

# DEVOIR À LA MAISON N°03

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1 – D'après Centrale MP 1996

On note  $\mathcal{F}$  l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{L}$  la partie de  $\mathcal{F}$  formée des fonctions *lipschitziennes* sur  $\mathbb{R}$ . On rappelle qu'une fonction  $\varphi$  est lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$  s'il existe  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K|x - y|$$

L'objectif de ce problème est de déterminer les fonctions  $F \in \mathcal{L}$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) - \lambda F(x + a) = f(x) \quad (\star)$$

où  $f$  est une fonction de  $\mathcal{L}$  donnée et où  $a$  et  $\lambda$  sont deux réels non nuls donnés.

### Partie I – Questions préliminaires

1. Montrer qu'une fonction constante sur  $\mathbb{R}$  appartient à  $\mathcal{L}$ .
2. Montrer que  $\cos$  et  $\sin$  appartiennent à  $\mathcal{L}$ .
3. Montrer que  $\mathcal{L}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}$ .
4. Soit  $\varphi \in \mathcal{L}$ . Montrer qu'il existe deux réels positifs  $A$  et  $B$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\varphi(t)| \leq A|t| + B$$

5. Soit  $q$  un complexe de module strictement inférieur à 1.

a. On sait qu'alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$  converge. Rappeler sa somme.

b. Montrer que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} nq^n$  converge.

6. On suppose dans cette question  $|\lambda| < 1$ .

a. On fixe  $x \in \mathbb{R}$ . Justifier que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n e^{i(x+na)}$  converge et déterminer sa somme.

b. Montrer que les séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n \cos(x + na)$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n \sin(x + na)$  convergent et que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos(x + na) &= \frac{\cos x - \lambda \cos(x - a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \sin(x + na) &= \frac{\sin x - \lambda \sin(x - a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2} \end{aligned}$$

## Partie II – Etude de (★) lorsque $f$ est nulle et $|\lambda| \neq 1$

On suppose dans cette partie que  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}$  et  $|\lambda| \neq 1$ .

1. Soit  $F \in \mathcal{F}$  vérifiant (★). Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$

$$F(x) = \lambda^n F(x + na)$$

$$F(x) = \lambda^{-n} F(x - na)$$

2. On suppose maintenant que  $F \in \mathcal{L}$ . Montrer à l'aide de la question 4 que  $F$  est nulle sur  $\mathbb{R}$ . On pourra distinguer les cas  $|\lambda| < 1$  et  $|\lambda| > 1$ .

## Partie III – Etude de (★) lorsque $|\lambda| \neq 1$

1. Montrer à l'aide de la question 2 que l'équation (★) admet au plus une solution dans  $\mathcal{L}$ .

2. On suppose dans cette question  $|\lambda| < 1$ .

- a. On fixe  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer à l'aide de la question 4 que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n f(x + na)$  converge absolument.

On pose alors  $F_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$ .

- b. Montrer que  $F_0 \in \mathcal{L}$ .

- c. Montrer que  $F_0$  est l'unique solution de (★) appartenant à  $\mathcal{L}$ .

- d. Déterminer l'unique solution de (★) appartenant à  $\mathcal{L}$  lorsque  $f$  est la fonction constante égale à 1.

- e. A l'aide de la question 6.b, déterminer l'unique solution de (★) appartenant à  $\mathcal{L}$  lorsque  $f$  est la fonction cos ou la fonction sin.

3. On suppose dans cette question  $|\lambda| > 1$ .

- a. On fixe  $x \in \mathbb{R}$ . Justifier brièvement que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \lambda^{-n} f(x - na)$  converge absolument. On pose

alors  $F_0(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na)$ .

- b. Montrer que  $F_0$  est l'unique solution de (★) appartenant à  $\mathcal{L}$ .