Devoir à la maison n°01

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Partie I –

I.1 Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathrm{E}(s)\mathrm{E}(t) = \left(\mathrm{I} + s\mathrm{A} + \frac{s^2}{2}\mathrm{A}^2\right)\left(\mathrm{I} + t\mathrm{A} + \frac{t^2}{2}\mathrm{A}^2\right) = \mathrm{I} + (s+t)\mathrm{A} + \left(\frac{s^2}{2} + st + \frac{t^2}{2}\right)\mathrm{A}^2 + \frac{st^2 + s^2t}{2}\mathrm{A}^3 + \frac{s^2t^2}{2}\mathrm{A}^4$$

Or $\mathrm{A}^3 = 0$ et donc $\mathrm{A}^4 = 0$. Finalement

$$\mathrm{E}(s)\mathrm{E}(t) = \mathrm{I} + (s+t)\mathrm{A} + \left(\frac{s^2}{2} + st + \frac{t^2}{2}\right)\mathrm{A}^2 = \mathrm{I} + (s+t)\mathrm{A} + \frac{(s+t)^2}{2}\mathrm{A}^2 = \mathrm{E}(s+t)$$

I.2 Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors $\mathrm{E}(0 \times t) = \mathrm{E}(0) = \mathrm{I} = \mathrm{E}(t)^0$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{E}(nt) = \mathrm{E}(t)^n$. Alors, d'après la question **I.1**,

$$\mathrm{E}((n+1)t) = \mathrm{E}(nt + t) = \mathrm{E}(nt)\mathrm{E}(t) = \mathrm{E}(t)^n\mathrm{E}(t) = \mathrm{E}(t)^{n+1}$$

Par récurrence, $\mathrm{E}(nt) = \mathrm{E}(t)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.3 Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après la question **I.1**, $\mathrm{E}(t)\mathrm{E}(-t) = \mathrm{E}(0 \times t) = \mathrm{E}(0) = \mathrm{I}$. Ainsi $\mathrm{E}(t)$ est inversible et $\mathrm{E}(t)^{-1} = \mathrm{E}(-t)$.

I.4 Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda\mathrm{I} + \mu\mathrm{A} + \nu\mathrm{A}^2 = 0$. En multipliant cette égalité par A^2, on obtient $\lambda\mathrm{A}^2 + \mu\mathrm{A}^3 + \nu\mathrm{A}^4 = 0$ et donc $\lambda = 0$ puisque $\mathrm{A}^2 \neq 0$ et $\mathrm{A}^3 = \mathrm{A}^4 = 0$. On a donc $\mu\mathrm{A} + \nu\mathrm{A}^2 = 0$. En multipliant cette égalité par A, on obtient $\mu\mathrm{A}^2 + \nu\mathrm{A}^3 = 0$ et donc $\mu = 0$ puisque $\mathrm{A}^2 \neq 0$ et $\mathrm{A}^3 = 0$. Il reste $\nu\mathrm{A}^2 = 0$ et donc $\nu = 0$ puisque $\mathrm{A}^2 \neq 0$. Finalement, $\lambda = \mu = \nu = 0$, ce qui prouve la liberté de $(\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$.

I.5 Les questions **I.1** et **I.3** montrent que E est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}), \times)$. Il nous suffit donc de déterminer le noyau de E. Or

$$t \in \operatorname{Ker} \mathrm{E} \iff \mathrm{E}(t) = \mathrm{I} \iff \mathrm{I} + t\mathrm{A} + \frac{t^2}{2}\mathrm{A}^2 = \mathrm{I} \iff t\mathrm{A} + \frac{t^2}{2}\mathrm{A}^2 = 0 \iff t = 0$$

car $(\mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$ est libre comme sous-famille de la famille libre $(\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$. Ainsi $\operatorname{Ker} \mathrm{E} = \{0\}$ et donc E est injective.

Remarque. Si on ne sait pas ce qu'est un morphisme de groupes, on montre l'injectivité «comme d'habitude». Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{E}(s) = \mathrm{E}(t)$. On a donc $\mathrm{I} + s\mathrm{A} + \frac{s^2}{2}\mathrm{A}^2 = \mathrm{I} + t\mathrm{A} + \frac{t^2}{2}\mathrm{A}^2$. Comme la famille $(\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$ est libre, on peut «identifier» les coefficients. Notamment $s = t$.

