

DEVOIR À LA MAISON N°06

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1

1 Posons $R_n : x \mapsto \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$. Alors $\|R_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$. Ainsi la série de fonctions $\sum R_n$ converge normalement sur \mathbb{R} . De plus, les R_n sont continues sur \mathbb{R} donc R est continue (et a fortiori définie) sur \mathbb{R} .

2 L'application $\varphi : x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 1$ donc φ est intégrable en 1 et $\varphi(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc φ est intégrable en $+\infty$. Finalement, φ est intégrable sur \mathbb{R} et $\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$ converge.

3 On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} puisque f l'est.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue sur \mathbb{R} .
- Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $|f(t)e^{-ixt}| = |f(t)|$ et $|f|$ est intégrable sur \mathbb{R} .

On en déduit que \hat{f} est continue et a fortiori définie sur \mathbb{R} .

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(nh)| \leq \frac{C}{n^2 h^2 + 1}$. Notamment, $f(nh) = \mathcal{O}(1/n^2)$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(nh)$ converge. Ceci prouve que S est définie sur \mathbb{R}_+^* .

5 Justifions déjà la convergence de l'intégrale. La partie entière est continue par morceaux sur \mathbb{R} et f est continue sur \mathbb{R} donc ϕ_h est continue par morceaux sur \mathbb{R} et a fortiori sur \mathbb{R}_+^* . Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{([t/h]^2 h^2 + 1)}$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - 1 < [x] \leq x$ donc $[x] \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$. Ainsi

$$[t/h]^2 h^2 + 1 \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^2$$

puis $\phi(t) = \mathcal{O}(1/t^2)$. Ceci assure la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \phi_h(t) dt$.

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \phi_h(t) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{nh} \phi_h(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nh}^{(n+1)h} \phi_h(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nh}^{(n+1)h} f(nh) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} h f(nh) = S(h) \end{aligned}$$

6 Soit $h \in]0, 1]$ et $t \in [1, +\infty[$. Alors

$$0 \geq \frac{t}{h} - 1 < \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor$$

Ainsi

$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{\lfloor t/h \rfloor^2 h^2 + 1} \leq \frac{C}{(t/h - 1)^2 h^2 + 1} = \frac{C}{(t - h)^2 + 1}$$

Or $t - h \geq t - 1 \geq 0$ donc $|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{(t - 1)^2 + 1}$.

7 Remarquons que pour tout $h > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $t - h < \lfloor t/h \rfloor h \leq t$ donc, par continuité de f , $\lim_{h \rightarrow 0^+} \phi_h(t) = f(t)$.

De plus, pour tout $h > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $|\phi_h(t)| \leq \varphi(t)$ avec $\varphi : t \mapsto \begin{cases} C & \text{si } t \in [0, 1] \\ \frac{C}{(t-1)^2 + 1} & \text{si } t \in [1, +\infty[\end{cases}$. La fonction φ est continue (par morceaux) sur \mathbb{R}_+ et $\varphi(t) = \mathcal{O}(1/t^2)$ donc φ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \phi_h(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

ou encore

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} S(h) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

d'après la question 5.

8 Posons $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(t^2)}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$. f est bien continue sur \mathbb{R} puisque $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^2)}{t^2} = 1$.

De plus, si $|t| \geq 1$, $|f(t)| \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{2}{t^2 + 1}$ et si $|t| \leq 1$, $|f(t)| \leq 1$ (puisque $|\sin u| \leq |u|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$) puis $|f(t)| \leq 1 \leq \frac{2}{1 + t^2}$. Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f(t)| \leq \frac{2}{1 + t^2}$. On peut donc appliquer ce qui précède pour affirmer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} S(\sqrt{x}) = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \frac{\pi}{2}$$

Or pour tout $x > 0$,

$$S(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \sum_{n=0}^{+\infty} f(n\sqrt{x}) = \sqrt{x} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2 x} \right) = \sqrt{x} \left(1 + \frac{R(x)}{x} \right)$$

de sorte que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{R(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ou encore

$$R(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{\pi x}{2}}$$

Enfin,

$$\frac{R(x) - R(0)}{x - 0} = \frac{R(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

Ainsi, $\frac{R(x) - R(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ et R n'est pas dérivable en 0.

9 Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $F(x)$ est défini. Alors les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(x + 2n\pi)$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(x - 2n\pi)$ convergent et

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(x + 2n\pi) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x - 2n\pi) \\ &= f(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} f(x + 2(n+1)\pi) - f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x - 2(n-1)\pi) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(x + 2\pi + 2n\pi) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x + 2\pi - 2n\pi) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi + 2n\pi) = F(x + 2\pi) \end{aligned}$$

Ainsi F est bien 2π -périodique.

