Nombres réels, relations binaires

Partie entière

Exercice 1.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

Exercice 2.★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Exercice 3.★

On se propose de calculer la partie entière du réel

$$\alpha = \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. En déduire $\lfloor \alpha \rfloor$.

Exercice 4.★

Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 5.★★

Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 6.★

On définit *la partie fractionnaire* d'un nombre réel x par

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

1. Calculer $\{54,465\}$ et $\{-36,456\}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comparer $\{x\}$ et $\{-x\}$.
3. Prouver que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \longmapsto \{x\}$$

est périodique et tracer son graphe.

Exercice 7.★

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par l'expression

$$\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$$

lorsque x et y décrivent $\mathbb{R}$.

Exercice 8.★★

Un classique.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer les entiers naturels k tels que

$$\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = m.$$

2. Soit $n \geqslant 0$. Calculer en fonction de n,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n^2+2n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor.$$

Exercice 9.★

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations

1. $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x + 1 \rfloor$;
2. $\lfloor x + 3 \rfloor = \lfloor x - 1 \rfloor$.

Exercice 10.

Tracer le graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto \left\lfloor \left| \frac{3}{2} - x \right| \right\rfloor.$$

EXERCICE 11.★
Etablir que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leqslant n - 1.$$

Bornes supérieures et inférieures

EXERCICE 12.
Soit f une application *croissante* de $[0,1]$ dans $[0,1]$. On souhaite montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire que'il existe $l \in [0,1]$ tel que $f(l) = l$.

1. On pose $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant x\}$. Montrer que A est non vide et majorée.
2. On note alors $c = \sup A$. Montrer que $c \in [0,1]$.
3. Montrer que $c \leqslant f(c)$.
4. Montrer que $f(c) \in A$. Conclure.

EXERCICE 13.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note s_n la somme des chiffres de l'écriture décimale de n.

1. Montrer que $s_n \leqslant 9(\log_{10} n + 1)$.
2. Montrer que la suite $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)$ est bornée. Quelles sont les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble des valeurs de cette suite ? Sont-elles atteintes ?

EXERCICE 14.
Soient A et B deux ensembles non vides et f une application bornée de $A \times B$ dans $\mathbb{R}$. Comparer $\sup_{x\in A}\left(\inf_{y\in B} f(x,y)\right)$ et $\inf_{y\in B}\left(\sup_{x\in A} f(x,y)\right)$.

EXERCICE 15.
Soit f une application bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g(x) = \inf_{y\geqslant x} f(y) \qquad \text{et} \qquad h(x) = \sup_{y\geqslant x} f(y)$$

Déterminer le sens de variation de g et h.

EXERCICE 16.★
Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ est non vide et bornée et que

$$\sup(A \cup B) = \max\left[\sup(A), \sup(B)\right]$$

et

$$\inf(A \cup B) = \min\left[\inf(A), \inf(B)\right].$$

EXERCICE 17.★
Etudier l'existence puis déterminer le cas échéant les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants,

1. $\mathcal{A} = \left\{2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$;
2. $\mathcal{B} = \left\{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m}, (m,n) \in (\mathbb{Z}^*)^2\right\}$;
3. $\mathcal{C} = \left\{1 - \frac{1}{n-m}, (n,m) \in \mathbb{Z}^2, n \neq m\right\}$;
4. $\mathcal{D} = \left\{\frac{pq}{p^2+q^2}, (p,q) \in \mathbb{N}^2\right\}$;
5. $\mathcal{E} = \left\{\frac{2^n}{2^m + 3^{n+m}}, (n,m) \in \mathbb{N}^2\right\}$;
6. $\mathcal{F} = \left\{\frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1}, (n,q) \in \mathbb{N}^2\right\}$;
7. $\mathcal{G} = \left\{\frac{mn}{m^2+n^2+mn}, (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$.

