

# DEVOIR SURVEILLÉ N°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont autorisées.

## Problème 1

**1** On note  $a_n = \frac{n^{n-1}}{n!}$  le coefficient de  $x^n$  dans la série entière. D'après la formule de Stirling,

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^n}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = e$  et le rayon de convergence de la série entière vaut  $e^{-1}$  d'après la règle de d'Alembert.

**2** Toujours d'après la formule de Stirling,

$$\frac{n^{n-1}e^{-n}}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Par comparaison à une série de Riemman convergente,  $\sum \frac{n^{n-1}e^{-n}}{n!}$  converge.

**3** Pour tout  $x \in [-e^{-1}, e^{-1}]$ ,

$$|a_n x^n| = \left| \frac{n^{n-1}}{n!} x^n \right| \leq \frac{n^{n-1}e^{-n}}{n!}$$

D'après la question précédente, la série définissant  $f$  converge normalement sur  $[-e^{-1}, e^{-1}]$ .

**4** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n : x \mapsto a_n x^n$  est continue sur  $[-e^{-1}, e^{-1}]$ . La série  $\sum f_n$  converge normalement et donc uniformément sur  $[-e^{-1}, e^{-1}]$  d'après la question précédente. Ainsi  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  est continue sur  $[-e^{-1}, e^{-1}]$ .

**5** Par concavité du logarithme,  $\ln(1+x) \leq x$  pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$ . Notamment, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

puis

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$$

et enfin, par croissance de l'exponentielle,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

**6** Comme  $f$  est la somme d'une série entière de rayon de convergence  $e^{-1}$ , elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur son intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire  $] -e^{-1}, e^{-1}[$ .

On obtient la dérivée de  $f$  en dérivant terme à terme :

$$\forall x \in ] -e^{-1}, e^{-1}[, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} x^n$$

**7** Il est clair que  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [0, e^{-1}[$ .  
Soit  $x \in ]-e^{-1}, 0[$ . Comme  $x$  est négatif,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n |x|^n}{n!}$$

On vérifie alors le critère spécial des séries alternées. Posons  $u_n = \frac{(n+1)^n |x|^n}{n!}$ . Comme  $\sum (-1)^n u_n$  converge, on a nécessairement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . De plus, en utilisant la question 5

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_n}{u_{n-1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n |x| \leq e|x| \leq 1$$

Comme  $(u_n)$  est positive, on peut affirmer qu'elle est décroissante. La série  $\sum (-1)^n u_n$  vérifie donc le critère spécial des séries alternées. La somme  $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$  est donc du signe de son premier terme  $u_0$ . Ainsi  $f'(x) \geq 0$ .

La fonction  $f$  est donc croissante sur  $] -e^{-1}, e^{-1}[$ .

**8** Remarquons que

$$f\left(-\frac{1}{e}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^{n-1} e^{-n}}{n!}$$

Posons  $u_n = \frac{n^{n-1} e^{-n}}{n!}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . On vérifie à nouveau que la série  $\sum (-1)^n u_n$  vérifie le critère spécial des séries alternées. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{e} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{e} \leq 1$$

Donc la suite  $(u_n)$  est décroissante. Elle est également de limite nulle puisque  $\sum (-1)^n u_n$  converge. Alors, d'après le théorème sur les séries alternées

$$\left| f\left(-\frac{1}{e}\right) - \sum_{k=1}^n (-1)^k u_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| \leq |u_{n+1}| = u_{n+1}$$

On cherche donc  $n$  tel que  $u_{n+1} \leq 10^{-2}$ . On propose un programme Python à cet effet.

```
from math import factorial, exp

def approx(ε):
    u = exp(-1)
    s = 0
    n = 1
    while u > ε:
        s += (-1)**n * u
        u *= (1+1/n)**(n-1) * exp(-1)
        n += 1
    return s
```

```
>>> approx(10**-2)
-0.28352486503145236
```

**9**  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  comme composée d'une fonction polynôme et de l'exponentielle. On raisonne par récurrence sur  $i$ .

