(F_n \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]) = n$  et donc  $F_n \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathbb{R}_n[X]$ .

- c. On déduit de la question précédente que

$$\dim F_n = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = 1$$

Notamment, il existe un polynôme  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$  non nul tel que  $F_n = \text{vect}(P_n)$ . Puisque  $P_n \in F_n$ ,  $f(P_n) = f_n(P_n) = \lambda_n P_n$ . Quitte à diviser  $P_n$  par son coefficient dominant, on peut supposer  $P_n$  non nul.

De plus,  $P_n \notin \mathbb{R}_{n-1}[X]$ , sinon  $P_n \in F_n \cap \mathbb{R}_{n-1}[X] = \{0\}$ . On en déduit que  $\deg P_n = n$ .

Reste à prouver l'unicité. Soit alors  $Q \in \mathbb{R}[X]$  unitaire tel que  $f(Q) = \lambda_n Q$ . A nouveau, la question 3 montre que  $\deg Q = n$ . Ainsi  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$  de sorte que  $f_n(Q) = f(Q) = \lambda_n Q$  et donc  $Q \in F_n = \text{vect}(P_n)$ . Finalement,  $Q$  et  $P_n$  sont donc colinéaires mais comme ils sont tous deux unitaires, ils sont égaux.

6. Remarquons que  $Q'_n = -(-1)^n P'_n(-X)$  et  $Q''_n = (-1)^n P''_n(-X)$ . Or on sait que

$$(X^2 - 1)P''_n + 4XP'_n = n(n+3)P_n$$

donc en substituant  $-X$  à  $X$ ,

$$(X^2 - 1)P''_n(-X) - 4XP'_n(-X) = n(n+3)P_n(-X)$$

puis en multipliant par  $(-1)^n$

$$(X^2 - 1)(-1)^n P''_n(-X) - 4X(-1)^n P'_n(-X) = n(n+3)(-1)^n P_n(-X)$$

ou encore  $f(Q_n) = \lambda_n Q_n$ . Or on vérifie aisément que  $Q_n$  est unitaire puisque  $P_n$  l'est. L'unicité du polynôme  $P_n$  montre alors que  $P_n = Q_n$ . Ceci signifie que  $P_n$  a la parité de  $n$ .

7. Soit un entier  $n \geq 2$ . Puisque  $P_n$  est unitaire, de degré  $n$  et de même parité que  $n$ , on peut affirmer qu'il existe un réel  $\alpha_n$  et un polynôme  $\tilde{P}_n \in \mathbb{R}_{[n-3]}[X]$  tel que

$$P_n = X^n + \alpha_n X^{n-2} + \tilde{P}_n$$

Par linéarité de  $f$ ,

$$f(P_n) = f(X^n) + \alpha_n f(X^{n-2}) + f(\tilde{P}_n)$$

Or

$$\begin{aligned} f(X^n) &= n(n+3)X^n - n(n-1)X^{n-2} \\ f(X^{n-2}) &= (n-2)(n+1)X^{n-2} - (n-2)(n-3)X^{n-4} \end{aligned}$$

et  $f(P_n) \in \mathbb{R}_{n-3}[X]$  car  $\mathbb{R}_{n-3}[X]$  est stable par  $f$  d'après la question 4. Ainsi il existe un polynôme  $\hat{P}_n \in \mathbb{R}_{n-3}[X]$  tel que

$$f(P_n) = n(n+3)X^n + (\alpha_n(n-2)(n+1) - n(n-1))X^{n-2} + \hat{P}_n$$

Mais on sait que

$$f(P_n) = \lambda_n P_n = \lambda_n X^n + \lambda_n \alpha_n X^{n-2} + \lambda_n \tilde{P}_n$$

En identifiant les coefficients de  $X^{n-2}$ , on obtient,

$$\alpha_n(n-2)(n+1) - n(n-1) = \lambda_n \alpha_n = n(n+3)\alpha_n$$

ou encore

$$\alpha_n = -\frac{n(n-1)}{2(2n+1)}$$

8. Puisque  $P_0$  est unitaire et de degré 00,  $P_0 = 1$ .

$P_1$  est impair, unitaire et de degré 1 donc  $P_1 = X$ .

