Devoir surveillé n°13

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 La variable aléatoire S_n représente la position du pion à l'issue du $n^{\text{ème}}$ déplacement.

2 Tout d'abord, $p_0 = \mathbb{P}(S_0 = 0) = 1$.
Clairement, $X_1(\Omega) = \{-1, 1\}$ donc $p_1 = \mathbb{P}(X_1 = 0) = 0$.
Enfin,

$$\{S_2 = 0\} = \{X_1 + X_2 = 0\} = (\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = -1\}) \sqcup (\{X_1 = -1\} \cap \{X_2 = 1\})$$

Par indépendance de X_1 et X_2,

$$p_2 = \mathbb{P}(S_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = -1) + \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

3 Soit $n \in \mathbb{N}$ impair. Soit $\omega \in \Omega$. Puisque les X_k sont à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et que $-1 \equiv 1[2]$,

$$S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) \equiv n[2]$$

Mais comme n est impair, $S_n(\omega) \equiv 1[2]$. Notamment, l'événement $\{S_n = 0\}$ est impossible. Ainsi $p_n = \mathbb{P}(S_n = 0) = 0$.

4 Comme X_k est à valeurs dans $\{-1, 1\}$, Y_k est à valeurs dans $\{0, 1\}$, de sorte que Y_k suit une loi de Bernoulli.
De plus,

$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2}$$

donc Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

5 Z_n est la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi $\mathcal{B}(1/2)$ donc $Z_n \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$.
De plus,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} (2Y_k - 1) = 2S_n - n$$

6 La formule proposée est clairement vraie pour $m = 0$ puisque $p_0 = 1$.
Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on peut appliquer la question précédente pour affirmer que

$$p_{2m} = \mathbb{P}(S_{2m} = 0) = \mathbb{P}(Z_{2m} = m) = \binom{2m}{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-m} = \binom{2m}{m} \cdot \frac{1}{4^m}$$

7 La suite (p_n) est à valeurs dans $[0, 1]$ (suite de probabilités) donc elle est bornée. Par définition du rayon de convergence, $R_p \geq 1$.

8 Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{1}{2} - k + 1\right) = \prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{2k-1}{2}\right) = \frac{(-1)^m}{2^m} \prod_{k=1}^{m} (2k - 1) = \frac{(-1)^m}{2^m} \frac{\prod_{k=1}^{2m} k}{\prod_{k=1}^{m} 2k} = \frac{(-1)^m}{2^m} \frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{(-1)^m (2m)!}{4^m m!}$$

On en déduit que

$$\frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)=\frac{1}{4^m}\cdot\frac{(2m)!}{(m!)^2}=\frac{1}{4^m}\binom{2m}{m}=p_{2m}$$

Cette expression est encore valide lorsque $m=0$ en convenant qu'un produit indexé sur l'ensemble vide vaut 1.

9 D'après un développement en série entière usuel

$$\forall t\in]-1,1[,\ (1+t)^{-1/2}=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}\left[\prod_{k=0}^{m-1}(-1/2-k)\right]t^m=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}\left[\prod_{k=1}^{m}(-1/2-k+1)\right]t^m$$

donc

$$\begin{aligned}\forall x\in]-1,1[,\ (1-x^2)^{-1/2}&=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}\left[\prod_{k=1}^{m}(-1/2-k+1)\right](-x^2)^m\\&=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left[\prod_{k=1}^{m}(-1/2-k+1)\right]x^{2m}\\&=\sum_{m=0}^{+\infty}p_{2m}x^{2m}\\&=\sum_{m=0}^{+\infty}p_m x^m\qquad\text{car } p_{2m+1}=0 \text{ pour tout } m\in\mathbb{N}\\&=f(x)\end{aligned}$$

10 Il est clair que $\{T=n\}\subset\{S_n=0\}$. Comme $p_n=\mathbb{P}(S_n=0)=0$ pour n impair, on a donc également $q_n=\mathbb{P}(T=n)=0$ pour n impair. Notamment, $q_1=0$.
De plus, $\{T=2\}=\{S_2=0\}$ donc $q_2=p_2=\dfrac{1}{2}$.

