Raisonnements et ensembles

Solution 1.

1. Il suffit d'établir une table de vérité.

P	Q	NON P	(NON P) OU Q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

On retrouve la table de vérité de l'implication d'où l'équivalence demandée.

2. D'après la question précédente,

$$(\text{NON } Q \implies \text{NON } P) \equiv (\text{NON}(\text{NON } Q) \text{ OU NON } P) \equiv (Q \text{ OU NON } P) \equiv (P \implies Q)$$

Solution 2.

1. La négation de la proposition s'écrit

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad m \text{ ne divise pas } n.$$

La proposition **1.** est vraie : soit $n \in \mathbb{N}$; posons $m = 1$. On a bien que 1 divise n.

2. La négation de la proposition s'écrit

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad m \text{ ne divise pas } n.$$

La proposition **2.** est vraie : posons $m = 1$;soit $n \in \mathbb{N}$. On a bien que 1 divise n.

3. La négation de la proposition s'écrit

$$\exists a, b \in \mathbb{Z}, \quad \forall u, v \in \mathbb{Z}, \quad au + bv \neq 1.$$

La proposition **3.** est fausse : posons $a = b = 2$; soient $u, v \in \mathbb{Z}$. On a $au + bv = 2(u + v) \neq 1$.

4. La négation de la proposition s'écrit

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad |a| > \varepsilon.$$

La proposition **4.** est vraie : posons $a = 0$;soit $\varepsilon > 0$. On a bien $|a| \leqslant \varepsilon$.

5. La négation de la proposition s'écrit

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad |a| > \varepsilon.$$

La proposition **5.** est vraie : soit $\varepsilon > 0$; posons $a = \varepsilon/2$. On a bien $|a| < \varepsilon$.

6. La négation de la proposition s'écrit

$$\exists M > 0, \quad \forall n_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geqslant n_0, \quad M > 2^n.$$

La proposition **6.** est vraie : soient $M > 0$ et n_0 un entier strictement plus grand que $\ln(M)/\ln(2)$. Soit $n \geqslant n_0$. On a bien $2^n \geqslant M$.

Solution 3.

1. La négation de $\mathcal{A}$ est

$$\exists x \in]0, +\infty[, \ \exists y \in]x, +\infty[, \ \forall z \in]0, +\infty[, \ (x \geqslant z \text{ OU } z \geqslant y)$$

2. Oui, l'assertion $\mathcal{A}$ est vraie. Soit $x \in]0, +\infty[$. Soit $y \in]x, +\infty[$. Posons $z = \frac{x+y}{2}$. Puisque $x < y$ on a

$$x = \frac{x+x}{2} < \frac{x+y}{2} = z < \frac{y+y}{2} = y$$

Solution 4.

Il faut bien sûr effectuer une récurrence double. Soit pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{HR}(n) \ : \ (n-1)! \leqslant u_n \leqslant n!$$

- HR(1) et HR(2) sont vraies puisque $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$.
- Supposons HR(n) et HR($n+1$) vraies pour un certain $n \geqslant 1$, c'est-à-dire

$$(n-1)! \leqslant u_n \leqslant n!$$

et

$$n! \leqslant u_{n+1} \leqslant (n+1)!$$

En sommant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$(n-1)! + n! \leqslant u_n + u_{n+1} \leqslant n! + (n+1)!$$

En multipliant par $(n+1)$, on obtient

$$(n-1)!(n+1) + (n+1)! \leqslant u_{n+2} \leqslant (n+1)! + (n+1)!(n+1)$$

D'une part, $(n-1)!(n+1) + (n+1)! \geqslant (n+1)!$ car $(n-1)!(n+1) \geqslant 0$. D'autre part

$$(n+1)! + (n+1)!(n+1) = (n+1)!(n+2) = (n+2)!$$

Finalement $(n+1)! \leqslant u_{n+2} \leqslant (n+2)!$ i.e. HR($n+2$) est vraie.
- Par récurrence double, HR(n) est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Solution 5.

Soit , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, HR(n) la proposition suivante

$$1 + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{n} < 2\sqrt{n}.$$

- HR(1) est banalement vraie.
- Prouvons que pour tout $n \geqslant 1$, HR(n) implique HR($n+1$) : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons HR(n) vraie, c'est-à-dire

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Alors

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Or

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$$

car

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

et

$$\frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

HR($n+1$) est donc vraie.
- D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{n} < 2\sqrt{n}.$$

Solution 6.

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $HR(n)$ la proposition

$$\forall k \leqslant n, \quad u_k \geqslant k.$$

- $HR(0)$, $HR(1)$ et $HR(2)$ sont vraies car $u_0 = 1 \geqslant 0$, $u_1 = 1 \geqslant 1$ et $u_2 = 2 \geqslant 2$.
- Prouvons que pour tout $n \geqslant 2$, $HR(n) \Rightarrow HR(n+1)$. Soit $n \geqslant 2$. Supposons $HR(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$\forall k \leqslant n, \quad u_k \geqslant k.$$

  On a alors $u_n \geqslant n$ et $u_{n-1} \geqslant n-1$, d'où

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \geqslant n + n - 1 = 2n - 1.$$

  Or $2n - 1 \geqslant n + 1$ puisque $n \geqslant 2$. Ainsi $u_{n+1} \geqslant n + 1$ et $HR(n+1)$ est vraie.
- D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant n.$$

Solution 7.

On note $HR(n)$ l'hypothèse de récurrence : « Si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont n ensembles distincts deux à deux, alors l'un au moins des ensembles ne contient aucun autre. »

La propriété est évidente au rang $n = 1$.

Supposons $HR(n)$ pour un certain $n \geqslant 1$ et montrons $HR(n+1)$. Soient donc $E_1, \dots, E_n, E_{n+1}$ $n+1$ ensembles distincts deux à deux. A fortiori, $E_1, \dots, E_n$ sont distincts deux à deux. Par hypothèse de récurrence, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que E_i ne contient aucun des E_j pour $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$. Il y a alors deux cas à étudier.

