Corrigé TD : Séries

Solution 1.

Comme $\alpha > 0$, on a

$$\cos(1/n^{\alpha}) = 1 - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

ainsi, pour n au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} n\ln(\cos(1/n^{\alpha})) &= n\ln\left(1 - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right) \\ &= -\frac{n^{1-2\alpha}}{2} + o(n^{1-2\alpha}) \end{aligned}$$

- Si $1-2\alpha < 0$, par continuité de l'exponentielle au point 0, on a

  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \neq 0$$

  donc Σu_n diverge banalement.
- Si $1-2\alpha = 0$, par continuité de l'exponentielle en $-1/2$, on a

  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$$

  donc Σu_n diverge.
- Si $1-2\alpha > 0$, on a par croissances comparées au voisinage de $+\infty$,

  $$u_n = e^{-n^{1-2\alpha}/2 + o(n^{1-2\alpha})} = o(1/n^2)$$

  donc Σu_n converge par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$.

En conclusion : Σu_n converge *si et seulement si*

$$0 < \alpha < 1/2.$$

Solution 2.

On a clairement

$$u_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

donc Σu_n converge par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$.

Solution 3.

Pöur tout $n \geqslant 0$, notons $u_n = 1/\binom{2n}{n}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(2n)!}{n!^2}\Big/\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{4} < 1$$

la série $\sum u_n$ est donc convergente d'après le critère de D'Alembert.

Solution 4.

On a, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{\ln(a)}{n} - \frac{2 + \ln(bc)/n}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{\ln(a/\sqrt{bc})}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Puisque toute série dont le terme général est en $\mathcal{O}\left(1/n^2\right)$ converge, on déduit du théorème sur les séries de Riemann que $\sum u_n$ converge *si et seulement si*

$$\ln(a/\sqrt{bc}) = 0,$$

i.e. $a = \sqrt{bc}$.

Solution 5.

Comme

$$u_n = e^{-(1+1/n)\ln(n)} = \frac{1}{n}e^{-\ln(n)/n} \sim \frac{1}{n},$$

car

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0.$$

Ainsi la série $\sum u_n$ diverge.

Solution 6.

Comme

$$n^2 u_n = e^{2\ln(n) - \sqrt{n}},$$

on a

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 u_n = 0,$$

la série $\sum u_n$ converge par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$.

Solution 7.

On a :

$$n^2 u_n = e^{2\ln(n) - \ln(n)\ln(\ln(n))}.$$

Or

$$2\ln(n) = o\left(\ln(n)\ln(\ln(n))\right).$$

Ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 u_n = 0$$

et donc, par comparaison aux séries de Riemann, $\sum u_n$ converge.

Solution 8.

Pour tout entier n, notons

$$\alpha_n = (7 + 4\sqrt{3})^n + (7 - 4\sqrt{3})^n.$$

D'après la formule du binôme, on a pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$\alpha_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} 2\binom{n}{2k} 7^{n-2k} 4^{2k} 3^k$$

ainsi $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ et donc, par π-périodicité et imparité de la tangente :

$$u_n = -\tan(\pi(7-4\sqrt{3})^n).$$

Comme $0 < 7 - 4\sqrt{3} < 1$, on a

$$u_n \sim -\pi(7-4\sqrt{3})^n$$

et puisque la série géométrique $\sum(7-4\sqrt{3})^n$ converge, la série $\sum u_n$ est convergente.

Solution 9.

Comme

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

où γ désigne la constante d'Euler, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= a^{H_n} = a^{\ln(n)+\gamma+o(1)} = e^{(\ln(n)+\gamma+o(1))\ln(a)} \\ &= e^{\ln(n^{\ln(a)})} e^{\gamma+o(1)} = \frac{1}{n^{-\ln(a)}} e^{\gamma+o(1)} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$u_n \sim \frac{e^\gamma}{n^{-\ln(a)}}.$$

Comme $e^\gamma \neq 0$, on déduit du théorème sur les séries de Riemman que $\sum u_n$ converge *si et seulement si* $-\ln(a) > 1$, c'est-à-dire

$$a < \frac{1}{e}.$$

Remarque. Sans être aussi savant sur la série harmonique, on peut déduire d'une comparaison série-intégrale que

$$\ln(n) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$$

ce qui permet de conclure avec des encadrements au lieu d'équivalents.

Solution 10.

On a clairement

$$u_n \underset{+\infty}{=} (1+a+b)\ln(n) + \frac{a+2b}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On a donc que $\sum u_n$ converge *si et seulement si*

$$a + b + 1 = a + 2b = 0,$$

ie $(a, b) = (-2, 1)$.

Solution 11.

Pour tout entier n, notons

$$\alpha_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n.$$

D'après lma formule du binôme, on a pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$\alpha_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} 2\binom{n}{2k} 2^{n-2k} 3^k$$

ainsi $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ et donc, par π-antipériodicité du sinus :

$$|u_n| = |\sin(\pi(2-\sqrt{3})^n|.$$

Comme $0 < 2-\sqrt{3} < 1$, on a

$$|u_n| \sim (2-\sqrt{3})^n$$

et puisque la série géométrique $\sum (2-\sqrt{3})^n$ converge, la série $\sum u_n$ est absolumment convergente donc convergente.

Solution 12.

- On suppose $0 < b < 1$. Dans ce cas, $b^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $2^{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $b^n = o\left(2^{\sqrt{n}}\right)$ puis $2^{\sqrt{n}} + b^n \sim 2^{\sqrt{n}}$. Finalement $u_n \sim a^n$. On en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge pour $0 < a < 1$ et diverge vers $+\infty$ sinon.
- On suppose $b > 1$. Dans ce cas, $2^{\sqrt{n}} = o\left(b^n\right)$ et donc $2^{\sqrt{n}} + b^n \sim b^n$. Finalement, $u_n \sim \left(\frac{a}{b}\right)^n 2^{\sqrt{n}}$. Si $a < b$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{a}{b} + \varepsilon < 1$. On montre alors que $u_n = o\left(\left(\frac{a}{b}+\varepsilon\right)^n\right)$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Si $a \geqslant b$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement.

Solution 13.

Première méthode :

- Supposons $p = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} \geqslant \frac{n!}{n!} = 1$$

  La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge grossièrement.
- Supposons $p = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} \geqslant \frac{1}{n+1}$$

  Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1}$ diverge vers $+\infty$. Par minoration, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge.
- Supposons $p \geqslant 2$. Pour $n \geqslant 2$,

$$1!+2!+\cdots+n! \leqslant (n-1)(n-1)!+n! \leqslant n(n-1)!+n! = 2n!$$

  Ainsi

$$u_n \leqslant \frac{2n!}{(n+p)!} \leqslant \frac{2n!}{(n+2)!} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{2}{n^2}$$

  Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ également.