I.6 Remarquons que $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}^3 = 0$. On est donc bien dans les conditions de cette partie. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{E}(t) = \mathrm{I} + t\mathrm{A} + \frac{t^2}{2}\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie II –

II.1 La matrice de $f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ dans $\mathcal{B}_0$ est $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. On trouve alors $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \mathrm{vect}(u)$ avec $u = (3, 1)$.

La matrice de $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ dans $\mathcal{B}_0$ est $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. On trouve alors $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \mathrm{vect}(v)$ avec $v = (2, 1)$.

F et G sont bien des droites vectorielles. Comme u et v sont non colinéaires, $\mathcal{B} = (u, v)$ est libre et est donc une base de $\mathbb{R}^2$ puisque $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. Ceci prouve que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathbb{R}^2$.

II.2 Puisque $u \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$, $f(u) = 2u$. De même, $v \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ donc $f(v) = v$. Par conséquent, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II.3 En notant P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ vers la base $\mathcal{B}$ et D la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, on a bien $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. On a vu à la question **II.2** que $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Un calcul simple montre que $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

II.4 Puisque le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les produits des coefficients diagonaux, $\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a clairement $\mathrm{PD}^0\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{I} = \mathrm{A}^0$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$. Alors

$$\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{AA}^n = \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PDD}^n\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PD}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}$$

Par récurrence, $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Un calcul donne alors, $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 3.2^n - 2 & 6 - 6.2^n \\ 2^n - 1 & 3 - 2^{n+1} \end{pmatrix}$.

Partie III –

III.1 Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle entre 0 et t à l'ordre n et on obtient

$$\left| e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right| \leq \frac{\mathrm{M}_n |t|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $\mathrm{M}_n = \sup\limits_{[0,t]} |\exp^{(n+1)}|$. Or $\exp^{(n+1)} = \exp$ et exp est positive donc $\mathrm{M}_n = \sup\limits_{[0,t]} \exp$; en particulier, M_n ne dépend pas de n. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{M}_n|t|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ et le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^t - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{t^k}{k!} = 0$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{t^k}{k!} = e^t$.

Remarque. Rigoureusement, il faudrait écrire $[t, 0]$ au lieu de $[0, t]$ lorsque t est négatif.

III.2 A l'aide de la question **II.4**,

$$a_n(t) = 3 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$
$$b_n(t) = 6 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - 6 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$$
$$c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$
$$d_n(t) = 3 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$$

III.3 En utilisant **III.1**, on obtient

$$a(t) = 3e^{2t} - 2e^{t} \qquad b(t) = 6e^{t} - 6e^{2t} \qquad c(t) = e^{2t} - e^{t} \qquad d(t) = 3e^{t} - 2e^{2t}$$

III.4 Il suffit de poser $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{R} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

III.5 On a $\mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q}$, $\mathrm{R}^2 = \mathrm{R}$ et $\mathrm{QR} = \mathrm{RQ} = 0$. q et r sont des projecteurs.

On a $\operatorname{Ker} \mathrm{Q} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\operatorname{Im} \mathrm{Q} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et donc $\operatorname{Ker} q = \operatorname{vect}(v) = \mathrm{G}$ et $\operatorname{Im} q = \operatorname{vect}(u) = \mathrm{F}$. q est donc le projecteur sur F parallèlement à G.

On a $\operatorname{Ker} \mathrm{R} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\operatorname{Im} \mathrm{R} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et donc $\operatorname{Ker} r = \operatorname{vect}(u) = \mathrm{F}$ et $\operatorname{Im} r = \operatorname{vect}(v) = \mathrm{G}$. r est donc le projecteur sur G parallèlement à F.

Remarque. On aurait aussi pu remarquer que $\mathrm{Q} + \mathrm{R} = \mathrm{I}$ et donc que $q + r = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, ce qui aurait permis de conclure directement quant à la nature de r.

