Devoir à la maison n° 8 : corrigé

Problème 1 — Petites Mines 2009

Partie I – Étude d'une fonction

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations arithmétiques sur des fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3(1-2x^2)e^{-2x^2}$$

On en déduit que f est

- strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$;
- strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$;
- strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.

Pour tout $x \neq 0$, $xe^{-x^2} = \frac{x^2e^{-x^2}}{x}$. Par croissances comparées,

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x^2} = 0$$

via le changement de variables $X = x^2$. A fortiori

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = 0$$

Puis, par opérations

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\searrow$	-1

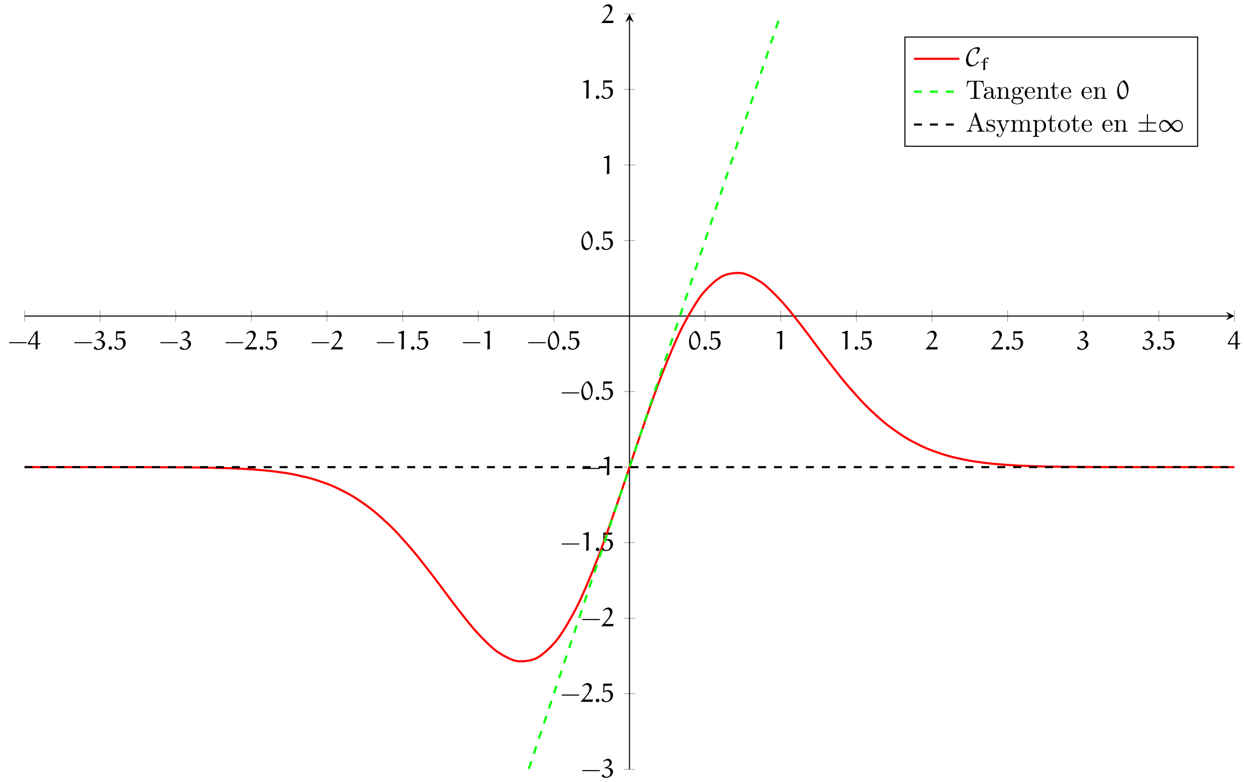
En particulier, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
Puisque $f(-x) + f(x) = -2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0, -1)$.

2. Puisque $f(0) = -1$ et $f'(0) = 3$, $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = 3x - 1$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - (3x-1) = 3x(e^{-x^2} - 1)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} - 1 \leqslant 0$ car $-x^2 \leqslant 0$ et par croissance de exp sur $\mathbb{R}$. Ainsi $f(x) - (3x-1) \leqslant 0$ pour $x \geqslant 0$ et $f(x) - (3x-1) \geqslant 0$ pour $x \leqslant 0$. On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente à gauche de 0 et au-dessous de celle-ci à droite de 0. $\mathcal{C}_f$ admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

3.



4. **a.** f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle admet un développement limité à tout ordre en 0.

b. On sait que $e^u \underset{u\to0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. On en déduit que

$$e^{-x^2} \underset{x\to0}{=} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

puis que

$$f(x) \underset{x\to0}{=} -1 + 3x - 3x^3 + \frac{3}{2}x^5 + o(x^5)$$

Partie II – Étude d'une équation différentielle

1. L'équation différentielle H_n est $xy' - (n - 2x^2)y = 0$. Sur $\mathbb{R}^*$, elle équivaut à $y' - \left(\frac{n}{x} - 2x\right)y = 0$.
Une primitive de $x \mapsto \frac{n}{x} - 2x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto n\ln(x) - x^2$. Les solutions de H_n sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda x^n e^{-x^2}$ où λ décrit $\mathbb{R}$. Une primitive de $x \mapsto \frac{n}{x} - 2x$ sur $\mathbb{R}_-^*$ est $x \mapsto n\ln(-x) - x^2$. Les solutions de H_n sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda(-x)^n e^{-x^2}$ où λ décrit $\mathbb{R}$ ou, de manière plus simple, les fonctions $x \mapsto \lambda x^n e^{-x^2}$ où λ décrit encore $\mathbb{R}$.

