

DEVOIR À LA MAISON N°14

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1

Partie I –

1. f est continue sur \mathbb{R}^* comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R}^* .
De plus, $\arctan t \sim t$ donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0. Ainsi f est continue sur \mathbb{R} .
Enfin, \arctan étant impaire, f est paire.
2. On sait que $\frac{1}{1+t^2} = 1 + o(t)$. Par intégration, $\arctan t = \arctan 0 + t + o(t^2)$. On en déduit que $f(t) = 1 + o(t)$.
Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
3. f est dérivable sur \mathbb{R}^* comme quotient de fonctions dérivables sur \mathbb{R}^* dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, f est dérivable en 0 d'après la question précédente. Ainsi f est dérivable sur \mathbb{R} .
De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

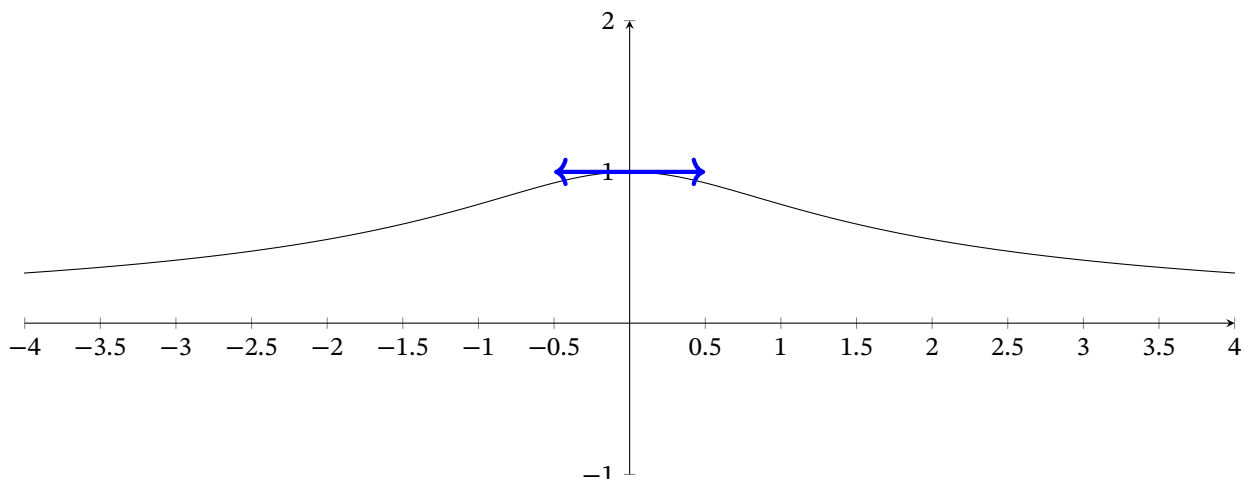
$$f'(t) = \frac{1}{t(1+t^2)} - \frac{\arctan t}{t^2}$$

4. $u \mapsto u$ et $u \mapsto -\frac{1}{2(1+u^2)}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} de dérivées respectives $u \mapsto 1$ et $u \mapsto \frac{u}{(1+u^2)^2}$. Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Par intégration par parties

$$\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du = \left[-\frac{u}{2(1+u^2)} \right]_0^t + \int_0^t \frac{du}{2(1+u^2)} = -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{\arctan t}{2} = -\frac{1}{2} t^2 f'(t)$$

Si $t > 0$, $\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du > 0$ comme intégrale d'une fonction continue positive non constamment nulle et donc $f'(t) < 0$. Ainsi f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ . Comme f est paire, f est strictement croissante sur \mathbb{R}_- .

5. Puisque $\lim_{+\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{+\infty} f = 0$. Par parité, $\lim_{-\infty} f = 0$. Ainsi la courbe représentative de f admet l'axe des abscisses pour asymptote.



Partie II –

1. Posons $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$. Ainsi $\phi(x) = \frac{F(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. F est continue sur \mathbb{R} en tant que primitive de f . Ainsi ϕ est continue sur \mathbb{R}^* en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, F est dérivable en 0 donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0)$ i.e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = f(0)$. Ainsi ϕ est continue en 0. Finalement, ϕ est continue sur \mathbb{R} . Posons $u(x) = F(x) + F(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. u est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = F'(x) - F'(-x) = f(x) - f(-x) = 0$. Ainsi u est constante sur \mathbb{R} égale à $u(0) = 2F(0) = 0$. On en déduit que F est impaire. Il s'ensuit que ϕ est paire.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est décroissante sur $[0, x]$ d'après la question 4, pour tout $t \in [0, x]$, $f(x) \leq f(t) \leq f(0)$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^x f(x) dt \leq \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x dt$$

et par suite

$$xf(x) \leq x\phi(x) \leq x$$

Puisque $x > 0$,

$$f(x) \leq \phi(x) \leq 1$$

L'inégalité est encore valable si $x \in \mathbb{R}_-^*$ puisque f et ϕ sont paires. Enfin, l'égalité est valable si $x = 0$ puisque $f(0) = \phi(0) = 1$.

Finalement, $f(x) \leq \phi(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. F est dérivable sur \mathbb{R} en tant que primitive de f . ϕ est alors dérivable sur \mathbb{R}^* comme quotient de fonctions dérivables sur \mathbb{R}^* dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\phi'(x) = \frac{F'(x)}{x} - \frac{F(x)}{x^2} = \frac{1}{x} (f(x) - \phi(x))$$

On sait d'après la question 2 que $f(x) = 1 + o(x)$. Comme F est une primitive de f , $F(x) = F(0) + x + o(x^2)$.

Or $F(0) = 0$ donc $F(x) = x + o(x^2)$. Par suite, $\phi(x) = 1 + o(x)$. Ainsi ϕ est dérivable en 0 et $\phi'(0) = 0$.

