

# DÉTERMINANTS

Dans tout ce chapitre,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

## 1 Groupe symétrique

### 1.1 Permutation

#### Définition 1.1 Permutation, groupe symétrique

On appelle **permutation** d'un ensemble  $E$  toute bijection de  $E$  dans lui-même. L'ensemble des permutations de  $E$  se note  $S(E)$ .  $(S(E), \circ)$  est un groupe appelé **groupe symétrique** de  $E$ .

#### Définition 1.2 Groupe symétrique de degré $n$

Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_n = S(\llbracket 1, n \rrbracket)$ .  $(S_n, \circ)$  est appelé le **groupe symétrique de degré  $n$** .

#### Notation 1.1

On représente généralement une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  par un tableau dont la première ligne est constituée par les entiers de 1 à  $n$  rangés par ordre croissant et dont la seconde ligne est constituée de leurs images respectives. Par exemple,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  représente la permutation  $\sigma$  de  $S_5$  telle que :  
 $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 5, \sigma(3) = 3, \sigma(4) = 1, \sigma(5) = 4$ .

#### Proposition 1.1

Le cardinal de  $S_n$  est  $n!$ .

### 1.2 Transpositions et cycles

#### Définition 1.3 Cycle

Soit  $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . On appelle  **$p$ -cycle** ou **cycle de longueur  $p$**  toute permutation circulaire de  $p$  éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  i.e. toute permutation  $\sigma$  telle qu'il existe  $p$  entiers distincts  $a_1, a_2, \dots, a_p$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \sigma(a_i) = a_{i+1}, \sigma(a_p) = a_1$$

Un tel cycle est noté  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ . L'ensemble  $\{a_1, \dots, a_p\}$  est appelé le **support** du cycle.  
 Un 2-cycle est appelé une **transposition**.

**REMARQUE.** Le même cycle peut s'écrire de plusieurs manières. Par exemple,  $(1, 2, 3) = (2, 3, 1) = (3, 1, 2)$ .

**REMARQUE.** Si  $c$  est un  $p$ -cycle, alors  $c^p = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$ . Notamment, si  $\tau$  est une transposition,  $\tau^2 = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$  i.e.  $\tau^{-1} = \tau$ .

**REMARQUE.**  $S_n$  est non commutatif dès que  $n \geq 3$ . Par exemple,  $(1, 2, 3) \circ (1, 2) \neq (1, 2) \circ (1, 2, 3)$ .

**Proposition 1.2**

Deux cycles à supports disjoints commutent.

**Théorème 1.1**

Toute permutation peut s'écrire comme une composée commutative de cycles de supports disjoints. De plus, cette écriture est unique à l'ordre des cycles près.

**Exemple 1.1**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1, 5, 4) \circ (3, 6) = (3, 6) \circ (1, 5, 4)$$

**Exercice 1.1**

Écrire sous la forme usuelle (tableau) et sous forme de composée de cycles disjoints la permutation  $(2, 3) \circ (4, 3, 1) \circ (5, 2, 3)$ .

**Théorème 1.2**

Toute permutation peut s'écrire comme une composée de transpositions.

**REMARQUE.** On dit que le groupe  $S_n$  est engendré par les transpositions.



**ATTENTION !** Cette décomposition n'est pas unique. Par exemple,  $(1, 2, 3) = (1, 2) \circ (2, 3) = (3, 1) \circ (1, 2)$ .

**Exemple 1.2**

Décomposition d'un  $p$ -cycle en une composée de transpositions :

$$(a_1, a_2, \dots, a_p) = (a_1, a_2) \circ (a_2, a_3) \circ \dots \circ (a_{p-1}, a_p)$$

**Exercice 1.2**

Énumérer tous les éléments de  $S_3$ .

**1.3 Signature****Théorème 1.3 Signature**

Il existe une unique application  $\varepsilon$  de  $S_n$  dans  $\{-1, 1\}$  vérifiant :

- $\forall (\sigma, \sigma') \in S_n^2, \varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$  ;
- $\varepsilon(\tau) = -1$  pour toute transposition  $\tau$ .

On l'appelle la **signature**.

**REMARQUE.** En termes plus savants, on dit que, si  $n \geq 2$ , la signature est l'unique morphisme  $\sigma$  non trivial (i.e. non constant égal à 1) du groupe  $(S_n, \circ)$  dans le groupe  $(\{-1, +1\}, \times)$ .

