Devoir à la maison n°10 : corrigé

Problème 1 — Petites Mines 2009

Partie I – Étude d'une fonction

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations arithmétiques sur des fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3(1-2x^2)e^{-2x^2}$$

On en déduit que f est

- strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$;
- strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$;
- strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.

Pour tout $x \neq 0$, $xe^{-x^2} = \frac{x^2e^{-x^2}}{x}$. Par croissances comparées,

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x^2} = 0$$

via le changement de variables $\mathrm{X} = x^2$. A fortiori

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = 0$$

Puis, par opérations

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\searrow$	-1

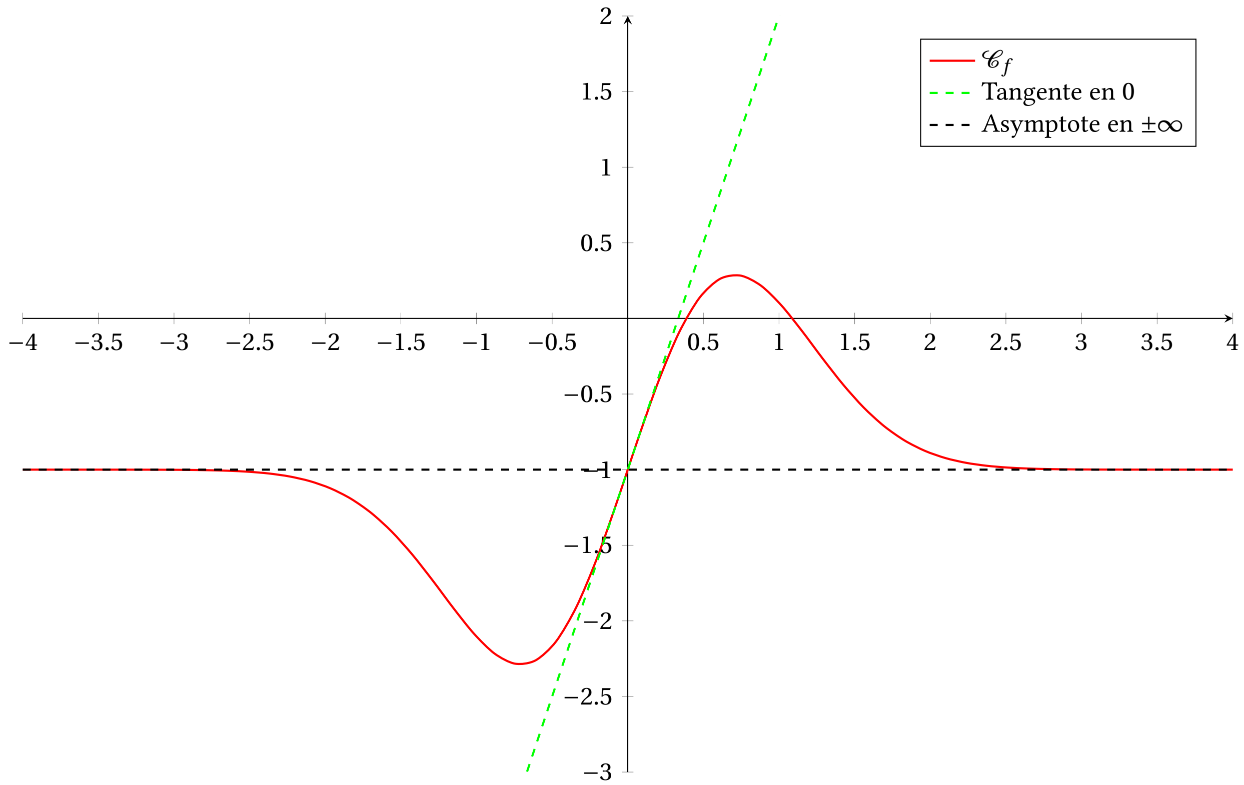
En particulier, $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
Puisque $f(-x) + f(x) = -2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0, -1)$.

2. Puisque $f(0) = -1$ et $f'(0) = 3$, $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = 3x - 1$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - (3x-1) = 3x(e^{-x^2} - 1)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} - 1 \leqslant 0$ car $-x^2 \leqslant 0$ et par croissance de exp sur $\mathbb{R}$. Ainsi $f(x) - (3x-1) \leqslant 0$ pour $x \geqslant 0$ et $f(x) - (3x-1) \geqslant 0$ pour $x \leqslant 0$. On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de sa tangente à gauche de 0 et au-dessous de celle-ci à droite de 0. $\mathscr{C}_f$ admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

3.



