

DEVOIR À LA MAISON N°01

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1

Partie I –

I.1 Soit $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

$$E(s)E(t) = \left(I + sA + \frac{s^2}{2}A^2\right)\left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2\right) = I + (s+t)A + \left(\frac{s^2}{2} + st + \frac{t^2}{2}\right)A^2 + \frac{st^2 + s^2t}{2}A^3 + \frac{s^2t^2}{2}A^4$$

Or $A^3 = 0$ et donc $A^4 = 0$. Finalement

$$E(s)E(t) = I + (s+t)A + \left(\frac{s^2}{2} + st + \frac{t^2}{2}\right)A^2 = I + (s+t)A + \frac{(s+t)^2}{2}A^2 = E(s+t)$$

I.2 Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors $E(0 \times t) = E(0) = I = E(t)^0$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $E(nt) = E(t)^n$. Alors, d'après la question **I.1**,

$$E((n+1)t) = E(nt + t) = E(nt)E(t) = E(t)^n E(t) = E(t)^{n+1}$$

Par récurrence, $E(nt) = E(t)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.3 Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après la question **I.1**, $E(t)E(-t) = E(0 \times t) = E(0) = I$. Ainsi $E(t)$ est inversible et $E(t)^{-1} = E(-t)$.

I.4 Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda I + \mu A + \nu A^2 = 0$. En multipliant cette égalité par A^2 , on obtient $\lambda A^2 + \mu A^3 + \nu A^4 = 0$ et donc $\lambda = 0$ puisque $A^2 \neq 0$ et $A^3 = A^4 = 0$. On a donc $\mu A + \nu A^2 = 0$. En multipliant cette égalité par A , on obtient $\mu A^2 + \nu A^3 = 0$ et donc $\mu = 0$ puisque $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$. Il reste $\nu A^2 = 0$ et donc $\nu = 0$ puisque $A^2 \neq 0$. Finalement, $\lambda = \mu = \nu = 0$, ce qui prouve la liberté de (I, A, A^2) .

I.5 Les questions **I.1** et **I.3** montrent que E est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(GL_3(\mathbb{R}), \times)$. Il nous suffit donc de déterminer le noyau de E . Or

$$t \in \text{Ker } E \iff E(t) = I \iff I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 = I \iff tA + \frac{t^2}{2}A^2 = 0 \iff t = 0$$

car (A, A^2) est libre comme sous-famille de la famille libre (I, A, A^2) . Ainsi $\text{Ker } E = \{0\}$ et donc E est injective.

REMARQUE. Si on ne sait pas ce qu'est un morphisme de groupes, on montre l'injectivité «comme d'habitude».

Soit $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $E(s) = E(t)$. On a donc $I + sA + \frac{s^2}{2}A^2 = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$. Comme la famille (I, A, A^2) est libre, on peut «identifier» les coefficients. Notamment $s = t$.

I.6 Remarquons que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$. On est donc bien dans les conditions de cette partie. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie II –

II.1 La matrice de $f - 2 \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ dans \mathcal{B}_0 est $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. On trouve alors $F = \text{Ker}(f - 2 \text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \text{vect}(u)$ avec $u = (3, 1)$.

La matrice de $f - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ dans \mathcal{B}_0 est $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. On trouve alors $G = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \text{vect}(v)$ avec $v = (2, 1)$.

F et G sont bien des droites vectorielles. Comme u et v sont non colinéaires, $\mathcal{B} = (u, v)$ est libre et est donc une base de \mathbb{R}^2 puisque $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. Ceci prouve que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

II.2 Puisque $u \in \text{Ker}(f - 2 \text{Id}_{\mathbb{R}^2})$, $f(u) = 2u$. De même, $v \in \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^2})$ donc $f(v) = v$. Par conséquent, la matrice de f dans la base \mathcal{B} est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II.3 En notant P la matrice de passage de la base \mathcal{B}_0 vers la base \mathcal{B} et D la matrice de f dans la base \mathcal{B} , on a bien $A = PDP^{-1}$. On a vu à la question **II.2** que $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Un calcul simple montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

II.4 Puisque le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les produits des coefficients diagonaux, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a clairement $PD^0P^{-1} = I = A^0$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors

$$A^{n+1} = AA^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Par récurrence, $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Un calcul donne alors, $A^n = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 & 6 - 6 \cdot 2^n \\ 2^n - 1 & 3 - 2^{n+1} \end{pmatrix}$.

Partie III –

III.1 Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction exponentielle est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur \mathbb{R} . On peut donc appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle entre 0 et t à l'ordre n et on obtient

$$\left| e^t - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \right| \leq \frac{M_n |t|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $M_n = \sup_{[0,t]} |\exp^{(n+1)}|$. Or $\exp^{(n+1)} = \exp$ et \exp est positive donc $M_n = \sup_{[0,t]} \exp$; en particulier, M_n ne dépend

pas de n . Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M_n |t|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ et le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^t - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} =$

0 ou encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} = e^t$.

