Devoir à la maison n°13

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Mines 2016 MP Maths 2 – Théorème taubérien de Hardy-Littlewood-Karamata

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0, +\infty[$.

I Une intégrale à paramètre

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose, sous réserve d'existence,

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad \mathrm{K} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

1 Montrer que la fonction $\psi : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur I.

2 Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $\mathrm{F}(x)$ est définie.

3 Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et exprimer $\mathrm{F}'(x)$ sous la forme d'une intégrale.

4 En déduire que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $x\mathrm{F}'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{F}(x) = -\mathrm{K}$.

5 Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on pose $\mathrm{G}(x) = \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{F}(x)$. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{G}(x) = \mathrm{C} - \mathrm{K}\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

6 Déterminer les limites de G en 0 et $+\infty$ et en déduire la valeur de K.

II Etude de deux séries de fonctions

Dans toute cette partie, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-nx}$.

7 Montrer que f et g sont définies et continues sur I.

8 Montrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

9 Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geq 1}$ converge.

10 Démontrer que pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

11 En déduire un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \to 0$. Montrer alors que $g(x)$ est équivalent à $\frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x \to 0$.

III Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

A tout ensemble $\mathrm{A} \subset \mathbb{N}$, on associe la suite (a_n) définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \mathrm{A} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $\mathrm{I_A}$ l'ensemble des réels $x \geq 0$ pour lesquels la série $\sum a_n e^{-nx}$ converge. On pose $f_{\mathrm{A}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}$ pour tout $x \in \mathrm{I_A}$. Enfin, sous réserve d'existence, on pose $\Phi(\mathrm{A}) = \lim_{x\to 0} x f_{\mathrm{A}}(x)$ et on note S l'ensemble des parties $\mathrm{A} \subset \mathbb{N}$ pour lesquelles $\Phi(\mathrm{A})$ existe.

12 Quel est l'ensemble $\mathrm{I_A}$ si A est fini ? Si A est infini, montrer que l'on peut extraire une suite (b_n) de la suite (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$. Déterminer $\mathrm{I_A}$ dans ce cas.

13 Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{S}$ et (a_n) la suite associée. Pour tout entier naturel n, on note $\mathrm{A}(n)$ l'ensemble des éléments de A inférieurs ou égaux à n. Vérifier que pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n\geq 0} \mathrm{card}(\mathrm{A}(n))e^{-nx}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{card}(\mathrm{A}(n))e^{-nx} = \frac{f_{\mathrm{A}}(x)}{1-e^{-x}}$$

Dans la question suivante, $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1$ désigne l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls.

14 Montrer que si $x > 0$, $f_{\mathrm{A}_1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor\sqrt{n}\rfloor e^{-nx}$ où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la partie entière.

En déduire un encadrement de $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-nx} - \frac{f_{\mathrm{A}_1}(x)}{1-e^{-x}}$ puis un équivalent de f_{A_1} en 0. Prouver que $\mathrm{A}_1 \in \mathrm{S}$ et donner $\Phi(\mathrm{A}_1)$.

Dans la question suivante, $\mathrm{A} = \mathrm{A}_2$ désigne l'ensemble constitué des entiers qui sont la somme des carrés de deux entiers naturels non nuls. On admet que $\mathrm{A}_2 \in \mathrm{S}$ et on désire majorer $\Phi(\mathrm{A}_2)$.
Soit $v(n)$ le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p, q) pour lesquels $n = p^2 + q^2$.

15 Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n\geq 0} v(n)e^{-nx}$ converge et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)e^{-nx} = f_{\mathrm{A}_1}(x)^2$$

Montrer alors que pour tout $x > 0$, $f_{\mathrm{A}_2}(x) \leq f_{\mathrm{A}_1}(x)^2$. En déduire un majorant de $\Phi(\mathrm{A}_2)$.

IV Un théorème taubérien

Soit $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que, pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n\geq 0} \alpha_n e^{-nx}$ converge.
On suppose que

$$\lim_{x\to 0^+} x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} = \ell \in [0, +\infty[$$

On note F l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, E le sous-espace de F des fonctions continues par morceaux et E_0 le sous-espace de E des fonctions continues sur $[0,1]$. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par la formule $\|\psi\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |\psi(t)|$.

Si $\psi \in E$, on note $L(\psi)$ l'application qui à $x > 0$ associe

$$L(\psi)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha e^{-nx}\psi(e^{-nx})$$

16 Montrer que $L(\psi)$ est bien définie pour tout $\psi \in E$ et que L est linéaire. Vérifier que pour tout $(\psi_1, \psi_2) \in E^2$, $\psi_1 \leq \psi_2$ entraîne $L(\psi_1) \leq L(\psi_2)$.

On note E_1 l'ensemble des $\psi \in E$ pour lesquels $\lim_{x\to 0} xL(\psi)(x)$ existe et, si $\psi \in E_1$, on pose

$$\Delta(\psi) = \lim_{x\to 0} xL(\psi)(x)$$

17 Vérifier que E_1 est un sous-espace vectoriel de E et que l'application Δ est une forme linéaire continue sur $(E_1, \|\cdot\|_\infty)$.

18 Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $e_p : t \in [0,1] \mapsto t^p$ appartient à E_1 et calculer $\Delta(e_p)$. En déduire que $E_0 \subset E_1$ et calculer $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E_0$.

Pour tout $(a,b) \in [0,1]^2$ tel que $a < b$, on note $\mathbb{1}_{[a,b]} : [0,1] \to \{0,1\}$ la fonction définie par

$$\mathbb{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $a \in]0,1[$ et $\varepsilon \in]0, \min(a, 1-a)[$. On note

$$g_-(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a-\varepsilon] \\ \dfrac{a-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a-\varepsilon, a[\\ 0 & \text{si } x \in [a,1] \end{cases}$$

et

$$g_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a] \\ \dfrac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a, a+\varepsilon[\\ 0 & \text{si } x \in [a+\varepsilon,1] \end{cases}$$

19 Vérifier que g_- et g_+ appartiennent à E_0 et calculer $\Delta(g_-)$ et $\Delta(g_+)$. Montrer que $\mathbb{1}_{[0,a]} \in E_1$ et calculer $\Delta(\mathbb{1}_{[0,a]})$. En déduire que $E_1 = E$ et donner $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E$.

On considère maintenant la fonction ψ définie sur $[0,1]$ par la formule :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{e}\right[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{e}, 1\right] \end{cases}$$

20 *Théorème taubérien.* Calculer $L(\psi)\left(\dfrac{1}{N}\right)$ pour tout entier $N > 0$ et en déduire la limite

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k$$

On rappelle que $v(n)$ est le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p,q) tels que $n = p^2 + q^2$.

21 Si $A_1 \in S$, que vaut $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \text{card}(A(n))$. Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v(k)$.