

## Rudiments

### Exercice 1

Reconnaître les endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  dans la liste suivante,

1.  $f_1 : (x, y, z) \mapsto (x, xy, x - z)$ ;
2.  $f_2 : (x, y, z) \mapsto (x + y, 2x + 5z, 0)$ ;
3.  $f_3 : (x, y, z) \mapsto (x - 3y, x + y, z + 2)$ .

### Exercice 2

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1.  $id_E : E \rightarrow E, u \mapsto u$ , où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev.
2.  $F : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}), f \mapsto \exp \circ f$ .
3.  $G : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}), f \mapsto f \times \cos$ .
4.  $H : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}), f \mapsto f'' - f$ .
5.  $j : F \rightarrow E, u \mapsto u$ , où  $F$  est un sev d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$ .
6.  $T : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto (u_0, \dots, u_n)$ .
7.  $S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ .

### Exercice 3 ★

### Composées

Soient  $f$  et  $g$  les endomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  définis par

$$g : (x, y) \mapsto (y, x) \text{ et } f : (x, y) \mapsto (x + y, 2x).$$

1. Montrer que  $f$  et  $g$  sont des isomorphismes de  $\mathbb{R}^2$ . Déterminer  $f^{-1}$  et  $g^{-1}$ .
2. On note  $h = f \circ g - g \circ f$ . Justifier que  $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ .
3. A-t-on  $f \circ g = g \circ f$  ?  $h$  est-elle injective ?
4. L'application  $h$  est-elle surjective ?

### Exercice 4 ★

### Crochet de Lie

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev,  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{L}(E)$  tels que

$$u \circ v - v \circ u = u.$$

Etablir que, pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$  :

$$u^k \circ v - v \circ u^k = ku^k.$$

## Isomorphismes

### Exercice 5 ★

Soit  $f$ , un endomorphisme de  $E$ . Pour tout entier  $k \geq 2$ , on note

$$f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

On suppose qu'il existe un entier  $n \geq 2$  tel que  $f^n$  soit l'application identiquement nulle.

1. Soit  $x \in \text{Ker}(I - f)$ . Démontrer que  $f^k(x) = x$  pour tout entier  $k \geq 1$ . En déduire que  $I - f$  est injectif.
2. Simplifier les expressions

$$(I - f) \circ (I + f + f^2 + \dots + f^{n-1})$$

et  $(I + f + f^2 + \dots + f^{n-1}) \circ (I - f)$

en utilisant les règles de calcul dans  $\mathcal{L}(E)$  et en déduire que  $I - f$  est un automorphisme.

3. Démontrer que, pour tout entier  $k \geq 1$ , l'endomorphisme  $I - f^k$  est inversible. On précisera l'expression de son inverse.

**Exercice 6 ★★★****Sev stables par permutation des composantes**

Soit  $\mathbb{K}$  un corps. Pour  $\sigma \in S_n$ , on pose :

$$\begin{aligned} f_\sigma : \quad \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

On munit  $\mathbb{K}^n$  de la structure d'algèbre pour les opérations composante par composante.

1. Montrer que  $f_\sigma$  est un automorphisme d'algèbre.
2. Soit  $\phi$  un automorphisme d'algèbre de  $\mathbb{K}^n$ . Montrer qu'il existe  $\sigma \in S_n$  tel que  $\phi = f_\sigma$ .
3. Trouver les sous-espaces de  $\mathbb{K}^n$  stables par tous les endomorphismes  $f_\sigma$  avec  $\sigma \in S_n$ .

**Exercice 7 ★****Un exemple d'isomorphisme**

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$(x, y, z) \longmapsto (2x - y, -x + y, x - z).$$

Prouver que  $f$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  et expliciter son isomorphisme réciproque  $f^{-1}$ .

**Exercice 8 ★****L'opérateur de dérivation**

Soient  $f_k$  les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies par

$$\forall k \in \{0, 1, 2\}, \quad f_k : x \longmapsto x^k e^{2x}.$$

On note  $E$  le sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  engendré par ces trois vecteurs.

