

DEVOIR SURVEILLÉ N° : CORRIGÉ

SOLUTION 1.

1. Puisque ω est une racine cinquième de l'unité, $\omega^4 = \omega^{-1}$. On en déduit que $A = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$ via une relation d'Euler. De même, $\omega^3 = \omega^{-2}$ donc $B = 2 \cos \frac{4\pi}{5}$.

2. Tout d'abord

$$A + B = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 - 1 = \frac{\omega^5 - 1}{\omega - 1} - 1 = -1$$

Puis

$$AB = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = -1$$

A et B sont solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. Or ces solutions sont $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Puisque $\frac{2\pi}{5} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos \frac{2\pi}{5} \geq 0$ et donc $A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $B = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

3. On en déduit donc $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos \frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

Il s'ensuit $\cos \frac{3\pi}{5} = \cos(\pi - \frac{2\pi}{5}) = -\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $\cos \frac{\pi}{5} = \cos(\pi - \frac{4\pi}{5}) = -\cos \frac{4\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

SOLUTION 2.

1. a. On utilise la méthode de l'arc-moitié.

$$\frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1} = \frac{2ie^{i\theta} \sin \theta}{2e^{i\theta} \cos \theta} = i \tan \theta$$

b. Remarquons que $-i$ n'est pas solution de (E) et que pour $z \neq -i$, $1 - iz \neq 0$ de sorte que

$$\begin{aligned} (1 + iz)^5 = (1 - iz)^5 &\iff \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right)^5 = 1 \\ &\iff \frac{1 + iz}{1 - iz} \in \mathbb{U}_5 \\ &\iff \exists k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \frac{1 + iz}{1 - iz} = e^{\frac{2ik\pi}{5}} \\ &\iff \exists k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, 1 + iz = e^{\frac{2ik\pi}{5}}(1 - iz) \\ &\iff \exists k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{5}} - 1}{i(e^{\frac{2ik\pi}{5}} + 1)} \quad \text{car } \forall k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, e^{\frac{2ik\pi}{5}} \neq -1 \\ &\iff \exists k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, z = \tan \frac{k\pi}{5} \quad \text{d'après la question précédente} \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont donc les réels $-\tan \frac{2\pi}{5}$, $-\tan \frac{\pi}{5}$, 0 , $\tan \frac{\pi}{5}$ et $\tan \frac{2\pi}{5}$.

c. Tout d'abord, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$(1 + iz)^5 = \binom{5}{0} + \binom{5}{1}iz + \binom{5}{2}(iz)^2 + \binom{5}{3}(iz)^3 + \binom{5}{4}(iz)^4 + \binom{5}{5}(iz)^5 = 1 + 5iz - 10z^2 - 10iz^3 + 5z^4 + iz^5$$

On en déduit que

$$(1 - iz)^5 = 1 - 5iz - 10z^2 + 10iz^3 + 5z^4 - iz^5$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (1 + iz)^5 = (1 - iz)^5 &\iff 10iz - 20iz^3 + 2iz^5 = 0 \\ &\iff z(5 - 10z^2 + z^4) = 0 \\ &\iff z = 0 \text{ ou } z^4 - 10z^2 + 5 = 0 \\ &\iff z = 0 \text{ ou } z^2 = 5 + 2\sqrt{5} \text{ ou } z^2 = 5 - 2\sqrt{5} \\ &\iff z = 0 \text{ ou } z = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \text{ ou } z = -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \text{ ou } z = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \text{ ou } z = -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

- d. Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$. Ainsi la fonction \tan est-elle croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Or

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{2\pi}{5} < -\frac{\pi}{5} < 0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$$

et

$$-\sqrt{5+2\sqrt{5}} < -\sqrt{5-2\sqrt{5}} < 0 < \sqrt{5-2\sqrt{5}} < \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

de sorte qu'en particulier, $\tan \frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\tan \frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

2. a.

$$\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} = \frac{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$$

- b. Il s'agit d'un problème d'extraction de racines cinquièmes. Les solutions sont donc les complexes $e^{\frac{2i(\alpha+k\pi)}{5}}$ pour $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

