

DEVOIR SURVEILLÉ N°09

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 1.a On utilise l'indication de l'énoncé

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta) \cdot i^k \sin^k(\theta)$$

Comme $i^{2k} = (-1)^k$ et $i^{2k+1} = (-1)^k i$, on obtient en passant à la partie réelle :

$$\cos(n\theta) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta) \sin^{2k}(\theta) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta) (1 - \cos^2(\theta))^k$$

Le polynôme

$$T = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k} (1 - X^2)^k$$

vérifie bien l'égalité (★). Tous les monômes $X^{n-2k}(1 - X^2)^k$ sont de degré n donc $\deg T \leq n$. Enfin, le coefficient de X^n dans T est $\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} > 0$ (somme de termes strictement positifs).

1.b Supposons que deux polynômes S et T vérifient la condition (★). Alors $(S - T)(\cos \theta) = 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi tous les réels de $[-1, 1]$ sont racines de $S - T$. Comme $S - T$ possède une infinité de racines, $S - T = 0$ i.e. $S = T$.

2 2.a Soit $x \in [-1, 1]$. Posons $\theta = \arccos x$ pour simplifier. Alors

$$\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2 \cos((n+1)\theta) \cos(\theta)$$

ou encore

$$T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x)$$

2.b On a évidemment $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ et, à l'aide de la relation de récurrence précédente, on obtient $T_2 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 4X^3 - 3X$.

2.c Par définition de T_n , $\deg T_n = n$ de sorte que $\deg(2XT_{n+1}) > \deg T_n$. En notant c_n le coefficient dominant de T_n , on a donc $c_{n+2} = 2c_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $T_1 = X$, $c_1 = 1$ de sorte que $c_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, $c_0 = 1$.

On peut aussi remarquer que d'après le calcul effectué à la question **1.a**,

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (1 + (-1)^k) \binom{n}{k} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \right) \\ &= \frac{1}{2} ((1+1)^n + (1-1)^n) = \begin{cases} 2^{n-1} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3 3.a On rappelle que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

En particulier,

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, T_n(\cos \theta_k) = \cos(n\theta_k) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$$

De plus, les θ_k sont des éléments distincts deux à deux de $[0, \pi]$ et \cos est injective sur $[0, \pi]$ (strictement décroissante) donc les $\cos \theta_k$ sont également distincts deux à deux. Comme $\deg T_n = n$, ce sont exactement les racines de T_n et ces racines sont simples. Enfin, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} donc

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (X - \cos \theta_k)$$

3.b Pour tout $x \in [-1, 1]$

$$|T_n(x)| = |\cos(n \arccos x)| \leq 1$$

De plus,

$$T_n(1) = \cos(n \arccos(1)) = \cos(0) = 1$$

On en déduit que $\|T_n\|_\infty = 1$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$T_n(c_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

On en déduit immédiatement que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, |T_n(c_k)| = 1 = \|T_n\|_\infty$$

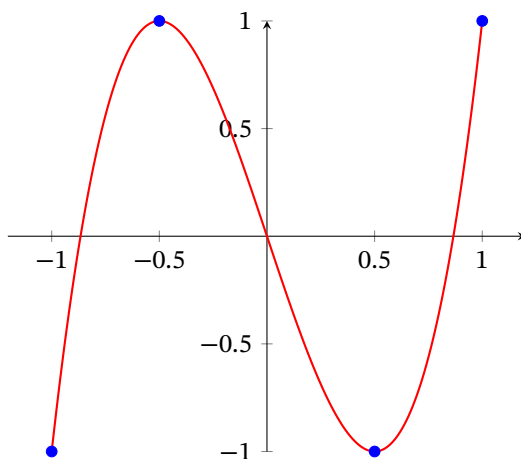
et

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, T_n(c_{k+1}) = (-1)^{k+1} = -(-1)^k = -T_n(c_k)$$

3.c On sait que $T_3 = 4X^3 - 3X$ et donc $T'_3 = 12X^2 - 3 = 12\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)$. On obtient alors facilement le tableau de variations suivant :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
T'_3	$+$	0	$-$	0	$+$
T_3	-1	1	-1	1	

puis le graphe suivant (on remarque que T_3 est impair) :



On a clairement $c_0 = -1$, $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$ et $c_3 = 1$.

4 Remarquons déjà que $t \mapsto \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur l'intervalle $] -1, 1[$.

Remarquons que

$$\forall t \in] -1, 1[, \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{h(t)}{\sqrt{1+t} \cdot \sqrt{1-t}}$$

Comme $t \mapsto \frac{h(t)}{\sqrt{1+t}}$ est continue sur le segment $[-1, 1]$, elle y est bornée de sorte que $\frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t \rightarrow 1^-}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$. Or $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $[0, 1[$ par critère de Riemann donc $t \mapsto \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ également. On montre de la même manière qu'elle est intégrable sur $] -1, 0]$. Finalement, $t \mapsto \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $] -1, 1[$.