1. Quelles est la dimension de  $E$ ? En donner une base.
2. On note  $D$  l'opérateur de dérivation défini par

$$D : f \in E \longmapsto f'.$$

Prouver que  $D \in \mathcal{L}(E)$ .

3. Montrer que  $D \in GL(E)$ .

**Noyau et image d'une application linéaire****Exercice 9 ★**

Soit  $\Phi$  l'application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^4$  définie par

$$(x, y, z) \longmapsto (x + z, y - z, x + y + z, x - y - z).$$

1. Montrer que  $\Phi$  est linéaire.
2.  $\Phi$  est-elle injective?
3. Etudier la surjectivité de  $\Phi$ . Donner une base de  $\text{Im}(\Phi)$ .

**Exercice 10 ★****Avec paramètre**

Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f_\alpha$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$(x, y, z, t) \longmapsto (x + y + \alpha z + t, x + z + t, y + z).$$

Déterminer en fonction de  $\alpha \in \mathbb{R}$  des bases des espaces vectoriels  $\text{Ker}(f_\alpha)$  et  $\text{Im}(f_\alpha)$ .

**Exercice 11 ★****Posé à HEC!**

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$f((x, y, z)) = (x, 0, y).$$

On note  $(e_k)_{1 \leq k \leq 3}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Déterminer des bases de  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Ker}(f)$ .
2. On note  $E = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ . Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels  $f(E)$  et  $f^{-1}(E)$ .

**Exercice 12 ★****Excursion en dimension infinie**

Soient  $E$  l'ensemble des applications continues de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\psi$  l'application de  $E$  dans  $E$  qui à  $f$  associe l'application  $g$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) = \int_0^x 2tf(t)dt.$$

1. Justifier que  $E$  est un espace vectoriel réel pour les opérations usuelles sur les fonctions.
2. Quelle est la dimension de  $E$  ?
3. Montrer que  $\psi$  est un endomorphisme de  $E$ .
4. Étudier l'injectivité puis la surjectivité de  $\psi$ . Formuler en termes de contre-exemple les résultats précédents.
5. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Déterminer le sous-espace vectoriel  $\text{Ker}(\psi - \lambda \text{id}_E)$ .

**Exercice 13 ★****Attention aux scalaires !**

On considère  $\mathbb{C}$  comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On définit l'application  $u$  par

$$u : z \mapsto iz - i\bar{z}.$$

1. Prouver que  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ .
2. Déterminer  $\text{Ker}(u)$  et  $\text{Im}(u)$ .
3. Calculer  $u^2$ .
4. En déduire que l'endomorphisme  $\text{Id}_{\mathbb{C}} + 2u$  est inversible et calculer son inverse.

**Exercice 14 ★★**

Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $X^2 + aX + b$  un polynôme à coefficients complexes.

1. On note  $r_1$  et  $r_2$  les deux racines (éventuellement confondues) de  $X^2 + aX + b$ . Montrer que

$$u^2 + au + b \text{Id}_E = (u - r_1 \text{Id}_E) \circ (u - r_2 \text{Id}_E) = (u - r_2 \text{Id}_E) \circ (u - r_1 \text{Id}_E)$$

2. On pose  $F = \text{Ker}(u^2 + au + b \text{Id}_E)$ ,  $F_1 = \text{Ker}(u - r_1 \text{Id}_E)$  et  $F_2 = \text{Ker}(u - r_2 \text{Id}_E)$ . Montrer que  $F_1 \subset F$  et  $F_2 \subset F$ .
3. À partir de maintenant, on suppose que les deux racines  $r_1$  et  $r_2$  sont *distinctes*. Montrer que  $F = F_1 \oplus F_2$ .
4. **Application :** Dans cette question, on suppose que  $E$  est le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et que  $u$  est l'endomorphisme de  $E$  qui à  $f$  associe  $f'$ . On considère l'équation différentielle  $(\mathcal{E}) \quad y'' + ay' + by = 0$  dont on cherche les solutions à valeurs complexes.
  - a. Montrer que toute solution de  $(\mathcal{E})$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - b. Montrer que l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E})$  est  $F$ .
  - c. Déterminer  $F_1$  et  $F_2$ .
  - d. En déduire le résultat du cours déjà connu : les solutions de  $(\mathcal{E})$  sont les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  du type  $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$  avec  $\lambda$  et  $\mu$  décrivant  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 15 ★★★**

