

# ESPACES VECTORIELS NORMÉS

$\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

L'objectif de ce chapitre est d'étendre les notions topologiques (limite, continuité) vues en première année dans le cadre réel au cadre des espaces vectoriels.

## 1 Normes

### 1.1 Définition

#### Définition 1.1 Norme

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle **norme** sur  $E$  toute application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifiant les propriétés suivantes.

**Séparation**  $\forall x \in E, N(x) = 0 \implies x = 0_E$ .

**Homogénéité**  $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ .

**Inégalité triangulaire**  $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ .

**REMARQUE.** L'homogénéité montre que si  $x = 0_E$ , alors  $N(x) = 0$ . En effet,  $N(0_E) = N(0 \cdot 0_E) = |0|N(0_E) = 0$ .

**REMARQUE.** Une norme est souvent notée non comme une application mais à l'aide d'un symbole comme  $\| \cdot \|$ .

**REMARQUE.** Si  $N$  est une norme sur un espace vectoriel  $E$ , on a également la seconde inégalité triangulaire

$$\forall (x, y) \in E^2, N(x - y) \geq |N(x) - N(y)|$$

#### Exemple 1.1

- La valeur absolue est une norme sur le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}$ .
- Le module est une norme sur  $\mathbb{C}$  considéré comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ou un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

#### Définition 1.2 Vecteur unitaire

On appelle vecteur unitaire tout vecteur de norme 1.

**REMARQUE.** Si  $x \neq 0_E$ , alors  $\frac{x}{N(x)}$  est unitaire.

#### Définition 1.3 Espace vectoriel normé

On appelle espace vectoriel normé tout couple  $(E, N)$  où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $N$  une norme sur  $E$ .

**Proposition 1.1 Norme associée à un produit scalaire**

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel. L'application  $\| \cdot \|$  définie par  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  pour tout  $x \in E$  est une norme sur  $E$  appelée norme associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Norme d'algèbre**

On appelle **norme d'algèbre** d'une  $\mathbb{K}$ -algèbre  $(E, +, \cdot, \times)$  toute norme  $N$  sur l'espace vectoriel  $E$  vérifiant de plus

$$\forall (x, y) \in E^2, N(x \times y) \leq N(x)N(y)$$

**1.2 Normes usuelles****Définition 1.4 Normes usuelles sur  $\mathbb{K}^n$** 

Pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ , on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$  et  $\| \cdot \|_\infty$  sont des normes sur  $\mathbb{K}^n$ .

**REMARQUE.** La norme  $\| \cdot \|_2$  n'est autre que la norme associée au produit scalaire canonique de  $\mathbb{K}^n$  lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

En notant  $X$  la matrice colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  canoniquement associé à  $x \in \mathbb{K}^n$ , alors  $\|x\|_2^2 = X^T X$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\|x\|_2^2 = \overline{X}^T X$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Normes matricielles**

Si on identifie  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  à  $\mathbb{K}^{np}$ , on étend naturellement les définitions précédentes à  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Autrement dit pour  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$\|M\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |M_{ij}| \quad \|M\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |M_{ij}|^2} \quad \|M\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |M_{ij}|$$

Lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on peut encore remarquer que  $\| \cdot \|_2$  est la norme associée au produit scalaire  $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2 \mapsto \text{tr}(A^T B)$ .

De plus,  $\|M\|_2^2 = \text{tr}(M^T M)$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $\|M\|_2^2 = \text{tr}(\overline{A}^T A)$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Définition 1.5 Norme de la convergence uniforme**

Soit  $X$  un ensemble. On note  $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$  l'ensemble des applications **bornées** de  $X$  dans  $\mathbb{K}$ . Pour  $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ , on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_X |f|$$

$\| \cdot \|_\infty$  est une norme sur le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ .

**REMARQUE.** En particulier, si  $X = \mathbb{N}$ , on définit une suite sur le sous-espace vectoriel des suites bornées de  $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ . Plus précisément,

$$\forall u \in \mathbb{K}^\mathbb{N}, \|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

Par ailleurs, une suite presque nulle est nécessairement bornée donc, en identifiant un polynôme à la suite presque nulle de ses coefficients, on peut étendre cette norme à  $\mathbb{K}[X]$ . Plus précisément, pour  $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$

$$\|P\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

### Définition 1.6 Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique

Pour  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ , on pose

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$$

$\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont des normes sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ .

**REMARQUE.** Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\|\cdot\|_2$  est la norme euclidienne associée au produit scalaire  $(f, g) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^2 \mapsto \int_a^b f(t)g(t) dt$ .

### Exercice 1.1 Quelques normes matricielles

Pour  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , on pose

$$N_1(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |A_{i,j}|$$

$$N_2(A) = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|$$

$$N_3(A) = \sqrt{\max \text{Sp}(A^T A)}$$

1. Montrer que  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  sont des normes sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que si  $n = p$ , ce sont des normes d'algèbre sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

## 1.3 Distance associée à une norme

### Définition 1.7 Distance associée à une norme

Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé. On appelle **distance** associée à  $N$  l'application  $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = \|x - y\|$$

### Proposition 1.2 Propriétés de la distance

Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé et  $d$  la distance associée à  $N$ .

**Séparation**  $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \implies x = y$ .

**Symétrie**  $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$ .

**Inégalité triangulaire**  $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

**Invariance par translation**  $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x + z, y + z) = d(x, y)$ .

**REMARQUE.** On a encore une fois la seconde inégalité triangulaire

$$\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|$$

**Définition 1.8 Distance à une partie**

Soient  $(E, N)$  un espace vectoriel normé,  $x \in E$  et  $A$  une partie non vide de  $E$ . On appelle **distance** de  $x$  à  $A$  le réel positif

$$d(x, A) = \inf \{d(x, y), y \in A\}$$



**ATTENTION !** La borne inférieure n'est pas forcément atteinte.

**Exemple 1.2**

Si on considère l'espace vectoriel normé  $(E, |\cdot|)$ ,

$$d(0, ]1, 2]) = d(0, [1, 2]) = 1$$

**1.4 Boules et sphères****Définition 1.9 Boule et sphère**

Soient  $(E, N)$  un espace vectoriel normé,  $a \in E$  et  $r \in \mathbb{R}_+$ .

**Boule ouverte** On appelle **boule ouverte** de centre  $a$  et de rayon  $r$  l'ensemble

$$B(a, r) = \{x \in E, d(a, x) < r\}$$

**Boule fermée** On appelle **boule fermée** de centre  $a$  et de rayon  $r$  l'ensemble

$$B_f(a, r) = \{x \in E, d(a, x) \leq r\}$$

**Sphère** On appelle **sphère** de centre  $a$  et de rayon  $r$  l'ensemble

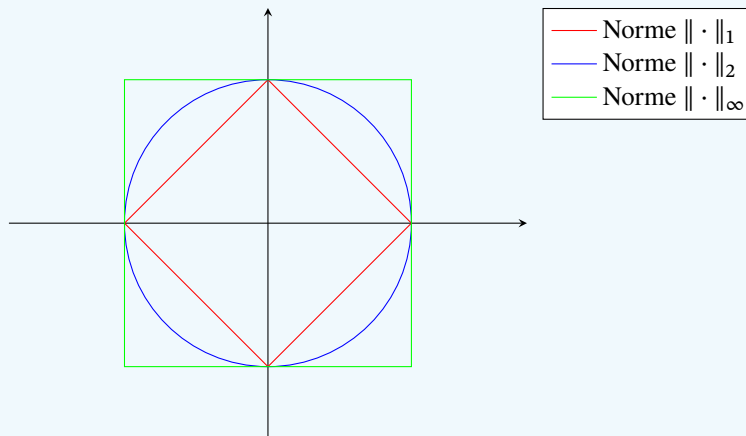
$$S(a, r) = \{x \in E, d(a, x) = r\}$$

**Exemple 1.3**

Dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ,  $B(a, r) = ]a - r, a + r[$ ,  $B_f(a, r) = [a - r, a + r]$  et  $S(a, r) = \{a - r, a + r\}$ .

