Devoir surveillé n°06

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

On définit la suite (F_n) en posant $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $F_n > F_{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 3$.

2. Soit un entier $n \geqslant 3$. Quel est le reste de la division euclidienne de F_{n+1} par F_n ?

3. On note φ l'unique racine positive du polynôme $X^2 - X - 1$. Calculer φ .

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} \geqslant \varphi^n$.

A partir de maintenant, on se donne deux entiers naturels non nuls a et b tels que $a > b$. On note $r_0 = a$, $r_1 = b$ et $r_2, \dots, r_N$ la suite des restes dans l'algorithme d'Euclide appliqué à a et b. On rappelle que $r_{N-1} = a \wedge b$, $r_N = 0$ et que pour tout $k \in [\![0, N-2]\!]$, r_{k+2} est le reste de la division euclidienne de r_k par r_{k+1}.

5. *Dans cette question uniquement*, on suppose que $a = 169$ et $b = 104$.

- Donner les valeurs des r_k.
- Donner la valeur de n.
- Donner le PGCD de a et b.

6. *Dans cette question uniquement*, on se donne un entier $n \geqslant 2$ et l'on suppose que $a = F_{n+1}$ et $b = F_n$. A l'aide de la question **2**,

- exprimer les r_k à l'aide des termes de la suite (F_n) ;
- exprimer N en fonction de n ;
- déterminer le PGCD de F_{n+1} et F_n.

On revient maintenant au cas général.

7. Montrer que la suite finie $(r_k)_{0 \leqslant k \leqslant N}$ est strictement décroissante.

8. Montrer que $r_{N-1} \geqslant 1$ et que $r_{N-2} \geqslant 2r_{N-1}$.

9. Montrer que pour tout $k \in [\![2, N]\!]$, $r_{N+1-k} \geqslant F_k$.

10. En déduire que $N \leqslant \left\lfloor \dfrac{\ln(b)}{\ln(\varphi)} \right\rfloor + 2$.

Exercice 2.

On pose $f(x) = x + \ln(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.
2. Que peut-on dire du sens de variation de sa bijection réciproque f^{-1} ainsi que des limites de f^{-1} en $-\infty$ et en $+\infty$?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$. On notera x_n cette unique solution.
4. Montrer que la suite (x_n) est croissante.
5. Déterminer la limite de (x_n) en $+\infty$.
6. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
7. Déterminer la limite de la suite de terme général $x_{n+1} - x_n$.
8. On pose $u_n = \dfrac{n - x_n}{\ln(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   a. Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n\text{-}1 = \frac{\ln(x_n/n)}{\ln(n)}$$

   b. Déterminer la limite de (u_n).

   c. Montrer que
   $$1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$
9. En déduire que
   $$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Exercice 3.

On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto 1 - \sqrt{x}$ ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.
2. Montrer que $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer le sens de variation de f et de $f \circ f$ sur $[0, 1]$.
4. Montrer que f possède un unique point fixe α sur $[0, 1]$ et déterminer celui-ci.
5. Montrer que $u_0 \leqslant \alpha$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leqslant \alpha$.
7. Montrer que $u_0 \leqslant u_2$. En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis qu'elle converge.
8. Montrer que les points fixes de $f \circ f$ sur $[0, 1]$ sont 0, α et 1.
9. En déduire la limite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, puis la convergence et la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et enfin la convergence et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4.

On admet l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et on introduit l'ensemble

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

$(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ est donc un anneau.

2. **a.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, il existe un *unique* couple $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$.

On peut alors définir le *conjugué* de x par $\overline{x} = a - b\sqrt{2}$.

b. Montrer que pour $(x,y) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^2$, $\overline{x \times y} = \overline{x} \times \overline{y}$.

3. Pour $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $\mathrm{N}(x) = x\overline{x}$.

a. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathrm{N}(x) \in \mathbb{Z}$.

b. Montrer que pour tout $(x,y) \in \left(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\right)^2$, $\mathrm{N}(xy) = \mathrm{N}(x)\mathrm{N}(y)$.

c. Montrer que $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est inversible dans l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ *si et seulement si* $|\mathrm{N}(x)| = 1$.

On note H l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. On rappelle qu'alors $(\mathrm{H}, \times)$ est un groupe. H est notamment stable par produit et par inversion. De plus, d'après la question précédente,

$$\mathrm{H} = \left\{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], |\mathrm{N}(x)| = 1\right\}$$

4. Soient $x \in \mathrm{H}$ et $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$.

a. Montrer que si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, alors $x \geqslant 1$.

b. Montrer que si $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$, alors $x \leqslant -1$.

c. Montrer que si $ab \leqslant 0$, alors $|x| \leqslant 1$.

5. On note $\mathrm{H}^+ = \mathrm{H} \cap]1, +\infty[$.

a. Soient $x \in \mathrm{H}^+$ et $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$. Montrer que $a > 0$ et $b > 0$.

b. En déduire que $u = 1 + \sqrt{2}$ est le minimum de H^+.

6. Soit $x \in \mathrm{H}^+$.

a. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $u^n \leqslant x < u^{n+1}$.

b. Montrer que $x = u^n$.

7. En déduire que $\mathrm{H} = \{u^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{-u^n, n \in \mathbb{Z}\}$.