Bases orthonormales

Exercice 1 ★★ **Produit mixte et produit vectoriel**

Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 1$.

1. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E. Montrer que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.
2. En déduire que $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.
3. Soient $x_1, \dots, x_{n-1}$ $n-1$ vecteurs de E. Montrer que l'application
$$x \in \mathrm{E} \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$$
est une forme linéaire sur E.
4. En déduire qu'il existe un unique vecteur $u \in \mathrm{E}$ tel que
$$\forall x \in \mathrm{E},\ \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \langle u, x\rangle$$
On appelle u le produit vectoriel des vecteur $x_1, \dots, x_{n-1}$ et on note
$$u = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$$
5. Montrer que l'application
$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathrm{E}^{n-1} \mapsto x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$$
est une application $n-1$-linéaire alternée.

Exercice 2 ★★★

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2,\ \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)\mathrm{Q}^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. Donner sans calcul une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Exercice 3 ★★★

Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs de E tels que
$$\forall x \in \mathrm{E},\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k\rangle^2$$

1. Montrer que
$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle x \mid y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i\rangle\langle y \mid e_i\rangle$$
2. En déduire que
$$\forall x \in \mathrm{E},\ x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i\rangle e_i$$
3. Etablir que $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 4 ★★ **Formule de Parseval**

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale totale d'un espace préhilbertien réel E. Montrer que
$$\forall x \in \mathrm{E},\ \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle^2$$

Sous-espaces orthogonaux

Exercice 5 ★★

Montrer que $s : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}^\top \end{array}\right.$ est une symétrie orthogonale pour le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire défini par $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \operatorname{tr}(\mathrm{A}^\top \mathrm{B})$ pour $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6 ★★

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E.

1. Montrer que $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$ et que, si F et G sont de dimension finie, $G^\perp \subset F^\perp \implies F \subset G$.
2. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
3. Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ et que, si E est de dimension finie, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 7 ★★ **Orthogonal et topologie**

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E que l'on munit de sa norme euclidienne.

1. Montrer que pour tout $y \in E$, $\varphi_y : x \in E \mapsto \langle x, y\rangle$ est continue.
2. Montrer que $F^\perp$ est fermé dans E.
3. Montrer que de manière générale, $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$.

Projection orthogonale

Exercice 8 ★★

Soit u un vecteur unitaire d'un espace euclidien E. On note U le vecteur colonne représentant u dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\text{vect}(u)$ dans $\mathcal{B}$.

Exercice 9 ★★★ **ENS MP**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^n$ non nul tel que les projetés orthogonaux de $e_1, \dots, e_n$ sur $\text{vect}(u)$ aient la même norme.
2. Montrer que cette norme commune est indépendante du vecteur u choisi et l'exprimer en fonction de $\|e_1\|, \dots, \|e_n\|$.

Exercice 10 ★★ **Caractérisations des projections orthogonales**

Soient E un espace euclidien et p une projection de E. Etablir l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1. p est orthogonale ;
2. $\forall x, y \in E,\ \langle p(x)|y\rangle = \langle x|p(y)\rangle$;
3. $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 11 ★★★

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $u \in O(E)$.

1. Montrer que $E = \text{Ker}(\text{Id}_E - u) \overset{\perp}{\oplus} \text{Im}(\text{Id}_E - u)$.
2. Soit $x \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)$. Montrer que (x_n) converge vers la projection de x sur $\text{Ker}(\text{Id}_E - u)$ parallèlement à $\text{Im}(\text{Id}_E - u)$.

Exercice 12 **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Donner une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur F.
5. Montrer que :

$$\forall P \in E, \left|\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,dt\right| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}\,dt}$$

Exercice 13 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soient $n \geq 3$, $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

1. Donner le rang de M.
2. Déterminer les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
3. Donner la matrice du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}\, f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Optimisation

Exercice 14 ★★★

Calculer le minimum de $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & \displaystyle\int_0^\pi (\sin x - ax^2 - bx)^2 \,\mathrm{d}x \end{array}$.

Exercice 15 ★★★

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) du produit scalaire $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \mapsto \mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{Y}$. On se donne $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. On pose $\mathrm{E} = \left\{\|\mathrm{AX}-\mathrm{B}\|^2,\ \mathrm{X} \in c\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right\}$ et $\mathrm{K} = \inf \mathrm{E}$.

