Espaces préhilbertiens réels

Bases orthonormales

Solution 1

1. Soit u l'endomorphisme de E tel que $u(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$. u transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée directe donc u est une isométrie vectorielle directe donc $\det(u) = 1$. Or $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

2. On a $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\det_{\mathcal{B}}$. Donc $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}}$.

   Remarque. On en déduit que le déterminant dans une base orthonormée directe ne dépend pas du choix de cette base. Le déterminant de n vecteurs $u_1, \dots, u_n$ dans une base orthonormée quelconque s'appelle le *produit mixte* de ces vecteurs et est noté $[x_1, \dots, x_n]$.

3. Cette application est linéaire car le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses variables et notamment par rapport à la dernière. De plus, elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est donc une forme linéaire.

4. C'est tout simplement le théorème de Riesz.

5. Démontrons simplement la linéarité par rapport à la première variable. Soient $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathrm{E}$, $x_1' \in \mathrm{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$\det_{\mathcal{B}}(\lambda x_1 + \mu x_1', x_2, \dots, x_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \mu \det_{\mathcal{B}}(x_1', x_2, \dots, x_n)$$

   Notons $u = (\lambda x_1 + \mu x_1') \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$, $v = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$ et $w = x_1' \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$. Ainsi pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\langle u, x\rangle = \lambda\langle v, x\rangle + \mu\langle w, x\rangle$ i.e. $\langle u - (\lambda v + \mu w), x\rangle = 0$. Donc $u - (\lambda v + \mu w) \in \mathrm{E}^{\perp} = \{0\}$. On a donc $u = \lambda v + \mu w$, ce qui prouve bien la linéarité par rapport à la première variable. La linéarité par rapport aux autres variables se traite de la même manière.
   Soient $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathrm{E}$ tels que deux vecteurs parmi ceux-ci soient égaux. On a donc $\det(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ puisque le déterminant est une forme multilinéaire alternée. Ceci signifie que $\langle x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}, x\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Ainsi $x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} = 0$. L'application de l'énoncé est bien alternée.

Solution 2

1. L'application $\langle ., .\rangle$ est clairement symétrique. Elle est bilinéaire puisque la dérivation et l'évaluation en a sont linéaires. Elle est évidemment positive. Soit enfin $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\langle \mathrm{P}, \mathrm{P}\rangle = 0$. On a donc $\mathrm{P}(a) = \mathrm{P}'(a) = \cdots = \mathrm{P}^{(n)}(a) = 0$. Ainsi a est une racine d'ordre au moins $n+1$ de P et $\deg \mathrm{P} \leq n$ donc $\mathrm{P} = 0$.

2. La famille $\left((\mathrm{X}-a)^k\right)_{0\leq k\leq n}$ est clairement orthonormée. Puisqu'elle contient $n+1$ éléments et que $\dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] = n+1$, c'est une base.

Solution 3

1. En développant $\|x+y\|^2$, on prouve sans peine que

$$\langle x \mid y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

   et l'on en déduit que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle x \mid y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i\rangle\langle y \mid e_i\rangle$$

2. Soit $x \in \mathrm{E}$. Posons

$$z = x - \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i\rangle e_i$$

On a

$$\begin{aligned}\|z\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle z \mid e_k\rangle^2 = \sum_{k=1}^n \left\langle x - \sum_{i=1}^n \langle x \mid e_i\rangle e_i \mid e_k \right\rangle^2 = \sum_{k=1}^n \left(\langle x \mid e_k\rangle - \sum_{i=1}^n \langle x \mid e_i\rangle\langle e_k \mid e_i\rangle \right)^2 \\ = \sum_{k=1}^n (\langle x \mid e_k\rangle - \langle x \mid e_k\rangle)^2 = 0\end{aligned}$$

Ainsi $z = 0$.

3. D'après la question précédente, la famille $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ est génératrice de E. Comme $n = \dim(\mathrm{E})$, cette famille est une base de E. Pour tout $1 \leq k \leq n$, on a

$$e_k = \sum_{i=1}^n \langle e_k \mid e_i\rangle e_i$$

Ainsi, par identification des coordonées dans la base $(e_1, \dots, e_n)$,

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ \langle e_k \mid e_i\rangle = \delta_{k,i}$$

Comme cela est valable pour tout $1 \leq k \leq n$, on en déduit que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Solution 4

Notons p_n le projecteur orthogonal sur $\mathrm{vect}(e_0, \dots, e_n)$. Soit $x \in \mathrm{E}$. On sait alors que $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x pour la norme euclidienne $\|\cdot\|$. D'après le théorème de Pythagore, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x\|^2 = \|p_n(x)\|^2 + \|x - p_n(x)\|^2$$

D'une part,

$$\|x - p_n(x)\|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et d'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|p_n(x)\|^2 = \sum_{k=0}^n \langle e_k, x\rangle^2$$

Par passage à la limite

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle e_k, x\rangle^2$$

Sous-espaces orthogonaux

Solution 5

s est clairement linéaire et $s^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc s est une symétrie. Soit $\mathrm{S} \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ et $\mathrm{A} \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Ainsi $\mathrm{S}^\mathsf{T} = \mathrm{S}$ et $\mathrm{A}^\mathsf{T} = -\mathrm{A}$. Par conséquent $\langle \mathrm{S}, \mathrm{A}\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{S}^\mathsf{T}\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{SA})$ et $\langle \mathrm{A}, \mathrm{S}\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{S}) = -\mathrm{tr}(\mathrm{AS}) = -\mathrm{tr}(\mathrm{SA})$. Donc $\langle \mathrm{S}, \mathrm{A}\rangle = 0$. Ceci signifie que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ sont orthogonaux l'un à l'autre : s est une symétrie orthogonale.

Solution 6

1. Supposons $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$. Soit $x \in \mathrm{G}^\perp$. Alors x est orthogonal à tout vecteur de G et a fortiori de F donc $x \in \mathrm{F}^\perp$. Ainsi $\mathrm{G}^\perp \subset \mathrm{F}^\perp$.
Supposons F et G de dimension finie et $\mathrm{G}^\perp \subset \mathrm{F}^\perp$. D'après ce qui précède, $(\mathrm{F}^\perp)^\perp \subset (\mathrm{G}^\perp)^\perp$. Mais F et G étant de dimension finie, $(\mathrm{F}^\perp)^\perp = \mathrm{F}$ et $(\mathrm{G}^\perp)^\perp = \mathrm{G}$.

2. On sait que $\mathrm{F} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$ donc $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp \subset \mathrm{F}^\perp$ d'après la question précédente. De même, $\mathrm{G} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$ donc $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp \subset \mathrm{G}^\perp$. Ainsi $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp \subset \mathrm{F}^\perp \cap \mathrm{G}^\perp$.
Soit $x \in \mathrm{F}^\perp \cap \mathrm{G}^\perp$. Soit $y \in \mathrm{F} + \mathrm{G}$. Il existe donc $(u, v) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$ tel que $y = u + v$. Alors $\langle x, y\rangle = \langle x, u\rangle + \langle x, v\rangle$. Or $x \in \mathrm{F}^\perp$ et $u \in \mathrm{F}$ donc $\langle x, u\rangle = 0$. De même, $x \in \mathrm{G}^\perp$ et $v \in \mathrm{G}$ donc $\langle x, v\rangle = 0$. Ainsi $\langle x, y\rangle = 0$. Ceci étant vrai pour tout $y \in \mathrm{F} + \mathrm{G}$, $x \in (\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp$. D'où $\mathrm{F}^\perp \cap \mathrm{G}^\perp \subset (\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp$.
Par double inclusion, $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp = \mathrm{F}^\perp \cap \mathrm{G}^\perp$.

3. $F \cap G \subset F$ donc $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ d'après la première question. De même, $F \cap G \subset G$ donc $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. On en déduit que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
Supposons E de dimension finie. Alors

$$\dim(F^\perp + G^\perp) = \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F^\perp \cap G^\perp)$$

Or d'après la question précédente, $F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$ donc

$$\begin{aligned}\dim(F^\perp + G^\perp) &= \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F+G)^\perp \\ &= (\dim E - \dim F) + (\dim E - \dim G) - (\dim E - \dim(F+G)) \\ &= \dim E - (\dim F + \dim G - \dim(F+G)) \\ &= \dim E - \dim(F \cap G) = \dim(F \cap G)^\perp\end{aligned}$$

Puisqu'on a précédemment montré que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$, on peut conclure que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Solution 7

---

1. Remarquons que pour tout $y \in E$, la forme linéaire $\varphi_y : x \mapsto \langle x, y\rangle$ est continue. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x \in E,\ |\varphi_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

de sorte que φ_y est continue d'après la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.

2. On peut remarquer que

$$F = \{x \in E,\ \forall y \in F,\ \langle x, y\rangle = 0\} = \bigcap_{y \in F} \varphi_y^{-1}(\{0_E\})$$

Pour tout $y \in E$, $\varphi_y^{-1}(\{0_E\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé (le sous-espace nul) par une application continue. Par conséquent, F est fermé comme intersection de fermés.
On peut aussi utiliser la caractérisation séquentielle des fermés si l'on préfère. Soit (x_n) une suite d'éléments de $F^\perp$ convergeant vers $x \in E$. Fixons $y \in F$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_y(x_n) = \langle x_n, y\rangle = 0$. Par continuité de φ_y, $\lim_{n\to+\infty} \varphi_y(x_n) = \varphi_y(x)$. Par unicité de la limite, $\langle x, y\rangle = \varphi_y(x) = 0$. Ceci étant valable pour tout $y \in F$, $x \in F^\perp$. Ainsi $F^\perp$ est fermé par caractérisation séquentielle de la limite.

3. On sait que $F \subset (F^\perp)^\perp$. Or $(F^\perp)^\perp$ est fermé en applquant la question précédente à $F^\perp$. On sait que $\overline{F}$ est le plus grand fermé contenant F. Ainsi $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$.

Projection orthogonale

Solution 8

Notons p la projection orthogonale sur $\text{vect}(u)$ et P sa matrice dans $\mathcal{B}$. Comme (u) est une base orthonormale de $\text{vect}(u)$, on a, pour $x \in E$, $p(x) = \langle x, u\rangle u$. Notons X le vecteur colonne associé à un vecteur x de E. On a $PX = (U^\top X)U = U(U^\top X) = UU^\top X$. La matrice de P dans $\mathcal{B}$ est donc UU^t.

Solution 9

---

1. Notons p_u le projecteur orthogonal sur $\text{vect}(u)$. Remarquons que $p_u(e_i) = \left\langle \frac{u}{\|u\|}, e_i \right\rangle \frac{u}{\|u\|}$. Ainsi $\|p_u(e_i)\| = \frac{|\langle u, e_i\langle|}{\|u\|}$. Posons alors $u = \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\|e_i\|^2}$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est orthogonale, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\langle u, e_k\rangle = 1$. Donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\|p_u(e_k)\| = \frac{1}{\|u\|}$. Les projetés orthogonaux de $e_1, \dots, e_n$ sur $\text{vect}(u)$ ont donc toute la même norme.

2. Soit u un vecteur répondant aux conditions de l'énoncé. Notons N la norme commune des vecteurs $p_u(e_1), \dots, p_u(e_n)$. On a donc $N = \frac{|\langle e_i, u\rangle|}{\|u\|}$ pour $1 \leq i \leq n$.

Comme la base $\left(\frac{e_i}{\|e_i\|}\right)_{1\leq i\leq n}$ est orthonormale, on a :

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\langle e_i, u\rangle^2}{\|e_i\|^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathrm{N}^2\|u\|^2}{\|e_i\|^2}$$

Comme u est non nul, on obtient :

$$\mathrm{N} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\|e_i\|^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Ceci prouve que N est indépendante de u et nous donne bien une expression de N en fonction de $\|e_1\|, \dots, \|e_n\|$.

Solution 10

- Prouvons que **1.** ⇒ **2.**

  Lorsque p est une projection orthogonale de E, on a $\mathrm{Im}(id_{\mathrm{E}} - p) = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p)^{\perp}$ donc, pour tout x et y dans E, $p(x)\perp y - p(y)$ ie

  $$\langle p(x)|y\rangle = \langle p(x)|p(y)\rangle.$$

  Cette expression étant symétrique en (x, y), on a

  $$\begin{aligned}\langle p(x)|y\rangle &= \langle p(x)|p(y)\rangle = \langle p(y)|p(x)\rangle = \langle p(y)|x\rangle \\ &= \langle x|p(y)\rangle\end{aligned}$$

- Prouvons que **2.** ⇒ **3.**

  Soit x dans E. Appliquons le **2.** à x et $y = p(x)$. On a

  $$\|p(x)\|^2 = \langle p(x)|p(x)\rangle = \langle x|p(x)\rangle.$$

  ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

  $$\|p(x)\|^2 \leqslant \|x\| \cdot \|p(x)\|.$$

  Si $p(x) = 0$, l'inégalité **3.** est banalement vérifiée. Si $p(x) \neq 0$, $\|p(x)\| > 0$ et en divisant membre à membre l'inégalité précédente, on aboutit à

  $$\|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

- Prouvons que **3.** ⇒ **1.**

  Soient $x \in \mathrm{Im}\, p$, $y \in \mathrm{Ker}\, p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $y = 0$, alors $x\perp y$.
  Supposons maintenant $y \neq 0$. D'une part,

  $$\|p(x + \lambda y)\|^2 = \|x\|^2$$

  et d'autre part,

  $$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x|y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$$

  D'après **2.**, $2\lambda\langle x|y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Le discriminant de ce trinôme du second degré en λ est donc négatif, ce qui impose $\langle x|y\rangle^2 \leq 0$ et donc $\langle x|y\rangle = 0$. On a donc $x\perp y$. On en déduit que $\mathrm{Im}\, p \perp \mathrm{Ker}\, p$ et donc que p est une projection orthogonale.

