Devoir surveillé n°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – CCP PSI 2006

Si n est un entier naturel non nul, on note

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

et on pose $\sigma_0 = 0$.

A toute suite complexe a, on associee la suite a^* définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

Partie I – Deux exemples

1. Cas d'une suite constante.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. On suppose que la suite a est définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha$.

a. Expliciter $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$.

c. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ (resp. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n^*$) est-elle convergente ?

2. Cas d'une suite géométrique.
Soit $z \in \mathbb{C}$; on suppose que la suite a est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = z^n$.

a. Exprimer a_n^* en fonction de z et n.

b. On suppose que $|z| < 1$.

i. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ et expliciter sa somme $\mathrm{A}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

ii. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$ en fonction de $\mathrm{A}(z)$.

c. On suppose que $|z| \geq 1$.

i. Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$?

ii. Quelle est la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n^*$ si $z = -2$?

iii. On suppose $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$.
Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$.

Partie II – Etude du procédé de sommation

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que a est à valeurs réelles.

1. Comparaison des convergences des deux suites.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une entier k fixé, $k \in [\![0, n]\!]$.

i. Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

ii. En déduire la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Soit a une suite réelle et q un entier naturel fixé.
On considère pour $n > q$ la somme $S_q(n, a) = \sum_{k=0}^{q} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $S_q(n, a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

c. On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

d. On suppose que a_n tend vers ℓ (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

e. La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

2. Comparaison des convergences des séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.

a. Pour $n \in [\![0, 3]\!]$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k, c'est à dire sous la forme $U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k$.

b. On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k pour $k \in [\![0, n]\!]$:

$$(\mathcal{E})\ U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

i. A quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte-tenu des résultats obtenus à la question précédente ?

ii. Etablir la formule $(\mathcal{E})$ par récurrence sur l'entier n (on pourra remarquer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = S_k - S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$).

c. On suppose que la série $\sum a_n$ est convergente. Montrer que la série $\sum a_n^*$ est convergente et exprimer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

d. La convergence de la série $\sum a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum a_n^*$?

Partie III – Une étude de fonctions.

Pour x réel, lorsque cela a du sens, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n x^n}{n!} \qquad \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n$$

1. Etude de f.

a. Vérifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Expliciter $xf(x)$ pour tout x réel.

c. Expliciter $e^{-x}f(x)$ pour tout x réel.

2. Etude de g.

a. Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. On désigne par g' la dérivée de la fonction g. Exprimer $g' - g$ en fonction de f.

c. Montrer que pour tout x réel :

$$g(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\, \mathrm{d}t$$

3. La fonction F.

On condidère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t} f(t)\, \mathrm{d}t$$

a. Montrer que la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et expliciter son développement.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\gamma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k \cdot k!(n-k)!}$. Exprimer γ_n en fonction de n et σ_n.

4. La série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a. Soit $w_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

i. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} w_k$ est convergente.

ii. En déduire que la suite de terme général $\sigma_n - \ln(n)$ admet une limite finie (que l'on ne demande pas de calculer) lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tau_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer τ_{2n} en fonction de σ_{2n} et σ_n.

c. Montrer en utilisant les questions précédentes que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente et déterminer sa somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

5. Etude de la fonction ϕ.

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sigma_n x^n$.

b. Préciser l'ensemble de définition Δ de la fonction ϕ, et étudier ses variations sur $[0, R[$.

c. Valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.

En utilisant les résultat de la partie II et de la question **4.c**, expliciter la valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.

d. Expliciter $\phi(x)$ pour $x \in \Delta$ et retrouver la valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.