

Partie entière

EXERCICE 1.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

EXERCICE 2.★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

EXERCICE 3.★

On se propose de calculer la partie entière du réel

$$\alpha = \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. En déduire $\lfloor \alpha \rfloor$.

EXERCICE 4.★

Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

EXERCICE 5.★★

Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

EXERCICE 6.★

On définit la *partie fractionnaire* d'un nombre réel x par

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

1. Calculer $\{54, 465\}$ et $\{-36, 456\}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comparer $\{x\}$ et $\{-x\}$.

3. Prouver que la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$x \mapsto \{x\}$$

est périodique et tracer son graphe.

EXERCICE 7.★

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par l'expression

$$\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$$

lorsque x et y décrivent \mathbb{R} .

EXERCICE 8.★★

Un classique.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer les entiers naturels k tels que

$$\lfloor \sqrt{k} \rfloor = m.$$

2. Soit $n \geq 0$. Calculer en fonction de n ,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n^2+2n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor.$$

EXERCICE 9.★

Résoudre sur \mathbb{R} les équations

$$1. \lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x + 1 \rfloor;$$

$$2. \lfloor x + 3 \rfloor = \lfloor x - 1 \rfloor.$$

EXERCICE 10.

Tracer le graphe de la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$x \mapsto \left\lfloor \left\lfloor \frac{3}{2} - x \right\rfloor \right\rfloor.$$

EXERCICE 11.★

Etablir que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \lfloor nx \rfloor - n \lfloor x \rfloor \leq n - 1.$$

Bornes supérieures et inférieures**EXERCICE 12.**

Soit f une application *croissante* de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. On souhaite montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $l \in [0, 1]$ tel que $f(l) = l$.

1. On pose $A = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq x\}$. Montrer que A est non vide et majorée.
2. On note alors $c = \sup A$. Montrer que $c \in [0, 1]$.
3. Montrer que $c \leq f(c)$.
4. Montrer que $f(c) \in A$. Conclure.

EXERCICE 13.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note s_n la somme des chiffres de l'écriture décimale de n .

1. Montrer que $s_n \leq 9(\log_{10} n + 1)$.
2. Montrer que la suite $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)$ est bornée. Quelles sont les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble des valeurs de cette suite ? Sont-elles atteintes ?

EXERCICE 14.

Soient A et B deux ensembles non vides et f une application bornée de $A \times B$ dans \mathbb{R} . Comparer $\sup_{x \in A} \left(\inf_{y \in B} f(x, y) \right)$ et $\inf_{y \in B} \left(\sup_{x \in A} f(x, y) \right)$.

EXERCICE 15.

Soit f une application bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g(x) = \inf_{y \geq x} f(y) \quad \text{et} \quad h(x) = \sup_{y \geq x} f(y)$$

Déterminer le sens de variation de g et h .

EXERCICE 16.★

Soient A et B deux parties non vides et bornées de \mathbb{R} . Montrer que $A \cup B$ est non vide et bornée et que

$$\sup(A \cup B) = \max [\sup(A), \sup(B)]$$

et

$$\inf(A \cup B) = \min [\inf(A), \inf(B)].$$

EXERCICE 17.★

Etudier l'existence puis déterminer le cas échéant les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants,

1. $\mathcal{A} = \left\{ 2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\};$
2. $\mathcal{B} = \left\{ 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m}, n, m \in \mathbb{Z}^* \right\};$
3. $\mathcal{C} = \left\{ 1 - \frac{1}{n-m}, n \neq m \in \mathbb{Z} \right\};$
4. $\mathcal{D} = \left\{ \frac{pq}{p^2 + q^2}, (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\};$
5. $\mathcal{E} = \left\{ \frac{2^n}{2^m + 3^{n+m}}, (n, m) \in \mathbb{N} \right\};$
6. $\mathcal{F} = \left\{ \frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1}, (n, q) \in \mathbb{N}^2 \right\};$
7. $\mathcal{G} = \left\{ \frac{mn}{m^2 + n^2 + mn}, m, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$

EXERCICE 18.

Prouver l'existence puis calculer les bornes supérieures et inférieures de l'ensemble

$$A = \{(-1)^n/n \mid n \geq 1\}.$$

EXERCICE 19.★

Soient A et B des parties non vides de \mathbb{R} . On définit

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Montrer que si A et B sont bornées, alors $A + B$ l'est aussi et que

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$$

et

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

EXERCICE 20.★★

Pour tout $A \subset \mathbb{R}$ non vide et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$d(x, A) = \inf \{ |x - a| \mid a \in A \}.$$

(expression qui se lit : « distance de x à A »)

1. Donner une interprétation *géométrique* de $d(x, A)$ sur la droite réelle.
2. Examiner les cas où $A = [0, 1[$ et $x = 1, 2, 1/2$ ou -3 .
3. On revient au cas général. Justifier l'existence de $d(x, A)$.
4. La borne inférieure $d(x, A)$ est-elle un plus petit élément ? Illustrer par divers exemples.
5. Caculer $d(x, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Même question avec $d(x, \mathbb{Q})$.
6. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|.$$

Densité**EXERCICE 21.**

Montrer que $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n}, (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans \mathbb{R} .

