Devoir surveillé n°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – Concours National Marocain MP 2000

- On considère un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$ sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ désigne la $\mathbb{K}$-algèbre des endomorphismes de E. Si $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$, l'endomorphisme composé $u \circ v$ sera tout simplement noté uv ; $[u, v]$ désignera l'endomorphisme $uv - vu$ et l'identité se notera Id.
- Si u est un endomorphisme de E, on note $\mathrm{tr}(u)$ la trace de u et $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u. $\mathcal{T}$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E de trace nulle. Si λ est une valeur propre de u, on notera $\mathrm{E}_\lambda(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ.
- Pour $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, on pose $u^0 = \mathrm{Id}$ et si $k \geq 1$, $u^k = uu^{k-1}$. On rappelle qu'un endomorphisme u est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ (endomorphisme nul).
- On définit l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(\mathrm{E})^2 & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathrm{E}) \\ (u, v) & \longmapsto & [u, v] \end{array} \right.$$

et, pour $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, l'application

$$\Phi_u : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathrm{E}) \\ v & \longmapsto & [u, v] \end{array} \right.$$

- Pour $(m, p) \in \mathbb{N}^2$, on note $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à m lignes et p colonnes. I_m est la matrice identité d'ordre m. Enfin, $\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ désigne la matrice carrée d'ordre n de terme général $\alpha_i \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker (on rappelle que $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$).

Partie I

I.A Quelques propriétés de Φ_u

1 Montrer que $\mathcal{T}$ est un hyperplan de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

2 Montrer que Φ est une application bilinéaire antisymétrique.

3 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme qui n'est pas une homothétie. Montrer que $\mathrm{vect}(\mathrm{Id}, u, \dots, u^{n-1})$ est inclus dans $\mathrm{Ker}\, \Phi_u$ et que $\dim(\mathrm{Ker}\, \Phi_u) \geq 2$.

4 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer que si $v \in \mathrm{Ker}\, \Phi_u$, alors $v(\mathrm{E}_\lambda(u)) \subset \mathrm{E}_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

5 Montrer que l'image de Φ est incluse dans $\mathcal{T}$ et que, pour $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\mathrm{Im}\, \Phi_u \subset \mathcal{T}$.
Existe-t-il $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$ tel que $[u, v] = \mathrm{Id}$? Peut-on avoir $\mathrm{Im}\, \Phi_u = \mathcal{T}$?

6 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

6.a Montrer que u est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{E}$, la famille $(x, u(x))$ est liée.

6.b En déduire que $\operatorname{Ker} \Phi_u = \mathcal{L}(\mathrm{E})$ si et seulement si u est une homothétie.

7 **7.a** Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$. Montrer par récurrence que pour tout

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \Phi_u^k(v) = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} u^{k-p} v u^p$$

7.b En déduire que si u est nilpotent, alors Φ_u l'est aussi.

I.B Détermination de l'image de Φ

Soit u un endomorphisme non nul de E de trace nulle.

8 u peut-il être une homothétie ?

9 Montrer qu'il existe $e_1 \in \mathrm{E}$ tel que la famille $(e_1, u(e_1))$ soit libre.

10 En déduire l'existence d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice A de u dans cette base soit de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{X}^\mathsf{T} \\ \mathrm{Y} & \mathrm{A}_1 \end{pmatrix}$$

où $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})^2$ et $\mathrm{A}_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

11 On suppose $\mathrm{A}_1 = \mathrm{UV} - \mathrm{VU}$ avec $(\mathrm{U}, \mathrm{V}) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})^2$.

11.a Montrer que l'on peut trouver $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que la matrice $\mathrm{U} - \alpha \mathrm{I}_{n-1}$ soit inversible.

11.b On pose $\mathrm{U}' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \mathrm{U} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{V}' = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{R}^\mathsf{T} \\ \mathrm{S} & \mathrm{V} \end{pmatrix}$ avec $(\mathrm{R}, \mathrm{S}) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})^2$. Etablir l'équivalence

$$\mathrm{A} = \mathrm{U}'\mathrm{V}' - \mathrm{V}'\mathrm{U}' \iff \left[\mathrm{X}^\mathsf{T} = -\mathrm{R}^\mathsf{T}(\mathrm{U} - \alpha \mathrm{I}_{n-1}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Y} = (\mathrm{U} - \alpha \mathrm{I}_{n-1})\mathrm{S}\right]$$

12 Montrer alors par récurrence que l'image de Φ est égale à $\mathcal{T}$.

I.C Détermination de $\operatorname{tr}(\Phi_u)$

Soit u un endomorphisme de E. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ la matrice de u dans cette base. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $u_{i,j}$ désigne l'endomorphisme de E tel que

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ u_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$$

13 Rappeler pourquoi $(u_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ est une base de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

14 Calculer, pour tout $(i, j, k, l) \in [\![1, n]\!]^4$ le produit $u_{i,j} u_{k,l}$ et montrer que l'on a :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \Phi_u(u_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} u_{k,j} - \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} u_{i,k}$$

15 En déduire $\operatorname{tr}(\Phi_u)$.

Partie II

II.A Cas où u est diagonalisable

Dans cette sous-partie, on suppose qu u est diagonalisable.

On pose $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, m_i désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i de u.

