

DEVOIR À LA MAISON N° : CORRIGÉ

Problème 1 – Homographies conservant \mathbb{U}

Partie I – Un exemple

1. a. Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Dans ce cas

$$\overline{h(z)} = -i \frac{1 + \bar{z}}{1 - \bar{z}} = -i \frac{1 + \frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} = -i \frac{z + 1}{z - 1} = h(z)$$

Par conséquent, $h(z) \in \mathbb{R}$.

- b. Soit $z \in \mathbb{D}$. On met $h(z)$ sous forme algébrique :

$$h(z) = i \frac{1 + z}{1 - z} = i \frac{(1 + z)(1 - \bar{z})}{(1 - z)(1 - \bar{z})} = i \frac{1 + 2i \operatorname{Im}(z) - |z|^2}{|1 - z|^2} = \frac{-2 \operatorname{Im}(z) + i(1 - |z|^2)}{|1 - z|^2}$$

Ainsi $\operatorname{Im}(h(z)) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} > 0$ puisque $|z| < 1$ et donc $h(z) \in \mathbb{P}$.

- c. On résout l'équation suivante :

$$\begin{aligned} h(z) &= z \\ \iff i \frac{1 + z}{1 - z} &= z \\ \iff i + iz &= z - z^2 \\ \iff z^2 + (i - 1)z + i &= 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de ce trinôme est $(i - 1)^2 - 4i = -6i$. Une racine carrée de ce discriminant est $\sqrt{3}(1 - i)$.

Les points fixes de h sont donc $\frac{(1 + \sqrt{3})(1 - i)}{2}$ et $\frac{(1 - \sqrt{3})(1 - i)}{2}$.

- d. On résout à nouveau l'équation suivante :

$$\begin{aligned} h(z) &= Z \\ \iff i \frac{1 + z}{1 - z} &= Z \\ \iff i + iz &= Z - zZ \\ \iff (Z + i)z &= Z - i \end{aligned}$$

Cette équation n'admet donc une solution que pour $Z \neq -i$.

2. a. Soit $z \in \mathbb{R}$. Alors $\bar{z} + i = z - i$ et donc $|z + i| = |z - i|$. Ainsi $|g(z)| = 1$ i.e. $g(z) \in \mathbb{U}$.
- b. Soit $z \in \mathbb{P}$. On a $|z - i|^2 = (z - i)(\bar{z} + i) = |z|^2 + 1 - 2 \operatorname{Im}(z)$ et $|z + i|^2 = (z + i)(\bar{z} - i) = |z|^2 + 1 + 2 \operatorname{Im}(z)$. Puisque $\operatorname{Im}(z) > 0$, $|z - i|^2 < |z + i|^2$ puis $|z - i| < |z + i|$ et donc $|g(z)| < 1$ i.e. $g(z) \in \mathbb{D}$.

Partie II –

1. Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $|h(z)| = \frac{|e^{i\theta}|}{|z|} = 1$ puisque $|z| = 1$.

2. a. h est bien de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a = e^{i\theta}$, $b = e^{i\theta}\alpha$, $c = \bar{\alpha}$ et $d = 1$. De plus, $ad - bc = e^{i\theta} - e^{i\theta}\alpha\bar{\alpha} = (1 - |\alpha|^2)e^{i\theta} \neq 0$ puisque $\alpha \notin \mathbb{U}$. h est donc bien une homographie.
Par ailleurs, $\bar{\alpha}z + 1 = 0 \iff z = -\frac{1}{\alpha}$. Puisque, $|\alpha| \neq 1$, $|\frac{1}{\alpha}| = \frac{1}{|\alpha|} \neq 1$. Ceci montre que h est définie sur \mathbb{U} .
- b. Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$ et

$$\overline{h(z)} = e^{-i\theta} \frac{\bar{z} + \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}\bar{z} + 1} = \frac{1}{e^{i\theta}} \frac{\frac{1}{z} + \bar{\alpha}}{\alpha \frac{1}{z} + 1} = \frac{1}{e^{i\theta}} \frac{1 + \bar{\alpha}z}{\alpha + z} = \frac{1}{h(z)}$$

On en déduit que $|h(z)| = 1$.

