

CORRIGÉ TD : FRACTIONS RATIONNELLES, SOUS-ESPACES AFFINES

SOLUTION 1.

1. Les pôles sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité et ils sont simples donc :

$$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{a_\omega}{X - \omega}$$

avec

$$a_\omega = \frac{1}{(X^n - 1)'(\omega)} = \frac{1}{n\omega^{n-1}} = \frac{\omega}{n}$$

2. De la même façon,

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{a_\omega}{X - \omega}$$

avec

$$a_\omega = \frac{X^{n-1}(\omega)}{(X^n - 1)'(\omega)} = \frac{\omega^{n-1}}{n\omega^{n-1}} = \frac{1}{n}$$

3. Les pôles sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Pour $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$, le pôle ω est simple donc le coefficient de $\frac{1}{X - \omega}$ dans la décomposition en éléments simples est :

$$\begin{aligned} a_\omega &= \frac{1}{[(X-1)(X^n-1)]'(\omega)} \\ &= \frac{1}{(X^n-1+n(X-1)X^{n-1})(\omega)} = \frac{\omega}{n(\omega-1)} \end{aligned}$$

Notons a_1 et b_1 les coefficients respectifs de $\frac{1}{X-1}$ et $\frac{1}{(X-1)^2}$ dans la décomposition en éléments simples. On remarque que

$$\frac{1}{(X-1)(X^n-1)} = \frac{1}{(X-1)^2(1+X+\dots+X^{n-1})}$$

donc en multipliant par $(X-1)^2$ et en prenant la valeur en 1, on obtient $b_1 = \frac{1}{n}$. Enfin, on obtient a_1 en dérivant $\frac{1}{1+X+\dots+X^{n-1}}$ et en prenant la valeur en 1 :

$$a_1 = -\frac{1+2+\dots+(n-1)}{n^2} = \frac{1-n}{2n}$$

SOLUTION 2.

La décomposition en éléments simples de F est du type :

$$F = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{X^k} + \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{(1-X)^k}$$

Le développement limité de $\frac{1}{(1-x)^n}$ en 0 à l'ordre $n-1$ est :

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} x^n F(x) &= \sum_{k=1}^n a_k x^{n-k} + x^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{b_k}{(1-x)^k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} x^k + o(x^{n-1}) \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on en déduit $a_k = \binom{n+k}{k}$ pour $1 \leq k \leq n$. De plus, $F(1-X) = F(X)$ donc $b_k = a_k$ pour $1 \leq k \leq n$.

SOLUTION 3.

1. La partie entière de F est 1. F admet deux pôles simples 1 et 2. Par conséquent la DES de F est :

$$F = \frac{X^2 + 2X + 5}{(X-1)(X-2)} = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}$$

De plus,

$$(X-1)F = \frac{X^2 + 2X + 5}{X-2}$$

En substituant 1 à X , on trouve $a = -8$.

De même,

$$(X-2)F = \frac{X^2 + 2X + 5}{X-1}$$

En substituant 2 à X , on trouve $b = 13$.

La DES de F est donc :

$$F = 1 - \frac{8}{X-1} + \frac{13}{X-2}$$

2. La partie entière de F est nulle. F admet deux pôles doubles conjugués i et $-i$. Comme F est à coefficients réels, la DES de F est :

$$F = \frac{4}{(X-i)^2(X+i)^2} = \frac{a}{(X-i)^2} + \frac{b}{X-i} + \frac{\bar{a}}{(X+i)^2} + \frac{\bar{b}}{X+i}$$

On a

$$(X-i)^2 F = \frac{4}{(X+i)^2}$$

En substituant i à X , on trouve $a = -1$.

De plus,

$$[(X-i)^2 F]' = -\frac{8}{(X+i)^3}$$

En substituant i à X , on trouve $b = -i$.

La DES de F est donc :

$$F = -\frac{1}{(X-i)^2} - \frac{i}{X-i} - \frac{1}{(X+i)^2} + \frac{i}{X+i}$$

3. La partie entière de F est nulle. F admet un pôle simple 0 et un pôle triple 1. La DES de F est :

$$F = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X}$$

On évalue $(X-1)^3 F = \frac{1}{X}$ en 1 et on trouve $a = 1$.

