Devoir surveillé n°01

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

Partie I – Définition et étude de la fonction dilogarithme

1. f est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0,1[$. Il suffit donc de prouver que f et f' admettent des limites finies en 0.
Comme $\ln(1-t) \underset{t\to 0}{\sim} -t$, $\lim_0 f = 1$.
Un calcul facile donne

$$\forall t \in]-\infty, 0[\cup]0,1[,\ f'(t) = \frac{1}{t(1-t)} + \frac{\ln(1-t)}{t^2}$$

Or

$$\frac{1}{1-t} \underset{t\to 0}{=} 1 + t + o(t)$$

et

$$\ln(1-t) \underset{t\to 0}{=} -t - \frac{t^2}{2} + o(t)$$

donc

$$f'(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{2} + o(1)$$

ou encore $\lim_0 f' = \frac{1}{2}$.
On peut donc prolonger f en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.

2. L est continue sur $]-\infty, 1[$ en tant que primitive de f sur cet intervalle. Il suffit donc de montrer que L admet une limite finie en 1, autrement dit que l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Or $f(t) \underset{t\to 1}{\sim} -\ln(1-t)$. Par croissances comparées, $f(t) \underset{t\to 1}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ donc f est intégrable sur $[0,1[$ par comparaison à une intégrale de Riemann convergente. Par conséquent, $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et L admet bien une limite finie en 1 : L est donc prolongeable par continuité en 1.

3. D'après le théorème fondamental de l'analyse, L est une primitive de f sur $]-\infty, 1[$. L est donc dérivable sur cet intervalle et $\mathrm{L}' = f$.

4. Pour $t \in]0,1[$, $\ln(1-t) < 0$ donc $f(t) > 0$. Pour $t \in]-\infty, 0[$, $\ln(1-t) > 0$ donc $f(t) > 0$. De plus, $f(0) = 1 > 0$. Ainsi $\mathrm{L}' = f$ est strictement positive sur $]-\infty, 1[$: L est donc strictement croissante sur $]-\infty, 1[$.

5. Puisque $\lim_{t\to-\infty} \ln(1-t) = +\infty$, $\frac{1}{t} \underset{t\to-\infty}{=} o(f(t))$. Or $\int_{-1}^{-\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge et f est positive. On en déduit donc que $\int_0^{-\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. Par conséquent, $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{F}(x) = -\infty$.

Partie II – Relations fonctionnelles et valeurs particulières

6. **a.** On effectue le changement de variable $u = -\ln(1-t)$ i.e. $t = 1 - e^{-u}$. $u \mapsto 1 - e^{-u}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0,1[$. De plus, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = e^{-u}$ donc

$$\mathrm{L}(1) = \int_0^1 \frac{-\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{u}{1-e^{-u}} \cdot e^{-u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1}\,\mathrm{d}u$$

b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par croissances comparées, $xe^{-kx} \underset{x\to+\infty}{=} o(1/x^2)$ donc l'intégrale définissant I_k converge.
Par intégration par parties,

$$\mathrm{I}_k = -\frac{1}{k}\left[xe^{-kx}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} e^{-kx}\,\mathrm{d}x$$

L'intégration par parties est légitime car $\lim_{x\to+\infty} xe^{-kx} = 0$ donc le crochet converge. De plus,

$$\mathrm{I}_k = \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} e^{-kx}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{k^2}\left[e^{-kx}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{k^2}$$

c. Par convexité de exp, $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ou encore $x \leq e^x - 1$. Puisque $e^x - 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq \frac{x}{e^x-1} \leq 1$.

d. Comme somme (finie) linéaire d'intégrales convergentes

$$\sum_{k=1}^n \mathrm{I}_k = \int_0^{+\infty} x\sum_{k=1}^n e^{-kx}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}(1-e^{-nx})}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x(1-e^{-nx})}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$$

Par conséquent,

$$\mathrm{L}(1) - \sum_{k=1}^n \mathrm{I}_k = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$$

D'après la question précédente

$$0 \leq \mathrm{L}(1) - \sum_{k=1}^n \mathrm{I}_k \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}$$

e. En passant à la limite dans la question précédente,

$$\mathrm{L}(1) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \mathrm{I}_k = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

7. a. Posons $\varphi : x \mapsto \mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) - \frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2)$. Comme L est dérivable sur $]-1,1[$, φ l'est également et

$$\forall x \in]-1,1[,\ \varphi'(x) = \mathrm{L}'(x) - \mathrm{L}'(-x) - x\mathrm{L}'(x^2) = f(x) - f(-x) - 2xf(x^2)$$