Solution 11

1. Soient $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - u)$ et $y \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - u)$. Alors $u(x) = x$ et il existe $a \in \mathrm{E}$ tel que $y = a - u(a)$. Ainsi

   $$\langle x, y\rangle = \langle x, a - u(a)\rangle = \langle x, a\rangle - \langle x, u(a) = \langle x, a\rangle - \langle u(x), u(a)\rangle = 0$$

   car u conserve le produit scalaire. Ainsi $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - u)$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - u)$ sont orthogonaux. On conclut grâce au théorème du rang.

2. D'après la question précédente, il existe $y \in \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E - u)$ et $a \in E$ tel que $x = y + a - u(a)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = y + u^k(a) - u^{k+1}(a)$. Par télescopage, $x_n = y + \frac{1}{n}(a - u^n(a))$. On a alors

$$\|x_n - y\| \leq \frac{\|a\| + \|u^n(a)\|}{n} = \frac{2\|a\|}{n}$$

car u^n conserve la norme. En passant à la limite, on obtient que (x_n) converge vers y qui est justement la projection de x sur $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E - u)$ parallélement à $\operatorname{Im}(\mathrm{Id}_E - u)$.

Solution 12

1. Tout d'abord, pour $(P, Q) \in E^2$, $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ par croissances comparées donc $\langle P, Q\rangle$ est bien défini. La bilinéarité et la positivité sont évidentes. Soit enfin $P \in E$ tel que $\langle P, P\rangle = 0$. Comme $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}_+$, cette fonction est nulle sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi P admet une infinité de racines puis $P = 0$.

2. Notons I_n l'intégrale à calculer. Par intégration par parties, $I_n = nI_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Or $I_0 = 1$ donc $I_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On orthonormalise la base $(1, X, X^2)$ de F via le procédé de Gram-Schmidt. On pose

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{1}{\|1\|} = 1\\
P_1 &= \frac{X - \langle P_0, X\rangle P_0}{\sqrt{\|X\|^2 - \langle P_0, X\rangle^2}} = \frac{X - I_1P_0}{\sqrt{I_2 - I_1^2}} = X - 1\\
P_2 &= \frac{X^2 - \langle P_0, X^2\rangle P_0 - \langle P_1, X^2\rangle P_1}{\sqrt{\|X^2\|^2 - \langle P_0, X^2\rangle^2 - \langle P_1, X^2\rangle^2}} = \frac{X^2 - I_2P_0 - (I_3 - I_2)P_1}{\sqrt{I_4 - I_2^2 - (I_3 - I_2)^2}} = \frac{1}{2}X^2 - 2X + 1
\end{aligned}$$

   Alors (P_0, P_1, P_2) est une base orthonormée de F.

4. Comme (P_0, P_1, P_2) est une base orthonormée de F, le projeté orthogonal de X^3 sur F est

$$\langle P_0, X^3\rangle P_0 + \langle P_1, X^3\rangle P_1 + \langle P_2, X^3\rangle P_2 = I_3P_0 + (I_4 - I_3)P_1 + (I_5/2 - 2I_4 + I_3)P_2 = 9X^2 - 18X + 6$$

5. Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,dt\right| = |\langle P, 1\rangle| \leq \|P\|\|1\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}\,dt}$$

Solution 13

1. L'image de M est clairement engendrées par les deux premières colonnes de M qui sont linéairement indépendantes. Ainsi $\operatorname{rg}(M) = 2$.

2. D'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} M = 2$. Ainsi 0 est valeur propre de M est la dimension du sous-espace propre associé est $n - 2$. Il est engendré par les $E_2 - E_i$ pour $3 \leq i \leq n$ où $(E_1, \dots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Le calcul (laborieux) du polynôme caractéristique donne $\chi_M = X^n - (n-1)X^{n-2}$. Ainsi M possède deux valeurs propres supplémentaires qui sont $\pm\sqrt{n-1}$. On aurait aussi pu remarquer que $M^3 = (n-1)M$. Les sous-espaces propres associés aux valeurs propres $\sqrt{n-1}$ et $-\sqrt{n-1}$ sont respectivement engendrés par $U = \begin{pmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Notons u et v les vecteurs canoniquement associés à U et V. Puisque $\pm\sqrt{n-1}$ sont les seules valeurs propres non nulles de f, il est clair que $\operatorname{Im} f$ est engendré par u et v. Remarquons que u et v sont orthogonaux (ce qui est normal puisque M est symétrique). En notant p le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} f$, on a donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ p(x) = \frac{\langle u, x\rangle}{\|u\|^2}u + \frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2}v$$

Comme $\|u\|^2 = \|v\|^2 = 2(n-1)$, on obtient en notant P la matrice de p dans la base canonique,

$$\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \mathrm{PX} = \frac{1}{2n-2}\left((\mathrm{U}^\top\mathrm{X})\mathrm{U} + (\mathrm{V}^\top\mathrm{X})\mathrm{V}\right) = \frac{1}{2n-2}\left(\mathrm{UU}^\top\mathrm{X} + \mathrm{VV}^\top\mathrm{X}\right)$$

car $\mathrm{U}^\top\mathrm{X}$ et $\mathrm{V}^\top\mathrm{X}$ sont des scalaires. On en déduit que

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2n-2}\left(\mathrm{UU}^\top + \mathrm{VV}^\top\right) = \frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales

Solution 14

- Si $\mathrm{H} = \mathrm{K}$ alors $s_\mathrm{H} = s_\mathrm{K}$ et s_H et s_K commutent évidemment.
- Si $\mathrm{H}^\perp \subset \mathrm{K}$, alors on a également $\mathrm{K}^\perp \subset \mathrm{H}$. Soient $a, b \in \mathrm{E}$ tels que $\mathrm{H} = \operatorname{vect}(a)^\perp$ et $\mathrm{K} = \operatorname{vect}(b)^\perp$. On a donc $a \in \mathrm{K}$ et $b \in \mathrm{H}$. De plus, a et b sont orthogonaux. Enfin, $(\mathrm{H} \cap \mathrm{K})^\perp = \mathrm{H}^\perp + \mathrm{K}^\perp = \operatorname{vect}(a) \oplus \operatorname{vect}(b)$. Soit $x \in \mathrm{E}$. Il existe donc $u \in \mathrm{H} \cap \mathrm{K}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $x = u + \lambda a + \mu b$. On a alors :

$$s_\mathrm{H} \circ s_\mathrm{K}(x) = s_\mathrm{H}(u + \lambda a - \mu b) = u - \lambda a - \mu b$$
$$s_\mathrm{K} \circ s_\mathrm{H}(x) = s_\mathrm{K}(u - \lambda a + \mu b) = u - \lambda a - \mu b$$

  On a bien prouvé que s_H et s_K sommutent.

  Remarque. On a même prouvé que $s_\mathrm{H} \circ s_\mathrm{K} = s_\mathrm{K} \circ s_\mathrm{H} = s_{\mathrm{H} \cap \mathrm{K}}$.

- Réciproquement, si s_H et s_K commutent, soit à nouvau a tel que $\mathrm{H} = \operatorname{vect}(a)^\perp$. On a donc $s_\mathrm{H}(a) = -a$. Par conséquent, $s_\mathrm{H} \circ s_\mathrm{K}(a) = s_\mathrm{K} \circ s_\mathrm{H}(a) = -s_\mathrm{K}(a)$. Ceci implique que $s_\mathrm{K}(a) \in \mathrm{H}^\perp = \operatorname{vect}(a)$. Comme s_K est une isométrie, on a $s_\mathrm{K}(a) = a$ ou $s_\mathrm{K}(a) = -a$. Si $s_\mathrm{K}(a) = a$ alors $a \in \mathrm{K}$ et donc $\mathrm{H}^\perp \subset \mathrm{K}$. Si $s_\mathrm{K}(a) = -a$ alors $a \in \mathrm{K}^\perp$, c'est-à-dire que $\mathrm{K} = \operatorname{vect}(a)^\perp = \mathrm{H}$.

Solution 15

1. Soit (i, j, k) une base orthonormée directe de E et f vérifiant la condition de l'énoncé. Alors

$$f(i) = f(j) \wedge f(k) \qquad f(j) = f(k) \wedge f(i) \qquad f(k) = f(i) \wedge f(j)$$

La famille $(f(i), f(j), f(k))$ est donc orthogonale. Par conséquent

$$\|f(i)\| = \|f(j)\|\|f(k)\|$$
$$\|f(j)\| = \|f(k)\|\|f(i)\|$$
$$\|f(k)\| = \|f(i)\|\|f(j)\|$$

Si l'un des vecteurs $f(i)$, $f(j)$, $f(k)$ est nul alors ces 3 vecteurs sont nuls et donc $f = 0$. Si les 3 vecteurs sont non nuls, on tire des 3 dernières relations que :

$$\|f(i)\| = \|f(j)\| = \|f(k)\| = 1$$

Comme de plus $f(i) = f(j) \wedge f(k)$, la famille $(f(i), f(j), f(k))$ est une base orthonormée directe. On a donc $f \in \mathrm{SO(E)}$. Réciproquement, si $f = 0$ ou $f \in \mathrm{SO(E)}$, alors f vérifie bien la condition de l'énoncé puisque les applications $(u, v) \mapsto f(u \wedge v)$ et $(u, v) \mapsto f(u) \wedge f(v)$ sont bilinéaires et que ces deux applications coïncident sur une base orthonormée directe. L'ensemble des endomorphismes recherché est donc $\mathrm{SO(E)} \cup \{0\}$.

2. Tout le raisonnement précédent reste valable à l'exception près que $f(i) = -f(j) \wedge f(k)$ et la famille $(f(i), f(j), f(k))$ est donc une base orthonormée indirecte. f est donc soit l'endomorphisme nul soit une isométrie indirecte. L'ensemble recherché est donc $(\mathrm{O(E)} \setminus \mathrm{SO(E)}) \cup \{0\}$.

Solution 16

Notons P le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$. On a $\mathrm{P} = \{(3z - 2y, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{vect}((-2, 1, 0), (3, 0, 1))$. Notons $u_1 = (-2, 1, 0)$ et $u_2 = (3, 0, 1)$. Notons s la symétrie de l'énoncé. On va déterminer les images des vecteurs de la base canonique par s. Un vecteur normal à P est $n = u_1 \wedge u_2 = (1, 2, -3)$. Le projeté orthogonal d'un vecteur u sur $\mathrm{P}^\perp = \mathrm{vect}(n)$ est donc $p(u) = \dfrac{\langle u, n\rangle}{\|n\|^2} n$. On a alors $s(u) = u - 2p(u) = u - 2\dfrac{\langle u, n\rangle}{\|n\|^2} n$. Il suffit alors d'appliquer à $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. On trouve

$$s(e_1) = \frac{1}{7}(6, -2, 3) \qquad s(e_2) = \frac{1}{7}(-2, 3, 6) \qquad s(e_3) = \frac{1}{7}(3, 6, -2)$$

La matrice de s dans la base canonique est donc $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Solution 17

Notons $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3$ les lignes de A. La matrice A est une matrice de rotation si et seulement si la famille $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3)$ est orthonormale et si $\det \mathrm{A} = 1$.

La condition $\|\mathrm{L}_1\| = 1$ équivaut à $a^2 = \dfrac{1}{6}$ i.e. $a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

La condition $\|\mathrm{L}_2\| = 1$ équivaut à $b^2 = \dfrac{2}{3}$ i.e. $b = \pm\dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

La condition $\|\mathrm{L}_3\| = 1$ équivaut à $c^2 = \dfrac{1}{6}$ i.e. $c = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

La condition $\langle \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2\rangle = 0$ équivaut à $ab = -\dfrac{1}{3}$.

La condition $\langle \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_3\rangle = 0$ équivaut à $ac = \dfrac{1}{6}$.

La condition $\langle \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3\rangle = 0$ équivaut à $bc = -\dfrac{1}{6}$.

La condition $\det \mathrm{A} = 1$ équivaut à $-a + 2b - c = \sqrt{6}$.

Toutes ces conditions équivalent à $\begin{cases} a = \varepsilon\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ b = -\varepsilon\dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ d\mathrm{C} = \varepsilon\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ -a + 2b - c = \sqrt{6} \\ \varepsilon = \pm 1 \end{cases}$. On trouve $\varepsilon = -1$ puis $a = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $b = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$, $c = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Solution 18

1. Soient s une réflexion de E, (u, v) une base de E, et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ la matrice de s dans la base (u, v). Recherchons l'axe de s.

Les vecteurs de l'axe sont les vecteurs de matrice colonne X dans la base (u, v) vérifiant AX = X. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} AX = X &\iff \begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta = x \\ x\sin\theta - y\cos\theta = y \end{cases} \iff \begin{cases} x(\cos\theta - 1) + y\sin\theta = 0 \\ x\sin\theta - y(\cos\theta + 1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x\sin^2\frac{\theta}{2} + 2y\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 0 \\ 2x\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 2y\cos^2\frac{\theta}{2} = 0 \end{cases} \iff x\sin\frac{\theta}{2} - y\cos\frac{\theta}{2} = 0 \end{aligned}$$

La dernière équivalence est justifiée par le fait que $\sin\frac{\theta}{2}$ et $\cos\frac{\theta}{2}$ ne peuvent être simultanément nuls. Un vecteur directeur de l'axe est donc $\cos\frac{\theta}{2}u + \sin\frac{\theta}{2}v$. On en déduit que $\frac{\theta}{2}$ est l'angle orienté de droites entre l'axe des abscisses i.e. $\operatorname{vect}(u)$ et l'axe de la réflexion s (modulo π puisqu'il s'agit d'un angle orienté de droites).

