Devoir surveillé n°4 : corrigé

Problème 1 — Résolution d'une équation différentielle

Partie I – Résolution d'une première équation différentielle

1. Les solutions de l'équation caractéristique associée à (E_1) sont évidemment $2i$ et $-2i$. Les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont les fonctions $t \mapsto \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2. Les solutions de l'équation caractéristique associée à (E_2) sont évidemment 2 et -2. Les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

3. On a montré que l'ensemble des solutions de (E_2) était

$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On veut montrer que c'est également

$$\mathcal{S}' = \left\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{ch}(2t) + \mu\,\mathrm{sh}(2t),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Soit donc $f \in \mathcal{S}$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En posant $A = \frac{\lambda+\mu}{2}$ et $B = \frac{\lambda-\mu}{2}$, $f(t) = A\,\mathrm{ch}(2t) + \mu\,\mathrm{sh}(2t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc $f \in \mathcal{S}'$.
Réciproquement, soit $f \in \mathcal{S}'$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(t) = \lambda\,\mathrm{ch}(2t) + \mu\,\mathrm{sh}(2t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En posant $A = \frac{\lambda+\mu}{2}$ et $B = \frac{\lambda-\mu}{2}$, $f(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc $f \in \mathcal{S}$.
Par double inclusion, $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$.

Partie II – Résolution d'une seconde équation différentielle par changement de variable

4. cos est deux fois dérivable sur $]0, \pi[$ à valeurs dans $]-1, 1[$ et f est deux fois dérivable sur $]-1, 1[$ donc $g = f \circ \arccos$ est deux fois dérivable sur $]0, \pi[$.

5. Puisque g est deux fois dérivable sur $]0, \pi[$, on montre successivement que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(\arccos(x)) \\
f'(x) &= -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}g'(\arccos(x)) \\
f''(x) &= -x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}g'(\arccos(x)) + (1-x^2)^{-1}g''(\arccos(x))
\end{aligned}$$

f est solution de (F) sur $]-1, 1[$ *si et seulement si*

$$\forall x \in]-1, 1[,\ (1-x^2)f''(x) - xf'(x) + 4f(x) = 0$$

Or d'après ce qui précède, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}
xf'(x) &= -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}g'(\arccos(x)) \\
(1-x^2)f''(x) &= -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}g'(\arccos(x)) + g''(\arccos(x))
\end{aligned}$$

Ainsi f est-elle solution de (F) sur $]-1, 1[$ *si et seulement si*

$$\forall x \in]-1, 1[,\ g''(\arccos(x)) + 4g(\arccos(x)) = 0$$

Puisque $\arccos(]-1, 1[) =]0, \pi[$, cette dernière condition équivaut à

$$\forall t \in]0, \pi[,\ g''(t) + 4g(t) = 0$$

Pour résumer, f est solution de F sur $]-1, 1[$ *si et seulement si* g est solution de $((E_1)$ sur $]0, \pi[$.

6. On a déterminé à la question **I.1** les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ et donc a fortiori sur $]0,\pi[$. On en déduit que les solutions de (F) sur $]-1,1[$ sont les fonctions

$$x \mapsto \arccos(x) + \lambda\cos(2\arccos(x)) + \mu\sin(2\arccos(x))$$

avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Or pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\cos(2\arccos(x)) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2-1$$
$$\sin(2\arccos(x)) = 2\cos(\arccos(x))\sin(\arccos(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

Les solutions de (F) sur $]-1,1[$ sont donc les fonctions

$$x\mapsto \lambda(2x^2-1)+2\mu x\sqrt{1-x^2}$$

Partie III – La fonction argument cosinus hyperbolique

7. La fonction ch est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\operatorname{ch}(0)=1$ et $\lim_{+\infty}\operatorname{ch}=+\infty$ donc ch induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$.

8. Soit $x\in[1,+\infty[$. Posons $\theta=\operatorname{argch}(x)$. On sait que $\operatorname{sh}^2(\theta)=\operatorname{ch}^2(\theta)-1=x^2-1$. De plus, $\theta\in\mathbb{R}_+$ par définition de argch. Ainsi $\operatorname{sh}\theta\geqslant 0$. Finalement, $\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x))=\operatorname{sh}(\theta)=\sqrt{x^2-1}$.

