Intégrales à paramètres

Continuité

Solution 1

Posons $\varphi(x,t) = \dfrac{1}{t^x(1+t)}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x,t) \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^x}$ et $\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$ donc l'intégrale définissant f est définie si et seulement si $x < 1$ et $x+1 > 1$ i.e. $0 < x < 1$.

2. Fixons $a \in]-\infty, 1[$.

   a. Pour tout $x \in]-\infty, a]$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1]$.

   b. Pour tout $t \in]0,1]$, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur $]-\infty, a]$.

   c. Pour tout $(x,t) \in]-\infty, a] \times]0,1]$,
   $$0 \leq \varphi(x,t) \leq \frac{1}{t^a(t+1)}$$
   et $t \mapsto \dfrac{1}{t^a(t+1)}$ est intégrable sur $[0,1]$.

   Ainsi g est continue sur $]-\infty, a]$ pour tout $a \in]-\infty, 1[$ et donc sur $]-\infty, 1[$.

3. On va d'abord modifier l'expression de f pour simplifier le raisonnement. Soit $x \in]0,1[$. D'après la relation de Chasles
   $$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$$
   En effectuant le changement de variable $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ dans la seconde intégrale :
   $$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x}(1+t)} = \mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(1-x)$$
   Tout d'abord
   $$\mathrm{g}(x) = \int_0^1 \frac{(1+t)-t}{t^x(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{-x}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^{1-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x} - \mathrm{g}(x-1)$$
   Comme g est continue en 0 et $\mathrm{g}(0) = \ln(2)$,
   $$\mathrm{g}(x) \underset{x\to0^+}{=} \ln(2) + o(1) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{g}(x) \underset{x\to1^-}{=} \frac{1}{1-x} - \ln(2) + o(1)$$
   On en déduit que
   $$f(x) \underset{x\to1^-}{=} \frac{1}{1-x} + o(1)$$
   et, comme $f(x) = f(1-x)$,
   $$\underset{x\to0^+}{=} \frac{1}{x} + o(1)$$

Solution 2

- Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, elle y est continue par morceaux. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-ixt}f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-ixt}f(t)$ est clairement continue sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|f(t)e^{-ixt}| = |f(t)|$ et $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque f l'est.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivation

Solution 3

Posons $\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et $\mathrm{G}(x) = \int_0^{x} \frac{\ln(t)\,\mathrm{d}t}{t^2-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarquons déjà que l'intégrale définissant $\mathrm{F}(x)$ est bien définie. Tout d'abord, $\frac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to0^+}{\sim} -\ln(t)$ donc $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2-1}$ est intégrable au voisinage de 0^+. On va maintenant justifier que $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2-1}$ est prolongeable par continuité en 1, pour justifier l'existence de $\mathrm{G}(x)$ pour $x > 1$. En effet,

$$\frac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to1}{\sim} \frac{t-1}{t^2-1} \underset{t\to1}{\sim} \frac{1}{t+1} \underset{t\to1}{\sim} \frac{1}{2}$$

Finalement G est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et le théorème fondamental de l'analyse montre alors que $\mathrm{G}'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et que $\mathrm{G}'(1) = \frac{1}{2}$.

Ensuite, nous allons montrer que G est continue en 0. En effet, puisque $\frac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to0}{\sim} -\ln(t)$ et que l'intégrale définissant $\mathrm{G}(x)$ converge, $\mathrm{G}(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\int_0^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$. Or $\int_0^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = x\ln x - x \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$ de sorte que $\lim_0 \mathrm{G} = 0 = \mathrm{G}(0)$.

On va ensuite montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$. Posons $u(x,t) = \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}$ pour $(x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $u(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ et $u(x,t) \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$;
- pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto u(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$,
$$|u(x,t)| \leq \frac{\pi/2}{1+t^2}$$
- la fonction $t \mapsto \frac{\pi/2}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (continue sur $\mathbb{R}_+$ et équivalente à $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$).

On peut donc affirmer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
On va maintenant montrer que F est également dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

- pour tout $x \in [a,+\infty[$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $u(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ et $u(x,t) \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$;
- u admet une dérivée par rapport à sa première variable sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$ et
$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*,\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}$$
- pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto u(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$;
- pour tout $x \in [a,+\infty[$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$,
$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t}{(t^2+a^2)(1+t^2)}$$
- la fonction $t \mapsto \frac{t}{(t^2+a^2)(1+t^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (continue sur $\mathbb{R}_+$ et équivalente à $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ en $+\infty$).

On peut donc affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et donc sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}$$

A l'aide d'une décomposition en éléments simples, pour $x \neq 1$

$$\frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{t}{t^2+x^2} - \frac{t}{t^2+1}\right)$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ \mathrm{F}'(x) = \frac{1}{2(1-x^2)}\left[\ln\left(\frac{t^2+x^2}{1+t^2}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

Ainsi F' et G' coïncident sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et comme elles sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, elles coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, F et G sont égales à une constante près sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, $\lim\limits_0 \mathrm{F} = \mathrm{F}(0) = 0$ puisqu'on a montré que F était continue sur $\mathbb{R}_+$ et donc en 0 et $\lim\limits_0 \mathrm{G} = 0$. La contante en question est donc nulle : F et G coïncident donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution 4

---

1. La linéarité de R provient de la linéarité de l'intégration. La linéarité de S provient de la linéarité de l'intégration et de la dérivation.
Soit $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Fixons $a \in \mathbb{R}_+$. L'application $x \mapsto h(x\sin t)$ est clairement continue sur $[0, a]$ pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et l'application $t \mapsto h(x\sin t)$ est clairement continue par morceaux (et même continue) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour tout $x \in [0, a]$. De plus h étant continue sur le segment $[0, a]$, elle est bornée sur $[0, a]$. Il existe donc $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x, t) \in [0, a] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right], |h(x\sin t)| \leq \mathrm{M}$$

La fonction constante égale à M étant clairement intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{R}(h)$ est continue sur $[0, a]$ et, par suite sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Remarquons que $\mathrm{S}(g)(x) = g(0) + x\mathrm{R}(g')(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Comme g' est continue sur $\mathbb{R}_+$, ce qui précède montre que $\mathrm{R}(g')$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donc $\mathrm{S}(g)$ également.