Pour  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  et  $x \in [0, 1]$ , on pose  $\Phi(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t)f(t) dt$ .

1. Prouver que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .
2. En utilisant la relation de Chasles, trouver une autre expression de  $\Phi(f)(x)$ . En déduire que  $\Phi(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et exprimer  $\Phi(f)''$  en fonction de  $f$ .
3. En déduire  $\text{Ker } \Phi$  et  $\text{Im } \Phi$ .

**Exercice 16 ★**

On considère le sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  engendré par la famille  $\mathcal{B} = (\sin, \cos, \text{sh}, \text{ch})$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $F$ .
2. On note  $D$  l'opérateur de dérivation. Montrer que  $F$  est stable par  $D$ . On notera  $d$  l'endomorphisme de  $F$  induit par  $D$ .
3. On note  $M$  la matrice de  $d$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Calculer  $M^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Montrer que  $d$  est un automorphisme de  $F$ . Écrire la matrice de  $d^{-1}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
5. On note  $f = d - \text{Id}$ . Déterminer l'image et le noyau de  $f$ .
6. On note  $g = d + \text{Id}$ . Déterminer l'image et le noyau de  $g \circ f$ .

**Exercice 17 ★★****CCP MP**

Pour  $p \in \mathbb{N}$  et  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ , on note  $S_p$  l'ensemble des suites réelles  $u$  vérifiant :

$$\exists P \in \mathbb{R}_p[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \alpha u_n + P(n)$$

1. Montrer que si  $u \in S_p$ ,  $P$  est unique. On notera  $P_u$  ce polynôme.
2. Montrer que  $S_p$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
3. Montrer que l'application  $\phi : \begin{cases} S_p & \longrightarrow \mathbb{R}_p[X] \\ u & \longmapsto P_u \end{cases}$  est linéaire et donner une base de son noyau.
4. Quelle est l'image de  $\phi$ ? Donner une base de  $S_p$ . On pourra utiliser les polynômes  $R_k = (X+1)^p - \alpha X^k$  avec  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ .
5. Application : déterminer le terme général de la suite  $u$  définie par  $u_0 = -2$  et  $u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7$ .

**Exercice 18 ★**

Montrer que  $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X+2)P(X) - XP(X+1)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Quel est son noyau?

**Exercice 19 ★****Noyaux et images**

Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires définies par :

1.  $f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z)$ ;
2.  $f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ ;
3.  $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y - z, x + 2y + 2z)$ ;
4.  $f(x, y, z) = (x + 2y - z, x + 2y - z, 2x + 4y - 2z)$ .

**Exercice 20 ★**

Soient

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x, y, 0),$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x - y, x + y, x + 2y)$$

et

$$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x - 3y + 2z.$$

1. Montrer que  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont linéaires.
2. Déterminer noyau et image dans chaque cas.

**Exercice 21 ★****Posé aux CCP**

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie,  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{L}(E)$ . Etablir que

$$\text{Im}(f) + \text{Ker}(g) = E \iff \text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g).$$

**Exercice 22 ★****Posé à Centrale en PC**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{R}$ -ev,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, E)$  telles que

$$f \circ g \circ f = f \text{ et } g \circ f \circ g = g.$$

Etablir que

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g) \text{ et } F = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(f).$$

**Exercice 23**

Soient  $f : E \longrightarrow F$  et  $g : F \longrightarrow G$  deux applications linéaires. Que pensez vous des propositions suivantes ?

