Interrogation écrite n°11

NOM : Prénom : Note :

1. On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que $p : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{1}{2}(z - i\,\overline{z})$ est un projecteur sur un sous-espace vectoriel F et parallélement à un sous-espace vectoriel G dont on précisera des bases.

2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P_n = X^{2n} + X^n + 1$ par $X^2 - 1$.

3. Montrer que l'application $s : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(-X) \end{array} \right.$ est une symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel F et parallélement à un sous-espace vectoriel G que l'on précisera.

4. Déterminer l'ensemble F des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = XP(X)$ puis montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ dont on déterminera une base.