

Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 1 ★

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$y' + \operatorname{th}(t)y = \operatorname{sh}(t).$$

Exercice 2 ★

Résoudre sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$ l'équation

$$y' - \tan(t)y = \frac{1}{1 + \cos(t)}.$$

Exercice 3 ★

Petites Mines 2004

Résoudre sur $] -\infty, 1[$ l'équation :

$$(1 - x)^2 y' = (2 - x)y.$$

Exercice 4 ★

Petites Mines 2004

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation :

$$z' + \operatorname{th}(t)z = t \operatorname{th}(t).$$

Trouver l'unique solution z_1 vérifiant la condition initiale $z_1(0) = 1$.

Exercice 5 ★

Petites Mines 2006

Soit (E) l'équation :

$$y' + \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)}y = 2 \sin(x).$$

1. Résoudre (E_H).
2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme

$$x \mapsto a \cos(x) + b$$

avec a et b réel.

3. Résoudre (E) sur \mathbb{R} et déterminer l'unique solution de (E), notée h , vérifiant la condition initiale $h(0) = 1$.

Exercice 6 ★

Résoudre sur $I =]0, \pi[$ l'équation différentielle

$$(E) : y' + \cotan(t)y = \cos^2(t).$$

Exercice 7 ★

Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

$$1. y' - y = \arctan(e^x)$$

$$2. y' + y = \arctan(e^x)$$

Exercice 8 ★

Résoudre sur \mathbb{R} les équations

$$1. y' + 2y = te^{-t}$$

$$2. y' + 2y = e^{-2t}$$

Exercice 9 ★

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$y' + y = t \cos(t).$$

Exercice 10 ★

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$y' - y = e^t + e^{2t}.$$

Exercice 11 ★

On considère l'équation (E) : $y' - \ln(x)y = x^x$.

1. Calculer en intégrant par parties les primitives de $x \mapsto \ln(x)$ sur \mathbb{R}_+^* .
2. Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 12 ★★

Résoudre sur \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $(E_1) : y' + 3y = \sin(x);$
2. $(E_2) : y' - 3y = e^{-x}(1 - x^3);$
3. $(E_3) : y''' - y'' = x.$

Exercice 13 ★

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $(E) : y' + xy = x^2 + 1$ sachant qu'elle admet une solution particulière polynomiale.

Exercice 14 ★

Résoudre les équations suivantes

- | | |
|--------------------------|--------------------------------|
| 1. $y' + y = x;$ | 5. $y' + y = e^{2x};$ |
| 2. $y' + y = e^{-x};$ | 6. $y' + y = e^{-x} + e^{2x};$ |
| 3. $y' + y = xe^{-x};$ | 7. $y' + y = \sin(x);$ |
| 4. $y' + y = x^2e^{-x};$ | 8. $y' + y = \cos(x)e^x.$ |

Exercice 15 ★

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------|
| 1. $y' + 2xy = e^{x-x^2}, y(0) = 0;$ | 3. $x^3y' - 2y = 0, y(1) = 1.$ |
| 2. $x^2y' + y = 0, y(0) = 1;$ | |

Exercice 16 ★

Résoudre sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* l'équation

$$|x|y' + (x-1)y = x^2.$$

Exercice 17 ★

Résoudre l'équation

$$|x(x-1)|y' - y = x^2$$

sur $] -\infty, 0[,]0, 1[$ et $]1, +\infty[.$

Exercice 18 ★

Résoudre l'équation différentielle :

$$(1+t^2)x' - x = 1$$

Exercice 19 ★★

Soit a et b deux fonction impaires continues sur \mathbb{R} . Soit f une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$. Montrer que f est paire.

Exercice 20 ★★**Périodicité**

Soient $T \in \mathbb{R}_+^*, a$ et b deux fonctions continues et T -périodiques sur \mathbb{R} et f une solution de l'équation différentielle $(E) : y' + ay = b$. Montrer que f est T -périodique si et seulement si $f(0) = f(T)$.

