

**EXERCICE 1.**

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $a, b \in \mathbb{K}$  avec  $a \neq b$ .

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de  $P$  par le polynôme  $X - a$ .
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de  $P$  par le polynôme  $(X - a)^2$ .
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de  $P$  par le polynôme  $(X - a)(X - b)$ .

**EXERCICE 2.**

Soient

$$A = X^{100} - X^4 + X - 1 \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 + X + 1.$$

Trouver le reste de la division euclidienne de  $A$  par le polynôme  $B$ .

**EXERCICE 3.★**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $n \geq 1$ . Trouver une condition *nécessaire et suffisante* pour que  $(X - 1)^2$  divise

$$aX^{n+1} + bX^n + 1.$$

Calculer alors le quotient.

**EXERCICE 4.★**

Soit  $n \geq 2$ . On pose  $P_n = (X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2$ .

1. Déterminer le reste de  $P_n$  dans la division euclidienne par  $X - 3$ .
2. Déterminer le reste de  $P_n$  dans la division euclidienne par  $(X - 2)^2$ .
3. Déterminer le reste de  $P_n$  dans la division euclidienne par  $(X - 2)^2(X - 3)^2$ .

**EXERCICE 5.**

Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  tels que  $B$  divise  $A$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

1. Justifier que  $B$  divise  $A$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Quels sont les entiers naturels  $n$  tels que le polynôme  $X^2 + X + 1$  divise  $X^{2n} + X^n + 1$  ?
3. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose

$$P_n = (1 + X^4)^n - X^4.$$

Déterminer l'ensemble  $\mathcal{E}$  des entiers naturels  $n$  tels que  $X^2 + X + 1$  divise  $P_n$ .

**EXERCICE 6.**

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer le reste de la division euclidienne de  $(\cos \theta + X \sin \theta)^n$  par  $X^2 + 1$ .

**EXERCICE 7.**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$P_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1.$$

Déterminer le reste de la division euclidienne de  $P_n$  par  $(X - 1)^3$ .

**EXERCICE 8.**

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . On suppose que le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X + 1$  est égal à 7 et que le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X + 5$  est égal à 3. Peut-on déterminer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X^2 + 6X + 5$  ?

**EXERCICE 9.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer le reste dans la division euclidienne de

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left( \sin(k\pi/n)X + \cos(k\pi/n) \right)$$

par  $X^2 + 1$ .

**EXERCICE 10.**

Pour quelles valeurs de  $m \in \mathbb{N}$  le polynôme  $P_m = (X + 1)^m - X^m - 1$  est-il divisible par  $Q = X^2 + X + 1$  ?

**EXERCICE 11.**

1. Le polynôme  $(X + 1)^{2009} + X^{2009} + 1$  est-il divisible par le polynôme  $X^2 + X + 1$  ?
2. Pour quelles valeurs de  $n \in \mathbb{N}$  le polynôme  $X^2 + X + 1$  divise-t-il le polynôme  $(X + 1)^n + X^n + 1$  ?

**EXERCICE 12.**

On pose  $E = \mathbb{R}_4[X]$ . Soit  $A = X^2 + 1$  et  $F = \{P \in E \mid A \text{ divise } P\}$ .

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Montrer que  $E = F \oplus \mathbb{R}_1[X]$ .
3. Déterminer une base de  $F$ .

**EXERCICE 13.**

Soit  $A \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $\deg A \geq 1$ . On pose  $d = \deg A$ . On note  $D$  l'application qui à un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  associe le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $A$ .

1. Montrer que  $D$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ .
2. Montrer que  $D$  est un projecteur de  $\mathbb{K}[X]$ .
3. Montrer que  $\text{Im } D = \mathbb{K}_{d-1}[X]$ .
4. On note  $A\mathbb{K}[X]$  l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  multiples de  $A$ . Dédurre de la question précédente que

$$\mathbb{K}[X] = A\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{d-1}[X]$$

**EXERCICE 14.**

Soient  $p$  un nombre premier et  $P_n = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$  avec  $n \geq 1$ . On suppose que

$$p \nmid a_n, \forall 0 \leq k \leq n-1, p \mid a_k \text{ et } p^2 \nmid a_0.$$

Montrer que  $P_n$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ .

**EXERCICE 15.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe un polynôme  $P$  tel que  $X^n$  divise  $1 + X - P^2$ .

**EXERCICE 16.**

Soient  $P$  et  $Q$  des polynômes de la forme  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n X^n$  avec  $(a_n)$  une suite presque nulle de réels positifs. Montrer que  $PQ$  est également de cette forme.

