

Suites récurrentes d'ordre deux

EXERCICE 1.★

Soit $(\phi_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et

$$\forall n \geq 0, \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n.$$

1. Exprimer ϕ_n en fonction de n .
2. Montrer que $\forall n \geq 0$,

$$\phi_{n+1}^2 = \phi_n \phi_{n+2} + (-1)^n.$$

3. Dédire de tout ce qui précède que la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\phi_k \phi_{k+1}}$$

converge vers une limite ℓ à préciser.

EXERCICE 2.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite définie par $u_0, u_1 > 0$ et $\forall n \geq 0$,

$$u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}u_n}{u_{n+1} + u_n}.$$

Exprimer u_n en fonction de n puis étudier la convergence de la suite.

EXERCICE 3.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite définie par $u_0, u_1 > 0$ et $\forall n \geq 0$,

$$u_{n+2} = (u_{n+1}u_n^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Exprimer u_n en fonction de n puis étudier la convergence de la suite.

EXERCICE 4.

Pour chacune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ récurrentes linéaires d'ordre deux suivantes, calculer u_n en fonction de n .

1. $u_0 = -1, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$;
2. $u_0 = 1, u_1 = 9$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$;
3. $v_0 = 0, v_1 = 1$ et $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$;
4. $u_0 = 1, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n$.

EXERCICE 5.

Soit (u_n) la suite définie par ses deux premiers termes $u_0 = 0$ et $u_1 \in]0, 1[$ et par la relation de récurrence $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 6.

Soit (u_n) la suite définie par ses deux premiers termes $u_0, u_1 \in]0, 1[$ et par la relation de récurrence $u_{n+2} = \frac{\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}}{2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.
2. On pose $v_n = \min(u_n, u_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est croissante.
3. Montrer que $v_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire la convergence et la limite de (u_n) .

EXERCICE 7.

Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0, u_1 = 1 + 4i$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = (3 - 2i)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n$.

EXERCICE 8.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0, u_1 \in \mathbb{R}_+$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1 + u_n u_{n-1}}$$

Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Suites divergentes

EXERCICE 9.★

Étudier le comportement asymptotique des suites définies respectivement par,

1. $a_n = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor - \frac{n}{5}$;
2. $b_n = \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$;
3. $c_n = \cos\left(\frac{n^2 - 3n + 1}{n + 2}\pi\right)$.

EXERCICE 10.★★

Soient $n \geq 1$ et

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que $(H_n)_{n \geq 1}$ est croissante. Quelle alternative en déduit-on quant au comportement asymptotique de $(H_n)_{n \geq 1}$?
2. Montrer que $\forall n \geq 1$,

$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

Décrire le comportement de $(H_n)_{n \geq 1}$.

EXERCICE 11.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor, \quad \alpha_n = u_{n^2},$$

$$\beta_n = u_{n^2+3n}.$$

1. Donner une expression simple de α_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la convergence et la limite de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Etude de $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - a. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)^2 \leq n^2 + 3n < (n+2)^2$.
 - b. En déduire une expression *simple* de β_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - c. Etablir la convergence et calculer la limite de $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

EXERCICE 12.

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On étudie ici les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_n = \sin(n\alpha)$ et $v_n = \cos(n\alpha)$.

1. Montrer pour tout n les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \sin(\alpha)v_n + \cos(\alpha)u_n \\ v_{n+1} &= \cos(\alpha)v_n - \sin(\alpha)u_n \end{cases}$$

En déduire que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ , alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel $\frac{\ell(1 - \cos(\alpha))}{\sin(\alpha)}$, et que si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ' , alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel $\frac{\ell'(\cos(\alpha) - 1)}{\sin(\alpha)}$.

2. On suppose que les deux suites sont convergentes de limites respectives ℓ et ℓ' . Montrer grâce à la question précédente que $\ell = \ell' = 0$. En calculant par ailleurs $\ell^2 + \ell'^2$, aboutir à une contradiction. En conclure que les deux suites sont divergentes.

EXERCICE 13.

Si $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite réelle à termes positifs, on lui associe la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$v_n = \sqrt{u_1 + \sqrt{u_2 + \cdots + \sqrt{u_n}}}.$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
2. Prouver que si la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est constante, alors $(v_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
3. Que peut-on dire de $(v_n)_{n \geq 1}$ si $(u_n)_{n \geq 1}$ est majorée ?

EXERCICE 14.

On considère une suite réelle (u_n) bornée. On pose $v_n = \sup_{p \geq n} u_p$ et $w_n = \inf_{p \geq n} u_p$.

