Devoir surveillé n°5 : corrigé

Problème 1 — Petites Mines 2009

Partie I – Étude d'une fonction

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations arithmétiques sur des fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3(1-2x^2)e^{-2x^2}$$

On en déduit que f est

- strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$;
- strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$;
- strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.

Pour tout $x \neq 0$, $xe^{-x^2} = \frac{x^2e^{-x^2}}{x}$. Par croissances comparées,

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x^2} = 0$$

via le changement de variables $X = x^2$. A fortiori

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = 0$$

Puis, par opérations

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\searrow$	-1

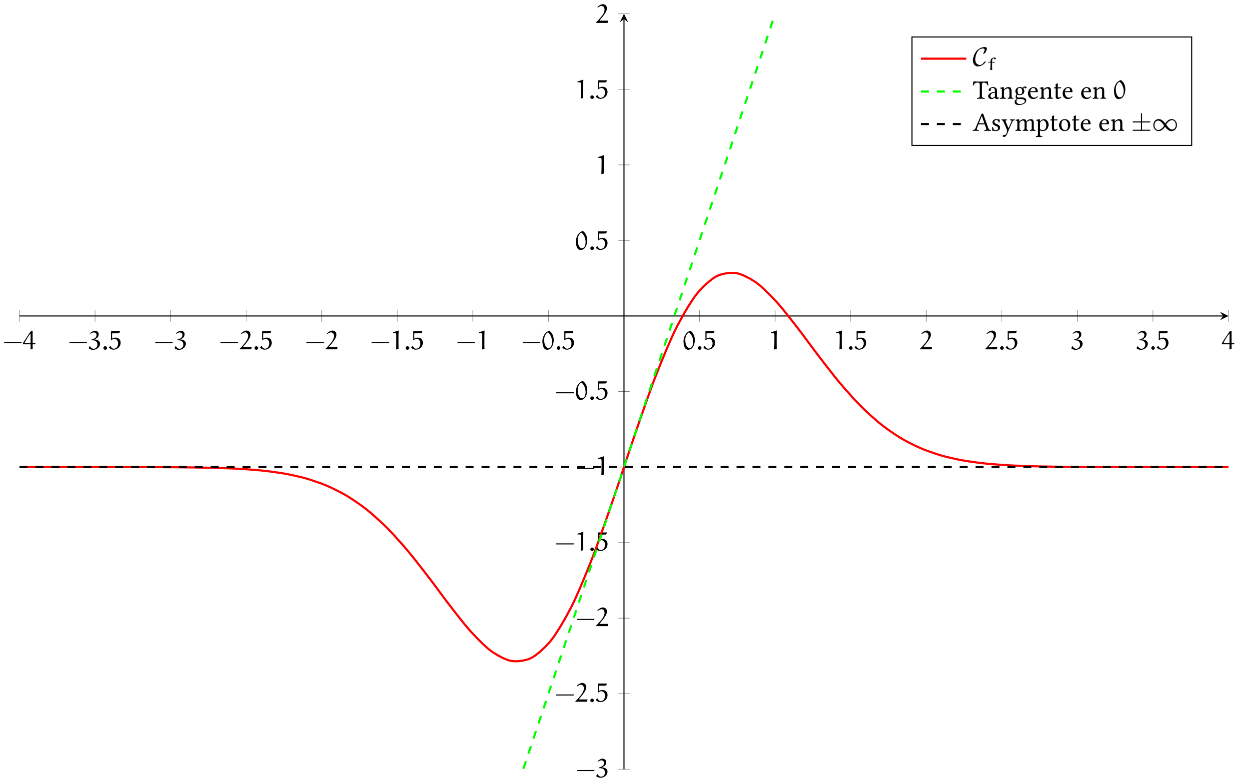
En particulier, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
Puisque $f(-x) + f(x) = -2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0, -1)$.

2. Puisque $f(0) = -1$ et $f'(0) = 3$, $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = 3x - 1$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - (3x-1) = 3x(e^{-x^2} - 1)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} - 1 \leqslant 0$ car $-x^2 \leqslant 0$ et par croissance de exp sur $\mathbb{R}$. Ainsi $f(x) - (3x-1) \leqslant 0$ pour $x \geqslant 0$ et $f(x) - (3x-1) \geqslant 0$ pour $x \leqslant 0$. On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente à gauche de 0 et au-dessous de celle-ci à droite de 0. $\mathcal{C}_f$ admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

3.