EXERCICE 18.
Prouver l'existence puis calculer les bornes supérieures et inférieures de l'ensemble

$$A = \left\{(-1)^n/n \mid n \geqslant 1\right\}.$$

EXERCICE 19.☆

Soient A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, \ b \in B\}.$$

Montrer que si A et B sont bornées, alors $A + B$ l'est aussi et que

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$$

et

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

EXERCICE 20.☆☆

Pour tout $A \subset \mathbb{R}$ *non vide* et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$d(x, A) = \inf\left\{ |x - a| \ \middle| \ a \in A \right\}.$$

(expression qui se lit : « distance de x *à A »)*

1. Donner une interprétation *géométrique* de $d(x, A)$ sur la droite réelle.
2. Examiner les cas où $A = [0, 1[$ et $x = 1, 2, 1/2$ ou -3.
3. On revient au cas général. Justifier l'existence de $d(x, A)$.
4. La borne inférieure $d(x, A)$ est-elle un plus petit élément ? Illustrer par divers exemples.
5. Caculer $d(x, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Même question avec $d(x, \mathbb{Q})$.
6. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\left|d(x, A) - d(y, A)\right| \leqslant |x - y|.$$

Densité

EXERCICE 21.

Montrer que $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n}, (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 22.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x + y) = f(x) + f(y)$$

On pose $a = f(1)$.

1. Déterminer $f(0)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = an$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = an$.
4. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$.
5. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux suites de rationnels (α_n) et (β_n) convergeant vers x telles que $\alpha_n \leqslant x \leqslant \beta_n$.

   b. On suppose f croissante. Montrer que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6. Déterminer toutes les applications croissantes f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x + y) = f(x) + f(y)$$

EXERCICE 23.

Etablir que $E = \{r^3 \mid r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Irrationnels

EXERCICE 24.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On définit une fonction g par $g(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ pour $x \in [0,1]$. On définit également une fonction h par $h(x) = g(x) + e^{-x}\frac{x^n}{n!}$.

1. Montrer que g est strictement décroissante sur $[0,1]$.
2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e$.
3. Montrer que h est strictement croissante sur $[0,1]$.
4. En déduire que $e < \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) + \frac{1}{n!}$.
5. On suppose que e est rationnel. Il existe donc deux entiers naturels p, q tels que $e = \frac{p}{q}$. Montrer par l'absurde que $q > n$.
6. Conclure.

EXERCICE 25.

Soit α et β deux réels non nuls tels que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. On suppose $\alpha > 1$ et α *irrationnel* . On pose

$$A = \{\lfloor n\alpha \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^*\} \text{ et } B = \{\lfloor n\beta \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

1. Montrer que $\beta > 1$ et que β est également irrationnel.
2. On suppose qu'il existe un couple $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\lfloor p\alpha \rfloor = \lfloor q\beta \rfloor$. On pose alors $k = \lfloor p\alpha \rfloor = \lfloor q\beta \rfloor$.
   - **a.** Montrer que $p - \frac{1}{\alpha} < \frac{k}{\alpha} < p$ et $q - \frac{1}{\beta} < \frac{k}{\beta} < q$ et aboutir à une contradiction.
   - **b.** En déduire que $A \cap B = \varnothing$.
3. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ qui n'est ni dans A ni dans B.
   - **a.** Montrer qu'il existe un couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\lfloor p\alpha \rfloor < k < \lfloor (p+1)\alpha \rfloor$ et $\lfloor q\beta \rfloor < k < \lfloor (q+1)\beta \rfloor$.
   - **b.** Montrer que $p < \frac{k}{\alpha} < p + 1 - \frac{1}{\alpha}$ et $q < \frac{k}{\beta} < q + 1 - \frac{1}{\beta}$ et aboutir à une contradiction.
   - **c.** En déduire que $A \cup B = \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 26.

Soit $n \in \mathbb{N}$ impair tel que $n \geqslant 3$. On pose $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}$. On souhaite montrer que $\frac{\varphi}{\pi}$ est irrationnel.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $A_k = (\sqrt{n})^k \cos k\varphi$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_{k+1} + nA_{k-1} = 2A_k$.
2. En déduire que les A_k sont des entiers.
3. Montrer qu'aucun des A_k n'est divisible par n.
4. Conclure en raisonnant par l'absurde.

EXERCICE 27.

Prouver que le nombre $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

EXERCICE 28.✫

Le réel $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est-il rationnel ?

EXERCICE 29.

Que dire de $x + y$ et xy dans les quatre cas suivants ?

1. $x, y \in \mathbb{Q}$;
2. $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
3. $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
4. $y \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

EXERCICE 30.✫

Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n}$ est rationnel *si et seulement si* n est un carré parfait (ie de la forme m^2 avec $m \in \mathbb{N}$).

Intervalles

EXERCICE 31.

Prouver l'égalité

$$\bigcup_{n \geqslant 1} \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[=]0,1[\cup]1,2[.$$

Relations binaires

EXERCICE 32.

