Devoir à la maison n°13

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 Tout d'abord ψ est continue sur I. De plus, $\psi(u) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{u^{1/2}}$ et $1/2 < 1$ donc ψ est intégrable en 0^+. Enfin, $\psi(u) \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{-u})$ donc ψ est intégrable en $+\infty$.
Finalement, ψ est bien intégrable sur I.

2 Posons $\varphi(x,u) = \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$. Remarquons déjà que l'application $u \mapsto \varphi(x,u)$ n'est définie sur I que si $x \geq 0$.
De plus, $\varphi(0,u) \underset{u\to0^+}{\sim} \frac{1}{u^{3/2}}$ et $3/2 \geq 1$ donc $u \mapsto \varphi(0,u)$ n'est pas intégrable en 0^+.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $u \mapsto \varphi(x,u)$ est bien continue sur I. De plus, $\varphi(x,u) \underset{u\to0^+}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^{1/2}}\right)$ et $1/2 < 1$ donc $u \mapsto \varphi(x,u)$ est intégrable en 0^+. Enfin, par croissances comparées, $\varphi(x,u) \underset{u\to+\infty}{=} o(e^{-u})$ donc $u \mapsto \varphi(x,u)$ est intégrable en $+\infty$. Finalement, $x \mapsto \varphi(x,u)$ est intégrable sur I.
On déduit de ce qui précède que $\mathrm{F}(x)$ est définie si et seulement si $x > 0$.

3 Il s'agit d'utiliser le théorème des dérivations des intégrales à paramètre :

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u \mapsto \varphi(x,u)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \varphi(x,u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,u) = \dfrac{-e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $(x,u) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$,
$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,u)\right| \leq \frac{e^{-u}}{a^2\sqrt{u}} = \Phi(u)$$
- Φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\Phi(u) \underset{u\to0^+}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^{1/2}}\right)$ et $\Phi(u) \underset{u\to+\infty}{=} o(e^{-u})$ donc Φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On peut en conclure que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ et que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{F}'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}\,\mathrm{d}u$$

4 Soit $x \in \mathrm{I}$.
$$\mathrm{F}(x) + x\mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}u - x\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2}\,\mathrm{d}u$$
Les applications $u \mapsto e^{-u}\sqrt{u}$ et $u \mapsto -\dfrac{1}{x+u}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivées respectives $u \mapsto \dfrac{e^{-u}\left(\frac{1}{2}-u\right)}{\sqrt{u}}$ et $u \mapsto \dfrac{1}{(u+x)^2}$ donc, par intégration par parties,
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2}\,\mathrm{d}u = -\left[\frac{e^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\right]_{u\to0}^{u=+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\left(\frac{1}{2}-u\right)}{\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}y$$

L'intégration par parties est légitime puisque

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{e^{-u}\sqrt{u}}{u+x} = \lim_{u \to +\infty} \frac{e^{-u}\sqrt{u}}{u+x} = 0$$

Ainsi

$$\mathrm{F}(x) + x\mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\left(\frac{1}{2} - u\right)}{\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}u =$$

En écrivant $\frac{1}{2} - u = \left(x + \frac{1}{2}\right) - (u + x)$, on obtient :

$$\mathrm{F}(x) + x\mathrm{F}'(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{F}(x) - \mathrm{K}$$

ou encore

$$x\mathrm{F}'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{F}(x) = -\mathrm{K}$$

5 L'application G est dérivable sur I en tant que produit de fonctions dérivables sur I. De plus, pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$\mathrm{G}'(x) = \frac{e^{-x}\mathrm{F}(x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{F}(x) + \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{F}'(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left(x\mathrm{F}'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{F}(x)\right) = -\mathrm{K}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

Les applications G et $x \mapsto -\mathrm{K}\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ sont toutes deux dérivables sur I et leurs dérivées sont égales : elles diffèrent donc d'une constante. Il existe donc $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \mathrm{G}(x) = \mathrm{C} - \mathrm{K}\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

