Devoir surveillé n°15

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 **E3A Maths 1 MP 2016**

On considère les fonctions F et G définies par :

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{2xt}-1}\,\mathrm{d}t$$

1. Pour un réel $x > 0$, justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2}$$

puis calculer la valeur de cette intégrale (on pourra utiliser le changement de variable $u = 2xt$).

2. Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}^*$ et étudier la parité de F.

3. Soient a et b des réels tels que $0 < a < b$. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$. Que peut-on en déduire ?

4. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'inégalité

$$\frac{1}{1+4n^2x^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2}$$

puis établir que $\mathrm{F}(x) \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2}$.

5. Pour $x > 0$, démontrer de même l'inégalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2x^2} - 1 \leq \mathrm{F}(x)$.

6. En déduire un équivalent de $\mathrm{F}(x)$ lorsque $x \to 0^+$ et la limite de $\mathrm{F}(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

7. Etudier les variations de F puis représenter graphiquement la fonction F sur $\mathbb{R}^*$.

8. Démontrer que G est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

9. Démontrer que G est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

10. Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, établir la convergence de l'intégrale :

$$\mathrm{I}_\alpha = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

et calculer sa valeur.

11. En déduire que quels que soient $t > 0$ et $x > 0$:

$$\frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t)e^{-2nxt}$$

12. En déduire une relation entre F et G (on justifiera la réponse).

Problème 1 – CCINP PSI 2018

Notations et définitions

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.
- Si n_1 et n_2 sont deux entiers naturels, on note $[\![n_1, n_2]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris (au sens large) entre n_1 et n_2.

Objectifs

On s'intéresse dans ce problème à l'équation différentielle $x^2y'' + axy' + by = 0$. La **partie I** est une partie d'algèbre qui traite des solutions polynomiales de cette équations lorsque a et b sont des constantes réelles. Dans la **partie II**, on détermine l'ensemble des solutions de l'équation lorsque a et b sont des constantes réelles. La **partie III** traite des solutions de cette équation lorsque $a = 1$ et b est la fonction carré.

I Endomorphismes

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul et a et b des constantes réelles.

1 On note Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Delta(P) = XP'$$

Calculer $\Delta(X^k)$ pour tout $k \in [\![0; n]\!]$.

2 Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $X^2P'' = \Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P)$, où Id désigne l'endomorphisme identité sur $\mathbb{R}[X]$.

3 Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ.

4 Déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

5 On définit l'application Φ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Phi(P) = X^2P'' + aXP'$$

Montrer que $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$ et en déduire que Φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

6 Montrer que Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.

7 Montrer que Φ_n est diagonalisable.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP$$

8 Montrer que φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, endomorphisme que l'on notera φ_n.
Exprimer φ_n en fonction de Δ_n.

9 Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'équation :

$$s^2 + (a-1)s + b = 0 \tag{1}$$

10 Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières distinctes m_1, m_2 dans $[\![0; n]\!]$.

11 Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in [\![0; n]\!]$.

12 Déterminer le noyau de φ. En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.

II Une équation différentielle

On considère dans cette partie l'équation différentielle

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \tag{2}$$

où a et b sont des constantes réelles.

13 Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de l'équation (2) sur $I =]0, +\infty[$? Et sur $J =]-\infty, 0[$?

14 Montrer que si y est une solution de (2) sur I, alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$u'' + (a-1)u' + bu = 0 \tag{3}$$

15 Réciproquement, soit $t \mapsto g(t)$ une solution de (3) sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $g \circ \ln$ est solution de (2) sur I.

16 Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (3) dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$. En déduire, dans chacun des cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation (2) sur l'intervalle I.

On suppose *dans les deux questions suivantes uniquement* que $a = 1$ et $b = -4$.

17 Montrer que si y est solution de (2) sur J, alors $h = y \circ (-\exp)$ est solution de (3) sur $\mathbb{R}$.

18 Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (2) de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

III Une équation de Bessel

On se propose dans cette partie d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \tag{4}$$

19 Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Série entière dont la somme est solution de (4)

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence R non nul et dont la fonction somme J_0 est solution de (4) sur $]-R, R[$.

20 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} = 0 \\ c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} \end{cases}$$

21 Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$.

22 Soient $r > 0$ et f une autre solution de (4) sur $]0, r[$. Montrer que si (J_0, f) est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, r[$, alors f est bornée au voisinage de 0.

Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k\geq 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k\geq 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = 1.$$

23 Montrer que si $\sum_{k\geq 0} \beta_k x^k$ est solution , alors la suite $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \beta_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

24 Montrer qu'il existe un réel $M >$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $|\alpha_k| \leq \frac{M}{r^k}$.

25 Montrer que (5) admet une unique solution $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence.

26 Que peut-on dire du rayon de convergence $R_\beta > 0$ de la série entière $\sum_{k\geq 0} \beta_k x^k$?

Ensemble des solutions de (4)

27 Soient $r > 0$ et λ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, r[$.
Montrer que la fonction $y\colon x \mapsto \lambda(x)J_0(x)$ est solution de (4) sur $]0, r[$ si et seulement si la fonction $x \mapsto xJ_0^2(x)\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0, r[$.

28 Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?

29 En déduire l'existence d'une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$ telle que :

$$x \mapsto \eta(x) + J_0(x)\ln(x)$$

soit solution de (4) sur un intervalle $]0, R_\eta[$.

30 En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$.