Devoir à la maison n°18

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Centrale Maths1 PC 2017

Soit E un ensemble non vide.
On appelle *partition* de E tout ensemble $\mathcal{U} = \{A_1, \dots, A_k\}$ de parties de E tel que

- chaque A_i, pour $i \in [\![1, k]\!]$ est une partie *non vide* de E ;
- les parties $A_1, \dots, A_k$ sont *deux à deux disjointes*, c'est-à-dire que pour tous $i \neq j$ entre 1 et k, $A_i \cap A_j = \emptyset$;
- la réunion des A_i forme E tout entier : $E = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$.

Si $\mathcal{U}$ une partition de E et si k est le nombre d'éléments de $\mathcal{U}$, on dit aussi que $\mathcal{U}$ une *partition de* E *en* k *parties*.

I Nombre de partitions en k parties

1 Soit k et n deux entiers strictement positifs. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ en k parties.

Dans tout le problème, pour tout couple (n, k) d'entiers strictement positifs, on note $S(n, k)$ le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ en k parties.
On pose de plus $S(0, 0) = 1$ et, pour tout $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $S(n, 0) = S(0, k) = 0$.

2 Exprimer $S(n, k)$ en fonction de n ou de k dans les cas suivants :

2.a $k > n$;

2.b $k = 1$.

3 Montrer que pour tous k et n entiers strictement positifs, on a

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k)$$

Indication. On pourra distinguer les partitions de $[\![1, n]\!]$ *selon qu'elles contiennent ou non le singleton* $\{n\}$.

4 **4.a** Rédiger une fonction Python récursive permettant de calculer le nombre $S(n, k)$, par application directe de la formule établie à la **3**.

4.b Montrer que, pour $n \geq 1$, le calcul de $S(n, k)$ par cette fonction récursive nécessite au moins $\binom{n}{k}$ opérations (sommes ou produits).

II Nombres de Bell

Dans toute la suite, on pose pour tout entier $n \geq 0$,

$$\mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}(n,k)$$

5 Montrer que pour $n \geq 1$, B_n est égal au nombre total de partitions de l'ensemble $[\![1,n]\!]$.

6 Démontrer la formule

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B}_k$$

7 Montrer que la suite $\left(\frac{\mathrm{B}_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1.

8 En déduire une minoration du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{\mathrm{B}_n}{n!} z^n$.

Pour $x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{B}_n}{n!} x^n$.

9 Montrer que pour tout $x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$, $f'(x) = e^x f(x)$.

10 En déduire une expression de la fonction f sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$.

III Une suite de polynômes

On définit la suite de polynômes $(\mathrm{H}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ par $\mathrm{H}_0(\mathrm{X}) = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{H}_k(\mathrm{X}) = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-k+1)$$

11 Montrer que la famille $(\mathrm{H}_0, \dots, \mathrm{H}_n)$ est une base de l'espace $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

12 **12.a** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, établir une expression simplifiée de $\mathrm{H}_{k+1}(\mathrm{X}) + k\mathrm{H}_k(\mathrm{X})$.

12.b En déduire que, pour tout entier naturel n

$$\mathrm{X}^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}(n,k)\mathrm{H}_k(\mathrm{X})$$

13 Soit $k \in \mathbb{N}$.

13.a Montrer que la fonction $f_k : x \mapsto \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{S}(n,k)\frac{x^n}{n!}$ est définie sur $]-1,1[$.

13.b Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $g_k : x \mapsto \frac{(e^x-1)^k}{k!}$.
Montrer que la fonction g_k vérifie l'équation différentielle

$$y' = \frac{(e^x-1)^{k-1}}{(k-1)!} + ky$$

13.c En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{(e^x-1)^k}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{S}(n,k)\frac{x^n}{n!}$$

14 **14.a** Pour $x \in]-1,1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, simplifier $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{H}_k(\alpha)\frac{x^k}{k!}$.

14.b Montrer que pour $u < \ln 2$

$$e^{u\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{H}_k(\alpha)\frac{(e^u-1)^k}{k!}$$

IV Fonctions génératrices

On se donne dans la suite un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit m un entier strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ admet un moment d'ordre m fini si Y^m admet une espérance finie, c'est-à-dire si la série $\sum n^m \mathbb{P}(Y = n)$ converge. On appelle alors moment d'ordre m de Y le réel

$$\mathbb{E}(Y^m) = \sum_{n=0}^{\infty} n^m \mathbb{P}(Y = n)$$

15 Montrer que si $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ est une variable aléatoire associée à une fonction génératrice G_Y de rayon strictement supérieur à 1, alors Y admet à tout ordre un moment fini.

16 Réciproquement, soit $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire admettant à tout ordre un moment fini.

16.a Montrer que la fonction génératrice G_Y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, 1]$.

16.b Exprimer $G_Y^{(k)}(1)$ à l'aide des polynômes $H_k(X)$ et de la variable Y.

16.c La fonction génératrice G_Y a-t-elle nécessairement un rayon de convergence strictement supérieur à 1 ?

Indication. On pourra utiliser la série entière $\sum e^{-\sqrt{n}} x^n$.

17 On suppose dans cette question que Y suit la loi de Poisson de paramètre 1.

17.a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \mathbb{E}(Y^n)$.

17.b En déduire que pour tout polynôme Q(X) à coefficients entiers, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{Q(n)}{n!}$ est convergente et sa somme est de la forme Ne, où N est un entier.

V Somme de puissances

On fixe $n \in \mathbb{N}$. On pose l'application linéaire :

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$$

18 À l'aide d'un encadrement par des intégrales, déterminer un équivalent de $U_n(p) = \sum_{k=0}^{p} k^n$, à $n \geq 1$ fixé, lorsque p tend vers $+\infty$.

19 Soit Δ_n l'endomorphisme induit par Δ sur le sous-espace stable $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice A de Δ_n dans la base $(H_0, \dots, H_n)$.

20 En déduire que$U_n(p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{S(n,k)}{k+1} H_{k+1}(p+1)$.

21 On note $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$, puis $G = \text{vect}\left(X^{2k+1};\ 0 \leq k \leq n-1\right)$.

Soit Q(X) le polynôme tel que $\forall p \in \mathbb{N}$, $Q(p) = \sum_{k=0}^{p} k$.

21.a Rappeler l'expression explicite du polynôme Q(X).

21.b Montrer que l'application :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & G \\ P(X) & \longmapsto & \Delta(P(Q(X-1))) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

21.c En déduire que pour tout $r \in \mathbb{N}$, il existe un seul polynôme $\mathrm{P}_r(\mathrm{X})$ tel que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{p} k^{2r+1} = \mathrm{P}_r\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)$$

$\boxed{22}$ **22.a** Déterminer le terme dominant dans $\mathrm{P}_r(\mathrm{X})$.

22.b Montrer que pour $r \geq 1$, X^2 divise $\mathrm{P}_r(\mathrm{X})$.

22.c Expliciter les polynômes $\mathrm{P}_1(\mathrm{X})$ et $\mathrm{P}_2(\mathrm{X})$.