6 Comme $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge, on a

$$\lim_{x \to 0} \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{K}$$

Puisque $u + x \geq x$ pour tout $(x, u) \in \mathrm{I}^2$,

$$\forall x \in \mathrm{I},\ 0 \leq \mathrm{F}(x) \leq \frac{\mathrm{K}}{x}$$

On en déduit notamment que $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{F}(x) = 0$. Par croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{G}(x) = 0$. En passant à la limite dans l'égalité $\mathrm{G}(x) = \mathrm{C} - \mathrm{K}\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, on obtient $\mathrm{C} = \mathrm{K}^2$.
Par ailleurs, en effectuant le changement de variable $u = xt^2$, on obtient

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \mathrm{F}(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

puis

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \mathrm{G}(x) = 2e^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-xt^2}}{t^2+1} = \frac{1}{t^2+1}$$

De plus, pour tout $(x, t) \in \mathrm{I}^2$,

$$\left|\frac{e^{-xt^2}}{t^2+1}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur I. Donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{x \to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{G}(x) = \pi$. En passant à la limite dans l'égalité $\mathrm{G}(x) = \mathrm{C} - \mathrm{K}\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, on obtient $\mathrm{C} = \pi$.
Ainsi $\mathrm{C} = \mathrm{K}^2 = \pi$ donc $\mathrm{K} = \sqrt{\pi}$ car K est manifestement positive.

7 Les séries entières $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geq 0} \sqrt{n}x^n$ ont pour rayon de convergence 1 d'après la règle de d'Alembert. Leurs sommes respectives $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont donc continues sur $]-1,1[$. Enfin, $\varphi : x \mapsto e^{-x}$ est également continue sur I à valeurs dans $]0,1[$ donc $f = \tilde{f}\circ\varphi$ et $g = \tilde{g}\circ\varphi$ sont continues (et donc définies) sur I.

8 La fonction $u \mapsto \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}$ est clairement décroissante sur I. Ainsi, par comparaison série/intégrale,

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

En effectuant le changement de variable $t = ux$ dans chacune des deux intégrales, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Par conséquent,

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

9 Posons $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout entier $n \geq 2$,

$$\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$$

Or

$$\begin{aligned}\sqrt{n} - \sqrt{n-1} &= \sqrt{n}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

puis que la série télescopique $\sum \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}$ converge et enfin que la suite (S_n) converge.

10 Soit $x > 0$. La série de l'énoncé est le produit de Cauchy des deux séries *absolument convergentes* $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-nx}$ puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^n \frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}} e^{-(n-k)x} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-nx}$$

On en déduit donc que

$$h(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}\right) = \frac{f(x)}{1 - e^{-x}}$$

puisque la deuxième somme est la somme d'une série géométrique de raison $e^{-x} \in]0,1[$.

11 On a montré que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$ et on sait que $1 - e^{-x} \underset{x\to 0^+}{\sim} x$ donc $h(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}$.

On a alors $h(x) - 2g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{S}_n e^{-nx}$ pour tout $x \in \mathrm{I}$ et la suite (S_n) est converge donc bornée donc il existe une constante $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall x \in \mathrm{I},\ |h(x) - 2g(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\mathrm{S}_n| e^{-nx} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{M}e^{-nx} = \frac{\mathrm{M}e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

Comme $e^{-x}1-e^{-x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$,

$$h(x)-2g(x) \underset{x\to 0^+}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