On a bien  $\varphi(x) = P_0(e^x)(1 - e^x)^m$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  avec  $P_0 = 1$ . Soit  $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ . Supposons qu'il existe un polynôme  $P_i$  tel que  $\varphi^{(i)}(x) = P_i(e^x)(1 - e^x)^{m-i}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi^{(i+1)}(x) = P_i'(e^x)e^x(1 - e^x)^{m-i} - (m-i)P_i(e^x)e^x(1 - e^x)^{m-i-1} = P_{i+1}(e^x)(1 - e^x)^{m-i-1}$$

avec  $P_{i+1} = X(1 - X)P_i' - (m-i)XP_i$ .

Par récurrence, il existe bien pour tout  $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$  un polynôme  $P_i$  tel que  $\varphi^{(i)}(x) = P_i(e^x)(1 - e^x)^{m-i}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**10** Soit un entier  $m \geq 2$ . D'après la formule du binôme,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n e^{nx}$$

En dérivant  $m - 1$  fois, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi^{(m-1)}(x) = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n n^{m-1} e^{nx}$$

puis en évaluant en 0

$$\varphi^{(m-1)}(0) = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n n^{m-1}$$

Mais, d'après la question précédente,

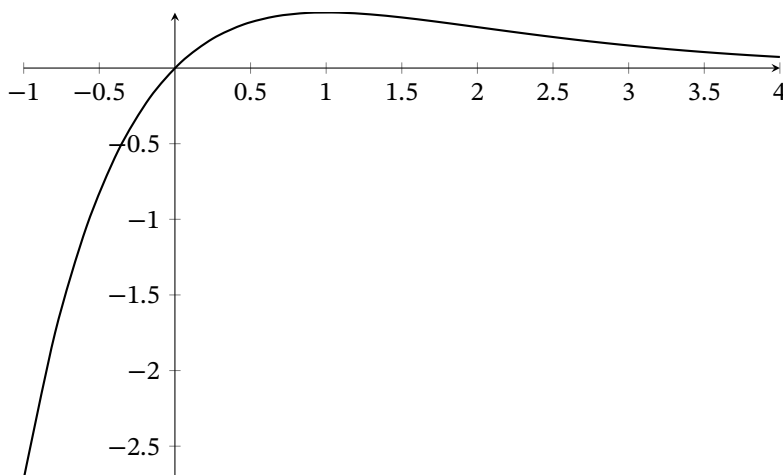
$$\varphi^{(m-1)}(0) = P_{m-1}(1)(1-1)^{m-1} = 0$$

car  $m - 1 \geq 1$ . On en déduit le résultat demandé.

**11** La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $g'(y) = (1-y)e^{-y}$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ . On en déduit le tableau de variation suivant.

$y$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$g'(y)$	$+$	$0$	$-$
$g(y)$	$-\infty$	$e^{-1}$	$0$

puis le graphe suivant



**12** La fonction  $g$  est strictement croissante et continue sur  $[-1, 0]$ . Puisque

$$g(-1) = -e < -e^{-1} < 0 = g(0)$$

il existe un unique réel  $\alpha \in ]-1, 0[$  tel que  $g(\alpha) = -\frac{1}{e}$ .

De plus, par croissance de  $g$  sur  $[\alpha, 1]$ ,

$$\forall y \in [\alpha, 1], g(\alpha) = -\frac{1}{e} \leq g(y) \leq g(1) = \frac{1}{e}$$

**13** On a vu précédemment que  $f$  était définie et même continue sur  $[-e^{-1}, e^{-1}]$ . Soit  $y \in [\alpha, 1]$ . D'après la question précédente,  $g(y) = ye^{-y} \in [-e^{-1}, e^{-1}]$  donc  $f$  est bien définie en  $ye^{-y}$ . De plus,

$$f(ye^{-y}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} y^n e^{-ny}$$

Mais en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle,

$$\begin{aligned} f(ye^{-y}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} y^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-ny)^m}{m!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} y^n \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-n} n^{m-n} y^{m-n}}{(m-n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} y^n \cdot \frac{(-1)^{m-n} n^{m-n} y^{m-n}}{(m-n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} (-1)^{m-n} \frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!} y^m \end{aligned}$$

**14** Soit  $y \in [\alpha, -\alpha]$ . D'après le théorème de Fubini positif,

$$\begin{aligned} \sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2} |z_{n,m}| &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} |z_{n,m}| \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!} |y|^m \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{n^{m+n-1}}{n!m!} |y|^{m+n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} |y|^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(n|y|)^m}{m!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} |y|^n e^{n|y|} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} (|y|e^{|y|})^n \end{aligned}$$

