

EXERCICE 1.

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par le polynôme $X - a$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par le polynôme $(X - a)^2$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par le polynôme $(X - a)(X - b)$.

EXERCICE 2.

Soient

$$A = X^{100} - X^4 + X - 1 \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 + X + 1.$$

Trouver le reste de la division euclidienne de A par le polynôme B .

EXERCICE 3.★

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$. Trouver une condition *nécessaire et suffisante* pour que $(X - 1)^2$ divise

$$aX^{n+1} + bX^n + 1.$$

Calculer alors le quotient.

EXERCICE 4.★

Soit $n \geq 2$. On pose $P_n = (X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2$.

1. Déterminer le reste de P_n dans la division euclidienne par $X - 3$.
2. Déterminer le reste de P_n dans la division euclidienne par $(X - 2)^2$.
3. Déterminer le reste de P_n dans la division euclidienne par $(X - 2)^2(X - 3)^2$.

EXERCICE 5.

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que B divise A dans $\mathbb{C}[X]$.

1. Justifier que B divise A dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Quels sont les entiers naturels n tels que le polynôme $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$?
3. Pour tout entier naturel n , on pose

$$P_n = (1 + X^4)^n - X^4.$$

Déterminer l'ensemble \mathcal{E} des entiers naturels n tels que $X^2 + X + 1$ divise P_n .

EXERCICE 6.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le reste de la division euclidienne de $(\cos \theta + X \sin \theta)^n$ par $X^2 + 1$.

EXERCICE 7.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1.$$

Déterminer le reste de la division euclidienne de P_n par $(X - 1)^3$.

EXERCICE 8.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que le reste de la division euclidienne de P par $X + 1$ est égal à 7 et que le reste de la division euclidienne de P par $X + 5$ est égal à 3. Peut-on déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 6X + 5$?

EXERCICE 9.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste dans la division euclidienne de

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(\sin(k\pi/n)X + \cos(k\pi/n) \right)$$

par $X^2 + 1$.

EXERCICE 10.

Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ le polynôme $P_m = (X + 1)^m - X^m - 1$ est-il divisible par $Q = X^2 + X + 1$?

EXERCICE 11.

1. Le polynôme $(X + 1)^{2009} + X^{2009} + 1$ est-il divisible par le polynôme $X^2 + X + 1$?
2. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $X^2 + X + 1$ divise-t-il le polynôme $(X + 1)^n + X^n + 1$?

EXERCICE 12.

On pose $E = \mathbb{R}_4[X]$. Soit $A = X^2 + 1$ et $F = \{P \in E \mid A \text{ divise } P\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que $E = F \oplus \mathbb{R}_1[X]$.
3. Déterminer une base de F .

EXERCICE 13.

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg A \geq 1$. On pose $d = \deg A$. On note D l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par A .

1. Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
2. Montrer que D est un projecteur de $\mathbb{K}[X]$.
3. Montrer que $\text{Im } D = \mathbb{K}_{d-1}[X]$.
4. On note $A\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ multiples de A . Dédurre de la question précédente que

$$\mathbb{K}[X] = A\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{d-1}[X]$$

EXERCICE 14.

Soient p un nombre premier et $P_n = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ avec $n \geq 1$. On suppose que

$$p \nmid a_n, \forall 0 \leq k \leq n-1, p \mid a_k \text{ et } p^2 \nmid a_0.$$

Montrer que P_n est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

EXERCICE 15.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que X^n divise $1 + X - P^2$.

EXERCICE 16.

Soient P et Q des polynômes de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n X^n$ avec (a_n) une suite presque nulle de réels positifs. Montrer que PQ est également de cette forme.

EXERCICE 17.

Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2$.

EXERCICE 18.

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
3. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

EXERCICE 19.

Existe-t-il $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in [0, 1], P(x) = \cos x$?

EXERCICE 20.

Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \bar{z} ?$$

EXERCICE 21.★

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^{2k}$.

1. Montrer que la décomposition en produit de facteurs irréductibles sur \mathbb{R} de P_n s'écrit

$$P_n(X) = \prod_{k=1}^{n-1} (X^2 - 2 \cos(k\pi/n)X + 1).$$

2. En déduire que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/(2n)) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

3. Calculer la valeur de

$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos(k\pi/n).$$

EXERCICE 22.

