Devoir surveillé n°06

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

Partie I – Deux suites

On définit deux suites d'entiers (a_n) et (b_n) en posant $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \end{cases}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

1. Prouver avec soin que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \geq n$.

2. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$.

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{b_n^2}$$

4. En déduire que la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\sqrt{2}$.

5. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) suivent la même relation de récurrence homogène d'ordre deux à coefficients constants.

6. En déduire les termes généraux des suites (a_n) et (b_n).

7. A l'aide d'équivalents de a_n et b_n, retrouver le résultat de la question **4**.

8. Montrer que $\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}-3\right)^n$.

Partie II – Algorithme de Babylone

On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9. Montrer que la suite (u_n) est strictement positive.

10. Montrer que la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{2}$.

11. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

12. En déduire la convergence et la limite de la suite (u_n).

On pose $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

13. Montrer que $v_{n+1} = v_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire une expression de v_n en fonction de n.

14. En déduire qu'il existe une constante $\mathrm{K} \in [0, 1[$ telle que $u_n - \sqrt{2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\mathrm{K}^{2^n}\right)$.

15. Laquelle des deux suites $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ et (u_n) converge le plus rapidement vers $\sqrt{2}$? Justifier.

Exercice 1 ★★

On pose $f(x) = x + \ln(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.
2. Que peut-on dire du sens de variation de sa bijection réciproque f^{-1} ainsi que des limites de f^{-1} en $-\infty$ et en $+\infty$?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$. On notera x_n cette unique solution.
4. Montrer que la suite (x_n) est croissante.
5. Déterminer la limite de (x_n) en $+\infty$.
6. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
7. Déterminer la limite de la suite de terme général $x_{n+1} - x_n$.
8. On pose $u_n = \dfrac{n - x_n}{\ln(n)}$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

   a. Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},\ u_n - 1 = \frac{\ln(x_n/n)}{\ln(n)}$$

   b. Déterminer la limite de (u_n).

   c. Montrer que
   $$1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

9. En déduire que
   $$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Exercice 2 ★★★

On considère la fonction $f :\ x \in \mathbb{R}_+ \mapsto 1-\sqrt{x}$ ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.
2. Montrer que $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer le sens de variation de f et de $f \circ f$ sur $[0, 1]$.
4. Montrer que f possède un unique point fixe α sur $[0, 1]$ et déterminer celui-ci.
5. Montrer que $u_0 \leq \alpha$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leq \alpha$.
7. Montrer que $u_0 \leq u_2$. En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis qu'elle converge.
8. Montrer que les points fixes de $f \circ f$ sur $[0, 1]$ sont 0, α et 1.
9. En déduire la limite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, puis la convergence et la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et enfin la convergence et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.