

DEVOIR SURVEILLÉ N°08

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 **1.a** \ln est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0$ donc \ln est concave sur \mathbb{R}_+^* .

1.b Si l'un des a_i est nul, l'inégalité est triviale. Sinon, par concavité de \ln ,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(a_i) \leq \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right)$$

On obtient alors l'inégalité voulue par croissance de \exp .

2 **2.a** Soit $s \in \mathcal{S}(E)$. Alors il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de s .

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T S P$ soit diagonale.

2.b On calcule $\chi_S = X^2$. Ainsi $\text{Sp}(S) = \{0\}$. Si S était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle donc nulle. S n'est donc pas diagonalisable.

3 **3.a** Comme β est une base orthonormée, $x = \sum_{i=1}^n \langle x | \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$. Alors $s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x | \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$. Comme β est orthonormée,

$$R_s(x) = \langle s(x) | x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x | \varepsilon_i \rangle^2$$

3.b Soit $x \in S(0, 1)$. Alors $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x | \varepsilon_i \rangle^2 = 1$. Comme $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_1 \langle x | \varepsilon_i \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x | \varepsilon_i \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_n \langle x | \varepsilon_i \rangle^2$$

ou encore

$$\lambda_1 \leq R_s(x) \leq \lambda_n$$

4 Notons s l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base β est S . On sait que $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que β est orthonormée donc $s \in \mathcal{S}(E)$. De plus, $\text{Sp}(s) = \text{Sp}(S) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Comme β est orthonormée, $s_{i,j} = \langle s(\varepsilon_j) | \varepsilon_i \rangle$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Comme la base β est normée, $\varepsilon_i \in S(0, 1)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'après la question précédente, $R_s(\varepsilon_i) = \langle s(\varepsilon_i) | \varepsilon_i \rangle \in [\lambda_1, \lambda_n]$ ou encore

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n$$

5 L'application $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T M - I_n$ est polynomiale en les coefficients de M donc continue.

On peut aussi remarquer que, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, l'application linéaire $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application bilinéaire $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ sont continues. Ainsi l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T M$ est continue comme composée des applications continues $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (M^T, M)$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. L'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto I_n$ est constante donc continue. Par différence, φ est continue.

6 On sait que les colonnes de A sont toutes de norme 1 i.e.

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1$$

Comme les $a_{i,j}^2$ sont positifs, on en déduit que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, |a_{i,j}| \leq 1$$

7 Le singleton $\{0\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

D'après la question précédente, $O_n(\mathbb{R})$ est borné. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $O_n(\mathbb{R})$ est compact car fermé et borné.

8 **8.a** D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $S = P\Delta P^T = P\Delta P^{-1}$. Par propriété de la trace,

$$T(A) = \text{tr}(AS) = \text{tr}(AP\Delta P^{-1}) = \text{tr}(P^{-1}AP\Delta)$$

Comme $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe, $B = P^{-1}AP \in O_n(\mathbb{R})$.

8.b T est une forme linéaire sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi T est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact, T admet un maximum t sur $O_n(\mathbb{R})$.

8.c Si on note $B = (b_{i,j})$,

$$T(A) = \text{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^n b_{i,i} \lambda_i$$

Mais comme B est orthogonale, $b_{i,i} \leq 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Enfin, les λ_i sont positifs car $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc

$$T(A) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(S)$$

Ainsi $\text{tr}(S)$ est un majorant de T sur $O_n(\mathbb{R})$. De plus, $T(I_n) = \text{tr}(S)$ et $I_n \in O_n(\mathbb{R})$ donc $t = \text{tr}(S)$.

9 Comme S est diagonalisable, $\det(S) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ et $\text{tr}(S) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Comme les λ_i sont positifs, d'après la question **1.b**,

$$\left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

ou encore

$$\det(S)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \text{tr}(S)$$

Par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R}_+ , on obtient

$$\det(S) \leq \left(\frac{1}{n} \text{tr}(S) \right)^n$$

10 Tout d'abord,

$$S_\alpha^T = D^T S^T D = D^T S D = S_\alpha$$

car S est symétrique. Ainsi S_α est également symétrique.