2. On procède par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\sin(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \left[-\sin^{n+1}(t)\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^2(t)\ \mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(1-\sin^2(t))\ \mathrm{d}t \\
&= (n+1)\mathrm{W}_n - (n+1)\mathrm{W}_{n+2}
\end{aligned}$$

Ainsi $(n+2)\mathrm{W}_{n+2} = (n+1)\mathrm{W}_n$.

3. La relation précédente montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)\mathrm{W}_{n+2}\mathrm{W}_{n+1} = (n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n$. La suite de terme général $(n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n$ est donc constante égale à son premier terme $\mathrm{W}_0\mathrm{W}_1 = \frac{\pi}{2}$.
Posons $f_n :\ x \mapsto x^n$. Un calcul évident montre que $\mathrm{R}(f_0) = f_0$ et que $\mathrm{S}(f_0) = f_0$, ainsi $\mathrm{S}\circ\mathrm{R}(f_0) = f_0$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. Un calcul non moins évident montre que $\mathrm{R}(f_n) = \frac{2}{\pi}\mathrm{W}_n f_n$ et $\mathrm{S}(f_n) = n\mathrm{W}_{n-1}f_n$. Ainsi $\mathrm{S}\circ\mathrm{R}(f_n) = n\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n-1}\frac{2}{\pi}f_n = f_n$ puisque $n\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
Comme toute fonction polynomiale est combinaison linéaire des f_n, on obtient par linéarité de $\mathrm{S}\circ\mathrm{R}$, $\mathrm{S}\circ\mathrm{R}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$ pour tout polynôme P.

4. Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Montrons que $\mathrm{R}(g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \mapsto g(x\sin t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, a]$ de dérivée $x \mapsto \sin(t)g'(x\sin t)$. Pour tout $x \in [0, a]$, $t \mapsto g(x\sin t)$ et $t \mapsto \sin(t)g'(x\sin t)$ sont continues par morceaux (et même continues) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Enfin, g' est continue sur le segment $[0, a]$, elle y est bornée. Il existe donc $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x, t) \in [0, a] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right], |\sin(t)g'(x\sin t)| \leq \mathrm{M}\sin(t)$$

Comme $t \mapsto \in(t)$ est clairement intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut conclure que $\mathrm{R}(g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$ et par suite sur $\mathbb{R}_+$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{R}(g)'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)g'(x\sin t)\ \mathrm{d}t$$

Fixons $x \in \mathbb{R}_+$. On notera $\|\cdot\|_{[0,x]}$ la norme uniforme sur $[0,x]$. Par inégalité triangulaire

$$|\mathrm{S}\circ\mathrm{R}(g)(x)| \leq |\mathrm{R}(g)(0)| + x\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\mathrm{R}(g)'(x\sin t)|\ \mathrm{d}t \leq |\mathrm{R}(g)(0)| + x\frac{\pi}{2}\|\mathrm{R}(g)'\|_{[0,x]}$$

Mais pour tout $y \in [0,x]$

$$|\mathrm{R}(g)'(y)| = \left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)g'(y\sin t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \frac{2}{\pi}\|g'\|_{[0,x]}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\|g'\|_{[0,x]}$$

Ainsi

$$\|\mathrm{R}(g)'\|_{[0,x]} \leq \frac{2}{\pi}\|g'\|_{[0,x]}$$

puis

$$|\mathrm{S}\circ\mathrm{R}(g)(x)| \leq |g(0)| + x\|g'\|_{[0,x]}$$

D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (Q_n) de polynômes convergeant uniformément vers g' sur $[0,x]$. On pose alors $\mathrm{P}_n(x) = g(0) + \int_0^x \mathrm{Q}_n(t)\ \mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. La suite (P_n) est également une suite de polynômes. On peut appliquer l'inégalité précédente à $g - \mathrm{P}_n$, ce qui donne

$$|\mathrm{S}\circ\mathrm{R}(g-\mathrm{P}_n)(x)| \leq |(g-\mathrm{P}_n)(0)| + x\|(g-\mathrm{P}_n)'\|_{[0,x]}$$

ou encore, par linéarité de $\mathrm{S}\circ\mathrm{R}$, de l'évaluation en 0 et de la dérivation

$$|\mathrm{S}\circ\mathrm{R}(g) - \mathrm{S}\circ\mathrm{R}(\mathrm{P}_n)(x)| \leq |g(0) - \mathrm{P}_n(0)| + x\|g' - \mathrm{P}_n'\|_{[0,x]}$$

et finalement

$$|\mathrm{S}\circ\mathrm{R}(g) - \mathrm{P}_n(x)| \leq x\|g' - \mathrm{Q}_n\|_{[0,x]}$$

car $\mathrm{S}\circ\mathrm{R}(\mathrm{P}_n) = \mathrm{P}_n$ d'après la question précédente et car $\mathrm{P}_n' = \mathrm{Q}_n$ et $\mathrm{P}_n(0) = g(0)$ par construction des P_n. Puisque (Q_n) converge uniformément vers g' sur $[0,x]$, $\lim_{n\to+\infty} \|g' - \mathrm{Q}_n\|_{[0,x]} = 0$. Ceci montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(x) = \mathrm{S}\circ\mathrm{R}(g)(x)$$

Enfin comme Q_n converge uniformément vers g' sur $[0,x]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(x) = g(0) + \lim_{n\to+\infty}\int_0^x \mathrm{Q}_n(t)\ \mathrm{d}t = g(0) + \int_0^x g'(t)\ \mathrm{d}t = g(x)$$

Par unicité de la limite, $\mathrm{S}\circ\mathrm{R}(g)(x) = g(x)$. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{S}\circ\mathrm{R}(g) = g$.

Solution 5

---

1. Posons $\varphi(x,t) = \ln(\cos^2 t + x^2\sin^2 t)$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Remarquons déjà que φ est bien définie puisque $\cos^2$ et $\sin^2$ sont positives et ne s'annulent pas simultanément. Pour la même raison, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = \frac{2x\sin^2 t}{\cos^2 t + x^2\sin^2 t}$$

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $a \leq b$.

