Intégration

Généralités

Exercice 1.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue T-périodique telle que $\int_0^{\mathrm{T}} f(t)dt=0$. Montrer que :

$$\forall a,b\in\mathbb{R}, \int_a^b f(\lambda t)dt \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Que devient le résultat si $\int_0^{\mathrm{T}} f(t)dt\neq 0$?

Exercice 2.

Soient f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant une limite finie l en $+\infty$ et a un réel strictement positif.

1. Montrer que $\lim\limits_{y\to+\infty}\int_y^{y+a} f(t)\,dt = al$.
2. Montrer que $\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty}\int_0^{\mathrm{X}} \big(f(t+a)-f(t)\big)\,dt = -\int_0^a f(t)\,dt+al$.
3. Calculer $\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty}\int_0^{\mathrm{X}} (\arctan(t+1)-\arctan t)\,dt$.

Exercice 3.

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ continue.

1. Justifier l'existence de $\mathrm{M}=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f(x)^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}}=\mathrm{M}$.

Exercice 4.

Soit f continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Montrer que $\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f|$ *si et seulement si* f est de signe constant sur $[a,b]$.

Exercice 5.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On suppose de plus g positive sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

Exercice 6.

Soit $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ une application continue.

1. On suppose que $\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt=0$. Montrer que f s'annule en un réel $a\in]0,\pi[$.
2. On suppose que $\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{\pi} f(t)\cos t\,dt = 0$. Montrer que f s'annule deux fois sur $]0,\pi[$.
   On pourra considérer $\int_0^{\pi} f(t)\sin(t-a)\,dt$.

Exercice 7.

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

Exercice 8.

Soient $n\in\mathbb{N}$ f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a<b)$ telle que $\int_a^b t^k f(t)\,dt=0$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a,b]$.

Exercice 9.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ strictement croissante de $[a,b]$.
D'après le théorème de la bijection, f induit une bijection de $[a,b]$ sur $[f(a),f(b)]$ et f^{-1} est continue sur $[f(a),f(b)]$.

1. Montrer que
$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy = bf(b)-af(a)$$
2. Donner une interprétation géométrique de cette formule.

Calculs

Exercice 10.

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(t)=\lfloor nt\rfloor$. Montrer que f est en escalier sur $[0,1]$ et calculer son intégrale.

EXERCICE 11.☆

On note
$$I = \int_0^\pi \frac{t}{2+\sin(t)}dt \text{ et } J = \int_0^\pi \frac{dt}{2+\sin(t)}.$$

1. Trouver une relation simple entre I et J en effectuant le changement de variable $t = \pi - u$.
2. Pour tout réel x , on pose
$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{2+\sin(t)}.$$
   a. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
   b. Calculer $F(x)$ en fonction de x pour tout $x \in]-\pi,\pi[$.
   c. En déduire la valeur de J puis celle de I.

EXERCICE 12.

Calculer les primitives suivantes

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+5}$;
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$;
3. $\displaystyle\int e^x \sin(e^x)dx$;
4. $\displaystyle\int \tan^3(x)dx$;
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\tan^3(x)}dx$;
6. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^m}dx$, $m \in \mathbb{N}$;
7. $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}dx$;
8. $\displaystyle\int \frac{\text{ch}(x)dx}{\text{sh}^5(x)}$.

EXERCICE 13.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et H la fonction définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \alpha\cos x + \sin x + 2$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que H ne s'annule pas.
2. On suppose la condtion précédente satisfaite et on pose pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{H(t)}$. Justifier que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $F(x)$ pour $x \in]-\pi,\pi[$.
3. Calculer l'intégrale $F(2\pi)$.

EXERCICE 14.

Soient α et β deux réels strictement positifs. On définit une fonction f par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\alpha+\beta\cos^2 x}$$

1. Justifier que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On note F celle qui s'annule en 0.
2. Montrer que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Déterminer une expression de $F(x)$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
4. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{49-45\sin^2 t}$.

EXERCICE 15.

Calculer $I = \displaystyle\int_{a^2}^{b^2} x\sqrt{(x-a^2)(b^2-x)}\,dx$.

EXERCICE 16.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

1. Déterminer une relation entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$.
2. En déduire l'existence et une expression simple de $\lim_{x\to+\infty} I_n(x)$.

Inégalités intégrales

EXERCICE 17.★★

Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, telle que $f(0)=f(1)=0$.

