

Devoir à la maison n°4 : corrigé

SOLUTION 1.

1.
 - a. sh est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} . De plus $\lim_{-\infty} \text{sh} = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \text{sh} = +\infty$. Ainsi sh est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
 - b. ch est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . De plus, $\text{ch}(0) = 1$ et $\lim_{+\infty} \text{ch} = +\infty$. Ainsi ch induit une bijection de \mathbb{R}_+ sur $]1, +\infty[$.
 - c. th est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} . De plus, $\lim_{-\infty} \text{th} = -1$ et $\lim_{+\infty} \text{th} = 1$. Ainsi th induit une bijection de \mathbb{R} sur $] -1, 1[$.
2.
 - a. Soit $x \in \mathbb{R}$ et posons $\theta = f(x)$. Par définition de f, $\text{sh } \theta = x$. Or $\text{ch}^2 \theta = \text{sh}^2 \theta + 1$. Puisque $\text{ch } \theta \geq 1 \geq 0$, $\text{ch } \theta = \sqrt{\text{sh}^2 \theta + 1} = \sqrt{x^2 + 1}$.
 - b. Soit $x \in]1, +\infty[$ et posons $\theta = g(x)$. Par définition de g, $\text{ch } \theta = x$. Or $\text{sh}^2 \theta = \text{ch}^2 \theta - 1$. Par définition de g, $\theta \in \mathbb{R}_+$ donc $\text{sh } \theta \geq 0$. Ainsi $\text{sh } \theta = \sqrt{\text{ch}^2 \theta - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$.
3.
 - a. sh est dérivable et strictement croissante sur \mathbb{R} et sa dérivée ch ne s'annule pas sur \mathbb{R} . Ainsi f est dérivable sur $\text{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{\text{sh}'(f(x))} = \frac{1}{\text{ch}(f(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- b. ch est dérivable et strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* et sa dérivée sh ne s'annule pas sur \mathbb{R}_+^* . Ainsi g est dérivable sur $\text{ch}(\mathbb{R}_+^*) =]1, +\infty[$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{1}{\text{ch}'(g(x))} = \frac{1}{\text{sh}(g(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

- c. th est dérivable et strictement croissante sur \mathbb{R} et sa dérivée $1 - \text{th}^2$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} car th est à valeurs dans $] -1, 1[$. Ainsi h est dérivable sur $\text{th}(\mathbb{R}) =] -1, 1[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = \frac{1}{\text{th}'(h(x))} = \frac{1}{1 - \text{th}^2(h(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

4.
 - a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = f(x)$. On a donc $\text{sh}(y) = x$ et $\text{ch}(y) = \sqrt{x^2 + 1}$ d'après 2.a. Ainsi

$$e^y = \text{sh}(y) + \text{ch}(y) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

donc

$$f(x) = y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

- b. Soit $x \in]1, +\infty[$. On a donc $\text{ch}(y) = x$ et $\text{sh}(y) = \sqrt{x^2 - 1}$ d'après 2.b. Ainsi

$$e^y = \text{sh}(y) + \text{ch}(y) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

donc

$$g(x) = y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

- c. Soit $x \in] -1, 1[$. Posons $y = h(x)$. On a donc $\text{th}(y) = x$ i.e. $\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x$ ou encore $e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$.
On en déduit que

$$h(x) = y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

REMARQUE. Les fonctions f, g et h s'appellent en fait argsh, argch et argth. ■