Nombres complexes

Solution 1.

1. On a facilement $|4\sqrt{2}(-1+i)| = 4\sqrt{2}|-1+i| = 8$. Si on note θ un argument de $4\sqrt{2}(-1+i)$, on a $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi $\theta \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$.
2. On a $|z_1z_2z_3| = 8|z_1|^3$ car $|z_2| = 2|z_1|$ et $|z_3| = 4|z_1|$. Puisque $|z_1z_2z_3| = 8$, on a $|z_1| = 1$. Notons θ_1, θ_2 et θ_3 des arguments de z_1, z_2 et z_3. On a donc $\theta_1+\theta_2+\theta_3 \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$. De plus, $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{4}$ et $\theta_3 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$. Ainsi $3\theta_1 + \frac{3\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$. On en déduit $\theta_1 \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}}$. Comme z_1 a un argument compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, on peut choisir $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$ puis $\theta_2 = \frac{11\pi}{12}$ et enfin $\theta_3 = \frac{7\pi}{6}$.

Solution 2.

1. $j^3 = 1$, $1+j+j^2 = (1-j^3)/(1-j)0$, $1+j^2+j^4 = 1+j^2+j = 0$, $j^{-1} = j^2 = \bar{j} = 1/j$.
2. On vérifie que $(1-i)^2 = -2i$ et $(1+i)^2 = 2i$ et on en déduit que

$$\frac{1+j}{(1-i)^2} + \frac{1-j}{(1+i)^2} = 2ij.$$

Solution 3.

1. On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{2-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i} = \frac{1}{7}(4\sqrt{3}+i),$$
$$\frac{(2+i)(3+2i)}{2-i} = \frac{1}{5}(1+18i),$$
$$\frac{3+4i}{(2+3i)(4+i)} = \frac{71-22i}{221}.$$

2.
   a. $\left(-2+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)\right)/4$.
   b. $e^{i(2\pi/3-\pi/6)}/2 = e^{i\pi/2}/2 = i$.
   c. $2e^{i(2\pi/3+\pi/6)} = 2e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3}+i$.
   d. $e^{i4\pi/3} + e^{-i\pi/3}/4 = -(3+5i\sqrt{3})/8$.
   e. $1 + e^{-i\pi/2}/8 = 1 - i/8$.

Solution 4.

1. Il faut commencer par représenter z_1 et z_2 sous forme polaire : $z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/6}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. On trouve $z_1/z_2 = e^{i(\pi/6-\pi/4)} = e^{-i\pi/12}$.
2. On cherche la représentation cartésienne de $e^{7i\pi/12} = ie^{i\pi/12}$. D'après la question précédente,

$$e^{i\pi/12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}.$$

   Donc

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \quad \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

3. La forme polaire, au sens strict, est $\rho e^{i\theta}$ où θ est un réel et ρ, un réel *strictement positif.* En pratique, l'intérêt de cette forme est de représenter un nombre complexe sous la forme du *produit* d'un nombre réel par un nombre complexe de module 1 — peu importe que le facteur réel soit ou non positif.

a.

$$\begin{aligned}1 - ie^{ix} &= 1 + e^{i(x-\pi/2)}\\ &= 2\cos\frac{2x-\pi}{4}e^{i(x/2-\pi/4)}.\end{aligned}$$

b. Expression définie pour $x \neq \pi/2 \mod \pi$.

$$\frac{1}{1+i\tan x} = \frac{\cos x}{\cos x + i\sin x} = \cos x e^{ix}.$$

c. Expression définie pour $x \neq 0 \mod 2\pi$. On factorise par l'angle moitié :

$$\frac{1+\cos x + i\sin x}{1-\cos x - i\sin x} = \frac{1+e^{ix}}{1-e^{ix}} = i\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}.$$

d. Expression définie lorsque $x+y \neq \pi \mod 2\pi$. On factorise par l'angle moitié :

$$\begin{aligned}\frac{e^{ix}+e^{iy}}{1+e^{i(x+y)}} &= \frac{e^{i(x+y)/2}}{e^{i(x+y)/2}}\cdot\frac{\cos(x-y)/2}{\cos(x+y)/2}\\ &= \frac{\cos(x-y)/2}{\cos(x+y)/2}.\end{aligned}$$

e. Comme $\cos x$ et $\sin x$ ne peuvent être nuls en même temps, le dénominateur n'est jamais nul. Le numérateur est égal à $2e^{i\pi/3}e^{ix}$, le dénominateur a

$$(1+i)e^{-ix} = \sqrt{2}e^{i\pi/4}e^{-ix},$$

donc le quotient est égal à

$$\sqrt{2}e^{i\pi/12}e^{2ix}.$$

Solution 5.

1. a.

$$\left(\frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}\right)^n = 2^{n/2}e^{in\pi/12}.$$

b. On factorise par l'angle moitié :

$$\frac{e^{-ni\pi/4}-1}{e^{ni\pi/4}-1} = -e^{-ni\pi/4}.$$

c. $2^{n/2}e^{-in\pi/12}$.

d. Comme $1+e^{i\theta} = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$,

$$(1+\cos\theta + i\sin\theta)^n = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}e^{ni\theta/2}.$$

e. Comme $1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$, en factorisant par l'angle moitié,

$$\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{i} = 2^{(n+2)/2}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

2. Pour tout entier naturel n,

$$\omega^n = (\sqrt{3}+i)^n = 2^n e^{ni\pi/6}$$

donc ω^n est réel si, et seulement si, n est un multiple de 6 et ω^n est imaginaire pur si, et seulement si,

$$\exists\, k \in \mathbb{N},\quad \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

c'est-à-dire

$$\exists\, k \in \mathbb{N},\quad n = 3 + 6k.$$

Solution 6.

1. On a

$$\begin{aligned} z_\theta &= -\sin(2\theta) + i(\cos(2\theta)+1) = i + ie^{2i\theta} \\ &= 2\cos(\theta)ie^{i\theta} = 2\cos(\theta)e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

On aboutit donc à la discussion suivante.

- si $\theta \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, $z_\theta = 0$.
- si $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\pi/2+2k\pi, \pi/2+2k\pi[$, on a

$$|z_\theta| = 2\cos(\theta) \quad \text{et} \quad \arg(z_\theta) \equiv \theta + \frac{\pi}{2}\,[2\pi].$$

- si $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi/2+2k\pi, 3\pi/2+2k\pi[$, on a

$$|z_\theta| = -2\cos(\theta) \quad \text{et} \quad \arg(z_\theta) \equiv \theta + \frac{3\pi}{2}\,[2\pi].$$

2. L'égalité $|z_\theta| = |z_\theta - 1|$ est clairement équivalente à $|z_\theta|^2 = |z_\theta - 1|^2$, c'est-à-dire

$$|z_\theta|^2 = |z_\theta|^2 - 2\operatorname{Re}(z_\theta) + 1,$$

ce qui équivaut à $2\operatorname{Re}(z_\theta) = 1$, c'est-à-dire

$$\sin(2\theta) = -\frac{1}{2} = \sin(-\pi/6).$$

Cette équation est équivalente à

$$2\theta \in -\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad 2\theta \in \frac{7\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}.$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left(-\frac{\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right).$$

Solution 7.

On a $\sqrt{3} + i = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$ et $i - 1 = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$. Ainsi

$$v = \frac{2e^{\frac{i\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{-\frac{7i\pi}{12}}.$$

Comme $2002 = 24 \times 83 + 10$, on déduit de la formule de Moivre que

$$v^{2002} = 2^{1001}e^{-\frac{70i\pi}{12}} = 2^{1001}e^{-i\pi\frac{3\times24-2}{12}} = 2^{1001}e^{i\frac{\pi}{6}} = 2^{1000}\sqrt{3} + 2^{1000}i$$

Solution 8.

- On a $\omega = 2e^{i\pi/6}$ donc $\omega^n = 2^n e^{in\pi/6}$. Ainsi $\omega^n \in \mathbb{R}$ *si et seulement si* $\sin(n\pi/6) = 0$, c'est-à-dire il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\pi/6 = k\pi$, ie n est de la forme

$$6k\ ,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Remarque. L'ensemble des solutions est donc $6\mathbb{Z}$.

- De même , $\omega^n \in i\mathbb{R}$ *si et seulement si* $\cos(n\pi/6) = 0$, ie il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\pi/6 = \pi/2 + k\pi$, c'est-à-dire n est de la forme
$$3 + 6k\ ,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Remarque. L'ensemble des solutions est donc $3 + 6\mathbb{Z}$.

Solution 9.

Posons $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$.

1. $Z \in \mathbb{R} \iff \overline{Z} = -Z \iff \dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} = -\dfrac{z+1}{z-1} \iff (\overline{z}+1)(z-1) = (z+1)(\overline{z}-1) \iff |z|^2 = 1 \iff z \in \mathbb{U}$.

2. $Z \in \mathbb{U} \iff Z\overline{Z} = 1 \iff \dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}\dfrac{z+1}{z-1} = 1 \iff (\overline{z}+1)(z+1) = (\overline{z}-1)(z-1) \iff z + \overline{z} = 0 \iff z \in i\mathbb{R}$.

Solution 10.

1. On les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& |u| \leqslant |2-u| \\
\iff\quad & |u|^2 \leqslant |2-u|^2 \\
\iff\quad & |u|^2 \leqslant (2-u)\overline{(2-u)} \\
\iff\quad & |u|^2 \leqslant 4 - 4\operatorname{Re}(u) + |u|^2 \\
\iff\quad & \operatorname{Re}(u) \leqslant 1
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie puisque $\operatorname{Re}(u) \leqslant |u| \leqslant 1$. On a donc bien $|u| \leqslant |2-u|$.
On a égalité *si et seulement si* $\operatorname{Re}(u) = |u| = 1$ autrement dit *si et seulement si* $u = 1$.