Seconde méthode : On peut également montrer que $1!+2!+\cdots+n! \sim n!$. En effet, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} \geqslant 1$$

et pour $n \geqslant 3$,

$$\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} \leqslant 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-2}\frac{k!}{n!}$$

$$\leqslant 1 + \frac{1}{n} + (n-2)\frac{(n-2)!}{n!} \qquad \leqslant 1 + \frac{1}{n} + \frac{(n-2)}{n(n-1)}$$

Par encadrement, $\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ i.e. $1!+2!+\cdots+n! \sim n!$. On en déduit que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^p}$$

La série de terme général u_n est donc de même nature que celle de terme général $\frac{1}{n^p}$: elle converge donc *si et seulement si* $p \geqslant 2$.

Solution 14.

Supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Alors (S_n) converge vers la somme $S > 0$ de cette série. On a donc $\dfrac{u_n}{S_n} \sim \dfrac{u_n}{S}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{u_n}{S_n}$ converge donc.

Supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge. Puisque cette série est à termes positifs, elle diverge donc vers $+\infty$. Si $\dfrac{u_n}{S_n}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{u_n}{S_n}$ diverge grossièrement. Sinon, $\ln\left(1-\dfrac{u_n}{S_n}\right) \sim -\dfrac{u_n}{S_n}$ donc les séries de terme général $\dfrac{u_n}{S_n}$ et $\ln\left(1-\dfrac{u_n}{S_n}\right)$ sont de même nature. Or

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \ln\left(1-\frac{u_n}{S_n}\right) &= \sum_{n=1}^{N} \ln\frac{S_{n-1}}{S_n} \\ &= \sum_{n=1}^{N} (\ln S_{n-1} - \ln S_n) = \ln S_0 - \ln S_N\end{aligned}$$

Or $S_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge vers $+\infty$. Ainsi $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1-\dfrac{u_n}{S_n}\right)$ diverge de même que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{u_n}{S_n}$.

Les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{u_n}{S_n}$ sont donc toujours de même nature.

Solution 15.

On prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{2n}}{u_0} \leqslant \frac{v_{2n}}{v_0}$ et $\frac{u_{2n+1}}{u_1} \leqslant \frac{v_{2n+1}}{v_1}$. En posant $K = \max\left(\frac{u_0}{v_0}, \frac{u_1}{v_1}\right)$, on a donc $u_n \leqslant K v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est à termes positifs et son terme général est majoré par celui d'une série convergente : elle converge également.

Solution 16.

1. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ pour $n \geqslant N$. Par télescopage, on obtient, $\frac{u_n}{u_N} \leqslant \frac{v_n}{v_N}$ i.e. $u_n \leqslant \frac{u_N}{v_N} v_n$ pour tout $n \geqslant N$. On a donc $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.
2. **a.** Soit β tel que $1 < \beta < \alpha$ et posons $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} \\ &= 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Ainsi $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{\alpha-\beta}{n}$. Puisque $\alpha-\beta > 0$, on a donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang. D'après la première question, $u_n = \mathcal{O}(v_n)$. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge car $\beta > 1$ et, comme elle est à termes positifs, sa convergence entraîne celle de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

b. Cette fois-ci, on se donne β tel que $\alpha < \beta < 1$ et on pose à nouveau $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On montre comme précédemment que $v_n = \mathcal{O}(u_n)$. La divergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ entraîne la divergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

c. Si on pose $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge.

Si on pose maintenant $u_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$ pour $n \geqslant 2$, on a à nouveau $u_n = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Mais la fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln^2 x}$ étant décroissante, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^2 t}$ sont de même nature. Or une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t\ln^2 t}$ est $t \mapsto -\frac{1}{\ln t}$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale précédente et par conséquent celle de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

3. On a

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2n+2}{2n+3} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{2n}}\\ &= 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Autrement dit, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ avec les notations précédentes. La série de terme général u_n diverge.

Remarque. Le critère de Raabe-Duhamel permet de conclure (sauf si $\alpha = 1$) dans les cas où le critère de d'Alembert ne le permet pas ($\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$).

Solution 17.

1. Comme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge, $a_n = o(1)$ et donc $a_n^2 = o(a_n)$. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ étant convergente à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$ converge également.

2. Comme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge, $a_n = o(1)$ et donc $\dfrac{a_n}{1+a_n} \sim a_n$. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ étant convergente à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{a_n}{1+a_n}$ converge également.

3. Comme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge, $a_n = o(1)$. Ainsi $a_{2n} = o(1)$ et donc $a_n a_{2n} = o(a_n)$. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ étant convergente à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n a_{2n}$ converge également.

4. On démontre facilement que pour $x, y \in \mathbb{R}$, $xy \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\sqrt{a_n}}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{n^2}\right)$. On sait que les séries de terme général a_n et $\frac{1}{n^2}$ convergent donc celle de terme général $\dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$ est à termes positifs et son terme général est majoré par celui d'une série convergente : elle converge donc également.

Solution 18.

1. En convenant que $A_{n_0-1}=0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k &= \sum_{k=n_0}^{n} (A_k - A_{k-1})B_k \\
&= \sum_{k=n_0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=n_0}^{n} A_{k-1} B_k \\
&= \sum_{k=n_0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=n_0-1}^{n-1} A_k B_{k+1} \\
&= A_n B_n + \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k (B_k - B_{k+1}) \\
&= A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k
\end{aligned}$$

2. Il suffit de poser $a_n = \sin n$ et $B_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$. Avec les notations précédentes, pour tout $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=1}^{n} \sin k \\
&= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^i \frac{e^{in}-1}{e^i-1}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{\frac{i(n+1)}{2}} \frac{\sin \frac{n}{2}}{\sin \frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{\sin \frac{n+1}{2} \sin \frac{n}{2}}{\sin \frac{1}{2}} \\
b_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k} = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k$$

Or (A_n) est bornée et (b_n) converge vers 0 donc $(A_n b_n)$ converge vers 0. De plus pour tout $k \geqslant 1$,

$$|A_k b_k| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{1}{2}} |b_k| = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

Or la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ converge (série télescopique) donc la série $\sum_{n\geqslant 1} A_n b_n$ est absolument convergente donc convergente. On en déduite la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin n}{n}$.

3. Rappelons que pour tout $n \geqslant n_0$

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$$

La suite (B_n) converge vers 0 et (A_n) est bornée donc $\lim_{n\to+\infty} A_n B_n = 0$.
Puisque (A_n) est bornée, $A_n b_n = \mathcal{O}(|b_n|)$. Or la série $\sum_{n\geqslant n_0} |b_n|$ converge car $\sum_{n\geqslant n_0} b_n$ est absolument convergente et est

à termes positifs donc $\sum_{n \geqslant n_0} A_n b_n$ converge (absolument). Ainsi $\sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$.

Il s'ensuit que $\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k$ admet également une limite lorsque n tend vers $+\infty$ i.e. que la série $\sum_{n \geqslant n_0} a_n B_n$ converge.

Solution 19.

1. Supposons que $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ converge. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \frac{u_n}{v_n}$. Par une récurrence évidente, $\frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{u_0}{v_0}$. Posons $\lambda = \frac{u_0}{v_0}$. On a alors $0 < u_n \leqslant \lambda v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$. Comme la série $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ est à termes positifs et converge, la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge également.
2. C'est tout simplement la contraposée de la proposition montrée à la question précédente.