2. Soit s_1 et s_2 deux réflexions de E. On peut choisir une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E de telle sorte que la matrice de s_1 dans cette base soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice de s_2 dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. La matrice de $s_1 + s_2$ dans $\mathcal{B}$ est donc $A = \begin{pmatrix} 1+\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -1-\cos\theta \end{pmatrix}$. $s_1 + s_2$ est une réflexion si et seulement si la matrice A est orthogonale de déterminant -1. Ceci nous donne donc les conditions

$$\begin{cases} (1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 1 \\ \sin^2\theta + (-1-\cos\theta)^2 = 1 \\ (1+\cos\theta)(-1-\cos\theta) - \sin^2\theta = -1 \end{cases}$$

Un rapide calcul montre que chacune des équations de ce système équivaut à $2\cos\theta = -1$ i.e. $\theta \equiv \pm\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$. On a donc $\frac{\theta}{2} \equiv \pm\frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$. Avec notre choix de base, l'axe de s_1 est l'axe des abscisses. A l'aide de la première question, on peut donc conclure que $s_1 + s_2$ est une réflexion si et seulement si l'angle non orienté de droites entre l'axe de s_1 et l'axe de s_2 vaut $\frac{\pi}{3}$.

Solution 19

---

1. Soient $y \in \operatorname{Im} v$ et $z \in \operatorname{Ker} v$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = v(x)$ i.e. $y = x - u(x)$. On a également $v(z) = 0_E$ i.e. $z = u(z)$.

$$(y|z) = (x - u(x)|z) = (x|z) - (u(x)|z) = (x|z) - (u(x)|u(z)) = 0$$

car u conserve le produit scalaire. On a donc prouvé que $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont orthogonaux.
En particulier, ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe. De plus, d'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} v + \dim \operatorname{Im} v = \dim E$, donc $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont supplémentaires.

2. Une composée d'automorphismes orthogonaux est un automorphisme orthogonal.

Solution 20

---

1. L'application Φ est clairement symétrique. Elle est bilinéaire par linéarité de l'intégrale. Elle est positive par positivité de l'intégrale. Enfin, soit $f \in E$ telle que $\Phi(f, f) = 0$. On a donc $\int_0^1 f(t)^2 \, dt = 0$. Comme l'application f^2 est positive et continue sur $[0, 1]$, elle est nulle sur $[0, 1]$. Par conséquent, f est également nulle sur $[0, 1]$. De plus, f est une combinaison linéaire des fonctions 1-périodiques e_1, e_2, e_3. Donc f est aussi 1-périodique. Elle est alors nulle sur $\mathbb{R}$. L'application Φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire.

2. Les calculs sont élémentaires :

$$\begin{aligned}
\|e_1\|^2 &= 2\int_0^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = 1\\
\|e_2\|^2 &= 2\int_0^1 \cos^2(2\pi t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1+\cos(4\pi t))\,\mathrm{d}t = 1\\
\|e_3\|^2 &= 2\int_0^1 \sin^2(2\pi t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-\cos(4\pi t))\,\mathrm{d}t = 1\\
\langle e_1, e_2\rangle &= \sqrt{2}\int_0^1 \cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t = 0\\
\langle e_1, e_3\rangle &= \sqrt{2}\int_0^1 \sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t = 0\\
\langle e_2, e_3\rangle &= 2\int_0^1 \sin(2\pi t)\cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sin(4\pi t)\,\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}$$

La base (e_1, e_2, e_3) est donc orthonormée.

3. **a.** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f_1, f_2 \in \mathrm{E}$. $\tau_x(\lambda f_1 + \mu f_2)$ est l'application $t \mapsto (\lambda f_1 + \mu f_2)(x-t)$, c'est-à-dire l'application $t \mapsto \lambda f_1(x-t) + \mu f_2(x-t)$ i.e. l'application $\lambda\tau_x(f_1) + \mu\tau_x(f_2)$. Ainsi τ_x est linéaire.
De plus, $\tau_x(e_1) = e_1$. De plus, pour $x, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi(x-t)) &= \cos(2\pi x)\cos(2\pi t) + \sin(2\pi x)\sin(2\pi t)\\
\sin(2\pi(x-t)) &= \sin(2\pi x)\cos(2\pi t) - \cos(2\pi x)\sin(2\pi t)
\end{aligned}$$

Autrement dit, $\tau_x(e_2) = \cos(2\pi x)e_2 + \sin(2\pi x)e_3$ et $\tau_x(e_3) = \sin(2\pi x)e_2 - \cos(2\pi x)e_3$. Donc $\tau_x(e_1)$, $\tau_x(e_2)$ et $\tau_x(e_3)$ appartiennent à $\operatorname{vect}(e_1, e_2, e_3) = \mathrm{E}$. Comme (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de E, on en déduit que $\tau_x(f) \in \mathrm{E}$ pour tout $f \in \mathrm{E}$. Ainsi f est bien un endomorphisme de E.

b. Les calculs précédents montrent que la matrice de τ_x dans la base (e_1, e_2, e_3) est $\mathrm{M}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi x) & \sin(2\pi x) \\ 0 & \sin(2\pi x) & -\cos(2\pi x) \end{pmatrix}$.

c. On vérifie sans peine que M_x est orthogonale. Comme M_x est la matrice de τ_x dans une base orthonormale, on en déduit que τ_x est un automorphisme orthogonal.

d. On a $\det \mathrm{M} = -1$ donc τ_x est une isométrie vectorielle indirecte. Comme $\dim \mathrm{E} = 3$, τ_x est une réflexion ou une anti-rotation.
Cherchons les vecteurs invariants par τ_x. On résout le système $\mathrm{MX} = \mathrm{X}$ où $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{MX} = \mathrm{X} &\iff \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2\cos(2\pi x) + x_3\sin(2\pi x) = x_2 \\ x_2\sin(2\pi x) - x_3\cos(2\pi x) = x_3 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x_2(\cos(2\pi x) - 1) + x_3\sin(2\pi x) = 0 \\ x_2\sin(2\pi x) - x_3(1+\cos(2\pi x)) = 0 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} -2x_2\sin^2(\pi x) + 2x_3\sin(\pi x)\cos(\pi x) = 0 \\ 2x_2\sin(\pi x)\cos(\pi x) - 2x_3\cos^2(\pi x) = 0 \end{cases}\\
&\iff x_2\sin(\pi x) - x_3\cos(\pi x) = 0
\end{aligned}$$

Le sous-espace des vecteurs invariants par τ_x est donc le plan P_x d'équation $x_2\sin(\pi x) - x_3\cos(\pi x) = 0$ dans la base (e_1, e_2, e_3). τ_x est donc une réflexion. On peut également définir P_x par $\mathrm{P}_x = \operatorname{vect}(e_1, \cos(\pi x)e_2 + \sin(\pi x)e_3)$.

Solution 21

Notons r la rotation de l'énoncé. La droite $\mathcal{D}$ d'équation $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}(0,0,1)$. L'image de $\mathcal{D}$ par r est une droite dirigée par $r(\vec{u})$. Notons $\vec{b} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$. Le vecteur $\vec{b}$ a donc pour coordonnées $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Notons Δ l'axe de la rotation. Le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur Δ est $\vec{v} = (\vec{u}.\vec{b})\vec{b}$. Le vecteur $\vec{v}$ a donc pour coordonnées $\dfrac{1}{3}(1,1,1)$. On a alors $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{w} \in \Delta^\perp$. Le vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées $\dfrac{1}{3}(-1,-1,2)$. Mais alors $r(\vec{u}) = r(\vec{v}) + r(\vec{w}) = \vec{v} + r(\vec{w})$ car $\vec{v} \in \Delta$. Comme $\vec{w} \in \Delta^\perp$, $r(\vec{w}) = \cos\dfrac{\pi}{6}\vec{w} + \sin\dfrac{\pi}{6}\vec{b} \wedge \vec{w}$. Après calcul, le vecteur $r(\vec{w})$ admet pour coordonnées $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(0,-1,1)$. Ainsi $r(\vec{u})$ admet donc pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Solution 22

1. Les vecteurs $\vec{a}(1,1,1)$ et $\vec{b}(1,-1,0)$ sont des vecteurs du plan d'équation $x + y - 2z = 0$. Le vecteur $\vec{c}(1,1,-2)$ est normal à ce plan. On vérifie que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux. Posons $\vec{u}_1 = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$, $\vec{u}_2 = \dfrac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ et $\vec{u}_3 = \dfrac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}$. La famille (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormale de E et dans cette base, la matrice de s_1 est $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice de (u_1, u_2, u_3) dans la base canonique est $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. La matrice de s_1 dans la base canonique est donc $\mathrm{M}_1 = \mathrm{PMP}^\mathsf{T} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Notons A la matrice de l'énoncé. A est clairement orthogonale et, en développant par rapport à la première ligne, $\det \mathrm{A} = 1$. f est donc une rotation. On a clairement $f(\vec{a}) = \vec{a}$ donc l'axe de f est $\mathrm{vect}(\vec{a})$. Notons θ l'angle de f si on dirige l'axe par $\vec{a}$. On a $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 1 + 2\cos\theta = 0$ donc $\theta \equiv \pm\dfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$. De plus, on a vu que $\vec{b}$ est orthogonal à $\vec{a}$ et, si $\mathcal{B}$ désigne la base canonique, $\det_{\mathcal{B}}(\vec{b}, f(\vec{b}), \vec{a}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0$ donc $\sin\theta > 0$. On en déduit $\theta \equiv \dfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

   Remarque. On peut raisonner plus géométriquement. Si on note $\mathrm{A}(1,0,0)$, $\mathrm{B}(0,1,0)$, $\mathrm{C}(0,0,1)$ la rotation affine d'axe $\mathrm{O} + \mathrm{vect}(\vec{a})$ associée à f effectue une permutation circulaire des trois points A, B, C. Comme le vecteur $\vec{a}$ est normal au plan ABC, la restriction de la rotation à ce plan est une rotation plane d'angle θ. Il est alors évident que $\theta \equiv \dfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

3. Il suffit de poser $s_2 = s_1 \circ f$ et $s_3 = f \circ s_1$. Les matrices de s_2 et s_3 dans la base canonique sont donc respectivement $\mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_1\mathrm{A} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M}_3 = \mathrm{AM}_1 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. On trouve les plans plans de réflexions de s_2 et s_3 en résolvant $\mathrm{M}_2\mathrm{X} = \mathrm{X}$ et $\mathrm{M}_3\mathrm{X} = \mathrm{X}$ avec $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On trouve pour s_2 le plan d'équation $2x - y - z = 0$ et pour s_3 le plan d'équation $2y - x - z = 0$.

Solution 23

Supposons que f est une symétrie orthogonale. Alors f est un automorphisme orthogonal et donc A est orthogonale i.e. $\mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$. De plus, f est une symétrie donc $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n$. On en déduit que $\mathrm{A}^\mathsf{T} = \mathrm{A}$ et donc A est symétrique. Réciproquement, supposons A orthogonale et symétrique. Alors f est un automorphisme orthogonal. Or $\mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{A}^\mathsf{T} = \mathrm{A}$ donc $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n$ et f est une symétrie. Il est alors classique de montrer que f est une symétrie orthogonale.

Solution 24

f et g sont deux rotations. Si l'une des deux est l'identité, alors on peut toujours considérer que f et g sont deux rotations de même axe.
Supposons maintenant f et g distinctes de l'identité. Soit u un vecteur directeur de l'axe de f. Comme f et g commutent, $f(g(u)) = g(f(u)) = g(u)$. Donc $g(u)$ appartient à l'axe de f, c'est-à-dire $\text{vect}(u)$. Mais comme g est une isométrie, $\|g(u)\| = \|u\|$ et donc $g(u) = u$ ou $g(u) = -u$.
Si $g(u) = u$, alors u est un vecteur de l'axe de g. f et g sont donc deux rotations de même axe.
Si $g(u) = -u$, notons v un vecteur directeur de l'axe de g de sorte que $g(v) = v$. Puisque g est une isométrie $\langle g(u), g(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ et donc $\langle u, v\rangle = 0$. Les axes de f et g sont donc orthogonaux. Comme $g(u) = -u$, g est une rotation d'angle π autrement dit une symétrie orthogonale par rapport à son axe. On a également $g(f(v)) = f(v)$ donc $f(v)$ appartient à l'axe de g et on a à nouveau $f(v) = v$ ou $f(v) = -v$. On ne peut avoir $f(v) = v$ puisque v n'appartient pas à l'axe de f (il lui est orthogonal et non nul). Ainsi $f(v) = -v$, ce qui prouve que f est une rotation d'angle π donc une symétrie orthogonale par rapport à son axe.

Solution 25

1. Soit $(x, y) \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \times \text{Im}(f - \text{Id}_E)$. Alors $f(x) = x$ et il existe $a \in E$ tel que $y = f(a) - a$. Alors

$$\langle x, y\rangle = \langle x, f(a) - a\rangle = \langle x, f(a)\rangle - \langle x, a\rangle = \langle f(x), f(a)\rangle - \langle x, a\rangle = 0$$

car $f \in O(E)$. Ainsi $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Im}(f - \text{Id}_E)^{\perp}$.
De plus, d'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \dim E - \dim \text{Im}(f - \text{Id}_E) = \dim \text{Im}(f - \text{Id}_E)^{\perp}$$

Par conséquent, $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Im}(f - \text{Id}_E)^{\perp}$.