Remarque. On peut raisonner de manière plus élégante. Notons O l'origine, A le point d'affixe 1 et M le point d'affixe u. Le disque $\mathcal{D}$ de centre O et de rayon 1 est inclus dans le demi-plan d'équation $x \geqslant 1$. La droite d'équation $x = 1$ étant la médiatrice du segment $[OA]$, $MO \leqslant MA$, ce qui se traduit par $|u| \leqslant |2-u|$. On a égalité *si et seulement si* M est sur la médiatrice de $[OA]$ donc *si et seulement si* M est le point d'affixe 1 puisque $M \in \mathcal{D}$.

2. On montre par récurrence que $z_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On montre par récurrence que $z_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On a bien $|z_0| \leqslant 1$.
Supposons $|z_n| \leqslant 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. En appliquant la première question à $u = z_n$, on a alors $|z_n| \leqslant |2 - z_n|$ et donc $|z_{n+1}| \leqslant 1$.
Par récurrence, $|z_n| \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la seconde inégalité triangulaire, $|2 - z_n| \geqslant 2 - |z_n| \geqslant 1$ car $|z_n| \leqslant 1$. Ainsi $|z_{n+1}| = \frac{|z_n|}{|2-z_n|} \leqslant |z_n|$.
La suite $(|z_n|)$ est bien décroissante.

6. En appliquant la première question à $u = z_0$, on a alors $|z_0| \leqslant |2 - z_0|$ ou encore $|z_1| \leqslant 1$ avec égalité *si et seulement si* $z_0 = 1$, ce qui est exclu par l'énoncé. Ainsi $|z_1| < 1$.

7. Comme la suite $(|z_n|)$ est décroissante, $|z_n| \leqslant |z_1|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la seconde inégalité triangulaire,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |2 - z_n| \geqslant 2 - |z_n| \geqslant 2 - |z_1|$$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$|z_{n+1}| = \frac{|z_n|}{|2 - z_n|} \leqslant \frac{|z_n|}{2 - |z_1|} = q|z_n|$$

8. On a bien $|z_1| \leqslant q^{1-1}|z_1|$.
Supposons $|z_n| \leqslant q^{n-1}|z_1|$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, d'après la question précédente :

$$|z_{n+1}| \leqslant q|z_n| \leqslant q^n|z_1|$$

Par récurrence, $|z_n| \leqslant q^{n-1}|z_1|$.

9. Puisque $|z_1| < 1$, $q < 1$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} |z_n| = 0$.

Solution 11.

1. Ecrivons $a = e^{i\alpha}$ et $b = e^{i\beta}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{1+ab} &= \frac{e^{i(\alpha+\beta)/2}}{e^{i(\alpha+\beta)/2}} \times \frac{2\cos\left((\alpha+\beta)/2\right)}{2\cos\left((\alpha-\beta)/2\right)}\\ &= \frac{\cos\left((\alpha+\beta)/2\right)}{\cos\left((\alpha-\beta)/2\right)}\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Ecrivons $a = e^{i\alpha}$ et $b = e^{i\beta}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{z + abe^{i(\alpha+\beta)} - e^{i\alpha} - e^{-i\beta}}{e^{i\alpha} - e^{i\beta}}\\ &= \frac{e^{i(\alpha+\beta)/2}}{e^{i(\alpha+\beta)/2}}\\ &\times \frac{ze^{-i(\alpha+\beta)/2} + \bar{z}e^{i(\alpha+\beta)/2} - 2\cos\left((\alpha-\beta)/2\right)}{2i\sin\left((\alpha-\beta)/2\right)}\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $u = ze^{-i(\alpha+\beta)/2}$,

$$\Lambda = -\frac{\mathrm{Re}(u) - \cos\left((\alpha-\beta)/2\right)}{\sin\left((\alpha-\beta)/2\right)} \times i,$$

d'où le résultat.

Solution 12.

Comme $|a| = |b| = |c| = 1$, on a

$$a = \frac{1}{\overline{a}}, \quad b = \frac{1}{\overline{b}} \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{\overline{c}},$$

d'où

$$a + b + c = \frac{1}{\overline{a}} + \frac{1}{\overline{b}} + \frac{1}{\overline{c}} = \frac{\overline{bc + ac + ab}}{\overline{abc}}$$

et donc

$$\begin{aligned}|a + b + c| &= \left|\frac{\overline{bc + ac + ab}}{\overline{abc}}\right| = \frac{|ab + bc + ac|}{|abc|}\\ &= |ab + bc + ac|\end{aligned}$$

car $|abc| = 1$.

Solution 13.

Soit z tel que

$$|z| = |1/z| = |1 + z|.$$

Puisque le module d'un inverse est égal à l'inverse du module, on a alors $|z|^2 = 1$,donc $|z| = 1$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. On a donc

$$|1+z|^2 = (1+e^{i\theta})(1+e^{-i\theta}) = 2 + 2\cos(\theta),$$

et donc $|1+z| = 1$ *si et seulement si*

$$\cos(\theta) = -1/2$$

et finalement les solutions sont

$$j \quad \text{et} \quad j^2.$$

Solution 14.

Soient α, β et γ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$a = e^{i\alpha}, \quad b = e^{i\beta} \quad \text{et} \quad c = e^{i\gamma}.$$

Notons

$$\alpha = \frac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{e^{i\alpha}\left[e^{i(\gamma+\beta)/2}(e^{i(\gamma-\beta)/2} - e^{-i(\gamma-\beta)/2})\right]^2}{e^{i\beta}\left[e^{i(\gamma+\alpha)/2}(e^{i(\gamma-\alpha)/2} - e^{-i(\gamma-\alpha)/2})\right]^2} \\
&= \frac{e^{i(\alpha+\gamma+\beta)}\left[2i\sin((\gamma-\beta)/2)\right]^2}{e^{i(\beta+\gamma+\alpha)}\left[2i\sin((\gamma-\alpha)/2)\right]^2} \\
&= \left(\frac{\sin((\gamma-\beta)/2)}{\sin((\gamma-\alpha)/2)}\right)^2
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque. On déduit sans peine de ce calcul le théorème de l'angle au centre.

Solution 15.

1. Si z et $1/z$ ont même module, alors $z \in \mathbb{U}$. Il existe donc un réel θ, compris entre $-\pi$ et π, tel que $z = e^{i\theta}$ et donc

$$|1+z| = 2|\cos(\theta/2)| = 2\cos(\theta/2)$$

puisque $-\pi/2 \leqslant \theta/2 \leqslant \pi/2$. Comme $|z| = 1$, on en déduit que $\cos(\theta/2) = 1/2$, donc $\theta = \pm 2\pi/3$ et $z = j$ ou $z = j^2$. Réciproquement, on vérifie sans peine que j et j^2 vérifient bien la propriété voulue (notamment parce que $1+j+j^2 = 0$). Donc les solutions sont j et j^2.

2. Astuce ! Un complexe et son conjugué ont même module, donc on étudie en fait

$$|z-1| = |z+1|.$$

Il s'agit de l'ensemble des points situés à même distance de 1 et de -1, c'est l'axe des imaginaires purs.

3. On divise l'équation par $|1+i| = \sqrt{2}$ et on conjugue :

$$\left|z + \frac{2i}{1-i}\right| = \sqrt{2}.$$

C'est donc le cercle de centre $2i/(1-i)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Solution 16.

$$\begin{aligned}|z+z'|^2+|z-z'|^2 &= (z+z')(\overline{z}+\overline{z'})+(z-z')(\overline{z}-\overline{z'})\\ &= 2z\overline{z}+2z'\overline{z'}=2(|z|^2+|z'|^2)\ .\end{aligned}$$

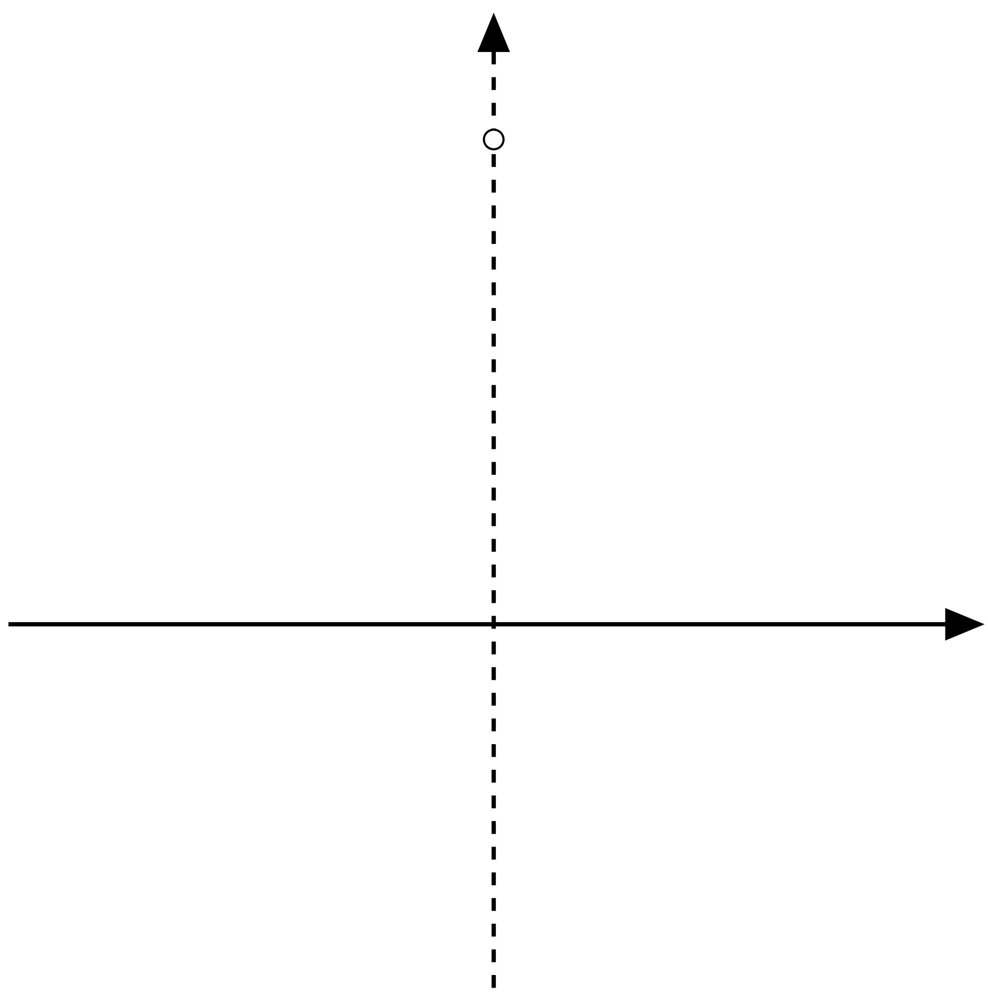
Solution 17.

