

# DEVOIR SURVEILLÉ N°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1

### Partie I –

- I.1 I.1.a** Puisque  $\sum u_n$  converge, la suite  $(R_n)$  converge vers 0. Par opérations, la suite de terme général  $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}}$  diverge vers  $+\infty$ .  
De plus,  $R_{n-1} - R_n = u_n \geq 0$  donc  $(R_n)$  est décroissante. Par croissance de la racine carrée, la suite de terme général  $\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}$  est également décroissante et  $\alpha$  est donc croissante.  
Enfin,

$$\alpha_n u_n = \frac{u_n}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}} = \frac{u_n(\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n})}{R_{n-1} - R_n} = \sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}$$

La série  $\sum \alpha_n u_n$  est donc une série télescopique convergente puisque la suite de terme général  $\sqrt{R_n}$  converge vers 0.

- I.1.b** On pose cette fois-ci  $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}}$ . Puisque  $\sum u_n$  est une série à termes positifs divergente, la suite  $(S_n)$  diverge vers  $+\infty$ . Par opérations, la suite  $\alpha$  converge vers 0.  
De plus,  $S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$  donc  $(S_n)$  est croissante. Par croissance de la racine carrée, la suite de terme général  $\sqrt{S_{n-1}} + \sqrt{S_n}$  est également croissante et  $\alpha$  est donc décroissante.  
Enfin,

$$\alpha_n u_n = \frac{u_n}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} = \frac{u_n(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})}{S_n - S_{n-1}} = \sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}$$

La série  $\sum \alpha_n u_n$  est donc une série télescopique convergente puisque la suite de terme général  $\sqrt{S_n}$  converge vers 0.

### I.2 I.2.a

- I.2.b** Comme  $\alpha$  est majorée,  $\alpha_k |u_k| = \mathcal{O}(|u_k|)$ . Comme  $u \in S_{AC}$ ,  $\sum |u_n|$  est une série à termes positifs convergente. Par conséquent,  $\sum_{k \rightarrow +\infty} \alpha_n |u_n|$  converge (absolument) et  $N_\alpha(u)$  est bien définie.  
Comme  $\alpha$  est positive,  $N_\alpha$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .  
Soient  $u \in S_{AC}$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

$$N_\alpha(\lambda u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |\lambda u_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |u_n| = |\lambda| N_\alpha(u)$$

Soit  $(u, v) \in S_{AC}^2$ . Par inégalité triangulaire,  $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $\alpha$  est positive,  $\alpha_n |u_n + v_n| \leq \alpha_n |u_n| + \alpha_n |v_n|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par conséquent

$$N_\alpha(u + v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |u_n + v_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |u_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |v_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |u_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |v_n| = N_\alpha(u) + N_\alpha(v)$$

Enfin, soit  $u \in S_{AC}$  tel que  $N_\alpha(u) = 0$ . On a donc  $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |u_n| = 0$ . Comme tous les termes sont positifs,  $\alpha_n |u_n| = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Or  $\alpha$  est strictement positive donc ne s'annule pas. Ainsi  $u_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  i.e.  $u = 0$ .

Tout ce qui précède montre que  $N_\alpha$  est bien une norme sur  $S_{AC}$ .

**I.2.c** On a clairement  $N_\alpha(\delta^p) = \alpha_p$ .

**I.2.d** D'après la question précédente,  $N_\alpha(\delta^p) = \frac{1}{2^p}$  et  $N_\beta(\delta^p) = \frac{1}{p!}$ . Par conséquent,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_\alpha(\delta_p)}{N_\beta(\delta_p)} = +\infty$  par comparaison de suites usuelles. Les normes  $N_\alpha$  et  $N_\beta$  ne sont donc pas équivalentes.

