

Généralités

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue T -périodique telle que $\int_0^T f(t) dt = 0$. Montrer que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \int_a^b f(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

Que devient le résultat si $\int_0^T f(t) dt \neq 0$?

Exercice 2

Soient f une fonction continue sur \mathbb{R} admettant une limite finie l en $+\infty$ et a un réel strictement positif.

1. Montrer que $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_y^{y+a} f(t) dt = al$.
2. Montrer que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X (f(t+a) - f(t)) dt = - \int_0^a f(t) dt + al$.
3. Calculer $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X (\arctan(t+1) - \arctan t) dt$.

Exercice 3

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue.

1. Justifier l'existence de $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$.
2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f(x)^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = M$.

Exercice 4

Soit f continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Montrer que $\left| \int_{[a, b]} f \right| = \int_{[a, b]} |f|$ si et seulement si f est de signe constant sur $[a, b]$.

Exercice 5

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles. On suppose de plus g positive sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$$

Exercice 6

Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

1. On suppose que $\int_0^\pi f(t) \sin t dt = 0$. Montrer que f s'annule en un réel $a \in]0, \pi[$.
2. On suppose que $\int_0^\pi f(t) \sin t dt = \int_0^\pi f(t) \cos t dt = 0$. Montrer que f s'annule deux fois sur $]0, \pi[$.
On pourra considérer $\int_0^\pi f(t) \sin(t-a) dt$.

Exercice 7

Formule de la moyenne

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

Exercice 8

Soient $n \in \mathbb{N}$ f une fonction continue sur $[a, b]$ ($a < b$) telle que $\int_a^b t^k f(t) dt = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a, b]$.

Exercice 9

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 strictement croissante de $[a, b]$.

D'après le théorème de la bijection, f induit une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ et f^{-1} est continue sur $[f(a), f(b)]$.

1. Montrer que

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy = bf(b) - af(a)$$

2. Donner une interprétation géométrique de cette formule.

Calculs

Exercice 10

Stairs

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = \lfloor nt \rfloor$. Montrer que f est un escalier sur $[0, 1]$ et calculer son intégrale.

Exercice 11 ★

Une intégrale trigonométrique

On note

$$I = \int_0^\pi \frac{t}{2 + \sin(t)} dt \text{ et } J = \int_0^\pi \frac{dt}{2 + \sin(t)}.$$

1. Trouver une relation simple entre I et J en effectuant le changement de variable $t = \pi - u$.
2. Pour tout réel x , on pose

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{2 + \sin^2 t}.$$

- a. Montrer que F est continue sur \mathbb{R} .
- b. Calculer $F(x)$ en fonction de x pour tout $x \in]-\pi, \pi[$.
- c. En déduire la valeur de J puis celle de I .

Exercice 12

Calculer les primitives suivantes

1. $\int \frac{dx}{x^2 + 5};$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5}};$
3. $\int e^x \sin(e^x) dx;$
4. $\int \tan^3(x) dx;$
5. $\int \frac{1}{\tan^3(x)} dx;$
6. $\int \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x + 7)^m} dx,$
7. $\int \frac{\ln(x)}{x} dx;$
8. $\int \frac{\operatorname{ch}(x) dx}{\operatorname{sh}^5(x)}.$

$m \in \mathbb{N};$

Exercice 13 ★★

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et H la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \alpha \cos x + \sin x + 2$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que H ne s'annule pas.
2. On suppose la condition précédente satisfaite et on pose pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{H(t)}$. Justifier que F est bien définie et continue sur \mathbb{R} et donner une expression de $F(x)$ pour $x \in]-\pi, \pi[$.
3. Calculer l'intégrale $F(2\pi)$.

Exercice 14 ★★

Soient α et β deux réels strictement positifs. On définit une fonction f par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\alpha + \beta \cos^2 x}$$

1. Justifier que f admet des primitives sur \mathbb{R} . On note F celle qui s'annule en 0.
2. Montrer que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Déterminer une expression de $F(x)$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
4. Calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{49 - 45 \sin^2 t}.$

Exercice 15 ★★★**TPE MP**

Calculer $I = \int_{a^2}^{b^2} x \sqrt{(x-a^2)(b^2-x)} \, dx$.

Exercice 16 ★★

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

1. Déterminer une relation entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$.
2. En déduire l'existence et une expression simple de $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x)$.