Notons $A(-i)$ et $B(2i)$. Soit $z\in\mathbb{C}$.

1. Pour $z\neq 2i$ et $z\neq -i$, on a $f(z)\in\mathbb{R}$ *si et seulement si* $\arg(f(z))\equiv 0[\pi]$, c'est-à-dire $M(z)$ vérifie

$$(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})\equiv 0\,[\pi].$$

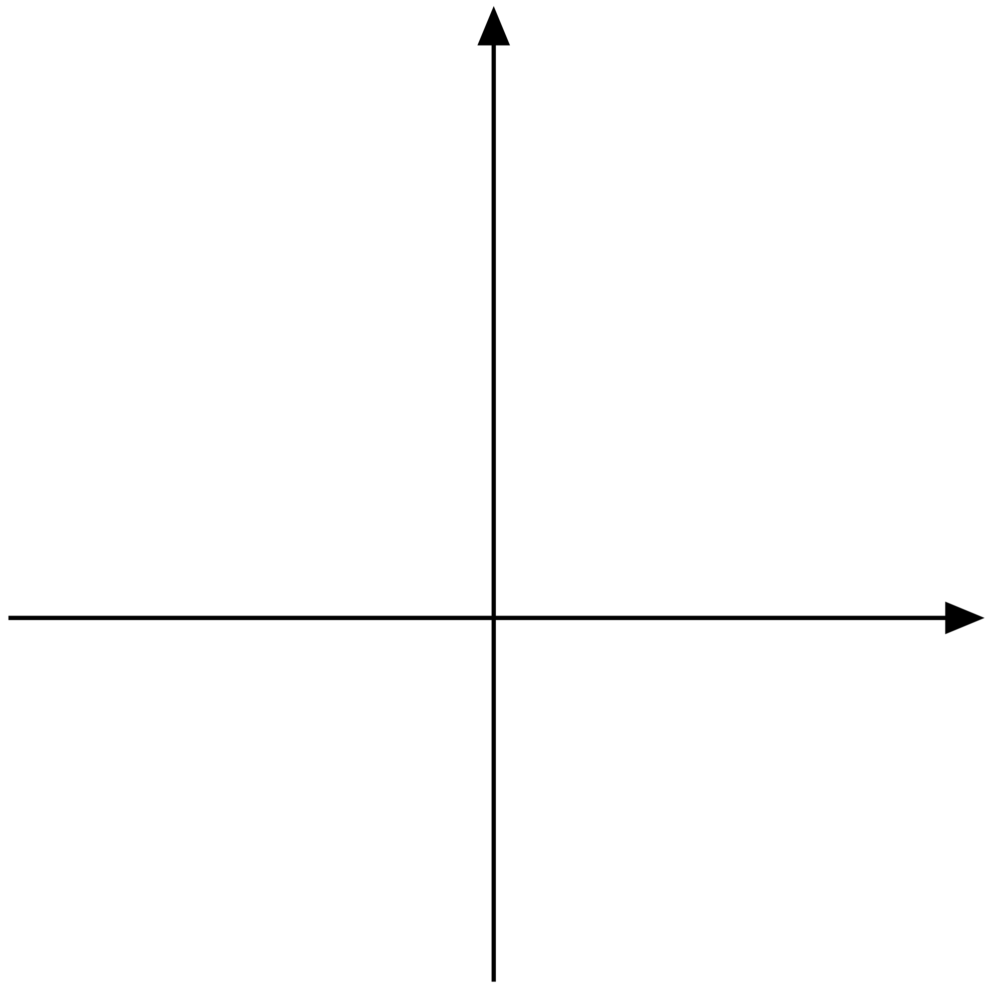
Comme $z=-i$ est solution, l'ensemble des solutions est la droite (AB) privée de B.



2. Pour $z\neq 2i$ et $z\neq -i$, on a $f(z)\in i\mathbb{R}$ *si et seulement si* $\arg(f(z))\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, c'est-à-dire $M(z)$ vérifie

$$(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})\equiv \frac{\pi}{2}[\pi].$$

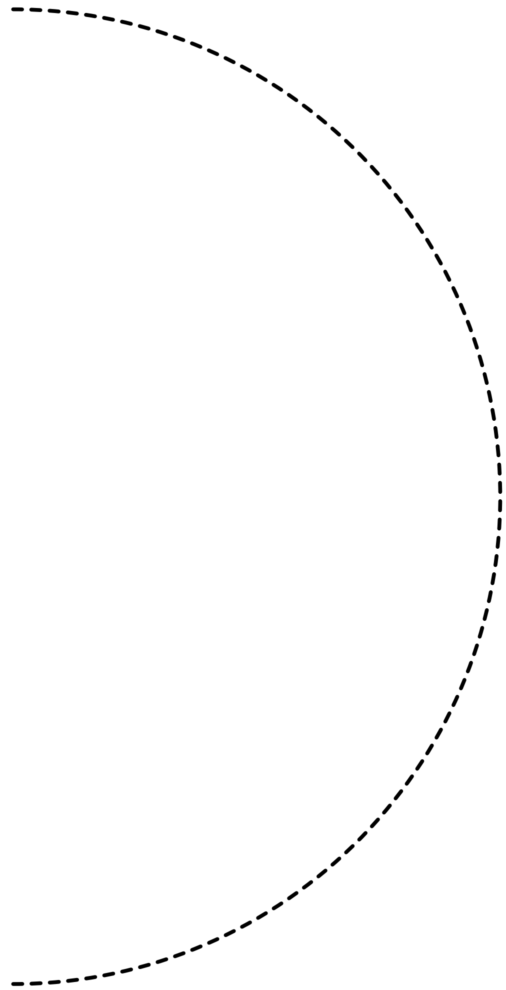
Comme $z=-i$ est solution, l'ensemble des solutions est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B.



3. Pour $z \neq 2\mathrm{i}$ et $z \neq -\mathrm{i}$, on a $\mathrm{f}(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ *si et seulement si* $\arg(\mathrm{f}(z)) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, c'est-à-dire $\mathrm{M}(z)$ vérifie

$$(\overrightarrow{\mathrm{BM}}, \overrightarrow{\mathrm{AM}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi].$$

L'ensemble des solutions est l'arc de cercle $\widehat{\mathrm{AB}}$ du cercle de diamètre $[\mathrm{AB}]$ privé de B parcouru de A vers B dans le sens trigonométrique et privé des points A et B.



> **Remarque.** Il faut ici exclure le point A car la présence de « $\arg(f(z))$ » dans l'énoncé impose $f(z) \neq 0$, ie $z \neq -i$.

Solution 18.

1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Alors
$$\frac{z-1}{z-i} = \frac{(z-1)(\overline{z}+i)}{|z-i|^2}$$
et on cherche donc à résoudre
$$|z|^2 - \operatorname{Re}[(1-i)z] = 0$$
(puisque $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\overline{z})$), c'est-à-dire
$$\left|z - \frac{1+i}{2}\right|^2 = \left|\frac{1+i}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}.$$
Le lieu des solutions est donc le cercle de centre $(1+i)/2$ et de rayon $\sqrt{2}/2$, privé de i.
2. On cherche cette fois à résoudre
$$\operatorname{Im}[(1+i)z] = 1$$
(puisque $\operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Im}(\overline{z})$). Une solution particulière évidente est $z = 1$. Si z_1 et z_2 sont deux solutions, alors
$$\operatorname{Im}[(1+i)(z_1 - z_2)] = 0,$$

ce qui signifie que $z_1 - z_2$ est colinéaire au conjugué de $1+i$. Par conséquent, le lieu des solutions est la droite issue de 1, dirigée par $1-i$, privée de i bien entendu !

3. Tiens, une puissance ! Je choisis la représentation polaire en posant $z = \rho e^{i\theta}$... Les parties réelle et imaginaire de

$$z^3 = \rho^3 e^{3i\theta}$$

sont égales si, et seulement si,

$$3\theta \equiv \frac{\pi}{4} \mod \pi$$

c'est-à-dire

$$\theta \equiv \frac{\pi}{12} \mod \frac{\pi}{3}.$$

Le lieu des solutions est donc la réunion des trois droites faisant un angle de $\pi/12$, $5\pi/12$ et $3\pi/4$ avec le demi-axe des abscisses positives.

Solution 19.

1. Le discriminant est égal à

$$(5-2i)^2 - 20(1-i) = 1$$

et les racines sont donc

$$-2+i, \quad -3+i.$$

2. Le discriminant est égal à $-8+6i$, dont les racines carrées complexes sont $\pm(1+3i)$. On en déduit les deux racines :

$$1-2i, \quad 2+i.$$

3. On remarque que

$$z^4 - z^3 - z + 1 = (z-1)(z^3-1)$$

donc les racines sont 1 (racine double), j et j^2.

4. Il s'agit de calculer les racines quatrièmes du nombre

$$-2 + i\sqrt{12} = 4e^{i2\pi/3}.$$

Comme les racines quatrièmes de l'unité sont 1, -1, i et $-i$, ce sont

$$\pm\sqrt{2}e^{i\pi/6} \quad \text{et} \quad \pm i\sqrt{2}e^{i\pi/6}.$$

Solution 20.

1. Il est clair que 0 est solution. Cherchons maintenant les autres solutions sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$. L'équation devient

$$\rho^2 e^{2i\theta} = \rho e^{-i\theta},$$

c'est-à-dire

$$\rho e^{3i\theta} = 1$$

donc $\rho = 1$ et $e^{i\theta} \in \{1, j, j^2\}$. Les quatre solutions sont 0, 1, j et j^2.