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2b\sin^2 t}{\cos^2 t + a^2\sin^2 t}$$

et $t \mapsto \dfrac{2b\sin^2 t}{\cos^2 t + a^2\sin^2 t}$ est évidemment intégrable sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par conséquent, f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et par extension sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x\sin^2 t\ \mathrm{d}t}{\cos^2 t + x^2\sin^2 t} = 2x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t\ \mathrm{d}t}{\cos^2 t + x^2\sin^2 t}$$

Via le changement de variable $u = \tan t$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t\ \mathrm{d}t}{\cos^2 t + x^2\sin^2 t} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2\ \mathrm{d}u}{(1+x^2u^2)(1+u^2)}$$

Lorsque $x \neq 1$,

$$\frac{u^2}{(1+x^2u^2)(1+u^2)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+x^2u^2}\right)$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\},\ f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2x}\right) = \frac{\pi}{x+1}$$

Par continuité de f', cette égalité est en fait vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. On en déduit l'existence d'une constante C telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \mathrm{C} + \pi\ln(x+1)$$

Or $f(1) = 0$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \pi\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Solution 6

1. Posons $f(x,t) = \dfrac{e^{-tx}}{t+1}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ donc $x \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{te^{-tx}}{t+1}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ donc $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Donnons-nous $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-ta}$$

  et $t \mapsto e^{-ta}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ donc de classe $\mathcal{C}^1$ syr $\mathbb{R}_+^*$.

2. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{t+1}\ \mathrm{d}t$$

Notamment

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ -g'(x) + g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Effectuons le changement de variable $u = xt$:

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u+x}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+\frac{u}{x}}\ \mathrm{d}u$$

De plus,

$$\forall u \in \mathbb{R}_+,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-u}}{1+\frac{u}{x}} = e^{-u}$$

et

$$\forall(u,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \ \left|\frac{e^{-u}}{1+\frac{u}{x}}\right| \leq e^{-u}$$

Comme $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée de sorte que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+\frac{u}{x}} \, \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-u} \, \mathrm{d}u = 1$$

On en déduit que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Remarque. On peut aussi intégrer par parties pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} xg(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-tx}}{1+t} \, \mathrm{d}t \\ &= -\left[\frac{e^{-tx}}{1+t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{(1+t)^2} \, \mathrm{d}t \\ &= 1 - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{(1+t)^2} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or pour tout $x > 0$,

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{(1+t)^2} \, \mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{(1+t)^2} \, \mathrm{d}t = 0$$

puis

$$\lim_{x\to+\infty} xg(x) = 1$$

ou encore

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

Solution 7

1. Tout d'abord, F est clairement paire puisque cos l'est.
Posons $f : (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{t\to 0^+} f(x,t) = \frac{x^2}{2}$ car $\cos u \underset{u\to 0}{=} 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Ainsi $t \mapsto f(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0. Par ailleurs, comme cos est bornée, $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{e^{-t}}{t^2}\right)$. A fortiori, $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F(x)$ est bien défini. La fonction F est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. Puisque $|\sin'| = |\cos| \leq 1$, sin est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ en vertu du théorème des accroissements finis. Notamment, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u) - \sin(0)| \leq |u - 0|$ i.e. $|\sin u| \leq |u|$.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \cos(xt)e^{-t}$. De plus,

$$\forall(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = |\cos(xt)e^{-t}| \leq e^{-t}$$

et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

On peut remarquer que $\mathrm{F}''(x)$ est la partie réelle de

$$\int_0^{+\infty} e^{ixt}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-ix} = \frac{1+ix}{1+x^2}$$

Ainsi $\mathrm{F}''(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. On aurait aussi pu procéder à une double intégration par parties.

Remarquons que

$$\mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

En particulier, $\mathrm{F}'(0) = 0$.

Remarque. On aurait aussi pu remarquer que F étant paire, F′ est impaire et donc $\mathrm{F}'(0) = 0$.

Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}'(x) = \arctan x + \mathrm{F}'(0) = \arctan(x)$$

Enfin, on a clairement $\mathrm{F}(0) = 0$ et

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) &= \mathrm{F}(0) + \int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t \\
&= [t\arctan t]_0^x - \int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \qquad \text{par intégration par parties} \\
&= x\arctan x - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^x \\
&= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)
\end{aligned}$$

Solution 8

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème fondamental de l'analyse. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-x^2}$$

Posons $\varphi : (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1] \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$. Pour tout $t \in [0,1]$, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1]$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$.

$$\forall (x,t) \in [0,1]\times\mathbb{R},\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2$$

et $t \mapsto 2$ est évidemment intégrable sur $[0,1]$. Ainsi g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que $f^2 + g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in [0,1],\ (f^2+g)'(x) = 2f'(x)f(x) + g'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - 2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

En effectuant le changement de vatiable $u = tx$,

$$x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{-x^2}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Par conséquent, $(f^2+g)'$ est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ de sorte que f^2+g est constante sur $\mathbb{R}$. Enfin,

$$(f^2+g)(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

donc f^2+g est constante égale à $\frac{\pi}{4}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Il est clair que

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1],\ 0 \leq \varphi(x,t) \leq e^{-x^2}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}$$

On en déduit que $\lim\limits_{+\infty} g = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{+\infty} f^2 = \frac{\pi}{4}$. Comme f est clairement à valeurs positives sur $\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{+\infty} f = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Autrement dit,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Solution 9

Dans la suite, on pose $\varphi(x,t) = \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$.

1. **a.**
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|\varphi(x,t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (c'est la dérivée de arctan qui admet une limite finie en $+\infty$).

Ainsi f est continue (et a fortiori définie) sur $\mathbb{R}_+$.

b. Fixons $a \in \mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $x \in [a,+\infty[$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la domination précédente.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$.
- Pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-\frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}\right| = \frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq e^{-xt^2} \leq e^{-at^2}$$

et $t \mapsto e^{-at^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ($e^{-at^2} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$).

Par conséquent, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$ et donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. **a.** On peut de plus affirmer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t = f(x) - \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$$

Via le changement de variable $u = t\sqrt{x}$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

d'après le résultat admis. Ainsi f est bien solution de l'équation différentielle $y' - y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

b. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière de (E) de la forme $x \mapsto \varphi(x)e^x$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (variation de la constante). On aboutit à $\varphi'(x)e^x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$ ou encore $\varphi'(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$. Comme $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 0^+ et on peut donc choisir $\varphi(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Ainsi les solutions de (E) sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^x + e^x\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \lambda e^x - \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^x\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Comme f est continue en 0 et comme $f(0) = \frac{\pi}{2}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \frac{\pi}{2}e^x - \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^x\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

On peut éventuellement rajouter que par le changement de variable $u = \sqrt{t}$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi}{2}e^x - \sqrt{\pi}e^x\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

Et comme $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{\pi}e^x\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

Remarque. Cette expression finale n'est pas forcément «meilleure» que l'expression initiale...