On pose alors

$$G = F - \frac{1}{(X-1)^3} = -\frac{1}{X(X-1)^2}$$

et la DES de G est :

$$G = \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X}$$

On évalue $(X-1)^2 G = -\frac{1}{X}$ en 1 et on trouve $b = -1$.

On évalue $[(X-1)^2 G]' = \frac{1}{X^2}$ en 1 et on trouve $c = 1$.

On évalue enfin $XF = \frac{1}{(X-1)^3}$ en 0 et on trouve $d = -1$.

La DES de F est donc :

$$F = \frac{1}{(X-1)^3} - \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X}$$

4. La partie entière de F est nulle. F admet deux pôles simples i et $-i$. Comme $2X = (X+i) + (X-i)$, la DES de F est :

$$F = \frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i}$$

5. La partie entière de F est nulle. Elle admet deux pôles simples conjugués j et \bar{j} . Comme F est à coefficients réels :

$$F = \frac{1}{(X-j)(X-\bar{j})} = \frac{a}{X-j} + \frac{\bar{a}}{X-\bar{j}}$$

On évalue $(X-j)F = \frac{1}{X-\bar{j}}$ en j et on trouve $a = \frac{1}{j-\bar{j}} = -\frac{i\sqrt{3}}{3}$. La DES de F est donc :

$$F = -\frac{i\sqrt{3}}{3(X-j)} + \frac{i\sqrt{3}}{3(X-\bar{j})}$$

6. La partie entière de F est nulle. F admet deux pôles triples 1 et -1. La DES de F est :

$$F = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X+1)^3} + \frac{e}{(X+1)^2} + \frac{f}{X+1}$$

Comme F est impaire, on a $d = a$, $e = -b$ et $f = c$. On évalue $(X-1)^3 F = \frac{X}{(X+1)^3}$ en 1 et on trouve $a = \frac{1}{8}$ et donc $d = \frac{1}{8}$.

On a $XF = \frac{X^2}{(X-1)^3}$. En considérant la limite en $+\infty$, on trouve $c + f = 0$ i.e. $2c = 0$ et donc $c = f = 0$.

En évaluant F en 2, on obtient $b = -\frac{1}{16}$.

La DES de F est donc :

$$F = -\frac{1}{16(X-1)^2} + \frac{1}{8(X-1)^3} + \frac{1}{16(X+1)^2} + \frac{1}{8(X+1)^3}$$

SOLUTION 4.

Posons $F = -\frac{P'}{P}$. On a

$$F' = \frac{P'^2 - PP''}{P^2} = \frac{Q}{P^2}$$

Notons x_1, x_2, \dots, x_n les racines de P. On sait que

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X-x_k}$$

Et donc

$$F' = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(X-x_k)^2}$$

Par conséquent,

$$Q = P^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(X-x_k)^2}$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_k, 1 \leq k \leq n\}$. On a donc $Q(x) > 0$. De plus, pour $1 \leq k \leq n$,

$$Q(x_k) = P'(x_k)^2 > 0$$

car x_k étant une racine simple de P , il n'est pas racine de P' . Finalement, $Q(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui prouve que Q n'a pas de racines réelles.

SOLUTION 5.

1. On peut démontrer l'existence par récurrence ou à l'aide de la formule de Moivre. Utilisons cette dernière méthode.

$$\begin{aligned} e^{ni\theta} &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \sin^k \theta \cos^{n-k} \theta \\ &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k} \theta \cos^{n-2k} \theta + i \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k \sin^{2k} \theta \cos^{n-2k-1} \theta \\ &= \cos n\theta + i \sin n\theta \end{aligned}$$

On a donc

$$\cos n\theta = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k} \theta \cos^{n-2k} \theta = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (\cos^2 \theta - 1)^k \cos^{n-2k} \theta$$

Il suffit donc de prendre $T_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}$.

Démontrons l'unicité. Supposons qu'il existe deux polynômes T_n et \tilde{T}_n vérifiant la condition de l'énoncé. Comme $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, T_n et \tilde{T}_n coïncident sur $[-1, 1]$ qui est un ensemble infini. Donc $T_n = \tilde{T}_n$.

Chaque terme de la somme définissant T_n est degré n et de coefficient dominant $\binom{n}{2k}$. La somme de ces coefficients étant non nulle, on en déduit que $\deg T_n = n$.

