Semaine du 01/05 au 05/05

1 Cours

Séries numériques

Généralités Définition, sommes partielles. Nature d'une série, somme. Si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) converge vers 0. Divergence grossière. Nature et somme d'une série géométrique. Reste d'une série convergente. Opérations sur les séries.

Comparaison à une intégrale Encadrement de $\sum f(n)$ où f est monotone. Nature d'une série de Riemann.

Séries à termes positifs Une série à terme positif converge ou diverge vers $+\infty$. Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, lien entre la convergence ou la divergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Absolue convergence. La convergence absolue implique la convergence. Relations de comparaison : lien entre domination/négligeabilité/équivalence et convergence/divergence des séries.

2 Méthodes à maîtriser

- Établir la convergence d'une série et calculer sa somme par télescopage.
- Utiliser une décomposition en éléments simples pour déterminer par télescopage la somme d'une série $\sum F(n)$ où F est une fraction rationnelle.
- Comparer la somme partielle ou le reste d'une série à une intégrale.
- Déterminer un équivalent de la somme partielle d'une série divergente ou du reste d'une série convergente par comparaison à une intégrale.
- Comparer à une série de Riemann ou une série géométrique pour déterminer la nature d'une série.

3 Questions de cours

- Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- Déterminer un équivalent du reste de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.
- Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge **si et seulement si** $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n u_n$ converge.