1. Justifier l'existence de K.
2. On considère le système linéaire $(\mathcal{S}) : \ \mathrm{AX} = \mathrm{B}$. On appelle *pseudo-solution* de $\mathcal{S}$ tout élément Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|\mathrm{AY}-\mathrm{B}\|^2 = \mathrm{K}$. Montrer que si $(\mathcal{S})$ admet une solution, les pseudo-solutions de $(\mathcal{S})$ sont les solutions de $(\mathcal{S})$.
3. On associe à $(\mathcal{S})$ le système $(\mathcal{S}') : \ \mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{AX} = \mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{B}$. Montrer qu'un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si il est solution de $(\mathcal{S}')$.
4. Montrer que $\mathrm{rg}\, \mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{A} = \mathrm{rg}\, \mathrm{A}$.
5. Montrer que si $\mathrm{rg}\, \mathrm{A} = n$, $(\mathcal{S})$ admet une unique pseudo-solution.

Exercice 16 ★★★ **ENS MP 2010**

Soient E un espace euclidien et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E. Pour $x \in \mathrm{E}$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^p \|x - x_i\|^2$. Montrer que f atteint son minimum en un unique point que l'on précisera.

Exercice 17 ★★★

Soient E un espace euclidien et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E. Pour $x \in \mathrm{E}$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^p \|x - x_i\|^2$. Montrer que f atteint son minimum en $m = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^p x_i$.

Exercice 18 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{A}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. On rappelle que $\mathrm{A}_0 = 1$. Pour tous $\mathrm{P},\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on pose $\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
2. Calculer A_n en distinguant deux cas selon la parité de n.
3. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
4. Calculer $d(\mathrm{X}^3, \mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$.

Automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales

Exercice 19 ★★★

Soient H et K deux hyperplans d'un espace euclidien E. On note s_H et s_K les réflexions par rapport à H et K. Montrer que s_H et s_K commutent si et seulement si $\mathrm{H} = \mathrm{K}$ ou $\mathrm{H}^\perp \subset \mathrm{K}$.

Exercice 20 ★★

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

1. Trouver les $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que
$$\forall u, v \in \mathrm{E},\ f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$$
2. Trouver les $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que
$$\forall u, v \in \mathrm{E},\ f(u \wedge v) = -f(u) \wedge f(v)$$

Exercice 21 ★★

Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 22 ★★

Déterminer les réels a, b, c pour que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix}$ soit la matrice d'une rotation.

Exercice 23 ★★★

Soit E un espace euclidien de dimension 2.

1. On sait que la matrice d'une réflexion de E dans une base orthonormée est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Quelle est l'interprétation géométrique de θ ?
2. Déterminer une condition portant sur l'angle entre leurs axes pour que la *somme* de deux réflexions soit encore une réflexion.

Exercice 24 ★★ **Petites Mines 2009**

Soit u un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E. On pose $v = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - u$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont orthogonaux et supplémentaires.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, u^k est un automorphisme orthogonal.

Exercice 25 ★★

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ engendré par la famille (e_1, e_2, e_3) où

$$e_1 : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad e_2 : t \mapsto \cos(2\pi t) \qquad e_3 : t \mapsto \sin(2\pi t)$$

1. Montrer que $\Phi : (f, g) \mapsto 2\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E.
3. Pour tout réel x, on définit l'application τ_x qui à tout élément f de E associe g tel que
$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(x - t)$$
   a. Montrer que τ_x est un endomorphisme de E. Donner sa matrice relativement à $\mathcal{B}$.
   b. Montrer que τ_x est un automorphisme orthogonal de E.
   c. Caractériser géométriquement τ_x.

Exercice 26 ★★

Déterminer l'image de la droite d'équation $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ par la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et d'axe dirigé par $\vec{a}(1, 1, 1)$.

Exercice 27 ★★

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de E de la réflexion s_1 par rapport au plan d'équation $x + y - 2z = 0$.

2. Quelle est la nature de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner ses éléments caractéristiques.

3. Trouver les réflexions s_2 et s_3 telles que $s_1 \circ s_2 = f$ et $s_3 \circ s_1 = f$. Préciser leur plan de réflexion.

Exercice 28 ★

Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note A la matrice de f dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E. Montrer que f est une symétrie orthogonale si et seulement si A est une matrice orthogonale symétrique.

Exercice 29 ★★ **Mines MP 2011**

Soient f et g deux éléments de $SO_3(\mathbb{R})$ tels que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que f et g sont soit deux rotations de même axe soit des symétries par rapport à des droites orthogonales entre elles.

Exercice 30 ★★ **Banque Mines-Ponts MP 2018**

Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$.

2. En déduire que $(f - \text{Id}_E)^2 = 0 \implies f = \text{Id}_E$.

Exercice 31 ★★★

Soit $O = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ une matrice orthogonale réelle de taille n où A et D sont deux blocs carrés de tailles respectives p et q. Montrer que $(\det A)^2 = (\det D)^2$.

Exercice 32 ★

Soient A et B les matrices, dans deux bases orthonormales, d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Montrer que $\text{tr}(A^\top A) = \text{tr}(B^\top B)$.