Solution 20.

1. On remarque tout d'abord que $\sum \max(u_n, v_n)$ est à termes positifs.
De plus, $\max(u_n, v_n) \leqslant u_n + v_n$ car u_n et v_n sont positifs.
Enfin, $\sum u_n + v_n$ converge, ce qui permet de conclure à la convergence de $\sum \max(u_n, v_n)$.
2. On remarque tout d'abord que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ est à termes positifs.
De plus, $\sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + v_n)$.
Enfin, $\sum \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ converge, ce qui permet de conclure à la convergence de $\sum \max(u_n, v_n)$.
3. On remarque tout d'abord que $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ est à termes positifs.
De plus, $\frac{u_n v_n}{u_n + v_n} \leqslant v_n$ car $u_n + v_n$ est positif.
Enfin, $\sum v_n$ converge, ce qui permet de conclure à la convergence de $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$.

Solution 21.

1. Soit $k \in]l, 1[$. Puisque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$ pour tout $n \geqslant N$. Une récurrence montre que $u_n \leqslant k^{n-N} u_N$ pour tout $n \geqslant N$. Ainsi $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathcal{O}(k^n)$. Puisque la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} k^n$ est un série à termes positifs convergente donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.
2. Soit $k \in]1, l[$. Puisque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant k$ pour tout $n \geqslant N$. Une récurrence montre que $u_n \geqslant k^{n-N} u_N$ pour tout $n \geqslant N$. En particulier, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ et a fortiori ne converge pas vers 0. Ainsi $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.
3. Posons $u_n = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge. Posons $u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.
4. Posons $u_n = \frac{n!}{n^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ est à termes strictement positifs et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. On prouve alors classiquement que $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge.

Solution 22.

1. Si $\beta \geqslant 0$, alors $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$ pour $n \geqslant 3$. Or la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge puisque $\alpha > 1$. On en déduit que $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ converge.

Si $\beta < 0$, donnons-nous $\gamma \in]1, \alpha[$. Alors $(\ln n)^{-\beta} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^{\alpha-\gamma}\right)$ par croissances comparées. Ceci signifie que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$. Or la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\gamma}$ est à termes positifs et converge puisque $\gamma > 1$. On en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

2. Si $\beta \leqslant 0$, alors $0 \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant u_n$ pour $n \geqslant 3$. Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

Si $\beta > 0$, donnons-nous $\gamma \in]\alpha, 1[$. Alors $(\ln n)^{\beta} \underset{n\to+\infty}{=} o(n^{\gamma-\alpha})$ par croissances comparées. Ceci signifie que $\frac{1}{n^\gamma} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$. Or la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est à termes positifs et la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\gamma}$ diverge puisque $\gamma < 1$. On en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

3. On a alors $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant u_n$ pour $n \geqslant 3$. Or la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. On en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

4. Posons $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ pour $x > 1$. f est décroissante sur $]1, +\infty[$ de sorte que

$$\int_2^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=2}^n u_k \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^\beta} + \int_2^n f(x)\,dx$$

Si $\beta \neq 1$, alors $x \mapsto \frac{(\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta}$ est une primitive de f de sorte que

$$\frac{(\ln(n+1))^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta} \leqslant \sum_{k=2}^n u_k \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^\beta} + \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta}$$

Le théorème de minoration nous permet d'affirmer que la série $\sum u_n$ diverge si $\beta < 1$. Par contre, si $\beta > 1$, la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ est croissante (puisque la série est à termes positifs) et majorée par une suite convergente donc elle converge en vertu du théorème de la limite monotone. On peut donc affirmer que $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

Si $\beta = 1$, alors $x \mapsto \ln(\ln x)$ est une primitive de f de sorte que

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leqslant \sum_{k=2}^n u_k$$

On conclut à la divergence de $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ via le théorème de minoration.

Solution 23.

1. Soit $q \in]l, 1[$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \sqrt[n]{u_n} \leqslant q$ pour $n \geqslant N$. Ainsi $0 \leqslant u_n \leqslant q^n$ pour $n \geqslant N$. Puisque la série $\sum q^n$ converge, il en est de même de la série $\sum u_n$.

2. Soit $q \in]1, l[$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant q \leqslant \sqrt[n]{u_n}$ pour $n \geqslant N$. Ainsi $0 \leqslant q^n \leqslant u_n$ pour $n \geqslant N$. Puisque la série $\sum q^n$ diverge, il en est de même de la série $\sum u_n$.

3. Posons $u_n = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ et $\sum u_n$ diverge.

Posons $u_n = \frac{1}{n^2}$. Alors $\sqrt[n]{u_n} = \exp\left(-\frac{2\ln n}{n}\right)$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ et $\sum u_n$ converge.

Solution 24.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geqslant 0$$

et

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leqslant 0$$

Ainsi la suite (S_{2n-1}) est croissante et la suite (S_{2n}) est décroissante. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_{2n} - S_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} - S_{2n-1} = 0$. Les suites (S_{2n-1}) et (S_{2n}) sont donc adjacentes. Elles convergent vers la même limite, ce qui assure la convergence de la suite (S_n) et donc de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Solution 25.

1. Supposons que $\sum u_n$ converge. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Il s'ensuit que $u_n = o(1)$ et donc $u_n^2 = o(u_n)$. Puisque $\sum u_n$ est à termes positifs et converge, $\sum u_n^2$ converge également.
   La réciproque est fausse puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge mais pas $\sum \frac{1}{n}$.
2. Il suffit de poser $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Solution 26.

(S_{2n}) est décroissante car

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$$

(S_{2n+1}) est croissante car

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geqslant 0$$

De plus

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Aussi les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont-elles adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite, ce qui entraîne la convergence de la suite (S_n), c'est-à-dire de la série $\sum (-1)^n u_n$.

Solution 27.

1. On sait que $\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \mathcal{O}(x^2)$ donc $\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge et est à termes positifs, il en est de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$.
2. Puisque $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$,

$$\sqrt[n]{3} = e^{\frac{\ln 3}{n}} = 1 + \frac{\ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   et

$$\sqrt[n]{2} = e^{\frac{\ln 2}{n}} = 1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   On en déduit que

$$\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2} \sim \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{n}$$

   Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}\right)$.

3. Puisque $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

De plus, $\ln(1+u)\underset{u\to 0}{\sim} u$ donc

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\sim-\frac{1}{2n}$$

Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

4. Puisque $\operatorname{ch} x \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4)$

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right)=1+\frac{1}{6n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisque $\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\mathcal{O}(x^5)$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}=1+\frac{1}{6n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right)-\operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ converge et est à termes positifs, il en est de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right)-\operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}\right)$.

Solution 28.

On posera $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha>1$.

