Devoir surveillé n°08

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 **1.a** ln est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0$ donc ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.b Si l'un des a_i est nul, l'inégalité est triviale. Sinon, par concavité de ln,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(a_i) \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)$$

On obtient alors l'inégalité voulue par croissance de exp.

2 **2.a** Soit $s \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. Alors il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de s.
Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^\top \mathrm{SP}$ soit diagonale.

2.b On calcule $\chi_\mathrm{S} = \mathrm{X}^2$. Ainsi $\mathrm{Sp(S)} = \{0\}$. Si S était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle donc nulle. S n'est donc pas diagonalisable.

3 **3.a** Comme β est une base orthonormée, $x = \sum_{i=1}^n \langle x \mid \varepsilon_i\rangle \varepsilon_i$. Alors $s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x \mid \varepsilon_i\rangle\varepsilon_i$. Comme β est orthonormée,

$$\mathrm{R}_s(x) = \langle s(x) \mid x\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2$$

3.b Soit $x \in \mathrm{S}(0,1)$. Alors $\|x\|^2 \sum_{i=1}^n \langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2 = 1$. Comme $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_1 \langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_n \langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2$$

ou encore

$$\lambda_1 \leq \mathrm{R}_s(x) \leq \lambda_n$$

4 Notons s l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base β est S. On sait que $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que β est orthonormée donc $s \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. De plus, $\mathrm{Sp}(s) = \mathrm{Sp(S)} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.
Comme β est orthonormée, $s_{i,j} = \langle s(\varepsilon_j) \mid \varepsilon_i\rangle$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Comme la base β est normée, $\varepsilon_i \in \mathrm{S}(0,1)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. D'après la question précédente, $\mathrm{R}_s(\varepsilon_i) = \langle s(\varepsilon_i) \mid \varepsilon_i\rangle \in [\lambda_1, \lambda_n]$ ou encore

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n$$

5 L'application $\varphi : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^\top\mathrm{M} - \mathrm{I}_n$ est polynomiale en les coefficients de M donc continue.
On peut aussi remarquer que, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, l'application linéaire $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application bilinéaire $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ sont continues. Ainsi l'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ est continue comme composée des applications continues $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\mathrm{M}^\top, \mathrm{M})$ et $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. L'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{I}_n$ est constante donc continue. Par différence, φ est continue.

6 On sait que les colonnes de A sont toutes de norme 1 i.e.

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$$

Comme les $a_{i,j}^2$ sont positifs, on en déduit que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ |a_{i,j}| \leq 1$$

7 Le singleton $\{0\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
D'après la question précédente, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est borné. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact car fermé et borné.

8 **8.a** D'après le théorème spectral, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{S} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^\mathsf{T} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1}$. Par propriété de la trace,

$$\mathrm{T}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{AS}) = \mathrm{tr}(\mathrm{AP}\Delta\mathrm{P}^{-1}) = \mathrm{tr}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\Delta)$$

Comme $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

8.b T est une forme linéaire sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi T est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, T admet un maximum t sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

8.c Si on note $\mathrm{B} = (b_{i,j})$,

$$\mathrm{T}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{B}\Delta) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,i}\lambda_i$$

Mais comme B est orthogonale, $b_{i,i} \leq 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Enfin, les λ_i sont positifs car $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc

$$\mathrm{T}(\mathrm{A}) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}(\mathrm{S})$$

Ainsi $\mathrm{tr}(\mathrm{S})$ est un majorant de T sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. De plus, $\mathrm{T}(\mathrm{I}_n) = \mathrm{tr}(\mathrm{S})$ et $\mathrm{I}_n \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ donc $t = \mathrm{tr}(\mathrm{S})$.

9 Comme S est diagonalisable, $\det(\mathrm{S}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{S}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Comme les λ_i sont positifs, d'après la question **1.b**,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

ou encore

$$\det(\mathrm{S})^{1/n} \leq \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(\mathrm{S})$$

Par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient

$$\det(\mathrm{S}) \leq \left(\frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(\mathrm{S})\right)^n$$

10 Tout d'abord,

$$\mathrm{S}_\alpha^\mathsf{T} = \mathrm{D}^\mathsf{T}\mathrm{S}^\mathsf{T}\mathrm{D} = \mathrm{D}^\mathsf{T}\mathrm{SD} = \mathrm{S}_\alpha$$

car S est symétrique. Ainsi S_α est également symétrique.
Pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{S}_\alpha\mathrm{X} = (\mathrm{DX})^\mathsf{T}\mathrm{S}(\mathrm{DX}) \geq 0$$

car $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On en déduit que $\mathrm{S}_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Enfin,

$$\mathrm{tr}(\mathrm{S}_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 s_{i,i}$$

11 Par propriété du déterminant

$$\det(\mathrm{S}_\alpha) = \det(\mathrm{S})\det(\mathrm{D})^2 = \det(\mathrm{S})\prod_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \frac{\det(\mathrm{S})}{\prod_{i=1}^{n} s_{i,i}}$$

