Devoir surveillé n°16

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 ★★

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $X \colon \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telles que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)$$

1. Montrer que $V \colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{S}$.

2. **a.** Soit $X \in \mathcal{S}$. Montrer que $AX \in \mathcal{S}$.

b. En déduire une base de $\mathcal{S}$.

3. **a.** Soit $X \in \mathcal{S}$. Montrer que X est bornée sur $\mathbb{R}$.

b. Soient $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PMP^{-1}$.
Soit $Y \colon \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et telle que $Y' = MY$. Montrer que Y est bornée sur $\mathbb{R}$.

4. On introduit sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ le produit scalaire défini par $(X \mid Z) = X^\top Z$ et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
Soit $b \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $X \colon \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = (A + b(t)I_2)X(t)$$

Soit $f \colon t \mapsto \|X(t)\|^2$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = 2b(t)f(t)$$

5. Montrer que la fonction X de la question précédente est bornée.

Problème 1 – E3A PSI 2015

Dans tout le problème :

- E est un espace euclidien de dimension $p \geq 1$ dans lequel le produit scalaire sera noté $(\cdot \mid \cdot)$ et la norme associée $\|.\|$.
- $\mathcal{S}(\mathrm{E})$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ constitué des endomorphismes symétriques de E.
- $\mathcal{T}(\mathrm{E})$ désigne l'ensemble des éléments u de $\mathcal{S}(\mathrm{E})$ de rang inférieur ou égal à 1 et qui vérifient

$$\forall x \in \mathrm{E},\ (u(x) \mid x) \geq 0$$

Préliminaires

1 Justifier que $\mathcal{T}(\mathrm{E})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

2 Si M est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on notera $\mathrm{tr}(\mathrm{M})$ sa trace. Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

2.a Prouver que $\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{tr}(\mathrm{BA})$.

2.b On suppose que B est semblable à A. Comparer $\mathrm{tr}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{B})$.

2.c Donner la définition de la trace d'un endomorphisme de E.

3 Rappeler la définition d'un hyperplan de E. On se donne alors un tel hyperplan H et on note G son complémentaire dans E. Déterminer (en justifiant) si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

3.a G est un sous-espace vectoriel supplémentaire de H.

3.b Pour tout vecteur a de G, $\mathrm{vect}(a)$ est supplémentaire de H dans E.

3.c Pour tout vecteur a non nul et orthogonal à H, $\mathrm{vect}(a)$ est supplémentaire de H dans E.

3.d Le noyau de l'application tr est un hyperplan de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

3.e Un endomorphisme de E est de rang 1 si et seulement si son noyau est un hyperplan de E.

4 Montrer que l'application

$$(f, g) \in \mathcal{S}(\mathrm{E})^2 \mapsto \langle f, g \rangle = \mathrm{tr}(f \circ g)$$

est un produit scalaire.

On notera pour la suite N la norme associée à ce produit scalaire.

5 Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ et f_{A} l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé. Donner les éléments propres de la matrice A.

Partie 1

Soit $a \in \mathrm{E}$ et u_a l'endomorphisme de E défini par

$$\forall x \in \mathrm{E},\ u_a(x) = (x \mid a)a$$

6 Montrer que $u_a \in \mathcal{T}(\mathrm{E})$.

7 On suppose dans cette question que $a \neq 0$.

7.a Ecrire la matrice de u_a dans une base $\mathcal{B}$ de E constituée du vecteur a et d'une base de $\mathrm{vect}(a)^{\perp}$.

7.b Déterminer alors $\mathrm{tr}(u_a)$ et $\mathrm{tr}(u_a \circ u_a)$ en fonction de a.

7.c Soit f un endomorphisme de E. Déterminer les éléments diagonaux de la matrice $f \circ u_a$ dans la base $\mathcal{B}$ définie précédemment.

7.d Calculer alors $\mathrm{tr}(f \circ u_a)$ en fonction de a.

8 Soit $u \in \mathcal{T}(\mathrm{E})$, u non nul et b un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(u)$.

8.a Montrer que b est un vecteur propre de u associé à une valeur propre μ positive.

8.b Prouver que $\forall x \in \mathrm{E},\ u(x) = \dfrac{\mu}{\|b\|^2}(x \mid b)b$.

8.c En déduire que $\mu > 0$.

8.d Montrer qu'il existe au moins un vecteur a de E tel que $u = u_a$.

9 L'application $: a \in \mathrm{E} \mapsto \varphi(a) = u_a \in \mathcal{T}(\mathrm{E})$ est-elle injective ? Surjective ?

