

# ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

## Familles libres, liées, génératrices et bases

### Solution 1

1. C'est faux en général ! Par exemple pour  $a = b = 0$ , on a  $1 \cdot a + 1 \cdot b = 0$  mais  $(1, 1) \neq (0, 0)$  !
2. C'est faux en général ! Par exemple si  $a = 0$ ,  $\forall b \in E$ ,  $(a, b)$  est liée ! L'implication est vraie si on a de plus l'hypothèse  $a \neq 0$ .
3. C'est faux en général ! Par exemple si  $a = b = 0$ ,  $\forall c \in E$ ,  $(a, b, c)$  est liée !

### Solution 2

Notons respectivement  $u, v$  et  $w$  les vecteurs suivants,

$$(m, 1, 1), (2m, -1, m), (1, 5, 2).$$

Appliquons le critère usuel en recherchant les solutions réelles  $x, y, z$  du système suivant

$$yu + zv + xw = 0,$$

ie, sous forme matricielle,

$$\begin{bmatrix} 1 & m & 2m \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \leftarrow L_3 \leftarrow L_1 \end{matrix}$$

puis par les opérations  $L_2 \leftarrow 5L_2 - 2L_1$  et  $L_3 \leftarrow -5L_3 + L_1$ ,

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5m+2 \\ 0 & 1-5m & -1-10m \end{bmatrix}$$

et par l'opération  $L_3 + \frac{1}{3}(5m-1)L_2$ ,

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5m+2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3}(5m^2-5m-1) \end{bmatrix}$$

Le système est donc libre si et seulement si

$$5m^2 - 5m - 1 \neq 0,$$

c'est-à-dire,

$$m \neq \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{10}.$$

### Solution 3

Appliquons le critère usuel : soient  $a, b$  et  $c \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall x > 0, ae^x + bx^2 + c \ln(x) = 0.$$

On a pour tout  $x$  strictement positif,

$$a + bx^2e^{-x} + c \ln(x)e^{-x} = 0,$$

et faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$ , d'après les croissances comparées,

$$a = 0.$$

On a pour tout  $x$  strictement positif,

$$b + c \frac{\ln(x)}{x^2} = 0,$$

et faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$ , d'après les croissances comparées,

$$b = 0.$$

On a alors  $c = 0$  car la fonction logarithme est non nulle.

#### Solution 4

Appliquons la méthode du pivot de Gauss de détermination du rang.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{bmatrix}$$

par  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - aL_1$ . Puis, par  $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ , on aboutit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a^2-a \end{bmatrix}, \text{ où } 2-a-a^2 = (2+a)(1-a).$$

► Si  $a = 1$  ou  $a = -2$ , le rang de la famille n'est pas égal à trois donc la famille est liée.

► Si  $a \neq 1$  et  $a \neq -2$ , le rang vaut trois et la famille est donc libre.

La famille est donc libre si et seulement si  $a \notin \{-2, 1\}$ .

#### Solution 5

##### 1. Le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = a \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = b \\ 3\lambda_1 = c \end{cases}$$

a une solution si, et seulement si,  $a - 2b + c = 0$ . Le couple  $(u_1, u_2)$  n'engendre donc pas  $\mathbb{R}^3$ .

**REMARQUE.** On démontrera, en étudiant la théorie de la dimension, qu'une famille génératrice de  $\mathbb{R}^n$  compte *au moins*  $n$  vecteurs, ce qui permet de répondre à cette question sans calcul.

##### 2. Le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 = a \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = b \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = c \end{cases}$$

possède une unique solution, quel que soit le second membre  $(a, b, c)$ . (Il suffit de réduire le système sous forme triangulaire pour le constater.)

Par conséquent, la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  est une famille génératrice (et même une base) de  $\mathbb{R}^3$ .

##### 3. Famille génératrice (et même base) de $\mathbb{R}^3$ .

##### 4. Le système

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (a, b, c)$$

possède une solution si, et seulement si,  $a + b = 0$ , donc la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  n'engendre pas  $\mathbb{R}^3$ .

## 5. Le système

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (a, b, c)$$

possède une solution si, et seulement si,  $-a + b + c = 0$ , donc la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  n'engendre pas  $\mathbb{R}^3$ .

## 6. Le système

$$\sum_{k=1}^4 \lambda_k u_k = (a, b, c)$$

possède une infinité de solutions, quel que soit le second membre, donc la famille  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  engendre  $\mathbb{R}^3$ .

**Solution 6**1. Comme  $(e_1, e_2)$  est libre,  $u \in \text{vect}(e_1, e_2)$  si et seulement si  $(e_1, e_2, u)$  est liée. Pivotons...

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ x & 1 & y & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1-2x & y-3x & 1-4x \end{bmatrix}$$

par  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - xL_1$ . Puis

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & y-3x & -3+4x \end{bmatrix}$$

par  $L_3 \leftarrow (L_3 + (1-2x)L_2)/4$ . Ainsi

$$(x, 1, y, 1) \in \text{vect}(e_1, e_2)$$

si et seulement si

$$y - 3x = 0, \quad -3 + 4x = 0,$$

ie

$$(x, y) = \left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right).$$

2. Comme  $(e_1, e_2)$  est libre,  $u \in \text{vect}(e_1, e_2)$  si et seulement si  $(e_1, e_2, u)$  est liée. Pivotons...

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ x & 1 & 1 & y \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1-2x & 1-3x & y-4x \end{bmatrix}$$

par  $L_2 \leftarrow (L_2 - L_1)/4$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - xL_1$ . Puis

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1-3x & y+4x-4 \end{bmatrix}$$

par  $L_3 \leftarrow (L_3 + (1-2x)L_2)/4$ . Ainsi

$$(x, 1, 1, y) \in \text{vect}(e_1, e_2)$$

si et seulement si

$$1 - 3x = 0, \quad y + 4x - 4 = 0,$$

ie

$$(x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right).$$

**Solution 7**

Soient  $(f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{a_n})$  une sous-famille finie de  $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$  (les  $a_i$  sont donc distincts deux à deux) et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_i} = 0$ . On peut supposer  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  sans perte de généralité. Supposons qu'il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\lambda_i \neq 0$  et posons alors  $j = \max\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \neq 0\}$ . Alors  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_i} \sim_{+\infty} \lambda_j f_{a_j}$ . D'où  $\lambda_j f_{a_j} \sim_{+\infty} 0$ , ce qui est absurde. C'est donc que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_i = 0$ . La famille  $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$  est donc libre.

On en déduit que la famille  $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$  est libre.

