# Devoir surveillé n°09

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

**Solution 1**

**1.** On a clairement $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \dfrac{b}{b+r}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \dfrac{r}{b+r}$. Autrement dit, $X_1 \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{b}{b+r}\right)$.

**2.** Si on a tiré une boule blanche au premier tirage, l'urne contient alors $b+1$ boules blanches et $r$ boules rouges. Ainsi $\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \dfrac{b+1}{b+r+1}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 = 1) = \dfrac{r}{b+r+1}$.

De la même manière, $\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) = \dfrac{b}{b+r+1}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 = 0) = \dfrac{r+1}{b+r+1}$. En utilisant le système complet d'événements $\{\{X_1 = 0\}, \{X_1 = 1\}\}$, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = 1) &= \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1)\\
&= \frac{b}{b+r+1} \cdot \frac{r}{b+r} + \frac{b+1}{b+r+1} \cdot \frac{b}{b+r}\\
&= \frac{b}{b+r}
\end{aligned}$$

Comme $X_2$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$, $X_2 \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{b}{b+r}\right)$.

**3.** $S_n$ représente le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage. L'ensemble des valeurs prises par $S_n$ est $[\![b, b+n]\!]$.

**4.** D'après la question précédente,

$$\forall k \in [\![b, n+b]\!],\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k) = \frac{k}{r+b+n}$$

**5.** On utilise le système complet d'événements $\{S_n = k\}_{k \in [\![b, n+b]\!]}$.

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=b}^{n+b} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k)\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{1}{r+b+n} \sum_{k=b}^{n+b} k\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{b+r+n}$$

**6.** On sait déjà que $X_1 \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{b}{b+r}\right)$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_k \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{b}{b+r}\right)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(S_n) = b + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = b + \frac{nb}{b+r} = \frac{b(b+r+n)}{b+r}$$

D'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{b}{b+r}$$

Comme $X_{n+1}$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$, $X_{n+1} \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{b}{b+r}\right)$, ce qui conclut la récurrence.

**7.** L'événement $\{S_n = 1\}$ signifie qu'on a tiré que des boules rouges pendant les $n$ premiers tirages. Autrement dit,

$$\{S_n = 1\} = \bigcap_{k=1}^{n} \{X_k = 0\}$$

**8.** D'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(S_n = 1) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = 0 \mid S_{k-1} = 1) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$$

**9.** Remarquons que $\mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell) = \mathbb{P}(X_{n+1} = k - \ell \mid S_n = \ell)$. On en déduit que :

(i) $\mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell) = 0$ lorsque $\ell \notin \{k-1, k\}$ ;

(ii) $\mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = k-1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k-1) = \dfrac{k-1}{n+2}$ ;

(iii) $\mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = k) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid S_n = k) = \dfrac{n+2-k}{n+2}$.

**10.** Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. On utilise le système complet d'événements $\{S_n = \ell\}_{\ell \in [\![1, n+1]\!]}$. La formule des probabilités donne alors à l'aide de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{n+1} = k) &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell)\mathbb{P}(S_n = \ell) \\
&= \mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = k-1)\mathbb{P}(S_n = k-1) + \mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = k)\mathbb{P}(S_n = k) \\
&= \frac{k-1}{n+2}\mathbb{P}(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2}\mathbb{P}(S_n = k)
\end{aligned}$$

**11.** On raisonne par récurrence. $S_0$ est constante égale à 1 donc on peut dire que $S_0 \sim \mathcal{U}(\{1\})$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_n \sim \mathcal{U}([\![1, n+1]\!])$. D'après la question précédente,

$$\forall k \in [\![2, n+1]\!],\ \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2}$$

On a vu précédemment que $\mathbb{P}(S_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{n+2}$. Comme $S_{n+1}$ est à valeurs dans $[\![1, n+2]\!]$, on a nécessairement

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = n+2) = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

Par conséquent, $S_{n+1} \sim \mathcal{U}([\![1, n+2]\!])$, ce qui achève la récurrence.

