

DEVOIR SURVEILLÉ N°9 : CORRIGÉ

Problème 1 — Intégrales dépendant d'un paramètre

Partie I —

1. a. \sin et \cos sont continues sur \mathbb{R} donc sur \mathbb{R}_+^* . $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . Donc F et G sont continues comme produits de fonctions continues sur \mathbb{R}_+^* .
 b. $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 1$.
 $1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ donc $G(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = 0$.
2. a. \sin et \cos sont dérivables sur \mathbb{R} donc sur \mathbb{R}_+^* . $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Donc F et G sont dérivables comme produits de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* . De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$G'(x) = \frac{x \sin x + \cos x - 1}{x^2}$$

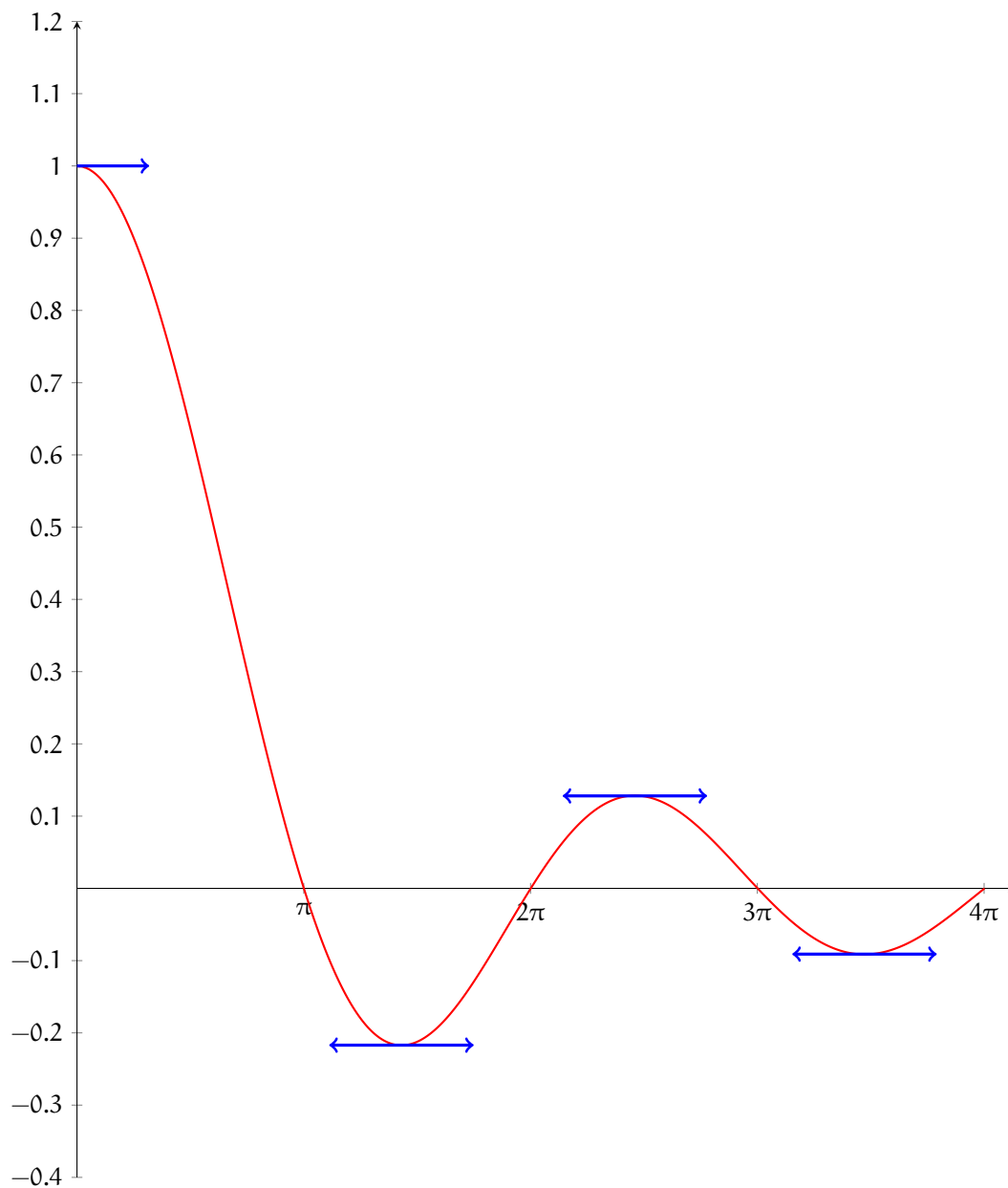
- b. On a $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x^2)$ donc $F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(x)$. Ceci prouve que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = 0$.
 De même, $1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $G(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2} + o(x)$. Ceci prouve que G est dérivable en 0 et que $G'(0) = \frac{1}{2}$.
3. a. F s'annule en les $a_k = k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. De plus, la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ est strictement croissante.
 b. G s'annule en les $b_k = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. De plus, la suite $(b_k)_{k \geq 1}$ est strictement croissante.
 La suite $(b_k)_{k \geq 1}$ est une suite extraite de la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ car $b_k = a_{2k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
4. a. F est continue sur \mathbb{R}_+ donc sur $[a_k, a_{k+1}]$. F est dérivable sur \mathbb{R}_+ donc sur $]a_k, a_{k+1}[$. Enfin, $F(a_k) = F(a_{k+1}) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.
 b. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ donc F' et h ont même signe sur \mathbb{R}_+^* .
 c. h est dérivable sur \mathbb{R} et pour $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = x \sin x$.
 Pour $x \in [a_k, a_{k+1}]$, $x > 0$ et \sin est de signe constant sur $[a_k, a_{k+1}]$ et ne s'annule qu'en a_k et a_{k+1} . Donc h' est de signe constant sur $[a_k, a_{k+1}]$ et ne s'annule qu'en a_k et a_{k+1} . Ainsi h est strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$.
 d. D'après I.4.a, F' et donc h s'annule au moins une fois sur $]a_k, a_{k+1}[$. D'après la question précédente, h est strictement monotone donc injective. Ainsi h s'annule exactement une fois sur $]a_k, a_{k+1}[$ et le réel x_k est donc unique.
 e. Calculons les valeurs de h en a_k et $a_k + \frac{\pi}{2}$:

