Devoir à la maison n°02

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Partie I –

1. **a.** Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{e^t}{\arcsin t}$ lorsque t tend vers 0^+.

b. En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^t}{\arcsin t}\, dt$ lorsque x tend vers 0^+.

c. En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{\arcsin t}\, dt$ lorsque x tend vers 0^+.

2. **a.** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$$

b. Plus généralement montrer que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \underset{x\to+\infty}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{k!x}{\ln^{k+1}(x)} + o\left(\frac{x}{\ln^{n+1}(x)}\right)$$

3. Montrer que

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2+1}\, dt \underset{x\to+\infty}{=} \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right)$$

Partie II –

Soit a un nombre réel et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ à valeurs strictement positives. On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \alpha$.

2. On suppose dans cette question que $\alpha < -1$.

a. Montrer que f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

b. Montrer que

$$\int_x^{+\infty} f(t)\, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{xf(x)}{\alpha+1}$$

3. On suppose dans cette question que $\alpha > -1$.

a. Etudier l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$.

b. Montrer que

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{xf(x)}{\alpha+1}$$

4. **a.** Etudier l'intégrabilité sur $[2, +\infty[$ des applications $x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta}$ selon $\beta \in \mathbb{R}$.

b. Etudier à l'aide des questions précédentes l'intégrabilité sur $[2, +\infty[$ des applications $x \mapsto \dfrac{1}{x^\gamma(\ln x)^\beta}$ selon $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.