Exercice 21 ★

Résoudre sur $] -\infty, -1[,] -1, 1[$ puis $]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(1-x^2)y' - xy = 1$$

Exercice 22 ★★

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle $xy' - \alpha y = 0$. Déterminer l'unique solution f vérifiant $f(1) = 1$.
2. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle $xy' - \alpha y = f$. Déterminer l'unique solution g vérifiant $g(1) = 0$.
3. On définit par récurrence une suite de fonctions (u_n) sur \mathbb{R}_+^* de la manière suivante :
 - $u_0 = f$;
 - pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} est l'unique solution de l'équation différentielle $xy' - \alpha y = u_n$ sur \mathbb{R}_+^* valant 0 en 1.

REMARQUE. On a donc $u_1 = g$.

Déterminer par récurrence u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 23 ★★★★★

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + f'(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 24 ★

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1$$

1. Trouver une solution polynomiale.
2. En déduire l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} .
3. Déterminer la solution vérifiant la condition initiale $y(1) = 1$.

Equations différentielles linéaires d'ordre 2**Exercice 25 ★**

Calculer les solutions (réelles) des équations différentielles suivantes :

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $y'' - 2y' - 3y = t^2 e^t$ | 6. $y'' - 2y' + y = \cos(2t)$ |
| 2. $y'' + 4y' + 3y = t e^{-2t}$ | 7. $y'' + 5y' + 4y = t e^{-t}$ |
| 3. $y'' + 4y' + 3y = \cos(3t)$ | 8. $y'' + y = \cos(t)$ |
| 4. $y'' + 3y' + 2y = \sin(t)$ | 9. $y'' - 6y' + 9y = (t+1)e^{-3t}$ |
| 5. $y'' - 4y' + 4y = e^{-t}$ | 10. $y'' - 2y' + 2y = e^{-t} \cos(t)$ |

Exercice 26 ★

Deux problèmes de Cauchy.

1. Déterminer l'unique fonction f , deux fois dérivable sur \mathbb{R} , solution de

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-3t}$$

pour la condition initiale $f(0) = 0, f'(0) = 1$.

2. Déterminer l'unique fonction g , deux fois dérivable sur \mathbb{R} , solution de

$$y'' + 5y' + 4y = e^{-t}$$

pour la condition initiale $g(0) = 0, g'(0) = 1$.

Exercice 27 ★

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \sin(x).$$

Exercice 28 ★★

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 4y = \sin^2(t).$$

Exercice 29 ★

Déterminer les solutions à *valeurs complexes* des équations suivantes :

1. $y'' + y' + y = 0$
2. $y'' - 2iy' - y = 0$
3. $y'' - iy' + 2y = 0$
4. $y'' + 4y' + 4y = 0$

Exercice 30 ★

Résoudre sur \mathbb{R} les problèmes de Cauchy suivants :

1. $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0$
2. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
3. $y'' - 3y' + 2y = x, \quad y(0) = y'(0) = 1$
4. $y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

Exercice 31 ★

Résoudre l'équation suivante

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x).$$

Exercice 32 ★

Résoudre les équations suivantes

1. $y'' - 3y' + 2y = x;$
2. $y'' - 3y' + 2y = e^{2x};$
3. $y'' - 3y' + 2y = e^{2x};$
4. $y'' - 3y' + 2y = xe^x;$
5. $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{ch}(x).$

Exercice 33 ★

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - (1 - i)y' - 2(1 + i)y = 0$.
2. Donner l'unique solution f vérifiant $f(0) = f'(0) = 1$.

Exercice 34 ★★★

Soit f une application de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $f + f'' \geq 0$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x + \pi) \geq 0$$

Exercice 35 ★

On considère l'équation différentielle dont on recherche les solutions à *valeurs réelles*

$$(E) : y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin(x)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Déterminer une solution particulière de (E).
3. Résoudre l'équation (E).
4. Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

Exercice 36 ★★

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_0^x \sin(x - t)g(t) \, dt$$

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \int_0^x \cos(t - x)g(t) \, dt$$

2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 et que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = g$.