Or  $y \in [\alpha, -\alpha]$ ,  $-|y| \in [\alpha, 0]$  et donc  $g(-|y|) \in [-e^{-1}, e^{-1}]$  i.e.  $-|y|e^{|y|} \in [-e^{-1}, e^{-1}]$  et donc également  $|y|e^{|y|} \in [-e^{-1}, e^{-1}]$ . On a vu que la série définissant  $f$  convergeait sur  $[-e^{-1}, e^{-1}]$  donc

$$\sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2} |z_{n,m}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} (|y|e^{|y|})^n < +\infty$$

Ceci prouve que la famille  $(z_{n,m})_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est bien sommable.

**15** Soit  $y \in [\alpha, -\alpha]$ . On peut maintenant appliquer le théorème de Fubini. D'une part, en reprenant les calculs de la question précédente

$$\begin{aligned} \sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2} z_{n,m} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} z_{n,m} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} (-1)^{m-n} \frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!} y^m \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{n^{m+n-1}}{n!m!} y^{m+n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} y^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-ny)^m}{m!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} y^n e^{-ny} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} (ye^{-y})^n \\ &= f(g(y)) \end{aligned}$$

D'autre part,

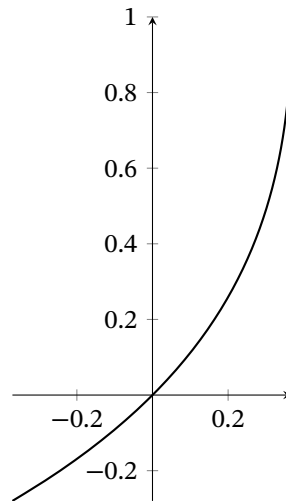
$$\begin{aligned}
 \sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2} z_{n,m} &= \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} z_{n,m} \\
 &= \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^m (-1)^{m-n} \frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!} y^m \\
 &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m y^m}{m!} \sum_{n=1}^m (-1)^n \binom{m}{n} n^{m-1}
 \end{aligned}$$

D'après la question **10**, tous les termes d'indices  $m \geq 2$  de cette somme sont nuls. Ainsi

$$\sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2} z_{n,m} = y$$

Finalement,  $f(g(y)) = y$ .

**16** La question précédente montre que  $f$  est la bijection réciproque de la bijection de  $[\alpha, 1]$  sur  $[-e^{-1}, e^{-1}]$  induite par  $g$ . On en déduit le graphe suivant.



**17** La fonction  $g$  est dérivable en  $\alpha$  et  $g'(\alpha) = (1 - \alpha)e^{-\alpha} \neq 0$  donc  $f$  est dérivable en  $g(\alpha) = -\frac{1}{e}$ . Par contre,  $g$  est dérivable en 1 mais  $g'(1) = 0$  donc  $f$  n'est pas dérivable en  $g(1) = \frac{1}{e}$ . On peut préciser que le graphe de  $f$  admet une tangente verticale au point d'abscisse  $\frac{1}{e}$ .

**Solution 1**

1. La famille  $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est sommable car elle est à termes positifs et  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge. Ainsi la famille  $\left(\frac{1}{p^2 q^2}\right)_{(p,q) \in A}$  est sommable en tant que produit des deux familles sommables  $\left(\frac{1}{p^2}\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$  et  $\left(\frac{1}{q^2}\right)_{q \in \mathbb{N}^*}$ . De plus

$$\sum_{(p,q) \in A} \frac{1}{p^2 q^2} = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^2 = \frac{\pi^4}{36}$$

2. On remarque que pour tout  $(p, q) \in A$ ,  $\frac{1}{p^2 + q^2} \geq \frac{1}{(p+q)^2} \geq 0$ . On peut alors partitionner  $A = \bigsqcup_{n \geq 2} I_n$  avec  $I_n = \{(p, q) \in A, p+q = n\}$ . De plus, pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{(p+q)^2} = \frac{n-1}{n^2}$$

Comme la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{n-1}{n^2}$  diverge, la famille  $\left(\frac{1}{(p+q)^2}\right)_{(p,q) \in A}$  n'est pas sommable d'après le théorème de sommation par paquets. La famille  $\left(\frac{1}{p^2 + q^2}\right)_{(p,q) \in A}$  n'est donc pas sommable non plus.