16 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Pour simplifier les notations, on pose $u(e_i) = \mu_i e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

16.a Montrer que

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \ \Phi_u(u_{i,j}) = (\mu_i - \mu_j) u_{i,j}$$

16.b En déduire que Φ_u est diagonalisable et préciser $\mathrm{Sp}(\Phi_u)$.

17 Montrer que

$$\operatorname{Ker} \Phi_u = \left\{ v \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mid \forall i \in [\![1, p]\!], \ v(\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)) \subset \mathrm{E}_{\lambda_i}(u) \right\}$$

18 En déduire que $\operatorname{Ker} \Phi_u$ est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathrm{E}_{\lambda_1}(u)) \times \mathcal{L}(\mathrm{E}_{\lambda_2}(u)) \times \cdots \times \mathcal{L}(\mathrm{E}_{\lambda_p}(u))$. Quel est le rang de Φ_u ?

19 On suppose en plus que u a n valeurs propres *distinctes*. Quel est la dimension de $\operatorname{Ker} \Phi_u$? Quel est le polynôme minimal de u ? En déduire que $\operatorname{Ker} \Phi_u = \mathrm{vect}(\mathrm{Id}, u, \dots, u^{n-1})$.

II.B Cas où $\dim \mathrm{E} = 2$

On suppose dans cette sous-partie que $\dim \mathrm{E} = 2$. Soit u un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie.

20 Montrer que $\operatorname{Ker} \Phi_u = \mathrm{vect}(\mathrm{Id}, u)$. On pourra utiliser une base de E de la forme $(e, u(e))$ dont on justifiera l'existence.

21 Montrer que le polynôme caractéristique de Φ_u est de la forme $\mathrm{X}^2(\mathrm{X}^2 + \beta)$ avec $\beta \in \mathbb{K}$.

22 Si $\beta = 0$, l'endomorphisme Φ_u est-il diagonalisable ?

23 On suppose $\beta \neq 0$. Etudier la diagonalisabilité de Φ_u selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

24 On suppose Φ_u diagonalisable.

24.a Montrer que $\mathrm{Sp}(\Phi_u) = \{0, \lambda, -\lambda\}$ où λ est un scalaire non nul.

Dans la suite de la question, v désigne un vecteur propre de Φ_u associé à la valeur propre λ.

24.a L'endomorphisme v peut-il être inversible ? Calculer $\mathrm{tr}(v)$ puis v^2.

24.b Détermination de $\mathrm{Sp}(u)$.

- Pour quelles valeurs du vecteur e, la famille $(e, v(e))$ est-elle une base de E ?
- Vérifier que la matrice de u dans une telle base est triangulaire inférieure puis en déduire que $\mathrm{Sp}(u) = \left\{ \dfrac{\mathrm{tr}(u) - \lambda}{2}, \dfrac{\mathrm{tr}(u) + \lambda}{2} \right\}$.

24.c En déduire que u est diagonalisable.

II.C Cas où Φ_u est diagonalisable

Soit u un endomorphisme de E tel que Φ_u soit diagonalisable et $\mathrm{Sp}(u) \neq \varnothing$. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_{n^2})$ une base de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ formée de vecteurs propres de Φ_u de sorte que $\Phi_u(v_i) = \beta_i v_i$ pour tout $i \in [\![1, n^2]\!]$. Soient enfin $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $x \in \mathrm{E}$ un vecteur propre associé.

25 Calculer $u(v_i(x))$ en fonction de λ, β_i et $v_i(x)$.

26 Montrer que l'application $\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ v & \longmapsto & v(x) \end{array} \right.$ est linéaire surjective.

27 Montrer alors que u est diagonalisable.

Partie III

Soient λ une valeur propre *non nulle* de Φ_u et v un vecteur propre associé. On désigne par P_u le polynôme caractéristique de u.

28 **28.a** Montrer que $\forall x \in \mathbb{K}$, $v(x\,\mathrm{Id} - u) = ((x+\lambda)\,\mathrm{Id} - u)v$.

28.b Qu'en déduit-on sur P_u si $\det(v) \neq 0$.

28.c Montrer alors que l'endomorphisme v n'est pas inversible.

29 Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_u(v^k) = k\lambda v^k$. Qu'en déduit-on si $v^p \neq 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$.

30 Conclure que $v^n = 0$.

Dans la suite, on suppose que $v^{n-1} \neq 0$.

31 Soit $e \in \mathrm{E}$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$. Montrer que la famille $(e, v(e), \dots, v^{n-1}(e))$ est une base de E et écrire la matrice de l'endomorphisme v dans cette base.

32 On pose $\mathcal{A} = \{w \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mid wv - vw = \lambda v\}$.

32.a Montrer que $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme w_0 dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est $\mathrm{diag}(0, \lambda, 2\lambda, \dots, (n-1)\lambda)$.

32.b Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ dont on précisera la direction.

32.c Déterminer la dimension ainsi qu'une base de la direction de $\mathcal{A}$.

33 Quelle est alors la forme de la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme u ?

34 On suppose dans cette question que la matrice de u dans une base $\mathcal{B}'$ de E est de la forme $\mathrm{diag}(\alpha, \alpha + \lambda, \dots, \alpha + (n-1)\lambda)$. Décrire par leur matrice dans la base $\mathcal{B}'$ les éléments de l'espace $\mathrm{E}_\lambda(\Phi_u)$. Quelle est sa dimension ?