2. Il est clair que 0 est solution. Cherchons maintenant les autres solutions sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$. L'équation devient

$$\rho^3 e^{3i\theta} = \rho e^{-i\theta},$$

c'est-à-dire

$$\rho^2 e^{4i\theta} = 1$$

donc $\rho = 1$ et $e^{i\theta} \in \{\pm 1, \pm i\}$. Les cinq solutions sont 0, -1, 1, $-i$ et $-i$.

3. Il est clair que 0 est solution. Cherchons maintenant les autres solutions sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$. L'équation devient
$$\rho^2 e^{2i\theta} = 27\rho e^{-i\theta},$$
c'est-à-dire
$$\rho e^{3i\theta} = 27$$
donc $\rho = 27$ et $e^{i\theta} \in \{1, j, j^2\}$. Les quatre solutions sont 0, 27, $27j$ et $27j^2$.

Solution 21.

Si z_0 est une solution de
$$z^2 + 8|z| - 3 = 0,$$
alors
$$z^2 = -8|z| + 3 \in \mathbb{R},$$
donc z est réel ou imaginaire pur.

Si $z \in \mathbb{R}_+$, alors l'équation devient
$$z^2 + 8z - 3 = 0,$$
dont l'unique solution positive est $-4 + \sqrt{19}$.

Si $z \in \mathbb{R}_-$, l'équation devient
$$z^2 - 8z - 3 = 0,$$
dont l'unique solution négative est $4 - \sqrt{19}$.

Si $z = i\lambda \in i\mathbb{R}_+$, l'équation devient
$$-\lambda^2 + 8\lambda - 3 = 0,$$
dont les solutions (positives) sont $4 \pm \sqrt{13}$.

Si $z = i\lambda \in i\mathbb{R}_-$, l'équation devient
$$-\lambda^2 - 8\lambda - 3 = 0,$$
dont les solutions (négatives) sont $-4 \pm \sqrt{13}$.

Solution 22.

Rien à signaler ! L'exercice est roboratif : calcul du discriminant Δ, recherche de ses racines carrées $\pm\delta$ puis les formules bien connues ...

1. $\delta = \pm(16 - 2i)$, solutions $2 + 3i$ et $1 - 2i$
2. $\delta = \pm(-1 + 2i)$, solutions $-3 - 2i$ et $-1 - i$
3. $\delta = \pm(5 - 4i)$, solutions $2i$ et $5 - 2i$
4. $\delta = \pm 26(1 + i)$, solutions $2 - i$ et $-2 + 5i$
5. $e^{i\theta}$, $je^{i\theta}$, $j^2e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$, $je^{-i\theta}$, $j^2e^{-i\theta}$

Solution 23.

1. Ecrivons $z = re^{i\theta}$ avec $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. L'équation est équivalente à
$$r^5 e^{5i\theta} = 16re^{-i\theta}$$
i.e. $r^5 e^{6i\theta} = 16r$, soit encore
$$r^5 = 16r \quad \text{et} \quad 6\theta \equiv 0\,[2\pi],$$
ce qui équivaut à $r = 0$ ou $r = 2$ *et* $6\theta \equiv 0\,[2\pi]$, c'est-à-dire
$$r = 0 \text{ ou } 2 \quad \textit{et} \quad \theta \equiv 0\,[\pi/3].$$
Les solutions sont donc
$$0, 2, 2e^{i\pi/3}, 2e^{2i\pi/3}, -2, 2e^{4i\pi/3}, 2e^{5i\pi/3}.$$

2. Ecrivons $z = x + iy$ avec x et y réels. L'équation est équivalente à

$$(2x - 3x) + i(-2y - 3y) = 2 + 3i,$$

c'est-à-dire $x = -2$ et $y = -3/5$. L'unique solution de l'équation est donc

$$z = -2 - \frac{3}{5}i.$$

Solution 24.

1. En écrivant z sous forme algébrique,

$$z = x + iy \quad , \quad x, y \in \mathbb{R},$$

l'équation est équivalente à

$$5x - iy = 1,$$

d'où l'unique solution

$$z = 1/5.$$

2. En écrivant z sous forme polaire,

$$z = re^{i\theta} \quad , \quad r \geqslant 0, \theta \in \mathbb{R},$$

l'équation est équivalente à

$$r^2 e^{3i\theta} = r,$$

d'où les solutions

$$0, 1, j, j^2.$$

3. En écrivant z sous forme algébrique,

$$z = x + iy \quad , \quad x, y \in \mathbb{R},$$

l'équation est équivalente à

$$x^2 = y^2,$$

c'est-à-dire,

$$x = \pm y.$$

Géométriquement parlant, l'ensemble des solutions est la réunion des droites d'équation $y = \pm x$, première et seconde bissectrices du repère.

4. En écrivant z sous forme polaire,

$$z = re^{i\theta} \quad , \quad r \geqslant 0, \theta \in \mathbb{R},$$

l'équation est équivalente à

$$r^5 e^{3i\theta} = 1,$$

on a donc $r = 1$ et les solutions sont les racines cubiques de l'unité :

$$1, j, j^2.$$

Solution 25.

1. Puisque 0 n'est pas solution, l'équation est équivalente à

$$\left(\frac{z+i}{z}\right)^3 = -i = i^3,$$

ainsi les solutions vérifient

$$\frac{z+i}{z} = ij^k,$$

avec $k = 0, 1$ ou 2 ; d'où les solutions,

$$\frac{1-i}{2}, -\frac{1+i(2+\sqrt{3})}{2(2+\sqrt{3})}, -\frac{1+i(2-\sqrt{3})}{2(2-\sqrt{3})}.$$

2. Puisque -1 n'est pas solution, l'équation est équivalente à

$$\frac{z^5+1}{z+1} = 0.$$

Remarque. Le lecteur aura reconnu la formule de la série géométrique !

Les solutions sont donc les racines 5-ièmes de -1 *sauf* -1 :

$$e^{i\pi/5}, e^{3i\pi/5}, e^{7i\pi/5}, e^{9i\pi/5}.$$

Solution 26.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(ix) = (ix)^3 - (16-i)(ix)^2 + (89-16i)ix + 89i = 16x^2 + 16x + i(-x^3 - x^2 + 89x + 89)$. Donc $f(ix) = 0$ *si et seulement si* $16x^2 + 16x = 0$ et $-x^3 - x^2 + 89x + 89$. La première équation admet 0 et -1 pour solution et on voit que -1 est également solution de la seconde équation mais que 0 ne l'est pas. On en déduit que $-i$ est l'unique solution imaginaire pure de l'équation $f(z) = 0$.
2. La question précédente nous montre que le polynôme $f(z)$ peut se factoriser par $z+i$. On trouve $f(z) = (z+i)(z^2 - 16z + 89)$. Les racines de $z^2 - 16z + 89$ sont $8+5i$ et $8-5i$. Les solutions de $f(z) = 0$ sont donc $-i$, $8+5i$ et $8-5i$.
3. Notons A le point d'affixe $-i$, B le point d'affixe $8+5i$ et C le point d'affixe $8-5i$.

$$AB = |8+6i| = 10 \qquad AC = |8-4i| = 2\sqrt{13} \qquad BC = |10i| = 10$$

On en déduit que le triangle ABC est isocèle en B.

Solution 27.

1. On applique la méthode de l'arc moitié.

$$\begin{aligned}
\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}\right)} \\
&= \frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} && \text{d'après les relations d'Euler} \\
&= i\,\mathrm{cotan}\,\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

2. On remarque que 1 n'est pas solution donc on suppose $z \neq -1$.

$$\begin{aligned}
& (z-1)^5 = (z+1)^5 \\
\iff\ & \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 = 1 \\
\iff\ & \exists \omega \in \mathbb{U}_5,\ \frac{z-1}{z+1} = \omega \\
\iff\ & \exists \omega \in \mathbb{U}_5,\ (z-1) = \omega(z+1) \\
\iff\ & \exists \omega \in \mathbb{U}_5,\ z(1-\omega) = 1+\omega \\
\iff\ & \exists \omega \in \mathbb{U}_5,\ z = \frac{1+\omega}{1-\omega} \\
\iff\ & \exists k \in [\![1,4]\!],\ z = \frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{5}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{5}}} && \text{car on ne peut avoir } \omega = 1 \\
\iff\ & \exists k \in [\![1,4]\!],\ z = i\,\mathrm{cotan}\,\frac{k\pi}{5} && \text{d'après la question précédente}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ i\,\mathrm{cotan}\,\frac{\pi}{5}, i\,\mathrm{cotan}\,\frac{2\pi}{5}, i\,\mathrm{cotan}\,\frac{3\pi}{5}, i\,\mathrm{cotan}\,\frac{4\pi}{5} \right\}$$

Solution 28.