**Solution 2**

---

**1.** En développant le déterminant définissant $P_{n+1}(X)$ par rapport à sa dernière colonne, on obtient

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(X) &= \begin{vmatrix}
X - a_1 & -b_1 & 0 & \cdots & 0 \\
-b_1 & X - a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & X - a_n & -b_n \\
0 & \cdots & 0 & -b_n & X - a_{n+1}
\end{vmatrix} \\
&= (X - a_{n+1})P_n(X) + b_n \left|\begin{array}{c|c}
 & 0 \\
XI_{n-1} - A_{n-1} & \vdots \\
 & 0 \\
 & -b_{n-1} \\
\hline
0 \ \cdots \ 0 \ 0 & -b_n
\end{array}\right| \\
&= (X - a_{n+1})P_n(X) - b_n^2 P_{n-1}(X)
\end{aligned}$$

**2.** **a.** Il suffit de remarquer que $\mathrm{A}_n$ est symétrique réelle.

**b.** La matrice extraite de l'énoncé est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux sont $-b_1, \dots, -b_{n-1}$. Son déterminant est donc $(-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} b_i$. Notamment ce déterminant n'est pas nul.

**c.** La matrice $\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A}_n$ possède une matrice extraite inversible de taille $n-1$ donc $\mathrm{rg}(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A}_n) \geq n-1$. Mais $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}_n)$ donc $\dim \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A}_n) \geq 1$. D'après le théorème du rang, on en déduit que $\mathrm{rg}(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A}_n) \leq n-1$. Finalement, $\mathrm{rg}(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A}_n) = n-1$.

**d.** D'après la question précédente et le théorème du rang, tous les sous-espaces propres de $\mathrm{A}_n$ sont de dimension 1. Comme $\mathrm{A}_n$ est diagonalisable, $\mathrm{P}_n$ est scindé et les multiplicités de ses racines sont égales aux dimensions des sous-espaces propres correspondants. On en déduit que $\mathrm{A}_n$ est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

**3.** **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\Delta_n(x) = \mathrm{P}'_{n+1}(x)\mathrm{P}_n(x) - \mathrm{P}'_n(x)\mathrm{P}_{n+1}(x)$$

D'après la question **1**,

$$\mathrm{P}_{n+1}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - a_{n+1})\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) - b_n^2 \mathrm{P}_{n-1}(\mathrm{X})$$

donc

$$\mathrm{P}'_{n+1}(x) = (x - a_{n+1})\mathrm{P}'_n(x) + \mathrm{P}_n(x) - b_n^2 \mathrm{P}'_{n-1}(x)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\Delta_n(x) &= (x - a_{n+1})\mathrm{P}'_n(x)\mathrm{P}_n(x) + \mathrm{P}_n^2(x) - b_n^2\mathrm{P}'_{n-1}\mathrm{P}_n(x) - \mathrm{P}'_n(x)\mathrm{P}_{n+1}(x) \\
&= \mathrm{P}'_n(x)\left[(x - a_{n+1})\mathrm{P}_n(x) - \mathrm{P}_{n+1}(x)\right] + \mathrm{P}_n^2(x) - b_n^2\mathrm{P}'_{n-1}(x)\mathrm{P}_n(x) \\
&= b_n^2\mathrm{P}'_n(x)\mathrm{P}_{n-1}(x) + \mathrm{P}_n^2(x) - b_n^2\mathrm{P}'_{n-1}(x)\mathrm{P}_n(x) \\
&= \mathrm{P}_n^2(x) + b_n^2\Delta_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

**b.** Il est clair que $\mathrm{P}_1(x) = (x - a_1)$ et que $\mathrm{P}_2(x) = (x - a_1)(x - a_2) - b_1^2$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\Delta_1(x) &= \mathrm{P}'_2(x)\mathrm{P}_1(x) - \mathrm{P}'_1(x)\mathrm{P}_2(x) \\
&= \left[(x - a_1) + (x - a_2)\right](x - a_1) - \left[(x - a_1)(x - a_2) - b_1^2\right] \\
&= (x - a_1)^2 + b_1^2 > 0
\end{aligned}$$

car $b_1 \neq 0$.
La question précédente alliée à une récurrence évidente montre que $\Delta_n(x) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**4.** Notons $f_n : x \mapsto \dfrac{\mathrm{P}_{n+1}(x)}{\mathrm{P}_n(x)}$ ainsi que $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ les zéros de $\mathrm{P}_n$. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. $f_n$ est dérivable sur $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$ et

$$\forall x \in ]\lambda_i, \lambda_{i+1}[, \ f'_n(x) = \frac{\Delta_n(x)}{\mathrm{P}_n(x)^2} > 0$$

Ainsi $f_n$ est strictement croissante sur $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$. $\mathrm{P}_{n+1}$ ne peut pas s'annuler en $\lambda_i$ car sinon $\Delta_n(\lambda_i) = 0$ ce qui contredirait la stricte positivité de $\Delta_n$. Ainsi $f_n$ admet une limite infinie en $\lambda_i$. Pour les mêmes raisons, $f_n$ admet une limite infinie en $\lambda_{i+1}$. Par stricte croissance de $f_n$, $\lim\limits_{\lambda_i^+} f_n = -\infty$ et $\lim\limits_{\lambda_{i+1}^- f_n = +\infty}$. Enfin, $f_n$ est continue sur $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$ donc $f_n$ de même que $\mathrm{P}_{n+1}$ s'annule une unique fois sur $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$.