2. Remarquons que $\cos n\theta$ s'annule pour $\theta = \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On a donc $T_n(\cos \theta_k) = 0$. Pour $0 \leq k \leq n-1$, $\theta_k \in [0, \pi]$ et \cos est injective sur $[0, \pi]$, ce qui prouve que les $x_k = \cos \theta_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$ sont n racines *distinctes* de T_n . Or $\deg T_n = n$. Les x_k pour $0 \leq k \leq n-1$ sont donc exactement les racines de T_n .

3. Pour $n = 0$, $T_0 = 1$. Donc $\frac{1}{T_0} = 1$. Supposons $n \geq 1$. Alors $\deg \frac{1}{T_n} < 0$ et la partie entière de $\frac{1}{T_n}$ est nulle. Tous les pôles de $\frac{1}{T_n}$ sont simples et le coefficient de $\frac{1}{X - x_k}$ dans la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{T_n}$ est $\frac{1}{T'_n(x_k)}$. Dérivons l'identité $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$. On obtient $-T'_n(\cos \theta) \sin \theta = -n \sin n\theta$. On a donc $T'_n(x_k) \sin \theta_k = n \sin n\theta_k$. Or pour $0 \leq k \leq n-1$, $\theta_k \in]0, \pi[$ donc $\sin \theta_k \neq 0$ et $\sin n\theta_k = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$. On en déduit $T'_n(x_k) = \frac{(-1)^k n}{\sin \theta_k}$. La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{T_n}$ est donc

$$\frac{1}{T_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin \theta_k}{X - \cos \theta_k}$$

SOLUTION 6.

1. On montre l'existence par récurrence double. Soit $HR(n)$ l'hypothèse de récurrence :

«Il existe un polynôme $A_n \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A_n\left(X + \frac{1}{X}\right) = X^n + \frac{1}{X^n}$.»

HR(0) et HR(1) sont vraies : il suffit de prendre $A_0 = 2$ et $A_1 = X$. Supposons HR(n) et HR($n+1$) pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $X^{n+2} + \frac{1}{X^{n+2}} = \left(X^{n+1} + \frac{1}{X^{n+1}}\right)\left(X + \frac{1}{X}\right) - \left(X^n + \frac{1}{X^n}\right)$. Il suffit donc de prendre $A_{n+2} = XA_{n+1} - A_n$. HR($n+2$) est donc vraie et on conclut par récurrence double.

Supposons qu'il existe deux polynômes A_n et \tilde{A}_n vérifiant la condition de l'énoncé. Comme l'application $\begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \frac{1}{x} \end{cases}$ est surjective, les polynômes A_n et \tilde{A}_n coïncident sur \mathbb{R} qui est un ensemble infini. Donc $A_n = \tilde{A}_n$.

2. Les racines de l'équation $z^n + \frac{1}{z^n} = 0$ sont les racines $2n^{\text{èmes}}$ de -1 , à savoir les $z_k = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}$ pour $0 \leq k \leq 2n-1$. On en déduit que les $x_k = z_k + \frac{1}{z_k}$ sont des racines de A_n . On trouve alors $x_k = 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$. Pour $0 \leq k \leq n-1$, $\frac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$ et \cos est injective sur $[0, \pi]$: les x_k pour $0 \leq k \leq n-1$ sont donc deux à deux distincts. A_n possède donc n racines distinctes. Or l'égalité définissant A_n montre que A_n est de degré n . Les x_k pour $0 \leq k \leq n-1$ sont donc exactement les racines de A_n .

3. Pour $n=0$, $\frac{1}{A_0} = \frac{1}{2}$. Supposons $n \geq 1$. Alors $\deg \frac{1}{A_n} < 0$. La fraction rationnelle $\frac{1}{A_n}$ admet donc une partie entière nulle. De plus, tous les pôles de $\frac{1}{A_n}$ sont simples et le coefficient de $\frac{1}{X - x_k}$ dans la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{A_n}$ est $\frac{1}{A'_n(x_k)}$. En dérivant l'identité $A_n\left(X + \frac{1}{X}\right) = X^n + \frac{1}{X^n}$, on obtient

$$\left(1 - \frac{1}{X^2}\right)A'_n\left(X + \frac{1}{X}\right) = n\left(X^{n-1} - \frac{1}{X^{n+1}}\right)$$

En substituant z_k à X et en utilisant le fait que $x_k = z_k + \frac{1}{z_k}$, on obtient

$$\left(1 - \frac{1}{z_k^2}\right)A'_n(x_k) = n\left(z_k^{n-1} - \frac{1}{z_k^{n+1}}\right)$$

