

Dérivées partielles

Exercice 1

CCINP (ou CCP) PSI 2019

Soit la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}$.

1. f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
2. f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 ?
3. Étudier l'existence de dérivées partielles secondes de f en $(0, 0)$.

Exercice 2

Soit f une application de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . Calculer les dérivées ou dérivées partielles des fonctions suivantes en fonction des dérivées partielles de f .

1. $g(x, y) = f(y, x)$
2. $g(x) = f(x, x)$
3. $g(x, y) = f(y, f(x, x))$
4. $g(x) = f(x, f(x, x))$

Exercice 3

Etudier l'existence de dérivées partielles pour les fonctions suivantes.

1. $f(x, y) = \max(|x|, |y|)$.
2. $f(x, y) = |x| + |y|$.
3. $\begin{cases} f(x, y) = \frac{\sin x^2 + \sin y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$.

Exercice 4

On définit une fonction f sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. f est-elle de classe \mathcal{C}^0 ? \mathcal{C}^1 ? \mathcal{C}^2 ?

Exercice 5

Laplacien en polaires

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . On appelle *laplacien* de f l'application $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Donner une expression du laplacien en coordonnées polaires.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et g l'application définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = f(e^t \cos t, \ln(1 + t^2))$$

Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f .

Exercice 7

Une équation fonctionnelle

Le but de l'exercice est de déterminer les fonctions f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} solutions de l'équation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y) \quad (*)$$

1. Déterminer les solutions constantes de $(*)$.
2. Soit f une solution non constamment nulle de $(*)$.
 - a. Montrer que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
 - b. Montrer que f est une fonction paire.
3. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On considère la fonction F définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, F(x, y) = f(x + y) + f(x - y)$$
 - a. Justifier que F est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .
 - b. Calculer les dérivées partielles secondes de F .
 - c. On suppose que f est une solution non constamment nulle de $(*)$. Des expressions de $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, déduire que f vérifie une équation différentielle de la forme $z'' - \alpha z = 0$.
 - d. Donner les solutions de l'équation différentielle $z'' - \alpha z = 0$ suivant les valeurs de α .

4. Déterminer toutes les solutions de $(*)$.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$\begin{cases} f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}.$$

1. Etudier la continuité de f .
2.
 - a. Prouver l'existence de dérivées partielles premières de f sur \mathbb{R}^2 .
 - b. Etudier la continuité des dérivées partielles premières de f .
 - c. La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 9**Centrale-Supélec MP 2016**

On note $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \Delta & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \frac{\sin x - \sin y}{x - y} \end{cases}.$

1. Montrer que f est \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$.
2. Montrer que f est prolongeable en une application \tilde{f} continue sur \mathbb{R}^2 .
3. Montrer que \tilde{f} admet des dérivées partielles sur \mathbb{R}^2 .
4. Montrer que \tilde{f} est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .
5. Montrer que \tilde{f} est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 . On pourra écrire $\tilde{f}(x, y)$ comme une intégrale entre 0 et 1.
6. Justifier l'existence pour \tilde{f} d'un minimum et d'un maximum sur \mathbb{R}^2 et les déterminer.

Exercice 10 ★★★★★**Mines-Ponts MP 2016**

On se donne $R \in \mathbb{R}_+^*$ et on définit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\}$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 telle que $\Delta f = 0$. On définit

$$F : \begin{cases}]-R, R[\times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (r, \theta) & \longmapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}$$

1. Trouver une relation entre les dérivées partielles de F et f .
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On définit

$$\varphi_n : \begin{cases}]-R, R[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ r & \longmapsto \int_0^{2\pi} F(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \end{cases}$$

Trouver une équation différentielle vérifiée par φ_n et la résoudre. En déduire φ_n .

Différentiation**Exercice 11****Banque Mines-Ponts MP 2019**

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et E^* son dual.

On définit

$$D = \{\varphi \in E^*, \forall (f, g) \in E^2, \varphi(fg) = f(0)\varphi(g) + g(0)\varphi(f)\}$$

1. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de E^* non réduit à 0.
2. Montrer que l'application $a \in \mathbb{R}^n \mapsto (f \in E \mapsto df(0) \cdot a)$ est injective.
3. Donner une base de D .

Indication : On pourra utiliser la relation fondamentale de l'analyse pour $t \in \mathbb{R} \mapsto f(tx)$.