11 Il est clair que $\|g_n\|_{\infty,[-1,1]}=q_n=\mathbb{P}(T=n)$. Or $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(T=n)$ converge (sa somme vaut 1) donc $\sum_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement sur $[-1,1]$. En particulier, $\sum q_n$ converge donc $R_q\geq 1$.

12 f et g sont deux fonctions développables en série entière au moins sur $]-1,1[$, donc, par produit de Cauchy, fg est développable en série entière au moins sur $]-1,1[$ et, pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}f(x)g(x)&=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}p_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}q_nx^n\right)\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}p_kq_{n-k}\right)x^n\\&=p_0q_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}p_kq_{n-k}\right)x^n\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}p_nx^n\qquad\text{d'après la relation admise pour tout } n\in\mathbb{N}^*\\&=-p_0+\sum_{n=0}^{+\infty}p_nx^n\\&=-1+f(x)\end{aligned}$$

13 On a vu à la question **9** que, pour tout $x\in]-1,1[$, $f(x)=(1-x^2)^{-1/2}$. La question précédente donne alors :

$$\forall x\in]-1,1[,\ g(x)=1-\sqrt{1-x^2}$$

On remarque que $g'(x) = xf(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$. On obtient donc par «primitivisation» d'une série entière :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[,\ g(x) &= g(0) + \sum_{m=0}^{+\infty} p_{2m} \frac{x^{2m+2}}{2m+2} \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{p_{2m-2}}{2m} x^{2m} \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4^{m-1}} \cdot \frac{\binom{2m-2}{m-1}}{2m} x^{2m} \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4^m(2m-1)} \binom{2m}{m} x^{2m}\end{aligned}$$

Le rayon de convergence de la série entière de somme g est 1 puisque le rayon de convergence est conservé par «primitivisation».

14 Par unicité du développement en série entière, $q_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_0 = 0$ et $q_{2n} = \dfrac{1}{4^m(2m-1)}\dbinom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

15 Comme $\mathrm{T}(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{T} = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{T} = n) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = 1 - \mathrm{g}(1)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $[-1,1]$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-1,1]$ d'après la questin **11**. On en déduit que la fonction g est continue sur $[-1,1]$. En particulier, elle est continue en 1, donc

$$\mathrm{g}(1) = \lim_{x\to 1^-} \mathrm{g}(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 - \sqrt{1-x^2} = 1$$

Remarque. On aurait pu se passer du théorème de transfert de continuité et invoquer le théorème de convergence radiale d'Abel pour aboutir au même résultat.

Ceci signifie qu'on est presque sûr que le pion revienne à un moment donné à l'origine.

16 Puisque $\mathbb{P}(\mathrm{T} = +\infty) = 0$, on peut considérer que g est la fonction génératrice de T. On sait alors que T admet une espérance (finie) si et seulement si g est dérivable en 1.

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{\mathrm{g}(x) - \mathrm{g}(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$$

Notamment, $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\mathrm{g}(x) - \mathrm{g}(1)}{x-1} = +\infty$ donc g n'est pas dérivable en 1 et T n'est pas d'espérance finie.

Problème 2

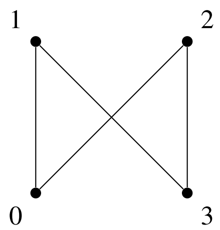
On importe auparavant la bibliothèque `random` pour tout ce qui suit.

```
import random as rd
```

1 On propose une première version à l'aide de l'indication de l'énoncé.

```
def VA(V):
    n = len(V)
    A = [[0]*n for j in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in V[i]:
            A[i][j] = 1
    return A
```

On l'applique au graphe suivant.




```
>>> V= [ [1, 2], [0, 3], [0, 3], [1, 2] ]
>>> VA(V)
[[0, 1, 1, 0], [1, 0, 0, 1], [1, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0]]
```

On propose ensuite une seconde version à l'aide de listes en compréhension.

```
def VA(V):
    n = len(V)
    return [ [1 if j in v else 0 for j in range(n)] for v in V]
```