**REMARQUE.**  $B_f(a, r)$  est l'union disjointe de  $B(a, r)$  et  $S(a, r)$ .

**REMARQUE.** La boule (ouverte ou fermée) de centre  $0_E$  et de rayon 1 est appelée **boule unité** (ouverte ou fermée). La sphère de centre  $0_E$  et de rayon 1 est appelée **sphère unité**.

**Exemple 1.4** Sphères unité de  $\mathbb{R}^2$  pour les normes « classiques »**Exemple 1.5**

Dans  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ,  $B(a, r)$  est le disque ouvert de centre  $a$  et de rayon  $r$ ,  $B_f(a, r)$  est le disque fermé de centre  $a$  et de rayon  $r$  et  $S(a, r)$  est le cercle de centre  $a$  et de rayon  $r$ .

**Proposition 1.3** Convexité des boules

Les boules d'un espace vectoriel normé sont des parties **convexes**.

**1.5 Normes équivalentes****Définition 1.10** Normes équivalentes

Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur un même  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On dit que  $N_2$  est **équivalente** à  $N_1$  si

$$\exists(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall x \in E, \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

**Proposition 1.4**

La relation «être équivalente à» est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes d'un même  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**REMARQUE.** On pourra alors dire sans ambiguïté que deux normes sont équivalentes plutôt que de dire que l'une est équivalente à l'autre.

### Propriétés inchangées par passage à une norme équivalente

L'équivalence des normes est une notion essentielle. On verra en effet que bon nombre de propriétés de parties d'un espace vectoriel, de suites ou de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé restent inchangées si on change une norme en une norme équivalente, notamment :

- le caractère borné ;
- la limite, la convergence ou la divergence des suites ;
- les ouverts, les fermés, les voisinages, les intérieurs, les adhérences, la densité ;
- la limite et la continuité des fonctions ;
- la compacité ;
- la connexité par arcs.

### Méthode Montrer que deux normes ne sont pas équivalentes

Pour montrer que deux normes  $N_1$  et  $N_2$  d'un même  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  ne sont pas équivalentes, il suffit de trouver une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $E$  vérifiant l'une des deux conditions :

- l'une des deux suites  $(N_1(u_n))$  et  $(N_2(u_n))$  est bornée tandis que l'autre ne l'est pas ;
- l'une des deux suites  $(N_1(u_n))$  et  $(N_2(u_n))$  converge vers 0 tandis que l'autre ne converge pas vers 0.

### Exemple 1.6

Posons pour  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \qquad \|P\|_\infty = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$ . On vérifie sans peine que  $\|P_n\|_1 = n+1$  et  $\|P_n\|_\infty = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La suite de terme général  $\|P_n\|_\infty$  est bornée (et même constante) tandis que la suite de terme général  $\|P_n\|_1$  ne l'est pas (elle diverge vers  $+\infty$ ). Ceci permet de conclure que  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  ne sont pas équivalentes.

On aurait pu aboutir au même résultat en considérant  $Q_n = \frac{1}{n+1} P_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dans ce cas, la suite de terme général  $\|Q_n\|_\infty$  converge vers 0 à la différence de la suite de terme général  $\|Q_n\|_1$  qui est constante égale à 1.

### Théorème 1.1 Équivalence des normes en dimension finie

Toutes les normes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de **dimension finie** sont **équivalentes**.

**REMARQUE.** Ce théorème est faux si  $\mathbb{K}$  n'est pas un corps «complet» (notion hors-programme) – par exemple, si  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ .

## 1.6 Parties, suites et fonctions bornées

Le caractère borné d'une partie d'un espace vectoriel normé, d'une suite ou d'une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé est invariant si l'on change la norme en une norme équivalente.

**Définition 1.11 Partie bornée**

Soient  $(E, N)$  un espace vectoriel normé et  $A$  une partie de  $E$ . On dit que  $A$  est **bornée** s'il existe  $R \in \mathbb{R}_+$  tel que  $N(x) \leq R$  pour tout  $x \in A$ .