Inégalités intégrales**Exercice 17 ★★****L'inégalité de Poincaré**

Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto f(x) \cotan(\pi x)$ admet une limite (finie) en 0 et en 1. On notera g , le prolongement continu sur $[0, 1]$ de cette fonction.
2. On considère la fonction $h = fg$.
 - a. Démontrer que h est dérivable sur $]0, 1[$ et que, pour tout $0 < x < 1$,

$$h'(x) = 2f'(x)g(x) - \pi(f(x)^2 + g(x)^2).$$

En déduire que h est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

- b. Démontrer que

$$\forall x \in [0, 1], \quad h'(x) \leq \frac{1}{\pi} f'(x)^2 - \pi f(x)^2.$$

- c. En déduire enfin que

$$\int_0^1 f'(x)^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 f(x)^2 dx.$$

Exercice 18 ★★**Une belle inégalité**

Soient $a \leq b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$f(a) = 0 \text{ et } 0 \leq f' \leq 1.$$

Etablir que

$$\int_a^b f^3(t) dt \leq \left(\int_a^b f(t) dt \right)^2.$$

Fonctions définies par des intégrales**Exercice 19****Banal**

Etablir la dérivabilité puis calculer la dérivée de la fonction ψ définie par

$$x \mapsto \int_{e^{-x}}^{e^x} \sqrt{1 + \ln^2(t)} dt.$$

Exercice 20

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^x 3^{-[t]} dt$ où $[t]$ représente la partie entière du réel t .

1. Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que la suite $(f(n))$ converge et donner sa limite.
3. En déduire que f admet une limite en $+\infty$ et préciser celle-ci.

Exercice 21

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Quel est le signe de f ?
3. Prolonger f par continuité partout où cela est possible.
4. Montrer que f est dérivable et étudier les variations de f . On déterminera également la limite de f en $+\infty$.
5. Étudier la concavité de f .
6. Tracer le graphe de f .

Exercice 22

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t) dt$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t) dt$.
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 et que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = g$.

Exercice 23

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt$.

Exercice 24

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_a^b f(t) \sin(tx) dt$ est lipschitzienne.

Sommes de Riemann**Exercice 25 ★****Klassik**

Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par,

$$t_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}.$$

Exercice 26 ★**Riemannissime**

Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par,

$$v_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \dots (n+n)}.$$

Exercice 27**L'exemple classique**

Étudier la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Exercice 28 ★★**Posé à Centrale**

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose,

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $e^{\int_0^1 f(t) dt}$.

Exercice 29

Déterminer un équivalent de $u_n = \sqrt{1}\sqrt{n-1} + \sqrt{2}\sqrt{n-2} + \dots + \sqrt{n-2}\sqrt{2} + \sqrt{n-1}\sqrt{1}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 30**X PC 2012**

Montrer que

$$X^{2n} - 1 = (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right)$$

En déduire pour $r > 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln |1 - re^{i\theta}| d\theta$$

Equations intégrales**Exercice 31**Déterminer les fonctions f continues sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Exercice 32Déterminer les fonctions f continues sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2f(1) - 3 \int_0^x f(t) dt$$

Exercice 33**Une équation fonctionnelle**Soit $\lambda \in [-1, 1]$. Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{\lambda x} f(t) dt.$$

Suites d'intégrales**Exercice 34 ★★****Intégrales de Wallis**On pose pour tout $n \geq 0$,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. En intégrant par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} .
3. En déduire une expression de I_{2n} et I_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de factorielles.
4. Vérifier que $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante. En déduire que $\frac{n+1}{n+2} I_n \leq I_{n+1} \leq I_n$.
5. Démontrer que $I_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n$.
6. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.
7. En déduire que

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 35

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $f_{n,\lambda}(x) = \sin(2nx) \ln(\lambda \cos x)$.

1. Etudier la limite de $f_{n,\lambda}(x)$ lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

2. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{n,1}(x) \, dx$. Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{n,\lambda}(x) \, dx = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2n} \ln \lambda + I_n$$

3. Calculer I_1 et I_2 .

4. Etablir que

$$I_n = (-1)^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nx) \ln(\sin x) \, dx$$

et

$$nI_n = (-1)^n J_n \quad \text{où} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(nx) \cot x \, dx$$

5. Calculer $J_n - J_{n-1}$ et en déduire I_n selon la parité de n .

Exercice 36 ★★**Une récurrence double**

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{2 - \cos(t)} dt.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = 4I_{n+1} - I_n$.

2. En déduire une expression de I_n en fonction de n .

Exercice 37 ★★**Oral des Minettes 2005**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Prouver que, sur un ensemble à déterminer,

$$\frac{\sin^2(nt)}{\sin(t)} = \sin(t) + \sin(3t) + \dots + \sin((2n-1)t).$$

2. En déduire une expression de

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin(t)} dt$$

sous la forme d'une somme.

3. Vérifier que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{2x-1} \leq \frac{1}{2k-1}.$$

4. En déduire que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin(t)} dt \sim \frac{1}{2} \ln(n).$$

Exercice 38**Incontournable**

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Prouver que la suite de terme général

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$$

converge vers 0.