

# DÉRIVATION ET INTÉGRATION

## Opérations et dérivation

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u^{-1})' = \frac{1}{u' \circ u^{-1}}$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(\lambda u)' = \lambda u'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$(u \circ v)' = (u' \circ v)v'$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$$

$$\text{Formule de Leibniz : } (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

## Dérivées usuelles

$$\ln(x) \mapsto \frac{1}{x}$$

$$e^{ax} \mapsto ae^{ax}$$

$$x^\alpha \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\sin(x) \mapsto \cos(x)$$

$$\cos(x) \mapsto -\sin(x)$$

$$\tan(x) \mapsto 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\arcsin(x) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos(x) \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan(x) \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{sh}(x) \mapsto \operatorname{ch}(x)$$

$$\operatorname{ch}(x) \mapsto \operatorname{sh}(x)$$

$$\operatorname{th}(x) \mapsto 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$$

## Primitives usuelles

$$\ln(x) \mapsto x \ln(x) - x$$

$$e^{ax} \mapsto \frac{e^{ax}}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$x^\alpha \mapsto \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln|x| & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\sin(x) \mapsto -\cos(x)$$

$$\cos(x) \mapsto \sin(x)$$

$$\tan(x) \mapsto -\ln|\cos(x)|$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mapsto \arcsin(x)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mapsto \arccos(x) \text{ ou } -\arcsin(x)$$

$$\frac{1}{1+x^2} \mapsto \arctan(x)$$

$$\operatorname{sh}(x) \mapsto \operatorname{ch}(x)$$

$$\operatorname{ch}(x) \mapsto \operatorname{sh}(x)$$

$$\operatorname{th}(x) \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x))$$

## Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral : Si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur un intervalle  $I$ , alors

$$\forall (a, b) \in I^2, f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Inégalité de Taylor-Lagrange : Si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur un intervalle  $I$  et si  $|f^{(n+1)}| \leq M$  sur  $I$ , alors

$$\forall (a, b) \in I^2, \left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Formule de Taylor-Young : Si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ , alors

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$