Topologie

Ouverts et fermés

Exercice 1

Soit (u_n) une suite strictement croissante de réels. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ soit fermé.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'ensemble des projecteurs de E est fermé dans $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 3 — CCP 2013

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme uniforme. On pose

$$A = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0, \int_0^1 f(t)\,dt \geq 1 \right\}$$

1. Montrer que A est une partie fermée de E.
2. Montrer que pour tout $f \in A$, $\|f\|_\infty > 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'on peut choisir $\alpha \in]0,1]$ tel que la fonction

$$f_n : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)x & \text{si } x \leq \alpha \\ 1+\frac{1}{n} & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

appartienne à A.

4. En déduire la distance $d(0, A)$.

Exercice 4 ★★★

Soit (u_n) une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé E. On note V l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).

1. Montrer que $V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k,\ k \geq n\}}$.
2. En déduire que V est fermé.

Exercice 5

Montrer que les seules parties à la fois ouvertes et fermées d'un espace vectoriel normé E sont $\varnothing$ et E.

Exercice 6

Soit E l'ensemble des suites complexes u telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge. On pose $\|u\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

L'ensemble $F = \left\{ u \in E, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1 \right\}$ est-il fermé ? ouvert ? borné ?

Exercice 7 ★★ — Petites Mines MP 2016

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On pose

$$O = \{f \in E \mid f(1) > 0\} \qquad \text{et} \qquad F = \left\{ f \in E, \int_0^1 f(t)\,dt \leq 0 \right\}$$

1. Montrer que O est ouvert pour $\|\cdot\|_\infty$.
2. Montrer que F est fermé pour $\|\cdot\|_\infty$ et pour $\|\cdot\|_1$.
3. O est-il ouvert pour $\|\cdot\|_1$?

Exercice 8

On note F l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. On note E l'ensemble des suites réelles bornées muni de la norme infinie.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. F est-il fermé dans E ? ouvert dans E ?

Exercice 9 ★★★★ **Centrale MP**

On note E l'ensemble des suites réelles bornées muni de la norme infinie. Les ensembles suivants sont-ils fermés ?

1. l'ensemble A des suites croissantes ;
2. l'ensemble B des suites convergeant vers 0 ;
3. l'ensemble C des suites convergentes ;
4. l'ensemble D des suites admettant 0 pour valeur d'adhérence ;
5. l'ensemble E des suites périodiques.

Exercice 10 ★

1. Montrer que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{xy} > (x + y)^2\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ln(1 + x^2 + y^2) \leq x + y\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \sin(x + y) = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11 ★

On munit l'espace vectoriel E des applications bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la norme inifinie. Montrer que

$$F = \{f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0\}$$

est fermé.

Adhérence et intérieur

Exercice 12

Montrer que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
On pourra montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé sur $\mathbb{R}$, unitaire et de degré n, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$.

Exercice 13 ★★★

Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\overline{A}$ et $\mathring{A}$ sont convexes.

Exercice 14 ★★★★

Soient $(n, p, r) \in (\mathbb{N}^*)^2 \times \mathbb{N}$. On pose

$$A_r = \{M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \operatorname{rg} M = r\}$$
$$B_r = \{M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \operatorname{rg} M \leq r\}$$
$$C_r = \{M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \operatorname{rg} M \geq r\}$$

Les ensembles A_r, B_r, C_r sont-ils ouverts ? fermés ?
Déterminer leurs adhérences et leurs intérieurs.

Exercice 15 ★★★★ **X (non PC/PSI) MP 2019**

1. On note A l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré n scindés sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Montrer que A est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Quelle est l'adhérence de A ?

Exercice 16 ★★

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E.

1. Montrer que si F est ouvert, alors $F = E$.
2. Montrer que si $F \neq E$, alors $\mathring{F} = \varnothing$.

Exercice 17 ★★

Soit F une partie fermée d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\operatorname{Fr}(\operatorname{Fr}(F)) = \operatorname{Fr}(F)$.

Exercice 18 ★★ **Orthogonal et topologie**

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E que l'on munit de sa norme euclidienne.

1. Montrer que pour tout $y \in \mathrm{E}$, $\varphi_y : x \in \mathrm{E} \mapsto \langle x, y\rangle$ est continue.
2. Montrer que $\mathrm{F}^\perp$ est fermé dans E.
3. Montrer que de manière générale, $\overline{\mathrm{F}} \subset (\mathrm{F}^\perp)^\perp$.

Exercice 19 ★

Soit A une partie bornée d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\overline{\mathrm{A}}$ est également bornée.