- c. L'équation (E_α) équivaut à l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5 = e^{2i\alpha}$. D'après la question précédente, les solutions de (E_α) sont les complexes z tels qu'il existe $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ tel que $\frac{1+iz}{1-iz} = e^{\frac{i(\alpha+2k\pi)}{5}}$. Or, pour $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, en posant $\alpha_k = \frac{\alpha+k\pi}{5}$

$$\frac{1+iz}{1-iz} = e^{2i\alpha_k}$$

\iff

$$z = \frac{e^{2i\alpha_k} - 1}{i(e^{2i\alpha_k} + 1)}$$

\iff

$$z = \frac{2ie^{i\alpha_k} \sin \alpha_k}{2ie^{i\alpha_k} \cos \alpha_k}$$

\iff

$$z = \tan \alpha_k$$

Les solutions de (E_α) sont donc les réels $\tan \alpha_k$ pour $k \in \{-2, 0, 1, 2\}$, autrement dit les réels $\tan\left(\frac{\alpha-2\pi}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha-\pi}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha+\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{\alpha+2\pi}{5}\right)$.

SOLUTION 3.

1. Tout d'abord

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$$

En remplaçant z_2 par $-z_2$, on obtient également

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2$$

Ceci permet d'obtenir le résultat voulu.

2.

$$\begin{aligned} \left(\left|\frac{z_1+z_2}{2} - u\right| + \left|\frac{z_1+z_2}{2} + u\right|\right)^2 &= \left|\frac{z_1+z_2}{2} - u\right|^2 + \left|\frac{z_1+z_2}{2} + u\right|^2 + 2\left|\frac{z_1+z_2}{2} - u\right|\left|\frac{z_1+z_2}{2} + u\right| \\ &= 2\left|\frac{z_1+z_2}{2}\right|^2 + 2|u|^2 + 2\left|\left(\frac{z_1+z_2}{2} - u\right)\left(\frac{z_1+z_2}{2} - u\right)\right| \quad \text{d'après la question 1} \\ &= \frac{1}{2}|z_1+z_2|^2 + 2|u|^2 + 2\left|\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)^2 - u^2\right| \\ &= \frac{1}{2}|z_1+z_2|^2 + 2|z_1z_2| + 2\left|\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)^2 - z_1z_2\right| \quad \text{car } u^2 = z_1z_2 \\ &= \frac{1}{2}|z_1+z_2|^2 + 2|z_1||z_2| + \frac{1}{2}|(z_1+z_2)^2 - 2z_1z_2| \\ &= \frac{1}{2}|z_1+z_2|^2 + 2|z_1||z_2| + \frac{1}{2}|(z_1-z_2)^2| \\ &= \frac{1}{2}(|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2) + 2|z_1||z_2| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \quad \text{d'après la question 1} \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

Puisque $\left| \frac{z_1+z_2}{2} - u \right| + \left| \frac{z_1+z_2}{2} + u \right|$ et $|z_1| + |z_2|$ sont des réels positifs, ils sont égaux.

3. Puisque a et b sont racines de l'équation $z^2 + 2mz + 1 = 0$, $a + b = -2m$ et $ab = 1$. En particulier, 1 est une racine carrée de ab . D'après la question 2,

$$|a| + |b| = \left| \frac{a+b}{2} - 1 \right| + \left| \frac{a+b}{2} + 1 \right| = |-m-1| + |-m+1| = |m+1| + |m-1|$$

SOLUTION 4.

1.

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos(2\theta + \theta) \\ &= \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \\ &= (2\cos^2 \theta - 1) \cos \theta - 2\sin^2 \theta \cos \theta \\ &= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \\ &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \end{aligned}$$

2. D'après l'énoncé, on a $z = e^{i\theta}$. De plus,

$$\begin{aligned} |z^3 - z + 2|^2 &= (z^3 - z + 2) \overline{(z^3 - z + 2)} \\ &= |z|^6 + |z|^2 + 4 - 2(z + \bar{z}) - |z|^2(z^2 + \bar{z}^2) + 2(z^3 + \bar{z}^3) \\ &= 6 - 4\cos \theta - 2\cos(2\theta) + 4\cos(3\theta) \quad \text{car } |z| = 1 \text{ et en vertu d'une relation d'Euler} \\ &= 6 - 4\cos \theta - 2(2\cos^2 \theta - 1) + 4(4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) \\ &= 8 - 16\cos \theta - 4\cos^2 \theta + 16\cos^3 \theta \\ &= 4f(\cos \theta) \end{aligned}$$

3. f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynomiale. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 12x^2 - 2x - 4 = 2(2x+1)(3x-2)$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\frac{13}{4}$		$\frac{2}{27}$		$+\infty$

