# DEVOIR À LA MAISON N°12

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

## Problème 1 – D'après CCP MP 2008 – Autour de la fonction zeta alternée de Riemann

On note F la fonction zeta alternée de Riemann définie par

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

et $\zeta$ la fonction zeta de Riemann définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Ce problème propose une étdue croisée de quelques propriétés de F et $\zeta$.
Mise à part la partie III qui utilise des résultats de la partie I, les parties sont dans une très large mesure indépendantes.

### I Généralités

**1** Déterminer le domaine de définition de $\zeta$.

**2** Déterminer le domaine de définition de F.

**3** *Calcul de* F(1).

**3.a** Etablir le développement asymptotique suivant :

$$\ln(n) - \ln(n-1) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

**3.b** En déduire l'existence d'un réel $\gamma$ tel que

$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

où $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (somme partielle de la série harmonique)

**3.c** En déduire que $\mathrm{F}(1) = \ln(2)$.

**4** On pose $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur $[2, +\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

**5** *Dérivabilité de* F.

**5.a** Soit $x > 0$. Etudier les variations sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de $x$) que l'on précisera.

**5.b** Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
En déduire que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**6** *Lien entre* $\zeta$ *et* F.
Calculer, pour $x > 1$, $\mathrm{F}(x) - \zeta(x)$ en fonction de $x$ et de $\zeta(x)$. En déduire que :

$$\mathrm{F}(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$$

puis en déduire la limite de $\zeta$ en $+\infty$.

## II Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n\geq1} a_n$ et $\sum_{n\geq1} b_n$ est la série $\sum_{n\geq2} c_n$ où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$.
Dans cette partie, on veut déterminer la nature, selon la valeur de $x$, de la série $\sum_{n\geq2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum_{n\geq1} \dfrac{(-1)^n}{n^x}$ par elle-même.
Cette étude va illustrer la fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.
Dans toute cette partie, $n$ désigne un entier supérieur ou égal à 2 et $x$ un réel strictement positif.

**7** *Etude de la convergence.*

**7.a** On suppose $x > 1$. Indiquer, sans aucun calcul, la nature et la somme de la série produit $\sum_{n\geq2} c_n(x)$ en fonction de F.

**7.b** Démontrer que pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geq \dfrac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.
En déduire, pour $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$, la nature de la série $\sum_{n\geq2} c_n(x)$.

**8** *Cas où* $x = 1$.
On suppose dans cette question que $x = 1$.

**8.a** Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{\mathrm{X}(n-\mathrm{X})}$.
En déduire une expression de $c_n(1)$ en fonction de $\dfrac{\mathrm{H}_{n-1}}{n}$.

**8.b** Déterminer la monotonie de la suite $\left(\dfrac{\mathrm{H}_{n-1}}{n}\right)_{n\geq2}$.

**8.c** En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq2} c_n(1)$.

## III Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de zeta au voisinage de 1

**9** *Développement asymptotique en* 1.

**9.a** Ecrire en fonction de $\ln(2)$ et $\mathrm{F}'(1)$, le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction F puis déterminer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la fonction $x \mapsto 1 - 2^{1-x}$.

**9.b** En déduire deux réels $a$ et $b$ qui s'écrivent à l'aid de $\ln(2)$ et $F'(1)$ tels que l'on ait :

$$\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{=} \frac{a}{x-1} + b + o(1)$$

$\boxed{10}$ *Développement asymptotique en* 1 *(bis).* On considère la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ où $v_n$ est définie sur $[1,2]$ par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}$$

**10.a** Justifier que pour $n \geq 1$ et $x \in [1,2]$, on a :

$$0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$$

**10.b** Justifier que pour $x \in [1,2]$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n(x)$ converge et que le réel $\gamma$ défini à la question **3.b** vérifie $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$.

**10.c** Exprimer, pour $x \in ]1,2]$, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$ et $1-x$.

**10.d** Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge uniformément sur $[1,2[$ (on pourra utiliser le reste de la série).

**10.e** En déduire que

$$\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{=} \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$$

$\boxed{11}$ *Application.*
Déduire des résultats précédents une expression à l'aide de $\ln(2)$ et $\gamma$ de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln(n)}{n}$$