**Solution 8**

Soient  $(f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{a_n})$  une sous-famille finie de  $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$  (les  $a_i$  sont donc distincts deux à deux) et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_i} = 0$ . Supposons qu'il existe  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\lambda_j \neq 0$ . Alors  $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \lambda_i f_{a_i} = -\lambda_j f_{a_j}$ . Le membre de gauche est dérivable en  $a_j$  alors que le membre de droite ne l'est pas d'où une contradiction. C'est donc que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_i = 0$ . La famille  $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$  est donc libre. On en déduit que la famille  $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$  est libre.

**Solution 9**

1. Soit  $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ .

Si  $m = n$ , alors

$$\int_0^{2\pi} f_m(t) f_n(t) dt = \int_0^{2\pi} \sin^2(mt) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos(2mt)) dt = \pi$$

Si  $m \neq n$

$$\int_0^{2\pi} f_m(t) f_n(t) dt = \int_0^{2\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos((m-n)t) - \cos((m+n)t)) dt = 0$$

2. Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$ . Alors pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{2\pi} \lambda_i f_i(t) f_j(t) dt = 0$$

et donc  $\lambda_j = 0$  d'après la première question. La famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est donc libre.

On en déduit que la famille  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est libre.

**Solution 10**

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$  tel que  $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$ .

Alors  $(a + b\sqrt{2})^2 = (-c\sqrt{3})^2$  et donc  $a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} = 3c^2$ . On en déduit que  $ab\sqrt{2}$  est rationnel et donc que  $ab = 0$  car  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

Si  $b = 0$ , alors  $a + c\sqrt{3} = 0$  et donc  $c\sqrt{3}$  est rationnel puis que  $c = 0$  car  $\sqrt{3}$  est irrationnel. Finalement, on a également  $a = 0$ . Ainsi  $a = b = c = 0$  dans ce cas.

Si  $a = 0$ , alors  $b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$  et donc  $b = c = 0$  car  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  et  $\frac{2}{3}$  sont irrationnels. On a également  $a = b = c = 0$  dans ce cas.

On a donc  $a = b = c = 0$  dans tous les cas, ce qui prouve que  $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$  est une famille libre du  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}$ .

**Solution 11**

On remarque que  $f = \cos(a) \sin + \sin(a) \cos$ ,  $g = \cos(b) \sin + \sin(b) \cos$  et  $h = \cos(c) \sin + \sin(c) \cos$ . Ainsi  $\text{vect}(f, g, h) \subset \text{vect}(\sin, \cos)$ . Puisque la famille  $(\sin, \cos)$  est libre,  $\dim \text{vect}(\sin, \cos) = 2$  puis  $\text{rg}(f, g, h) \leq 2$ . De plus,  $\text{rg}(f, g, h) \geq 1$  car  $f$  est non nulle. Ainsi  $\text{rg}(f, g, h)$  vaut 1 ou 2.

Supposons que  $\text{rg}(f, g, h) = 1$ . Alors  $\text{vect}(f)$  et  $\text{vect}(f, g, h)$  ont même dimension et  $\text{vect}(f) \subset \text{vect}(f, g, h)$  donc  $\text{vect}(f, g, h) = \text{vect}(f)$ . On en déduit qu'il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $g = \lambda f$  et  $h = \mu f$  ou encore

$$\cos(b) \sin + \sin(b) \cos = \lambda \cos(a) \sin + \lambda \sin(a) \cos$$

$$\cos(c) \sin + \sin(c) \cos = \mu \cos(a) \sin + \mu \sin(a) \cos$$

Puisque la famille  $(\sin, \cos)$  est libre,  $\cos(b) = \lambda \cos(a)$  et  $\sin(b) = \lambda \sin(a)$ . Ainsi,  $\cos(b) \sin(a) - \sin(b) \cos(a) = 0$  i.e.  $\sin(a - b) = 0$  ou encore  $a \equiv b[\pi]$ . On montre de même que  $a \equiv c[\pi]$ .

Réciproquement, si  $a \equiv b[\pi]$  et  $a \equiv c[\pi]$ , alors  $g = \pm f$  et  $h = \pm f$  donc  $\text{vect}(f, g, h) = \text{vect}(f)$  puis  $\text{rg}(f, g, h) = 1$ .

Finalement,  $\text{rg}(f, g, h) = 1$  si  $a \equiv b \equiv c[\pi]$  et  $\text{rg}(f, g, h) = 2$  sinon.

**Solution 12**

1. La somme des vecteurs de la famille est nulle : cette famille est donc liée.

2. Posons  $u_k = v_k + v_{k+1}$  pour  $n \in \llbracket 1, n \rrbracket$  en convenant que  $v_{n+1} = v_1$ . Alors, si  $n$  est pair

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k u_k = \sum_{k=1}^n (-1)^k v_k - (-1)^{k+1} v_{k+1} = (-1)^n v_{n+1} - v_1 = 0_E$$

Supposons maintenant  $n$  impair. Soit alors  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  tel que  $\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0_E$ . Alors, en convenant que  $\lambda_0 = \lambda_n$

$$\sum_{k=1}^n (\lambda_k + \lambda_{k-1}) v_k = 0_E$$

Par liberté de la famille  $(v_1, \dots, v_n)$ ,  $\lambda_k = -\lambda_{k-1}$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On en déduit notamment que  $\lambda_n = (-1)^n \lambda_0$  et donc  $\lambda_n = 0$  puisque  $n$  est impair et  $\lambda_0 = 0$ . Comme  $\lambda_k = -\lambda_{k-1}$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$  de sorte que la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre.

3. Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  tel que  $\sum_{k=1}^n \lambda_k w_k = 0_E$ . Par inversion de l'ordre de sommation,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k w_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \lambda_k w_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n \lambda_k w_j$$

En posant  $\mu_j = \sum_{k=j}^n \lambda_k$ , on a donc  $\sum_{j=1}^n \mu_j w_j = 0_E$  et donc  $(\mu_1, \dots, \mu_n) = (0, \dots, 0)$  par liberté de la famille  $(u_1, \dots, u_n)$ . On montre alors successivement que  $\lambda_n, \dots, \lambda_1$  sont nuls. La famille  $(w_1, \dots, w_n)$  est donc libre.

### Solution 13

Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k (y + x_k) = 0_E$$

En posant  $\Lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ , l'égalité s'écrit

$$\sum_{k=1}^n (\Lambda \alpha_k + \lambda_k) x_k = 0_E$$

Puisque la famille  $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$  est libre,  $\Lambda \alpha_k + \lambda_k = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Posons  $A = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ . En additionnant les  $n$  égalités précédentes, on aboutit à  $(A + 1)\Lambda = 0$ .

