Devoir à la maison n° 6

Problème 1 —

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

Partie I –

1. Montrer que cos est dans l'ensemble $\mathcal{E}$.

2. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$. En déduire que ch est dans $\mathcal{E}$.

3. Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : x \in \mathbb{R} \mapsto f(\alpha x)$ est également dans $\mathcal{E}$.

4. Soit $f \in \mathcal{E}$.

- **a.** Montrer que $f(0)=0$ ou $f(0)=1$.
- **b.** Montrer que si $f(0)=0$, f est constamment nulle sur $\mathbb{R}$.
- **c.** Montrer que si $f(0)=1$, f est paire.

Partie II –

Soit $f \in \mathcal{E}$ telle que $f(0)=1$.

1. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- **a.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^r f(x+y)\,dy = \int_x^{x+r} f(u)\,du$.
- **b.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle 2f(x)\int_0^r f(y)\,dy = \int_x^{x+r} f(u)\,du + \int_{x-r}^{x} f(u)\,du$.

2.

- **a.** Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\displaystyle\int_0^r f(y)\,dy > 0$. On suppose dans la suite de cette question que r vérifie cette condition.
- **b.** Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- **c.** Montrer que f est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- **d.** Prouver qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ cf'(x) = f(x+r)-f(x-r)$$

3. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x)=\lambda f(x)$$

Partie III –

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''=\mu y$ en distinguant les cas $\mu>0$, $\mu<0$ et $\mu=0$.

2. En déduire tous les éléments de $\mathcal{E}$ en exploitant la question **I.4.c**.