Devoir surveillé n°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont autorisées.

Problème 1

1 On note $a_n = \frac{n^{n-1}}{n!}$ le coefficient de x^n dans la série entière. D'après la formule de Stirling,

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^n}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e$ et le rayon de convergence de la série entière vaut e^{-1} d'après la règle de d'Alembert.

Remarque. On peut se passer de la formule de Stirling dans cette question. En effet,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^n n!}{(n+1)!} n^{n-1} = \left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \exp\left((n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

Or $(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \cdot \frac{1}{n} = 1$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e$$

et le rayon de convergence de la série entière vaut e^{-1} d'après la règle de d'Alembert.

2 Toujours d'après la formule de Stirling,

$$\frac{n^{n-1}e^{-n}}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Par comparaison à une série de Riemman convergente, $\sum \frac{n^{n-1}e^{-n}}{n!}$ converge.

3 Pour tout $x \in [-e^{-1}, e^{-1}]$,

$$|a_n x^n| = \left|\frac{n^{n-1}}{n!}x^n\right| \leq \frac{n^{n-1}e^{-n}}{n!}$$

D'après la question précédente, la série définissant f converge normalement sur $[-e^{-1}, e^{-1}]$.

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto a_n x^n$ est continue sur $[-e^{-1}, e^{-1}]$. La série $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-e^{-1}, e^{-1}]$ d'après la question précédente. Ainsi $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[-e^{-1}, e^{-1}]$.

5 Par concavité du logarithme, $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$. Notamment, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

puis

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1$$

et enfin, par croissance de l'exponentielle,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

6 Comme f est la somme d'une série entière de rayon de convergence e^{-1}, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire $]-e^{-1},e^{-1}[$.
On obtient la dérivée de f en dérivant terme à terme :

$$\forall x \in]-e^{-1},e^{-1}[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}x^n$$

7 Il est clair que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,e^{-1}[$.
Soit $x \in]-e^{-1},0[$. Comme x est négatif,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(n+1)^n|x|^n}{n!}$$

On vérifie alors le critère spécial des séries altermées. Posons $u_n = \dfrac{(n+1)^n|x|^n}{n!}$. Comme $\sum(-1)^n u_n$ converge, on a nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. De plus, en utilisant la question **5**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_n}{u_{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n |x| \leq e|x| \leq 1$$

Comme (u_n) est positive, on peut affirmer qu'elle est décroissante. La série $\sum(-1)^n u_n$ vérifie donc le critère spécial des séries alternées. La somme $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$ est donc du signe de son premier terme u_0. Ainsi $f'(x) \geq 0$.
La fonction f est donc croissante sur $]-e^{-1},e^{-1}[$.

8 Remarquons que

$$f\left(-\frac{1}{e}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^{n-1}e^{-n}}{n!}$$

Posons $u_n = \dfrac{n^{n-1}e^{-n}}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On vérifie à nouveau que la série $\sum(-1)^n u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{e} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{e} \leq 1$$

Donc la suite (u_n) est décroissante. Elle est également de limite nulle puisque $\sum(-1)^n u_n$ converge. Alors, d'après le théorème sur les séries alternées

$$\left|f\left(-\frac{1}{e}\right) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k\right| \leq |u_{n+1}| = u_{n+1}$$

On cherche donc n tel que $u_{n+1} \leq 10^{-2}$. On propose un programme Python à cet effet.

```python
from math import factorial, exp

def approx(ϵ):
    u = exp(-1)
    s = 0
    n = 1
    while u > ϵ:
        s += (-1)**n * u
        u *= (1+1/n)**(n-1) * exp(-1)
        n += 1
    return s
```

```
>>> approx(10**-2)
-0.28352486503145236
```

