

# NOMBRES RÉELS

## 1 Approximations d'un réel

### 1.1 Ensembles de nombres

#### Notation 1.1

- On note  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres **réels**.
- On note  $\mathbb{Q}$  l'ensemble des nombres **rationnels** i.e. l'ensemble des nombres de la forme  $\frac{p}{q}$  avec  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ . Un nombre réel non rationnel est dit **irrationnel**.
- On note  $\mathbb{D}$  l'ensemble des nombres **décimaux** i.e. l'ensemble des nombres de la forme  $\frac{a}{10^n}$  avec  $(a, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ .
- On note  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des **entiers relatifs**.
- On note  $\mathbb{N}$  l'ensemble des **entiers naturels**.

| **REMARQUE.** On a  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

#### Exemple 1.1

$\sqrt{2}$  est irrationnel.

### 1.2 Partie entière

Le théorème suivant découle de la construction des entiers.

#### Théorème 1.1 Propriété fondamentale des entiers

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de  $\mathbb{Z}$  admet un plus grand élément (resp. un plus petit élément).

Ce théorème légitime la définition suivante.

#### Définition 1.1 Partie entière d'un réel

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On appelle **partie entière** de  $x$ , notée  $[x]$ , le plus grand entier relatif inférieur ou égal à  $x$ .

#### Proposition 1.1 Caractérisation de la partie entière

Soit  $(x, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ .

$$k = [x] \iff x - 1 < k \leq x \iff k \leq x < k + 1$$

| **REMARQUE.** Il pourra être utile dans les exercices de remarquer que si  $n$  et  $p$  sont des **entiers**

$$n < p \iff n \leq p - 1 \iff n + 1 \leq p$$

**REMARQUE.** On appelle **partie fractionnaire** de  $x$  le réel noté  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ . On a donc  $\{x\} \in [0, 1[$ .

### Proposition 1.2 Propriétés de la partie entière

- (i) La partie entière est une application croissante.
- (ii)  $\forall x \in \mathbb{R}, x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}$ .
- (iii)  $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ .

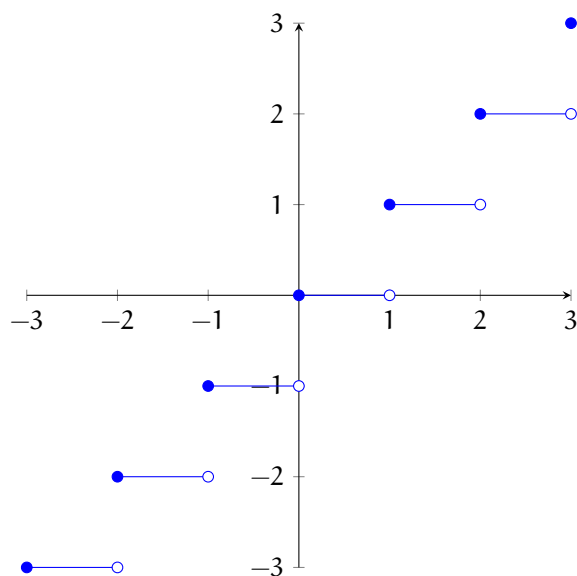
**ATTENTION !** En général,  $\lfloor x + y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$  et  $\lfloor nx \rfloor \neq n\lfloor x \rfloor$  même si  $n$  est entier.

**ATTENTION !** La partie entière est croissante i.e.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$$

Mais la partie entière n'est pas strictement croissante. Par exemple,  $0 < \frac{1}{2}$  mais  $\lfloor 0 \rfloor = \lfloor \frac{1}{2} \rfloor$ .

### Graphes de la partie entière



- La partie entière est croissante.
- La partie entière est constante par morceaux.
- La partie entière présente des discontinuités en les entiers relatifs.
- La partie entière est continue en tout réel non entier.
- La partie entière est continue à gauche et non à droite en tout entier.

**REMARQUE.** Pour  $x \in \mathbb{R}$ , le plus petit entier relatif supérieur ou égal à  $x$  se note  $\lceil x \rceil$ . Si  $k \in \mathbb{Z}$ , alors

$$k = \lceil x \rceil \iff x \leq k < x + 1 \iff k - 1 < x \leq k$$

On a en fait  $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$ .

## 1.3 Approximations décimales

### Définition 1.2

Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On pose  $\mathbb{D}_n = \left\{ \frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z} \right\}$ .

