Devoir à la maison n°05

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – D'après INT 1991

Notations

- La suite complexe de terme général α_n est notée $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou (α_n) ou plus simplement α.
- La série de terme général u_n est notée $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou plus simplement $\sum u_n$.

Partie I –

Dans cette partie, on note S_{AC} l'ensemble des suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum u_n$ converge *absolument*. On admet que S_{AC} est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

I.1 **I.1.a** Soit u une suite à termes strictement positifs tel que $\sum u_n$ converge. Montrer qu'il existe une suite α de réels positifs, tendant vers $+\infty$ en croissant, telle que la série $\sum \alpha_n u_n$ converge.
On pourra utiliser la suite α définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}}$ où R_n est le reste de rang n de la série $\sum u_n$.

I.1.b Soit u une suite à termes strictement positifs tel que $\sum u_n$ diverge. Montrer, de façon analogue, qu'il existe une suite α de réels positifs, tendant vers 0 en décroissant, telle que la série $\sum \alpha_n u_n$ diverge.

I.2 Normes sur S_{AC}.

I.2.a Soit α une suite *strictement* positive et majorée. Montrer que l'application N_α définie par

$$\forall u \in S_{AC},\ N_\alpha(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |u_n|$$

est bien définie et que c'est une norme sur S_{AC}.

I.2.b Soit α une suite strictement positive et majorée. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note δ^p la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui de rang p qui vaut 1, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \delta_n^p = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ 1 & \text{si } n = p \end{cases}$$

Que vaut $N_\alpha(\delta^p)$?

I.2.c Dans cette question uniquement, on suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \frac{1}{2^n} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = \frac{1}{n!}$$

Les normes N_α et N_β sont-elles équivalentes sur S_{AC} ?

I.2.d Soient α et β deux suites strictement positives et majorées. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que N_α et N_β soient équivalentes.

Partie II –

Dans cette partie, on considère une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ converge et on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

II.1 Dans cette question uniquement, on se donne $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$ et on suppose que $u_n = q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.1.a Déterminer R_n pour $n \in \mathbb{N}$.

II.1.b Montrer que la série $\sum R_n$ converge et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

II.2 Dans cette question uniquement, on se donne $\alpha > 1$ et on suppose que $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.2.a Montrer que

$$\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$$

II.2.b En déduire un équivalent de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.

II.2.c Pour quelles valeurs de α la série $\sum R_n$ converge-t-elle ?

II.2.d Montrer que dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

On pourra s'intéresser à la famille $(v_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ où $v_{k,n} = \begin{cases} \frac{1}{k^\alpha} & \text{si } k > n \\ 0 & \text{si } k \leq n \end{cases}$.

II.3 Dans cette question uniquement, on se donne $a \in \mathbb{R}$ et on suppose que $u_n = \frac{a^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.3.a Que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$? On ne demande pas de justification.

II.3.b Justifier la série $\sum R_n$ converge et montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = ae^a$.

On pourra s'intéresser à la famille $(v_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ où $v_{k,n} = \begin{cases} \frac{a^k}{k!} & \text{si } k > n \\ 0 & \text{si } k \leq n \end{cases}$.

II.4 Dans cette question, on suppose seulement u positive.

II.4.a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} R_k = nR_n + \sum_{k=1}^{n} ku_k$$

II.4.b On suppose que la série $\sum R_n$ converge. Montrer que la série $\sum nu_n$ converge puis que la suite (nR_n) converge vers 0.

Partie III –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |\mathrm{A}_{i,j}|$. On admet que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

III.1 **III.1.a** Montrer que pour $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\mathrm{N}(\mathrm{AB}) \leq n\mathrm{N}(\mathrm{A})\mathrm{N}(\mathrm{B})$.

III.1.b En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{N}(\mathrm{A}^p) \leq n^{p-1}\mathrm{N}(\mathrm{A})^p$.

III.1.c Montrer que la série $\sum\limits_{p \in \mathbb{N}} \frac{\mathrm{A}^p}{p!}$ converge. On pose alors $\exp(\mathrm{A}) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^p}{p!}$.

III.2 Dans cette question, on suppose $n = 3$ et on pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

III.2.a Déterminer deux réels a et b tels que $\mathrm{A}^2 = a\mathrm{A} + b\mathrm{I}$.

III.2.b Déterminer deux suites α et β telles que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}^p = \alpha_p \mathrm{A} + \beta_p \mathrm{I}$$

III.2.c Déterminer deux réels λ et μ tels que $\exp(\mathrm{A}) = \lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{I}$.

III.2.d On pose $\mathrm{R}_p = \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}$. Montrer que la série $\sum\limits_{p \in \mathbb{N}} \mathrm{R}_p$ converge et calculer $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \mathrm{R}_p$ sous la forme $c\mathrm{A} + d\mathrm{I}$ où c et d sont deux réels.