ARITHMÉTIQUE

Divisibilité

Exercice 1 ★

Soient x, y deux entiers. Montrer que $x^2 + y^2$ est divisible par 7 si et seulement si x et y le sont.

Exercice 2 ★

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $17 \mid 7^{8n+1} + 10(-1)^n$;
2. $11 \mid 9^{5n+2} - 4$;
3. $6 \mid 10^{3n+2} - 4^{n+1}$.

Exercice 3 ★★

On considère la suite $a_n = \sum_{k=1}^{n} k!$ pour tout $n \geqslant 1$. Est-ce que, à partir d'un certain rang, tous les a_n sont divisibles par 9 et non-divisibles par 27 ?

Exercice 4 ★★

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2 divise $(n+1)^n - 1$.

Exercice 5 ★★

Montrer que la plus grande puissance de 2 divisant $5^{2^n} - 1$ est 2^{n+2}.

Exercice 6 ★ **Critères de divisibilité usuels**

Démontrer les critères de divisibilité suivants.

1. Un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
2. Un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
3. Un entier est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres de rang pair moins la somme de ses chiffres de rang impair est divisible par 11.

Exercice 7 ★

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 5 divise $2^{3n+5} + 3^{n+1}$.

Exercice 8 ★★★ **Mines-Ponts MP**

Montrer que si p est un entier premier différent de 2 et 5, alors il divise un des entiers de l'ensemble $\{1, 11, 111, 1111, \dots\}$.

Exercice 9 ★

1. Montrer qu'un entier naturel est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5.
2. Montrer qu'un entier naturel est divisible par 4 si et seulement si l'entier formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

Congruence

Exercice 10 ★★ **Mines-Ponts MP 1998**

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ et tout entier a impair

$$a^{2^{n-1}} \equiv 1\,[2^n]$$

Exercice 11 ★ **Congruences simultanées**

Résoudre le système d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$: $\begin{cases} x \equiv 2[10] \\ x \equiv 5[13] \end{cases}$.

Exercice 12 ★ **Congruences simultanées**

1. Le système $\begin{cases} x \equiv 3[10] \\ x \equiv 4[8] \end{cases}$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$ admet-il des solutions ?
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. A quelle condition le système $\begin{cases} x \equiv a[10] \\ x \equiv b[8] \end{cases}$ admet-il des solutions ?
3. Déterminer les solutions du système $\begin{cases} x \equiv 4[10] \\ x \equiv 2[8] \end{cases}$.

Division euclidienne

Exercice 13 ★

Déterminer le reste de la division euclidienne de

1. $2^{2^{10}}$ par 7.
2. 3^{2189} par 25.

Exercice 14 ★★★

Soient $a, m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $a \geq 2$ et $d = (a^n - 1) \wedge (a^m - 1)$.

1. Soit $n = qm + r$ la division euclidienne de n par m. Démontrer que $a^n \equiv a^r[a^m - 1]$.
2. En déduire que $d = (a^r - 1) \wedge (a^m - 1)$, puis $d = a^{n \wedge m} - 1$.
3. A quelle condition $a^m - 1$ divise-t-il $a^n - 1$?

Exercice 15

Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que le reste de la division euclidienne de a^2 par 8 est 0, 1 ou 4.

Exercice 16 ★

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. On note q le quotient de la division euclidienne de $a - 1$ par b. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.

Exercice 17 ★

Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $n + 1$ divise $n^2 + 1$.

Exercice 18 ★

Quel est le reste de la division euclidienne de 2^{2020} par 7.

Exercice 19 ★★

Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux avec $b \geq 2$. Montrer qu'il existe un unique couple $(u_0, v_0) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant :

$$u_0 a - v_0 b = 1 \qquad u_0 < b \qquad v_0 < a$$

Equations diophantiennes

Exercice 20 ★ **Équations diophantiennes**

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

1. $221x + 247y = 52$.
2. $323x - 391y = 612$.
3. $198x + 216y = 36$.

Exercice 21 ★★

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^3$ l'équation $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$.

Exercice 22 ★★

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x^2 + 2xy - 3 = 0$.

Exercice 23 ★★★ **Centrale MP 2012**

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation

$$n(n+1)(n+2) = m^2$$

Exercice 24 ★★

On se propose de résoudre l'équation (E) : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ d'inconnue $(a,b,c)\in(\mathbb{N}^*)^3$.

1. Soit $(a,b,c)\in(\mathbb{N}^*)^3$ vérifiant (E). On suppose a,b,c premiers entre eux dans leur ensemble.
   a. On pose $\alpha = a-c$ et $\beta = b-c$. Monter que α,β,c sont premiers entre eux dans leur ensemble puis que α et β sont premiers entre eux.
   b. En déduire que α et β sont des carrés d'entiers puis qu'il existe $(u,v)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $a=(u+v)u$, $b=(u+v)v$ et $c=uv$.
2. Résoudre (E).

Exercice 25 ★★

Résoudre l'équation $2^n+1=m^3$ d'inconnue $(n,m)\in\mathbb{N}^2$.

PGCD et PPCM

Exercice 26 ★

Résoudre les systèmes

1. $\begin{cases} x\wedge y = 3 \\ x\vee y = 135 \end{cases}$.
2. $\begin{cases} x+y = 100 \\ x\wedge y = 10 \end{cases}$.

