# Devoir à la maison n°06 : corrigé

## Solution 1.

1. On sait de manière générale que

$$(1+u)^{\alpha} \underset{u\to0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-1} \alpha-j\right) u^k + o(u^n)$$

Notamment pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $u=-x$,

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} \underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-1} -\frac{1}{2}-j\right)(-x)^k + o(x^n)$$

En posant

$$a_k = \frac{1}{k!}(-1)^k \prod_{j=0}^{k-1}\left(-\frac{1}{2}-j\right)$$

on a donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

Remarquons maintenant que

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{2j+1}{2} \\
&= \frac{1}{2^k k!}\prod_{j=0}^{k-1}(2j+1) \\
&= \frac{1}{2^k k!}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{2k} j}{\prod_{j=1}^{k} 2j} \\
&= \frac{1}{2^k k!}\cdot\frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}
\end{aligned}$$

On en déduit bien le résultat voulu.

2. A l'aide la question précédente ;

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k} x^{2k} + o(x^{2n})$$

Puisque arcsin est la primitive sur $]-1,1[$ de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ s'annulant en 0,

$$\arcsin x \underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{2k}(2k+1)}\binom{2k}{k} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

## Solution 2.

1. Soit $f$ une solution sur $I$ de l'équation différentielle $y'+ay=b$. Montrons par récurrence que $f$ est de classe $C^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Tout d'abord, $f$ est dérivable sur $I$ en tant que solution d'une équation différentielle. A fortiori, elle est continue donc de classe $\mathcal{C}^0$ sur $I$. Supposons maintenant que $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$. Alors $f'=b-af$ est également de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ puisque $a$, $b$ et $f$ le sont. Ainsi $f$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I$. Par récurrence, $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$.

**2.** Soit $f$ une solution sur $I$ de l'équation différentielle $y' + ay = b$. Montrons par récurrence que $f$ est de classe $C^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Tout d'abord, $f$ est dérivable deux fois sur $I$ en tant que solution d'une équation différentielle. A fortiori, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$. Supposons maintenant que $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $f'' = c - af' - bf$ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $I$ puisque $a$, $b$, $f$ et $f'$ le sont. Ainsi $f$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I$. Par récurrence, $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$.

**Solution 3.**

**1.** Résolvons d'abord l'équation homogène associée :

$$(E_H) \quad (1+x^2)y' = 3xy$$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{3x}{1+x^2}$ est $x \mapsto \frac{3}{2}\ln(1+x^2)$. On en déduit que les solutions de $(E_H)$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda \exp\left(\frac{3}{2}\ln(1+x^2)\right) = (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Recherchons maintenant une solution particulière de $(E)$ sous forme polynomiale. Soit $P$ une telle solution en supposant qu'elle existe. $P$ est nécessairement non nulle ; notons $n$ son degré et $a$ sont coefficient dominant. Le coefficient de $X^{n+1}$ dans $(1+X^2)P' - 3XP$ est $(n-3)a$. Or $1$ est un polynôme de degré $0$. On en déduit que $(n-3)a = 0$ i.e. $n = 3$. Posons donc $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On obtient $(1+X^2)P' - 3XP = -bX^3 + (3a - 2c)X^2 + (2b - 3d)X + c$. On est donc amené à résoudre le système $\begin{cases} -b = 0 \\ 3a - 2c = 0 \\ 2b - 3d = 0 \\ dC = 1 \end{cases}$. On trouve $a = \frac{2}{3}$, $b = 0$, $c = 1$ et $d = 0$. Ceci signifie que la fonction polynomiale $P$ telle que $P(x) = \frac{2}{3}x^3 + x$ est solution de $(E)$.
On en déduit que les solutions $f_\lambda$ de $(E)$ sont telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_\lambda(x) = \frac{2}{3}x^3 + x + \lambda(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

**2.** On a $\frac{2}{3}x^3 + x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}x^3$ et $(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$. Pour que $f_\lambda$ admette une limite finie en $+\infty$ il faut donc nécessairement que $\lambda = -\frac{2}{3}$ (on a donc l'unicité sous réserve d'existence). Posons $g = f_{-\frac{2}{3}}$. Or $(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = x^3\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ pour $x \geqslant 0$ et

$$\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

On en déduit que $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$ i.e. $g(x)$ tend vers $0$ en $+\infty$. $g$ est donc l'unique solution de $(E)$ admettant une limite finie en $+\infty$.