4. **a.** f étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle admet un développement limité à tout ordre en 0.

b. On sait que $e^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. On en déduit que

$$e^{-x^2} \underset{x\to 0}{=} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

puis que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -1 + 3x - 3x^3 + \frac{3}{2}x^5 + o(x^5)$$

Partie II – Étude d'une équation différentielle

1. L'équation différentielle H_n est $xy' - (n - 2x^2)y = 0$. Sur $\mathbb{R}^*$, elle équivaut à $y' - \left(\frac{n}{x} - 2x\right) y = 0$.
Une primitive de $x \mapsto \frac{n}{x} - 2x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto n\ln(x) - x^2$. Les solutions de H_n sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda x^n e^{-x^2}$ où λ décrit $\mathbb{R}$. Une primitive de $x \mapsto \frac{n}{x} - 2x$ sur $\mathbb{R}_-^*$ est $x \mapsto n\ln(-x) - x^2$. Les solutions de H_n sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda(-x)^n e^{-x^2}$ où λ décrit $\mathbb{R}$ ou, de manière plus simple, les fonctions $x \mapsto \lambda x^n e^{-x^2}$ où λ décrit encore $\mathbb{R}$.

2. La fonction constante égale à -1 étant clairement une solution particulière de E_n sur $\mathbb{R}$. On en déduit que les solutions de E_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $x \mapsto -1 + \lambda x^n e^{-x^2}$.

3. Supposons dans un premier temps $n = 1$. Soit y une solution de E_1 sur $\mathbb{R}$. Comme y est solution de E_1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$y(x) = \begin{cases} -1 + \lambda x e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -1 + \mu x e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La continuité de y en 0 impose $y(0) = -1$. De plus,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lambda \qquad \text{et } \lim_{x\to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \mu$$

La dérivabilité de y en 0 impose donc $\lambda = \mu$. On a donc $y(x) = \lambda x e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Réciproquement pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \mapsto -1 + \lambda x e^{-x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et solution de E_1 sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de E_1 sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $x \mapsto -1 + \lambda x e^{-x^2}$ où λ décrit $\mathbb{R}$.

Supposons maintenant $n \geqslant 2$. Comme précédemment toute solution y de E_n sur $\mathbb{R}$ est nécessairement de la forme

$$y(x) = \begin{cases} -1 + \lambda x^n e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -1 + \mu x^n e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Réciproquement, si y est de la forme précédente, elle est bien solution de E_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, elle est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}^*-$, elle est continue en 0 puisque $\lim_{0^+} y = \lim_{0^-} y = 0 = y(0)$ et

$$\lim_{x \to 0^+} y'(x) = \lim_{x \to 0^-} y'(x) = 0$$

donc y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en vertu du théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$.

Remarque. Si on ne connaît pas encore le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, on procède «à la main». On constate que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = 0$$

donc y est dérivable en 0 et $y'(0) = 0$. De plus,

$$\lim_{x \to 0^+} y'(x) = \lim_{x \to 0^-} y'(x) = 0 = y'(0)$$

donc y' est continue en 0. Puisque y' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, y' est continue sur $\mathbb{R}$ i.e. y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. ■

On vérifie alors que y est encore solution de E_n en 0 donc elle est solution de E_n sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de E_n sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $x \mapsto \begin{cases} -1 + \lambda x^n e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -1 + \mu x^n e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Partie III – Étude de deux suites

1. On a $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = \frac{3}{e} - 1 > 0$.

2. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_n'(x) = 3(nx^{n-1} - 2x^{n+1})e^{-x^2} = 3x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$$

On en déduit que f_n est strictement croissante sur $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_n(x) = \left(x^2\right)^{\frac{n}{2}} e^{-x^2} - 1$$

donc, par croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = -1$.
Remarquons que puisque $n \geqslant 2$, $1 \in \left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et puisque f_n est strictement croissante sur cet intervalle, $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \geqslant f_n(1) > 0$.
f est strictement monotone et continue sur chacun des deux intervalles $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$. De plus, $f_n(0) < 0$, $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) > 0$ et $\lim_{+\infty} f < 0$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f_n s'annule une unique fois sur chacun des deux intervalles $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$ en deux réels notés respectivement u_n et v_n.
Puisque $f_n(1) > 0$ et que 1 appartient à l'intervalle $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ sur lequel f_n est strictement croissante, $u_n > 1$. Par ailleurs $v_n > \sqrt{\frac{n}{2}} \geqslant 1$ puisque $n \geqslant 2$.