Notamment, $\varphi'(0) = 0$ et pour tout $x \in]-1,0[\cup]0,1[$,

$$\varphi'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} + x\cdot\frac{\ln(1-x^2)}{x^2} = \frac{-\ln((1-x)(1+x)) + \ln(1-x^2)}{x} = 0$$

Ainsi φ' est nulle sur $]-1,1[$ et donc φ est constante sur $]-1,1[$. Par ailleurs, L est continue sur $[-1,1]$ donc φ l'est également. Par continuité, φ est constante sur $[-1,1]$. Or $\varphi(0) = 0$ car $\mathrm{L}(0) = 0$ donc φ est nulle sur $[-1,1]$. Par conséquent,

$$\forall x \in [-1,1],\ \mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) = \frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2)$$

b. En prenant $x = 1$, on obtient

$$\mathrm{L}(1) + \mathrm{L}(-1) = \frac{1}{2}\mathrm{L}(1)$$

donc

$$\mathrm{L}(-1) = -\frac{1}{2}\mathrm{L}(1) = -\frac{\pi^2}{12}$$

8. a. On raisonne comme à la question précédente en posant $\psi : x \mapsto \mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(1-x) + \ln(x)\ln(1-x)$. A nouveau, ψ est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[,\ \psi'(x) = \mathrm{L}'(x) - \mathrm{L}'(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = f(x) - f(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = 0$$

Ainsi ψ est constante sur $]0,1[$. On note C cette constante.
Par continuité de L en 0 et 1,

$$\lim_{x\to0^+}\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(1-x) = \mathrm{L}(0) + \mathrm{L}(1) = \frac{\pi^2}{6}$$

De plus, $\ln(x)\ln(1-x) \underset{x\to0^+}{\sim} -x\ln(x)$ donc $\lim_{x\to0^+}\ln(x)\ln(1-x) = 0$ par croissances comparées. On en déduit que $\lim_0 \psi = \frac{\pi^2}{6} = \mathrm{C}$.

b. En prenant $x = \frac{1}{2}$,

$$2\mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

donc

$$\mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\ln^2(2)$$

Partie III – Une équation différentielle

On considère les équations différentielles

$$\mathcal{E} :\ xy'' + y' = \frac{1}{1-x}$$

et

$$\mathcal{E}' :\ xz' + z = \frac{1}{1-x}$$

9. Les solutions sur $]0,1[$ de l'équation homogène $xz' + z = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On vérifie que f est une solution particulière de $\mathcal{E}'$ sur $]0,1[$. Les solutions de $\mathcal{E}'$ sur $]0,1[$ sont donc les fonctions $x \mapsto f(x) + \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
On montre de la même manière que les solutions de $\mathcal{E}'$ sur $]-\infty,1[$ sont de cette forme.

10. Via le changement de variable $z = y'$, on montre que les solutions de $\mathcal{E}$ sur $]0,1[$ sont les primitives des solutions de $\mathcal{E}'$ sur cet intervalle, c'est-à-dire les fonctions de la forme

$$x \mapsto \mathrm{L}(x) + \lambda\ln(x) + \mu \qquad \text{avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

De la même manière les solutions de $\mathcal{E}$ sur $]-\infty,1[$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \mathrm{L}(x) + \lambda\ln(-x) + \mu \qquad \text{avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

11. Soit g une éventuelle solution de $\mathcal{E}$ sur $]-\infty,1[$. Il existe donc $(\lambda_1,\mu_1,\lambda_2,\mu_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in]0,1[,\ g(x) = \mathrm{L}(x) + \lambda_1\ln(x) + \mu_1$$
$$\forall x \in]-\infty,1[,\ g(x) = \mathrm{L}(x) + \lambda_2\ln(x) + \mu_2$$

Comme g doit être deux fois dérivable en 0 et a fortiori continue en 0, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Le même argument de continuité montre alors que $\mu_1 = \mu_2$. Il existe donc $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]-\infty,1[,\ g(x) = \mathrm{L}(x) + \mu$$

Réciproquement, soit $\mu \in \mathbb{R}$. Ce qui précède montre que $g :\ x \mapsto \mathrm{L}(x) + \mu$ est bien solution de $\mathcal{E}$ sur $]-\infty,1[$ et sur $]0,1[$. On a donc

$$\forall x \in]-\infty,0[\cup]0,1[,\ xg''(x) + g'(x) = \frac{1}{1-x}$$

Mais L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ et $\mathrm{L}' = f$. Or f est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ donc L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty,1[$. Notamment, g'' et g' sont continues en 0 de même que $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ donc

$$\forall x \in]-\infty,1[,\ xg''(x) + g'(x) = \frac{1}{1-x}$$

et g est bien solution de $\mathcal{E}$ sur $]-\infty,1[$.
Pour récapituler, les solutions de $\mathcal{E}$ sur $]-\infty,1[$ sont exactement les fonctions $\mathrm{L} + \mu$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Problème 2

Remarquons déjà que dans tout le problème, $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. **a.** **Etude en $+\infty$.** Clairement, $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^2)$ donc $f(2t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^2)$ puis $\frac{f(t)-f(2t)}{t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^3)$. Puisque $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$ l'est également.

