DEVOIR À LA MAISON N°10

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1 ★★★ **Triplets pythagoriciens**

L'objet de cet exercice est de prouver les solutions entières de l'équation :

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{E}$$

sont (à un échange près de x et y) les triplets (x, y, z) de la forme :

$$x = d(u^2 - v^2) \qquad y = 2duv \qquad z = d(u^2 + v^2)$$

où d, u, v sont des entiers.

1. S'assurer que les triplets proposés vérifient bien l'équation (E).

2. Soit (x, y, z) un triplet d'entiers solution de l'équation (E). On suppose x, y et z premiers entre eux dans leur ensemble et strictement positifs.

- **a.** Montrer que x, y et z sont premiers entre eux deux à deux.
- **b.** Montrer que x et y sont de parités distinctes. En déduire la parité de z.

3. On reprend les hypothèses de la question précédente et on suppose de plus (quitte à échanger x et y) que x est impair et que y est pair.

- **a.** Montrer que le pgcd de $z + x$ et $z - x$ est 2.
- **b.** Il existe donc $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que

$$y = 2a \qquad z + x = 2b \qquad z - x = 2c$$

Montrer que b et c sont des carrés d'entiers naturels non nuls.

4. Conclure.

Problème 1 —

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n et g_n les fonctions telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \cos(nx) \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = \cos^n(x)$$

En particulier, f_0 et g_0 sont la fonction constante égale à 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{F}_n = \mathrm{vect}(f_0, f_1, \dots, f_n) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G}_n = \mathrm{vect}(g_0, g_1, \dots, g_n)$$

F_n et G_n sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Partie I – Cas particulier

1. Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, $f_k \in \mathrm{G}_2$. En déduire que $\mathrm{F}_2 \subset \mathrm{G}_2$.
2. Montrer que la famille (f_0, f_1, f_2) est libre. Quelle est la dimension de F_2 ?
3. Montrer que la famille (g_0, g_1, g_2) est libre. Quelle est la dimension de G_2 ?
4. En déduire que $\mathrm{F}_2 = \mathrm{G}_2$.

Partie II – Une inclusion

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+2} = 2f_{n+1}f_1 - f_n$.
2. Montrer par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathrm{G}_n$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{G}_n$.

Partie III – Utilisation de la dimension

1. Calculer $\mathrm{I}_{k,l} = \displaystyle\int_0^{2\pi} f_k(t)f_l(t)\,\mathrm{d}t$ pour $(k, l) \in \mathbb{N}^2$. On distinguera plusieurs cas.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.
3. En déduire la dimension de F_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Justifier que $\dim \mathrm{G}_n \leq n + 1$.
5. Prouver que $\mathrm{F}_n = \mathrm{G}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.