4. Puisque $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$, on a en vertu de la première question

$$\max_{z \in \mathbb{U}} \varphi(z) = \max_{\theta \in \mathbb{R}} 2\sqrt{f(\cos \theta)}$$

Mais puisque $\text{Im } \cos = [-1, 1]$,

$$\max_{z \in \mathbb{U}} \varphi(z) = \max_{x \in [-1, 1]} 2\sqrt{f(x)}$$

La question précédente nous renseigne sur les variations de f sur $[-1, 1]$.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
f'(x)	+	0	-	+
f(x)	1	$\frac{13}{4}$	$\frac{2}{27}$	1

On peut en déduire que

$$\max_{z \in \mathbb{U}} \varphi(z) = 2\sqrt{\frac{13}{4}} = \sqrt{13}$$

Ce maximum est atteint en un élément de \mathbb{U} dont l'argument θ est tel que $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ i.e. tel que $\theta \equiv \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi]$. On en déduit donc que le maximum de φ est atteint en j et j^2 .

SOLUTION 5.

- On trouve $z_0 = 1$, $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2i$ et $z_3 = -2 - 2i$.
- On a $z_{n+1} = x_n + iy_n + y_n - ix_n = x_n + iy_n - i(x_n + iy_n) = (1 - i)z_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi (z_n) est une suite géométrique de raison $1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$.
- Comme (z_n) est une suite géométrique de premier terme $z_0 = 1$ et de raison $1 - i$, on a $A_n = \frac{(1 - i)^{n+1} - 1}{1 - i - 1} = i(1 - i)^{n+1} - i$.
On a $B_n = \operatorname{Re}(A_n)$ et $C_n = \operatorname{Im}(A_n)$ donc

$$B_n = \operatorname{Re}(i(1 - i)^{n+1} - i) = -\operatorname{Im}((1 - i)^{n+1}) = -\operatorname{Im}\left((\sqrt{2})^{n+1} e^{-\frac{(n+1)i\pi}{4}}\right) = 2^{\frac{n+1}{2}} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)$$

$$C_n = \operatorname{Im}(i(1 - i)^{n+1} - i) = \operatorname{Re}((1 - i)^{n+1}) - 1 = \operatorname{Re}\left((\sqrt{2})^{n+1} e^{-\frac{(n+1)i\pi}{4}}\right) - 1 = 2^{\frac{n+1}{2}} \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right) - 1$$

SOLUTION 6.

- Supposons $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. On remarque que $D_n(\theta)$ est la somme de $2n + 1$ termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta} \neq 1$.

$$\begin{aligned} D_n(\theta) &= e^{-ni\theta} \cdot \frac{e^{(2n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \\ &= e^{-in\theta} \cdot \frac{e^{\frac{(2n+1)i\theta}{2}} \left(e^{\frac{(2n+1)i\theta}{2}} - e^{-\frac{(2n+1)i\theta}{2}} \right)}{e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right)} \\ &= \frac{e^{\frac{(2n+1)i\theta}{2}} - e^{-\frac{(2n+1)i\theta}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \\ &= \frac{2i \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

Si $\theta \equiv 0[2\pi]$, on a évidemment $D_n(\theta) = 2n + 1$.

2. Supposons $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. Posons $S_n(\theta) = \sum_{k=0}^n e^{(k+\frac{1}{2})i\theta}$. Alors

$$\begin{aligned}
 S_n(\theta) &= e^{\frac{i\theta}{2}} \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \\
 &= e^{\frac{i\theta}{2}} \cdot \frac{e^{(n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \\
 &= e^{\frac{i\theta}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{(n+1)i\theta}{2}} \left(e^{\frac{(n+1)i\theta}{2}} - e^{-\frac{(n+1)i\theta}{2}} \right)}{e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}} \right)} \\
 &= e^{\frac{(n+1)i\theta}{2}} \cdot \frac{2i \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
 &= e^{\frac{(n+1)i\theta}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_n(\theta) &= \sum_{k=0}^n D_k(\theta) \\
 &= \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sum_{k=0}^n \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta\right) \\
 &= \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \operatorname{Im}(S_n(\theta)) \\
 &= \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{(n+1)i\theta}{2}}\right) \\
 &= \frac{\sin^2\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

Lorsque $\theta \equiv 0[2\pi]$,

$$F_n(\theta) = \sum_{k=0}^n (n+1) = (n+1)^2$$