A fortiori,

$$h(x)-2g(x) \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Or $h(x) \underset{x\to 0^+}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ donc

$$g(x) \underset{x\to 0^+}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

ou encore

$$g(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$$

12 Si A est fini, on a clairement $\mathrm{A} = \mathbb{R}_+$.
Supposons A infini. En particulier, A n'est pas vide. Il existe donc $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $a_{\mathrm{N}} = 1$. On pose alors $\varphi(0) = \mathrm{N}$. Supposons avoir prouvé l'existence d'entiers naturels $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ tels que $\varphi(0) < \cdots < \varphi(n)$ et $\varphi(k) \in \mathrm{A}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Comme A est infini, $\mathrm{A} \subsetneq [\![0, \varphi(n)]\!]$. Il existe donc un entier $\mathrm{N} \in \mathrm{A}$ tel que $\mathrm{N} > \varphi(n)$. On pose alors $\varphi(n+1) = \mathrm{N}$. On prouve donc par récurrence l'existence d'une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{A}$ strictement croissante. Il suffit alors de poser $b_n = a_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Supposons A infini. La série $\sum a_n$ diverge grossièrement puisque (a_n) possède une suite extraite (b_n) ne convergeant pas vers 0 et donc (a_n) ne converge pas non plus vers 0. Si $x > 0$, $a_n e^{-nx} = \mathcal{O}(e^{-nx})$ est la série $\sum e^{-nx}$ est une série géométrique convergente à termes positifs de sorte que $\sum a_n e^{-nx}$ converge. Finalement, $\mathrm{I}_\mathrm{A} = \mathbb{R}_+^*$.

13 Soit $x > 0$. Remarquons que $\operatorname{card}(\mathrm{A}(n)) = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Ainsi la série $\sum_{n\geq 0} \operatorname{card}(\mathrm{A}(n))e^{-nx}$ est le produit de Cauchy des séries absolument convergentes (car à termes positifs et convergentes) $\sum_{n\geq 0} a_n e^{-nx}$ et $\sum_{n\geq 0} e^{-nx}$. Notamment la série $\sum_{n\geq 0} \operatorname{card}(\mathrm{A}(n))e^{-nx}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{card}(\mathrm{A}(n))e^{-nx} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}\right) = \frac{f_\mathrm{A}(x)}{1-e^{-x}}$$

14 L'application $\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1, \lfloor\sqrt{n}\rfloor]\!] & \longrightarrow & \mathrm{A}_1(n) \\ k & \longmapsto & k^2 \end{array} \right.$ est bien définie. De plus, Ψ est injective car strictement croissante. Enfin, si on se donne $m \in \mathrm{A}_1(n)$, alors il existe un entier naturel k non nul tel que $m = k^2$. Mais alors $1 \leq k^2 \leq n$ puis $1 \leq k \leq \sqrt{n}$ et enfin $1 \leq k \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ car k est entier. Ainsi l'application Ψ est surjective. Finalement Ψ et bijective et on en déduit notamment que $\operatorname{card}(\mathrm{A}_1(n)) = \operatorname{card}[\![1, \lfloor\sqrt{n}\rfloor]\!] = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$.
D'après la question précédente,

$$\forall x > 0,\ \frac{f_{\mathrm{A}_1}(x)}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor\sqrt{n}\rfloor e^{-nx}$$

Puisque $0 \leq \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \leq 1$,

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-nx} - \frac{f_{\mathrm{A}_1}(x)}{1-e^{-x}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$$

ou encore

$$0 \leq g(x) - \frac{f_{\mathrm{A}_1}(x)}{1-e^{-x}} \leq \frac{1}{1-e^{-x}}$$

Comme $\frac{1}{1-e^{-x}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$, on a donc

$$g(x) - \frac{f_{\mathrm{A}_1}(x)}{1-e^{-x}} \underset{x\to 0^+}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

A fortiori,

$$g(x) - \frac{f_{\mathrm{A}_1}(x)}{1-e^{-x}} \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Or on a vu qu $g(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ ou encore $g(x) \underset{x\to 0^+}{=} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}} + o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$ donc

$$\frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} \underset{x\to 0^+}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

ou encore

$$\frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$$

Puisque $1-e^{-x} \underset{x\to 0^+}{\sim} x$,

$$f_{A_1}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

Ensuite, $xf_{A_1}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} xf_{A_1}(x) = 0$. Ainsi $A_1 \in S$ et $\Phi(A_1) = 0$.