**EXERCICE 17.**

Calculer pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2$ .

**EXERCICE 18.**

1. Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ .
2. Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ .
3. Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ .

**EXERCICE 19.**

Existe-t-il  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\forall x \in [0, 1], P(x) = \cos x$  ?

**EXERCICE 20.**

Existe-t-il un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \bar{z} ?$$

**EXERCICE 21.★**

On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^{2k}$ .

1. Montrer que la décomposition en produit de facteurs irréductibles sur  $\mathbb{R}$  de  $P_n$  s'écrit

$$P_n(X) = \prod_{k=1}^{n-1} (X^2 - 2 \cos(k\pi/n)X + 1).$$

2. En déduire que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/(2n)) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

3. Calculer la valeur de

$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos(k\pi/n).$$

**EXERCICE 22.**

Décomposer sur  $\mathbb{R}$  les polynômes suivants :

- |                          |                           |
|--------------------------|---------------------------|
| 1. $A = X^3 + 1$ ;       | 5. $E = X^8 + 1$ ;        |
| 2. $B = X^4 + 1$ ;       | 6. $F = X^8 + X^4 + 1$ ;  |
| 3. $C = X^4 + X^2 + 1$ ; | 7. $G = X^4 - X^2 - 12$ ; |
| 4. $D = X^6 + 1$ ;       | 8. $H = X^6 - 1$ .        |

**EXERCICE 23.★**

Soit  $n \geq 1$ . Décomposer  $X^n + 1$  sur  $\mathbb{C}$  puis sur  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 24.★**

Soit  $P$  le polynôme suivant,

$$X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1.$$

- Vérifier que  $i$  est racine multiple de  $P$ .
- En déduire la décomposition de  $P$  sur  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 25.★**

Factoriser en produits de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes :

- |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|
| 1. $X^{2n+1} - 1$ ;        | 3. $1 + X^3 + X^6 + X^9$ ; |
| 2. $\sum_{k=0}^{2n} X^k$ ; |                            |

**EXERCICE 26.**

Soit  $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$ .

- Vérifier que 2 est une racine multiple de  $P$ .
- Déterminer toutes les racines de  $P$ .
- Décomposer  $P$  sur  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 27.**

Soit le polynôme  $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$ .

- Montrer que  $j$  est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
- Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de  $P$  ?
- Décomposer  $P$  en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**EXERCICE 28.**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- Donner sous forme trigonométrique les racines cubiques de  $e^{i\alpha}$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) d'inconnue  $z$  suivante :  $z^6 - 2z^3 \cos \alpha + 1 = 0$ .
- Dans cette question, on suppose que  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .
  - Représenter graphiquement les solutions de l'équation (E) (unité : 4cm).
  - Factoriser  $z^6 + 1$  sous la forme d'un produit de trois trinômes du second degré à coefficients réels.

**EXERCICE 29.**

On considère les polynômes  $P = 3X^4 - 9X^3 + 7X^2 - 3X + 2$  et  $Q = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$ .

- Décomposez  $P$  et  $Q$  en facteurs irréductibles sur  $\mathbb{R}[X]$ , puis sur  $\mathbb{C}[X]$  (on pourra calculer les valeurs de  $P$  et  $Q$  en 1 et 2).
- Déterminer le PPCM et le PGCD des polynômes  $P$  et  $Q$ .

**EXERCICE 30.**

Soient  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Décomposez en produit de polynômes irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme :

$$P = X^{2n} - 2X^n \cos(n\theta) + 1$$

**EXERCICE 31.**

Soit  $\mathcal{E}$  l'équation  $2z^3 - (7 + 2i)z^2 + (11 + i)z - 4 = 0$ .

- Montrer que  $\mathcal{E}$  admet une racine réelle que l'on calculera.
- Résoudre  $\mathcal{E}$  sur  $\mathbb{C}$ .

**EXERCICE 32.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le polynôme

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$$

possède-t-il une racine multiple ?

**EXERCICE 33.**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Factoriser sur  $\mathbb{C}$  le polynôme  $P_n = X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1$ .

2. En déduire une expression simple de  $A_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$ .

3. Donner une expression simple de  $B_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin \left( \frac{k\pi}{n} + \theta \right)$ .

4. On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . Calculer  $C_n = \prod_{\substack{0 \leq k, l \leq n-1 \\ k \neq l}} (\omega^k - \omega^l)$ .

