

# DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## EXERCICE 1.

On considère, pour tout entier naturel  $n$ , l'application  $\varphi_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale  $I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$ .

On se propose de démontrer l'existence de trois réels  $a, b, c$  tels que :

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. Calculer  $I_0, I_1$ .
2.
  - a. Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)$ .
  - b. Déterminer le signe de  $I_n$  pour tout entier naturel  $n$ .
  - c. Qu'en déduit-on pour la suite  $(I_n)$  ?
3.
  - a. Majorer la fonction  $g : x \mapsto e^{-2x}$  sur  $[0, 1]$  et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

- b. Déterminer la limite de la suite  $(I_n)$ .
4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$

5. En déduire la limite de la suite  $(nI_n)$ .
6. Déterminer la limite de la suite  $(n(nI_n - 1))$ .
7. Donner alors les valeurs de  $a, b, c$ .

## Problème 1 —

### Partie I —

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(0) = 1$  et  $f(t) = \frac{\arctan t}{t}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$ .

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et paire.
2. Donner le développement limité de  $f$  à l'ordre 1 en 0. En déduire que  $f$  est dérivable en 0 et donner  $f'(0)$ .

3. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $f'(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$ .
4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du = -\frac{1}{2}t^2 f'(t)$$

En déduire le sens de variation de  $f$ .

5. Tracer la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé (unité : 2cm). On précisera les éventuelles branches infinies.

### Partie II –

Soit  $\phi$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\phi(0) = 1$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\phi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ .

1. Montrer que  $\phi$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et paire.
2. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \leq \phi(x) \leq 1$ . On pourra commencer par supposer  $x > 0$ .
3. Montrer que  $\phi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\phi'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - \phi(x))$ .  
Montrer que  $\phi$  est dérivable en 0 avec  $\phi'(0) = 0$ . Donner les variations de  $\phi$ .
4. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$ . En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$ .
5. Tracer la courbe représentative de  $\phi$  dans un repère orthonormé (unité : 2cm). On précisera les éventuelles branches infinies.

### Partie III –

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $u_{n+1} = \phi(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$ .
2. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$|\phi'(x)| \leq \frac{1}{x}(1 - f(x)) = \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

On pourra utiliser les questions II.2 et II.3.

En déduire que  $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  puis que cette inégalité reste vraie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

3. Montrer que l'équation  $\phi(x) = x$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ . On note  $\alpha$  cette solution.  
Montrer que  $\alpha \in ]0, 1]$ .
4. Prouver que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ .  
En déduire que  $(u_n)$  est convergente et préciser sa limite.

### Partie IV –

On considère l'équation différentielle  $x^2 y' + xy = \arctan(x)$ .

1. Résoudre cette équation différentielle sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$ .
2. Montrer que  $\phi$  est l'unique solution de cette équation différentielle sur  $\mathbb{R}$ .