- Supposons $\alpha\leqslant 0$. Par comparaison à une intégrale

$$\int_0^n\frac{dt}{t^\alpha}\leqslant S_n\leqslant\int_1^{n+1}\frac{dt}{t^\alpha}$$

ou encore

$$\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\leqslant S_n\leqslant\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}$$

On en déduit $S_n\sim\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

- Supposons $0<\alpha\leqslant 1$. Par comparaison à une intégrale

$$\int_1^{n+1}\frac{dt}{t^\alpha}\leqslant S_n\leqslant 1+\int_1^n\frac{dt}{t^\alpha}$$

Si $0<\alpha<1$, on en déduit

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\leqslant S_n\leqslant 1+\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}$$

On en déduit à nouveau $S_n\sim\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
Si $\alpha=1$,

$$\ln(n+1)\leqslant S_n\leqslant 1+\ln n$$

et donc $S_n\sim\ln n$.

► Supposons $\alpha > 1$. On compare à nouveau à une intégrale. Pour des entiers n et N tels que $1 \leqslant n < N$

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}$$

ou encore

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right)$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

On en déduit que $R_n \sim \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Solution 29.

Remarquons que S_n est la somme partielle de rang n de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$. Puisque $\frac{1}{n^2+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^2}$ et que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$ converge vers un réel C. En notant R_n le reste de rang n de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$, on a $S_n = C - R_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\frac{1}{k^2+\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^2}$, $R_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Une comparaison à une intégrale montre que $R_n \sim \frac{1}{n}$ d'où le résultat annoncé.

Solution 30.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a évidemment $u_n = \sum_{k=1}^n \ln k$. La fonction $\ln$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\int_1^n \ln(t)\,dt \leqslant u_n \leqslant \int_1^{n+1} \ln(t)\,dt$$

ou encore

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant u_n \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n$$

On a clairement $1 = o(n\ln n)$, $n = o(n\ln n)$ donc $n\ln n - n + 1 \sim n\ln n$.
De plus,

$$(n+1)\ln(n+1) - n = n\ln n + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n$$

On a clairement $n = o(n\ln n)$ et $\ln n = o(n\ln n)$.
Par ailleurs, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = o(n\ln n)$.
On en déduit également que $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = o(n)$ et a fortiori $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = o(n\ln n)$.
Finalement, $(n+1)\ln(n+1) - n \sim n\ln n$.
Le théorème des gendarmes assure alors que $u_n \sim n\ln n$.

2. D'après la question précédente, $\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{1}{n^2(\ln n)^2}$. On en déduit par exemple que $\frac{1}{u_n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ce qui assure la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{u_n^2}$.

3. Soit $(x,y) \in]1,+\infty[$ tel que $x \leqslant y$. Alors $0 <\leqslant \ln x \leqslant \ln y$ donc $0\frac{1}{\ln y} \leqslant \frac{1}{\ln x}$. Puisque $0 < \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}$, on en déduit que $0 \leqslant f(y) \leqslant f(x)$.
Ainsi f est décroissante sur $]1,+\infty[$.

4. Soit $n \geqslant 2$. Puisque la fonction f est décroissante sur $]1,+\infty[$

$$\int_2^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k)$$

ou encore

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{u_k}$$

Par théorème de minoration, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{u_n}$ diverge (vers $+\infty$).

SOLUTION 31.

Comme $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$, on a pour $k \in \mathbb{N}$ et pour $x = \dfrac{\alpha}{2^k}$:

$$\cos\frac{\alpha}{2^k} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2\sin\frac{\alpha}{2^k}} = \frac{u_{k-1}}{u_k}$$

avec $u_k = 2^k \sin\dfrac{\alpha}{2^k}$.
Notons S_n la somme partielle de la série de l'énoncé. On a donc par télescopage :

$$S_n = \ln u_{-1} - \ln u_n$$

Or $\ln u_{-1} = \ln\dfrac{\sin 2\alpha}{2}$. De plus, comme $\sin\dfrac{\alpha}{2^n} \sim \dfrac{\alpha}{2^n}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = \ln \alpha$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)$ converge et que sa somme vaut $\ln\left(\dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$.

SOLUTION 32.

On a

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_p} \sum_{n\geqslant 0} \frac{\omega^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\sum_{\omega\in\mathbb{U}_p} \omega^n}{n!}$$

puisque les séries intervenant dans cette égalité convergent. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'endomorphisme de groupes $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{U}_p & \longrightarrow & \mathbb{U}_p \\ \omega & \longmapsto & \omega^n \end{array}\right.$ est un automorphisme *si et seulement si* n est premier avec p autrement dit *si et seulement si* p ne divise pas n (puisque p est premier). De plus, on sait que la somme des racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité est nulle. Donc pour n non multiple de p, $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_p} \omega^n = 0$ et pour n multiple de p, $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_p} \omega^n = p$. Finalement,

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_p} \sum_{n\geqslant 0} \frac{\omega^n}{n!} = p \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(pn)!}$$

Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\omega^n}{n!} = e^{\omega}$. Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(pn)!} = \frac{1}{p} \sum_{\omega\in\mathbb{U}_p} e^{\omega}$.

SOLUTION 33.

Considérons la fraction rationnelle $F = \dfrac{X}{X^4 + X^2 + 1}$. Elle admet une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ du type

$$F = \frac{aX + b}{X^2 - X + 1} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1}$$

L'imparité de F donne $a = c$ et $b = -d$. En considérant la limite de $xF(x)$ lorsque x tend vers $\pm\infty$, on trouve $a + c = 0$ et donc $a = c = 0$. On trouve alors facilement $b = \frac{1}{2}$ et $d = -\frac{1}{2}$ d'où

$$F = \frac{1}{2(X^2 - X + 1)} - \frac{1}{2(X^2 + X + 1)}$$

On remarque alors que $X^2 - X + 1 = X^2 - (X - 1)$ et que $X^2 + X + 1 = (X + 1)^2 - X$. Ainsi pour $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{p} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n^2 - (n - 1)} - \frac{1}{(n + 1)^2 - n} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{(p + 1)^2 - p}\right) \text{ par télescopage} \\
&\underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi la série de l'énoncé converge bien et sa somme vaut $\frac{1}{2}$.

Solution 34.

La fraction rationnelle $F = \dfrac{2X - 1}{X^3 - 4X}$ admet une décomposition en éléments simples du type

$$F = \frac{a}{X - 2} + \frac{b}{X} + \frac{c}{X + 2}$$

En posant $P = 2X - 1$ et $Q = X^3 - 4X$, on a

$$\begin{aligned}
a &= \frac{P(2)}{Q'(2)} = \frac{3}{8} \\
b &= \frac{P(0)}{Q'(0)} = \frac{1}{4} \\
c &= \frac{P(-2)}{Q'(-2)} = -\frac{5}{8}
\end{aligned}$$

Pour $p \geqslant 3$, on a en remarquant que $\frac{1}{4} = \frac{5}{8} - \frac{3}{8}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{p} \frac{2n - 1}{n^3 - 4n} &= \frac{3}{8} \sum_{n=3}^{p} \left(\frac{1}{n - 2} - \frac{1}{n}\right) + \frac{5}{8} \sum_{n=3}^{p} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + 2}\right) \\
&= \frac{3}{8}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p - 1} - \frac{1}{p}\right) + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{p + 1} - \frac{1}{p + 2}\right) \text{ par télescopage} \\
&\underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{89}{96}
\end{aligned}$$

Ainsi la série de l'énoncé converge et sa somme vaut $\frac{89}{96}$.