9 φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction polynôme et de l'exponentielle. On raisonne par récurrence sur i.
On a bien $\varphi(x) = \mathrm{P}_0(e^x)(1-e^x)^m$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $\mathrm{P}_0 = 1$. Soit $i \in [\![0, m-1]\!]$. Supposons qu'il existe un polynôme P_i tel que $\varphi^{(i)}(x) = \mathrm{P}_i(e^x)(1-e^x)^{m-i}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi^{(i+1)}(x) = \mathrm{P}_i'(e^x)e^x(1-e^x)^{m-i} - (m-i)\mathrm{P}_i(e^x)e^x(1-e^x)^{m-i-1} = \mathrm{P}_{i+1}(e^x)(1-e^x)^{m-i-1}$$

avec $\mathrm{P}_{i+1} = \mathrm{X}(1-\mathrm{X})\mathrm{P}_i' - (m-i)\mathrm{X}\mathrm{P}_i$.
Par récurrence, il existe bien pour tout $i \in [\![0, m]\!]$ un polynôme P_i tel que $\varphi^{(i)}(x) = \mathrm{P}_i(e^x)(1-e^x)^{m-i}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

10 Soit un entier $m \geq 2$. D'après la formule du binôme,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n}(-1)^n e^{nx}$$

En dérivant $m-1$ fois, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(m-1)}(x) = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n}(-1)^n n^{m-1} e^{nx}$$

puis en évaluant en 0

$$\varphi^{(m-1)}(0) = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n}(-1)^n n^{m-1}$$

Mais, d'après la question précédente,

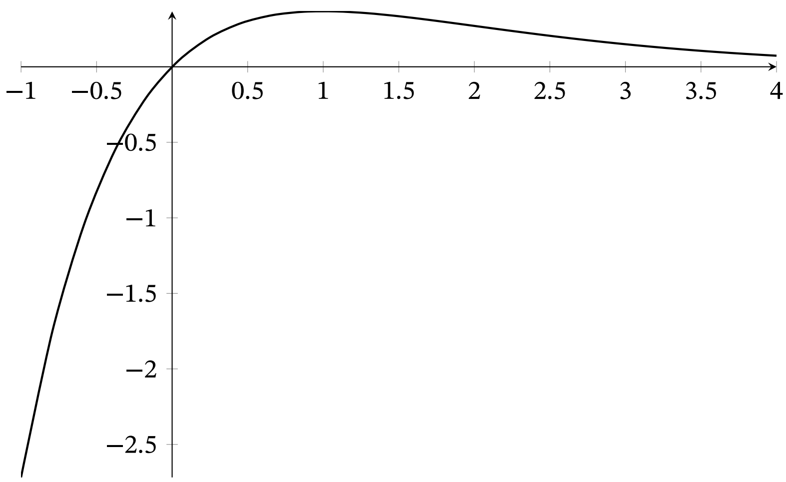
$$\varphi^{(m-1)}(0) = \mathrm{P}_{m-1}(1)(1-1)^{m-1} = 0$$

car $m-1 \geq 1$. On en déduit le résultat demandé.

11 La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(y) = (1-y)e^{-y}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On en déduit le tableau de variation suivant.

y	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(y)$		$+$	0	$-$	
$g(y)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

puis le graphe suivant



12 La fonction g est strictement croissante et continue sur $[-1, 0]$. Puisque

$$g(-1) = -e < -e^{-1} < 0 = g(0)$$

il existe un unique réel $\alpha \in]-1, 0[$ tel que $g(\alpha) = -\frac{1}{e}$.
De plus, par croissance de g sur $[\alpha, 1]$,

$$\forall y \in [\alpha, 1],\ g(\alpha) = -\frac{1}{e} \leq g(y) \leq g(1) = \frac{1}{e}$$

$\boxed{\mathbf{13}}$ On a vu précédemment que f était définie et même continue sur $[-e^{-1}, e^{-1}]$. Soit $y \in [\alpha, 1]$. D'après la question précédente, $g(y) = ye^{-y} \in [-e^{-1}, e^{-1}]$ donc f est bien définie en ye^{-y}. De plus,

$$f(ye^{-y}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} y^n e^{-ny}$$

Mais en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle,

$$\begin{aligned}
f(ye^{-y}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} y^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-ny)^m}{m!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} y^n \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-n} n^{m-n} y^{m-n}}{(m-n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} y^n \cdot \frac{(-1)^{m-n} n^{m-n} y^{m-n}}{(m-n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} (-1)^{m-n} \frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!} y^m
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{14}}$ Soit $y \in [\alpha, -\alpha]$. D'après le théorème de Fubini positif,

$$\begin{aligned}
\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} |z_{n,m}| &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} |z_{n,m}| \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!} |y|^m \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{n^{m+n-1}}{n!m!} |y|^{m+n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}|y|^n}{n!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(n|y|)^m}{m!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}|y|^n}{n!} e^{n|y|} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} (|y|e^{|y|})^n
\end{aligned}$$