- On appelle **valeur décimale approchée de  $x$  à  $10^{-n}$  près par défaut** l'unique décimal  $\alpha_n \in \mathbb{D}_n$  tel que  $\alpha \leq x < \alpha + 10^{-n}$ .
- On appelle **valeur décimale approchée de  $x$  à  $10^{-n}$  près par excès** l'unique décimal  $\beta_n \in \mathbb{D}_n$  tel que  $\beta - 10^{-n} < x \leq \beta$ .

**Exemple 1.2**

3,1415 est une valeur décimale approchée de  $\pi$  à  $10^{-4}$  près par défaut.  
 3,1416 est une valeur décimale approchée de  $\pi$  à  $10^{-4}$  près par excès.

**REMARQUE.** On peut exprimer  $\alpha_n$  et  $\beta_n$ . En fait,

$$\alpha_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \qquad \beta_n = \frac{\lceil 10^n x \rceil}{10^n}$$

Si  $x \in \mathbb{D}$ , alors  $\alpha_n = \beta_n = x$ .

Sinon,  $\beta_n = \alpha_n + 10^{-n}$ .

**REMARQUE.**  $\alpha$  est le nombre décimal dont les décimales (chiffres après la virgule) sont les  $n$  premières décimales de  $x$ .

**1.4 Densité dans  $\mathbb{R}$** **Définition 1.3 Densité**

Soit  $\mathcal{A}$  une partie de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $\mathcal{A}$  est **dense** dans  $\mathbb{R}$  si tout intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$  contient au moins un élément de  $\mathcal{A}$ .

**Proposition 1.3 Caractérisation « epsilonlesque » de la densité**

Soit  $\mathcal{A}$  une partie de  $\mathbb{R}$ .  $\mathcal{A}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  **si et seulement si**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$$

**Proposition 1.4 Caractérisation séquentielle de la densité**

Soit  $\mathcal{A}$  une partie de  $\mathbb{R}$ .  $\mathcal{A}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  **si et seulement si** pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $\mathcal{A}$  de limite  $x$ .

**Proposition 1.5 Densité de  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$** 

$\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sont denses dans  $\mathbb{R}$ .

**2 Relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$** **2.1 Majoration et minoration****Définition 2.1 Parties majorées, minorées, bornées**

Soit  $\mathcal{A}$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

- On dit que  $\mathcal{A}$  est **majorée** s'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $x \leq M$  pour tout  $x \in \mathcal{A}$ . Dans ce cas, on dit que  $M$  est un **majorant** de  $\mathcal{A}$ .
- On dit que  $\mathcal{A}$  est **minorée** s'il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que  $x \geq m$  pour tout  $x \in \mathcal{A}$ . Dans ce cas, on dit que  $m$  est un **minorant** de  $\mathcal{A}$ .
- On dit que  $\mathcal{A}$  est **bornée** si elle est majorée et minorée.

**Proposition 2.1**

Soit  $\mathcal{A}$  une partie de  $\mathbb{R}$ .  $\mathcal{A}$  est bornée **si et seulement si** il existe  $K \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| \leq K$  pour tout  $x \in \mathcal{A}$ .

**2.2 Maxima et minima****Définition 2.2 Maximum et minimum**

Soit  $\mathcal{A}$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

- On dit que  $M$  est le **maximum** ou le **plus grand élément** de  $\mathcal{A}$  si  $M \in \mathcal{A}$  et  $M$  est un majorant de  $\mathcal{A}$ . On note alors  $m = \min \mathcal{A}$ .
- On dit que  $m$  est le **minimum** ou le **plus petit élément** de  $\mathcal{A}$  si  $m \in \mathcal{A}$  et  $m$  est un minorant de  $\mathcal{A}$ . On note alors  $M = \max \mathcal{A}$ .

**Exemple 2.1**

$-1$  et  $1$  sont respectivement le minimum et le maximum de l'intervalle  $[-1, 1]$ .



**ATTENTION !** Une partie de  $\mathbb{R}$  n'admet pas forcément de maximum ou de minimum. Par exemple,  $] -1, 1[$  n'admet ni minimum ni maximum. En particulier,  $-1$  et  $1$  ne sont pas le minimum et le maximum de  $] -1, 1[$  puisqu'ils n'appartiennent pas à cet intervalle.