4. **a.** f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle admet un développement limité à tout ordre en 0.

b. On sait que $e^u \underset{u\to0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)$. On en déduit que

$$e^{-x^2} \underset{x\to0}{=} = 1-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$$

puis que

$$f(x) \underset{x\to0}{=} -1+3x-3x^3+\frac{3}{2}x^5+o(x^5)$$

Partie II – Étude d'une équation différentielle

1. L'équation différentielle H_n est $xy'-(n-2x^2)y=0$. Sur $\mathbb{R}^*$, elle équivaut à $y'-\left(\frac{n}{x}-2x\right)y=0$.
Une primitive de $x\mapsto\frac{n}{x}-2x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x\mapsto n\ln(x)-x^2$. Les solutions de H_n sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions $x\mapsto\lambda x^n e^{-x^2}$ où λ décrit $\mathbb{R}$. Une primitive de $x\mapsto\frac{n}{x}-2x$ sur $\mathbb{R}_-^*$ est $x\mapsto n\ln(-x)-x^2$. Les solutions de H_n sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions $x\mapsto\lambda(-x)^n e^{-x^2}$ où λ décrit $\mathbb{R}$ ou, de manière plus simple, les fonctions $x\mapsto\lambda x^n e^{-x^2}$ où λ décrit encore $\mathbb{R}$.

2. La fonction constante égale à -1 étant clairement une solution particulière de E_n sur $\mathbb{R}$. On en déduit que les solutions de E_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $x\mapsto-1+\lambda x^n e^{-x^2}$.

3. Supposons dans un premier temps $n=1$. Soit y une solution de E_1 sur $\mathbb{R}$. Comme y est solution de E_1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$y(x)=\begin{cases}-1+\lambda xe^{-x^2} & \text{si } x>0\\ -1+\mu xe^{-x^2} & \text{si } x<0\end{cases}$$

La continuité de y en 0 impose $y(0)=-1$. De plus,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lambda \qquad \text{et} \lim_{x\to0^+}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\mu$$

La dérivabilité de y en 0 impose donc $\lambda = \mu$. On a donc $y(x) = \lambda x e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Réciproquement pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \mapsto -1 + \lambda x e^{-x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et solution de E_1 sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de E_1 sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $x \mapsto -1 + \lambda x e^{-x^2}$ où λ décrit $\mathbb{R}$.

Supposons maintenant $n \geqslant 2$. Comme précédemment toute solution y de E_n sur $\mathbb{R}$ est nécessairement de la forme

$$y(x) = \begin{cases} -1 + \lambda x^n e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -1 + \mu x^n e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Réciproquement, si y est de la forme précédente, elle est bien solution de E_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, elle est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}^*-$, elle est continue en 0 puisque $\lim_{0^+} y = \lim_{0^-} y = 0 = y(0)$ et

$$\lim_{x \to 0^+} y'(x) = \lim_{x \to 0^-} y'(x) = 0$$

donc y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en vertu du théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$.
Remarque. Si on ne connaît pas encore le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, on procède «à la main». On constate que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = 0$$

donc y est dérivable en 0 et $y'(0) = 0$. De plus,

$$\lim_{x \to 0^+} y'(x) = \lim_{x \to 0^-} y'(x) = 0 = y'(0)$$

donc y' est continue en 0. Puisque y' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, y' est continue sur $\mathbb{R}$ i.e. y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. ■
On vérifie alors que y est encore solution de E_n en 0 donc elle est solution de E_n sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de E_n sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $x \mapsto \begin{cases} -1 + \lambda x^n e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -1 + \mu x^n e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Partie III – Étude de deux suites

1. On a $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = \frac{3}{e} - 1 > 0$.
2. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_n'(x) = 3(nx^{n-1} - 2x^{n+1})e^{-x^2} = 3x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$$

On en déduit que f_n est strictement croissante sur $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_n(x) = \left(x^2\right)^{\frac{n}{2}} e^{-x^2} - 1$$

donc, par croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = -1$.
Remarquons que puisque $n \geqslant 2$, $1 \in \left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et puisque f_n est strictement croissante sur cet intervalle, $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \geqslant f_n(1) > 0$.
f est strictement monotone et continue sur chacun des deux intervalles $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$. De plus, $f_n(0) < 0$, $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) > 0$ et $\lim_{+\infty} f < 0$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f_n s'annule une unique fois sur chacun des deux intervalles $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$ en deux réels notés respectivement u_n et v_n.
Puisque $f_n(1) > 0$ et que 1 appartient à l'intervalle $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ sur lequel f_n est strictement croissante, $u_n > 1$. Par ailleurs $v_n > \sqrt{\frac{n}{2}} \geqslant 1$ puisque $n \geqslant 2$.
3. D'après la question précédente, $v_n \geqslant \sqrt{\frac{n}{2}}$ pour tout $n \geqslant 2$. Or $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = +\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ par théorème de minoration.
4. **a.** Par définition, $f_n(u_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$ donc $e^{-u_n^2} = \frac{1}{3u_n^n}$.