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^T S_\alpha X = (DX)^T S (DX) \geq 0$$

car $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On en déduit que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Enfin,

$$\text{tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 s_{i,i}$$

11 Par propriété du déterminant

$$\det(S_\alpha) = \det(S) \det(D)^2 = \det(S) \prod_{i=1}^n \alpha_i^2 = \frac{\det(S)}{\prod_{i=1}^n s_{i,i}}$$

La question précédente montre que $\text{tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 s_{i,i} = n$. On applique l'inégalité de la question 9 à S_α et on obtient

$$\frac{\det(S)}{\prod_{i=1}^n s_{i,i}} \leq 1$$

ou encore

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}$$

12 Comme $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$ et les coefficients diagonaux de S sont positifs d'après la question 4. Les coefficients diagonaux de S_ε sont alors strictement positifs puisque $\varepsilon > 0$. On peut alors appliquer la question précédente à S_ε .

$$\det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon)$$

Comme S_ε est encore diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1 + \varepsilon, \dots, \lambda_n + \varepsilon$, ceci équivaut à

$$\prod_{i=1}^n (\lambda_i + \varepsilon) \leq \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon)$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient bien par passage à la limite

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}$$

13 On vérifie aisément que B est symétrique car A l'est. Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. De plus, $B = \Omega^\top A \Omega = \Omega^{-1} A \Omega$ car Ω est orthogonale. Ainsi B est semblable à A de sorte que $\text{Sp}(B) = \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. On en déduit que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On sait que $\det(\Omega) = 1$ car $\Omega \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ donc, par propriété du déterminant,

$$\det(B) = \det(\Omega)^2 \det(A) = 1$$

car $A \in \mathcal{U}$. Ainsi $B \in \mathcal{U}$.

Enfin, par propriété de la trace,

$$\text{tr}(AS) = \text{tr}(A\Omega\Delta\Omega^\top) = \text{tr}(\Omega^\top A\Omega\Delta) = \text{tr}(B\Delta)$$

14 La question précédente montre l'inclusion $\{\text{tr}(AS), A \in \mathcal{U}\} \subset \{\text{tr}(B\Delta), B \in \mathcal{U}\}$.

Inversement, si on se donne $B \in \mathcal{U}$ et si l'on pose $A = \Omega B \Omega^\top$, on vérifie que $A \in \mathcal{U}$ et que $\text{tr}(AS) = \text{tr}(B\Delta)$, ce qui donne l'inclusion réciproque.

Par double inclusion, $\{\text{tr}(AS), A \in \mathcal{U}\} = \{\text{tr}(B\Delta), B \in \mathcal{U}\}$.

Comme $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'après la question 4, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $b_{i,i} \geq \min \text{Sp}(B) > 0$ car $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi

$$\forall B \in \mathcal{U}, \text{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i} > 0$$

L'ensemble $\{\text{tr}(AS), A \in \mathcal{U}\} = \{\text{tr}(B\Delta), B \in \mathcal{U}\}$ est une partie de \mathbb{R} non vide et minorée : il admet donc une borne inférieure.

15 On a montré à la question précédente que

$$\forall B \in \mathcal{U}, \text{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i}$$

et on a vu que les $\lambda_i b_{i,i}$ étaient positifs. On peut donc appliquer la question 1.b pour affirmer que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i} \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i} \right)^{1/n}$$

ou encore

$$\text{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i} \geq n \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} \left(\prod_{i=1}^n b_{i,i} \right)^{1/n}$$

16 Comme $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on peut appliquer l'inégalité d'Hadamard :

$$\prod_{i=1}^n b_{i,i} \geq \det(B) = 1$$

puisque $B \in \mathcal{U}$. En combinant avec l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$$\mathrm{tr}(B\Delta) \geq n \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} = n \det(S)^{1/n}$$

17 Il est clair que $D \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. De plus,

$$\det(D) = \prod_{k=1}^n \mu_k = \frac{\det(S)}{\prod_{k=1}^n \lambda_k} = 1$$

donc $D \in \mathcal{U}$. Enfin,

$$\mathrm{tr}(D\Delta) = \sum_{k=1}^n \mu_k \lambda_k = n \det(S)^{1/n}$$

On en déduit que $m = n \det(S)^{1/n}$ (cette borne inférieure est en fait un minimum).