Il suffit donc de montrer qu'elle est continue sur $[0, 2\pi]$ pour garantir qu'elle est continue (et a fortiori définie) sur \mathbb{R} . Posons à cet effet $f_n : x \mapsto f(x + 2n\pi)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 2\pi], |f_n(x)| \leq \frac{C}{(x + 2n\pi)^2 + 1} \leq \frac{C_1}{4n^2\pi^2 + 1}$$

Par conséquent, $\|f_n\|_{\infty, [0, 2\pi]} = \mathcal{O}(1/n^2)$ donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. Comme les f_n sont clairement continues, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[0, 2\pi]$. De même,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 2\pi], |f_{-n}(x)| \leq \frac{C_1}{(x - 2n\pi)^2 + 1} \leq \frac{C}{4(n-1)^2\pi^2 + 1}$$

Par conséquent, $\|f_{-n}\|_{\infty, [0, 2\pi]} = \mathcal{O}(1/n^2)$ donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_{-n}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. Comme les f_{-n} sont clairement continues, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}$ est continue sur $[0, 2\pi]$. Finalement, $F = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n + \sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}$ est continue sur $[0, 2\pi]$ et donc sur \mathbb{R} par 2π -périodicité.

10 Posons $g_n : x \mapsto \hat{f}e^{inx}$. Les g_n sont clairement continues sur \mathbb{R} . De plus, $\|g_n\|_{\infty} = |\hat{f}(n)| = \mathcal{O}(1/n^2)$ et $\|g_{-n}\|_{\infty} = |\hat{f}(-n)| = \mathcal{O}(1/n^2)$. On en déduit que les fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} g_{-n}$ sont continues sur \mathbb{R} . Finalement, G est également continue (et a fortiori définie) sur \mathbb{R} comme somme de ces deux fonctions continues. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G(x + 2\pi) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{in(x+2\pi)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}(-n)e^{-in(x+2\pi)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}(-n)e^{-inx} \\ &= G(x) \end{aligned}$$

donc G est 2π -périodique.

11 On utilise le résultat admis dans l'énoncé. Soit $p \in \mathbb{Z}$.

$$c_p(2\pi F) = \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(t)e^{-ipt} dt$$

avec $f_n : t \mapsto f(t + 2n\pi)$. Or on a vu précédemment que les séries de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_{-n}$ convergeaient normalement sur $[0, 2\pi]$. Comme $|e^{-ipt}| = 1$, on en déduit également que les séries de fonctions de termes généraux $t \mapsto f_n(t)e^{-ipt}$ et $t \mapsto f_{-n}(t)e^{-ipt}$ convergent aussi normalement et donc uniformément sur le segment $[0, 2\pi]$, ce qui permet de procéder à une interversion série/intégrale :

$$c_p(2\pi F) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f_n(t)e^{-ipt} dt$$

Or pour tout $n \in \mathbb{Z}$, via le changement de variable $t \mapsto t + 2n\pi$

$$\int_0^{2\pi} f_n(t)e^{-ipt} dt = \int_0^{2\pi} f(t + 2n\pi)e^{-ipt} dt = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t)e^{-ipt+2ipn\pi} dt = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t)e^{-ipt} dt$$

Ainsi

$$c_p(2\pi F) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t)e^{-ipt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ipt} dt = \hat{f}(p)$$

Par ailleurs,

$$c_p(G) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n(t)e^{-ipt} dt$$

A nouveau les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} g_{-n}$ convergent normalement sur $[0, 2\pi]$ donc il en est de même des séries de fonctions de termes généraux $t \mapsto g_n(t)e^{-ipt}$ et $t \mapsto g_{-n}(t)e^{-ipt}$. On procède donc à nouveau à une interversion série/intégrale :

$$c_p(G) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} g_n(t)e^{-ipt} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} dt$$

Or on montre aisément que $\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} dt = 2\pi\delta_{n,p}$ donc

$$c_p(G) = \hat{f}(p) = c_p(2\pi F)$$

D'après le résultat admis, $G = 2\pi F$.

