Devoir surveillé n° 1

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i}$.

1. Calculer S_0, S_1 et S_2.

2. Calculer les sommes $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} 2^k$.

3. En intervertissant l'ordre de sommation, calculer S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.

1. Soient k, l, n des entiers naturels tels que $l \leqslant k \leqslant n$.

a. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$.

b. En déduire que si $l < n$, $\sum_{k=l}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{l} = 0$.

2. Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k$$

Exercice 3.

Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Dans la deuxième question de cet exercice, la notation $\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n}$ signifie que la somme porte sur les indices k tels que $0 \leqslant 2k \leqslant n$.
De même, $\sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n}$ signifie que la somme porte sur les indices k tels que $0 \leqslant 2k+1 \leqslant n$.
Cela permet notamment de séparer élégamment les termes d'indices pairs et impairs d'une somme sans avoir à considérer la parité de n :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} a_{2k} + \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} a_{2k+1}$$

1. On définit la fonction f_n telle que $f_n(x) = (x+1)^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - a. Donner une expression développée de $f_n(x)$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
   - b. En calculant $f_n'(1)$ de deux manières, simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
   - c. En calculant $f_n''(1)$ de deux manières, simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.
   - d. Déduire des questions précédentes une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.
2. On définit la fonction g_n telle que $g_n(x) = f_n(x) + f_n(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - a. Montrer que $g_n(x) = 2\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} x^{2k}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - b. En calculant $g_n'(1)$ de deux manières, montrer que $\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} k\binom{n}{2k} = 2^{n-3}n$.
   - c. En calculant $g_n''(1)$ de deux manières, montrer que $\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} k^2\binom{n}{2k} = 2^{n-5}n(n+1)$.

Exercice 4.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$.
2. En déduire par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{n^{\frac{1}{3}}}$$

Exercice 5.

On considère la suite (F_n) définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

1. Calculer F_2, F_3, F_4 et F_5.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 5$, $F_n \geqslant n$. Que peut-on en déduire quant à la limite de la suite (F_n) ?
3.
   - a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_{n+1}$.
   - b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1} = F_{2n}$.
   - c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k} = F_{2n-1}$.
4.
   - a. Résoudre l'équation $x^2 = x + 1$. On notera α la solution positive et β la solution négative. Que vaut le produit $\alpha\beta$?
   - b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$.
   - c. Soit $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$ tel que $p \geqslant r$. Montrer que $F_pF_{q+r} - (-1)^r F_{p-r}F_q = F_{p+q}F_r$.