Comme les z_k sont des racines $2n^{\text{èmes}}$ de -1 , $z_k^2 \neq 1$ et donc $1 - \frac{1}{z_k^2} \neq 0$. De plus, $z_k^n = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2}} = (-1)^k i$. Ainsi

$$A'_n(x_k) = \frac{2(-1)^k i}{z_k} \frac{1}{1 - \frac{1}{z_k^2}} = \frac{2n(-1)^k i}{z_k - \frac{1}{z_k}} = \frac{(-1)^k n}{\sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{A_n}$ est donc :

$$\frac{1}{A_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin \theta_k}{X - 2 \cos \theta_k}$$

avec $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$.

SOLUTION 7.

1. On a $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{x-k}$. f_n est continue sur $]0, 1[$ et f_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$ comme somme de fonctions strictement décroissantes sur $]0, 1[$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = -\infty$. Donc f_n s'annule une unique fois sur $]0, 1[$. Par conséquent, P'_n s'annule une unique fois sur $]0, 1[$.

2. Posons $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Puisque $f_n(x_n) = 0$,

$$\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k - x_n}$$

Puisque $0 < x_n < 1$, $\frac{1}{x_n} > H_n$. Il est classique de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

3. A nouveau,

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-x_n}$$

Puisque $x_n < 1$,

$$H_n < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} = \frac{1}{1-x_n} + H_{n-1} = \frac{1}{1-x_n} + \frac{1}{n} + H_n$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x_n} + \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$

$$\frac{1}{1-x_n} + \frac{1}{n} + H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} H_n$$

On en déduit que $\frac{1}{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} H_n$. Il est classique de montrer que $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$ donc $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}$.

SOLUTION 8.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que P' divise P . Il existe donc $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = P'Q$. Si P est constant, alors P est nul. Supposons donc $\deg P = n \geq 1$. Alors $\deg Q = 1$ et en raisonnant sur les coefficients dominants, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $Q = \frac{1}{n}(X-a)$. Ainsi $nP = (X-a)P'$. Posons $F = \frac{P}{(X-a)^n}$. Alors $F' = (X-a)^n P' - n(X-a)^{n-1} P(X-a)^{2n} = 0$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $F = \lambda$ et donc $P = \lambda(X-a)^n$. En prenant $\lambda = 0$, on retrouve le polynôme nul.

Réciproquement, on vérifie que tout polynôme de la forme $\lambda(X-a)^n$ convient.

SOLUTION 9.

1. On a $\frac{1}{X^2+X} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$. Ainsi

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

2. On a $\frac{1}{4X^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2X-1} - \frac{1}{2X+1} \right)$. Ainsi

$$v_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$$

On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

3. On a $\frac{1}{X^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} \right)$. Ainsi

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{3}{4}$.

4. On a $\frac{X-2}{X^3+3X^2+2X} = -\frac{2}{X+2} + \frac{3}{X+1} - \frac{1}{X}$. Ainsi

$$\begin{aligned} z_n &= \sum_{k=1}^n -\frac{2}{k+2} + \frac{3}{k+1} - \frac{1}{k} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) + \frac{1}{n+1} - 1 = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} \end{aligned}$$

On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$.

SOLUTION 10.

1. La partie polaire relative au pôle 1 est du type $\frac{\lambda}{X-1}$. On trouve $\lambda = \frac{2}{2^6} = \frac{1}{32}$.

2. On a

$$\begin{aligned} G(-1+h) &= \frac{2-2h+h^2}{-2+h} = -\frac{1-h+\frac{h^2}{2}}{1-\frac{h}{2}} \\ &= -1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} - \frac{h^4}{16} - \frac{h^5}{32} + o(h^5) \end{aligned}$$

Ainsi

$$G(x) =_{x \rightarrow -1} -1 + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{1}{8}(x+1)^3 - \frac{1}{16}(x+1)^4 - \frac{1}{32}(x+1)^5 + o((x+1)^5)$$

