Semaine du 25/03 au 29/03

1 Cours

Polynômes

Polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ Définitions : polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, ensemble $\mathbb{K}[X]$. Deux polynômes sont égaux **si et seulement si** leurs coefficients sont égaux. Polynômes pairs, impairs. $(K[X], +, \times)$ est un anneau intègre commutatif. $(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Degré d'un polynôme. Degré d'une combinaison linéaire, d'un produit. Définition de $\mathbb{K}_n[X]$. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Famille de polynômes à degrés échelonnés. Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine d'un polynôme. Cas des polynômes pairs/impairs et des polynômes à coefficients réels. Polynôme dérivé. La dérivation est linéaire. Formule de Leibniz. Formule de Taylor.

Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ Relation de divisibilité. Division euclidienne. Algorithme de division euclidienne. Un polynôme P admet a pour racine **si et seulement si** il est divisible par $X - a$. Existence et unicité d'un PGCD unitaire ou nul. Algorithme d'Euclide pour les polynômes. Théorème de Bézout. Polynômes premiers entre eux. Lemme de Gauss. Un polynôme de degré n admet au plus n racines. Polynômes interpolateurs de Lagrange. Existence et unicité d'un PPCM unitaire ou nul.

Racines multiples Définition. Un polynôme de degré n admet au plus n racines comptées avec multiplicité. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les dérivées successives.

Factorisation Polynômes irréductibles. Définition et décomposition en facteurs irréductibles. Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$. Polynôme scindé. Un polynôme est scindé **si et seulement si** il possède autant de racines comptées avec multiplicité que son degré. Lien coefficients/racines.

Fractions rationnelles

Corps des fractions rationnelles Définition. Opérations. Degré. Dérivation. $\mathbb{K}(X)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et un corps.

Fonctions rationnelles, zéros et pôles Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle. Zéros et pôles d'une fraction rationnelle. Multiplicité d'un zéro ou d'un pôle.

Décomposition en éléments simples Partie entière. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$. Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ où P est scindé.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour résoudre des équations d'inconnue polynomiale, chercher dans un premier temps à déterminer le degré du polynôme inconnu.
- Déterminer le reste d'une division euclidienne (utiliser les racines du diviseur).
- Montrer qu'un polynôme est nul en montrant qu'il admet une infinité de racines.
- Caractériser la multiplicité d'une racine via les dérivées successives.
- Passer de la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$ à celle sur $\mathbb{R}[X]$ (regrouper les racines conjuguées)
- Utiliser la parité et le fait qu'un polynôme est à coefficients réels pour obtenir des racines à partir d'une racine donnée.
- Résoudre des systèmes polynomiaux symétriques en les inconnues.
- Exprimer une somme et un produit de racines à l'aide des coefficients du polynôme.
- Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle irréductible $F = P/Q$:
  - Calculer la partie entière.
  - Factoriser le dénominateur en produit de facteurs irréductibles.
  - Écrire la décomposition en éléments simples à l'aide de coefficients inconnus.
  - Déterminer des coefficients ou des relations entre ceux-ci :
    - Le coefficient associé à un pôle simple a et $P(a)/Q'(a)$;
    - Évaluer $(X - a)^p F$ en un pôle a (DES dans $\mathbb{C}$) ou $(X^2 + aX + b)^p F$ en un racine de $X^2 + aX + b$ (DES dans $\mathbb{R}$) ;
    - Utiliser le fait que $F \in \mathbb{R}(X)$: les coefficients de la DES dans $\mathbb{C}$ sont conjugués ;
    - Utiliser la parité éventuelle de la fraction rationnelle ;
    - Utiliser la limite de $xF(x)$ quand x tend vers $+\infty$;
    - Évaluer en des valeurs particulières.

- Simplifier par télescopage de somme du type $\sum F(k)$ où F est une fraction rationnelle via une DES.
- Calculer une intégrale du type $\int F(t)\ dt$ où F est un fraction rationnelle via une DES.

3 Questions de cours

- Donner la décomposition en facteurs irréductibles de $X^n - 1$ où $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire le PGCD de $X^n - 1$ et $X^m - 1$ où $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines de $P_n = (X + i)^n - (X - i)^n$ et en déduire la valeur de $A_n = \prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{n}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$.
- Soit $P = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)^{r_k} \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{X - a_k}$.