

EXERCICE 1.Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$y' + \tanh(t)y = \sinh(t).$$

EXERCICE 2.Résoudre sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$ l'équation

$$y' - \tan(t)y = \frac{1}{1 + \cos(t)}.$$

EXERCICE 3.Résoudre sur $] -\infty, 1[$ l'équation :

$$(1 - x)^2 y' = (2 - x)y.$$

EXERCICE 4.Résoudre sur \mathbb{R} l'équation :

$$z' + \tanh(t)z = t \tanh(t).$$

Trouver l'unique solution z_1 vérifiant la condition initiale $z_1(0) = 1$.**EXERCICE 5.**

Soit (E) l'équation :

$$y' + \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)}y = 2\sin(x).$$

1. Résoudre (E_H) .
2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme

$$x \mapsto a \cos(x) + b$$

avec a et b réel.

3. Résoudre (E) sur \mathbb{R} et déterminer l'unique solution de (E), notée h , vérifiant la condition initiale $h(0) = 1$.

EXERCICE 6.Résoudre sur $I =]0, \pi[$ l'équation différentielle

$$(E) : y' + \cotan(t)y = \cos^2(t).$$

EXERCICE 7.Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

$$1. y' - y = \arctan(e^x) \quad \bigg| \quad 2. y' + y = \arctan(e^x)$$

EXERCICE 8.Résoudre sur \mathbb{R} les équations

$$1. y' + 2y = te^{-t} \quad \bigg| \quad 2. y' + 2y = e^{-2t}$$

EXERCICE 9.Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$y' + y = t \cos(t).$$

EXERCICE 10.Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$y' - y = e^t + e^{2t}.$$

EXERCICE 11.On considère l'équation (E) : $y' - \ln(x)y = x^x$.

1. Calculer en intégrant par parties les primitives de $x \mapsto \ln(x)$ sur \mathbb{R}_+^* .
2. Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* .

EXERCICE 12.Résoudre sur \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $(E_1) : y' + 3y = \sin(x)$;
2. $(E_2) : y' - 3y = e^{-x}(1 - x^3)$;
3. $(E_3) : y''' - y'' = x$.

EXERCICE 13.Résoudre sur \mathbb{R} l'équation (E) : $y' + xy = x^2 + 1$ sachant qu'elle admet une solution particulière polynomiale.

EXERCICE 14.

Résoudre les équations suivantes

- | | |
|----------------------------|---------------------------------|
| 1. $y' + y = x$; | 5. $y' + y = e^{2x}$; |
| 2. $y' + y = e^{-x}$; | 6. $y' + y = e^{-x} + e^{2x}$; |
| 3. $y' + y = xe^{-x}$; | 7. $y' + y = \sin(x)$; |
| 4. $y' + y = x^2 e^{-x}$; | 8. $y' + y = \cos(x)e^x$. |

EXERCICE 15.

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1. $y' + 2xy = e^{x-x^2}$, $y(0) = 0$; | 3. $x^3 y' - 2y = 0$, $y(1) = 1$. |
| 2. $x^2 y' + y = 0$, $y(0) = 1$; | |

EXERCICE 16.

Résoudre sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* l'équation

$$|x|y' + (x-1)y = x^2.$$

EXERCICE 17.

Résoudre l'équation

$$|x(x-1)|y' + y = x^2$$

sur $] -\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

EXERCICE 18.

Résoudre l'équation différentielle :

$$(1+t^2)x' - x = 1$$

EXERCICE 19.

Soit a et b deux fonction impaires continues sur \mathbb{R} . Soit f une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$. Montrer que f est paire.

EXERCICE 20.

Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$, a et b deux fonctions continues et T -périodiques sur \mathbb{R} et f une solution de l'équation différentielle (E) : $y' + ay = b$. Montrer que f est T -périodique *si et seulement si* $f(0) = f(T)$.

EXERCICE 21.

Résoudre sur $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$ puis $]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(1-x^2)y' - xy = 1$$

EXERCICE 22.

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1.$$

1. Trouver une solution polynomiale.
2. En déduire l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} .
3. Déterminer la solution vérifiant la condition initiale $y(1) = 1$.

EXERCICE 23.

Calculer les solutions (réelles) des équations différentielles suivantes :

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $y'' - 2y' - 3y = t^2 e^t$ | 6. $y'' - 2y' + y = \cos(2t)$ |
| 2. $y'' + 4y' + 3y = te^{-2t}$ | 7. $y'' + 5y' + 4y = te^{-t}$ |
| 3. $y'' + 4y' + 3y = \cos(3t)$ | 8. $y'' + y = \cos(t)$ |
| 4. $y'' + 3y' + 2y = \sin(t)$ | 9. $y'' - 6y' + 9y = (t+1)e^{-3t}$ |
| 5. $y'' - 4y' + 4y = e^{-t}$ | 10. $y'' - 2y' + 2y = e^{-t} \cos(t)$ |

EXERCICE 24.

Deux problèmes de Cauchy.

1. Déterminer l'unique fonction f , deux fois dérivable sur \mathbb{R} , solution de

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-3t}$$

pour la condition initiale $f(0) = 0, f'(0) = 1$.

2. Déterminer l'unique fonction g , deux fois dérivable sur \mathbb{R} , solution de

$$y'' + 5y' + 4y = e^{-t}$$

pour la condition initiale $g(0) = 0, g'(0) = 1$.

EXERCICE 25.

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \sin(x).$$

EXERCICE 26.

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 4y = \sin^2(t).$$

EXERCICE 27.