Si  $A \neq -1$ , on a  $\Lambda = 0$  et donc, d'après les calculs précédents,  $\lambda_k = -\Lambda \alpha_k = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . La condition  $A \neq -1$  est donc une condition *suffisante* pour que la famille  $(y + x_k)_{1 \leq k \leq n}$  soit libre.

Réciproquement, montrons que  $A \neq -1$  est une condition *nécessaire* pour que la famille  $(y + x_k)_{1 \leq k \leq n}$  soit libre. Raisonnons par contraposition en supposant  $A = -1$ . Alors  $\sum_{k=1}^n \alpha_k (y + x_k) = Ay - y = 0_E$ . De plus, les  $\alpha_k$  ne sont pas tous nuls puisque leur somme vaut  $-1$ . La famille  $(y + x_k)_{1 \leq k \leq n}$  est donc liée.

## Dimension d'un espace vectoriel

### Solution 14

1. On a  $F = \{(x, y, z, x - y + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ , et donc  $F = \text{vect}(u_1, u_2, u_3)$  où  $u_1 = (1, 0, 0, 1)$ ,  $u_2 = (0, 1, 0, -1)$  et  $u_3 = (0, 0, 1, 1)$ .

► Cette famille étant libre,  $F$  est sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 3.

►  $a \in F$  donc il existe un unique triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de réels tel que

$$a = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3,$$

ce qui est équivalent au système suivant,

$$\begin{cases} \alpha & & & = 3 \\ & \beta & & = 1 \\ & & \gamma & = 2 \\ \alpha - \beta + \gamma & = 4 \end{cases}$$

Les coordonnées de  $a$  dans la base  $(u_1, u_2, u_3)$  sont donc  $(3, 1, 2)$ .

2. On a  $G = \{(x, y, x - y, -y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ , et donc  $F = \text{vect}(v_1, v_2)$  où  $v_1 = (1, 0, 1, 0)$  et  $v_2 = (0, 1, -1, -1)$ .

► Cette famille étant libre,  $G$  est sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 2.

►  $b \in F$  donc il existe un unique couple  $(\alpha, \beta)$  de réels tel que

$$a = \alpha v_1 + \beta v_2,$$

ce qui est équivalent au système suivant,

$$\begin{cases} \alpha & = & 4 \\ & \beta & = & 1 \\ \alpha - \beta & = & 3 \\ & -\beta & = & -1 \end{cases}$$

Les coordonnées de  $b$  dans la base  $(v_1, v_2)$  sont donc  $(4, 1)$ .

3. Un vecteur  $(x, y, z, t)$  appartient à  $F \cap G$  si et seulement si ,

$$\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ x - y - z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$$

et par l'opération  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ ,

$$\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ -2z + t = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$$

ainsi ,

$$x = -z, \quad y = -2z, \quad t = 2z$$

et

$$F \cap G = \{(-z, -2z, z, 2z) \mid z \in \mathbb{R}\},$$

soit en posant  $w = (-1, -2, 1, 2)$ ,

$$F \cap G = \text{vect}(w).$$

$F \cap G$  est donc de dimension 1 et de base  $(w)$ .

### Solution 15

1. Puisque les solutions de l'équation caractéristique  $z^2 + z + 1 = 0$  sont  $j$  et  $j^2$ ,  $\mathcal{S}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  de dimension deux et de base

$$(x \mapsto e^{jx}, x \mapsto e^{j^2x}).$$

2. Les quatre fonctions suivantes forment une base du  $\mathbb{R}$ -ev  $\mathcal{S}$ ,

$$x \mapsto e^{jx}, \quad x \mapsto ie^{jx}$$

et

$$x \mapsto e^{j^2x}, \quad x \mapsto ie^{j^2x}.$$

$\mathcal{S}$  est donc de dimension quatre en tant que  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

3. Puisque  $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ , les deux fonctions suivantes forment une base du  $\mathbb{R}$ -ev  $\mathcal{S}'$ ,

$$x \mapsto e^{\frac{-x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right), \quad x \mapsto e^{\frac{-x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

4. Les solutions sur  $\mathbb{R}$  de  $y'' + 4y = 0$  sont les fonctions de la forme ,

$$x \mapsto \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

La condition  $y(\pi) = 0$  impose  $\lambda = 0$ .  $\mathcal{S}'$  est donc une droite vectorielle engendrée par

$$x \mapsto \sin(2x).$$

### Solution 16

On a

$$E = \{(2y - z, y, z, 3y) \mid y, z \in \mathbb{R}\},$$

donc en posant  $u = (2, 1, 0, 3)$  et  $v = (-1, 0, 1, 0)$ , on a  $E = \text{vect}(u, v)$  donc  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ . La famille  $(u, v)$  étant clairement libre,  $E$  est de dimension 2 et de base  $\mathcal{B} = (u, v)$ .

### Solution 17

1. La famille  $(a, b)$  est manifestement libre donc  $\text{vect}(a, b)$  est de dimension 2.
2. Utilisons la présentation matricielle.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & c \\ 3 & 0 & -2 & a \\ 0 & 3 & 1 & b \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & c \\ 0 & 12 & 4 & a + 3c \\ 0 & 3 & 1 & b \end{array} \right] \quad L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & c \\ 0 & 12 & 4 & a + 3c \\ 0 & 0 & 0 & 4b - a - 3c \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow 4L_3 - L_2$$

La famille est donc de rang 2 et  $4b - a - 3c = 0$ .

3. Utilisons la présentation matricielle.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & a \\ 1 & 3 & 1 & b \\ -2 & 1 & 2 & c \\ 1 & -1 & 1 & d \\ 0 & 1 & 2 & e \\ -3 & 1 & 0 & f \\ 4 & 5 & 1 & g \end{array} \right]$$

et par les opérations  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ ,  $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ ,  $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ ,  $L_6 \leftarrow L_6 + 3L_1$ ,  $L_7 \leftarrow L_7 - 4L_1$ ,

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & 2 & 3 & b - a \\ 0 & 3 & -2 & c + 2a \\ 0 & -2 & 3 & d - a \\ 0 & 1 & 2 & e \\ 0 & 4 & -6 & f + 3a \\ 0 & 1 & 9 & g - 4a \end{array} \right]$$

puis par les opérations  $L_2 \leftarrow L_5$ ,  $L_3 \leftarrow -L_2 + 2L_5$ ,  $L_4 \leftarrow 3L_5 - L_3$ ,  $L_5 \leftarrow L_4 + 2L_5$ ,  $L_6 \leftarrow L_6 + 2L_4$ ,  $L_7 \leftarrow L_7 - L_5$ ,

