Interrogation écrite n°06

NOM : Prénom : Note :

1. Déterminer le polynôme minimal de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 2 \\ -2 & X-1 & 2 \\ -2 & -2 & X+3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 2 \\ X-1 & X-1 & 2 \\ X-1 & -2 & X+3 \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
&= (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & X-1 & 2 \\ 1 & -2 & X+3 \end{vmatrix} \\
&= (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&= (X-1)(X+1)^2
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$. *Ainsi* -1 *et* 1 *sont les racines de* π_A. *De plus,* π_A *divise* χ_A *et est unitaire donc* $\pi_A = (X-1)(X+1)$ *ou* $\pi_A = (X-1)(X+1)^2$. *On remarque* $A^2 = I_3$ *donc* $(X-1)(X+1)$ *annule* A. *Finalement,* $\pi_A = (X-1)(X+1)$. ■

2. Montrer que $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \cos(x+y) \leq e^{x^2+y^2}\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Posons $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{x^2+y^2} - \cos(x+y)$. *Alors* $F = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$. *L'application* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$ *est polynomiale donc continue sur* $\mathbb{R}^2$. *De plus,* exp *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{x^2+y^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$ *par composition. De même,* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y$ *est polynomiale donc continue sur* $\mathbb{R}^2$ *et* cos *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc* $(x,y) \mapsto \cos(x+y)$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$ *par composition. On en déduit que* f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$. *Finalement,* $F = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ *est fermé en tant qu'image réciproque du fermé* $\mathbb{R}_+$ *par l'application continue* f. ■

3. La fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ admet-elle une limite en $(0,0)$?

Remarquons que $f(t,0) = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ *et* $f(t,t) = \dfrac{1}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$. *Comme* $(t,0) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} (0,0)$ *et* $(t,t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} (0,0)$, f *n'admet pas de limite en* $(0,0)$. ■

4. On considère l'espace vectoriel E des suites réelles bornées que l'on munit de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que l'application D qui à $(u_n) \in \mathrm{E}$ associe la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est continue.

   D *est clairement un endomorphisme de* E. *De plus, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2\|u\|_\infty$$

   donc

$$\|\mathrm{D}(u)\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty$$

   On en déduit que D *est continu via la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.* ■

5. On considère l'espace vectoriel des applications bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme infinie. Montrer que $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0\}$ est un fermé de E.

   Soit (f_n) *une suite de vecteurs de* F *convergeant vers* $f \in \mathrm{E}$. *Alors* $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ *i.e.* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur* $\mathbb{R}$. *A fortiori,* (f_n) *converge simplement vers* f *sur* $\mathbb{R}$. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Alors* $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. *Or pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geq 0$ *donc* $f(x) \geq 0$ *par passage à la limite. Ainsi* $f \in \mathrm{F}$ *et* F *est un fermé de* E. ■

6. Soit f un endomorphisme continu du groupe $\mathbb{R}_+$. Montrer que $f(r) = f(1)r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$ puis que $f(x) = f(1)x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Soit $r \in \mathbb{Q}$. *Il existe donc* $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $r = \dfrac{p}{q}$. *Comme* f *est un endomorphisme de* $(\mathbb{R}, +)$,

$$qf(r) = f(qr) = f(p) = pf(1)$$

   et donc $f(r) = f(1)r$. *Les applications* f *et* $x \mapsto f(1)x$ *sont continues et coïncident sur* $\mathbb{Q}$, *qui est dense dans* $\mathbb{R}$, *donc elles sont égales i.e.* $f(x) = f(1)x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. ■