3. Or on sait que la décomposition en éléments simples de F est du type

$$F(X) = \frac{1}{32(X-1)} + \sum_{k=1}^6 \frac{\lambda_k}{(X+1)^k}$$

On en déduit que

$$G(x) =_{x \rightarrow -1} \sum_{k=0}^5 \lambda_{6-k} (x+1)^k$$

Par unicité du développement limité, on trouve :

$$\lambda_1 = -\frac{1}{32} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{16} \quad \lambda_3 = -\frac{1}{8} \quad \lambda_4 = -\frac{1}{4} \quad \lambda_5 = \frac{1}{2} \quad \lambda_6 = -1$$

La décomposition en éléments simples de F est donc

$$F = \frac{1}{32(X-1)} - \frac{1}{32(X+1)} - \frac{1}{16(X+1)^2} - \frac{1}{8(X+1)^3} - \frac{1}{4(X+1)^4} + \frac{1}{2(X+1)^5} - \frac{1}{(X+1)^6}$$

SOLUTION 11.

1. Il existe des réels a, b, c, d tels que

$$F = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{X^2-X+1}$$

En multipliant par X^2+1 et en évaluant en i , on obtient $ai+b=-1+i$ d'où $a=1$ et $b=-1$.

En multipliant par X^2-X+1 et en évaluant en $-j$, on obtient $-cj+d=2+j$ d'où $c=-1$ et $d=2$. Finalement, la décomposition en éléments simples de F est

$$F = \frac{X-1}{X^2+1} - \frac{X-2}{X^2-X+1}$$

2. Il existe des réels λ, μ, a, b, c, d tels que

$$F = \frac{\lambda}{X} + \frac{\mu}{X^2} + \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{(X^2+1)^2}$$

F est paire ce qui fournit par unicité de la décomposition en éléments simples,

$$\lambda = 0$$

$$a = 0$$

$$c = 0$$

En multipliant par X^2 et en évaluant en 0, on obtient $\mu = 1$.

En multipliant par $(X^2+1)^2$ et en évaluant en i , on obtient $d = -1$.

Enfin en évaluant en 1, on obtient $a = -1$. Finalement, la décomposition en éléments simples de F est

$$F = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X^2+1} - \frac{1}{(X^2+1)^2}$$

De manière plus astucieuse,

$$\begin{aligned} F &= \frac{X^2+1-X^2}{X^2(X^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{X^2(X^2+1)} - \frac{1}{(X^2+1)^2} \\ &= \frac{X^2+1-X^2}{X^2(X^2+1)} - \frac{1}{(X^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X^2+1} - \frac{1}{(X^2+1)^2} \end{aligned}$$

3. Il existe des réels λ, a, b, c, d tels que

$$F = \frac{\lambda}{X} + \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{cX+d}{(X^2+X+1)^2}$$

En multipliant par X et en évaluant en 0, on obtient $\lambda = 1$. En multipliant par $(X^2+X+1)^2$ et en évaluant en j , on obtient $\frac{j^2+1}{j} = c j + d$ d'où $c = 0$ et $d = -1$.

En considérant $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x)$, on obtient $a = -\lambda = -1$.

Enfin, en évaluant en -1 , on obtient $b = -1$. Finalement, la décomposition en éléments simples de F est

$$F = \frac{1}{X} - \frac{X+1}{X^2+X+1} - \frac{1}{(X^2+X+1)^2}$$

De manière plus astucieuse,

$$\begin{aligned} F &= \frac{X^2+X+1-X}{X(X^2+X+1)^2} = \frac{1}{X(X^2+X+1)} - \frac{1}{(X^2+X+1)^2} \\ &= \frac{X^2+X+1-X(X+1)}{X(X^2+X+1)} - \frac{1}{(X^2+X+1)^2} \\ &= \frac{1}{X} - \frac{X+1}{X^2+X+1} - \frac{1}{(X^2+X+1)^2} \end{aligned}$$

4. Il existe des réels λ, a, b, c, d tels que

$$F = \frac{\lambda}{X} + \frac{aX+b}{X^2+X+3} + \frac{cX+d}{(X^2+X+3)^2}$$

En multipliant par X et en évaluant en 0, on obtient $\lambda = \frac{1}{3}$. En multipliant par $(X^2+X+3)^2$ et en évaluant une racine α de X^2+X+3 , on obtient $2 + \frac{3}{\alpha} = c\alpha + d$. Or $\alpha^2 + \alpha + 3 = 0$ donc $\frac{3}{\alpha} = -\alpha - 1$ puis $1 - \alpha = c\alpha + d$ donc $c = -1$ et $d = 1$. En considérant $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x)$, on obtient $a = -\lambda = -\frac{1}{3}$.