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & 2 & e \\ 0 & 0 & 1 & -b + a + 2e \\ 0 & 0 & 8 & -c - 2a + 3e \\ 0 & 0 & 7 & d - a + 2e \\ 0 & 0 & 0 & a + 2d + f \\ 0 & 0 & 7 & g - 4a - e \end{array} \right]$$

par les opérations  $L_4 \leftarrow L_4 - 8L_3$ ,  $L_5 \leftarrow L_5 - 7L_3$ ,  $L_7 \leftarrow L_7 - 7L_3$ ,

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & 2 & e \\ 0 & 0 & 1 & -b + a + 2e \\ 0 & 0 & 0 & -10a + 8b - c - 13e \\ 0 & 0 & 0 & -8a + 7b + d - 12e \\ 0 & 0 & 0 & a + 2d + f \\ 0 & 0 & 0 & -11a + 7b - 15e + g \end{array} \right]$$

Le système est donc de rang 3 et vérifie les relations suivantes ,

$$-b + a + 2e = 0,$$

$$-10a + 8b - c - 13e = 0,$$

$$a + 2d + f = 0$$

et

$$-11a + 7b - 15e + g = 0.$$

### Solution 18

1. Il est clair que  $(1)$  est une base du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  qui est donc de dimension 1. Ses sous-espaces vectoriels sont donc de dimension 0 ou 1, il n'y en a donc que deux :  $\{0\}$  et  $\mathbb{C}$ .
2. La famille  $(1, i)$  est une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  puisque tout nombre complexe s'écrit de manière unique sous la forme

$$a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  est donc de dimension 2. Ses sous-espaces vectoriels sont donc de dimension 0, 1 ou 2, il s'agit donc de  $\{0\}$ ,  $\mathbb{C}$  et des droites vectorielles  $\mathbb{R}z$  pour tout  $z \neq 0$ .

### Solution 19

Toute suite arithmétique  $u$  est de la forme

$$(an + b)_{n \geq 0} = a(n)_{n \geq 0} + b(1)_{n \geq 0},$$

où  $a, b \in \mathbb{R}$ . Les vecteurs  $u = (n)_{n \geq 0}$  et  $v = (1)_{n \geq 0}$  engendrent donc l'espace vectoriel des suites arithmétiques. Puisque  $(u, v)$  est clairement libre, cet espace est de dimension 2 et de base  $\mathcal{B} = (u, v)$ .

### Solution 20

1.  $F = \{\lambda(1, 2, 3, 0) + \mu(1, -1, 4, 2) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$ . Ainsi,  $F$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^4$  engendré par les vecteurs  $(1, 2, 3, 0)$  et  $(1, -1, 4, 2)$ .
2. Les deux vecteurs ci-dessus n'étant pas colinéaires, ils forment une base de  $F$ . Par conséquent,  $\dim F = 2$ .

### Solution 21



1. Par définition,  $E$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  engendré par les vecteurs  $u = (1, 2, 3)$ ,  $v = (3, 2, 1)$ , et  $w = (1, 1, 1)$ . Il est clair que les vecteurs  $(u, v)$  sont linéairement indépendants, d'où  $\dim F \geq 2$ . D'autre part,  $w = \frac{u+v}{2}$ , ce qui implique  $E = \text{vect}(u, v)$ . Par conséquent,  $\dim(E) = 2$ .
2. L'ensemble  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  en tant qu'espace des solutions du système homogène

$$x - y = 0$$

à trois inconnues  $x, y$  et  $z$ . Une base de  $F$  est  $((0, 0, 1), (1, 1, 0))$ . Donc  $\dim(F) = 2$ .

3. L'ensemble  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  en tant qu'espace des solutions du système homogène suivant :

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x - z = 0. \end{cases}$$

Le vecteur nul en est l'unique solution. Donc  $G$  est l'espace nul,  $\dim(G) = 0$  (sa base est la famille vide).

4. L'ensemble  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  en tant qu'espace des solutions du système homogène suivant :

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0. \end{cases}$$

On résout ce système (la première équation est superflue car elle est la somme des deux autres) et on trouve que  $H = \mathbb{K}(3, -1, 1)$ , donc  $\dim(H) = 1$ .

5. L'ensemble  $L$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  en tant qu'espace des solutions du système homogène suivant :

$$\begin{cases} -x + 3y + z = 0 \\ -2x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

On trouve que les solutions sont de la forme  $(\lambda, 0, \lambda)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Donc  $(1, 0, 1)$  est une base de  $L$  et  $\dim(L) = 1$ .

## Solution 22

Appliquons la méthode du pivot de Gauss...

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & u_3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 & u_2 \\ 1 & 0 & -3 & -5 & u_4 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & u_3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & u_2 - u_1 \\ 0 & -2 & -2 & -8 & u_4 - u_1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 - u_1 + u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_4 - u_1 + 2u_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le rang de la famille vaut donc 2 et les vecteurs sont reliés par les deux relations

$$u_2 = u_1 - u_3 \text{ et } u_4 = u_1 - 2u_3.$$

On a donc  $F = \text{vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \text{vect}(u_1, u_3)$  et puisque  $u_1$  et  $u_3$  ne sont pas colinéaires,  $(u_1, u_3)$  est une base de  $F$ .

## Solution 23

Raisonnons en deux temps.

► Supposons l'existence d'un supplémentaire commun  $S$  de  $F$  et  $G$  dans  $E$ . Comme

$$\dim(S) = \dim(E) - \dim(F) = \dim(E) - \dim(G),$$

on a  $\dim(F) = \dim(G)$ .

► Raisonsnons par récurrence (descendante) sur la dimension commune de  $F$  et  $G$ . Pour tout  $0 \leq k \leq n$ , notons  $HR(k)$  la propriété suivante : deux sev  $F$  et  $G$  de même dimension  $k$  admettent un supplémentaire dans  $E$  commun  $S$ .

★  $HR(n)$  est banale car  $S = \{0\}$  convient clairement.

★ Soit  $1 \leq k \leq n$ . Supposons  $HR(k)$  vraie. Soient  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$  de même dimension  $k - 1$ . Si  $F = G$ ,  $F$  et  $G$  admettent clairement un supplémentaire dans  $E$  commun  $S$  (c'est du cours !) Sinon, *on sait que*  $F \cup G$  n'est pas un sev de  $E$  et en particulier que  $F \cup G \neq E$  : il existe donc  $u \in E \setminus (F \cup G)$ . On sait qu'alors  $F \oplus \mathbb{K}u$  et  $G \oplus \mathbb{K}u$  sont deux sev de dimension  $k - 1 + 1 = k$ . D'après  $HR(k)$ , ils admettent donc un supplémentaire dans  $E$  commun noté  $S$ . Il est alors clair que  $S \oplus \mathbb{K}u$  est supplémentaire commun de  $F$  et  $G$  dans  $E$ , d'où  $HR(k - 1)$ .