Solution 35.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\binom{n+p}{n}} &= \frac{p!}{(n + p)(n + p - 1) \dots (n + 1)} \\
&= \frac{p!}{p - 1} \frac{(n + p) - (n + 1)}{(n + p)(n + p - 1) \dots (n + 1)} \\
&= \frac{p!}{p - 1}\left(\frac{1}{(n + p - 1) \dots (n + 1)} - \frac{1}{(n + p) \dots (n + 2)}\right)
\end{aligned}$$

Donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a par télescopage

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\binom{n+p}{n}} &= \frac{p!}{p-1} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{(n+p-1)\dots(n+1)} - \frac{1}{(n+p)\dots(n+2)} \right) \\ &= \frac{p!}{p-1} \left(\frac{1}{(p-1)\dots 1} - \frac{1}{(N+p)\dots(N+2)} \right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{p!}{(p-1)(p-1)!} = \frac{p}{p-1}\end{aligned}$$

Ainsi la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$ converge et sa somme vaut $\frac{p}{p-1}$.

Solution 36.

1. On reconnaît le développement de Taylor en 0 de exp.
   Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, a fortiori, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment d'extrémités 0 et x. De plus, la dérivée d'ordre $n+1$ de exp est encore exp pour tout t compris entre 0 et x, $|e^t| = e^t \leqslant M$ avec $M = \max(e^x, 1)$ (pour éviter de distinguer suivant le signe de x). En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et x à l'ordre n, on a

   $$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

   Remarquons que M est indépendant de n donc l'inégalité précédente est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par comparaison des suites de référence, $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$ par encadrement. La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge donc et sa somme est e^x.

2. On reconnaît les développements de Taylor en 0 de cos et sin.
   Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. cos et sin sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, a fortiori, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment d'extrémités 0 et x. Une récurrence évidente montre que $\cos^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin$ et $\sin^{(2n+2)} = (-1)^{n+1} \sin$. Il est alors évident que $\cos^{(2n+1)}$ et $\sin^{(2n+2)}$ sont majorées en valeur absolue par 1 sur $\mathbb{R}$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à cos entre 0 et x à l'ordre $2n$, on a

   $$\left| \cos x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

   En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à sin entre 0 et x à l'ordre $2n+1$, on a

   $$\left| \sin x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

   Par comparaison des suites de référence,

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0$$

   Ceci permet de conclure que les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ convergent et ont respectivement pour sommes $\cos x$ et $\sin x$. **Remarque.** On peut, en reprenant la preuve de la première question, montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$ converge et a pour somme e^{ix}. On obtient la convergence et la somme des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ en passant à la partie réelle et imaginaire.

3. On reconnaît le développement de Taylor en0 de $x \mapsto \ln(1+x)$.
   Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. $f : t \mapsto \ln(1+t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ donc, a fortiori, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0,x]$. Une récurrence évidente montre que $f^{(n+1)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}$ pour tout $t \in]-1,+\infty[$. Ainsi pour tout $t \in [0,x]$,

   $$|f^{(n+1)}(t)| \leqslant n!$$

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et x à l'ordre n, on a

$$\left|\ln(1+x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| \leqslant \frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!}=\frac{x^{n+1}}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}$$

car $x\in[0,1]$. Par encadrement, $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}=\ln(1+x)$. La série $\sum_{n\geqslant1}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ converge donc et sa somme vaut $\ln(1+x)$.

Solution 37.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^x t^{k-1}\,dt\\&=\int_0^x\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k\,dt\\&=\int_0^x\frac{1-(-t)^n}{1+t}\,dt\\&=\int_0^x\frac{dt}{1+t}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,dt\\&=\ln(1+x)+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,dt\end{aligned}$$

Si x est positif, on a pour tout $t\in[0,x]$

$$0\leqslant\frac{t^n}{1+t}\leqslant t^n$$

et par croissance de l'intégrale

$$0\leqslant\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,dt\leqslant\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,dt=0$ puis

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}=\ln(1+x)$$

On en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ converge et que sa somme est $\ln(1+x)$.
Supposons maintenant $x\leqslant0$. Remarquons que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}=\ln(1+x)-\int_0^x\frac{(-t)^n}{1+t}\,dt$$

Puis en effectuant le changement de variables $u=-t$ (pour se ramener à une variable d'intégration positive et s'éviter des maux de tête)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}=\ln(1+x)+\int_0^{-x}\frac{u^n}{1-u}\,du$$

Pour tout $u\in[0,-x]$

$$1\leqslant\frac{1}{1-u}\leqslant\frac{1}{1+x}$$

Par croissance de l'intégrale

$$\int_0^{-x}u^n\,du\leqslant\int_0^{-x}\frac{u^n}{1-u}\,du\leqslant\frac{1}{1+x}\int_0^{-x}u^n\,du$$

ou encore

$$\frac{(-x)^{n+1}}{n+1}\leqslant\int_0^{-x}\frac{u^n}{1-u}\,du\leqslant\frac{1}{1+x}\frac{(-x)^{n+1}}{n+1}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{-x} \frac{u^n}{1-u}\,dt = 0$ puis

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = \ln(1+x)$$

On en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ converge et que sa somme est $\ln(1+x)$.

Solution 38.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1}\,dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \\
&= \ln(1+x) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt
\end{aligned}$$

On a pour tout $t \in [0,1]$

$$0 \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$$

et par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt = 0$ puis

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = \ln(1+x)$$

On en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et que sa somme est $\ln(1+x)$.

Solution 39.

1. Il s'agit bien évidemment du lemme de Riemann-Lebesgue. Le plus simple est de passer en complexes afin de faire d'une pierre deux coups. Par intégration par parties, pour tout $\lambda \neq 0$

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}\left(f(b)e^{i\lambda b} - f(a)e^{i\lambda a}\right) - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)e^{i\lambda t}\,dt$$

Pour tout $\lambda > 0$

$$\left|\frac{f(a)e^{i\lambda a}}{\lambda}\right| = \frac{|f(a)|}{\lambda} \qquad \left|\frac{f(b)e^{i\lambda b}}{\lambda}\right| = \frac{|f(b)|}{\lambda}$$

On en déduit que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{f(a)e^{i\lambda a}}{\lambda} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{f(b)e^{i\lambda b}}{\lambda} = 0$$

Enfin par inégalité triangulaire, pour tout $\lambda > 0$,

$$\left|\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(t)|\,dt$$

On en déduit que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t)e^{i\lambda t}\, dt = 0$$

Par suite

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\, dt = 0$$

Puisque f est à valeurs réelles, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Re}\left(\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\, dt\right) = I(\lambda) \qquad \operatorname{Im}\left(\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\, dt\right) = J(\lambda)$$

On en déduit les limites demandées.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient par intégration par parties

$$\int_0^\pi x\cos(nx)\, dx = \frac{-1+(-1)^n}{n^2}$$

puis

$$\int_0^\pi x^2\cos(nx)\, dx = \frac{2(-1)^n\pi}{n^2}$$

Il suffit donc de choisir $u = -1$ et $v = \frac{1}{2\pi}$ pour avoir

$$\int_0^\pi (ux+vx^2)\cos(nx)\, dx = \frac{1}{n^2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Soit $x \in]0, \pi]$. Puisqu'alors $e^{ix} \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{ix}\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\frac{e^{\frac{inx}{2}}-e^{-\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\left(\sin\frac{x}{2}\right)}$$

En passant à la partie réelle, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\left(\sin\frac{x}{2}\right)}$$

Puisque

$$2\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right) = \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}+\frac{nx}{2}\right) - \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}-\frac{nx}{2}\right) = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

on obtient bien la relation demandée.

4. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ en tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
De plus, $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 2$ car $\sin\frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$.
Par ailleurs, pour tout $x \in]0, \pi]$,

$$\varphi'(x) = \frac{\sin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

Or $\sin\frac{x}{2} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} + o(x^2)$ et $\cos\frac{x}{2} \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x)$ donc

$$\sin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$$

Puisque $\sin^2\frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{4}$, $\varphi'(x) \underset{x\to 0}{=} o(1)$ et donc $\lim_{x\to 0} \varphi'(x) = 0$.
D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, φ admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En notant u et v les réels déterminés à la question **2**, on a d'après cette même question

$$S_n = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi (ux + vx^2)\cos(kx)\,dx = \int_0^\pi (u+vx)x \sum_{k=1}^n \cos(kx)\,dx$$

On notera encore φ le prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ de φ déterminé à la question **4**. Remarquons que les fonctions $x \mapsto x\sum_{k=1}^n \cos(kx)$ et $x \mapsto \frac{1}{2}\varphi(x)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \frac{x}{2}$ coïncident sur $]0,\pi]$ d'après la question **3**. Puisqu'elles sont toutes les deux continues sur $[0,\pi]$ et donc en 0, elles coïncident sur $[0,\pi]$ en considérant leurs limites en 0. Ainsi

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^\pi (u+vx)\left(\frac{1}{2}\varphi(x)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \frac{x}{2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi (u+vx)\varphi(x)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi (ux+vx^2)\,dx \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto (u+vx)\varphi(x)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, on peut appliquer la question **1** pour affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi (u+vx)\varphi(x)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)dx = 0$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = -\frac{1}{2}\int_0^\pi (ux+vx^2)\,dx = -\frac{u\pi^2}{4} - \frac{v\pi^3}{6} = \frac{\pi^2}{6}$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

6. On constate qu'en prenant $u = 0$ et $v = -\frac{1}{2\pi}$, on a

$$\int_0^\pi (ux+vx^2)\cos(nx)\,dx = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Le même raisonnement que précédemment montre que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge et que sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = -\frac{u\pi^2}{4} - \frac{v\pi^3}{6} = \frac{\pi^2}{12}$$

On constate qu'en prenant $u = -\frac{1}{2}$ et $v = 0$, on a

$$\int_0^\pi (ux+vx^2)\cos(nx)\,dx = \frac{1-(-1)^n}{n^2}$$

En particulier,

$$\int_0^\pi (ux+vx^2)\cos((2n-1)x)\,dx = \frac{1}{(2n-1)^2} \qquad \int_0^\pi (ux+vx^2)\cos(2nx)\,dx = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Le même raisonnement que précédemment montre que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n-1)^2}$ converge et que sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = -\frac{u\pi^2}{4} - \frac{v\pi^3}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

Solution 40.

Notons u_n le terme général de la série étudiée. Puisque $u_n \sim 1/n^2$, la série $\sum u_n$ est clairement convergente. On remarque que, pour tout réel $x > 0$:

$$\frac{1}{x^2+3x} = \frac{1}{3x} - \frac{1}{3(x+3)}.$$

Il y a donc télescopage dans les sommes partielles de $\sum u_n$ qui converge et dont la somme vaut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}.$$

Solution 41.

Pour tout $n \geqslant 0$, on a par croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction arctangente de 0 à $\pi/2$:

$$\alpha_n = \arctan(n+1) - \arctan(n) \in [0, \pi/2[.$$

De plus,

$$\tan(\alpha_n) = \frac{n+n-n}{1+n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n+1}$$

et ainsi

$$\alpha_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right).$$

Il y donc télescopage dans les sommes partielles de $\sum u_n$ qui converge et dont la somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{\pi}{2}.$$

Solution 42.

Puisque $0 \leqslant p(n) \leqslant \log_{10} n + 1$ pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{p(n)}{n(n+1)} = \mathcal{O}\left(\frac{9}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

et la série de l'énoncé est convergente. On remarque que, pour tout m dans $\mathbb{N}^*$, on a $p(n) = m$ *si et seulement si* $10^{m-1} \leqslant n < 10^m$. Notons $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de sommes partielles de la série de l'énoncé. On sait que $(S_{10^m-1})_{m\geqslant 1}$ converge vers la même limite que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ en tant que suite extraite. Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p(n)}{n(n+1)} = \lim_{m\to+\infty} S_{10^m-1}.$$

Or, pour tout $m \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
S_{10^m-1} &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=10^{k-1}}^{10^k-1} \frac{p(\ell)}{\ell(\ell+1)} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=10^{k-1}}^{10^k-1} \frac{k}{\ell(\ell+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{m} k \sum_{\ell=10^{k-1}}^{10^k-1} \left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} k\left(\frac{1}{10^{k-1}} - \frac{1}{10^k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{10^{k-1}} - \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{10^k} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{k-1+1}{10^{k-1}} - \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{10^k} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{10^{k-1}} - \frac{m}{10^m} = \frac{1-1/10^m}{1-1/10} - \frac{m}{10^m} \\
&= \frac{10}{9}(1-10^{-m}) - \frac{m}{10^m}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{m\to+\infty} S_{10^m-1} = \frac{10}{9}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p(n)}{n(n+1)} = \frac{10}{9}.$$

Solution 43.

- La série est clairement alternée de terme général convergeant vers 0 : elle est donc convergente.
- Soit $n \geqslant 1$. Notons $(\Sigma_n)_{n\geqslant 2}$ la suite des sommes partielles de cette série et posons, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

  $$S_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \ln(k).$$

  On a, après tout calcul

  $$\begin{aligned}\Sigma_{2n} &= \sum_{k=2}^{2n} (-1)^k[\ln(k+1)+\ln(k-1)-2\ln(k)]\\ &= -4S_{2n} + \ln(2n(2n+1))\\ &= -4\ln\left(\frac{2\times 4\times\cdots\times(2n)}{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}\right) + \ln(2n(2n+1))\\ &= \ln\left(\frac{2n(2n+1)(2n)!^4}{2^{8n}n!^8}\right)\end{aligned}$$

  En utilisant l'équivalent de Stirling

  $$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

  on trouve que

  $$\frac{2n(2n+1)(2n)!^4}{2^{8n}n!^8} \sim \frac{4n^2(2\pi\times 2n)^2(\frac{2n}{e})^{8n}}{2^{8n}(2\pi\times n)^4(\frac{n}{e})^{8n}} \sim \frac{4}{\pi^2}$$

  et donc, par continuité du logarithme, on a

  $$\lim_{n\to+\infty} \Sigma_{2n} = \ln\left(\frac{4}{\pi^2}\right),$$

  et, puisque la série converge, on a

  $$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{4}{\pi^2}\right).$$

Solution 44.