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto f(x)\operatorname{cotan}(\pi x)$ admet une limite (finie) en 0 et en 1. On notera g, le prolongement continu sur $[0,1]$ de cette fonction.
2. On considère la fonction $h = fg$.
   a. Démontrer que h est dérivable sur $]0,1[$ et que, pour tout $0<x<1$,
   $$h'(x) = 2f'(x)g(x) - \pi(f(x)^2 + g(x)^2).$$
   En déduire que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.
   b. Démontrer que
   $$\forall\ x \in [0,1], \quad h'(x) \leqslant \frac{1}{\pi} f'(x)^2 - \pi f(x)^2.$$
   c. En déduire enfin que
   $$\int_0^1 f'(x)^2\,dx \geqslant \pi^2 \int_0^1 f(x)^2\,dx.$$

EXERCICE 18.★★

Soient $a \leqslant b$ et $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que
$$f(a)=0 \ \text{ et } \ 0 \leqslant f' \leqslant 1.$$
Etablir que
$$\int_a^b f^3(t)\,dt \leqslant \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)^2.$$

Fonctions définies par des intégrales

EXERCICE 19.

Etablir la dérivabilité puis calculer la dérivée de la fonction ψ définie par
$$x \longmapsto \int_{e^{-x}}^{e^x} \sqrt{1+\ln^2(t)}\,dt.$$

EXERCICE 20.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x 3^{-\lfloor t \rfloor}\,dt$ où $\lfloor t \rfloor$ représente la partie entière du réel t.

1. Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que la suite $(f(n))$ converge et donner sa limite.
3. En déduire que f admet une limite en $+\infty$ et préciser celle-ci.

EXERCICE 21.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Quel est le signe de f ?
3. Prolonger f par continuité partout où cela est possible.
4. Montrer que f est dérivable et étudier les variations de f. On déterminera également la limite de f en $+\infty$.
5. Étudier la concavité de f.
6. Tracer le graphe de f.

EXERCICE 22.

Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)g(t)\,dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(t-x)g(t)\,dt$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et que f est solution de l'équation différentielle $y''+y=g$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $y''+y=g$.

EXERCICE 23.

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,dt$.

EXERCICE 24.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

Montrer que la fonction $g: x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(tx)\,dt$ est lipschitzienne.

Sommes de Riemann

EXERCICE 25.☆

Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par,

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}.$$

EXERCICE 26.☆

Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par,

$$v_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}.$$

EXERCICE 27.

Etudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}.$$

EXERCICE 28.☆☆

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$. Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose,

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $e^{\int_0^1 f(t)dt}$.

EXERCICE 29.

Déterminer un équivalent de $u_n = \sqrt{1}\sqrt{n-1}+\sqrt{2}\sqrt{n-2}+\dots+\sqrt{n-2}\sqrt{2}+\sqrt{n-1}\sqrt{1}$ quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 30.

Montrer que

$$X^{2n}-1 = (X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2-2X\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$$

En déduire pour $r>1$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|1-re^{i\theta}\right|d\theta$$

Equations intégrales

EXERCICE 31.

Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

EXERCICE 32.

Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = 2f(1)-3\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

EXERCICE 33.

Soit $\lambda\in[-1,1]$. Trouver les fonctions $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f(x) = \int_0^{\lambda x} f(t)dt.$$

Suites d'intégrales

EXERCICE 34.☆☆

On pose pour tout $n\geqslant 0$,

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n(x)dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. En intégrant par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
3. En déduire une expression de I_{2n} et I_{2n+1} pour tout $n\in\mathbb{N}$ à l'aide de factorielles.
4. Vérifier que $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. En déduire que $\frac{n+1}{n+2}\mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{I}_{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n$.
5. Démontrer que $\mathrm{I}_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{I}_n$.
6. Établir que $\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n = \frac{\pi}{2}$.
7. En déduire que
$$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

EXERCICE 35.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose $f_{n,\lambda}(x) = \sin(2nx)\ln(\lambda\cos x)$.

1. Etudier la limite de $f_{n,\lambda}(x)$ lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$.
2. On pose $\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{n,1}(x)\,dx$. Montrer que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{n,\lambda}(x)\,dx = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2n}\ln\lambda + \mathrm{I}_n$$
3. Calculer I_1 et I_2.
4. Etablir que
$$\mathrm{I}_n = (-1)^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nx)\ln(\sin x)\,dx$$
et
$$n\mathrm{I}_n = (-1)^n\mathrm{J}_n \quad \text{où} \quad \mathrm{J}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(nx)\cot x\,dx$$
5. Calculer $\mathrm{J}_n - \mathrm{J}_{n-1}$ et en déduire I_n selon la parité de n.

EXERCICE 36.★★

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{2-\cos(t)}\,dt.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{n+2} = 4\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n$.
2. En déduire une expression de I_n en fonction de n.

EXERCICE 37.★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Prouver que, sur un ensemble à déterminer,
$$\frac{\sin^2(nt)}{\sin(t)} = \sin(t) + \sin(3t) + \cdots + \sin((2n-1)t).$$
2. En déduire une expression de
$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin(t)}\,dt$$
sous la forme d'une somme.
3. Vérifier que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{2k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dx}{2x-1} \leqslant \frac{1}{2k-1}.$$
4. En déduire que
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin(t)}\,dt \sim \frac{1}{2}\ln(n).$$

EXERCICE 38.

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Prouver que la suite de terme général
$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$$
converge vers 0.