9. La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée sh ne s'annule pas sur cet intervalle. En tant que bijection réciproque de la bijection induite par ch de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$, argch est dérivable sur $\operatorname{ch}(\mathbb{R}_+^*)=]1,+\infty[$. De plus, pour tout $x\in]1,+\infty[$,

$$\operatorname{argch}'(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{argch}(x))}=\frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x))}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

10. C'est du calcul bête et méchant. Soit $\theta\in\mathbb{R}$.

$$2\operatorname{ch}^2(\theta)-1=2\left(\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}\right)^2-1=\frac{e^{2\theta}+e^{-2\theta}+2}{2}-1=\frac{e^{2\theta}+e^{-2\theta}}{2}=\operatorname{ch}(2\theta)$$
$$2\operatorname{ch}(\theta)\operatorname{sh}(\theta)=2\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}\cdot\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}=\frac{(e^\theta)^2-(e^{-\theta})^2}{2}=\frac{e^{2\theta}-e^{-2\theta}}{2}=\operatorname{sh}(2\theta)$$

11. Par définition de la fonction argch, $\operatorname{ch}(\operatorname{argch}x)=x$ pour tout $x\in[1,+\infty[$. Par ailleurs, on a vu que $\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x))=\sqrt{x^2-1}$ pour tout $x\in[1,+\infty[$. On en déduit que pour tou $x\in[1,+\infty[$,

$$\operatorname{ch}(2\operatorname{argch}(x))=2\operatorname{ch}^2(\operatorname{argch}(x))-1=2x^2-1$$
$$\operatorname{sh}(2\operatorname{argch}(x))=2\operatorname{ch}(\operatorname{argch}(x))\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x))=2x\sqrt{x^2-1}$$

Partie IV – Un problème de raccord

12. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]1,+\infty[$. Alors $g=f\circ\operatorname{ch}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x\in]1,+\infty[$, on a successivement

$$f(x)=g(\operatorname{argch}(x))$$
$$f'(x)=(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}g'(\operatorname{argch}(x))$$
$$f''(x)=-x(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}g'(\arccos(x))+(x^2-1)^{-1}g''(\arccos(x))$$

Or f est solution de (F) sur $]1,+\infty[$ *si et seulement si*

$$\forall x\in]1,+\infty[,\ (1-x^2)f''(x)-xf'(x)+4f(x)=0$$

Or d'après ce qui précède, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$xf'(x) = x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}g'(\operatorname{argch}(x))$$
$$(1-x^2)f''(x) = -(x^2-1)f''(x) = x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}g'(\operatorname{argch}(x)) - g''(\operatorname{argch}(x))$$

Ainsi f est-elle solution de (F) sur $]1, +\infty[$ *si et seulement si*

$$\forall x \in]1, +\infty[, \ -g''(\operatorname{argch}(x)) + 4g(\operatorname{argch}(x)) = 0$$

Puisque $\operatorname{argch}(]1, +\infty[) = \mathbb{R}_+^*$, cette dernière condition équivaut à

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ g''(t) - 4g(t) = 0$$

Pour résumer, f est solution de (F) sur $]1, +\infty[$ *si et seulement si* g est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}_+^*$.
La question **I.3** montre alors que les solutions de l'équation différentielle de (F) sur $]1, +\infty[$ sont les fonctions

$$x \in]1, +\infty[\mapsto \lambda \operatorname{ch}(2 \operatorname{argch}(x)) + \mu \operatorname{sh}(2 \operatorname{argch}(x))$$

ou encore

$$x \in]1, +\infty[\mapsto \lambda(2x^2-1) + 2\mu x\sqrt{x^2-1}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

13. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]-\infty, -1[$. Alors $g : x \mapsto f(-x)$ est deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in]1, +\infty[$, $g'(x) = -f'(-x)$ et $g''(x) = f''(-x)$.
f est solution de (F) sur $]-\infty, -1[$ *si et seulement si*

$$\forall x \in]-\infty, -1[, \ (1-x^2)f''(x) - xf'(x) + 4f(x) = 0$$

Ceci équivaut à

$$\forall x \in]1, \infty[, \ (1-(-x)^2)f''(-x) - (-x)f'(-x) + 4f(-x) = 0$$

ou encore à

$$\forall x \in]1, \infty[, \ (1-x^2)f''(-x) + xf'(-x) + 4f(-x) = 0$$

et finalement à

$$\forall x \in]1, \infty[, \ (1-x^2)g''(x) - xg'(x) + 4g(x) = 0$$

Finalement f est solution de (F) sur $]-\infty, -1[$ *si et seulement si* g est solution de (F) sur $]1, +\infty[$. On en déduit que les solutions de (F) sur $]-\infty, -1[$ sont les fonctions