Solution 10

Posons $g(x,t) = \frac{1-e^{tx}}{t}e^{-t}$. On a $g(x,t) \underset{t\to0}{\longrightarrow} -x$. Ainsi $\int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Si $x > 0$, $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{(x-1)t}t$. Or $\int_1^{+\infty} e^{(x-1)t}t\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x < 1$.

Si $x < 0$, $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{t}$. Or $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-t}\right)$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

On en déduit que $\int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x < 1$. Le domaine de définition de F est donc $]-\infty, 1[$.

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\forall u \geq 0, |e^u - 1| \leq ue^u$$
$$\forall u \leq 0, |e^u - 1| \leq -u$$

Soient $a < 0$ et $b \in]0,1[$. Remarquons que g est continue sur $[a,b]\times]0,+\infty[$. En utilisant les inégalités précédentes, on déduit les majorations suivantes.

- Si $x \in [0,b]$, $|g(x,t)| \leq xe^{(x-1)t} \leq be^{(b-1)t}$ pour tout $t \in]0,+\infty[$.
- Si $x \in [a,0]$, $|g(x,t)| \leq -xe^{-t} \leq -ae^{-t}$ pour tout $t \in]0,+\infty[$.

Si on pose $\varphi(t) = \max(be^{(b-1)t}, -ae^{-t})$, on a donc $|g(x,t)| \leq \varphi(t)$ pour $(x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$ et φ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car $b-1<0$.

Par ailleurs, g est dérivable par rapport à sa première variable et $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -e^{(x-1)t}$. $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue sur $[a,b]\times]0,+\infty[$. De plus, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{(b-1)t}$ pour $(x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$ et $t \mapsto e^{(b-1)t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car $b-1<0$.

Par conséquent, on peut utiliser le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre : F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et par suite sur $]-\infty,1[$. De plus,

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{(x-1)t}\,dt = \frac{1}{x-1}$$

Comme on a clairement $F(0)=0$, on peut donc affirmer que $F(x) = \ln(1-x)$ pour tout $x \in]-\infty,1[$.

Solution 11

---

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0,\pi]$. Remarquons que $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = (x-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta$. Cette dernière expression est positive et ne s'annule que si $x = \cos\theta$ et $\sin\theta = 0$ i.e. $\theta \in \{0,\pi\}$ et $x \in \{-1,1\}$. Le domaine de définition de f est donc $D = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

2. Soit $x \in D \setminus \{0\}$. Remarquons déjà que $1/x \in D$. De plus,

$$f(x) = \int_0^\pi \ln\left(x^2\left(1 - \frac{1}{x}\cos\theta + \frac{1}{x^2}\right)\right)d\theta = \int_0^\pi 2\ln|x|\,d\theta + \int_0^\pi \left(1 - \frac{1}{x}\cos\theta + \frac{1}{x^2}\right)d\theta = 2\pi\ln|x| + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

3. Posons $h(x,\theta) = \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)$ pour $x \in]-1,1[\times[0,\pi]$.
Soit $0, a \in [0,1[$. Pour tout $x \in [-a,a]$, $\theta \mapsto h(x,\theta)$ est continue sur le segment $[0,\pi]$ donc intégrable sur ce segment. Pour tout $\frac{\partial h}{\partial x} : (x,\theta) \mapsto \frac{2x - 2\cos\theta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$ est définie et continue sur le compact $[-a,a]\times[0,\pi]$. Elle y est notamment bornée. Il existe donc $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x,\theta) \in [-a,a]\times[0,\pi],\ \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,\theta)\right| \leq K$$

Enfin, la fonction constante $\theta \mapsto K$ est évidemment intégrable sur $[0,\pi]$. D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]$. Ceci étant valable pour tout $a \in [0,1[$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

4. Soit $x \in]-1,1[$. D'après la question précédente,

$$f'(x) = \int_0^\pi \frac{2(x-\cos\theta)}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}\,d\theta$$

On obtient la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{2(x-\cos\theta)}{x^2 - 2x\cos\theta + 1} = \frac{2(x-\cos\theta)}{(x-e^{i\theta})(x-e^{-i\theta})} = \frac{1}{x-e^{i\theta}} + \frac{1}{x-e^{-i\theta}}$$

Ainsi

$$f'(x) = \int_0^\pi \frac{d\theta}{x-e^{i\theta}} + \int_0^\pi \frac{d\theta}{x-e^{-i\theta}}$$
$$= \int_0^\pi \frac{d\theta}{x-e^{i\theta}} + \int_{-\pi}^0 \frac{d\theta}{x-e^{i\theta}} \quad \text{par le changement de variable } \theta \mapsto -\theta \quad = \int_{-\pi}^\pi \frac{d\theta}{x-e^{i\theta}}$$

Alors, pour tout $\theta \in [-\pi,\pi]$,

$$\frac{1}{x-e^{i\theta}} = -\frac{e^{-i\theta}}{1-xe^{-i\theta}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-i(n+1)\theta}$$

car $|xe^{-i\theta}| = |x| < 1$. Comme la série $\sum |x|^n$ converge, en posant $f_n : \theta \mapsto x^n e^{-i(n+1)\theta}$, la série $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[-\pi,\pi]$. On peut donc appliquer le théorème d'interversion série/intégrale de sorte que

$$\int_{-\pi}^\pi \frac{d\theta}{x-e^{i\theta}} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^\pi x^n e^{-i(n+1)\theta}\,d\theta = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \int_{-\pi}^\pi e^{-i(n+1)\theta}\,d\theta = 0$$

car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n+1)\theta}\, d\theta = \left[\frac{e^{-i(n+1)\theta}}{-i(n+1)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

5. D'après la question précédente, f est constante sur $]-1,1[$. Or $f(0) = 0$. Donc f est nulle sur $]-1,1[$. De plus, si $|x| > 1$, alors $1/x \in]-1,0[\cup]0,1[$ et d'après la seconde question, $f(x) = 2\pi \ln|x|$. Pour récapituler,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ 2\pi \ln|x| & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Convergence dominée