12 Posons $g : t \mapsto f(at/2\pi)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|g(t)| \leq \frac{C_1}{(at/2\pi)^2 + 1} = \frac{4C_1\pi^2}{a^2t^2 + 4\pi^2}$$

Posons $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{4C_1\pi^2(t^2 + 1)}{a^2t^2 + 4\pi^2}$. La fonction φ est continue sur \mathbb{R} . De plus, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi(t) = \frac{4C_1\pi^2}{a^2}$. Notamment φ est bornée au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$. Il existe donc $A \in \mathbb{R}_+$ tel que φ est bornée sur $[A, +\infty[$ et sur $] -\infty, -A]$. De plus, φ est continue sur le segment $[-A, A]$ donc elle est bornée sur ce segment. On peut donc affirmer que φ est bornée sur \mathbb{R} . Notamment il existe $C'_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\varphi(t) \leq C'_1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |g(t)| \leq \frac{C'_1}{t^2 + 1}$$

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ixt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{at}{2\pi}\right)e^{-ixt} dt$$

En effectuant le changement de variable linéaire $u = \frac{at}{2\pi}$,

$$\hat{g}(x) = \frac{2\pi}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi ux/a} du = \frac{2\pi}{a} \hat{f}\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

On montre comme précédemment l'existence de $C'_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\hat{g}(x)| \leq \frac{C'_2}{x^2 + 1}$$

Ainsi g vérifie les mêmes hypothèses que f et on peut alors affirmer que

$$2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(2n\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{a}\right)$$

13 On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{it^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n t^{2n}}{n!}$$

Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n t^{2n-2}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1} t^{2n}}{(n+1)!}$$

Comme $f(0) = i$, cette égalité est aussi valable pour $t = 0$. Finalement, f est développable en série entière sur \mathbb{R} : elle est donc de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

14 Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(t) = -\frac{2(e^{it^2} - 1)}{t^3} + \frac{2ie^{it^2}}{t}$$

Comme $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it^2}$ est bornée (son module est constamment égal à 1), $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f'(t) = 0$.

Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$f''(t) = \frac{6(e^{it^2} - 1)}{t^4} - \frac{4ie^{it^2}}{t^2} - \frac{2ie^{it^2}}{t^2} - 4e^{it^2}$$

A nouveau, comme $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it^2}$ est bornée, $f''(t) = -4e^{it^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

15 Sous réserve de convergence, on obtient par intégration par partie

$$\int_1^{+\infty} e^{ix^2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2ix} \cdot 2ixe^{ix^2} = \left[\frac{1}{2ix} e^{ix^2} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{ix^2}}{2ix^2} dx$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2ix} e^{ix^2} = 0$ car $x \mapsto e^{ix^2}$ est bornée et $\frac{e^{ix^2}}{2ix^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{ix^2}}{2ix^2} dx$ converge (absolument). L'intégration par parties précédente montre alors que $\int_1^{+\infty} e^{ix^2} dx$ converge. Comme $x \mapsto e^{ix^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, $\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$ converge.

Comme $x \mapsto e^{ix^2}$ est paire, $\int_{-\infty}^0 e^{ix^2} dx$ converge également puis $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2} dx$ converge.

16 Remarquons déjà que f est intégrable sur \mathbb{R} puisqu'elle est continue sur \mathbb{R} et que $f(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Ainsi \hat{f} est définie sur \mathbb{R} d'après la question 3.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Sous réserve de convergence, on obtient par intégration par parties

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt} dt = -\frac{1}{ix} [f(t)e^{-ixt}]_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow +\infty} + \frac{1}{ix} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ixt} dt$$

Cette intégration par parties est légitime puisque $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t)e^{-ixt} = 0$ (f est de limite nulle en $+\infty$ et $t \mapsto e^{-ixt}$ est bornée). On obtient également

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{ix} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ixt} dt$$

Par une nouvelle intégration par parties

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{x^2} [f'(t)e^{-ixt}]_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow +\infty} - \frac{1}{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt} dt$$

Cette intégration par parties est à nouveau légitime puisque $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f'(t)e^{-ixt} = 0$ d'après la question 14. De plus,

$$\hat{f}(x) = -\frac{1}{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt} dt$$

Posons $g(t) = f''(t) + 4e^{-it^2}$ de sorte que $g(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. g étant aussi continue sur \mathbb{R} , elle est intégrable sur \mathbb{R} de même que $t \mapsto g(t)e^{-ixt}$. De plus, par inégalité triangulaire

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ixt} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt$$

de sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ixt} dt \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} \mathcal{O}(1)$. Enfin, via le changement de variable $u = t - x/2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it^2} e^{-ixt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(t-x/2)^2 + ix^2/4} dt = e^{ix^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(t-x/2)^2} dt = e^{ix^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu^2} du$$

et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it^2} e^{-ixt} dt \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} \mathcal{O}(1)$ car $x \mapsto e^{ix^2/4}$ est bornée. Finalement,

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{x^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ixt} dt - 4 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it^2} e^{-ixt} dt \right) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

17 On souhaite appliquer la formule sommatoire de Poisson à la fonction f . On souhaite donc montrer qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)| \leq \frac{C_1}{t^2 + 1} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, |\hat{f}(x)| \leq \frac{C_2}{x^2 + 1}$$

Comme $1 + t^2 \underset{t \rightarrow +\infty}{=} t^2$ et que $f(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, on a également $f(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2 + 1}\right)$. Il existe donc une constante D et un réel positif A tels que

$$\forall t \in]-\infty, -A] \cup [A, +\infty[, |f(t)| \leq \frac{D}{t^2 + 1}$$

Par ailleurs, $t \mapsto (t^2 + 1)f(t)$ est continue sur le segment $[-A, A]$ donc bornée sur ce segment. Il existe donc une constante D' telle que

$$\forall t \in [-A, A], |f(t)| \leq \frac{D'}{t^2 + 1}$$

Il suffit alors de poser $C_1 = \max(D, D')$.

