Devoir surveillé n° 4 : corrigé

Problème 1 — D'après Petites Mines 2002

Partie I –

1. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.
De plus, $\arctan t \underset{t\to 0}{\sim} t$ donc $\lim_{t\to 0} \frac{\arctan t}{t} = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$.
Enfin, arctan étant impaire, f est paire.

2. On sait que $\frac{1}{1+t^2} \underset{t\to 0}{=} 1 + o(t)$. Par intégration, $\arctan t \underset{t\to 0}{=} \arctan 0 + t + o(t^2)$. On en déduit que $f(t) \underset{t\to 0}{=} 1 + o(t)$.
Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comment quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, f est dérivable en 0 d'après la question précédente. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

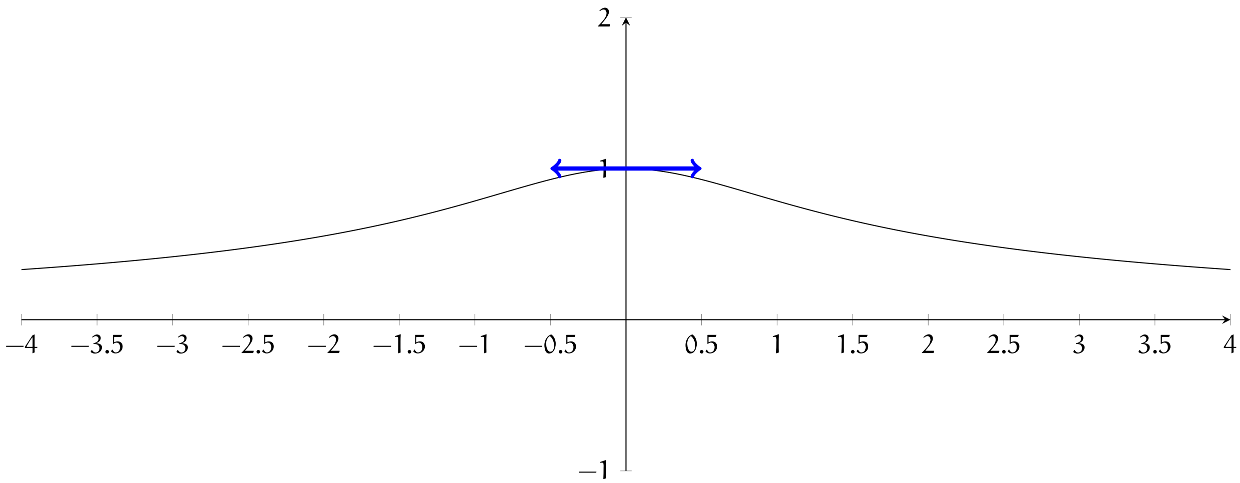
$$f'(t) = \frac{1}{t(1+t^2)} - \frac{\arctan t}{t^2}$$

4. $u \mapsto u$ et $u \mapsto -\frac{1}{2(1+u^2)}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivées respectives $u \mapsto 1$ et $u \mapsto \frac{u}{1+u^2}$. Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Par intégration par parties

$$\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2}\,du = \left[-\frac{u}{2(1+u^2)}\right]_0^t + \int_0^t \frac{du}{2(1+u^2)} = -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{\arctan t}{2} = -\frac{1}{2}t^2 f'(t)$$

Si $t > 0$, $\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2}\,du > 0$ comme intégrale d'une fonction continue positive non constamment nulle et donc $f'(t) < 0$. Ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme f est paire, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$.

5. Puisque $\lim_{+\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{+\infty} f = 0$. Par parité, $\lim_{-\infty} f = 0$. Ainsi la courbe représentative de f admet l'axe des abscisses pour asymptote.



Partie II –

1. Posons $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$. Ainsi $\phi(x) = \frac{F(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. F est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de f. Ainsi ϕ est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
De plus, F est dérivable en 0 donc $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(0)$ i.e. $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = f(0)$. Ainsi ϕ est continue en 0. Finalement, ϕ est continue sur $\mathbb{R}$.
Posons $u(x) = F(x) + F(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = F'(x) - F'(-x) = f(x) - f(-x) = 0$. Ainsi u est constante sur $\mathbb{R}$ égale à $u(0) = 2F(0) = 0$. On en déduit que F est impaire. Il s'ensuite que ϕ est paire.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est décroissante sur $[0, x]$ d'après la question **I.4**, pour tout $t \in [0, x]$, $f(x) \leqslant f(t) \leqslant f(0)$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^x f(x)\,dt \leqslant \int_0^x f(t)\,dt \leqslant \int_0^x dt$$

