Devoir surveillé n°15

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stables par produit donc ce sont des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{K})$ mais $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin S_2(\mathbb{K})$. Par conséquent $S_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in A_2(\mathbb{K})$ mais $C^2 = -I_2 \notin A_2(\mathbb{K})$ donc $A_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

3 $A_n = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{K})$ et $B_n = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{K})$ mais $A_nB_n = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin S_n(\mathbb{K})$ donc $S_n(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$C_n = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A_n(\mathbb{K})$ mais $C_n^2 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ni nA_n(\mathbb{K})$ donc $A_n(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4 Facile.

5 Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à F. Alors $u \in \mathcal{A}_F$ si et seulement si $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$. Comme l'application $\text{mat}_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme, $\mathcal{A}_F$ est isomorphe à l'espace vectoriel

$$\left\{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},\ A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})\right\}$$

Ainsi

$$\dim \mathcal{A}_F = \dim \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) + \dim \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) + \dim \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) = p^2 + p(n-p) + (n-p)^2 = n^2 - pn + p^2$$

6 Remarquons que

$$n^2 - pn + p^2 = \left(p - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{3n^2}{4}$$

Ainsi $n^2 - pn + p^2$ est maximum quand $p = 1$ ou $p = n-1$ et ce maximum vaut $n^2 - n + 1$.

7 Facile.

8 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à $\Gamma(\mathbb{R})$ mais n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car son polynôme caractéristique $X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est donc pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

9 A nouveau, le polynôme caractéristique de $K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est $X^2 + 1$, qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Il existe donc une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}KP$. Soit alors $M \in \Gamma(\mathbb{C})$. Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $M = aI_2 + bK$. Alors $P^{-1}MP = aI_2 + bD$ est bien diagonale. $\Gamma(\mathbb{C})$ est donc une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

10 Clairement, $\mathrm{J} = \mathrm{J}(0, 1, 0, \dots, 0) = \mathrm{J}(e_2)$.
Pour tout $j \in [\![1, n-2]\!]$, $\varphi^2(e_j) = e_{j+2}$, $\varphi^2(e_{n-1}) = e_1$ et $\varphi^2(e_n) = e_2$. Ainsi $\mathrm{J} = \mathrm{I}_2$ si $n = 2$ et $\mathrm{J} = \mathrm{J}(0, 0, 1, 0, \dots, 0) = \mathrm{J}(e_3)$ si $n \geq 3$.

11 Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$. Alors

- si $j + k \leq n$, alors $\varphi^k(e_j) = e_{j+k}$;
- si $j + k > n$, alors

$$\varphi^k(e_j) = \varphi^{k-n+j-1} \circ \varphi \circ \varphi^{n-j}(e_j) = \varphi^{k-n+j-1} \circ \varphi(e_n) = \varphi^{k-n-j+1}(e_1) = e_{j+k-n}$$

Ainsi $\mathrm{J}^k = \mathrm{J}(e_{k+1})$.
De plus,

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \varphi^n(e_j) = \varphi^{j-1} \circ \varphi \circ \varphi^{n-j}(e_j) = \varphi^{j-1} \circ \varphi(e_n) = \varphi^{j-1}(e_1) = e_j$$

Don $\mathrm{J}^n = \mathrm{I}_n$.

12 On a clairement

$$\forall (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{J}(a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{J}^k$$

13 D'après la question précédente,

$$\mathcal{A} = \mathrm{vect}(\mathrm{I}_n, \mathrm{J}, \dots, \mathrm{J}^{n-1})$$

donc $\mathcal{A}$ est bien un espace vectoriel et $(\mathrm{I}_n, \mathrm{J}, \dots, \mathrm{J}^{n-1})$ en est une famille génératrice.
De plus, si $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $\sum_{k=0}^{n-1} a^k \mathrm{J}^k = 0$, alors $\mathrm{J}(a_0, \dots, a_{n-1}) = 0$ et donc $(a_0, \dots, a_{n-1}) = (0, \dots, 0)$. La famille $(\mathrm{I}_n, \mathrm{J}, \dots, \mathrm{J}^{n-1})$ est donc libre : c'est une base de $\mathcal{A}$.