   b. $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1} e^{-u_n^2} - 1 = u_n - 1 < 0$.

c. On sait également que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ et que f_{n+1} est strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ contenant u_n et u_{n+1}. D'où $u_n < u_{n+1}$. Ceci étant valable pour tout $n \geqslant 2$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante.

d. La suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est également majorée par 1 donc elle converge en vertu du théorème de la limite monotone.

5. **a.** Évident.

b. Supposons $l \neq 1$. On a en fait $l < 1$ puisque (u_n) est majorée par 1. Pour tout $n \geqslant 2$, $f_n(u_n) = 0$ et donc $g_n(u_n) = 0$ d'après la question précédente. Ainsi pour tout $n \in\geqslant 2$.

$$0 = \ln 3 + n\ln(u_n) - u_n^2$$

Puisque $l < 1$, le membre de droite diverge vers $-\infty$, ce qui est absurde.
On en déduit que $l = 1$.

c. Pour tout $n \geqslant 2$, $g_n(u_n) = 0$ et donc

$$n\ln(1 + w_n) = u_n^2 - \ln 3$$

Puisque (w_n) converge vers 0, $n\ln(1 + w_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} nw_n$. Par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty} u_n^2 - \ln 3 = 1 - \ln 3$ donc

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-\ln 3}{n}$$

Solution 1.

1. On sait que th est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{-\infty} \text{th} = -1$ et $\lim_{+\infty} \text{th} = 1$. Donc th induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur G.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{th}(a)+\operatorname{th}(b)}{1+\operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)} &= \frac{\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a}+\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} b}}{1+\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a}\cdot\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} b}} \\
&= \frac{\operatorname{sh} a\operatorname{ch} b+\operatorname{sh} b\operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} a\operatorname{ch} b+\operatorname{sh} a\operatorname{sh} b} \\
&= \frac{(e^a-e^{-a})(e^b+e^{-b})+(e^b-e^{-b})(e^a+e^{-a})}{(e^a+e^{-a})(e^b+e^{-b})+(e^b-e^{-b})(e^a-e^{-a})} \\
&= \frac{e^{a+b}-e^{-(a+b)}}{e^{a+b}+e^{-(a+b)}} = \operatorname{th}(a+b)
\end{aligned}$$

3. Vérifions que $\star$ est une loi interne sur G. Soit $(x, y) \in G^2$. Par surjectivité de th sur G, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = \operatorname{th} a$ et $y = \operatorname{th} b$. Alors $x \star y = \operatorname{th}(a + b) \in G$.
La loi $\star$ est clairement commutative.
Vérifions que $\star$ est associative. Soit $(x, y, z) \in G^3$. Comme précédemment, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(x, y, z) = (\operatorname{th} a, \operatorname{th} b, \operatorname{th} c)$. Alors

$$(x \star y) \star z = \operatorname{th}(a + b) \star \operatorname{th} c = \operatorname{th}(a + b + c) = \operatorname{th} a \star \operatorname{th}(b + c) = x \star (y \star z)$$

Pour tout $x \in G$, $0 \star x = x \star 0 = x$ et $0 \in G$ donc 0 est neutre pour $\star$.
Enfin, pour tout $x \in G$, $x \star (-x) = (-x) \star x = 0$ et $-x \in G$ donc tout élément de G est inversible pour la loi $\star$.
Tout ceci prouve que $(G, \star)$ est un groupe commutatif.

4. Tout d'abord $x^{\star 0} = 0 = \frac{(1+x)^0-(1-x)^0}{(1+x)^0+(1-x)^0}$. Supposons que $x^{\star n} = \frac{(1+x)^n-(1-x)^n}{(1+x)^n+(1-x)^n}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
x^{\star(n+1)} &= x \star x^{\star n} \\
&= \frac{x + x^{\star n}}{1 + x\cdot x^{\star n}} \\
&= \frac{x+\frac{(1+x)^n-(1-x)^n}{(1+x)^n+(1-x)^n}}{1+x\cdot\frac{(1+x)^n-(1-x)^n}{(1+x)^n+(1-x)^n}} \\
&= \frac{x(1+x)^n+x(1-x)^n+(1+x)^n-(1-x)^n}{(1+x)^n+(1-x)^n+x(1+x)^n-x(1-x)^n} \\
&= \frac{(1+x)(1+x)^n-(1-x)(1-x)^n}{(1+x)(1+x)^n+(1-x)(1-x)^n} \\
&= \frac{(1+x)^{n+1}-(1-x)^{n+1}}{(1+x)^{n+1}+(1-x)^{n+1}}
\end{aligned}$$