et par suite

$$xf(x) \leqslant x\phi(x) \leqslant x$$

Puisque $x > 0$,

$$f(x) \leqslant \phi(x) \leqslant 1$$

L'inégalité est encore valable si $x \in \mathbb{R}_-^*$ puisque f et ϕ sont paires. Enfin, l'égalité est valable si $x = 0$ puisque $f(0) = \phi(0) = 1$.
Finalement, $f(x) \leqslant \phi(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de f. ϕ est alors dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comment quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\phi'(x) = \frac{F'(x)}{x} - \frac{F(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left(f(x) - \phi(x)\right)$$

On sait d'après la question **I.2** que $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x)$. Comme F est une primitive de f, $F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + x + o\left(x^2\right)$. Or $F(0) = 0$ donc $F(x) \underset{x\to 0}{=} x + o\left(x^2\right)$. Par suite, $\phi(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x)$. Ainsi ϕ est dérivable en 0 et $\phi'(0) = 0$.
Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \leqslant \phi(x)$ et que $\phi'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - \phi(x))$, ϕ' est négative sur $\mathbb{R}_+^*$ et ϕ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque ϕ est paire, ϕ est croissante sur $\mathbb{R}_-$.

4. Soit $x \in [1, +\infty[$. Pour tout $t \in [1, x[$, $0 \leqslant \arctan t \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc $0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{\pi}{2t}$. Par croissance de l'intégrale

$$\int_1^x 0\,dt \leqslant \int_1^x f(t)\,dt \leqslant \int_1^x \frac{\pi}{2t}\,dt$$

ou encore

$$0 \leqslant \int_1^x f(t)\,dt \leqslant \frac{\pi}{2}\ln x$$

puis

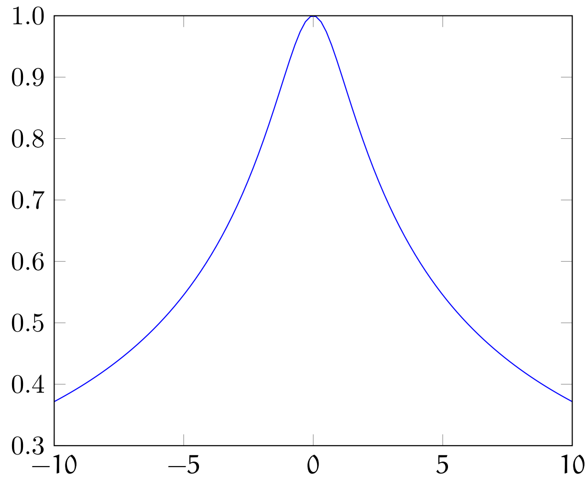
$$0 \leqslant \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x}$$

Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt = 0$ via le théorème des gendarmes.
Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$\phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$$

et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$.

5. Par parité de ϕ, on a également $\lim_{x\to-\infty} \phi(x) = 0$. Ainsi la courbe représentative de ϕ admet pour asymptote l'axe des abscisses.



Partie III –

1. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Puisque $t \geqslant 0$ et $1+t^2>0$, $\frac{t}{1+t^2} \geqslant 0$.
Alors $(1-t)^2 \geqslant 0$ i.e. $1+t^2 \geqslant 2t$. Puisque $1+t^2>0$, $\frac{t}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{2}$.
Finalement, $0 \leqslant \frac{t}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{2}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question **II.3**, $\phi'(x) = \frac{1}{x}(f(x)-\phi(x))$. Mais d'après la question **II.2**, $f(x) \leqslant \phi(x) \leqslant 1$. On en déduit que
$$|\phi'(x)| = \frac{1}{x}(\phi(x)-f(x)) \leqslant \frac{1}{x}(1-f(x))$$
De plus,
$$\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = x - \arctan x$$
Ainsi
$$\frac{1}{x}(1-f(x)) = \frac{1}{x^2}(x-\arctan x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$$
D'après la question **III.1**
$$\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} \leqslant \int_0^x \frac{t}{2}\,dt = \frac{x^2}{4}$$
Par conséquent, $|\phi'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$.
Comme ϕ est paire, ϕ' est impaire et l'inégalité précédente est encore valable si $x \in \mathbb{R}_-^*$. Enfin, cette égalité est encore valable lorsque $x=0$ puisque $\phi'(0)=0$.
3. Posons $\nu(x) = \phi(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. ν est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\nu'(x) = 1-\phi'(x)$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\phi'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$ donc, a fortiori, $\phi'(x) < 1$ et $\nu'(x) < 0$. Ainsi ν est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Puisque $\lim_{+\infty} \phi = \lim_{-\infty} \phi = 0$, $\lim_{+\infty} \nu = -\infty$ et $\lim_{-\infty} \nu = +\infty$. Enfin, ν est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, ν s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$ i.e. l'équation $\phi(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
Enfin, $\nu(0) = \phi(0) = 1 > 0$ et $\varphi(1) = \phi(1) - 1 < 0$ car ϕ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $\phi(1) < \phi(0) = 1$. On peut donc assurer que $\alpha \in]0,1]$.
4. Puisque $|\phi'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ϕ est $\frac{1}{4}$-lipschitzienne. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\phi(u_n) - \phi(\alpha)| \leqslant |u_n - \alpha|$ i.e. $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