★ La propriété  $HR(k)$  est vraie pour tout  $0 \leq k \leq n$  d'après le principe de récurrence.

**REMARQUE.** On a utilisé la propriété classique suivante : si  $F$  et  $G$  sont deux sev de  $E$ ,  $F \cup G$  est un sev de  $E$  si et seulement si  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ . Si  $\dim(F) = \dim(G)$ , on peut remplacer cette dernière condition par  $F = G$ .

## Solution 24

Appliquons la méthode du pivot de Gauss. On a

$$\begin{aligned} S &\sim \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & \beta \\ \alpha & 1 & \beta & 1 \\ \alpha & \beta & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & \beta \\ \alpha & 1 & \beta & 1 \\ \alpha & \beta & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \beta - 1 \end{bmatrix}, L_5 \leftarrow L_5 - L_3 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & \beta \\ \alpha & 1 & \beta & 1 \\ 0 & \beta - 1 & \alpha - \beta & 0 \\ 1 & \alpha & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \beta - 1 \end{bmatrix}, L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & \beta \\ 0 & 1 - \alpha^2 & \beta - \alpha & 1 - \alpha\beta \\ 0 & \beta - 1 & \alpha - \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta - 1 & \alpha - \beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

par  $L_2 \leftarrow L_2 - \alpha L_1$ ,  $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ .

► Cas 1 :  $\beta \neq 1$ . Le rang vaut 4.

► Cas 2 :  $\beta = 1$  et  $\alpha = 1$ . On a alors

$$S \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et donc le rang vaut 1.

► Cas 3 :  $\beta = 1$  et  $\alpha = -1$ . On a alors

$$S \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

et donc le rang vaut 2.

► Cas 4 :  $\beta = 1$  et  $\alpha \neq \pm 1$ . On a alors

$$S \sim \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 - \alpha^2 & 1 - \alpha & 1 - \alpha \\ 0 & 0 & \alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et le rang vaut alors 4.

### Solution 25

1. Puisqu'en dimension 1, le seul hyperplan est l'espace nul, on a  $n \geq 2$ .
2. Puisque les deux hyperplans sont distincts, il existe  $u \in H_1 \setminus H_2$ . On a donc

$$E = H_2 \oplus \mathbb{K}u \subset H_2 + H_1 \subset E,$$

ainsi  $E = H_1 + H_2$  et d'après la formule de Grassmann,

$$\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1 + n - 1 - n = n - 2.$$

### Solution 26

Intuitivement, une fonction de  $F$  est uniquement déterminée par ses valeurs en les  $x_i$ . Considérons donc l'application

$$\phi : \begin{cases} F & \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ f & \longmapsto (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)) \end{cases}$$

L'application  $\phi$  est clairement linéaire.

Soit  $f \in \text{Ker } \phi$ . Il existe  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  et  $(b_0, b_1, \dots, b_n)$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  tels que  $f|_{[x_i, x_{i+1}]} : x \mapsto a_i x + b_i$ . Pour tout  $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$

$$\begin{cases} a_i x_i + b_i = 0 \\ a_i x_{i+1} + b_i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_i(x_{i+1} - x_i) = 0 \\ a_i x_i + b_i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_i = 0 \\ b_i = 0 \end{cases}$$

Ainsi  $f = 0$  et  $\phi$  est surjective.

Soit  $y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Cherchons  $f \in F$  telle que  $\phi(f) = y$ . En prenant les mêmes notations que précédemment, on cherche donc  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  et  $(b_0, b_1, \dots, b_n)$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  tels que

$$\begin{cases} a_i x_i + b_i = y_i \\ a_i x_{i+1} + b_i = y_{i+1} \end{cases} \iff \begin{cases} a_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \\ b_i = y_i - a_i x_i \end{cases}$$

Ce qui montre que  $\phi$  est surjective.

Donc  $\phi$  est un isomorphisme et  $\dim F = \dim \mathbb{R}^{n+1} = n + 1$ .

On obtient facilement une base  $(e_i)_{0 \leq i \leq n}$  de  $F$  en considérant l'image réciproque de la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Il s'agit de la base antéduale de la base  $(e_i^*)_{0 \leq i \leq n}$  de  $F^*$  avec  $e_i^*(f) = f(x_i)$  pour  $0 \leq i \leq n$ . Pour  $0 \leq i \leq n$ ,  $e_i$  est la fonction affine par morceaux valant 1 en  $x_i$  et 0 en les  $x_j$  avec  $j \neq i$ .

**Solution 27**

1. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  tels que  $\sum_{i=0}^k \lambda_i u_i = (0)$ . La suite  $\sum_{i=0}^k \lambda_i u_i = (\lambda_0, \dots, \lambda_k, 0, \dots)$  est nulle donc  $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ . Ainsi la famille  $(u_0, \dots, u_k)$  est libre. Ceci étant vrai pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ne peut être de dimension finie.
2. Les  $f_i$  sont bien de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  tels que  $\sum_{i=0}^k \lambda_i f_i = 0$ . En dérivant  $j$  fois où  $0 \leq j \leq k$  et en évaluant en 0, on trouve  $\lambda_j = 0$ . Ainsi la famille  $(f_0, \dots, f_k)$  est libre. Ceci étant vrai pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  ne peut être de dimension finie. Comme  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , ces espaces vectoriels sont également de dimension infinie.

**Solution 28**

1. La suite nulle est évidemment périodique. Soient  $u, v \in E_p$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\lambda u_{n+p} + \mu v_{n+p} = \lambda u_n + \mu v_n$$