- Si E_i ne contient pas E_{n+1}, alors E_i ne contient aucun autre ensemble et le tour est joué.
- Si E_i contient E_{n+1}, on montre que E_{n+1} ne contient aucun des autres ensemble. En effet, E_{n+1} ne peut pas contenir E_i sinon on aurait $E_i = E_{n+1}$ ce qui est exclu puisque tous les ensembles sont distincts. E_{n+1} ne peut pas non plus contenir un des E_j pour $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$ sinon E_i contiendrait ce même E_j, ce qui est exclu.

La propriété $HR(n)$ est donc vraie pour tout n par récurrence.

Solution 8.

On raisonne par récurrence forte.

Initialisation Tout d'abord $u_0 = 1 \leqslant 0! = 1$.

Hérédité Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \leqslant k!$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Alors

$$u_{n+1} \leqslant 0! + 1! + \dots + n!$$

Mais par croissance de la factorielle, $k! \leqslant n!$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Ainsi

$$u_{n+1} \leqslant n! + n! + \dots + n! = (n+1)n! = (n+1)!$$

Conclusion Par récurrence forte, $u_n \leqslant n!$ $n \in \mathbb{N}$.

Solution 9.

1. On trouve $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ et $F_5 = 3$.
2. On a bien $F_5 = 5 \geqslant 5$ et $F_6 = 8 \geqslant 6$. Supposons que $F_n \geqslant n$ et $F_{n+1} \geqslant n+1$ pour un certain $n \geqslant 5$. Alors $F_{n+2} \geqslant 2n + 1$. Or $2n + 1 \geqslant n + 2$ car $n \geqslant 5 \geqslant 1$. Ainsi $F_{n+2} \geqslant n + 2$.
   Par récurrence double, $F_n \geqslant n$ pour tout $n \geqslant 5$.
   On peut en déduire que $\lim_{n \to +\infty} F_n = +\infty$.

3. **a.** On raisonne par récurrence. Il est clair que

$$1+\sum_{k=0}^{0} F_k = 1+F_0 = 1 = F_2$$

Supposons maintenant que $1+\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_{n+1}$ pour un certain $n \geqslant 1$. Alors

$$1+\sum_{k=0}^{n} F_k = 1+F_n+\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_n+F_{n+1} = F_{n+2}$$

Par récurrence, $1+\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. On utilise la définition de la suite (F_n). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait apparaître un télescopage.

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+2}-F_{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} F_{2(k+1)}-F_{2k} = F_{2n}-F_0 = F_{2n}$$

c. On utilise la définition de la suite (F_n). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait apparaître un télescopage.

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_{2k} = \sum_{k=1}^{n-1} F_{2k} = \sum_{k=1}^{n-1} F_{2k+1}-F_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} F_{2(k+1)-1}-F_{2k-1} = F_{2n-1}-F_1 = F_{2n-1}-1$$

4. **a.** On trouve $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Les liens coefficients/racines nous apprennent que $\alpha\beta = -1$.

b. On vérifie que $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^0-\beta^0\right) = 0 = F_0$ et que $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^1-\beta^1\right) = 1 = F_1$.

On suppose maintenant que $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$ et $F_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_n+F_{n+1}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n+\alpha^{n+1}-\beta^n-\beta^{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha^n(1+\alpha)-\beta^n(1+\beta)\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n\alpha^2-\beta^n\beta^2\right) \qquad \text{car } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont solutions de l'équation } x^2 = x+1\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}\right)
\end{aligned}$$

Par récurrence double, $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. On tient compte du fait que $\beta = -\frac{1}{\alpha}$.
D'une part

$$\begin{aligned}
F_{p+q}F_r &= \frac{1}{5}\left(\alpha^{p+q}-(-1)^{p+q}\alpha^{-p-q}\right)\left(\alpha^r-(-1)^r\alpha^{-r}\right)\\
&= \frac{1}{5}\left(\alpha^{p+q+r}+(-1)^{p+q+r}\alpha^{-p-q-r}-(-1)^r\alpha^{p+q-r}-(-1)^{p+q}\alpha^{-p-q+r}\right)
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
F_pF_{q+r}-(-1)^rF_{p-r}F_q = & \frac{1}{5}\left(\alpha^p-(-1)^p\alpha^{-p}\right)\left(\alpha^{q+r}-(-1)^{q+r}\alpha^{-q-r}\right)\\
& -\frac{(-1)^r}{5}\left(\alpha^{p-r}-(-1)^{p-r}\alpha^{-p+r}\right)\left(\alpha^q-(-1)^q\alpha^{-q}\right)\\
= & \frac{1}{5}\left(\alpha^{p+q+r}+(-1)^{p+q+r}\alpha^{-p-q-r}-(-1)^{q+r}\alpha^{p-q-r}-(-1)^p\alpha^{-p+q+r}\right)\\
& -\frac{(-1)^r}{5}\left(\alpha^{p+q-r}+(-1)^{p+q-r}\alpha^{-p-q+r}-(-1)^q\alpha^{p-q-r}-(-1)^{p-r}\alpha^{-p+q+r}\right)\\
= & \frac{1}{5}\left(\alpha^{p+q+r}+(-1)^{p+q+r}\alpha^{-p-q-r}-(-1)^r\alpha^{p+q-r}-(-1)^{p+q}\alpha^{-p-q+r}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que $F_pF_{q+r}-(-1)^rF_{p-r}F_q=F_{p+q}F_r$.

Solution 10.

