

## Groupe symétrique

### Exercice 1

1. Soit  $(i, j)$  une transposition avec  $(i < j)$ .  
Montrer que  $(i, j) = (i, i+1, \dots, j-1, j) \circ (j-1, j-2, \dots, i+1, i)$ .
2. Montrer que toute permutation appartenant à  $S_n$  peut s'écrire comme le produit de transpositions de la forme  $(k, k+1)$ .

### Exercice 2

Montrer que toute permutation de  $S_n$  peut s'écrire comme un produit de transpositions de la forme  $(1, i)$  avec  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ .

### Exercice 3

Déterminer la signature de  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 4

Déterminer le centre de  $S_n$ .

### Exercice 5

Mines MP 2011

On note  $S_n$  le groupe des permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et on pose  $f(\sigma) = \sum_{k=1}^n k\sigma(k)$  pour  $\sigma \in S_n$ .  
Déterminer le minimum et le maximum de  $f$  sur  $S_n$ .

### Exercice 6

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $\sigma \in S_n$ , on note  $P_\sigma$  la matrice  $(\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$ .

1. Montrer que l'application  $P : \sigma \in S_n \mapsto P_\sigma$  est un morphisme de groupes de  $S_n$  dans  $GL_n(\mathbb{K})$ .
2. Soit  $\sigma \in S_n$ . Que vaut  $P_\sigma^T$  ?
3. Montrer que  $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$  pour tout  $\sigma \in S_n$ .

## Petits déterminants

### Exercice 7 ★

Soient  $a$  et  $x$  dans  $\mathbb{K}$ . Calculer les déterminants suivants,

$$1. \Delta_1 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$2. \Delta_2 = \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}$$

### Exercice 8 ★

Soit  $\omega$  une racine cubique de l'unité. Prouver avec un minimum de calcul que

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**Exercice 9 ★****Tir groupé**

Soient  $a, b, c \in \mathbb{K}$ . Calculer les déterminants suivants, (on factorisera les expressions obtenues !)

$$1. \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$

**Exercice 10 ★**

Calculer les déterminants suivants :

$$1. \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & a' & b & a'b \\ 1 & a & b' & ab' \\ 1 & a' & b' & a'b' \end{vmatrix};$$

$$3. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{vmatrix};$$

$$4. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

**Gros déterminants****Exercice 11 ★****D'après Centrale MP**

Calculer, pour tous  $x$  réel et  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , le déterminant de

$$\begin{pmatrix} x & 2 & \cdots & n & 1 \\ 1 & x & & & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & n & \vdots \\ \vdots & \vdots & & x & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 12 ★★****D'après Centrale PC**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, \dots, a_n$  des réels. Calculer le déterminant de

$$(\sin(a_i + a_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

**Exercice 13 ★****D'après TPE PSI**

Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \geq 2$ . Calculer pour  $k < n - 1$  :

$$\begin{vmatrix} (x+1)^k & 2^k & 3^k & \cdots & n^k \\ (x+2)^k & 3^k & 4^k & \cdots & (n+1)^k \\ \vdots & & & & \vdots \\ (x+n)^k & \cdots & \cdots & \cdots & (2n-1)^k \end{vmatrix}.$$

**Exercice 14 ★**

Calculez le déterminant de la matrice  $n \times n$  suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \ddots & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

**Exercice 15 ★**

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n k.$$

Calculer, pour tout  $n \geq 1$ , le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} S_1 & \cdots & \cdots & \cdots & S_1 \\ \vdots & S_2 & \cdots & \cdots & S_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & S_{n-1} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_{n-1} & S_n \end{vmatrix}$$

**Exercice 16 ★★**

Soient  $a, b$  et  $c$ , trois nombres complexes. On considère la matrice carrée de taille  $n$

$$A = \begin{pmatrix} c & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & c \end{pmatrix}$$

et on note  $J$ , la matrice carrée de taille  $n$  dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. On suppose que  $a \neq b$ .