**REMARQUE.** Une permutation de signature  $+1$  est dite **paire** et une permutation de signature  $-1$  est dite **impaire**. L'ensemble des permutations paires de  $S_n$  forme un sous-groupe de  $S_n$  appelé **groupe alterné de degré  $n$**  et noté  $A_n$ .

### Exercice 1.3

Montrer que pour  $n \geq 2$ , le cardinal de  $A_n$  est  $\frac{n!}{2}$ .

### Exercice 1.4

Montrer que  $A_n$  est engendré par les 3-cycles.

### Proposition 1.3 Signature d'un cycle

La signature d'un  $p$ -cycle est  $(-1)^{p-1}$ . En particulier, la signature d'une transposition est  $-1$ .

**REMARQUE.** Il suffit donc de savoir décomposer une permutation en une composée de cycles disjoints pour calculer sa signature.

### Exemple 1.3 Calcul de signature

Soit  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Alors  $\sigma = (1, 3, 5) \circ (2, 4)$  donc  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^2 \times (-1) = -1$ .

### Inversions

La signature d'une permutation peut se calculer via le nombre d'inversions. Soit  $\sigma \in S_n$ . On appelle **inversion** de  $\sigma$  toute paire  $\{i, j\}$  d'éléments de  $[1, n]$  telle que  $i < j$  et  $\sigma(i) > \sigma(j)$  soient de signes opposés. Si on note  $I(\sigma)$  le nombre d'inversions de  $\sigma$ , alors  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$ .

## 2 Applications multilinéaires

### Définition 2.1 Application multilinéaire

Soient  $E_1, E_2, \dots, E_n$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On dit que  $f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow F$  est une **application  $n$ -linéaire** si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

Si  $F = \mathbb{K}$ , on dit que  $f$  est une **forme  $n$ -linéaire**.

**REMARQUE.** L'ensemble des applications  $n$ -linéaires de  $E_1 \times \dots \times E_n$  dans  $F$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Plus précisément, c'est un sous-espace vectoriel de  $F^{E_1 \times \dots \times E_n}$ .

**REMARQUE.** Une application bilinéaire est une application 2-linéaire.  
Une application trilinéaire est une application 3-linéaire.

**REMARQUE.** Si  $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$  est une application  $n$ -linéaire, elle est nulle sur tout  $n$ -uplet comportant le vecteur nul.

**Exemple 2.1**

En géométrie :

- Dans le plan et l'espace, le produit scalaire est une forme bilinéaire.
- Dans le plan, le déterminant est une forme bilinéaire.
- Dans l'espace, le déterminant est une forme trilinéaire.
- Dans l'espace, le produit vectoriel est une application bilinéaire.

**Exemple 2.2**

En algèbre :

- Le produit est une application bilinéaire de  $\mathbb{K}^2$  dans  $\mathbb{K}$ .
- La multiplication matricielle est une application bilinéaire de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  dans  $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ .
- La composition d'applications linéaires est une application bilinéaire de  $\mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$  dans  $\mathcal{L}(E, G)$ .

**Exemple 2.3**

En analyse :

- Le produit de fonctions d'un ensemble  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  est une application bilinéaire de  $(\mathbb{K}^X)^2$  dans  $\mathbb{K}^X$ .
- L'application  $\begin{cases} \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto \int_a^b f(t)g(t)dt \end{cases}$  est une forme bilinéaire.

A partir de maintenant, on considère que  $E_1 = E_2 = \dots = E_n$ .

**Définition 2.2 Application multilinéaire symétrique, anti-symétrique, alternée**

Soit  $f : E^n \rightarrow F$  une application  $n$ -linéaire.

(i) On dit que  $f$  est **symétrique** si :

$$\forall \sigma \in S_n, \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n, f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(ii) On dit que  $f$  est **antisymétrique** si :

$$\forall \sigma \in S_n, \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n, f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(iii) On dit que  $f$  est **alternée** si :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i \neq j \text{ ET } x_i = x_j) \Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0_F$$

**REMARQUE.** L'ensemble des applications  $n$ -linéaires symétriques (resp. antisymétriques, alternées) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications  $n$ -linéaires de  $E^n$  dans  $F$ .