Raisonnons par récurrence. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, notons $\mathrm{HR}(n)$ la proposition

$$\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{1}{k^3}\right)\leqslant 3-\frac{1}{n}$$

- $\mathrm{HR}(1)$ est vraie car les deux membres sont dans ce cas égaux à 2.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vérifiée, c'est-à-dire

$$\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{1}{k^3}\right)\leqslant 3-\frac{1}{n}$$

En multipliant membre à membre par $1+\frac{1}{(n+1)^3}\geqslant 0$, on obtient

$$\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{k^3}\right)\leqslant\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)$$

$$\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)\leqslant 3-\frac{1}{n+1}$$

est donc une *condition suffisante* de $\mathrm{HR}(n+1)$. Or,

$$\begin{aligned}
& \left(3-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)\leqslant 3-\frac{1}{n+1}\\
\iff\quad & \frac{(3n-1)(1+(n+1)^3)}{n(n+1)^3}\leqslant\frac{3n+2}{n+1}\\
\iff\quad & (3n-1)(n^3+3n^3+3n+2)\leqslant(3n+2)n(n+1)^2\\
\iff\quad & 3n^4+8n^3+6n^2+3n-2\leqslant 3n^4+8n^3+7n^2+2n\\
\iff\quad & 0\leqslant n^2-n+2
\end{aligned}$$

Le déterminant du trinôme X^2-X+2 étant strictement négatif, la dernière inégalité est vraie et donc la première également. Par suite, $\mathrm{HR}(n+1)$ est vérifiée.
- D'après le principe de récurrence, $\mathrm{HR}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Solution 11.

Notons $\mathrm{HR}(n):\ u_n=2^{n-1}$. Clairement, $u_1=1$ donc $\mathrm{HR}(1)$ est vraie. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{HR}(k)$ soit vraie pour tout $k\in[\![1,n]\!]$. Alors

$$u_{n+1}=u_0+\sum_{k=1}^n u_k=1+\sum_{k=1}^n 2^{k-1}=1+\sum_{k=0}^{n-1}2^k=1+\frac{2^n-1}{2-1}=2^n$$

de sorte que $\mathsf{HR}(n+1)$ est vraie. Par récurrence forte, $\mathsf{HR}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution 12.

Raisonnons par contraposition. Supposons $a \neq 0$. Posons $\varepsilon = |a|/2$: on a $\varepsilon > 0$ et $|a| \geqslant \varepsilon$. Ainsi $\exists \varepsilon > 0$ tel que $|a| \geqslant \varepsilon$.

Solution 13.

Quitte à permuter les a_i, on peut supposer que

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_9.$$

Prouvons par contraposition que

$$(a_1 + \cdots + a_9 = 90) \implies (a_7 + a_8 + a_9 \geqslant 30).$$

Supposons que $a_7 + a_8 + a_9 < 30$. On a alors

$$a_4 + a_5 + a_6 \leqslant a_7 + a_8 + a_9 < 30$$

et

$$a_1 + a_2 + a_3 \leqslant a_7 + a_8 + a_9 < 30.$$

Ainsi $a_1 + \cdots + a_9 < 90$ donc $a_1 + \cdots + a_9 \neq 90$.

Solution 14.

1. Supposons que n est pair. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Alors $n^2 = 4k^2 = 2k'$ avec $k' = 2k^2$. Donc n^2 est pair.
   Réciproquement supposons que n est impair. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$. Alors $n^2 = 4k^2+4k+1 = 2k'+1$ avec $k' = 2k(k+1)$. Donc n^2 est impair.
2. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tels que $\sqrt{2} = m/n$. Quitte à simplifier on peut supposer que la fraction m/n est irréductible. On a

   $$(*) \qquad 2n^2 = m^2.$$

   De cette équation on déduit que m^2 est pair, donc m aussi. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = 2k$. Ainsi $(*)$ devient $2n^2 = m^2 = 4k^2$, d'où $n^2 = 2k^2$. Par conséquence n^2 est pair, et donc n est aussi pair. On peut donc simpifier la fraction m/n par 2. Or d'après l'hypothèse la fraction m/n est irréductible, contradiction $\lightning$
   Cela prouve que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

   Preuve alternative. Notons $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ l'ensemble de tous les nombres premiers. Tout nombre entier positif possède une *factorisation unique en nombres premiers*, c'est-à-dire

   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists_1 \, (\nu_p(n)) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{P})} \ : \quad n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(n)}.$$

   La notation $\mathbb{N}^{(\mathbb{P})}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{N}$ qui sont nulles à partir d'un certain rang. Par exemple, $20 = 2^2 \times 5$ donc $\nu_2(20) = 2, \nu_5(20) = 1$ et $\nu_p(20) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{P} \setminus \{2, 5\}$.
   Maintenant, supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tels que $\sqrt{2} = m/n$, autrement dit $2n^2 = m^2$. Alors

   $$2\left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(n)}\right)^2 = \left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(m)}\right)^2,$$

   d'où

   $$2\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{2\nu_p(n)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{2\nu_p(m)}.$$

   Par unicité de cette décomposition $2\nu_2(n) + 1 = 2\nu_2(m)$, une contradiction. $\lightning$

Solution 15.

Raisonnons par l'absurde en supposant $\ln(2)/\ln(3)$ rationnel. Il existe donc deux entiers naturels p et $q \neq 0$ tels que $\ln(2)/\ln(3) = p/q$, ie $q\ln(2) = p\ln(3)$, ie $\ln(2^q) = \ln(3^p)$ d'où $2^q = 3^p$. Puisque $q \geqslant 1$, 2^q est un nombre pair, ce qui est absurde car 3^p est toujours impair.

Solution 16.

Voici deux preuves possibles (parmi tant d'autres !)

- Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un tel polynôme P. On a alors $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x}P(x) = 1$, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}P(x) = 0$ (l'exponentielle *l'emporte* sur les puissances puissances en $+\infty$, donc également sur les polynômes), on obtient par passage à la limite, $0 = 1$. Ce qui est absurde.
- Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un tel polynôme P. On a alors $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = e^x$. L'exponentielle ne s'annulant pas, le polynôme P est non nul. Toutes les fonctions en jeu étant dérivables, la dérivation membre à membre de cette égalité aboutit à $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) = e^x = P(x)$, ie $P = P'$, ce qui est absurde car P étant non nul, cela implique $\deg(P) < \deg(P)$.

