DEVOIR À LA MAISON N°15

Problème 1 —

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I = [a, b]$. On suppose que f' est strictement négative sur I, que f'' est positive sur I et que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

Partie I – Description de la méthode de Newton

1. Montrer qu'il existe un unique réel $c \in I$ tel que $f(c) = 0$.
2. **a.** Soit u un réel de I. Montrer que l'abscisse de l'intersection de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u et de l'axe des abscisses est égale à $u - \dfrac{f(u)}{f'(u)}$.

   b. Soit g la fonction définie sur I par

   $$\forall x \in I, \; g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

   On définit la suite (x_n) par $x_0 \in [a, c]$ et

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \; x_{n+1} = g(x_n)$$

   Quelle est l'interprétation géométrique de la suite (x_n) ? On illustrera son propos par une figure soignée.
3. **a.** Justifier que g est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.

   b. En déduire les variations de g sur I.

   c. Établir que $g([a, c]) \subset [a, c]$.

   d. Établir que la suite (x_n) est à valeurs dans $[a, c]$.

Partie II – Convergence de la méthode de Newton

1. **a.** Étudier le sens de variation de (x_n).

   b. Prouver que la suite (x_n) converge vers c.
2. **a.** Justifier l'existence de deux réels strictement positifs m et M tels que $|f'| \geqslant m$ et $|f''| \leqslant M$ sur I.

   b. A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que

   $$\forall x \in I, \; |g(x) - c| \leqslant (x - c)^2 \frac{M}{2m}$$

   c. On pose $K = \dfrac{M}{2m}$. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $K|x_N - c| < 1$. En déduire l'existence de deux constantes $C > 0$ et $k \in]0, 1[$ telles que

   $$\forall n \geqslant N, \; |x_n - c| \leqslant Ck^{2^n}$$

   d. Soit $q \in]0, 1[$. Montrer que la suite $(x_n - c)$ est négligeable devant la suite (q^n).