**EXERCICE 34.**

1. Montrer que le polynôme  $R = X^3 + X + 1$  admet trois racines complexes distinctes notées  $a, b, c$ .

2. Montrer que  $a, b, c, -a, -b, -c$  sont six complexes distincts.

3. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $Q$  tel que  $Q(X^2) = P(X)P(-X)$ .

4. En déduire un polynôme de degré 3 ayant pour seules racines  $a^2, b^2, c^2$ .

**EXERCICE 35.**

On cherche les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  de la forme  $(X - a)(X - b)$  tels que  $P$  divise  $P(X^3)$ .

1. Déterminer les polynômes  $P$  dans le cas où  $a = b$ .
2. Montrer que si  $a \neq b$  et  $a^3 \neq b^3$ , il existe 6 tels polynômes  $P$  dont 4 dans  $\mathbb{R}[X]$ .
3. Déterminer les polynômes  $P$  dans le cas où  $a \neq b$  et  $a^3 = b^3$ .
4. En déduire que 13 polynômes en tout conviennent dont 7 dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**EXERCICE 36.★**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On pose  $T_n = X^n - X + 1$ .

1. Déterminer le nombre de racines réelles de  $T_n$ .
2. Montrer que  $T_n$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}[X]$ .

**EXERCICE 37.★**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  le système suivant :

$$\begin{cases} |x| = |y| = |z| = 1 \\ x + y + z = 1 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

**EXERCICE 38.★**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases}$$

**EXERCICE 39.★**

Pour  $n \geq 2$ , on pose  $P_n = (X + i)^n - (X - i)^n$ .

1. Déterminer les racines complexes de  $P_n$ .
2. En déduire les valeurs de

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} \cotan(k\pi/n) \quad \text{et} \quad B_n = \prod_{k=1}^{n-1} \cotan(k\pi/n).$$

**EXERCICE 40.★**

Soient  $a, b$  et  $c$  les racines complexes du polynôme  $P = X^3 - 2X + 5$ .

1. Calculer  $S = a^4 + b^4 + c^4$ .
2. Trouver un polynôme de degré trois à coefficients entiers dont  $a^2, b^2$  et  $c^2$  sont les racines.

**EXERCICE 41.**

Soient  $x, y, z$  trois complexes non nuls tels que  $x + y + z = 0$  et  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ . Montrer que  $|x| = |y| = |z|$ .

**EXERCICE 42.**

Soient  $n, p \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer le pgcd de  $X^n - 1$  et  $X^p - 1$ .

**EXERCICE 43.**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on considère la fonction  $f_n : \begin{cases} ]0, \pi[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} \end{cases}$ .

1. Montrer que la fonction  $f_n$  est prolongeable par continuité en 0 et  $\pi$ . On notera encore  $f_n$  ce prolongement. Que valent alors  $f_n(0)$  et  $f_n(\pi)$  ?
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique polynôme  $P_n$  tel que  $\forall x \in [-1, 1], P_n(x) = f_n(\arccos x)$ . On déterminera le degré et la parité de  $P_n$  en fonction de  $n$ .
3. Déterminer les valeurs de  $P_n(1), P_n(-1), P_n(0), P'_n(0)$ .
4. Montrer que  $|P_n(x)| \leq n + 1$  pour tout  $x \in [-1, 1]$ .
5. Etablir que les polynômes  $P_n$  vérifient la relation de récurrence :  $P_{n+1} + P_{n-1} = 2XP_n$ .
6. Justifier que  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, \pi]$ . En dérivant deux fois l'identité  $\sin \theta f_n(\theta) = \sin(n+1)\theta$ , déterminer une équation différentielle linéaire homogène que vérifie  $f_n$ .
7. En déduire une équation différentielle linéaire homogène que vérifie  $P_n$ .
8. On note  $P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ . Déduire de la question précédente une relation de récurrence entre  $a_{k+2}$  et  $a_k$ . Expliciter les  $a_k$  (on pourra distinguer le cas  $n$  pair et le cas  $n$  impair).

**EXERCICE 44.**

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique  $P_n$  tel que  $P_n(X+1) + P_n(X) = 2X^n$ .
2. Trouver une relation entre  $P'_n$  et  $P_{n-1}$ .
3. Montrer que  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{K}[X]$  et décomposer  $P_n(X+1)$  sur cette base.
4. Montrer que  $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$ .