EXERCICE 22.

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

On pose $a = f(1)$.

1. Déterminer $f(0)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = an$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = an$.
4. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$.
5.
 - a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux suites de rationnels (α_n) et (β_n) convergeant vers x telles que $\alpha_n \leq x \leq \beta_n$.
 - b. On suppose f croissante. Montrer que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6. Déterminer toutes les applications croissantes f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

EXERCICE 23.

Etablir que $E = \{r^3 \mid r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans \mathbb{R} .

Irrationnels

EXERCICE 24.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On définit une fonction g par $g(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ pour $x \in [0, 1]$. On définit également une fonction h par $h(x) = g(x) + e^{-x} \frac{x^n}{n!}$.

1. Montrer que g est strictement décroissante sur $[0, 1]$.
2. En déduire que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e$.
3. Montrer que h est strictement croissante sur $[0, 1]$.
4. En déduire que $e < \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) + \frac{1}{n!}$.
5. On suppose que e est rationnel. Il existe donc deux entiers naturels p, q tels que $e = \frac{p}{q}$. Montrer par l'absurde que $q > n$.
6. Conclure.

EXERCICE 25.

Soit α et β deux réels non nuls tels que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. On suppose $\alpha > 1$ et α irrationnel. On pose

$$A = \{ \lfloor n\alpha \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^* \} \text{ et } B = \{ \lfloor n\beta \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^* \}$$

1. Montrer que $\beta > 1$ et que β est également irrationnel.
2. On suppose qu'il existe un couple $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\lfloor p\alpha \rfloor = \lfloor q\beta \rfloor$. On pose alors $k = \lfloor p\alpha \rfloor = \lfloor q\beta \rfloor$.
 - a. Montrer que $p - \frac{1}{\alpha} < \frac{k}{\alpha} < p$ et $q - \frac{1}{\beta} < \frac{k}{\beta} < q$ et aboutir à une contradiction.
 - b. En déduire que $A \cap B = \emptyset$.
3. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ qui n'est ni dans A ni dans B .
 - a. Montrer que les suites $(\lfloor n\alpha \rfloor)$ et $(\lfloor n\beta \rfloor)$ tendent vers $+\infty$.
 - b. En déduire qu'il existe un couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\lfloor p\alpha \rfloor < k < \lfloor (p+1)\alpha \rfloor$ et $\lfloor q\beta \rfloor < k < \lfloor (q+1)\beta \rfloor$.
 - c. Montrer que $p < \frac{k}{\alpha} < p+1 - \frac{1}{\alpha}$ et $q < \frac{k}{\beta} < q+1 - \frac{1}{\beta}$ et aboutir à une contradiction.
 - d. En déduire que $A \cup B = \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 26.

Soit $n \in \mathbb{N}$ impair tel que $n \geq 3$. On pose $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}$. On souhaite montrer que $\frac{\varphi}{\pi}$ est irrationnel.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $A_k = (\sqrt{n})^k \cos k\varphi$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_{k+1} + nA_{k-1} = 2A_k$.
2. En déduire que les A_k sont des entiers.
3. Montrer qu'aucun des A_k n'est divisible par n .
4. Conclure en raisonnant par l'absurde.

EXERCICE 27.

Prouver que le nombre $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

EXERCICE 28.★

Le réel $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est-il rationnel ?

EXERCICE 29.

Que dire de $x + y$ et xy dans les quatre cas suivants ?

1. $x, y \in \mathbb{Q}$;
2. $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
3. $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
4. $y \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

EXERCICE 30.★

Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, \sqrt{n} est rationnel *si et seulement si* n est un carré parfait (ie de la forme m^2 avec $m \in \mathbb{N}$).

Intervalles**EXERCICE 31.**

Prouver l'égalité

$$\bigcup_{n \geq 1} \left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[=]0, 1[\cup]1, 2[.$$

Relations binaires**EXERCICE 32.**

Soit φ une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour tous réels a, b on pose

$$a \leq_{\varphi} b \iff \varphi(b) - \varphi(a) \geq |b - a|.$$

1. Montrer que \leq_{φ} est une relation d'ordre sur \mathbb{R} .
2. Montrer que cet ordre est total si et seulement si pour tous réels a, b on a $|\varphi(b) - \varphi(a)| \geq |b - a|$.
3. Quel ordre obtient-on si $\varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}}$?

