

DEVOIR SURVEILLÉ N°01

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

Partie I – Définition et étude de la fonction dilogarithme

1. f est clairement de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$. Il suffit donc de prouver que f et f' admettent des limites finies en 0.

Comme $\ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t$, $\lim_0 f = 1$.

Un calcul facile donne

$$\forall t \in] -\infty, 0[\cup]0, 1[, f'(t) = \frac{1}{t(1-t)} + \frac{\ln(1-t)}{t^2}$$

Or

$$\frac{1}{1-t} \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + t + o(t)$$

et

$$\ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{=} -t - \frac{t^2}{2} + o(t)$$

donc

$$f'(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} + o(1)$$

ou encore $\lim_0 f' = \frac{1}{2}$.

On peut donc prolonger f en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 1[$.

2. Il faut montrer que L admet une limite finie en 1, autrement dit que l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ converge. Or $f(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} -\ln(1-t)$. Par croissances comparées, $f(t) \underset{t \rightarrow 1}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ donc f est intégrable sur $[0, 1[$ par comparaison à une intégrale de Riemann convergente. Par conséquent, $\int_0^1 f(t) dt$ converge et L admet bien une limite finie en 1 : L est donc prolongeable par continuité en 1.
3. D'après le théorème fondamental de l'analyse, L est une primitive de f sur $] -\infty, 1[$. L est donc dérivable sur cet intervalle et $L' = f$.
4. Pour $t \in]0, 1[$, $\ln(1-t) < 0$ donc $f(t) > 0$. Pour $t \in] -\infty, 0[$, $\ln(1-t) > 0$ donc $f(t) > 0$. De plus, $f(0) = 1 > 0$. Ainsi $L' = f$ est strictement positive sur $] -\infty, 1[$: L est donc strictement croissante sur $] -\infty, 1[$.
5. Puisque $\lim_{t \rightarrow -\infty} \ln(1-t) = +\infty$, $\frac{1}{t} \underset{t \rightarrow -\infty}{=} o(f(t))$. Or $\int_{-1}^{-\infty} \frac{dt}{t}$ diverge et f est positive. On en déduit donc que $\int_0^{-\infty} f(t) dt$ diverge. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$.

Partie II – Relations fonctionnelles et valeurs particulières

6. a. On pose $u = -\ln(1-t)$ i.e. $t = 1 - e^{-u}$. $u \mapsto 1 - e^{-u}$ est une bijection de classe \mathcal{C}^1 strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$. De plus, $\frac{dt}{du} = e^{-u}$ donc

$$L(1) = \int_0^1 \frac{-\ln(1-t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u}{1 - e^{-u}} \cdot e^{-u} du = \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1} du$$

- b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par croissances comparées, $xe^{-kx} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1/x^2)$ donc l'intégrale définissant I_k converge.

Par intégration par parties,

$$I_k = -\frac{1}{k} [xe^{-kx}]_0^{+\infty} + \frac{1}{k} \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx$$

L'intégration par parties est légitime car $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-kx} = 0$ donc le crochet converge. De plus,

$$I_k = \frac{1}{k} \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = -\frac{1}{k^2} [e^{-kx}]_0^{+\infty} = \frac{1}{k^2}$$

- c. Par convexité de \exp , $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ou encore $x \leq e^x - 1$. Puisque $e^x - 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \frac{x}{e^x - 1} \leq 1$.

- d. Comme somme (finie) linéaire d'intégrales convergentes

$$\sum_{k=1}^n I_k = \int_0^{+\infty} x \sum_{k=1}^n e^{-kx} dx = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}(1 - e^{-nx})}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x(1 - e^{-nx})}{e^x - 1} dx$$

Par conséquent,

$$L(1) - \sum_{k=1}^n I_k = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{e^x - 1} dx$$

D'après la question précédente

$$0 \leq L(1) - \sum_{k=1}^n I_k \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx = \frac{1}{n}$$

- e. En passant à la limite dans la question précédente,

$$L(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n I_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

7. a. Posons $\varphi : x \mapsto L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$. Comme L est dérivable sur $] -1, 1[$, φ l'est également et

$$\forall x \in] -1, 1[, \varphi'(x) = L'(x) - L'(-x) - xL'(x^2) = f(x) - f(-x) - 2xf(x^2)$$