Enfin,  $P_2$  est pair, unitaire, de degré 2 et son coefficient constant est  $-\frac{1}{5}$  d'après la question 7. Ainsi  $P_2 = X^2 - \frac{1}{5}$ .

9. a. Tout d'abord

$$R'_n = 2XP'_n + (X^2 - 1)P''_n - nP_n - nXP'_n = (X^2 - 1)P''_n - (n-2)XP'_n - nP_n$$

Or  $f(P_n) = \lambda_n P_n$  donc

$$(X^2 - 1)P''_n = \lambda_n P_n - 4XP'_n = n(n+3)P_n - 4XP'_n$$

Ainsi

$$R'_n = n(n+3)P_n - 4XP'_n - (n-2)XP'_n - nP_n = n(n+2)P_n - (n+2)XP'_n = (n+2)(nP_n - XP'_n)$$

On en déduit ensuite que

$$R''_n = (n+2)(nP'_n - P'_n - XP''_n) = (n+2)(n-1)P'_n - (n+2)XP''_n$$

puis que

$$(X^2 - 1)R''_n = (n+2)(n-1)(X^2 - 1)P'_n - (n+2)X(X^2 - 1)P''_n$$

Or on rappelle que

$$(X^2 - 1)P''_n = n(n+3)P_n - 4XP'_n$$

donc

$$\begin{aligned} (X^2 - 1)R''_n &= (n+2)(n-1)(X^2 - 1)P'_n - (n+2)X(n(n+3)P_n - 4XP'_n) \\ &= (n+2)(n-1)(X^2 - 1)P'_n - n(n+2)(n+3)XP_n + 4(n+2)X^2P'_n \end{aligned}$$

Or

$$4XR'_n = 4X(n+2)(nP_n - XP'_n) = 4n(n+2)XP_n - 4(n+2)X^2P'_n$$

donc

$$\begin{aligned} f(R_n) &= (X^2 - 1)R''_n + 4XR'_n \\ &= (n+2)(n-1)(X^2 - 1)P'_n - n(n+2)(n+3)XP_n + 4n(n+2)XP_n \\ &= (n+2)(n-1)(X^2 - 1)P'_n - n(n+2)(n-1)XP_n \\ &= (n+2)(n-1)((X^2 - 1)P'_n - nXP_n) = (n+2)(n-1)R_n = \lambda_{n-1} R_n \end{aligned}$$

- b. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La question 5.c montrer que  $R_n$  est colinéaire à  $P_{n-1}$ . Il existe donc  $\beta_n \in \mathbb{R}$  tel que  $R_n = \beta_n P_{n-1}$ . Puisque  $P_{n-1}$  est unitaire,  $\beta_n$  est en fait le coefficient de  $X^{n-1}$  dans  $R_n$ .  
En reprenant les notations de la question 7,

$$P_n = X^n + \alpha_n X^{n-2} + \tilde{P}_n$$

où l'on rappelle que  $\tilde{P}_n \in \mathbb{R}_{n-3}[X]$ . Cette relation est valable même si  $n = 1$ , puisque  $\alpha_1 = 0$ . Un calcul donne alors

$$R_n = -(n + 2\alpha_n)X^{n-1} - (n - 2)X^{n-3} + (X^2 - 1)\tilde{P}'_n - nX\tilde{P}_n$$

ou encore, en posant  $\hat{P}_n = -(n - 2)X^{n-3} + (X^2 - 1)\tilde{P}'_n - nX\tilde{P}_n$ ,

$$R_n = -(n + 2\alpha_n)X^{n-1} + \hat{P}_n$$

avec  $\deg \hat{P}_n \leq n - 2$ . Ainsi le coefficient de  $X^{n-1}$  dans  $R_n$  est

