

DEVOIR SURVEILLÉ N°07 : CORRIGÉ

SOLUTION 1.

1.

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_4 &= \{1, i, -1, -i\} \\ \mathbb{U}_6 &= \left\{1, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}, -1, e^{\frac{4i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{3}}\right\} \\ \mathbb{U}_4 \cap \mathbb{U}_6 &= \{-1, 1\} = \mathbb{U}_2 \\ G &= \left\{1, e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}, i, e^{\frac{5i\pi}{6}}, -1, e^{\frac{7i\pi}{6}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}, -i, e^{\frac{5i\pi}{3}}, e^{\frac{11i\pi}{6}}\right\} = \mathbb{U}_{12}\end{aligned}$$

Ainsi $\text{card } \mathbb{U}_4 = 4$, $\text{card } \mathbb{U}_6 = 6$, $\text{card } \mathbb{U}_4 \cap \mathbb{U}_6 = 2$ et $\text{card } G = 12$.

2. Soit $z \in \mathbb{U}_{m \wedge n}$. On a donc $z^{m \wedge n} = 1$. Puisque m et n sont des multiples de $m \wedge n$, on a également $z^m = 1$ et $z^n = 1$. Donc $z \in \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$. Ainsi $\mathbb{U}_{m \wedge n} \subset \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$.
3. Soit $z \in \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$. On a donc $z^m = 1$ et $z^n = 1$. D'après le théorème de Bezout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $mu + nv = m \wedge n$. Ainsi $z^{m \wedge n} = (z^m)^u (z^n)^v = 1$ et $z \in \mathbb{U}_{m \wedge n}$. Ainsi $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_{m \wedge n}$.
4. Soit $z \in G$. Il existe donc $z_1 \in \mathbb{U}_m$ et $z_2 \in \mathbb{U}_n$ tels que $z = z_1 z_2$. Dans ce cas, $z^{m \vee n} = z_1^{m \vee n} z_2^{m \vee n}$. Mais comme $m \vee n$ est un multiple de m , $z_1^{m \vee n} = 1$. De même, $m \vee n$ étant un multiple de n , $z_2^{m \vee n} = 1$. Ainsi $z^{m \vee n} = 1$ et $z \in \mathbb{U}_{m \vee n}$. Ainsi $G \subset \mathbb{U}_{m \vee n}$.
5. Soit $z \in \mathbb{U}_{m \vee n}$. Par le théorème de Bezout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $um + vn = m \wedge n$. Posons $m' = \frac{m}{m \wedge n}$ et $n' = \frac{n}{m \wedge n}$. Remarquons que m' et n' sont entiers. On peut alors poser $z_1 = z^{vn'}$ et $z_2 = z^{um'}$. On a bien $z = z_1 z_2$ puisque $um' + vn' = 1$. De plus, $\frac{mn}{m \wedge n} = m \vee n$ donc $z_1^m = z^{v(m \vee n)} = 1$ et $z_2^n = z^{u(m \vee n)} = 1$. Ainsi $z = z_1 z_2$ avec $z_1 \in \mathbb{U}_m$ et $z_2 \in \mathbb{U}_n$. Donc $z \in G$. Ainsi $\mathbb{U}_{m \vee n} \subset G$.

SOLUTION 2.

1.
 - a. Puisque $a > 1$ et $n > 0$, $a^n + 1 > 2$. Puisque $a^n + 1$ est premier et distinct de 2, il est impair. Ainsi a^n est pair et donc a est pair.
 - b. On a $a^k \equiv -1[a^k + 1]$, puis $(a^k)^m \equiv -1[a^k + 1]$. Puisque m est impair, $a^{km} \equiv -1[a^k + 1]$ i.e. $a^n + 1 \equiv 0[a^k + 1]$. Ainsi $a^k + 1$ divise $a^n + 1$.
Puisque $a^n + 1$ est premier, on en déduit que $a^k + 1 = 1$, ce qui est exclu car $a \neq 0$, ou $a^k + 1 = a^n + 1$. Puisque $a > 1$, on obtient $k = n$ et donc $m = 1$.
 - c. On déduit de la question précédente que n n'admet pas de diviseur premier impair. Le seul diviseur premier de n est donc 2. Le théorème de décomposition en facteurs premiers assure alors que n est une puissance de 2.
2.
 - a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$F_{n+1} - 1 = 2^{2^{n+1}} = (2^{2^n})^2 = (F_n - 1)^2$$
 - b. On raisonne par récurrence. On a bien $F_1 - 2 = 3 = F_0$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$. Alors, d'après la question précédente

$$F_{n+1} - 2 = (F_n - 1)^2 - 1 = F_n(F_n - 2) = F_n \prod_{k=0}^{n-1} F_k = \prod_{k=0}^n F_k$$

Par récurrence, $F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- c. On a $n \in \mathbb{N}^*$ et on peut appliquer la question précédente. Ainsi $F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k$ ou encore $F_n - \prod_{k=0}^{n-1} F_k = 2$. D'une part, $F_m \wedge F_n$ divise F_n et, d'autre part, $F_m \wedge F_n$ divise F_m donc $\prod_{k=0}^{n-1} F_k$ puisque $m < n$. Ainsi $F_m \wedge F_n$ divise 2. Par ailleurs, F_n est impair donc $F_m \wedge F_n = 1$.
3.
 - a. Puisque p divise F_n , $2^{2^n} \equiv -1[p]$. En élevant au carré, $2^{2^{n+1}} \equiv 1[p]$ donc $2^{n+1} \in A$.