**3.** $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on trouve $g'(x) = 2x^2 + 1 - 2x\sqrt{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On voit facilement que $g'(x) > 0$ pour $x \leqslant 0$. Supposons maintenant $x \geqslant 0$. Alors

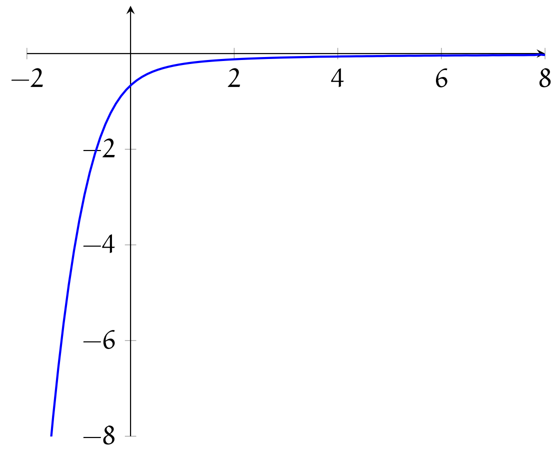
$$g'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 1 > 2x\sqrt{1+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad (2x^2+1)^2 > \left(2x\sqrt{1+x^2}\right)^2$$

car les membres de l'inégalité sont positifs. Finalement $g'(x) > 0$ équivaut à $1 > 0$, ce qui est toujours vrai. On en déduit que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**Remarque.** On aurait également pu remarquer que $g'(x) = \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^2$. ■

**4.** On a $(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \underset{x\to-\infty}{\sim} -x^3$. On en déduit que $g(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{4}{3}x^3$. Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x^3} = \frac{4}{3}$.

**5.** La fonction $g$ est strictement croissante, admet pour limites $-\infty$ en $-\infty$ et $0$ en $+\infty$.




**Solution 4.**

1. **a.** Puisque $f_\lambda$ est solution de (E), pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$(1+x^2)f_\lambda'(x) + 2xf_\lambda(x) = \frac{1}{x}$$

Notamment pour $x = 1$,

$$2f_\lambda'(1) + 2f_\lambda(1) = 1$$

et donc $f_\lambda'(1) = \frac{1}{2} - \lambda$.
$D_\lambda$ admet donc pour équation cartésienne

$$y = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)(x-1) + \lambda$$

**b.** Une équation de $D_\lambda$ est également

$$y = \frac{1}{2}(x-1) + \lambda(2-x)$$

Ceci permet de constater que toutes les droites $D_\lambda$ passent par le point de coordonnées $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

2. **a.** L'équation (E) s'écrit également

$$y' + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

La fonction $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ admet pour primitive $x \mapsto \ln(1+x^2)$. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{C}{1+x^2}$ où $C \in \mathbb{R}$.
On utilise la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre. On cherche donc une solution sous la forme $x \mapsto \frac{C(x)}{1+x^2}$ avec $C$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui conduit à

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{C'(x)}{1+x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(x) = \frac{1}{x}$$

On peut donc choisir $C : x \mapsto \ln x$ ce qui fournit $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$ comme solution particulière.
Les solutions de (E) sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{\ln x + C}{1+x^2}$ où $C \in \mathbb{R}$.

**b.** D'après la question précédente, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{\ln x + C}{1+x^2}$$

La condition $f_\lambda(1) = \lambda$ fournit $C = 2\lambda$. On a donc $f_\lambda : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\ln x + 2\lambda}{1+x^2}$.

**3.** En raisonnant comme dans la première question, on trouve

$$f'_\lambda(x_0) = \frac{c(x_0) - \lambda b(x_0)}{a(x_0)}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}_\lambda$ est donc

$$y = \frac{c(x_0) - \lambda b(x_0)}{a(x_0)}(x - x_0) + \lambda$$

ou encore

$$a(x_0)(y - \lambda) + (\lambda b(x_0) - c(x_0))(x - x_0) = 0$$

En regroupant les $\lambda$, cette dernière équation équivaut à

$$\lambda(b(x_0)(x - x_0) - a(x_0)) + a(x_0)y - c(x_0)(x - x_0) = 0$$

Si $b(x_0) \neq 0$, alors toutes les droites $\mathcal{D}_\lambda$ passent par le point de coordonnées $\left(x_0 + \frac{a(x_0)}{b(x_0)}, \frac{c(x_0)}{b(x_0)}\right)$.
Si $b(x_0) = 0$, une équation de $\mathcal{D}_\lambda$ est

$$y = \frac{c(x_0)}{a(x_0)}(x - x_0) + \lambda$$

Les droites $\mathcal{D}_\lambda$ ont toutes le même coefficient directeur et sont donc parallèles.