Séries numériques

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1 Série

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique (i.e. à valeurs dans $\mathbb{K}$). On appelle **série de terme général** u_n la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geq n_0}$ où

$$\forall n \geq n_0,\ \mathrm{S}_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

Cette série est noté $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ ou plus simplement $\sum u_n$ s'il n'y a pas ambiguïté sur le premier terme.
Pour $n \geq n_0$, S_n est appelée **somme partielle de rang** n de cette série.

Remarque. Une série est donc un cas particulier de suite.

Exemple 1.1

On appelle série arithmétique toute série dont le terme général est le terme général d'une suite arithmétique.
Par exemple, $\sum\limits_{n\geq 0} n$ est une série arithmétique. Sa somme partielle de rang n est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple 1.2

On appelle série géométrique toute série dont le terme général est le terme général d'une suite géométrique. Par exemple, $\sum\limits_{n\geq 0} 2^n$ est une série géométrique. Sa somme partielle de rang n est $2^n - 1$.

Exemple 1.3

On appelle série harmonique la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$.

Exemple 1.4

On appelle série télescopique toute série dont le terme général est de la forme $u_n = v_n - v_{n-1}$. La somme partielle de rang n de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est $v_n - v_0$.

Remarque. La suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ est croissante (resp. décroissante) si et seulement si la suite $(u_n)_{n\geq n_0+1}$ est positive (resp. négative).

1.2 Nature et somme d'une série

Définition 1.2 Convergence et divergence

On dit qu'une série converge (resp. diverge) si la suite de ses sommes partielles converge (resp. diverge).

Remarque. La convergence d'une série ne dépend pas du premier rang i.e. les séries $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_1} u_n$ sont de même nature.

Définition 1.3 Somme d'une série

Si la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge, la limite de la suite des sommes partielles est appelée **somme** de la série et est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Remarque. On a donc $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

Remarque. Aussi surprenant cela puisse-t-il paraître, une somme infinie de termes, fussent-ils tous positifs peut se révéler être finie.

Attention ! La notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ n'a de sens que si la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge. Il faut donc prouver la convergence de la série **avant** d'employer cette notation.

Proposition 1.1 Lien suite/série

La série télescopique $\sum (u_n - u_{n-1})$ et la suite (u_n) sont de même nature (i.e. elles convergent toutes les deux ou elles divergent toutes les deux).

De plus, si (u_n) converge vers une limite ℓ, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - u_{n-1} = \ell - u_{n_0-1}$.

Exercice 1.1

Nature et somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

Remarque. On appelle **série de Taylor** une série de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. On ne peut a priori rien dire sur ce type de série mais dans le cas où elle converge vers $f(x)$ (attention, ce n'est pas toujours le cas), on peut éventuellement le montrer grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exercice 1.2 ★★★ **Taylor-Lagrange**

A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange prouver la convergence et déterminer la somme des séries suivantes

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ pour $x \in \mathbb{R}$;
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ pour $x \in [0, 1]$.

Méthode **Changement d'indice**

Il est possible d'effectuer des changements d'indices dans la somme d'une série. C'est même plus simple que pour une somme finie. Par exemple, supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Effectuons par exemple le changement d'indice $p = n + 1$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{p=1}^{N+1} u_{p-1} = \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p-1}$$

En pratique, on ne passe pas par la limite des sommes partielles et on écrit directement $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p-1}$.

1.3 Opérations sur les séries

La proposition suivante n'est qu'une conséquence de la linéarité de la limite.

Proposition 1.2 Linéarité de la somme

Soient $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ deux séries numériques convergentes et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors la série $\sum_{n\geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et

$$\sum_{n\geq n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n\geq n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n\geq n_0}^{+\infty} v_n$$

Remarque. En termes plus savants, les séries numériques convergentes forment un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application qui à une série convergente associe sa somme est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Attention ! La réciproque est fausse en général. Par exemple, si $\sum (u_n + v_n)$ converge, on ne peut rien dire de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ (prendre par exemple, $u_n = -v_n = 2^n$).

On évitera à tout prix d'écrire des égalités du type $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ **avant** d'avoir prouvé la convergence des séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$.

Proposition 1.3

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série complexe. Alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq n_0} \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum_{n \geq n_0} \mathrm{Im}(u_n)$ convergent et dans ce cas

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$$

En particulier

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) \qquad \mathrm{Im}\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$$

Exercice 1.3

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(ix)^n}{n!}$ converge et a pour somme e^{ix}. En déduire la convergence des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et leurs sommes.

Proposition 1.4 Conjugaison

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série numérique. Alors les séries $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} \overline{u_n}$ sont de même nature.

En cas de convergence, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \overline{u_n} = \overline{\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n}$.

1.4 Divergence grossière

Proposition 1.5

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors la suite (u_n) converge vers 0.

Attention ! La réciproque est absolument fausse. Par exemple, la suite de terme général $\frac{1}{n}$ converge vers 0 tandis que la série harmonique diverge.

Proposition 1.6 Nature d'une série géométrique

Soit $q \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Exercice 1.4

Nature et somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} nq^n$.