car  $u$  et  $v$  sont  $p$ -périodiques. Ainsi  $\lambda u + \mu v$  est également  $p$ -périodique, ce qui prouve que  $E_p$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2. Tout d'abord, les suites  $u^0, \dots, u^{p-1}$  sont bien  $p$ -périodiques puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n + p \equiv n[p]$ . Soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda_0 u^0 + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ . En considérant les termes de rang  $0, \dots, p-1$  dans cette égalité de deux suites, on trouve  $\lambda_0 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$ , ce qui prouve que  $(u^0, \dots, u^{p-1})$  est libre. Soit  $v \in E_p$ . Alors  $v = v_0 u^0 + \dots + v_{p-1} u^{p-1}$ , ce qui prouve que  $(u^0, \dots, u^{p-1})$  engendre  $E_p$ . Ainsi  $(u^0, \dots, u^{p-1})$  est une base de  $E_p$ .
3. Comme  $(u^0, \dots, u^{p-1})$  est une base de  $E_p$  et comporte  $p$  éléments,  $\dim E_p = p$ .
4.  $E_2$  et  $E_4$  sont tous deux des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . De plus, une suite 2-périodique est évidemment 4-périodique donc  $E_2 \subset E_4$ . Ainsi  $E_2$  est un sous-espace vectoriel de  $E_4$ .
5. Soit  $u \in F$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+4} = -u_{n+2} = u_n$  donc  $u \in E_4$ . Ainsi  $F \subset E_4$ . De plus,  $F$  contient la suite nulle et est stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de  $E_4$ .
6. En posant  $x_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$  et  $y_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F = \text{vect}(x, y)$ . Puisque  $F \subset E_4$ , on peut alors affirmer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E_4$ .
7. On montre d'abord que  $(x, y)$  est libre. Soit alors  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\lambda x + \mu y = 0$ . Notamment  $\lambda x_0 + \mu y_0 = 0$  et  $\lambda x_1 + \mu y_1 = 0$ . On en déduit que  $\lambda = \mu = 0$ . La famille  $(x, y)$  est donc libre. Puisque  $F = \text{vect}(x, y)$ ,  $(x, y)$  est une base de  $F$ . Par conséquent,  $\dim F = 2$ . On en déduit que  $\dim E_4 = \dim F + \dim E_2$ . Il ne reste plus qu'à montrer que  $F \cap E_2 = \{0\}$  pour affirmer que  $F$  est un supplémentaire de  $E_2$  dans  $E_4$ . Soit alors  $u \in F \cap E_2$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = -u_{n+2} = -u_n$  i.e.  $u_n = 0$ . On a donc bien  $F \cap E_2 = \{0\}$  puis  $E_4 = F \oplus E_2$ .

**Solution 29**

Si l'équation  $X^2 + aX + b = 0$  admet deux solutions complexes distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , l'ensemble des solutions est  $\text{vect}_{\mathbb{C}}(x \mapsto e^{r_1 x}, x \mapsto e^{r_2 x})$ . C'est donc un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 2 car la famille  $(x \mapsto e^{r_1 x}, x \mapsto e^{r_2 x})$  est libre.

Si l'équation  $X^2 + aX + b = 0$  admet une solution double  $r$ , l'ensemble des solutions est  $\text{vect}_{\mathbb{C}}(x \mapsto e^{rx}, x \mapsto xe^{rx})$ . C'est donc un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 2 car la famille  $(x \mapsto e^{rx}, x \mapsto xe^{rx})$  est libre.

**Solution 30**

D'après la formule de Grassmann,  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 4 - \dim(F \cap G)$ . Puisque  $F + G \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\dim(F + G) \leq 3$  et donc  $\dim(F \cap G) \geq 1$ . En particulier,  $F \cap G \neq \{0_E\}$ . On peut déjà affirmer que  $F$  et  $G$  ne sont pas en somme directe.

Puisque  $F \subset F + G$ ,  $\dim(F + G) \geq 2$ . Supposons que  $\dim(F + G) = 2$ , alors  $\dim(F \cap G) = 2 = \dim F = \dim G$ . Puisque  $F \cap G \subset F$  et  $F \cap G \subset G$ , on en déduit que  $F \cap G = F = G$ , ce qui contredit le fait que  $F$  et  $G$  sont distincts. On a donc  $\dim(F + G) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ . Puisque  $F + G \subset \mathbb{R}^3$ ,  $F + G = \mathbb{R}^3$ .

**Solution 31**

1. Clairement  $\mathcal{S} = \text{vect}_{\mathbb{C}}(f, g)$  avec  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{jx}$  et  $g : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\bar{j}x}$ . Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $\lambda f + \mu g = 0$ . En particulier,  $\lambda f(0) + \mu g(0) = 0$  et  $\lambda f'(0) + \mu g'(0) = 0$ . On a donc  $\lambda + \mu = 0$  et  $j\lambda + \bar{j}\mu = 0$ . Puisque  $j \neq \bar{j}$ , on en déduit sans peine que  $\lambda = \mu = 0$ . Ainsi  $(f, g)$  est une famille libre du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. C'est donc une base de  $\mathcal{S}$  en tant que  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de sorte que  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} = 2$ .
2. Maintenant,  $\mathcal{S} = \text{vect}_{\mathbb{R}}(f, if, g, ig)$ . Soit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $af + bif + cg + dig = 0$ . On a donc  $(a + ib)f + (c + id)g = 0$ . Or  $(f, g)$  est une famille libre du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{S}$  donc  $a + ib = 0$  et  $c + id = 0$ . Puisque  $a, b, c, d$  sont réels,  $a = b = c = d = 0$ . Ainsi  $(f, if, g, ig)$  est une famille libre du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. C'est donc une base de  $\mathcal{S}$  en tant que  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de sorte que  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{S} = 4$ .

**Solution 32**

1. Clairement  $F \subset E$ . Soient  $(y_1, y_2) \in F^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)''(x) = \lambda y_1''(x) + \mu y_2''(x) = \lambda(1 + x^2)y_1(x) + \mu(1 + x^2)y_2(x) = (1 + x^2)(\lambda y_1 + \mu y_2)(x)$$

Donc  $\lambda y_1 + \mu y_2$  est solution de  $(\mathcal{E})$  et appartient donc à  $F$ . Ainsi  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

2.  $f$  est clairement de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}} = xf(x)$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f(x) + xf'(x) = f(x) + x^2 f(x) = (1 + x^2)f(x)$$

Ainsi  $f \in F$ .

Puisque la fonction  $\varphi : t \mapsto e^{-t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , le théorème fondamental de l'analyse permet d'affirmer que  $\psi : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$  est une primitive de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$ . Puisque  $g = f\psi$ ,  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$g' = f'\psi + f\psi' = f'\psi + f\varphi$$

On en déduit que  $g'$  est elle-même de classe  $\mathcal{C}^1$  (donc  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ) et que

$$g'' = f''\psi + f'\psi' + f'\varphi + f\varphi' = f''\psi + 2f'\varphi + f\varphi'$$

Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$g''(x) = f''(x)\psi(x) + 2f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x) = (1 + x^2)f(x)\psi(x) + 2xf(x)\varphi(x) - 2xf(x)\varphi(x) = (1 + x^2)g(x)$$

$g$  appartient donc bien à  $F$ .

3. Soit  $(v, w) \in F^2$ . Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$(v'w - vw')'(x) = v''(x)w(x) - v(x)w''(x) = (1 + x^2)v(x)w(x) - (1 + x^2)v(x)w(x) = 0$$

La fonction  $v'w - vw'$  est donc constante sur  $\mathbb{R}$ .

