Devoir à la maison n°14

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – D'après E3A Maths A MP 2006

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0.
On désigne par $\mathcal{C}^0(\mathrm{I})$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et on note :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}),\ \|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathrm{I}} |f(x)|$$

On désigne par $\mathcal{C}^1(\mathrm{I})$ l'espace vectoriel réel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$.
On note également $\mathrm{L}^2(\mathrm{I})$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I})$ intégrables sur I et on pose

$$\forall f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}),\ \|f\|_1 = \int_\mathrm{I} |f|$$

On note enfin $\mathrm{L}^2(\mathrm{I})$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I})$ telles que f^2 est intégrable sur I et on pose

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{I}),\ \|f\|_2 = \sqrt{\int_\mathrm{I} f^2}$$

Partie I

1 Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I})$ et c un réel strictement positif. Démontrer que l'équation différentielle $y' + cy = f$ admet une unique solution, notée $\varphi(f)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et vérifiant $\varphi(f)(0) = 0$.
Démontrer que

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f(t)\, \mathrm{d}t$$

2 Prouver que l'application φ est linéaire sur $\mathcal{C}^0(\mathrm{I})$.

Partie II

On suppose dans cette partie que l'intervalle I est un segment $[a, b]$ avec $a \leq 0 < b$.

3 Démontrer qu'il existe des réels positifs M_1 et M_2 tels que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}),\ \|f\|_1 \leq \mathrm{M}_1\|f\|_2 \leq \mathrm{M}_2\|f\|_\infty$$

4 Démontrer qu'il existe un réel positif M_0 tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}),\ \|\varphi(f)\|_\infty \leq \mathrm{M}_0\|f\|_\infty$$

5 Démontrer qu'il existe un réel A positif tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}),\ \forall x \in \mathrm{I},\ |\varphi(f)(x)| \leq \mathrm{A}\|f\|_1$$

En déduire que :

$$\exists \mathrm{C} \in \mathbb{R}_+,\ \forall f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}),\ \|\varphi(f)\|_1 \leq \mathrm{C}\|f\|_1$$

6 Démontrer qu'il existe un réel B positif tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}),\ \forall x \in \mathrm{I},\ |\varphi(f)(x)| \leq \mathrm{B}\|f\|_2$$

En déduire que :

$$\exists \mathrm{K} \in \mathbb{R}_+,\ \forall f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}),\ \|\varphi(f)\|_2 \leq \mathrm{K}\|f\|_2$$

7 L'application de $\mathcal{C}^0([a,b])$ dans lui-même est-elle continue

7.a lorsque $\mathcal{C}^0([a,b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$?

7.b lorsque $\mathcal{C}^0([a,b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$?

7.c lorsque $\mathcal{C}^0([a,b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_2$?

Partie III

Dans cette partie, I désigne l'intervalle $[0,+\infty[$ et, pour tout réel $\lambda > 0$, f_λ est la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$$

8 Déterminer $\varphi(f_\lambda)$.

9 Démontrer que f_λ et $\varphi(f_\lambda)$ sont intégrables sur I. Calculer $\|f_\lambda\|_1$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_1$.

10 Démontrer que f_λ^2 et $\varphi(f_\lambda)^2$ sont intégrables sur I. Calculer $\|f_\lambda\|_2$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_2$.

11 Démontrer que φ est un endomorphisme continu de $\mathrm{L}^1(\mathrm{I})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ et calculer sa norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_1$.

12 Soit $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{I})$. On pose $g = \varphi(f)$. Démontrer que

$$\forall \mathrm{X} > 0,\ \frac{g(\mathrm{X})^2}{2} + c\int_0^{\mathrm{X}} g(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{X}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

En déduire que φ est un endomorphisme continu de $\mathrm{L}^2(\mathrm{I})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ et calculer sa norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_2$.

Partie IV

I désigne maintenant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ contenant 0 et H(I) est l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telles que f^2 et $(f')^2$ soient intégrables sur I.

13 **13.a** Démontrer que si f et g sont dans H(I), alors les fonctions fg et $f'g'$ sont intégrables sur I.

13.b Démontrer que l'application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{H}(\mathrm{I})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathrm{I}} fg + \int_{\mathrm{I}} f'g' \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire.

13.c En déduire que l'application $\|\cdot\|_{\mathrm{H}}$ définit par

$$\forall f \in \mathrm{H}(\mathrm{I}),\ \|f\|_{\mathrm{H}} = \sqrt{\int_{\mathrm{I}} f^2 + \int_{\mathrm{I}} (f')^2}$$

est une norme sur $\mathrm{H}(\mathrm{I})$.

$\boxed{\textbf{14}}$ On suppose, dans cette question, que φ est un endomorphisme continu de $\mathrm{L}^2(\mathrm{I})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. On pose

$$\mathrm{K} = \{f \in \mathrm{H}(\mathrm{I}),\ f(0) = 0\}$$

14.a Démontrer que, pour tout $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{I})$, $\varphi(f)'$ est dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{I})$ et $\varphi(f)$ est dans K.
Démontrer que

$$\exists \mathrm{A} > 0,\ \forall f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{I}),\ \|\varphi(f)\|_{\mathrm{H}} \leq \mathrm{A}\|f\|_2$$

14.b Démontrer que φ est un isomorphisme de $\mathrm{L}^2(\mathrm{I})$ dans K.

14.c Démontrer que φ est continue de $(\mathrm{L}^2(\mathrm{I}), \|\cdot\|_2)$ dans $(\mathrm{K}, \|\cdot\|_{\mathrm{H}})$.

14.d Démontrer que φ^{-1} est continue de $(\mathrm{K}, \|\cdot\|_{\mathrm{H}})$ dans $(\mathrm{L}^2(\mathrm{I}), \|\cdot\|_2)$.