Devoir à la maison n°03

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Les différentes parties de ce problème sont très largement indépendantes.

Partie I – Étude d'une application

On définit une application f de la manière suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + \dfrac{1}{z} \end{array} \right.$$

1. Déterminer les antécédents éventuels du nombre complexe i par f.

2. L'application f est-elle injective ?

3. Montrer que f est surjective.

4. Montrer que $f(\mathbb{U}) = [-2, 2]$.

5. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*$.

6. Montrer que $f(\mathbb{R}^*) =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. On pourra procéder à une étude de fonction.

7. On pose $\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z| < 1\}$. Montrer que $f(\mathrm{D}) \subset \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$.

8. Montrer que tout élément de $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ admet exactement 2 antécédents par f dans $\mathbb{C}^*$. Que vaut le produit de ces deux antécédents ?

9. Montrer que f induit une bijection de D sur $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$.

Partie II – Un petit peu d'exponentielle complexe

On définit une application g de la manière suivante :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(e^z) \end{array} \right.$$

1. Déterminer les antécédents éventuels du nombre complexe i par g.

2. Déterminer $g(i\mathbb{R})$.

3. Déterminer $g(\mathbb{R})$.

Partie III – Une suite d'applications

On définit une suite d'applications (φ_n) de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ en posant

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \varphi_0(z) = 2 \text{ et } \varphi_1(z) = z$$

et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C},\ \varphi_{n+2}(z) = z\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)$$

1. Donner des expressions de $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ et $\varphi_4(z)$.

2. En déduire les solutions des équations $\varphi_2(z) = 0$, $\varphi_3(z) = 0$ et $\varphi_4(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ \varphi_n(f(z)) = f(z^n)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $f(z^n) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$.

5. En déduire les solutions de l'équation $\varphi_n(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On précisera également le nombre de ces solutions.