14 Si M commute avec tout élément de $\mathcal{A}$, alors M commute avec $\mathrm{J} \in \mathcal{A}$.
Si M commute avec J, on montre par récurrence que M commute avec toutes les puissances de J. Par bilinéarité du produit matriciel, M commute avec toutes les combinaisons linéaires de ces puissances i.e. avec tout élément de $\mathcal{A}$.

15 Remarquons qu'en fait, $\mathcal{A} = \mathbb{R}[\mathrm{J}]$. L'inclusion $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}[\mathrm{J}]$ est claire. Inversement, si l'on se donne $\mathrm{M} \in \mathbb{R}[\mathrm{J}]$, il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{M} = \mathrm{P}(\mathrm{J})$. Notons Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $\mathrm{X}^n - 1$. Alors $\mathrm{P} = (\mathrm{X}^n - 1)\mathrm{Q} + \mathrm{R}$ puis $\mathrm{P}(\mathrm{J}) = (\mathrm{J}^n - \mathrm{I}_n)\mathrm{Q}(\mathrm{J}) + \mathrm{R}(\mathrm{J}) = \mathrm{R}(\mathrm{J}) \in \mathcal{A}$ car $\deg \mathrm{J} \leq n - 1$.
D'après le cours, $\mathcal{A} = \mathbb{R}[\mathrm{J}]$ est alors une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

16 On développe χ_J par rapport à sa dernière colonne

$$\chi_\mathrm{J} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & \mathrm{X} & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathrm{X} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = \mathrm{X} \begin{vmatrix} \mathrm{X} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \mathrm{X} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & \mathrm{X} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \mathrm{X} \end{vmatrix} + (-1)^n \begin{vmatrix} -1 & \mathrm{X} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \mathrm{X} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & \mathrm{X} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \mathrm{X} \cdot \mathrm{X}^{n-1} + (-1)^n \cdots (-1)^{n-1} = \mathrm{X}^n - 1$$

17 $\mathrm{X}^n - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

18 Si $n = 2$, $\chi_\mathrm{J} = \mathrm{X}^2 - 1 = (\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} + 1)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Si $n \geq 3$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ est une racine non réelle de χ_J donc χ_J n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et J n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

19 Les racines de χ_J sont les ω^k pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Puisque toutes ces racines sont simples, leurs sous-espaces propres associés sont de dimension 1. On vérifie que $\mathrm{U}_k = \begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J associé à la valeur propre ω^k.
Ainsi pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathrm{E}_{\omega^k}(\mathrm{J}) = \mathrm{vect}(\mathrm{U}_k)$.

20 $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est lui-même un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc est stable par produit. Ainsi $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

21 Comme J est diagonalisable, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{JP} = \mathrm{D}$. Alors pour tout $k \in [\![0, n-1, \mathrm{P}^{-1}\mathrm{J}^k\mathrm{P} = \mathrm{D}^k$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$. Il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{A} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{J}^k$. Alors $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{D}^k$ est diagonale.

22 Avec les notations de l'énoncé, $\mathrm{J}(a_0, \dots, a_{n-1}) = \mathrm{Q}(\mathrm{J})$. Avec les notations de la question précédente, $\mathrm{D} = \operatorname{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$ donc

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{J}(a_0, \dots, a_{n-1}) = \operatorname{diag}(\mathrm{Q}(1), \mathrm{Q}(\omega), \dots, \mathrm{Q}(\omega^{n-1}))$$

On en déduit que

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{J}(a_0, \dots, a_{n-1})) = \left\{\mathrm{Q}(1), \mathrm{Q}(\omega), \dots, \mathrm{Q}(\omega^{n-1})\right\}$$

23 Classique.

24 $r = \dim \mathcal{A}^\perp = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathcal{A} = n^2 - d$.

25 Evident.

26 Soit $\mathrm{N} \in \mathcal{A}$ et $i \in [\![1, r]\!]$. Alors

$$\forall m \in \mathcal{A},\ \langle \mathrm{M} \mid \mathrm{N}^\top \mathrm{A}_i \rangle = \operatorname{tr}(\mathrm{M}^\top \mathrm{N}^\top \mathrm{A}_i) = \operatorname{tr}((\mathrm{NM})^\top \mathrm{A}_i) = \langle \mathrm{NM} \mid \mathrm{A}_i \rangle = 0$$

car $\mathrm{NM} \in \mathcal{A}$ (stabilité de $\mathcal{A}$ par produit) et $\mathrm{A}_i \in \mathcal{A}^\perp$. Ainsi $\mathrm{N}^\top \mathrm{A}_i \in \mathcal{A}^\perp$.