$$\beta_n = -(n + 2\alpha_n) = -n + \frac{n(n-1)}{2n+1} = -\frac{n(n+2)}{2n+1}$$

On en déduit donc bien que

$$R_n + \frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1} = 0$$

- c. En dérivant la relation de la question précédente, on obtient

$$R'_n + \frac{n(n+2)}{2n+1}P'_{n-1} = 0$$

Or on a vu que  $R'_n = (n+2)(nP_n - XP'_n)$  de sorte que

$$(n+2)(nP_n - XP'_n) + \frac{n(n+2)}{2n+1}P'_{n-1} = 0$$

ou même, en simplifiant par  $n+2$

$$nP_n - XP'_n + \frac{n}{2n+1}P'_{n-1} = 0$$

En multipliant par  $(X^2 - 1)$ , on obtient

$$n(X^2 - 1)P_n - X(X^2 - 1)P'_n + \frac{n}{2n+1}(X^2 - 1)P'_{n-1} = 0$$

Or

$$(X^2 - 1)P'_n = R_n + nXP_n = -\frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1} + nXP_n$$

et

$$(X^2 - 1)P'_{n-1} = R_{n-1} + (n-1)XP_{n-1} = -\frac{(n-1)(n+1)}{2n-1}P_{n-2} + (n-1)XP_{n-1}$$

donc

$$n(X^2 - 1)P_n + \frac{n(n+2)}{2n+1}XP_{n-1} - nX^2P_n - \frac{(n-1)(n+1)}{4n^2-1}P_{n-2} + \frac{n(n-1)}{2n+1}XP_{n-1} = 0$$

En simplifiant par  $n$

$$(X^2 - 1)P_n + \frac{n+2}{2n+1}XP_{n-1} - X^2P_n - \frac{(n-1)(n+1)}{4n^2-1}P_{n-2} + \frac{n-1}{2n+1}XP_{n-1} = 0$$

ce qui donne

$$-P_n + XP_{n-1} - \frac{n^2-1}{4n^2-1}P_{n-2} = 0$$

et enfin, en passant à l'opposé,

$$P_n - XP_{n-1} + \frac{n^2-1}{4n^2-1}P_{n-2} = 0$$

## Partie 2 – Comportement asymptotique d'une suite

10. On a clairement

$$\frac{1}{4X^2 - 1} = \frac{1}{(2X - 1)(2X + 1)} = \frac{1}{2} \frac{(2X + 1) - (2X - 1)}{(2X + 1)(2X - 1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2X - 1} - \frac{1}{2X + 1} \right)$$

On en déduit par télescopage que

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

puis que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{6}$$

11. a. On a clairement  $u_1 \geq u_0 \geq 1$ . Supposons que  $u_{n-1} \geq u_{n-2} \geq 1$  pour un certain entier  $n \geq 2$ . Alors

$$\frac{1}{9} \left[ u_{n-1} - u_{n-2} + \frac{3}{4n^2 - 1} \right] \geq 0$$

donc  $u_n \geq u_{n-1}$ . Mais on sait déjà que  $u_{n-1} \geq 1$  donc  $u_n \geq u_{n-1}$ . Par récurrence, ceci est vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

b. Soit un entier  $n \geq 2$ . Pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,

$$u_k = u_{k-1} + \frac{1}{9} \left[ u_{k-1} - u_{k-2} + \frac{3}{4k^2 - 1} u_{k-2} \right]$$

En additionnant ces inégalités et en télescopant, on obtient le résultat voulu.

c. On a clairement  $u_0 \leq u_1 \leq \frac{6}{5}$ . De plus, pour  $n \geq 2$ ,

$$u_n = u_1 + \frac{1}{9} \left[ u_{n-1} - u_0 + \sum_{k=2}^n \frac{3}{4k^2 - 1} u_{k-2} \right] \leq u_1 + \frac{1}{9} (u_n - u_0 + S_n u_n) = 1 + \frac{1}{9} u_n + \frac{1}{3} S_n u_n$$

par croissance de la suite  $(u_n)$  et car  $(S_n)$  est positive. Par ailleurs, la suite  $(S_n)$  est également croissante (évident) et converge vers  $\frac{1}{6}$  donc elle est majorée par  $\frac{1}{6}$ . On en déduit

$$u_n \leq 1 + \frac{1}{9} u_n + \frac{1}{18} u_n = 1 + \frac{1}{6} u_n$$

On en déduit immédiatement que  $u_n \leq \frac{6}{5}$ .