Solution 12

Posons $f_n : t \mapsto \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Alors $\ln(1+t^2/n) \underset{n\to+\infty}{=} t^2/n + o(1/n)$. Ainsi $-n\ln(1+t^2/n) \underset{n\to+\infty}{=} -t^2 + o(1)$. Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} -n\ln(1+t^2/n) = -t^2$. En passant, à l'exponentielle, $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t^2}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement vers $t \mapsto e^{-t^2}$.
Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (utiliser la formule du binôme par exemple). Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $(1+t^2/n)^n \geq 1 + t^2$ puis $0 \leq f_n(t) \leq \frac{1}{1+t^2}$. Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$$

Solution 13

1. Posons pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x,t) = \frac{t\ln t}{(1+t^2)^x}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0 (de limite nulle) et $\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^{2x-1}}$.
Si $x > 1$, alors $2x-1 > 1$ et en prenant $\alpha \in]1, 2x-1[$, $\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} \frac{1}{t^\alpha}$ donc $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ par critère de comparaison.
Si $x \geq 1$, $\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(\varphi(x,t))$ donc $t \mapsto \varphi(x,t)$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ par critère de comparaison.
En conclusion, le domaine de définition de f est $]1,+\infty[$.

2. On effectue le changement de variable $u = \frac{1}{t}$

$$\begin{aligned} f(2) &= \int_0^{+\infty} \frac{t\ln t\, dt}{(1+t^2)^2} \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{\ln u\, du}{u^3\left(1+\frac{1}{u^2}\right)^2} = -\int_0^{+\infty} \frac{u\ln u\, du}{(1+u)^2} = -f(2) \end{aligned}$$

Ainsi $f(2) = 0$.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x,t) = 0$$

De plus,

$$\forall (x,t) \in [1,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*,\ |\varphi(x,t)| \leq \frac{t|\ln t|}{(1+t^2)^2} = \psi(t)$$

et ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la première question. En vertu du théorème de convergence dominée, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Solution 14

Posons $\varphi_n(x) = e^x\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ pour $x \in [0, n]$. φ_n est dérivable sur $[0, n]$ et

$$\forall x \in [0, n],\ \varphi_n'(x) = -\frac{xe^x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} \leq 0$$

Ainsi φ_n est décroissante sur $[0, n]$. Comme $\varphi_n(0) = 1$,

$$\forall x \in [0, n],\ 0 \leq \varphi_n(x) \leq e^{-x}$$

Posons $f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. La suite (f_n) converge simplement vers $x \mapsto e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la majoration précédente permet d'appliquer le théorème de convergence dominée. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$$

Solution 15

Posons $\mathrm{I}_n = \int_0^1 nf(t)e^{-nt}\,\mathrm{d}t$. Via le changement de variable $u = nt$,

$$\mathrm{I}_n = \int_0^n f(u/n)e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Posons $g_n(u) = f(u/n)\mathbb{1}_{[0,n](u)}$ pour $u \in \mathbb{R}_+$. Alors $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} g_n(u)\,\mathrm{d}u$. De plus, (g_n) converge simplement vers la fonction $u \mapsto f(0)e^{-u}$. Enfin, f est continue sur le segment $[0, 1]$ donc bornée sur ce segment. En posant $\mathrm{M} = \max_{[0,1]}|f|$,

$$\forall (n, u) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+,\ |g_n(u)| \leq \mathrm{M}e^{-u}$$

et $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème de convergence dominée permet alors d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} f(0)e^{-u}\,\mathrm{d}u = f(0)$$

Solution 16

1. Soit $x \in \pi\mathbb{Z}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 0$.
   Soit maintenant $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Alors $|\cos x| < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} n\cos^n x = 0$ puis $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
   Finalement la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

2. Posons $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   D'une part, $n\sin(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'autre part, $\cos^n(x_n) = e^{n\ln(\cos(1/n))}$ et

   $$\ln(\cos(1/n)) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(1 + o(1/n)) = \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n))$$

   de sorte que $\cos^n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   Finalement, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = 1 \neq 0$ donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément.
   Soit maintenant $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors pour tout $x \in \left[a, \frac{\pi}{2}\right]$,

   $$|f_n(x)| \leq n\cos^n(a)\sin(a)$$

   donc

   $$|f_n|_\infty \leq n\cos^n(a)\sin(a)$$

   (c'est même une égalité) donc $\lim_{n\to+\infty}|f_n| = 0$ puisque $0 \leq \cos a < 1$. Ainsi (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Méthode n°1

Remarquons tout d'abord que f_n est positive et que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{n}{n+1}\left[\cos^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{n}{n+1}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme g est continue en 0, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|g(x) - g(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \in [0, \alpha]$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)|g(t)-g(0)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{\alpha} f_n(t)|g(t)-g(0)|\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)|g(t)-g(0)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{\alpha} f_n(t)\varepsilon\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\|g-g(0)\|_\infty\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\varepsilon\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\|g-g(0)\|_\infty\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{n\varepsilon}{2(n+1)} + \|g-g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|g-g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Comme (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur le segment $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Il existe donc $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq \mathrm{N}$, $\|g-g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon$. On en déduit que pour $n \geq \mathrm{N}$,

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\,\mathrm{d}t = 0$$

Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\,\mathrm{d}t = \frac{ng(0)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(0)$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(0)$$

Méthode n°2

L'application $t \mapsto \cos^{n+1} t$ est bijective de $[0, \pi/2]$ sur $[0,1]$, strictement décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ donc, par changement de variable

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}\int_0^1 f(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))\,\mathrm{d}u$$

La fonction $u \mapsto f(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))$ converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction constante égale à $f(0)$ car f est continue en 0. De plus, f est bornée $[0,1]$ donc $u \mapsto f(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))$ est dominée par une constante (clairement intégrable sur le segment $[0,1]$). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(\sqrt[n+1]{u})\,\mathrm{d}u = \int_0^1 f(0)\,\mathrm{d}u = f(0)$$

On en conclut immédiatement que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,dt = g(0)$$

Solution 17

On pose $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ dans la suite.

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3n}}$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et u_n est bien définie.
La fonction f_0 est constante égale à 1. Elle n'est évidemment pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc u_0 n'est pas définie.

2. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|f_n| = f_n \leq f_1$ et f_1 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc (u_n) converge vers 0 d'après le théorème de convergence dominée.