**I.2.e** On va montrer que  $N_\alpha$  et  $N_\beta$  sont équivalentes si et seulement si il existe deux réels strictement positifs  $m$  et  $M$  tels que  $m\alpha_n \leq \beta_n \leq M\alpha_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons que  $N_\alpha$  et  $N_\beta$  soient équivalentes. Alors il existe des réels strictement positifs  $m$  et  $M$  tels que  $mN_\alpha \leq N_\beta \leq MN_\alpha$ . Notamment, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $mN_\alpha(\delta^p) \leq N_\beta(\delta^p) \leq MN_\alpha(\delta^p)$  i.e.  $m\alpha_p \leq \beta_p \leq M\alpha_p$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe des réels strictement positifs  $m$  et  $M$  tels que  $m\alpha_n \leq \beta_n \leq M\alpha_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $u \in S_{AC}$ . Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, m\alpha_n|u_n| \leq \beta_n|u_n| \leq M\alpha_n|u_n|$$

Puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty} m\alpha_n|u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n|u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} M\alpha_n|u_n|$$

ou encore  $mN_\alpha(u) \leq N_\beta(u) \leq MN_\alpha(u)$ . Ceci étant vrai pour tout  $u \in S_{AC}$ ,  $mN_\alpha \leq N_\beta \leq MN_\alpha$ . Les normes  $N_\alpha$  et  $N_\beta$  sont donc équivalentes.

## Partie II –

**II.1 II.1.a** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = q^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{q}{1-q} \cdot q^n$$

**II.1.b** La suite  $(R_n)$  est également géométrique de raison  $q$  avec  $|q| < 1$ . La série  $\sum R_n$  est donc convergente. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \frac{q}{1-q} \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{q}{(1-q)^2}$$

**II.2 II.2.a**

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} &= (n-1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha} \\ &= n^{1-\alpha} \left( \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - 1 \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{\frac{1-\alpha}{n}} \cdot \frac{\alpha-1}{n} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (\alpha-1)n^{-\alpha} = \frac{\alpha-1}{n^\alpha} \end{aligned}$$

**II.2.b** Comme  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  est une série à termes positifs convergente, on obtient par sommation de la relation d'équivalence précédente :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\alpha-1}{k^\alpha} = (\alpha-1)R_n$$

Le membre de gauche est le reste d'une série télescopique et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 0$  donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Finalement,

$$R_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\alpha-1}{n^{\alpha-1}}$$

**II.2.c** Comme  $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$  est une série à termes positifs, les séries  $\sum R_n$  et  $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$  sont de même nature. Connaissant les résultats sur les séries de Riemann,  $\sum R_n$  converge si et seulement si  $\alpha-1 > 1$  i.e.  $\alpha > 2$ .

**II.2.d** Supposons donc  $\alpha > 2$ . Tout d'abord, les  $v_{k,n}$  sont positifs. Comme  $R_n = \sum_{k=1}^{+\infty} v_{k,n}$  et que  $\sum R_n$  converge, on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} v_{k,n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} v_{k,n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

**II.3 II.3.a** On reconnaît une série exponentielle. Ainsi  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = e^a$ .

**II.3.b** On va utiliser le théorème de Fubini. Fixons  $k \in \mathbb{N}^*$ . Alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |v_{n,k}|$  converge puisque  $v_{k,n} = 0$  dès que  $n \geq k$ . De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |v_{k,n}| = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{|a|^k}{k!} = k \frac{|a|^k}{k!} = \frac{|a|^k}{(k-1)!}$$

On reconnaît à nouveau le terme général d'une série exponentielle donc  $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{|a|^k}{(k-1)!}$  converge. D'après le théorème de Fubini, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{k=1}^{+\infty} v_{k,n} \right)$  converge i.e. la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} R_n$  converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} v_{k,n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} v_{k,n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{a^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^k}{(k-1)!} = a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = ae^a$$

