Devoir surveillé n°07

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

Soit p un nombre premier. On veut prouver le résultat suivant.

$\boxed{\text{Il existe une infinité de nombres premiers de la forme } kp+1 \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*.}$

On note ϕ l'application suivante.

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} x^k \end{array} \right.$$

1. Soit q un nombre premier distinct de p et $x \in \mathbb{Z}$ tel que $\phi(x) \equiv 0[q]$. On note

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N}^*,\ x^n \equiv 1[q] \right\}$$

- **a.** Montrer que $p \in A$.
- **b.** En exhibant une relation de Bézout entre x et q, montrer que x est premier avec q puis que $q-1 \in A$.
- **c.** Justifier que A contient un plus petit élément que l'on notera m.
- **d.** Soit $a \in A$. En effectuant la division euclidienne de a par m, montrer que m divise a.
- **e.** Montrer que $m \neq 1$.
- **f.** En déduire que $m = p$.
- **g.** En déduire que $q \equiv 1[p]$.

2. On suppose qu'il existe seulement un nombre fini de nombres premiers q tels que l'équation diophantienne $\phi(x) \equiv 0[q]$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$ possède au moins une solution. On note $q_1, q_2, \dots, q_r$ ces nombres premiers.

- **a.** Montrer qu'il existe $i \in [\![1, r]\!]$ tel que $\phi(q_1 q_2 \dots q_r) \equiv 0[q_i]$.
- **b.** Aboutir à une contradiction.

3. Conclure.

Exercice 2.

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles.

1. On note F l'ensemble des suites réelles 4-périodiques. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. On note G l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_n = 0$$
et H l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 0$$
Montrer que G et H sont inclus dans F.
3. Montrer que G et H sont des sous-espaces vectoriels de F et donner pour chacun d'eux une famille génératrice.
4. Montrer que $F = G \oplus H$.
5. En déduire une famille génératrice de F.

Exercice 3.

On note $E = \mathbb{R}^3$ et on définit les ensembles
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0\}$$
$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = x - y - z = 0\}$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
3. Déterminer les projetés du vecteur $(1, 2, 3)$ sur F parallélement à G et sur G parallélement à F.

Exercice 4.

Soit $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble F des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$(\mathcal{E}) \colon y'' = (1 + x^2)y$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soient f et g les applications définies par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{x^2/2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t$$
Montrer que f et g appartiennent à F.
3. Montrer que si v et w appartiennent à F, alors la fonction $v'w - vw'$ est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Soit h un élément de F. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h = \alpha f + \beta g$. On pourra calculer la dérivée de la fonction $\dfrac{h}{f}$.
5. Montrer que $F = \mathrm{vect}(f, g)$.
6. En déduire la dimension de F.