- a. Par des opérations sur les colonnes, démontrer que  $x \mapsto \det(A + xJ)$  est une fonction affine.
- b. En donnant à  $x$  deux valeurs convenables, calculer  $\det(A + xJ)$  pour tout  $x \in \mathbb{C}$ .

2. Comment calculer  $\det(A)$  lorsque  $a = b$  ?

**Exercice 17 ★**

Calculer le déterminant

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

**Exercice 18 ★★**

Posé à Centrale en 2006

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \cdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots \\ n-1 & \cdots & 1 & n \end{vmatrix}.$$

**Exercice 19 ★**

Calculer le déterminant de la matrice  $\left( \binom{n+i}{j} \right)_{0 \leq i, j \leq p}$  avec  $0 \leq p \leq n$ .

**Exercice 20 ★★**

Calculer le déterminant de taille  $n \geq 2$  suivant :

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

**Exercice 21 ★**

Calculer le déterminant suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

**Exercice 22 ★**

Calculer le déterminant d'ordre  $n$  suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

On explicitera les opérations sur les lignes et les colonnes effectuées le cas échéant.

**Exercice 23 ★**

Calculer en établissant une relation de récurrence le déterminant d'ordre  $n$  suivant.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) \\ 1 & (0) & 1 \end{vmatrix}$$

**Exercice 24 ★**

Calculer le déterminant de taille  $n$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

**Exercice 25 ★★★****Centrale PSI**

Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 2,  $a_1, \dots, a_n$  des complexes et  $P = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$ .

$$\text{Calculer } D(x) = \begin{vmatrix} \frac{P(x)}{x-a_1} & \frac{P(x)}{x-a_2} & \dots & \frac{P(x)}{x-a_n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \text{ pour } x \in \mathbb{C}.$$

**Exercice 26 ★★**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ . Montrer que le polynôme  $P = X^n - X + 1$  admet  $n$  racines distinctes dans  $\mathbb{C}$ .
2. On note  $z_1, \dots, z_n$  les racines de  $P$ . Calculer le déterminant de la matrice  $A = (1 + \delta_{ij} z_i)_{1 \leq i, j \leq n}$ .

**Exercice 27 ★★****Déterminants de Cauchy**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_1, \dots, a_n$  et  $b_1, \dots, b_n$  des complexes tels que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_i + b_j \neq 0$ . On pose alors  $D_n = \det \left( \left( \frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right)$ .

1. Que peut-on dire de  $D_n$  lorsque deux des  $a_i$  ou deux des  $b_j$  sont égaux ?
2. On suppose maintenant les  $a_i$  (resp. les  $b_j$ ) distincts deux à deux.  
Dans le déterminant définissant  $D_n$ , on remplace  $a_n$  par  $X$  et on note  $F(X)$  le déterminant obtenu. Montrer que  $F$  est une fraction rationnelle d'indéterminée  $X$ . Que peut-on dire de son degré ?
3. Justifier que  $F$  peut s'écrire sous la forme

$$F(X) = \frac{P(X)}{\prod_{j=1}^n (X + b_j)}$$

Que peut-on dire du degré de  $P$  ?

4. Déterminer  $n - 1$  racines de  $P$ . En déduire une expression de  $D_n$  en fonction des  $a_i$  et des  $b_j$ .

**Exercice 28 ★★****Déterminants de Vandermonde**

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ . Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

**Exercice 29 ★**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A_n$  la matrice carrée de taille  $n$  dont le coefficient en position  $(i, j)$  vaut  $\begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  et on pose  $D_n = \det(A_n)$ .

1. Ecrire les matrices  $A_3$ ,  $A_4$  et  $A_5$ .
2. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite  $(D_n)$ .
3. En déduire  $D_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Déterminants d'endomorphismes****Exercice 30**

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}_2[X]$  défini par

$$P \longmapsto P + P'.$$

Calculer  $\det(f)$ . Que peut-on déduire ?