Solution 17.

Soit f une telle fonction. Pour tout x réel, on a

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{et} \quad f(-x) - 1 = f(x) - 1,$$

d'où $f(x) = -f(x)$ et $f(x) = 0$. Réciproquement, il est clair que la fonction nulle est solution du problème posé.

Solution 18.

- *Analyse* : soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

  $$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(n) + f(m).$$

  On a alors $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$. Par une récurrence immédiate , on prouve que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = nf(1)$.
- *Synthèse* : soient $k \in \mathbb{N}$ et f l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = kn$. Il est immédiat que $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(n) + f(m)$.

Solution 19.

- *Analyse* : supposons que f désigne une solution de l'équation. On en déduit (en fixant $y = 0$) que

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f(0) = 2f(x) + 1,$$

  i.e $f(x) = f(0) - 1$. Ceci prouve que f est nécessairement une fonction constante.

  > **Remarque.** La partie synthèse va maintenant permettre de déterminer, parmi les fonctions constantes, celles qui sont effectivement solutions.

- *Synthèse* : soit f une fonction constante qu'on suppose égale au réel c, i.e

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = c.$$

  La fonction f est solution de l'équation *si et seulement si*

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in R, \quad f(x) + f(y) = 2f(x-y) + 1.$$

  i.e $c + c = 2c + 1$, soit encore $0 = 1$. Ceci est absurde ! Il n'y a donc pas de solution constante à l'équation de l'énoncé.

- *Conclusion* : dans la partie analyse on a prouvé que seules les fonctions constantes pouvaient être solutions de l'équation. Dans la partie synthèse, on a vérifié qu'aucune fonction constante ne pouvait être solution.

Solution 20.

On remarque que rechercher x, y tels que $xy \neq 0$ et

$$\alpha xy = x^2 + y^2,$$

revient à trouver les valeurs non nulles de y telles que l'équation

$$X^2 - \alpha y X + y^2 = 0$$

admet une solution non nulle.

- *Analyse* : soient x, y tels que $xy \neq 0$ et
$$\alpha xy = x^2 + y^2.$$
Alors le discriminant de l'équation
$$X^2 - \alpha y X + y^2 = 0 \ ,$$
$\Delta = (\alpha^2 - 4)y^2$ est positif. Et, puisque $y \neq 0$,
$$\alpha^2 \geqslant 4.$$
- *Synthèse* : supposons $\alpha^2 \geqslant 4$. Soit alors $y = 1$. Alors le discriminant de l'équation
$$X^2 - \alpha X + 1 = 0 \ ,$$
$\Delta = (\alpha^2 - 4)$ est positif et les deux racines x_1 et x_2 de l'équation sont non nulles puisque $x_1 x_2 = 1$. Le couple $(x_1, 1)$ est une solution au problème posé.
- *Conclusion* : la condition nécessaire et suffisante est $\alpha^2 \geqslant 4$, ie $|\alpha| \geqslant 2$.

Solution 21.

- *Analyse* : supposons l'existence de deux nombres réels a et b tels que
$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = a + b2^n.$$
Alors $u_0 = 1 = a + b$ et $u_1 = 7 = a + 2b$. Ce système linéaire 2×2 en (a, b) admet une unique solution, le couple $(-5, 6)$.
- *Synthèse* : prouvons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = -5 + 6 \times 2^n$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{HR}(n)$ la proposition suivante,
$$\forall k \leqslant n, \quad u_k = -5 + 6 \times 2^k.$$
  - ❧ $\mathrm{HR}(0)$ et $\mathrm{HR}(1)$ sont banalement vraies.
  - ❧ Prouvons que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{HR}(n)$ implique $\mathrm{HR}(n+1)$: soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie, c'est-à-dire
$$\forall k \leqslant n, \quad u_k = -5 + 6 \times 2^k.$$
Alors
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n - 2u_{n-1} \\ &= 3(-5 + 6 \times 2^n) - 2(-5 + 6 \times 2^{n-1}) \\ &= -5 + (18 - 6) \times 2^n \ = \ -5 + 6 \times 2^{n+1} \end{aligned}$$
$\mathrm{HR}(n+1)$ est donc vraie.
  - ❧ D'après le principe de récurrence,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -5 + 6 \times 2^n.$$

Solution 22.

- *Analyse* : supposons l'existence de deux nombres réels α et β tels que $s = \alpha + \beta$ et $p = \alpha\beta$. Alors α et β sont les racines réelles du plolynôme
$$Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - sx + p.$$
Le discriminant de cet équation est donc positif : $s^2 \geqslant 4p$.
- *Synthèse* : supposons $s^2 \geqslant 4p$ et posons $\Delta = s^2 - 4p$. Soient α et β les racines de $x^2 - sx + p$, par exemple $\alpha = (s + \sqrt{\Delta})/2$ et $\beta = (s - \sqrt{\Delta})/2$. On a bien que $s = \alpha + \beta$ et $p = \alpha\beta$.
- *Conclusion* : s et p sont respectivement la somme et le produit de deux nombres réels *si et seulement si* $s^2 \geqslant 4p$.

Solution 23.

- *Analyse* : soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que
$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m + n) = f(n)f(m).$$
Par une récurrence immédiate, on prouve que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = f(1)^n.$$
- *Synthèse* : soient $k \in \mathbb{N}$ et f l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = k^n.$$
Il est immédiat que
$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m + n) = f(n)f(m).$$
L'application identiquement nulle vérifie également cette équation fonctionnelle.
- *Conclusion* : les seules fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant
$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m + n) = f(n)f(m),$$
sont les fonctions de la forme
$$n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) = k^n,$$
où $k \in \mathbb{N}$.

