Semaine du 24/05 au 28/05

1 Cours

Déterminants

Groupe symétrique Permutation. Structure de groupe de $(S_n, \circ)$. Transposition et cycle. Décomposition d'une permutation en produits de transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Signature.

Applications multilinéaires Définition et exemples. Application multilinéaire symétrique, antisymétrique, alternée. Une application multilinéaire est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.

Déterminant d'une famille de vecteurs Le déterminant $\det_{\mathcal{B}}$ dans une base $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel E de dimension n est l'unique forme n-linéaire alternée sur E valant 1 en $\mathcal{B}$. Toute forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$. Formule de changement de base. Une famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs de E est une base si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

Déterminant d'un endomorphisme Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ est indépendant de $\mathcal{B}$. C'est le déterminant de f noté $\det(f)$. Propriétés : $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$; $f \in GL(E) \iff \det(f) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$; $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$ où $n = \dim E$.

Déterminant d'une matrice carrée Définition comme déterminant des vecteurs colonnes dans la base canonique. Le déterminant d'un endomorphisme est égal au déterminant de sa matrice dans une base. Le déterminant dans une base d'un famille de vecteurs est le déterminant de cette famille de vecteurs dans cette base. Propriétés : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$; $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$; si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Calcul de déterminants Effet sur le déterminant des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes. Déterminant d'une transposée. Déterminant d'une matrice triangulaire. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Définition de la comatrice. Formule de la comatrice.

2 Méthodes à maîtriser

- Décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints.
- Calculer la signature d'une permutation.
- Caractériser le fait qu'une famille de vecteurs est une base via le déterminant.
- Caractériser qu'un endomorphisme est un automorphisme via le déterminant.
- Calculer un déterminant par la méthode du pivot de Gauss.
- Développer un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- Établir des relations de récurrence pour calculer un déterminant.

3 Questions de cours

Banque CCP 04

1. Enoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a,b[$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et $]x_0, b[$. Démontrer que si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x_0} f'$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\implies$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse. On pourra considérer la fonction g définie par $g(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Banque CCP 07

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs. On suppose que (u_n) et (v_n) sont non nulles à partir d'un certain rang. Montrer que si $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Etudier la convergence de la série
$$\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i)\ln(n)\sin(1/n)}{\sqrt{n+3} - 1}$$

Banque CCP 59 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $f(P) = P - P'$ pour $P \in E$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières

(a) sans utiliser de matrice de f ;
(b) en utilisant une matrice de f.

2. Soit $\mathrm{Q} \in \mathrm{E}$. Déterminer $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ tel que $f(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$.
3. f est-il diagonalisable ?

Banque CCP 60 Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(\mathrm{M}) = \mathrm{AM}$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

Banque CCP 62 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 - f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})$
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\operatorname{Im}(f + \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

Banque CCP 63 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On note D_n le déterminant de A_n.

1. Démontrer que $\mathrm{D}_{n+2} = 2\mathrm{D}_{n+1} - \mathrm{D}_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n.

Banque CCP 64 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. Démontrer que : $\mathrm{E} = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f \implies \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \iff \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \implies \mathrm{E} = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Banque CCP 71 Soit p le projecteur sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$ parallèlement à la droite D d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{P} \oplus \mathrm{D}$.
2. Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.