Devoir à la maison n°17

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Partie I – Étude de la suite (T_n)

1. On trouve $\mathrm{T}_2 = 2\mathrm{X}^2 - 1$ et $\mathrm{T}_3 = 4\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}$.

2. T_0 est un polynôme pair de degré nul et de coefficient dominant 1.
On fait l'hypothèse de récurrence suivante :

$\mathrm{HR}(n)$: T_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 2^{n-1} et de la parité de n.

$\mathrm{HR}(1)$ et $\mathrm{HR}(2)$ sont vraies.
Supposons $\mathrm{HR}(n)$ et $\mathrm{HR}(n+1)$ vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $\deg \mathrm{XT}_{n+1} = n+2$ et $\deg \mathrm{T}_n = n < n+2$ donc $\deg \mathrm{T}_{n+2} = n+2$. De plus, le coefficient dominant de T_{n+2} est le double de celui de T_{n+1} : il vaut donc 2^{n+1}.
Enfin, $\mathrm{T}_n(-\mathrm{X}) = (-1)^n\mathrm{T}_n(\mathrm{X})$ et $\mathrm{T}_{n+1}(-\mathrm{X}) = (-1)^{n+1}\mathrm{T}_{n+1}(\mathrm{X})$ donc

$$\mathrm{T}_{n+2}(-\mathrm{X}) = -2\mathrm{XT}_{n+1}(-\mathrm{X}) - \mathrm{T}_n(-\mathrm{X}) = -2(-1)^{n+1}\mathrm{XT}_{n+1}(\mathrm{X}) - (-1)^n\mathrm{T}_n(\mathrm{X}) = (-1)^{n+2}\mathrm{T}_{n+2}(\mathrm{X})$$

donc T_{n+2} a bien la parité de $n+2$.
Par récurrence, $\mathrm{HR}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. La famille $(\mathrm{T}_0, \dots, \mathrm{T}_n)$ est une famille de polynômes à degrés échelonnés. Elle est donc libre. Puisqu'elle comporte $n+1$ vecteurs et que $\dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] = n+1$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

4. On fait l'hypothèse de récurrence suivante :

$\mathrm{HR}(n)$: $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{T}_n(\cos x) = \cos(nx)$.

$\mathrm{HR}(0)$ et $\mathrm{HR}(1)$ sont évidemment vraies.
Suppsons $\mathrm{HR}(n)$ et $\mathrm{HR}(n+1)$ vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{n+2}(\cos x) &= \cos(x)\mathrm{T}_{n+1}(\cos x) - \mathrm{T}_n(\cos x)\\ &= 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos(nx)\\ &= 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos((n+1)x - x)\\ &= \cos(x)\cos((n+1)x) - \sin((n+1)x)\sin(x)\\ &= \cos((n+1)x + x) = \cos((n+2)x)\end{aligned}$$

Par récurrence, $\mathrm{HR}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathrm{T}_n(\cos x_k) = \cos(nx_k) = \cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Ainsi $\cos x_1, \dots, \cos x_n$ sont bien des racines de T_n. Par ailleurs, les réels $x_1, \dots, x_n$ sont distincts et appartiennent à l'intervalle $[0, \pi]$. La fonction cos étant strictement décroissante (et donc injective) sur $[0, \pi]$, les réels $\cos(x_1), \dots, \cos(x_n)$ sont également distincts et donc au nombre de n. Comme $\deg \mathrm{T}_n = n$, T_n admet au plus n racines. Les réels $\cos(x_1), \dots, \cos(x_n)$ sont donc exactement les racines de T_n.

Partie II – Etude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

1. L'application $\langle .,. \rangle$ est évidemment symétrique. Elle est bilinéaire par linéarité de l'intégrale. Elle est positive par positivité de l'intégale ($(P \circ \cos)^2$ est bien entendu positive sur $[0, \pi]$). Enfin, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. Comme $(P \circ \cos)^2$ est continue et positive sur $[0, \pi]$, $(P \circ \cos)^2$ est nulle sur $[0, \pi]$. On en déduit que $P \circ \cos$ est nulle sur $[0, \pi]$. Comme $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$, P est nul sur $[-1, 1]$. P admet donc une infinité de racines : il est nul. Ceci prouve que $\langle .,. \rangle$ est définie.
   $\langle .,. \rangle$ est donc une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive i.e. un produit scalaire.