**Exercice 31 ★****Projecteur et symétrie**

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $F$  et  $G$ . Calculer le déterminant de la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  et de la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$  en fonction des dimensions de  $F$  et  $G$ .

**Exercice 32 ★****Projecteurs et symétries**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .

1. Soit  $p$  un projecteur de  $E$ . Que vaut  $\det p$  ?
2. Soit  $s$  une symétrie de  $E$ . Que vaut  $\det s$  ?
3. Application : On considère  $f$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui à une matrice associe sa transposée. Que vaut  $\det f$  ?

### Exercice 33 ★

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On pose  $m_A : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto AM \end{cases}$ .

1. Justifier que  $m_A$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que  $\det m_A = (\det A)^2$ .
3. Généraliser en dimension quelconque.

### Exercice 34 ★

Pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on définit une application

$$u_\sigma : \begin{cases} \mathbb{R}_n & \longrightarrow \mathbb{R}_n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,  $u_\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .
2. Pour  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ , que vaut  $u_\sigma \circ u_\tau$  ?
3. En déduire que pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,  $u_\sigma$  est un automorphisme et que

$$U : \begin{cases} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \sigma & \longmapsto u_{\sigma^{-1}} \end{cases}$$

est un morphisme de groupes.

4. Calculer  $\det(u_\sigma)$  pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ .

### Exercice 35 ★

CCP 2010

Soit  $f$  l'application qui à tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  associe le polynôme  $\tilde{P}$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{P}(x) = \int_x^{x+1} P(t) dt$$

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $f$  induit un endomorphisme  $f_n$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Calculer  $\det(f_n)$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 36 ★

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. On suppose qu'il existe  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^2 + \mathrm{Id}_E = 0$ . Montrer que  $\dim E$  est paire.
2. On suppose qu'il existe  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^2 + u + \mathrm{Id}_E = 0$ . Montrer que  $\dim E$  est paire.

### Exercice 37 ★

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 de base  $(e_1, e_2, e_3)$  et  $u$  l'endomorphisme de  $E$  défini par

$$\begin{aligned} u(e_1) &= 4e_1 + e_2 + 4e_3 \\ u(e_2) &= -2e_1 + e_2 - 4e_3 \\ u(e_3) &= -e_1 - e_2 + e_3 \end{aligned}$$

1. Écrire la matrice  $A$  de  $u$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ .
2. Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on pose  $V(\lambda) = \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ . Calculer  $V(\lambda)$  sous forme factorisée pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
En déduire que  $V$  possède trois racines réelles  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  telles que  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ . Préciser  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .
3. Vérifier que pour tout  $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ ,  $\mathrm{Ker}(u - \lambda_k \mathrm{Id}_E)$  est de dimension 1 et en donner un vecteur directeur  $f_k$ .
4. Justifier que  $(f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $E$  et donner la matrice  $D$  de  $u$  dans cette base.
5. Déterminer une matrice  $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$  telle que  $A = PDP^{-1}$ . Expliciter  $P^{-1}$ .
6. En déduire la matrice de  $u^n$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## Déterminants par blocs

**Exercice 38 ★**

Pour  $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ , on note  $A \otimes B$  la matrice de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  définie par blocs de la manière

$$\text{suivante : } A \otimes B = \left( \begin{array}{c|c} a_{11}B & a_{12}B \\ \hline a_{21}B & a_{22}B \end{array} \right).$$

1. Soit  $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^4$ . Montrer que  $(A \otimes B).(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$ .
2. Calculer  $\det(I_2 \otimes B)$ ,  $\det(A \otimes I_2)$  et  $\det(A \otimes B)$  en fonction de  $\det A$  et  $\det B$ .
3. A quelle condition nécessaire et suffisante  $A \otimes B$  est-elle inversible ? Quel est alors son inverse ?

**Exercice 39 ★****Déterminant du complément de Schur**

Soit  $M = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$  où  $A \in GL_p(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ . On pose  $S = D - CA^{-1}B$ . Montrer que  $\det(M) = \det(A) \det(S)$ .