Enfin, en évaluant en -1 , on trouve $b = -\frac{1}{3}$. Finalement, la décomposition en éléments simples de F est

$$F = \frac{1}{3X} - \frac{X+1}{3(X^2+X+3)} - \frac{X-1}{(X^2+X+1)^2}$$

SOLUTION 12.

On pose $Q = \frac{4X}{X^4-1}$. On sait que Q possède les quatre pôles simples $\pm 1, \pm i$. Il existe donc des complexes (non-nuls) a, b, c, d tels que

$$Q = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i}.$$

(La partie entière est nulle car $\deg Q$ est négatif.) En multipliant avec $X-1$ puis en remplaçant $X=1$ on trouve $a=1$. De manière analogue on procède pour b, c, d . Enfin on trouve

$$\frac{4X}{X^4-1} = \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i}.$$

En rassemblant les termes conjugués ci-dessus, on obtient

$$\varphi(x) = \frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1}.$$

Donc

$$\Phi(x) = \ln|x^2-1| - \ln(x^2+1) = \ln \frac{|x^2-1|}{x^2+1}$$

est une primitive de φ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

SOLUTION 13.

Supposons par l'absurde qu'il existe $R \in \mathbb{K}(X)$ telle que $R' = \frac{1}{X}$. Quitte à factoriser "maximalement" X au numérateur et au dénominateur on peut écrire R sous la forme

$$R = \frac{X^m A}{B},$$

où $m \in \mathbb{Z}$, $A, B \in \mathbb{K}[X]$, $A(0) \neq 0$, $B(0) \neq 0$. Alors on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} &= \left(\frac{X^m A}{B} \right)' = \frac{(mX^{m-1}A + X^m A')B - X^m AB'}{B^2} \\ &= \frac{X^{m-1}(mAB + X(A'B - AB'))}{B^2} \end{aligned}$$

ou encore

$$B^2 = X^m(mAB + X(A'B - AB')).$$

- Si $m=0$, alors $B^2 = X(A'B - AB')$, d'où $B(0)^2 = 0$. Contradiction.
- Si $m > 0$, alors on a aussi $B(0)^2 = 0$. Contradiction.
- Si $m < 0$, alors la contradiction est que le polynôme B^2 possède un pôle d'ordre $-m$ en 0. En effet, ce pôle ne se "simplifie" pas car pour le numérateur on a

$$(mAB + X(A'B - AB'))(0) = mA(0)B(0) \neq 0.$$

SOLUTION 14.

Faisons le changement de variable $x = \cos t$. Alors pour les formes différentielles on a $dx = -\sin t dt$, d'où

$$\int_0^\pi \frac{\sin t dt}{4 - \cos^2 t} = \int_1^{-1} \frac{-dx}{4 - x^2} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{4 - x^2}$$

Il est aisé de décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{1}{4-X^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{X+2} - \frac{1}{X-2} \right)$$

Ainsi

$$\int_0^\pi \frac{\sin t \, dt}{4 - \cos^2 t} = \frac{1}{4} \left(\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+2} - \int_{-1}^1 \frac{dx}{x-2} \right) = \frac{\ln 3}{2}.$$

SOLUTION 15.

1. La fraction

$$\frac{1}{x^2 + 2}$$

est un élément simple.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

2. Décomposition :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{x+1} - \frac{1/2}{x-1}.$$

Intégrale :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2} = \ln(3).$$

3. Pas besoin de décomposer la fraction rationnelle, car $2x+1$ est la dérivée de x^2+x-3 !

$$\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3} dx = \ln(3).$$

4. On peut évidemment décomposer la fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{x}{x^4+16} = \frac{\sqrt{2}/8}{x^2-2x\sqrt{2}+4} - \frac{\sqrt{2}/8}{x^2+2x\sqrt{2}+4},$$

mais il est bien plus simple de faire le changement de variables $x^2 = u$. Alors

$$\int_0^2 \frac{x \, dx}{x^4+16} = \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{du}{u^2+16} = \frac{\pi}{32}.$$

5. La décomposition de la fraction

$$\frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}$$

est

$$1 + \frac{565}{(x-4)^4} + \frac{163}{(x-4)^2} + \frac{22}{x-4} + \frac{507}{(x-4)^3}$$

primitives sont

$$x - \frac{507}{2/(x-4)^2} - \frac{565}{3/(x-4)^3} - 163 \frac{(x-4)}{+} 22 \ln|x-4|$$

