DEVOIR SURVEILLÉ N°10 : CORRIGÉ

Problème 1 — Série de restes

Partie I – Cas d'une série géométrique

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est une série géométrique de raison q. On sait qu'elle converge *si et seulement si* $|q| < 1$.

2. On sait que

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = q^{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

3. Remarquons que $R_n = \frac{q}{1-q}q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ converge et a pour somme $\frac{1}{1-q}$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} R_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \frac{q}{(1-q)^2}$.

Partie II – Cas d'une série de Riemann

4. La série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge *si et seulement si* $\alpha > 1$.

5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

ou encore

$$\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{n+1}^{+\infty} \leq R_n \leq \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_n^{+\infty}$$

ou enfin

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

En multipliant par $n^{\alpha-1}$, on obtient

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} \leq n^{\alpha-1}R_n \leq \frac{1}{\alpha-1}$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1}R_n = \frac{1}{\alpha-1}$ via le théorème des gendarmes. Autrement dit, $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

6. La série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann qui ne converge que si $\alpha - 1 > 1$. Puisque c'est une série à termes positifs, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} R_n$ est de même nature : elle ne converge donc que si $\alpha > 2$.

Partie III – Cas de la série harmonique alternée

7. On trouve évidemment $\int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la question précédente montre que

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-1)^k x^{k-1}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k\,\mathrm{d}x$$

On reconnaît là la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x$ donc

$$\mathrm{S}_n = -\int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x}$$

On calcule aisément

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$$

de sorte que

$$\mathrm{S}_n = -\ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

9. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$$

donc, par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$. La suite de terme général $(-1)^n$ étant bornée, on a également $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$. La question précédente permet d'affirmer que (S_n) converge vers $-\ln(2)$. Autrement dit, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ converge et a pour somme $-\ln(2)$.

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{R}_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n - \mathrm{S}_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x}$$

A l'aide d'une intégration par parties,

$$\mathrm{R}_n = (-1)^{n+1} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)}\right]_0^1 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{(n+1)(1+x)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{(1+x)^2}$$

A nouveau, pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \leq x^{n+1}$$

donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{n+2}$$

On en déduit donc que $\int_0^1 \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{(1+x)^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. On sait également que $\frac{(-1)^n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{=}\underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi

$$\frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{(1+x)^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et finalement

$$\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Les constantes recherchées sont donc $\beta = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 2$.

11. La question précédente montre que $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}a_{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Posons $v_n = \mathrm{R}_n - \frac{1}{2}a_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge. Par ar ailleurs, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ converge donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_{n+1}$ converge également. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{R}_n = \frac{1}{2}a_{n+1} + v_n$ donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{R}_n$ converge comme combinaison linéaire de deux séries convergentes.

Problème 2 — Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Partie I – Généralités et exemple

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $M, N \in E$. On a par linéarité de la trace :

$$T_U(\lambda M + \mu N) = \operatorname{tr}(U(\lambda M + \mu N)) = \operatorname{tr}(\lambda UM + \mu UN) = \lambda \operatorname{tr}(UM) + \mu \operatorname{tr}(UN) = \lambda T_U(M) + \mu T_U(N)$$

Ainsi $T_U \in E^*$.
On a $H_U = \operatorname{Ker}(T_U)$ donc T_U est un sous-espace vectoriel de E.

2. **a.** Puisque $\operatorname{Im} T_U \subset \mathbb{R}$, $\operatorname{rg} T_U \leq 1$. De plus, $T_U \neq 0$ puisque $T_U(I_n) = 4 \neq 0$ par exemple. On en déduit que $\operatorname{rg} T_U = 1$. Par le théorème du rang, $\dim H_U = \dim \operatorname{Ker} T_U = \dim E - \operatorname{rg} T_U = 3$.

b. Posons $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $M \in H_U \cap GL_n(\mathbb{R})$.

Partie II – Quelques résultats utiles

3. On a facilement

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ji}$$

et

$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_{ij} A_{ji}$$

Les indices de sommation étant muets, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

4. On a $\operatorname{tr}(0.M) = 0$ pour tout $M \in E$ donc $H_0 = E$.

5. Puisque $\operatorname{Im} T_U \subset \mathbb{R}$, $\operatorname{rg} T_U \leq 1$. Comme U est non nulle, il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $U_{ij} \neq 0$. On a alors $\operatorname{tr}(UE_{ji}) = U_{ij} \neq 0$. Ainsi $T_U \neq 0$ et donc $\operatorname{rg} T_U = 1$. D'après le théorème du rang, $\dim H_U = \dim E - 1$ et donc H_U est un hyperplan de E.

6. Soit $U \in \operatorname{Ker} \Phi$. Alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $U_{ij} = \operatorname{tr}(UE_{ji}) = T_U(E_{ji}) = 0$. Ainsi $U = 0$, ce qui prouve que $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$ et donc que Φ est injective. De plus, $\dim E = \dim E^*$ donc Φ est un isomorphisme.

7. Comme H est un hyperplan, il existe $\varphi \in E^*$ non nulle telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi$. Posons $U = \Phi^{-1}(\varphi)$. On a alors $H = \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} T_U = H_U$.
De plus, $U \neq 0$ sinon on aurait $H_U = E$ d'après **II.4**.

Partie III – Le résultat général

8. Une permutation circulaire des vecteurs colonnes de P transforme cette matrice en I_n. Comme cette opération ne change pas le rang, on en déduit que $\operatorname{rg} P = \operatorname{rg} I_n = n$ et donc que P est inversible.
On pose $J_r = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{J} \\ 0 & \end{array}\right)$ de sorte que $J_r P = \left(\begin{array}{c|c} 0 \cdots 0 & 1 \\ \hline & 0 \\ \tilde{J} & \vdots \\ & 0 \end{array}\right)$. Comme $\tilde{J}$ est diagonale, tous les coefficients diagonaux de $J_r P$ sont nuls et donc $\operatorname{tr}(J_r P) = 0$ i.e. $P \in H_{J_r}$.

9. D'après la question **II.7**, il existe $U \in E$ non nulle telle que $H = H_U$. Posons $r = \operatorname{rg} U$. Les matrices J_r et U sont équivalentes : il existe donc $R, S \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $J_r = RUS$. Puisque $U \neq 0$, $r \geq 1$ et d'après la question précédente, $P \in H_{J_r}$. En utilisant la question **II.3**,

$$0 = \operatorname{tr}(J_r P) = \operatorname{tr}(RUSP) = \operatorname{tr}(USPR)$$

Posons $M = SPR$ donc $\operatorname{tr}(UM) = 0$ i.e. $M \in H_U = H$. De plus, M est inversible comme produit de matrices inversibles.