- b. A est une partie non vide (d'après la question précédente) de \mathbb{N}^* : elle admet donc un minimum.
- c. Notons q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de 2^{n+1} par m . On a donc $2^{n+1} = qm + r$ avec $0 \leq r < m$. De plus, $q \in \mathbb{N}$ puisque 2^{n+1} et m sont positifs. Ainsi $2^{2^{n+1}} = (2^m)^q \cdot 2^r$. Or $m \in A$ donc $2^m \equiv 1[p]$ puis $(2^m)^q \equiv 1[p]$. Finalement $2^{2^{n+1}} \equiv 2^r[p]$. Or $2^{n+1} \in A$ donc $2^r \equiv 1[p]$. Si on avait $r > 0$, on aurait $r \in A$ et $r < m$, ce qui est impossible car $m = \min A$. Ainsi $r = 0$ de sorte que m divise 2^{n+1} .
- d. Il s'ensuit que m est une puissance de 2. Il existe donc un entier naturel $q \leq n+1$ tel que $m = 2^q$. Supposons $q \leq n$. Puisque $2^{2^q} \equiv 1[p]$, on obtient en élevant à la puissance 2^{n-q} , $2^{2^n} \equiv 1[p]$. Or p divise F_n donc $2^{2^n} \equiv -1[p]$. Ainsi $2 \equiv 0[p]$ i.e. p divise 2. Puisque p est premier, on aurait $p = 2$, ce qui est impossible car F_n est impair.
- e. Puisque F_n est impair, $p \neq 2$ et donc p est impair. En particulier, 2 est premier avec p . D'après le petit théorème de Fermat, $2^{p-1} \equiv 1[p]$ et $p-1 \in A$.
- f. En écrivant à nouveau la division euclidienne de $p-1$ par m , la minimalité de m montre que m divise $p-1$ i.e. $p \equiv 1[m]$. Puisque $m = 2^{n+1}$, $p \equiv 1[2^{n+1}]$.

SOLUTION 3.

1. On trouve sans peine que $F = \text{vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ donc F est bien un sous-espace vectoriel de E .
Par ailleurs,
- $$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$
- donc $G = \text{vect}((1, 0, 1))$. Ainsi G est bien un sous-espace vectoriel de E .
2. Une résolution de système montre que $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$. Par ailleurs, la question précédente montre que $\dim F = 2$ et $\dim G = 1$ puisque les familles $((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ et $((1, 0, 1))$ sont clairement libres. Ainsi $\dim F + \dim G = \dim E$ donc F et G sont bien supplémentaires dans E .
3. On remarque que $(1, 2, 3) = (0, 2, 2) + (1, 0, 1)$. On vérifie sans peine que $(0, 2, 2) \in F$ et que $(1, 0, 1) \in G$. Ainsi $(0, 2, 2)$ est le projeté de $(1, 2, 3)$ sur F parallèlement à G tandis que $(1, 0, 1)$ est le projeté de $(1, 2, 3)$ sur G parallèlement à F .

SOLUTION 4.

1. Les solutions de (\mathcal{F}) sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Les solutions de (\mathcal{G}) sont les fonctions $t \mapsto \lambda \cos t + \mu \sin t$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
2. Soit f une solution de (\mathcal{E}) . On raisonne par récurrence. f est manifestement de classe \mathcal{C}^0 sur \mathbb{R} . Supposons que f soit de classe \mathcal{C}^{4n} pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $f^{(4)} = f$ est de classe $\mathcal{C}^{4(n+1)}$ sur \mathbb{R} . Finalement f est de classe \mathcal{C}^{4n+4} autrement dit de classe $\mathcal{C}^{4(n+1)}$ sur \mathbb{R} . Par récurrence, f est de classe \mathcal{C}^{4n} sur \mathbb{R} pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
3. Soit $f \in F$. Alors f est de classe \mathcal{C}^∞ et $f'' = f$. Par conséquent $f^{(4)} = f'' = f$ donc $f \in E$. Ainsi $F \subset E$.
Soit $f \in G$. Alors f est de classe \mathcal{C}^∞ et $f'' = -f$. Par conséquent $f^{(4)} = -f'' = f$ donc $f \in E$. Ainsi $G \subset E$.
4. D'après les questions précédentes, $F \subset E \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \text{vect}(t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-t})$. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
De la même manière, $G \subset E \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $G = \text{vect}(\cos, \sin)$. Ainsi G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
5. Remarquons que
- $$(f'' + f)'' - (f'' + f) = f^{(4)} - f = 0$$
- donc $f'' + f \in F$.
De même,
- $$(f'' - f)'' + (f'' - f) = f^{(4)} - f = 0$$
- donc $f'' - f \in G$.
6. Tout d'abord, $F \subset E$ et $G \subset E$ donc $F + G \subset E$. Réciproquement, soit $f \in E$. Alors $f = \frac{1}{2}(f'' + f) - \frac{1}{2}(f'' - f) \in F + G$ d'après la question précédente. Ainsi $E = F + G$.
Enfin, soit $f \in F \cap G$. Alors $f = f'' = -f$ donc f est nulle. Ainsi $F \cap G = \{0\}$. Finalement, $E = F \oplus G$.