Enfin,

$$\int_0^3 \frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3} dx = \frac{4671}{64} - 44 \ln(2).$$

6. Décomposition :

$$\frac{1}{x^3-7x+6} = \frac{1}{20(x+3)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{5(x-2)}.$$

Primitives :

$$\frac{1}{20} \ln \left| \frac{(x-2)^4(x+3)}{(x-1)^5} \right|,$$

d'où

$$\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6} = \frac{1}{10} \ln(27/4).$$

7. Décomposition :

$$\frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8} = 2x+3 + \frac{2}{x+2} + \frac{3x-1}{x^2-2x+4}.$$

Les primitives sont :

$$x^2+3x+\ln(x+2)^2 + \frac{3}{2} \ln(x^2-2x+4) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Intégrale :

$$I = 6 + \frac{7\ln(3)-3\ln(7)}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

8. Décomposition :

$$\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}.$$

Primitives :

$$\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + 2 \arctan(x),$$

d'où

$$\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1} dx = \ln(3/2) + 2 \arctan(1/7).$$

9. La décomposition est

$$\frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2} = 1 + \frac{4/3}{(x-1)^2} + \frac{11/9}{x-1} - \frac{11/9}{x+2}.$$

On trouve alors

$$\int_{-1}^0 \frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2} dx = \frac{5}{3} - \frac{22}{9} \ln(2).$$

10. La décomposition de la fraction

$$\frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}$$

est

$$\frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^2+2} - \frac{6}{(x^2+2)^2} - \frac{12x-16}{(x^2+2)^3};$$

les primitives sont

$$-\frac{1}{x^3} + \frac{2x+3}{(x^2+2)^2} + \sqrt{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Enfin

$$I = \frac{37}{72} + 2\sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

11. Décomposition de la fraction rationnelle :

$$\frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4} = \frac{2x+3}{x^2+1} - \frac{2x+5}{x^2+4}.$$

Primitives :

$$\ln \left| \frac{x^2+1}{x^2+4} \right| + 3 \arctan(x) - \frac{5}{2} \arctan(x/2).$$

Alors

$$I_a = \ln \left| \frac{a^2 + 1}{a^2 + 4} \right| + 3 \arctan(a) - \frac{5}{2} \arctan(a/2) + 2 \ln(2).$$

Enfin

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} I_a = \frac{\pi}{4} + 2 \ln(2).$$

12. Pour factoriser le dénominateur, penser à écrire

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2;$$

on trouve alors

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{(x\sqrt{2} + 2)/4}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} - \frac{(x\sqrt{2} - 2)/4}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}.$$

Les primitives s'écrivent

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \\ & \frac{1}{2\sqrt{2}} (\arctan(x\sqrt{2} + 1) + \arctan(x\sqrt{2} - 1)) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left(\frac{33 + 20\sqrt{2}}{17} \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\pi - \arctan(2\sqrt{2}/3)).$$

SOLUTION 16.

1. Notons I l'intégrale à calculer. Le changement de variable $u = \cos t$ donne

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \frac{du}{4 - u^2} \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2 + u} + \frac{1}{2 - u} \right) du \\ &= \frac{1}{4} ([\ln(2 + u)]_{-1}^1 - [\ln(2 - u)]_{-1}^1) = \frac{1}{2} \ln 3 \end{aligned}$$

2. Notons J l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin t \, dt}{1 - \cos^2 t}$$

Le changement de variable $u = \cos t$ donne

$$\begin{aligned} J &= - \int_0^{\cos x} \frac{du}{1 - u^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\cos x} \left(\frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u + 1} \right) du \\ &= \frac{1}{2} ([\ln(1 - u)]_0^{\cos x} - [\ln(u + 1)]_0^{\cos x}) \\ &= \frac{1}{2} (\ln(1 - \cos x) - \ln(1 + \cos x)) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\tan^2 \frac{x}{2} \right) = \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

car pour $x \in]0, \pi[$, $\tan \frac{x}{2} > 0$.