Soit φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tous réels a, b on pose

$$a \leqslant_\varphi b \iff \varphi(b) - \varphi(a) \geqslant |b-a|.$$

1. Montrer que $\leqslant_\varphi$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que cet ordre est total si et seulement si pour tous réels a, b on a $|\varphi(b) - \varphi(a)| \geqslant |b-a|$.
3. Quel ordre obtient on si $\varphi = \mathrm{Id}_\mathbb{R}$?

EXERCICE 33.

Soit X un ensemble de cardinal supérieur à 1. On munit $\mathcal{P}(X)$ de l'ordre $\subset$. On note $E \subset \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des singletons de E.

1. E possède-t-il un plus grand élément ?
2. E possède-t-il une borne supérieure ?

EXERCICE 34.

On définit une relation binaire sur $\mathbb{N}^2$ par

$$x \preccurlyeq y \quad \textit{si et seulement si} \quad \begin{pmatrix} x_1 < y_1 \\ \text{ou} \\ x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leqslant y_2 \end{pmatrix}$$

où $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$

1. Prouver que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$.
2. L'ordre est-il total ?
3. On pose $A = \left\{(p, p),\ p \in \mathbb{N}\right\}$ et

$$B = \left\{(2, 10^p),\ p \in \mathbb{N}\right\}.$$

   Les parties A et B de $(\mathbb{N}^2, \preccurlyeq)$ sont-elles majorées ? Possèdent-elles un plus grand élément ? Une borne supérieure ?

EXERCICE 35.

Soit E un ensemble.

1. Montrer que la relation d'inclusion notée $\subset$ est un ordre sur $\mathcal{P}(E)$.
2. L'ordre est-il total ?
3. On pose pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$,

$$\sup(A, B) = \sup(\{A, B\}) \quad \text{et} \quad \inf(A, B) = \inf(\{A, B\}).$$

   a. Justifier ces définitions. On exprimera $\sup(A, B)$ et $\inf(A, B)$ en fonction des sous-ensembles A et B à l'aide des symboles $\cup$ et $\cap$.

   b. Montrer plus généralement que toute partie non vide $\mathcal{F}$ de $(\mathcal{P}(E), \subset)$ admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on explicitera à l'aide de $\mathcal{F}$ en utilisant les symboles $\cap$ et $\cup$.

EXERCICE 36.

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathbb{R}$. Pour $x \in E$, on appelle classe d'équivalence de x l'ensemble $C(x) = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$. Montrer que les classes d'équivalences forment une partition de E.

EXERCICE 37.

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \iff xe^y = ye^x$$

   est une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Quel est le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de x ?

EXERCICE 38.

On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{C}$ par

$$z\mathcal{R}z' \iff |z| = |z'|$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire géométriquement les classes d'équivalence.

EXERCICE 39.

On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{R}$ par

$x\mathcal{R}y$ *si et seulement si* $x + y$ est pair.

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer les classes d'équivalence.

Exercice 40.

On définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer les cardinaux des classes d'équivalence.

Exercice 41.

Soit E un ensemble. On rappelle que E^E est l'ensemble des applications de E dans E. Si f et g sont deux éléments de E^E, on dira que f est conjuguée à g s'il existe une bijection φ de E dans E telle que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$. On notera alors $f \sim g$.

1. **a.** Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E^E.
   b. Quelle est la classe d'équivalence de Id_E ?
   c. Quelle est la classe d'équivalence d'une application constante ?
2. On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}$.
   a. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Les applications $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto ax^2$ sont-elles conjuguées ?
   b. Les applications sin et cos sont-elles conjuguées ?

Exercice 42.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles du plan, de centres respectifs O, O' et de rayons respectifs R et R'. On dit que $\mathcal{C}$ est inférieur à $\mathcal{C}'$ si $OO' \leqslant R' - R$. On note alors $\mathcal{C} \leqslant \mathcal{C}'$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre dans l'ensemble des cercles du plan.

Exercice 43.

Dans $\mathbb{N}^*$, on considère la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$p\mathcal{R}q \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad q = p^n$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?
2. La partie $\{2, 3\}$ est-elle majorée ?

Exercice 44.

Soient E un ensemble, $(F, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $f : E \to F$ une application injective. On définit dans E la relation $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y \iff f(x) \leqslant f(y)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E.