27 L'application $\mathrm{T} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}^\top \end{array}\right.$ est un automorphisme (c'est une symétrie) donc induit un isomorphisme de $\mathcal{A}$ sur $\mathrm{T}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^\top$. Notamment, $\mathcal{A}^\top$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\dim \mathcal{A}^\top = \dim \mathcal{A}$.
Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{A}^\top$. Il existe donc $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathcal{A}^2$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{M}^\top$ et $\mathrm{B} = \mathrm{N}^\top$. Alors $\mathrm{AB} = \mathrm{M}^\top \mathrm{N}^\top = (\mathrm{NM})^\top$. Or $\mathrm{NM} \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est stable par produit. Ainsi $\mathrm{AB} \in \mathcal{A}^\top$ et $\mathcal{A}^\top$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

28 Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{A}^\top$. Il existe donc $\mathrm{M} \in \mathcal{A}$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{M}^\top$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\mathrm{AA}_i\mathrm{X} = \mathrm{M}^\top \mathrm{A}_i \mathrm{X}$. Or d'après la question **26**, $\mathrm{M}^\top \mathrm{A}_i \in \mathcal{A}^\top = \operatorname{vect}(\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_r)$. Ainsi $\mathrm{AA}_i\mathrm{X} \in \operatorname{vect}(\mathrm{A}_1\mathrm{X}, \dots, \mathrm{A}_r\mathrm{X}) = \mathrm{F}$. Comme $(\mathrm{A}_1\mathrm{X}, \dots, \mathrm{A}_r\mathrm{X})$ engendre F, F est stable par l'endomorphisme canoniquement associé à A.

29 Si $r \geq n$, alors $d = n^2 - r \leq r^2 - n < n^2 - n + 1$.
Supposons maintenant $r \leq n - 1$. On peut choisir $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{A}_1\mathrm{X} \neq 0$ car $\mathrm{A}_1 \neq 0$ en tant que vecteur d'une base. Ainsi $\dim \mathrm{F} \geq 1$. De plus, F est engendré par les r vecteurs $\mathrm{A}_1\mathrm{X}, \dots, \mathrm{A}_r\mathrm{X}$ donc $\dim \mathrm{F} \leq r \leq n - 1$.
Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes canoniquement associés à $\mathcal{A}^\top$. Alors $\mathcal{E}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ de même dimension que $\mathcal{A}^\top$. De plus, $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_\mathrm{F}$ où $\mathcal{A}_\mathrm{F} = \{u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \mid u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$. Donc, en notant $\mathrm{P} = \dim \mathrm{F}$, on a d'après la question **5**

$$d = \dim \mathcal{A}^\top = \dim \mathcal{E} \leq dim \mathcal{A}_\mathrm{F} = n^2 - np + p^2$$

Mais comme $1 \leq p \leq n - 1$, $d \leq n^2 - n + 1$ d'après la question **6**.

30 Si $n = 1$, alors toute matrice nilpotente est nulle (son indice de nilpotence vaut nécessairement 1). Ainsi $\mathcal{A} = \{0\}$ est trivialement trigonalisable.

31 Supposons que les seuls sous-espaces de E stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et E. Alors $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathrm{E})$ d'après le théorème de Burnside. Ceci n'est pas possible car $\mathcal{A}$ ne contient que des éléments nilpotents.
On en déduit qu'il existe un sous-espace vectoriel V de E distinct de $\{0\}$ et E stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$.