Or $y \in [\alpha, -\alpha]$, $-|y| \in [\alpha, 0]$ et donc $g(-|y|) \in [-e^{-1}, e^{-1}]$ i.e. $-|y|e^{|y|} \in [-e^{-1}, e^{-1}]$ et donc également $|y|e^{|y|} \in [-e^{-1}, e^{-1}]$. On a vu que la série définissant f convergeait sur $[-e^{-1}, e^{-1}]$ donc

$$\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} |z_{n,m}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} (|y|e^{|y|})^n < +\infty$$

Ceci prouve que la famille $(z_{n,m})_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est bien sommable.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Soit $y \in [\alpha, -\alpha]$. On peut maintenant appliquer le théorème de Fubini. D'une part, en reprenant les calculs de la question précédente

$$\begin{aligned}
\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} z_{n,m} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} z_{n,m}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=n}^{+\infty} (-1)^{m-n}\frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!}y^m\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^{m}\frac{n^{m+n-1}}{n!m!}y^{m+n}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n-1}y^n}{n!}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-ny)^m}{m!}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n-1}y^n}{n!}e^{-ny}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n-1}}{n!}(ye^{-y})^n\\
&= f(g(y))
\end{aligned}$$

D'autre part,

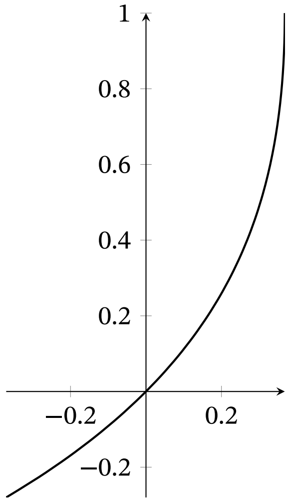
$$\begin{aligned}
\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} z_{n,m} &= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} z_{n,m}\\
&= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{m}(-1)^{m-n}\frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!}y^m\\
&= \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m y^m}{m!}\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}n^{m-1}
\end{aligned}$$

D'après la question **10**, tous les termes d'indices $m \geq 2$ de cette somme sont nuls. Ainsi

$$\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} z_{n,m} = y$$

Finalement, $f(g(y)) = y$.

$\boxed{\mathbf{16}}$ La question précédente montre que f est la bijection réciproque de la bijection de $[\alpha, 1]$ sur $[-e^{-1}, e^{-1}]$ induite par g. On en déduit le graphe suivant.



$\boxed{\mathbf{17}}$ La fonction g est dérivable en α et $g'(\alpha) = (1-\alpha)e^{-\alpha} \neq 0$ donc f est dérivable en $g(\alpha) = -\frac{1}{e}$. Par contre, g est dérivable en 1 mais $g'(1) = 0$ donc f n'est pas dérivable en $g(1) = \frac{1}{e}$. On peut préciser que le graphe de f admet une tangente verticale au point d'abscisse $\frac{1}{e}$.

Solution 1

1. La famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable car elle est à termes positifs et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Ainsi la famille $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in\mathrm{A}}$ est sommable en tant que produit des deux familles sommables $\left(\frac{1}{p^2}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{q^2}\right)_{q\in\mathbb{N}^*}$. De plus

$$\sum_{(p,q)\in\mathrm{A}} \frac{1}{p^2q^2} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)^2 = \frac{\pi^4}{36}$$

2. On remarque que pour tout $(p,q)\in\mathrm{A}$, $\frac{1}{p^2+q^2} \geq \frac{1}{(p+q)^2} \geq 0$. On peut alors partitionner $\mathrm{A} = \bigsqcup_{n\geq2} \mathrm{I}_n$ avec $\mathrm{I}_n = \{(p,q)\in\mathrm{A},\ p+q=n\}$. De plus, pour tout $n\geq 2$,

$$\sum_{(p,q)\in\mathrm{I}_n} \frac{1}{(p+q)^2} = \frac{n-1}{n^2}$$

Comme la série $\sum_{n\geq2} \frac{n-1}{n^2}$ diverge, la famille $\left(\frac{1}{(p+q)^2}\right)_{(p,q)\in\mathrm{A}}$ n'est pas sommable d'après le théorème de sommation par paquets. La famille $\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in\mathrm{A}}$ n'est donc pas sommable non plus.