**REMARQUE.** Autrement dit, une partie est bornée si elle est incluse dans une boule (centrée en  $0_E$ ).

**Exemple 1.7**

Les boules et les sphères sont des parties bornées.

**Exemple 1.8**

$O(n)$  est une partie bornée de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  car pour tout  $M \in O(n)$ ,  $\|M\|_2^2 = \text{tr}(M^T M) = \text{tr}(I_n) = n$ .

**Définition 1.12 Suite bornée**

Soient  $(E, N)$  un espace vectoriel normé et  $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ . On dit que la suite  $(u_n)$  est **bornée** s'il existe  $R \in \mathbb{R}_+$  tel que  $N(u_n) \leq R$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

L'ensemble des suites bornées est un sous-espace vectoriel de  $E^{\mathbb{N}}$ .

**Définition 1.13 Application bornée**

Soient  $X$  un ensemble,  $(E, N)$  un espace vectoriel normé et  $f \in E^X$ . On dit que  $f$  est **bornée** s'il existe  $R \in \mathbb{R}_+$  tel que  $N(f(x)) \leq R$  pour tout  $x \in X$ .

L'ensemble des applications bornées est un sous-espace vectoriel de  $E^X$ .



**ATTENTION !** Le caractère borné peut dépendre de la norme considérée.

**Exemple 1.9**

On munit  $\mathbb{R}[X]$  des normes  $N_1$  et  $N_2$  définies par

$$N_1 : P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \mapsto \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

$$N_2 : P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

La suite de terme général  $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$  est bornée pour la norme  $N_1$  puisque  $N_1(P_n) = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Mais elle ne l'est pas pour la norme  $N_2$  puisque  $N_2(P_n) = n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**1.7 Produit d'espaces vectoriels normés**

**Proposition 1.5 Produit d'espaces vectoriels normés**

Soit  $(E_k, N_k)_{1 \leq k \leq n}$  une famille finie d'espaces vectoriels normés et  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors on définit une norme  $N$  sur  $\prod_{k=1}^n E_k$  en posant

$$\forall x \in \prod_{k=1}^n E_k, N(x) = \left\| (N_1(x_1), \dots, N_n(x_n)) \right\|$$

Si on change la norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^n$ , la norme  $N$  est transformée en une norme équivalente.

**2 Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé**

Toutes les propriétés des suites vues dans cette section (limite, convergence, divergence, valeurs d'adhérence) restent inchangées si on remplace la norme de l'espace vectoriel normé considéré par une norme équivalente.

**2.1 Convergence et divergence****Définition 2.1 Limite**

Soient  $(E, N)$  un espace vectoriel normé,  $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$  et  $\ell \in E$ . On dit que  $(u_n)$  admet  $\ell$  pour **limite** si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} N(u_n - \ell) = 0$ .

**REMARQUE.** Si  $(u_n)$  est une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé, cela n'a pas de sens de dire que  $(u_n)$  admet pour limite  $+\infty$  ou  $-\infty$  (hormis si cet espace vectoriel est  $\mathbb{R}$ ). Par contre, dire que la suite  $(N(u_n))$  admet  $+\infty$  pour limite a un sens puisqu'il s'agit d'une suite à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .

**Proposition 2.1 Unicité de la limite**

Soient  $(E, N)$  un espace vectoriel normé et  $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ . Si  $(u_n)$  admet une limite, alors celle-ci est unique.



**ATTENTION !** Comme en première année, il faut toujours justifier l'**existence** de la limite avant de parler de celle-ci.

**Définition 2.2 Convergence et divergence**

Soient  $(E, N)$  un espace vectoriel normé et  $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ .

- (i) On dit que  $(u_n)$  **converge** si  $(u_n)$  admet une limite.
- (ii) Dans le cas contraire, on dit que  $(u_n)$  **diverge**.