3. a. Soit $z \in \mathbb{U}$. On a donc $h(z) \in \mathbb{U}$ et ainsi $\overline{h(z)} = \frac{1}{h(z)}$.

$$\begin{aligned} \overline{h(z)} &= \frac{1}{h(z)} \\ \implies \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}} &= \frac{cz + d}{az + b} \\ \implies (\bar{a}\bar{z} + \bar{b})(az + b) &= (\bar{c}\bar{z} + \bar{d})(cz + d) \\ \implies |a|^2 + \bar{a}b\frac{1}{z} + \bar{a}\bar{b}z + |b|^2 &= |c|^2 + \bar{c}d\frac{1}{z} + \bar{c}\bar{d}z + |d|^2 \quad \text{car } z \in \mathbb{U} \\ \implies \bar{a}\bar{b}z^2 + (|a|^2 + |b|^2)z + \bar{a}b &= \bar{c}\bar{d}z^2 + (|c|^2 + |d|^2)z + \bar{c}d \\ \implies (\bar{a}\bar{b} - \bar{c}\bar{d})z^2 + (|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2)z + \bar{a}b - \bar{c}d &= 0 \end{aligned}$$

Ceci signifie que le trinôme $(\bar{a}\bar{b} - \bar{c}\bar{d})z^2 + (|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2)z + \bar{a}b - \bar{c}d$ admet une infinité de racines (tous les éléments de \mathbb{U}). Ceci n'est possible que si ce trinôme est le trinôme nul. On en déduit en particulier que $\bar{a}b = \bar{c}d$ et $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$.

REMARQUE. La condition $\bar{a}b = \bar{c}d$ ne nous apprend rien de plus que la condition $\bar{a}b = \bar{c}d$ (elle lui est équivalente). ■

- b. Supposons $a = 0$. Alors $\bar{c}d = \bar{a}b = 0$. L'un des complexes c ou d est nul. On ne peut avoir $c = 0$ sinon $ad - bc = 0$. C'est donc que $d = 0$. Il vient alors $|b|^2 = |d|^2$ et donc $|b| = |d|$. d ne peut être nul sinon on aurait $b = 0$ puis $ad - bc = 0$. Le complexe $\frac{b}{d}$ est de module 1 : il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{b}{d} = e^{i\theta}$. On a alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $h(z) = \frac{e^{i\theta}}{z}$.
- c. i. Puisque $a \neq 0$ et $\bar{a}b = \bar{c}d$, $b = \frac{\bar{c}d}{\bar{a}}$. Ainsi

$$|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 = |a|^2 + \frac{|c|^2|d|^2}{|a|^2} - |c|^2 - |d|^2 = \frac{1}{|a|^2}(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2)$$

Or on a vu que $|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 = 0$ donc $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$.

- ii. Supposons par l'absurde que $|a| = |c|$. Alors

$$ad - bc = \frac{\bar{a}ad - \bar{a}bc}{\bar{a}} = \frac{|a|^2d - \bar{a}bc}{\bar{a}} = \frac{|c|^2d - \bar{a}bc}{\bar{a}} = \frac{c\bar{c}d - \bar{a}bc}{\bar{a}} = \frac{c}{\bar{a}}(\bar{c}d - \bar{a}b) = 0$$

Il y a donc contradiction.

- iii. On a alors nécessairement $|a| = |d|$ et en particulier $d \neq 0$. Pour tout z dans l'ensemble de définition de h :

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{d} \frac{z + \frac{b}{a}}{\frac{c}{d}z + 1}$$

Comme $|a| = |d|$, $\frac{a}{d} \in \mathbb{U}$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{a}{d} = e^{i\theta}$. Posons $\alpha = \frac{b}{a}$. Alors

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|a|^2} = \frac{c\bar{d}}{|d|^2} = \frac{c}{d}$$

Ainsi on a bien

$$h(z) = e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1}$$

Enfin, $|\alpha| \neq 1$ sinon on aurait $\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ i.e. $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ et finalement $ad - bc = 0$, ce qui est exclu.