

# DEVOIR SURVEILLÉ N°4 : CORRIGÉ

## Problème 1 — D'après Petites Mines 2002

### Partie I –

1.  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^*$ .  
De plus,  $\arctan t \sim t$  donc  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} = 1 = f(0)$  donc  $f$  est continue en 0. Ainsi  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .  
Enfin,  $\arctan$  étant impaire,  $f$  est paire.
2. On sait que  $\frac{1}{1+t^2} = 1 + o(t)$ . Par intégration,  $\arctan t = \arctan 0 + t + o(t^2)$ . On en déduit que  $f(t) = 1 + o(t)$ . Ainsi  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ .
3.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  comme quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}^*$  dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,  $f$  est dérivable en 0 d'après la question précédente. Ainsi  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
De plus, pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$ ,

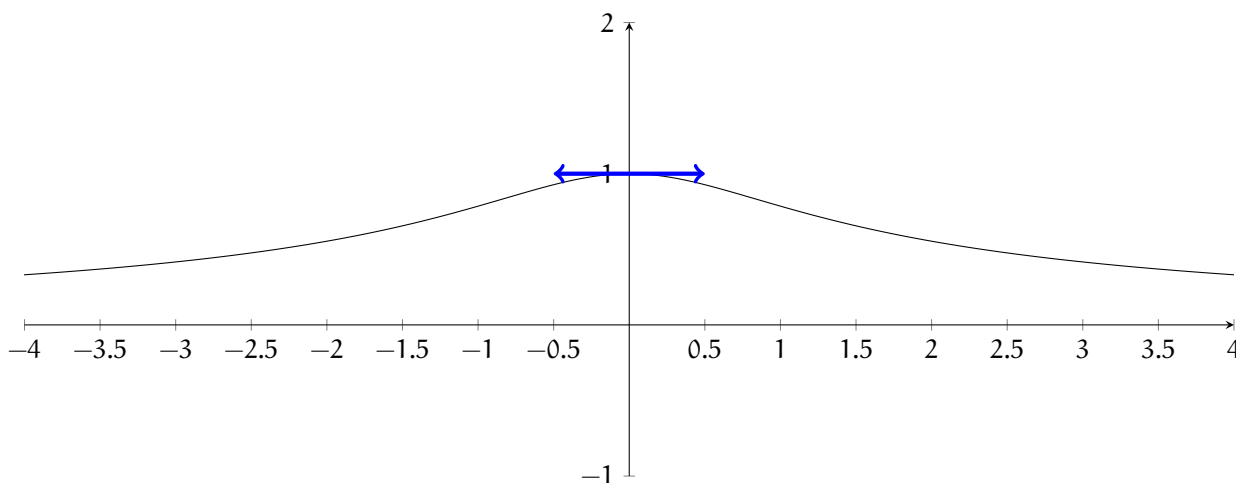
$$f'(t) = \frac{1}{t(1+t^2)} - \frac{\arctan t}{t^2}$$

4.  $u \mapsto u$  et  $u \mapsto -\frac{1}{2(1+u^2)}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  de dérivées respectives  $u \mapsto 1$  et  $u \mapsto \frac{u}{(1+u^2)^2}$ . Soit  $t \in \mathbb{R}^*$ . Par intégration par parties

$$\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du = \left[ -\frac{u}{2(1+u^2)} \right]_0^t + \int_0^t \frac{du}{2(1+u^2)} = -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{\arctan t}{2} = -\frac{1}{2} t^2 f'(t)$$

Si  $t > 0$ ,  $\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du > 0$  comme intégrale d'une fonction continue positive non constamment nulle et donc  $f'(t) < 0$ .  
Ainsi  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Comme  $f$  est paire,  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_-$ .

5. Puisque  $\lim_{+\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$ ,  $\lim_{+\infty} f = 0$ . Par parité,  $\lim_{-\infty} f = 0$ . Ainsi la courbe représentative de  $f$  admet l'axe des abscisses pour asymptote.



### Partie II –

1. Posons  $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ . Ainsi  $\phi(x) = \frac{F(x)}{x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ .  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que primitive de  $f$ . Ainsi  $\phi$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
- De plus,  $F$  est dérivable en 0 donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0)$  i.e.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = f(0)$ . Ainsi  $\phi$  est continue en 0. Finalement,  $\phi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Posons  $u(x) = F(x) + F(-x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u'(x) = F'(x) - F'(-x) = f(x) - f(-x) = 0$ . Ainsi  $u$  est constante sur  $\mathbb{R}$  égale à  $u(0) = 2F(0) = 0$ . On en déduit que  $F$  est impaire. Il s'ensuit que  $\phi$  est paire.

2. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Comme  $f$  est décroissante sur  $[0, x]$  d'après la question I.4, pour tout  $t \in [0, x]$ ,  $f(x) \leq f(t) \leq f(0)$ . Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^x f(x) dt \leq \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x dt$$

et par suite

$$xf(x) \leq x\phi(x) \leq x$$

Puisque  $x > 0$ ,

$$f(x) \leq \phi(x) \leq 1$$

L'inégalité est encore valable si  $x \in \mathbb{R}_-^*$  puisque  $f$  et  $\phi$  sont paires. Enfin, l'égalité est valable si  $x = 0$  puisque  $f(0) = \phi(0) = 1$ .

Finalement,  $f(x) \leq \phi(x) \leq 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

3.  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que primitive de  $f$ .  $\phi$  est alors dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  comme quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}^*$  dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\phi'(x) = \frac{F'(x)}{x} - \frac{F(x)}{x^2} = \frac{1}{x} (f(x) - \phi(x))$$

On sait d'après la question I.2 que  $f(x) = 1 + o(x)$  comme  $F$  est une primitive de  $f$ ,  $F(x) = F(0) + x + o(x^2)$ . Or  $F(0) = 0$  donc  $F(x) = x + o(x^2)$ . Par suite,  $\phi(x) = 1 + o(x)$ . Ainsi  $\phi$  est dérivable en 0 et  $\phi'(0) = 0$ .

Puisque pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) \leq \phi(x)$  et que  $\phi'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - \phi(x))$ ,  $\phi'$  est négative sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\phi$  est donc décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Puisque  $\phi$  est paire,  $\phi$  est croissante sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

4. Soit  $x \in [1, +\infty[$ . Pour tout  $t \in [1, x]$ ,  $0 \leq \arctan t \leq \frac{\pi}{2}$  donc  $0 \leq f(t) \leq \frac{\pi}{2t}$ . Par croissance de l'intégrale

$$\int_1^x 0 dt \leq \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^x \frac{\pi}{2t} dt$$

ou encore

$$0 \leq \int_1^x f(t) dt \leq \frac{\pi}{2} \ln x$$

puis

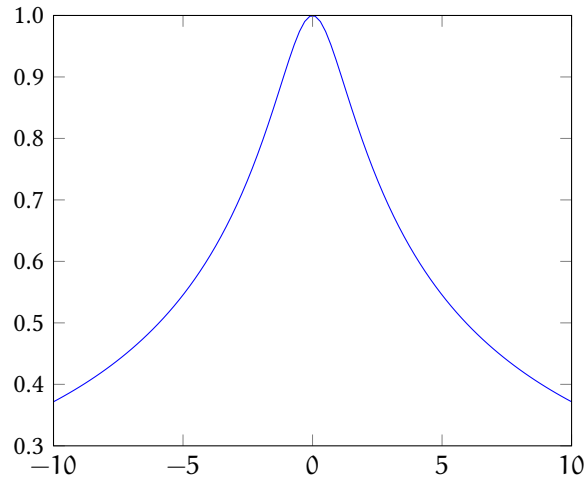
$$0 \leq \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \leq \frac{\pi}{2} \frac{\ln x}{x}$$

Par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$  via le théorème des gendarmes. Enfin, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$

$$\phi(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt$$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$ .

5. Par parité de  $\phi$ , on a également  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = 0$ . Ainsi la courbe représentative de  $\phi$  admet pour asymptote l'axe des abscisses.



### Partie III –

1. Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ . Puisque  $t \geq 0$  et  $1 + t^2 > 0$ ,  $\frac{t}{1+t^2} \geq 0$ .  
Alors  $(1 - t)^2 \geq 0$  i.e.  $1 + t^2 \geq 2t$ . Puisque  $1 + t^2 > 0$ ,  $\frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$ .  
Finalement,  $0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$ .
2. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . D'après la question II.3,  $\phi'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - \phi(x))$ . Mais d'après la question II.2,  $f(x) \leq \phi(x) \leq 1$ . On en déduit que

$$|\phi'(x)| = \frac{1}{x} (\phi(x) - f(x)) \leq \frac{1}{x} (1 - f(x))$$

De plus,

$$\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = x - \arctan x$$

Ainsi

$$\frac{1}{x} (1 - f(x)) = \frac{1}{x^2} (x - \arctan x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

D'après la question III.1

$$\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt \leq \int_0^x \frac{t}{2} dt = \frac{x^2}{4}$$

Par conséquent,  $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$ .

Comme  $\phi$  est paire,  $\phi'$  est impaire et l'inégalité précédente est encore valable si  $x \in \mathbb{R}_-$ . Enfin, cette égalité est encore valable lorsque  $x = 0$  puisque  $\phi'(0) = 0$ .