Solution 24.

1. On raisonne par équivalences :
$$\begin{aligned} |x + 2| \geqslant \frac{1 - x}{1 + x} &\iff x + 2 \geqslant \frac{1 - x}{1 + x} \text{ OU } -(x + 2) \geqslant \frac{1 - x}{1 + x} \\ &\iff \frac{(x + 2)(1 + x) - (1 - x)}{1 + x} \geqslant 0 \text{ OU } \frac{(x + 2)(1 + x) + (1 - x)}{1 + x} \leqslant 0 \\ &\iff \frac{x^2 + 4x + 1}{1 + x} \geqslant 0 \ (1) \text{ OU } \frac{x^2 + 2x + 3}{1 + x} \leqslant 0 \ (2) \end{aligned}$$
Les racines de $x^2 + 4x + 1$ sont $-2 - \sqrt{3}$ et $-2 + \sqrt{3}$. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		-1		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2+4x+1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2+4x+1}{1+x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de (1) est donc $\mathcal{S}_1 = [-2 - \sqrt{3}, -1[\cup[-2 + \sqrt{3}, +\infty[$.
Le trinôme $x^2 + 2x + 3$ est constamment positif ; l'ensemble des solutions de (2) est donc $\mathcal{S}_2 =]-\infty, -1[$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation initiale est donc $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 =]-\infty, -1[\cup[-2 + \sqrt{3}, +\infty[$.

2. On raisonne également par équivalences :

$$\begin{aligned}
x+1 \leqslant \sqrt{x+2} &\iff x+2 \geqslant 0 \text{ ET } \left(x+1 \leqslant 0 \text{ OU } \left(x+1 \geqslant 0 \text{ ET } (x+1)^2 \leqslant x+2\right)\right)\\
&\iff \begin{cases} x+2 \geqslant 0 \\ x+1 \leqslant 0 \end{cases} \text{OU} \begin{cases} x+2 \geqslant 0 \\ x+1 \geqslant 0 \\ x^2+x-1 \leqslant 0 \end{cases}\\
&\iff -2 \leqslant x \leqslant -1 \text{ OU } \begin{cases} x+1 \geqslant 0 \\ x^2+x-1 \leqslant 0 \end{cases}\\
&\iff -2 \leqslant x \leqslant -1 \text{ OU } \begin{cases} x \leqslant -1 \\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}\\
&\iff -2 \leqslant x \leqslant -1 \text{ OU } -1 \leqslant x \leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\
&\iff -2 \leqslant x \leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left[-2, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Solution 25.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il y a deux cas à considérer, $x \geqslant 1$ et $x < 1$.

- *Cas 1* : $x \geqslant 1$. On a alors
$$x^2 - x + 1 \geqslant |x-1| \iff x^2 - x + 1 \geqslant x - 1.$$
Ce qui est encore équivalent à $x^2 - 2x + 1 \geqslant -1$, c'est-à-dire $(x-1)^2 \geqslant -1$, inégalité vérifiée pour tout x réel.
- *Cas 2* : $x < 1$. On a alors
$$x^2 - x + 1 \geqslant |x-1| \iff x^2 - x + 1 \geqslant 1 - x.$$
Ce qui est encore équivalent à $x^2 \geqslant 0$, inégalité vérifiée pour tout x réel.
- *Conclusion* : on a prouvé que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x + 1 \geqslant |x-1|.$$

Solution 26.

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
& |x+y| = |x| + |y| & \\
\iff & |x+y|^2 = (|x|+|y|)^2 & \text{car les membres de l'égalité sont positifs}\\
\iff & (x+y)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 & \\
\iff & x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2 & \\
\iff & xy = |x||y| & \\
\iff & xy \geqslant 0 &
\end{aligned}$$

Solution 27.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Supposons que $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0$. Alors

$$(\alpha + \beta/2)^2 - \beta^2/4 + \beta^2 = 0,$$

c'est-à-dire $(\alpha+\beta/2)^2+3\beta^2/4=0$. Ainsi $\alpha+\beta/2=\beta=0$ et donc $\alpha=\beta=0$.

Solution 28.

1. On résout par équivalence.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{|x-3|}=|x-1|\\
\iff &|x-3|=(x-1)^2 \text{ car les deux membres sont positifs}\\
\iff &x-3=(x-1)^2 \text{ ou } x-3=-(x-1)^2\\
\iff &x^2-3x+4=0 \text{ ou } x^2-x-2=0\\
\iff &x=-1 \text{ ou } x=2
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{-1,2\}$.

2.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{|x-3|}\leqslant x-1\\
\iff &\begin{cases} x\geqslant 1\\ |x-3|\leqslant (x-1)^2\end{cases}\\
\iff &\begin{cases} x\geqslant 1\\ -(x-1)^2\leqslant x-3\leqslant (x-1)^2\end{cases}\\
\iff &\begin{cases} x\geqslant 1\\ x^2-x-2\geqslant 0\\ x^2-3x+4\geqslant 0\end{cases}\\
\iff &\begin{cases} x\geqslant 1\\ x\leqslant -1 \text{ ou } x\geqslant 2\end{cases}\\
\iff &x\geqslant 2
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $[2,+\infty[$.

Solution 29.

Remarquons que $xy\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2) \iff \frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2)\geqslant 0 \iff (x-y)^2\geqslant 0$. La dernière inégalité étant toujours vraie, la première l'est également.

Solution 30.