**Proposition 2.2 Convergence et caractère borné**

Toute suite **convergente** à valeurs dans un espace vectoriel normé est **bornée**.



**ATTENTION !** La réciproque est fausse. Par exemple, la suite de terme général  $(-1)^n$  est bornée mais n'est pas convergente.





**ATTENTION !** La convergence d'une suite peut dépendre de la norme considérée.

### Exemple 2.1

On munit  $\mathbb{R}[X]$  des normes  $N_1$  et  $N_2$  définies par

$$N_1 : P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \mapsto \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

$$N_2 : P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

La suite de terme général  $P_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n X^k$  converge vers 0 la norme  $N_1$  puisque  $N_1(P_n) = \frac{1}{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Mais elle ne converge pas pour la norme  $N_2$ . En effet, supposons que  $(P_n)$  converge vers un polynôme  $P$ . Puisque  $N_1 \leq N_2$ ,  $(P_n)$  convergerait vers  $P$  pour la norme  $N_1$  et donc  $P = 0$  par unicité de la limite. Mais  $(P_n)$  ne peut pas converger vers 0 pour la norme  $N_2$  puisque  $N_2(P_n) = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## 2.2 Opérations algébriques

### Proposition 2.3

Soient  $(\lambda_n)$  une suite convergente de  $\mathbb{K}^\mathbb{N}$  et  $(u_n)$  une suite convergente d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé. Alors la suite  $(\lambda_n u_n)$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n u_n = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n \right) \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right)$ .

### Proposition 2.4

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes d'un espace vectoriel normé. Alors pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ , la suite  $(\lambda u_n + \mu v_n)$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \mu \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .



**ATTENTION !** Comme les suites considérées sont à valeurs dans un espace vectoriel et non un corps, cela n'a a priori pas de sens de parler de produit ou de quotient de telles suites.

## 2.3 Valeurs d'adhérence

### Définition 2.3 Suite extraite

Soient  $(E, N)$  un espace vectoriel normé et  $(u_n) \in E^\mathbb{N}$ . On appelle **suite extraite** de  $(u_n)$  toute suite du type  $(u_{\varphi(n)})$  où  $\varphi$  est une application strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ .

### Proposition 2.5 Convergence et suite extraite

Soient  $(E, N)$  un espace vectoriel normé et  $(u_n) \in E^\mathbb{N}$ . Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell \in E$ , alors toute suite extraite de  $(u_n)$  converge également vers  $\ell$ .



**ATTENTION !** Il ne suffit pas qu'une suite extraire admette une limite pour garantir l'existence d'une limite pour la suite initiale.

### Proposition 2.6

Soient  $(E, N)$  un espace vectoriel normé et  $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ . Si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent vers une même limite  $\ell \in E$ , alors  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

### Définition 2.4 Valeur d'adhérence

Soient  $(E, N)$  un espace vectoriel normé,  $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$  et  $\ell \in E$ . On dit que  $(u_n)$  admet  $\ell$  pour valeur d'adhérence s'il existe une suite extraite de  $(u_n)$  convergeant vers  $\ell$ .

**REMARQUE.** Dans le cadre des suites réelles, une valeur d'adhérence est forcément un réel. Cela n'est pas correct stricto sensu de dire que  $+\infty$  ou  $-\infty$  sont des valeurs d'adhérence bien qu'on puisse donner un sens à de telles affirmations.



**ATTENTION !** Si une suite converge, son unique valeur d'adhérence est sa limite mais la réciproque est fautive : une suite admettant une unique valeur d'adhérence ne converge pas nécessairement.

### Exemple 2.2

La suite de terme général  $n \sin \frac{n\pi}{2}$  admet 0 pour unique valeur d'adhérence mais ne converge pas (elle n'est même pas bornée).

### Méthode Prouver qu'une suite diverge

Pour montrer qu'une suite diverge, il suffit d'exhiber deux valeurs d'adhérence.

### Exemple 2.3

La suite de terme général  $(-1)^n$  admet 1 et  $-1$  pour valeurs d'adhérences donc elle diverge.