1. Déterminer le sens de variation des suites (v_n) et (w_n) .
2. En déduire que (v_n) et (w_n) sont convergentes.
3. Montrer que (u_n) converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - w_n = 0$.

Lemme de Césaro

EXERCICE 15.★★

C'est une application classique du lemme de Césaro.

1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell.$$

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \ell.$$

2. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell.$$

3. Étudier le comportement asymptotique des suites de termes généraux

$$a_n = \left(\frac{2n}{n}\right)^{1/n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

EXERCICE 16.★

Etudier le comportement asymptotique de suites de termes généraux

$$1. \alpha_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{k}\right)^k;$$

$$2. \beta_n = \left(\prod_{k=1}^n k^{1/k}\right)^{1/n}.$$

EXERCICE 17.

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

Déterminer la limite de u_n ainsi qu'un équivalent.

Suites adjacentes

EXERCICE 18.

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \sqrt{u_n v_n}) \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + \sqrt{u_n v_n}) \end{cases}$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune $l \in \mathbb{R}$.

2. Soit x et y deux réels tels que $0 < x < y$. Montrer que $\frac{1}{y} \leq \frac{\ln y - \ln x}{y - x} \leq \frac{1}{x}$.

3. Montrer que la suite de terme général $c_n = \frac{v_n - u_n}{\ln v_n - \ln u_n}$ est bien définie puis montrer que la suite (c_n) est constante.

4. En déduire la valeur de l .

EXERCICE 19.★★

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $p + q = 1$ et $p > q$. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = pu_n + qv_n \\ v_{n+1} = pv_n + qu_n \end{cases}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2. Calculer la limite commune de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

EXERCICE 20.★★

Soient $0 < a < b$, $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ les suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et $\forall n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Prouver que les suites sont adjacentes. Leur limite commune s'appelle la *moyenne arithmético-géométrique* de a et b , on ne cherchera pas à la calculer !

EXERCICE 21.★★*Quelques calculs de moyennes.*

1. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right].$$

2. Soient $0 < b_0 \leq a_0$ et $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ les deux suites définies par

$$\forall n \geq 0, a_{n+1} = \frac{1}{2} [a_n + b_n]$$

et

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right].$$

Montrer que $\forall n \geq 0$,

$$b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n.$$

3. Montrer que $\forall n \geq 0$,

$$0 \leq a_n - b_n \leq \frac{a_0 - b_0}{2^n}.$$

4. En déduire que les deux suites sont adjacentes.
 5. Calculer $a_n b_n$ puis en déduire la valeur de la limite commune des deux suites.

Suites définies implicitement**EXERCICE 22.★**

Posons pour tout $n \geq 2$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_n(x) = x^n - nx + 1.$$

- Montrer que P_n possède une unique racine sur l'intervalle $[0, 1]$ que l'on notera u_n .
- Déterminer le signe de $P_n(u_{n+1})$. En déduire que $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.
- Montrer que $(u_n)_{n \geq 2}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ que l'on précisera.
- Déterminer un équivalent de $u_n - \ell$.

EXERCICE 23.★

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$x \mapsto g_n(x) = x^n + x - 1$$

admet un unique zéro positif noté a_n . Etudier la convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

EXERCICE 24.★★

Montrer que, pour tout $n \geq 3$, l'équation

$$x - n \ln(x) = 0$$

admet deux racines distinctes sur $]0, +\infty[$ notées $u_n < v_n$.

- Etudier la monotonie des suites $(u_n)_{n \geq 3}$ et $(v_n)_{n \geq 3}$
- Etudier le comportement asymptotique des suites $(u_n)_{n \geq 3}$ et $(v_n)_{n \geq 3}$.

EXERCICE 25.

- Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1 = 0$ admet une unique solution strictement positive notée a_n .
- Montrer que la suite (a_n) est strictement décroissante.
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 26.

- Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution u_n dans l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$.
- Déterminer un équivalent de (u_n) .
- On pose $v_n = u_n - n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite l de (v_n) .
- Déterminer un équivalent de $(v_n - l)$. En déduire un développement asymptotique à 3 termes de (u_n) .

EXERCICE 27.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\cos x = nx$ possède une unique solution $x_n \in [0, 1]$.
2. Déterminer la limite de (x_n) .
3. Etudier la monotonie de (x_n) .
4. Etablir que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
5. Déterminer un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$.