1.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{|x^2-4|}\leqslant|x-1|\\
\iff\quad &|x^2-4|\leqslant|x-1|^2 \quad\text{car les membres de l'inégalité précédente sont positifs}\\
\iff\quad &|x^2-4|\leqslant(x-1)^2\\
\iff\quad &|x^2-4|^2\leqslant(x-1)^4 \quad\text{car les membres de l'inégalité précédente sont positifs}\\
\iff\quad &(x^2-4)^2\leqslant(x-1)^4\\
\iff\quad &0\leqslant(x-1)^4-(x^2-4)^2\\
\iff\quad &0\leqslant\left[(x-1)^2+(x^2-4)\right]\left[(x-1)^2-(x^2-4)\right]\\
\iff\quad &0\leqslant\left(2x^2-2x-3\right)(5-2x)
\end{aligned}$$

Or les racines du trinôme $2x^2-2x-3$ sont $\frac{1-\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{7}}{2}$. Un tableau de signes permet de conclure que l'ensemble des solutions est $\left]-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{7}}{2}, \frac{5}{2}\right[$.

2.

$$\begin{aligned}
& \frac{x+1}{x-1} \leqslant \frac{x-2}{x+2} \\
\iff & \frac{(x+1)(x+2)-(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \leqslant 0 \\
\iff & \frac{6x}{(x-1)(x+2)} \leqslant 0
\end{aligned}$$

Un tableau de signes permet de conclure que l'ensemble des solutions est $]-\infty,-2[\cup[0,1[$.

3. Remarquons tout d'abord que les membres de l'inégalité ne sont définis que pour $x>-1$ ou $x<-2$. On suppose donc que x vérifie ces inégalités par la suite.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \leqslant \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \\
\iff & \frac{x+1}{x+2} \leqslant \frac{x+2}{x+1} \quad \text{car les membres de l'inégalité précédente sont positifs} \\
\iff & 0 \leqslant \frac{x+2}{x+1} - \frac{x+1}{x+2} \\
\iff & 0 \leqslant \frac{(x+2)^2-(x+1)^2}{(x+1)(x+2)} \\
\iff & 0 \leqslant \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} \\
\iff & x \geqslant -\frac{3}{2} \quad \text{car } (x+1)(x+2)>0
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $]-1,+\infty[$.

Solution 31.

L'inégalité est définie lorsque l'expression sous la racine carrée est positive, c'est-à-dire pour $x \in [0,2]$. Si $x<1$ l'inégalité est manifestement fausse. Considérons donc le cas où $x \geqslant 1$. Puisque dans ce cas les deux côtés de l'inégalité sont des nombres positifs on peut « prendre le carré » de l'inégalité.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x-x^2} < x-1 & \iff 2x-x^2 < (x-1)^2 \\
& \iff 2x-x^2 < x^2-2x+1 \\
& \iff 0 < 2x^2-4x+1 \\
& \iff x < \frac{4-\sqrt{8}}{4} \quad \text{ou} \quad x > \frac{4+\sqrt{8}}{4} \\
& \overset{x\geqslant 1}{\iff} x > 1+\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $]1+\frac{\sqrt{2}}{2}, 2]$.

Solution 32.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{HR}(n)$ la proposition suivante

$$\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

► $\mathrm{HR}(1), \mathrm{HR}(2)$ et $\mathrm{HR}(3)$ sont banalement vraies.

- Prouvons que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{HR}(n)$ implique $\mathrm{HR}(n+1)$. soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie, c'est-à-dire
$$\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$
On a
$$\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n+2} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \times \frac{2n+1}{2n+2},$$
donc
$$\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n+2} \leqslant \frac{2n+1}{2(n+1)\sqrt{3n+1}}.$$
Or ,
$$\frac{2n+1}{2(n+1)\sqrt{3n+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$
est équivalent à
$$\frac{(2n+1)^2}{4(n+1)^2(3n+1)} \leqslant \frac{1}{3n+4},$$
qui est aussi équivalent à
$$(2n+1)^2(3n+4) \leqslant 4(n+1)^2(3n+1)$$
et encore à
$$12n^3 + 28n^2 + 19n + 4 \leqslant 12n^3 + 28n^2 + 20n + 1$$
qui est finalement équivalent à $n \geqslant 3$, $\mathrm{HR}(n+1)$ est donc vraie.
- D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$$\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Solution 33.

Soit, pour tout $n \geqslant 2$, $\mathrm{HR}(n)$ la proposition suivante
$$\forall a \in]0,1[, \quad 1 - na < (1-a)^n < \frac{1}{1+na}.$$

- $\mathrm{HR}(2)$ est vraie car
$$(1-a)^2 = 1 - 2a + a^2 > 1 - 2a$$
et
$$(1-a)^2(1+2a) - 1 = a^2(2a-3) < 0$$
lorsque $a \in]0,1[$.
- Prouvons que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{HR}(n)$ implique $\mathrm{HR}(n+1)$: soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie, c'est-à-dire $\forall a \in]0,1[, \quad \forall n \geqslant 2$
$$1 - na < (1-a)^n < \frac{1}{1+na}.$$
Soit alors $a \in]0,1[$. On a
$$(1-a)^{n+1} > (1-na)(1-a),$$
donc
$$(1-a)^{n+1} > 1 - (n+1)a + na^2 > 1 - (n+1)a.$$
De plus
$$(1-a)^{n+1} = (1-a)(1-a)^n < \frac{1-a}{1+na}.$$
Or,
$$\frac{1-a}{1+na} < \frac{1}{1+(n+1)a}$$
est équivalent à
$$1 - a + (n+1)a - (n+1)a^2 < 1 + na$$
c'est-à-dire à $-(n+1)a < 0$ qui est banalement vérifiée. $\mathrm{HR}(n+1)$ est donc vraie.

▶ D'après le principe de récurrence,

$$\forall a \in]0,1[, \quad \forall n \geqslant 2, \quad 1-na < (1-a)^n < \frac{1}{1+na}.$$

Solution 34.

L'inégalité est une conséquence immédiate de

$$(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2 \geqslant 0.$$

Solution 35.

Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. Après mise au même dénominateur, l'inégalité est équivalente à

$$\frac{(a+b)^2}{ab} \geqslant 4,$$

comme $ab > 0$, ceci équivaut à

$$(a+b)^2 - 4ab \geqslant 0.$$

Or cette dernière est clairement puisque

$$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geqslant 0.$$

2. On a, pour tous x et y positifs

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0$$

c'est-à-dire

$$x+y \geqslant 2\sqrt{xy}.$$

Ainsi

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab}, \quad b+c \geqslant 2\sqrt{bc} \quad \text{et} \quad c+a \geqslant 2\sqrt{ca}.$$

On en déduit que

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8\sqrt{abbcca} = 8abc.$$

3. Après mise au même dénominateur, l'inégalité est équivalente à

$$\frac{a^2-2\sqrt{b}a+b}{a} = \frac{(a-\sqrt{b})^2}{a} \geqslant 0,$$

inégalité clairement vérifiée.

Solution 36.

1. On trouve $x = 2$ ou -8.

2. $\mathcal{S} = [-8, 5]$.

3. $\mathcal{S} =]-\infty, -8[\cup]5, +\infty[$.

4. L'équation équivaut à $x^2 - 4 = \pm(2x-5)$, ie $x = 1$ ou $x = -1 \pm \sqrt{10}$.

5. $\mathcal{S} = [-8, 5]$.

6. $\mathcal{S} = [\frac{2}{3}, 6]$.

7. $\mathcal{S} =]-\infty, -4[\cup[5, +\infty[$.

Remarque. Tous ces résultats s'obtiennent après avoir dressé un tableau de signes.

Solution 37.

En développant le membre de droite, on trouve que l'inégalité est équivalente à

$$|xy-1| \leqslant |x-1|+|y-1|+|x-1||y-1|.$$

On remarque alors que

$$xy-1=(x-1)(y-1)+x-1+y-1,$$

et en appliquant l'inégalité triangulaire

$$|xy-1| \leqslant |(x-1)(y-1)|+|x-1|+|y-1|,$$

d'où le résultat.

Solution 38.

- Plaçonc-nous sur l'intervalle $\left]-\sqrt{3},\sqrt{3}\right[$. L'équation est alors équivalente à

  $$3-x^2>2,$$

  c'est-à-dire

  $$x^2<1,$$

  ie $x\in]-1,1[$.
- Plaçonc-nous sur $\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},+\infty\right[$. L'équation est alors équivalente à

  $$x^2-3>2,$$

  c'est-à-dire

  $$x^2>5,$$

  ie $x\in\left]-\infty,-\sqrt{5}\right[\cup\left]\sqrt{5},+\infty\right[$.
- L'ensemble des solutions est donc

  $$\left]-1,1\right[\cup\left]-\infty,-\sqrt{5}\right[\cup\left]\sqrt{5},+\infty\right[.$$

Solution 39.

Puisque $0\leqslant x\leqslant y$,

$$0\leqslant x^2\leqslant xy,$$

mais aussi

$$xy\leqslant y^2,$$

d'où

$$0\leqslant x^2\leqslant xy\leqslant y^2,$$

et donc

$$0\leqslant x\leqslant\sqrt{xy}\leqslant y.$$

Solution 40.

1. Puisque les deux membres sont positifs, l'inégalité est équivalente à

$$\sqrt{a+b}^2 \leqslant (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2,$$

c'est-à-dire

$$a+b \leqslant a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b,$$

ce qui équivaut à $2\sqrt{a}\sqrt{b} \geqslant 0$. Puisque cette dernière inégalité est banalement vraie, l'inégalité initiale l'est également.

2. Puisque les deux membres de l'inégalité sont invariants par permutation des réels a et b, on peut toujours supposer que $a \leqslant b$, quitte à permuter les deux nombres. On a d'après la première question appliquée à $a \geqslant 0$ et $b-a \geqslant 0$,

$$\sqrt{b} = \sqrt{a+b-a} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b-a}$$

et donc $\sqrt{b}-\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b-a} = \sqrt{|a-b|}$. De plus, on a par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$,

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} \leqslant 0 \leqslant \sqrt{|b-a|}.$$

Ainsi $\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right| \leqslant \sqrt{|b-a|}$.

Solution 41.

On se donne $\lambda \in [0,1]$ et on raisonne par équivalence.

$$\begin{array}{rll}
& \sqrt{a_\lambda}+\sqrt{b_\lambda} \geqslant \sqrt{a}+\sqrt{b} & \\
\iff & \left(\sqrt{a_\lambda}+\sqrt{b_\lambda}\right)^2 \geqslant \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 & \text{car les membres de l'inégalité précédente sont positifs} \\
\iff & a_\lambda+b_\lambda+2\sqrt{a_\lambda b_\lambda} \geqslant a+b+2\sqrt{ab} & \\
\iff & \sqrt{a_\lambda b_\lambda} \geqslant \sqrt{ab} & \\
\iff & a_\lambda b_\lambda \geqslant ab & \text{par croissance des fonctions carrée et racine carrée} \\
\iff & \lambda^2(2ab-a^2-b^2)+\lambda(a^2+b^2-2ab) \geqslant 0 & \text{après simplification} \\
\iff & (a-b)^2\lambda(1-\lambda) \geqslant 0 &
\end{array}$$

La dernière inégalité est vraie puisque $\lambda \in [0,1]$. Par équivalence, l'inégalité de départ est également vraie.

Solution 42.

Prouvons par exemple que $A = B$ par double inclusion.

On a $B \subset A \cup B = A \cap C \subset A$. De même, $A \subset A \cup C = B \cap C \subset B$. L'égalité $B = C$ se démontre de la même manière.

Solution 43.

Montrons l'égalité des deux ensembles. Comme

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) = B \cup (A \cap C)$$

on a

$$\begin{aligned}
Y &= [B \cup (A \cap C)] \cap (C \cup A) \\
&= [B \cap (C \cup A)] \cup [(A \cap C) \cap (C \cup A)] \\
&= (B \cap C) \cup (B \cap A) \cup (A \cap C) = X
\end{aligned}$$

Solution 44.