Exercice 33 ★★

1. Soit X une matrice colonne réelle de taille n. Montrer que $X^\top X \in \mathbb{R}_+$ et que $X^\top X = 0$ implique $X = 0$.

2. Soit M une matrice antisymétrique réelle de taille n. Montrer que $I_n + M$ est inversible.

3. On pose $A = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Montrer que A est orthogonale.

Exercice 34 ★★★★ **ENS MP 2010**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les matrices de $O_n(\mathbb{R})$ laissant stable $(\mathbb{R}_+)^n$.

Exercice 35 ★★★

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A = \text{com}(A)$ si et seulement si $A = 0$ ou $A \in SO(n)$.

Adjoint

Exercice 36 ★★

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme auto-adjoint de E. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in E,\ \langle f(x), x \rangle \geq 0$.

(ii) Il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = g^* \circ g$.

(iii) Il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $h^* = h$ et $f = h^2$.

Exercice 37 ★★

Soient $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. On pose

$$\forall f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}),\ |||f||| = \sup_{x\in\mathrm{E}, \|x\|=1} \|f(x)\|$$

Montrer que

$$\forall f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}),\ |||f||| = |||f^*|||$$

Exercice 38 ★★★

Soient $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et f un automorphisme auto-adjoint de E. On note $\mathrm{X} = \{x \in \mathrm{E},\ \langle f(x), x\rangle \leq 1\}$. Montrer que X est compacte si et seulement si f est défini positif.

Exercice 39 ★★★ **X PC 2012**

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$. Montrer que $u + u^*$ est inversible.

Exercice 40 ★ **Autour de l'adjoint**

Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E tel que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$. Etablir que

$$\operatorname{Ker}(f + f^*) = \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(f^*)$$

Exercice 41 ★★

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. On pose pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $g_\mathrm{A} : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{AM}$. Calculer l'adjoint de g_A.

Exercice 42 ★★

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$ et que $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.
2. En déduire que $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(u^*)$.

Exercice 43 ★★★

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que

$$u^* \circ u + \alpha u + \beta u^* = 0$$

1. On suppose $\alpha \neq \beta$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et p un projecteur orthogonal de E tels que $u = \lambda p$.
2. On suppose $\alpha = \beta$. Montrer que $\operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Ker}(u)$ sont orthogonaux.

Exercice 44 ★★

Soit E un espace euclidien. Montrer que $(f, g) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2 \mapsto \operatorname{tr}(f^* \circ g)$ est un produit scalaire sur E.

Exercice 45 ★★

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(f^*)$.
2. Montrer que $\det(f) = \det(f^*)$.
3. Montrer que $\chi_f = \chi_{f^*}$.
4. Montrer que $\operatorname{Sp}(f) = \operatorname{Sp}(f^*)$.
5. Montrer que pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$, $\dim \mathrm{E}_\lambda(f) = \dim \mathrm{E}_\lambda(f^*)$.

Exercice 46 ★★★★ **Endomorphismes normaux**

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. On suppose que u est un endomorphisme *normal*, c'est-à-dire que $u^* \circ u = u \circ u^*$.

1. On suppose *dans cette question uniquement* que $\dim E = 2$ et que χ_u est irréductible. Soit $\mathcal{B}$ une base *orthonormée* de E. Montrer que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que $F^\perp$ est également stable par u et que les restrictions u_F et $u_{F^\perp}$ de u à F et $F^\perp$ sont des endomorphismes normaux de F et $F^\perp$.
   On pourra considérer la matrice de u dans une base adaptée.
3. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme $\begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Exercice 47 ★★★ **Endomorphismes normaux**

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$.

1. Montrer que u et u^* ont les mêmes éléments propres.
2. Montrer que les sous-espaces propres de u dont deux à deux orthogonaux.

Endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

Exercice 48 ★★★ **Mines-Ponts MP 2016**

Soit E un espace euclidien de dimension finie. On considère des vecteurs unitaires a et b de E formant une famille libre.
Réduire l'endomorphisme

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b \end{array} \right.$$

Exercice 49 ★★ **CCP MP 2016**

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E. On pose $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle u_k$ pour $x \in E$.

1. Montrer que f est un endomorphisme auto-adjoint défini positif.
2. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint, défini positif telle que $g^2 = f^{-1}$.
3. Montrer que $(g(u_1), \dots, g(u_n))$ est une base orthonormale de E.

Exercice 50 ★★ **Racine carrée d'un endomorphisme auto-adjoint positif**

Soit f un endomorphisme auto-adjoint positif d'un espace euclidien E. Montrer qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint g de E tel que $f = g^2$.

Exercice 51 ★

Soit f un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E. Montrer que $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^\perp$.

Exercice 52 ★★★ **ENS MP 2010**

Montrer que $\Phi : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à une matrice associe sa plus grande valeur propre est une application convexe.