III.6 Soit $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(s)\mathrm{E}(t) &= \left(e^{2s}\mathrm{Q} + e^{s}\mathrm{R}\right)\left(e^{2t}\mathrm{Q} + e^{t}\mathrm{R}\right) \\
&= e^{2s+2t}\mathrm{Q}^2 + e^{s+t}\mathrm{R}^2 + e^{2s+t}\mathrm{QR} + e^{s+2t}\mathrm{RQ} \\
&= e^{2(s+t)}\mathrm{Q} + e^{s+t}\mathrm{R} = \mathrm{E}(s+t)
\end{aligned}$$

car $\mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q}$, $\mathrm{R}^2 = \mathrm{R}$ et $\mathrm{QR} = \mathrm{RQ} = 0$.
On prouve alors comme à la question **I.1** que $\mathrm{E}(t)^n = \mathrm{E}(nt)$ pour tout $(t, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ et que $\mathrm{E}(t)$ est inversible d'inverse $\mathrm{E}(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
A nouveau E est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$. Soit $t \in \operatorname{Ker} \mathrm{E}$. On a donc $e^{2t}\mathrm{Q} + e^{t}\mathrm{R} = \mathrm{I}$. En multipliant par Q, on obtient $e^{2t}\mathrm{Q} = \mathrm{Q}$ car $\mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q}$ et $\mathrm{QR} = 0$. Comme $\mathrm{Q} \neq 0$, $e^{2t} = 1$ et $t = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} \mathrm{E} = \{0\}$ et E est injectif.

Remarque. A nouveau, si on ne sait pas ce qu'est un morphisme de groupes, on se donne $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{E}(s) = \mathrm{E}(t)$. On a donc $e^{2s}\mathrm{Q} + e^{s}\mathrm{R} = e^{2t}\mathrm{Q} + e^{t}\mathrm{R}$. En multipliant par Q, on ontient $e^{2s}\mathrm{Q} = e^{2t}\mathrm{Q}$ puis $e^{2s} = e^{2t}$ car $\mathrm{Q} \neq 0$ et enfin $s = t$ par injectivité de l'exponentielle.

Problème 2

Partie I – Résolution d'une première équation différentielle

I.1 Les solutions de l'équation caractéristique associée à (E_1) sont évidemment $2i$ et $-2i$. Les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont les fonctions $t \mapsto \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

I.2 Les solutions de l'équation caractéristique associée à (E_2) sont évidemment 2 et -2. Les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

I.3 On a montré que l'ensemble des solutions de (E_2) était

$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On veut montrer que c'est également

$$\mathcal{S}' = \left\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{ch}(2t) + \mu\,\mathrm{sh}(2t),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Soit donc $f \in \mathcal{S}$. Il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En posant $A = \frac{\lambda+\mu}{2}$ et $B = \frac{\lambda-\mu}{2}$, $f(t) = A\,\mathrm{ch}(2t) + \mu\,\mathrm{sh}(2t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc $f \in \mathcal{S}'$.
Réciproquement, soit $f \in \mathcal{S}'$. Il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(t) = \lambda\,\mathrm{ch}(2t) + \mu\,\mathrm{sh}(2t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En posant $A = \frac{\lambda+\mu}{2}$ et $B = \frac{\lambda-\mu}{2}$, $f(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc $f \in \mathcal{S}$.
Par double inclusion, $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$.

Remarque. Si on a déjà vu la structure d'espace vectoriel, on peut raisonner de manière plus élégante. On constate que $\mathcal{S} = \mathrm{vect}(f,g)$ avec $f : t \mapsto e^{2t}$ et $g : t \mapsto e^{-2t}$. Posons également $h : t \mapsto \mathrm{ch}(2t)$ et $k : t \mapsto \mathrm{sh}(2t)$. Puisque $f = h + k \in \mathrm{vect}(h,k)$ et $g = h - k \in \mathrm{vect}(h,k)$, $\mathrm{vect}(f,g) \subset \mathrm{vect}(h,k)$. De même, $h = \frac{1}{2}(f+g) \in \mathrm{vect}(f,g)$ et $k = \frac{1}{2}(f-g)$ donc $\mathrm{vect}(h,k) \subset \mathrm{vect}(f,g)$. Par double inclusion, $\mathcal{S} = \mathrm{vect}(f,g) = \mathrm{vect}(h,k)$.

Partie II – Résolution d'une seconde équation différentielle par changement de variable

II.4 cos est deux fois dérivable sur $]0,\pi[$ à valeurs dans $]-1,1[$ et f est deux fois dérivable sur $]-1,1[$ donc $g = f\circ\arccos$ est deux fois dérivable sur $]0,\pi[$.