**Solution 2**

1. En convenant que  $A_{n_0-1} = 0$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0}^n a_k B_k &= \sum_{k=n_0}^n (A_k - A_{k-1}) B_k \\ &= \sum_{k=n_0}^n A_k B_k - \sum_{k=n_0}^n A_{k-1} B_k \\ &= \sum_{k=n_0}^n A_k B_k - \sum_{k=n_0-1}^{n-1} A_k B_{k+1} \\ &= A_n B_n + \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k (B_k - B_{k+1}) \\ &= A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k \end{aligned}$$

2. a. La série  $\sum b_n$ , autrement dit la série  $\sum B_{n+1} - B_n$ , est une série télescopique. Elle est donc de même nature que la suite  $(B_n)$ , c'est-à-dire convergente.

- b. Tout d'abord,  $(A_n)$  est bornée donc  $A_n B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(B_n)$ . Puisque  $(B_n)$  converge vers 0, il en est de même de la suite  $(A_n B_n)$ .

Ensuite, la suite  $(B_n)$  étant décroissante, la série  $\sum b_n$  est une série à termes de signe constant. Or  $A_n b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(b_n)$  et la série  $\sum b_n$  converge donc la série  $\sum A_n b_n$  converge. On en déduit que la suite de ses sommes partielles converge. La suite de terme général  $\sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$  converge donc.

D'après la question 1, la suite de terme général  $\sum_{k=n_0}^n a_k B_k$  converge donc en tant que somme de deux suites convergentes. Puisque  $\sum_{k=n_0}^n a_k B_k$  est la somme de partielle de rang  $n$  de la série  $\sum a_n B_n$ , la série  $\sum a_n B_n$  converge également.

- c. Posons  $a_n = (-1)^n$  pour  $n \geq n_0$ . Alors  $A_n$  vaut 0, -1 ou 1 suivant la parité de  $n$  ou  $n_0$ . En particulier, la suite  $(A_n)$  est bornée et on peut donc appliquer le résultat de la question précédente. La série  $\sum (-1)^n B_n$  converge donc.

3. a. Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique.

$$\sum_{k=1}^n e^{ki\theta} = e^{i\theta} \frac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}} \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

b. Cas  $\alpha \leq 0$ . La suite de terme général  $\frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}$  ne tend pas vers 0. En effet,  $\left| \frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha} \right| = n^{-\alpha} \geq 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Cas  $\alpha > 1$ . La série  $\sum \frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}$  converge absolument. En effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\left| \frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha}$  et la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge puisque  $\alpha > 1$ .

Cas  $0 < \alpha \leq 1$ . On utilise les résultats précédents avec  $n_0 = 1$ ,  $a_n = e^{in\theta}$  et  $B_n = \frac{1}{n}$ . D'après la question 3.a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$|A_n| = \left| e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}} \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\theta}{2} \right|}$$

La suite  $(A_n)$  est donc bornée. La suite  $(B_n)$  est clairement décroissante de limite nulle. La question 2.b permet alors d'affirmer que la série  $\sum a_n B_n$  i.e. la série  $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ , converge. Cette série ne converge pas absolument puisque  $\left| \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha}$  et que la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  ne converge pas ( $\alpha \leq 1$ ).

4. Rappelons que pour tout  $n \geq n_0$

$$\sum_{k=n_0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k B_k$$

La suite  $(B_n)$  converge vers 0 et  $(A_n)$  est bornée donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n B_n = 0$ .

Puisque  $(A_n)$  est bornée,  $A_n b_n = \mathcal{O}(|b_n|)$ . Or la série  $\sum |b_n|$  converge car  $\sum_{n \geq n_0} b_n$  est absolument convergente. De plus, la série  $\sum |b_n|$  est à termes positifs donc la série  $\sum A_n b_n$  converge (absolument). Ainsi la suite de terme général  $\sum_{k=n_0}^{n-1} A_k B_k$  converge.

Il s'ensuit que la suite de terme général  $\sum_{k=n_0}^n a_k B_k$  converge également i.e. que la série  $\sum_{n \geq n_0} a_n B_n$  converge.