▶ Supposons que $A = B$. On a alors banalement

$$A \cap B = A \cup B = A = B.$$

▶ *Réciproquement*, supposons que $A \cup B = A \cap B$. Montrons que $A = B$ par double inclusion. On a

$$A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$$

et puisque A et B jouent des rôles symétriques, on a également $B \subset A$.

Solution 45.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

on a $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$. Cette inclusion est *stricte* car $1 = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \in \mathcal{E}$ mais $1 \notin \mathcal{F}$.

Solution 46.

1. Notons A, B, C, D les points de coordonnées respectives $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$.
   Les droites (AB), (CD), (AC), (BD) ont pour équations respectives $x + y = 1$, $x + y = -1$, $x - y = 1$, $x - y = -1$.
   On en déduit que A_1 est la portion du plan strictement comprise entre les droites (AB) et (CD) et que A_2 est la portion du plan strictement comprise entre les droites (AC) et (BD).
   En se plaçant succesivement sur les quatre quadrants $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$, on montre que A_3 est la réunion des triangles OAB, OAD, OCA, OCD autrement dit le carré $ABCD$.
2. La question précédente montre que $A_1 \cap A_2 = A_3$, ce qui équivaut bien à l'équivalence demandée.

Solution 47.

On a $A \subset A \cup B = B \cap C \subset B \subset A \cup B = B \cap C \subset C$.

Solution 48.

Supposons $D = A \times B$ où A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$. Comme $(1, 0) \in D$, $1 \in A$. De la même façon, $(0, 1) \in D$ donc $1 \in B$. Par conséquent, $(1, 1) \in D$, ce qui est faux.

Solution 49.

Il y a toujours deux modes de raisonnement possibles : soit en raisonnant sur les éléments, soit directement sur les ensembles. La seconde méthode est généralement plus élégante et plus rapide.

1. On suppose $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$.

   Première méthode Soit $x \in B$. Alors $x \in A \cup B = A \cup C$. Si $x \notin A$, alors $x \in C$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B = A \cap C$. Donc $x \in C$. Dans les deux cas, $x \in C$. On en déduit que $B \subset C$. Les rôles de B et C étant symétriques, on a également $C \subset B$. D'où $B = C$.

   Deuxième méthode On a $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$. D'une part, $B \cap A = C \cap A$. D'autre part,

   $$B \cap \overline{A} = (A \cup B) \setminus A = (A \cup C) \setminus A = C \cap \overline{A}$$

   Ainsi $B = (C \cap A) \cup (C \cap \overline{A}) = C$.

2. **Première méthode** Soit $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Si $x \in A \setminus B$, alors $x \in A$ et $x \notin B$. A fortiori, $x \notin B \cap C$. Donc $x \in A \setminus (B \cap C)$. De même, si $x \in A \setminus C$, $x \in A \setminus (B \cap C)$. On en déduit que $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cap C)$.
Soit $x \in A \setminus (B \cap C)$. Alors $x \in A$ et $x \notin B \cap C$. Si $x \notin B$, alors $x \in A \setminus B$. Si $x \in B$, alors $x \notin C$ donc $x \in A \setminus C$. Ainsi $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. On en déduit que $A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
Par double inclusion, $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

Deuxième méthode Beaucoup plus rapidement :

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = A \cap (\overline{B \cap C}) = A \setminus (B \cap C)$$

Solution 50.

1. $$\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R},\ \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ x = \frac{p}{q}\right\} = \left\{\frac{p}{q},\ (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\right\}$$

2. $$2\mathbb{Z} + 1 = \{n \in \mathbb{Z},\ \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 2k + 1\} = \{2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$$

3. $$i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C},\ \exists b \in \mathbb{R},\ z = ib\} = \{ib,\ b \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) = 0\}$$

4. $$\left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)\right\}$$

Solution 51.

1. $$\left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x + T) = f(x)\right\}$$

2. $$\left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \exists T \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x + T) = f(x)\right\}$$

3. $$\left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b\right\}$$

Solution 52.

Notons $A = (X \cup Z) \cap (Y \cup \overline{Z})$ et $B = (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z)$.
Première méthode : en utilisant trois fois la distributivité de $\cap$ sur $\cup$, on obtient l'égalité $A = (X \cap Y) \cup (Z \cap Y) \cup (X \cap \overline{Z})$, c'est-à-dire : $A = (X \cap Y) \cup B$. Ainsi $A = B \iff X \cap Y \subset B$.
Prouvons donc l'inclusion $X \cap Y \subset B$.
Si $x \in X \cap Y$, on a deux cas :

- soit $x \in Z$, et alors $x \in Y \cap Z$ (puisque $x \in Y$), donc $x \in B$ (puisque $Y \cap Z \subset B$).
- soit $x \in \overline{Z}$, et alors $x \in X \cap \overline{Z}$ (puisque $x \in X$), donc $x \in B$ (puisque $X \cap \overline{Z} \subset B$).

Deuxième méthode : avec les fonctions indicatrices. Le calcul de $\mathbb{1}_B$ est le plus simple : puisque $(X \cap \overline{Z}) \cap (Y \cap Z) = \varnothing$, on a $\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_X \mathbb{1}_{\overline{Z}} + \mathbb{1}_Y \mathbb{1}_Z$.
Pour calculer $\mathbb{1}_A$ on développe en gardant $\mathbb{1}_{\overline{Z}}$ sous cette forme (sans la remplacer par $1 - \mathbb{1}_Z$), et on utilise que $\mathbb{1}_Z \mathbb{1}_{\overline{Z}} = 0$ puisque $Z \cap \overline{Z} = \varnothing$. Il reste au final $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_X \mathbb{1}_{\overline{Z}} + \mathbb{1}_Y \mathbb{1}_Z$, on a donc bien $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$, et donc $A = B$.