Devoir à la maison n°17

Problème 1 —

Définitions et notations

Dans tout le problème, p désigne un entier supérieur ou égal à 2.
Pour $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, on notera $c_{i,j}(M)$ le coefficient de M sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et sur la $j^{\text{ème}}$ colonne.
On dira qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est *stochastique* si :

(i) $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, c_{i,j}(M) \geqslant 0$.

(ii) $\forall i \in [\![1,p]\!], \sum_{j=1}^{p} c_{i,j}(M) = 1$.

On dira qu'une suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ si pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, la suite $(c_{i,j}(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $c_{i,j}(M)$. Dans ce cas, on dira que M est la limite de (M_n).
Etant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note

$$C_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} A^k$$

On dit enfin qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est r-périodique où $r \in \mathbb{N}^*$ si $A^r = I_p$.
L'objectif du problème est d'étudier quelques propriétés des matrices stochastiques et notamment, la convergence de la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque A est stochastique et r-périodique.

Partie I – Etude d'exemples

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \alpha^k$$

a. Calculer γ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en disinguant les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$.

b. Etudier en fonction de α la convergence de la suite (γ_n) et, en cas ce convergence, préciser la limite de (γ_n).

2. Premier exemple d'étude de (C_n)**.**

On prend $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2 et A^3. En déduire A^{3k}, A^{3k+1} et A^{3k+2} pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b. Calculer C_{3n}, C_{3n+1} et C_{3n+2} pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la suite (C_n) converge et préciser sa limite C.

c. On note ν l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à C. Montrer que ν est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $\operatorname{Ker}\nu$ et $\operatorname{Im}\nu$.

3. Deuxième exemple d'étude de (C_n).

On prend $p = 2$ et $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

b. En déduire A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c. Déterminer deux matrices $U, V \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = U + \left(-\frac{1}{6}\right)^k V$$

d. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer C_n en fonction de n, U et V.

e. En déduire que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite C.

f. On note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à C. Montrer que v est un projecteur de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} v$.

Partie II – Etude de $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque A est r-périodique

Dans cette partie, r désigne un entier naturel non nul.

1. Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite r-périodique de réels, c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_{k+r} = \alpha_k$. On pose

$$\gamma = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k$$

a. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\gamma = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{r-1} \alpha_{k+l}$$

b. Montrer que la suite de terme général

$$\beta_n = (n+1)\gamma_n - (n+1)\gamma$$

est r-périodique. En déduire que $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

c. Etablir que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice r-périodique.

a. Montrer que pour tout couple $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, la suite de terme général $\alpha_k = c_{i,j}(A^k)$ est r-périodique. En déduire que (C_n) converge vers

$$C = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1} A^k$$

b. Montrer que $AC = CA = C$.

c. On note u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associés à A et C. Montrer que

(i) v est un projecteur ;

(ii) $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$;

(iii) $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

où Id désigne l'application identique de $\mathbb{R}^p$.

3. **a.** Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels r-périodique *à partir d'un certain rang* $m \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que pour tout $k \geqslant m$, $\alpha_{k+r} = \alpha_k$. On définit (γ_n) comme dans la question **II.1**. Prouver que la suite (γ_n) admet une limite que l'on précisera. Pour cela, on pourra considérer la suite de terme général $\alpha'_k = \alpha_{k+m}$ et lui associer une suite (γ'_n) comme à la question **II.1** puis montrer que la suite de terme général $\gamma'_n - \gamma_n$ converge vers 0.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice r-périodique *à partir d'un certain rang* $m \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $A^{m+r} = A^m$. Prouver que la suite (C_n) converge vers

$$C = \frac{1}{r}\sum_{k=m}^{m+r-1} A^k$$

c. Soient u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associés à A et C. Montrer à nouveau que

(i) v est un projecteur ;

(ii) $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$;

(iii) $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

Partie III – Etude de matrices stochastiques

On note $\mathcal{S}_p$ l'ensemble des matrices *stochastiques* de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}_p$ l'ensemble des matrices *déterministes* de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices stochastiques dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou 1. Enfin, on note Δ_p l'ensemble des matrices déterministes et inversibles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

1. Matrices stochastiques.

a. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ et $\lambda+\mu = 1$ et $(M, N) \in \mathcal{S}_p^2$. Montrer que $\lambda M+\mu N \in \mathcal{S}_p$.

b. Soit $(M, N) \in \mathcal{S}_p^2$. Montrer que $MN \in \mathcal{S}_p$.

c. Soit $A \in \mathcal{S}_p$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \in \mathcal{S}_p$. Que peut-on en déduire pour la limite C de (C_n) lorsqu'elle existe ?

2. Matrices déterministes.

a. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est déterministe *si et seulement si* tous ses coefficients sont égaux à 0 ou 1 et si chaque ligne de M contient exactement un coefficient égal à 1.

b. En déduire que $\mathcal{D}_p$ est un ensemble fini et préciser son cardinal.

c. Soit $(M, N) \in \mathcal{D}_p^2$. Montrer que $MN \in \mathcal{D}_p$.

d. Soit $A \in \mathcal{D}_p$. Montrer que A est r-périodique à partir d'un certain rang m. Montrer que si A est inversible, A est r-périodique.

e. Soit $A \in \Delta_p$. Montrer que chaque colonne de A contient exactement un coefficient égal à 1. En déduire que $A^{-1} \in \Delta_p$.

3. Etude de la suite (C_n) associée à une matrice A déterministe.
Soit $A \in \mathcal{D}_p$. En utilisant les résultats de la partie II, montrer que (C_n) converge vers une matrice $C \in \mathcal{S}_p$ telle que $C^2 = C$.

4. Matrices stochastiques inversibles.
Soit $(X, Y) \in \mathcal{S}_p^2$ tel que $XY = I_p$. On se propose de montrer que $(X, Y) \in \Delta_p^2$.

a. Justifier que X et Y sont inversibles.

b. On pose pour $j \in [\![1, p]\!]$

$$\mu_j = \max\{c_{i,j}(Y), 1 \leqslant i \leqslant p\}$$

Prouver que $\mu_j = 1$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$. On pourra calculer le coefficient $c_{jj}(XY)$.

c. En déduire que $Y \in \Delta_p$ puis que $X \in \Delta_p$.

d. Plus généralement, soit $(U, V) \in \mathcal{S}_p^2$ tel que $UV \in \Delta_p$. Montrer que $(U, V) \in \Delta_p^2$.