EXERCICE 33.

Soit X un ensemble de cardinal supérieur à 1. On munit $\mathcal{P}(X)$ de l'ordre \subset . On note $E \subset \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des singletons de X .

1. E possède-t-il un plus grand élément ?
2. E possède-t-il une borne supérieure ?

EXERCICE 34.

On définit une relation binaire sur \mathbb{N}^2 par

$$x \preccurlyeq y \text{ si et seulement si } \begin{pmatrix} x_1 < y_1 \\ \text{ou} \\ x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2 \end{pmatrix}$$

où $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$

1. Prouver que \preccurlyeq est une relation d'ordre sur \mathbb{N}^2 .
2. L'ordre est-il total ?
3. On pose $A = \{(p, p) \mid p \in \mathbb{N}\}$ et

$$B = \{(2, 10^p) \mid p \in \mathbb{N}\}.$$

Les parties A et B de $(\mathbb{N}^2, \preccurlyeq)$ sont-elles majorées ? Possèdent-elles un plus grand élément ? Une borne supérieure ?

EXERCICE 35.

Soit E un ensemble.

1. Montrer que la relation d'inclusion notée \subset est un ordre sur $\mathcal{P}(E)$.
2. L'ordre est-il total ?
3. On pose pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$,

$$\sup(A, B) = \sup(\{A, B\}) \text{ et } \inf(A, B) = \inf(\{A, B\}).$$

- a. Justifier ces définitions. On exprimera $\sup(A, B)$ et $\inf(A, B)$ en fonction des sous-ensembles A et B à l'aide des symboles \cup et \cap .
- b. Montrer plus généralement que toute partie non vide \mathcal{F} de $(\mathcal{P}(E), \subset)$ admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on explicitera à l'aide de \mathcal{F} en utilisant les symboles \cap et \cup .

EXERCICE 36.

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence \mathbb{R} . Pour $x \in E$, on appelle classe d'équivalence de x l'ensemble $C(x) = \{y \in E \mid x \mathbb{R} y\}$. Montrer que les classes d'équivalences forment une partition de E .

EXERCICE 37.

1. Montrer que la relation \mathcal{R} définie sur \mathbb{R} par

$$x\mathcal{R}y \iff xe^y = ye^x$$

est une relation d'équivalence.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Quel est le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de x ?

EXERCICE 38.

On définit une relation binaire \mathcal{R} sur \mathbb{C} par

$$z\mathcal{R}z' \iff |z| = |z'|$$

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence et décrire géométriquement les classes d'équivalence.

EXERCICE 39.

On définit sur \mathbb{Z} la relation \mathcal{R} par

$$x\mathcal{R}y \text{ si et seulement si } x + y \text{ est pair.}$$

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence et déterminer les classes d'équivalence.

EXERCICE 40.

On définit la relation d'équivalence \mathcal{R} sur \mathbb{R} par

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y$$

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence et déterminer les cardinaux des classes d'équivalence.

EXERCICE 41.

Soit E un ensemble. On rappelle que E^E est l'ensemble des applications de E dans E . Si f et g sont deux éléments de E^E , on dira que f est conjuguée à g s'il existe une bijection φ de E dans E telle que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$. On notera alors $f \sim g$.

1.
 - a. Montrer que \sim est une relation d'équivalence sur E^E .
 - b. Quelle est la classe d'équivalence de Id_E ?
 - c. Quelle est la classe d'équivalence d'une application constante ?
2. On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}$.
 - a. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Les applications $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto ax^2$ sont-elles conjuguées ?
 - b. Les applications \sin et \cos sont-elles conjuguées ?

EXERCICE 42.

Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux cercles du plan, de centres respectifs O , O' et de rayons respectifs R et R' . On dit que \mathcal{C} est inférieur à \mathcal{C}' si $OO' \leq R' - R$. On note alors $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}'$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre dans l'ensemble des cercles du plan.

EXERCICE 43.

Dans \mathbb{N}^* , on considère la relation \mathcal{R} suivante :

$$p\mathcal{R}q \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad q = p^n$$

1. Démontrer que \mathcal{R} est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?
2. La partie $\{2, 3\}$ est-elle majorée ?

EXERCICE 44.

Soient E un ensemble, (F, \leq) un ensemble ordonné et $f : E \rightarrow F$ une application injective. On définit dans E la relation \mathcal{R} par $x\mathcal{R}y \iff f(x) \leq f(y)$. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'ordre sur E .