15 Soit $x > 0$. Remarquons que

$$v(n) = \operatorname{card}\left\{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ p^2+q^2 = n\right\} = \operatorname{card}\{(k, n-k),\ (k,n-k) \in A_1^2\} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

car $a_k a_{n-k} = 1$ si $(k, n-k) \in A_1^2$ et $a_k a_{n-k} = 0$ sinon. On en déduit que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v(n)e^{-nx}$ est le produit de Cauchy de la série absolument convergente $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{-nx}$ par elle-même. Par conséquent

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)e^{-nx} = f_{A_1}(x)^2$$

De plus, si $n \notin A_1$, $a_n = v(n) = 0$ et si $n \in A_1$, $a_n = 1 \leq v(n)$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq v(n)$. On en déduit que

$$f_{A_2}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v(n)e^{-nx} = f_{A_1}(x)^2$$

Par conséquent

$$xf_{A_2}(x) \leq xf_{A_1}(x)^2$$

On a admis que $A_2 \in S$ donc $x \mapsto xf_{A_2}(x)$ admet une limite $\Phi(A_2)$ en 0^+. On sait également que $f_{A_1}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} xf_{A_1}(x)^2 = \dfrac{\pi}{4}$. Par passage à la limite, on obtient

$$\Phi(A_2) \leq \frac{\pi}{4}$$

16 Soient $x > 0$ et $\psi \in E$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \alpha_n e^{-nx}\psi(e^{-nx}) \leq \alpha_n e^{-nx}\|\psi\|_\infty$$

Comme $\sum \alpha_n e^{-nx}$ converge par hypothèse, $\sum \alpha_n e^{-nx}\psi(e^{-nx})$ converge également et $L(\psi)(x)$ existe. Ainsi $L(\psi)$ est bien définie.
Par linéarité de la somme, L est bien linéaire. De plus, si $\psi_1 \leq \psi_2$, alors $L(\psi_1) \leq L(\psi_2)$ par croissance de la somme.

17 La fonction nulle appartient à E_1 puisque son image par L est nulle par linéarité de L. Si on se donne $(\psi_1, \psi_2) \in E_1^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $x > 0$, $xL(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2)(x) = \lambda_1 xL(\psi_1)(x) + \lambda_2 xL(\psi_2)(x)$ par linéarité de L. De plus, $x \mapsto xL(\psi_1)(x)$ et $x \mapsto xL(\psi_2)(x)$ admettent toutes deux des limites en 0^+. Par conséquent, $x \mapsto xL(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2)(x)$ admet également une limite en 0^+ i.e. $\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 \in E_1$. E_1 est donc un sous-espace vectoriel de E.
De plus, on a également

$$\lim_{x\to 0^+} xL(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2)(x) = \lambda_1 \lim_{x\to 0^+} xL(\psi_1)(x) + \lambda_2 \lim_{x\to 0^+} xL(\psi_2)(x)$$

ce qui prouve que Δ est une forme linéaire.
Enfin, pour tout $\psi \in E_1$, on obtient par inégalité triangulaire :

$$|xL(\psi)(x)| \leq x \sum_{n=0}^{+infty} \alpha_n e^{-nx}\|\psi\|_\infty$$

puis, par passage à la limite,

$$|\Delta(\psi)| \leq \ell\|\psi\|_\infty$$

Donc Δ est continue par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.

