

## Exponentielles et logarithmes

### Exercice 1 ★

### Equations aux puissances

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

- $2^x + 3^x = 5;$
- $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}.$

### Exercice 2 ★

### Une suite de fonctions

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Soit pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  la fonction définie par

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto n^\alpha x e^{-nx}.$$

- Discuter la limite à  $x$  fixé, de la suite  $(f_n(x))_{n \geq 1}$ .
- Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  admet un maximum sur  $\mathbb{R}$  que l'on notera  $u_n$ .
- Discuter la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

### Exercice 3 ★

### Une limite à connaître

Prouver que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha.$$

### Exercice 4 ★

### Optimisation

Trouver la plus grande valeur de  $\sqrt[n]{n}$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Exercice 5 ★★★

Trouver tous les couples  $(a, b)$  d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 et  $a < b$  tels que  $a^b = b^a$ .

### Exercice 6 ★★

### Une belle inégalité

Prouver que

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

### Exercice 7 ★

Soient  $0 < a < b$ . Prouver que,  $\forall x > 0$ ,

$$ae^{-bx} - be^{-ax} > a - b.$$

### Exercice 8 ★

Etudier en  $+\infty$  les expressions suivantes :

$$1. \frac{e^{-\sqrt{\ln(n)}}}{1/n}$$

$$2. \frac{e^{-\sqrt{n}}}{1/n^2}$$

$$3. \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n} \ln(n)}$$

$$4. \frac{n}{(\ln(n))^{-\ln n}}$$

### Exercice 9 ★

Déterminer les limites en  $\pm \infty$  des expressions suivantes :

$$1. x^2 e^{-3x} 4^x$$

$$2. x^2 4^x$$

$$3. x^2 e^{-x}$$

$$4. 4^x e^{-x}$$

### Exercice 10 ★

### Etude d'une suite de fonctions

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , on pose :

$$f_n(x) = x^n(1-x).$$

Quelle est la limite de  $f_n(x)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ? Prouver que  $f_n$  admet un maximum sur  $[0, 1]$ , noté  $u_n$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle ?

**Exercice 11 ★★**

Soit  $\lambda > 0$ . On pose  $f(x) = e^{\lambda x}$  et on considère l'équation (E) suivante :

$$e^{\lambda e^{\lambda x}} = x$$

1. Étudier les variations et les limites de la fonction  $f$ .
2. Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = x$ . Montrer que  $x$  est solution de (E).
3. Montrer que, réciproquement, si  $x$  est solution de (E) alors  $f(x) = x$ .
4. Dresser le tableau de variations de la fonction  $g : x \mapsto f(x) - x$ .
5. En déduire, selon les valeurs de  $\lambda$  le nombre de solutions de l'équation (E).

**Exercice 12 ★★**

Résoudre l'équation (E) :  $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$ .

**Fonctions trigonométriques et réciproques****Exercice 13 ★**

Tracer la courbe de

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \cos(x) + \frac{1}{2} \cos(2x).$$

**Exercice 14 ★★**

Tracer le graphe des fonctions définies par

1.  $x \mapsto \arccos(\cos(x)) - \frac{1}{2} \arccos(\cos(2x))$ .
2.  $x \mapsto \frac{x}{2} - \arcsin\left(\sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}}\right)$ .

**Exercice 15 ★★**

On cherche à résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :

$$\arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3) = \frac{5\pi}{4}.$$

1. Prouver que  $x = 5$  est solution.
2. Conclure.

**Exercice 16 ★****Il est graf' cet exo**

Tracer les graphes des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$x \mapsto \sin^4(x) + \cos^4(x) \quad \text{et} \quad x \mapsto \sin^5(x) + \cos^5(x).$$

**Exercice 17 ★****Sweet trigo**

On pose, pour  $x \geq 0$ ,  $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ .

1. La fonction  $f$  est-elle bien définie ?
2. Justifier que tout réel positif  $x$  peut s'écrire sous la forme  $x = \tan^2(\theta/2)$  avec  $0 \leq \theta < \pi$ .
3. Soit  $x \geq 0$ . Simplifier  $f(x)$  en posant  $x = \tan^2(\theta/2)$  avec  $0 \leq \theta < \pi$ .

**Exercice 18 ★★****(Re)-calcul de  $\cos(\cos(\pi/5))$** 

On pose  $y = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$ . Calculer  $\cos(4y)$  et en déduire la valeur de  $y$ .

**Exercice 19 ★★**

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels positifs. Prouver qu'il existe un unique  $c \in \mathbb{R}$  tel que

$$\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan(c).$$

Exprimer  $c$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

**Exercice 20 ★****La formule de Machin**

Prouver l'égalité suivante :

$$4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

**Exercice 21 ★****Encore une formule**

Prouver l'égalité suivante :

$$\arctan(3) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

**Exercice 22 ★****Deux méthodes pour une formule**

Prouver que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\arctan(x) + 2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \frac{\pi}{2}.$$

**Exercice 23 ★★**

On cherche à résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :

$$\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}.$$

1. Montrer que si  $x$  est solution, alors nécessairement  $x$  vérifie l'équation  $2x^2 + 3x - 1 = 0$ .
2. Etudier la réciproque.

**Exercice 24 ★****Equations à gogo**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $\arcsin(\tan(x)) = x$ .
2.  $\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 25 ★****Le cercle n'est pas loin**

Prouver que,  $\forall x \in ]-1, 1[$ ,

$$\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

**Exercice 26 ★★****Tcheby's back**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose pour tout réel  $x \in [-1, 1]$  :

$$f_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

Montrer que  $f_n$  est une fonction polynomiale.