II.5 Puisque g est deux fois dérivable sur $]0,\pi[$, on montre successivement que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(\arccos(x))\\
f'(x) &= -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}g'(\arccos(x))\\
f''(x) &= -x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}g'(\arccos(x)) + (1-x^2)^{-1}g''(\arccos(x))
\end{aligned}$$

f est solution de (F) sur $]-1,1[$ si et seulement si

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)f''(x) - xf'(x) + 4f(x) = 0$$

Or d'après ce qui précède, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
xf'(x) &= -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}g'(\arccos(x))\\
(1-x^2)f''(x) &= -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}g'(\arccos(x)) + g''(\arccos(x))
\end{aligned}$$

Ainsi f est-elle solution de (F) sur $]-1,1[$ si et seulement si

$$\forall x \in]-1,1[,\ g''(\arccos(x)) + 4g(\arccos(x)) = 0$$

Puisque $\arccos(]-1,1[) =]0,\pi[$, cette dernière condition équivaut à

$$\forall t \in]0,\pi[,\ g''(t) + 4g(t) = 0$$

Pour résumer, f est solution de (F) sur $]-1,1[$ si et seulement si g est solution de (E_1) sur $]0,\pi[$.

II.6 On a déterminé à la question **I.1** les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ et donc a fortiori sur $]0, \pi[$. On en déduit que les solutions de (F) sur $]-1, 1[$ sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \cos(2 \arccos(x)) + \mu \sin(2 \arccos(x))$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Or pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\cos(2 \arccos(x)) = 2 \cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$$
$$\sin(2 \arccos(x)) = 2 \cos(\arccos(x)) \sin(\arccos(x)) = 2x\sqrt{1 - x^2}$$

Les solutions de (F) sur $]-1, 1[$ sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x\sqrt{1 - x^2}$$

Partie III – La fonction argument cosinus hyperbolique

III.7 La fonction ch est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\operatorname{ch}(0) = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{ch} = +\infty$ donc ch induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

III.8 Soit $x \in [1, +\infty[$. Posons $\theta = \operatorname{argch}(x)$. On sait que $\operatorname{sh}^2(\theta) = \operatorname{ch}^2(\theta) - 1 = x^2 - 1$. De plus, $\theta \in \mathbb{R}_+$ par définition de argch. Ainsi $\operatorname{sh}\theta \geq 0$. Finalement, $\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x)) = \operatorname{sh}(\theta) = \sqrt{x^2 - 1}$.

III.9 La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée sh ne s'annule pas sur cet intervalle. En tant que bijection réciproque de la bijection induite par ch de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$, argch est dérivable sur $\operatorname{ch}(\mathbb{R}_+^*) =]1, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{argch}(x))} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

III.10 C'est du calcul bête et méchant. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$2 \operatorname{ch}^2(\theta) - 1 = 2\left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{e^{2\theta} + e^{-2\theta} + 2}{2} - 1 = \frac{e^{2\theta} + e^{-2\theta}}{2} = \operatorname{ch}(2\theta)$$
$$2 \operatorname{ch}(\theta) \operatorname{sh}(\theta) = 2\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \cdot \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} = \frac{(e^\theta)^2 - (e^{-\theta})^2}{2} = \frac{e^{2\theta} - e^{-2\theta}}{2} = \operatorname{sh}(2\theta)$$

III.11 Par définition de la fonction argch, $\operatorname{ch}(\operatorname{argch} x) = x$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. Par ailleurs, on a vu que $\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. On en déduit que pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\operatorname{ch}(2 \operatorname{argch}(x)) = 2 \operatorname{ch}^2(\operatorname{argch}(x)) - 1 = 2x^2 - 1$$
$$\operatorname{sh}(2 \operatorname{argch}(x)) = 2 \operatorname{ch}(\operatorname{argch}(x)) \operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x)) = 2x\sqrt{x^2 - 1}$$

Partie IV – Un problème de raccord

IV.12 Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$. Alors $g = f \circ \operatorname{ch}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a successivement

$$f(x) = g(\operatorname{argch}(x))$$
$$f'(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} g'(\operatorname{argch}(x))$$
$$f''(x) = -x(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} g'(\arccos(x)) + (x^2 - 1)^{-1} g''(\arccos(x))$$

Or f est solution de (F) sur $]1, +\infty[$ si et seulement si

$$\forall x \in]1, +\infty[,\ (1 - x^2)f''(x) - xf'(x) + 4f(x) = 0$$

Or d'après ce qui précède, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$x f'(x) = x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} g'(\operatorname{argch}(x))$$
$$(1-x^2)f''(x) = -(x^2-1)f''(x) = x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} g'(\operatorname{argch}(x)) - g''(\operatorname{argch}(x))$$

