

# DEVOIR SURVEILLÉ N°9 : CORRIGÉ

## Problème 1 — Intégrales dépendant d'un paramètre

### Partie I –

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$ . Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F = 0$ . De même, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $0 \leq G(x) \leq \frac{2}{x}$  et le même théorème des gendarmes montre que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G = 0$ .
2.
  - a.  $\sin$  et  $\cos$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Donc  $F$  et  $G$  sont continues comme produits de fonctions continues sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
  - b.  $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 1$ .  
 $1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$  donc  $G(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = 0$ .
3.
  - a.  $\sin$  et  $\cos$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Donc  $F$  et  $G$  sont dérivables comme produits de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$F'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

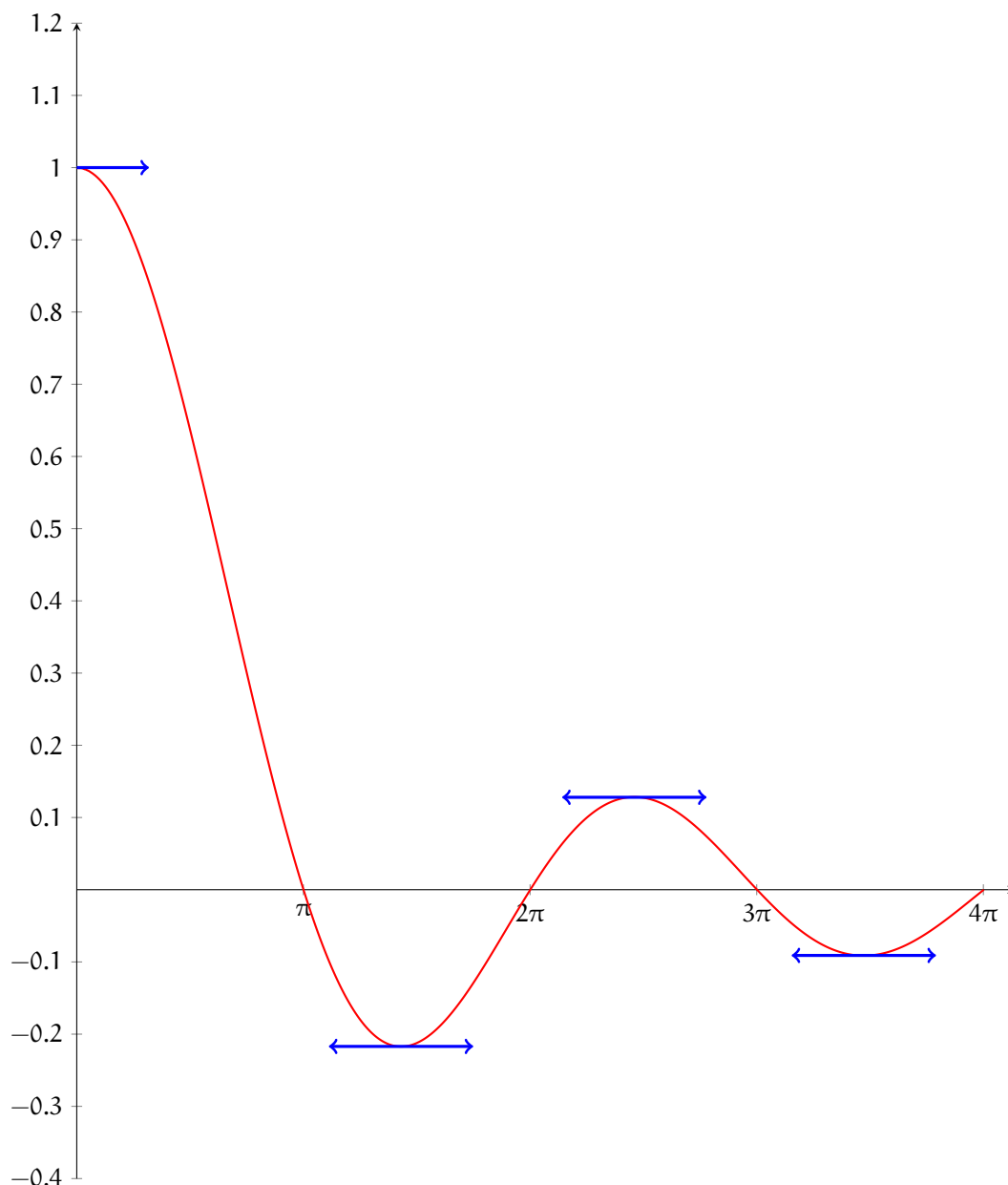
$$G'(x) = \frac{x \sin x + \cos x - 1}{x^2}$$