**EXERCICE 45.★★**

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $\Delta$  l'application définie sur  $\mathbb{R}[X]$  par

$$P \longmapsto P(X+1) - P(X).$$

On pose  $\Gamma_0 = 1$  et, pour tout entier  $k \geq 1$ ,

$$\Gamma_k(X) = X(X-1) \dots (X-k+1).$$

On note  $\Delta_n$  la restriction de  $\Delta$  à  $\mathbb{R}_n[X]$ .

1. Vérifier que  $\Delta_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ .
2. Montrer que  $\mathcal{B}_n = (\Gamma_0, \dots, \Gamma_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
3. Exprimer, pour tout  $k \leq n$ ,  $\Delta_n(\Gamma_k)$  dans la base  $\mathcal{B}_n$ . En déduire  $\text{Im}(\Delta_n)$  et  $\text{Ker}(\Delta_n)$ .
4. Calculer, pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $(\Delta_n)^\ell$ . En déduire que  $\Delta_n$  est nilpotent d'indice  $n+1$ .
5. Prouver que  $\forall Q \in \mathbb{R}[X]$ , il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$P(X+1) - P(X) = Q(X).$$

Y-a-t-il unicité de  $P$  ?

6. Déterminer trois polynômes  $P_i, i \in \{1, 2, 3\}$ , tels que

$$\forall i, P_i(X+1) - P_i(X) = X^i.$$

7. En déduire la valeur des sommes suivantes,

$$S_n = 1 + \dots + n, \quad T_n = 1^2 + \dots + n^2 \quad \text{et} \quad U_n = 1^3 + \dots + n^3.$$

**EXERCICE 46.**

On considère la suite de polynômes  $(P_n)_{n \geq 0}$  définie par  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = X$ , et

$$\forall n \geq 1 \quad P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}.$$

1. Calculer  $P_2$ ,  $P_3$  et  $P_4$ .
2. Montrer que  $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$  pour tout  $n \geq 0$ . En déduire que  $P_n$  est pair si  $n$  est pair, et impair sinon.
3. Montrer que  $\deg P_n = n$ , et déterminer le coefficient dominant de  $P_n$ .
4.
  - a. Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout réel  $x$ , on a  $\cos(nx) = P_n(\cos(x))$ .
  - b. En déduire que  $P_n$  admet les  $n$  racines distinctes suivantes :  $\{\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n}), 0 \leq k \leq n-1\}$ .

**EXERCICE 47.**

On considère la suite de polynômes  $(P_n)_{n \geq 1}$  définie par  $P_1 = X$ ,  $P_2 = X^2 - 2$ , et

$$\forall n \geq 2 \quad P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}.$$

1. Calculer  $P_3$  et  $P_4$ .
2. Montrer que  $P_n$  est de même parité que  $n$ .
3. Montrer que  $\deg P_n = n$ , et déterminer le coefficient dominant de  $P_n$ .
4. Calculer  $P_n(0)$  (on distinguera selon la parité de  $n$ ).
5. Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$X^n + \frac{1}{X^n} = P_n\left(X + \frac{1}{X}\right).$$

6. Grâce à ce qui précède, factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes suivants :
  - a)  $Q_1 = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 3X + 1$ .
  - b)  $Q_2 = X^6 + X^5 - 9X^4 + 2X^3 - 9X^2 + X + 1$ .

**EXERCICE 48.★**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $P_n = (1+X)^n - (1-X)^n$ .

1. Calculer  $P_1, P_2, P_3, P_4$ .
2. Montrer que  $P_n$  est impair.
3. Quel est le coefficient de  $X^n$  dans  $P_n$  ? Même question avec  $X^{n-1}$ .  
En déduire que le degré de  $P_n$  est égal à  $n$  (respectivement  $n-1$ ) lorsque  $n$  est impair (respectivement pair).
4. Montrer que  $P_n$  est divisible par  $X$ .
5.
  - a. Montrer que  $z \in \mathbb{C}$  est racine de  $P_n$  si et seulement si  $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1$ .
  - b. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1$ , et en déduire les racines complexes de  $P_n$  (on distinguera les cas  $n$  pair et  $n$  impair).  
Combien de ses racines sont réelles ?
6. Factoriser  $P_n$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$  (on distinguera à nouveau les cas  $n$  pair et  $n$  impair).