Ainsi f est-elle solution de (F) sur $]1, +\infty[$ si et seulement si

$$\forall x \in]1, +\infty[,\ -g''(\operatorname{argch}(x)) + 4g(\operatorname{argch}(x)) = 0$$

Puisque $\operatorname{argch}(]1, +\infty[) = \mathbb{R}_+^*$, cette dernière condition équivaut à

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ g''(t) - 4g(t) = 0$$

Pour résumer, f est solution de (F) sur $]1, +\infty[$ si et seulement si g est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}_+^*$.
La question **I.3** montre alors que les solutions de l'équation différentielle de (F) sur $]1, +\infty[$ sont les fonctions

$$x \in]1, +\infty[\mapsto \lambda \operatorname{ch}(2 \operatorname{argch}(x)) + \mu \operatorname{sh}(2 \operatorname{argch}(x))$$

ou encore

$$x \in]1, +\infty[\mapsto \lambda(2x^2-1) + 2\mu x\sqrt{x^2-1}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

IV.13 Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]-\infty, -1[$. Alors $g : x \mapsto f(-x)$ est deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in]1, +\infty[$, $g'(x) = -f'(-x)$ et $g''(x) = f''(-x)$.
f est solution de (F) sur $]-\infty, -1[$ si et seulement si

$$\forall x \in]-\infty, -1[,\ (1-x^2)f''(x) - xf'(x) + 4f(x) = 0$$

Ceci équivaut à

$$\forall x \in]1, \infty[,\ (1-(-x)^2)f''(-x) - (-x)f'(-x) + 4f(-x) = 0$$

ou encore à

$$\forall x \in]1, \infty[,\ (1-x^2)f''(-x) + xf'(-x) + 4f(-x) = 0$$

et finalement à

$$\forall x \in]1, \infty[,\ (1-x^2)g''(x) - xg'(x) + 4g(x) = 0$$

Finalement f est solution de (F) sur $]-\infty, -1[$ si et seulement si g est solution de (E_2) sur $]1, +\infty[$. On en déduit que les solutions de (F) sur $]-\infty, -1[$ sont les fonctions

$$x \in]1, +\infty[\mapsto \lambda(2(-x)^2-1) + 2\mu(-x)\sqrt{(-x)^2-1}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On peut également affirmer que ce sont les fonctions

$$x \in]1, +\infty[\mapsto \lambda(2x^2-1) + 2\mu x\sqrt{x^2-1}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ puisque $-\mu$ décrit $\mathbb{R}$ lorsque μ décrit $\mathbb{R}$.

IV.14 Soit f une solution de (F) sur $\mathbb{R}$. Remarquons qu'alors f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. En particulier, f et f' sont continues sur $\mathbb{R}$.
D'après, les questions précédentes il existe $(\lambda_-, \mu_-, \lambda_0, \mu_0, \lambda_+, \mu_+) \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$\forall x \in]-\infty, -1[, f(x) = \lambda_-(2x^2-1) + 2\mu_- x\sqrt{x^2-1}$$
$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \lambda_0(2x^2-1) + 2\mu_0 x\sqrt{1-x^2}$$
$$\forall x \in]1, \infty[, f(x) = \lambda_+(2x^2-1) + 2\mu_+ x\sqrt{x^2-1}$$

Par continuité de f en -1, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ et donc $\lambda_- = \lambda_0$. De même, par continuité de f en 1, $\lambda_0 = \lambda_+$.
Finalement, $\lambda_- = \lambda_0 = \lambda_+$.

$$\forall x \in]-\infty, -1[, f'(x) = 4\lambda_- x + 2\mu_- \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$\forall x \in]-1, 1[, f'(x) = 4\lambda_0 x + 2\mu_0 x\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\forall x \in]1, \infty[, f'(x) = 4\lambda_+ x + 2\mu_+ \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Par continuité de f' en -1 et 1, on obtient $\mu_- = \mu_0 = \mu_+ = 0$ (sinon f' admettrait des limites infinies à gauche ou à droite en -1 ou 1).
On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda(2x^2 - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, toute fonction $x \mapsto \lambda(2x^2 - 1)$ est évidemment solution de (F) sur $\mathbb{R}$.
En conclusion, les solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions $x \mapsto \lambda(2x^2 - 1)$.