**2.3 Bornes inférieures et supérieures****Définition 2.3 Borne inférieure et supérieure**

Soit  $\mathcal{A}$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

- On appelle **borne supérieure** de  $\mathcal{A}$  le minimum de l'ensemble des majorants de  $\mathcal{A}$ , **s'il existe**. Dans ce cas, on le note  $\sup \mathcal{A}$ .
- On appelle **borne inférieure** de  $\mathcal{A}$  le maximum de l'ensemble des minorants de  $\mathcal{A}$ , **s'il existe**. Dans ce cas, on le note  $\inf \mathcal{A}$ .

Rien ne garantit a priori l'existence d'une borne inférieure ou supérieure. On a néanmoins le théorème suivant.

**Théorème 2.1 Propriété de la borne supérieure**

Toute partie **non vide** et **majorée** (resp. **minorée**) de  $\mathbb{R}$  possède une borne supérieure (resp. inférieure).

**REMARQUE.** Ce théorème est admis car il découle directement de la construction de  $\mathbb{R}$  qui est hors programme. Pour votre culture, le corps des réels  $\mathbb{R}$  est construit à partir des corps des rationnels  $\mathbb{Q}$  de façon à ce qu'il possède justement cette propriété de la borne supérieure.

**Proposition 2.2**

Soit  $\mathcal{A}$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

- Si  $M = \max \mathcal{A}$ , alors  $M = \sup \mathcal{A}$ .
- Si  $m = \min \mathcal{A}$ , alors  $m = \inf \mathcal{A}$ .



**ATTENTION !** Les réciproques sont fausses ! Une partie de  $\mathbb{R}$  peut posséder une borne supérieure (resp. inférieure) sans posséder de maximum (resp. minimum).

### Exemple 2.2

Les bornes inférieures et supérieures de  $[-2, 1[$  sont  $-2$  et  $1$ . De plus,  $-2$  est le plus petit élément de  $\mathcal{A}$  mais  $[-2, 1[$  ne possède pas de plus grand élément.

Les propositions suivantes permettent de déterminer des bornes supérieures et inférieures en pratique.

### Proposition 2.3 Caractérisation « epsilonuse » des bornes inférieures et supérieures

Soient  $\mathcal{A}$  une partie de  $\mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{R}$ .

- ◊  $c = \inf \mathcal{A}$  si et seulement si  $c$  est un minorant de  $\mathcal{A}$  et si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $a \in \mathcal{A}$  tel que  $c + \varepsilon > a$ .
- ◊  $c = \sup \mathcal{A}$  si et seulement si  $c$  est un majorant de  $\mathcal{A}$  et si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $a \in \mathcal{A}$  tel que  $c - \varepsilon < a$ .

### Proposition 2.4 Caractérisation séquentielle des bornes inférieures ou supérieures

Soient  $\mathcal{A}$  une partie de  $\mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{R}$ .

- $c = \inf \mathcal{A}$  si et seulement si  $c$  est un minorant de  $\mathcal{A}$  et s'il existe une suite  $(a_n)$  d'éléments de  $\mathcal{A}$  de limite  $c$ .
- $c = \sup \mathcal{A}$  si et seulement si  $c$  est un majorant de  $\mathcal{A}$  et s'il existe une suite  $(a_n)$  d'éléments de  $\mathcal{A}$  de limite  $c$ .

### Exercice 2.1

Déterminer les bornes supérieure et inférieure de  $\left\{ \frac{3}{2^p} - \frac{1}{3^q}, (p, q) \in \mathbb{N}^2 \right\}$ .

### Méthode Passage à la borne supérieure/inférieure

- Si  $\forall x \in \mathcal{A}, x \leq M$ , alors  $\sup \mathcal{A} \leq M$ .
- Si  $\forall x \in \mathcal{A}, x \geq M$ , alors  $\inf \mathcal{A} \geq M$ .



**ATTENTION !** Le passage à la borne supérieure/inférieure ne conserve que les inégalités **larges**, exactement comme le passage à la limite.

### Exercice 2.2

Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux parties non vides de  $\mathbb{R}$ . On définit  $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{x + y \mid (x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}$ .

1. On suppose  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  majorées. Montrer que  $\sup \mathcal{A} + \mathcal{B} = \sup \mathcal{A} + \sup \mathcal{B}$ .
2. On suppose  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  minorées. Montrer que  $\inf \mathcal{A} + \mathcal{B} = \inf \mathcal{A} + \inf \mathcal{B}$ .

