Devoir à la maison n° 9

Exercice 1.

On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto 1 - \sqrt{x}$ ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.
2. Montrer que $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer le sens de variation de f et de $f \circ f$ sur $[0, 1]$.
4. Montrer que f possède un unique point fixe α sur $[0, 1]$ et déterminer celui-ci.
5. Montrer que $u_0 \leqslant \alpha$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leqslant \alpha$.
7. Montrer que $u_0 \leqslant u_2$. En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis qu'elle converge.
8. Montrer que les points fixes de $f \circ f$ sur $[0, 1]$ sont 0, α et 1.
9. En déduire la limite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, puis la convergence et la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et enfin la convergence et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2.

Dans les questions **1**, **2** et **3**, la loi du groupe n'est pas précisée : le «produit» de deux éléments x et y du groupe sera noté par juxtaposition des éléments, c'est-à-dire xy. L'élément neutre sera noté e.
Dans la question **4**, la loi est explicitement notée $*$: le «produit» de deux éléments du groupe sera donc noté à l'aide de ce symbole.
Un sous-groupe H d'un groupe G est dit *distingué* dans G si

$$\forall (x, h) \in G \times H,\ x^{-1}hx \in H$$

A tout sous-groupe H d'un groupe G, on associe l'ensemble

$$N_H = \{x \in G,\ \forall h \in H,\ x^{-1}hx \in H \text{ ET } xhx^{-1} \in H\}$$

Enfin, si G est un groupe, on pose

$$Z(G) = \{a \in G,\ \forall x \in G,\ ax = xa\}$$

1. Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G.
   - **a.** Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.
   - **b.** On suppose H et K distingués dans G. Montrer que $H \cap K$ est distingué dans G.
2. Soit G un groupe.
   - **a.** Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
   - **b.** Montrer que $Z(G)$ est distingué dans G.
3. Soit H un sous-groupe d'un groupe G.
   - **a.** Montrer que N_H est un sous-groupe de G.
   - **b.** On suppose dans cette question H distingué dans G. Que vaut N_H ?
   - **c.** Justifier que $H \subset N_H$.
     Il s'ensuit que N_H est un groupe et que H est un sous-groupe de N_H, ce qu'on ne demande pas de démontrer.

d. Montrer que H est distingué dans N_{H}.

4. Dans cette question, on considère $\mathsf{G} = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et on définit une loi $*$ sur G en posant

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

pour $((x, y), (x', y')) \in \mathsf{G}^2$.

a. Vérifier que $(\mathsf{G}, *)$ est un groupe.

b. Déterminer $\mathsf{Z}(\mathsf{G})$.

c. On pose $\mathsf{H} = \mathbb{U} \times \mathbb{C}$. Montrer que H est un sous-groupe de G.

d. Montrer que H est distingué dans G.