3. Notons K l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$K = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t \, dt}{(1 - \sin^2 t)^2}$$

Le changement de variable $u = \sin t$ fournit donc

$$K = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{(1 - u^2)^2}$$

Une décomposition en éléments simples donne ensuite

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(u-1)^2} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u+1)^2} + \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \frac{1}{4} \left(\left[\frac{1}{u-1} \right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - [\ln(1-u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\frac{1}{u+1} \right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + [\ln(1+u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \\ &= \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \end{aligned}$$

4. Notons L l'intégrale à calculer. Le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$ allié à la paramétrisation rationnelle du cercle donne

$$L = 2 \int_0^1 \frac{du}{1 - u^2 + 2u}$$

Une décomposition en éléments simples donne alors

$$\begin{aligned} K &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{u + \sqrt{2} - 1} - \frac{1}{u - 1 - \sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left([\ln(u + \sqrt{2} - 1)]_0^1 - [\ln(1 + \sqrt{2} - u)]_0^1 \right) \\ &= \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

SOLUTION 17.

1. On cherche une suite (v_n) vérifiant la relation de récurrence sous la forme $(an^2 + bn + c)_{n \in \mathbb{N}}$. Cela implique

$$\forall n \in \mathbb{N}, a(n+2)^2 + b(n+2) + c - an^2 - bn - c = n - 1$$

Il suffit alors de prendre $a = \frac{1}{4}$ et $b = -1$. On choisira donc $v_n = \frac{1}{4}n^2 - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. On a $\mathcal{A} = (v_n) + F$ avec F le sous-espace vectoriel des suites (u_n) telles que $u_{n+2} - u_n = 0$. Les racines de $X^2 - 1$ sont ± 1 . Une base de F est donc $((1)_{n \in \mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}})$.

SOLUTION 18.

Ponsons $\Phi(P) = X^2 P'' - 3XP' + 4P$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$. Φ est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Si $\mathcal{F} \neq \emptyset$, alors \mathcal{F} est un sous-espace affine de direction $\text{Ker } \Phi$.

Recherche de la solution générale Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Notons n le degré de P et a le coefficient dominant de P . Si $n \geq 2$, P est de degré au plus n et le coefficient du terme de degré n de $\Phi(P)$ est $n(n-1)a - 3na + 4a = a(n^2 - 4n + 4)$. Donc $P \in \text{Ker } \Phi$ implique $n \geq 2$. Posons $P = aX^2 + bX + c$. Alors $\Phi(P) = bX + 4c$. Donc $P \in \text{Ker } \Phi$ implique $b = c = 0$. On en déduit que $\text{Ker } \Phi = \text{vect}(X^2)$.

Recherche d'une solution particulière On recherche P tel que $\Phi(P) = 4 - X$. En reprenant les notations précédentes, on a vu que si $n > 2$ alors $\deg \Phi(P) = n > 2$. On recherche donc P de degré $n \leq 2$. Comme $\text{Ker } \Phi = \text{vect}(X^2)$, on peut rechercher P de degré $n \leq 1$. Posons donc $P = aX + b$. On a $\Phi(P) = aX + 4b$. Il suffit donc de prendre $a = -1$ et $b = 1$.

En conclusion $\mathcal{F} = (-X + 1) + \text{vect}(X^2)$.

SOLUTION 19.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. En considérant les coefficients dominants, on voit que $\deg(P(X+1) - P(X)) = \deg P - 1$ si $\deg P \geq 1$ et $\deg(P(X+1) - P(X)) = -\infty$ sinon. On va donc chercher P de degré 3 appartenant à E . Posons donc $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On a alors $P(X+1) - P(X) = 3aX^2 + (2b + 3a)X + a + b + c$. On peut donc prendre $d = 0$ et a, b, c vérifiant le système

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 2b + 3a = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

On trouve $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{6}$. On peut donc choisir $P = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X$.

2. Notons Φ l'endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ qui à une fonction f associe $x \mapsto f(x+1) - f(x)$ et $g : x \mapsto x^2$. On a donc $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid \Phi(f) = g\}$. Comme $\Phi(P) = g$, $E = P + \text{Ker } \Phi$. Enfin, $\text{Ker } \Phi$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ constitué des fonctions continues périodiques de période 1.

SOLUTION 20.

1. Soient $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$. Puisque $E = F + G$, il existe $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$. Par suite $B - \vec{v} = A + \vec{u} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.
2. Comme $E = F + G$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide d'après la première question et c'est un sous-espace affine. De plus, la direction de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est $F \cap G = \{0_E\}$. Ainsi $\dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = 0$: $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un singleton.