EXERCICE 28.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $x = \ln x + n$ admet deux solutions sur \mathbb{R}_+^* . On note x_n la plus petite et y_n la plus grande de ces deux solutions.
2.
 - a. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.
 - b. Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n}$.
 - c. On pose $u_n = x_n - e^{-n}$ pour $n \geq 2$. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-2n}$.
 - d. Déterminer un équivalent simple de $u_n - e^{-2n}$.
3.
 - a. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$.
 - b. Montrer que $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.
 - c. On pose $v_n = y_n - n$ pour $n \geq 2$. Montrer que $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.
 - d. Déterminer un équivalent simple de $v_n - \ln n$.

Suites déginies par des sommes**EXERCICE 29.★**

1. Montrer que $\forall k \geq 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{du}{u} \leq \frac{1}{k}.$$

2. En déduire qu'il existe $\gamma \in [0, 1]$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \gamma.$$

EXERCICE 30.

On pose, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Etablir à l'aide d'un encadrement que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\ln(2)$.

EXERCICE 31.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles convergeant respectivement vers a et b .

Montrer que $\frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} ab$.

EXERCICE 32.

Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \binom{n+p}{n}^{-1}$ et

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+p+1)u_{n+1} = (n+1)u_n$.
2. Montrer que $S_n = \frac{1}{p-1} (1 - (n+p+1)u_{n+1})$.
3. On pose $v_n = (n+p)u_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que (v_n) converge vers 0.
4. En déduire que (S_n) converge et donner sa limite en fonction de p .

EXERCICE 33.

Etudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

EXERCICE 34.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln n$$

1. Montrer que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$.
2. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$$

3. Déterminer le sens de variation de (u_n) .
4. Montrer que (u_n) converge vers un réel $\gamma \in [0, 1]$.

EXERCICE 35. ★★

Prouver que

$$\sum_{k=0}^n k! \sim n!.$$

EXERCICE 36. ★

Déterminer un équivalent de la suite définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sqrt{k}.$$

Suites définies par des produits**EXERCICE 37. ★**

Calcul d'un produit infini.

1. Montrer que $\forall u \geq 0$,

$$u - \frac{u^2}{2} \leq \ln(1+u) \leq u.$$

2. En déduire que la suite de terme général

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

converge vers une limite ℓ à préciser.

EXERCICE 38. ★

Pour tout x réel et tout entier naturel n , on pose

$$P_n(x) = \prod_{k=0}^n (x^{2^k} + 1).$$

1. Simplifier l'expression de $P_n(x)$.
2. Etudier la convergence de la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

EXERCICE 39.

Encadrement d'un produit.

1. Prouver que $\forall x \geq 1$,

$$\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

2. Etudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \prod_{k=0}^n \frac{k(k+1)}{(2k+1)^2}.$$

EXERCICE 40. ★

Etudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \left[\prod_{k=0}^n \binom{n}{k} \right]^{1/n^3}.$$

EXERCICE 41.

On pose $u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Exprimer u_n à l'aide de factorielles.
2. Montrer que (u_n) converge.
3. Soit $v_n = (n+1)u_n^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que (v_n) converge. En déduire la limite de (u_n) .

EXERCICE 42.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1 + z^{2^k}) = \frac{1}{1-z}$$

EXERCICE 43.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \binom{2n}{n}$ et $u_n = \frac{a_n \sqrt{n}}{4^n}$.

1. Vérifier la relation $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Démontrer par récurrence que $u_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$.
4. En déduire l'existence d'un réel $K \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ tel que $\binom{2n}{n} \sim K \frac{4^n}{\sqrt{n}}$.

Suites récurrentes d'ordre un**EXERCICE 44.**

Soit $x > 0$. On définit une suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $u_1 = x$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{n+u_n^2}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n > 0$.
2. Soit un entier $n \geq 1$. Montrer si $u_n \geq 1$, alors $u_{n+1} \leq 1$ et que si $u_n \leq 1$, alors $u_{n+1} \leq \frac{2}{n}$.
3. En déduire que pour entier $n \geq 3$, $u_n \leq \frac{2}{n-1}$.
4. En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.
5. Donner un équivalent simple de u_n .
6. On pose $v_n = nu_n - 1$ pour entier $n \geq 1$. Exprimer v_{n+1} en fonction de n et v_n .
7. En déduire un équivalent simple de v_n .
8. En déduire un développement asymptotique à deux termes de u_n .

EXERCICE 45. ★

Étudier les suites définies par

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}.$$

EXERCICE 46. ★

Étudier la suite définie par

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8).$$

EXERCICE 47.