18 Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x > 0$,

$$\mathrm{L}(e_p)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} e^{-npx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n(p+1)x}$$

Comme $(p+1)x \underset{0}{\longrightarrow}$ lorsque $x \to 0$, on a

$$\lim_{x\to 0} (p+1)x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n(p+1)x} = \ell$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to 0^+} x\mathrm{L}(e_p)(x) = \frac{\ell}{p+1}$$

On en déduit que $e_p \in \mathrm{E}_1$ et que $\Delta(e_p) = \dfrac{\ell}{p+1} = \ell \displaystyle\int_0^1 e_p(t)\, \mathrm{d}t$. Par linéarité de de Δ et de l'intégrale, on en déduit que

$$\mathbb{R}[\mathrm{X}] \subset \mathrm{E}_1 \text{ et } \forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ \Delta(\mathrm{P}) = \ell \int_0^1 \mathrm{P}(t)\, \mathrm{d}t$$

Soit $\psi \in \mathrm{E}_0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de polynômes convergeant uniformément vers ψ sur le segment $[0,1]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$

$$\begin{aligned}
\left| x\mathrm{L}(\psi)(x) - \ell \int_0^1 \psi(t)\, \mathrm{d}t \right| &\leq |x\mathrm{L}(\psi)(x) - x\mathrm{L}(\mathrm{P}_n)(x)| + \left| x\mathrm{L}(\mathrm{P}_n)(x) - \ell \int_0^1 \mathrm{P}_n(t)\, \mathrm{d}t \right| + \left| \ell \int_0^1 \mathrm{P}_n(t)\, \mathrm{d}t - \ell \int_0^1 \psi(t)\, \mathrm{d}t \right| \\
&\leq x\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} |\psi(x) - \mathrm{P}_n(x) + \left| x\mathrm{L}(\mathrm{P}_n)(x) - \ell \int_0^1 \mathrm{P}_n(t)\, \mathrm{d}t \right| + \ell \int_0^1 |\psi(t) - \mathrm{P}_n(t)|\, \mathrm{d}t \\
&\leq x\mathrm{L}(e_0)(x) \|\psi - \mathrm{P}_n\|_\infty + \left| x\mathrm{L}(\mathrm{P}_n)(x) - \ell \int_0^1 \mathrm{P}_n(t)\, \mathrm{d}t \right| + \ell \|\psi - \mathrm{P}_n\|_\infty
\end{aligned}$$

Or $e_0 \in \mathrm{E}_1$ donc $x \mapsto x\mathrm{L}(e_0)(x)$ admet une limite en 0^+. Notamment cette fonction est bornée au voisinage de 0^+. Il existe donc $\alpha > 0$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall x \in]0,\alpha],\ \left| x\mathrm{L}(\psi)(x) - \ell \int_0^1 \psi(t)\, \mathrm{d}t \right| \leq \mathrm{M}\|\psi - \mathrm{P}_n\|_\infty + \left| x\mathrm{L}(\mathrm{P}_n)(x) - \ell \int_0^1 \mathrm{P}_n(t)\, \mathrm{d}t \right| + \ell \|\psi - \mathrm{P}_n\|_\infty$$

Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Comme (P_n) converge uniformément vers ψ, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\|\psi - \mathrm{P}_\mathrm{N}\|_\infty \leq \varepsilon$. Ainsi

$$\forall x \in]0,\alpha],\ \left| x\mathrm{L}(\psi)(x) - \ell \int_0^1 \psi(t)\, \mathrm{d}t \right| \leq \mathrm{M}\varepsilon + \left| x\mathrm{L}(\mathrm{P}_\mathrm{N})(x) - \ell \int_0^1 \mathrm{P}_\mathrm{N}(t)\, \mathrm{d}t \right| + \ell\varepsilon$$

Mais comme P_N est un polynôme,

$$\lim_{x\to 0^+} x\mathrm{L}(\mathrm{P}_\mathrm{N})(x) = \Delta(\mathrm{P}_\mathrm{N}) = \ell \int_0^1 \mathrm{P}_\mathrm{N}(t)\, \mathrm{d}t$$

Il existe donc $\beta > 0$ tel que

$$\forall x \in]0,\beta],\ \left| x\mathrm{L}(\mathrm{P}_\mathrm{N})(x) - \ell \int_0^1 \mathrm{P}_\mathrm{N}(t)\, \mathrm{d}t \right| \leq \varepsilon$$