1.  $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$ ;
2.  $\text{Ker}(g \circ f) \subset \text{Ker}(f)$ ;
3.  $\text{Ker}(g \circ f) \subset \text{Ker}(f)$ ;
4.  $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$  si et seulement si  $g \circ f = 0$ .

**Exercice 24 ★★****L'incroyable**

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $f$  appartenant à  $\mathcal{L}(E)$ . Montrer l'équivalence suivante

$$\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f) \text{ si et seulement si } \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}.$$

**Exercice 25 ★★**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev,  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $f \circ g = id_E$ .

1. Etablir que  $f$  est surjective et  $g$  injective.
2. Montrer que  $p = g \circ f$  est un projecteur de  $E$ .
3. Etablir que  $\text{Im}(p) = \text{Im}(g)$  et  $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(f)$ .
4. Montrer que

$$\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g) = E.$$

**Exercice 26 ★**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que

$$\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = f(\text{Ker}(f \circ f)).$$

**Exercice 27 ★★****Noyaux et images itérés**

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ , pour tout entier naturel  $p$ , on notera  $I_p = \text{Im } u^p$  et  $K_p = \text{Ker } u^p$ .

1. Montrer que :  $\forall p \in \mathbb{N}, K_p \subset K_{p+1}$  et  $I_{p+1} \subset I_p$ .
2. On suppose que  $E$  est de dimension finie et  $u$  injectif. Déterminer  $I_p$  et  $K_p$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .
3. On suppose que  $E$  est de dimension finie  $n \in \mathbb{N}$ .
  - a. Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel  $r \leq n$  tel que :  $K_r = K_{r+1}$ .
  - b. Montrer qu'alors :  $I_r = I_{r+1}$  et que :  $\forall p \in \mathbb{N}, K_r = K_{r+p}$  et  $I_r = I_{r+p}$ .
  - c. Montrer que :  $E = K_r \oplus I_r$ .
4. Lorsque  $E$  n'est pas de dimension finie, existe-t-il un plus petit entier naturel  $r$  tel que  $K_r = K_{r+1}$  ?

**Exercice 28 ★★**

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$ .

1. Montrer que si  $g \circ f$  est surjective, alors  $g$  est surjective.
2. Montrer que si  $g$  est surjective et  $E = \text{Im } f + \text{Ker } g$ , alors  $g \circ f$  est surjective.
3. Formuler des énoncés similaires pour l'injectivité.

**Exercice 29 ★**

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  qui commutent.

1. Montrer que  $\text{Im } u$  et  $\text{Ker } u$  sont stables par  $v$ .
2. On suppose que  $E = \text{Ker } u \oplus \text{Ker } v$ . Montrer que  $\text{Im } u \subset \text{Ker } v$  et que  $\text{Im } v \subset \text{Ker } u$ .
3. Montrer que les inclusions précédentes sont des égalités si  $E$  est de dimension finie.

**Exercice 30 ★****ENSEA**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $G$  et  $H$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

1. Montrer que  $f(G + H) = f(G) + f(H)$ .
2. Montrer que si  $G$  et  $H$  sont en somme directe et que  $f$  est injective, alors  $f(G \oplus H) = f(G) \oplus f(H)$ .

**Exercice 31 ★★**

Soient  $E$  un espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer l'équivalence suivante :

$$E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$$

**Exercice 32 ★★**

Soient  $E$  un espace vectoriel et  $f, g$  deux projecteurs de  $E$ .

1. Montrer que  $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$  si et seulement si  $f \circ g = g$  et  $g \circ f = f$ .
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ .

**Exercice 33 ★★**

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ ;
- (ii)  $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$ ;
- (iii)  $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ ;
- (iv)  $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ .

**Exercice 34 ★****Petites Mines**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

- (i) il existe  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ ;
- (ii)  $\dim E$  est paire.

**Exercice 35**

Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .

1. Montrer que  $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g \circ f$ .
2. Montrer que  $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$ .
3. Montrer que  $g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ .

**Exercice 36 ★★**

Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .

1. Montrer que  $F = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Ker}(g)$  si et seulement si  $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g)$ .
2. Montrer que  $\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_F\}$  si et seulement si  $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f)$ .

**Exercice 37 ★★**

On considère deux endomorphismes  $f$  et  $g$  d'un espace vectoriel  $E$  vérifiant

$$f \circ g \circ f = g \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = f$$

1. Montrer que

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(g) = \operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(f \circ g)$$

et

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f \circ g)$$

2. Démontrer que

$$E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(g) \oplus \operatorname{Im}(g)$$

**Endomorphismes nilpotents**

**Exercice 38 ★****D'après Centrale PC**

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On souhaite prouver l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(\*) Il existe un projecteur  $p$  de  $E$  tel que  $f = p \circ f - f \circ p$

(\*\*)  $f^2 = 0$

- Supposons (\*) vérifiée. Prouver que  $p \circ f \circ p = 0$ , puis que  $f = p \circ f$ . En déduire que (\*\*) est vérifiée.
- Supposons (\*\*) vérifiée. Soit  $S$  un supplémentaire de  $\text{Ker } f$  dans  $E$  et  $p$  le projecteur sur  $\text{Ker}(f)$  parallèlement à  $S$ . Prouver la propriété (\*).

**Exercice 39 ★★****Endomorphismes nilpotents**

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension finie  $n$ . Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est dit nilpotent s'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $u^p = 0$ .

- Donner des exemples d'endomorphismes nilpotents de  $\mathbb{R}^2$  puis de  $\mathbb{R}^3$ .
- Montrer qu'un endomorphisme nilpotent n'est jamais un isomorphisme.
- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$\forall x \in E, \exists p_x \in \mathbb{N}, u^{p_x}(x) = 0.$$

Montrer que  $u$  est nilpotent.

- Montrer que si  $u$  est un endomorphisme nilpotent alors  $\text{id}_E - u \in \text{GL}(E)$ .

**Exercice 40 ★**

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension 3 et  $f$  appartenant à  $\mathcal{L}(E)$ .

- On suppose dans cette question que  $f^2 = 0$  et  $f \neq 0$ . Calculer le rang de  $f$ .
- On suppose dans cette question que  $f^3 = 0$  et  $f^2 \neq 0$ . Calculer le rang de  $f$ .

**Exercice 41 ★★****Equation  $u^2 = 0$** 

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

- On suppose dans cette question l'existence d'un *projecteur*  $p$  de  $E$  tel que

$$u = p \circ u - u \circ p.$$

- Démontrer que  $p \circ u \circ p = 0$ . On précisera de quel 0 il s'agit.
- Prouver que  $u \circ p = 0$ .
- En déduire que  $u^2 = 0$ .

- On suppose dans cette question que  $u^2 = 0$ .

- Démontrer que  $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ .
- Soient  $H$  et  $S$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$  tels que

$$\text{Im}(u) \subset H \subset \text{Ker}(u).$$

En notant  $q$  la projection sur  $H$  parallèlement à  $S$ , reconnaître l'application linéaire  $q \circ u - u \circ q$ .

- Donner une condition *nécessaire et suffisante* pour qu'il existe un projecteur  $p$  de  $E$  tel que

$$u = p \circ u - u \circ p.$$

**Exercice 42 ★****Endomorphismes de carré nul**

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

- $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ .
- $f^2 = 0$ ,  $n = 2 \text{rg}(f)$ .

