Devoir surveillé n° 7

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 —

Partie I –

Notons E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\mathsf{D} : f \in \mathsf{E} \mapsto f'$. Il est clair que D est un endomorphisme de E.

1. Déterminer le noyau et l'image de D.

Soient $f_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t$, $f_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ et $f_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$.

Nous noterons $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et G le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{B}$.

Nous allons montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre de vecteurs de E.

Soient a, b et c des réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3$ soit la fonction nulle.

2. L'étudiante Antoinette observe que $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$ pour tout réel t. Elle choisit (adroitement) trois valeurs de t, obtient un système de trois équations à trois inconnues a, b et c, qu'elle résout ; il ne lui reste plus qu'à conclure.

Faites comme elle !

3. L'étudiante Lucie propose d'exploiter le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0.

Faites comme elle !

4. L'étudiante Nicole décide de s'intéresser au comportement de $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Faites comme elle !

La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de G et ce sous-espace est de dimension 3.

5. Montrer que G est stable par D c'est-à-dire que $\mathsf{D}(\mathsf{G}) \subset \mathsf{G}$.

Nous noterons $\widehat{\mathsf{D}}$ l'endomorphisme de G induit par D, c'est-à-dire l'endomorphisme de G défini par $\widehat{\mathsf{D}}(f) = \mathsf{D}(f)$ pour $f \in \mathsf{G}$.

6. Montrer que $\widehat{\mathsf{D}}^3 = \mathrm{Id}_{\mathsf{G}}$.

7. En déduire que $\widehat{\mathsf{D}}$ est un automorphisme de G et exprimer $(\widehat{\mathsf{D}})^{-1}$ en fonction de $\widehat{\mathsf{D}}$.

Partie II –

Nous nous intéressons dans cette partie à l'équation différentielle $y''' = y$, que nous noterons $(\mathcal{E})$. Une solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{E})$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f'''(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que toute solution f de $(\mathcal{E})$ est C^∞.

Notons $T = D^3 - \mathrm{Id}_E$, où Id_E est l'identité de E, et $D^3 = D \circ D \circ D$.

Le noyau de T est donc l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$

2. Montrer que G est contenu dans le noyau de T.

Nous allons établir l'inclusion inverse ; ainsi, G sera exactement l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

Soit f une solution de $(\mathcal{E})$; nous noterons $g = f'' + f' + f$.

3. Montrer que g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.

4. Décrivez rapidement l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

5. Résolvez l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$. Vous donnerez une base de l'ensemble des solutions à valeurs réelles.

6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Décrivez l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$.

7. Et maintenant, concluez !

Exercice 1.✯

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq \mathbf{0}$ et $f^n = \mathbf{0}$ où $\mathbf{0}$ désigne l'endomorphisme nul de E.

- **a.** Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.
- **b.** Montrer que, pour un tel vecteur x, la famille $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$ est une base de E.

Dans toute la suite de l'exercice, f *est un endomorphisme de* E *tel que* $f^{n-1} \neq \mathbf{0}$ *et* $f^n = \mathbf{0}$ *et* x *un vecteur de* E *tel que* $f^{n-1}(x) \neq 0$.

2. Pour k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose $F_k = \operatorname{vect}\left((f^{n-i}(x))_{1 \leqslant i \leqslant k}\right)$.

- **a.** Déterminer la dimension de F_k.
- **b.** Montrer que $F_k = \operatorname{Ker}(f^k) = \operatorname{Im}(f^{n-k})$.
- **c.** Montrer que F_k est stable par f.

3. Soit F un sous-espace vectoriel stable par f. On suppose que F est de dimension k avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$. On note $\tilde{f}$ l'endomorphisme de F défini par : $\forall y \in F,\ \tilde{f}(y) = f(y)$.

- **a.** Montrer qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $\tilde{f}^{p-1} \neq \tilde{\mathbf{0}}$ et $\tilde{f}^p = \tilde{\mathbf{0}}$ où $\tilde{\mathbf{0}}$ désigne l'endomorphisme nul de F.
- **b.** Soit $y \in F$ tel que $\tilde{f}^{p-1}(y) \neq 0$. Que peut-on dire de la famille $(y, \tilde{f}(y), \dots, \tilde{f}^{p-1}(y))$? En déduire que $\tilde{f}^k = \tilde{\mathbf{0}}$.
- **c.** Montrer que $F = \operatorname{Ker} f^k$.
- **d.** Déterminer tous les sous-espaces vectoriels stables par f.

4. On veut déterminer tous les endomorphismes g de E qui commutent avec f, c'est-à-dire tels que $f \circ g = g \circ f$.

- **a.** Soit g un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un unique n-uplet de nombres réels $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ tel que :
$$g(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x)$$
- **b.** En déduire que si g commute avec f alors,
$$g = \alpha_0 \operatorname{Id}_E + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$$
où $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sont les réels définis à la question précédente.
- **c.** Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et préciser sa dimension.