

DEVOIR SURVEILLÉ N°01 : CORRIGÉ

Solution 1

Notons $\mathcal{P}_n : \langle (1+x)^n \geq 1+nx \rangle$. \mathcal{P}_0 est clairement vraie. Supposons que \mathcal{P}_n est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $(1+x)^n \geq 1+nx$. Or $1+x \geq 0$ donc

$$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

ou encore

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

Ainsi \mathcal{P}_{n+1} est vraie. Par récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 2

Posons pour $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{P}_n : 1 \leq u_n \leq n^2$$

Initialisation. Puisque $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$, \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont vraies.

Hérédité. Supposons que \mathcal{P}_n et \mathcal{P}_{n+1} soient vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 &\leq u_n \leq n^2 \\ 1 &\leq u_{n+1} \leq (n+1)^2 \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$1 + \frac{2}{n+2} \leq u_{n+2} \leq (n+1)^2 + \frac{2n^2}{n+2}$$

En particulier, il est clair que $u_{n+2} \geq 1$. Reste à montrer que

$$(n+1)^2 + \frac{2n^2}{n+2} \leq (n+2)^2$$

Calculons donc la différence suivante :

$$\begin{aligned} (n+2)^2 - \left[(n+1)^2 + \frac{2n^2}{n+2} \right] &= \frac{(n+2)^3 - (n+1)^2(n+2) - 2n^2}{n+2} \\ &= \frac{(n+2)[(n+2)^2 - (n+1)^2] - 2n^2}{n+2} \\ &= \frac{(n+2)(2n+3) - 2n^2}{n+2} \\ &= \frac{5n+6}{n+2} \geq 0 \end{aligned}$$

On a donc bien montré que

$$(n+1)^2 + \frac{2n^2}{n+2} \leq (n+2)^2$$

et par conséquent que

$$u_{n+2} \leq (n+2)^2$$

\mathcal{P}_{n+2} est donc vraie.

Conclusion. Par récurrence double, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution 3

Tout d'abord, $u_0 = 1 = 0!$ et $u_1 = 1 = 1!$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = n!$ et $u_{n+1} = (n+1)!$. Alors

$$u_{n+2} = (n+1)(n! + (n+1)!) = (n+1)(n! + n!(n+1)) = (n+1)n!(n+2) = (n+2)!$$

Par récurrence double, $u_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 4

On raisonne par l'absurde. Supposons que $\sqrt{n^2 + 1}$ soit un entier. Il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n^2 + 1} = k$. Ainsi $n^2 + 1 = k^2$ ou encore $(k - n)(k + n) = 1$. Comme k et n sont deux entiers naturels, on a nécessairement $k - n = k + n = 1$. Notamment

$$2n = (k + n) - (k - n) = 1 - 1 = 0$$

et donc $n = 0$, ce qui contredit l'énoncé. Ainsi $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier.

Solution 5

1. D'après l'énoncé, $f(0)^2 = f(0)$ donc $f(0) \in \{0, 1\}$. De plus, $f(0)f(1) = f(0) + 1$ donc on ne peut avoir $f(0) = 0$. Ainsi $f(0) = 1$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x)f(0) = f(0) + x + 0$$

donc

$$f(x) = x + 1$$

3. Réciproquement, si $f(x) = x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)f(y) = (x + 1)(y + 1) = xy + 1 + x + y = f(xy) + x + y$$

On en déduit que l'unique fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$

est la fonction $x \mapsto x + 1$.

Solution 6

1. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Remarquons que

$$d_2(x, y) = \left| \frac{y - x}{(x + 1)(y + 1)} \right| = \frac{|y - x|}{(x + 1)(y + 1)}$$

Ainsi il est clair que $d_2(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

2. Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3$. Posons

$$X = \frac{x}{x + 1}$$

$$Y = \frac{y}{y + 1}$$

$$Z = \frac{z}{z + 1}$$

Puisque $X - Z = X - Y + Y - Z$, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|X - Z| \leq |X - Y| + |Y - Z|$$

c'est-à-dire

$$d_2(x, z) \leq d_2(x, y) + d_2(y, z)$$

3. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. On rappelle que

$$d_2(x, y) = \frac{|y - x|}{(x + 1)(y + 1)} = \frac{d_1(x, y)}{(1 + x)(1 + y)}$$

Or $x \geq 0$ et $y \geq 0$ donc $1 + x \geq 1$ et $1 + y \geq 1$. Par conséquent, $(1 + x)(1 + y) \geq 1$ donc

$$d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$$

4. Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un tel λ . Notamment, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$d_1(x, 0) \leq \lambda d_2(x, 0)$$

c'est-à-dire

$$x \leq \lambda \frac{x}{x + 1}$$

Notamment, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\lambda \geq x + 1$$

ce qui est évidemment absurde. Il n'existe donc pas de réel λ tel que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, d_1(x, y) \leq \lambda d_2(x, y)$$

Solution 7

On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}
 & (1-\lambda)\sqrt{x} + \lambda\sqrt{y} \leq \sqrt{(1-\lambda)x + \lambda y} \\
 \Leftrightarrow & \quad \left[(1-\lambda)\sqrt{x} + \lambda\sqrt{y} \right]^2 \leq (1-\lambda)x + \lambda y \quad \text{car tous les membres de l'inégalité précédente sont positifs} \\
 \Leftrightarrow & \quad (1-\lambda)^2x + \lambda^2y + 2(1-\lambda)\lambda\sqrt{x}\sqrt{y} \leq (1-\lambda)x + \lambda y \\
 \Leftrightarrow & \quad 0 \leq [(1-\lambda) - (1-\lambda)^2]x + [\lambda - \lambda^2]y - 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x}\sqrt{y} \\
 \Leftrightarrow & \quad 0 \leq \lambda(1-\lambda)x + \lambda(1-\lambda)y - 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x}\sqrt{y} \\
 \Leftrightarrow & \quad 0 \leq \lambda(1-\lambda)[x + y - 2\sqrt{x}\sqrt{y}] \\
 \Leftrightarrow & \quad 0 \leq \lambda(1-\lambda)(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2
 \end{aligned}$$

Solution 8

1.

$$\begin{aligned}
 A \setminus (B \cap C) &= A \cap \overline{B \cap C} \\
 &= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\
 &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \quad \text{par distributivité de l'intersection sur l'union} \\
 &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C)
 \end{aligned}$$

2. D'une part,

$$\begin{aligned}
 A \setminus (B \cup C) &= A \cap \overline{B \cup C} \\
 &= A \cap \overline{B} \cap \overline{C}
 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 (A \setminus B) \cap (A \setminus C) &= (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) \\
 &= (A \cap A) \cap \overline{B} \cap \overline{C} \\
 &= A \cap \overline{B} \cap \overline{C}
 \end{aligned}$$

Ainsi $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

3. D'une part,

$$A \cap (B \setminus C) = A \cap B \cap \overline{C}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 (A \cap B) \setminus (A \cap C) &= A \cap B \cap \overline{A \cap C} \\
 &= A \cap B \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\
 &= (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \quad \text{par distributivité de l'union sur l'intersection} \\
 &= \emptyset \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \quad \text{car } A \cap \overline{A} = \emptyset \\
 &= A \cap B \cap \overline{C}
 \end{aligned}$$

Ainsi $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

4. Si on prend $A = B = C$,

$$\begin{aligned}
 A \cup (B \setminus C) &= A \cup \emptyset = A \\
 (A \cup B) \setminus (A \cup C) &= A \setminus A = \emptyset
 \end{aligned}$$

Notamment, si A est non vide (ce qui est possible dès que E est non vide), $A \cup (B \setminus C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.