**EXERCICE 49.★★**

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des nombres réels deux à deux distincts. Soit  $\psi$  l'application de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  définie par

$$P \mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)).$$

1. Prouver que  $\psi$  est un isomorphisme.
2. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes  $(L_0, \dots, L_n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  telle que
 
$$\forall 0 \leq j, i \leq n, \quad L_j(a_i) = \delta_{i,j}.$$
3. Justifier que  $\mathcal{B} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Quelles sont les coordonnées de  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  dans la base  $\mathcal{B}$  ? Justifier la présence du mot *interpolateur* dans le titre de l'exercice.
4. Expliciter les polynômes  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$  sous forme de produits.

**EXERCICE 50.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soient  $x_0, \dots, x_n$   $n$  réels distincts. On définit pour  $0 \leq i \leq n$  les polynômes

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

1. Montrer que  $(L_0, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Calculer  $P = \sum_{i=0}^n x_i^k L_i$ .

**EXERCICE 51.**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $Q_n = (X^2 - 1)^n$  et  $P_n = \frac{1}{2^n n!} Q_n^{(n)}$ . On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

1. Calculer  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$ .
2. Quel est le degré de  $P_n$  ?
3. Montrer que  $P_n$  a la parité de  $n$ . En déduire  $P_n(0)$  pour  $n$  impair et  $P_n'(0)$  pour  $n$  pair.
4. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer  $P_n(0)$  pour  $n$  pair et  $P_n'(0)$  pour  $n$  impair. On exprimera les résultats à l'aide de factorielles.
5. a. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (X^2 - 1)Q_n' = 2nXQ_n$$

- b. En dérivant  $n + 1$  fois cette relation, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (X^2 - 1)P_n'' + 2XP_n' = n(n + 1)P_n$$

6. a. Montrer que  $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ .  
b. En appliquant le théorème de Rolle et à l'aide d'une récurrence, montrer que  $P_n$  admet exactement  $n$  racines réelles distinctes dans  $] -1, 1[$ .

**EXERCICE 52.**

Soient  $a, b \in \mathbb{K}$  avec  $a \neq b$ . Montrer que la famille  $((X - a)^k (X - b)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

**EXERCICE 53.★**

Soient  $n \geq 0$  et  $f$  définie sur  $E = \mathbb{K}_n[X]$  par  $f(P) = P - P'$ . Prouver que  $f \in \text{GL}(E)$  et expliciter  $f^{-1}$ .

**EXERCICE 54.★**

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $\phi$  l'application définie sur l'espace vectoriel  $E_n = \mathbb{R}_n[X]$  par

$$\phi : P \longmapsto \phi(P) = (X + 1)P(X) - XP(X + 1).$$

1.  $\phi$  définit-il un endomorphisme de  $E_n$  ?
2. Déterminer le noyau de  $\phi$ .
3.  $\phi$  est-il surjectif ?

**EXERCICE 55.**

On note  $U_0 = 1$ ,  $U_p = \frac{X(X-1)\dots(X-p+1)}{p!}$  pour  $p \geq 1$  et  $\Delta : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$  :

$$P \longmapsto P(X+1) - P(X).$$

1. Montrer que  $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{K}[X]$ .
2. Calculer  $\Delta^n(U_p)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
3. En déduire que tout  $P \in \mathbb{K}[X]$  de degré  $n$  peut s'écrire

$$P = P(0) + (\Delta P)(0)U_1 + \dots + (\Delta^n P)(0)U_n$$

4. Montrer que, pour  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$  si et seulement si les coordonnées de  $P$  dans la base  $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$  sont entières.
5. Soit  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ . Montrer que  $f$  est polynomiale si et seulement si  $\exists n \in \mathbb{N}, \Delta^n f = 0$ .

**EXERCICE 56.**

Soient  $n \geq 3$ ,  $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $\varphi_n$  l'application définie sur  $E_n$  par,

$$\varphi_n(P) = (X - a)(P'(X) + P'(a)) - 2(P(X) - P(a)).$$

1. Vérifier que  $\varphi_n \in \mathcal{L}(E_n)$ .
2. On pose  $P_k = (X - a)^k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Justifier que la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est une base de  $E_n$ .
3. Calculer  $\varphi_n(P_k)$  pour  $0 \leq k \leq n$ . On distinguera les cas  $k \leq 2$  et  $k \geq 3$ .
4. En déduire les sous-espaces  $\text{Im}(\varphi_n)$  et  $\text{Ker}(\varphi_n)$ . Quel est le rang de  $\varphi_n$  ?
5. Prouver que  $E_n = \text{Ker}(\varphi_n) \oplus \text{Im}(\varphi_n)$ .
6. Pour quelles valeurs de  $n \geq 3$  l'endomorphisme  $\varphi_n$  est-il un projecteur de  $E_n$  ?

