Devoir à la maison n° 8 : corrigé

Problème 1 — Moyenne arithmético-géométrique

Partie I – Etude du cas général

1. Tout d'abord, $u_0 \leqslant v_0$ puisque $\min(a,b) \leqslant \max(a,b)$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_n - u_n = \frac{\left(\sqrt{v_{n-1}} - \sqrt{u_{n-1}}\right)^2}{2} \geqslant 0$$

don $u_n \leqslant v_n$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \geqslant 0 \qquad\qquad v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0$$

Ceci prouve que les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} - u_{n+1} - \frac{v_n - u_n}{2} = u_n - \sqrt{u_n v_n} = \sqrt{u_n}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}) \leqslant 0$$

donc

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2}$$

4. Tout d'abord, $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $v_n - u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ensuite $v_0 - u_0 = \max(a,b) - \min(a,b) = |a-b| \leqslant \frac{|a-b|}{2^0}$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n - u_n \leqslant \frac{|a-b|}{2^n}$. Alors

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2} \leqslant \frac{|a-b|}{2^{n+1}}$$

Par récurrence, $v_n - u_n \leqslant \frac{|a-b|}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Le théorème des gendarmes garantit que $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. Puisque (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante, elles sont adjacentes et convergent vers une limite commune $M(a,b)$.

Partie II – Propriétés de la moyenne arithmético-géométrique

On reprend les deux suites (u_n) et (v_n) de la partie I.

1. Puisque $\min(a,b) = \min(b,a)$ et $\max(a,b) = \max(b,a)$, les suites (u_n) et (v_n) sont inchangées par échange de a et b. On en déduit que $M(a,b) = M(b,a)$.

2. Définissons deux suites (u'_n) et (v'_n) suivant les mêmes relations de récurrence que les suites (u_n) et (v_n) mais de premier terme $u'_0 = \lambda a$ et $v'_0 = \lambda b$. On prouve par récurrence que $u'_n = \lambda u_n$ et $v'_n = \lambda v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les suites (u_n) et (v_n) convergent vers $M(a,b)$ tandis que les suites (u'_n) et (v'_n) convergent vers $M(\lambda a, \lambda b)$. Puisque $u'_n = \lambda u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$.

3. Puisque (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante et convergent vers $M(a,b)$, $u_n \leqslant M(a,b) \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $u_1 \leqslant M(a,b) \leqslant v_1$, ce qui donne le résultat escompté.

4. Les suites (u_{n+1}) et (v_{n+1}) sont de premier terme $\sqrt{ab}$ et $\frac{a+b}{2}$ et suivent les mêmes relations de récurrence que (u_n) et (v_n) donc convergent vers $M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$. Par ailleurs, ce sont des suites extraites de (u_n) et (v_n) donc elles convergent vers $M(a,b)$. On en déduit que $M(a,b) = M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$.

Partie III – Etude d'une fonction

1. En reprenant les deux suites (u_n) et (v_n) de la partie I avec $a = 1$ et $b = 0$, on prouve sans peine que la suite (u_n) est constamment nulle. On en déduit que $F(0) = 0$.
La question **II.3** montre que $1 \leqslant M(1,1) \leqslant 1$ i.e. $F(1) = 1$.

2. Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Les suites (u_n) et (v_n) définies dans la partie I sont positives donc leur limite commune l'est également i.e. $M(a,b) \geqslant 0$.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = M(1,x) \geqslant 0$.

3. Soit $(x,x') \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $x \leqslant x'$. On définit les suites (u_n), (v_n), (u'_n) et (v'_n) telles que $u_0 = 1$, $v_0 = x$, $u'_0 = 1$ et $v'_0 = x'$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad u'_{n+1} = \sqrt{u'_n v'_n} \qquad v'_{n+1} = \frac{u'_n + v'_n}{2}$$

On prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u'_n$ et $v_n \leqslant v'_n$. Par ailleurs, les suites (u_n) et (v_n) convergent vers $F(x)$ tandis que les suites (u'_n) et (v'_n) convergent vers $F(x')$. Par passage à la limite, $F(x) \leqslant F(x')$. Ceci prouve la croissance de F sur $\mathbb{R}_+$.

4. **a.** Il suffit d'appliquer la question **II.3** avec $a = 1$ et $b = x$.

   b. On rappelle que $F(1) = 1$. A l'aide de l'inégalité de la question précédente, on a donc pour tout $x \in]1,+\infty[$,

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \leqslant \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \leqslant \frac{1}{2}$$

et pour tout $x \in [0,1[$,

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \leqslant \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

ou encore pour tout $x \in]1,+\infty[$,

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} \leqslant \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \leqslant \frac{1}{2}$$

et pour tout $x \in]0,1[$

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim_{x\to 1^-} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$ et donc $\lim_{x\to 1} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$. Finalement, F est dérivable en 1 et $F'(1) = \frac{1}{2}$.

5. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
F(x) &= M(1,x) \\
&= M\left(\sqrt{x}, \frac{1+x}{2}\right) && \text{d'après } \textbf{II.4} \\
&= M\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right) && \text{d'après } \textbf{II.1} \\
&= \frac{1+x}{2} M\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) && \text{d'après } \textbf{II.2} \\
&= \frac{1+x}{2} F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)
\end{aligned}$$

   b. Puisque F est croissante et positive, elle admet une limite finie ℓ à droite en 0. Or $\lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{1+x} = 0^+$ donc la question précédente montre que $\ell = \frac{\ell}{2}$ et donc $\ell = 0$. Il s'ensuit que $\lim_{0^+} F = 0 = F(0)$ donc F est continue en 0.
D'après la question **III.4.a**, $F(x) \geqslant \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{F(x)}{x} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Par théorème de minoration, $\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = +\infty$ donc F n'est pas dérivable en 0. On peut même dire que la courbe représentative de F admet une tangente verticale en l'origine.

6. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) \geqslant \sqrt{x}$ donc, par théorème de minoration, $\lim_{+\infty} F = +\infty$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} F(x) &= M(1,x) \\ &= xM\left(\frac{1}{x}, 1\right) && \text{d'après } \textbf{II.2} \\ &= xM\left(1, \frac{1}{x}\right) && \text{d'après } \textbf{II.1} \\ &= xF\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

c. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{F(x)}{x} = F\left(\frac{1}{x}\right)$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{u\to 0^+} F(u) = 0$$

donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ i.e. $F(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$.

d. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question **III.5.a**

$$F(x) = \frac{1}{2}(1+x)F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

Mais d'après la question **III.6.b**

$$F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$$

On en déduit le résultat voulu.

e. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{F(x)}{\sqrt{x}} = F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$$

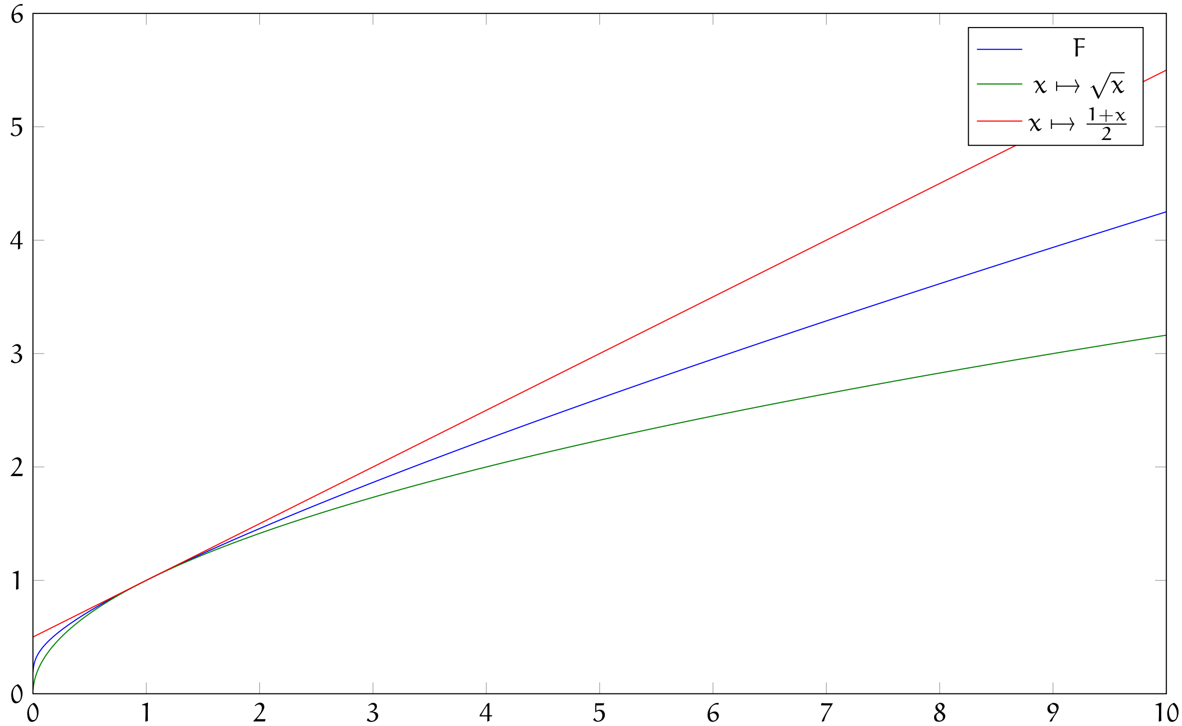
Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{2\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim_{u\to+\infty} F(u) = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right) = +\infty$. Ceci signifie que $\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{=} o(F(x))$.

7.

```
from matplotlib.pyplot import plot
from math import sqrt
from numpy import logspace

def F(x,eps):
    u=1
    v=x
    while abs(u-v)>eps:
        u,v=sqrt(u*v),(u+v)/2
    return (u+v)/2

x=logspace(-3,1,1000)
y=[F(t,1e-3) for t in x]
plot(x,y)
y=[sqrt(t) for t in x]
plot(x,y)
y=[(1+t)/2 for t in x]
plot(x,y)
```


F
$x \mapsto \sqrt{x}$
$x \mapsto \frac{1+x}{2}$
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10