4. Conformément à l'indication de l'énoncé, on calcule la dérivée de  $h/f$ .

$$(h/f)' = \frac{h'f - hf'}{f^2}$$

Puisque  $h$  et  $f$  appartiennent à  $F$ , la question précédente montre que  $h'f - hf'$  est constante. Notons  $\beta$  cette constante réelle. Ainsi  $(h/f)' = \frac{\beta}{f^2}$ . Autrement dit, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$(h/f)'(x) = \beta e^{-x^2} = \beta \varphi(x) = \beta \psi'(x)$$

Il existe donc une constante réelle  $\alpha$  telle que

$$h/f = \beta \psi + \alpha$$

On en déduit que

$$h = \beta f\psi + \alpha f = \alpha f + \beta g$$

5. Puisque  $f$  et  $g$  appartient au sous-espace vectoriel  $F$ ,  $\text{vect}(f, g) \subset F$ . La question précédente montre l'inclusion réciproque. Ainsi  $F = \text{vect}(f, g)$ .
6. La famille  $(f, g)$  engendre  $F$ . Montrons que cette famille est libre. Soit donc  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\alpha f + \beta g = 0$ . En évaluant en 0, on obtient  $\alpha = 0$ . On a donc  $\beta g = 0$ . En dérivant et en évaluant en 0, on obtient  $\beta g'(0) = 0$ . Or

$$g'(0) = f'(0)\psi(0) + f(0)\varphi(0) = 1$$

de sorte que  $\beta = 0$ . La famille  $(f, g)$  est donc également libre : c'est donc une base de  $F$  de sorte que  $\dim F = 2$ .

## Sommes et dimension

### Solution 33

1.  $F$  est un sous-espace vectoriel en tant que noyau de  $\phi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R}^{10} \\ f & \longmapsto \left(f\left(\frac{1}{k}\right)\right)_{1 \leq k \leq 10} \end{cases}$ .
2. Notons  $G$  l'ensemble des fonctions polynomiales de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  de degré inférieur ou égal à 9.  $G$  est clairement un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
Soit  $f \in F \cap G$ . Alors  $f$  est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 9 admettant 10 racines : elle est nulle. Ainsi  $F \cap G = \{0\}$ .  
Soit  $f \in E$ . On montre classiquement que  $\phi|_G$  est un isomorphisme (interpolation de Lagrange). Il existe donc  $P \in G$  telle que  $P\left(\frac{1}{k}\right) = f\left(\frac{1}{k}\right)$  pour  $k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$ . Mais alors  $g = f - P \in F$ . On a donc  $f = P + g$  avec  $P \in G$  et  $g \in F$ . Ceci prouve que  $E = F + G$ .  
Par conséquent  $E = F \oplus G$ .

### Solution 34

1. a. Puisque le vecteur  $(1, 1, 1)$  est non nul et engendre  $G$ ,  $\dim G = 1$ .  
b. On applique la méthode habituelle.

$$\begin{aligned} F &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, -x_1 - x_2) \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x_1(1, 0, -1) + x_2(0, 1, -1) \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1)) \end{aligned}$$

La famille  $((1, 0, -1), (0, 1, -1))$  engendre  $F$  et est libre car elle est échelonnée et ne comporte pas le vecteur nul : c'est donc une base de  $F$ .

On a donc  $\dim F = 2$ .

- c.  $(0, 0, 0) \in F \cap G$  car  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .  
Soit  $(x_1, x_2, x_3) \in F \cap G$ . Puisque  $(x_1, x_2, x_3) \in G$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $x_1 = x_2 = x_3 = \lambda$ . Puisque  $(x_1, x_2, x_3) \in F$ ,  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  et donc  $3\lambda = 0$  puis  $\lambda = 0$ . On a donc  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ .  
Ainsi  $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$ .  
De plus,  $\dim F + \dim G = 3 = \dim E$ , ce qui permet de conclure que  $E = F \oplus G$ .
- d. On remarque que  $a = (-1, 0, 1) + (2, 2, 2)$  avec  $(-1, 0, 1) \in F$  et  $(2, 2, 2) \in G$ . La projection de  $a$  sur  $F$  parallèlement à  $G$  est donc  $(-1, 0, 1)$  et la projection de  $a$  sur  $G$  parallèlement à  $F$  est  $(2, 2, 2)$ .

2. a. A nouveau, le vecteur  $(1, \dots, 1)$  est non nul et engendre  $G$  donc  $\dim G = 1$ .  
b. On applique toujours la même méthode.

$$\begin{aligned} F &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_1 - \dots - x_{n-1}) \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}\} \\ &= \{x_1 u_1 + \dots + x_{n-1} u_{n-1} \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}\} \\ &= \text{vect}(u_1, \dots, u_{n-1}) \end{aligned}$$

où pour  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $u_i$  est le vecteur de  $E$  dont la  $i^{\text{ème}}$  composante vaut 1, dont la  $n^{\text{ème}}$  composante vaut  $-1$  et dont toutes les autres composantes sont nulles.

La famille  $(u_1, \dots, u_{n-1})$  engendre  $F$  et est libre car elle est échelonnée et ne comporte pas le vecteur nul : c'est donc une base de  $F$ .

On a donc  $\dim F = n - 1$ .

- c.  $0_E \in F \cap G$  car  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in F \cap G$ . Puisque  $(x_1, \dots, x_n) \in G$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $x_1 = \dots = x_n = \lambda$ . Puisque  $(x_1, \dots, x_n) \in F$ ,  $x_1 + \dots + x_n = 0$  et donc  $n\lambda = 0$  puis  $\lambda = 0$  car  $n \geq 0$ . On a donc  $(x_1, \dots, x_n) = 0_E$ .

Ainsi  $F \cap G = \{0_E\}$ .

De plus,  $\dim F + \dim G = n = \dim E$ , ce qui permet de conclure que  $E = F \oplus G$ .

3. Comme  $F$  est un hyperplan de  $E$ ,  $\dim F = n - 1$ . Comme  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $0_E \in F$ . Puisque  $u \notin F$ ,  $u \neq 0_E$  et donc  $\dim G = 1$ .

Supposons que  $F \cap G \neq \{0_E\}$ . Puisque  $F \cap G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $0_E \in F \cap G$ . Or  $F \cap G \neq \{0_E\}$  donc il existe  $x \in F \cap G$  tel que  $x \neq 0_E$ . Puisque  $x \in G$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $x = \lambda u$ . Or  $x \neq 0_E$  donc  $\lambda \neq 0$ . D'où  $u = \frac{1}{\lambda}x$ . Or  $x \in F$  et  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  donc  $u = \frac{1}{\lambda}x \in F$ , ce qui contredit l'énoncé.

Ainsi  $F \cap G = \{0_E\}$  et  $\dim F + \dim G = (n - 1) + 1 = n = \dim E$ , ce qui permet d'affirmer que  $E = F \oplus G$ .