7. Puisque

$$E = F \oplus G = \text{vect}(t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-t}) \oplus \text{vect}(\cos, \sin) = \text{vect}(t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-t}, \cos, \sin)$$

les solutions de (\mathcal{E}) sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{-t} + \gamma \cos t + \delta \sin t$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$.

SOLUTION 5.

1. La suite nulle appartient clairement à E. Soient ensuite $(u, v) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\lambda u + \mu v)_{n+4} + (\lambda u + \mu v)_{n+2} + (\lambda u + \mu v)_n = \lambda(u_{n+4} + u_{n+2} + u_n) + \mu(v_{n+4} + v_{n+2} + v_n) = 0$$

Ainsi $\lambda u + \mu v \in E$.

2. Soit $u \in F$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} + u_{n+1} + u_n &= 0 \\ u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} &= 0 \\ u_{n+4} + u_{n+3} + u_{n+2} &= 0 \end{aligned}$$

En additionnant la première et la dernière égalité et en retranchant la seconde, on obtient

$$u_{n+4} + u_{n+2} + u_n = 0$$

Ainsi $u \in E$ puis $F \subset E$.

Soit $u \in G$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} + u_n &= 0 \\ u_{n+3} - u_{n+2} + u_{n+1} &= 0 \\ u_{n+4} - u_{n+3} + u_{n+2} &= 0 \end{aligned}$$

En additionnant les trois égalités, on obtient

$$u_{n+4} + u_{n+2} + u_n = 0$$

Ainsi $u \in E$ puis $G \subset E$.

3. Les racines de $X^2 + X + 1$ sont $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ donc

$$F = \text{vect}\left(\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}\right)$$

Puisque $F \subset E$, F est bien un sous-espace vectoriel de E et la famille $\left(\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ engendre F .

Les racines de $X^2 - X + 1$ sont $e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{i\pi}{3}}$ donc

$$G = \text{vect}\left(\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}\right)$$

Puisque $G \subset E$, G est bien un sous-espace vectoriel de E et la famille $\left(\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ engendre G .

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+2} + v_{n+1} + v_n = u_{n+4} - u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+2} + u_{n+1} + u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = u_{n+4} + u_{n+2} + u_n = 0$$

car $u \in E$. Ainsi $v \in F$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+2} - w_{n+1} + w_n = u_{n+4} + u_{n+3} + u_{n+2} - u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = u_{n+4} + u_{n+2} + u_n = 0$$

car $u \in E$. Ainsi $w \in F$.

5. Puisque F et G sont inclus dans E , $F + G \subset E$. Soit $u \in E$. Alors, en définissant v et w comme à la question précédente, $u = \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}v$. Comme $(v, w) \in F \times G$, $u \in F + G$. Ainsi $E \subset F + G$. Par double inclusion, $E = F + G$. Soit enfin $u \in F \cap G$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$$

$$u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0$$

En soustrayant ces deux égalités, on trouve $u_{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ i.e. $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Enfin, $u_0 = -u_1 - u_2 = 0$ donc u est nulle. Finalement $F \cap G = \{(0)_{n \in \mathbb{N}}\}$ puis $E = F \oplus G$.

6. D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &= \text{vect} \left(\left(\cos \left(\frac{2n\pi}{3} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\sin \left(\frac{2n\pi}{3} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \right) \oplus \text{vect} \left(\left(\cos \left(\frac{n\pi}{3} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\sin \left(\frac{n\pi}{3} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \right) \\ &= \text{vect} \left(\left(\cos \left(\frac{2n\pi}{3} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\sin \left(\frac{2n\pi}{3} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\cos \left(\frac{n\pi}{3} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\sin \left(\frac{n\pi}{3} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \right) \end{aligned}$$

Par conséquent, les éléments de E sont les suites de la forme

$$n \mapsto \alpha \cos \left(\frac{2n\pi}{3} \right) + \beta \sin \left(\frac{2n\pi}{3} \right) + \gamma \cos \left(\frac{n\pi}{3} \right) + \delta \sin \left(\frac{n\pi}{3} \right)$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$.