Semaine du 08/11 au 12/11

1 Cours

Groupes

Généralités Définition. Puissance, inverse d'un élément d'un groupe. Exemples classiques : $(\mathbb{K}^*, \times)$ où $\mathbb{K}$ est un corps, $(S(E), \circ)$ (groupe des permutations d'un ensemble E), $(S_n, \circ)$ (groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$), groupes linéaires $GL_n(\mathbb{K})$ et $GL(E)$. Groupe produit.

Sous-groupes Définition. Exemples classiques : $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$, $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$, $O_n(\mathbb{R})$ et $O(E)$ sont respectivement des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL(E)$ (E espace euclidien). Intersection de sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie/un élément. Les transpositions engendrent S_n. Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.

Morphismes de groupes Définition. Image de l'élément neutre, d'une puissance, d'un inverse par un morphisme. Une composée de morphismes est un morphisme. L'image directe/réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe. Noyau et image d'un morphisme. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité. Isomorphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un automorphisme. Groupe des automorphismes d'un groupe.

Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Définition. Structure de groupe additif. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Ordre d'un élément Définition. Si x est un élément d'ordre p, alors $x^n = e \iff p|n$. L'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe.

Groupes monogènes Définition d'un groupe monogène, d'un groupe cyclique. Un groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$. Un groupe cyclique est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ (où n est l'ordre du groupe).

Révisions d'algèbre linéaire de première année

Réduction géométrique

Rappels et compléments Matrices semblables. Sous-espace stable. Base adapatée à un sous-espace vectoriel stable. Matrice d'un endomorphisme dans une base adaptée à un sous-espace stable (triangulaire par blocs). Matrices et endomorphismes nilpotents. Indice de nilpotence. Majoration de l'indice de nilpotence.

Eléments propres Définition de valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre, spectre. La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe. Le cardinal du spectre est inférieur ou égal à la dimension. Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent, alors tout sous-espace propre de u est stable par v.

Polynôme caractéristique Définition du polynôme caractéristique. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique est un polynôme unitaire de degré n (n étant égal à la taille de la matrice où la dimension de l'espace vectoriel) ; coefficients des monômes de degré 0 et $n-1$. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. Si F est un sous-espace stable par un endomorphisme u, alors $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u. Multiplicité d'une valeur propre. La dimension d'un sous-espace propre est majorée par la multiplicité.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour montrer qu'un ensemble muni d'une loi est un groupe, on peut montrer que c'est un sous-groupe d'un groupe connu.
- Caractériser l'injectivité ou la surjectivité d'un morphisme par le noyau ou l'image.
- Déterminer le spectre et les sous-espaces propres d'une matrice via le polynôme caractéristique.
- Déterminer le spectre et les sous-espaces propres d'un endomorphisme : on peut se ramener à la matrice de l'endomorphisme dans une base bien choisie.
- Pour calculer un polynôme caractéristique d'une matrice, on peut :
  - développer par rapport à une ligne ou une colonne comportant beaucoup de zéros ;
  - faire apparaître un déterminant triangulaire ou triangulaire par blocs par opérations de pivots ;
  - factoriser dès que possible une ligne ou une colonne par $X - \lambda$.

3 Questions de cours

Ordre d'un élément Soit x un élément d'ordre p d'un groupe G d'élément neutre e. Montrer que $x^n = e \iff p \mid n$.

Stabilité et sous-espaces propres On considère un espace vectoriel E.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par u.
2. Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$ tel que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.

Banque CCP Exercices 59, 60, 63, 64, 71, 83.