Décomposer sur \mathbb{R} les polynômes suivants :

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| 1. $A = X^3 + 1 ;$ | 5. $E = X^8 + 1 ;$ |
| 2. $B = X^4 + 1 ;$ | 6. $F = X^8 + X^4 + 1 ;$ |
| 3. $C = X^4 + X^2 + 1 ;$ | 7. $G = X^4 - X^2 - 12 ;$ |
| 4. $D = X^6 + 1 ;$ | 8. $H = X^6 - 1.$ |

EXERCICE 23.★

Soit $n \geq 1$. Décomposer $X^n + 1$ sur \mathbb{C} puis sur \mathbb{R} .

EXERCICE 24.★

Soit P le polynôme suivant,

$$X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1.$$

- Vérifier que i est racine multiple de P .
- En déduire la décomposition de P sur \mathbb{R} .

EXERCICE 25.★

Factoriser en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes :

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1. $X^{2n+1} - 1 ;$ | 3. $1 + X^3 + X^6 + X^9 ;$ |
| 2. $\sum_{k=0}^{2n} X^k ;$ | |

EXERCICE 26.

Soit $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$.

- Vérifier que 2 est une racine multiple de P .
- Déterminer toutes les racines de P .
- Décomposer P sur \mathbb{R} .

EXERCICE 27.

Soit le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

- Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
- Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de P ?
- Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

EXERCICE 28.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Donner sous forme trigonométrique les racines cubiques de $e^{i\alpha}$.
- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) d'inconnue z suivante : $z^6 - 2z^3 \cos \alpha + 1 = 0$.
- Dans cette question, on suppose que $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
 - Représenter graphiquement les solutions de l'équation (E) (unité : 4cm).
 - Factoriser $z^6 + 1$ sous la forme d'un produit de trois trinômes du second degré à coefficients réels.

EXERCICE 29.

On considère les polynômes $P = 3X^4 - 9X^3 + 7X^2 - 3X + 2$ et $Q = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$.

- Décomposez P et Q en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$, puis sur $\mathbb{C}[X]$ (on pourra calculer les valeurs de P et Q en 1 et 2).
- Déterminer le PPCM et le PGCD des polynômes P et Q .

EXERCICE 30.

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposez en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme :

$$P = X^{2n} - 2X^n \cos(n\theta) + 1$$

EXERCICE 31.

Soit \mathcal{E} l'équation $2z^3 - (7 + 2i)z^2 + (11 + i)z - 4 = 0$.

- Montrer que \mathcal{E} admet une racine réelle que l'on calculera.
- Résoudre \mathcal{E} sur \mathbb{C} .

EXERCICE 32.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$$

possède-t-il une racine multiple ?

EXERCICE 33.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser sur \mathbb{C} le polynôme $P_n = X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1$.

2. En déduire une expression simple de $A_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$.

3. Donner une expression simple de $B_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} + \theta \right)$.

4. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer $C_n = \prod_{\substack{0 \leq k, l \leq n-1 \\ dK \neq l}} (\omega^k - \omega^l)$.

EXERCICE 34.

1. Montrer que le polynôme $R = X^3 + X + 1$ admet trois racines complexes distinctes notées a, b, c .

2. Montrer que $a, b, c, -a, -b, -c$ sont six complexes distincts.

3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q tel que $Q(X^2) = P(X)P(-X)$.

4. En déduire un polynôme de degré 3 ayant pour seules racines a^2, b^2, c^2 .

EXERCICE 35.

On cherche les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ de la forme $(X - a)(X - b)$ tels que P divise $P(X^3)$.

1. Déterminer les polynômes P dans le cas où $a = b$.
2. Montrer que si $a \neq b$ et $a^3 \neq b^3$, il existe 6 tels polynômes P dont 4 dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Déterminer les polynômes P dans le cas où $a \neq b$ et $a^3 = b^3$.
4. En déduire que 13 polynômes en tout conviennent dont 7 dans $\mathbb{R}[X]$.

EXERCICE 36.★

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $T_n = X^n - X + 1$.

1. Déterminer le nombre de racines réelles de T_n .
2. Montrer que T_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}[X]$.

EXERCICE 37.★

Résoudre dans \mathbb{C} le système suivant :

$$\begin{cases} |x| = |y| = |z| = 1 \\ x + y + z = 1 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

EXERCICE 38.★

Résoudre dans \mathbb{C} le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases}$$

EXERCICE 39.★

Pour $n \geq 2$, on pose $P_n = (X + i)^n - (X - i)^n$.