**Exercice 43 ★★★****Mines P' 1995**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $E$  nilpotent d'indice  $n$ . On pose

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ g &\longmapsto f \circ g - g \circ f\end{aligned}$$

1. Montrer que  $\Phi^p(g) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} f^{p-k} \circ g \circ f^k$ . En déduire que  $\Phi$  est nilpotent.
2. Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer qu'il existe  $b \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $a \circ b \circ a = a$ . En déduire l'indice de nilpotence de  $\Phi$ .

**Projecteurs, symétries et homothéties****Exercice 44 ★**

On note  $E = \mathbb{R}^4$ ,

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid z = y + t = 0\}$$

et  $G = \{(x, y, z, t) \mid x = y + z = 0\}$ .

1. Prouver que  $F$  et  $G$  sont des plans vectoriels de  $E$ .
2. Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .
3. Donner les expressions analytiques de  $p$  et  $s$ , respectivement projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$  et symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .

**Exercice 45 ★****En dimension infinie**

On note  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $\mathcal{A}$  le sous-espace vectoriel de  $E$  constitué des fonctions affines et on pose

$$\mathcal{N} = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}.$$

1. Montrer que les sous-espaces vectoriels  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{N}$  sont supplémentaires dans  $E$ .
2. Expliciter le projecteur sur  $\mathcal{A}$  parallèlement à  $\mathcal{N}$ .
3. Expliciter la symétrie par rapport à  $\mathcal{A}$  parallèlement à  $\mathcal{N}$ .

**Exercice 46 ★****Somme de deux projecteurs**

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ,  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$ .

1. Prouver que

$$p \circ q + q \circ p = 0 \text{ si et seulement si } p \circ q = q \circ p = 0.$$

2. Montrer que  $p + q$  est un projecteur si et seulement si

$$p \circ q = q \circ p = 0.$$

3. On suppose que  $p + q$  est un projecteur de  $E$ . Montrer que

$$\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$$

et

$$\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q).$$

**Exercice 47 ★****Composée de deux projecteurs**

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ,  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$  tels que  $p \circ q = q \circ p$ .

1. Prouver que  $\psi = p \circ q$  est un projecteur de  $E$ .
2. Montrer que  $\text{Im}(\psi) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$ .
3. Etablir que  $\text{Ker}(\psi) = \text{Ker}(p) + \text{Ker}(q)$ .

**Exercice 48 ★★**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $A$  une partie finie de  $\text{GL}(E)$  stable par composition. On pose  $p = \frac{1}{|A|} \sum_{f \in A} f$ . Montrer que  $p$  est un projecteur.

**Exercice 49 ★**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $p$  un projecteur de  $E$ . Pour quelles valeurs de  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\text{Id} + \lambda p$  est-il un automorphisme ?



**Exercice 50 ★★**

Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs d'un espace vectoriel  $E$  qui commutent.

1. Montrer que  $p + q - p \circ q$  et  $p \circ q$  sont des projecteurs.
2. Montrer que  $\text{Ker}(p \circ q) = \text{Ker } p + \text{Ker } q$  et que  $\text{Im}(p \circ q) = \text{Im } p \cap \text{Im } q$ .
3. Montrer que  $\text{Ker}(p+q-p \circ q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$  et que  $\text{Im}(p+q-p \circ q) = \text{Im } p + \text{Im } q$ .

**Exercice 51 ★★★****Centrale MP**

Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux sous-espaces supplémentaires de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (f, g) \in H_1 \times H_2, f \circ g + g \circ f = 0$$

1. Justifier qu'il existe  $(p_1, p_2) \in H_1 \times H_2$  tel que  $p_1 + p_2 = \text{Id}$ .
2. Montrer que  $p_1$  et  $p_2$  sont des projecteurs.
3. Montrer que  $\dim H_1 \leq (n - \text{rg } p_2)^2$  et  $\dim H_2 \leq (n - \text{rg } p_1)^2$ .
4. Quel est le nombre de choix possibles pour le couple  $(H_1, H_2)$  ?

**Exercice 52 ★★**

Soient  $p_1, \dots, p_n$  des projecteurs d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie tels que  $p_1 + \dots + p_n = \text{Id}_E$ .

