Devoir à la maison n°11

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, F un sous-espace de E et G un groupe fini d'automorphismes linéaires de E, de cardinal m, tel que F soit stable par tout élément g de G.

Le produit $u \circ v$ de deux endomorphismes de E sera noté plus simplement uv.

à tout endomorphisme u de E, on associe u^+ défini par :

$$u^+ = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} u g$$

1. Soit $h \in G$. Montrer que l'application $\delta_h : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & gh \end{array} \right.$ est une bijection de G sur G.

2. Montrer que u^+ est un endomorphisme de E commutant avec tout élément h de G.

3. Calculer $(u^+)^+$.

4. Soit p un projecteur de E d'image F. Montrer que F est inclus dans l'image de p^+.

5. Montrer que, pour tous g et h de G, on a $g^{-1}pgh^{-1}ph = h^{-1}ph$.

6. Montrer que p^+ est un projecteur.

7. Comparer les images de p et de p^+.

8. Montrer que le noyau de p^+ est un supplémentaire de F dans E stable par tout élément g de G.

9. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E stable par tout g de G admet un supplémentaire stable par tout g de G.