**Exercice 40 ★★****Déterminants par blocs**

Soient  $n \geq 1$ ,  $A, B, C$  et  $D$  quatre matrices réelles de taille  $n$ . Soit  $M$  la matrice réelle de taille  $2n$  définie par :

$$M = \left( \begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right)$$

On suppose que  $C$  et  $D$  commutent. Prouver que

$$\det(M) = \det(AD - CB).$$

**Inégalités****Exercice 41 ★★**

Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique réelle est toujours positif.

**Exercice 42 ★★**

On pose, pour  $a, b, c \in \mathbb{R}$  :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

1. Calculer  $AA^T$ .
2. On suppose que  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Prouver que

$$|\det(A)| \leq 1.$$

**Comatrice****Exercice 43 ★**

Soit  $A \in GL(n, \mathbb{K})$ ,  $n > 1$ . Montrer que  $\text{com}(\text{com}(A)) = \det(A)^{n-2}A$ .

**Exercice 44 ★**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ .

1. Montrer que  $\det A, \det B \in \mathbb{Z}$ .
2. On suppose que  $\det A$  et  $\det B$  sont premiers entre eux. Montrer qu'il existe deux matrices  $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  telles que  $AU + BV = I_n$ .

**Exercice 45 ★★**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Donner le rang de  $\text{com}(A)$  en fonction de celui de  $A$ . On pourra distinguer les cas  $\text{rg } A = n$ ,  $\text{rg } A < n - 1$  et  $\text{rg } A = n - 1$ .

**Divers**

**Exercice 46 ★**

Pour  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ , on pose  $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$  et  $\mathcal{K} = \{M(a, b), (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$ .

1. A quelle condition un élément de  $\mathcal{K}$  est-il inversible ?
2. Montrer que  $\mathcal{K} \setminus \{0\}$  muni de la multiplication est un groupe.

**Exercice 47 ★★**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On se donne une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Pour  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ , on pose

$$f(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), x_2, \dots, x_n) + \dots + \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, u(x_n))$$

Montrer que  $f = \text{tr}(u) \det_{\mathcal{B}}$ .

**Exercice 48 ★★**

On note  $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  inversibles et dont l'inverse est également dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ .

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})^2$ . On suppose que  $A + kB \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$  pour tout  $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ . Que vaut  $\det(B)$  ?

**Exercice 49**

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  semblables sur  $\mathbb{C}$ . Montrer que  $A$  et  $B$  sont semblables sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 50**

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  vérifiant  $f^3 + f = 0$ .

1. Montrer que  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ .
2. A partir de maintenant, on suppose  $f$  non nul.
  - a. Justifier l'existence d'un vecteur non nul  $u$  de  $\text{Im } f$ .
  - b. Montrer que  $f^2(u) = -u$ .
  - c. Montrer que la famille  $(u, f(u))$  est libre. Que peut-on en déduire sur  $\text{rg } f$  ?
3. On suppose que  $\text{rg } f = 3$ .
  - a. Montrer que  $f^2 = -\text{Id}$ . Aboutir à une contradiction en considérant le déterminant de  $f^2$ .
  - b. Que peut-on en conclure sur les dimensions de  $\text{Im } f$  et  $\text{Ker } f$  ?

4. Montrer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 51**

Soit  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $p \geq 2$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  la matrice dont les coefficients sont donnés

$$\text{par } a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. On note  $K$  la matrice de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. Exprimer  $K^n$  en fonction de  $K$ .
2. En déduire deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = u_n A + v_n I_p$ .
3. On note  $X$  le vecteur de  $\mathbb{R}^p$  dont toutes les composantes sont égales à 1. Déterminer la limite de  $A^n X$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
4. Montrer que  $A$  est inversible et déterminer son inverse.
5. Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on pose  $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I_p)$ . Montrer que  $\chi$  admet deux zéros distincts  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Que vaut  $(A - \lambda_1 I_p)(A - \lambda_2 I_p)$  ?