1. On applique la méthode de l'arc moitié.

$$\begin{aligned}
\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{i\theta}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}}\right)} \\
&= \frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} && \text{d'après les relations d'Euler} \\
&= i\,\text{cotan}\,\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

2. On remarque que 1 n'est pas solution donc on suppose $z \neq -1$.

$$\begin{aligned}
& (z-1)^5 = (z+1)^5 \\
\iff & \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 = 1 \\
\iff & \exists\omega \in \mathbb{U}_5,\ \frac{z-1}{z+1} = \omega \\
\iff & \exists\omega \in \mathbb{U}_5,\ (z-1) = \omega(z+1) \\
\iff & \exists\omega \in \mathbb{U}_5,\ z(1-\omega) = 1+\omega \\
\iff & \exists\omega \in \mathbb{U}_5,\ z = \frac{1+\omega}{1-\omega} \\
\iff & \exists k \in [\![1,4]\!],\ z = \frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{5}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{5}}} && \text{car on ne peut avoir } \omega = 1 \\
\iff & \exists k \in [\![1,4]\!],\ z = i\,\text{cotan}\,\frac{k\pi}{5} && \text{d'après la question précédente}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{i\,\text{cotan}\,\frac{\pi}{5}, i\,\text{cotan}\,\frac{2\pi}{5}, i\,\text{cotan}\,\frac{3\pi}{5}, i\,\text{cotan}\,\frac{4\pi}{5}\right\}$$

On peut également résoudre l'équation en développant

$$\begin{aligned}
& (z-1)^5 = (z+1)^5 \\
\iff & z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10z^2 + 5z + 1 = z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1 \\
\iff & 5z^4 + 10z^2 + 1 = 0
\end{aligned}$$

En posant $Z = z^2$, cette dernière équation équivaut à $5Z^2 + 10Z + 1$ dont les solutions sont $\frac{-5+2\sqrt{5}}{5}$ et $-\frac{5+2\sqrt{5}}{5}$. Le solutions de l'équation initiale sont donc les racines carrées *complexes* de ces deux réels négatifs. L'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{i\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}, -i\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}, i\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}, -i\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right\}$$

La fonction cotan est strictement décroissante sur $]0,\pi[$ puisque sa dérivée est $-\frac{1}{\sin^2}$. On a donc

$$\text{cotan}\,\frac{\pi}{5} > \text{cotan}\,\frac{2\pi}{5} > \text{cotan}\,\frac{3\pi}{5} > \text{cotan}\,\frac{4\pi}{5}$$

Par ailleurs, puisque $\frac{5-2\sqrt{5}}{5} < \frac{5+2\sqrt{5}}{5}$, on a par stricte croissance de la racine carrée :

$$-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} < -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} < \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} < \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotan}\frac{\pi}{5} &= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\\
\operatorname{cotan}\frac{2\pi}{5} &= \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\\
\operatorname{cotan}\frac{3\pi}{5} &= -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\\
\operatorname{cotan}\frac{4\pi}{5} &= -\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}
\end{aligned}$$

Solution 29.

1. Posons $S = \alpha+\beta$ et $S = \alpha\beta$. On sait que $\omega^5 = 1$ et $\sum_{k=0}^{4}\omega^k = 0$. Ainsi $S = -1$ et $P = (\omega+\omega^4)(\omega^2+\omega^3) = \omega^3+\omega^4+\omega^6+\omega^7 = \omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = -1$. Ainsi α et β sont solutions de l'équation $z^2 - Sz + P = 0$ i.e. $z^2+z-1=0$.

2. Les solutions de $z^2+z-1=0$ sont $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Or $\alpha = \omega+\omega^4 = \omega+\overline{\omega} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\beta = \omega^2+\omega^3 = \omega^2+\overline{\omega^2} = 2\cos\frac{4\pi}{5}$. En particulier, $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ et $\beta\in\mathbb{R}_-^*$. On en déduit que $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

3. $\cos\frac{\pi}{5} = \cos\left(\pi-\frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. De plus, $\frac{\pi}{5}\in[0,\pi]$ donc $\sin\frac{\pi}{5}\geqslant 0$. Donc $\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Solution 30.

1. **a.** Tout d'abord

$$\sin\frac{18\pi}{11} = \sin\left(\pi+\frac{7\pi}{11}\right) = -\sin\frac{7\pi}{11}$$

De plus, les réels $\frac{6\pi}{11}$ et $\frac{7\pi}{11}$ appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Or la fonction sin est strictement décroissante sur cet intervalle. Donc $\sin\frac{6\pi}{11} > \frac{7\pi}{11}$ et donc $\sin\frac{6\pi}{11}+\sin\frac{18\pi}{11} > 0$.

> **Remarque.** Si l'on connaît les formules de factorisation, on peut également écrire
>
> $$\sin\frac{6\pi}{11}+\sin\frac{18\pi}{11} = 2\sin\frac{12\pi}{11}\cos\frac{6\pi}{11}$$
>
> Or $\frac{12\pi}{11}\in[\pi,2\pi]$ donc $\sin\frac{12\pi}{11} < 0$ et $\frac{6\pi}{11}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ donc $\cos\frac{6\pi}{11} < 0$.

Remarquons enfin que :

$$\operatorname{Im}(S) = \sin\frac{2\pi}{11}+\sin\frac{6\pi}{11}+\sin\frac{8\pi}{11}+\sin\frac{10\pi}{11}+\sin\frac{18\pi}{11}$$

Or les réels $\frac{2\pi}{11}$, $\frac{8\pi}{11}$ et $\sin\frac{10\pi}{11}$ appartiennent à l'intervalle $[0,\pi]$ donc leurs sinus sont positifs. Ainsi $\operatorname{Im}(S) > 0$.

b. Remarquons que $\omega^{11} = 1$. On fait alors apparaître la somme des termes d'une suite géométrique.

$$S+T = \left(\sum_{k=0}^{10}\omega^k\right) - 1 = \frac{1-\omega^{11}}{1-\omega} - 1 = -1$$

En développant brutalement :

$$ST = \omega^3+\omega^5+\omega^6+2\omega^7+\omega^8+2\omega^9+2\omega^{10}+5\omega^{11}+2\omega^{12}+2\omega^{13}+\omega^{14}+2\omega^{15}+\omega^{16}+\omega^{17}+\omega^{19}$$

Or $\omega^{11} = 1$ donc on peut ramener les puissance de ω dans cette somme entre 0 et 10 :

$$\begin{aligned} ST &= 5 + 2\omega + 2\omega^2 + 2\omega^3 + 2\omega^4 + 2\omega^5 + 2\omega^6 + 2\omega^7 + 2\omega^8 + 2\omega^9 + 2\omega^{10} \\ &= 3 + 2\sum_{k=0}^{10} \omega^k = 3 \end{aligned}$$

c. C'est du cours : S et T sont solutions de l'équation $x^2 + x + 3 = 0$. Les solutions de cette équation sont $\frac{-1+i\sqrt{11}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{11}}{2}$. Comme $\operatorname{Im}(S) > 0$,

$$S = \frac{-1+i\sqrt{11}}{2} \qquad T = \frac{-1-i\sqrt{11}}{2}$$

2. **a.** Puisque $\frac{20\pi}{11} = 2\pi - \frac{2\pi}{11}$,

$$\omega - \omega^{10} = e^{\frac{2i\pi}{11}} - e^{\frac{20i\pi}{11}} = e^{\frac{2i\pi}{11}} - e^{-\frac{2\pi}{11}} = 2i\sin\frac{2\pi}{11}$$

en utilisant une relation d'Euler.

b. On utilise la méthode de l'arc-moitié :

$$\frac{1-\omega^3}{1+\omega^3} = \frac{1-e^{\frac{6i\pi}{11}}}{1+e^{\frac{6i\pi}{11}}} = \frac{e^{-\frac{3i\pi}{11}} - e^{\frac{3i\pi}{11}}}{e^{-\frac{3i\pi}{11}} + e^{\frac{3i\pi}{11}}} = \frac{-2i\sin\frac{3\pi}{11}}{2\cos\frac{3\pi}{11}} = -i\tan\frac{3\pi}{11}$$

c. La somme à calculer est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=1}^{10} \left(-\omega^3\right)^k = -\omega^3 \frac{1-\left(-\omega^3\right)^{10}}{1+\omega^3} = -\omega^3\frac{1-\omega^{30}}{1+\omega^3} = \frac{\omega^{33}-\omega^3}{1+\omega^3} = \frac{1-\omega^3}{1+\omega^3}$$

d. En ramenant à nouveau les puissances entre 0 et 10

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \left(-\omega^3\right)^k &= -\omega^3 + \omega^6 - \omega^9 + \omega^{12} - \omega^{15} + \omega^{18} - \omega^{21} + \omega^{24} - \omega^{27} + \omega^{30} \\ &= -\omega^3 + \omega^6 - \omega^9 + \omega - \omega^4 + \omega^7 - \omega^{10} + \omega^2 - \omega^5 + \omega^8 \end{aligned}$$

Ainsi

$$T - S = \sum_{k=1}^{10} \left(-\omega^3\right)^k + 2(\omega^{10} - \omega)$$

Or d'après les questions précédentes :

$$\sum_{k=1}^{10} \left(-\omega^3\right)^k = -i\tan\frac{3\pi}{11} \qquad \omega - \omega^{10} = 2i\sin\frac{2\pi}{11}$$

donc

$$T - S = -i\tan\frac{3\pi}{11} - 4i\sin\frac{2\pi}{11}$$

puis

$$i(T-S) = \tan\frac{3\pi}{11} + 4\sin\frac{2\pi}{11}$$

Enfin $S = \frac{-1+i\sqrt{11}}{2}$ et $T = \frac{-1-i\sqrt{11}}{2}$ donc $i(T-S) = \sqrt{11}$.

Solution 31.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 \\ &= \frac{e^{i4x} + e^{-i4x} - 4e^{i2x} - 4e^{-i2x} + 6}{2.8} \\ &= \frac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8}. \end{aligned}$$

Donc

$$\sin^4\left(\frac{(2k+1)\pi}{8}\right) = \frac{-4\cos\Big((2k+1)\pi/4\Big)+3}{8},$$

puisque $\cos\Big[(2k+1)\pi/2\Big] = 0$, et finalement

$$\sum_{k=0}^{3} \sin^4\left(\frac{(2k+1)\pi}{8}\right) = \frac{3}{2}.$$

Solution 32.