**Proposition 2.1**

Une application multilinéaire alternée est antisymétrique. La réciproque est vraie si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**REMARQUE.** En ce qui nous concerne, il y aura donc équivalence parfaite entre «alternée» et «antisymétrique».

#### Exemple 2.4

- Le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique.
- Le produit vectoriel est une application bilinéaire antisymétrique ou alternée.
- Le déterminant dans le plan est une forme bilinéaire antisymétrique ou alternée.
- Le déterminant dans l'espace est une forme trilinéaire antisymétrique ou alternée.

#### Proposition 2.2

Soit  $f : E^n \rightarrow F$  une application  $n$ -linéaire antisymétrique (ou alternée). Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une famille **liée** de  $E$ . Alors  $f(u_1, \dots, u_n) = 0_F$ .

### 3 Déterminant d'une famille de vecteurs

#### Définition 3.1 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On définit une application  $\det_{\mathcal{B}} : E^n \rightarrow \mathbb{K}$  appelée **déterminant dans la base  $\mathcal{B}$**  par

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n e_{\sigma(i)}^*(x_i)$$

**REMARQUE.** Pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , notons  $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j}) \in \mathbb{K}^n$  les coordonnées de  $x_j$  dans la base  $\mathcal{B}$  i.e.  $x_j = \sum_{i=1}^n x_{i,j} e_i$ . Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i), i}$$

#### Lemme 3.1

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\varphi : E^n \rightarrow \mathbb{K}$  une forme  $n$ -linéaire alternée. Alors  $\varphi = \varphi(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$ .

#### Théorème 3.1

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Alors  $\det_{\mathcal{B}}$  est l'unique forme  $n$ -linéaire alternée valant 1 en  $\mathcal{B}$ .

L'ensemble des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E^n$  est  $\text{vect}(\det_{\mathcal{B}})$ .

#### Proposition 3.1 Changement de base

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Alors

$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$$

**Proposition 3.2 Caractérisation des bases**

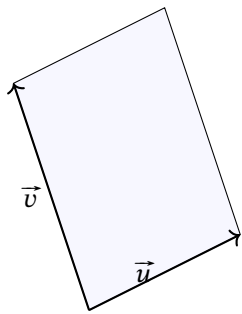
Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ . Alors  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$ .

**REMARQUE.** Réciproquement, la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est liée si et seulement si  $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = 0$ .

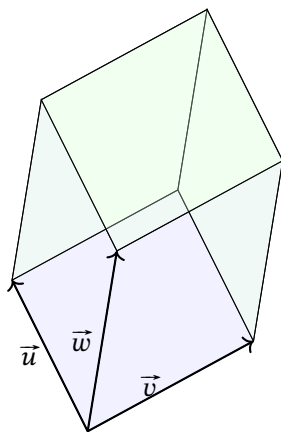
**Proposition 3.3 Pivot de Gauss**

Le déterminant d'une famille de vecteurs est :

- multiplié par  $-1$  lorsqu'on échange deux vecteurs de la famille ;
- inchangé lorsqu'on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs ;
- multiplié par  $\alpha$  si on multiplie un vecteur de la famille par  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

**Interprétation géométrique d'un déterminant d'ordre 2**

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ , alors la valeur absolue de leur déterminant dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  est l'aire du parallélogramme porté par ces vecteurs.

**Interprétation géométrique d'un déterminant d'ordre 3**

Si  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  sont trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , alors la valeur absolue de leur déterminant dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est le volume du parallélépipède porté par ces vecteurs.

**Définition 3.2 Orientation d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soient  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux bases de  $E$ . On dit que  $\mathcal{B}_2$  a la même orientation que  $\mathcal{B}_1$  si  $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) > 0$ .

La relation binaire «avoir la même orientation que» est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de  $E$  pour laquelle il existe deux classes d'équivalence.

De manière arbitraire, on convient que l'une des classes d'équivalence sera formée des bases dites **directes** tandis que l'autre sera formée des bases dites **indirectes**.

**Orienter un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel**

Pour orienter concrètement un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, on choisit une base de référence  $\mathcal{B}_0$ . Toutes les bases de même orientation que  $\mathcal{B}_0$  seront dites directes tandis que les autres seront dites indirectes.

Il n'existe que deux orientations possibles d'un même espace vectoriel.



**ATTENTION !** L'orientation n'a de sens que pour les espaces vectoriels **réels** puisqu'il y est question de **signe** d'un déterminant.