On l'applique à nouveau au graphe précédent.

```
>>> V= [ [1, 2], [0, 3], [0, 3], [1, 2] ]
>>> VA(V)
[[0, 1, 1, 0], [1, 0, 0, 1], [1, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0]]
```

2 Une première version à l'aide de boucles itératives.

```
def AV(A):
    V = []
    for i in range(len(A)):
        voisin = []
        for j in range(len(A[i])):
            if A[i][j] == 1:
                voisin.append(j)
        V.append(voisin)
    return V
```

```
>>> A = [[0, 1, 1, 0], [1, 0, 0, 1], [1, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0]]
>>> AV(A)
[[1, 2], [0, 3], [0, 3], [1, 2]]
```

Une seconde version à l'aide de listes en compréhension.

```
def AV(A):
    return [ [j for j in range(len(ligne)) if ligne[j]==1] for ligne in A]
```

```
>>> A = [[0, 1, 1, 0], [1, 0, 0, 1], [1, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0]]
>>> AV(A)
[[1, 2], [0, 3], [0, 3], [1, 2]]
```

3 On a clairement $\mathrm{N} = \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} \mathrm{X}_{i,j}$.

4 Comme les $\mathrm{X}_{i,j}$ sont mutuellement indépendants et de même loi $\mathcal{B}(p)$, $\mathrm{N} \sim \mathcal{B}(m,p)$. En particulier, N possède une espérance et une variance. Plus précisément, $\mathbb{E}(\mathrm{N}) = mp$ et $\mathbb{V}(\mathrm{N}) = mp(1-p)$.

5 On prend garde au fait que la matrice d'adjacence doit être symétrique.

```
def GrapheAleatoire(n, p):
    A = [[0]*n for j in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in range(i+1):
            A[i][j] = A[j][i] = 1 if rd.random()<p else 0
    return A
```

```
>>> import pprint
>>> pprint.pprint(GrapheAleatoire(10, .5))
[[0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0],
 [0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1],
 [1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0],
 [0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1],
 [0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0],
 [1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0],
 [0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1],
 [0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1],
 [0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1],
 [0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0]]
```

6 **6.a** Tout d'abord I_k est à valeurs dans $\{0,1\}$ donc elle suit une loi de Bernoulli. De plus, le sommet k est sisolé si et seulement s'il n'est l'extrémité d'aucune arête. Autrement dit,

$$\{\mathrm{I}_k = 1\} = \bigcap_{i \neq k} \{\mathrm{X}_{i,k} = 0\}$$

Remarque. On considère que $\mathrm{X}_{i,k} = \mathrm{X}_{k,i}$ pour $k \neq i$.

Les $\mathrm{X}_{i,k}$ étant mutuellement indépendantes,

$$\mathbb{P}(\mathrm{I}_k = 1) = \prod_{i \neq k} \mathbb{P}(\mathrm{X}_{i,k} = 0) = (1-p_n)^{n-1}$$

Finalement $\mathrm{I}_k \sim \mathcal{B}(q_n)$ avec $q_n = (1-p_n)^{n-1}$.

6.b Il est clair que $Y_n = \sum_{k=0}^{n-1} I_k$. Donc Y_n possède une espérance et $\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(Y_k)$. Comme $Y_k \sim \mathcal{B}(q_n)$, $\mathbb{E}(Y_k) = q_n$ puis $\mathbb{E}(Y_n) = nq_n$.

$\boxed{7}$ **7.a** La fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ est concave sur $]-1,+\infty$ puisque $f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} \leq 0$ pour tout $t \in]-1,+\infty[$. Notamment, pour tout $t \in]-1,+\infty[$, $f(t) \leq f'(0)t + f(0)$ i.e. $\ln(1+t) \leq t$ pour tout $t \in]-1,+\infty[$. On en déduit que $\ln(1-x) \leq -x$ pour tout $x \in [0,1[$.
De plus,

$$\mathbb{E}(Y_n) = nq_n = n(1-p_n)^{n-1} = \exp\left(\ln(n) + (n-1)\ln(1-p_n)\right)$$

Or $\ln(1-p_n) \leq -p_n$ donc

$$\ln(n) + (n-1)\ln(1-p_n) \leq \ln(n) - (n-1)p_n = \ln(n) - (n-1)f(n)\frac{\ln n}{n} = \ln(n)\left(1 - \frac{n-1}{n}f(n)\right)$$

Par hypothèse, $f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc, par opérations sur les limites,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(n)\left(1 - \frac{n-1}{n}f(n)\right) = -\infty$$

Par majoration,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(n) + (n-1)\ln(1-p_n) = -\infty$$

puis, par composition par l'exponentielle, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Y_n) = 0$.