Déterminer les solutions à *valeurs complexes* des équations suivantes :

$$\begin{array}{l|l} 1. y'' + y' + y = 0 & 3. y'' - iy' + 2y = 0 \\ 2. y'' - 2iy' - y = 0 & 4. y'' + 4y' + 4y = 0 \end{array}$$

EXERCICE 28.

Résoudre sur \mathbb{R} les problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{array}{l} 1. y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0 \\ 2. y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \\ 3. y'' - 3y' + 2y = x, \quad y(0) = y'(0) = 1 \\ 4. y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{array}$$

EXERCICE 29.

Résoudre l'équation suivante

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x).$$

EXERCICE 30.

Résoudre les équations suivantes

$$\begin{array}{l} 1. y'' - 3y' + 2y = x; \\ 2. y'' - 3y' + 2y = e^{2x}; \\ 3. y'' - 3y' + 2y = e^{2x}; \\ 4. y'' - 3y' + 2y = xe^x; \\ 5. y'' - 3y' + 2y = \operatorname{ch}(x). \end{array}$$

EXERCICE 31.

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - (1+i)y' - 2(1+i)y = 0$.
2. Donner l'unique solution f vérifiant $f(0) = f'(0) = 1$.

EXERCICE 32.

Soit f une application de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $f + f'' \geq 0$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x + \pi) \geq 0$$

EXERCICE 33.

On considère l'équation différentielle dont on recherche les solutions à *valeurs réelles*

$$(E) : y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin(x)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E) .
2. Déterminer une solution particulière de (E) .
3. Résoudre l'équation (E) .
4. Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

EXERCICE 34.

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t) dt$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t) dt$.
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 et que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = g$.

EXERCICE 35.

On souhaite résoudre l'équation

$$(E) : x^2 y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x^2}$$

sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

- Soient $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $Y(t) = y(e^t)$.
 - Calculer les dérivées y, y' et y'' en fonction de Y, Y' et Y'' .
 - En déduire que y est solution de (E) *si et seulement si* Y est solution d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants (E') que l'on précisera.
- Résoudre (E') sur \mathbb{R} .
- En déduire les solutions de (E) sur I .
- Montrer qu'il existe une unique solution y de (E) sur I telle que $y(1) = y'(1) = 0$.

EXERCICE 36.

Résoudre l'équation

$$y^2 + x^2 - 2yy' = 0$$

en effectuant le changement de fonction $z = y^2$.

EXERCICE 37.

Résoudre l'équation

$$y' = e^{x+y}$$

en posant $z = e^{-y}$.

EXERCICE 38.

Soit (E) l'équation $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0$.

- Etablir qu'une *éventuelle* solution polynomiale et non nulle de (E) est nécessairement de degré deux.
- Trouver une solution polynomiale et non nulle p de (E) .
- Justifier qu'une fonction y deux fois dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} peut s'écrire sous la forme $y = p \times z$ où z est une fonction deux fois dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- Montrer qu'une fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable est solution de (E) *si et seulement si* la fonction $Z = z'$ (où z est définie comme à la question précédente) est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre un (E') à préciser.
- Résoudre (E) .

EXERCICE 39.

Soient $I =]1, +\infty[$ et (E) l'équation

$$(E) : -t^2 y' + ty = y^2.$$

- Soit y une fonction ne s'annulant pas sur I . Prouver que y est solution de (E) *si et seulement si* $z = \frac{1}{y}$ est solution sur I d'une équation différentielle (E') linéaire d'ordre un.
- Résoudre (E') sur I .
- En déduire les solutions de (E) ne s'annulant pas sur l'intervalle I .

EXERCICE 40.

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y'' - xy' - 3y = x^4$$

- Montrer que f est une solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* *si et seulement si* $g : t \mapsto f(e^t)$ est solution sur \mathbb{R} d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.
 - En déduire les solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* .
- Montrer que f est une solution de (E) sur \mathbb{R}_-^* *si et seulement si* $g : t \mapsto f(-e^t)$ est solution sur \mathbb{R} d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.
 - En déduire les solutions de (E) sur \mathbb{R}_-^* .
- Déterminer les solutions de (E) sur \mathbb{R} .

EXERCICE 41.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche l'ensemble S_α des fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^1 vérifiant $f'(x) = -f(\alpha - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une telle fonction est de classe \mathcal{C}^2 .
2. Montrer que les éléments de S_α sont solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
3. Conclure.

EXERCICE 42.

Déterminer les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$$

EXERCICE 43.

Déterminer les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f(-x)$$

EXERCICE 44.

Déterminer les applications f dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = xe^{-x}$$

EXERCICE 45.

Déterminer les applications f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^2 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1.$$

EXERCICE 46.

Soient $\omega \in \mathbb{R}$, $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\begin{cases} x' &= -y + \sin(\omega t) \\ y' &= x - \cos(\omega t) \end{cases}$$

1. Soit $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$t \mapsto x(t) + iy(t).$$

Justifier la dérivabilité de z et montrer que z vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

2. Déterminer x et y .

EXERCICE 47.

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $x^2y' - y = 0$.

EXERCICE 48.

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$.

EXERCICE 49.

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $xy' - y = x$.

EXERCICE 50.

On considère l'équation différentielle (E) : $xy'' - y' - x^3y = 0$.

1. Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* en effectuant le changement de variable $t = x^2$.
2. En déduire les solutions sur \mathbb{R}_-^* .
3. Résoudre (E) sur \mathbb{R} .

EXERCICE 51.

Résoudre sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E) : $ty' + (1-t)y = e^{2t}$.

EXERCICE 52.

Résoudre $y'y^4 = \frac{1}{1+x^2}$.