Semaine du 09/12 au 13/12

1 Cours

Développements limités

Définitions et propriétés Définition du développement limité d'une fonction. Unicité du développement limité. Une fonction est équivalente au monôme non nul de plus bas degré d'un DL (s'il existe). Lien avec la continuité (existence d'un DL d'ordre 0) et la dérivabilité (existence d'un DL d'ordre 1). DL et parité : le DL en 0 d'une fonction paire (resp. impaire) ne comporte que des puissances paires (resp.impaires).

Intégration et dérivation des DL, formule de Taylor-Young

- Intégration : si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors toute primitive F de f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ et le DL de F s'obtient en intégrant terme à terme celui de f.
- Taylor-Young : Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur un voisinage de a, alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par la formule de Taylor-Young.

Développements limités usuels $\dfrac{1}{1\pm x}$, e^x, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ en 0.

Calculs sur les DL Somme, produit, composition, inverse, quotient.

Application à l'étude de courbes Tangentes, asymptotes et positions locales relatives. Condition nécessaire/suffisante sur les coefficients d'un DL d'ordre 2 pour l'existence d'un extremum local.

Nombres réels

Approximations d'un réel Ensembles de nombres : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$. Partie entière. Approximations décimales. Densité dans $\mathbb{R}$. Caractérisation séquentielle de la densité. $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$. Théorème de la borne supérieure. Caractérisation séquentielle de la borne inférieure et de la borne supérieure. Droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$. Borne supérieure et inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$. Applications à valeurs dans $\mathbb{R}$: majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure.

2 Méthodes à maîtriser

- Déterminer le maximum/minimum M d'une partie $\mathscr{A}$:
  - M est un majorant/minorant de $\mathscr{A}$;
  - $\mathrm{M}\in\mathscr{A}$.
- Déterminer la borne supérieure/inférieure M d'une partie $\mathscr{A}$:
  - M est un majorant/minorant de $\mathscr{A}$;
  - puis au choix :
    - si $\mathrm{M}\in\mathscr{A}$, M est un maximum/minimum donc a fortiori une borne supérieure/inférieure ;
    - tout majorant/minorant de $\mathscr{A}$ est minoré/majoré par M ;
    - il existe une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ convergeant vers M.
- Caractérisation de la partie entière :

$$n=\lfloor x\rfloor \iff x-1<n\leqslant x \iff n\leqslant x<n+1$$

3 Questions de cours

- **Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$**
  Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ à l'aide de la caractérisation séquentielle de la densité.
- **Intégrales de Wallis n°1**
  On pose $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)^n\,\mathrm{d}t$.
  1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n+2)\mathrm{I}_{n+2}=(n+1)\mathrm{I}_n$.
  2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et en déduire que $\mathrm{I}_{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\mathrm{I}_n$.

3. Montrer que la suite $((n+1)\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n+1})$ est constante et en déduire que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

► **Intégrales de Wallis n°2**

On pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\mathrm{I}_n$.
2. En déduire des expressions de I_{2n} et I_{2n+1} à l'aide de factorielles.

► **Caractérisation séquentielle de la densité**

On rappelle la définition de la densité d'une partie A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y \implies]x,y[\cap \mathrm{A} \neq \varnothing$$

Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ **si et seulement si** pour tout $z \in \mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de A de limite z.