Devoir surveillé n°09

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

Le but de cet exercice est de montrer l'existence de points fixes de l'exponentielle complexe, c'est-à-dire qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = z$.

1. L'exponentielle admet-elle des points fixes sur $\mathbb{R}$? On justifiera sa réponse.

2. Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose

$$f(x) = \exp\left(\frac{x}{\tan x}\right) - \frac{x}{\sin x}$$

Déterminer les limites de f en 0 et $\frac{\pi}{2}$.

3. En déduire qu'il existe $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(b) = 0$.

4. On pose $a = \frac{b}{\tan b}$ et $z = a + ib$. Montrer que $e^z = z$.

Exercice 2.

On se donne $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_p$ des réels *distincts deux à deux.*

1. On considère l'application

$$\varphi \colon \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{2p-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2p} \\ P & \longmapsto & (P(x_1), \dots, P(x_p), P'(x_1), \dots, P'(x_p)) \end{array} \right.$$

Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. Soient $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ et $(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ tel que $P(x_i) = a_i$ et $P'(x_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

3. On pose pour $i \in [\![1, p]\!]$, $Q_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \left(\frac{X - x_j}{x_i - x_j}\right)^2$.

Que vaut $Q_i(x_j)$ pour $j \in [\![1, p]\!]$?

4. Que vaut $Q_i'(x_j)$ lorsque $j \in [\![1, p]\!]$ et $j \neq i$? Donner la décomposition en éléments simples de $\frac{Q_i'}{Q_i}$ et en déduire que $Q_i'(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \frac{2}{x_i - x_j}$.

5. Démontrer que le polynôme P de la question **2** vérifie

$$P = \sum_{i=1}^{p} \left[\left(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i)\right) a_i + (X - x_i) b_i\right] Q_i$$

6. Montrer que la famille $(Q_1, \dots, Q_p, (X - x_1)Q_1, \dots, (X - x_p)Q_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$.

Exercice 3.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul fixé.

1. **a.** Montrer l'existence de deux polynômes F_n et G_n de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que

$$(1 - X)^n F_n + X^n G_n = 1$$

On pourra par exemple développer $[(1 - X) + X]^{2n-1}$ et on ne cherchera pas pour l'instant à calculer les coefficients de F_n et G_n.

b. Montrer que (F_n, G_n) est l'unique couple de polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant l'égalité de la question précédente.

2. **a.** Montrer que $F_n(1 - X) = G_n(X)$.

b. Calculer $F_n(0)$, $F_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $F_n(1)$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra librement admettre que $F_n(1) \neq 0$.

3. **a.** Montrer que $F_n(x) \underset{x \to 0}{=} (1 - x)^{-n} + o\left(x^{n-1}\right)$.

b. En déduire que

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n + k - 1}{k} X^k$$

4. **a.** Montrer que $nF_n - (1 - X)F_n' = n\dbinom{2n - 1}{n} X^{n-1}$.

b. Montrer qu'il existe un unique polynôme $H_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $H_n' = X^{n-1}(1-X)^{n-1}$ et $H_n(0) = 0$.

c. Montrer que

$$(1 - X)^n F_n = 1 - n\binom{2n - 1}{n} H_n$$

5. **a.** Que vaut $H_n(1)$?

b. Donner le tableau de variations de H_n sur $\mathbb{R}$ suivant la parité de n (on identifie le polynôme H_n à la fonction polynomiale qui lui est associée). On précisera les limites de H_n en $+\infty$ et $-\infty$.

c. En déduire le nombre de racines réelles de F_n suivant la parité de n.