**EXERCICE 57.★**

Soit  $\varphi$  l'application de  $\mathbb{R}[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$  définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \varphi(P) = \frac{P(X+1) + P(X)}{2}$$

1. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Déterminer le degré et le coefficient dominant de  $\varphi(X^k)$ .
2. Établir que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .
3. Dédurre de ce qui précède que  $\varphi$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .
4.
  - a. Justifier l'existence et l'unicité d'un polynôme  $U_n$  tel que  $U_n(X+1) + U_n(X) = \frac{2X^n}{n!}$ .
  - b. Démontrer que

$$U_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, U_n(0) + U_n(1) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, U'_n = U_{n-1}$$

- c. On pose  $V_n(X) = (-1)^n U_n(1-X)$ . Calculer  $\varphi(V_n)$ . En déduire que  $U_n(1-X) = (-1)^n U_n(X)$ .

**EXERCICE 58.★**

Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que

$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X).$$

**EXERCICE 59.★**

Déterminer les polynômes  $P$  de  $\mathbb{K}[X]$  vérifiant  $P(X+1) = P(X)$ .

**EXERCICE 60.**

Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que

$$(P')^2 = 4P.$$

**EXERCICE 61.**

On cherche les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  qui vérifient l'équation

$$P(X^2) = XP(X).$$

1. On suppose que  $P \neq 0$ .
  - a. Quel est le degré de  $P$  ?
  - b. Quelle est la seule racine possible pour  $P$  ?
2. Conclure.

**EXERCICE 62.**

Résoudre l'équation  $P'P'' = 18P$  où  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

**EXERCICE 63.**

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique  $P_n$  tel que  $P_n(X+1) + P_n(X) = 2X^n$ .
2. Trouver une relation entre  $P'_n$  et  $P_{n-1}$ .
3. Montrer que  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{K}[X]$  et décomposer  $P_n(X+1)$  sur cette base.
4. Montrer que  $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$ .

**EXERCICE 64.**

Trouver les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $(X+4)P(X) = XP(X+1)$ .

**EXERCICE 65.**

Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  non nul tel que  $P(X^2) = P(X+1)P(X)$ .

1. Montrer que si  $\alpha \in \mathbb{C}$  est une racine de  $P$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha^{2^n}$  est une racine de  $P$ .
2. Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  une racine non nulle de  $P$  (s'il en existe). Montrer que  $\alpha$  est une racine de l'unité.
3. Les racines de  $P$  sont-elles toutes nécessairement des racines de l'unité ?
4. En raisonnant par l'absurde, montrer que la seule racine non nulle possible pour  $P$  est 1.
5. Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(X^2) = P(X+1)P(X)$ .



**EXERCICE 66.**

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  non nul tel que  $P(X^2) = P(X)P(X-1)$ .

1. Montrer par l'absurde que 0 n'est pas racine de  $P$ .
2. Montrer que les racines de  $P$  sont de module 1.
3. En déduire tous les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(X^2) = P(X)P(X-1)$ .

**EXERCICE 67.**

Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $6P = X^2P''$ .

**EXERCICE 68.**

On identifiera les polynômes et leurs fonctions polynomiales associées.

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  non nul vérifiant la relation

$$(*) \quad P(X^2 - 1) = P(X-1)P(X+1)$$

1. Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ . On définit une suite  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  par  $a_0 = \alpha$  et  $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - a. Montrer que si  $\alpha$  est racine de  $P$ ,  $a_n$  est racine de  $P$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - b. On suppose  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ .  $(a_n)$  est alors une suite de réels. Montrer que  $(a_n)$  est strictement monotone.
  - c. En déduire que  $P$  n'admet aucune racine strictement positive.
2.
  - a. Montrer que  $-1$  n'est pas racine de  $P$ .
  - b. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $a_n + 1$  en fonction de  $\alpha$  et  $n$ .
  - c. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $r_n = |a_n + 1|$ . A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur  $\alpha$  la suite  $(r_n)$  est-elle strictement monotone ?
  - d. En déduire que si  $\alpha$  est racine de  $P$ , alors  $|\alpha + 1| = 1$ .
  - e. Montrer que si  $\alpha$  est racine de  $P$ , alors  $|\alpha - 1| = 1$ .
3. Montrer que si  $P$  est non constant, alors  $P$  admet 0 pour unique racine.
4. Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  vérifiant la relation  $(*)$ .