Bien entendu, il faut appliquer la formule du binôme (les coefficients binomiaux sont là pour y faire penser), et surtout ne pas calculer séparément S_n et S'_n, qui sont respectivement les parties réelle et imaginaire de la somme

$$C_n = e^{i\alpha} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{i\beta})^k = e^{i\alpha}(1+e^{i\beta})^n.$$

Factorisons par l'angle moitié :

$$(1+e^{i\beta})^n = 2^n \cos^n \frac{\beta}{2} e^{in\beta/2}.$$

Par conséquent,

$$S_n = 2^n \cos^n \frac{\beta}{2} \cos\Big(\alpha + \frac{n\beta}{2}\Big),$$
$$S'_n = 2^n \cos^n \frac{\beta}{2} \sin\Big(\alpha + \frac{n\beta}{2}\Big).$$

La somme S''_n est la partie réelle d'une somme géométrique :

$$e^{i\alpha} \sum_{k=0}^{n} (-e^{i\beta})^k.$$

Si $\beta = \pi \mod 2\pi$, alors

$$S''_n = \Re[(n+1)e^{i\alpha}] = (n+1)\cos\alpha.$$

Sinon, d'après la formule de la série géométrique,

$$\sum_{k=0}^{n} (-e^{i\beta})^k = \frac{1-e^{i(n+1)(\beta+\pi)}}{1+e^{i\beta}}$$
$$= i^n e^{i\beta n/2} \frac{\sin[(n+1)(\beta+\pi)/2]}{\cos\beta/2},$$

donc

$$S''_n = \frac{\sin[(n+1)(\beta+\pi)/2]}{\cos\beta/2} \cdot \Re(i^n e^{i(\alpha+n\beta/2)}).$$

On peut simplifier cette dernière partie réelle en discutant sur la parité de n. Si $n = 2p$, alors

$$\Re(i^n e^{i(\alpha+n\beta/2)}) = (-1)^p \cos(\alpha+n\beta/2)$$

et si $n = 2p+1$, alors

$$\Re(i^n e^{i(\alpha+n\beta/2)}) = (-1)^{p+1} \sin(\alpha+n\beta/2).$$

Solution 33.

La somme $R_n + iI_n$ est la somme géométrique

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}\right)^k.$$

Traitons pour commencer le cas singulier : $e^{i\alpha}/\cos\alpha = 1$ si, et seulement si, $\cos\alpha = 1$ et dans ce cas,

$$R_n + iI_n = n+1,$$

donc $R_n = n+1$ et $I_n = 0$ (unicité de la représentation cartésienne).

Dans le cas général, lorsque $\cos\alpha \notin \{0,1\}$, on remarque que $e^{i\alpha}/\cos\alpha = 1 + i\tan\alpha$ et donc

$$R_n + iI_n = \frac{1 - e^{i(n+1)\alpha}/\cos^{n+1}\alpha}{-i\tan\alpha},$$

d'où

$$R_n = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\cos^{n+1}\alpha\tan\alpha},$$
$$I_n = i\frac{\cos^{n+1}\alpha - \cos(n+1)\alpha}{\cos^{n+1}\alpha\tan\alpha}.$$

Solution 34.

Posons

$$S_n = e^{ix} + e^{3ix} + \cdots + e^{(2n+1)x}$$

et $R_n = \mathrm{Re}(S_n)$ et $I_n = \mathrm{Im}(S_n)$ de sorte que

$$S_n = \frac{R_n}{S_n}.$$

- *Cas 1 :* $x \equiv 0\,[\pi]$. Dans ce cas S_n n'est pas défini car $I_n = \mathrm{Im}(S_n) = 0$.
- *Cas 2 :* $x \not\equiv 0\,[\pi]$. On a alors classiquement

  $$S_n = \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}e^{inx}$$

  et

  $$R_n = \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}\cos(nx) \quad \text{et} \quad I_n = \frac{\sin^2(nx)}{\sin(x)}.$$

  On a

  $$I_n = 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad nx \equiv 0\,[\pi]$$

  ie $x \equiv 0\,[\pi/n]$.
- *Conclusion* : S_n est bien définie *si et seulement si* $x \not\equiv 0\,[\pi/n]$ et dans ce cas, on a

  $$S_n = \frac{R_n}{S_n} = \frac{\cos(nx)}{\sin(nx)} = \mathrm{cotan}(nx).$$

Solution 35.

1. D'après la formule de la série géométrique, $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \dfrac{\omega^5 - 1}{\omega - 1} = 0$ puisque $\omega^5 = 1$. Il suffit alors de diviser cette égalité par ω^2.
2. On a $\alpha^2 = \omega^2 + \dfrac{1}{\omega^2} + 2$. D'après le question précédente, on a donc $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$.

3. D'après les relations d'Euler, $\alpha = 2\cos\frac{2\pi}{5}$. Les racines du trinôme X^2+X-1 sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Puisque $\frac{2\pi}{5}$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{2\pi}{5}$ est positif et α également. Comme $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$, on a nécessairement $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. On en déduit $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Par suite, il vient $\sin^2\frac{2\pi}{5} = 1-\cos^2\frac{2\pi}{5} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$. Puisque $\frac{2\pi}{5}$ est compris entre 0 et π, $\sin\frac{2\pi}{5}$ est positif et donc $\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Solution 36.

Puisque $\omega \neq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{1+\omega^2}+\frac{\omega^2}{1+\omega^4} &= \frac{\omega+\omega^2+\omega^4+\omega^5}{1+\omega^2+\omega^4+\omega^6}\\ &= \frac{\omega+\omega^2+\omega^4+\omega^5}{\frac{\omega^8-1}{\omega^2-1}}\end{aligned}$$

De plus $\omega^7 = 1$ donc $\omega^8 = \omega$ et

$$1+\omega+\ldots+\omega^6 = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{1+\omega^2}+\frac{\omega^2}{1+\omega^4} &= (1+\omega)\big(-1-\omega^3-\omega^6\big)\\ &= -1+\omega^2+\omega^5\end{aligned}$$

D'où,puisque

$$\frac{\omega^3}{1+\omega^6} = \frac{\omega^3}{1+1/\omega} = \frac{\omega^4}{1+\omega},$$

on obtient

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{(1+\omega)\big(-1+\omega^2+\omega^5\big)+\omega^4}{1+\omega}\\ &= \frac{-1-\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6}{1+\omega}\\ &= \frac{-1-\omega-1-\omega}{1+\omega} = -2\end{aligned}$$

Solution 37.

► *Calcul* : Notons $z = x+iy$, avec x et y réels. On a, pour $z \neq 1$,

$$\left|\frac{z}{z-1}\right|^2 = \frac{|z|^2}{|z-1|^2} = \frac{x^2+y^2}{(x-1)^2+y^2}.$$

Ainsi

$$\left|\frac{z}{z-1}\right| < 1$$

équivaut à

$$x^2+y^2 < x^2-2x+1+y^2,$$

ie $x = \mathrm{Re}(z) < 1/2$.

- *Géométrie* : Notons $A(1)$, $M(z)$ et $O(0)$. L'inégalité

$$\left|\frac{z}{z-1}\right| < 1$$

est équivalente à $OM < AM$, ie M appartient au demi-plan ouvert de frontière la médiatrice de $[OA]$ contenant A. Ce demi-plan est d'inéquation $x < 1/2$.

Solution 38.

Comme λ est irrationnel, $e^{2i\lambda\pi} \neq 1$ et ainsi, d'après la formule de la série géométrique,

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\lambda\pi} = \frac{(e^{2i\pi\lambda})^n - 1}{e^{2i\pi\lambda} - 1} = \frac{e^{in\pi\lambda}}{e^{i\lambda\pi}} \times \frac{\sin(n\pi\lambda)}{\sin(\lambda\pi)} = e^{i(n-1)\pi\lambda} \times \frac{\sin(n\pi\lambda)}{\sin(\lambda\pi)}$$

et donc

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\lambda\pi}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(\lambda\pi)|}$$

puisque $|e^{i(n-1)\pi\lambda}\sin(n\pi\lambda)| = |\sin(n\pi\lambda)| \leqslant 1$.

Solution 39.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $|z| > 1$ et

$$1 + z + \cdots + z^{n-1} = nz^n.$$

On a donc

$$n|z|^n = |1 + z + \cdots + z^{n-1}| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k < n|z|^n$$

ce qui est absurde.

Solution 40.

Comme $z \notin \mathbb{U}$, on a $z \neq 1$. On peut donc appliquer la formule de la série géométrique :

$$\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \sum_{k=0}^{n} z^k$$

d'où, par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |z|^k = \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}$$

car $|z| \neq 1$.

Solution 41.

Puisque $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$, on a

$$|a| \leqslant \frac{1}{2}|a+b| + \frac{1}{2}|a-b|.$$

De plus, $b = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}$, donc

$$|b| \leqslant \frac{1}{2}|a+b| + \frac{1}{2}|a-b|,$$

et en sommant les deux inégalités,

$$|a|+|b| \leqslant |a+b|+|a-b|.$$

Il y a égalité ci-dessus *si et seulement si* il y a égalité dans les deux premières inégalités, i.e.

$$a=b,\ a=-b$$

ou $a+b$, $a-b$ et $b-a$ sont non nuls et ont le même argument : ce dernier cas ne peut manifestement pas se produire puisque $a-b=-(b-a)$. Il y a donc égalité ci-dessus *si et seulement si* $a=b$ ou $a=-b$.

> **Remarque.** On peut aussi établir que
>
> $$(|a+b|+|a-b|)^2 = (|a|+|b|)^2 + (|a|-|b|)^2 + 2|a^2-b^2|$$
>
> pour résoudre cet exercice.

Solution 42.

Raisonnons par récurrence sur $n \geqslant 2$. Soit $\mathsf{HR}(n)$ la proposition suivante : pour tous nombres complexes non nuls $z_1, \dots, z_n$,

$$|z_1+\dots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\dots+|z_n|,$$

avec égalité *si et seulement si*

$$\arg(z_1)=\arg(z_2)=\dots=\arg(z_n).$$

- $\mathsf{HR}(2)$ est vraie,c'est l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité démontrés dans le cours.
- Montrons que la prpriété est héréditaire à partir du rang 2.Supposons $\mathsf{HR}(n)$ vraie et soient $z_1 \dots, z_{n+1}$ nombres complexes non nuls.En aplliquant l'inégalité triangulaire à $z_1+\dots+z_n$ et z_{n+1}, on obtient

  $$\left|z_1+\dots+z_{n+1}\right| \leqslant \left|z_1+\dots+z_n\right| + |z_{n+1}|,$$

  en appliquant alors $\mathsf{HR}(n)$ à $z_1, \dots, z_n$,

  $$\left|z_1+\dots+z_n\right| \leqslant |z_1|+\dots+|z_n|,$$

  d'où l'inégalité au rang $n+1$. Il y a égalité *si et seulement si* il y a égalité dans les deux inégalités précédentes, ie d'après $\mathsf{HR}(n)$ si, *premièrement*

  $$\arg(z_1)=\dots=\arg(z_n),$$

  ce qui impose $z_1+\dots+z_n \neq 0$ et si, *deuxièmement*

  $$\arg(z_1+\dots+z_n)=\arg(z_{n+1}).$$

  $\mathsf{HR}(n+1)$ est donc prouvée puisque dans ce cas,

  $$\arg(z_1+\dots+z_n)=\arg(z_1).$$

- La propriété est vraie pour tout $n \geqslant 2$ d'après le principe de récurrence.