**Remarque.** On a donc prouvé que $\mathrm{P}_{n+1}$ possédait $n-1$ racines comprises entre les racines consécutives de $\mathrm{P}_n$. Comme $\mathrm{P}_{n+1}$ possède $n+1$ racines, ses deux dernières racines appartiennent à $]-\infty, \lambda_1[\cup]\lambda_n, +\infty[$. Mais comme $f_n$ est strictement croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty, \lambda_1[$ et $]\lambda_n, +\infty[$, elle ne peut s'annuler qu'une fois sur chacun de ces deux intervalles. Ainsi $\mathrm{P}_{n+1}$ possède encore une racine dans $]-\infty, \lambda_1[$ et une racine dans $]\lambda_n, +\infty[$.

**Solution 3**

---

**1.** **a.** Un produit par blocs donne

$$\mathrm{M}_{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}}\mathrm{M}_{\mathrm{I}_n,\mathrm{E},0_n,\mathrm{I}_n} = \mathrm{M}_{\mathrm{A},\mathrm{AE}+\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{CE}+\mathrm{D}}$$

**b.** En prenant $E = -A^{-1}B$ dans la question précédente, on obtient

$$M_{A,B,C,D}M_{I_n,E,0_n,I_n} = M_{A,0_n,C,D-CA^{-1}B}$$

Par conséquent,

$$\det(M_{A,B,C,D})\det(M_{I_n,E,0_n,I_n}) = \det(M_{A,0_n,C,D-CA^{-1}B})$$

Les matrices $M_{I_n,E,0_n,I_n}$ et $M_{A,0_n,C,D-CA^{-1}B}$ sont triangulaires par blocs donc $\det(M_{I_n,E,0_n,I_n}) = \det(I_n)^2 = 1$ et $\det(M_{A,0_n,C,D-CA^{-1}B}) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$. Finalement,

$$\det(M_{A,B,C,D}) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$

**2. a.** Comme A et C commutent, $A^{-1}$ et C commutent également. En effet,

$$A^{-1}C = A^{-1}(CA)A^{-1} = A^{-1}(AC)A^{-1} = CA^{-1}$$

D'après la question précédente,

$$\det(M_{A,B,C,D}) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B) = \det(A)\det(D - A^{-1}CB) = \det(A(D - A^{-1}CB)) = \det(AD - CB)$$

**b.** **i.** Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A)$. Alors $\lambda I_n - A$ est inversible. De plus, $\lambda I_n - A$ et $-C$ commutent encore. On peut alors appliquer la question précédente pour affirmer que

$$\chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det(M_{\lambda I_n - A, -B, -C, \lambda I_n - D}) = \det((\lambda I_n - A)(\lambda I_n - D) - CB) = \det(\lambda^2 I_n + \lambda U + V)$$

avec $U = -(A + D)$ et $V = AD - CB$. Les applications $\lambda \mapsto \chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda)$ et $\lambda \mapsto \det(\lambda^2 I_n + \lambda U + V)$ sont polynomiales et coïncident sur l'ensemble infini $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A)$ : elles sont donc égales.

**ii.** Les deux applications précédentes sont donc égales en 0, ce qui donne

$$\det(M_{-A,-B,-C,-D}) = \det(AD - CB)$$

Or

$$\det(M_{-A,-B,-C,-D}) = \det(-M_{A,B,C,D}) = (-1)^{2n}\det(M_{A,B,C,D}) = \det(M_{A,B,C,D})$$

donc

$$\det(M_{A,B,C,D}) = \det(AD - CB)$$

**3. a.** D'une part, $(B^\top B)^\top = B^\top(B^\top)^\top = B^\top B$ donc $B^\top B$ est symétrique. D'autre part, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top B^\top BX = (BX)^\top BX = \|BX\|^2 \geq 0$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi B est bien symétrique positive.