### Exercice 2.1

Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Montrer que  $\ell \in E$  est une valeur d'adhérence de  $(u_n)$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$ , la boule  $B(\ell, \varepsilon)$  contient une infinité de termes de la suite  $(u_n)$ .

## 3 Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé

### 3.1 Définitions

**Définition 3.1 Série**

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. On appelle **série de terme général**  $u_n$  la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$  où

$$\forall n \geq n_0, S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$$

Cette série est noté  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  ou plus simplement  $\sum u_n$  s'il n'y a pas ambiguïté sur le premier terme.

Pour  $n \geq n_0$ ,  $S_n$  est appelée **somme partielle de rang  $n$**  de cette série.

**REMARQUE.** Une série est donc un cas particulier de suite.

**Exemple 3.1**

On appelle série télescopique toute série dont le terme général est de la forme  $u_n = v_n - v_{n-1}$ . La somme partielle de rang  $n$  de la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  est  $v_n - v_0$ .

**3.2 Nature et somme d'une série****Définition 3.2 Convergence et divergence**

On dit qu'une série à valeurs dans un espace vectoriel normé converge (resp. diverge) si la suite de ses sommes partielles converge (resp. diverge).

**REMARQUE.** En dimension infinie, la convergence/divergence peut dépendre de la norme, ce qui n'est pas le cas en dimension finie puisque toutes les normes sont alors équivalentes.

**REMARQUE.** La convergence d'une série ne dépend pas du premier rang i.e. les séries  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  et  $\sum_{n \geq n_1} u_n$  sont de même nature.

**Définition 3.3 Somme d'une série**

Si la série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge, la limite de la suite des sommes partielles est appelée **somme** de la série et est notée  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ .

**REMARQUE.** On a donc  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^n u_k$ .



**ATTENTION!** La notation  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$  n'a de sens que si la série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge. Il faut donc prouver la convergence de la série avant d'employer cette notation.

**Proposition 3.1 Lien suite/série**

La série  $\sum (u_n - u_{n-1})$  et la suite  $(u_n)$  sont de même nature (i.e. elles convergent toutes les deux ou elles divergent toutes les deux).

De plus, si  $(u_n)$  converge vers une limite  $l$ ,  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - u_{n-1} = l - u_{n_0-1}$ .

### 3.3 Divergence grossière

#### Proposition 3.2

Soit  $\sum u_n$  une série convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé. Alors la suite  $(u_n)$  converge vers 0.



**ATTENTION !** La réciproque est absolument fausse. Par exemple, la suite de terme général  $\frac{1}{n}$  converge vers 0 tandis que la série harmonique diverge.

#### Définition 3.4 Divergence grossière

Une série  $\sum u_n$  est dite **grossièrement divergente** lorsque la suite  $(u_n)$  ne converge pas vers 0.

#### Exemple 3.2

Si  $|q| \geq 1$ , la série  $\sum q^n$  diverge grossièrement.

La série  $\sum \frac{1}{n}$  ne diverge pas grossièrement.

### 3.4 Reste d'une série convergente

#### Définition 3.5 Reste d'une série convergente

Soit  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  une série convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé. Pour tout  $n \geq n_0$ , la série  $\sum_{k \geq n+1} u_k$  est convergente et on appelle sa somme le **reste de rang  $n$**  de la série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$ . Autrement dit, le reste de rang  $n$  de la série

$$\sum_{n \geq n_0} u_n \text{ est } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

#### Proposition 3.3

Soit  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  une série convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé. Alors pour tout  $n \geq n_0$

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

**REMARQUE.** Si on note  $S_n$  la somme partielle de rang  $n$ ,  $R_n$  le reste de rang  $n$  et  $S$  la somme de la série, on a donc  $S_n + R_n = S$  pour tout  $n \geq n_0$ .

#### Exemple 3.3

Lorsque  $|q| < 1$ , le reste de rang  $n$  de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$  est  $\frac{q^{n+1}}{1-q}$ .

**Corollaire 3.1**

La suite des restes d'une série convergente converge vers 0.

