Devoir à la maison n°01 : corrigé

Problème 1 — Bac C 1992

Partie I – Etude des fonctions f_n

1. La fonction h_n est clairement dérivable sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ h_n'(x) = \frac{n}{1+x} + {\frac{1}{1+x}}^2 > 0$$

On en déduit que h_n est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$.

Remarque. On peut aussi remarquer que

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ h_n(x) = n\ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x}$$

Ainsi h_n est-elle strictement croissante sur $]-1,+\infty[$ comme la différence d'une fonction strictement croissante t d'une fonction strictement décroissante sur cet intervalle. ■

2. A nouveau, f_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(1+x) + \frac{x^n}{1+x} = x^{n-1}h_n(x)$$

La fonction h_n est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$ et nulle en 0. Ainsi est-elle strictement négative sur $]-1,0[$ et strictement positive sur $]-1,0[$.

Cas n pair
Si n est pair, $(-1)^n = 1$ donc $\lim_{-1^+} f_n = -\infty$. Par ailleurs, il est clair que $\lim_{+\infty} f_n = +\infty$.

x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}		$-$	0	$+$	
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Cas n impair
Si n est impair, $(-1)^n = -1$ donc $\lim_{-1^+} f_n = +\infty$. Comme précédemment, $\lim_{+\infty} f_n = +\infty$.

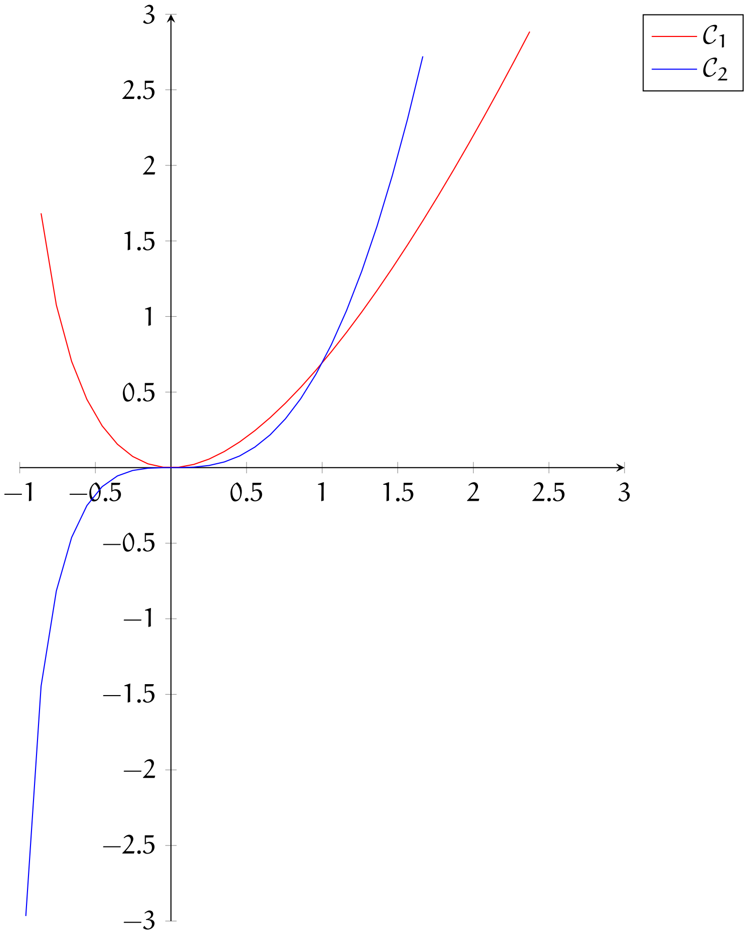
x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}		$+$	0	$+$	
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. On factorise $f_2(x) - f_1(x)$:

$$\forall x \in]-1, +\infty[,\ f_2(x) - f_1(x) = x(x-1)\ln(1+x)$$

x	-1		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(1+x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_2(x) - f_1(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\mathcal{C}_1$ est situé au-dessus de $\mathcal{C}_2$ sur $]-1, 1]$ et au-dessous sur $[1, +\infty[$. On peut préciser que les deux courbes s'intersectent en les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(1, \ln 2)$.



Partie II – Etude d'une suite

1. Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant \ln 2$ par croissance du logarithme. Par suite, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^n \ln 2$ pour tout $x \in [0,1]$. Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$0 \leqslant U_n \leqslant \int_0^1 x^n \ln 2 \, dx = \frac{\ln 2}{n+1}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement garantit que (U_n) converge vers 0.

2. f_{n+1} est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle et

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ f'_{n+1}(x) = (n+1)f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

3. De manière équivalente,

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ f_n(x) = \frac{1}{n+1}f'_{n+1}(x) - \frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{1+x}$$

En intégrant sur $[0,1]$, on obtient

$$U_n = \frac{1}{n+1}(f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0)) - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}\, dx}{1+x} = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}\, dx}{1+x}$$

4. La formule précédente donne

$$U_1 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{1+x}$$

Remarquons alors que $x^2 = (x+1)(x-1)+1$ de sorte que

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x} = \int_0^1 (x-1)\,dx + \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = -\frac{1}{2} + \ln 2$$

Ainsi

$$U_1 = \frac{1}{4}$$

5. On peut procéder par récurrence mais on peut aussi remarquer que pour $x \neq -1$

$$\frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k$$

Par conséquent

$$\frac{x^{n+1}}{1+x} = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k\right)$$

En intégrant sur $[0,1]$, on obtient

$$V_n = (-1)^{n+1}\left(\ln 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right)$$

On en déduit par exemple que

$$U_n = \frac{1+(-1)^n}{2(n+1)}\ln 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$