**b.** Comme $I_n$ et $B^\top$ commutent, on peut appliquer la question **2.b.i** pour affirmer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \chi_S(\lambda) = \det(\lambda^2 - 2\lambda I_n + I_n - B^\top B) = \det((\lambda - 1)^2 I_n - B^\top B) = \chi_{B^\top B}((\lambda - 1)^2)$$

**c.** Remarquons déjà que S est bien symétrique.
Supposons que S soit symétrique définie positive. Soit $\mu \in \mathrm{Sp}(B^\top B)$. Comme $B^\top B$ est symétrique positive, $\mu \geq 0$. D'après la question précédente,

$$\chi_S(1 - \sqrt{\mu}) = \chi_{B^\top B}(\mu) = 0$$

donc $1 - \sqrt{\mu}$ est valeur propre de S. Comme S est symétrique définie positive, $1 - \sqrt{\mu} > 0$ puis $\mu < 1$. Les valeurs propres de $B^\top B$ sont donc toutes strictement inférieures à 1.
Supposons que toutes les valeurs propres de $B^\top B$ soient strictement inférieures à 1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(S)$. Alors

$$\chi_{B^\top B}((\lambda - 1)^2) = \chi_S(\lambda) = 0$$

d'après la question précédente. Ainsi $(\lambda - 1)^2$ est une valeur porpre de $B^\top B$ de sorte que $(\lambda - 1)^2 < 1$ i.e. $-1 < \lambda - 1 < 1$ ou encore $0 < \lambda < 2$. On a alors $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$ donc S est bien symétrique définie positive.

**4. a.** On montre d'abord par récurrence que $A_n$ est une matrice carrée de taille $2^n$.
Les matrices $2A_{n-1}$ et $iA_{n-1}$ commutent donc, d'après la question **2.b.ii**,

$$\det(A_n) = \det(2A_{n-1} \times (-2A_{n-1}) - iA_{n-1} \times iA_{n-1}) = \det(-3A_{n-1}^2) = (-3)^{2^{n-1}}\det(A_{n-1})^2$$

Mais comme $n > 1$, $2^{n-1}$ est pair donc

$$\det(A_n) = 3^{2^{n-1}}\det(A_{n-1})^2$$

**b.** Tout d'abord, $\det(A_1) = -3$. On montre ensuite par récurrence que $\det(A_n) = 3^{2^{n-1}n}$ pour tout entier $n \geq 2$. D'abord,

$$\det(A_2) = 3^2 \det(A_1)^2 = 3^4 = 3^{2^{2-1}\times 2}$$

Ensuite, supposons que $\det(A_n) = 3^{2^{n-1}n}$ pour un certain entier $n \geq 2$. Alors

$$\det(A_{n+1}) = 3^{2^n} \det(A_n)^2 = 3^{2^n}\left(3^{2^{n-1}n}\right)^2 = 3^{2^n} \cdot 3^{2^n n} = 3^{2^n(n+1)}$$

ce qui conclut la récurrence.

**c.** Les matrices $2A_{n-1}$ et $iA_{n-1}$ commutent donc, d'après la question **2.b.i**,

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \chi_{A_n}(\lambda) &= \det(\lambda^2 I_{2^{n-1}} - 3A_{n-1}^2)\\ &= \det\left(3\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}}I_{2^{n-1}} - A_{n-1}\right)\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}}I_{2^{n-1}} + A_{n-1}\right)\right)\\ &= 3^{2^{n-1}}\det\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}}I_{2^{n-1}} - A_{n-1}\right)\det\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}}I_{2^{n-1}} + A_{n-1}\right)\\ &= 3^{2^{n-1}}\chi_{A_{n-1}}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}}\right)\chi_{-A_{n-1}}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

**d.** Comme $\chi_{A_1} = X^2 - 3$, $\mathrm{Sp}(A_1) = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$. La relation de récurrence de la question précédente montre que

$$\mathrm{Sp}(A_n) = \left(\sqrt{3}\,\mathrm{Sp}(A_{n-1})\right) \cup \left(\sqrt{3}\,\mathrm{Sp}(-A_{n-1})\right) = \left(\sqrt{3}\,\mathrm{Sp}(A_{n-1})\right) \cup \left(-\sqrt{3}\,\mathrm{Sp}(A_{n-1})\right)$$

On en déduit par une récurrence évidente que $\mathrm{Sp}(A_n) = \{-\sqrt{3}^n, \sqrt{3}^n\}$.