**3.5 Opérations sur les séries**

La proposition suivante n'est qu'une conséquence de la linéarité de la limite.

**Proposition 3.4 Linéarité de la somme**

Soient  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  et  $\sum_{n \geq n_0} v_n$  deux séries convergentes à valeurs dans un espace vectoriel normé et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ . Alors la série  $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$  converge et

$$\sum_{n \geq n_0}^+ (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n \geq n_0}^+ u_n + \mu \sum_{n \geq n_0}^+ v_n$$

**REMARQUE.** En termes plus savants, les séries numériques convergentes forment un espace vectoriel et l'application qui à une série convergente associe sa somme est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.



**ATTENTION !** La réciproque est fautive en général. Par exemple, si  $\sum (u_n + v_n)$  converge, on ne peut rien dire de  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  (prendre par exemple,  $u_n = -v_n = 2^n$ ).

On évitera à tout prix d'écrire des égalités du type  $\sum_{n=n_0}^+ (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^+ u_n + \sum_{n=n_0}^+ v_n$  avant d'avoir prouvé la convergence des séries  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  et  $\sum_{n \geq n_0} v_n$ .

**3.6 Absolue convergence****Définition 3.6 Absolue convergence**

Une série  $\sum u_n$  à valeurs dans un espace vectoriel normé est dite **absolument convergente** si  $\sum \|u_n\|$  converge.

**REMARQUE.** A nouveau, en dimension infinie, l'absolue convergence peut dépendre de la norme.

**Exemple 3.4**

On munit  $\mathbb{R}[X]$  des normes  $N : P \mapsto \max_{t \in [0,1]} |P(t)|$  et  $N' : P \mapsto \int_0^1 |P(t)| dt$ . Alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{X^n}{n}$  converge absolument pour  $N'$  mais pas pour  $N$ . En effet,  $N(X^n/n) = \frac{1}{n}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$  diverge tandis que  $N'(X^n/n) = \frac{1}{n(n+1)}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}$  converge.

**Théorème 3.1**

Une série absolument convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé de **dimension finie** est convergente. Dans ce

cas,  $\left\| \sum_{n=0}^+ u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^+ \|u_n\|$ .



**ATTENTION !** La réciproque est fausse. La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  converge tandis que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge.

### Exemple 3.5

Si  $\|\cdot\|$  est une norme d'algèbre sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  vérifie  $\|A\| < 1$ . Alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} A^n$  est absolument convergente,  $I_p - A$  est inversible et  $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_p - A)^{-1}$ .

### Exemple 3.6

Si  $\|\cdot\|$  est une norme d'algèbre sur  $\mathcal{L}(E)$  et si  $u \in \mathcal{L}(E)$  vérifie  $\|u\| < 1$ . Alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u^n$  est absolument convergente,  $\text{Id}_E - u$  est inversible et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n = (\text{Id}_E - u)^{-1}$ .



**ATTENTION !** Le fait que l'espace vectoriel normé considéré soit de **dimension finie** est important. Si ce n'est pas le cas, une série peut converger absolument sans être convergente.

### Exemple 3.7

Munissons  $\mathbb{R}[X]$  de la norme

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{R}[X] \mapsto \|P\| = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

Puisque  $\left\| \frac{X^n}{(n+1)^2} \right\| = \frac{1}{(n+1)^2}$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{X^n}{(n+1)^2}$  converge absolument. Supposons qu'elle converge vers un polynôme  $P = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p X^p$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| P - \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{(k+1)^2} \right\| = 0$$

Fixons  $p \in \mathbb{N}$ . Par définition de la norme  $\|\cdot\|$ , pour tout  $n \geq p$

$$\left| a_p - \frac{1}{(p+1)^2} \right| \leq \left\| P - \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{(k+1)^2} \right\|$$

En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on en déduit que  $a_p = \frac{1}{(p+1)^2}$ . Par conséquent, la suite  $(a_p)$  n'est pas presque nulle, ce qui est impossible car  $P$  est un polynôme.