Exercice 12**Banque Mines-Ponts MP 2018**

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable, telle que $df(x)$ soit injective pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et vérifiant $\|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$, où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n .

Le but de cet exercice est de montrer que f est surjective. On pose pour cela $g: x \rightarrow \|f(x) - a\|^2$ où $a \in \mathbb{R}^n$.

1. Justifier que g est différentiable sur \mathbb{R}^n et calculer $dg(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que g admet un minimum sur \mathbb{R}^n .
3. Conclure.

Exercice 13 ★★★

Soit $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable telle que pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, $A(s)$ et $A(t)$ commutent.

1. Justifier que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \exp(M)$ est différentiable en 0 et calculer sa différentielle en 0.
2. En déduire que $\varphi: t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(A(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = A'(t) \exp(A(t)) = \exp(A(t)) A'(t)$$

Exercice 14 ★★

Montrer que $f: M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^2$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en tout point de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Gradient**Exercice 15 ★★**

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E et $u \in E$. On pose

$$\forall x \in E, \varphi(x) = \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle + \langle u, x \rangle$$

1. Justifier que φ est différentiable sur E .
2. Calculer le gradient de φ en tout point de E .

Exercice 16 ★★★

Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E . Pour $x \in E \setminus \{0_E\}$, on pose

$$\varphi(x) = \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2}.$$

On n'utilisera pas le théorème spectral dans tout cet exercice.

1. Calculer le gradient de φ en tout point de $E \setminus \{0_E\}$.
2. Montrer que $x \in E \setminus \{0_E\}$ est un vecteur propre de f si et seulement si $\nabla \varphi(x) = 0$.
3. Montrer que φ admet un maximum sur $E \setminus \{0_E\}$.
4. En déduire que f admet un vecteur propre.

Jacobienne**Exercice 17 ★★**

Soit la fonction $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$g(x, y) = \left(x + 2 \sin y, y + \frac{1}{3} \sin x \right)$$

1. Justifier que g est différentiable en tout point et écrire la matrice jacobienne de g en un point (x, y) . En déduire que dg est à valeurs dans $GL(\mathbb{R}^2)$.
2. Montrer que g est une bijection.
3. On admet que g^{-1} est différentiable. Déterminer la matrice jacobienne de g^{-1} au point $(0, 0)$.

Exercice 18 ★

Soit

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \sin(x^2 - y^2) \end{cases} \quad \text{et} \quad g: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x + y, x - y) \end{cases}$$

- Justifier que les fonctions f et g sont différentiables en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et écrire les matrices jacobiniennes de ces deux fonctions au point (x, y) .
- Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image du vecteur $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $d(f \circ g)(x, y)$
 - en calculant $f \circ g$;
 - en utilisant le produit de deux matrices jacobiniennes.

Espace tangent**Exercice 19 ★★**

- Montrer que si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (espace des matrices antisymétriques), alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} \in O_n(\mathbb{R})$.
- Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $O_n(\mathbb{R})$ au point I_n .

Exercice 20 ★★

Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^3 + 3xy + z = 0\}$ et $u = (0, -1, 1)$. Déterminer l'ensemble des points de S en lesquels le vecteur u est tangent à S .

Exercice 21

Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 8yz\}$. Déterminer les points de S en lesquels le plan tangent contient la droite D d'équations
$$\begin{cases} y = 1 \\ x + 4z + 2 = 0 \end{cases}$$

Optimisation**Exercice 22**

Déterminer les extrema locaux des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} suivantes :

- $f(x, y) = x^3 + y^3$.
- $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
- $f(x, y) = 2y^4 - 3xy^2 + x^2$.
- $f(x, y) = x^3 - y^2 - x$.

Exercice 23

$$\text{Soit } f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto x^2(1 + y)^3 + y^4 \end{cases}$$

- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .
- Montrer que la fonction f admet un unique point critique sur \mathbb{R}^2 .
- Montrer que f admet un minimum local mais pas global en ce point critique.

Exercice 24 ★★**CCINP (ou CCP) MP 2018**

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un endomorphisme symétrique f de E dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

- Montrer que : $\forall h \in E \setminus \{0_E\}, (f(h) | h) > 0$.
- Soient $u \in E$ fixé et $g: x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) | x) - (u | x)$.
 - Montrer que g est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point de E .
 - Montrer qu'il existe un unique vecteur $z_0 \in E$ point critique de g .
 - Montrer que g admet un minimum global en z_0 .