Partie 2

Pour cette partie du problème, f est un endomorphisme de $\mathcal{S}(\mathrm{E})$ qui est **fixé**.
Pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$, on pose

$$\Phi(x) = [\mathrm{N}(f - u_x)]^2 \quad \text{et} \quad m(f) = \inf_{x \in \mathrm{E}} \Phi(x)$$

Pour tout vecteur x de E et tout vecteur y de E tel que $\|y\| = 1$, on pose

$$h_x \ :\ t \in \mathbb{R} \mapsto h_x(t) = \Phi(x + ty)$$

10 Justifier l'existence de $m(f)$.

11 Prouver que $\forall x \in \mathrm{E},\ \Phi(x) = [\mathrm{N}(f)]^2 - 2(x \mid f(x)) + \|x\|^4$.

12 Montrer que h_x est une fonction polynomiale dont on précisera les coefficients.

13 Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_p)$ de E et de réels $(\lambda_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ vérifiant

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ f(e_i) = \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_p$$

14 Calculer alors $\mathrm{N}(f)$ à l'aide des réels λ_i, $1 \leq i \leq p$.

15 Exprimer $\alpha = \sup\limits_{z \in \mathrm{E}, \|z\|=1} (z \mid f(z))$ à l'aide des λ_i. Déterminer l'ensemble des vecteurs $z \in \mathrm{E}$ unitaires tels que $(z \mid f(z)) = \alpha$.

16 On suppose que $m(f)$ est atteint en $a \in \mathrm{E}$.

16.a Déterminer $h_a'(0)$.

16.b Prouver que $f(a) = \|a\|^2 a$.

16.c Prouver que pour tout réel t et tout vecteur y de norme 1,

$$\Phi(a + ty) - \Phi(a) = t^2[(t + 2(y \mid a))^2 + 2(\|a\|^2 - (y \mid f(y)))]$$

16.d Prouver que

$$m(f) = \Phi(a) \iff \begin{cases} f(a) = \|a\|^2 a \\ \forall y \in \mathrm{E} \ \text{ tel que } \ \|y\| = 1,\ (y \mid f(y)) \leq \|a\|^2 \end{cases}$$

17 On suppose que $\lambda_p \leq 0$.

17.a Prouver que $m(f) = \Phi(a)$ si et seulement si $a = 0$.

17.b Déterminer $m(f_A)$ où f_A est l'endomorphisme de la question 5 des préliminaires.

18 On suppose que $\lambda_p > 0$.

18.a Démontrer que $m(f) = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2$.

18.b Prouver que $m(f) = \Phi(x) \iff \begin{cases} x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_p \mathrm{Id}_E) \\ \|x\| = \sqrt{\lambda_p} \end{cases}$.

Partie 3

Dans cette partie, on prend $E = \mathbb{R}^p$ euclidien usuel.

19 Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ symétrique et telle que

$$\begin{cases} \forall i, j \in [\![1, p]\!]^2, \ m_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in [\![1, p]\!], \ \sum_{j=1}^{p} m_{i,j} = 1 \end{cases}$$

On note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associé à la matrice M.

19.a Prouver que $\lambda = 1$ est valeur propre et donner un vecteur propre associé.

19.b Soit λ une valeur propre de M et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. Soit $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $|x_k| = \max\{|x_j|, \ 1 \leq j \leq p\}$. En considérant la k-ième ligne du système $MX = \lambda X$, prouver que $|\lambda| \leq 1$.

19.c Déterminer alors un vecteur a de $\mathbb{R}^p$ tel que $\Phi(a) = m(f_M)$. (On ne cherchera pas à calculer la valeur de $m(f_M)$).

19.d En déduire l'existence d'un endomorphisme v de $\mathcal{T}(E)$ tel que $[N(f_M - v)]^2 = m(f_M)$.

19.e Reconnaître la nature géométrique de l'endomorphisme v et donner ses éléments remarquables.

20 Soit $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1 et f_B l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ qui lui est canoniquement associé. Calculer $m(f_B)$. Trouver un vecteur $b \in \mathbb{R}^p$ tel que $[N(f_B - u_b)]^2 = m(f_B)$.

21 On prend dans cette question $p > 1$. Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

et f_C l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ qui lui est canoniquement associé.

21.a Déterminer les éléments propres de la matrice C.

21.b Calculer $m(f_C)$.

21.c Trouver un vecteur c de $\mathbb{R}^p$ tel que $\Phi(c) = m(f_C)$ et un endomorphisme $w \in \mathcal{T}(E)$ tel que $m(f_C) = [N(f_C - w)]^2$.

21.d Cet endomorphisme w est-il unique ?