Devoir surveillé n°09

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 **CCP PC 2021**

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du $n^{\text{ème}}$ tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage dans un cas particulier.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche, 0 si la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k$$

On rappelle que si E et F sont deux évènements avec $\mathbb{P}(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $\mathbb{P}(E \mid F)$ ou $\mathbb{P}_F(E)$) par :

$$P(E \mid F) = \mathbb{P}_F(E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$$

Préliminaires

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'événement $\{X_1 = 1\}$. En déduire la loi de X_2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n.

La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k)$.

5. A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{b+r+n}$$

6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Exprimer l'événement $\{S_n = 1\}$ avec les événements $\{X_k = 0\}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

8. Montrer que $\mathbb{P}(S_n = 1) = \dfrac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k, \ell) \in [\![1, n+1]\!] \times [\![1, n+1]\!]$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell)$ dans chacun des trois cas suivants : (i) $\ell \notin \{k-1, k\}$; (ii) $\ell = k-1$; (iii) $\ell = k$.

10. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, on a la relation

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2}\mathbb{P}(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2}\mathbb{P}(S_n = k)$$

11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

Exercice 2 ★★ **E3A MP 2015 Maths 1**

A toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels et toute suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels non nuls, on associe la suite de matrices (A_n) où A_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

On note $P_n(X) = \det(XI_n - A_n)$ le polynôme caractéristique de A_n.

1. Déterminer une relation de récurrence entre les polynômes $P_{n+1}(X)$, $P_n(X)$ et $P_{n-1}(X)$.

2. **a.** Justifier que la matrice A_n est diagonalisable.

b. Soit λ une valeur propre de la matrice A_n. Calculer le déterminant de la matrice extraite de $\lambda I_n - A_n$ en supprimant sa première colonne et sa dernière ligne.

c. En déduire le rang de la matrice $\lambda I_n - A_n$ pour λ valeur propre de la matrice A_n.

d. En déduire que le polynôme caractéristique $P_n(X)$ de la matrice A_n admet n racines réelles distinctes.

3. On appelle $\Delta_n(x)$ le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} P'_{n+1}(x) & P'_n(x) \\ P_{n+1}(x) & P_n(x) \end{pmatrix}$.

a. Soit $n \geq 2$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Delta_n(x) = P_n^2(x) + b_n^2 \Delta_{n-1}(x)$$

b. Montrer que $\Delta_1(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire le signe de $\Delta_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Montrer que l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto P_{n+1}(x)$ s'annule une unique fois entre deux zéros consécutifs de P_n.
On pourra considérer l'application $x \mapsto \dfrac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$.

Exercice 3 **E3A Maths B MP 2012**

Etant donné un entier naturel non nul n, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne la $\mathbb{C}$-algèbre des matrices (n,n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. On désigne par I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Etant donnée une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M)$ son polynôme caractéristique.
Si A, B, C, D sont quatre matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $M_{A,B,C,D}$ la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs par :

$$M_{A,B,C,D} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

1. Soient A, B, C, D, E cinq matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Exprimer la matrice produit $M_{A,B,C,D}M_{I_n,E,0_n,I_n}$.

b. On suppose la matrice A inversible. Justifier l'égalité :

$$\det(M_{A,B,C,D}) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$

2. On suppose que les matrices A et C commutent.

a. On suppose que la matrice A est inversible. Démontrer que $\det(M_{A,B,C,D}) = \det(AD - CB)$.

b. On ne suppose plus la matrice A inversible.

i. Démontrer qu'il existe des matrices U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que le polynôme caractéristique de la matrice $M_{A,B,C,D}$ vérifie $\chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det(\lambda^2 I_n + \lambda U + V)$.
Expliciter U et V en fonction des matrices A, B, C et D.

ii. En déduire que $\det(M_{A,B,C,D}) = \det(AD - CB)$.

3. Dans cette question, on suppose que $A = D = I_n$ et que C et B sont deux matrices à coefficients réels transposées l'une de l'autre. On désigne la matrice $M_{I_n,B,B^\top,I_n}$ par S.

a. Justifier que $B^\top B$ est une matrice symétrique positive.

b. Exprimer le polynôme χ_S en fonction du polynôme $\chi_{B^\top B}$.

c. En déduire que la matrice S est symétrique définie positive si et seulement si les valeurs propres de la matrice $B^\top B$ sont toutes strictement inférieures à 1.

4. On considère la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \forall n > 1,\ A_n = \begin{pmatrix} 2A_{n-1} & iA_{n-1} \\ iA_{n-1} & -2A_{n-1} \end{pmatrix}$$

a. Soit $n > 1$. Déterminer une relation de récurrence entre $\det(A_n)$ et $\det(A_{n-1})$.

b. Soit $n \geq 1$. Exprimer $\det(A_n)$ en fonction de n.

c. Soit $n > 1$. Exprimer le polynôme caractéristique χ_{A_n} de la matrice A_n en fonction de $\chi_{A_{n-1}}$ et $\chi_{(-A_{n-1})}$.

d. Soit $n \geq 1$. Déterminer les valeurs propres de la matrice A_n.

Exercice 4 **E3A MP 2021**

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \int_0^1 P(t)\,dt$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X-1, X(X-1), \cdots, X^{n-1}(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Généralités sur φ.

a. Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de φ.

3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_0^x P(t)\,dt$$

a. Justifier que l'application ψ est linéaire.

b. Démontrer que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{vect}(X, X^2, \dots, X^{n+1})$.

c. Démontrer que $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \psi(P) \in \mathrm{vect}(X(X-1), \dots, X^n(X-1))$.

d. Donner alors une base de $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

4. On note $\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

a. Donner la dimension de $\mathcal{H}$.

b. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.
Démontrer que la famille $(\psi_0, \dots, \psi_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.

c. Déterminer les composantes de φ dans cette base.