INTERROGATION ÉCRITE N°02

NOM : Prénom : Note :

---

1. On pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{N}(x, y) = |x^3 + y^3|$. N est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

   On constate que $\mathrm{N}(1, -1) = 0$ *mais* $(1, -1)$ *n'est pas le vecteur nul.* N *n'est donc pas une norme sur* $\mathbb{R}^2$. ∎

2. On pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{N}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$. N est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

   On constate que $\mathrm{N}(0, 1) = 1$ *mais* $\mathrm{N}(0, 2) = 4$. *Ainsi* $\mathrm{N}(2 \cdot (0, 1)) \neq 2\mathrm{N}(0, 1)$*, ce qui contredit l'homogénéité.* N *n'est donc pas une norme sur* $\mathbb{R}^2$. ∎

3. On pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{N}(x, y) = \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2$. N est-elle une norme ? Justifier.

   $\mathrm{N}(1, 0) = \mathrm{N}(0, 1) = 1$ *mais* $\mathrm{N}(1, 1) = 4$. *Ainsi* $\mathrm{N}(1, 1) > \mathrm{N}((1, 0) + (0, 1))$. N *n'est donc pas une norme sur* $\mathbb{R}^2$. ∎

4. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

Première méthode. Remarquons que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. *Ainsi la suite* $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et de limite nulle. La série* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ *converge d'après le critère spécial des séries alternées.*

Deuxième méthode. *On remarque que*

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Ainsi

$$(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *converge d'après le critère spécial des séries alternées* ($(\sqrt{n})$ *converge vers* 0 *en décroissant) et* $\sum \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ *converge par comparaison à une série de Riemann. On en déduit que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ *converge.* ∎

5. Déterminer un équivalent du reste de la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$.

On sait que $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$. *Comme la série* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *est un série à termes positifs convergente,*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

∎

6. Justifier la convergence de la série $\sum 2^{n+2}\cdot 3^{1-n}$ et calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} 2^{n+2}\cdot 3^{1-n}$.

Remarquons que $2^{n+2}\cdot 3^{1-n} = 12\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. *La série* $\sum 2^{n+2}\cdot 3^{1-n}$ *est donc une série géométrique de raison* $\dfrac{2}{3} \in [0,1[$ *donc une série convergente. De plus,*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 2^{n+2}\cdot 3^{1-n} = 12\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 12\left(\frac{2}{3}\right)^2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 12\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 16$$

∎