Finalement,

$$\forall x \in]0,\beta],\ \left| x\mathrm{L}(\psi)(x) - \ell \int_0^1 \psi(t)\, \mathrm{d}t \right| \leq (\mathrm{M} + 1 + \ell)\varepsilon$$

Ceci prouve que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\mathrm{L}(\psi)(x) = \ell \int_0^1 \psi(t)\, \mathrm{d}t$. Ainsi $\psi \in \mathrm{E}_1$ de sorte que $\mathrm{E}_0 \subset \mathrm{E}_1$ et $\Delta(\psi) = \ell \displaystyle\int_0^1 \psi(t)\, \mathrm{d}t$.

19 On vérifie que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to(a-\varepsilon)^-} g_-(x) = \lim_{x\to(a-\varepsilon)^+} g_-(x) = 1 \\
\lim_{x\to a^-} g_-(x) = \lim_{x\to a^+} g_-(x) = 0 \\
\lim_{x\to a^-} g_+(x) = \lim_{x\to a^+} g_+(x) = 1 \\
\lim_{x\to(a+\varepsilon)^-} g_-(x) = \lim_{x\to(a+\varepsilon)^+} g_-(x) = 0
\end{aligned}$$

Ainsi g_- et g_+ sont continues sur $[0,1]$ et appartiennent à E_0. D'après la question précédente,

$$\Delta(g_-) = \ell \int_0^1 g_-(t)\,dt = \ell\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \Delta(g_+) = \ell \int_0^1 g_+(t)\,dt = \ell\left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

De plus, $g_- \leq \mathbb{1}_{[0,a]} \leq g_+$ donc pour tout $x > 0$,

$$xL(g_-)(x) \leq xL(\mathbb{1}_{[0,a]})(x) \leq xL(g_+)(x)$$

De plus, $\lim_{x\to 0^+} xL(g_-)(x) = \Delta(g_-) = \ell\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ et $\lim_{x\to 0^+} xL(g_+)(x) = \Delta(g_+) = \ell\left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ donc on peut trouver $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]0,\alpha],\ \ell(a-\varepsilon) \leq xL(g_-)(x) \leq xL(\mathbb{1}_{[0,a]})(x) \leq xL(g_+)(x) \leq \ell(a+\varepsilon)$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0^+} xL(\mathbb{1}_{[0,a]})(x) = \ell a$. Donc $\mathbb{1}_{[0,a]} \in E_1$ et

$$\Delta(\mathbb{1}_{[0,a]}) = \ell a = \ell \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,a]}(t)\,dt$$

On peut alors montrer que toute fonction en escalier sur $[0,1]$ est une combinaison linéaire de fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{[0,a]}$ et la linéarité de Δ et de l'intégrale montre alors que pour toute fonction en escalier f, $f \in E_1$ et

$$\Delta(f) = \ell \int_0^1 f(t)\,dt$$

Enfin, soit $\psi \in E$. Il existe alors une suite (f_n) de fonctions en escalier sur $[0,1]$ convergeant uniformément vers ψ. On procède alors comme à la question précédente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$

$$\begin{aligned}
\left|xL(\psi)(x) - \ell\int_0^1 \psi(t)\,dt\right| &\leq |xL(\psi)(x) - xL(f_n)(x)| + \left|xL(f_n)(x) - \ell\int_0^1 f_n(t)\,dt\right| + \left|\ell\int_0^1 f_n(t)\,dt - \ell\int_0^1 \psi(t)\,dt\right| \\
&\leq x\infty\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}|\psi(x) - f_n(x) + \left|xL(f_n)(x) - \ell\int_0^1 f_n(t)\,dt\right| + \ell\int_0^1 |\psi(t) - f_n(t)|\,dt \\
&\leq xL(e_0)(x)\|\psi - f_n\|_\infty + \left|xL(f_n)(x) - \ell\int_0^1 f_n(t)\,dt\right| + \ell\|\psi - f_n\|_\infty
\end{aligned}$$

