

DEVOIR À LA MAISON N°11

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 —

On désigne dans la suite par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par Δ l'opérateur de différences finies, qui est défini sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

Pour tout entier naturel k , on pose $\Delta^k = \text{Id}_{\mathbb{R}[X]}$ si $k = 0$ et $\Delta^k = \Delta \circ \Delta \circ \dots \circ \Delta$ (k fois) si $k \geq 1$.
Ce problème propose l'étude de cet endomorphisme Δ et de certaines de ses applications.

Partie I – Etude de l'endomorphisme Δ

On définit la famille de polynômes réels $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$ et par les relations suivantes :

$$\forall n \geq 1, P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X-1) \dots (X-n+1) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X-k)$$

1. Une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - a. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - b. Etablir, pour tous entiers naturels k et m , que $P_k(m)$ et $P_k(-m)$ sont des entiers.
 - c. En déduire, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, que les coordonnées de P dans la base $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont des nombres entiers si et seulement si on a : $\forall m \in \mathbb{Z}, P(m) \in \mathbb{Z}$.
2. Etude de l'endomorphisme Δ .
 - a. Etablir que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
 - b. Calculer $\Delta(P_0)$, puis montrer que $\Delta(P_{n+1}) = P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - c. On considère un polynome non nul P de degré d .
Préciser le degré du polynome $\Delta(P)$ et donner $\Delta^{d+1}(P)$.
 - d. Préciser le noyau de Δ , puis étudier si Δ est injectif et surjectif.
3. Expression d'un polynôme dans la base $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - a. Calculer $\Delta^k(P_j)$ et en déduire que $\Delta^k(P_j)(0)$ vaut 1 si $j = k$ et 0 sinon.
 - b. En déduire, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, la formule suivante :

$$P = \sum_{k=0}^n \Delta^k(P)(0) P_k$$

Partie II – Approximation de dérivées $n^{\text{èmes}}$ par différences finies

1. Puissances de l'endomorphisme Δ .

Etablir la formule suivante pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Delta^n(P) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(X+j)$$

2. Application au calcul de différentes sommes.

- a. Préciser le coefficient de P_n dans la décomposition du polynôme X^n dans la base $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$.
En déduire la valeur de $\Delta^n(X^n)$, puis établir la formule suivante :

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^n = n!$$

- b. Démontrer la formule suivante pour $0 \leq k < n$:

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^k = 0$$

3. Approximation d'une dérivée $n^{\text{ème}}$ par différences finies.

On considère une fonction f de classe C^n définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , puis un point $a \in \mathbb{R}$ et un entier naturel n compris entre 1 et m ($1 \leq n \leq m$), et on pose alors :

$$\forall h \in \mathbb{R}^*, A_n(h) = \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} f(a+jh)$$

- a. Exprimer $f(a+h)$ à l'aide de la formule de Taylor-Young appliquée à l'ordre n lorsque h tend vers 0.
Quelles formules en déduit-on pour $f(a+jh)$, où $0 \leq j \leq n$, en changeant h en jh ?
- b. En déduire que l'expression $h^n A_n(h)$ admet un développement limité à l'ordre n quand h tend vers 0, et préciser les coefficients de h^j ($0 \leq j < n$) et de h^n dans celui-ci.
Quelle est la limite de $A_n(h)$ quand h tend vers 0 ?

Partie III – Calcul de la somme des puissances des n premiers entiers

1. Etude de séries télescopiques.

- a. Etablir la formule suivante pour $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R = \Delta(Q)$:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^p R(k) = Q(p+1) - Q(0)$$

- b. Exprimer les polynômes X , X^2 et X^3 dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3) de $\mathbb{R}_3[X]$.
En déduire des polynômes Q_1, Q_2, Q_3 tels qu'on ait $\Delta(Q_1) = X$, $\Delta(Q_2) = X^2$, $\Delta(Q_3) = X^3$.
- c. Donner alors l'expression *factorisée* des sommes $\sum_{k=0}^p k$, $\sum_{k=0}^p k^2$ et $\sum_{k=0}^p k^3$.

2. Recherche d'une suite de polynômes (B_n) telle que $\Delta(B_{n+1}) = X^n$.

Afin de généraliser le calcul précédent, on recherche une suite de polynômes $(B_n)_{n \geq 1}$ telle qu'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation $\Delta(B_{n+1}) = X^n$.

- a. Montrer, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, la formule $(\Delta(P))' = \Delta(P')$.
- b. Etablir, si une telle suite de polynômes (B_n) existe, qu'on a :
 - $\forall n \geq 1, B'_{n+1} - nB_n \in \text{Ker } \Delta$;
 - $\forall n \geq 1, B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$;
 - le polynôme B_1 est unitaire et de degré 1.
- c. Inversement, établir par récurrence qu'une suite $(B_n)_{n \geq 1}$ satisfaisant ces trois conditions vérifie $\Delta(B_{n+1}) = X^n$ pour tout $n \geq 1$, et qu'on a alors $\sum_{k=0}^p k^n = B_{n+1}(p+1) - B_{n+1}(0)$ pour tout entier naturel p .

On recherche en particulier une suite de polynômes (B_n) vérifiant les conditions suivantes :

- (A) $\forall n \geq 1, B'_{n+1} = nB_n$;
- (B) $\forall n \geq 1, B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$;
- (C) le polynôme B_1 est unitaire et de degré 1.

3. Existence, unicité et construction de la suite (B_n) .

- a. Vérifier que les conditions (A), (B), (C) sont équivalentes aux conditions suivantes :
 - (A') $\forall n \geq 1, B'_{n+1} = nB_n$;
 - (B') $\forall n \geq 1, \int_0^1 B_n(t) dt = 0$;
 - (C') le polynôme B_1 est unitaire et de degré 1.
- b. Déterminer les polynômes B_1, B_2, B_3, B_4 et retrouver ainsi $\sum_{k=0}^p k, \sum_{k=0}^p k^2$ et $\sum_{k=0}^p k^3$.
- c. Etablir alors l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(B_n)_{n \geq 1}$ qui vérifie les trois conditions (A'), (B'), (C') définies ci-dessus, et montrer qu'on a : $\forall n \geq 1, B_n \in \mathbb{Q}[X]$.
- d. En déduire un algorithme d'obtention des polynômes B_k pour $1 \leq k \leq n$, où n est donné. On pourra représenter un polynôme par la liste de ses coefficients.