Montrer que  $\text{Im } p_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } p_n = E$ .

**Exercice 53 ★★★**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ . Montrer qu'il existe un projecteur  $p$  de  $E$  et un automorphisme  $\varphi$  de  $E$  tels que  $u = p \circ \varphi$ .

**Exercice 54 ★★**

Soient  $f$  et  $g$  deux projecteurs d'un espace vectoriel  $E$ .

1. a. Montrer que  $\text{Im } f = \text{Im } g$  si et seulement si  $f \circ g = g$  et  $g \circ f = f$ .  
b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ .
2. On suppose que  $f \circ g = g \circ f$ .  
a. Montrer que

$$E = (\text{Im } f \cap \text{Im } g) \oplus (\text{Im } f \cap \text{Ker } g) \oplus (\text{Ker } f \cap \text{Im } g) \oplus (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g)$$

- b. Que peut-on dire de  $f \circ g$  ?

**Exercice 55 ★**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^2 - 3u + 2\text{Id}_E = 0$ .

1. Montrer que  $u \in \text{GL}(E)$  et exprimer  $u^{-1}$  en fonction de  $u$ .
2. On pose  $f = u - \text{Id}_E$  et  $g = 2\text{Id}_E - u$ . Montrer que  $f \circ g = g \circ f = 0$ .
3. Vérifier que  $f$  et  $g$  sont des projecteurs.
4. Montrer que  $\text{Im } f = \text{Ker } g$  et  $\text{Im } g = \text{Ker } f$ .
5. Montrer que  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } g$  et  $E = \text{Im } f \oplus \text{Im } g$ .

**Exercice 56 ★★★**

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n \geq 1$  qui commute avec tous les endomorphismes de  $E$ , c'est-à-dire

$$\forall g \in \mathcal{L}(E), \quad f \circ g = g \circ f$$

1. Soit  $u$  un vecteur non nul de  $E$ . Justifier l'existence d'un supplémentaire  $H_u$  de  $\text{vect}(u)$  dans  $E$ . Quelle est la dimension de  $H_u$  ?
2. En considérant le projecteur  $p_u$  sur  $\text{vect}(u)$  parallèlement à  $H_u$ , montrer qu'il existe  $\lambda_u \in \mathbb{K}$  tel que  $f(u) = \lambda_u u$ .
3. Soit  $v \in E$  non colinéaire à  $u$ . On montre de même qu'il existe  $\lambda_v \in \mathbb{K}$  tel que  $f(v) = \lambda_v v$ . Montrer que  $\lambda_u = \lambda_v$ . On pourra considérer le vecteur  $u + v$ .
4. Reprendre la question précédente lorsque  $v$  est non nul et colinéaire à  $u$ .
5. En déduire que les endomorphismes de  $E$  commutant avec tous les endomorphismes sont les homothéties.

**Exercice 57 ★**

On pose  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . Montrer que l'application  $s$  qui à une fonction  $f \in E$  associe l'application  $x \mapsto f(-x)$  est une symétrie dont on précisera les éléments caractéristiques.

**Rang d'une application linéaire****Exercice 58 ★★**

Soient  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$ ,  $f$  et  $g$  deux endomorphismes tels que

$$f + g = id_E \quad \text{et} \quad \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq n.$$

1. Montrer que

$$E = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g).$$

2. Après avoir justifié l'égalité  $f \circ g = g \circ f$ , prouver que  $f$  et  $g$  sont des projecteurs de  $E$ .

**Exercice 59 ★★**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie,  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$ .

1. Etablir que  $\dim(\text{Ker}(f \circ g)) \leq \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g))$ .
2. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si  $\text{Ker}(f) \subset \text{Im}(g)$ .

**Exercice 60 ★★★**

Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer le rang de l'endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$   $\Phi : f \mapsto v \circ f \circ u$ .