2. On a déjà vu que $(T_0, \dots, T_n)$ était une base de $\mathbb{R}_n[X]$ à la question **3**.
   Soient $p, q \in [\![0, n]\!]$ distincts.
   $$\langle T_p, T_q \rangle = \int_0^\pi T_p(\cos x) T_n(\cos x) \, dx = \int_0^\pi \cos(px)\cos(qx) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((p+q)x) + \cos((p-q)x)) \, dx = 0$$
   car $p - q \neq 0$ (p et q sont distincts) et $p + q \neq 0$ (sinon on aurait $p = q = 0$). Ainsi $(T_0, \dots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. T_n est orthogonal à $T_0, \dots, T_{n-1}$ et donc à $\operatorname{vect}(T_0, \dots, T_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Partie III – Calcul exact d'une intégrale

1. **a.** Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$.
   $$I(T_p) = \int_0^\pi T_p(\cos x) \, dx = \int_0^\pi \cos(px) \, dx = \begin{cases} \pi & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   $$\begin{aligned} S_n(T_p) &= \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} T_p(\cos x_k) \\ &= \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos(p x_k) \\ &= \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{(2k-1)p\pi}{2n} \\ &= \frac{\pi}{n} \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{i(2k-1)p\pi}{2n}} \right) \\ &= \frac{\pi}{n} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{ip\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ikp}{n}} \right) \end{aligned}$$
   Si $p = 0$, alors $e^{ip\pi} = 1$ et donc $e^{\frac{ip\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ikp}{n}} = n$ puis $S_n(T_p) = \pi$.
   Si $p \in [\![1, n-1]\!]$, $e^{ip\pi} \neq 1$ donc
   $$e^{\frac{ip\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{ikp}}{n} = e^{\frac{ip\pi}{2n}} \frac{1 - e^{ip\pi}}{1 - e^{\frac{ip\pi}{n}}} = \frac{1 - (-1)^p}{-2i \sin \frac{p\pi}{2n}} = i \frac{1 - (-1)^p}{2 \sin \frac{p\pi}{2n}}$$
   Puisque ce dernier résultat est imaginaire pur, $S_n(T_p) = 0$.

   b. I et S_n sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}[X]$. D'après la question précédente, elles coïncident sur la base $(T_0, \dots, T_{n-1})$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (cf. question **3**) : elles sont donc égales sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $I(P) = S_n(P)$.

2. **a.** On a $\deg P \leq 2n-1$ et $\deg R \leq \deg T_n - 1 = n - 1 \leq 2n-1$. Par conséquent $\deg(QT_n) = \deg(P - R) \leq 2n-1$. Or $\deg(QT_n) = \deg Q + \deg T_n = \deg Q + n$. D'où $\deg Q \leq n-1$ et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b. Puisque I est une forme linéaire,

$$\mathrm{I(P)} = \mathrm{I}(\mathrm{QT}_n) + \mathrm{I(R)} = \langle \mathrm{Q}, \mathrm{T}_n \rangle + \mathrm{I(R)}$$

Or d'après **3**, T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ et donc à Q. Ainsi $\langle \mathrm{Q}, \mathrm{T}_n \rangle = 0$ et $\mathrm{I(P)} = \mathrm{I(R)}$.

c. Puisque S_n est une forme linéaire

$$\mathrm{S}_n(\mathrm{P}) = \mathrm{S}_n(\mathrm{QT}_n) + \mathrm{S}_n(\mathrm{R})$$

Or $\mathrm{S}_n(\mathrm{QT}_n) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Q}(\cos x_k)\mathrm{T}_n(\cos x_k) = 0$ puisque $\cos x_1, \dots, \cos x_n$ sont les racines de T_n. Puisque $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{S}_n(\mathrm{R}) = \mathrm{I(R)}$ d'après **1.b**. Enfin, d'après la question précédente $\mathrm{I(R)} = \mathrm{I(P)}$ donc $\mathrm{S}_n(\mathrm{P}) = \mathrm{I(P)}$.

3. Testons avec le polynôme T_{2n} qui est de degré $2n$.

$$\mathrm{I}(\mathrm{T}_{2n}) = \langle \mathrm{T}_{2n}, \mathrm{T}_0 \rangle = 0$$

puisque T_{2n} est orthogonal à $\mathbb{R}_{2n-1}[\mathrm{X}]$ d'après **3** et donc à T_0.

$$\mathrm{S}_n(\mathrm{T}_{2n}) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos(2nx_k) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)\pi) = -\pi$$

Ainsi $\mathrm{I}(\mathrm{T}_{2n}) \neq \mathrm{S}_n(\mathrm{T}_{2n})$.