- b. On a  $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x^2)$  donc  $F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(x)$ . Ceci prouve que  $F$  est dérivable en 0 et que  $F'(0) = 0$ .  
 De même,  $1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^2)$  donc  $G(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2} + o(x)$ . Ceci prouve que  $G$  est dérivable en 0 et que  $G'(0) = \frac{1}{2}$ .
- a.  $F$  s'annule en les  $a_k = k\pi$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ . De plus, la suite  $(a_k)_{k \geq 1}$  est strictement croissante.
  - b.  $G$  s'annule en les  $b_k = 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ . De plus, la suite  $(b_k)_{k \geq 1}$  est strictement croissante.  
 La suite  $(b_k)_{k \geq 1}$  est une suite extraite de la suite  $(a_k)_{k \geq 1}$  car  $b_k = a_{2k}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .
- a.  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  donc sur  $[a_k, a_{k+1}]$ .  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  donc sur  $]a_k, a_{k+1}[$ . Enfin,  $F(a_k) = F(a_{k+1}) = 0$ . D'après le théorème de Rolle, il existe  $x_k \in ]a_k, a_{k+1}[$  tel que  $F'(x_k) = 0$ .
  - b.  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h'(x) = -x \sin x$ .  
 Pour  $x \in [a_k, a_{k+1}]$ ,  $x > 0$  et  $\sin$  est de signe constant sur  $[a_k, a_{k+1}]$  et ne s'annule qu'en  $a_k$  et  $a_{k+1}$ . Donc  $h'$  est de signe constant sur  $[a_k, a_{k+1}]$  et ne s'annule qu'en  $a_k$  et  $a_{k+1}$ . Ainsi  $h$  est strictement monotone sur  $[a_k, a_{k+1}]$ .
  - c. D'après I.5.a,  $F'$  et donc  $h$  s'annule au moins une fois en  $x_k$  sur  $]a_k, a_{k+1}[$ . D'après la question précédente,  $h$  est strictement monotone donc injective. Ainsi  $h$  s'annule exactement une fois sur  $]a_k, a_{k+1}[$ , à savoir en  $x_k$ . Puisque  $F'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , les zéros de  $F'$  et  $h$  sur  $[a_k, a_{k+1}]$  sont les mêmes : le réel  $x_k$  est donc unique.
  - d. Calculons les valeurs de  $h$  en  $a_k$  et  $a_k + \frac{\pi}{2}$  :

$$h(a_k) = h(k\pi) = (-1)^k k\pi \quad h\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right) = h\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1}$$

Ainsi  $h(a_k)$  et  $h(a_k + \frac{\pi}{2})$  sont de signe opposés. Puisque  $h$  est continue sur  $[a_k, a_k + \frac{\pi}{2}]$ ,  $h$  s'annule sur  $]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}[$ . Puisque  $h$  ne s'annule qu'en  $x_k$  sur  $[a_k, a_{k+1}]$ , on a  $x_k \in ]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}[$ .

- e.  $x_k > a_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ . Or  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = +\infty$  donc  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty$ .  
 De plus, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $k\pi < x_k < k\pi + \frac{\pi}{2}$  donc  $1 < \frac{x_k}{k\pi} < 1 + \frac{1}{2k}$ . D'après le théorème des gendarmes,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_k}{k\pi} = 1$ . Par conséquent,  $x_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} k\pi$ .
6. Les points d'intersection de  $\mathcal{C}_F$  avec l'axe des abscisses ont pour abscisses  $a_1, a_2, a_3, a_4$  i.e.  $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$ .  $\mathcal{C}_F$  admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses  $0, x_1, x_2, x_3$ .