REMARQUE. Rigoureusement, il faudrait écrire $[t, 0]$ au lieu de $[0, t]$ lorsque t est négatif.

III.2 A l'aide de la question **II.4**,

$$\begin{aligned} a_n(t) &= 3 \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \\ b_n(t) &= 6 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} - 6 \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} \\ c_n(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \\ d_n(t) &= 3 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} \end{aligned}$$

III.3 En utilisant **III.1**, on obtient

$$a(t) = 3e^{2t} - 2e^t \quad b(t) = 6e^t - 6e^{2t} \quad c(t) = e^{2t} - e^t \quad d(t) = 3e^t - 2e^{2t}$$

III.4 Il suffit de poser $Q = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

III.5 On a $Q^2 = Q$, $R^2 = R$ et $QR = RQ = 0$. q et r sont des projecteurs.

On a $\text{Ker } Q = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\text{Im } Q = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et donc $\text{Ker } q = \text{vect}(v) = G$ et $\text{Im } q = \text{vect}(u) = F$. q est donc le projecteur sur F parallèlement à G .

On a $\text{Ker } R = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\text{Im } R = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et donc $\text{Ker } r = \text{vect}(u) = F$ et $\text{Im } r = \text{vect}(v) = G$. r est donc le projecteur sur G parallèlement à F .

REMARQUE. On aurait aussi pu remarquer que $Q + R = I$ et donc que $q + r = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$, ce qui aurait permis de conclure directement quant à la nature de r .

III.6 Soit $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} E(s)E(t) &= (e^{2s}Q + e^sR)(e^{2t}Q + e^tR) \\ &= e^{2s+2t}Q^2 + e^{s+t}R^2 + e^{2s+t}QR + e^{s+2t}RQ \\ &= e^{2(s+t)}Q + e^{s+t}R = E(s+t) \end{aligned}$$

car $Q^2 = Q$, $R^2 = R$ et $QR = RQ = 0$.

On prouve alors comme à la question **I.1** que $E(t)^n = E(nt)$ pour tout $(t, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ et que $E(t)$ est inversible d'inverse $E(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

A nouveau E est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\text{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$. Soit $t \in \text{Ker } E$. On a donc $e^{2t}Q + e^tR = I$. En multipliant par Q , on obtient $e^{2t}Q = Q$ car $Q^2 = Q$ et $QR = 0$. Comme $Q \neq 0$, $e^{2t} = 1$ et $t = 0$. Ainsi $\text{Ker } E = \{0\}$ et E est injectif.

REMARQUE. A nouveau, si on ne sait pas ce qu'est un morphisme de groupes, on se donne $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $E(s) = E(t)$. On a donc $e^{2s}Q + e^sR = e^{2t}Q + e^tR$. En multipliant par Q , on obtient $e^{2s}Q = e^{2t}Q$ puis $e^{2s} = e^{2t}$ car $Q \neq 0$ et enfin $s = t$ par injectivité de l'exponentielle.

Problème 2

Partie I – Résolution d'une première équation différentielle

- I.1** Les solutions de l'équation caractéristique associée à (E_1) sont évidemment $2i$ et $-2i$. Les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont les fonctions $t \mapsto \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- I.2** Les solutions de l'équation caractéristique associée à (E_2) sont évidemment 2 et -2 . Les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- I.3** On a montré que l'ensemble des solutions de (E_2) était

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

On veut montrer que c'est également

$$\mathcal{S}' = \{t \mapsto \lambda \operatorname{ch}(2t) + \mu \operatorname{sh}(2t), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Soit donc $f \in \mathcal{S}$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En posant $A = \frac{\lambda + \mu}{2}$ et $B = \frac{\lambda - \mu}{2}$, $f(t) = A \operatorname{ch}(2t) + \mu \operatorname{sh}(2t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc $f \in \mathcal{S}'$.
Réciproquement, soit $f \in \mathcal{S}'$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(t) = \lambda \operatorname{ch}(2t) + \mu \operatorname{sh}(2t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En posant $A = \frac{\lambda + \mu}{2}$ et $B = \frac{\lambda - \mu}{2}$, $f(t) = A e^{2t} + B e^{-2t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc $f \in \mathcal{S}$.
Par double inclusion, $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$.