Partie IV – Calcul approché d'une intégrale

1. En séparant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs :

$$\sum_{k=1}^{2n} f \circ \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n} f \circ \cos\left(\frac{2k\pi}{2n}\right) + \sum_{k=1}^{n} f \circ \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$$

et donc

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{2n} f \circ \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f \circ \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f \circ \cos(x_k)$$

On en déduit que

$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{\pi}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n} f\left(\cos\frac{k\pi}{2n}\right) - \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

Puisque cos est continue sur $[0, \pi]$ à valeurs dans $[-1, 1]$ et que f est continue sur $[-1, 1]$, $f \circ \cos$ est continue sur $[0, \pi]$. Le théorème sur les sommes de Riemann permet donc d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{k\pi}{2n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\cos\frac{k\pi}{2n}\right) = \int_0^{\pi} f \circ \cos(x)\, \mathrm{d}x = \mathrm{I}(f)$$

On en déduit que $(\mathrm{S}_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers $\mathrm{I}(f)$.

2. **a.** Pour $t \in [-1, 1]$

$$a^2 - 2at + 1 \geq (a^2 - 2a + 1) = (a-1)^2 > 0$$

puisque $a \neq 1$. La fonction $t \mapsto a^2 - 2at + 1$ est continue sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est continue sur $[-1, 1]$.

b. Les racines de $\mathrm{X}^{2n} + 1$ sont les racines $2n^{\text{èmes}}$ de -1, à savoir les complexes $z_k = e^{\frac{(2k-1)i\pi}{2n}}$ avec $k \in [\![1, 2n]\!]$. Or pour $k \in [\![1, n]\!]$, $z_k = e^{ix_k}$ et pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $z_k = \overline{z_{2n-k+1}}$. Les racines de $\mathrm{X}^{2n} + 1$ sont donc les nombres complexes e^{ix_k} et e^{-ix_k} pour $k \in [\![1, n]\!]$.
On en déduit la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathrm{X}^{2n} + 1$ sur $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$:

$$\mathrm{X}^{2n} + 1 = \prod_{k=1}^{n}(\mathrm{X} - e^{ix_k}) \prod_{k=1}^{n}(\mathrm{X} - e^{-ix_k})$$

En regroupant les racines conjuguées, on obtient la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathrm{X}^{2n} + 1$ sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$:

$$\mathrm{X}^{2n} + 1 = \prod_{k=1}^{n}(\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}\cos(x_k) + 1)$$

Chacun de ces facteurs est bien irréductible puisque les e^{ix_k} ne sont pas réels. En effet, $x_k \notin \pi\mathbb{Z}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

c. D'après la question précédente,

$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(a^2 - 2a\cos(x_k) + 1) = \frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(a^2 - 2a\cos(x_k) + 1)\right) = \frac{\pi}{n}\ln(a^{2n} + 1)$$

d. D'après **1**, $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{S}_n(f) = \mathrm{I}(f)$.
Si $a \in]0,1[$, $\lim_{n\to+\infty} a^{2n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{S}_n(f) = 0$. Ainsi $\mathrm{I}(f) = 0$.
Si $a \in]1,+\infty[$, alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a^{2n}} = 0$. Donc

$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{\pi}{n}\ln(a^{2n} + 1) = \frac{\pi}{n}\left(2n\ln(a) + \ln\left(1 + \frac{1}{a^{2n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\pi\ln(a)$$

Ainsi $\mathrm{I}(f) = 2\pi\ln(a)$.

e. Si $a \in]0,1[$, alors

$$\mathrm{S}_n(f) - \mathrm{I}(f) = \mathrm{S}_n(f) = \frac{\pi}{n}\ln(a^{2n} + 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^{2n}\pi}{n}$$

car $a^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
Si $a \in]1,+\infty[$,

$$\mathrm{S}_n(f) - \mathrm{I}(f) = \frac{\pi}{n}\ln(a^{2n} + 1) - 2\pi\ln(a) = \frac{\pi}{n}\ln\left(1 + \frac{1}{a^{2n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{na^{2n}}$$

car $\frac{1}{a^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.