$$h(a_k) = h(k\pi) = (-1)^k k\pi \qquad h\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right) = h\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1}$$

Ainsi $h(a_k)$ et $h(a_k + \frac{\pi}{2})$ sont de signe opposés. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, h s'annule sur $]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}[$. Ainsi $x_k \in]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}[$.

- f. $x_k > a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Or $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = +\infty$ donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty$.
 De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k\pi < x_k < k\pi + \frac{\pi}{2}$ donc $1 < \frac{x_k}{k\pi} < 1 + \frac{1}{2k}$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_k}{k\pi} = 1$. Par conséquent, $x_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} k\pi$.

5. Les points d'intersection de \mathcal{C}_F avec l'axe des abscisses ont pour abscisses a_1, a_2, a_3, a_4 i.e. $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$. \mathcal{C}_F admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses 0, x_1, x_2, x_3 .



Partie II –

- $f, t \mapsto \cos(xt)$ et $t \mapsto \sin(xt)$ sont continues sur $[0, 1]$ donc $t \mapsto f(t) \cos(xt)$ et $t \mapsto f(t) \sin(xt)$ le sont aussi. Les intégrales $I_f(x)$ et $J_f(x)$ sont donc bien définies.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $\cos(-xt) = \cos(xt)$ et $\sin(-xt) = -\sin(xt)$. Donc $I_f(-x) = I_f(x)$ et $J_f(-x) = -J_f(x)$. Ainsi I_f est paire et J_f est impaire.
- Remarquons d'abord que $I_f(x) + iJ_f(x) = \int_0^1 f(t)e^{ixt} dt$. Comme f et $t \mapsto \frac{e^{ixt}}{ix}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, on a en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I_f(x) + iJ_f(x) &= \left[f(t) \frac{e^{ixt}}{ix} \right]_0^1 - \int_0^1 f'(t) \frac{e^{ixt}}{ix} dt \\ &= \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} - \frac{1}{ix} \int_0^1 f'(t)e^{ixt} dt \end{aligned}$$

- Comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, f et f' sont continues sur le segment $[0, 1]$ donc bornées.

c. Soit $x > 0$. Par inégalité triangulaire :

$$|I_f(x) + iJ_f(x)| \leq \left| \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} \right| + \left| \frac{1}{ix} \int_0^1 f'(t)e^{ixt} dt \right|$$

Or $x > 0$ donc $|ix| = x$. Donc par inégalité triangulaire :

$$\left| \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} \right| \leq \frac{|f(1)| + |f(0)|}{x} \leq \frac{2M}{x}$$

De plus, en utilisant l'inégalité de continuité de l'intégrale :

$$\left| \frac{1}{ix} \int_0^1 f'(t)e^{ixt} dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^1 |f'(t)e^{ixt}| dt \leq \frac{1}{x} \int_0^1 M' dt = \frac{M'}{x}$$

Donc, en posant $A = 2M + M'$, on a $|I_f(x) + iJ_f(x)| \leq \frac{A}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A}{x} = 0$ donc, d'après la question précédente, $\lim_{x \rightarrow +\infty} |I_f(x) + iJ_f(x)| = 0$. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_f(x) + iJ_f(x) = 0$. Par passage aux parties réelle et imaginaire, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} J_f(x) = 0$.

e. Puisque I_f est paire et que J_f est impaire, $\lim_{x \rightarrow -\infty} I_f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} J_f(x) = 0$.

4. a. $\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

b. \sin est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin'(x)| = |\cos(x)| \leq 1$. Soit $u \in \mathbb{R}$. On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis entre 0 et u : $|\sin(u) - \sin(0)| \leq |u - 0|$ i.e. $|\sin(u)| \leq |u|$.

c. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |I_f(x) - I_f(y)| &= \left| \int_0^1 f(t)(\cos(xt) - \cos(yt)) dt \right| \\ &= \left| -2 \int_0^1 f(t) \sin\left(t \frac{x+y}{2}\right) \sin\left(t \frac{x-y}{2}\right) dt \right| \\ &\leq 2 \int_0^1 \left| f(t) \sin\left(t \frac{x+y}{2}\right) \sin\left(t \frac{x-y}{2}\right) \right| dt \end{aligned}$$

Or pour $t \in [0, 1]$, $|\sin\left(t \frac{x+y}{2}\right)| \leq 1$ et $|\sin\left(t \frac{x-y}{2}\right)| \leq \left|t \frac{x-y}{2}\right| = \frac{t}{2}|x-y|$ d'après II.4.b. Par conséquent,

$$|I_f(x) - I_f(y)| \leq |x-y| \int_0^1 t|f(t)| dt$$

5. Posons $K = \int_0^1 t|f(t)| dt$. La question précédente montre que I_f est K -lipschitzienne donc continue.

6. Pour $f = 1$, on a $I_f = F$ et $J_f = G$.

Problème 2 – Equation intégrale

Partie I –

1. Remarquons tout d'abord que la relation (1) peut s'écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x tf(t) dt = g(x)$$

On a donc $f(x) = g(x) + x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ et $x \mapsto \int_0^x tf(t) dt$ sont de classe \mathcal{C}^1 comme primitives de fonctions continues. Puisque $x \mapsto x$ et g sont également de classe \mathcal{C}^1 , f est de classe \mathcal{C}^1 . Les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ et $x \mapsto \int_0^x tf(t) dt$ sont donc de classe \mathcal{C}^2 comme primitives de fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Puisque

$x \mapsto x$ et g sont également de classe \mathcal{C}^2 , f de classe \mathcal{C}^2 .

En dérivant une première fois la relation (1), on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) - \int_0^x f(t) dt = g'(x)$$

En dérivant cette relation une seconde fois, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) - f(x) = g''(x)$$

2. Dans les trois cas qui suivent, g'' est nulle. Si f est solution de (1), elle est solution de (2) et il existe donc $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = Ae^x + Be^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En reportant dans (1), on voit que f est solution de (1) *si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R}, (A - B)x + (A + B) = g(x)$$

On rappelle que la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto x)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- a. Si g est nulle, f est solution de (1) *si et seulement si* $\begin{cases} A - B = 0 \\ A + B = 0 \end{cases}$ i.e. $A = B = 0$. L'unique solution de (1) est donc la solution nulle.