### Solution 35

1. On a clairement  $G = \{(x, y, 0, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ , ainsi  $G = \text{vect}(u_1, u_2)$  où

$$u_1 = (1, 0, 0, 0) \text{ et } u_2 = (0, 1, 0, 0).$$

$G$  est donc un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 2 puisque  $(u_1, u_2)$  est manifestement libre.

Un vecteur  $(x, y, z, t)$  appartient à  $F$  si et seulement si

$$\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ 2x - y + 3z - 4t = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire, par l'opération  $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ ,

$$\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{cases}$$

d'où,

$$\begin{cases} y = -z + 2t \\ x = -2z + 3t \end{cases}$$

Ainsi,

$$F = \{(-2z + 3t, -z + 2t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\},$$

ainsi  $G = \text{vect}(u_1, u_2)$  où

$$v_1 = (-2, -1, 1, 0) \text{ et } v_2 = (3, 2, 0, 1).$$

$F$  est donc un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 2 puisque  $(v_1, v_2)$  est clairement libre.

2. Puisque  $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ , pour établir que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ , il suffit de vérifier que  $F \cap G = \{0\}$ . Soit  $(x, y, z, t) \in F \cap G$ , on a alors  $z = t = 0$  et donc  $(x, y, z, t) = 0$  d'après les calculs menés à la question précédente. On sait alors que la famille

$$\mathcal{B} = (u_1, u_2, v_1, v_2)$$

est une base de  $E$  adaptée à la décomposition en somme directe  $F \oplus G = E$ .

3. Soit  $(x, y, z, t) \in E$ . D'après la question précédente, il existe un unique quadruplet de nombres  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  tel que

$$(x, y, z, t) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma v_1 + \delta v_2,$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} \alpha & - & 2\gamma & + & 3\delta & = & x \\ & \beta & - & \gamma & + & 2\delta & = & y \\ & & & \gamma & & & = & z \\ & & & & & \delta & = & t \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha & = & x & & + & 2z & - & 3t \\ \beta & = & & y & + & z & - & 2t \\ \gamma & = & & & & z & & \\ \delta & = & & & & & & t \end{cases}$$

La projection de  $(x, y, z, t)$  sur  $F$  parallèlement à  $G$  vaut donc,

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = (x + 2z - 3t, y + z - 2t, 0, 0),$$

et celle de  $(x, y, z, t)$  sur  $G$  parallèlement à  $F$ ,

$$\gamma v_1 + \delta v_2 = (-2z + 3t, -z + 2t, z, t).$$

### Solution 36

1. On a  $X \in F$  si et seulement si  $\exists x, y \in \mathbb{R}$  tels que

$$X = (x, y, -x) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 0).$$

Ainsi  $F = \text{vect}((1, 0, -1), (0, 1, 0))$  et  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Comme les deux vecteurs engendrant  $F$  ne sont pas colinéaires,  $\dim(F) = 2$ . De même,  $X \in G$  si et seulement si  $\exists y \in \mathbb{R}$  tels que

$$X = (2y, y, 2y) = y(2, 1, 2).$$

Ainsi  $G = \text{vect}((2, 1, 2))$  et  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Comme  $G$  est engendré par un vecteur non nul,  $\dim(G) = 1$ . Puisque  $\dim(E) = 3 = \dim(F) + \dim(G)$ ,  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  si et seulement si

$$F \cap G = \{0\}.$$

Un vecteur  $X$  appartient à  $F \cap G$  si et seulement si il existe  $y \in \mathbb{R}$  tel que

$$X = (2y, y, 2y) \text{ et } 2y + 2y = 0,$$

ie  $X = (0, 0, 0)$ . Ainsi  $F \cap G = \{0\}$ , d'où le résultat.

2. Soit  $X = (x, y, z) \in E$ . On recherche l'unique vecteur  $g$  de  $G$  tel que  $X - g \in F$ . Puisque  $g$  est de la forme  $g = (2\lambda, \lambda, 2\lambda)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on recherche  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $X - (2\lambda, \lambda, 2\lambda) = (x - 2\lambda, y - \lambda, z - 2\lambda) \in F$ . Cette condition équivaut à  $x - 2\lambda + z - 2\lambda = 0$ , c'est-à-dire  $\lambda = \frac{x+z}{4}$ . La projection du vecteur  $X = (x, y, z)$  sur  $F$  parallèlement à  $G$  vaut donc

$$X - \lambda(2, 1, 2) = \left( \frac{x-z}{2}, \frac{4y-x-z}{4}, \frac{z-x}{2} \right).$$

### Solution 37



1. Notons  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et posons  $\forall k \leq n-1$ ,

$$f_k = e_k - e_n.$$

Les vecteurs  $f_i$  ainsi définis appartiennent à  $H$  et la famille  $(f_1, \dots, f_{n-1})$  est libre car si un vecteur  $e_i - e_n$  était combinaison linéaire des autres, le vecteur  $e_k$  s'exprimerait en fonction des  $e_i, i \neq k$ , ce qui est absurde car  $\mathcal{B}$  est libre. La dimension de  $H$  est donc au moins égale à  $n-1$ ; elle ne peut valoir  $n$  car  $H \neq E$  (en effet,  $u \notin H$ ), donc  $H$  est de dimension  $n-1$ . Le vecteur  $u$  étant non nul,  $\mathbb{R}u$  est de dimension 1. Ainsi,

$$\dim(E) = \dim(H) + \dim(\mathbb{R}u);$$

pour montrer que  $H$  et  $\mathbb{R}u$  sont supplémentaires dans  $E$ , il suffit donc de prouver que  $H \cap \mathbb{R}u = \{0\}$ . Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in H \cap \mathbb{R}u$ . On a donc

$$x_1 = \dots = x_n \text{ et } x_1 + \dots + x_n = 0,$$

d'où  $(x_1, \dots, x_n) = 0$  et  $H \oplus \mathbb{R}u = E$ .

2. Prouvons que  $H \oplus \mathbb{R}v = E$ . Puisque  $v \notin H$ ,  $v \neq 0$  et  $\mathbb{R}v$  est de dimension 1. En reprenant les justifications avancées à la question 1., il suffit de prouver que  $H \cap \mathbb{R}v = \{0\}$ . Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  appartenant à  $H \cap \mathbb{R}v$ . Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall k \leq n, \quad x_k = \lambda v_k$$

et

$$x_1 + \dots + x_n = \lambda(v_1 + \dots + v_n) = 0,$$

or  $v \notin H$ , donc  $v_1 + \dots + v_n \neq 0$ , et ainsi  $\lambda = 0$  puis  $(x_1, \dots, x_n) = 0$ . On a bien  $H \oplus \mathbb{R}v = E$ .