Densité

Exercice 20 **ENS PC 2010**

1. Déterminer f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t = 0$$

2. Le résultat précédent persiste-t-il si on change la condition en

$$\forall n \geq n_0,\ \int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t = 0$$

où n_0 est un entier non nul.

Exercice 21 **X MP 2010**

Soit A une partie convexe et dense de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathrm{A} = \mathbb{R}^n$.

Exercice 22 **ENS MP 2010**

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(i) le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x \mapsto x^{a_n})_{n\geq 0}$ est dense dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ pour la norme $\|\ \|_2 : f \mapsto \sqrt{\int_0^1 f^2}$;

(ii) la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ diverge.

Exercice 23

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b f(t)t^k \,\mathrm{d}t = 0$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 24 **Mines MP**

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{\mathrm{F}}$ est encore un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit H un hyperplan de E. Montrer que H est fermé ou dense dans E.

Exercice 25 **Lemme de Riemann-Lebesgue**

On considère un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et un espace vectoriel normé de dimension finie E.

1. Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans E. Montrer que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

2. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans E. Montrer que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

3. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans E. Montrer que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 26 **Adhérence des matrices diagonalisables**

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices diagonalisables (resp. trigonalisables) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. **a.** Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ unitaire de degré d. Montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ si et seulement si
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{P}(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^d$$
   b. En déduire que $\overline{\mathrm{D}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 27

On note $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{T}_2(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices diagonalisables (resp. trigonalisables) de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $\varphi : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}(\mathrm{M})^2 - 4\det(\mathrm{M})$ est continue.
2. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\varphi(\mathrm{M}) \geq 0$.
3. En déduire que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $\overline{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 28 ★★

Soient U et V deux parties denses d'un espace vectoriel normé E. On suppose que U est ouvert. Montrer que $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ est dense dans E.

Exercice 29 ★★

Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

1. On suppose A inversible. Montrer que $\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$.
2. Montrer par un argument de densité que le résultat précédent reste valable si on ne suppose plus A inversible.

Limite et continuité

Exercice 30

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$?

1. $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.
2. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
3. $f(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}$.
4. $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.
5. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2-1}{x}\sin x$.
6. $f(x,y) = x^y$.
7. $f(x,y) = \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Exercice 31 ★★

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_1(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|P^{(n)}(0)\right|$ et $N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$. On considère l'endomorphisme D de $\mathbb{R}[X]$ défini par $D(P) = P'$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Vérifier que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que si l'on munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme N_1, alors D est continu.
3. Montrer que si l'on munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme N_2, alors D n'est pas continu.

Exercice 32

On pose $E = \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que l'application $\varphi : f \in E \mapsto f'$ n'est jamais continue de (E, N) dans (E, N) quelque soit la norme N dont on munit E.

Exercice 33 ★ Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$, on pose $\|P\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$. Soit $b \in \mathbb{C}$. On définit l'application $f : P \in E \mapsto P(b)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Etudier la continuité de f et calculer sa norme subordonnée le cas échéant.

Exercice 34 ★★

On note $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On munit E d'une norme définie de la manière suivante :

$$\forall f \in E, \ \|f\| = \int_0^1 |f(t)| \, dt$$

Pour $f \in E$, on définit

$$\phi(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^x f(t) \, dt$$

1. Justifier que ϕ est un endomorphisme de E.
2. Démontrer que ϕ est continu.
3. On pose $f_n : x \in [0,1] \mapsto ne^{-nx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n\|$ et $\|\phi(f_n)\|$.
4. En déduire la norme de ϕ subordonnée à la norme $\|\cdot\|$.

Exercice 35 ★

On note E l'ensemble des suites réelles bornées que l'on munit de la norme uniforme. On pose $\Delta : (u_n) \in E \mapsto (u_{n+1} - u_n)$. Montrer que Δ est un endomorphisme continu de E et déterminer sa norme d'opérateur.

Exercice 36 ★★

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_1(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|P^{(n)}(0)\right|$ et $N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$. On considère l'endomorphisme D de $\mathbb{R}[X]$ défini par $D(P) = P'$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Vérifier que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que si l'on munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme N_1, alors D est continu.
3. Montrer que si l'on munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme N_2, alors D n'est pas continu.

Exercice 37

On pose $E = \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que l'application $\varphi : f \in E \mapsto f'$ n'est jamais continue de (E, N) dans (E, N) quelque soit la norme N dont on munit E.