- b. Si g est constante, notons C cette constante. f est solution de (1) *si et seulement si* $\begin{cases} A - B = 0 \\ A + B = C \end{cases}$ i.e. $A = B = \frac{C}{2}$.
L'unique solution est donc $x \mapsto C \cosh x$.

- c. Si g est affine, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $g(x) = \lambda x + \mu$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. f est solution de (1) *si et seulement si* $\begin{cases} A - B = \lambda \\ A + B = \mu \end{cases}$ i.e. $A = \frac{\lambda + \mu}{2}$ et $B = \frac{\mu - \lambda}{2}$. L'unique solution est donc $x \mapsto \lambda \sinh x + \mu \cosh x$.

3. Soient f_1 et f_2 deux solutions éventuelles de (1). Par linéarité de l'intégrale, $f_1 - f_2$ est solution d'une équation du type (1) avec un second membre nul. La question ?? montre que $f_1 - f_2 = 0$ i.e. $f_1 = f_2$. Ainsi (1) admet au plus une solution.
4. Soit f une fonction de la forme donnée par l'énoncé. f est bien dérivable puisque les intégrales sont des primitives donc des fonctions dérivables. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{e^x}{2} \left[\int_0^x e^{-t} g''(t) dt + k_A \right] + \frac{e^{-x}}{2} \left[\int_0^x e^t g''(t) dt + k_B \right]$$

On en déduit que f' est à nouveau dérivable et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = \frac{e^x}{2} \left[\int_0^x e^{-t} g''(t) dt + k_A \right] - \frac{e^{-x}}{2} \left[\int_0^x e^t g''(t) dt + k_B \right] + g''(x) = f(x) + g''(x)$$

Autrement dit, f est solution de (2).

5. Soit f une solution de (2) vérifiant $f(0) = g(0)$ et $f'(0) = g'(0)$. En intégrant la relation $f''(t) - f(t) = g''(t)$ entre 0 et x , on obtient $f'(x) - f'(0) - F(x) = g'(x) - g'(0)$ où F désigne la primitive de f nulle en 0. Puisque $f'(0) = g'(0)$, on a donc $f'(t) - F(t) = g'(t)$. En intégrant à nouveau entre 0 et x , on obtient $f(x) - f(0) - \int_0^x F(t) dt = g(x) - g(0)$. Or $f(0) = g(0)$ et en intégrant par parties

$$\int_0^x F(t) dt = [(t-x)F(t)]_0^x - \int_0^x (t-x)F'(t) dt = \int_0^x (x-t)f(t) dt$$

Ainsi $f(x) - \int_0^x (x-t)f(t) dt = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ i.e. f est solution de (1).

6. D'après la question ?? et en utilisant le fait que $g'' = \exp$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{2}(x + k_A) - \frac{e^{-x}}{2} \left(\frac{e^{2x}}{2} + k_B \right)$$

Les conditions $f(0) = g(0)$ et $f'(0) = g'(0)$ de la question ??, fournissent $\frac{k_A}{2} - \frac{k_B}{2} = 1$ et $\frac{k_A}{2} + \frac{k_B}{2} = 1$ i.e. $k_A = 2$ et $k_B = 0$. L'unique solution de (1) est donc $x \mapsto e^x \left(\frac{x}{2} + 1 \right)$.

Partie II –

1. On raisonne comme à la question ?? pour montrer que $A(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 . De plus $A(f)'(x) = \int_0^x f(t) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $A(f)'$ est donc elle-même de classe \mathcal{C}^1 i.e. $A(f)$ est de classe \mathcal{C}^2 et $A(f)'' = f$.
2. Pour tout $f \in E$, $A(f)$ est également continue puisqu'elle est de classe \mathcal{C}^2 d'après la question précédente. Ainsi $A(E) \subset E$. De plus, A est linéaire par linéarité de l'intégrale. Ainsi A est un endomorphisme de E . Soit $f \in \text{Ker } A$. On a donc $A(f) = 0$ et a fortiori $A(f)'' = 0$. Or $A(f)'' = f$ donc $f = 0$, d'où $\text{Ker } A = \{0_E\}$ et A est injectif.
3. Soient $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$. On procède à nouveau par intégration par parties :