La suite  $(u_n)$  étant croissante et majorée, elle converge.

12. a. On rappelle que  $P_0 = 1$  et  $P_1 = X$ . Ainsi, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f_0(t) = 1 \qquad f_1(t) = \frac{2 \operatorname{ch} t}{e^t} = 1 + e^{-2t}$$

Soit maintenant un entier  $n \geq 2$ . On rappelle que

$$P_n - X P_{n-1} + \frac{n^2 - 1}{4n^2 - 1} P_{n-2} = 0$$

En fixant  $t \in \mathbb{R}$  et en évaluant en  $\operatorname{ch} t$ , on obtient

$$P_n(\operatorname{ch} t) - \operatorname{ch}(t) P_{n-1}(\operatorname{ch} t) + \frac{n^2 - 1}{4n^2 - 1} P_{n-2}(\operatorname{ch} t) = 0$$

ou encore

$$\frac{e^{nt}}{2^n} f_n(t) - \operatorname{ch}(t) \frac{e^{(n-1)t}}{2^{n-1}} f_{n-1}(t) + \frac{n^2 - 1}{4n^2 - 1} \frac{e^{(n-2)t}}{2^{n-2}} f_{n-2}(t) = 0$$

En multipliant par  $\frac{2^n}{e^{nt}}$ , on obtient

$$f_n(t) - 2 \operatorname{ch}(t) e^{-t} f_{n-1}(t) + \frac{4(n^2 - 1)}{4n^2 - 1} e^{-2t} f_{n-2}(t) = 0$$

ou encore

$$f_n(t) - (1 + e^{-2t}) f_{n-1}(t) + \left( 1 - \frac{3}{4n^2 - 1} \right) e^{-2t} f_{n-2}(t) = 0$$

puis

$$f_n(t) - f_{n-1}(t) = e^{-2t} \left[ f_{n-1}(t) - f_{n-2}(t) + \frac{3}{4n^2 - 1} f_{n-2}(t) \right]$$

13. Tout d'abord,  $f_0: t \mapsto 1$  et  $f_1 - f_0: t \mapsto e^{-2t}$  sont bien positives et décroissantes sur  $\mathbb{R}$ . Supposons que  $f_{n-2}$  et  $f_{n-1} - f_{n-2}$  soient positives et décroissantes sur  $\mathbb{R}$  pour un certain entier  $n \geq 2$ .  
 Tout d'abord,  $f_{n-1} = f_{n-2} + (f_{n-1} - f_{n-2})$  est positive et décroissante sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de telles fonctions.  
 Puisque pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f_n(t) - f_{n-1}(t) = e^{-2t} \left[ f_{n-1}(t) - f_{n-2}(t) + \frac{3}{4n^2 - 1} f_{n-2}(t) \right]$$

$f_n - f_{n-1}$  est bien positive sur  $\mathbb{R}$ . De plus, les fonctions  $t \mapsto e^{-2t}$  et  $f_{n-1} - f_{n-2} + \frac{3}{4n^2 - 1} f_{n-2}$  sont décroissantes sont décroissante et *positives* sur  $\mathbb{R}$  (la seconde est une somme de fonctions décroissantes) : leur produit  $f_n - f_{n-1}$  est donc décroissant sur  $\mathbb{R}$ .

