Devoir à la maison n°12

Problème 1 —

Partie I – Un espace vectoriel

On note E l'ensemble des applications 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note e_k l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e_k(x) = e^{2ik\pi x}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = \mathrm{vect}\left((e_k)_{-n \leqslant k \leqslant n}\right)$.

1. Vérifier que $e_k \in E$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.
3. **a.** Soit $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 e_k(x)e_{-l}(x)\,dx$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(e_k)_{-n \leqslant k \leqslant n}$ est libre.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner la dimension de E_n.

Partie II – Un endomorphisme

Pour $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, on définit l'application $T(f) \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.
2. Montrer que E est stable par T.
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $T(e_k)$. On discutera suivant la parité de k.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que E_n est stable par T. On note alors T_n l'endomorphisme induit par T sur E_n.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les dimensions respectives de $\operatorname{Ker} T_n$ et $\operatorname{Im} T_n$ en fonction de n. On discutera suivant la parité de n.

Partie III – Deux projecteurs

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier qu'il existe un unique endomorphisme S_n de E_n tel que

$$\forall k \in [\![-n, n]\!],\ S_n(e_k) = \begin{cases} e_{2k} & \text{si } |2k| \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P_n = S_n \circ T_n$. Montrer que P_n est un projecteur et préciser $\mathrm{Im}(P_n)$ et $\mathrm{Ker}(P_n)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $Q_n = T_n \circ S_n$. Montrer que Q_n est un projecteur et préciser $\mathrm{Im}(Q_n)$ et $\mathrm{Ker}(Q_n)$.