# DEVOIR SURVEILLÉ N°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Exercice 1 ★★ — Calcul de $\zeta(2)$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n \, \mathrm{d}t$ et $\mathrm{J}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^n \, \mathrm{d}t$.

**1.** Calculer $\mathrm{I}_0, \mathrm{J}_0, \mathrm{I}_1, \mathrm{J}_1$.

**2.** Montrer que $\mathrm{I}_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**3.** Montrer que $\mathrm{I}_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\mathrm{I}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**4.** **a.** Montrer que pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t)$.

**b.** En déduire que $0 \leq \mathrm{J}_n \leq \dfrac{\pi^2}{4}(\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**c.** Montrer que la suite de terme général $\dfrac{\mathrm{J}_n}{\mathrm{I}_n}$ converge vers 0.

**5.** **a.** Montrer que $\mathrm{I}_{n+2} = \dfrac{1}{2}\left((n+1)(n+2)\mathrm{J}_n - (n+2)^2\mathrm{J}_{n+2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**b.** En déduire que $\dfrac{\mathrm{J}_n}{\mathrm{I}_n} - \dfrac{\mathrm{J}_{n+2}}{\mathrm{I}_{n+2}} = \dfrac{2}{(n+2)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**6.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$. Montrer que la suite de terme général $\mathrm{S}_n$ converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.

**Exercice 2** ★★

Soient $\mathrm{I} = ]0, +\infty[$ et

$$(\mathbf{E}) : (1-e^{-t})y' + y = e^{-t}.$$

**1.** En remarquant que $\forall t \in \mathbb{R}$ , $1-e^{-t} = e^{-t}(e^t - 1)$, résoudre l'équation homogène $(\mathbf{E_H})$ sur I.

**2.** Résoudre $(\mathbf{E})$ sur I.

**3.** *On cherche à prouver que* $(\mathbf{E})$ *admet une unique solution sur* I *admettant une limite finie en* $0^+$.

**a.** Établir que pour tout $x \in \mathrm{I}$ , $x \leq e^x - 1 \leq xe^x$.

**b.** En déduire qu'il existe une unique solution de $(\mathbf{E})$ sur I, notée $f$, admettant en $0^+$ une limite finie $\ell$. On précisera la valeur de $\ell$.

**4.** *Etude de* $f$ *sur* I. *On prolonge désormais* $f$ *en* $0$ *en posant* $f(0) = \ell$. *Puisque* $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = \ell = f(0)$, *la fonction* $f$ *ainsi prolongée est définie et continue sur* $\mathbb{R}_+$.

**a.** Étudier les variations de $f$ sur I. On précisera la limite de $f$ en $+\infty$.

**b.** Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}e^x.$$

**c.** En déduire que $f$ est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

**d.** Tracer le graphe de $f$ sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 3 ★★** **Équation fonctionnelle**

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f$ continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(xy)=xf(y)+yf(x)$$

**1.** Soit $f\in\mathcal{E}$.

**a.** Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.

**b.** Démontrer que la fonction $f$ est impaire.

**2.** On suppose que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

**a.** Montrer que $f$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $xy'-y=kx$ où $k$ est une constante dépendant de $f$ que l'on précisera.

**b.** En déduire $f(x)$ en fonction de $k$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

**3.** On note $\varphi$ l'unique élément de $\mathcal{E}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\varphi'(1)=1$.

**a.** $\varphi$ est-elle dérivable en 0 ?

**b.** Déterminer les variations et les limites de $\varphi$ en $+\infty$ et $-\infty$ puis tracer son graphe.

**4.** On considère $f\in\mathcal{E}$ que l'on suppose seulement continue sur $\mathbb{R}$. On note alors $\mathrm{F}$ l'unique primitive de $f$ s'annulant en 0.

**a.** Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\mathrm{F}(xy)=x^2\mathrm{F}(y)+\dfrac{xy^2}{2}f(x)$.

**b.** En déduire que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

**c.** Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.

**Exercice 4 ★★**

Soit $g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose

$$f(x)=\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t)\ \mathrm{d}t$$

**1.** Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Montrer les relations suivantes

$$\operatorname{sh}(a-b)=\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b)-\operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$$
$$\operatorname{ch}(a-b)=\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b)-\operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$$

**2.** Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=\int_0^x \operatorname{ch}(x-t)g(t)\ \mathrm{d}t$$

**3.** Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que $f$ est solution de l'équation différentielle $y''-y=g$.

**4.** En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $y''-y=g$.