Etude en 0^+. Puisque $\frac{1}{1+u} \underset{u\to0}{=} 1+\mathcal{O}(u)$, $f(t) \underset{t\to0}{=} 1+\mathcal{O}(t^2)$ puis $f(2t) \underset{t\to0}{=} 1+\mathcal{O}(t^2)$ et enfin $\frac{f(t)-f(2t)}{t} \underset{t\to0}{=} \mathcal{O}(t)$. Comme $t \mapsto t$ est intégrable sur $]0,1]$, $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$ l'est également.

Finalement, $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: l'intégrale $\mathrm{I}(f)$ converge (absolument).

b. Décomposition en éléments simples :

$$\frac{f(t)-f(2t)}{t} = \frac{1}{t(t^2+1)} - \frac{1}{t(4t^2+1)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t} + \frac{4t}{4t^2+1} = \frac{4t}{4t^2+1} - \frac{t}{t^2+1}$$

Une primitive de $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$ est donc

$$t \mapsto \frac{1}{2}\ln(4t^2+1) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4t^2+1}{t^2+1}\right)$$

Ainsi

$$\mathrm{I}(f) = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{4t^2+1}{t^2+1}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln 4 = \ln 2$$

2.

$$\frac{f(t)-f(2t)}{t} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{2}{4t^2+1}$$

Ainsi

$$\mathrm{I}(f) = [\arctan(t) - \arctan(2t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

3. Remarquons que

$$\frac{f(t)-f(2t)}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{t^2}{t^2+1} - \frac{4t^2}{4t^2+1}\right) = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{t^2+1} - 1 + \frac{1}{4t^2+1}\right) = -\left(\frac{1}{t(t^2+1)} - \frac{1}{t(4t^2+1)}\right)$$

On se ramène donc à la question **1** : $\mathrm{I}(f)$ converge et $\mathrm{I}(f) = -\ln 2$.

4. Lorsque $n \geq 3$,

$$\frac{f(t)-f(2t)}{t} = \frac{t^{n-1}}{1+t^2} - \frac{2^n t^{n-1}}{1+4t^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4-2^n}{4t^{n-3}}$$

car $4-2^n \neq 0$. Or $n-3 \geq 0$ donc $t \mapsto t^{n-3}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. L'intégrale $\mathrm{I}(f)$ diverge.

Partie II –

5. **Etude en $+\infty$.** Par croissances comparées, $\frac{f(t)-f(2t)}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$. Par conséquent, $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Etude en 0^+. On sait que $e^{-t} \underset{t\to0}{=} 1-t+o(t)$ et $e^{-2t} = 1-2t+o(t)$ donc $\frac{f(t)-f(2t)}{t} = 1+o(1)$ i.e. $\lim_{t\to0} \frac{f(t)-f(2t)}{t}$. Ainsi f est intégrable sur $]0,1]$.

Finalement, $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: l'intégrale $\mathrm{I}(f)$ converge (absolument).

6.

$$
\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t && \text{par linéarité de l'intégrale}\\
&= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t && \text{par linéarité de l'intégrale}\\
&= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}t - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u && \text{par le changement de variable } u = 2t\\
&= \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u && \text{via la relation de Chasles}\\
&\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}-1}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{u}
\end{aligned}
$$

7. h est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il suffit de constater que $\lim_0 h = -1$ pour affimer que h est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

8. On note H une primitive du prolongement continu de h sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$
\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(t)-f(2t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}-1}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \mathrm{H}(2\varepsilon) - \mathrm{H}(\varepsilon) + \ln 2
$$

Comme H est continue (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$,

$$
\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{H}(2\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{H}(\varepsilon) = \mathrm{H}(0)
$$

Par conséquent,

$$
\mathrm{I}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(t)-f(2t)}{t}\,\mathrm{d}t = \ln 2
$$

9. On effectue le changement de variable $t = -\ln u$. Celui-ci est valide car $-\ln$ est une bijection strcitement décroissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$. Ainsi

$$
\mathrm{I} = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{0} \frac{u-u^2}{-\ln u}\cdot\frac{-\,\mathrm{d}u}{u} = \int_{0}^{1} \frac{u-1}{\ln u}\,\mathrm{d}u
$$

Ainsi

$$
\mathrm{J} = \mathrm{I}(f) = \ln 2
$$