> **Remarque.** On peut aussi remarquer que
> $$|u_{n+1}-\alpha| = |\phi(u_n)-\phi(\alpha)| = \left|\int_\alpha^{u_n} \phi'(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_\alpha^{u_n} |\phi'(x)|\,dx\right| \leqslant \left|\int_\alpha^{u_n} \frac{1}{4}\,dx\right| = \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$$

On montre alors par récurrence que $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{4^n}|u_0 - \alpha|$. Puisque $0 \leqslant \frac{1}{4} < 1$, $\lim_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$ i.e. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Partie IV –

1. L'équation différentielle équivaut à $xy' + xy = f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ ou encore à $(xy)' = f(x)$. On en déduit que les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $x \mapsto \phi(x) + \frac{\lambda}{x}$ où λ décrit $\mathbb{R}$.
2. Soit y une éventuelle solution de $x^2y' + xy = \arctan x$ sur $\mathbb{R}$. La question **IV.1** montre qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y(x) = \begin{cases} \phi(x) + \frac{\lambda_1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \phi(x) + \frac{\lambda_2}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$. La continuité de y en 0 impose $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ainsi ϕ et y coïncident sur $\mathbb{R}^*$. Puisque ces deux fonctions sont continues, elles coïncident également en 0 et sont donc égales.
Réciproquement, ϕ vérifie bien l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$. C'est donc l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2y' + xy = \arctan x$.

Solution 1.

1. On a
$$I_0 = \int_0^1 e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-2}}{2}$$
Par intégration par parties :
$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-2x}\,dx &= \left[-\frac{1}{2}(1-x)e^{-2x}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}\,dx \\ &= \frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2}\frac{1-e^{-2}}{2} = \frac{1+e^{-2}}{4} \end{aligned}$$
2. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [0,1]$, $1-x \in [0,1]$ et donc $(1-x)^{n+1} \leqslant (1-x)^n$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $I_{n+1} \leqslant I_n$. Ceci signifie que (I_n) est décroissante.
b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\varphi_n \geqslant 0$ sur $[0,1]$, $I_n \geqslant 0$.
c. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.
3. **a.** Par décroissance de g, on a $g(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in [0,1]$. Par conséquent, $\varphi_n(x) \leqslant (1-x)^n$ pour tout $x \in [0,1]$. Ainsi
$$I_n \leqslant \int_0^1 (1-x)^n\,dx = \frac{1}{n+1}$$
b. On a $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème des gendarmes, (I_n) converge vers 0.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties :
$$2I_{n+1} = \int_0^1 2(1-x)^{n+1}e^{-2x}\,dx = \left[-(1-x)^{n+1}e^{-2x}\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}\,dx = 1 - (n+1)I_n$$
5. On a donc $nI_n = 1 - I_n - 2I_{n+1}$. Puisque (I_n) converge vers 0, (I_{n+1}) converge également vers 0 (suite extraite) et (nI_n) converge vers 1.
6. On a $nI_n - 1 = -I_n - 2I_{n+1}$ donc
$$n(nI_n - 1) = -nI_n - 2nI_{n+1} = -nI_n - 2(n+1)I_{n+1} + 2I_{n+1}$$
Comme (nI_n) converge vers 1, $((n+1)I_{n+1})$ converge également vers 1 (suite extraite) et puisque que (I_{n+1}) converge vers 0, la suite $(n(nI_n - 1))$ converge vers -3.
7. Puisque $(n(nI_n - 1))$ converge vers -3, on en déduit que $nI_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{3}{n}$ i.e. $nI_n - 1 \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{3}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Puis il vient $I_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ainsi $a = 0$, $b = 1$ et $c = -3$.