## 4 Déterminant d'un endomorphisme

**Définition 4.1 Déterminant d'un endomorphisme**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soient  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors le scalaire  $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$  ne dépend pas de la base  $\mathcal{B}$  choisie. On l'appelle le **déterminant** de  $f$  noté  $\det(f)$ .

**Exemple 4.1**

$$\det(\text{Id}_E) = 1.$$

**Proposition 4.1 Propriétés du déterminant d'un endomorphisme**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soient  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{F}$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Soient enfin  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ .

- (i)  $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{F})) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ ;
- (ii)  $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$ ;
- (iii)  $f$  est un automorphisme de  $E$  si et seulement si  $\det(f) \neq 0$  et dans ce cas,  $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$ .
- (iv)  $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$

**Exercice 4.1**

Calculer le déterminant d'une symétrie, d'un projecteur.

## 5 Déterminant d'une matrice carrée

### 5.1 Définition et premières propriétés

**Définition 5.1**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle **déterminant** de  $A$ , noté  $\det(A)$ , le déterminant des vecteurs colonnes de  $A$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  ou, de manière équivalente, le déterminant de l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé à  $A$ . Il s'ensuit que si  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

**Notation 5.1**

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ . Le déterminant de  $A$  peut se noter

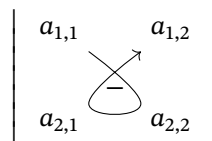
$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

**Proposition 5.1 Lien entre les différentes notions de déterminant**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

- (i) Soit  $\mathcal{F}$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . Alors  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det(\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}))$ .
- (ii) Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $\det(f) = \det(\text{mat}_{\mathcal{B}}(f))$ .

**Déterminant d'ordre 2 : règle du  $\gamma$** 

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$




**Déterminant d'ordre 3 : règle de Sarrus**

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = + \overbrace{a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}} + \overbrace{a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}} + \overbrace{a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}} - \overbrace{a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}} - \overbrace{a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}} - \overbrace{a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}}$$

**Exercice 5.1**

Montrer que le déterminant d'une matrice à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  est un entier.

**Proposition 5.2 Propriétés du déterminant d'une matrice carrée**

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Soient  $A, B \in \mathcal{L}(E)$ .

- (i)  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ;
- (ii)  $A$  est inversible si et seulement si  $\det(A) \neq 0$  et dans ce cas,  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ ;
- (iii)  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ ;



**ATTENTION !** Le déterminant n'est pas linéaire ! En général,  $\det(\lambda A + \mu B) \neq \lambda \det(A) + \mu \det(B)$ .

**Proposition 5.3 Déterminant d'une transposée**

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

Autrement dit,  $\det(A^T) = \det(A)$ .

**Exercice 5.2**

Montrer qu'une matrice antisymétrique de taille impaire est non inversible.

**Factorisation**

Le déterminant d'une matrice est linéaire en chaque colonne (par définition) ou ligne (puisque le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée). Ceci permet de factoriser des déterminants.

**Exemple 5.1**

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ 2\lambda & -1 & 3 \\ -\lambda & 2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2\lambda & -\lambda & 3\lambda \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

**5.2 Opérations sur les lignes et les colonnes d'une matrice**

L'objectif est de se ramener au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire dont on verra qu'il est simple à calculer.

**Proposition 5.4**

Notons  $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$  la famille des vecteurs colonnes d'une matrice  $A$ . Soient  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $i \neq j$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

- (i) L'opération  $C_i \leftrightarrow C_j$  multiplie le déterminant par  $-1$ .
- (ii) L'opération  $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$  laisse le déterminant invariant.
- (iii) L'opération  $C_i \leftarrow \alpha C_i$  multiplie le déterminant par  $\alpha$ .

De même, si on note  $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$  la famille des vecteurs lignes d'une matrice  $A$  :

- (i) L'opération  $L_i \leftrightarrow L_j$  multiplie le déterminant par  $-1$ .
- (ii) L'opération  $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$  laisse le déterminant invariant.
- (iii) L'opération  $L_i \leftarrow \alpha L_i$  multiplie le déterminant par  $\alpha$ .

