Devoir surveillé n°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 —

Partie I – Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Étudier la parité de f.

2. **a.** Donner un équivalent de la fonction sh en 0 et en déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Déterminer la limite de f en 0.

3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \left(\operatorname{th}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)\operatorname{ch}\frac{1}{x}$$

4. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{th} X < X$.

5. En déduire le tableau de variations de f.

6. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $X \mapsto \frac{\operatorname{sh} X}{X}$.

7. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, f admet un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

où a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 sont cinq réels que l'on précisera.

8. Montrer que la fonction $g \colon x \in \mathbb{R}^* \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée G, puis prouver que G est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Partie II – Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) suivante que l'on va résoudre sur différents intervalles.

$$(E) : \ xy' + y = \operatorname{ch} x$$

9. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

10. Donner sans justification les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.

11. Justifier que la fonction G définie à la question **I.8** est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Partie III – Une fonction définie par une intégrale

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $J(x) = \displaystyle\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,dt$.

12. Déterminer la parité de J.

13. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

14. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$J'(x) = f(x)\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{ch}\frac{1}{x}\right)$$

15. En déduire le signe de J' sur $\mathbb{R}_+^*$. On exprimera le (ou les) zéro(s) de J' à l'aide de la fonction ln.

16. **a.** Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{sh} t \geqslant t + \dfrac{t^3}{6}$.

b. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ J(x) \geqslant \frac{x}{2} + \frac{6}{x}$$

puis les limites de J en 0^+ et en $+\infty$.

17. Donner le tableau de variations de J sur $\mathbb{R}_+^*$.

18. On pose pour $h(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

a. Montrer que h est prolongeable par continuité en 0. On note encore h son prolongement.

b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$J(x) - \frac{x}{2} = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} h(u)\,du$$

c. Montrer

$$J(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{x}{2} + \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

19. Montrer que la courbe de J admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique dont on précisera une équation. On donnera également la position de la courbe de J par rapport à cette asymptote.

20. Tracer l'allure de la courbe représentative de J sur $\mathbb{R}$.
On fera notamment figurer l'asymptote déterminée à la question **III.19** ainsi que les tangentes horizontales éventuelles.
On donne pour le tracé $\dfrac{1}{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)} \approx 0,76$ et $J\left(\dfrac{1}{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}\right) \approx 0,65$ à 10^{-2} près.

Exercice 1.

Dans cet exercice, on recherche les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant la relation.

$$(E)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

On se donne donc dans un premier temps une telle fonction f.

1. Montrer que $f(0) \in \{0,1\}$.

2. Montrer que si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle.

Dans les deux questions suivantes, on suppose $f(0) = 1$.

3. Montrer que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y)$$
En déduire la valeur de $f'(0)$.

4. On pose $r = f''(0)$. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = rf(x)$$
En déduire une expression de $f(x)$ en fonction de r et x. On distinguera les cas $r = 0$, $r > 0$ et $r < 0$.

5. Répondre à la question initialement posée.

Exercice 2.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? On justifiera à chaque fois sa réponse.

1. Si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$, alors $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

2. $\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{B}$ est également dense dans $\mathbb{R}$.

4. Il existe des parties de $\mathbb{R}$ bornées et denses dans $\mathbb{R}$.