Devoir surveillé n°09

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 ★★

On dit qu'un nombre complexe z est *combinaison comvexe* de nombres complexes $z_1, \dots, z_n$ s'il existe des *réels positifs* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$$

On cherche à montrer le théorème suivant.

Si $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, toute racine complexe de P' est combinaison convexe des racines complexes de P.

1. On traite d'abord un exemple. Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^4 - 8\mathrm{X}^3 + 18\mathrm{X}^2 - 16\mathrm{X} + 32$.

a. Déterminer les racines complexes de P sachant que 4 est une racine multiple de P.

b. Déterminer les racines complexes de P'.

c. Ecrire chacune des racines de P' comme une combinaison convexe des racines de P.

2. On traite maintenant le cas général. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ dont la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ est la suivante :

$$\mathrm{P} = \prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - \alpha_k)^{r_k}$$

a. Rappeler la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}$ dans $\mathbb{C}(\mathrm{X})$.

b. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P' qui ne soit pas une racine de P. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} r_k \cdot \frac{z - \alpha_k}{|z - \alpha_k|^2} = 0$$

c. Justifier que z est combinaison convexe de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Exercice 2 ★★

On considère dans cet exercice un entier $p \geq 2$ et un polynôme à coefficients réels de degré p et de coefficient dominant $a_p = 1$:

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{p} a_k \mathrm{X}^k$$

On se propose de localiser dans le plan complexe les racines du polynôme P, afin de savoir dans quelle zone rechercher d'éventuelles racines de ce polynôme P.
On désigne à cet effet par M le nombre réel positif suivant :

$$\mathrm{M} = \max_{0 \leq k \leq p-1} |a_k| = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{p-1}|\}$$

1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall r \in \mathbb{R}_+,\ f(r) = r^{p+1} - (\mathrm{M}+1)r^p + \mathrm{M}$$

a. Déterminer l'unique zéro strictement positif r_0 de la dérivée de f.
Comparer les positions de r_0 et 1 en fonction des positions de M et $\dfrac{1}{p}$.

b. On suppose $\mathrm{M} \leq \dfrac{1}{p}$. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
En déduire le signe de $f(r)$ lorsque $r > 1$.

c. On suppose $\mathrm{M} > \dfrac{1}{p}$. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
En déduire le signe de $f(r)$ lorsque $r \geq \mathrm{M}+1$.

2. Localisation des racines du polynôme P.

a. Démontrer que toute racine complexe z du polynôme P de module différent de 1 vérifie l'inégalité

$$|z|^p \leq \mathrm{M}\frac{|z|^p - 1}{|z| - 1}$$

En supposant $|z| > 1$, montrer que l'on a l'inégalité $f(|z|) \leq 0$.

b. Etablir que si $\mathrm{M} \leq \dfrac{1}{p}$, alors les racines de P sont de module inférieur ou égal à 1.

c. Etablir que si $\mathrm{M} > \dfrac{1}{p}$, alors les racines de P sont de module strictement inférieur à $\mathrm{M}+1$.

3. On suppose dans cette question que

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^p - \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{X}^k$$

a. Montrer que les racines complexes de P sont de module inférieur ou égal à 1.

b. Montrer que 1 est un racine simple de P.

4. On suppose dans cette question que

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^p - \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{X}^k$$

a. Montrer que les racines complexes de P sont de module strictement inférieur à 2.

b. Etablir que, si z est racine de P, alors z est racine du polynôme $\mathrm{X}^{p+1} - 2\mathrm{X}^p + 1$.

c. En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(r) = r^{p+1} - 2r^p + 1$, établir que :

- le polynôme P a une racine réelle x_p telle que $\frac{2p}{p+1} \leq x_p \leq 2$;
- la suite (x_p) converge vers 2.

5. On pose maintenant $\varepsilon_p = 2 - x_p$ et on étudie ε_p lorsque p tend vers $+\infty$.

- Etablir que $(2-x_p)x_p^p = 1$ puis que $\varepsilon_p = (2-\varepsilon_p)^{-p}$. En déduire que la suite de terme général $p\varepsilon_p$ converge vers 0.
- Etablir qu'on a le développement asymptotique suivant

$$x_p \underset{p\to+\infty}{=} 2 - \frac{1}{2^p} + o\left(\frac{1}{2^p}\right)$$

6. Etablir enfin que si z est une racine de P, alors $\frac{1}{z}$ est racine de

$$\mathrm{Q} = \mathrm{X}^p + \mathrm{X}^{p-1} + \cdots + \mathrm{X} - 1 = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{X}^k - 1$$

En déduire que toutes les racines de P sont de module strictement compris entre $\frac{1}{2}$ et 2.