### Partie II –

1.  $f, t \mapsto \cos(xt)$  et  $t \mapsto \sin(xt)$  sont continues sur  $[0, 1]$  donc  $t \mapsto f(t) \cos(xt)$  et  $t \mapsto f(t) \sin(xt)$  le sont aussi. Les intégrales  $I_f(x)$  et  $J_f(x)$  sont donc bien définies.
2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\cos(-xt) = \cos(xt)$  et  $\sin(-xt) = -\sin(xt)$ . Donc  $I_f(-x) = I_f(x)$  et  $J_f(-x) = -J_f(x)$ . Ainsi  $I_f$  est paire et  $J_f$  est impaire.
3. a. Remarquons d'abord que  $I_f(x) + iJ_f(x) = \int_0^1 f(t)e^{ixt} dt$ . Comme  $f$  et  $t \mapsto \frac{e^{ixt}}{ix}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ , on a en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I_f(x) + iJ_f(x) &= \left[ f(t) \frac{e^{ixt}}{ix} \right]_0^1 - \int_0^1 f'(t) \frac{e^{ixt}}{ix} dt \\ &= \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} - \frac{1}{ix} \int_0^1 f'(t) e^{ixt} dt \end{aligned}$$

- b. Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ ,  $f$  et  $f'$  sont continues sur le segment  $[0, 1]$  donc bornées.

c. Soit  $x > 0$ . Par inégalité triangulaire :

$$|I_f(x) + iJ_f(x)| \leq \left| \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} \right| + \left| \frac{1}{ix} \int_0^1 f'(t)e^{ixt} dt \right|$$

Or  $x > 0$  donc  $|ix| = x$ . Donc par inégalité triangulaire :

$$\left| \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} \right| \leq \frac{|f(1)| + |f(0)|}{x} \leq \frac{2M}{x}$$

De plus, en utilisant l'inégalité de continuité de l'intégrale :

$$\left| \frac{1}{ix} \int_0^1 f'(t)e^{ixt} dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^1 |f'(t)e^{ixt}| dt \leq \frac{1}{x} \int_0^1 M' dt = \frac{M'}{x}$$

Donc, en posant  $A = 2M + M'$ , on a  $|I_f(x) + iJ_f(x)| \leq \frac{A}{x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

d.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A}{x} = 0$  donc, d'après la question précédente,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |I_f(x) + iJ_f(x)| = 0$ . Par conséquent,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_f(x) + iJ_f(x) = 0$ . Par passage aux parties réelle et imaginaire ( $I_f$  et  $J_f$  sont à valeurs réelles), on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} J_f(x) = 0$ .

e. Puisque  $I_f$  est paire et que  $J_f$  est impaire,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} I_f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} J_f(x) = 0$ .

4. a.  $\cos$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|\cos'(x)| = |-\sin(x)| \leq 1$ . On en déduit que  $\cos$  est 1-lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$ .  
b. Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} |I_f(x) - I_f(y)| &= \left| \int_0^1 f(t)(\cos(xt) - \cos(yt)) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(t)| |\cos(tx) - \cos(ty)| dt \end{aligned}$$

Or pour  $t \in [0, 1]$ ,  $|\cos(tx) - \cos(ty)| \leq |t(x - y)| = t|x - y|$  par 1-lipschitzianité de  $\cos$ . Par conséquent,

$$|I_f(x) - I_f(y)| \leq |x - y| \int_0^1 t|f(t)| dt$$

5. Posons  $K = \int_0^1 t|f(t)| dt$ . La question précédente montre que  $I_f$  est  $K$ -lipschitzienne donc continue.  
6. Pour  $f = 1$ , on a  $I_f = F$  et  $J_f = G$ .