**Solution 4**

**1.** La matrice de $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Cette matrice est donc inversible et $\mathcal{B}$ est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

**2.** **a.** $\varphi$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\varphi$ est linéaire par linéarité de l'intégration : $\varphi$ est donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

**b.** $\varphi$ est une forme linéaire non nulle donc $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim \mathbb{R}_n[X] - 1 = n$. D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = 1 = \dim \mathbb{R}$. Or $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathbb{R}$ donc $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{R}$.

**3.** **a.** La linéarité de $\psi$ découle directement de la linéarité de l'intégrale.

**b.** L'image de $\psi$ est engendrée par l'image de la base canonique :

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{vect}(\varphi(X^k))_{0\leq k\leq n} = \mathrm{vect}\left(\frac{X^{k+1}}{k+1}\right)_{0\leq k\leq n} = \mathrm{vect}(X^k)_{1\leq k\leq n+1}$$

**c.** Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Par définition, $\psi(P)$ est l'unique primitive de P s'annulant en 0. Ainsi

$$P \in \mathrm{Ker}\,\varphi \iff \int_0^1 P(t)\,dt = 0 \iff \psi(P)(1) = 0$$

On montre aisément que $\eta : P \in \mathrm{Im}\,\psi \mapsto P(1)$ est une forme linéaire non nulle. De plus, ce qui précède montre que $P \in \mathrm{Ker}\,\varphi \iff \psi(P) \in \mathrm{Ker}\,\eta$. Comme $\mathrm{Ker}\,\eta$ est un hyperplan de $\mathrm{Im}\,\psi$, $\dim \mathrm{Ker}\,\eta = n$. On vérifie que la famille $(X(X-1), \dots, X^n(X-1))$ est une famille de $n$ vecteurs de $\mathrm{Ker}\,\eta$. De plus, cette famille est libre puisque à degrés échelonnés ; c'est donc une base de $\mathrm{Ker}\,\eta$. On conclut donc que

$$P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \psi(P) \in \mathrm{vect}(X(X-1), \dots, X^n(X-1))$$

**d.** D'après la question précédente, si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $\psi(P) \in \mathrm{vect}(X^{k+1} - X^k)_{1\leq k\leq n}$. Par linéarité de la dérivation, $P = \psi(P)' \in \mathrm{vect}((k+1)X^k - kX^{k-1})_{1\leq k\leq n}$. Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{vect}((k+1)X^k - kX^{k-1})_{1\leq k\leq n}$. Réciproquement, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

$$\varphi((k+1)X^k - kX^{k-1}) = (k+1)\int_0^1 t^k\,dt - k\int_0^1 t^{k-1}\,dt = 1 - 1 = 0$$

donc $\text{vect}((k+1)X^k - kX^{k-1})_{1\leq k\leq n} \subset \operatorname{Ker}\varphi$. Par double inclusion,

$$\operatorname{Ker}(\varphi) = \text{vect}((k+1)X^k - kX^{k-1})_{1\leq k\leq n}$$

Or on a vu que $\dim\operatorname{Ker}\varphi = n$ et $((k+1)X^k - kX^{k-1})_{1\leq k\leq n}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Ker}\varphi$ à $n$ éléments : c'est donc une base de $\operatorname{Ker}\varphi$.

**4.** **a.** $\dim\mathcal{H} = \dim\mathbb{R}_n[X] = n+1$.

**b.** D'après la formule de Taylor,

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n} \psi_k(P)X^k$$

Notamment,

$$\forall j \in [\![0,n]\!],\ X^j = \sum_{k=0}^{n} \psi_k(X^j)X^k$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on en déduit que

$$\forall (j,k) \in [\![0,n]\!]^2\ \ \psi_k(X^j) = \delta_{j,k}$$

Montrons maintenant que la famille $(\psi_0,\dots,\psi_n)$ est libre. Soit $(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k = 0$. Soit $j \in [\![0,n]\!]$,

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k(X^j) = 0$$

Puisque $\psi_k(X^j) = \delta_{j,k}$, $\lambda_j = 0$. La famille $(\psi_0,\dots,\psi_n)$ est donc bien libre. Puisque $\dim\mathcal{H} = n+1$, $(\psi_0,\dots,\psi_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.

**c.** Il existe $(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\varphi = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k$. A nouveau, comme $\psi_k(X^j) = \delta_{j,k}$ on obtient

$$\forall j \in [\![0,n]\!],\ \lambda_j = \varphi(X^j) = \frac{1}{j+1}$$