1. Déterminer les racines complexes de P_n .
2. En déduire les valeurs de

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} \cotan(k\pi/n) \quad \text{et} \quad B_n = \prod_{k=1}^{n-1} \cotan(k\pi/n).$$

EXERCICE 40.★

Soient a, b et c les racines complexes du polynôme $P = X^3 - 2X + 5$.

1. Calculer $S = a^4 + b^4 + c^4$.
2. Trouver un polynôme de degré trois à coefficients entiers dont a^2, b^2 et c^2 sont les racines.

EXERCICE 41.

Soient x, y, z trois complexes non nuls tels que $x + y + z = 0$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Montrer que $|x| = |y| = |z|$.

EXERCICE 42.

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le pgcd de $X^n - 1$ et $X^p - 1$.

EXERCICE 43.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : \begin{cases}]0, \pi[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} \end{cases}$.

1. Montrer que la fonction f_n est prolongeable par continuité en 0 et π . On notera encore f_n ce prolongement. Que valent alors $f_n(0)$ et $f_n(\pi)$?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme P_n tel que $\forall x \in [-1, 1], P_n(x) = f_n(\arccos x)$. On déterminera le degré et la parité de P_n en fonction de n .
3. Déterminer les valeurs de $P_n(1), P_n(-1), P_n(0), P'_n(0)$.
4. Montrer que $|P_n(x)| \leq n + 1$ pour tout $x \in [-1, 1]$.
5. Etablir que les polynômes P_n vérifient la relation de récurrence : $P_{n+1} + P_{n-1} = 2XP_n$.
6. Justifier que f_n est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, \pi]$. En dérivant deux fois l'identité $\sin \theta f_n(\theta) = \sin(n+1)\theta$, déterminer une équation différentielle linéaire homogène que vérifie f_n .
7. En déduire une équation différentielle linéaire homogène que vérifie P_n .
8. On note $P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Déduire de la question précédente une relation de récurrence entre a_{k+2} et a_k . Expliciter les a_k (on pourra distinguer le cas n pair et le cas n impair).

EXERCICE 44.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique P_n tel que $P_n(X+1) + P_n(X) = 2X^n$.
2. Trouver une relation entre P'_n et P_{n-1} .
3. Montrer que $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ et décomposer $P_n(X+1)$ sur cette base.
4. Montrer que $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.

EXERCICE 45.★★

Soient $n \in \mathbb{N}$ et Δ l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$P \longmapsto P(X+1) - P(X).$$

On pose $\Gamma_0 = 1$ et, pour tout entier $k \geq 1$,

$$\Gamma_k(X) = X(X-1) \dots (X-k+1).$$

On note Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Vérifier que $\Delta_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Montrer que $\mathcal{B}_n = (\Gamma_0, \dots, \Gamma_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Exprimer, pour tout $k \leq n$, $\Delta_n(\Gamma_k)$ dans la base \mathcal{B}_n . En déduire $\text{Im}(\Delta_n)$ et $\text{Ker}(\Delta_n)$.
4. Calculer, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $(\Delta_n)^\ell$. En déduire que Δ_n est nilpotent d'indice $n+1$.
5. Prouver que $\forall Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(X+1) - P(X) = Q(X).$$

Y-a-t-il unicité de P ?

6. Déterminer trois polynômes $P_i, i \in \{1, 2, 3\}$, tels que

$$\forall i, P_i(X+1) - P_i(X) = X^i.$$

7. En déduire la valeur des sommes suivantes,

$$S_n = 1 + \dots + n, \quad T_n = 1^2 + \dots + n^2 \quad \text{et} \quad U_n = 1^3 + \dots + n^3.$$

EXERCICE 46.

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n \geq 0}$ définie par $P_0 = 1$, $P_1 = X$, et

$$\forall n \geq 1 \quad P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}.$$

1. Calculer P_2 , P_3 et P_4 .
2. Montrer que $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$ pour tout $n \geq 0$. En déduire que P_n est pair si n est pair, et impair sinon.
3. Montrer que $\deg P_n = n$, et déterminer le coefficient dominant de P_n .
4.
 - a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel x , on a $\cos(nx) = P_n(\cos(x))$.
 - b. En déduire que P_n admet les n racines distinctes suivantes : $\{\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n}), 0 \leq k \leq n-1\}$.

EXERCICE 47.