Exercice 27 ★ **Nombres de Fibonacci**

On considère la suite (F_n) définie par ses premiers termes $F_0=0$ et $F_1=1$ et par la relation de récurrence $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$. Déduisez-en que F_n et F_{n-1} sont premiers entre eux.
2. Montrer que pour tout couple $(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $F_{n+p}=F_pF_{n+1}+F_{p-1}F_n$. En déduire que $F_n\wedge F_p=F_{n+p}\wedge F_p$.
3. Démontrer que pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, $F_m\wedge F_n=F_{m\wedge n}$.

Exercice 28 ★

Soient $a,b,c\in\mathbb{Z}$ avec $a\wedge b=1$. Montrer que $a\wedge bc=a\wedge c$.

Exercice 29 ★★

Soient $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$. On note $d=a\wedge b$ et $m=a\vee b$. Que vaut $(a+b)\wedge m$?

Exercice 30 ★★★ **Une formule pour le PGCD**

Soient m et n deux entiers naturels non nuls. Montrer que

$$a\wedge b = a+b-ab+2\sum_{k=1}^{b-1}\left\lfloor\frac{ka}{b}\right\rfloor$$

Exercice 31 ★★

Soient r un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $a_1,\dots,a_r$ des entiers relatifs. Pour tout $i\in[\![1,r]\!]$, on pose $b_i=\prod_{\substack{1\le j\le r\\ j\ne i}} a_j$.
Montrer que les a_i sont premiers entre eux deux à deux si et seulement si les b_i sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Nombres premiers

Exercice 32 ★★ **Nombres parfaits**

On appelle *nombre parfait* tout entier n dont la somme des diviseurs vaut $2n$ ou de manière équivalente tout entier n dont la somme des diviseurs *stricts* (i.e. n non compris) vaut n.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $\mathrm{S}(n)$ la somme des diviseurs de S. Montrer que la fonction S est multiplicative i.e. si $m \wedge n = 1$ alors $\mathrm{S}(mn) = \mathrm{S}(m)\mathrm{S}(n)$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $2^p - 1$ soit premier.

- **a.** Montrer que p est premier.
- **b.** Montrer que $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait (i.e. $\mathrm{S}(n) = 2n$).

3. Montrer que tout nombre parfait pair est de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$ où p est premier.

Exercice 33 ★★ **Nombres de Fermat**

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^m + 1$ soit premier. Montrer que $m = 2^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

2. Notons $\mathrm{F}_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que si $n \neq m$, F_n et F_m sont premiers entre eux.

Exercice 34 ★★ **Petit théorème de Fermat**

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\binom{p}{k}$ est divisible par p.

2. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n^p - n$ est divisible par p (i.e. $n^p \equiv n[p]$).

Exercice 35 ★★

Soient a et r deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On suppose que $a^r - 1$ est premier.

1. Montrer que a vaut 2 puis que r est premier.

2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 36 ★★ **Nombres de Mersenne**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle $n^{\text{ème}}$ nombre de Mersenne l'entier $\mathrm{M}_n = 2^n - 1$.

1.
- **a.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{N}^*$ un diviseur positif de n. Montrer que $2^a - 1$ divise M_n.
- **b.** En déduire que si M_n est un nombre premier, alors n est un nombre premier.

2. Soient p, q des nombres premiers avec p impair. On suppose que q divise M_p.

- **a.** Montrer que q est impair. En déduire que $2^{q-1} \equiv 1[q]$ en utilisant le petit théorème de Fermat.
- **b.** Soit $\mathrm{A} = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 2^n \equiv 1[q]\}$. Montrer que A admet un minimum que l'on notera m.
- **c.** En effectuant la division euclidienne de p par m, montrer que m divise p puis que $m = p$.
- **d.** En effectuant la division euclidienne de $q - 1$ par p, montrer que $q \equiv 1[p]$.
- **e.** Montrer que $q \equiv 1[2p]$.

3. Soient p un nombre premier impair et $n \in \mathbb{N}^*$ divisant M_p. En utilisant la décomposition en facteurs premiers de n et la question précédente, montrer que $n \equiv 1[2p]$.

Exercice 37 ★★ **Mines-Ponts MP 2012**

Montrer que la somme de deux nombres premiers consécutifs ne peut pas être égal au produit de deux nombres premiers.

Exercice 38 ★★

Soient a et b des entiers naturels non nuls premiers entre eux tels que ab soit une puissance $n^{\text{ème}}$ d'entier ($n \in \mathbb{N}$). Montrer que a et b sont des puissances $n^{\text{èmes}}$ d'entiers.

Exercice 39 ★

1. Soit n un entier impair. Montrer que $n^2 \equiv 1[8]$.

2. Soit $p > 3$ un nombre premier. Montrer que $p^2 - 1$ est multiple de 24.

Divers

Exercice 40 ★★

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 9$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n^4 + 4u_n^3$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'écriture décimale de u_{11} comporte plus de 2010 chiffres 9.

Exercice 41 ★★★ **Ulm MP 2001**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ et $i_1, \dots, i_k$ dans $[\![1, n]\!]$ deux à deux distincts tels que n divise $\sum_{j=1}^{k} x_{i_j}$.

Exercice 42 ★★ **Écriture dans une base**

Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![0, b-1]\!]^n & \longrightarrow & [\![0, b^n - 1]\!] \\ (a_0, \dots, a_{n-1}) & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n-1} a_k b^k \end{array} \right.$$

est bien définie et bijective.

Exercice 43 ★★★ **Mines-Ponts MP 2007**

Parmi les entiers qui s'écrivent en base 10 sous la forme $(aabb)_{10}$, déterminer ceux qui sont des carrés d'entiers.