2. Supposons que $(f - \text{Id}_E)^2 = 0$. Alors $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$. D'après la question précédente, on a donc $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Im}(f - \text{Id}_E)^{\perp}$. Il est à peu près clair que, si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $F \subset F^{\perp}$, alors $F = \{0_E\}$ (tout vecteur de F est orthogonal à lui-même). Ainsi $\text{Im}(f - \text{Id}_E) = \{0_E\}$ i.e. $f = \text{Id}_E$.

Solution 26

Comme O est orthogonale, $O^{\top}O = I_n$. On en déduit en particulier,

$$A^{\top}A + C^{\top}C = I_p \qquad A^{\top}B + C^{\top}D = 0$$
$$B^{\top}B + D^{\top}D = I_q \qquad B^{\top}A + D^{\top}C = 0$$

- Si $\det A = \det D = 0$, alors on a bien l'inégalité demandée.
- Si $\det D \neq 0$, posons $M = \left(\begin{array}{c|c} A^{\top} & C^{\top} \\ \hline \mathbf{0} & D^{\top} \end{array}\right)$ et $N = MO = \left(\begin{array}{c|c} I_p & \mathbf{0} \\ \hline D^{\top}C & D^{\top}D \end{array}\right)$. Les matrices M et N étant triangulaires par blocs, on a $\det M = \det(A^{\top})\det(D^{\top}) = \det A \det D$ et $\det N = \det I_p \det(D^{\top}D) = (\det D)^2$. De plus, $\det N = \det(MO) = \det M \det O$. On en déduit que $(\det D)^2 = \det A \det D \det O$. Puisque $\det D \neq 0$, $\det D = \det A \det O$ et donc $(\det D)^2 = (\det A)^2(\det O)^2$. Or O est orthogonale donc $\det O = \pm 1$ et $(\det O)^2 = 1$. On a bien l'égalité demandée.
- Si $\det A \neq 0$, posons $M = \left(\begin{array}{c|c} A^{\top} & \mathbf{0} \\ \hline B^{\top} & D^{\top} \end{array}\right)$ et $N = MO = \left(\begin{array}{c|c} A^{\top}A & A^{\top}B \\ \hline \mathbf{0} & I_q \end{array}\right)$. Les matrices M et N étant triangulaires par blocs, on a $\det M = \det(A^{\top})\det(D^{\top}) = \det A \det D$ et $\det N = \det(A^{\top}A)\det I_q = (\det A)^2$. De plus, $\det N = \det(MO) = \det M \det O$. On en déduit que $(\det A)^2 = \det A \det D \det O$. Puisque $\det A \neq 0$, $\det A = \det D \det O$ et donc $(\det A)^2 = (\det D)^2(\det O)^2$. On conclut comme précédemment en remarquant que $(\det O)^2 = 1$.

Solution 27

On a $B = P^{-1}AP$ où P est une matrice de passage entre deux bases orthonormales. P est donc une matrice orthogonale. On a donc $P^{-1} = P^{\top}$ puis $B = P^{\top}AP$. Ainsi

$$\text{tr}(B^{\top}B) = \text{tr}(P^{\top}A^{\top}PP^{\top}AP = \text{tr}(P^{\top}A^{\top}AP) = \text{tr}((P^{\top}A^{\top}A)P) = \text{tr}(P(P^{\top}A^{\top}A)) = \text{tr}(A^{\top}A)$$

Solution 28

1. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Alors $X^\top X$ est une matrice carrée réelle de taille 1 i.e. un réel et $X^\top X = \sum_{k=1}^n x_k^2$. Ainsi $X^\top X \geq 0$ puisque les x_k sont des réels et $X^\top X = 0$ implique $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = 0$ i.e. $X = 0$.

2. Soit $X \in \operatorname{Ker}(I_n + M)$. On a donc $(I_n + M)X = 0$ i.e. $MX = -X$. Ainsi $X^\top MX = -X^\top X$. Mais en transposant l'égalité $MX = -X$, on obtient $X^\top M^\top = -X^\top$ et donc $X^\top M = X^\top$ puisque $M^\top = -M$. Ainsi $X^\top MX = X^\top X$. Par conséquent, $X^\top X = -X^\top X$ et donc $X^\top X = 0$. D'après la question précédente, $X = 0$. D'où $\operatorname{Ker}(I_n + M) = \{0\}$ et $I_n + M$ est inversible.

3. On a $A^\top A = \left((I_n + M)^{-1}\right)^\top (I_n - M)^\top (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Or
$$\left((I_n + M)^{-1}\right)^\top = \left((I_n + M)^\top\right)^{-1} = (I_n - M)^{-1} \quad \text{et} \quad (I_n - M)^\top = I_n + M$$
Ainsi $A^\top A = (I_n - M)^{-1}(I_n + M)(I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Or $I_n - M$ et $I_n + M$ commutent donc
$$A^\top A = (I_n - M)^{-1}(I_n - M)(I_n + M)(I_n + M)^{-1} = I_n$$
Ainsi A est orthogonale.

Solution 29

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ laissant $(\mathbb{R}_+)^n$ invariant. On notera $(C_j)_{1 \leq j \leq n}$ la famille des vecteurs colonnes de A et $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ la famille des vecteurs lignes de A. Notons $(E_i)_{1 \leq j \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme $E_i \in (\mathbb{R}_+)^n$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $C_i = AE_i \in (\mathbb{R}_+)^n$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Autrement dit A est à coefficients positifs.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Supposons $A_{ij} \neq 0$, c'est-à-dire $A_{ij} > 0$ puisque A est à coefficients positifs. Soit $k \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$.
$$\langle L_i, L_k \rangle = \sum_{l=1}^n A_{il} A_{kl} \geq A_{ij} A_{kj}$$
car A est à coefficients positifs. Or la famille des vecteurs lignes de A est orthonormée donc $\langle L_i, L_k \rangle = 0$. On en déduit que $A_{kj} = 0$. En raisonnnant sur les colonnes de A, on démontre de la même manière que pour $k \in [\![1, n]\!], \setminus \{j\}$, $A_{ik} = 0$.
Ceci signifie que chaque ligne et chaque colonne comporte au plus un coefficient non nul. Puisque les vecteurs lignes et colonnes de A sont normés, chaque ligne et chaque colonne possède exactement un coefficient non nul valant ± 1, en fait 1 car A est à coefficients positifs. Ainsi A est une matrice de permutation.
Réciproquement, toute matrice de permutation est bien orthogonale et laisse stable $(\mathbb{R}_+)^n$.

Solution 30

Supposons $A = 0$. Alors il est clair que $A = \operatorname{com}(A) = 0$.
Supposons $A \in SO(n)$. On sait que $\operatorname{com}(A)A^\top = \det(A)I_n$. Puisque $A \in SO(n)$, $\det(A) = 1$ et $A^\top = A^{-1}$. Il s'ensuit que $\operatorname{com}(A) = A$.
Supposons maintenant $A = \operatorname{com}(A)$. Puisque $\operatorname{com}(A)^\top A = \det(A)I_n$, $A^\top A = \det(A)I_n$.

- Si $\det(A) = 0$, $A^\top A = 0$ et, a fortiori, $\operatorname{tr}(A^\top A) = 0$ et donc $A = 0$ puisque $(M, N) \mapsto \operatorname{tr}(M^\top N)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si $\det(A) \neq 0$, alors $\operatorname{tr}(A^\top A) = \operatorname{tr}(\det(A)I_n) = n \det A$. En particulier, $\det(A) > 0$ à nouveau car $(M, N) \mapsto \operatorname{tr}(M^\top N)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par ailleurs, $\det(A^\top A) = \det(\det(A)I_n)$ ou encore $\det(A)^2 = \det(A)^n$. Puisque $n \neq 2$ et $\det(A) > 0$, $\det(A) = 1$. Ainsi $A^\top A = I_n$ et $A \in SO(n)$.

Optimisation

Solution 31

Soit $E = \mathcal{C}([0; \pi], \mathbb{R})$. On munit E du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^\pi f(x)g(x)\, dx$.On pose pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
$$f_{a,b} : \begin{cases} [0, \pi] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto ax^2 + bx \end{cases}$$

et

$$\mathrm{F} = \left\{f_{a,b},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{vect}(f_1, f_2)$$

avec $f_1 = f_{0,1}$ et $f_2 = f_{1,0}$. F est un sous-espace vectoriel de E et $\phi(a,b) = \|\sin - f_{a,b}\|^2$. Le minimum de ϕ est donc atteint quand $f_{a,b}$ est la projection orthogonale de sin sur F et vaut alors $d(x, \mathrm{F})^2 = \|\sin - p_\mathrm{F}(\sin)\|^2$ où p_F est la projection orthogonale sur F.

Première méthode

On utilise le procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour orthonormaliser la famille (f_1, f_2). On pose donc $e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|}$ et $e_2 = \dfrac{g}{\|g\|}$ avec $g = f_2 - \langle f_2, e_1\rangle e_1$. Alors $p_\mathrm{F}(\sin) = \langle \sin, e_1\rangle e_1 + \langle \sin, e_2\rangle e_2$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}
\|\sin - p_\mathrm{F}(\sin)\|^2 &= \|\sin\|^2 - \|p_\mathrm{F}(\sin)\|^2 \\
&= \|\sin\|^2 - \langle \sin, e_1\rangle^2 - \langle \sin, e_2\rangle^2 \\
&= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1\rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{\langle \sin, g\rangle^2}{\|g\|^2} \\
&= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1\rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{\left(\langle \sin, f_2\rangle - \langle f_2, e_1\rangle\langle \sin, e_1\rangle\right)^2}{\|f_2\|^2 - \langle f_2, e_1\rangle^2} \\
&= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1\rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{\left(\langle \sin, f_2\rangle - \frac{\langle f_2, f_1\rangle\langle \sin, f_1\rangle}{\|f_1\|^2}\right)^2}{\|f_2\|^2 - \frac{\langle f_2, f_1\rangle^2}{\|f_1\|^2}} \\
&= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1\rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{\left(\|f_1\|^2\langle \sin, f_2\rangle - \langle f_2, f_1\rangle\langle \sin, f_1\rangle\right)^2}{\|f_1\|^2\left(\|f_1\|^2\|f_2\|^2 - \langle f_2, f_1\rangle^2\right)}
\end{aligned}$$

A l'aide éventuellement d'intégrations par parties, on trouve

$$\|\sin\|^2 = \frac{\pi}{2} \qquad \|f_1\|^2 = \frac{\pi^3}{3} \qquad \|f_2\|^2 = \frac{\pi^5}{5} \qquad \langle f_1, f_2\rangle = \frac{\pi^4}{4} \qquad \langle \sin, f_1\rangle = \pi \qquad \langle \sin, f_2\rangle = \pi^2 - 4$$

On trouve finalement

$$\min_{\mathbb{R}^2} \phi = d(x, \mathrm{F})^2 = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5}$$

Seconde méthode

On sait qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p_\mathrm{F}(\sin) = af_2 + bf_1$. De plus, $\sin - p_\mathrm{F}(\sin) \in \mathrm{F}^\perp = \mathrm{vect}(f_1, f_2)^\perp$ donc

$$\begin{cases} \langle \sin - p_\mathrm{F}(\sin), f_1\rangle = 0 \\ \langle \sin - p_\mathrm{F}(\sin), f_2\rangle = 0 \end{cases}$$

Ceci équivaut à

$$\begin{cases} a\langle f_2, f_1\rangle + b\|f_1\|^2 = \langle \sin, f_1\rangle \\ a\|f_2\|^2 + b\langle f_1, f_2\rangle = \langle \sin, f_2\rangle \end{cases}$$

Or on a trouvé précédemment que

$$\|f_1\|^2 = \frac{\pi^3}{3} \qquad \|f_2\|^2 = \frac{\pi^5}{5} \qquad \langle f_1, f_2\rangle = \frac{\pi^4}{4} \qquad \langle \sin, f_1\rangle = \pi \qquad \langle \sin, f_2\rangle = \pi^2 - 4$$

Ainsi

$$\begin{cases} \dfrac{\pi^4}{4}a + \dfrac{\pi^3}{3}b = \pi \\ \dfrac{\pi^5}{5}a + \dfrac{\pi^4}{4}b = \pi^2 - 4 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$a = \frac{20}{\pi^3} - \frac{320}{\pi^5} \qquad\qquad b = -\frac{12}{\pi^2} + \frac{240}{\pi^4}$$

A nouveau en vertu du théorème de Pythagore

$$\begin{aligned}\|\sin - p_F(\sin)\|^2 &= \|\sin\|^2 - \|p_F(\sin)\|^2 \\ &= \|\sin\|^2 - \|af_2 + bf_1\|^2 \\ &= \|\sin\|^2 - a^2\|f_2\|^2 - 2ab\langle f_1, f_2\rangle - b^2\|f_1\|^2 \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5}\end{aligned}$$

Solution 32

1. E est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0. Elle admet une borne inférieure.

2. Si $(\mathcal{S})$ admet une solution, alors $K = 0$. Les pseudo-solutions de $(\mathcal{S})$ sont donc les éléments X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\|AX - B\|^2 = 0$ i.e. tels que $AX - B = 0$. Ce sont donc les solutions de $(\mathcal{S})$.