7.b Comme Y_n est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$,

$$0 \leq \mathbb{P}(Y_n > 0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y_n = k) \leq \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y_n = k) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{E}(Y_n)$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n > 0) = 0$ ou encore $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1$. Autrement dit, pour un graphe dense avec un grand nombre de sommets, il est peu probable qu'un sommet soit isolé.

Remarque. Puisque Y_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on aurait aussi pu utiliser la formule d'antirépartition :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_n > k) \geq \mathbb{P}(Y_n > 0)$$

$\boxed{8}$ **8.a** Soient i et j deux sommets distincts. Alors

$$\{I_i = 1\} \cap \{I_j = 1\} = \left(\bigcap_{k\notin\{i,j\}} \{X_{i,k} = 0\}\right) \cap \left(\bigcap_{k\notin\{i,j\}} \{X_{j,k} = 0\}\right) \cap \{X_{i,j} = 0\}$$

Par indépendance des $X_{i,j}$,

$$\mathbb{P}(\{I_i = 1\} \cap \{I_j = 1\}) = (1-p_n)^{2n-1}$$

On sait que $Y_n = \sum_{k=0}^{n-1} I_k$ donc

$$\mathbb{E}(Y_n^2) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(I_k^2) + 2\sum_{0\leq i<j\leq n-1} \mathbb{E}(I_i I_j)$$

Puisque I_k est à valeurs dans $\{0,1\}$, $I_k^2 = I_k$ donc $\mathbb{E}(I_k^2) = \mathbb{E}(I_k) = q_n$. De même, pour $i < j$, $I_j I_j$ est à valeurs dans $\{0,1\}$ donc suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$\mathbb{P}(I_i I_j = 1) = \mathbb{P}(\{I_i = 1\} \cap \{I_j = 1\}) = (1-p_n)^{2n-1}$$

de sorte que $\mathbb{E}(I_i I_j) = (1-p_n)^{2n-1}$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(Y_n^2) = nq_n + 2\binom{n}{2}(1-p_n)^{2n-1} = n(1-p_n)^{n-1} + n(n-1)(1-p_n)^{2n-1}$$

8.b Posons $P(t) = \mathbb{E}((U + tV)^2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par positivité de l'espérance, P est positive sur $\mathbb{R}$. De plus, par linéarité de l'espérance, $P(t) = \mathbb{E}(U^2) + 2t\mathbb{E}(UV) + t^2\mathbb{E}(V^2)$.
Si $\mathbb{E}(V)^2 \neq 0$, P est polynomiale de degré 2 et de signe constant. Ainsi $\Delta = 4\mathbb{E}(UV)^2 - 4\mathbb{E}(U)^2\mathbb{E}(V^2) \geq 0$ ou encore $\mathbb{E}(UV)^2 \leq \mathbb{E}(U^2)\mathbb{E}(V^2)$.
Si $\mathbb{E}(V^2) = 0$, alors P est affine de signe constant. En considérant les limites de P en $\pm\infty$, on en déduit que $\mathbb{E}(UV) = 0 \leq \mathbb{E}(U^2)\mathbb{E}(V^2)$.