## 2.4 La droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$

### Définition 2.4 Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

On appelle droite achevée  $\overline{\mathbb{R}}$  l'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  où les éléments  $-\infty$  et  $+\infty$  sont définis par les propriétés suivantes :

**Prolongement de l'ordre**  $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, -\infty \leq x \leq +\infty$ .

**Prolongement de l'addition**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty \\ x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} +\infty + (+\infty) = +\infty \\ -\infty + (-\infty) = -\infty \end{cases}$$

**Prolongement de la multiplication**

$$\begin{array}{lll} \forall x > 0, & x \times (+\infty) = +\infty, & x \times (-\infty) = -\infty \\ \forall x < 0, & x \times (+\infty) = -\infty, & x \times (-\infty) = +\infty \\ \forall x \in \mathbb{R}, & \frac{x}{+\infty} = 0, & \frac{x}{-\infty} = 0 \\ (+\infty) \times (+\infty) = +\infty, & (+\infty) \times (-\infty) = -\infty, & (-\infty) \times (-\infty) = +\infty \end{array}$$



**ATTENTION !** Formes indéterminées Cette définition ne donne aucun sens aux expressions suivantes  $\infty - \infty$ ,  $0 \times \infty$  et  $\frac{\infty}{\infty}$ .

### Corollaire 2.1

Toute partie non vide de  $\overline{\mathbb{R}}$  possède une borne supérieure et inférieure dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

### Proposition 2.5

Soit  $\mathcal{A}$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ .

- ◇  $\inf \mathcal{A} = -\infty$  si et seulement si pour tout  $m \in \mathbb{R}$ , il existe  $x \in \mathcal{A}$  tel que  $x \leq m$  (i.e.  $\mathcal{A}$  est non minorée).
- ◇  $\sup \mathcal{A} = +\infty$  si et seulement si pour tout  $M \in \mathbb{R}$ , il existe  $x \in \mathcal{A}$  tel que  $x \geq M$  (i.e.  $\mathcal{A}$  est non majorée).

### Proposition 2.6 Caractérisation séquentielle

Soit  $\mathcal{A}$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

- $\inf \mathcal{A} = -\infty$  si et seulement si il existe une suite  $(a_n)$  d'éléments de  $\mathcal{A}$  de limite  $-\infty$ .
- $\sup \mathcal{A} = +\infty$  si et seulement si il existe une suite  $(a_n)$  d'éléments de  $\mathcal{A}$  de limite  $+\infty$ .

## 2.5 Extension aux applications

### Définition 2.5 Fonction majorée/minorée

Soient  $E$  un ensemble et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application.

- On dit que  $f$  est **majorée** sur  $E$  si  $f(E)$  est majorée. Un majorant de  $f(E)$  est appelé un **majorant** de  $f$  sur  $E$ .
- On dit que  $f$  est **minorée** sur  $E$  si  $f(E)$  est minorée. Un minorant de  $f(E)$  est appelé un **minorant** de  $f$  sur  $E$ .
- On dit que  $f$  est bornée sur  $E$  si  $f$  est minorée et majorée sur  $E$ .

**REMARQUE.** On retrouve en fait la définition classique.

- ◇  $f$  est majorée sur  $E$  s'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in E, f(x) \leq M$ .
- ◇  $f$  est minorée sur  $E$  s'il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in E, f(x) \geq m$ .

Dans ce cas,  $M$  et  $m$  sont respectivement un majorant et un minorant de  $f$  sur  $E$ .

### Proposition 2.7

Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application.  $f$  est bornée sur  $E$  **si et seulement si**  $|f|$  est majorée sur  $E$ .

### Définition 2.6 Maximum/minimum

Soient  $E$  un ensemble et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application.

- On appelle maximum de  $f$  sur  $E$  le réel  $\max f(E)$ , **s'il existe**. On le note  $\max_E f$  ou  $\max_{x \in E} f(x)$ .
- On appelle minimum de  $f$  sur  $E$  le réel  $\min f(E)$ , **s'il existe**. On le note  $\min_E f$  ou  $\min_{x \in E} f(x)$ .

**REMARQUE.** Un maximum (resp. minimum) de  $f$  sur  $E$  est un majorant (resp. minorant) de  $f$  sur  $E$  **atteint** par la fonction  $f$ . Autrement dit,

- ◇  $M$  est un maximum de  $f$  sur  $E$  si  $\forall x \in E, f(x) \leq M$  et s'il existe  $c \in E$  tel que  $f(c) = M$ ,
- ◇  $m$  est un minimum de  $f$  sur  $E$  si  $\forall x \in E, f(x) \geq m$  et s'il existe  $c \in E$  tel que  $f(c) = m$ .



