Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et a, b, c trois vecteurs de l'espace E.

1. Soient $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ quatre scalaires. Critiquer l'implication suivante,
$$\lambda a + \mu b = \lambda' a + \mu' b \implies \lambda = \lambda' \quad \text{et} \quad \mu = \mu'.$$
2. Critiquer l'implication suivante,
$$(a, b) \text{ liée} \implies b \in \text{vect}(a).$$
3. Critiquer l'implication suivante,
$$(a, b, c) \text{ liée} \implies c \in \text{vect}(a, b).$$

Exercice 2.

Soient $m \in \mathbb{R}$. Donner une *condition nécessaire et suffisante* sur m pour que la famille
$$(m, 1, 1), \quad (2m, -1, m), \quad (1, 5, 2)$$
soit libre dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.

Montrer de deux manières que la famille
$$x \mapsto e^x \qquad x \mapsto x^2 \qquad x \mapsto \ln(x)$$
est libre dans l'espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4.★★

Soient $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}^n$, $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille libre de E et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose
$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k.$$
Donner une *condition nécessaire et suffisante* sur les α_i pour que $(y + x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ soit une famille libre.

Exercice 5.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $u = (a, 1, 1)$, $v = (1, a, 1)$ et $w = (1, 1, a)$. Déterminer une CNS pour que (u, v, w) soit libre dans $E = \mathbb{R}^3$.

Exercice 6.

Parmi les familles suivantes, déterminer les familles génératrices de $\mathbb{R}^3$:

1. $(u_1, u_2) = \big((1, 2, 3), (2, 1, 0)\big)$;
2. (u_1, u_2, u_3) vaut
$$\big((1, 1, 1), (0, 1, 2), (3, 2, -1)\big) \ ;$$
3. (u_1, u_2, u_3) vaut
$$\big((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\big) \ ;$$
4. (u_1, u_2, u_3) vaut
$$\big((1, -1, 1), (-1, 1, -1), (2, 3, -1)\big) \ ;$$
5. (u_1, u_2, u_3) vaut
$$\big((1, 2, -1), (1, -3, 4), (3, 1, 2)\big) \ ;$$
6. (u_1, u_2, u_3, u_4) vaut
$$\big((1, 0, 3), (0, 2, 1), (3, 1, 1), (2, 1, -1)\big).$$

Exercice 7.

Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs
$$e_1 = (1, 2, 3, 4) \quad \text{et} \quad e_2 = (1, -2, 3, -4).$$

1. Peut-on déterminer x et y pour que
$$(x, 1, y, 1) \in \text{vect}(e_1, e_2) \quad ?$$
2. Même question pour $(x, 1, 1, y) \in \text{vect}(e_1, e_2)$?

Exercice 8.

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a : x \mapsto e^{ax}$. Montrer que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 9.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $f_a : x \mapsto |x - a|$. Montrer que $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 10.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \sin(nx)$.

1. Pour $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, calculer $\int_0^{2\pi} f_m(t) f_n(t)\, dt$.
2. En déduire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 11.

Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Exercice 12.

Soient F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par l' équation

$$x + z = t + y,$$

et G défini par $y + t = x - y - z = 0$.

1. Déterminer la dimension ainsi qu'une base de F. Soit $a = (3, 1, 2, 4)$. Déterminer les coordonnées de a dans cette base.
2. Déterminer la dimension ainsi qu'une base de G. Soit $b = (4, 1, 3, -1)$. Déterminer les coordonnées de b dans cette base.
3. Déterminer la dimension et une base de $F \cap G$.

Exercice 13.★

Revenons un instant aux équations différentielles ...

1. Soit
$$\mathcal{S} = \left\{ y \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \ \ \mathcal{C}^2 \ \mid \ y'' + y' + y = 0 \right\}.$$
Déterminer une base de $\mathcal{S}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
2. Déterminer une base de $\mathcal{S}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
3. Donner une base du sous-espace vectoriel $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par la condition suivante,
$$f'' + 4f = 0, \quad f(\pi) = 0.$$

Exercice 14.

Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations suivantes,

$$x = 2y - z \ \ , \ \ t = x + y + z.$$

Prouver que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Quelle est sa dimension ? En donner une base.

Exercice 15.

Courage !...

1. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs
$$a = (1, 2, 0) \quad \text{et} \quad b = (-1, 1, 1) ?$$
2. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs
$$a = (3, 0, -2) \ \ , \ \ b = (0, 3, 1) \ \text{ et } \ c = (-1, 4, 2) ?$$
3. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs
$$a = (1, 1, -2) \ \ , \ \ b = (1, 3, 1) \ \ , \ \ c = (-2, 1, 2),$$
$$d = (1, -1, 1), e = (0, 1, 2), f = (-3, 1, 0), g = (4, 5, 1) ?$$

Exercice 16.★

Le corps $\mathbb{C}$ peut-être considéré comme un $\mathbb{R}$ ou un $\mathbb{C}$-espace vectoriel...

1. Déterminer la dimension et une base de $\mathbb{C}$ considéré comme espace vectoriel sur lui-même. Quels sont alors les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}$?
2. Déterminer la dimension et une base de $\mathbb{C}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Décrire alors les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}$.

Exercice 17.★

Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites arithmétiques ? En déterminer une base.

Exercice 18.

Soit
$$F = \{(\lambda + \mu, 2\lambda - \mu, 3\lambda + 4\mu, 2\mu) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}.$$

1. Montrez que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$.
2. Déterminez la dimension de F.

Exercice 19.