- 5 Tout d'abord, $\langle f, g \rangle$ est bien défini pour $(f, g) \in E^2$: il suffit de poser dans la question précédente $h = fg$ qui est bien continue sur $[-1, 1]$.

Symétrie Evident.

Bilinéarité La bilinéarité découle de la linéarité de l'intégrale.

Positivité Evident.

Caractère défini Si $h \in E$ vérifie $\langle h, h \rangle = 0$, alors $\int_{-1}^1 \frac{h(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$. L'intégrale sur $] -1, 1[$ d'une fonction continue et positive sur $] -1, 1[$ ne peut être nulle que si cette fonction est nulle. On en déduit que

$$\forall t \in] -1, 1[, \frac{h(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0$$

puis

$$\forall t \in] -1, 1[, h(t) = 0$$

Mais comme h est continue sur $[-1, 1]$, h est finalement nulle sur $[-1, 1]$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc un produit scalaire.

- 6 Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Alors

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_{-1}^1 \frac{\cos(n \arccos x) \cos(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

On effectue alors le changement de variable $x = \cos t$. Comme \cos est une bijection de classe \mathcal{C}^1 strictement décroissante de $]0, \pi[$ sur $] -1, 1[$, de dérivée $-\sin$,

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_0^\pi \frac{\cos(nt) \cos(mt)}{\sqrt{1-\cos^2 t}} \cdot \sin t dt = \int_0^\pi \frac{\cos(nt) \cos(mt)}{\sqrt{\sin^2 t}} \cdot \sin t dt = \int_0^\pi \cos(nt) \cos(mt) dt$$

car \sin est positive sur $] -\pi, \pi[$.

On procède ensuite à une linéarisation.

$$\langle T_n, T_m \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((m+n)t) + \cos((m-n)t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((m+n)t) dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((m-n)t) dt$$

On en déduit alors aisément que

$$\langle T_n, T_m \rangle = \begin{cases} \pi & \text{si } m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

On en déduit que la famille (T_0, \dots, T_n) est une famille orthogonale de vecteurs non nul de E_n : c'est donc une base orthogonale (mais pas orthonormale) de E_n .

- 7 7.a Le théorème est le suivant :

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E et x un vecteur de E , il existe un unique vecteur $y \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - y\|$ (où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne associé au produit scalaire), à savoir le projeté orthogonal de x sur F .

Dans le cas qui nous intéresse, E_n est bien de dimension finie, d'où l'existence et l'unicité de $t_n(f)$. On peut préciser que $t_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur E_n .

- 7.b Remarquons que $(T_0/\|T_0\|_2, \dots, T_n/\|T_n\|_2)$ est une base orthonormale de E_n . Comme $t_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur E_n , on a donc

$$t_n(f) = \sum_{k=0}^n \left\langle f, \frac{T_k}{\|T_k\|_2} \right\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|_2} = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, T_k \rangle}{\|T_k\|_2^2} T_k$$

8 Comme $t_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur E_n , les vecteurs $t_n(f)$ et $f - t_n(f)$ sont orthogonaux. D'après le théorème de Pythagore,

$$\|f\|_2^2 = \|(f - t_n(f)) + t_n(f)\|_2^2 = \|f - t_n(f)\|_2^2 + \|t_n(f)\|_2^2$$

Puisque

$$t_n(f) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, T_k \rangle}{\|T_k\|_2} \cdot \frac{T_k}{\|T_k\|_2}$$

et que $(T_0/\|T_0\|_2, \dots, T_n/\|T_n\|_2)$ est une base orthonormale de E_n ,

$$\|t_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=0}^n \left(\frac{\langle f, T_k \rangle}{\|T_k\|_2} \right)^2 = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$$

Ainsi

$$d_2(f, E_n) = \|f - t_n(f)\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \|t_n(f)\|_2^2} = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}}$$

9 9.a Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2} = \|t_n(f)\|_2^2 \leq \|f - t_n(f)\|_2^2 + \|t_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2$$

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2} \geq 0$, la suite (S_n) est croissante et majorée par $\|f\|_2^2$: elle converge. Ceci signifie que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$ converge.

9.b Comme la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$ converge, son terme général tend vers 0. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\langle f, T_n \rangle^2 = \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_n\|_2^2} \cdot \|T_n\|_2^2 = \frac{\pi}{2} \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_n\|_2^2}$$

donc la suite de terme général $\langle f, T_n \rangle^2$ tend vers 0 également. On en déduit aussi que la suite de terme général $\langle f, T_n \rangle$ converge aussi vers 0. En revenant à la définition du produit scalaire, la suite de terme général $\int_{-1}^1 \frac{f(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge vers 0.