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n \geq 1}$ définie par $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - 2$, et

$$\forall n \geq 2 \quad P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}.$$

1. Calculer P_3 et P_4 .
2. Montrer que P_n est de même parité que n .
3. Montrer que $\deg P_n = n$, et déterminer le coefficient dominant de P_n .
4. Calculer $P_n(0)$ (on distinguera selon la parité de n).
5. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$X^n + \frac{1}{X^n} = P_n\left(X + \frac{1}{X}\right).$$

6. Grâce à ce qui précède, factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :
 - a) $Q_1 = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 3X + 1$.
 - b) $Q_2 = X^6 + X^5 - 9X^4 + 2X^3 - 9X^2 + X + 1$.

EXERCICE 48.★

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = (1+X)^n - (1-X)^n$.

1. Calculer P_1, P_2, P_3, P_4 .
2. Montrer que P_n est impair.
3. Quel est le coefficient de X^n dans P_n ? Même question avec X^{n-1} .
En déduire que le degré de P_n est égal à n (respectivement $n-1$) lorsque n est impair (respectivement pair).
4. Montrer que P_n est divisible par X .
5.
 - a. Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est racine de P_n si et seulement si $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1$.
 - b. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1$, et en déduire les racines complexes de P_n (on distinguera les cas n pair et n impair).
Combien de ses racines sont réelles ?
6. Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ (on distinguera à nouveau les cas n pair et n impair).

EXERCICE 49.★★

Soient $n \in \mathbb{N}$ et a_0, a_1, \dots, a_n des nombres réels deux à deux distincts. Soit ψ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans \mathbb{R}^{n+1} définie par

$$P \mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)).$$

1. Prouver que ψ est un isomorphisme.
2. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes (L_0, \dots, L_n) de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que

$$\forall 0 \leq j, i \leq n, \quad L_j(a_i) = \delta_{i,j}.$$
3. Justifier que $\mathcal{B} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Quelles sont les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans la base \mathcal{B} ? Justifier la présence du mot *interpolateur* dans le titre de l'exercice.
4. Expliciter les polynômes (L_0, L_1, \dots, L_n) sous forme de produits.

EXERCICE 50.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient x_0, \dots, x_n n réels distincts. On définit pour $0 \leq i \leq n$ les polynômes

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j}$$

1. Montrer que (L_0, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Calculer $P = \sum_{i=0}^n x_i^k L_i$.

EXERCICE 51.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Q_n = (X^2 - 1)^n$ et $P_n = \frac{1}{2^n n!} Q_n^{(n)}$. On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

1. Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3 .
2. Quel est le degré de P_n ?
3. Montrer que P_n a la parité de n . En déduire $P_n(0)$ pour n impair et $P_n'(0)$ pour n pair.
4. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $P_n(0)$ pour n pair et $P_n'(0)$ pour n impair. On exprimera les résultats à l'aide de factorielles.
5. a. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (X^2 - 1)Q_n' = 2nXQ_n$$

- b. En dérivant $n + 1$ fois cette relation, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (X^2 - 1)P_n'' + 2XP_n' = n(n + 1)P_n$$

6. a. Montrer que $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$.
b. En appliquant le théorème de Rolle et à l'aide d'une récurrence, montrer que P_n admet exactement n racines réelles distinctes dans $] -1, 1[$.

EXERCICE 52.

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$. Montrer que la famille $((X - a)^k (X - b)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

EXERCICE 53.★

Soient $n \geq 0$ et f définie sur $E = \mathbb{K}_n[X]$ par $f(P) = P - P'$. Prouver que $f \in \text{GL}(E)$ et expliciter f^{-1} .

EXERCICE 54.★

Soient $n \in \mathbb{N}$ et ϕ l'application définie sur l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ par

$$\phi : P \longmapsto \phi(P) = (X + 1)P(X) - XP(X + 1).$$

1. ϕ définit-il un endomorphisme de E_n ?
2. Déterminer le noyau de ϕ .
3. ϕ est-il surjectif ?

EXERCICE 55.

On note $U_0 = 1$, $U_p = \frac{X(X-1)\dots(X-p+1)}{p!}$ pour $p \geq 1$ et $\Delta : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$:

$$P \longmapsto P(X+1) - P(X).$$

1. Montrer que $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
2. Calculer $\Delta^n(U_p)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que tout $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n peut s'écrire

$$P = P(0) + (\Delta P)(0)U_1 + \dots + (\Delta^n P)(0)U_n$$

4. Montrer que, pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ si et seulement si les coordonnées de P dans la base $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ sont entières.
5. Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Montrer que f est polynomiale si et seulement si $\exists n \in \mathbb{N}, \Delta^n f = 0$.