3. Posons  $v(x) = \phi(x) - x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  $v$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $v'(x) = 1 - \phi'(x)$ . Or pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$  donc, a fortiori,  $\phi'(x) < 1$  et  $v'(x) < 0$ . Ainsi  $v$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .  
Puisque  $\lim_{+\infty} \phi = \lim_{-\infty} \phi = 0$ ,  $\lim_{+\infty} v = -\infty$  et  $\lim_{-\infty} v = +\infty$ . Enfin,  $v$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,  $v$  s'annule une unique fois sur  $\mathbb{R}$  i.e. l'équation  $\phi(x) = x$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ .  
Enfin,  $v(0) = \phi(0) = 1 > 0$  et  $v(1) = \phi(1) - 1 < 0$  car  $\phi$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  donc  $\phi(1) < \phi(0) = 1$ . On peut donc assurer que  $\alpha \in ]0, 1]$ .
4. Puisque  $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\phi$  est  $\frac{1}{4}$ -lipschitzienne. Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|\phi(u_n) - \phi(\alpha)| \leq |u_n - \alpha|$  i.e.  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ .

**REMARQUE.** On peut aussi remarquer que

$$|u_{n+1} - \alpha| = |\phi(u_n) - \phi(\alpha)| = \left| \int_{\alpha}^{u_n} \phi'(x) dx \right| \leq \left| \int_{\alpha}^{u_n} |\phi'(x)| dx \right| \leq \left| \int_{\alpha}^{u_n} \frac{1}{4} dx \right| = \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$

■

On montre alors par récurrence que  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n} |u_0 - \alpha|$ . Puisque  $0 \leq \frac{1}{4} < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$  i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ .

## Partie IV –

1. L'équation différentielle équivaut à  $xy' + xy = f(x)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$  ou encore à  $(xy)' = f(x)$ . On en déduit que les solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$  sont les fonctions  $x \mapsto \phi(x) + \frac{\lambda}{x}$  où  $\lambda$  décrit  $\mathbb{R}$ .
2. Soit  $y$  une éventuelle solution de  $x^2y' + xy = \arctan x$  sur  $\mathbb{R}$ . La question IV.1 montre qu'il existe  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $y(x) = \begin{cases} \phi(x) + \frac{\lambda_1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \phi(x) + \frac{\lambda_2}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ . La continuité de  $y$  en 0 impose  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Ainsi  $\phi$  et  $y$  coïncident sur  $\mathbb{R}^*$ . Puisque ces deux fonctions sont continues, elles coïncident également en 0 et sont donc égales. Réciproquement,  $\phi$  vérifie bien l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$ . C'est donc l'unique solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $x^2y' + xy = \arctan x$ .

## SOLUTION 1.

1. On a

$$I_0 = \int_0^1 e^{-2x} dx = \left[ -\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1 = \frac{1 - e^{-2}}{2}$$

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (1-x)e^{-2x} dx = \left[ -\frac{1}{2}(1-x)e^{-2x} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= \frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-2}}{2} = \frac{1 + e^{-2}}{4} \end{aligned}$$

2. a. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $x \in [0, 1]$ ,  $1-x \in [0, 1]$  et donc  $(1-x)^{n+1} \leq (1-x)^n$ . Par croissance de l'intégrale, on en déduit que  $I_{n+1} \leq I_n$ . Ceci signifie que  $(I_n)$  est décroissante.  
b. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $\varphi_n \geq 0$  sur  $[0, 1]$ ,  $I_n \geq 0$ .  
c. La suite  $(I_n)$  est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.
3. a. Par décroissance de  $g$ , on a  $g(x) \leq 1$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . Par conséquent,  $\varphi_n(x) \leq (1-x)^n$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . Ainsi

$$I_n \leq \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1}$$

- b. On a  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . D'après le théorème des gendarmes,  $(I_n)$  converge vers 0.

4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par intégration par parties :

$$2I_{n+1} = \int_0^1 2(1-x)^{n+1} e^{-2x} dx = \left[ -(1-x)^{n+1} e^{-2x} \right]_0^1 + (n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx = 1 - (n+1)I_n$$

5. On a donc  $nI_n = 1 - I_n - 2I_{n+1}$ . Puisque  $(I_n)$  converge vers 0,  $(I_{n+1})$  converge également vers 0 (suite extraite) et  $(nI_n)$  converge vers 1.
6. On a  $nI_n - 1 = -I_n - 2I_{n+1}$  donc

$$n(nI_n - 1) = -nI_n - 2nI_{n+1} = -nI_n - 2(n+1)I_{n+1} + 2I_{n+1}$$

Comme  $(nI_n)$  converge vers 1,  $((n+1)I_{n+1})$  converge également vers 1 (suite extraite) et puisque que  $(I_{n+1})$  converge vers 0, la suite  $(n(nI_n - 1))$  converge vers  $-3$ .

7. Puisque  $(n(nI_n - 1))$  converge vers  $-3$ , on en déduit que  $nI_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{3}{n}$  i.e.  $nI_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ . Puis il vient

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \text{ Ainsi } a = 0, b = 1 \text{ et } c = -3.$$