3. D'après la question précédente, $v_n \geqslant \sqrt{\frac{n}{2}}$ pour tout $n \geqslant 2$. Or $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = +\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ par théorème de minoration.

4. **a.** Par définition, $f_n(u_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$ donc $e^{-u_n^2} = \frac{1}{3u_n^n}$.

b. $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1}e^{-u_n^2} - 1 = u_n - 1 < 0$.

c. On sait également que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ et que f_{n+1} est strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$ contenant u_n et u_{n+1}. D'où $u_n < u_{n+1}$. Ceci étant valable pour tout $n \geqslant 2$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante.

d. La suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est également majorée par 1 donc elle converge en vertu du théorème de la limite monotone.

5. **a.** Évident.

b. Supposons $l \neq 1$. On a en fait $l < 1$ puisque (u_n) est majorée par 1. Pour tout $n \geqslant 2$, $f_n(u_n) = 0$ et donc $g_n(u_n) = 0$ d'après la question précédente. Ainsi pour tout $n \in\geqslant 2$.

$$0 = \ln 3 + n\ln(u_n) - u_n^2$$

Puisque $l < 1$, le membre de droite diverge vers $-\infty$, ce qui est absurde.
On en déduit que $l = 1$.

c. Pour tout $n \geqslant 2$, $g_n(u_n) = 0$ et donc

$$n\ln(1 + w_n) = u_n^2 - \ln 3$$

Puisque (w_n) converge vers 0, $n\ln(1+w_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} nw_n$. Par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty} u_n^2 - \ln 3 = 1 - \ln 3$ donc

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-\ln 3}{n}$$

Solution 1.

1. **a.** L'application f^{n-1} n'étant pas constamment nulle, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

b. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x) = 0$$

On montre alors que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ par récurrence.
Initialisation : En composant par f^{n-1}, on obtient

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^{n-1+i}(x) = 0_{\mathrm{E}}$$

Or pour $i \geqslant 1$, $n-1+i \geqslant n$ donc $f^{n-1+i}(x) = 0$. On en déduit que $\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0$. Comme $f^{n-1}(x) \neq 0$, $\lambda_0 = 0$.
Hérédité : Supposons qu'il existe $k \in [\![0, n-2]\!]$ tel que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, k]\!]$. On a alors

$$\sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i f^i(x) = 0$$

En composant par f^{n-k-2}, on obtient ensuite

$$\sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i f^{n-k-2+i}(x) = 0$$

Or pour $i \geqslant k+2$, $n-k-2+i \geqslant n$ donc $\lambda_i = 0$. Il reste finalement $\lambda_{k+1}f^{n-1}(x) = 0$ puis $\lambda_{k+1} = 0$ puisque $f^{n-1}(x) \neq 0$.
Conclusion : Par récurrence, $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.
Par conséquent, la famille $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$ est libre. Puisqu'elle comporte n éléments et que $n = \dim \mathrm{E}$, c'est une base de E.

2. **a.** La famille $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f^{n-k}(x))$ est une sous-famille de la famille libre $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$. Elle est donc également libre. On en déduit $\dim \mathrm{F}_k = k$.

b. Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $f^k(f^{n-i}(x)) = f^{n+k-i}(x) = 0$ car $n+k-i \geqslant n$ et donc $f^{n-i}(x) \in \operatorname{Ker} f^k$. Comme $(f^{n-i}(x))_{1\leqslant i\leqslant k}$ engendre F_k, $\mathrm{F}_k \subset \operatorname{Ker} f^k$. Donc $\dim \operatorname{Ker} f^k \geqslant \dim \mathrm{F}_k = k$.
Pour $1 \leqslant i \leqslant n-k$, $f^{n-i}(x) \in \operatorname{Im} f^k$ car $n-i \geqslant k$. Comme $(f^{n-i}(x))_{1\leqslant i\leqslant n-k}$ engendre F_{n-k}, $\mathrm{F}_{n-k} \subset \operatorname{Im} f^k$. D'où $\dim \operatorname{Im} f^k \geqslant \dim \mathrm{F}_{n-k} = n-k$. Par le théorème du rang, on a donc $\dim \operatorname{Ker} f^k = n - \dim \operatorname{Im} f^k \leqslant k$. On en déduit que $\dim \operatorname{Ker} f^k = k = \dim \mathrm{F}_k$ et, comme $\mathrm{F}_k \subset \operatorname{Ker} f^k$, $\mathrm{F}_k = \operatorname{Ker} f^k$.
Quitte à remplacer k par $n-k$, on a également $\mathrm{F}_k \subset \operatorname{Im} f^{n-k}$. Et comme $f^k \circ f^{n-k} = \mathbf{0}$, on a aussi $\operatorname{Im} f^{n-k} \subset \operatorname{Ker} f^k$. On en déduit que $\mathrm{F}_k = \operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Im} f^{n-k}$.