Par récurrence,  $f_{n-1}$  et  $f_n - f_{n-1}$  sont bien positives et décroissantes sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

14.  $\text{ch}$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Puisque  $\text{ch}(0) = 1$  et  $\lim_{+\infty} \text{ch} = +\infty$ , elle induit une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur  $[1, +\infty[$ . Sa bijection réciproque est également strictement croissante.
15. a. Par définition,  $\text{ch } \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} = \frac{5}{3}$ . Ainsi  $e^\alpha + e^{-\alpha} = \frac{10}{3}$  ou encore  $e^{2\alpha} - \frac{10}{3}e^\alpha + 1 = 0$ . Les racines du polynôme  $X^2 - \frac{10}{3}X + 1$  sont  $\frac{1}{3}$  et 3. Or  $\alpha \geq 0$  par définition de  $\text{argch}$  de sorte que  $e^\alpha \geq 1$ . Ainsi  $e^\alpha = 3$ .  
 On a clairement  $u_1 = 1 = f_0(\alpha)$ . De plus,  $f_1(\alpha) = 1 + e^{-2\alpha} = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$ . Supposons que  $u_{n-1} = f_{n-1}(\alpha)$  et  $u_{n-2} = f_{n-2}(\alpha)$  pour un certain entier  $n \geq 2$ . Alors

$$\begin{aligned} f_n(\alpha) &= f_{n-1}(\alpha) + e^{-2\alpha} \left[ f_{n-1}(\alpha) - f_{n-2}(\alpha) + \frac{3}{4n^2 - 1} f_{n-2}(\alpha) \right] \\ &= u_{n-1} + \frac{1}{9} \left[ u_{n-1} - u_{n-2} + \frac{3}{4n^2 - 1} u_{n-2} \right] = u_n \end{aligned}$$

Par récurrence double,  $u_n = f_n(\alpha)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- b. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme la fonction  $f_n - f_{n-1}$  est positive sur  $\mathbb{R}$ ,  $f_n(\text{argch } x) \geq f_{n-1}(\text{argch } x)$ . La suite de terme général  $f_n(\text{argch } x)$  est donc croissante.  
 Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par croissance de  $\text{argch}$ ,  $\text{argch } x \geq \alpha$ . Par décroissance de  $f_n$ ,

$$f_n(\text{argch } x) \leq f_n(\alpha) = u_n \leq \frac{6}{5}$$

La suite de terme général  $f_n(\text{argch } x)$  est donc également majorée par  $\frac{6}{5}$ .

Cette suite étant croissante et majorée, elle converge vers un réel  $\ell(x)$ . Par ailleurs, la croissance de la suite de terme général  $f_n(\text{argch } x)$  montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(\text{argch } x) \geq f_0(\text{argch } x) = 1$ . Par passage à la limite,  $\ell(x) \geq 1 > 0$ .

Par définition de  $f_n$ ,

$$P_n(x) = \frac{e^{n \text{argch } x}}{2^n} f_n(\text{argch } x)$$

Comme  $\ell(x) \neq 0$ , on peut alors affirmer que

$$P_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell(x) e^{n \text{argch } x}}{2^n}$$

Si on pose  $u = \text{argch } x$ , alors  $x = \text{ch}(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$ . Ainsi  $e^u$  est racine du polynôme  $X^2 - 2xX + 1$ . Ses racines sont  $x + \sqrt{x^2 - 1}$  et  $x - \sqrt{x^2 - 1}$ . Ces deux racines sont positives et leur produit vaut 1. Or  $u \geq 0$  donc  $e^u \geq 1$  :  $e^u$  est la plus grande de ces deux racines, c'est-à-dire  $x + \sqrt{x^2 - 1}$ . Finalement,

$$e^{n \text{argch } x} = (e^u)^n = \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n$$

Finalement,

$$P_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left( \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{2} \right)^n \ell(x)$$

## SOLUTION 1.

1. a. Pour tout  $r \in \mathbb{R}_+$ ,

$$f'(r) = (p+1)r^p - p(M+1)r^{p-1} = r^{p-1}((p+1)r - p(M+1))$$

Ainsi l'unique zéro strictement positif de  $f'$  est

$$r_0 = \frac{p(M+1)}{p+1}$$

Or

$$r_0 - 1 = \frac{p(M+1)}{p+1} - 1 = \frac{Mp-1}{p+1}$$

Ainsi

- $r_0 > 1$  lorsque  $M > 1/p$  ;
- $r_0 < 1$  lorsque  $M < 1/p$  ;
- $r_0 = 1$  lorsque  $M = 1/p$ .