Solution 43.

1. **a.** Le point A est situé sur le cercle de centre O et de rayon 1 donc $|a|=1$. On a donc $a\overline{a}=1$ puis $\overline{a}=\dfrac{1}{a}$. Comme les points B, C, D sont également sur $\mathcal{C}$, $\overline{b}=\dfrac{1}{b}$, $\overline{c}=\dfrac{1}{c}$, $\overline{d}=\dfrac{1}{d}$.

b. Posons $\mathsf{Z} = \frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b}$. On a donc

$$
\begin{aligned}
\overline{Z} &= \frac{\overline{d}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{a}}\frac{\overline{c}-\overline{b}}{\overline{d}-\overline{b}} \\
&= \frac{\frac{1}{d}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{d}-\frac{1}{b}} \\
&= \frac{\frac{a-d}{ad}}{\frac{a-c}{ac}}\frac{\frac{b-c}{bc}}{\frac{b-d}{bd}} \\
&= \frac{a-d}{a-c}\frac{b-c}{b-d}\frac{ac}{ad}\frac{bd}{bc} \\
&= \frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b} = Z
\end{aligned}
$$

Ainsi Z est réel.

c. Puisque Z est réel, $\arg(Z) \equiv 0[\pi]$. On a donc $\arg\left(\frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b}\right) \equiv 0[\pi]$ puis $\arg\frac{d-a}{c-a} \equiv \arg\frac{d-b}{c-b}[\pi]$ ce qui équivaut à $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})[\pi]$.

2. On reprend la question précédente à l'envers et on montre que Z est réel.

3. On a les équivalences suivantes

$$
\begin{aligned}
& & Z &= \frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b} \\
&\iff & \frac{d-a}{d-b} &= Z\frac{c-a}{c-b} \\
&\iff & d-a &= Z\frac{c-a}{c-b}d - Z\frac{c-a}{c-b}b \\
&\iff & d\left(1-Z\frac{c-a}{c-b}\right) &= a - Z\frac{c-a}{c-b}b \\
&\iff & d\left(c-b-Z(c-a)\right) &= a(c-b) - Zb(c-a) && \text{en multipliant par } c-b \\
&\iff & d &= \frac{a(c-b)-Zb(c-a)}{c-b-Z(c-a)}
\end{aligned}
$$

4. On a encore $\overline{a} = \frac{1}{a}$, $\overline{b} = \frac{1}{b}$, $\overline{c} = \frac{1}{c}$. De plus, comme Z est réel, $\overline{Z} = Z$.

$$
\begin{aligned}
\overline{d} &= \frac{\overline{a}(\overline{c}-\overline{b}) - \overline{Zb}(\overline{c}-\overline{a})}{\overline{c}-\overline{b}-\overline{Z}(\overline{c}-\overline{a})} \\
&= \frac{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right) - \frac{Z}{b}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}-Z\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)} \\
&= \frac{b-c-Z(a-c)}{a(b-c)-Zb(a-c)} && \text{en multipliant numérateur et dénominateur par } abc \\
&= \frac{c-b-Z(c-a)}{a(c-b)-Zb(c-a)} \\
&= \frac{1}{d}
\end{aligned}
$$

On en déduit que $d\overline{d} = 1$ et donc que $|d| = 1$. Ainsi D est sur le cercle $\mathcal{C}$.

Solution 44.

La condition d'alignement s'écrit
$$(z^3-1)\,\overline{(z-1)} \in \mathbb{R},$$
c'est-à-dire $(z^2+z+1)\,|z-1|^2 \in \mathbb{R}$, ie $z^2+z+1 \in \mathbb{R}$ (qui inclus le cas $z=1$), ce qui est équivalent à $(z+1/2)^2 \in \mathbb{R}$, et finalement $z+1/2$ est réel ou imaginaire pur . L'ensemble recherché est la réunion de l'axe réel et de la droite d'équation $x = -1/2$.

> **Remarque.** On a utilisé l'équivalence $z^2 \in \mathbb{R}$ *si et seulement si* $z \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$. Elle se démontre sans peine en écrivant z sous forme algébrique ou sous forme polaire.

Solution 45.

La condition d'alignement s'écrit :
$$(iz-z)\big(\bar{z}^2-\bar{z}\big) = (-\bar{z}-i\bar{z})\big(z^2-z\big),$$
c'est-à-dire
$$|z|^2(i-1)(\bar{z}-1) = |z|^2(-1-i)(z-1),$$
ainsi $z=0$ ou $\bar{z}-1 = i(z-1)$, en écrivant z sous forme algébrique : $z = x+iy$ avec $x,y \in \mathbb{R}$, la dernière condition est équivalent à
$$y = 1-x.$$
Géométriquement parlant, l'ensemble recherché est la droite d'équation $y = 1-x$ à laquelle on ajoute le point O.

Solution 46.

Les trois points $A(1), B(z^2), C(z^4)$ sont alignés *si et seulement si*
$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \mathrm{Im}(\overline{(z^2-1)}(z^4-1)) = 0,$$
ce qui est équivalent à $\overline{(z^2-1)}(z^4-1) \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire
$$\overline{(z^2-1)}\,(z^4-1) = \overline{\overline{(z-1)}\,(z^4-1)}.$$
Nous devons donc résoudre l'équation
$$\overline{z^2-1}(z^4-1) = (z^2-1)\,\overline{(z^4-1)}.$$
Cette dernière équivaut à
$$\overline{(}z^2-1)(z^2-1)(z^2+1) = \overline{(}z^2-1)(z^2-1)\overline{(z^2+1)},$$
ie
$$|z^2-1|^2(z^2-\bar{z}^2) = 0.$$
Les solutions sont donc les nombres complexes z vérifiant $z^2 = 1$ ou $z^2 = \bar{z}^2$, i.e. $z = \pm 1$ ou $z = \bar{z}$ ou $\bar{z} = -z$. L'ensemble des points $M(z)$ vérifiant la condition est donc $(Ox) \cup (Oy)$.

Solution 47.

On a l'équivalence suivante :
$$\left(\frac{z}{z-1}\right)^4 \in \mathbb{R}$$
si et seulement si
$$z = 0 \quad \text{ou} \quad \arg\left(\frac{z}{z-1}\right) \equiv 0\,[2\pi],$$

c'est-à-dire

$$z = 0 \quad \text{ou} \quad 4\arg\left(\frac{z}{z-1}\right) \equiv 0\,[\pi],$$

soit encore

$$z = 0 \quad \text{ou} \quad \arg\left(\frac{z}{z-1}\right) \equiv 0\,[\pi/4],$$

et finalement

$$z = 0 \quad \text{ou} \quad \arg\left(\frac{z}{z-1}\right) \equiv 0\,[\pi]$$

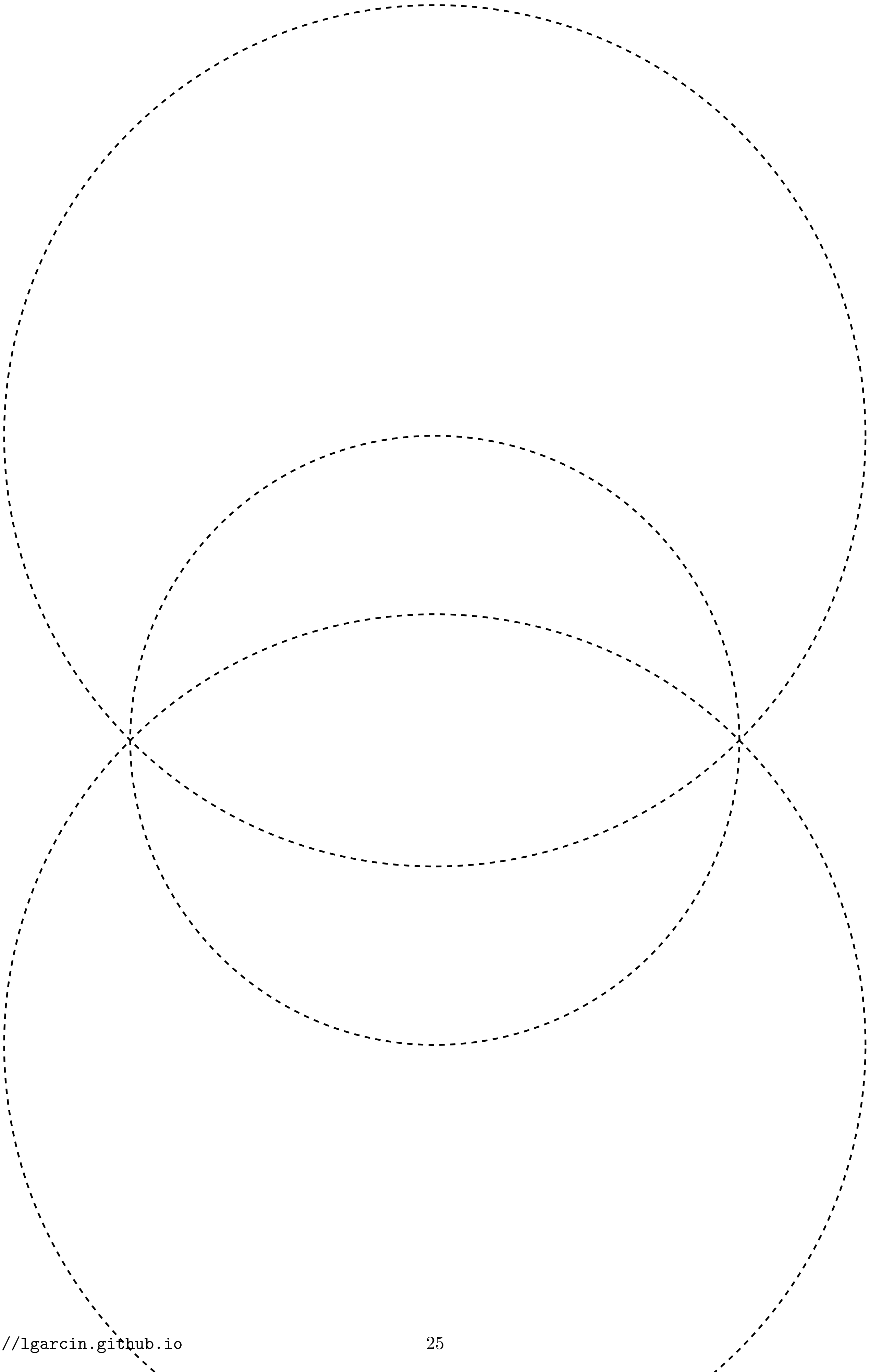
$$\text{ou} \quad \arg\left(\frac{z}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\,[\pi] \quad \text{ou} \quad \arg\left(\frac{z}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi],$$