## Problème 2 – Equation intégrale

### Partie I –

1. Remarquons tout d'abord que la relation (1) peut s'écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x tf(t) dt = g(x)$$

On a donc  $f(x) = g(x) + x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Les fonctions  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  et  $x \mapsto \int_0^x tf(t) dt$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  comme primitives de fonctions continues. Puisque  $x \mapsto x$  et  $g$  sont également de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Les fonctions  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  et  $x \mapsto \int_0^x tf(t) dt$  sont donc de classe  $\mathcal{C}^2$  comme primitives de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ . Puisque  $x \mapsto x$  et  $g$  sont également de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ .

En dérivant une première fois la relation (1), on obtient pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) - \int_0^x f(t) dt = g'(x)$$

En dérivant cette relation une seconde fois, on obtient pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f''(x) - f(x) = g''(x)$$

2. Dans les trois cas qui suivent,  $g''$  est nulle. Si  $f$  est solution de (1), elle est solution de (2) et il existe donc  $A, B \in \mathbb{R}$  tels que  $f(x) = Ae^x + Be^{-x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . En reportant dans (1), on voit que  $f$  est solution de (1) *si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R}, (A - B)x + (A + B) = g(x)$$

On rappelle que la famille  $(x \mapsto 1, x \mapsto x)$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

- a. Si  $g$  est nulle,  $f$  est solution de (1) *si et seulement si*  $\begin{cases} A - B = 0 \\ A + B = 0 \end{cases}$  i.e.  $A = B = 0$ . L'unique solution de (1) est donc la solution nulle.

- b. Si  $g$  est constante, notons  $C$  cette constante.  $f$  est solution de (1) *si et seulement si*  $\begin{cases} A - B = 0 \\ A + B = C \end{cases}$  i.e.  $A = B = \frac{C}{2}$ . L'unique solution est donc  $x \mapsto C \cosh x$ .

- c. Si  $g$  est affine, il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que  $g(x) = \lambda x + \mu$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  $f$  est solution de (1) *si et seulement si*  $\begin{cases} A - B = \lambda \\ A + B = \mu \end{cases}$  i.e.  $A = \frac{\lambda + \mu}{2}$  et  $B = \frac{\mu - \lambda}{2}$ . L'unique solution est donc  $x \mapsto \lambda \sinh x + \mu \cosh x$ .

3. Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux solutions éventuelles de (1). Par linéarité de l'intégrale,  $f_1 - f_2$  est solution d'une équation du type (1) avec un second membre nul. La question I.2.a montre que  $f_1 - f_2 = 0$  i.e.  $f_1 = f_2$ . Ainsi (1) admet au plus une solution.

4. Soit  $f$  une fonction de la forme donnée par l'énoncé.  $f$  est bien dérivable puisque  $x \mapsto \int_0^x e^{-t} g''(t) dt$  et  $x \mapsto \int_0^x e^t g''(t) dt$  sont des primitives des fonctions  $x \mapsto e^{-x} g''(x)$  et  $x \mapsto e^x g''(x)$  en vertu du théorème fondamental de l'analyse : ce sont donc des fonctions dérivables. On a de plus pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) = \frac{e^x}{2} \left[ \int_0^x e^{-t} g''(t) dt + k_A \right] + \frac{e^{-x}}{2} \left[ \int_0^x e^t g''(t) dt + k_B \right]$$

On en déduit que  $f'$  est à nouveau dérivable et que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f''(x) = \frac{e^x}{2} \left[ \int_0^x e^{-t} g''(t) dt + k_A \right] - \frac{e^{-x}}{2} \left[ \int_0^x e^t g''(t) dt + k_B \right] + g''(x) = f(x) + g''(x)$$

Autrement dit,  $f$  est solution de (2).