Étudier le système dynamique $u_{n+1} = f(u_n)$ défini par la fonction

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto e^{x-1}.$$

EXERCICE 48.

Étudier le système dynamique $u_{n+1} = f(u_n)$ défini par la fonction

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \arctan(x).$$

EXERCICE 49.

Etudier le système dynamique $u_{n+1} = f(u_n)$ défini par $u_0 \geq 0$ et la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \ln(1+x).$$

EXERCICE 50.

Etudier le système dynamique $u_{n+1} = f(u_n)$ défini $u_0 \in \mathbb{R}$ et la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \tanh(x).$$

Suites pseudo-récurrentes**EXERCICE 51.**

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On étudie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a^{2n} u_n + a^{n^2}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = a^{-n^2+n} u_n$.

a. Calculer $v_{n+1} - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a^k}.$$

c. En déduire une expression de u_n en fonction de n et a . On discutera suivant les valeurs de a .

2. Déterminer, en discutant suivant les valeurs de a , le comportement de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 52.★★

Soient $0 < \alpha < 1$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $0 < u_0 < u_1$ et $\forall n \geq 1$,

$$u_{n+1} = u_n + \alpha^n u_{n-1}.$$

1. Prouver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

2. Montrer que $\forall n \geq 1$,

$$u_n \leq u_1 \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \alpha^k).$$

3. Justifier que $\forall u \geq 0$,

$$\ln(1+u) \leq u.$$

En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, puis qu'elle converge.

EXERCICE 53.★★

Soient $n \geq 0$ et

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}.$$

On définit la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ par $x_1 > 0$ et

$$\forall n \geq 1, \quad x_{n+1} = f_n(x_n).$$

1. Montrer que $(x_n)_{n \geq 1}$ converge.

2. Montrer que $\forall n \geq 2, \quad x_n \leq 1/n$.

3. Montrer que $(nx_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

4. Montrer que $\forall n \geq 2$,

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

5. Trouver un équivalent de x_n .

EXERCICE 54.

On définit une suite (u_n) par $u_1 = 1$ et la relation de récurrence $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ pour tout entier $n \geq 2$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq 2$.

2. En déduire que $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$ converge et donner sa limite.

3. Déterminer la limite de $(u_n - \sqrt{n})$.

Suites à valeurs complexes

EXERCICE 55.

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

1. On note x_n et y_n les parties réelle et imaginaire de z_n .
 - a. Déterminer une relation de récurrence liant y_n et y_{n+1} . En déduire la limite de (y_n) .
 - b. Déterminer le sens de variation de $(|z_n|)$.
 - c. Déterminer le sens de variation de (x_n) .
 - d. En déduire la convergence de (x_n) . On ne cherchera pas à calculer la limite de cette suite.
 - e. En déduire la convergence de (z_n) . Que peut-on dire de sa limite ?
 - f. Déterminer la limite de (z_n) si $z_0 \in \mathbb{R}_+$ et si $z_0 \in \mathbb{R}_-$.
2. On note r_n le module et θ_n l'argument principal (i.e. appartenant à $] -\pi, \pi]$) de z_n .
 - a. En exprimant z_{n+1} sous forme exponentielle, exprimer d'une part r_{n+1} en fonction de r_n et θ_n et d'autre part θ_{n+1} en fonction de θ_n .
 - b. Déterminer la limite de (θ_n) .
 - c. Soit $\alpha \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$. En remarquant que pour $\alpha \neq 0[\pi]$, $\cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$,
donner une expression simplifiée de $S_n = \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En
déduire que (S_n) converge vers $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$.
 - d. En déduire la limite de (r_n) puis celle de (z_n) en fonction de r_0 et θ_0 .

EXERCICE 56.

On pose $z_n = \exp(i \ln n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que (z_n) diverge.

Suites extraites

EXERCICE 57.★

Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que les suites

$$(u_{2n})_{n \geq 0}, (u_{2n+1})_{n \geq 0} \text{ et } (u_{3n})_{n \geq 0}$$

convergent. Prouver que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge.

EXERCICE 58.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - [x]$ la partie fractionnaire de x . Montrer que la suite $(\{\sqrt{n}\})$ n'admet pas de limite.

EXERCICE 59.

Soient $(a_n), (b_n), (c_n)$ trois suites réelles telles que $a_n + b_n + c_n$ tend vers 0 et $e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n}$ tend vers 3. Montrer que les suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ convergent.

EXERCICE 60.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels et p et q deux entiers naturels impairs tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^p - v_n^q = 0$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.