Devoir surveillé n°5

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

On pose $G =]-1, 1[$.

1. Montrer que th induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur G.
2. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{th}(a+b) = \dfrac{\operatorname{th}(a)+\operatorname{th}(b)}{1+\operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}$.
3. Pour $(x, y) \in G^2$, on pose $x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. A l'aide des questions précédentes, montrer que $(G, \star)$ est un groupe commutatif.
4. Soit $x \in G$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x^{\star n} = \dfrac{(1+x)^n-(1-x)^n}{(1+x)^n+(1-x)^n}$.

Exercice 2.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On définit une suite (u_n) par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

Dans les deux premières questions, on cherche à prouver la convergence de la suite (u_n) et à déterminer sa limite de deux façons différentes et dans la dernière question, on s'intéresse à la vitesse de convergence de cette suite.

1.
   a. Montrer que la suite (u_n) est strictement positive.
   b. Montrer que $u_n \geqslant \sqrt{a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   c. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
   d. En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.
2. On pose $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a. Montrer que $v_{n+1} = v_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b. En déduire une expression de v_n en fonction de v_0 et n.
   c. Vérifier que $|v_0| < 1$.
   d. En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.
3. On s'intéresse maintenant à la vitesse de convergence de (u_n) vers sa limite.
   a. Montrer qu'il existe $K \in [0, 1[$ tel que $u_n - \sqrt{a} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(K^{2^n}\right)$.
   b. Montrer que pour tout $q \in]0, 1[$, $u_n - \sqrt{a} \underset{n\to+\infty}{=} o(q^n)$.
4. Écrire une fonction Python d'argument trois réels strictement positifs a, u_0 et ε renvoyant le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \sqrt{a}| \leqslant \varepsilon$.

Problème 1 —

On donne $e \approx 2,72$, $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,61$, $\sqrt{2} \approx 1,41$ et $\ln(3) \approx 1,10$.

Partie I – Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3xe^{-x^2} - 1$$

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition. Donner le tableau de variations de f. Préciser les branches infinies de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f ainsi qu'une symétrie de celle-ci.

2. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. Etudier la position de la courbe de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente.

3. Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$. On fera également figurer les asymptotes et la tangente des questions précédentes.

4. **a.** Justifier que f admet un développement limité en 0 à tout ordre.

b. Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 5.

Partie II – Étude d'une équation différentielle

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E_n l'équation différentielle $xy' - (n - 2x^2)y = n - 2x^2$.
On note H_n l'équation différentielle homogène associée à E_n.

1. Résoudre H_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

2. En déduire les solutions de E_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

3. Donner toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ solutions de E_n sur $\mathbb{R}$. On distinguera les cas $n = 1$ et $n \geqslant 2$.

Partie III – Étude de deux suites

On suppose désormais dans cette partie que $n \geqslant 2$. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1$$

1. Quel est le signe de $f_n(0)$ et de $f_n(1)$?

2. Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$. Donner la limite de f_n en $+\infty$. En déduire que f_n s'annule exactement deux fois sur $\mathbb{R}_+$ en deux réels notés u_n et v_n vérifiant $u_n < 1 < v_n$.

3. Quelle est la limite de $(v_n)_{n\geqslant 2}$?

4. **a.** Exprimer $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n.

b. En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.

c. Déduire de ce qui précède la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

d. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente. On note l sa limite.

5. Soit g_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g_n(x) = \ln(3) + n\ln(x) - x^2$$

a. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $g_n(t) = 0$ *si et seulement si* $f_n(t) = 0$.

b. On suppose $l \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Conclusion ?

c. Soit la suite $(w_n)_{n\geqslant 2}$ définie par

$$\forall n \geqslant 2,\ w_n = u_n - 1$$

Trouver en utilisant un développement limité de $g_n(1 + w_n) = g_n(u_n)$ un équivalent simple de w_n.