Définition 1.4 Divergence grossière

Une série $\sum u_n$ est dite **grossièrement divergente** lorsque la suite (u_n) ne converge pas vers 0.

Exemple 1.5

Si $|q| \geq 1$, la série $\sum q^n$ diverge grossièrement.
La série $\sum \frac{1}{n}$ ne diverge pas grossièrement.

1.5 Reste d'une série convergente

Définition 1.5 Reste d'une série convergente

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série convergente. Pour tout $n \geq n_0$, la série $\sum_{k \geq n+1} u_k$ est convergente et on appelle sa somme le **reste de rang** n de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$. Autrement dit, le reste de rang n de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Proposition 1.7

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série convergente. Alors pour tout $n \geq n_0$

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Remarque. Si on note S_n la somme partielle de rang n, R_n le reste de rang n et S la somme de la série, on a donc $S_n + R_n = S$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 1.6

Lorsque $|q| < 1$, le reste de rang n de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$ est $\frac{q^{n+1}}{1-q}$.

Corollaire 1.1

La suite des restes d'une série convergente converge vers 0.

2 Comparaison à une intégrale

Méthode **Comparaison à une intégrale**

On considère une série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ où f est une fonction continue et **monotone** sur $\mathbb{R}_+$. On peut comparer les sommes partielles S_n à une intégrale pour déterminer la nature de la série. Si, par exemple, f est croissante, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [k, k+1]$:

$$f(k) \leq f(t) \leq f(k+1)$$

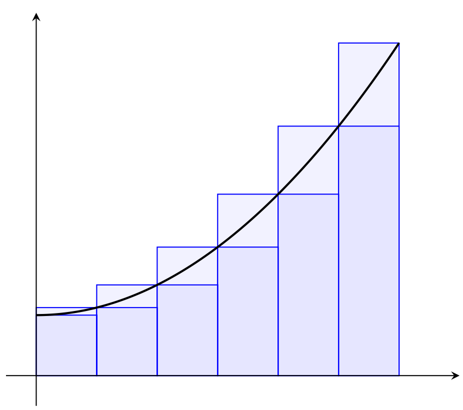
Puis par intégration sur $[k, k+1]$,

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)\, \mathrm{d}t \leq f(k+1)$$

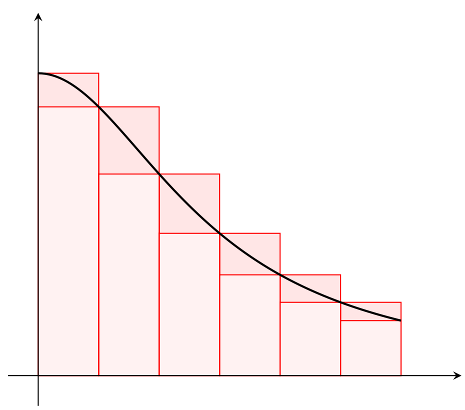
Enfin, en sommant l'inégalité de gauche pour $0 \leq k \leq n$ et celle de droite pour $0 \leq k \leq n-1$, on obtient via la relation de Chasles

$$\int_0^n f(t)\, \mathrm{d}t + f(0) \leq S_n \leq \int_0^{n+1} f(t)\, \mathrm{d}t$$

On a des résultats analogues lorsque f est décroissante.
Les encadrements obtenus permettent éventuellement de déterminer un équivalent de la suite des sommes partielles.
En modifiant légèrement la technique, on peut également obtenir un équivalent de la suite des restes (en cas de convergence).
Graphiquement, la méthode correspond à encadrer l'intégrale de f sur un intervalle par une somme d'aires de rectangles d'où le nom de méthode des rectangles.



Cas d'une fonction croissante



Cas d'une fonction décroissante

Remarque. Il ne s'agit pas de retenir des formules par cœur mais de retenir la méthode permettant d'obtenir des encadrements des sommes partielles et des restes.

Exemple 2.1 Équivalent de la série harmonique

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

Par intégration,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$$

En sommant convenablement, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

ou encore

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

L'inégalité de gauche permet de conclure que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

L'encadrement permet même d'affirmer que donner un équivalent des sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Proposition 2.1 Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque. Si $\alpha \leq 0$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

Remarque. Pour $\alpha > 1$, on note $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. La fonction ζ est appelée fonction ζ de Riemann.

Exemple 2.2 Équivalent du reste de la série $\sum \frac{1}{n^2}$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Par intégration,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Mais en sommant l'encadrement précédent, on a également pour $\mathrm{N} > n \geq 1$

$$\int_{n+1}^{\mathrm{N}+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

ou encore

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{\mathrm{N}+1} \leq \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{\mathrm{N}}$$

Par passage à la limite

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$$

On obtient ainsi un équivalent de la suite des restes de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Exercice 2.1

Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha < 1$ et un équivalent de son reste lorsque $\alpha > 1$.

3 Séries à termes positifs

Une série $\sum u_n$ est dite à **termes positifs** si les u_n sont positifs.

3.1 Résultats généraux

Le théorème de la limite monotone permet d'énoncer le résultat suivant.

Proposition 3.1

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.
Dans le cas contraire, elle diverge vers $+\infty$.