32 Il suffit de choisir une base de E adaptée à V.

33 Comme l'application $\operatorname{mat}_\mathcal{B}$ est linéaire, les applications $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mapsto \mathrm{A}(u)$ et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mapsto \mathrm{D}(u)$ lé sont également. On en déduit que $\{\mathrm{A}(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ et $\{\mathrm{D}(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$.
Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$. Alors

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}(u \circ v) & \mathrm{B}(u \circ v) \\ 0 & \mathrm{D}(u \circ v) \end{pmatrix} = \operatorname{mat}_\mathcal{B}(()\, u \circ v) = \operatorname{mat}_\mathcal{B}(u) \operatorname{mat}_\mathcal{B}(v) = \begin{pmatrix} \mathrm{A}(u) & \mathrm{B}(u) \\ 0 & \mathrm{D}(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{A}(v) & \mathrm{B}(v) \\ 0 & \mathrm{D}(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}(u)\mathrm{A}(v) & \star \\ 0 & \mathrm{D}(u)\mathrm{D}(v) \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathrm{A}(u \circ v) = \mathrm{A}(u)\mathrm{A}(v)$ et $\mathrm{D}(u \circ v) = \mathrm{D}(u)\mathrm{D}(v)$. Ceci prouve que $\{\mathrm{A}(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ et $\{\mathrm{D}(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ sont stables par produit : ce sont donc des sous-algèbres respectives de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$.
Soit $u \in \mathcal{A}$. Alors u est nilpotent i.e. il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$. D'après ce qui précède, $\mathrm{A}(u)^p = \mathrm{A}(u^p) = \mathrm{A}(0) = 0$ et $\mathrm{D}(u)^p = \mathrm{D}(u^p) = \mathrm{D}(0) = 0$ donc tous les éléments de $\{\mathrm{A}(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ et $\{\mathrm{D}(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ sont nilpotents.

34 Comme $1 \leq r \leq n-1$ et $1 \leq s \leq n-1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux sous-algèbres $\{\mathrm{A}(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ et $\{\mathrm{D}(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$. Il existe donc $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{C})$ telles que pour tout $u \in \mathcal{A}$, $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}(u)\mathrm{P}$ et $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{D}(u)\mathrm{Q}$ soient triangulaires supérieures. En posant $\mathrm{R} = \begin{pmatrix} \mathrm{P} & 0 \\ 0 & \mathrm{Q} \end{pmatrix}$, $\mathrm{R} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{Q}^{-1} \end{pmatrix}$. Alors pour tout $u \in \mathcal{A}$,

$$\mathrm{R}^{-1} \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u)\, \mathrm{R} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{Q}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{A}(u) & \mathrm{B}(u) \\ 0 & \mathrm{D}(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{P} & 0 \\ 0 & \mathrm{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}(u)\mathrm{P} & \star \\ 0 & \mathrm{P}^{-1}\mathrm{D}(u)\mathrm{P} \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{R}^{-1} \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u)\, \mathrm{R}$ est triangulaire supérieure : l'algèbre $\mathcal{A}$ est donc trigonalisable.
On conclut alors par récurrence.

35 Soit $u \in \mathcal{A}$. Comme u est nilpotente, sa seule valeur propre est 0. La seule valeur propre de la matrice triangulaire supérieure $\mathrm{R}^{-1} \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u)\, \mathrm{R}$ est donc également 0. La diagonale de cette matrice est donc nulle i.e. $\mathrm{R}^{-1} \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u)\, \mathrm{R} \in \mathrm{T}_n^+(\mathbb{C})$.

36 Considérons comme suggéré le sous-espace vectoriel $\mathrm{F} = \{u(x) \mid u \in \mathcal{A}\}$. Comme $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, F est stable par tous les éléménts de $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est irréductible, $\mathrm{F} = \{0\}$ ou $\mathrm{F} = \mathrm{E}$.
Supposons que $\mathrm{F} = \{0\}$. Alors $u(x) = 0_{\mathrm{E}}$ pour tout $u \in \mathcal{A}$. Ainsi $\operatorname{vect}(x)$ est stable par tout élément de $\mathcal{A}$. Comme $x \neq 0$, $\operatorname{vect}(x) \neq \{0\}$ et comme $\dim \mathrm{E} \geq 2$, $\operatorname{vect}(x) \neq \mathrm{E}$ puisque $\dim \operatorname{vect}(x) = 1$.
Ainsi $\mathrm{F} = \mathrm{E}$. Or $y \in \mathrm{F}$ donc il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$.

