Devoir à la maison n°14 : corrigé

Problème 1 — Série de restes

Partie I – Cas d'une série géométrique

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est une série géométrique de raison q. On sait qu'elle converge *si et seulement si* $|q|<1$.

2. On sait que

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = q^{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

3. Remarquons que $\mathrm{R}_n = \frac{q}{1-q}q^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Or la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ converge et a pour somme $\frac{1}{1-q}$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{R}_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{R}_n = \frac{q}{(1-q)^2}$.

Partie II – Cas d'une série de Riemann

4. La série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^\alpha}$ converge *si et seulement si* $\alpha>1$.

5. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_{n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \mathrm{R}_n \leqslant \int_{n}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

ou encore

$$\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{n+1}^{+\infty} \leqslant \mathrm{R}_n \leqslant \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{n}^{+\infty}$$

ou enfin

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \mathrm{R}_n \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

En multipliant par $n^{\alpha-1}$, on obtient

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} \leqslant n^{\alpha-1}\mathrm{R}_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1}$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1}\mathrm{R}_n = \frac{1}{\alpha-1}$ via le théorème des gendarmes. Autrement dit, $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

6. La série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann qui ne converge que si $\alpha-1>1$. Puisque c'est une série à termes positifs, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\mathrm{R}_n$ est de même nature : elle ne converge donc que si $\alpha>2$.

Partie III – Cas de la série harmonique alternée

7. On trouve évidemment $\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la question précédente montre que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-1)^k x^{k-1}\, dx = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k\, dx$$

On reconnaît là la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x$ donc

$$S_n = -\int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}\, dx = -\int_0^1 \frac{dx}{1+x} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n\, dx}{1+x}$$

On calcule aisément

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$$

de sorte que

$$S_n = -\ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$$

9. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$$

donc, par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx \leqslant \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx = 0$. La suite de terme général $(-1)^n$ étant bornée, on a également $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx = 0$. La question précédente permet d'affirmer que (S_n) converge vers $-\ln(2)$. Autrement dit, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ converge et a pour somme $-\ln(2)$.

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n - S_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n\, dx}{1+x}$$

A l'aide d'une intégration par parties,

$$R_n = (-1)^{n+1} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \right]_0^1 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}\, dx}{(n+1)(1+x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}\, dx}{(1+x)^2}$$

A nouveau, pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \leqslant x^{n+1}$$

donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}\, dx}{(1+x)^2} \leqslant \frac{1}{n+2}$$

On en déduit donc que $\int_0^1 \frac{x^{n+1}\, dx}{(1+x)^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. On sait également que $\frac{(-1)^n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{=}\underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi

$$\frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}\, dx}{(1+x)^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et finalement

$$R_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Les constantes recherchées sont donc $\beta = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 2$.

11. La question précédente montre que $R_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2} a_{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Posons $v_n = R_n - \frac{1}{2} a_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge. Par ar ailleurs, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ converge donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_{n+1}$ converge également. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \frac{1}{2} a_{n+1} + v_n$ donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} R_n$ converge comme combinaison linéaire de deux séries convergentes.