2. La fonction constante égale à -1 étant clairement une solution particulière de E_n sur $\mathbb{R}$. On en déduit que les solutions de E_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $x \mapsto -1 + \lambda x^n e^{-x^2}$.

3. Supposons dans un premier temps $n = 1$. Soit y une solution de E_1 sur $\mathbb{R}$. Comme y est solution de E_1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$y(x) = \begin{cases} -1 + \lambda x e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -1 + \mu x e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La continuité de y en 0 impose $y(0) = -1$. De plus,

$$\lim_{x\to0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lambda \qquad \text{et} \lim_{x\to0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \mu$$

La dérivabilité de y en 0 impose donc $\lambda = \mu$. On a donc $y(x) = \lambda x e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Réciproquement pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \mapsto -1 + \lambda x e^{-x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et solution de E_1 sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de E_1 sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $x \mapsto -1 + \lambda x e^{-x^2}$ où λ décrit $\mathbb{R}$.

Supposons maintenant $n \geqslant 2$. Comme précédemment toute solution y de E_n sur $\mathbb{R}$ est nécessairement de la forme

$$y(x) = \begin{cases} -1 + \lambda x e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -1 + \mu x e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Réciproquement, si y est de la forme précédente, elle est bien solution de E_n sur $\mathbb{R}$, elle est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}^*-$, elle est continue en 0 et

$$\lim_{x \to 0^+} y'(x) = \lim_{x \to 0^-} y'(x) = 0$$

donc y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en vertu du théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$.

Remarque. Si on ne connaît pas encore le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, on procède «à la main». On constate que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = 0$$

donc y est dérivable en 0. De plus,

$$\lim_{x \to 0^+} y'(x) = \lim_{x \to 0^-} y'(x) = 0 = y'(0)$$

donc y' est continue en 0. Puisque y' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, y' est continue sur $\mathbb{R}$ i.e. y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Partie III – Étude de deux suites

1. On a $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = \frac{3}{e} - 1 > 0$.

2. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_n'(x) = 3(nx^{n-1} - 2x^{n+1})e^{-x^2} = 3x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$$

On en déduit que f_n est strictement croissante sur $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_n(x) = \left(x^2\right)^{\frac{n}{2}} e^{-x^2} - 1$$

donc, par croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = -1$.
Remarquons que puisque $n \geqslant 2$, $1 \in \left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et puisque f_n est strictement croissante sur cet intervalle, $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \geqslant f_n(1) > 0$.
f est strictement monotone et continue sur chacun des deux intervalles $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$. De plus, $f_n(0) < 0$, $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) > 0$ et $\lim_{+\infty} f < 0$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f_n s'annule une unique fois sur chacun des deux intervalles $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$ en deux réels notés respectivement u_n et v_n.
Puisque $f_n(1) > 0$ et que 1 appartient à l'intervalle $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ sur lequel f_n est strictement croissante, $u_n > 1$. Par ailleurs $v_n > \sqrt{\frac{n}{2}} \geqslant 1$ puisque $n \geqslant 2$.

3. D'après la question précédente, $v_n \geqslant \sqrt{\frac{n}{2}}$ pour tout $n \geqslant 2$. Or $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = +\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ par théorème de minoration.

4. **a.** Par définition, $f_n(u_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$ donc $e^{-u_n^2} = \frac{1}{3u_n^n}$.

b. $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1} e^{-u_n^2} - 1 = u_n - 1 < 0$.

c. On sait également que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ et que f_{n+1} est strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ contenant u_n et u_{n+1}. D'où $u_n < u_{n+1}$. Ceci étant valable pour tout $n \geqslant 2$, la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est strictement croissante.

d. La suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est également majorée par 1 donc elle converge en vertu du théorème de la limite monotone.

5. **a.** Évident.

b. Supposons $l \neq 1$. On a en fait $l < 1$ puisque (u_n) est majorée par 1. Pour tout $n \geqslant 2$, $f_n(u_n) = 0$ et donc $g_n(u_n) = 0$ d'après la question précédente. Ainsi pour tout $n \in\geqslant 2$.

$$0 = \ln 3 + n\ln(u_n) - u_n^2$$

Puisque $l < 1$, le membre de droite diverge vers $-\infty$, ce qui est absurde.
On en déduit que $l = 1$.

c. Pour tout $n \geqslant 2$, $g_n(u_n) = 0$ et donc

$$n\ln(1 + w_n) = u_n^2 - \ln 3$$

Puisque (w_n) converge vers 0, $n\ln(1+w_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} nw_n$. Par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty} u_n^2 - \ln 3 = 1 - \ln 3$ donc

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-\ln 3}{n}$$