37 Comme $\operatorname{rg}(v) \geq 2$, il existe $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ tel que $(v(x), v(y))$ est libre. En particulier, $v(x) \neq 0$ et d'après la question précédente, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u \circ v(x) = y$.
$\operatorname{Im} v$ est clairement stable par $v \circ u$ donc $v \circ u$ induit un endomorphisme w de $\operatorname{Im} v$. Comme $\operatorname{Im} v$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, w admet au moins une valeur propre λ. Ainsi $\operatorname{rg}(w - \lambda \operatorname{Id}_{\operatorname{Im} v}) < \dim \operatorname{Im} v = \operatorname{rg}(v)$. Or

$$\operatorname{Im}(w - \lambda \operatorname{Id}_{\operatorname{Im} v}) = (w - \lambda \operatorname{Id}_{\operatorname{Im} v})(\operatorname{Im} v) = \operatorname{Im}(v \circ u \circ v - \lambda v)$$

donc

$$\operatorname{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) = \operatorname{rg}(w - \lambda \operatorname{Id}_{\operatorname{Im} v}) < \operatorname{rg}(v)$$

Enfin, $v \circ u \circ v(x) - \lambda v(x) = v(y) - \lambda v(x) \neq 0$ car $(v(x), v(y))$ est libre. Ainsi $\operatorname{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) > 0$.

38 Soit v un élément non nul de $\mathcal{A}$ de rang minimal. Supposons que $\operatorname{rg}(v) \geq 2$. En choisissant u et λ comme dans la question précédente, $v \circ u \circ v - \lambda v$ n'est pas nul (son rang est strictement positif) et $\operatorname{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \operatorname{rg}(v)$. Mais comme $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, $v \circ u \circ v - \lambda v \in \mathcal{A}$. cei contredit la minimalité du rang de v. Ainsi $\operatorname{rg}(v) \leq 1$ mais comme $v \neq 0$, $\operatorname{rg}(v) = 1$.

39 Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Comme $u_0(\varepsilon_1) \neq 0$, il existe $v_i \in \mathcal{A}$ tel que $v_i(u_0(\varepsilon_1)) = \varepsilon_i$ d'après la question **36**. On pose alors $u_i = v_i \circ u_0$. Comme $u_i(\varepsilon_k) = 0$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$ et $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i \neq 0$, $\operatorname{rg}(u_i) = 1$. De plus, $u_i \in \mathcal{A}$ car $(u_i, u_0) \in \mathcal{A}^2$ et $\mathcal{A}$ est stable par composition.

40 Dans ce qui suit, on note $(\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*)$ la base duale de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.
Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Posons

$$\mathrm{F} = \{x \in \mathrm{E},\ \forall u \in \mathcal{A},\ \varepsilon_1^*(u(x)) = 0\}$$

Alors F est un sous-espace vectoriel de E stable par $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est irréductible, $\mathrm{F} = \{0\}$ ou $\mathrm{F} = \mathrm{E}$. Supposons que $\mathrm{F} = \mathrm{E}$. Alors $\operatorname{Ker} \varepsilon_1^*$ est un sous-espace strict de E stable par tout élément de $\mathcal{A}$, ce qui est exclu. Ainsi $\mathrm{F} = \{0\}$.
Notons $\varphi_i : u \in \mathcal{A} \mapsto \varepsilon_1^*(u(\varepsilon_i))$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Montrons que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i \varphi_i = 0$. Alors pour tout $u \in \mathcal{A}$, $\varepsilon_1^* \circ u(\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i) = 0$ donc $\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i \in \mathrm{F} = \{0\}$. Ainsi $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ car $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est libre. Notons $\Psi : u \in \mathcal{A} \mapsto (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u))$. Alors $\operatorname{rg} \Psi = \operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = n$ (raisonner matriciellement au besoin). Ainsi Ψ est surjective. Notamment, il existe $w_j \in \mathcal{A}$ tel que $\Psi(w_j) = e_j$ où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Ceci signifie que $\varepsilon_1^*(w_j(\varepsilon_i)) = \delta_{i,j}$. Posons $f_{i,j} = u_i \circ w_j \in \mathcal{A}$. Alors $f_{i,j}(\varepsilon_j) = \varepsilon_i$ et $f_{i,j}(\varepsilon_k) = 0$ pour $k \neq j$. On vérifie que la famille $(f_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une famille libre de n^2 éléments de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. C'est donc une base de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ formée d'éléments de $\mathcal{A}$. Ainsi $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathrm{E})$.