3. **Première méthode**
   Puisque $\{AX, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\} = \operatorname{Im} A$, on peut affirmer que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si AX est la projection de B sur Im A. Or AX est la projection de B sur Im A si et seulement si $AX - B$ est orthogonal à Im A. Or $AX - B$ est orthogonal à Im A si et seulement si il est orthogonal à chaque colonne de A puisque les colonnes de A engendrent Im A. Ainsi $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $A^\top(AX - B) = 0$ i.e. si et seulement si X est solution de $(\mathcal{S}')$.
   Seconde méthode
   Supposons que X soit solution de $(\mathcal{S}')$ i.e. $A^\top(AX - B) = 0$. Alors pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

   $$\begin{aligned}\|AY - B\|^2 &= \|A(Y - X) + AX - B\|^2 \\ &= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 + 2\langle A(Y - X), AX - B\rangle \\ &= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 + 2(Y - X)^\top A^\top(AX - B) \\ &= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 \geq \|AX - B\|^2\end{aligned}$$

   Ainsi X est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$.
   Supposons que X soit pseudo-solution de $(\mathcal{S})$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

   $$\|A(X + \lambda Y) - B\|^2 \geq \|AX - B\|^2$$

   ou encore

   $$\|(AX - B) + \lambda AY\|^2 \geq \|AX - B\|^2$$

   ce qui donne via une identité remarquable

   $$2\lambda\langle AY, AX - B\rangle + \lambda^2\|AY\|^2 \geq 0$$

   Si on fixe Y, la dernière inégalité étant vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a nécessairement $\langle AY, AX - B\rangle = 0$. Ainsi pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle AY, AX - B\rangle = 0$ ou encore $\langle Y, A^\top(AX - B) = 0$, ce qui prouve que $A^\top(AX - B) = 0$ et que X est solution de $(\mathcal{S}')$.

4. Soit $X \in \operatorname{Ker} A$. On a donc $AX = 0$ puis $A^\top AX = 0$ donc $X \in \operatorname{Ker} A^\top A$. Ainsi $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^\top A$.
   Soit maintenant $X \in \operatorname{Ker} A^\top A$. On a donc $A^\top AX = 0$ puis $X^\top A^\top AX = 0$. Notons $Y = AX$. Ainsi $Y^\top Y = 0$ i.e. $\|Y\|^2 = 0$ donc $Y = 0$ i.e. $AX = 0$. D'où $X \in \operatorname{Ker} A$. Ainsi $\operatorname{Ker} A^\top A \subset \operatorname{Ker} A$.
   Finalement, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^\top A$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top A$ via le théorème du rang.

5. Si $\operatorname{rg}(A) = n$, alors $\operatorname{rg}(A^\top A) = n$. La matrice $A^\top A$ est une matrice carrée de taille n et de rang n le système $(\mathcal{S}')$ est donc de Cramer : il admet une unique solution i.e. $(\mathcal{S})$ admet une unique pseudo-solution.

Solution 33

Comme E est ouvert, un minimum de f est forcément un minimum local et donc un point critique. Pour $x \in E$, $\nabla f(x) = 2\sum_{i=1}^{p}(x - x_i)$. L'unique point critique de f sur E est donc $m = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_i$. Il suffit donc de vérifier que m est bien un minimum : il sera nécessairement unique.

Pour $x \in \mathrm{E}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{p} \|x - m + m - x_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\|x-m\|^2 + 2\langle x-m, m-x_i\rangle + \|m-x_i\|^2\right) \\ &= p\|x-m\|^2 + f(m) + \left\langle x-m, \sum_{i=1}^{p} m - x_i \right\rangle \\ &= p\|x-m\|^2 + f(m) \geq f(m) \end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^{p} m - x_i = 0$. Ceci prouve que f atteint bien son minimum en m.

Solution 34

Pour $x \in \mathrm{E}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{p} \|x - m + m - x_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\|x-m\|^2 + 2\langle x-m, m-x_i\rangle + \|m-x_i\|^2\right) \\ &= p\|x-m\|^2 + f(m) + \left\langle x-m, \sum_{i=1}^{p} m - x_i \right\rangle \\ &= p\|x-m\|^2 + f(m) \geq f(m) \end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^{p} m - x_i = 0$. Ceci prouve que f atteint bien son minimum en m.

Solution 35

1. Remarquons que l'intégrale définissant $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle$ est bien définie car $\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)e^{-t^2} \underset{t\to\pm\infty}{=} o(1/t^2)$.

(i) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est clairement symétrique.

(ii) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bilinéaire par linéarité de l'intégrale.

(iii) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est positive par positivité de l'intégrale.

(iv) Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\langle \mathrm{P}, \mathrm{P}\rangle = 0$. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(t)^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$. Comme $t \mapsto \mathrm{P}(t)e^{-t^2}$ est continue, elle est nulle sur $]-\infty,+\infty[$. Par conséquent, P admet une infinité de racines (tous les réels) puis $\mathrm{P} = 0$.

Ainsi $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

2. Remarquons que $t \mapsto t^{2n+1}e^{-t^2}$ est impaire donc $\mathrm{A}_{2n+1} = 0$.
Par intégration par parties

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{n+1} \left[t^{n+1}e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2}{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \right)$$

L'intégration par parties est légitimée par le fait que $\lim_{t\to\pm\infty} t^{n+1}e^{-t^2} = 0$. On en déduit que

$$\mathrm{A}_n = \frac{2}{n+1}\mathrm{A}_{n+2}$$

ou encore

$$\mathrm{A}_{n+2} = \frac{n+1}{2}\mathrm{A}_n$$

Comme $\mathrm{A}_0 = 1$, on en déduit que

$$\mathrm{A}_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$$

3. On peut orthonormaliser la base canonique $(1, X, X^2)$ via le processus de Gram-Schmidt.

Remarque. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un espace euclidien E, on peut l'orthonormaliser en une base orthonormée en posant

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ f_k = \frac{e_k - \sum_{i=0}^{k-1}\langle f_i, e_k\rangle f_i}{\left\|e_k - \sum_{i=0}^{k-1}\langle f_i, e_k\rangle f_i\right\|} = \frac{e_k - \sum_{i=0}^{k-1}\langle f_i, e_k\rangle f_i}{\sqrt{\|e_k\|^2 - \sum_{i=0}^{k-1}\langle f_i, e_k\rangle^2}}$$

(i) $\|1\|^2 = A_0 = 1$ donc on pose $P_0 = 1$.

(ii) $\langle 1, X\rangle = A_1 = 0$ et $\|X\|^2 = A_2 = \frac{1}{2}$ donc on pose $P_1 = X\sqrt{2}$.

(iii) $\langle 1, X^2\rangle = A_2 = \frac{1}{2}$, $\langle X, X^2\rangle = A_3 = 0$ et $\|X^2\|^2 = A_4 = \frac{3}{4}$ donc on pose $P_2 = \frac{2(2X^2-1)}{\sqrt{5}}$.

(P_0, P_1, P_2) est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

4. Si p désigne le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_2[X]$,

$$\begin{aligned}
d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 &= \|X^3 - p(X^3)\|^2 \\
&= \|X^3\|^2 - \|p(X^3)\|^2 \\
&= \|X^3\|^2 - \langle X^3, P_0\rangle^2 - \langle X^3, P_1\rangle^2 - \langle X^3, P_2\rangle^2 \\
&= A_6 - A_3^2 - 2A_4 \qquad \text{car } X^3P_2 \text{ est impair} \\
&= \frac{15}{8} - \frac{3}{2} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

donc $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Endomorphismes symétriques et matrices symétriques

Solution 36

Remarquons que $\phi = p + q$ où p et q sont les projecteurs orthogonaux respectifs sur $\text{vect}(a)$ et $\text{vect}(b)$. Ainsi ϕ est un endomorphisme symétrique comme somme d'endomorphismes symétriques. En particulier, ϕ est diagonalisable. On va de toute façon s'en rendre compte en déterminant les éléments propres de ϕ.
Remarquons déjà que ϕ est nulle sur $(\text{vect}(a) + \text{vect}(b))^\perp$. Ainsi $(\text{vect}(a) + \text{vect}(b))^\perp \subset \text{Ker}\,\phi$. Réciproquement si $x \in \text{Ker}\,\phi$, $\langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b = 0$ de sorte que $\langle a, x\rangle = \langle b, x\rangle = 0$ car la famille (a, b) est libre. Ainsi $x \in \text{vect}(a)^\perp \cap \text{vect}(b)^\perp = (\text{vect}(a) + \text{vect}(b))^\perp$. Finalement, $\text{Ker}\,\phi = (\text{vect}(a) + \text{vect}(b))^\perp$.
La nature géométrique de ϕ incite fortement à penser que $a+b$ et $a-b$ sont vecteurs propres. En effet, ces deux vecteurs sont non nuls puisque a et b sont non colinéaires et un calcul simple montrer que $\phi(a) = a + \langle a, b\rangle b$ et $\pi(b) = b + \langle a, b\rangle b$ donc $\phi(a+b) = (1 + \langle a, b\rangle)(a+b)$ et $\phi(a-b) = (1-\langle a, b\rangle)(a-b)$. Donc $a+b$ et $a-b$ sont bien des vecteurs propres associés aux valeurs propres $1+\langle a, b\rangle$ et $1-\langle a, b\rangle$. Si $\langle a, b\rangle \neq 0$, ces valeurs propres sont distinctes : les sous-espaces propres associées à ces valeurs propres sont donc de dimension 1 puisqu'on a déjà vu que le noyau i.e. le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 était de dimension $n-2$. Ces sous-espaces propres sont donc respectivement $\text{vect}(a+b)$ et $\text{vect}(a-b)$. Si $\langle a, b\rangle = 0$, alors le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 contient $\text{vect}(a+b, a-b) = \text{vect}(a, b)$ et est en fait exactement égal à celui-ci puisque la diemnsion de $\text{vect}(a, b)$ est 2 et que $\text{Ker}\,\phi$ est déjà de dimension $n-2$.

Récapitulons. Dans tous les cas, 0 est valeur propre de ϕ et le sous-espace propre associé est $(\text{vect}(a) + \text{vect}(b))^\perp$. Si $\langle a, b\rangle \neq 0$, ϕ possède deux valeurs propres supplémentaires $1 + \langle a, b\rangle$ et $1 - \langle a, b\rangle$ et les sous-espaces propres respectivement associés sont $\text{vect}(a+b)$ et $\text{vect}(a-b)$. Si $\langle a, b\rangle = 0$, ϕ possède 1 comme seule valeur propre en sus de 0 et le sous-espace propre associé est $\text{vect}(a, b)$. Il est d'ailleurs géométriquement clair dans ce cas que ϕ induit l'identité sur $\text{vect}(a, b)$.

Solution 37

1. **a.** Supposons que v est positif. Soit λ une valeur propre de v. et x un vecteur propre associé. Ainsi $\langle v(x), x\rangle = \lambda\|x\|^2$. Puisque $\langle v(x), x\rangle \geq 0$ et $\|x\| > 0$ (x n'est pas nul), $\lambda \geq 0$.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+$. Comme v est symétrique, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de v. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs prores associées à ces vecteurs propres. Soit $x \in \mathrm{E}$. Notons $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Alors

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad v(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i v(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$$

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E,

$$\langle v(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq 0$$

car les λ_i sont positifs.

b. Supposons v défini positif. Soit λ une valeur propre de E et x un vecteur propre associé. A nouveau, $\langle v(x), x\rangle = \lambda\|x\|^2$. Mais comme x n'est pas nul, $\langle v(x), x\rangle > 0$ et donc $\lambda > 0$.
Réciproquement, supposons $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+^*$. A fortiori, $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+$ et donc v est positif d'après la question précédente. On considère la même base $(e_1, \dots, e_n)$ de la question précédente. Donnons nous $x \in \mathrm{E}$ tel que $\langle v(x), x\rangle = 0$. A nouveau

$$\langle v(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

Tous les termes de cette somme sont positifs donc $\lambda_i x_i^2 = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Mais les λ_i ne sont pas nuls donc tous les x_i sont nuls. Ainsi $x = 0_{\mathrm{E}}$.

2. **a.** Pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$\langle f(x), x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle^2 \geq 0$$

donc v est positif. Supposons maintenant que $\langle f(x), x\rangle = 0$. Tous les termes de la somme précédente étant poitifs, ils sont tous nuls. Ainsi x est orthogonal à chacun des u_k et donc au sous-espace vectoriel qu'ils engendrent, c'est-à-dire E. Ainsi $x = 0_{\mathrm{E}}$.

b. Considérons une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de E. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées à ces vecteurs propres. Ces valeurs propres sont toutes strictement positives. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, il existe un unique endomorphisme g de E tel que $g(e_i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} e_i$. On a clairement $g^2(e_i) = \frac{1}{\lambda_i} e_i = f^{-1}(e_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $g^2 = f^{-1}$.
Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. Alors

$$\langle g(x), y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \langle x, e_i\rangle\langle y, e_i\rangle = \langle x, g(y)\rangle$$

donc g est symétrique. Les valeurs propres de g sont les réels strictement positifs $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ donc v est défini positif.

c. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$u_i = f(f^{-1}(u_i)) = \sum_{k=1}^{n} \langle f^{-1}(u_i), u_k\rangle u_k$$

Mais comme $(u_1, \dots, u_n)$ est libre, $\langle f^{-1}(u_i), u_k\rangle = \delta_{i,k}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Alors, comme g est symétrique,

$$\langle g(u_i), g(u_j)\rangle = \langle g^2(u_i), u_j\rangle = \langle f^{-1}(u_i), u_j\rangle = \delta_{i,j}$$

Ainsi $(g(u_1), \dots, g(u_n))$ est bien une base orthonormée de E.