**5.3 Développement par rapport à une ligne ou une colonne****Définition 5.2 Mineur, cofacteur**

Soient  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

- On appelle **mineur** de  $a_{i,j}$  le déterminant  $\Delta_{i,j}$  de la matrice obtenue en supprimant la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $A$ .
- On appelle **cofacteur** de  $a_{i,j}$  le scalaire  $(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$ .

**Proposition 5.5**

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- Développement par rapport à une ligne : soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  ;

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

- Développement par rapport à une colonne : soit  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  ;

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

**Exemple 5.2**

En développant par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

En développant par rapport à la deuxième ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

**REMARQUE.** Cette technique de calcul de déterminant révèle tout son intérêt lorsque l'on développe par rapport à une ligne ou une colonne qui comporte beaucoup de zéros.

**Corollaire 5.1 Déterminant d'une matrice triangulaire**

Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

**REMARQUE.** On retrouve le fait qu'une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.

**Méthode** Calcul du déterminant par pivot de Gauss et développement

On a tout intérêt à développer par rapport à une ligne ou une colonne comportant beaucoup de zéros. On utilise donc le pivot de Gauss pour faire apparaître des zéros.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & -2 & 10 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & -4 & -1 & -7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \\
 &= \begin{vmatrix} 8 & -2 & 10 \\ -2 & 5 & -6 \\ -4 & -1 & -7 \end{vmatrix} \text{ en développant par rapport à la première colonne} \\
 &= -2 \begin{vmatrix} -4 & -2 & 10 \\ 1 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \text{ en factorisant par } -2 \text{ la première colonne} \\
 &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -4 & -2 & 10 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\
 &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 0 & 18 & -14 \\ 0 & -11 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\
 &= 2 \begin{vmatrix} 18 & -14 \\ -11 & 5 \end{vmatrix} \text{ en développant par rapport à la première colonne} \\
 &= 2(18 \times 5 - 14 \times 11) = -128
 \end{aligned}$$

**Exercice 5.3**

Calcul de  $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$ .

**Proposition 5.6 Déterminants de Vandermonde**

Soit  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

**REMARQUE.** Il s'agit du déterminant de la matrice de  $\Phi: \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{cases}$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{K}_n[X]$  et  $\mathbb{K}^{n+1}$ . On retrouve ainsi le fait que  $\Phi$  est bijective si et seulement si les  $x_i$  sont distincts deux à deux (polynômes interpolateurs de Lagrange).

**Proposition 5.7 Déterminants par blocs**

Le déterminant d'une matrice **triangulaire par blocs** (et a fortiori **diagonale par blocs**) est le produit des déterminants des blocs diagonaux.



**ATTENTION !** En général  $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \det(A) \det(D) - \det(B) \det(C)$ .

**5.4 Comatrice****Définition 5.3 Comatrice**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle **comatrice** de  $A$  la matrice des cofacteurs de  $A$  i.e.  $\text{com}(A) = ((-1)^{i+j} \Delta_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ .

**Proposition 5.8 Formule de la comatrice**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\text{com}(A)^T A = A \text{com}(A)^T = \det(A) I_n$ .

En particulier, si  $A$  est inversible :  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}(A)^T$ .

**REMARQUE.** Cette formule est souvent inutilisable en pratique. Néanmoins pour  $n = 2$ , il convient de retenir la formule suivante.

Si  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  est inversible (i.e. si  $ad - bc \neq 0$ ) alors  $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ .

**Exercice 5.4**

On note  $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$  l'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  dont l'inverse est également dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ . Montrer que  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z}) \iff \det(A) = \pm 1$ .

**6 Systèmes linéaires (hors programme)****Proposition 6.1 Formules de Cramer**

Soient  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathbb{K}^n$ . Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $A_j$  la matrice obtenue en remplaçant la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $A$  par  $B$ .

L'unique solution  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  du système  $AX = B$  est donnée par :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$$



**ATTENTION !** Ce résultat a un intérêt purement théorique. Il est **hors de question** d'utiliser cette méthode pour résoudre en pratique un système linéaire dès que  $n \geq 4$ . En effet, cela nécessiterait le calcul de  $n + 1$  déterminants de taille  $n$ , ce qui est bien plus long que notre bon vieux pivot de Gauss !

Néanmoins, pour  $n = 2$ , on peut retenir les formules suivantes.

**Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues**

Le système  $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$  admet une unique solution si et seulement si  $ad - bc \neq 0$  et dans ce cas :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - fb}{ad - bc}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - bc}$$