

DEVOIR SURVEILLÉ N°01

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 ★

Soit $x \in [-1, +\infty[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 2 ★

On définit une suite (u_n) par ses deux premiers termes $u_0 = u_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq n^2$$

Exercice 3 ★

On définit une suite (u_n) par $u_0 = u_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (n+1)(u_n + u_{n+1})$$

Montrer que $u_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

REMARQUE. On rappelle que $0! = 1$ et que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $n!$ désigne le produit de tous les entiers compris entre 1 et n .

Exercice 4 ★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

Exercice 5 ★

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$

1. Déterminer $f(0)$.
2. En déduire que $f(x) = x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Etudier la réciproque.

Exercice 6 ★

Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on pose

$$d_1(x, y) = |x - y|$$

et

$$d_2(x, y) = \left| \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1} \right|$$

1. Prouver que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, d_2(x, y) = 0 \iff x = y$$

2. Justifier que

$$\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3, d_2(x, z) \leq d_2(x, y) + d_2(y, z)$$

3. Prouver que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$$

4. Existe-t-il un réel λ tel que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, d_1(x, y) \leq \lambda d_2(x, y)$$

Exercice 7 ★★**Concavité de la racine carrée**

Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. Montrer que

$$(1 - \lambda)\sqrt{x} + \lambda\sqrt{y} \leq \sqrt{(1 - \lambda)x + \lambda y}$$

Exercice 8 ★

Soit E un ensemble. On rappelle que pour toute partie X de E , on note \overline{X} son complémentaire dans E . On rappelle également que si X et Y sont deux parties de E , on définit la différence ensembliste de X et Y par $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$.

On considère trois parties A , B et C de E .

1. Montrer que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
2. Montrer que $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
3. Montrer que $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
4. A-t-on toujours $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$? Le prouver ou donner un contre-exemple.