Notamment, $\varphi'(0) = 0$ et pour tout $x \in] -1, 0[\cup] 0, 1[$,

$$\varphi'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} + x \cdot \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} = \frac{-\ln((1-x)(1+x)) + \ln(1-x^2)}{x} = 0$$

Ainsi φ' est nulle sur $] -1, 1[$ et donc φ est constante sur $] -1, 1[$. Par ailleurs, L est continue sur $[-1, 1]$ donc φ l'est également. Par continuité, φ est constante sur $[-1, 1]$. Or $\varphi(0) = 0$ car $L(0) = 0$ donc φ est nulle sur $[-1, 1]$. Par conséquent,

$$\forall x \in [-1, 1], L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)$$

- b. En prenant $x = 1$, on obtient

$$L(1) + L(-1) = \frac{1}{2}L(1)$$

donc

$$L(-1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{\pi^2}{12}$$

8. a. On raisonne comme à la question précédente en posant $\psi : x \mapsto L(x) + L(1-x) + \ln(x) \ln(1-x)$. A nouveau, ψ est dérivable sur $] 0, 1[$ et

$$\forall x \in] -1, 1[, \psi'(x) = L'(x) - L'(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = f(x) - f(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = 0$$

Ainsi ψ est constante sur $] 0, 1[$. On note C cette constante.

Par continuité de L en 0 et 1,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) + L(1-x) = L(0) + L(1) = \frac{\pi^2}{6}$$

De plus, $\ln(x) \ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -x \ln(x)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) \ln(1-x) = 0$ par croissances comparées. On en déduit que $\lim_0 \psi = \frac{\pi^2}{6} = C$.

b. En prenant $x = \frac{1}{2}$,

$$2L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

donc

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \ln^2(2)$$

Partie III – Une équation différentielle

On considère les équations différentielles

$$\mathcal{E} : xy'' + y' = \frac{1}{1-x}$$

et

$$\mathcal{E}' : xz' + z = \frac{1}{1-x}$$

9. Les solutions sur $]0, 1[$ de l'équation homogène $xz' + z = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On vérifie que f est une solution particulière de \mathcal{E}' sur $]0, 1[$. Les solutions de \mathcal{E}' sur $]0, 1[$ sont donc les fonctions $x \mapsto f(x) + \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

On montre de la même manière que les solutions de \mathcal{E}' sur $] -\infty, 1[$ sont de cette forme.

10. Via le changement de variable $z = y'$, on montre que les solutions de \mathcal{E} sur $]0, 1[$ sont les primitives des solutions de \mathcal{E}' sur cet intervalle, c'est-à-dire les fonctions de la forme

$$x \mapsto L(x) + \lambda \ln(x) + \mu \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

De la même manière les solutions de \mathcal{E} sur $] -\infty, 1[$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto L(x) + \lambda \ln(-x) + \mu \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

11. Soit g une éventuelle solution de \mathcal{E} sur $] -\infty, 1[$. Il existe donc $(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1[, \quad g(x) &= L(x) + \lambda_1 \ln(x) + \mu_1 \\ \forall x \in] -\infty, 1[, \quad g(x) &= L(x) + \lambda_2 \ln(-x) + \mu_2 \end{aligned}$$

Comme g doit être deux fois dérivable en 0 et a fortiori continue en 0, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Le même argument de continuité montre alors que $\mu_1 = \mu_2$. Il existe donc $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in] -\infty, 1[, \quad g(x) = L(x) + \mu$$

Réciproquement, soit $\mu \in \mathbb{R}$. Ce qui précède montre que $g : x \mapsto L(x) + \mu$ est bien solution de \mathcal{E} sur $] -\infty, 1[$ et sur $]0, 1[$. On a donc

$$\forall x \in] -\infty, 0[\cup]0, 1[, \quad xg''(x) + g'(x) = \frac{1}{1-x}$$

Mais L est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 1[$ et $L' = f$. Or f est elle-même de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 1[$ donc L est de classe \mathcal{C}^2 sur $] -\infty, 1[$. Notamment, g'' et g' sont continues en 0 de même que $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ donc

$$\forall x \in] -\infty, 1[, \quad xg''(x) + g'(x) = \frac{1}{1-x}$$

et g est bien solution de \mathcal{E} sur $] -\infty, 1[$.

