

DEVOIR À LA MAISON N°12

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1

1 La série $\sum \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann qui converge si et seulement si $x > 1$. Le domaine de définition de ζ est donc $]1, +\infty[$.

2 Si $x \leq 0$, la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge grossièrement. Si $x > 0$, la suite de terme général $\frac{1}{n^x}$ est décroissante de limite nulle de sorte que $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées. On en déduit que le domaine de définition de F est \mathbb{R}_+^* .

3 3.a En utilisant le développement limité classique $\ln(u) = u + \mathcal{O}(u^2)$,

$$\ln(n) - \ln(n-1) = -\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3.b Posons $u_n = H_n - \ln(n)$. D'après la question précédente,

$$u_{n-1} - u_n = \ln(n) - \ln(n-1) - \frac{1}{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit que la série télescopique $\sum u_{n-1} - u_n$ converge. Par conséquent, la suite (u_n) converge vers un réel γ . Autrement dit

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

3.c Notons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ de sorte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = F(1)$. Remarquons que

$$H_{2n} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1 - (-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{2}{2k} = H_n$$

car les termes d'indices impairs de la somme sont nuls. Alors

$$\begin{aligned} S_{2n} = H_{2n} - H_n &= \ln(2n) + \gamma - \ln(n) - \gamma + o(1) \\ &= \ln(2) + o(1) \end{aligned}$$

Ainsi

$$F(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \ln(2)$$

4 Pour tout $x \in [2, +\infty[$,

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^2}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[2, +\infty[$.

Notamment, $\sum f_n$ converge uniformément sur $[2, +\infty[$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{\infty} f_n = \delta_{n,1}$, le théorème d'interversion série/limite permet d'affirmer que

$$\lim_{+\infty} F = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n = 1$$

5 **5.a** Posons $\varphi_x(t) = \frac{\ln t}{t^x} = \ln(t)e^{-x \ln t}$. La fonction φ_x est bien dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'_x(t) = \frac{1 - x \ln(t)}{t} \cdot e^{-x \ln t}$$

La fonction φ_x est donc croissante sur $]0, e^{1/x}]$ et décroissante sur $[e^{1/x}, +\infty[$. On en déduit que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)$ est décroissante à partir du rang $\lceil e^{1/x} \rceil$.

5.b Remarquons que f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et que pour $x > 0$, $f_n(x) = (-1)^{n-1} e^{x \ln n}$ puis $f'_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n^x}$. Fixons $x > 0$. Comme la suite de terme général $\frac{\ln n}{n^x}$ est décroissante à partir d'un certain rang (d'après la question précédente) de limite nulle (croissances comparées), $\sum f'_n(x)$ converge d'après le critère spécial des séries alternées. Ainsi $\sum f'_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* .

En posant $N = \lceil e^{1/a} \rceil$, pour $x \geq a$, la suite $\frac{\ln n}{n^x}$ est décroissante à partir du rang N (en effet $\lceil e^{1/x} \rceil \leq \lceil e^{1/a} \rceil$). Le critère spécial des séries alternées permet alors d'affirmer que, pour $n \geq N$ et $x \geq a$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f'_k(x) \right| \leq |f'_{n+1}(x)| = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} = 0$, la suite des restes de la série $\sum f'_n$ converge uniformément vers 0 sur $[a, +\infty[$. On en déduit que $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Finalement, $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, +\infty[$, les f_n sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$ et $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. Ainsi F est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, ce qui implique que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

6 Soit $x > 1$.

$$F(x) - \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x}$$

Les termes d'indices pairs sont nuls donc

$$F(x) - \zeta(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n)^x} = - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = -2^{1-x} \zeta(x)$$

ou encore

$$F(x) = (1 - 2^{1-x}) \zeta(x)$$

On peut également écrire

$$\zeta(x) = \frac{1}{1 - 2^{1-x}} F(x)$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2^{1-x} = 1$ et on a vu à la question 4 que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta = 1$.

7 **7.a** Si $x > 1$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge absolument donc le produit de Cauchy de cette série par elle-même converge elle-même absolument. De plus,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} c_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \right)^2 = F(x)^2$$

7.b Soit $x > 0$. Pour tout $n \geq 2$,

$$c_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k^x} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^x} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^x}$$

Tous les termes de la somme étant positifs,

$$|c_n(x)| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^x}$$

De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$k(n-k) = nk - k^2 = \frac{n^2}{4} - \left(\frac{n}{2} - k\right)^2 \leq \frac{n^2}{4}$$

donc

$$|c_n(x)| \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n^2/4)^x} = \frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$$

De plus, $\frac{(n-1)4^x}{n^{2x}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4^x n^{1-2x}$ de sorte que, si l'on suppose $0 < x \leq \frac{1}{2}$, $1 - 2x \geq 0$ et la suite de terme général $\frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$ ne converge pas vers 0. A fortiori, la suite de terme général $c_n(x)$ ne converge pas vers 0. La série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$ diverge donc grossièrement.

8 **8.a** On trouve sans difficulté :

$$\frac{1}{X(n-X)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-X)+X}{X(n-X)} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{n-X} \right)$$

Ainsi

$$c_n(1) = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))} = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} = \frac{2(-1)^n H_{n-1}}{n}$$

8.b Pour tout entier $n \geq 2$,

$$\frac{H_n}{n+1} - \frac{H_{n-1}}{n} = \frac{1}{n(n+1)} (nH_n - (n+1)H_{n-1}) = \frac{1}{n(n+1)} (n(H_n - H_{n-1}) - H_{n-1}) = \frac{1}{n(n+1)} (1 - H_{n-1}) \leq 0$$

La suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)$ est donc décroissante.