Comme on a également $|\hat{f}(x)| \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, on montre de la même manière l'existence de la constante C_2 .

On peut alors appliquer la formule sommatoire de Poisson. On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)$$

De plus,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\sqrt{x}) = i + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x} - 1}{n^2x} = i + \frac{2}{x}(F(x) - F(0))$$

REMARQUE. Remarquons que F est bien définie sur \mathbb{R} comme somme d'une série de fonctions convergeant normalement sur \mathbb{R} .

Enfin, comme f est paire, on montre aisément que \hat{f} est également paire, de sorte que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) = \hat{f}(0) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)$$

On sait de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) \right| \leq \frac{C_2}{1 + \left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)^2} = \frac{C_2x}{x + 4n^2\pi^2} \leq \frac{C_2x}{4n^2\pi^2}$$

de sorte que, par inégalité triangulaire,

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) \right| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_2}{4n^2\pi^2} \right) x$$

ou encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}(x)$$

Finalement,

$$i + \frac{2}{x}(F(x) - F(0)) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{\hat{f}(0)}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}(\sqrt{x})$$

ou encore

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} F(0) + \frac{\hat{f}(0)\sqrt{x}}{2} - \frac{ix}{2} + \mathcal{O}(x\sqrt{x})$$

On a donc bien

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} F(0) + a\sqrt{x} + bx + \mathcal{O}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$

avec $b = -\frac{i}{2}$ et

$$a = \frac{1}{2}\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

Comme f est paire

$$a = 2 \int_0^{+\infty} f(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}(e^{it^2} - 1) dt$$

Par intégration par parties

$$a = -2 \left[\frac{e^{it^2} - 1}{t} \right]_0^{+\infty} + 4 \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$$

Comme $e^{it^2} - 1 \sim it^2$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{it^2} - 1}{t} = 0$ et comme $t \mapsto e^{it^2}$ est bornée, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{it^2} - 1}{t} = 0$. Finalement

$$a = 4 \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2} dt = 2I$$

18 Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x + \pi) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2(x+\pi)}}{n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} e^{in^2\pi} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{in^2x}}{n^2} \quad \text{car } n \text{ et } n^2 \text{ ont la même parité} \end{aligned}$$

Comme la série $\sum (-1)^n \frac{e^{in^2x}}{n^2}$ converge absolument, on peut séparer cette somme suivant la parité des indices :

$$F(x + \pi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i(2n)^2x}}{(2n)^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i(2n-1)^2x}}{(2n-1)^2}$$

Mais via le même argument

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i(2n)^2x}}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i(2n-1)^2x}}{(2n-1)^2}$$

On en déduit que

$$F(x + \pi) + F(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i(2n)^2x}}{(2n)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i4n^2x}}{n^2} = \frac{1}{2} F(4x)$$

ou encore

$$F(x + \pi) = \frac{1}{2} F(4x) - F(x)$$

19 D'après la question 17,

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} F(0) + a\sqrt{x} + bx + \mathcal{O}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$

donc

$$\frac{1}{2} F(4x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{2} F(0) + a\sqrt{x} + 2bx + \mathcal{O}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$

puis

$$F(x + \pi) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} -\frac{1}{2} F(0) + bx + \mathcal{O}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$

On remarque que $R(x) = \text{Im}(F(x))$, $F(0) \in \mathbb{R}$ et $b = -\frac{i}{2}$ donc

$$R(x + \pi) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} -\frac{1}{2}x + \mathcal{O}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$

A fortiori,

$$R(\pi + x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} -\frac{1}{2}x + o(x)$$

De plus, R est 2π -périodique et impaire donc

$$R(\pi - x) = -R(x - \pi) = -R(\pi + x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} -\frac{1}{2}x + o(x)$$

ou encore

$$R(\pi + x) \underset{x \rightarrow 0^-}{=} \frac{1}{2}x + o(x)$$

Finalement

$$R(\pi + x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2}x + o(x)$$

donc R est dérivable en π et $R'(\pi) = -\frac{1}{2}$.