Devoir surveillé n°01

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

Partie I – Définition et étude de la fonction dilogarithme

On pose pour $t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$

$$f(t) = -\frac{\ln(1-t)}{t}$$

1. Justifier que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$. Dans la suite, on notera encore f ce prolongement.

On note alors pour $x \in]-\infty, 1[$

$$\mathrm{L}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Justifier que L peut se prolonger en une fonction continue sur $]-\infty, 1]$. On note encore L ce prolongement.

3. Justifier que L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et donner sa dérivée.

4. Déterminer le sens de variation de L.

5. Déterminer la limite de L en $-\infty$.

Partie II – Relations fonctionnelles et valeurs particulières

6. **a.** A l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\mathrm{L}(1) = \int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{e^x - 1}$$

b. On pose pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{I}_k = \int_0^{+\infty} x e^{-kx}\,\mathrm{d}x$$

Justifier la convergence de cette intégrale et calculer I_k.

c. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq \dfrac{x}{e^x - 1} \leq 1$.

d. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \mathrm{L}(1) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_k \leq \frac{1}{n}$$

e. On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $\mathrm{L}(1)$.

7. **a.** Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) = \frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2)$$

b. En déduire la valeur de $\mathrm{L}(-1)$.

8. **a.** Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(1 - x) = \mathrm{C} - \ln(x)\ln(1 - x)$$

puis déterminer la valeur de C.

b. En déduire la valeur de $\mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Partie III – Une équation différentielle

On considère les équations différentielles

$$\mathcal{E} :\ xy'' + y' = \frac{1}{1 - x}$$

et

$$\mathcal{E}' :\ xz' + z = \frac{1}{1 - x}$$

9. Résoudre $\mathcal{E}'$ sur les intervalles $] - \infty, 0[$ et $]0, 1[$.

10. En déduire les solutions de $\mathcal{E}$ sur les intervalles $] - \infty, 0[$ et $]0, 1[$. On exprimera ces solutions à l'aide de la fonction L.

11. Déterminer les éventuelles solutions de $\mathcal{E}$ sur l'intervalle $] - \infty, 1[$.

Problème 2

Dans ce problème, on étudie la convergence et la valeur d'intégrales de la forme suivante :

$$\mathrm{I}(f) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t) - f(2t)}{t} \,\mathrm{d}t$$

où f désigne une fonction continue de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ que l'on précisera par la suite.

Partie I –

On suppose dans cette partie que f est définie par $f(t) = \dfrac{\mathrm{P}(t)}{t^2+1}$ avec P polynomiale.

1. On suppose dans cette question que $\mathrm{P}(t) = 1$ i.e. $f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$.

- **a.** Justifier la convergence de l'intégrale $\mathrm{I}(f)$.
- **b.** Calculer la valeur de $\mathrm{I}(f)$ à l'aide d'une décomposition en éléments simples.

2. On suppose dans cette question que $\mathrm{P}(t) = t$ i.e. $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$. Justifier la convergence et déterminer la valeur de $\mathrm{I}(f)$.

3. On suppose dans cette question que $\mathrm{P}(t) = t^2$ i.e. $f(t) = \dfrac{t^2}{t^2+1}$. Justifier la convergence et déterminer la valeur de $\mathrm{I}(f)$.

4. Que peut-on dire de $\mathrm{I}(f)$ lorsque $\mathrm{P}(t) = t^n$ avec $n \geq 3$?

Partie II –

On suppose dans cette partie que f est définie par $f(t) = e^{-t}$.

5. Justifier la convergence de $\mathrm{I}(f)$.

6. Justifier que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-u} - 1}{u} \,\mathrm{d}u + \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

7. Justifier que $h : u \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{e^{-u} - 1}{u}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

8. En déduire la valeur de $\mathrm{I}(f)$.

9. Déterminer la convergence et la valeur de

$$\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{u - 1}{\ln(u)} \,\mathrm{d}u$$