Devoir à la maison n°16

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

On note $\mathcal{F}$ l'ensemblde des fontions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}$ la partie de $\mathcal{F}$ formée des fonctions *lipschitziennes* sur $\mathbb{R}$. On rappelle qu'une fonction φ est lipschitziennne sur $\mathbb{R}$ s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant K|x-y|$$

L'objectif de ce problème est de déterminer les fonctions $F \in \mathcal{L}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x)-\lambda F(x+a) = f(x) \tag{$\star$}$$

où f est une fonction de $\mathcal{L}$ donnée et où a et λ sont deux réels non nuls donnés.

Partie I – Questions préliminaires

1. Montrer qu'une fonction constante sur $\mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{L}$.
2. Montrer que cos et sin appartiennent à $\mathcal{L}$.
3. Montrer que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.
4. Soit $\varphi \in \mathcal{L}$. Montrer qu'il existe deux réels positifs A et B tels que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |\varphi(t)| \leqslant A|t| + B$$

5. Soit q un complexe de module strictement inférieur à 1.
   a. On sait qu'alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ converge. Rappeler sa somme.
   b. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} nq^n$ converge.
6. On suppose dans cette question $|\lambda| < 1$.
   a. On fixe $x \in \mathbb{R}$. Justifier que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n e^{i(x+na)}$ converge et déterminer sa somme.
   b. Montrer que les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n \cos(x+na)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n \sin(x+na)$ convergent et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos(x+na) = \frac{\cos x - \lambda\cos(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \sin(x+na) = \frac{\sin x - \lambda\sin(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}$$

Partie II – Etude de ($\star$) lorsque f est nulle et $|\lambda| \neq 1$

On suppose dans cette partie que f est nulle sur $\mathbb{R}$ et $|\lambda| \neq 1$.

1. Soit $F \in \mathcal{F}$ vérifiant ($\star$). Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$F(x) = \lambda^n F(x+na)$$
$$F(x) = \lambda^{-n} F(x-na)$$

2. On suppose maintenant que $F \in \mathcal{L}$. Montrer à l'aide de la question **I.4** que F est nulle sur $\mathbb{R}$. On pourra distinguer les cas $|\lambda| < 1$ et $|\lambda| > 1$.

Partie III – Etude de ($\star$) lorsque $|\lambda| \neq 1$

1. Montrer à l'aide de la question **II.2** que l'équation ($\star$) admet au plus une solution dans $\mathcal{L}$.
2. On suppose dans cette question $|\lambda| < 1$.
   - **a.** On fixe $x \in \mathbb{R}$. Montrer à l'aide de la question **I.4** que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n f(x+na)$ converge absolument. On pose alors $F_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na)$.
   - **b.** Montrer que $F_0 \in \mathcal{L}$.
   - **c.** Montrer que F_0 est l'unique solution de ($\star$) appartenant à $\mathcal{L}$.
   - **d.** Déterminer l'unique solution de ($\star$) appartenant à $\mathcal{L}$ lorsque f est la fonction constante égale à 1.
   - **e.** A l'aide de la question **I.6.b**, déterminer l'unique solution de ($\star$) appartenant à $\mathcal{L}$ lorsque f est la fonction cos ou la fonction sin.
3. On suppose dans cette question $|\lambda| > 1$.
   - **a.** On fixe $x \in \mathbb{R}$. Justifier brièvement que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \lambda^{-n} f(x-na)$ converge absolument. On pose alors $F_0(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na)$.
   - **b.** Montrer que F_0 est l'unique solution de ($\star$) appartenant à $\mathcal{L}$.