8.c En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à W et $\mathbb{1}_{\{W>0\}}$, on obtient

$$\mathbb{E}(W\mathbb{1}_{\{W>0\}})^2 \leq \mathbb{E}(W^2)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W>0\}}^2)$$

Comme $\mathbb{1}_{\{W>0\}}$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$, $\mathbb{1}_{\{W<0\}}^2 = \mathbb{1}_{\{W<0\}}$ et $\mathbb{1}_{\{W<0\}} \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}(W > 0))$ donc $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W>0\}}^2) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W>0\}}) = \mathbb{P}(W > 0)$.
Ensuite, comme W est positive $\Omega = \{W > 0\} \sqcup \{W = 0\}$. Si $\omega \in \{W > 0\}$, $W(\omega)\mathbb{1}_{\{W>0\}}(\omega) = W(\omega)$ et si $\omega \in \{W = 0\}$, $W(\omega)\mathbb{1}_{\{W>0\}} = 0 = W(\omega)$. Finalement, $W\mathbb{1}_{\{W>0\}} = W$ puis $\mathbb{E}(W\mathbb{1}_{\{W>0\}}) = \mathbb{E}(W)$.
On en déduit que $\mathbb{E}(W)^2 \leq \mathbb{E}(W^2)\mathbb{P}(W > 0)$, puis $\mathbb{P}(W > 0) \geq \dfrac{\mathbb{E}(W)^2}{\mathbb{E}(W^2)}$ car $\mathbb{E}(W^2) > 0$ par hypothèse.

8.d Comme $p_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$. On a vu que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n) &= n(1 - p_n)^{n-1} \\
\mathbb{E}(Y_n^2) &= n(1 - p_n)^{n-1} + n(n-1)(1 - p_n)^{2n-1}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{\mathbb{E}(Y_n^2)}{\mathbb{E}(Y_n)^2} = \frac{1}{n(1 - p_n)^{n-1}} + \frac{(n-1)(1 - p_n)}{n}$$

Par opérations, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n-1)(1 - p_n)}{n} = 1$. De plus,

$$\frac{1}{n(1 - p_n)^{n-1}} = \exp(-\ln(n) - (n-1)\ln(1 - p_n))$$

Or

$$(n-1)\ln(1 - p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -np_n$$

donc $(n-1)\ln(1 - p_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln n)$ puis $-\ln(n) - (n-1)\ln(1 - p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$. A fortiori,

$$\lim_{n\to+\infty} -\ln(n) - (n-1)\ln(1 - p_n) = -\infty$$

puis, par passage à l'exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n(1 - p_n)^{n-1}} = 0$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Y_n^2)}{\mathbb{E}(Y_n)^2} = 1$ et donc $\dfrac{\mathbb{E}(Y_n)^2}{\mathbb{E}(Y_n^2)} = 1$.

8.e Comme Y_n est positive, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\mathbb{E}(Y_n)^2}{\mathbb{E}(Y_n^2)} \leq \mathbb{P}(Y_n > 0) \leq 1$$

Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n > 0)$. Remarquons qu'un graphe connexe ne contient pas de sommets isolés. Ainsi, en notant C_n l'événement «le graphe $\mathcal{G}$ est connexe», $C_n \subset \{Y_n = 0\}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \mathbb{P}(C_n) \leq \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(Y_n > 0)$$

On en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n) = 0$. Autrement dit, un graphe peu dense avec un grand nombre de sommets a une faible probabilité d'être connexe.

9 Un sommet i d'un graphe $\mathcal{G}$ est isolé si la liste des voisins est vide. En notant A la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$, ceci correspond à $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} A_{i,j} = 0$.

```python
def Isoles(n, p):
    A = GrapheAleatoire(n, p)
    isoles = [i for i in range(n) if sum(A[i])==0]
    return len(isoles)
```

```
>>> [Isoles(10,.1) for _ in range(10)]
[7, 2, 3, 2, 3, 4, 2, 3, 2, 2]
```

10 On utilise la loi faible des grands nombres pour utiliser la probabilité demandée. En effet, on sait que si A est un événement et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$, alors, en posant $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{P}(A)| \geq \varepsilon) = 0$$

On prend à nouveau comme paramètres le nombre n de sommets et la probabilité de connexion p.

```
def ProbabiliteIsole(n, p):
    N = 10000
    return sum([Isoles(n, p)>0 for _ in range(N)]) / N
```

```
>>> ProbabiliteIsole(30,.1)
0.7132
```