Solution 38

D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f. Notons λ_i la valeur propre associée à e_i. Comme $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$, $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on définit bien un endomorphisme g de E en posant $g(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On a alors clairement $g^2(e_i) = \lambda_i e_i = f(e_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on a bien $g^2 = f$.
Enfin, la matrice de g dans la base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ est diagonale donc symétrique : g est donc un endomorphisme symétrique.

Solution 39

Soit $x \in \operatorname{Ker} f$ et $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe donc $z \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(z)$. Ainsi

$$\langle x, y\rangle = \langle x, f(z)\rangle = \langle f(x), z\rangle = \langle 0_{\mathrm{E}}, z\rangle 0$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f \subset (\operatorname{Im} f)^{\perp}$. De plus, $\dim(\operatorname{Im} f)^{\perp} = n - \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f$ d'après le théorème du rang. Ainsi $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$.

Solution 40

Soit S_n l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de norme 1. Pour $\mathrm{A} \in \S_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$, on pose $\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{AX}$.
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe une base orthonormée $(\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle A diagonalise. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, notons λ_i la valeur propre de A associée à E_i. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{S}_n$. Il existe donc $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{E}_i$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. On a alors $\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$. On a alors $\varphi(\mathrm{X}) \leq \left(\max_{i \in [\![1,n]\!]} \lambda_i\right) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \Phi(\mathrm{A})$. De plus, notons j l'indice de la plus grande valeur propre de A, on a alors $\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}_j) = \lambda_j = \Phi(\mathrm{A})$. Par conséquent, $\Phi(\mathrm{A}) = \max_{\mathrm{X} \in \mathrm{S}_n} \varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$.
Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in [0, 1]$.

$$\Phi(\lambda \mathrm{A} + (1-\lambda)\mathrm{B}) = \max_{\mathrm{X} \in \mathrm{S}_n} \varphi_{\lambda\mathrm{A}+(1-\lambda)\mathrm{B}}(\mathrm{X}) = \max_{\mathrm{X} \in \mathrm{S}_n} (\lambda\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) + (1-\lambda)\varphi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X})$$

Puisque $\lambda \geq 0$ et $1 - \lambda \geq 0$, on a pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{S}_n$

$$\lambda\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) + (1-\lambda)\varphi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}) \leq \lambda \max_{\mathrm{X} \in \mathrm{S}_n} \varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) + (1-\lambda) \max_{\mathrm{X} \in \mathrm{S}_n} \varphi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}) = \lambda\Phi(\mathrm{A}) + (1-\lambda)\Phi(\mathrm{B})$$

Il suffit alors de passer au maximum pour $\mathrm{X} \in \mathrm{S}_n$ pour obtenir

$$\Phi(\lambda\mathrm{A} + (1-\lambda)\mathrm{B}) \leq \lambda\Phi(\mathrm{A}) + (1-\lambda)\Phi(\mathrm{B})$$

Autrement dit, Φ est convexe.

Solution 41

Comme A est symétrique, elle diagonalise dans une base orthonormale i.e. il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^{\mathsf{T}}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$ avec D diagonale. Posons $\mathrm{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{P} & \mathrm{P} \\ \hline \mathrm{P} & -\mathrm{P} \end{array}\right)$. On vérifie que $\mathrm{Q} \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})$. De plus, $\mathrm{Q}^{\mathsf{T}}\mathrm{BQ} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{D}+\mathrm{I}_n & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{D}-\mathrm{I}_n \end{array}\right)$. Ceci prouve que B est diagonalisable et que ses valeurs propres sont les $\lambda \pm 1$ où $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.

Solution 42

---

1. Puisque A est réelle symétrique positive, elle est diagonalisable. Notons $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A et λ_i la valeur propre associée au vecteur propre X_i pour chaque i dans $[\![1, n]\!]$.

   Soit X un vecteur propre de A^k associée à une valeur propre λ. Il existe donc $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{X}_i$. Notons I l'ensemble des indices $i \in [\![1, n]\!]$ tels que $\alpha_i \neq 0$ de sorte que $\mathrm{X} = \sum_{i \in \mathrm{I}} \alpha_i \mathrm{X}_i$. Ainsi d'une part

   $$\mathrm{A}^k\mathrm{X} = \sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i^k \alpha_i \mathrm{X}_i$$

   et d'autre part

   $$\mathrm{A}^k\mathrm{X} = \lambda\mathrm{X} = \sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda\alpha_i \mathrm{X}_i$$

   Comme $(\mathrm{X}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une famille libre, $\lambda_i^k \alpha_i = \lambda\alpha_i$ pour tout $i \in \mathrm{I}$. Or $\alpha_i \neq 0$ pour $i \in \mathrm{I}$ donc $\lambda_i^k = \lambda$. De plus, A est symétrique positive donc les λ_i sont positifs : pour tout $i \in \mathrm{I}$, $\lambda_i = \sqrt[k]{\lambda}$. Finalement

   $$\mathrm{AX} = \sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i \alpha_i \mathrm{X} = \sqrt[k]{\lambda} \sum_{i \in \mathrm{I}} \alpha_i \mathrm{X}_i = \sqrt[k]{\lambda}\mathrm{X}$$

   et donc X est un vecteur propre de A.

2. Puisque $(\mathrm{A}^k)^\top = (\mathrm{A}^\top)^k = \mathrm{A}^k$, A^k est symétrique. Il existe donc $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^k\mathrm{P}$ soit diagonale. Les vecteurs colonnes de P sont des vecteurs propres de A^k et donc de A d'après la question précédente. En clair, $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ est également diagonale. Puisque $\mathrm{A}^k = \mathrm{B}^k$, le même raisonnement montre que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ est également diagonale. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$ ceux de $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$. Puisque $\left(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\right)^k = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^k\mathrm{P}$ et $\left(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}\right)^k = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}^k\mathrm{P}$, on a $\lambda_i^k = \mu_i^k$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Mais puisque, A et B sont symétriques positives, leurs valeurs propres i.e. les λ_i et les μ_i sont positives. L'application $x \mapsto x^k$ étant injective sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ puis $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

3. Le résultat ne tient plus. Prendre par exemple $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $k = 2$.

   Néanmoins, le résultat reste valable si A et B sont symétriques (non nécessairement positives) et si k est impair car dans ce cas $x \mapsto x^k$ est injective sur $\mathbb{R}$.

Solution 43

Première méthode
D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D à coefficients positifs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^\top$. Mais alors

$$\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{tr}(\mathrm{PDP}^\top\mathrm{B}) = \mathrm{tr}(\mathrm{DP}^\top\mathrm{BP}) = \mathrm{tr}(\mathrm{DC})$$

en posant $\mathrm{C} = \mathrm{P}^\top\mathrm{BP}$. La matrice C est évidemment symétrique et pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{CX} = \mathrm{X}^\top\mathrm{P}^\top\mathrm{BPX} = (\mathrm{PX})^\top\mathrm{B}(\mathrm{PX}) \geq 0$$

car B est positive. Ainsi C est positive. En notant $(\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$\mathrm{C}_{ii} = \mathrm{E}_i^\top\mathrm{CE}_i \geq 0$$

puisque C est positive. Finalement

$$\mathrm{tr}(\mathrm{DC}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathrm{D}_{ij}\mathrm{C}_{ji} = \sum_{i=1}^n \mathrm{D}_{ii}\mathrm{C}_{ii} \geq 0$$

Deuxième méthode
D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D à coefficients positifs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^\top$. En notant Δ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines carrées de ceux de A, et en posant $\mathrm{R} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^\top$, on a $\mathrm{A} = \mathrm{R}^\top\mathrm{R}$. De la même manière, on peut trouver $\mathrm{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B} = \mathrm{S}^\top\mathrm{S}$. Mais alors

$$\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{tr}(\mathrm{R}^\top\mathrm{RS}^\top\mathrm{S}) = \mathrm{tr}(\mathrm{SR}^\top\mathrm{RS}^\top) = \|\mathrm{RS}^\top\|^2 \geq 0$$

où on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{X}^\top\mathrm{Y})$ (il est classique de montrer que c'est bien un produit scalaire).

Solution 44

---

1. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$ est une matrice symétrique donc elle est diagonalisable. Soit x un vecteur propre associée à une valeur propre λ de $\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$. Alors $x^\top\mathrm{A}^\top\mathrm{A}x = (\mathrm{A}x)^\top(\mathrm{AX}) = \|\mathrm{A}x\|^2 \in \mathbb{R}_+$ et $x^\top\mathrm{A}^\top\mathrm{A}x = \lambda x^\top x = \lambda\|x\|^2$. Comme $\|x\|^2 \in \mathbb{R}_*^+$, $\lambda \geq 0$. Ainsi $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A}) \subset \mathbb{R}_+$ donc N(A) est bien définie.
   Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathrm{N}(\mu\mathrm{A}) = \sqrt{\max\mathrm{Sp}(\mu^2\mathrm{A}^\top\mathrm{A})} = \sqrt{\max\mu^2\,\mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A})} = \sqrt{\mu^2\max\mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A})} = |\mu|\sqrt{\max\mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A})} = |\mu|\mathrm{N}(\mathrm{A})$$

   donc N est bien homogène.
   Supposons que $\mathrm{N}(\mathrm{A}) = 0$. Alors $\max\mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A}) = 0$. Mais comme $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A}) \subset \mathbb{R}_+$, $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A}) = \{0\}$. Comme $\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$ est diagonalisable, $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} = 0$. Soit $x \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Alors $\|\mathrm{A}x\|^2 = (\mathrm{A}x)^\top\mathrm{A}x = x^\top\mathrm{A}^\top\mathrm{A}x = 0$ donc $\mathrm{A}x = 0$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\mathrm{A} = 0$. Ainsi N vérifie l'axiome de séparation.
   Soit enfin $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2$. Notons λ la plus grande valeur propre de $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^\top(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ et x un vecteur propre associé à cettte valeur

propre. Alors $\|(A+B)x\|^2 = \lambda\|x\|^2$. Donc $\|(A+B)x\| = N(A+b)\|x\|$. Par ailleurs, $\|\cdot\|$ est une norme donc $\|(A+B)x\| \leq \|Ax\|+\|Bx\|$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de $A^\top A$ et $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A⊤A. Alors

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \qquad \text{et} \qquad A^\top A x = \sum_{i=1}^{p} x_i \lambda_i e_i$$

Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$\|Ax\|^2 = x^\top A^\top A x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_p \sum_{i=1}^{p} x_i^2 = \lambda_p \|x\|^2$$

Par conséquent, $\|Ax\| \leq N(A)\|x\|$. De la même manière, $\|Bx\| \leq N(B)\|x\|$ Finalement,

$$N(A+B)\|x\| \leq N(A)\|x\| + N(B)\|x\|$$

et donc $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$ car $\|x\| > 0$.
N est bien une norme.

2. Soit x un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de $(AB)^\top(AB)$. On a alors $\|ABx\| = N(A)\|x\|$ (cf. précédemment). De plus, $\|ABx\| \leq N(A)\|Bx\| \leq N(A)N(B)\|x\|$ (cf. précédemment). Comme $\|x\| > 0$, $N(A) \leq N(A)N(B)$ donc N est bien une norme d'algèbre.

Solution 45

Remarquons qu'en remplaçant x par x/y, on obtient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*,\ |ax^2 + bxy + cy^2| \leq |Ax^2 + Bxy + Cy^2|$$

Par continuité des deux membres sur $\mathbb{R}^2$, l'inégalité est également vraie sur l'adhérence de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^2$. Ainsi

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |ax^2 + bxy + cy^2| \leq |Ax^2 + Bxy + Cy^2|$$

Posons $m = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\forall u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ |u^\top m u| \leq |u^\top M u|$$

En élevant au carré, on obtient

$$\forall u \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ \|u\|^2 u^\top m^2 u \leq \|u\|^2 u^\top M^2 u$$

Notamment, en notant S la sphère unité de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$,

$$\forall u \in S,\ u^\top m^2 u \leq u^\top M^2 u$$

Les matrices m et M sont symétriques réelles donc diagonalisables. Notons λ_1 et λ_2 les valeurs propres (éventuellement confondues) de m ainsi que Λ_1 et Λ_2 celles de M. Quitte à les échanger, on peut supposer $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ et $|\Lambda_1| \leq |\Lambda_2|$. En considérant des bases orthonormées de vecteurs propres de m et M, on montre classiquement que

$$\lambda_1^2 = \inf_{u \in S} u^\top m^2 u \qquad \lambda_2^2 = \sup_{u \in S} u^\top m^2 u$$
$$\Lambda_1^2 = \inf_{u \in S} u^\top M^2 u \qquad \Lambda_2^2 = \sup_{u \in S} u^\top M^2 u$$

L'inégalité précédente montre alors que $\lambda_1^2 \leq \Lambda_1^2$ et $\lambda_2^2 \leq \Lambda_2^2$. Puisque toutes ces quantités sont positives, $(\lambda_1\lambda_2)^2 \leq (\Lambda_1\Lambda_2)^2$. Or $\lambda_1\lambda_2 = \det(m) = ac - b^2/4$ et $\Lambda_1\Lambda_2 = AC - B^2/4$ de sorte que

$$(b^2 - 4ac)^2 \leq (B^2 - 4AC)^2$$

ou encore

$$|b^2 - 4ac| \leq |B^2 - 4AC|$$

Solution 46

Comme $M^{\mathsf{T}}M$ et MM^{T} sont symétriques réelles, leurs spectres sont inclus dans $\mathbb{R}$.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M^{\mathsf{T}}M) \setminus \{0\}$. Alors il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $M^{\mathsf{T}}MX = \lambda X$. On en déduit que

$$\|MX\|^2 = X^{\mathsf{T}}M^{\mathsf{T}}MX = \lambda XX^{\mathsf{T}} = \lambda\|X\|^2 \neq 0$$

car X et λ sont non nuls. Ainsi $MX \neq 0$. Mais comme $M^{\mathsf{T}}MX = \lambda X$, on a également $(MM^{\mathsf{T}})MX = \lambda MX$ de sorte que $\lambda \in \mathrm{Sp}(MM^{\mathsf{T}})$. On en déduit que

$$\mathrm{Sp}(M^{\mathsf{T}}M) \setminus \{0\} \subset \mathrm{Sp}(MM^{\mathsf{T}}) \setminus \{0\}$$

En appliquant ce qui précède à M^{T}, on obtient l'inclusion réciproque et donc l'égalité.

