Devoir à la maison n°11 : corrigé

Problème 1 — Polynômes de Tchebychev

Partie I – Cas particulier

1. $f_0 = g_0$ donc $f_0 \in G_2$. De même, $f_1 = g_1$ donc $f_1 \in G_2$. Enfin, $f_2 = 2g_2 - g_1$ donc $f_2 \in G_2$. Puisque G_2 est un sous-espace vectoriel, il est stable par combinaison linéaire. Ainsi $F_2 = \text{vect}(f_0, f_1, f_2) \subset G_2$.

2. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$. En particulier,

$$\begin{cases} \lambda_0 f_0(0) + \lambda_1 f_1(0) + \lambda_2 f_2(0) = 0 \\ \lambda_0 f_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_1 f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_2 f_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \lambda_0 f_0(\pi) + \lambda_1 f_1(\pi) + \lambda_2 f_2(\pi) = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit sans peine que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La famille (f_0, f_1, f_2) est donc libre. Puisqu'elle engendre F_2, c'est une base de F_2 et $\dim F_2 = 3$.

3. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_0 g_0 + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 = 0$. En particulier,

$$\begin{cases} \lambda_0 g_0(0) + \lambda_1 g_1(0) + \lambda_2 g_2(0) = 0 \\ \lambda_0 g_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_1 g_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_2 g_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \lambda_0 g_0(\pi) + \lambda_1 g_1(\pi) + \lambda_2 g_2(\pi) = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 = 0 \\ \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit sans peine que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La famille (g_0, g_1, g_2) est donc libre. Puisqu'elle engendre G_2, c'est une base de G_2 et $\dim G_2 = 3$.

4. Puisque $F_2 \subset G_2$ et $\dim F_2 = \dim G_2$, $F_2 = G_2$.

Partie II – Une inclusion

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cos((n+2)x) + \cos(nx) = 2\cos\frac{(n+2)x + nx}{2}\cos\frac{(n+2)x - nx}{2} = 2\cos((n+1)x)\cos x$$

Ainsi $f_{n+2} + f_n = 2f_{n+1}f_1$ ou encore $f_{n+2} = 2f_{n+1}f_1 - f_n$.

2. Tout d'abord, $f_0 \in G_0$ puisque $f_0 = g_0$ et $f_1 \in G_1$ puisque $f_1 = g_1$.
   Supposons que $f_n \in G_n$ et $f_{n+1} \in G_{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. A fortiori, $f_n \in G_{n+2}$ puisque $G_n \subset G_{n+2}$.
   De plus, $f_{n+1} \in G_{n+1} = \text{vect}(g_0, \dots, g_{n+1})$ donc

$$f_{n+1}f_1 =\in \text{vect}(g_0 \cos, \dots, g_{n+1} \cos) = \text{vect}(g_1, \dots, g_{n+2}) \subset G_{n+2}$$

   Donc $f_{n+2} = 2f_{n+1}f_1 - f_n \in G_{n+2}$.
   Par récurrence double, $f_n \in G_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f_k \in G_k$ et a fortiori, $f_k \in G_n$. G_n étant stable par combinaison linéaire,

$$F_n = \text{vect}(f_0, \dots, f_n) \subset G_n$$

Partie III – Utilisation de la dimension

1. Par linéarisation, on trouve $I_{k,l} = 0$ si $k \neq l$ et $I_{k,l} = \pi$ si $k = l \neq 0$ et $I_{0,0} = 2\pi$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$. Soit $l \in [\![0, n]\!]$. On a donc $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k f_l = 0$. En intégrant sur $[0, 2\pi]$, on obtient par linéarité de l'intégrale $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k I_{k,l} = 0$ ou encore $\lambda_l = 0$ d'après la question précédente. Ainsi $\lambda_l = 0$ pour tout $l \in [\![0, n]\!]$. La famille $(f_0, \dots, f_n)$ est donc libre.

3. Puisque $(f_0, \dots, f_n)$ est libre et engendre F_n, c'est une base de F_n. Il s'ensuit que $\dim F_n = n + 1$.

4. $(g_0, \dots, g_n)$ est une famille de $n + 1$ éléments engendrant G_n. On a donc nécessairement $\dim G_n \leqslant n + 1$.

5. Puisque $F_n \subset G_n$, $\dim F_n \leqslant G_n$. Or $\dim F_n = n + 1$ et $\dim G_n \leqslant n + 1$ donc $\dim G_n = \dim F_n = n + 1$. Ainsi $F_n \subset G_n$ et $\dim F_n = \dim G_n$ donc $F_n = G_n$.