Expliquez pourquoi les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminez leurs dimensions.

1. $E = \text{vect}((1,2,3),(3,2,1),(1,1,1))$;
2. $F = \{(x,y,z) \mid x = y\}$;
3. $G = \{(x,y,z) \mid x+3y = y+z = 2x-z = 0\}$;
4. $H = \{(x,y,z) | x+3y = y+z = x+2y-z = 0\}$;
5. $L = \{(x,y,z) \mid x+3y = y+z = 2x-z\}$.

Exercice 20.

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère la famille de vecteurs suivante :

$$u_1 = (1,2,-1,3), \quad u_2 = (2,3,-3,2,), \quad u_3 = (0,1,1,4)$$

et $u_4 = (1,0,-3,-5)$. Déterminer le rang de cette famille, préciser les relations de liaison entre ces vecteurs et donner une base de $\text{vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Exercice 21.✰

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun dans E *si et seulement si* $\dim(F) = \dim(G)$.

Exercice 22.

On pose

$$u_1 = (\alpha,1,\beta,1), \quad u_2 = (1,\alpha,\beta,\alpha),$$
$$u_3 = (\alpha,\beta,\alpha,1), \quad u_4 = (\alpha,\beta,\alpha,\beta),$$

et $u_5 = (1,\alpha,1,\beta)$, pour α et β réels. Discuter le rang du système (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5).

Exercice 23.✰

Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Prouver que $n \geqslant 2$.
2. Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$.

Exercice 24.

Soit $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ une subdivision de $[0;1]$ et F l'ensemble des fonctions de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque intervalle $[x_i;x_{i+1}]$ est affine. Donner la dimension de F ainsi qu'une base.

Exercice 25.

1. Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose $u_i = (\delta_{in})_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(u_0,u_1,\dots,u_k)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Que peut-on en déduire quant à la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose $f_i : x \in \mathbb{R} \mapsto x^i$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0,f_1,\dots,f_k)$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire quant à la dimension de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ pour $n \in \mathbb{N}$, de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

Exercice 26.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note E_p l'ensemble des suites réelles p-périodiques.

1. Montrer que E_p est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Pour $0 \leqslant k \leqslant p-1$, on définit la suite u^k par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv k[p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer que $(u^0,u^1,\dots,u^{p-1})$ est une base de E_p.
3. Que peut-on en déduire quant à la dimension de E_p ?
4. Justifier que E_2 est un sous-espace vectoriel de E_4.
5. On note F l'ensemble des suites $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + u_n = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E_4.
6. Montrer que F est un supplémentaire de E_2 dans E_4.
7. Que peut-on en déduire quant à la dimension de F ?
8. On définit deux suites x,y de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $x_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ et $y_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (x,y) est une base de F.

Exercice 27.

Soient $a,b \in \mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel dont on précisera la dimension.

EXERCICE 28.

Soient F et G deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. On suppose F et G distincts. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F + G$. La somme est-elle directe ?

EXERCICE 29.

Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles et $F = \left\{f \in E \mid \forall k \in [\![1, 10]\!],\ f\left(\frac{1}{k}\right) = 0\right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

EXERCICE 30.

1. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}$ et $G = \text{vect}\left((1, 1, 1)\right)$.
   - **a.** Donner la dimension de G.
   - **b.** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base de F. En déduire sa dimension.
   - **c.** Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
   - **d.** On pose $a = (1, 2, 3)$. Déterminer la projection de a sur F parallélement à G et la projection de a sur G parallélement à F.
2. On se donne maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathbb{R}^n$, $F = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\right\}$ et $G = \text{vect}\left((1, \dots, 1)\right)$.
   - **a.** Donner la dimension de G.
   - **b.** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base de F. En déduire sa dimension.
   - **c.** Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
3. On suppose maintenant que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne F un hyperplan de E et $G = \text{vect}(u)$ où $u \in E \setminus F$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

EXERCICE 31.

On note $E = \mathbb{R}^4$,

$$G = \left\{(x, y, z, t) \in E \mid z = t = 0\right\}$$

et on pose $F = A \cap B$ où

$$A = \left\{(x, y, z, t) \in E \mid x - y + z - t = 0\right\}$$

et

$$B = \left\{(x, y, z, t) \in E \mid 2x - y + 3z - 4t = 0\right\}.$$

1. Prouver que F et G sont des sous-espaces vectoriels de l'espace E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E. Trouver une base de E adaptée à cette décomposition en somme directe.
3. Calculer la projection sur F parallèlement à G d'un vecteur (x, y, z, t) de E. Même question en permutant F et G.

EXERCICE 32.

On note $E = \mathbb{R}^3$ et

$$F = \left\{(x, y, z) \in E \mid x + z = 0\right\}$$

et

$$G = \left\{(x, y, z) \mid x = 2y = z\right\}.$$

1. Etablir que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
2. Calculer la projection du vecteur $X = (x, y, z)$ de E sur F parallèlement à G.

EXERCICE 33.★

Soient $n \geqslant 2$, H le sous-ensemble de $E = \mathbb{R}^n$ défini par l'équation

$$x_1 + \ldots + x_n = 0,$$

et $u = (1, \dots, 1) \in E$.

1. H et $\mathbb{R}u$ sont-ils supplémentaires dans E ?
2. Soit $v \notin H$. Que dire de $\mathbb{R}v$?