Partie II – Résolution d'une seconde équation différentielle par changement de variable

- II.4** \cos est deux fois dérivable sur $]0, \pi[$ à valeurs dans $] -1, 1[$ et f est deux fois dérivable sur $] -1, 1[$ donc $g = f \circ \arccos$ est deux fois dérivable sur $]0, \pi[$.
- II.5** Puisque g est deux fois dérivable sur $]0, \pi[$, on montre successivement que pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= g(\arccos(x)) \\ f'(x) &= -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} g'(\arccos(x)) \\ f''(x) &= -x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} g'(\arccos(x)) + (1-x^2)^{-1} g''(\arccos(x)) \end{aligned}$$

f est solution de (F) sur $] -1, 1[$ si et seulement si

$$\forall x \in] -1, 1[, (1-x^2)f''(x) - xf'(x) + 4f(x) = 0$$

Or d'après ce qui précède, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\begin{aligned} xf'(x) &= -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} g'(\arccos(x)) \\ (1-x^2)f''(x) &= -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} g'(\arccos(x)) + g''(\arccos(x)) \end{aligned}$$

Ainsi f est-elle solution de (F) sur $] -1, 1[$ si et seulement si

$$\forall x \in] -1, 1[, g''(\arccos(x)) + 4g(\arccos(x)) = 0$$

Puisque $\arccos(] -1, 1[) =]0, \pi[$, cette dernière condition équivaut à

$$\forall t \in]0, \pi[, g''(t) + 4g(t) = 0$$

Pour résumer, f est solution de (F) sur $] -1, 1[$ si et seulement si g est solution de (E_1) sur $]0, \pi[$.

II.6 On a déterminé à la question **I.1** les solutions de (E_1) sur \mathbb{R} et donc a fortiori sur $]0, \pi[$. On en déduit que les solutions de (F) sur $] -1, 1[$ sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \cos(2 \arccos(x)) + \mu \sin(2 \arccos(x))$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Or pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\cos(2 \arccos(x)) = 2 \cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$$

$$\sin(2 \arccos(x)) = 2 \cos(\arccos(x)) \sin(\arccos(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

Les solutions de (F) sur $] -1, 1[$ sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x\sqrt{1-x^2}$$

Partie III – La fonction argument cosinus hyperbolique

III.7 La fonction ch est strictement croissante et continue sur \mathbb{R}_+ . De plus, $\text{ch}(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch} = +\infty$ donc ch induit une bijection de \mathbb{R}_+ sur $[1, +\infty[$.

III.8 Soit $x \in [1, +\infty[$. Posons $\theta = \text{argch}(x)$. On sait que $\text{sh}^2(\theta) = \text{ch}^2(\theta) - 1 = x^2 - 1$. De plus, $\theta \in \mathbb{R}_+$ par définition de argch . Ainsi $\text{sh} \theta \geq 0$. Finalement, $\text{sh}(\text{argch}(x)) = \text{sh}(\theta) = \sqrt{x^2 - 1}$.

III.9 La fonction ch est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et sa dérivée sh ne s'annule pas sur cet intervalle. En tant que bijection réciproque de la bijection induite par ch de \mathbb{R}_+ sur $[1, +\infty[$, argch est dérivable sur $\text{ch}(\mathbb{R}_+^*) =]1, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\text{argch}'(x) = \frac{1}{\text{ch}'(\text{argch}(x))} = \frac{1}{\text{sh}(\text{argch}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

III.10 C'est du calcul bête et méchant. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$2 \text{ch}^2(\theta) - 1 = 2 \left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \right)^2 - 1 = \frac{e^{2\theta} + e^{-2\theta} + 2}{2} - 1 = \frac{e^{2\theta} + e^{-2\theta}}{2} = \text{ch}(2\theta)$$

$$2 \text{ch}(\theta) \text{sh}(\theta) = 2 \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \cdot \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} = \frac{(e^\theta)^2 - (e^{-\theta})^2}{2} = \frac{e^{2\theta} - e^{-2\theta}}{2} = \text{sh}(2\theta)$$

III.11 Par définition de la fonction argch , $\text{ch}(\text{argch } x) = x$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. Par ailleurs, on a vu que $\text{sh}(\text{argch}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. On en déduit que pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\text{ch}(2 \text{argch}(x)) = 2 \text{ch}^2(\text{argch}(x)) - 1 = 2x^2 - 1$$

$$\text{sh}(2 \text{argch}(x)) = 2 \text{ch}(\text{argch}(x)) \text{sh}(\text{argch}(x)) = 2x\sqrt{x^2 - 1}$$

Partie IV – Un problème de raccord

IV.12 Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$. Alors $g = f \circ \text{ch}$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et, pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a successivement

$$f(x) = g(\text{argch}(x))$$

$$f'(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} g'(\text{argch}(x))$$

$$f''(x) = -x(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} g'(\text{argch}(x)) + (x^2 - 1)^{-1} g''(\text{argch}(x))$$