La série

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \ln(1+1/n)$$

est clairement alternée. Comme

$$(\ln(1+1/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$$

tend vers 0 en décroissant, on déduit du critère spécial des séries alternées que la série converge. Notons $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des sommes partielles de cette série. Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right) = -\sum_{k=0}^{n-1} [\ln(2k+2)-\ln(2k+1)] + \sum_{k=1}^{n} [\ln(2k+1)-\ln(2k)] \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \ln(2k+2) - \sum_{k=1}^{n} \ln(2k) + \sum_{k=1}^{n} \ln(2k+1) + \sum_{k=0}^{n-1} \ln(2k+1) \\
&= -2\sum_{k=1}^{n} \ln(2k) + 2\sum_{k=0}^{n-1} \ln(2k+1) + \ln(2n+1) \\
&= \ln\left(\left[\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\right]^2 (2n+1)\right) = \ln\left(\left[\frac{(2n)!}{(2\times 4\times\cdots\times(2n))^2}\right]^2 (2n+1)\right) \\
&= \ln\left(\left[\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\right]^2 (2n+1)\right) = \ln\left(\frac{(2n)!^2}{2^{4n} n!^4}(2n+1)\right)
\end{aligned}$$

Or, d'après la formule de Stirling, on sait que

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

d'où

$$\frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}2^{2n}(n/e)^{2n}}{2^{2n}2\pi n(n/e)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

et donc

$$\frac{(2n)!^2}{2^{4n}n!^4}(2n+1) \sim \frac{2n}{n\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

On déduit alors de la continuité du logarithme que

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

puis de la convergence de la série que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right).$$

Solution 45.

Posons $v_0 = 1$ et, pour tout $k \geqslant 1$

$$v_k = \frac{\sqrt{k!}}{(1+\sqrt{1})\cdots(1+\sqrt{k})}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on a clairement

$$u_n = v_{n-1} - v_n.$$

Ainsi, en notant $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, on obtient après telescopage

$$S_n = v_0 - v_n = 1 - v_n.$$

De plus, on a

$$v_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}$$

et donc

$$-\ln(v_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

Comme

$$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$$

et que $\sum k^{-1/2}$ diverge vers $+\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} -\ln(v_n) = +\infty$$

et, par composition des limites,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0.$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1.$$

Solution 46.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Notons $f_x(t) = \dfrac{t-[t]}{t(t+x)}$. Comme $x > 0$, $t(t+x)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $]0, y]$. De plus, pour $0 \leqslant t < 1$, $[t] = 0$ et donc
$$\lim_{t\to0^+} \frac{t-[t]}{t(t+x)} = \lim_{t\to0^+} \frac{1}{t+x} = \frac{1}{x}$$
Enfin, la fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f_x est continue par morceaux sur $[0, y]$ et l'intégrale $G(x, y)$ est bien définie pour tout $(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction f_x est positive sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $y \mapsto G(x, y)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Il suffit donc maintenant de prouver que cette fonction est majorée. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $t - [t] < 1$ et $t(t+x) \geqslant t^2$ donc $f_x(t) \leqslant \frac{1}{t^2}$. On peut supposer $y \geqslant 1$. Séparons l'intégrale définissant $G(x, y)$ en deux parties pour éviter les problèmes en 0 :
$$G(x,y) = \int_0^1 f_x(t)\,dt + \int_1^y f_x(t)\,dt \leqslant \int_0^1 f_x(t)\,dt + \int_1^y \frac{dt}{t^2} \leqslant \int_0^1 f_x(t)\,dt + 1 - \frac{1}{y} \leqslant \int_0^1 f_x(t)\,dt + 1$$
Ainsi $y \mapsto G(x, y)$ est croissante est majorée, elle admet donc une limite finie en $+\infty$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a classiquement $\dfrac{1}{t(t+n)} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+n}\right)$. On en déduit que
$$G(n,y) = \frac{1}{n}\left(\int_0^y \frac{t-[t]}{t}\,dt - \int_0^y \frac{t-[t]}{t+n}\,dt\right)$$
On peut effectuer le changement de variable $u = t+n$ dans la seconde intégrale. Comme n est entier $[t] = [u-n] = [u]-n$ et donc $t - [t] = u - [u]$. On a donc
$$\int_0^y \frac{t-[t]}{t+n}\,dt = \int_n^{y+n} \frac{u-[u]}{u}\,du$$
On a alors
$$G(n,y) = \frac{1}{n}\left(\int_0^y \frac{t-[t]}{t}\,dt - \int_n^{y+n} \frac{t-[t]}{t}\,dt\right)$$
On utilise la relation de Chasles :
$$\int_0^y \frac{t-[t]}{t}\,dt = \int_0^n \frac{t-[t]}{t}\,dt + \int_n^y \frac{t-[t]}{t}\,dt \qquad \int_n^{y+n} \frac{t-[t]}{t}\,dt = \int_n^y \frac{t-[t]}{t}\,dt + \int_y^{y+n} \frac{t-[t]}{t}\,dt$$
Après simplification, on a la relation demandée.

4. Déterminons tout d'abord une expression de $G(n)$. Remarquons que

$$0 \leqslant \int_y^{y+n} \frac{t-[t]}{t}\,dt \leqslant \int_y y+n\frac{1}{y}\,dt = \frac{n}{y}$$

On en déduit que $\lim_{y\to+\infty} \int_y^{y+n} \frac{t-[t]}{t}\,dt = 0$. Ainsi $G(n) = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{t-[t]}{t}\,dt$ et $H(n) = \int_0^n \frac{t-[t]}{t}\,dt$. On a donc

$$H(n) - H(n-1) = \int_{n-1}^n \frac{t-[t]}{t}\,dt$$

On effectue le changement de variables $u = t-(n-1)$ de sorte que

$$H(n) - H(n-1) = \int_0^1 \frac{u-[u]}{u+n-1}\,dt = \int_0^1 \frac{u}{u+n-1}$$

car $[u] = 0$ pour $0 \leqslant u < 1$. On obtient alors facilement

$$H(n) - H(n-1) = 1 - (n-1)\ln\frac{n-1}{n} = 1 - (n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

On va maintenant chercher un équivalent de $H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n}$.

$$\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2(n-1)^2} + \frac{1}{3(n-1)^3} + o\left(\frac{1}{(n-1)^3}\right)$$

On en déduit que

$$H(n) - H(n-1) = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{3(n-1)^2} + o\left(\frac{1}{(n-1)^2}\right)$$

Or $\frac{1}{2(n-1)} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\frac{1}{(n-1)^2} \sim \frac{1}{n^2}$. Finalement,

$$H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n} = \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{6n^2}$ converge, on a également convergence de la série de terme général $H(n)-H(n-1)-\frac{1}{2n}$. Notons (S_n) la suite des sommes partielles de cette série i.e.

$$S_n = \sum_{k=2}^n H(k) - H(k-1) - \frac{1}{2k}$$

On a par téléscopage $S_n = H(n) - H(1) - \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k}$. Comme (S_n) est bornée et que $\sum_{k=2}^n \frac{1}{2k} \sim \frac{1}{2}\ln n$ tend vers $+\infty$, on en déduit que $H(n) \sim \frac{1}{2}\ln n$. Ainsi $G(n) \sim \frac{1}{n\ln n}$.