$$\begin{aligned} U \circ A(f)(x) &= \int_0^x \text{sh}(x-t)A(f)(t) dt = -[\text{ch}(x-t)A(f)(t)]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \text{ch}(x-t)A(f)'(t) dt \\ &= -A(f)(x) - [\text{sh}(x-t)A(f)'(t)]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \text{sh}(x-t)A(f)''(t) dt \\ &= -A(f)(x) + \int_0^x \text{sh}(x-t)f(t) dt = -A(f)(x) + U(f)(x) \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $A(f)(0) = A(f)'(0) = 0$ et $A(f)'' = f$. Les intégrations par parties sont légitimes car $A(f)$ est de classe \mathcal{C}^2 . L'égalité précédente étant vraie pour tout réel x , on a $U \circ A(f) = U(f) - A(f)$. Ceci étant maintenant vrai pour tout $f \in E$, on en déduit $U \circ A = U - A$.

4. Faisons l'hypothèse de récurrence $\text{HR}(n)$ suivante

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, A^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(t) dt$$

$\text{HR}(1)$ est vraie par définition de A . Supposons $\text{HR}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$A^{n+1}(f)(x) = A^n(A(f))(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} A(f)(t) dt$$

En intégrant une première fois par parties :

$$A^{n+1}(f)(x) = -\left[\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} A(f)(t)\right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} A(f)'(t) dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} A(f)'(t) dt$$

car $A(f)(0) = 0$. En intégrant à nouveau par parties :

$$A^{n+1}(f)(x) = -\left[\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} A(f)'(t)\right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} A(f)''(t) dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f(t) dt$$

car $A(f)'(0) = 0$ et $A(f)'' = f$.

5. a. Puisque sh est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction sh entre 0 et u à l'ordre $2n$:

$$\left| \text{sh } u - \sum_{p=0}^{2n} \frac{\text{sh}^{(p)}(0)}{p!} u^p \right| \leq M \frac{|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

où M désigne le maximum de $|\text{sh}^{(2n+1)}|$ sur $[0, u]$ ou $[u, 0]$ suivant le signe de u .

Or pour p pair, $\text{sh}^{(p)} = \text{sh}$ et donc $\text{sh}^{(p)}(0) = 0$ et pour p impair $\text{sh}^{(p)} = \text{ch}$ et donc $\text{sh}^{(p)}(0) = 1$. Ainsi $\sum_{p=0}^{2n} \frac{\text{sh}^{(p)}(0)}{p!} u^p =$

$$\sum_{k=1}^n \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

On a donc également $\text{sh}^{(2n+1)} = \text{ch}$. Puisque ch est paire et croissante sur \mathbb{R}_+ , on a donc $M = \text{ch } u$ en distinguant les cas $u \geq 0$ et $u \leq 0$. On en déduit donc la formule demandée.

- b. En utilisant l'expression de $A_n(f)(x)$ trouvée en ??, on peut écrire :

$$U(f)(x) - U_n(f)(x) = \int_0^x \left(\text{sh}(x-t) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-t)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right) f(t) dt$$

Par conséquent

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leq \left| \int_0^x \left| \text{sh}(x-t) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-t)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right| |f(t)| dt \right|$$

Mais grâce à la majoration de la question ??, on a donc

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leq \left| \int_0^x \frac{\text{ch}(x-t)|x-t|^{2n+1}}{(2n+1)!} |f(t)| dt \right|$$

On en déduit par inégalité de la moyenne

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leq M \left| \int_0^x |f(t)| dt \right|$$

où M désigne le maximum de $t \mapsto \frac{\text{ch}(x-t)|x-t|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ sur l'intervalle $[0, x]$ ou $[x, 0]$. Par changement de variables, M est aussi le maximum de $t \mapsto \frac{\text{ch}(t)|t|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ sur l'intervalle $[0, x]$ ou $[x, 0]$. Cette fonction étant paire et croissante sur \mathbb{R}_+ , on trouve $M = \frac{\text{ch}(x)|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ en distinguant les cas $x \geq 0$ et $x \leq 0$.