$$x \in]1, +\infty[\mapsto \lambda(2(-x)^2-1) + 2\mu(-x)\sqrt{(-x)^2-1}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On peut également affirmer que ce sont les fonctions

$$x \in]1, +\infty[\mapsto \lambda(2x^2-1) + 2\mu x\sqrt{x^2-1}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ puisque $-\mu$ décrit $\mathbb{R}$ lorsque μ décrit $\mathbb{R}$.

14. Soit f une solution de (F) sur $\mathbb{R}$. Remarquons qu'alors f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. En particulier, f et f' sont continues sur $\mathbb{R}$.
D'après, les questions précédentes il existe $(\lambda_-, \mu_-, \lambda_0, \mu_0, \lambda_+, \mu_+) \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$\forall x \in]-\infty, -1[, f(x) = \lambda_-(2x^2-1) + 2\mu_- x\sqrt{x^2-1}$$
$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \lambda_0(2x^2-1) + 2\mu_0 x\sqrt{1-x^2}$$
$$\forall x \in]1, \infty[, f(x) = \lambda_+(2x^2-1) + 2\mu_+ x\sqrt{x^2-1}$$

Par continuité de f en -1, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$ et donc $\lambda_- = \lambda_0$. De même, par continuité de f en 1, $\lambda_0 = \lambda_+$. Finalement, $\lambda_- = \lambda_0 = \lambda_+$.

$$\forall x \in]-\infty, -1[, f(x) = 4\lambda_- x + 2\mu_- \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = 4\lambda_0 x + 2\mu_0 x\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\forall x \in]1, \infty[, f(x) = 4\lambda_+ x + 2\mu_+ \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Par continuité de f' en -1 et 1, on obtient $\mu_- = \mu_0 = \mu_+ = 0$ (sinon f' admettrait des limites infinies à gauche ou à droite en -1 ou 1).
On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda(2x^2 - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, toute fonction $x \mapsto \lambda(2x^2 - 1)$ est évidemment solution de (F) sur $\mathbb{R}$.
En conclusion, les solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions $x \mapsto \lambda(2x^2 - 1)$.

Solution 1.

1. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{3x}{1+x^2}$ est $x \mapsto \frac{3}{2}\ln(1+x^2)$. On en déduit que les solutions de (E_H) sont les fonctions $x \mapsto \lambda \exp\left(\frac{3}{2}\ln(1+x^2)\right) = (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Posons donc $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. On obtient $(1+x^2)P'(x) - 3xP(x) = -bx^3 + (3a-2c)x^2 + (2b-3d)x + c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Une condition suffisante (et même nécessaire en fait, mais qu'importe) pour que P soit solution de (E) est donc que (a,b,c,d) vérifie le système $\begin{cases} -b = 0 \\ 3a - 2c = 0 \\ 2b - 3d = 0 \\ dC = 1 \end{cases}$. On trouve alors $a = \frac{2}{3}$, $b = 0$, $c = 1$ et $d = 0$. Ceci signifie que la fonction polynomiale $P : x \mapsto \frac{2}{3}x^3 + x$ est solution de (E).
On en déduit que les solutions f_λ de (E) sont telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_\lambda(x) = \frac{2}{3}x^3 + x + \lambda(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Remarquons que pour tout $x > 0$,
$$(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = x^3\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$
En utilisant un développement limité classique
$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{3}{2x^2} + \frac{3}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$
A fortiori
$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$
On en déduit
$$(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \underset{x\to+\infty}{=} x^3 + \frac{3}{2}x + o(1)$$

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente,
$$f_\lambda(x) \underset{x\to+\infty}{=} \left(\frac{2}{3}+\lambda\right)x^3 + \left(1 + \frac{3}{2}\lambda\right)x + o(1)$$
Si $\lambda \neq -\frac{2}{3}$, $f_\lambda(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\frac{2}{3}+\lambda\right)x^3$ et f admet une limite infinie en $+\infty$.
Si $\lambda = -\frac{2}{3}$, $f_\lambda = g$ et $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$ de sorte que g admet une limite finie (nulle) en $+\infty$.
g est donc l'unique solution de (E) admettant une limite finie en $+\infty$.

5. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on trouve $g'(x) = 2x^2 + 1 - 2x\sqrt{1+x^2} = \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, par stricte croissance de la racine carrée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant x$. On en déduit que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Par opérations sur les limites, il est clair que $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$. Par ailleurs, on a vu à la question précédente que $\lim_{+\infty} g = 0$.

Solution 2.

1. On a facilement $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $J_0 = \frac{\pi^3}{24}$, $I_1 = 1$. Pour le calcul de J_1, on intègre deux fois par parties :

$$\begin{aligned} J_1 &= \left[t^2 \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, dt \\ &= \frac{\pi^2}{4} + 2\left[t \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $\cos^n$ est continue, positive et non constamment nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc son intégrale sur ce segment est stritement positive i.e. $I_n > 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On procède à nouveau à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[\sin t \cos^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t \, dt \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^n t \, dt \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité demandée.

4. **a.** Il est évident que $t \geqslant 0$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Pour établir l'autre inégalité, il suffit d'utiliser la concavité de la fonction sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En effet, sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, le graphe de cette fonction est au-dessus de la corde reliant les points d'abscisse 0 et $\frac{\pi}{2}$. Ainsi pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t \geqslant \frac{2t}{\pi}$ et on en déduit bien la seconde inégalité demandée.
Pour les nouvelles générations qui ignoreront tout de la convexité, on introduit la fonction $f : t \mapsto \frac{\pi}{2}\sin t - t$. f est deux fois dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f''(t) = -\frac{\pi}{2}\sin t$ pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi f'' est négative sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et ne s'annule qu'en 0 ce qui prouve la stricte décroissance de f'. On a $f'(0) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$. f' étant également continue, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires montre que f' s'annule en un unique réel α sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$. La décroissance de f' montre que f' est positive sur $[0, \alpha]$ et négative sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi f est croissante sur $[0, \alpha]$ et décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Puisque $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, f est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi^2}{4}\sin^2 t \cos^n t \, dt = \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^n t \, dt = \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+2})$$

   c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $I_n > 0$

$$0 \leqslant \frac{J_n}{I_n} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{I_{n+2}}{I_n}\right)$$

Or d'après la question **3**, $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Par le théorème des gendarmes, $\left(\frac{J_n}{I_n}\right)$ converge vers 0.

5. **a.** On procède encore une fois à des intégrations par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[t \cos^{n+2} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{n+1} t \, dt \\ &= (n+2)\left[\frac{t^2}{2}\sin t \cos^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\left(\cos^{n+2} t - (n+1)\sin^2 t \cos^n t\right) dt \\ &= -\frac{1}{2}(n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\left(\cos^{n+2} t - (n+1)(1-\cos^2 t)\cos^n t\right) dt \\ &= -\frac{1}{2}(n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\left((n+2)\cos^{n+2} t - (n+1)\cos^n t\right) dt \\ &= \frac{1}{2}\left((n+2)(n+1)J_n - (n+2)^2 J_{n+2}\right) \end{aligned}$$

   b. En utilisant la question **3**

$$\frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{(n+1)J_n}{(n+2)I_{n+2}} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{\frac{n+1}{n+2}J_n - J_{n+2}}{I_{n+2}}$$

En utilisant maintenant la question précédente :

$$\frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{\frac{n+1}{n+2}J_n - J_{n+2}}{\frac{1}{2}\left((n+2)(n+1)J_n - (n+2)^2 J_{n+2}\right)} = \frac{2}{(n+2)^2}$$

6. En sommant les égalités de la question précédente pour $n \in [\![0, N]\!]$ (avec $N \geqslant 1$), on obtient par télescopage

$$\frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1} - \frac{J_{N+1}}{I_{N+1}} - \frac{J_{N+2}}{I_{N+2}} = 2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+2)^2} = 2S_{N+2} - 2$$

En utilisant la question **4.c**, on en déduit que (S_n) converge vers $\frac{1}{2}\left(\frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1}\right) + 1$. En utilisant les résultats de la question **1**, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1}\right) + 1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\pi^3}{24}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{1}\right) + 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{4} - 2\right) + 1 = \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$