3. La suite (f_n) est décroissante donc la suite (u_n) l'est aussi. De plus (u_n) converge vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.
Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$-\frac{1}{2+t^3} = \frac{-\frac{1}{1+t^3}}{1+\frac{1}{1+t^3}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(1+t^3)^k} + \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(1+t^3)^{n+1}}}{1+\frac{1}{1+t^3}}$$

Ainsi

$$\left|\int_0^{+\infty} -\frac{dt}{2+t^3} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k\right| \leq \int_0^{+\infty}\left|-\frac{1}{2+t^3} - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(1+t^3)^k}\right| dt = \int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{(1+t^3)^{n+1}}}{1+\frac{1}{1+t^3}}\,dt \leq u_{n+1}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$, on en déduit que

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k = -\int_0^{+\infty}\frac{dt}{2+t^3}$$

4. On effectue d'abord le changement de variable $u = t/\sqrt[3]{2}$. Alors

$$S = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^3}$$

On décompose en éléments simples : il existe $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$F(X) = \frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta X+\gamma}{X^2-X+1}$$

Alors $\alpha = ((X+1)F(X))(-1) = \dfrac{1}{3}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = 0 = \alpha+\beta$ donc $\beta = -\dfrac{1}{3}$. Enfin, $F(0) = \alpha+\gamma = 1$ donc $\gamma = \dfrac{2}{3}$. Ainsi

$$F(X) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} - \frac{X-2}{X^2+X+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2X-1}{X^2-X+1}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(X-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^3} = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}}\right)\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty}$$

Or $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}} = 1$ (utiliser un équivalent) donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^3} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Finalement, $S = \dfrac{\pi\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{3}}$.

Solution 18

Remarquons que la somme $\sum_{n \in A} \frac{x^n}{n!}$ est bien définie car la série exponentielle $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose alors $S : x \mapsto \sum_{n \in A} \frac{x^n e^{-x}}{n!}$.

1. Posons $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{n!}$. Par intégration par parties, $I_{n+1} = I_n$. Donc $I_n = I_0 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Comme I est fini, par linéarité de l'intégrale,
$$\int_0^{+\infty} \sum_{n \in I} \frac{x^n e^{-x}}{n!} \, dx = \operatorname{card} I$$

2. Supposons que A ne soit pas fini. Alors A est dénombrable. Notons (a_p) la suite strictement croissante de ses éléments et posons $I_p = \{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ ainsi que
$$S_p(x) = \sum_{n \in I_p} \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$
   D'après ce qui précède
$$\forall p \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} S_p(x) \, dx = \operatorname{card}(I_p) = p$$
   Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la famille $\left(\frac{x^n e^{-x}}{n!}\right)_{n \in A}$ est sommable. On en déduit que la suite (S_p) converge simplement vers S.
   Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$|S_p(x)| = S_p(x) = \sum_{n \in I_p} \frac{x^n e^{-x}}{n!} \leq \sum_{n \in A} \frac{x^n e^{-x}}{n!} = S(x)$$
   Or d'après l'énoncé, $S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ donc S est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée :
$$\lim_{p \to +\infty} \int_0^{+\infty} S_p(x) \, dx = \int_0^{+\infty} S(x) \, dx$$
   Ceci est absurde car
$$\lim_{p \to +\infty} \int_0^{+\infty} S_p(x) \, dx = \lim_{p \to +\infty} \operatorname{card} I_p = +\infty$$
   On en déduit que A est fini.

3. Il n'existe pas de partie A vérifiant la condition de l'énoncé. S'il en existait une, elle serait manifestement non vide (une somme indexée sur l'ensemble vide est nulle). Comme elle serait fini d'après la question précédente, l'équivalent de l'énoncé donnerait $e^x \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^{p+2}}{p!}$ avec $p = \max A$. Ceci contredit les résultats sur les croissances comparées.

Solution 19

Comme f est continue en 0,
$$\lim_{n \to +\infty} f(t^n) = \begin{cases} f(0) & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ f(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$
De plus, $g : t \mapsto \begin{cases} f(0) & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ f(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$ est continue par morceaux sur $[0, 1]$. Enfin, f est continue donc bornée sur le segment $[0, 1]$. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in [0, 1]$. Comme $t \mapsto M$ est évidemment intégrable sur le segment $[0, 1]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée :
$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_0^1 g(t) \, dt = f(0)$$

Solution 20

On pose $f_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-t^n}$ et $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction

$$f : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ e^{-1} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Alors f est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f_n(t)| \leq \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

et la fonction $t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Solution 21

Fixons $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n u_k = \int_0^1 \sum_{k=0}^n x^k \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$$

Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in [0,1[\mapsto \frac{1-x^n}{1-x}\sin(\pi x)$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $f : x \in [0,1[\mapsto \frac{\sin(\pi x)}{1-x}$. De plus, pour tout $x \in [0,1[$,

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq f(x)$$

La fonction f est intégrable sur $[0,1[$: en effet, elle admet une limite finie en 1 puisque $\sin(\pi x) = \sin(\pi(1-x)) \underset{x\to1}{\sim} \pi(1-x)$. Le théorème de convergence dominée permet donc d'affirmer que

$$\sum_{k=0}^n u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge donc et a pour somme $\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Intégration terme à terme

Solution 22

Posons $\varphi(x,t) = e^{-t}\operatorname{sh}(x\sqrt{t})$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$.

1. Remarquons tout d'abord que f est impaire. Soit alors $x \in \mathbb{R}_+$. On prouve aisément que $\lim_{t\to+\infty} e^{-t/2}\operatorname{sh}(x\sqrt{t}) = 0$ donc $\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$. A fortiori $\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Par conséquent, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et finalement sur $\mathbb{R}$ par imparité.

