Devoir à la maison n° 15

Problème 1 —

Pour toute fonction g continue sur $[0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit un polynôme $B_n(g)$ tel que :

$$\forall x \in [0,1],\ B_n(g)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}$$

Dans tout le problème, f désigne une fonction continue sur $[0,1]$.

1. On note $e_0 : x \mapsto 1$, $e_1 : x \mapsto x$ et $e_2 : x \mapsto x^2$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$:

$$B_n(e_0)(x) = e_0(x)$$

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$

$$B_n(e_1)(x) = e_1(x)$$

c. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout $k \in [\![2,n]\!]$

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2}$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$:

$$B_n(e_2)(x) = e_2(x) + \frac{x(1-x)}{n}$$

2. Justifier l'existence d'un réel positif M tel que $\forall x \in [0,1],\ |f(x)| \leqslant M$.

3. On se donne un réel strictement positif ε. Justifier l'existence d'un réel strictement positif δ tel que :

$$\forall (u,v) \in [0,1]^2,\ |u-v| < \delta \Rightarrow |f(u)-f(v)| < \varepsilon$$

4. Montrer que :

$$\forall (u,v) \in [0,1]^2,\ |f(u)-f(v)| < \varepsilon + 2M\left(\frac{u-v}{\delta}\right)^2$$

On pourra distinguer les cas $|u-v| < \delta$ et $|u-v| \geqslant \delta$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$:

$$f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] x^k(1-x)^{n-k}$$

6. En déduire que pour tout tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$:

$$|f(x) - B_n(f)(x)| < \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}$$

On pourra utiliser les résultats de la question **??**.

On pourra également utiliser le fait que pour $x \in [0,1]$, $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$, après l'avoir démontré.

7. On pose $S_n = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - B_n(f)(x)|$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$.