

NOM :

Prénom :

Note :

1. Déterminer le polynôme minimal de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 2 \\ -2 & X-1 & 2 \\ -2 & -2 & X+3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 2 \\ X-1 & X-1 & 2 \\ X-1 & -2 & X+3 \end{vmatrix} & C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ &= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & X-1 & 2 \\ 1 & -2 & X+3 \end{vmatrix} \\ &= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ &= (X-1)(X+1)^2 \end{aligned}$$

On en déduit que $\text{Sp}(A) = \{-1, 1\}$. Ainsi -1 et 1 sont les racines de π_A . De plus, π_A divise χ_A et est unitaire donc $\pi_A = (X-1)(X+1)$ ou $\pi_A = (X-1)(X+1)^2$. On remarque $A^2 = I_3$ donc $(X-1)(X+1)$ annule A . Finalement, $\pi_A = (X-1)(X+1)$. ■

2. Montrer que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \cos(x+y) \leq e^{-x^2-y^2}\}$ est un fermé de \mathbb{R}^2 .

Posons $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-x^2-y^2} - \cos(x+y)$. Alors $F = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$. L'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto -x^2 - y^2$ est polynomiale donc continue sur \mathbb{R}^2 . De plus, \exp est continue sur \mathbb{R} donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-x^2-y^2}$ est continue sur \mathbb{R}^2 par composition. De même, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x+y$ est polynomiale donc continue sur \mathbb{R}^2 et \cos est continue sur \mathbb{R} donc $(x, y) \mapsto \cos(x+y)$ est continue sur \mathbb{R}^2 par composition. On en déduit que f est continue sur \mathbb{R}^2 . Finalement, $F = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ est fermé en tant qu'image réciproque du fermé \mathbb{R}_+ par l'application continue f . ■

3. La fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$ admet-elle une limite en $(0, 0)$?

Remarquons que $f(t, 0) = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ et $f(t, t) = \frac{1}{2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}$. Comme $(t, 0) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0)$ et $(t, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0)$, f n'admet pas de limite en $(0, 0)$. ■

4. On considère l'espace vectoriel E des suites réelles bornées que l'on munit de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que l'application D qui à $(u_n) \in E$ associe la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est continue.

D est clairement un endomorphisme de E . De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2\|u\|_\infty$$

donc

$$\|D(u)\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty$$

On en déduit que D est continu via la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires. ■

5. On considère l'espace vectoriel des applications bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{R} que l'on munit de la norme infinie. Montrer que $F = \{f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0\}$ est un fermé de E .

Soit (f_n) une suite de vecteurs de F convergeant vers $f \in E$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ i.e. (f_n) converge uniformément vers f sur \mathbb{R} . A fortiori, (f_n) converge simplement vers f sur \mathbb{R} . Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geq 0$ donc $f(x) \geq 0$ par passage à la limite. Ainsi $f \in F$ et F est un fermé de E . ■

6. Soit f un endomorphisme continu du groupe \mathbb{R}_+ . Montrer que $f(r) = f(1)r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$ puis que $f(x) = f(1)x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $r \in \mathbb{Q}$. Il existe donc $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$. Comme f est un endomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$,

$$qf(r) = f(qr) = f(p) = pf(1)$$

et donc $f(r) = f(1)r$. Les applications f et $x \mapsto f(1)x$ sont continues et coïncident sur \mathbb{Q} , qui est dense dans \mathbb{R} , donc elles sont égales i.e. $f(x) = f(1)x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. ■