Solution 47

Supposons (i). Alors il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. Posons également $E_{i,j} = e_ie_j^{\mathsf{T}} + e_je_i^{\mathsf{T}}$. On montre aisément que $(E_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
L'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM + MA \end{cases}$$

est bien définie et c'est un endomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $1 \leq i \leq j \leq n$, $\Phi(E_{i,j}) = (\lambda_i + \lambda_j)E_{i,j}$. L'application Φ est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont les $\lambda_i + \lambda_j$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$. Aucune de ces valeurs propres n'est nulle donc Φ est un automorphisme. On en déduit la proposition (ii).
Remarque. On peut raisonner différemment. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que $A = PDP^{\mathsf{T}}$. Fixons $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. L'équation $AM + MA = B$ équivaut à $DN + ND = C$ en posant $N = P^{\mathsf{T}}MP$ et $C = P^{\mathsf{T}}BP$. Cette équation équivaut à

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (\lambda_i + \lambda_j)N_{i,j} = C_{i,j}$$

Comme $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, l'équation admet donc bien une unique solution N. Comme C est symétrique, N l'est également et donc M aussi. L'équation $AM + MA = B$ admet donc bien une unique solution symétrique.

Supposons (ii). Considérons l'application Ψ qui à $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ associe l'unique matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $AM + MA = B$. On vérifie aisément que Ψ est un automorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $I_n = \Psi(\Psi^{-1}(I_n))$ est l'unique matrice telle que $AI_n + I_nA = \Psi^{-1}(I_n)$. Ainsi $A = \dfrac{1}{2}\Psi^{-1}(I_n) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On reprend alors le raisonnement de la première implication. L'endomorphisme Φ (qui n'est autre que Ψ^{-1}) est alors un automorphisme. Ses valeurs propres, à savoir les $\lambda_i + \lambda_j$ ne peuvent être nulles.

Solution 48

Soit (X, Y) un éventuel couple solution. Alors

$$X^{\mathsf{T}} = X^{\mathsf{T}}(Y^{\mathsf{T}}XY) = (X^{\mathsf{T}}Y^{\mathsf{T}}X)Y = (X^{\mathsf{T}}YX)^{\mathsf{T}}Y = Y$$

Par conséquent, $X(XX^{\mathsf{T}}) = I_n$. On en déduit que XX^{T} est inversible et que $X = (XX^{\mathsf{T}})^{-1}$. Or XX^{T} est symétrique donc X également. D'après le théorème spectral, il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $X = PDP^{\mathsf{T}}$. En reportant dans l'égalité $X(XX^{\mathsf{T}}) = I_n$ i.e. $X^3 = I_n$, on obtient $D^3 = I_n$. Comme D est diagonale à coefficients *réels*, $D = I_n$ puis $X = Y = I_n$.
Réciproquement, le couple (I_n, I_n) convient. C'est donc l'unique solution du système.

Solution 49

Il est clair que si S est nulle, $S + D$ est semblable à D.
Supposons maintenant que $S + D$ est semblable à D. On rappelle que $X \mapsto \mathrm{tr}(X^{\mathsf{T}}X)$ est une norme euclidienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $S + D$ est semblable à D, $(S + D)^2$ est également semblable à D^2 et ces deux matrices ont même trace. Ainsi

$$\mathrm{tr}(D^2) = \mathrm{tr}((S + D)^2) = \mathrm{tr}(S^2) + \mathrm{tr}(SD) + \mathrm{tr}(DS) + \mathrm{tr}(D^2)$$

On vérifie aisément que SD a une diagonale nulle donc $\mathrm{tr}(SD) = \mathrm{tr}(DS) = 0$. Ainsi $\mathrm{tr}(S^2) = \mathrm{tr}(S^{\mathsf{T}}S) = 0$ puis $S = 0$ via la norme euclidienne citée plus haut.

Solution 50

D'après le théorème spectral, Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que $A = PDP^{\mathsf{T}}$. Comme $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$, les coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de D sont positifs. On note alors $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ de sorte que $\Delta^2 = D$. Posons $B = P\Delta P^{\mathsf{T}}$. On vérifie asiément que B est symétrique et que $B^2 = A$.

Polynômes orthogonaux

Solution 51

1. La symétrie de φ est évidente. La bilinéarité de φ provient de la linéarité de l'intégrale. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt \geq 0$ donc φ est positive. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt = 0$. Comme P^2 est continue positive qur $[-1,1]$, on en déduit que P^2 est nulle sur $[-1,1]$. Le polynôme P^2 admet donc une infinité de racines : il est donc nul. Par conséquent, P est également nul. Ceci prouve que φ est définie.
φ est donc un produit scalaire.

2. 1 et -1 sont des racines de multiplicité n de Q_n. On en déduit que $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$ pour $k < n$.

3. Soit $k, l \in [\![0, n]\!]$ avec $k \neq l$. On peut supposer $k < l$.
Supposons $l \geq 1$ pour se donner une idée de la marche à suivre. On utilise une intégration par parties :
$$\langle P_k, P_l \rangle = \int_{-1}^{1} Q_k^{(k)}(t)Q_l^{(l)}(t)\,dt = \left[Q_k^{(k)}(t)Q_l^{(l-1)}(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q_k^{(k+1)}(t)Q_l^{(l-1)}(t)\,dt$$
Or $l-1 < l$ donc $Q_l^{(l-1)}(-1) = Q_l^{(l-1)}(1) = 0$ d'après la question précédente. Ainsi $\langle Q_k^{(k)}, Q_l^{(l)} \rangle = -\langle Q_k^{(k+1)}, Q_l^{(l-1)} \rangle$.
On peut donc prouver à l'aide d'une récurrence finie que $\langle Q_k^{(k)}, Q_l^{(l)} \rangle = (-1)^l \langle Q_k^{(k+l)}, Q_l \rangle$. Or $k < l$ donc $k + l > 2k$. Puisque $\deg Q_k = 2k$, $Q_k^{(k+l)} = 0$. On a donc $\langle P_k, P_l \rangle = 0$.
Les P_k sont donc orthogonaux deux à deux. La famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est donc orthogonale. De plus, $\deg Q_k = 2k$ donc $\deg P_k = \deg Q_k^{(k)} = k$. La famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille de polynômes à degrés étagés : elle est donc libre. Comme elle comporte $n+1$ éléments et que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution 52

1. Remarquons déjà que l'intégrale définissant $\langle P, Q \rangle$ est bien définie car $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $P(t)Q(t)e^{-t^2} \underset{t\to\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement bilinéaire, symétrique et positive. Enfin, soit $P \in E$ vérifiant $\langle P, P \rangle = 0$. Comme $t \mapsto P(t)^2 e^{-t^2}$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$, elle y est constamment nulle. Comme l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto P(t)^2$ est nulle sur $\mathbb{R}$. Le polynôme P admet donc une infinité de racines : il est nul.
On a bien vérifié que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. La matrice de L dans la base canonique est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $0, -2, \dots, -2n$. Ainsi L admet pour valeurs propres les $n+1$ réels distincts $0, -2, \dots, -2n$. Comme $\dim E = n+1$, on peut affirmer que L est diagonalisable.

3. Soient $(P, Q) \in E^2$. Alors
$$\langle L(P), Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (P''(t) - 2tP'(t))Q(t)e^{-t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P''(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt - 2\int_{-\infty}^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt$$
Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ et $t \mapsto P'(t)Q(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivées respectives $t \mapsto -2te^{-t^2}$ et $t \mapsto P''(t)Q(t) + P'(t)Q'(t)$, on obtient par une intégration par parties :
$$2\int_{-\infty}^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt = -\left[P'(t)Q(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(P'(t)Q'(t) + P''(t)Q(t)\right)e^{-t^2}\,dt$$
On en déduit que
$$\langle L(P), Q \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2}\,dt$$
Comme cette expression est invariante par échange de P et Q,
$$\langle L(P), Q \rangle = \langle P, L(Q) \rangle$$
L est bien un endomorphisme symétrique.

4. Notons $(P_0, \dots, P_n)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique. On sait alors que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de E et que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathrm{vect}(P_0, \dots, P_k) = \mathbb{R}_k[X]$.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$. Il est clair que $\mathbb{R}_k[X]$ est stable par L donc $L(P_k) \in \mathbb{R}_k[X] = \mathrm{vect}(P_0, \dots, P_k)$. Il existe donc $(\lambda_0, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tel que $L(P_k) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j P_j$. Pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $\langle L(P_k), P_j \rangle = \alpha_j$ car $(P_0, \dots, P_n)$ est orthonormée. Mais comme L est symétrique, $\langle L(P_k), P_j \rangle = \langle P_k, L(P_j) \rangle$. Or $L(P_j) \in \mathbb{R}_j[X] = \mathrm{vect}(P_0, \dots, P_j)$ donc $\langle P_k, L(P_j) \rangle = 0$ car $(P_0, \dots, P_n)$ est orthonormée. On en déduit donc que $\alpha_j = 0$ et donc $L(P_k) = \alpha_k P_k$ donc P_k est un vecteur propre de L. Finalement, $(P_0, \dots, P_n)$ est bien une base de E formée de vecteurs propres de L.

Divers

Solution 53

---

1. Soient $x, y, z \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\langle z, u(\lambda x + \mu y) \rangle &= -\langle u(z), \lambda x + \mu y \rangle && \text{par antisymétrie} \\
&= -\lambda \langle u(z), x \rangle - \mu \langle u(z), y \rangle && \text{par bilinéarité du produit scalaire} \\
&= \lambda \langle z, u(x) \rangle + \mu \langle z, u(y) \rangle && \text{par antisymétrie}
\end{aligned}$$

On a donc $\langle z, u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu(y) \rangle = 0$ pour tout $z \in E$. Comme $E^\perp = \{0_E\}$, $u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu(y) = 0_E$. D'où la linéarité de u.

2. $(i) \Rightarrow (ii)$ Soient $x, y \in E$. Alors $\langle u(x+y), x+y \rangle = 0$. Or, par linéarité de u et bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle u(x+y), x+y \rangle = \langle u(x), x \rangle + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle + \langle u(y), y \rangle = \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle$$

D'où l'antisymétrie de u.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ On a vu dans la question précédente que u était linéaire. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans cette base. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle u(e_j), e_i \right\rangle e_i$ pour $1 \leq j \leq n$. On en déduit que $a_{ij} = \left\langle u(e_j), e_i \right\rangle$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Or, par antisymétrie de u, $\left\langle u(e_j), e_i \right\rangle = -\left\langle u(e_i), e_j \right\rangle$ i.e. $a_{ij} = -a_{ji}$ pour $1 \leq i, j \leq n$. On en déduit que A est antisymétrique.

$(iii) \Rightarrow (i)$ u est bien linéaire par hypothèse. Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et A la matrice de u dans $\mathcal{B}$. Soit $x \in E$ et X la matrice colonne de x dans $\mathcal{B}$. Alors

$$\langle u(x), x \rangle = (MX)^\top X = -X^\top MX = -\langle x, u(x) \rangle$$

On en déduit que $\langle u(x), x \rangle = 0$.

3. Fixons une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et considérons Φ l'isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à un endomorphisme de E associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. D'après la question précédente, $\Phi(A(E)) = A_n(\mathbb{R})$ où $A_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques. On a donc également $A(E) = \Phi^{-1}(A_n(\mathbb{R}))$ donc $A(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ comme image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire et $\dim A(E) = \dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ car Φ est un isomorphisme.

4. Soient $x \in \operatorname{Ker} u$ et $y \in \operatorname{Im} u$. Il existe $z \in E$ tel que $y = u(z)$.

$$\langle x, y \rangle = \langle x, u(z) \rangle = -\langle z, u(x) \rangle = -\langle z, 0_E \rangle = 0$$

Ainsi $\operatorname{Im} u \subset (\operatorname{Ker} u)^\perp$. D'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Im} u = n - \dim \operatorname{Ker} u = \dim(\operatorname{Ker} u)^\perp$. Ainsi $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.

5. Soit F un sous-espace vectoriel stable par u. Soient $x \in F^\perp$. Alors, pour tout $y \in F$, $\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle = 0$ car $u(y) \in F$. Ainsi $u(x) \in F^\perp$, ce qui prouve que $u(F^\perp) \subset F^\perp$.

Solution 54

Soit $\mathcal{B}'$ une base orthonormale adaptée à la décomposition en somme directe $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$. La matrice A' de p dans la base $\mathcal{B}'$ est diagonale (les éléments diagonaux valent 1 ou 0). Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. On a $A = PA'P^{-1}$. Or P est orthogonale donc $P^{-1} = P^\top$. Ainsi $A = PA'P^\top$ est symétrique.