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \leq \phi(x)$ et que $\phi'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - \phi(x))$, ϕ' est négative sur \mathbb{R}_+^* et ϕ est donc décroissante sur \mathbb{R}_+^* . Puisque ϕ est paire, ϕ est croissante sur \mathbb{R}_-^* .

4. Soit $x \in [1, +\infty[$. Pour tout $t \in [1, x]$, $0 \leq \arctan t \leq \frac{\pi}{2}$ donc $0 \leq f(t) \leq \frac{\pi}{2t}$. Par croissance de l'intégrale

$$\int_1^x 0 dt \leq \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^x \frac{\pi}{2t} dt$$

ou encore

$$0 \leq \int_1^x f(t) dt \leq \frac{\pi}{2} \ln x$$

puis

$$0 \leq \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \leq \frac{\pi \ln x}{2x}$$

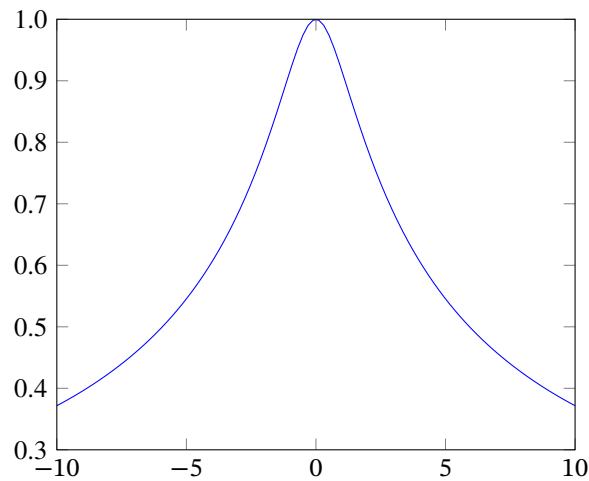
Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$ via le théorème des gendarmes.

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$\phi(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$.

5. Par parité de ϕ , on a également $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = 0$. Ainsi la courbe représentative de ϕ admet pour asymptote l'axe des abscisses.



Partie III –

1. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Puisque $t \geq 0$ et $1 + t^2 > 0$, $\frac{t}{1+t^2} \geq 0$.

Alors $(1 - t)^2 \geq 0$ i.e. $1 + t^2 \geq 2t$. Puisque $1 + t^2 > 0$, $\frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$.

Finalement, $0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question 3, $\phi'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - \phi(x))$. Mais d'après la question 2, $f(x) \leq \phi(x) \leq 1$. On en déduit que

$$|\phi'(x)| = \frac{1}{x}(\phi(x) - f(x)) \leq \frac{1}{x}(1 - f(x))$$

De plus,

$$\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = x - \arctan x$$

Ainsi

$$\frac{1}{x}(1 - f(x)) = \frac{1}{x^2}(x - \arctan x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

D'après la question 1

$$\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt \leq \int_0^x \frac{t}{2} dt = \frac{x^2}{4}$$

Par conséquent, $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

Comme ϕ est paire, ϕ' est impaire et l'inégalité précédente est encore valable si $x \in \mathbb{R}_-^*$. Enfin, cette égalité est encore valable lorsque $x = 0$ puisque $\phi'(0) = 0$.

3. Posons $v(x) = \phi(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. v est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v'(x) = 1 - \phi'(x)$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$ donc, a fortiori, $\phi'(x) < 1$ et $v'(x) > 0$. Ainsi v est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Puisque $\lim_{+\infty} \phi = \lim_{-\infty} \phi = 0$, $\lim_{+\infty} v = -\infty$ et $\lim_{-\infty} v = +\infty$. Enfin, v est continue sur \mathbb{R} donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, v s'annule une unique fois sur \mathbb{R} i.e. l'équation $\phi(x) = x$ admet une unique solution sur \mathbb{R} .

Enfin, $v(0) = \phi(0) = 1 > 0$ et $v(1) = \phi(1) - 1 < 0$ car ϕ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ donc $\phi(1) < \phi(0) = 1$. On peut donc assurer que $\alpha \in]0, 1]$.

4. Puisque $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ϕ est $\frac{1}{4}$ -lipschitzienne. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\phi(u_n) - \phi(\alpha)| \leq |u_n - \alpha|$ i.e. $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

REMARQUE. On peut aussi remarquer que

$$|u_{n+1} - \alpha| = |\phi(u_n) - \phi(\alpha)| = \left| \int_{\alpha}^{u_n} \phi'(x) dx \right| \leq \left| \int_{\alpha}^{u_n} |\phi'(x)| dx \right| \leq \left| \int_{\alpha}^{u_n} \frac{1}{4} dx \right| = \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$

On montre alors par récurrence que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n} |u_0 - \alpha|$. Puisque $0 \leq \frac{1}{4} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Partie IV –

1. L'équation différentielle équivaut à $xy' + xy = f(x)$ sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* ou encore à $(xy)' = f(x)$. On en déduit que les solutions sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* sont les fonctions $x \mapsto \phi(x) + \frac{\lambda}{x}$ où λ décrit \mathbb{R} .
2. Soit y une éventuelle solution de $x^2y' + xy = \arctan x$ sur \mathbb{R} . La question 1 montre qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$y(x) = \begin{cases} \phi(x) + \frac{\lambda_1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \phi(x) + \frac{\lambda_2}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
. La continuité de y en 0 impose $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ainsi ϕ et y coïncident sur \mathbb{R}^* . Puisque ces deux fonctions sont continues, elles coïncident également en 0 et sont donc égales. Réciproquement, ϕ vérifie bien l'équation différentielle sur \mathbb{R} . C'est donc l'unique solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $x^2y' + xy = \arctan x$.