10 10.a Pour tout $t \in [-1, 1]$, $|h(t)| \leq \|h\|_\infty$ donc

$$\|h\|_2^2 = \int_{-1}^1 \frac{h(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \|h\|_\infty^2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \|h\|_\infty^2 \|T_0\|_2^2 = \pi \|h\|_\infty^2$$

donc $\|h\|_2 \leq \sqrt{\pi} \|h\|_\infty$.

10.b Comme f est continue sur $[-1, 1]$, d'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de fonctions polynomiales (P_n) convergeant uniformément vers f sur $[-1, 1]$ i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - P_N\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$. Posons $p = \max(0, \deg P_N)$ de sorte que $P_N \in E_p$.

Par définition de $t_p(f)$,

$$\|f - t_p(f)\|_2 = \inf_{P \in E_p} \|f - P\|_2 \leq \|f - P_N\|_2 \leq \sqrt{\pi} \|f - P_N\|_\infty < \varepsilon$$

Or comme la suite (E_n) est croissante pour l'inclusion, la suite de terme général $d_2(f, E_n) = \|f - t_n(f)\|_2$ est décroissante. On en déduit que

$$\forall n \geq p, \|f - t_n(f)\|_2 \leq \|f - t_p(f)\|_2 < \varepsilon$$

Par définition de la limite, la suite de terme général $\|f - t_n(f)\|_2$ converge vers 0.

11 11.a On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f - t_n(f)\|_2^2 = d_2(f, E_n)^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - t_n(f)\|_2 = 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2} = \|f\|_2^2$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2} = \|f\|_2^2$$

puis

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}} = \|f\|_2$$

11.b Ceci signifie que $\langle h, T_n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\|h\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle h, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}} = 0$$

donc h est nulle sur $[-1, 1]$.

12 12.a • $0 \in K$ donc $K \neq \emptyset$.

• Par inégalité triangulaire, pour tout $Q \in K$,

$$\|Q\|_\infty = \|(Q - f) + f\|_\infty \leq \|Q - f\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$$

donc K est bornée.

• L'application $\psi : Q \in E_n \mapsto \|f - Q\|_\infty$ est continue (on montre classiquement que la norme $\|\cdot\|_\infty$ est 1-lipschitzienne par inégalité triangulaire). Ainsi K est fermé comme image réciproque du fermé $] -\infty, \|f\|_\infty]$ par l'application continue ψ .

12.b Comme E_n est de dimension finie, K est compact comme partie fermée et bornée de E_n . De plus, on a vu que $K \neq \emptyset$.

13 13.a Tout d'abord, comme $K \subset E_n$, $d_\infty(f, E_n) \leq d_\infty(f, K)$.

Soit alors $P \in E_n$.

• Si $P \in K$, alors

$$\|f - P\|_\infty \geq d_\infty(f, K)$$

• Si $P \notin K$,

$$\|f - P\|_\infty > \|f\|_\infty$$

Or il est clair que $0 \in K$ donc $\|f\|_\infty = \|f - 0\|_\infty \geq d_\infty(f, K)$. Ainsi

$$\|f - P\|_\infty > d_\infty(f, K)$$

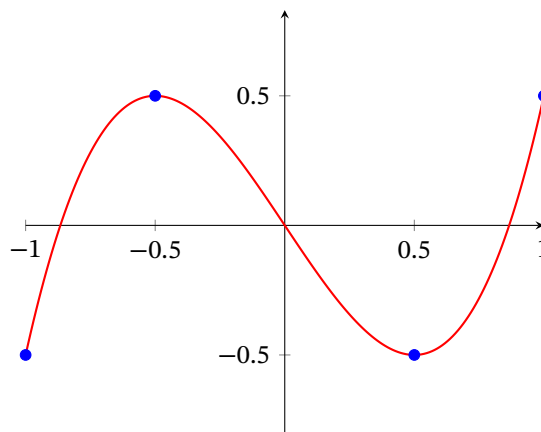
Finalement, pour tout $f \in E_n$, $\|f - P\|_\infty \geq d_\infty(f, K)$ donc $d_\infty(f, E_n) \geq d_\infty(f, K)$.

Il en résulte que $d_\infty(f, E_n) = d_\infty(f, K)$.

13.b Puisque K est compact, l'application continue $Q \in E_n \mapsto \|f - Q\|_\infty$ admet un minimum sur K . Autrement dit, il existe $P \in K$ tel que $\|f - P\|_\infty = d_\infty(f, K)$. Mais comme $K \subset E_n$, $P \in E_n$ et la question précédente montre que

$$\|f - P\|_\infty = d_\infty(f, K) = d_\infty(f, E_n)$$

14 14.a Il suffit par exemple de poser $\Phi = \frac{1}{2}T_3$.