**ATTENTION !** Il ne faut pas confondre l'extremum d'une fonction et le point en lequel il est atteint. Notamment, l'extremum est unique mais peut être atteint plusieurs fois. Par exemple,  $-1$  et  $1$  sont respectivement le minimum et le maximum de  $\sin$  sur  $\mathbb{R}$ , mais ils sont atteints une infinité de fois sur  $\mathbb{R}$ .

### Définition 2.7 Borne supérieure/inférieure

Soient  $E$  un ensemble et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application.

- On appelle **borne supérieure** de  $f$  sur  $E$  le réel  $\sup f(E)$ , **s'il existe**. On le note  $\sup_E f$  ou  $\sup_{x \in E} f(x)$ .
- On appelle **borne inférieure** de  $f$  sur  $E$  le réel  $\inf f(E)$ , **s'il existe**. On le note  $\inf_E f$  ou  $\inf_{x \in E} f(x)$ .

**REMARQUE.** Pour que  $f$  possède une borne supérieure (resp. inférieure) sur  $E$ , il est nécessaire et suffisant que  $E$  soit non vide et que  $f$  soit majorée (resp. minorée) sur  $E$ , en vertu de la propriété de la borne supérieure. Si  $E$  est non vide,  $f$  admet toujours une borne supérieure et une borne inférieure sur  $E$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Exemple 2.3**

Soit  $E$  un ensemble. Soient  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions bornées sur  $E$ . Alors  $f + g$  est bornée sur  $E$  et

$$\sup_E |f + g| \leq \sup_E |f| + \sup_E |g|$$

**Méthode** Déterminer la borne inférieure/supérieure d'une fonction

Il suffit d'établir le tableau de variations de la fonction.

**Exemple 2.4**

Considérons la fonction  $f : x \mapsto e^{-x^2}$ . On obtient facilement son tableau de variation.

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$0$	$1$	$0$

Le théorème de la bijection montre que  $f(\mathbb{R}_+) = f(\mathbb{R}_-) = ]0, 1]$  et donc que  $f(\mathbb{R}) = ]0, 1]$ . On en déduit que  $\max_{\mathbb{R}} f = 1$  et donc que  $\sup_{\mathbb{R}} f = 1$ . De plus,  $\inf_{\mathbb{R}} f = 0$  mais  $f$  n'admet pas de minimum sur  $\mathbb{R}$ . Si elle en admettait un, ce serait  $0$  mais  $0$  n'appartient pas à  $f(\mathbb{R})$ .

### 3 Intervalles de $\mathbb{R}$

La définition suivante permet de décrire tous les intervalles de  $\mathbb{R}$  (fermés, ouverts, majorés, minorés, ...).

**Définition 3.1** Intervalle de  $\mathbb{R}$ 

On appelle **intervalle** de  $\mathbb{R}$  toute partie  $I$  de  $\mathbb{R}$  vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in \mathbb{R}, x \leq t \leq y \implies t \in I$$

**Proposition 3.1**

Une intersection d'intervalles est un intervalle.

**Proposition 3.2**

Les intervalles de  $\mathbb{R}$  sont les ensembles du type  $[a, b]$ ,  $[a, b[$ ,  $]a, b]$  ou  $]a, b[$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq b$  et éventuellement  $a = -\infty$  ou  $b = +\infty$  en position de « borne ouverte ».

**REMARQUE.** On retrouve donc bien tous les intervalles au sens précédent de l'acception.  
L'ensemble vide est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  puisqu'il est du type  $]a, a[$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .



**Notation 3.1**

Si  $I$  est un intervalle, on note  $\bar{I}$  l'intervalle composé de la réunion de  $I$  et des bornes finies de  $I$  et on note  $\overset{\circ}{I}$  l'intervalle  $I$  privé de ses bornes.

**REMARQUE.**  $\bar{I}$  est le plus petit intervalle fermé contenant  $I$ .

$\overset{\circ}{I}$  est le plus grand intervalle ouvert contenu dans  $I$ .

**Exemple 3.1**

- Si  $I = ]-1, 2]$ , alors  $\bar{I} = [-1, 2]$  et  $I = ]-1, 2[$ .
- Si  $I = ]3, +\infty[$ , alors  $\bar{I} = [3, +\infty[$  et  $I = ]3, +\infty[$ .
- Si  $I = ]-\infty, 4]$ , alors  $\bar{I} = ]-\infty, 4]$  et  $I = ]-\infty, 4[$ .