$$\text{ou} \quad \arg\left(\frac{z}{z-1}\right) \equiv \frac{3\pi}{4}\,[\pi].$$

Notons A le point d'affixe 1, Ω le milieu de $[OA]$. Soient Ω_1 et Ω_2 les points de la médiatrice de $[OA]$ définis par

$$(\overrightarrow{\Omega_1 A}, \overrightarrow{\Omega_1 O}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega_2 A}, \overrightarrow{\Omega_2 O}) \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi].$$

La condition est équivalente à $M(z)$ appartient à la réunion de la droite (OA), du cercle de diamètre $[OA]$, du cercle de centre Ω_1 de rayon $O\Omega_1$ et du cercle de centre Ω_2 de rayon $O\Omega_2$ le tout privé du point A.



Solution 48.

1. Le triangle ABC est équilatéral direct *si et seulement si* $AB = AC$ et

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3},$$

c'est-à-dire $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3} = -j^2$, d'où, puisque $1+j+j^2 = 0$, ABC est équilatéral direct *si et seulement si* $ja+j^2b+c = 0$ et en multipliant par j^2, $a + jb + j^2c = 0$.

> **Remarque.** Voici une bien meilleure preuve, faisant appel aux transformations complexes affines. Un triangle est équilatéral direct *si et seulement si* s'il se ramène par une similitude directe ou une translation au triangle équilatéral direct d'affixes $1, j, j^2$. Or pour ce dernier l'équation $a+bj+cj^2 = 0$ est vraie car $1+j\times j+j^2\times j^2 = 0$. Pour conclure il suffit alors de remarquer que l'équation $a + bj + cj^2 = 0$ est invariante sous les tranformations de la forme $(a, b, c) \mapsto (\alpha a + \beta, \alpha b + \beta, \alpha c + \beta)$ où $\alpha \neq 0$.

Pour les configurations indirectes, on peut faire les mêmes calucls ou bien on remarque que changer l'orientation d'un triangle revient à permuter j et j^2 dans la relation précédente.

2. D'après ce qui précède, ABC est équilatéral *si et seulement si* $p = (a + j^2b + jc)(a + jb + j^2c) = 0$. Or

$$\begin{aligned}
p &= a^2 + jab + j^2ac + j^2ab + b^2 + jbc + jac + j^2bc + c^2 \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + (j + j^2)ab + (j + j^2)ac + (j + j^2)bc \\
&= a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc.
\end{aligned}$$

> **Remarque.** L'utilisation de la relation bien connue $1 + j + j^2 = 0$ permet d'alléger sensiblement les calculs.

Solution 49.

1. Vérifions que le point H' d'affixe h est tel que $\overrightarrow{M_1H'} \perp \overrightarrow{M_2M_3}$. On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_1H'} \cdot \overrightarrow{M_2M_3} &= \mathrm{Re}((h' - z_1)\overline{(z_3 - z_2)}) \\
&= \mathrm{Re}((z_3 + z_2)\overline{(z_3 - z_2)}) \\
&= \mathrm{Re}(|z_3|^2 - |z_2|^2 + z_2\overline{z_3} - \overline{z_2}z_3) \\
&= \mathrm{Re}(|z_3|^2 - |z_2|^2) \\
&= OM_3^2 - OM_2^2 = 0
\end{aligned}$$

car $z_2\overline{z_3} - \overline{z_2}z_3 = Z - \overline{Z}$ (avec $Z = z_2\overline{z_3}$) est un imaginaire pur. On prouve de même que

$$\overrightarrow{M_2H'} \perp \overrightarrow{M_1M_3} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_3H'} \perp \overrightarrow{M_2M_1}$$

et donc que $H =' H$, orthocentre de $M_1M_2M_3$.

2. Notons G le centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$. Comme l'affixe g de G vaut

$$g = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \frac{h}{3},$$

on a $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$: les points O, H et G sont donc alignés.

> **Remarque.** Lorsque le triangle $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral, on a $O \neq H$ et la droite (OH) est appelée la droite d'Euler du triangle $M_1M_2M_3$.

Solution 50.

1. En posant $\zeta = e^z$, l'équation est équivalente à
$$\zeta + (1/\zeta) = 1,$$
c'est-à-dire $\zeta^2 - \zeta + 1 = 0$, de solutions
$$e^{i\pi/3}, \quad e^{-i\pi/3}.$$
L'ensemble des solutions de l'équation initiale est donc
$$\left(i\frac{\pi}{3} + 2i\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-i\frac{\pi}{3} + 2i\pi\mathbb{Z}\right).$$

2. En posant $\zeta = e^z$, l'équation est équivalente à
$$\zeta^2 - 2i\zeta + 1 = 0,$$
de solutions
$$(1+\sqrt{2})e^{i\pi/2}, \quad (\sqrt{2}-1)e^{-i\pi/2}.$$
L'ensemble des solutions est donc égal à
$$\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + i\frac{\pi}{2} + 2i\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right) - i\frac{\pi}{2} + 2i\pi\mathbb{Z}\right).$$

Solution 51.

1. On trouve $z_0 = 1$, $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2i$ et $z_3 = -2 - 2i$.
2. On a $z_{n+1} = x_n + iy_n + y_n - ix_n = x_n + iy_n - i(x_n + iy_n) = (1-i)z_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi (z_n) est une suite géométrique de raison $1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$.
3. Comme (z_n) est une suite géométrique de premier terme $z_0 = 1$ et de raison $1-i$, on a $A_n = \dfrac{(1-i)^{n+1}-1}{1-i-1} = i(1-i)^{n+1} - i$.
On a $B_n = \mathrm{Re}(A_n)$ et $C_n = \mathrm{Im}(A_n)$ donc
$$B_n = \mathrm{Re}\left(i(1-i)^{n+1} - i\right) = -\mathrm{Im}\left((1-i)^{n+1}\right) = -\mathrm{Im}\left(\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^{-\frac{(n+1)\pi}{4}}\right) = 2^{\frac{n+1}{2}}\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)$$
$$C_n = \mathrm{Im}\left(i(1-i)^{n+1} - i\right) = \mathrm{Re}\left((1-i)^{n+1}\right) - 1 = \mathrm{Re}\left(\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^{-\frac{(n+1)\pi}{4}}\right) - 1 = 2^{\frac{n+1}{2}}\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right) - 1$$

Solution 52.

On somme séparément les termes d'indice pair et les termes d'indice impair :
$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(i\sqrt{3})^p &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}(i\sqrt{3})^{2k} \\ &\quad + \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}(i\sqrt{3})^{2k+1} \\ &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}(-3)^k \\ &\quad + i\sqrt{3}\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}(-3)^k\end{aligned}$$

donc

$$S_n = \Re\Big[\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}(i\sqrt{3})^p\Big].$$

D'après la formule du binôme,

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}(i\sqrt{3})^p = (1+i\sqrt{3})^n$$

et comme

$$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3},$$

on trouve enfin que

$$\begin{aligned} S_n &= \Re(2^n e^{in\pi/3}) \\ &= 2^n \cos\frac{n\pi}{3}. \end{aligned}$$

Solution 53.

1. D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned} S_1+S_2+S_3 &= \sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k} \\ &= (1+1)^{3n} = 2^{3n} = 8^n. \end{aligned}$$

Remarquons que $j^{3k+1} = (j^3)^k j = j$ et que $j^{3k+2} = (j^3)^k j^2 = j^2$. Toujours d'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned} S_1+jS_2+j^2S_3 &= \sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}j^k \\ &= (1+j)^{3n} \\ &= (e^{i\pi/3})^{3n} = (-1)^n. \end{aligned}$$

Remarquons aussi que $(j^2)^{3k+1} = j^2$ et que $(j^2)^{3k+2} = j^4$. D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned} S_1+j^2S_2+j^4S_3 &= \sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}(j^2)^k \\ &= (1+j^2)^{3n} \\ &= (e^{-i\pi/3})^{3n} = (-1)^n. \end{aligned}$$

2. Rappelons que $1+j+j^2=0$ et que $1+j^2+j^4=0$. La somme des trois sommes calculées plus haut nous donne

$$3S_1 = 8^n + 2(-1)^n.$$

Multiplions la deuxième somme par j^2 et la troisième par j, et sommons : on trouve

$$3S_2 = 8^n + (-1)^n(j+j^2) = 8^n - (-1)^n.$$

Multiplions la deuxième somme par j et la troisième par j^2, et sommons : on trouve

$$3S_3 = 3S_2 = 8^n - (-1)^n.$$

> **Remarque.** On peut démontrer que $S_2 = S_3$ en n'utilisant que la propriété de symétrie des coefficients binomiaux :
>
> $$\begin{aligned} \binom{3n}{3k+1} &= \binom{3n}{3n-(3k+1)} \\ &= \binom{3n}{3(n-k-1)+2}. \end{aligned}$$