5. Soit  $f$  une solution de (2) vérifiant  $f(0) = g(0)$  et  $f'(0) = g'(0)$ . En intégrant la relation  $f''(t) - f(t) = g''(t)$  entre 0 et  $x$ , on obtient  $f'(x) - f'(0) - F(x) = g'(x) - g'(0)$  où  $F$  désigne la primitive de  $f$  nulle en 0. Puisque  $f'(0) = g'(0)$ , on a donc  $f'(t) - F(t) = g'(t)$ . En intégrant à nouveau entre 0 et  $x$ , on obtient  $f(x) - f(0) - \int_0^x F(t) dt = g(x) - g(0)$ . Or  $f(0) = g(0)$  et en intégrant par parties

$$\int_0^x F(t) dt = [(t-x)F(t)]_0^x - \int_0^x (t-x)F'(t) dt = \int_0^x (x-t)f(t) dt$$

Ainsi  $f(x) - \int_0^x (x-t)f(t) dt = g(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  i.e.  $f$  est solution de (1).

6. D'après la question I.4 et en utilisant le fait que  $g'' = \exp$ , on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{2}(x + k_A) - \frac{e^{-x}}{2} \left( \frac{e^{2x}}{2} + k_B \right)$$

Les conditions  $f(0) = g(0)$  et  $f'(0) = g'(0)$  de la question I.5, fournissent  $\frac{k_A}{2} - \frac{k_B}{2} = 1$  et  $\frac{k_A}{2} + \frac{k_B}{2} = 1$  i.e.  $k_A = 2$  et  $k_B = 0$ . L'unique solution de (1) est donc  $x \mapsto e^x \left( \frac{x}{2} + 1 \right)$ .

## Partie II –

1. On raisonne comme à la question I.1 pour montrer que  $A(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . De plus  $A(f)'(x) = \int_0^x f(t) dt$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  $A(f)'$  est donc elle-même de classe  $\mathcal{C}^1$  i.e.  $A(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $A(f)'' = f$ .

2. Pour tout  $f \in E$ ,  $A(f)$  est également continue puisqu'elle est de classe  $C^2$  d'après la question précédente. Ainsi  $A(E) \subset E$ . De plus,  $A$  est linéaire par linéarité de l'intégrale. Ainsi  $A$  est un endomorphisme de  $E$ .  
Soit  $f \in \text{Ker } A$ . On a donc  $A(f) = 0$  et a fortiori  $A(f)'' = 0$ . Or  $A(f)'' = f$  donc  $f = 0$ , d'où  $\text{Ker } A = \{0_E\}$  et  $A$  est injectif.

3. Soient  $f \in E$  et  $x \in \mathbb{R}$ . On procède à nouveau par intégration par parties :

$$\begin{aligned} U \circ A(f)(x) &= \int_0^x \text{sh}(x-t)A(f)(t) \, dt = -[\text{ch}(x-t)A(f)(t)]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \text{ch}(x-t)A(f)'(t) \, dt \\ &= -A(f)(x) - [\text{sh}(x-t)A(f)'(t)]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \text{sh}(x-t)A(f)''(t) \, dt \\ &= -A(f)(x) + \int_0^x \text{sh}(x-t)f(t) \, dt = -A(f)(x) + U(f)(x) \end{aligned}$$

en utilisant le fait que  $A(f)(0) = A(f)'(0) = 0$  et  $A(f)'' = f$ . Les intégrations par parties sont légitimes car  $A(f)$  est de classe  $C^2$ . L'égalité précédente étant vraie pour tout réel  $x$ , on a  $U \circ A(f) = U(f) - A(f)$ . Ceci étant maintenant vrai pour tout  $f \in E$ , on en déduit  $U \circ A = U - A$ .

4. Faisons l'hypothèse de récurrence  $HR(n)$  suivante

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, A^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(t) \, dt$$

$HR(1)$  est vraie par définition de  $A$ . Supposons  $HR(n)$  vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ . On se donne  $f \in E$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

$$A^{n+1}(f)(x) = A^n(A(f))(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} A(f)(t) \, dt$$

En intégrant une première fois par parties :

$$A^{n+1}(f)(x) = - \left[ \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} A(f)(t) \right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} A(f)'(t) \, dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} A(f)'(t) \, dt$$

car  $A(f)(0) = 0$ . En intégrant à nouveau par parties :

$$A^{n+1}(f)(x) = - \left[ \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} A(f)'(t) \right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} A(f)''(t) \, dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f(t) \, dt$$

car  $A(f)'(0) = 0$  et  $A(f)'' = f$ .