Or f est solution de (F) sur $]1, +\infty[$ si et seulement si

$$\forall x \in]1, +\infty[, (1 - x^2)f''(x) - xf'(x) + 4f(x) = 0$$

Or d'après ce qui précède, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$xf'(x) = x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}g'(\operatorname{argch}(x))$$

$$(1 - x^2)f''(x) = -(x^2 - 1)f''(x) = x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}g'(\operatorname{argch}(x)) - g''(\operatorname{argch}(x))$$

Ainsi f est-elle solution de (F) sur $]1, +\infty[$ si et seulement si

$$\forall x \in]1, +\infty[, -g''(\operatorname{argch}(x)) + 4g(\operatorname{argch}(x)) = 0$$

Puisque $\operatorname{argch}(]1, +\infty[) = \mathbb{R}_+^*$, cette dernière condition équivaut à

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, g''(t) - 4g(t) = 0$$

Pour résumer, f est solution de (F) sur $]1, +\infty[$ si et seulement si g est solution de (E₂) sur \mathbb{R}_+^* .

La question **I.3** montre alors que les solutions de l'équation différentielle de (F) sur $]1, +\infty[$ sont les fonctions

$$x \in]1, +\infty[\mapsto \lambda \operatorname{ch}(2 \operatorname{argch}(x)) + \mu \operatorname{sh}(2 \operatorname{argch}(x))$$

ou encore

$$x \in]1, +\infty[\mapsto \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x \sqrt{x^2 - 1}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

IV.13 Soit f une fonction deux fois dérivable sur $] -\infty, -1[$. Alors $g : x \mapsto f(-x)$ est deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$.

De plus, pour tout $x \in]1, +\infty[$, $g'(x) = -f'(-x)$ et $g''(x) = f''(-x)$.

f est solution de (F) sur $] -\infty, -1[$ si et seulement si

$$\forall x \in] -\infty, -1[, (1 - x^2)f''(x) - xf'(x) + 4f(x) = 0$$

Ceci équivaut à

$$\forall x \in]1, \infty[, (1 - (-x)^2)f''(-x) - (-x)f'(-x) + 4f(-x) = 0$$

ou encore à

$$\forall x \in]1, \infty[, (1 - x^2)f''(-x) + xf'(-x) + 4f(-x) = 0$$

et finalement à

$$\forall x \in]1, \infty[, (1 - x^2)g''(x) - xg'(x) + 4g(x) = 0$$

Finalement f est solution de (F) sur $] -\infty, -1[$ si et seulement si g est solution de (E₂) sur $]1, +\infty[$. On en déduit que les solutions de (F) sur $] -\infty, -1[$ sont les fonctions

$$x \in]1, +\infty[\mapsto \lambda(2(-x)^2 - 1) + 2\mu(-x)\sqrt{(-x)^2 - 1}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On peut également affirmer que ce sont les fonctions

$$x \in]1, +\infty[\mapsto \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x \sqrt{x^2 - 1}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ puisque $-\mu$ décrit \mathbb{R} lorsque μ décrit \mathbb{R} .

IV.14 Soit f une solution de (F) sur \mathbb{R} . Remarquons qu'alors f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} . En particulier, f et f' sont continues sur \mathbb{R} .

D'après, les questions précédentes il existe $(\lambda_-, \mu_-, \lambda_0, \mu_0, \lambda_+, \mu_+) \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$\forall x \in] -\infty, -1[, f(x) = \lambda_-(2x^2 - 1) + 2\mu_-x\sqrt{x^2 - 1}$$

$$\forall x \in] -1, 1[, f(x) = \lambda_0(2x^2 - 1) + 2\mu_0x\sqrt{1 - x^2}$$

$$\forall x \in]1, \infty[, f(x) = \lambda_+(2x^2 - 1) + 2\mu_+x\sqrt{x^2 - 1}$$

Par continuité de f en -1 , $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ et donc $\lambda_- = \lambda_0$. De même, par continuité de f en 1 , $\lambda_0 = \lambda_+$. Finalement, $\lambda_- = \lambda_0 = \lambda_+$.

$$\forall x \in] -\infty, -1[, f'(x) = 4\lambda_-x + 2\mu_- \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\forall x \in] -1, 1[, f'(x) = 4\lambda_0x + 2\mu_0x \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\forall x \in]1, \infty[, f'(x) = 4\lambda_+x + 2\mu_+ \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Par continuité de f' en -1 et 1 , on obtient $\mu_- = \mu_0 = \mu_+ = 0$ (sinon f' admettrait des limites infinies à gauche ou à droite en -1 ou 1).

On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda(2x^2 - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, toute fonction $x \mapsto \lambda(2x^2 - 1)$ est évidemment solution de (F) sur \mathbb{R} .

En conclusion, les solutions de (F) sur \mathbb{R} sont exactement les fonctions $x \mapsto \lambda(2x^2 - 1)$.