Devoir surveillé n°07

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – CCP MP 2013

Dans tout le texte, $\mathbb{K}$ désigne le cors $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et p un entier nature non nul.
On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{K}$ et I_p la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
On pourra confondre $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$.
Une matrice N de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel r tel que $\mathrm{N}^r = 0$.
Si $\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_k$ sont des matrices carrées, la matrice $\mathrm{diag}(\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_k)$ désigne la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont $\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_k$.
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on note Id_E l'application identité sur E.
Enfin, on note $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ la $\mathbb{K}$-algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est «*toute puissante* sur $\mathbb{K}$» et on notera en abrégé TP$\mathbb{K}$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrive B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{B}^n$.
On note $\mathrm{T}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ toutes-puissantes sur $\mathbb{K}$:

$$\mathrm{T}_p(\mathbb{K}) = \left\{\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p\mathbb{K} \mid \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists \mathrm{B} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}),\ \mathrm{A} = \mathrm{B}^n\right\}$$

L'objectif principal du sujet est d'établir le resultat suivant : toute matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est TP$\mathbb{C}$.

Dans la partie I, on traite quelques exemples et contre-exemples.
Dans la partie II, on montre que, dans le cas où le polynôme caractéristique de la matrice A est scindé, on peut ramener l'étude au cas des matrices de la forme $\lambda\mathrm{I}_p + \mathrm{N}$ avec N nilpotente.
Dans la partie III, on traite le cas des matrices unipotentes, c'est-à-dire de la forme $\mathrm{I}_p + \mathrm{N}$ avec N nilpotente et on en déduit le théorème principal.
Les parties I et II sont dans une large mesure indépendantes. La partie III utilise les résultats des parties précédentes.

I Quelques exemples

1 Le cas de la taille 1.

1.a Démontrer que $\mathrm{T}_1(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.

1.b Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $b = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Donner les racines n-ièmes du nombre complexe b, c'est-à-dire les solutions de l'équation $z^n = b$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1.c En déduire $\mathrm{T}_1(\mathbb{C})$.

2 Une condition nécessaire …

2.a Démontrer que si $\mathrm{A} \in \mathrm{T}_p(\mathbb{K})$, alors $\det(\mathrm{A}) \in \mathrm{T}_1(\mathbb{K})$.

2.b En déduire un exemple de matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas TP$\mathbb{R}$.

3 …mais pas suffisante.
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il n'existe aucune matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. En déduire que la condition nécessaire de la question précédente n'est pas suffisante.

4 Un cas où A est diagonalisable.
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

4.a Démontrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (le détail des calculs n'est pas demandé).

4.b Démontrer que la matrice A est TP$\mathbb{R}$.

4.c Pour chacun des cas $n = 2$ et $n = 3$, expliciter une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $B^n = A$ (on pourra utiliser la calculatrice).

5 Un exemple de nature géométrique.
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5.a Justifier que A est la matrice d'une rotation vectorielle dont on précisera une mesure de l'angle.

5.b En déduire que A est TP$\mathbb{R}$.

6 Le cas des matrices nilpotentes.
Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

6.a Déterminer le polynôme caractéristique de N. En déduire que $N^p = 0$.

6.b Démontrer que si N est TP$\mathbb{K}$, alors N est nulle.

II Cas où le polynôme caractéristique est scindé

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique noté χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire de la forme

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{r_i}$$

avec $k, r_1, \dots, r_k$ des entiers naturels non nuls et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A, éléments de $\mathbb{K}$.
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ dont A est la matrice dans la base $\mathcal{B}$.
Enfin, pour $i \in [\![1, k]\!]$, on note $C_i = \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \operatorname{Id}_{\mathbb{K}^p})^{r_i}$ que l'on appelle sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ_i.

7 Démontrer que $\mathbb{K}^p = C_1 \oplus \cdots \oplus C_k$.

8 Montrer que tout $i \in [\![1, k]\!]$, le sous-espace caractéristique C_i est stable par u.
On note alors u_{C_i} l'endomorphisme de C_i induit par u.

9 Soit $i \in [\![1, k]\!]$. Justifier que $u_{C_i} - \lambda_i \operatorname{Id}_{C_i}$ est un endomorphisme de C_i nilpotent.

10 En déduire que la matrice A peut s'écrire sous la forme

$$A = P \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{p_k} + N_k) P^{-1}$$

avec P une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $p_i = \dim C_i$ et N_i une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$.
On rappelle que $\operatorname{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{p_k} + N_k)$ désigne la matrice diagonale par blocs de premier bloc $\lambda_1 I_{p_1} + N_1$, de deuxième bloc $\lambda_2 I_{p_2} + N_2$ et de dernier bloc $\lambda_k I_{P_k} + N_k$.

11 Démontrer que, si pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, la matrice $\lambda_i I_{p_i} + N_i$ est TP$\mathbb{K}$, alors A est elle-même TP$\mathbb{K}$.

III Le cas de matrices unipotentes

Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Nous allons montrer que la matrice unipotente $I_p + N$ est TP$\mathbb{K}$. On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale.

12 Une application des développements limités.

12.a Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$.
Démontrer, à l'aide d'une division euclidienne, qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V = X^p Q$.

12.b Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer l'existence d'un polynôme U de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$1 + x \underset{x\to 0}{=} U(x)^n + o(x^p)$$

On pourra utiliser un développement limité de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0.

12.c En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$1 + X = U^n + X^p Q$$

13 Applications.

13.a Démontrer que la matrice unipotente $I_p + N$ est TP$\mathbb{K}$.

13.b Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul. En déduire que si λ est TP$\mathbb{K}$, alors la matrice $\lambda I_p + N$ est TP$\mathbb{K}$.

14 Le résultat annoncé.

14.a Conclure que toute matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est TP$\mathbb{C}$.

14.b Toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est-elle TP$\mathbb{C}$?

15 Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ non diagonalisable et non inversible qui est TP$\mathbb{R}$.