- b. On remarque que  $f(1) = 0$ .

r	0		$r_0$	1	$+\infty$
$f'(r)$	0	—	0	+	
$f(r)$	M		$f(r_0)$	0	$+\infty$

On en déduit que  $f(r) > 0$  lorsque  $r > 1$ .

- c. On remarque que  $r_0 = \frac{M+1}{1+1/p} > M+1$ .

r	0	1	$r_0$	$M+1$	$+\infty$
$f'(r)$	0	—	0	+	
$f(r)$	M	0	$f(r_0)$	M	$+\infty$

On en déduit que  $f(r) \geq M > \frac{1}{p} > 0$  lorsque  $r \geq M+1$ .

2. a. Soit  $z$  une racine complexe de  $p$  de module différent de 1. Alors

$$z^p = - \sum_{k=0}^{p-1} a_k z^k$$

puis, par inégalité triangulaire,

$$|z|^p \leq \sum_{k=0}^{p-1} |a_k| |z|^k \leq M \sum_{k=0}^{p-1} |z|^k = M \frac{|z|^p - 1}{|z| - 1}$$

Si  $|z| > 1$ , on obtient en multipliant cette inégalité par  $|z| - 1 > 0$ ,

$$|z|^{p+1} - |z|^p \leq M|z|^p - M$$

c'est-à-dire

$$|z|^{p+1} - (M+1)|z|^p + M \leq 0$$

c'est-à-dire  $f(|z|) \leq 0$ .

- b. Soit  $z$  une racine de  $P$  et supposons  $M \leq \frac{1}{p}$ . D'après la question 1.b,  $f(r) > 0$  lorsque  $r > 1$ . Or si  $|z| > 1$ , la question 2.a montre que  $f(|z|) \leq 0$ . C'est donc que  $|z| \leq 1$ .
- c. Soit  $z$  une racine de  $P$  et supposons  $M > \frac{1}{p}$ . Supposons que  $|z| \geq M + 1$ . D'après la question 1.c,  $f(|z|) > 0$ . Mais comme on a également  $|z| \geq M + 1 > \frac{1}{p} + 1 > 1$ , la question 2.a montre que  $f(|z|) \leq 0$ , ce qui est contradictoire. C'est donc que  $|z| < M + 1$ .

3. Remarquons que dans cette question  $M = \frac{1}{p}$ .

- a. Puisque  $M = \frac{1}{p}$ , la question 2.b montrer que toutes les racines de  $P$  sont de module inférieure ou égal à 1.
- b. On vérifie que

$$P(1) = 1 - \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} 1 = 0$$

donc 1 est racine de  $P$ . De plus,

$$P'(1) = p - \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} k = p - \frac{1}{p} \cdot \frac{p(p-1)}{2} = \frac{p+1}{2} \neq 0$$

Ainsi 1 est racine simple de  $P$ .

4. Remarquons que dans cette question  $M = 1$ .

- a. Puisque  $p \geq 2$ ,  $M = 1 > \frac{1}{2} \geq \frac{1}{p}$ . La question 2.c montre que les racines de  $P$  sont de module strictement inférieur à  $M + 1 = 2$ .
- b. Supposons que  $z$  soit racine de  $p$ . Alors

$$z^p - \sum_{k=0}^{p-1} z^k = 0$$

En multipliant par  $z - 1$ , on obtient

$$z^{p+1} - z^p - (z^p - 1) = 0$$

donc  $z$  est racine du polynôme  $X^{p+1} - 2X^p + 1$ .

- c. Pour tout  $r \in \mathbb{R}_+$ ,

$$g'(r) = (p+1)r^p - 2pr^{p-1} = (p+1)r^{p-1} \left( r - \frac{2p}{p+1} \right)$$

Remarquons que  $1 < \frac{2p}{p+1} < 2$ . On en déduit le tableau de variation suivant.