**Exercice 27 ★****La formule cachée**

On souhaite établir que  $\forall x \in [0, 1]$  :

$$\arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin(2x - 1).$$

1. *Première méthode* : en utilisant la dérivation.
2. *Seconde méthode* : en utilisant les formules de trigonométrie. On pourra poser  $x = \sin^2(u)$ .

**Exercice 28 ★★**

Simplifier les expressions suivantes (il ne doit plus figurer de fonctions trigonométriques directes et réciproques) :

$$f(x) = \sin(\arctan x)$$

$$g(x) = \cos(\arctan x)$$

**Exercice 29 ★★**

Résoudre l'équation :

$$\arccos x = \arcsin 2x$$

**Exercice 30 ★★**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes. On raisonnera *avec soin*.

1.  $\arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + \arccos\frac{3}{5} = \frac{\pi}{2}$ .
2.  $\arccos x = 2 \arccos\frac{3}{4}$ .
3.  $\arccos x = \arccos\frac{1}{4} + \arcsin\frac{1}{3}$ .
4.  $\arcsin x = \arctan 2x$ .
5.  $\arcsin 2x = \arctan x$ .

**Exercice 31 ★★★**

Comparer  $\cos(\sin x)$  et  $\sin(\cos x)$ .

**Exercice 32 ★★**

On considère la fonction numérique  $f$  telle que  $f(x) = (x^2 - 1) \arctan \frac{1}{2x-1}$ .

1. Quel est l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$  ?
2. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathcal{D}$  et mettre  $f'(x)$  sous la forme  $f'(x) = 2xg(x)$  pour  $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ .
3. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$ .
4. Etudier  $g$  et en déduire le tableau de variations de  $f$ .

**Exercice 33 ★★**

1. Que vaut  $\tan \frac{\pi}{6}$  ? Rappeler la formule donnant  $\tan(a-b)$  en fonction de  $\tan a$  et  $\tan b$ .
2. Montrer que parmi 7 réels quelconques, il en existe toujours deux notés  $x$  et  $y$  vérifiant  $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**Exercice 34 ★★**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$\arcsin x - \arccos x = \frac{\pi}{6}$$

**Exercice 35 ★★**

On note  $f : x \mapsto \arcsin(x) + \arcsin(2x)$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition  $I$  de  $f$ .
2. Calculer  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ .
3. Justifier que  $f$  induit une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à préciser.
4. Justifier que l'équation  $f(x) = \frac{\pi}{2}$  admet une unique solution dans  $I$ . On ne cherchera pas à résoudre cette équation dans cette question.
5. Résoudre l'équation  $f(x) = \frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 36 ★★**

Tracer les graphes des fonctions  $\arcsin \circ \sin$  et  $\arccos \circ \cos$ .

**Exercice 37 ★★**

Tracer les graphes des fonctions  $f = \arcsin \circ \cos$  et  $g = \arccos \circ \sin$  sur l'intervalle  $[-4\pi, 4\pi]$ .  
On justifiera ces tracés.

**Fonctions hyperboliques****Exercice 38 ★**

Résoudre  $\operatorname{ch}(x) + 2 \operatorname{sh}(x) = 2$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 39 ★****Sommes hyperboliques**

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Simplifier les sommes

$$S_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(ka + b) \quad \text{et} \quad \Sigma_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(ka + b).$$

**Exercice 40 ★**

Dresser le tableau de variation et tracer la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

**Exercice 41**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Prouver que

$$e^a - e^b = 2e^{\frac{a+b}{2}} \operatorname{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

et

$$e^a + e^b = 2e^{\frac{a+b}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

**Exercice 42 ★****Somme hyperbolique**

L'objectif de cet exercice est de simplifier une somme hyperbolique.

1. Montrer que pour tout réel  $x$ , on a

$$\operatorname{th}(2x) = \frac{2 \operatorname{th}(x)}{1 + \operatorname{th}^2(x)},$$

et en déduire que pour tout réel  $x$  non nul,

$$\frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)} = \operatorname{th}(x).$$

2.  $a$  étant un réel strictement positif et  $n$  un entier naturel, simplifier

$$\Lambda_n = \sum_{k=0}^n 2^k \operatorname{th}(2^k a).$$

**Exercice 43 ★****Une formule trigo-expo**

Etablir que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan(e^x) = \arctan(\operatorname{th}(x/2)) + \frac{\pi}{4}.$$

**Exercice 44 ★★**

On pose

$$f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right).$$

1. Justifier que  $f$  et  $g$  sont définies sur  $\mathbb{R}$  et dérivables sur  $\mathbb{R}^*$ .
2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = g(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-, \quad f(x) = -g(x).$$

**Exercice 45 ★★**

On pose  $f(x) = \arctan(\operatorname{sh} x)$  et  $g(x) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$ .

1. Vérifier que  $f$  et  $g$  sont bien définies sur  $\mathbb{R}$ . Sur quels domaines sont elles dérivables ?
2. Calculer  $f'$  et  $g'$  sur leurs domaines de définition, et en déduire que  $f(x) = g(x)$  pour tout  $x \geq 0$ . Quelle relation existe-t-il entre  $f(x)$  et  $g(x)$  pour  $x < 0$  ?

**Exercice 46 ★★**

Etablir que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\operatorname{argch}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}\right) = \frac{|x|}{2}$$

**Exercice 47 ★★**

---

On pose  $f(x) = \arctan(\operatorname{sh} x) + \arccos(\operatorname{th} x)$ .

1. Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de  $f$ .
2. Montrer que  $f'$  est nulle sur son domaine de dérivabilité.
3. Montrer que  $\arctan \frac{5}{12} + \arccos \frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}$ .