Or $e_0 \in E_1$ donc $x \mapsto xL(e_0)(x)$ admet une limite en 0^+. Notamment cette fonction est bornée au voisinage de 0^+. Il existe donc $\alpha > 0$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall x \in]0,\alpha],\ \left|xL(\psi)(x) - \ell\int_0^1 \psi(t)\,dt\right| \leq M\|\psi - f_n\|_\infty + \left|xL(f_n)(x) - \ell\int_0^1 f_n(t)\,dt\right| + \ell\|\psi - f_n\|_\infty$$

Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Comme (f_n) converge uniformément vers f, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|\psi - f_N\|_\infty \leq \varepsilon$. Ainsi

$$\forall x \in]0,\alpha],\ \left|xL(\psi)(x) - \ell\int_0^1 \psi(t)\,dt\right| \leq M\varepsilon + \left|xL(f_N)(x) - \ell\int_0^1 f_N(t)\,dt\right| + \ell\varepsilon$$

Mais comme f_N est une fonction en escalier,

$$\lim_{x\to 0^+} xL(f_N)(x) = \Delta(f_N) = \ell\int_0^1 f_N(t)\,dt$$

Il existe donc $\beta > 0$ tel que

$$\forall x \in]0,\beta],\ \left|xL(f_N)(x) - \ell\int_0^1 f_N(t)\,dt\right| \leq \varepsilon$$

Finalement,

$$\forall x \in]0,\beta],\ \left|xL(\psi)(x) - \ell\int_0^1 \psi(t)\,dt\right| \leq (M + 1 + \ell)\varepsilon$$

Ceci prouve que $\lim_{x\to 0^+} xL(\psi)(x) = \ell\int_0^1 \psi(t)\,dt$. Ainsi $\psi \in E_1$ de sorte que $E_1 = E$ et $\Delta(\psi) = \ell\int_0^1 \psi(t)\,dt$.

20 Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathrm{L}(\psi)\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n/\mathrm{N}} \psi(e^{-n/\mathrm{N}})$$

Mais $\psi(e^{-n/\mathrm{N}}) = 0$ pour $n > \mathrm{N}$ et $\psi(e^{-n/\mathrm{N}}) = e^{n/\mathrm{N}}$ si $n \leq \mathrm{N}$ donc

$$\mathrm{L}(\psi)\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \alpha_n$$

Comme $\psi \in \mathrm{E}_1$, d'après la question précédente,

$$\lim_{x \to 0^+} x\mathrm{L}(\psi)(x) = \ell \int_0^1 \psi(t)\,\mathrm{d}t = \ell$$

Notamment,

$$\lim_{\mathrm{N} \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \mathrm{L}(\psi)\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right) = \ell$$

ou encore

$$\lim_{\mathrm{N} \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \alpha_n = \ell$$

21 Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{S}$. Alors $x \mapsto x f_{\mathrm{A}}(x) = x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}$ admet une limite $\Phi(\mathrm{A})$ en 0^+. On peut donc appliquer la question précédente avec $\alpha_n = a_n$ et $\ell = \Phi(\mathrm{A})$. Ainsi

$$\lim_{\mathrm{N} \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n = \Phi(\mathrm{A})$$

ou encore

$$\lim_{\mathrm{N} \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \operatorname{card}(\mathrm{A}(\mathrm{N})) = \Phi(\mathrm{A})$$

On a vu précédemment que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n) e^{-nx} = f_{\mathrm{A}_1}(x)^2$$

et que $f_{\mathrm{A}_1}(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ donc

$$\lim_{x \to 0^+} x \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) e^{-nx} = \frac{\pi}{4}$$

On peut donc appliquer la question précédente avec $\alpha_n = v(n)$ et $\ell = \dfrac{\pi}{4}$. On en déduit que

$$\lim_{\mathrm{N} \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} v(n) = \frac{\pi}{4}$$