Solution 47.

1. **Définition**
On définit deux suites (q_n) et (a_n) par récurrence. On pose $a_0 = x$ et pour $n \in \mathbb{N}$

$$q_n = \left\lfloor \frac{1}{a_n} \right\rfloor + 1 \qquad\qquad a_{n+1} = q_n a_n - 1$$

Il faut vérifier que ces deux suites sont bien définies. Nous démontrerons en même temps que (q_n) est une suite d'entiers supérieurs ou égaux à 2. Faisons l'hypothèse de récurrence suivante :

HR(n) : a_n et q_n sont définis, $q_n a_n > 1$, $0 < a_n \leqslant 1$ et $q_n \geqslant 2$.

Initialisation : a_0 est bien définie et comme $a_0 = x > 0$, q_0 est bien défini et c'est clairement un entier. De plus, $\frac{1}{a_0} < q_0 \leqslant \frac{1}{a_0} + 1$ donc $a_0 q_0 > 1$. D'après l'énoncé $a_0 = x \in]0,1]$. On en déduit également que $\frac{1}{a_0} \geqslant 1$ et donc, par croissance de la partie entière, $q_0 \geqslant 2$.
Hérédité : Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$. a_{n+1} est bien défini puisque a_n et q_n le sont. De plus, $a_{n+1} = q_n a_n - 1 > 0$ donc q_{n+1} est bien défini et c'est clairement un entier. Par ailleurs, $\frac{1}{a_{n+1}} < q_{n+1} \leqslant \frac{1}{a_{n+1}} + 1$ donc $q_{n+1} a_{n+1} > 1$. On sait également que $\frac{1}{a_n} < q_n \leqslant \frac{1}{a_n} + 1$ donc $q_n a_n \leqslant a_n + 1$ puis $a_{n+1} = q_n a_n - 1 \leqslant a_n \leqslant 1$.
Conclusion : $\mathrm{HR}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En reprenant une partie de la récurrence, on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{a_n} < q_n \leqslant \frac{1}{a_n} + 1$ implique que $q_n a_n \leqslant a_n + 1$ et donc que $a_{n+1} = q_n a_n - 1 \leqslant a_n$. La suite (a_n) est une suite décroissante de réels strictement positifs donc la suite $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ est croissante. Par croissance de la partie entière, la suite (q_n) est croissante.

Reste à montrer qu'on a bien $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n}$. Montrons par récurrence que

$$x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_k} + \frac{a_{n+1}}{q_0 q_1 \dots q_n}$$

Puisque $a_1 = q_0 a_0 + 1$, $x = a_0 = \frac{1}{q_0} + \frac{a_1}{q_0}$, ce qui initialise la récurrence. Supposons alors que $x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_k} + \frac{a_{n+1}}{q_0 q_1 \dots q_n}$. Puisque $a_{n+2} = q_{n+1} a_{n+1} - 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{q_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{q_{n+1}}$ et donc

$$x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_k} + \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n q_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{q_0 q_1 \dots q_n q_{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_k} + \frac{a_{n+2}}{q_0 q_1 \dots q_n q_{n+1}}$$

L'hérédité est donc prouvée.
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n \geqslant 2$ et $0 \leqslant a_n \leqslant 1$, on a $0 \leqslant \frac{a_{n+1}}{q_0 q_1 \dots q_n} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$. Ceci prouve que $\frac{a_{n+1}}{q_0 q_1 \dots q_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$.

Unicité

Supposons qu'il existe une suite croissante d'entiers supérieurs ou égaux à 2 (q_n) telle que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{q_n q_{n+1} \dots q_k}$. Cette somme est bien convergente puisque pour $k \geqslant n$, $\frac{1}{q_n q_{n+1} \dots q_k} \leqslant \frac{1}{2^{k-n+1}}$ et que la série $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-n+1}}$ converge. On remarque que $a_{n+1} = q_n a_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, comme (q_n) est croissante, on a $a_{n+1} \leqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin, $q_n = \frac{1}{a_n} + \frac{a_{n+1}}{a_n}$ et donc $\frac{1}{a_n} < q_n \leqslant \frac{1}{a_n} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $q_n = \left\lfloor \frac{1}{a_n} \right\rfloor + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi les suites (q_n) et (a_n) vérifient $a_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$q_n = \left\lfloor \frac{1}{a_n} \right\rfloor + 1 \qquad\qquad a_{n+1} = q_n a_n - 1$$

Ceci détermine la suite (q_n) de manière unique.

2. Supposons la suite (q_n) constante égale à C à partir du rang N.

$$\begin{aligned}
x = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n} + \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_{N-1} C^{n-N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n} + \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_{N-1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{C^n} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n} + \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_{N-1}} \frac{C}{C-1}
\end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit bien que x est rationnel.
Supposons maintenant x rationnel. Il existe donc $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{p}{q}$. On garde les notations de la question

précédente. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier p_n tel que $a_n = \frac{p_n}{q}$. L'initialisation est claire puisque $a_0 = x = \frac{p}{q}$: il suffit donc de poser $p_0 = p$. Supposons maintenant que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier p_n tel que $a_n = \frac{p_n}{q}$. On a alors $a_{n+1} = q_n a_n - 1 = \frac{p_{n+1}}{q}$ avec $p_{n+1} = q_n p_n - q$, ce qui achève la récurrence. D'après la première question, (a_n) est une suite décroissante de réels strictements positifs : on en déduit que (p_n) est une suite décroissante d'entiers naturels (non nuls). La suite (p_n) est donc stationnaire. Il en est de même de la suite (a_n) puis de la suite (q_n) puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n = \left\lfloor \frac{1}{a_n} \right\rfloor + 1$.

3. Posons $x = e - 2$ de sorte que $x \in]0, 1]$. On sait que $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!}$. Si on pose $q_n = n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, (q_n) est bien croissante et on a bien $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n}$. La suite (q_n) n'étant pas stationnaire, x n'est pas rationnel d'après la question précédente.

Solution 48.

On prouve aisément par récurrence que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$ et donc que $u_{n+1} - u_n = \mathcal{O}(k^n)$. Puisque $k \in [0, 1[$, la série télescopique $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n+1} - u_n$ converge i.e. la suite u converge.