Exercice 25 ★★**CCP PSI 2015**

On considère les ensembles

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$$

et

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < y < 1\}$$

ainsi que la fonction F définie sur K par

$$F(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y(1-x) & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. La fonction F admet-elle des extrema locaux sur T ?
2. La fonction F admet-elle un minimum sur K ? un maximum sur K . Si oui, déterminer leurs valeurs.

Exercice 26 ★★

Déterminer le minimum et le maximum éventuels de $f : (x, y) \mapsto \sin(x) \sin(y) \sin(x+y)$ sur $K = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$.

Exercice 27 ★★★**Mines-Ponts MP 2018**

Soit E un espace euclidien, que l'on munit de sa norme euclidienne, et $f : E \rightarrow E$ différentiable, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $df(x)$ soit injective, et vérifiant $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

Le but de cet exercice est de montrer que f est surjective. On pose pour cela $g : x \in E \mapsto \|f(x) - a\|^2$ où $a \in E$.

1. Pour $x \in E$, calculer $dg(x)$.
2. Montrer que g admet un minimum sur E .
3. Conclure.

Equations aux dérivées partielles**Exercice 28**

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

Exercice 29

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Exercice 30

Résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) : $\frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = x + y$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ en effectuant le changement de variables

$$\begin{cases} x = u \\ y = \frac{u^2}{2} + v \end{cases}$$

Déterminer la solution vérifiant $f(0, y) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 31

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est *homogène de degré α* si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

Exercice 32

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est *homogène de degré* α si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

1. Montrer que si f est homogène de degré α , alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y) \quad (*)$$

2. Réciproquement, on suppose que f vérifie la relation (*).

- a. On fixe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $\varphi(t) = f(tx, ty) - t^\alpha f(x, y)$ pour $t > 0$. Montrer que φ vérifie une équation différentielle du premier ordre sans second membre et préciser celle-ci.

- b. En déduire que f est homogène de degré α .

3. Montrer que si f est homogène de degré α , les dérivées partielles de f sont également homogènes et préciser leur degré.

Exercice 33**Problème de Dirichlet et principe du maximum**

Soient U un ouvert borné non vide de \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}^*$). On note $\partial U = \overline{U} \setminus U$ la frontière de U .

On se donne une fonction f à valeurs réelles continue sur \overline{U} et de classe \mathcal{C}^2 sur U . On pose alors

$$\forall x \in U, \Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

1. Montrer que f admet un maximum sur \overline{U} . On note alors \bar{x} un point de \overline{U} où ce maximum est atteint.

2. On suppose que $\Delta f > 0$ sur U . Montrer que $\bar{x} \in \partial U$.

A partir de maintenant, on suppose $\Delta f = 0$ sur U .

3. On se donne $\varepsilon > 0$ et on pose

$$\forall x \in \overline{U}, f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \|x\|^2 = f(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Montrer que f_ε est continue sur \overline{U} , de classe \mathcal{C}^2 sur U et que $\Delta f_\varepsilon > 0$ sur U .

4. En déduire que le maximum de f sur \overline{U} est atteint sur ∂U .

5. Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues sur \overline{U} , de classe \mathcal{C}^2 sur U et vérifiant $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$ sur U . On suppose en outre que $f_1 = f_2$ sur ∂U . Montrer que $f_1 = f_2$ sur U .

Exercice 34**CCP PC 2018**

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On note $F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et E l'ensemble des applications $f \in F$ telles que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur \mathbb{R}^2 et appartient à F . On considère $\phi : f \in E \mapsto \frac{\partial f}{\partial x} - af$.

1. Montrer que ϕ est une application linéaire de E dans F .
2. On pose $f(x, y) = \sin(y) \exp(ax)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\phi(f)$.
3. Soit $G = \{(x, y) \mapsto \alpha(y) \exp(ax), \alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$. Montrer que $G \subset \text{Ker}(\phi)$. ϕ est-elle injective ?
4. Soit $A \in F$. On pose $f(x, y) = \exp(ax) \int_0^x A(t, y) \exp(-at) dt$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que $f \in E$ et que $\phi(f) = A$.
5. Montrer que $G = \text{Ker}(\phi)$.
6. Trouver toutes les fonctions $f \in E$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - af(x, y) = 2x - 3y$$