$r$	0	1	$\frac{2p}{p+1}$	2	$+\infty$
$g'(r)$	0	—	0	+	
$g(r)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

Puisque  $g(1) = 0$ ,  $g(2p/(p+1)) < 0$ . De plus,  $g(2) = 1 > 0$ . En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle  $[2p/(p+1), 2]$ , on montre donc que  $g$  s'annule sur cet intervalle en un réel  $x_p$ . Ainsi  $x_p$  est une racine de  $X^{p+1} - 2X^p + 1 = (X-1)P$ . Comme  $x_p \neq 1$ ,  $x_p$  est également une racine de  $P$ .

Pour tout entier  $p \geq 2$ ,  $\frac{2p}{p+1} \leq x_p \leq 2$  donc le théorème des gendarmes montre que la suite  $(x_p)$  converge vers 2.

- d. On a déjà montré que  $x_p$  était racine du polynôme  $X^{p+1} - 2X^p + 1$ . On en déduit immédiatement que  $(2 - x_p)x^p = 1$ , c'est-à-dire  $\varepsilon_p x_p^p = 1$  ou encore  $\varepsilon_p = (2 - \varepsilon_p)^{-p} = x_p^{-p}$ . Or pour tout entier  $p \geq 2$ ,

$$\frac{4}{3} = 2 - \frac{2}{3} \leq 2 - \frac{2}{p+1} = \frac{2p}{p+1} \leq x_p \leq 2$$

donc

$$0 \leq p\varepsilon_p \leq \frac{p}{(4/3)^p}$$

Par croissances comparées,  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p}{(4/3)^p} = 0$  donc la suite  $(p\varepsilon_p)$  converge vers 0 par encadrement. Enfin,

$$\varepsilon_p = (2 - \varepsilon_p)^{-p} = \frac{1}{2^p} \left(1 - \frac{\varepsilon_p}{2}\right)^{-p} = \frac{1}{2^p} \exp\left(-p \ln\left(1 - \frac{\varepsilon_p}{2}\right)\right)$$

Or comme la suite  $(\varepsilon_p)$  converge vers 0,

$$\ln\left(1 - \frac{\varepsilon_p}{2}\right) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\varepsilon_p}{2}$$

et don

$$-p \ln\left(1 - \frac{\varepsilon_p}{2}\right) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p\varepsilon_p}{2}$$

Comme la suite  $(p\varepsilon_p)$  converge également vers 0,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} -p \ln\left(1 - \frac{\varepsilon_p}{2}\right) = 0$$

et donc

$$\exp\left(-p \ln\left(1 - \frac{\varepsilon_p}{2}\right)\right) \underset{p \rightarrow +\infty}{=} 1 + o(1)$$

puis

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2^p} \exp\left(-p \ln\left(1 - \frac{\varepsilon_p}{2}\right)\right) \underset{p \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2^p} + o\left(\frac{1}{2^p}\right)$$

Comme  $x_p = 2 - \varepsilon_p$ ,

$$x_p \underset{p \rightarrow +\infty}{=} 2 - \frac{1}{2^p} + o\left(\frac{1}{2^p}\right)$$

- e. Soit  $z$  une racine de  $P$ . Alors  $z \neq 0$  puisque 0 n'est clairement pas racine de  $p$ . On en déduit que  $Q(1/z) = -\frac{P(z)}{z^p} = 0$  et donc  $1/z$  est racine de  $Q$ .

Le nombre  $M$  associé au polynôme  $Q$  est encore 1, de sorte que les racines de  $Q$  sont encore toutes de module strictement inférieur à 2. Donc  $1/z$  est de module strictement inférieur à 2, ce qui signifie que  $z$  est de module strictement supérieur à  $\frac{1}{2}$ .

Les racines de  $P$  sont donc toutes de module strictement compris entre  $\frac{1}{2}$  et 2.