EXERCICE 56.

Soient $n \geq 3$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$, $a \in \mathbb{R}$ et φ_n l'application définie sur E_n par,

$$\varphi_n(P) = (X - a)(P'(X) + P'(a)) - 2(P(X) - P(a)).$$

1. Vérifier que $\varphi_n \in \mathcal{L}(E_n)$.
2. On pose $P_k = (X - a)^k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Justifier que la famille (P_0, \dots, P_n) est une base de E_n .
3. Calculer $\varphi_n(P_k)$ pour $0 \leq k \leq n$. On distinguera les cas $k \leq 2$ et $k \geq 3$.
4. En déduire les sous-espaces $\text{Im}(\varphi_n)$ et $\text{Ker}(\varphi_n)$. Quel est le rang de φ_n ?
5. Prouver que $E_n = \text{Ker}(\varphi_n) \oplus \text{Im}(\varphi_n)$.
6. Pour quelles valeurs de $n \geq 3$ l'endomorphisme φ_n est-il un projecteur de E_n ?

EXERCICE 57.★

Soit φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \varphi(P) = \frac{P(X+1) + P(X)}{2}$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $\varphi(X^k)$.
2. Établir que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. Dédurre de ce qui précède que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
4.
 - a. Justifier l'existence et l'unicité d'un polynôme U_n tel que $U_n(X+1) + U_n(X) = \frac{2X^n}{n!}$.
 - b. Démontrer que

$$U_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, U_n(0) + U_n(1) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, U'_n = U_{n-1}$$

- c. On pose $V_n(X) = (-1)^n U_n(1-X)$. Calculer $\varphi(V_n)$. En déduire que $U_n(1-X) = (-1)^n U_n(X)$.

EXERCICE 58.★

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X).$$

EXERCICE 59.★

Déterminer les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant $P(X+1) = P(X)$.

EXERCICE 60.

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$(P')^2 = 4P.$$

EXERCICE 61.

On cherche les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient l'équation

$$P(X^2) = XP(X).$$

1. On suppose que $P \neq 0$.
 - a. Quel est le degré de P ?
 - b. Quelle est la seule racine possible pour P ?
2. Conclure.

EXERCICE 62.

Résoudre l'équation $P'P'' = 18P$ où $P \in \mathbb{R}[X]$.

EXERCICE 63.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique P_n tel que $P_n(X+1) + P_n(X) = 2X^n$.
2. Trouver une relation entre P'_n et P_{n-1} .
3. Montrer que $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ et décomposer $P_n(X+1)$ sur cette base.
4. Montrer que $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.

EXERCICE 64.

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

EXERCICE 65.

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non nul tel que $P(X^2) = P(X+1)P(X)$.

1. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, α^{2^n} est une racine de P .
2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine non nulle de P (s'il en existe). Montrer que α est une racine de l'unité.
3. Les racines de P sont-elles toutes nécessairement des racines de l'unité ?
4. En raisonnant par l'absurde, montrer que la seule racine non nulle possible pour P est 1.
5. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X+1)P(X)$.

EXERCICE 66.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul tel que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

1. Montrer par l'absurde que 0 n'est pas racine de P .
2. Montrer que les racines de P sont de module 1.
3. En déduire tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

EXERCICE 67.

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $6P = X^2P''$.

EXERCICE 68.

On identifiera les polynômes et leurs fonctions polynomiales associées.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul vérifiant la relation

$$(*) \quad P(X^2 - 1) = P(X-1)P(X+1)$$

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On définit une suite $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par $a_0 = \alpha$ et $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Montrer que si α est racine de P , a_n est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - b. On suppose $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. (a_n) est alors une suite de réels. Montrer que (a_n) est strictement monotone.
 - c. En déduire que P n'admet aucune racine strictement positive.
2.
 - a. Montrer que -1 n'est pas racine de P .
 - b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $a_n + 1$ en fonction de α et n .
 - c. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = |a_n + 1|$. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur α la suite (r_n) est-elle strictement monotone ?
 - d. En déduire que si α est racine de P , alors $|\alpha + 1| = 1$.
 - e. Montrer que si α est racine de P , alors $|\alpha - 1| = 1$. On pourra introduire une suite (b_n) bien choisie et reprendre les questions précédentes.
3. Montrer que si P est non constant, alors P admet 0 pour unique racine.
4. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation $(*)$.