5. a. Puisque  $\text{sh}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction  $\text{sh}$  entre 0 et  $u$  à l'ordre  $2n$  :

$$\left| \text{sh } u - \sum_{p=0}^{2n} \frac{\text{sh}^{(p)}(0)}{p!} u^p \right| \leq M \frac{|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

où  $M$  désigne le maximum de  $|\text{sh}^{(2n+1)}|$  sur  $[0, u]$  ou  $[u, 0]$  suivant le signe de  $u$ .

Or pour  $p$  pair,  $\text{sh}^{(p)} = \text{sh}$  et donc  $\text{sh}^{(p)}(0) = 0$  et pour  $p$  impair  $\text{sh}^{(p)} = \text{ch}$  et donc  $\text{sh}^{(p)}(0) = 1$ . Ainsi

$$\sum_{p=0}^{2n} \frac{\text{sh}^{(p)}(0)}{p!} u^p = \sum_{k=1}^n \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

On a donc également  $\text{sh}^{(2n+1)} = \text{ch}$ . Puisque  $\text{ch}$  est paire et croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , on a donc  $M = \text{ch } u$  en distinguant les cas  $u \geq 0$  et  $u \leq 0$ . On en déduit donc la formule demandée.

- b. En utilisant l'expression de  $A_n(f)(x)$  trouvée en II.4, on peut écrire :

$$U(f)(x) - U_n(f)(x) = \int_0^x \left( \text{sh}(x-t) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-t)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right) f(t) \, dt$$

Par conséquent

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leq \left| \int_0^x \left| \text{sh}(x-t) - \sum_{k=1}^n \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!} \right| |f(t)| \, dt \right|$$

Mais grâce à la majoration de la question II.5.a, on a donc

$$|\mathcal{U}(f)(x) - \mathcal{U}_n(f)(x)| \leq \left| \int_0^x \frac{\text{ch}(x-t)|x-t|^{2n+1}}{(2n+1)!} |f(t)| dt \right|$$

On en déduit par inégalité de la moyenne

$$|\mathcal{U}(f)(x) - \mathcal{U}_n(f)(x)| \leq M \left| \int_0^x |f(t)| dt \right|$$

où  $M$  désigne le maximum de  $t \mapsto \frac{\text{ch}(x-t)|x-t|^{2n+1}}{(2n+1)!}$  sur l'intervalle  $[0, x]$  ou  $[x, 0]$ . Par changement de variables,  $M$  est aussi le maximum de  $t \mapsto \frac{\text{ch}(t)|t|^{2n+1}}{(2n+1)!}$  sur l'intervalle  $[0, x]$  ou  $[x, 0]$ . Cette fonction étant paire et croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , on trouve  $M = \frac{\text{ch}(x)|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$  en distinguant les cas  $x \geq 0$  et  $x \leq 0$ .

Les théorèmes de comparaison sur les suites usuelles donnent  $|x|^{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o((2n+1)!)$ . Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{ch}(x)|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \int_0^x |f(t)| dt \right| = 0$$

Par encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(f)(x) - \mathcal{U}_n(f)(x) = 0$ .

- c. Remarquons que  $A \circ \mathcal{U}_n = \mathcal{U}_n \circ A = \mathcal{U}_{n+1} - A$ .

On peut donc écrire

$$\mathcal{U} \circ A = (\mathcal{U} - \mathcal{U}_n) \circ A + \mathcal{U}_n \circ A = (\mathcal{U} - \mathcal{U}_n) \circ A + \mathcal{U}_{n+1} - A = (\mathcal{U} - \mathcal{U}_n) \circ A + (\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}) + (\mathcal{U} - A)$$

Soient  $f \in E$ ,  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a donc

$$\mathcal{U} \circ A(f)(x) = (\mathcal{U} - \mathcal{U}_n) \circ A(f)(x) + (\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U})(f)(x) + (\mathcal{U} - A)(f)(x)$$