Corollaire 3.1

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles telles que $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

(i) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Remarque. En cas de convergence et si $u_n \leq v_n$ pour $n \geq \mathrm{N}$, alors $\sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} v_n$.

Exemple 3.1

La série $\sum \frac{\arctan n}{n^2}$ converge.
La série $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge.

3.2 Absolue convergence

Définition 3.1 Absolue convergence

Une série numérique (réelle ou complexe) $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 3.1

Une série absolument convergente est convergente. Dans ce cas, $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Attention ! La réciproque est fausse. La série $\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge tandis que la série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n}$ diverge.

Exemple 3.2

La série $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ converge absolument.

Exercice 3.1 **Sommation d'Abel**

Soient $(a_n)_{n\geq n_0}$ et $(B_n)_{n\geq n_0}$ deux suites complexes. On définit deux suites $(A_n)_{n\geq n_0}$ et $(b_n)_{n\geq n_0}$ de la manière suivante :

$$\forall n \geq n_0,\ A_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k,\ b_n = B_{n+1} - B_n$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$ pour tout $n \geq n_0$.
2. Utiliser la question précédente pour étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$.
3. De manière générale, montrer que si (B_n) converge vers 0, si (A_n) est bornée et si $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} b_n$ est absolument convergente, alors $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} a_n B_n$ est convergente.

3.3 Relations de comparaison

Proposition 3.2

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On suppose $\sum v_n$ à termes positifs à partir d'un certain rang. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (absolument).

Remarque. Les résultats restent vrais si on remplace le $\mathcal{O}$ par un o puisque la négligabilité implique la domination.

Attention ! Encore une fois, il est essentielle que la série $\sum v_n$ soit à termes positifs. Posons $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. La série $\sum v_n$ converge et $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ mais $\sum u_n$ diverge.

Proposition 3.3

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques dont l'une des deux est à termes positifs à partir d'un certain rang. Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Remarque. Si (u_n) et (v_n) sont des suites réelles telles que $u_n \sim v_n$, alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

Exemple 3.3

La série $\sum e^{-\sqrt{n}}$ converge.
La série $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ diverge.
La série $\displaystyle\sum \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$ est convergente.

Attention ! Il est essentiel que les des deux séries soit à termes positifs (du moins à partir d'un certain rang).
Par exemple, en posant $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$, on a bien $u_n \sim v_n$ mais $\sum u_n$ converge tandis que $\sum v_n$ diverge.

Exercice 3.2 **Règle de d'Alembert**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes **strictement positifs**.

1. Montrer que si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite $l < 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
2. Montrer que si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite $l > 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.
3. Montrer à l'aide de deux exemples que l'on ne peut pas conclure si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet 1 pour limite.
4. Étudier la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^n}$.

4 Développement décimal d'un réel

Proposition 4.1 Développement décimal d'un réel

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une unique suite (x_n) telle que

- $x_0 \in \mathbb{Z}$;
- $x_n \in [\![0, 9]\!]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;
- la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas stationnaire en 9 (i.e. n'est pas constante égale à 9 à partir d'un certain rang) ;
- $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$.

Cette écriture s'appelle le **développement décimal propre** du réel x.

Remarque. L'entier x_0 est la partie entière de x et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite des décimales de x.

Remarque. Si on n'impose plus à la suite (x_n) de ne pas être constante égale à 9 à partir d'un certain rang, tout nombre décimal admet deux développements décimaux. Par exemple

$$0,240000000000000\cdots = 0,23999999999999\ldots$$

La seconde écriture s'appelle un développement décimal **impropre**.
Le développement décimal d'un réel non décimal est toujours propre : la condition de non stationnarité en 9 est donc superflue pour garantir l'unicité du développement décimal propre dans ce cas.

Remarque. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Le réel $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{x_n}{10^n}$ s'appelle la **troncature** de x à N décimales. C'est une approximation de x à $10^{-\mathrm{N}}$ près.
On peut remarquer que $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{x_n}{10^n} = \frac{\lfloor 10^{\mathrm{N}} x \rfloor}{10^{\mathrm{N}}}$.

Exercice 4.1

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que x est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

Algorithme 1 Développement décimal

Données : un réel x
un entier naturel N
Résultat : une liste L contenant la partie entière suivie des N premières décimales de x
$\mathrm{L} \leftarrow \varnothing$
$\mathrm{L} \leftarrow \mathrm{L}, \lfloor x \rfloor$
$a \leftarrow x - \lfloor x \rfloor$
Pour n variant de 1 à N **Faire**
  $\mathrm{L} \leftarrow \mathrm{L}, \lfloor 10a \rfloor$
  $a \leftarrow 10a - \lfloor 10a \rfloor$
Fin Pour

On peut proposer l'algorithme suivant en Python.

```
from math import floor
def decimal(x, N):
    L = [floor(x)]
    x = x - floor(x)
    for n in range(N):
        L.append(floor(10 * x))
    x = 10 * x - floor(10 * x)
    return L
```

Remarque. Tout ce qui précède a été établi en base 10 mais reste vrai, mutatis mutandis, en base quelconque.