8.c Remarquons que

$$\frac{H_{n-1}}{n} = \frac{H_n}{n} - \frac{1}{n^2}$$

D'après la question **3.b**, $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{n} = 0$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_{n-1}}{n} = 0$. On rappelle que

$$c_n(1) = \frac{2(-1)^n H_{n-1}}{\ln(n)}$$

La suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)$ est décroissante de limite nulle, donc, d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum c_n(1)$ converge.

9 **9.a** Comme F est dérivable en 1, on peut écrire

$$F(x) = F(1) + F'(1)(x-1) + o(x-1)$$

Or on a vu à la question **3.c** que $F(1) = \ln(2)$ donc

$$F(x) = \ln(2) + F'(1)(x-1) + o(x-1)$$

Par ailleurs, $2^{1-x} = e^{-\ln(2)(x-1)}$ donc, en utilisant le développement limité de l'exponentielle,

$$2^{1-x} = 1 - \ln(2)(x-1) + \frac{\ln(2)^2}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

puis

$$1 - 2^{1-x} = \ln(2)(x-1) - \frac{\ln(2)^2}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

9.b On a vu à la question **6** que, pour $x > 1$,

$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= \frac{F(x)}{1 - 2^{1-x}} \\ &\underset{x \rightarrow 1^+}{=} \frac{\ln(2) + F'(1)(x-1) + o(x-1)}{\ln(2)(x-1) \left(1 - \frac{\ln(2)}{2}(x-1) + o(x-1)\right)} \\ &\underset{x \rightarrow 1^+}{=} \frac{1}{\ln(2)(x-1)} (\ln(2) + F'(1)(x-1) + o(x-1)) \left(1 + \frac{\ln(2)}{2}(x-1) + o(x-1)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 1^+}{=} \frac{1}{\ln(2)(x-1)} \left(\ln(2) + \left(F'(1) + \frac{\ln(2)^2}{2}\right)(x-1) + o(x-1)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 1^+}{=} \frac{1}{x-1} + \frac{F'(1)}{\ln(2)} + \frac{\ln(2)}{2} + o(1) \end{aligned}$$

10 **10.a** Soient $n \geq 1$ et $x \in [1, 2]$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est donc décroissante sur $[n, n+1]$ i.e.

$$\forall t \in [n, n+1], \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$$

puis, par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$$

Par conséquent,

$$0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$$

10.b Soit $x \in [1, 2]$. La suite de terme général $\frac{1}{n^x}$ converge (vers 0). On en déduit que la suite télescopique $\sum \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$ converge également. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum v_n(x)$ converge également. Remarquons que

$$\sum_{k=1}^n v_k(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = H_n - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = H_n - \ln(n+1) = H_n - \ln(n) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$ et on a vu à la question **3.b** que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n - \ln(n) = \gamma$ donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n v_k(1) = \gamma$$

10.c Soit $x \in]1, 2]$.

$$\sum_{k=1}^n v_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} + \frac{1}{1-x} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^{x-1}}\right)$$

En passant à la limite, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \zeta(x) + \frac{1}{1-x}$$

10.d On sait déjà que la série $\sum v_n$ converge simplement sur $[1, 2]$. De plus, d'après la question **10.a**,

$$\forall x \in [1, 2], 0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} = \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{n+1}$$

Ainsi le reste de la série $\sum v_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[1, 2]$. On en déduit que $\sum v_n$ converge uniformément sur $[1, 2]$.

10.e Montrons tout d'abord que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} v_n(x) = v_n(1)$$

On pourrait pour cela appliquer le théorème de convergence dominée mais on peut également raisonner comme suit.

$$\forall x \in]1, 2], v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{1-x} ((n+1)^{1-x} - n^{1-x})$$

Tout d'abord, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}$. De plus

$$(n+1)^{1-x} - n^{1-x} = e^{(1-x)\ln(n+1)} - e^{(1-x)\ln(n)} = (1-x)(\ln(n+1) - \ln(n)) + o(1-x)$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x} ((n+1)^{1-x} - n^{1-x}) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

puis

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} v_n(x) = \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln(n)) = v_n(1)$$

Comme $\sum v_n$ converge uniformément sur $]1, 2]$, on peut appliquer le théorème d'interversion série/limite :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 1^+} v_n(x)$$

Autrement dit, d'après la question **10.c**,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) + \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1) = \gamma$$

ou encore

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{=} \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$$

11 On a montré que F était de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* à la question **5.b**. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln(n)}{n^x}$$

En particulier,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln(n)}{n} = -F'(1)$$

De plus, on a montré aux questions **9.b** et **10.e** que

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{=} \frac{1}{x-1} + \frac{F'(1)}{\ln(2)} + \frac{\ln(2)}{2} + o(1)$$

et que

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{=} \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \frac{F'(1)}{\ln(2)} + \frac{\ln(2)}{2} = \gamma$$

de sorte que

$$-F'(1) = \frac{\ln(2)^2}{2} - \gamma \ln(2)$$

Finalement,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln(n)}{n} = -F'(1) = \frac{\ln(2)^2}{2} - \gamma \ln(2)$$