**Exercice 61 ★★****Inégalité de Frobenius**

Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(F, G)$  et  $h \in \mathcal{L}(G, H)$  où  $E, F, G, H$  sont des espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que

$$\text{rg}(g \circ f) + \text{rg}(h \circ g) \leq \text{rg}(h \circ g \circ f) + \text{rg}(g)$$

**Exercice 62 ★****Inégalités de Sylvester**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels,  $f$  et  $g$  deux applications linéaires de rang fini de  $E$  dans  $F$ .

1. Montrer que  $|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$
2. Prouver que  $\text{rg}(f + g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$  si et seulement si

$$\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0_F\} \quad \text{et} \quad \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = E$$

**Formes linéaires et hyperplans**

**Exercice 63 ★★****Endomorphismes de rang au plus 1**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$  dont l'image est une droite vectorielle  $\text{vect}(u)$  avec  $u \neq 0_E$ . On pose alors :

$$\forall x \in E, f(x) = \varphi(x)u$$

Montrer que  $\varphi$  est une forme linéaire sur  $E$  et qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f^2 = \lambda f$ .

**Exercice 64 ★★****Transvections**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ , avec  $n \geq 2$ . On rappelle que  $E^*$  est l'ensemble des formes linéaires sur  $E$ .

1. Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux éléments non nuls de  $E^*$  tels que  $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$ . Montrer qu'il existe un réel non nul  $\lambda$  tel que  $\psi = \lambda\varphi$ .
2. Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . Montrer que l'ensemble  $D(H)$  des éléments de  $E^*$  dont le noyau contient  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E^*$  dont on précisera la dimension.
3. On appelle *transvection* de  $E$  tout endomorphisme  $f$  de  $E$  possédant les deux propriétés suivantes :
  - $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$  est un hyperplan de  $E$ ;
  - $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ .

On appelle  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$  la base de  $f$  et  $\text{Im}(f - \text{Id}_E)$  la direction de  $f$ .

- a. Soit  $\varphi$  un élément non nul de  $E^*$  et  $u$  un vecteur non nul de  $\text{Ker}(\varphi)$ . Pour tout vecteur  $x$  de  $E$ , on pose  $f(x) = x + \varphi(x)u$ . Justifier l'existence de  $u$  et montrer que  $f$  est une transvection dont on précisera la base et la direction.
- b. Réciproquement, soit  $f$  une transvection de  $E$ . Montrer qu'il existe un élément non nul  $\varphi$  de  $E^*$  et un vecteur  $u$  non nul de  $\text{Ker}(\varphi)$  tels que  $f(x) = x + \varphi(x)u$  pour tout  $x \in E$ .

**Exercice 65 ★★**

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  des formes linéaires sur  $E$ . On suppose qu'il existe  $x \in E$  non nul tel que

$$\forall i \in [1, n], \varphi_i(x) = 0$$

Montrer que la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est liée.

**Exercice 66 ★★★****Rang d'une famille de formes linéaires**

On considère un espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

1. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On note

$$G = \{\varphi \in E^*, \forall x \in F, \varphi(x) = 0\}$$

Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E^*$  et que  $\dim F + \dim G = \dim E$ .

2. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E^*$ . On note

$$G = \{x \in E, \forall \varphi \in F, \varphi(x) = 0\}$$

Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et que  $\dim F + \dim G = \dim E$ .

3. On se donne des éléments  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  de  $E^*$ . Montrer que

$$\dim \left( \bigcap_{i=1}^m \text{Ker } \varphi_i \right) + \text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = \dim E$$

**Exercice 67 ★****Equations d'un hyperplan**

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ,  $f$  et  $g$  deux formes linéaires sur  $E$  non nulles.

1. Prouver que

$$\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$$

si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  tel que  $g = \lambda f$ .

2. En déduire une *condition nécessaire et suffisante* pour que  $f$  et  $g$  définissent le même hyperplan  $H$ . En déduire toutes les équations de  $H$ .