Les théorèmes de comparaison sur les suites usuelles donnent $|x|^{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o((2n+1)!)$. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{ch}(x)|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \int_0^x |f(t)| dt \right| = 0$$

Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} U(f)(x) - U_n(f)(x) = 0$.

- c. Remarquons que $A \circ U_n = U_n \circ A = U_{n+1} - A$.

On peut donc écrire

$$U \circ A = (U - U_n) \circ A + U_n \circ A = (U - U_n) \circ A + U_{n+1} - A = (U - U_n) \circ A + (U_{n+1} - U) + (U - A)$$

Soient $f \in E$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc

$$U \circ A(f)(x) = (U - U_n) \circ A(f)(x) + (U_{n+1} - U)(f)(x) + (U - A)(f)(x)$$

En appliquant la question précédente, on a $(U_{n+1} - U)(f)(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On peut également appliquer la question précédente à $A(f)$ qui est bien une fonction de E de sorte que $(U - U_n) \circ A(f)(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par unicité de la limite, on a donc $U \circ A(f)(x) = (U - A)(f)(x)$. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $U \circ A(f) = (U - A)(f)$. Ceci étant valable pour tout $f \in E$, on a finalement $U \circ A = U - A$.

6. a. On a $(I - A) \circ (I + U) = I - A + U - A \circ U = I$ d'après la question ??. De même, $(I + U) \circ (I - A) = I - A + U + U \circ A = I$ d'après la question ??. Ainsi $I - A$ et $I + U$ sont inversibles et inverses l'une de l'autre.
b. Une fonction f de E est solution de (1) si et seulement si $(I - A)(f) = g$ i.e. $f = (I + U)(g)$. L'unique solution f de (1) est donc définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + \int_0^x \text{sh}(x-t)g(t) dt$$

- c. g est bien continue mais n'est pas de classe \mathcal{C}^2 : on ne peut plus utiliser les résultats de la première partie. Tout d'abord, remarquons que f est paire. En effet, en utilisant la parité de g :

$$f(-x) = g(-x) + \int_0^{-x} \text{sh}(-x-t)g(t) dt = g(x) + \int_0^{-x} \text{sh}(-x-t)g(-t) dt$$

Effectuons le changement de variables $u = -t$ et utilisons l'imparité de sh :

$$f(-x) = g(x) - \int_0^x \text{sh}(-x+u)g(u) du = g(x) + \int_0^x \text{sh}(x-u)g(u) du = f(x)$$

Déterminons maintenant f sur \mathbb{R}_+ en distinguant des cas.

► Si $x \in [0, 1[$,

$$f(x) = x + \int_0^x t \text{sh}(x-t) dt = x - [t \text{ch}(x-t)]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \text{ch}(x-t) dt = -[\text{sh}(x-t)]_{t=0}^{t=x} = \text{sh}(x)$$

► Si $x \in [0, 2[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 - x + \int_0^x \text{sh}(x-t)g(t) dt = 2 - x + \int_0^1 t \text{sh}(x-t) dt + \int_1^x (2-t) \text{sh}(x-t) dt \\ &= 2 - x - [t \text{ch}(x-t)]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \text{ch}(x-t) dt - [(2-t) \text{ch}(x-t)]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x \text{ch}(x-t) dt \\ &= -[\text{sh}(x-t)]_{t=0}^{t=1} + [\text{sh}(x-t)]_{t=1}^{t=x} \\ &= \text{sh}(x) - 2 \text{sh}(x-1) \end{aligned}$$

► Si $x \geq 2$,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t) \, dt = \int_0^1 t \operatorname{sh}(x-t) \, dt + \int_1^2 (2-t) \operatorname{sh}(x-t) \, dt \\
 &= -[t \operatorname{ch}(x-t)]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \operatorname{ch}(x-t) \, dt - [(2-t) \operatorname{ch}(x-t)]_{t=1}^{t=2} - \int_1^2 \operatorname{ch}(x-t) \, dt \\
 &= -[\operatorname{sh}(x-t)]_{t=0}^{t=1} + [\operatorname{sh}(x-t)]_{t=1}^{t=2} \\
 &= \operatorname{sh}(x) - 2 \operatorname{sh}(x-1) + \operatorname{sh}(x-2)
 \end{aligned}$$