Exercice 38 **Norme d'opérateur (ou norme subordonnée)**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont munis de leurs normes uniformes respectives. Montrer que
$$|||A||| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{p} |A_{i,j}|$$

2. On suppose que $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont munis de leurs normes 1 respectives. Montrer que
$$|||A||| = \max_{1\leq j\leq p} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|$$

3. On suppose que $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont munis de leurs normes 2 respectives. Montrer que
$$|||A||| = \sqrt{\max \operatorname{Sp}(A^{\top}A)}$$

Compacité

Exercice 39 **Centrale MP 2010**

Donner un exemple de partie fermée bornée non compacte d'un espace vectoriel normé.

Exercice 40 **ENS Ulm/Lyon/Cachan MP 2001**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue.

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(\{a\})$ soit un singleton. Montrer que f admet un extremum global.

2. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(\{a\})$ soit compact et non vide. Montrer que f admet un extremum global.

3. On suppose que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{a\})$ est compact. Montrer que $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x)$ existe.

Exercice 41 **Centrale MP 2018**

Soient E un espace vectoriel normé, K un compact de E et $g : K \to K$ une application 1-lipschitzienne. On cherche à montrer que g est surjective si, et seulement si, c'est une isométrie.

1. On commence par supposer g surjective. On considère x et y dans K ainsi que x_n et y_n des antécédents par g^n de x et y respectivement. On note (x', y') une valeur d'adhérence de la suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $x - y$ est une valeur d'adhérence de la suite $(g^n(x') - g^n(y'))_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Montrer que la suite $(\|g^n(x') - g^n(y')\|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\|x - y\|$. En déduire que g est une isométrie.

3. On suppose maintenant que g est une isométrie. Montrer que g est surjective. Donner un contre-exemple lorsque K est seulement bornée.

Exercice 42 **Centrale MP**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Pour un compact K non vide, on pose $\delta(K) = \sup_{(x,y)\in K^2} \|x - y\|$. Montrer que $\delta(K)$ est bien défini. La borne supérieure est-elle atteinte ?

2. Pour $a \in E$, on note $\mathcal{S}_a$ l'ensemble des compacts de E symétriques par rapport à a. Pour B compact de E, on pose
$$T(B) = \left\{x \in B \mid \forall y \in B, \|x - y\| \leq \frac{1}{2}\delta(B)\right\}$$
Montrer que T induit une application de $\mathcal{S}_a$ dans $\mathcal{S}_a$.

3. Soit $B_0 \in \mathcal{S}_a$. On pose $B_{n+1} = T(B_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\bigcap_{n\geq 0} B_n$.

4. En déduire que toute isométrie de E conserve les milieux.
Remarque : une isométrie de E *est une application* $u : E \to E$ *telle que* $\|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$ *pour tout* $(x, y) \in E^2$.

Exercice 43 **Mines MP**

Soit K une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé et $f : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Soit (x_n) une suite de premier terme $x_0 \in \mathbb{K}$ et telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (x_n) converge vers l'unique point fixe de f.
3. Donner un contre-exemple en ne supposant plus K compact.

Exercice 44 ★★★ **Principe du maximum pour les polynômes (X 2019)**

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. On note

$$\mathrm{B} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$$

Montrer que

$$\max_{z \in \mathrm{B}} |\mathrm{P}(z)| = \max_{z \in \mathrm{S}} |\mathrm{P}(z)|$$

Exercice 45 ★

Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 46

Soit $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum sur E.

Exercice 47 ★★★

Soient K et L des parties respectives de deux espaces vectoriels normés E et F. Soit $f : \mathrm{K} \to \mathrm{L}$ bijective et continue. Montrer que f^{-1} est continue.

Connexité

Exercice 48 **ENS MP 2010**

1. Soient $r, n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \dots, f_r$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ formant une famille libre. Quel est le nombre de composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i$?
2. Même question en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

Exercice 49

Soit E un espace vectoriel normé de dimension supérieure ou égale à 2.

1. Montrer que la sphère unité S de E est connexe par arcs.
2. En déduire que toutes les sphères de E sont connexes par arcs.

Exercice 50 ★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est-il connexe par arcs ?

Exercice 51 ★★

Montrer que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Exercice 52 ★★★ **Connexité par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$**

1. Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2$. On pose

   $$d : z \in \mathbb{C} \mapsto \det((1 - z)\mathrm{A} + z\mathrm{B})$$

   Montrer que $\mathrm{V} = \{z \in \mathbb{C},\ d(z) \neq 0\}$ est connexe par arcs.
2. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 53 ★★

1. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^3 = x^3$.
2. Déterminer les applications $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continues telles que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z)^3 = z^3$.