Exercice 37 ★

Soient $\omega \in \mathbb{R}$, $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\begin{cases} x' &= -y + \sin(\omega t) \\ y' &= x - \cos(\omega t) \end{cases}$$

1. Soit $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$t \mapsto x(t) + iy(t).$$

Justifier la dérivabilité de z et montrer que z vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

2. Déterminer x et y .

Changement de fonction ou de variable**Exercice 38 ★★****Une équation de Bernoulli**

On souhaite résoudre l'équation

$$(E) : x^2 y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x^2}$$

sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

- Soient $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $Y(t) = y(e^t)$.
 - Calculer les dérivées y, y' et y'' en fonction de Y, Y' et Y'' .
 - En déduire que y est solution de (E) si et seulement si Y est solution d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants (E') que l'on précisera.
- Résoudre (E') sur \mathbb{R} .
- En déduire les solutions de (E) sur I .
- Montrer qu'il existe une unique solution y de (E) sur I telle que $y(1) = y'(1) = 0$.

Exercice 39 ★★

Résoudre l'équation

$$y^2 + x^2 - 2yy' = 0$$

en effectuant le changement de fonction $z = y^2$.

Exercice 40 ★★

Résoudre l'équation

$$y' = e^{x+y}$$

en posant $z = e^{-y}$.

Exercice 41 ★★**Un changement de fonction**

Soit (E) l'équation $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0$.

- Etablir qu'une *éventuelle* solution polynomiale et non nulle de (E) est nécessairement de degré deux.
- Trouver une solution polynomiale et non nulle p de (E) .
- Justifier qu'une fonction y deux fois dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} peut s'écrire sous la forme $y = p \times z$ où z est une fonction deux fois dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- Montrer qu'une fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable est solution de (E) si et seulement si la fonction $Z = z'$ (où z est définie comme à la question précédente) est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre un (E') à préciser.
- Résoudre (E) .

Exercice 42 ★★**Equation de Bernoulli**

Soient $I =]1, +\infty[$ et (E) l'équation

$$(E) : -t^2 y' + ty = y^2.$$

1. Soit y une fonction ne s'annulant pas sur I . Prouver que y est solution de (E) si et seulement si $z = \frac{1}{y}$ est solution sur I d'une équation différentielle (E') linéaire d'ordre un.
2. Résoudre (E') sur I .
3. En déduire les solutions de (E) ne s'annulant pas sur l'intervalle I .

Exercice 43 ★★

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y'' - xy' - 3y = x^4$$

1. a. Montrer que f est une solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si $g : t \mapsto f(e^t)$ est solution sur \mathbb{R} d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.
b. En déduire les solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* .
2. a. Montrer que f est une solution de (E) sur \mathbb{R}_-^* si et seulement si $g : t \mapsto f(-e^t)$ est solution sur \mathbb{R} d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.
b. En déduire les solutions de (E) sur \mathbb{R}_-^* .
3. Déterminer les solutions de (E) sur \mathbb{R} .

Equations fonctionnelles**Exercice 44 ★★**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche l'ensemble S_α des fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^1 vérifiant $f'(x) = -f(\alpha - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une telle fonction est de classe \mathcal{C}^2 .
2. Montrer que les éléments de S_α sont solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
3. Conclure.

Exercice 45 ★★

Déterminer les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$$

Exercice 46 ★★

Déterminer les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f(-x)$$

Exercice 47 ★★

Déterminer les applications f dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = xe^{-x}$$

Exercice 48 ★★

Déterminer les applications f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^2 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1.$$

Problèmes de raccord

Exercice 49 ★★**Problème de raccordement**

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $x^2 y' - y = 0$.

Exercice 50 ★★

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$.

Exercice 51 ★★**Raccordement**

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $xy' - y = x$.

Exercice 52 ★★**Raccordement**

On considère l'équation différentielle (E) : $xy'' - y' - x^3 y = 0$.

1. Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* en effectuant le changement de variable $t = x^2$.
2. En déduire les solutions sur \mathbb{R}_- .
3. Résoudre (E) sur \mathbb{R} .

Exercice 53 ★★**Problème de raccord**

Résoudre sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E) : $ty' + (1 - t)y = e^{2t}$.

Exercice 55 ★★★

Résoudre sur \mathbb{R} les équations

1. $(E_1) : y' = |y|;$

2. $(E_2) : y = |y'|.$

Equations différentielles non linéaires**Exercice 54 ★★**

Soit $a > 0$. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = a|y|$ et f une éventuelle solution de (E).

1. Quelles sont les variations de f ?
2. Montrer que f est de signe constant sur \mathbb{R} ou constamment nulle sur \mathbb{R} .
3. Résoudre (E).