En appliquant la question précédente, on a  $(\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U})(f)(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ . On peut également appliquer la question précédente à  $A(f)$  qui est bien une fonction de  $E$  de sorte que  $(\mathcal{U} - \mathcal{U}_n) \circ A(f)(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ . Par unicité de la limite, on a donc  $\mathcal{U} \circ A(f)(x) = (\mathcal{U} - A)(f)(x)$ . Ceci étant valable pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a donc  $\mathcal{U} \circ A(f) = (\mathcal{U} - A)(f)$ . Ceci étant valable pour tout  $f \in E$ , on a finalement  $\mathcal{U} \circ A = \mathcal{U} - A$ .

6. a. On a  $(I - A) \circ (I + \mathcal{U}) = I - A + \mathcal{U} - A \circ \mathcal{U} = I$  d'après la question II.5.c. De même,  $(I + \mathcal{U}) \circ (I - A) = I - A + \mathcal{U} + \mathcal{U} \circ A = I$  d'après la question II.3. Ainsi  $I - A$  et  $I + \mathcal{U}$  sont inversibles et inverses l'une de l'autre.
- b. Une fonction  $f$  de  $E$  est solution de (1) si et seulement si  $(I - A)(f) = g$  i.e.  $f = (I + \mathcal{U})(g)$ . L'unique solution  $f$  de (1) est donc définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + \int_0^x \text{sh}(x-t)g(t) dt$$

- c.  $g$  est bien continue mais n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$  : on ne peut plus utiliser les résultats de la première partie. Tout d'abord, remarquons que  $f$  est paire. En effet, en utilisant la parité de  $g$  :

$$f(-x) = g(-x) + \int_0^{-x} \text{sh}(-x-t)g(t) dt = g(x) + \int_0^{-x} \text{sh}(-x-t)g(-t) dt$$

Effectuons le changement de variables  $u = -t$  et utilisons l'impairité de  $\text{sh}$  :

$$f(-x) = g(x) - \int_0^x \text{sh}(-x+u)g(u) du = g(x) + \int_0^x \text{sh}(x-u)g(u) du = f(x)$$

Déterminons maintenant  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$  en distinguant des cas.

► Si  $x \in [0, 1[$ ,

$$f(x) = x + \int_0^x t \text{sh}(x-t) dt = x - [t \text{ch}(x-t)]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \text{ch}(x-t) dt = -[\text{sh}(x-t)]_{t=0}^{t=x} = \text{sh}(x)$$

► Si  $x \in [0, 2[$ ,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2 - x + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t) \, dt = 2 - x + \int_0^1 t \operatorname{sh}(x-t) \, dt + \int_1^x (2-t) \operatorname{sh}(x-t) \, dt \\
 &= 2 - x - [t \operatorname{ch}(x-t)]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \operatorname{ch}(x-t) \, dt - [(2-t) \operatorname{ch}(x-t)]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x \operatorname{ch}(x-t) \, dt \\
 &= -[\operatorname{sh}(x-t)]_{t=0}^{t=1} + [\operatorname{sh}(x-t)]_{t=1}^{t=x} \\
 &= \operatorname{sh}(x) - 2 \operatorname{sh}(x-1)
 \end{aligned}$$

► Si  $x \geq 2$ ,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t) \, dt = \int_0^1 t \operatorname{sh}(x-t) \, dt + \int_1^2 (2-t) \operatorname{sh}(x-t) \, dt \\
 &= -[t \operatorname{ch}(x-t)]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \operatorname{ch}(x-t) \, dt - [(2-t) \operatorname{ch}(x-t)]_{t=1}^{t=2} - \int_1^2 \operatorname{ch}(x-t) \, dt \\
 &= -[\operatorname{sh}(x-t)]_{t=0}^{t=1} + [\operatorname{sh}(x-t)]_{t=1}^{t=2} \\
 &= \operatorname{sh}(x) - 2 \operatorname{sh}(x-1) + \operatorname{sh}(x-2)
 \end{aligned}$$