Solution 55

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Si A est nulle, $\operatorname{rg} A = 0$ et donc le rang de A est pair.
Sinon, notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à A. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et on se donne une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^n = S \oplus \operatorname{Ker} u$ où S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$. La matrice de u dans cette base $\mathcal{B}$ est de la forme $A' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ avec B carrée de taille $p = \dim S$. Si on note P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, P est orthogonale et $A' = P^{-1}BP = P^\top AP$. On en déduit que A' est également antisymétrique et donc B est antisymétrique et C est nulle. On a donc $A' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} B$ mais comme S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$, $\operatorname{rg} A' = \dim S = p$, ce qui prouve que B est inversible. Or $\det(B^\top) = \det(-B) = (-1)^p \det B$ donc p est pair sinon on aurait $\det B = 0$ et B non inversible.

Solution 56

1. Si A est symétrique $A^\top = A$ et donc $A^2 = I_n$. On en déduit que a est une symétrie orthogonale.

2. **Première méthode.** Remarquons que

$$A = (A^\top)^2 + A^\top - I_n = (A^2 + A - I_n)^2 + (A^2 + A - I_n) - I_n$$

Après simplification, on obtient

$$A^4 + 2A^2 - 2A - I_n = 0$$

Ainsi $X^4 + 2X^3 - 2X - 1 = (X-1)(X+1)^3$ est un polynôme annulateur de A. Ainsi $\operatorname{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$. On en déduit que 0 est la seule valeur propre de $A^\top - A = A^2 - I_n$. Autrement dit, $M = A^\top - A$ est nilpotente. Comme $A^\top = A^2 + A - I_n$, $A^\top$ commute avec A puis $M^\top$ commute avec M. On en déduit que $M^\top M$ est également nilpotente. Comme $M^\top M$ est symétrique réelle, elle est également diagonalisable donc nulle. Ainsi

$$\|M\|^2 = \operatorname{tr}(M^\top M) = 0$$

puis $M = 0$. Ceci signifie que $A^\top = A$ et on est ramené à la question précédente : a est à nouveau une symétrie orthogonale.

Deuxième méthode. Posons $S = \dfrac{A + A^\top}{2}$ et $T = \dfrac{A - A^\top}{2}$. Alors $A = S + T$ et S et T sont respectivement symétrique et antisymétrique. Comme A et $A^\top$ commutent, S et T commutent également. L'égalité $A^\top = A^2 + A - I_n$ peut alors s'écrire

$$S - T = S^2 + T^2 + 2ST + S + T - I_n$$

ou encore

$$S^2 + T^2 + 2ST + 2T = I_n$$

Remarquons que ST est antisymétrique. Comme toute matrice s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique,

$$\begin{cases} S^2 + T^2 = I_n \\ ST + T = 0 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} S^2 + T^2 = I_n \\ S^2T^2 = T^2 \end{cases}$$

Comme S^2 et T^2 sont symétriques et diagonalisables, elles possèdent une base commune de vecteurs propres. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$ leurs valeurs propres respectives, on a alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \begin{cases} \lambda + \mu &= 1 \\ \lambda\mu &= \mu \end{cases}$$

On en déduit sans peine que $\lambda_i = 1$ et $\mu_i = 0$. Ainsi $T^2 = 0$ et $S^2 = I_n$. De plus,

$$\|T\|^2 = \operatorname{tr}(T^\top T) = \operatorname{tr}(-T^2) = 0$$

donc $T = 0$. Ainsi $A = S = A^\top$ et $A^2 = S^2 = I_n$. a est donc une symétrie orthogonale.

Solution 57

1. La bilinéarité vient de la linéarité de la trace. De plus, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(M^\top) = \mathrm{tr}(M)$. Par conséquent, $\mathrm{tr}(A^\top B) = \mathrm{tr}(B^\top A)$, d'où la symétrie. De plus,
$$\mathrm{tr}(A^\top B) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}b_{ij}$$
et en particulier
$$\mathrm{tr}(A^\top A) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}^2 \ge 0$$
Cette dernière somme ne s'annulant que si tous les a_{ij} sont nuls i.e. $A = 0$. L'application est donc définie positive.
On vérifie sans difficulté que la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée.

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$|\mathrm{tr}(A)| = |\mathrm{tr}(I_n A)| \le \|I_n\|\|A\|$$
On vérifie facilement que $\|I_n\| = \sqrt{n}$.

3. **a.** Soient $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
$$(A|S) = \mathrm{tr}(A^\top S) = -\mathrm{tr}(AS)$$
$$(S|A) = \mathrm{tr}(S^\top A) = \mathrm{tr}(SA)$$
Or $\mathrm{tr}(SA) = \mathrm{tr}(AS)$ donc $(A|S) = 0$. Les sous-espaces vectoriels $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont donc orthogonaux. On sait également que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On en déduit donc que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est l'orthogonal de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

   b. $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$ où p désigne la projection orthogonale sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On trouve facilement que $p(A) = \dfrac{A^\top + A}{2}$. Ainsi
$$\|A - p(A)\| = \frac{1}{2}\|A - A^\top\| = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{1\le i,j\le n}(a_{ij} - a_{ji})^2}$$
en utilisant la formule donnant le carré de la norme vue à la première question.

4. Comme $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $U^\top U = UU^\top = I_n$.
$$\|UA\|^2 = \mathrm{tr}((UA)^\top UA) = \mathrm{tr}(A^\top U^\top UA) = \mathrm{tr}(A^\top A) = \|A\|^2$$
$$\|AU\|^2 = \mathrm{tr}((AU)^\top AU) = \mathrm{tr}(U^\top A^\top AU) = \mathrm{tr}(A^\top AUU^\top) = \mathrm{tr}(A^\top A) = \|A\|^2$$

5. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\begin{aligned}\|AB\|^2 &= \mathrm{tr}(B^\top A^\top AB) = \mathrm{tr}(A^\top ABB^\top) = \mathrm{tr}((A^\top A)^\top BB^\top)\\ &= (A^\top A|BB^\top) \le \|A^\top A\|\|BB^\top\| = \|A^\top A\|\|B^\top B\|\end{aligned}$$
car $\|BB^\top\|^2 = \mathrm{tr}(BB^\top BB^\top) = \mathrm{tr}(B^\top BB^\top B) = \|B^\top B\|^2$. En utilisant la formule donnant le carré de la norme vue à la première question, on a :
$$\|A^\top A\|^2 = \sum_{1\le i,j\le n}\left(\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}\right)^2$$
Or pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a d'après Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$,
$$\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} \le \sqrt{S_i}\sqrt{S_j}$$
avec $S_i = \sum_{k=1}^n a_{ki}^2$ pour $1 \le i \le n$. Ainsi
$$\|A^\top A\|^2 \le \sum_{1\le i,j\le n} S_iS_j = \left(\sum_{i=1}^n S_i\right)\left(\sum_{j=1}^n S_j\right) = \left(\sum_{l=1}^n S_l\right)^2$$

Par conséquent,

$$\|A^\top A\| \leq \sum_{1\leq k,l\leq n} a_{kl}^2 = \|A\|^2$$

On a donc également $\|B^\top B\| \leq \|B\|^2$, ce qui nous donne finalement l'inégalité demandée.

Solution 58

Pour simplifier, on peut supposer $u_1, \dots, u_{n+1}$ unitaires de sorte que pour $i, j \in [\![1, n+1]\!]$ distincts, $(u_i \mid u_j) = \cos\alpha_n$.

Première méthode

Notons $u_1', \dots, u_n'$ les projections orthogonales de $u_1, \dots, u_n$ sur $\operatorname{vect}(u_{n+1})^\perp$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$ $u_i' = u_i - (\cos\alpha_n)u_{n+1}$ et par le théorème de Pythagore, $\|u_i'\|^2 = \|u_i\|^2 - (\cos^2\alpha_n)\|u_{n+1}\|^2 = 1 - \cos^2\alpha_n$. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ distincts

$$(u_i' \mid u_j') = (u_i|u_j) - \cos\alpha_n\left((u_i|u_{n+1}) + (u_j|u_{n+1})\right) + \cos^2\alpha_n\|u_{n+1}\|^2 = \cos\alpha_n - \cos^2\alpha_n$$

Par conséquent,

$$\frac{(u_i' \mid u_j')}{\|u_i'\|\,\|u_j'\|} = \frac{\cos\alpha_n - \cos\alpha_n^2}{1 - \cos\alpha_n^2} = \frac{\cos\alpha_n}{1 + \cos\alpha_n}$$

Les vecteurs $u_1', \dots, u_n'$ font donc un angle constant α_{n-1} deux à deux. De plus, $\cos\alpha_{n-1} = \dfrac{\cos\alpha_n}{1+\cos\alpha_n}$ i.e. $\cos\alpha_n = \dfrac{\cos\alpha_{n-1}}{1-\cos\alpha_{n-1}}$.

L'énoncé n'a de sens que pour $n \geq 2$. On trouve aisément $\alpha_2 = \dfrac{2\pi}{3}$. Posons $z_n = \dfrac{1}{\cos\alpha_n}$. La suite (z_n) vérifie la relation de récurrence $z_n = z_{n-1} - 1$. Puisque $z_2 = -2$, on trouve $z_n = -n$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi $\alpha_n = \arccos\left(-\dfrac{1}{n}\right)$.

Deuxième méthode

Puisque $\dim E = n$, les $n+1$ vecteurs $u_1, \dots, u_{n+1}$ forment une famille liée. Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i = 0_E$. Fixons $j \in [\![1, n+1]\!]$. On a donc

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(u_i \mid u_j) = (0_E \mid u_j) = 0$$

ou encore

$$\lambda_j + \sum_{i\neq j} \lambda_i \cos\alpha_n = 0$$

Posons $\Lambda = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$. L'égalité précédente s'écrit encore

$$\lambda_j + (\Lambda - \lambda_j)\cos\alpha_n = 0$$

ce qui équivaut à

$$\lambda_j(1 - \cos\alpha_n) + \Lambda\cos\alpha_n = 0$$

En sommant ces égalités pour $j \in [\![1, n+1]\!]$, on obtient

$$\Lambda(1 - \cos\alpha_n) + (n+1)\Lambda\cos\alpha_n = 0$$

ou encore

$$\Lambda(1 + n\cos\alpha_n) = 0$$

Par ailleurs, il existe $j \in [\![1, n+1]\!]$ tel que $\lambda_j \neq 0$ et on rapelle que $\lambda_j(1-\cos\alpha_n)+\Lambda\cos\alpha_n = 0$. Si on avait $\Lambda = 0$, on aurait donc $\cos\alpha_n = 1$, ce qui est exclu par l'énoncé. Ainsi $\Lambda \neq 0$, ce qui permet d'affirmer que $\cos\alpha_n = -\dfrac{1}{n}$. On cherche implicitement un angle α_n *non orienté* donc $\alpha_n = \arccos\left(-\dfrac{1}{n}\right)$.

Solution 59

Soit $X \in \operatorname{Ker} A$. On a donc $AX = 0$ puis $A^\top AX = 0$ donc $X \in \operatorname{Ker} A^\top A$. Ainsi $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^\top A$.
Soit maintenant $X \in \operatorname{Ker} A^\top A$. On a donc $A^\top AX = 0$ puis $X^\top A^\top AX = 0$. Notons $Y = AX$. Ainsi $Y^\top Y = 0$. Or $Y^\top Y$ est la somme des carrés des composantes de Y donc $Y = 0$ i.e. $AX = 0$. D'où $X \in \operatorname{Ker} A$. Ainsi $\operatorname{Ker} A^\top A \subset \operatorname{Ker} A$.
Finalement, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^\top A$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top A$ via le théorème du rang. En changeant A en $A^\top$, on a également $\operatorname{rg} A^\top = \operatorname{rg} AA^\top$. Or $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top$. Ainsi $\operatorname{rg} A^\top A = \operatorname{rg} AA^\top = \operatorname{rg} A$.

Solution 60

1. Évident.

2. On va montrer que F admet pour supplémentaire la droite vectorielle $\mathbb{R}_0[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

   Soit $P \in \mathbb{R}_0[X] \cap F$. Alors il existe $(\lambda_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N}^*)}$ tel que $P = \sum_{n=1}^{+infty} \lambda_n(1+X^n)$. On a donc

   $$P = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n X^n$$

   Mais comme $\deg P \leq 0$, $\lambda_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $P = 0$. Ainsi F et $\mathbb{R}_0[X]$ sont en somme directe.

3. Soit $P \in F^\perp$. Posons $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ avec $(a_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Puisque $\langle P, 1+X^n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_0 + a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Mais comme la suite (a_n) est nulle à partir d'un certain rang, on en déduit que $a_0 = 0$ puis que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $P = 0$ puis $F^\perp = \{0\}$.
   En particulier, $F \oplus F^\perp = F \neq \mathbb{R}[X]$ puisque F est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.

Solution 61

Notons pour $a \in E$, $\varphi : x \in E \mapsto \langle a, x \rangle$. φ_a est clairement une forme linéaire. Il suffit donc de montrer que l'application $\Phi :$ $EE^* a\varphi_a$ est bijective. On montre facilement que Φ est linéaire. Puisque $\dim E = \dim E^*$, il suffit de montrer que Φ est injective pour en déduire que c'est un isomorphisme. Soit alors $a \in \operatorname{Ker} \Phi$. Alors φ_a est nulle et notamment, $\varphi_a(a) = \|a\|^2 = 0$ puis $a = 0_E$. Ainsi $\operatorname{Ker} \Phi = \{0_E\}$: Φ est injective et donc bijective.