Solution 2

1. En convenant que $\mathrm{A}_{n_0-1} = 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n_0}^{n} a_k\mathrm{B}_k &= \sum_{k=n_0}^{n} (\mathrm{A}_k - \mathrm{A}_{k-1})\mathrm{B}_k \\
&= \sum_{k=n_0}^{n} \mathrm{A}_k\mathrm{B}_k - \sum_{k=n_0}^{n} \mathrm{A}_{k-1}\mathrm{B}_k \\
&= \sum_{k=n_0}^{n} \mathrm{A}_k\mathrm{B}_k - \sum_{k=n_0-1}^{n-1} \mathrm{A}_k\mathrm{B}_{k+1} \\
&= \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n + \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathrm{A}_k(\mathrm{B}_k - \mathrm{B}_{k+1}) \\
&= \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathrm{A}_k b_k
\end{aligned}$$

2. **a.** La série $\sum b_n$, autrement dit la série $\sum \mathrm{B}_{n+1} - \mathrm{B}_n$, est une série télescopique. Elle est donc de même nature que la suite (B_n), c'est-à-dire convergente.

b. Tout d'abord, (A_n) est bornée donc $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(\mathrm{B}_n)$. Puisque (B_n) converge vers 0, il en est de même de la suite $(\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n)$.
Ensuite, la suite (B_n) étant décroissante, la série $\sum b_n$ est une série à termes de signe constant. Or $\mathrm{A}_n b_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(b_n)$ et la série $\sum b_n$ converge donc la série $\sum \mathrm{A}_n b_n$ converge. On en déduit que la suite de ses sommes partielles converge. La suite de terme général $\sum_{k=n_0}^{n-1} \mathrm{A}_k b_k$ converge donc.

D'après la question **1**, la suite de terme général $\sum_{k=n_0}^{n} a_k\mathrm{B}_k$ converge donc en tant que somme de deux suites convergentes. Puisque $\sum_{k=n_0}^{n} a_k\mathrm{B}_k$ est la somme de partielle de rang n de la série $\sum a_n\mathrm{B}_n$, la série $\sum a_n\mathrm{B}_n$ converge également.

c. Posons $a_n = (-1)^n$ pour $n \geq n_0$. Alors A_n vaut 0, -1 ou 1 suivant la parité de n ou n_0. En particulier, la suite (A_n) est bornée et on peut donc appliquer le résultat de la question précédente. La série $\sum(-1)^n\mathrm{B}_n$ converge donc.

3. **a.** Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique.

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ki\theta} = e^{i\theta}\frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1} = e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

b. **Cas $\alpha \leq 0$.** La suite de terme général $\frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0. En effet, $\left|\frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}\right| = n^{-\alpha} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Cas $\alpha > 1$. La série $\sum \frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}$ converge absolument. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge puisque $\alpha > 1$.

Cas $0 < \alpha \leq 1$. On utilise les résultats précédents avec $n_0 = 1$, $a_n = e^{in\theta}$ et $B_n = \frac{1}{n}$. D'après la question **3.a**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|A_n| = \left|e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$$

La suite (A_n) est donc bornée. La suite (B_n) est clairement décroissante de limite nulle. La question **2.b** permet alors d'affirmer que la série $\sum a_n B_n$ i.e. la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$, converge. Cette série ne converge pas absolument puisque $\left|\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$ et que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ne converge pas ($\alpha \leq 1$).

4. Rappelons que pour tout $n \geq n_0$

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$$

La suite (B_n) converge vers 0 et (A_n) est bornée donc $\lim_{n\to+\infty} A_n B_n = 0$.

Puisque (A_n) est bornée, $A_n b_n = \mathcal{O}(|b_n|)$. Or la série $\sum |b_n|$ converge car $\sum_{n\geq n_0} b_n$ est absolument convergente. De plus, la série $\sum |b_n|$ est à termes positifs donc la série $\sum A_n b_n$ converge (absolument). Ainsi la suite de terme général $\sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$ converge.

Il s'ensuit que la suite de terme général $\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k$ converge également i.e. que la série $\sum_{n\geq n_0} a_n B_n$ converge.