Exercice 53 ★★★ **ENS MP 2010**

Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} A & I_n \\ \hline I_n & A \end{array}\right)$. Trouver les valeurs propres de B.

Exercice 54 ★★★

Soient A, B deux matrices réelles symétriques positives de taille n et $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que tout vecteur propre de A^k est vecteur propre de A.
2. Montrer que si $A^k = B^k$, alors $A = B$.
3. Que se passe-t-il sans l'hypothèse A, B symétriques positives ?

Exercice 55 ★★★

Soient A et B deux matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(AB) \geq 0$.

Exercice 56 ★★

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on pose

$$N(A) = \sqrt{\max \operatorname{Sp}(A^\top A)}$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $n = p$, N est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 57 ★★★★ **ENS MP 2006**

Soit $(a, b, c, A, B, C) \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |ax^2 + bx + c| \leq |Ax^2 + Bx + C|$$

Montrer que

$$|b^2 - 4ac| \leq |B^2 - 4AC|$$

Exercice 58 **ENS PSI 2016**

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\operatorname{Sp}(M^\top M) \setminus \{0\} = \operatorname{Sp}(MM^\top) \setminus \{0\}$$

Exercice 59 ★★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2021**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

(i) $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\forall(\lambda, \mu) \in \operatorname{Sp}(A)^2,\ \lambda + \mu \neq 0$;

(ii) $\forall B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ \exists! M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ AM + MA = B$.

Exercice 60 ★★★

Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ le système

$$\begin{cases} X^\top YX = I_n \\ Y^\top XY = I_n \end{cases}$$

Exercice 61 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2021**

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont les coefficients diagonaux sont nuls et D une matrice diagonale.
Montrer que $S + D$ est semblable à D si, et seulement si, S est nulle.

Exercice 62 ★★★ **Racine carrée d'une matrice symétrique positive**

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
2. Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Polynômes orthogonaux

Exercice 63 ★★★

On pose $Q_n = (1 - X^2)^n = (1 + X)^n(1 - X)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On notera $\varphi(P, Q) = \langle P, Q\rangle$ par la suite.
2. Soit n et k deux entiers tels que $0 \leq k < n$. Montrer que $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$.
3. On pose $P_n = Q_n^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 64 ★★★

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $P \in E$, on pose $L(P) = P'' - 2XP'$. Pour tous $P, Q \in E$, on note

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\, dt$$

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que L est diagonalisable. On précisera ses valeurs propres.
3. Montrer que L est auto-adjoint pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
4. Montrer que l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de E diagonalise L i.e. est une base de vecteurs propres de L.

Divers

Exercice 65 ★★

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Une application $u : E \to E$ est dite *antisymétrique* si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, u(y) \rangle + \langle y, u(x) \rangle = 0$$

On note A(E) l'ensemble des applications antisymétriques de E.
Remarque. Rien à voir avec les applications *multilinéaires* antisymétriques !

1. Soit $u \in A(E)$. Montrer que u est linéaire.
2. Soit $u : E \to E$. Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
   (i) u est linéaire et $\forall x \in E,\ \langle u(x), x \rangle = 0$;
   (ii) u est antisymétrique ;
   (iii) u est linéaire et sa matrice dans une base orthonormée est antisymétrique.
3. Montrer que A(E) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.
4. Soit $u \in A(E)$. Montrer que $\operatorname{Im} u$ est l'orthogonal de $\operatorname{Ker} u$.
5. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u alors $F^\perp$ est également stable par u.

Exercice 66 ★★★

Montrer que le rang d'une matrice antisymétrique réelle est pair.

Exercice 67 ★★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2018**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit cE l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^\top = A^2 + A - I_n$.
On appelle a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

1. Décrire a si A est symétrique, avec $A \in \mathcal{E}$.
2. Décrire a si on ne suppose plus A symétrique, avec $A \in \mathcal{E}$.

Exercice 68 ★★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On travaille dans l'espace des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $|\operatorname{tr}(A)| \leq \sqrt{n}\|A\|$.
3. **a.** Quel est l'orthogonal de l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques ?
   b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer la distance de A à $S_n(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients de A ?
4. Soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|UA\| = \|AU\| = \|A\|$.
5. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Exercice 69 ★★★

Soit E un espace euclidien de dimension n et $u_1, \dots, u_{n+1}$ des vecteurs non nuls de E faisant un angle constant α_n (non nul) deux à deux. Que vaut α_n ?

Exercice 70 ★★★

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{rg}(A^\top A) = \operatorname{rg}(AA^\top) = \operatorname{rg} A$.

Exercice 71 ★★★

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

pour $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$.

2. On pose $F = \text{vect}(1 + X^n, n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.

3. Montrer que $F^\perp = \{0\}$. Conclusion ?