2. Rappelons que

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \operatorname{sh} u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

On en déduit que

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\ \varphi(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}e^{-t}t^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!}$$

Il s'agit maintenant d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme. Posons

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}t^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!}\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties,

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{4n}\mathrm{I}_{n-1}$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{4^n n!}\mathrm{I}_0$$

et à l'aide d'une dernière intégration par parties

$$\mathrm{I}_0 = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

One en déduit que

$$\mathrm{I}_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!}$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum \int_0^{+\infty} \left|\frac{x^{2n+1}e^{-t}t^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!}\right| \mathrm{d}t$ i.e. la série $\sum \mathrm{I}_n x^{2n+1}$ converge en tant que série exponentielle. On en déduit donc via le théorème d'intégration terme à terme que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{I}_n x^{2n+1}$$

3. On peut enfin rajouter que

$$\mathrm{I}_n = \frac{x\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2^{2n}n!} = \frac{x\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{x^2}{4}}$$

Solution 23

---

1. Soit $x \in [-1,1]$. Pour tout $t \in [0,1[$

$$\frac{1-t}{1-xt^3} = (1-t)\sum_{n=0}^{+\infty}(xt^3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-t)x^n t^{3n}$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \left|(1-t)x^n t^{3n}\right| \mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)x^n t^{3n}\,\mathrm{d}t = x^n\left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$$

et $\frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum \int_0^1 \left|(1-t)x^n t^{3n}\right| \mathrm{d}t$ converge. On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

$$\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (1-t)x^n t^{3n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$$

2. En prenant $x = 1$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{1-t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Solution 24

---

1. Par intégration par parties, $\mathrm{I}_n = n\mathrm{I}_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\mathrm{I}_0 = 1$, on obtient aisément $\mathrm{I}_n = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\sum a_n$ converge (absolument), la suite (a_n) converge vers 0. A fortiori, elle est bornée. On en déduit que $\frac{a_n}{n!} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n!}\right)$. Comme la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ est de rayon de convergence infini, il en est de même de la série $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{a_n x^n e^{-x}}{n!}\right| \, \mathrm{d}x = \frac{|a_n|}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, \mathrm{d}x = |a_n|$$
Comme la série $\sum |a_n|$ converge, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme :
$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n e^{-x}}{n!} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n e^{-x}}{n!} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Solution 25

1. Puisque $\ln(x)\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x\ln x$, $\lim_{x\to 0} \ln(x)\ln(1-x)$. En posant $u = 1-x$, $\ln(x)\ln(1-x) = \ln(1-u)\ln(u)$. Comme $\lim_{u\to 0} \ln(1-u)\ln(u) = 0$, $\lim_{x\to 1} \ln(x)\ln(1-x) = 0$. Ainsi $x \mapsto \ln(x)\ln(1-x)$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$ donc elle est intégrable sur le segment $[0,1]$: I est bien définie.

2. C'est du cours
$$\forall x \in]-1,1[, \ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$
Le rayon de convergence est 1.

3. Pour $x \in]0,1[$,
$$\ln(x)\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \ln(x)$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \frac{1}{n} x^n \ln(x)$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$, elle est donc intégrable sur $[0,1]$.
Posons $\mathrm{I}_n = -\int_0^1 x^n \ln(x) \, \mathrm{d}x$. Par intégration par parties
$$\mathrm{I}_n = -\frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\ln(x)\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}$$
L'intégration par parties est légitimée par le fait que $\lim_{x\to 0} x^{n+1}\ln(x) = \lim_{x\to 1} x^{n+1}\ln(x) = 0$.
Comme $\frac{1}{n}\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}\mathrm{I}_n$ converge. On peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme :
$$\mathrm{I} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$$

4. On procède à une décomposition en éléments simples :
$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$
Comme la série télescopique $\sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et la série de Riemann converge,
$$\mathrm{I} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Solution 26

1. Posons $\varphi(t) = \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$. φ est continue sur $]0,1[$.
   De plus, $\varphi(t) \underset{t\to0^+}{\sim} -\ln(t)$ donc $\varphi(t) \underset{t\to0^+}{=} \frac{1}{\sqrt{t}}$.
   Par ailleurs, $\varphi(t) \underset{t\to1^-}{\sim} (t-1)\ln(1-t)$ donc $\lim_{t\to1^-} \varphi(t) = 0$.
   Tout ceci montre que φ est intégrable sur $]0,1[$ donc l'intégrale I converge.

2. Pour $t \in]0,1[$,
$$\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{t^n}{n}$$
   donc
$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$$
   avec
$$u_n(t) = -\frac{\ln(t)t^{n-1}}{n}$$
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $u_n(t) \underset{t\to0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, u_n est intégrable sur $]0,1]$. De plus, u_n est positive sur $]0,1]$ donc
$$\int_0^1 |u_n(t)| \, dt = \int_0^1 u_n(t) \, dt$$
   Par intégration par parties,
$$\int_0^1 u_n(t) \, dt = -\frac{1}{n}\int_0^1 \ln(t)t^{n-1} \, dt = -\frac{1}{n^2}\left[\ln(t)t^n\right]_0^1 + \frac{1}{n^2}\int_0^1 t^{n-1} \, dt = \frac{1}{n^3}$$
   Comme la série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme et
$$\mathrm{I} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$
   On peut confirmer avec Python.

```python
from numpy import log
from scipy.integrate import quad
I=quad(lambda t:log(t)*log(1-t)/t,0,1)[0]
print(I)
print(sum([1/n**3 for n in range(1,1001)]))
```

Solution 27

1. Remarquons que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq 1$ donc $0 \leq a_n \leq 1$. On en déduit que $\mathrm{R} \geq 1$.

2. Si les u_n sont continues par morceaux sur le segment $[a,b]$ et si la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t) \, dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \, dt$$

3. Soit $x \in]-1,1[$. Posons $u_n : t \in [0,1] \mapsto \frac{(xt)^n}{1+t}$. Pour tout $t \in [0,1]$,

$$|u_n(t)| = \frac{|x|^n t^n}{1+t} \leq |x|^n$$

et la série $\sum |x|^n$ converge donc $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$. Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xt)^n}{1+t}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1-xt)}\ \mathrm{d}t$$

Une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{1}{(1+t)(1-xt)} = \frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{x}{1-xt}\right)$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1+x}\left([\ln(1+t)]_0^1 - [\ln(1-xt)]_0^1\right) = \frac{\ln(2) - \ln(1-x)}{1+x}$$

Remarque. On peut en fait faire différemment de que ce qui est suggéré par l'énoncé. En effet, on remarque que

$$a_n + a_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^n + t^{n+1}}{1+t}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 t^n\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi pour $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Donc, en notant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et en remarquant que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est la primitive nulle en 0 de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, on obtient

$$xf(x) + f(x) - a_0 = -\ln(1-x)$$

et donc

$$f(x) = \frac{\ln(2) - \ln(1-x)}{1+x}$$

puisque $a_0 = \ln(2)$.