**II.4 II.4.a** Pour la culture, il s'agit du principe de sommation d'Abel.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n ku_k &= \sum_{k=1}^n k(R_{k-1} - R_k) \\ &= \sum_{k=1}^n kR_{k-1} - \sum_{k=1}^n kR_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)R_k - \sum_{k=1}^n kR_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)R_k - \sum_{k=1}^n kR_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} R_k - nR_n \end{aligned}$$

**II.4.b** Comme  $u$  est positive,  $(nR_n)$  également. Ainsi, d'après l'égalité précédente,

$$\sum_{k=1}^n ku_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} R_k$$

Or  $\sum R_n$  est une série à termes positifs convergente donc

$$\sum_{k=1}^n ku_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} R_k$$

La suite de terme général  $\sum_{k=1}^n ku_k$  est donc croissante (puisque les  $u_k$  sont positifs) et majorée : elle converge. Par conséquent, la série  $\sum nu_n$  converge.

On constate maintenant que

$$0 \leq nR_n = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} ku_k$$

Or le membre de droite est le reste de rang  $n$  de la série convergente  $\sum nu_n$  : il converge donc vers 0. D'après le théorème des gendarmes, la suite  $(nR_n)$  converge vers 0.

### Partie III –

**III.1 III.1.a** Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Alors

$$|(AB)_{i,j}| = \left| \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \right| \leq \sum_{k=1}^n |A_{i,k}| |B_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n N(A) N(B) = nN(A)N(B)$$

Par conséquent,  $N(AB) \leq nN(A)N(B)$ .

**III.1.b** Récurrence évidente. Faites la quand même.

**III.1.c** Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq N\left(\frac{A^p}{p!}\right) = \frac{N(A^p)}{p!} \leq \frac{n^{p-1}N(A)^p}{p!} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(nN(A))^p}{p!}$$

Or  $\sum \frac{(nN(A))^p}{p!}$  est une série convergente (série exponentielle ou règle de d'Alembert) donc  $\sum N\left(\frac{A^p}{p!}\right)$  converge également. Autrement dit  $\sum \frac{A^p}{p!}$  converge absolument. Comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est de dimension finie,  $\sum \frac{A^p}{p!}$  converge.

**III.2** **III.2.a** Un calcul montre que  $A^2 = 4A - 3I$ .

**III.2.b**  $P = X^2 - 4X + 3$  est un polynôme annulateur de  $A$ . On effectue alors la division euclidienne de  $X^p$  par  $P$  : il existe deux polynômes  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{R}[X]$  tels que

$$X^p = PQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(P) = 2$$

En évaluant cette égalité en les racines de  $P$ , à savoir 1 et 3, on obtient  $R(1) = 1$  et  $R(3) = 3^p$ . Comme  $\deg R < 2$ , il existe  $(\alpha_p, \beta_p) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $R = \alpha_p X + \beta_p$ . On trouve  $\alpha_p = \frac{3^p - 1}{2}$  et  $\beta_p = \frac{3 - 3^p}{2}$ . Par conséquent,

$$A^p = P(A)Q(A) + R(A) = R(A) = \alpha_p A + \beta_p I$$

**III.2.c**

$$\exp(A) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{p!} = \left( \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\alpha_p}{p!} \right) A + \left( \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\beta_p}{p!} \right) I = \frac{e^3 - e}{2} A + \frac{3e - e^3}{2} I$$

**III.2.d** Notons  $a_p = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{k!}$  et  $b_p = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{\beta_k}{k!}$ . D'après la question **II.3.b**, les séries  $\sum a_p$  et  $\sum b_p$  convergent et

$$\sum_{p=0}^{+\infty} a_p = \frac{3e^3 - e}{2} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} b_p = \frac{3e - 3e^3}{2}$$

Comme  $R_p = a_p A + b_p I$ , la série  $\sum R_p$  converge et

$$\sum_{p=0}^{+\infty} R_p = \left( \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \right) A + \left( \sum_{p=0}^{+\infty} b_p \right) I = \frac{3e^3 - e}{2} A + \frac{3e - 3e^3}{2} I$$