c. On a $\mathrm{F}_k = \operatorname{Im} f^{n-k}$ d'après la question précédente. Donc $f(\mathrm{F}_k) = \operatorname{Im} f^{n-k+1} \subset \operatorname{Im} f^{n-k} = \mathrm{F}_k$. F_k est donc stable par f.

3. **a.** On considère $\mathrm{A} = \{k \in \mathbb{N}^* \mid \tilde{f}^k = \tilde{\mathbf{0}}\}$. A est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ puisque $n \in \mathrm{A}$. Elle admet donc un plus petit élément $p \geqslant 1$. Si $p = 1$, alors $p-1 = 0$ mais $\tilde{f}^{p-1} = \mathrm{Id}_\mathrm{F} \neq \tilde{\mathbf{0}}$ car $\mathrm{F} \neq \{0_\mathrm{E}\}$. Si $p \geqslant 2$, alors $p-1 \in \mathbb{N}^*$ et on ne peut avoir $\tilde{f}^{p-1} = \tilde{\mathbf{0}}$ sinon $p-1 \in \mathrm{A}$, ce qui contredit la minimalité de p. On a donc dans tous les cas $\tilde{f}^{p-1} \neq \tilde{\mathbf{0}}$ et $\tilde{f}^p = \tilde{\mathbf{0}}$.

b. On prouve comme à la question **1.b** que la famille $(y, \tilde{f}(y), \dots, \tilde{f}^{p-1}(y))$ est libre. Comme $k = \dim \mathrm{F}$ et que la famille précédente est de cardinal p, on en déduit $p \leqslant k$. Ainsi $\tilde{f}^k = \tilde{\mathbf{0}}$.

c. La question précédente prouve que $\mathrm{F} \subset \operatorname{Ker} f^k$. Or on a vu à la question **2.b** que $\dim \operatorname{Ker} f^k = k$. Comme $\dim \mathrm{F} = k$, on a donc $\mathrm{F} = \operatorname{Ker} f^k$.

d. On vient de voir que tous les sous-espaces stables de dimension k avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$ était de la forme $\operatorname{Ker} f^k$. Réciproquement, on a vu à la question **2** que les sous-espaces $\operatorname{Ker} f^k$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$ étaient stables par f. Il reste à remarquer que le seul sous-espace de dimension 0 i.e. le sous-espace nul et que le seul sous-espace de dimension n i.e. E tout entier sont évidemment stables par f. Enfin, comme $f^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et $f^n = \mathbf{0}$, on a $\{0\} = \operatorname{Ker} f^0$ et $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} f^n$.
Les sous-espaces stables par f sont donc exactement les sous-espaces $\operatorname{Ker} f^k$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

4. **a.** La famille $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$ étant une base de E, il existe un unique n-uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ de réels tel que :

$$g(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x)$$

Ce sont les coordonnées de $g(x)$ dans la base $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$.

b. Si g commute avec f, g commute avec f^i pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Par conséquent,

$$g\left(f^i(x)\right) = f^i(g(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^{k+i}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k\right)\left(f^i(x)\right)$$

On en déduit que les endomorphismes g et $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$ coïncident sur la base $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$. Ceci prouve que

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = \alpha_0 \mathrm{Id}_\mathrm{E} + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$$

c. Notons $\mathscr{C}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ engendré par la famille $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}, f, \dots, f^{n-1})$ et $\mathscr{C}'$ l'ensemble des endomorphismes commutant avec f. La question précédente montre que $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$. Mais comme toute puissance de f commute avec f, il est clair que $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}'$. Ainsi $\mathscr{C} = \mathscr{C}'$. Comme la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$ est une famille libre de E, a fortiori la famille $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}, f, \dots, f^{n-1})$ est une famille libre de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. On en déduit que $\dim \mathscr{C} = n$.