14.b D'après la question **3.b**, en posant $c_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$,

$$\forall k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket, |T_{n+1}(c_k)| = \|T_{n+1}\|_\infty$$

et

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, T_{n+1}(c_{k+1}) = -T_n(c_k)$$

En posant $x_i = c_{n+1-i}$ on a alors :

- $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$ par stricte décroissance de \cos sur $[0, \pi]$;
- $\forall i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket, |T_{n+1}(x_i)| = \|T_{n+1}\|_\infty$;
- $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, T_{n+1}(x_{i+1}) = -T_n(x_i)$.

Ainsi T_{n+1} équioscille sur les $n+2$ points x_0, \dots, x_{n+1} .

15 15.a Comme $f - P$ équioscille sur les $n+2$ points $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$,

$$|f(x_i) - P(x_i)| = \|f - P\|_\infty$$

Mais comme $f(x_i) - P(x_i) > 0$,

$$f(x_i) - P(x_i) = \|f - P\|_\infty$$

Remarquons que

$$Q(x_i) - P(x_i) = (f(x_i) - P(x_i)) - (f(x_i) - Q(x_i))$$

Or

$$f(x_i) - Q(x_i) \leq \|f - Q\|_\infty < \|f - P\|_\infty = f(x_i) - P(x_i)$$

donc

$$Q(x_i) - P(x_i) > 0$$

15.b Remarquons que pour tout $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$,

$$|f(x_i) - P(x_i)| = \|f - P\|_\infty > \|f - Q\|_\infty \geq 0$$

donc les $f(x_i) - P(x_i)$ ne sont pas nuls. On a donc pour tout $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $f(x_i) - P(x_i) > 0$ ou $f(x_i) - P(x_i) < 0$.

Comme $f - P$ équioscille sur $x_0 < \dots < x_{n+1}$, $f(x_i) - P(x_i)$ et $f(x_{i+1}) - P(x_{i+1})$ sont de signes opposés.

La question précédente montre que $f(x_i) - P(x_i)$ et $Q(x_i) - P(x_i)$ sont de même signe donc $Q(x_i) - P(x_i)$ et $Q(x_{i+1}) - P(x_{i+1})$ sont de signes opposés (et non nuls). Comme $P - Q$ est continue, le théorème des valeurs intermédiaires garantit que $P - Q$ s'annule sur $]x_i, x_{i+1}[$. Comme $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$, $P - Q$ s'annule $n+1$ fois. Or $P - Q \in E_n$ donc $P - Q = 0$ i.e. $P = Q$.

Ceci contredit le fait que $\|f - Q\|_\infty < \|f - P\|_\infty$. Autrement dit, pour tout $Q \in E_n$, $\|f - P\|_\infty \leq \|f - Q\|_\infty$. Or $P \in E_n$ donc $\|f - P\|_\infty = d_\infty(f, E_n)$ et P est un PMA d'ordre n de f .

16 On sait que T_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ et de coefficient dominant 2^n donc $q_n \in E_n$. Comme T_{n+1} équioscille sur $n+2$ points, il en est de même de $f - q_n = 2^{-n}T_{n+1}$. D'après la question précédente, q_n est un PMA d'ordre n de f .

17 Il existe alors $Q \in E_n$ tel que $P = f - Q$. Donc

$$\|P\|_\infty = \|f - Q\|_\infty \geq d_\infty(f, E_n)$$

Or q_n est un PMA d'ordre n de f donc

$$d_\infty(f, E_n) = \|f - q_n\|_\infty = \|2^{-n}T_{n+1}\|_\infty = 2^{-n}\|T_{n+1}\|_\infty$$

On en déduit que

$$2^{-n}\|T_{n+1}\|_\infty \leq \|P\|_\infty$$

18 18.a Notons a le coefficient dominant de f . Alors f/a est un polynôme unitaire de degré $n+1$. D'après la question **16**, $q_n = f/a - 2^{-n}T_{n+1}$ est un PMA d'ordre n de f/a . Autrement dit

$$\forall Q \in E_n, \|f/a - q_n\|_\infty \leq \|f/a - Q\|_\infty$$

Par homogénéité de la norme,

$$\forall Q \in E_n, \|f - aq_n\|_\infty \leq \|f - aQ\|_\infty$$

Or l'application $Q \mapsto aQ$ est une permutation de E_n donc

$$\forall Q \in E_n, \|f - aq_n\|_\infty \leq \|f - Q\|_\infty$$

Ainsi $aq_n = f - 2^{-n}aT_{n+1} \in E_n$ est un PMA d'ordre n de f .

18.b D'après la question précédente, un PMA d'ordre 2 de f est $f - 5 \cdot 2^{-2}T_3$, c'est-à-dire le polynôme

$$5X^3 + 2X - 3 - 5 \cdot \frac{1}{4}(4X^3 - 3X) = \frac{19}{4}X - 3$$