

# DEVOIR À LA MAISON N°13

## EXERCICE 1.

Dans tout l'exercice,  $n$  désigne un entier naturel non nul fixé.

1. a. Montrer l'existence de deux polynômes  $F_n$  et  $G_n$  de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  tels que

$$(1 - X)^n F_n + X^n G_n = 1$$

On pourra par exemple développer  $[(1 - X) + X]^{2n-1}$  et on ne cherchera pas pour l'instant à calculer les coefficients de  $F_n$  et  $G_n$ .

- b. Montrer que  $(F_n, G_n)$  est l'unique couple de polynômes de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  vérifiant l'égalité de la question précédente.

2. a. Montrer que  $F_n(1 - X) = G_n(X)$ .

- b. Calculer  $F_n(0)$ ,  $F_n\left(\frac{1}{2}\right)$  et  $F_n(1)$ .

Pour la suite de l'exercice, on pourra librement admettre que  $F_n(1) \neq 0$ .

3. a. Montrer que  $F_n(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (1 - x)^{-n} + o(x^{n-1})$ .

- b. En déduire que  $F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} X^k$ .

4. a. Montrer que  $nF_n - (1 - X)F'_n = n \binom{2n-1}{n} X^{n-1}$ .

- b. Montrer qu'il existe un unique polynôme  $H_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $H'_n = X^{n-1}(1 - X)^{n-1}$  et  $H_n(0) = 0$ .

- c. Montrer que

$$(1 - X)^n F_n = 1 - n \binom{2n-1}{n} H_n$$

5. a. Que vaut  $H_n(1)$  ?

- b. Donner le tableau de variations de  $H_n$  sur  $\mathbb{R}$  suivant la parité de  $n$  (on identifie le polynôme  $H_n$  à la fonction polynomiale qui lui est associée).

- c. En déduire le nombre de racines réelles de  $F_n$  suivant la parité de  $n$ .