Devoir à la maison ^{o}: corrigé

Problème 1 — Équation fonctionnelle

Partie I –

1. D'après l'énoncé, $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.
Puisque f est strictement monotone, elle est injective donc $f(1) \neq f(0) = 0$.
2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$g(x+y) = \frac{1}{c}f(x+y) = \frac{1}{c}f(x) + \frac{1}{c}f(y) = g(x) + g(y)$$
On en déduit que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
$$g(x) = g(x-y+y) = g(x-y) + g(y)$$
et donc que $g(x-y) = g(x) - g(y)$.
3. On sait que $g(0) = \frac{1}{c}f(0) = 0$ et que $g(n+1) = g(n) + g(1) = g(n) + \frac{1}{c}f(1) = g(n) + 1$. La suite de terme général $g(n)$ est donc arithmétique de raison 1 et de premier terme $g(0) = 0$. On en déduit que $g(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$g(x) + g(-x) = g(x-x) = g(0) = 0$$
donc g est impaire.
5. Soit $r \in \mathbb{Q}$. La suite de terme général $g(nr)$ est arithmétique de premier terme $g(0) = 0$ et de raison $g(r)$. On en déduit que $g(nr) = ng(r)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Puisque $r \in \mathbb{Q}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$. D'une part, $g(qr) = qg(r)$ et d'autre part, $g(qr) = g(p) = p$ puisque $p \in \mathbb{Z}$. Ainsi $qg(r) = p$ puis $g(r) = \frac{p}{q} = r$.
6. D'après l'énoncé, f est strictement monotone.
Si f est strictement croissante $c = f(1) > f(0) = 0$ donc $g = \frac{1}{c}f$ est strictement croissante.
Si f est strictement décroissante $c = f(1) < f(0) = 0$ donc $g = \frac{1}{c}f$ est strictement croissante.
7. Supposons $g(x) \neq x$. Alors il existe un rationnel r strictement compris entre x et $g(x)$.
Si $x < r < g(x)$, alors par stricte croissance de g, $g(x) < g(r) = r$, d'où une contradiction.
Si $g(x) < r < x$, alors par stricte croissance de g, $g(x) > g(r) = r$, d'où une contradiction à nouveau.
8. On a montré que $g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ donc $f = cg = c\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Partie II –

1. f est injective car strictement monotone.
2. D'après l'énoncé, $f(f(0)) = f(0 + f(0)) = f(0) + 0^n = f(0)$. Or f est injective donc $f(0) = 0$.
3. Pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$f(f(y)) = f(0 + f(y)) = f(0) + y^n = y^n$$
4. **a.** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Puisque $n = 1$, $f(f(y)) = y^n = y$
$$f(x+y) = f(x + f(f(y))) = f(x) + f(y)$$

b. La partie précédente montre qu'en posant $c = f(1)$, $f = c\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. De plus, $1 = f(f(1)) = f(c) = c^2$ donc $c = \pm 1$. Ainsi $f = \pm\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
On vérifie aisément que, réciproquement, si $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ ou $f = -\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, on a bien

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+f(y)) = f(x) + y$$

Dans le cas où $n = 1$, les applications recherchées sont donc exactement $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $-\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

5. **a.** Supposons n pair. Alors $f(f(1)) = 1^n = 1$ et $f(f(-1)) = (-1)^n = 1$ donc $f \circ f(1) = f \circ f(-1)$. Or f est injective donc $f \circ f$ l'est également. On en déduit une contradiction.

b. Puisque n est impair, le théorème de la bijection montre que l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & y^n \end{array}\right.$ est bijective. Or cette application n'est autre que $f \circ f$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors $f(f(x)) = f(f(y))$ puis $x = y$ par injectivité de $f \circ f$. Ainsi f est injective.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(f(x))$ par surjectivité de $f \circ f$. Ainsi $y \in \operatorname{Im} f$ et f est surjective.

c. Puisque f est bijective, on peut considérer la bijection réciproque f^{-1} de $\mathbb{R}$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$f(x+y) = f(x + f(f^{-1}(y))) = f(x) + f^{-1}(y)^n$$

Or $f^{-1}(y)^n = f(f(f^{-1}(y))) = f(y)$ donc $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

d. D'après la partie précédente, $f = c\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ en posant $c = f(1)$. On a donc $f(f(y)) = c^2 y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Or on sait également que $f(f(y)) = y^n$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On en déduit par exemple que $c^2 = y^{n-1}$ pour tout $y \neq 0$ ce qui est absurde puisque $n > 1$.

e. Dans le cas où $n > 1$, il n'existe aucune application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+f(y)) = f(x) + y^n$$