Devoir à la maison n° 1

Problème 1 —

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$f(x) = (1-x)\sqrt{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = -x\ln x$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g.

Partie I – Position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

1. On pose $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-g(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer une expression factorisée de $\varphi'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer $\varphi(1)$ et en déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Partie II – Calcul d'intégrales

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$I(a) = \int_a^1 f(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad J(a) = \int_a^1 g(x)\,dx$$

1. Calculer $I(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

2. On pose $\psi(x) = x^2\ln x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée. En déduire une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$ puis la valeur de $J(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

3. On rappelle que $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\ln u}{u} = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \psi(x) = 0$.

4. En déduire la valeur de la limite $\lim\limits_{a\to 0^+} I(a) - J(a)$.

Partie III – Résolution approchée d'une équation

1. Justifier que l'équation $g(x) = -24$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ que l'on notera α et montrer que $\alpha \in [9, 11]$.

2. On pose $h(x) = \dfrac{24}{\ln x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

a. Montrer que pour tout $x \in [9, 11]$, $h(x) \in [9, 11]$.

b. On pose $K = \dfrac{2}{3(\ln 3)^2}$. Montrer que pour tout $t \in [9, 11]$, $|h'(t)| \leqslant K$.

c. En déduire que pour tout $x \in [9, 11]$, $|h(x) - h(\alpha)| \leqslant K|x - \alpha|$. On pourra remarquer que

$$h(x) - h(\alpha) = \int_\alpha^x h'(t)\,dt$$

3. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 9$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que $u_n \in [9, 11]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant K|u_n - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. En déduire que $|u_n - \alpha| \leqslant 2K^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis que la suite (u_n) converge vers α.

c. En utilisant ce qui précède, écrire un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée de α à ε près, où $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Utiliser cet algorithme pour déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α.