Pour récapituler, les solutions de \mathcal{E} sur $] -\infty, 1[$ sont exactement les fonctions $L + \mu$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Problème 2

Remarquons déjà que dans tout le problème, $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

1. a. **Etude en $+\infty$.** Clairement, $f(t) = \mathcal{O}(1/t^2)$ donc $f(2t) = \mathcal{O}(1/t^2)$ puis $\frac{f(t)-f(2t)}{t} = \mathcal{O}(1/t^3)$. Puisque $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$ l'est également.

Etude en 0^+ . Puisque $\frac{1}{1+u} = 1 + \mathcal{O}(u)$, $f(t) = 1 + \mathcal{O}(t^2)$ puis $f(2t) = 1 + \mathcal{O}(t^2)$ et enfin $\frac{f(t)-f(2t)}{t} = \mathcal{O}(t)$. Comme $t \mapsto t$ est intégrable sur $]0, 1]$, $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$ l'est également.

Finalement, $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* : l'intégrale $I(f)$ converge (absolument).

- b. Décomposition en éléments simples :

$$\frac{f(t)-f(2t)}{t} = \frac{1}{t(t^2+1)} - \frac{1}{t(4t^2+1)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t} + \frac{4t}{4t^2+1} = \frac{4t}{4t^2+1} - \frac{t}{t^2+1}$$

Une primitive de $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$ est donc

$$t \mapsto \frac{1}{2} \ln(4t^2+1) - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4t^2+1}{t^2+1}\right)$$

Ainsi

$$I(f) = \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{4t^2+1}{t^2+1}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \ln 4 = \ln 2$$

- 2.

$$\frac{f(t)-f(2t)}{t} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{2}{4t^2+1}$$

Ainsi

$$I(f) = [\arctan(t) - \arctan(2t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

3. Remarquons que

$$\frac{f(t)-f(2t)}{t} = \frac{t^2}{t^2+1} - \frac{4t^2}{4t^2+1} = 1 - \frac{1}{t^2+1} - 1 + \frac{1}{4t^2+1} = -\left(\frac{1}{t(t^2+1)} - \frac{1}{t(4t^2+1)}\right)$$

On se ramène donc à la question 1 : $I(f)$ converge et $I(f) = -\ln 2$.

4. Lorsque $n \geq 3$,

$$\frac{f(t)-f(2t)}{t} = \frac{t^{n-1} - 2^n t^{n-1}}{1+t^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1 - 2^n t^{n-3}}{t}$$

Or $n-3 \geq 0$ donc $t \mapsto t^{n-3}$ n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+^* . L'intégrale $I(f)$ diverge.

Partie II –

5. **Etude en $+\infty$.** Par croissances comparées, $\frac{f(t)-f(2t)}{t} = o(1/t^2)$. Par conséquent, $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Etude en 0^+ . On sait que $e^{-t} = 1 - t + o(t)$ et $e^{-2t} = 1 - 2t + o(t)$ donc $\frac{f(t)-f(2t)}{t} = 1 + o(1)$ i.e. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)-f(2t)}{t}$. Ainsi f est intégrable sur $]0, 1]$.

Finalement, $t \mapsto \frac{f(t)-f(2t)}{t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* : l'intégrale $I(f)$ converge (absolument).

6.

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} dt - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du && \text{par le changement de variable } u = 2t \\
&= \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du && \text{via la relation de Chasles} \\
&= \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u} - 1}{u} du + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{du}{u}
\end{aligned}$$

7. h est continue sur \mathbb{R}^* . Il suffit de constater que $\lim_0 h = -1$ pour affirmer que h est prolongeable en une fonction continue sur \mathbb{R} .

8. On note H une primitive du prolongement continu de h sur \mathbb{R} . Alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(t) - f(2t)}{t} dt = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u} - 1}{u} du + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{du}{u} = H(2\varepsilon) - H(\varepsilon) + \ln 2$$

Comme H est continue (et même de classe \mathcal{C}^1) sur \mathbb{R} en tant que primitive d'une fonction continue sur \mathbb{R} ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H(2\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H(\varepsilon) = H(0)$$

Par conséquent,

$$I(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(t) - f(2t)}{t} dt = \ln 2$$

9. On effectue le changement de variable $t = -\ln u$. Celui-ci est valide car $-\ln$ est une bijection strictement décroissante de classe \mathcal{C}^1 de $]0, 1]$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_1^0 \frac{u - u^2}{-\ln u} \cdot \frac{-du}{u} = \int_0^1 \frac{u - 1}{\ln u} du$$

Ainsi

$$J = I(f) = \ln 2$$