Devoir surveillé n°06

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

On admet l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et on introduit l'ensemble

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R},+,\times)$.

$(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\times)$ est donc un anneau.

2. **a.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, il existe un *unique* couple $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$.

On peut alors définir le *conjugué* de x par $\overline{x} = a - b\sqrt{2}$.

b. Montrer que pour $(x,y) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^2$, $\overline{x \times y} = \overline{x} \times \overline{y}$.

3. Pour $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $\mathrm{N}(x) = x\overline{x}$.

a. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathrm{N}(x) \in \mathbb{Z}$.

b. Montrer que pour tout $(x,y) \in \left(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\right)^2$, $\mathrm{N}(xy) = \mathrm{N}(x)\mathrm{N}(y)$.

c. Montrer que $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est inversible dans l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\times)$ *si et seulement si* $|\mathrm{N}(x)| = 1$.

On note H l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. On rappelle qu'alors $(\mathrm{H},\times)$ est un groupe. H est notamment stable par produit et par inversion. De plus, d'après la question précédente,

$$\mathrm{H} = \left\{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], |\mathrm{N}(x)| = 1\right\}$$

4. Soient $x \in \mathrm{H}$ et $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$.

a. Montrer que si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, alors $x \geqslant 1$.

b. Montrer que si $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$, alors $x \leqslant -1$.

c. Montrer que si $ab \leqslant 0$, alors $|x| \leqslant 1$.

5. On note $\mathrm{H}^+ = \mathrm{H} \cap]1,+\infty[$.

a. Soient $x \in \mathrm{H}^+$ et $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$. Montrer que $a > 0$ et $b > 0$.

b. En déduire que $u = 1 + \sqrt{2}$ est le minimum de H^+.

6. Soit $x \in \mathrm{H}^+$.

a. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $u^n \leqslant x < u^{n+1}$.

b. Montrer que $x = u^n$.

7. En déduire que $\mathrm{H} = \{u^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{-u^n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2.

Soit $(a, b, \lambda) \in \mathbb{R}^3$. On se propose d'étudier quelques propriétés de la suite réelle (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \lambda \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3u_n^2 - 2(a+b)u_n + ab + 2(a+b)\right) \end{cases}$$

1. Dans cette question, on suppose $a = b = 0$.

- **a.** Que peut-on dire de la suite (u_n) si $\lambda = 0$?
- **b.** On suppose maintenant $\lambda \neq 0$. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- **c.** On pose alors $w_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer w_n en fonction de n et λ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- **d.** En déduire une expression de u_n en fonction de n et de λ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **e.** Discuter suivant les valeurs de λ la convergence de la suite (u_n) et préciser sa limite le cas échéant.

2. Dans cette question, on suppose $a = b = 2$.

- **a.** Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- **b.** Montrer que si (u_n) converge, sa limite est nécessairement égale à 2.
- **c.** On suppose $\lambda > 2$. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
- **d.** Montrer qu'il existe deux réels λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$ tels que $u_1 = 2$ *si et seulement si* $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$.
- **e.** On suppose $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$. Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
- **f.** On suppose $\lambda < \lambda_1$. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

3. Dans cette question, on suppose $a < b < 2$.

- **a.** On considère l'application polynomiale P définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{P}(x) = 3x^2 - 2(2+a+b)x + ab + 2(a+b)$$

  Factoriser $\mathrm{P}(a)$, $\mathrm{P}(b)$ et $\mathrm{P}(2)$ puis déterminer leurs signes.
- **b.** On suppose que (u_n) converge vers une limite L. Montrer que L vérifie $a < \mathrm{L} < b$ ou $b < \mathrm{L} < 2$.

Problème 1 —

Partie I – Etude d'une fonction

Dans cette partie, on étudie la fonction $g : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x(2-\cos(x))}$.

1. Montrer que g admet une limite finie ℓ en 0.

On prolonge g par continuité en 0 en posant $g(0) = \ell$.

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction g ainsi prolongée.

3. Montrer que g est dérivable en 0 et déterminer $g'(0)$.

4. g est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Donner une expression de $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

On pose $\varphi(x) = 2x\cos(x) - x - 2\sin x + \sin(x)\cos(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

5. Déterminer le signe de φ sur $[0, \pi]$ et préciser en quels points φ s'annule sur cet intervalle.

6. En déduire que g est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

7. Montrer que g induit une bijection de $[0, \pi]$ sur un ensemble I à déterminer.

On notera h la bijection réciproque de la bijection induite par g de $[0, \pi]$ sur I.

Partie II – Etude d'une suite

8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $g(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution sur $[0, \pi]$. On notera x_n cette solution.

9. Déterminer le sens de variation de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

10. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers π.

11. Déterminer un équivalent simple de $x_n - \pi$ lorsque n tend vers l'infini.

Partie III – Développement asymptotique

12. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction g en π.

13. En admettant que h admette un développement limité à l'ordre 2 en 0, déterminer celui-ci.

14. En déduire un développement asymptotique à trois termes de x_n lorsque n tend vers l'infini.