Solution 28

---

1. f est clairement continue sur $]0,1]$. De plus, $f \underset{x\to 0^+}{\sim} (\ln x)^2$. Par croissances comparées, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}$. Comme $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$, il en est de même de f.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est clairement continue sur $]0,1]$. Comme $u_0(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} (\ln x)^2$, on conclut comme à la question précédente que u_0 est intégrable sur $]0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{0^+} u_n = 0$ donc u_n est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,1]$: elle est donc intégrable sur $]0,1]$. Posons $\mathrm{I}_n = \int_0^1 u_n(x)\ \mathrm{d}x$. Comme $x \mapsto x^{2n+1}\ln(x)^2$ admet une limite nulle en 0^+, on peut intégrer par parties :

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{2n+1}\left[x^{2n+1}(\ln x)^2\right]_0^1 - \frac{2}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\ln(x)\ \mathrm{d}x = -\frac{2}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\ln(x)\ \mathrm{d}x$$

A nouveau, $x \mapsto x^{2n+1}\ln(x)$ admet une limite nulle en 0^+ donc on peut à nouveau intégrer par parties :

$$\mathrm{I}_n = -\frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{2n+1}\left[x^{2n+1}\ln(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\ \mathrm{d}x\right) = \frac{2}{(2n+1)^2}\int_0^1 x^{2n}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{(2n+1)^3}$$

3. Remarquons que pour tout $x \in]0,1]$,

$$\frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n(x)$$

Remarquons que u_n est positive sur $[0,1]$ de sorte que $|(-1)^n u_n| = u_n$. On a vu que u_n était intégrable sur $]0,1]$ et que $\mathrm{I}_n = \int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(2n+1)^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \mathrm{I}_n$ converge également. D'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0,1]$ et $\mathrm{I} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

4. Notons S_n et R_n la somme partielle et le reste de rang n de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$. Cette série vérifie de manière évidente le critère spécial des séries alternées donc

$$|\mathrm{I} - \mathrm{S}_n| = |\mathrm{R}_n| \le \frac{2}{(2(n+1)+1)^3} = \frac{2}{(2n+3)^3}$$

Pour que S_n soit une valeur approchée de I à ε près, il suffit donc de choisir n tel que $\frac{2}{(2n+3)^3} \le \varepsilon$ i.e. $2n+3 \ge \sqrt[3]{2/\varepsilon}$ ou encore $n \ge \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2/\varepsilon} - 3\right)$.

```
from scipy.integrate import quad
from numpy import log, ceil, abs

I=quad(lambda x:log(x)**2/(1+x**2),0,1)[0]
def valeur(eps):
  n=int(ceil(((2/eps)**(1/3)-3)/2))
  return sum([2*(-1)**k/(2*k+1)**3 for k in range(n+1)])
[abs(I-valeur(eps)) for eps in (.1,.01,.001,.0001,.00001)]
```

Divers

Solution 29

Posons $\varphi(x,t) = \frac{1}{t^x(1+t)}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^x}$ et $\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$ donc l'intégrale définissant f est définie si et seulement si $x < 1$ et $x+1 > 1$ i.e. $0 < x < 1$.

2. On va d'abord modifier l'expression de f pour simplifier le raisonnement. Soit $x \in]0,1[$. D'après la relation de Chasles

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$$

En effectuant le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$ dans la seconde intégrale :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x}(1+t)}$$

Posons

$$g : x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$$

Alors g est définie sur $[0,1[$ et

$$\forall x \in]0,1[,\ f(x) = g(x) + g(1-x)$$

On va donc étudier les limites de g en 0^+ et 1^-.

$$g(x) = \int_0^1 \frac{(1+t)-t}{t^x(1+t)}\,dt = \int_0^1 t^{-x}\,dt - \int_0^1 \frac{t^{1-x}}{1+t}\,dt = \frac{1}{1-x} - \int_0^1 \frac{t^{1-x}}{1+t}\,dt$$

Par ailleurs, puisque $1-x>0$

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{1-x}}{1+t}\,dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2)$$

donc

$$g(x) \underset{x\to1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}$$

Enfin, on vérifie aisément que g est croissante et positive donc bornée au voisinage de 0. On en déduit que

$$f(x) \underset{x\to1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}$$

et, comme $f(x) = f(1-x)$,

$$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$

Solution 30

1. Puisque $\dfrac{t^{x-1}}{1+t} \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$ converge si et seulement si $x-1>-1$ i.e. $x>0$. Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par intégration par parties,

$$f(x) = \frac{1}{x}\left[\frac{t^x}{1+t}\right]_0^1 + \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{t^x}{(1+t)^2}\,dt = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{t^x}{(1+t)^2}\,dt$$

Par ailleurs,

$$\forall t \in [0,1],\ 0 \leq \frac{t^x}{(1+t)^2} \leq t^x$$

donc

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t)^2} \leq \int_0^1 t^x\,dt = \frac{1}{x+1}$$

puis

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t)^2}\,dt = 0$$

On en déduit que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

ou encore

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

3. Remarquons que

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}(1+t-t)}{1+t}\,dt = \int_0^1 t^{x-1}\,dt - \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt = \frac{1}{x} - \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in [0,1]$

$$0 \leq \frac{t^x}{1+t} \leq \frac{1}{1+t}$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(2)$$

En particulier,

$$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to0^+}{=} \mathcal{O}(1)$$

Ainsi, comme $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$,

$$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$

Solution 31

1. Soit $p > \alpha$. Par définition de la borne inférieure, il existe $q \in]\alpha, p[$ tel que $f(t)e^{-qt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $f(t)e^{-pt} \underset{t\to0^+}{\sim} f(t)e^{-qt}$ et $f(t)e^{-pt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(f(t)e^{-pt}\right)$, $t \mapsto e^{-pt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, $\mathrm{F}(p)$ est bien définie.
2. On montre d'abord le résultat lorsque $\ell = 0$/
3. Soit $p > 0$. Alors, par le changement de variable $u = pt$,

$$p\mathrm{F}(p) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{p}\right)e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

- Pour tout $p \in]0, +\infty[$, $u \mapsto f\left(\frac{u}{p}\right)e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{p\to+\infty} f\left(\frac{u}{p}\right) = \ell$.