La question précédente montre que $\operatorname{tr}(S_\alpha)=\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 s_{i,i}=n$. On applique l'inégalité de la question **9** à S_α et on obtient

$$\frac{\det(S)}{\prod_{i=1}^n s_{i,i}}\leq 1$$

ou encore

$$\det(S)\leq\prod_{i=1}^n s_{i,i}$$

$\boxed{12}$ Les valeurs propres de S_ε sont $\lambda_1+\varepsilon,\dots,\lambda_n+\varepsilon$. Puisque les valeurs propres de S sont positives, les valeurs propres de S_ε son strictement positives. De plus, les coefficients diagonaux de S_ε sont les $s_{i,i}+\varepsilon$. En appliquant la question précédente à S_ε, on obtient donc

$$\det(S_\varepsilon)\leq\prod_{i=1}^n(s_{i,i}+\varepsilon)$$

Comme S_ε est encore diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1+\varepsilon,\dots,\lambda_n+\varepsilon$, ceci équivaut à

$$\prod_{i=1}^n(\lambda_i+\varepsilon)\leq\prod_{i=1}^n(s_{i,i}+\varepsilon)$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient bien par passage à la limite

$$\prod_{i=1}^n\lambda_i\leq\prod_{i=1}^n s_{i,i}$$

$\boxed{13}$ On vérifie aisément que B est symétrique car A l'est. Comme $A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\operatorname{Sp}(A)\subset\mathbb{R}_+^*$. De plus, $B=\Omega^\top A\Omega=\Omega^{-1}A\Omega$ car Ω est orthogonale. Ainsi B est semblable à A de sorte que $\operatorname{Sp}(B)=\operatorname{Sp}(A)\subset\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que $B\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On sait que $\det(\Omega)=1$ car $\Omega\in O_n(\mathbb{R})$ donc, par propriété du déterminant,

$$\det(B)=\det(\Omega)^2\det(A)=1$$

car $A\in\mathcal{U}$. Ainsi $B\in\mathcal{U}$.
Enfin, par propriété de la trace,

$$\operatorname{tr}(AS)=\operatorname{tr}(A\Omega\Delta\Omega^\top)=\operatorname{tr}(\Omega^\top A\Omega\Delta)=\operatorname{tr}(B\Delta)$$

$\boxed{14}$ La question précédente montre l'inclusion $\{\operatorname{tr}(AS),\ A\in\mathcal{U}\}\subset\{\operatorname{tr}(B\Delta),\ B\in\mathcal{U}\}$.
Inversement, si on se donne $B\in\mathcal{U}$ et si l'on pose $A=\Omega B\Omega^\top$, on vérifie que $A\in\mathcal{U}$ et que $\operatorname{tr}(AS)=\operatorname{tr}(B\Delta)$, ce qui donne l'inclusion réciproque.
Par double inclusion, $\{\operatorname{tr}(AS),\ A\in\mathcal{U}\}=\{\operatorname{tr}(B\Delta),\ B\in\mathcal{U}\}$.
Comme $A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\lambda_i>0$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$. D'après la question **4**, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $b_{i,i}\geq\min\operatorname{Sp}(B)>0$ car $B\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi

$$\forall B\in\mathcal{U},\ \operatorname{tr}(B\Delta)=\sum_{i=1}^n\lambda_i b_{i,i}>0$$

L'ensemble $\{\operatorname{tr}(AS),\ A\in\mathcal{U}\}=\{\operatorname{tr}(B\Delta),\ B\in\mathcal{U}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée : il addmet donc une borne inférieure.

$\boxed{15}$ On a montré à la question précédente que

$$\forall B\in\mathcal{U},\ \operatorname{tr}(B\Delta)=\sum_{i=1}^n\lambda_i b_{i,i}$$

et on a vu que les $\lambda_i b_{i,i}$ étaient positifs. On peut donc appliquer la question **1.b** pour affirmer que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\lambda_i b_{i,i}\geq\left(\prod_{i=1}^n\lambda_i b_{i,i}\right)^{1/n}$$

ou encore

$$\operatorname{tr}(B\Delta)=\sum_{i=1}^n\lambda_i b_{i,i}\geq n\left(\prod_{i=1}^n\lambda_i\right)^{1/n}\left(\prod_{i=1}^n b_{i,i}\right)^{1/n}$$

16 Comme $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on peut appliquer l'inégalité d'Hadamard :

$$\prod_{i=1}^n b_{i,i} \geq \det(\mathrm{B}) = 1$$

puisque $\mathrm{B} \in \mathcal{U}$. En combinant avec l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$$\operatorname{tr}(\mathrm{B}\Delta) \geq n \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^{1/n} = n \det(\mathrm{S})^{1/n}$$

17 Il est clair que $\mathrm{D} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. De plus,

$$\det(\mathrm{D}) = \prod_{k=1}^n \mu_k = \frac{\det(\mathrm{S})}{\prod_{k=1}^n \lambda_k} = 1$$

donc $\mathrm{B} \in \mathcal{U}$. Enfin,

$$\operatorname{tr}(\mathrm{D}\Delta) = \sum_{k=1}^n \mu_k \lambda^k = n \det(\mathrm{S})^{1/n}$$

On en déduit que $m = n \det(\mathrm{S})^{1/n}$ (cette borne inférieure est en fait un minimum).