Par récurrence, l'égalité de l'énoncé est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin, si $n \in \mathbb{Z}_-$, en utilisant le fait que $-n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
x^{\star n} &= (x^{\star -1})^{\star(-n)} = (-x)^{\star(-n)} \\
&= \frac{(1+(-x))^{-n} - (1-(-x))^{-n}}{(1+(-x))^{-n} + (1-(-x))^{-n}} \\
&= \frac{\frac{1}{(1-x)^n} - \frac{1}{(1+x)^n}}{\frac{1}{(1-x)^n} + \frac{1}{(1+x)^n}} \\
&= \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}
\end{aligned}$$

Solution 2.

1. **a.** Récurrence évidente.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $$u_n - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} - 2\sqrt{a} + \frac{a}{u_{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_{n-1}} - \frac{\sqrt{u_{n-1}}}{\sqrt{a}}\right)^2 \geqslant 0$$

   c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{u_n} - u_n\right) = \frac{a - u_n^2}{u_n}$$
   Or $u_n > 0$ et $u_n^2 \geqslant a$ d'après la question **1.b** donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite (u_n) est donc décroissante à partir du rang 1.

   d. La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0 ou $\sqrt{a}$ au choix) donc elle converge vers un réel ℓ. Par passage à la limite, $\ell \geqslant \sqrt{a} > 0$ donc on peut affirmer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a}{u_n} = \frac{a}{\ell}$ puis que $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$. On en déduit que $\ell^2 = a$ et, comme $\ell > 0$, $\ell = \sqrt{a}$.

2. On pose $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   a. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part,
   $$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_n - 2\sqrt{a} + \frac{a}{u_n}\right) = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}$$
   D'autre part,
   $$u_{n+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_n + 2\sqrt{a} + \frac{a}{u_n}\right) = \frac{(u_n + \sqrt{a})^2}{2u_n}$$
   On en déduit que
   $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} - \sqrt{a}} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2} = v_n^2$$

   b. Une récurrence évidente montre que $v_n = v_0^{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   c. Puisque $u_0 > 0$ et $a > 0$, $u_0 - \sqrt{a} < u_0 + \sqrt{a}$ et $\sqrt{a} - u - 0 < u_0 + \sqrt{a}$ donc $|u_0 - \sqrt{a}| < u_0 + \sqrt{a} = |u_0 + \sqrt{a}|$. On en déduit que $|v_0| < 1$.

   d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_0^{2^n}$. Or $|v_0| < 1$. On en déduit que (v_n) converge vers 0. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}\sqrt{a}$$
   Donc (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

3. On s'intéresse maintenant à la vitesse de convergence de (u_n) vers sa limite.

   a. La suite $(u_n + \sqrt{a})$ est convergente donc bornée. Ainsi $u_n + \sqrt{a} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1)$. Or pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_{n-1}^2 \geqslant 0$ donc $v_n = |v_n| = |v_0|^{2^n} = K^{2^n}$ en posant $K = |v_0|$. Or $u_n - \sqrt{a} = v_n(u_n + \sqrt{a})$ donc $u_n - \sqrt{a} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(K^{2^n})$.

   b. Montrer que pour tout $q \in [0, 1[$, $u_n - \sqrt{a} \underset{n\to+\infty}{=} o(q^n)$.

c. Soit $q \in]0,1[$. La question précédente nous dit qu'il suffit de montrer que $K^{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o(q^n)$. C'est évident si $K = 0$. Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{K^{2^n}}{q^n} = \exp\left(2^n \ln K - n \ln q\right)$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n \ln K - n \ln q = 2^n \left(\ln K - \frac{n}{2^n} \ln q\right)$$

Par croissance comparées, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \ln K - \frac{n}{2^n} \ln q = \ln K < 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} 2^n \ln K - n \ln q = -\infty$. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} \frac{K^{2^n}}{q^n} = 0$ i.e. $K^{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o(q^n)$.

4.

```
from math import sqrt

def minimal(a,u0,e) :
^^Iu=u0
^^In=0
^^Iwhile abs(u−a)>e:
^^I^^Iu=(u+a/u)/2
^^I^^In+=1
^^Ireturn n
^^I
```