Devoir surveillé n°09

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 —

On note f l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $(X^2-1)P'' + 4XP'$.

On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré *inférieur ou égal* à n. Notamment $\mathbb{R}_{-1}[X] = \{0\}$.

On notera également I_n l'identité de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie I – Étude d'un endomorphisme

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $f(P) = \lambda P$. En considérant le coefficient dominant de P, montrer que l'on a nécessairement $\lambda = n(n+3)$ où n désigne le degré de P.

3. Dans la suite de l'énoncé, on pose $\lambda_n = n(n+3)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul vérifie $f(P) = \lambda_n P$, alors $\deg P = n$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, autrement dit que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f. On notera f_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par f.

5. Dans cette question, on pose $F_n = \operatorname{Ker}(f_n - \lambda_n I_n)$ et $G_n = \operatorname{Im}(f_n - \lambda_n I_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer $G_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Que peut-on en déduire sur la dimension de F_n ?

b. Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = F_n \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

c. En déduire la dimension de F_n puis l'existence d'un unique polynôme P_n unitaire tel que $f(P_n) = \lambda_n P_n$. On précisera le degré de P_n.

6. On pose $Q_n = (-1)^n P_n(-X)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f(Q_n) = \lambda_n Q_n$. Que peut-on en déduire sur la parité de P_n ?

7. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, le coefficient de X^{n-2} dans P_n est $-\dfrac{n(n-1)}{2(2n+1)}$.

8. Calculer P_0, P_1 et P_2.

9. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = (X^2-1)P_n' - nXP_n$.

a. Montrer que $R_n' = (n+2)(nP_n - XP_n')$ puis calculer $f(R_n)$ en fonction de R_n seulement.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis que

$$R_n + \frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1} = 0$$

c. En dérivant cette dernière relation, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$P_n - XP_{n-1} + \frac{n^2-1}{4n^2-1}P_{n-2} = 0$$

Partie II – Comportement asymptotique d'une suite

On considère la suite réelle (u_n) de premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{10}{9}$ et telle que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{9}\left[u_{n-1} - u_{n-2} + \frac{3}{4n^2-1}u_{n-2}\right]$$

10. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{4X^2-1}$. En déduire un expression simple de $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$ pour tout entier $n \geqslant 2$ ainsi que la limite de la suite (S_n).

11. **a.** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant 1$.

b. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_n = u_1 + \frac{1}{9}\left[u_{n-1} - u_0 + \sum_{k=2}^{n} \frac{3}{4k^2-1}u_{k-2}\right]$$

c. En déduire que $u_n \leqslant \frac{6}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire la convergence de la suite (u_n).

12. On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$

$$f_n(t) = \frac{2^n}{e^{nt}}P_n(\operatorname{ch} t)$$

a. Déterminer les fonctions f_0 et f_1 et montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) - f_{n-1}(t) = e^{-2t}\left[f_{n-1}(t) - f_{n-2}(t) + \frac{3}{4n^2-1}f_{n-2}(t)\right]$$

b. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions f_{n-1} et $f_n - f_{n-1}$ sont positives et décroissantes sur $\mathbb{R}$.

13. Montrer que la fonction ch induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$. On note argch sa bijection réciproque. Préciser le sens de variation de argch.

14. **a.** On pose $\alpha = \operatorname{argch}(5/3)$. Déterminer e^α et montrer que $u_n = f_n(\alpha)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b. On se donne un réel $x \geqslant \frac{5}{3}$. Montrer que la suite de terme général $f_n(\operatorname{argch} x)$ converge vers une limite strictement positive $\ell(x)$ que l'on ne demande pas de déterminer.
En déduire un équivalent de $P_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ que l'on exprimera à l'aide de $\ell(x)$.

Exercice 1.

On considère dans cet exercice un entier $p \geqslant 2$ et un polynôme à coefficients réels de degré p et de coefficient dominant $a_p = 1$:

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$$

On se propose de localiser dans le plan complexe les racines du polynôme P, afin de savoir dans quelle zone rechercher d'éventuelles racines de ce polynôme P.
On désigne à cet effet par M le nombre réel positif suivant :

$$M = \max_{0\leqslant k\leqslant p-1} |a_k| = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{p-1}|\}$$

1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall r \in \mathbb{R}_+,\ f(r) = r^{p+1} - (M+1)r^p + M$$

   a. Déterminer l'unique zéro strictement positif r_0 de la dérivée de f.
   Comparer les positions de r_0 et 1 en fonction des positions de M et $\frac{1}{p}$.

   b. On suppose $M \leqslant \frac{1}{p}$. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
   En déduire le signe de $f(r)$ lorsque $r > 1$.

   c. On suppose $M > \frac{1}{p}$. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
   En déduire le signe de $f(r)$ lorsque $r \geqslant M+1$.

2. Localisation des racines du polynôme P.

   a. Démontrer que toute racine complexe z du polynôme P de module différent de 1 vérifie l'inégalité

$$|z|^p \leqslant M\frac{|z|^p - 1}{|z| - 1}$$

   En supposant $|z| > 1$, montrerr que l'on a l'inégalité $f(|z|) \leqslant 0$.

   b. Etablir que si $M \leqslant \frac{1}{p}$, alors les racines de P sont de module inférieur ou égal à 1.

   c. Etablir que si $M > \frac{1}{p}$, alors les racines de P sont de module strictement inférieur à $M+1$.

3. On suppose dans cette question que

$$P = X^p - \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} X^k$$

   a. Montrer que les racines complexes de P sont de module inférieur ou égal à 1.

   b. Montrer que 1 est un racine simple de P.

4. On suppose dans cette question que

$$P = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} X^k$$

   a. Montrer que les racines complexes de P sont de module strictement inférieur à 2.

   b. Etablir que, si z est racine de P, alors z est racine du polynôme $X^{p+1} - 2X^p + 1$.

   c. En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(r) = r^{p+1} - 2r^p + 1$, établir que :

      - le polynôme P a une racine réelle x_p telle que $\frac{2p}{p+1} \leqslant x_p \leqslant 2$;

- la suite (x_p) converge vers 2.

5. On pose maintenant $\varepsilon_p = 2 - x_p$ et on étudie ε_p lorsque p tend vers $+\infty$.

- Etablir que $(2-x_p)x_p^p = 1$ puis que $\varepsilon_p = (2-\varepsilon_p)^{-p}$. En déduire que la suite de terme général $p\varepsilon_p$ converge vers 0.
- Etablir qu'on a le développement asymptotique suivant

$$x_p \underset{p\to+\infty}{=} 2 - \frac{1}{2^p} + o\left(\frac{1}{2^p}\right)$$

6. Etablir enfin que si z est une racine de P, alors $\frac{1}{z}$ est racine de

$$Q = X^p + X^{p-1} + \cdots + X - 1 = \sum_{k=1}^{p} X^k - 1$$

En déduire que toutes les racines de P sont de module strictement compris entre $\frac{1}{2}$ et 2.