

Natures de séries

EXERCICE 1.

Déterminer, en fonction de $\alpha > 0$, la nature de la série de terme général

$$u_n = \cos^n(1/n^\alpha).$$

EXERCICE 2.

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n+1}}.$$

EXERCICE 3.

Convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

EXERCICE 4.

Soient a, b et $c > 0$. Etudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = a^{1/n} - \frac{b^{1/n} + c^{1/n}}{2}.$$

EXERCICE 5.

Nature de la série de terme général $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+1/n}$.

EXERCICE 6.

Nature de la série de terme général : $u_n = e^{-\sqrt{n}}$.

EXERCICE 7.

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = (\ln(n))^{-\ln(n)}$.

EXERCICE 8.

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \tan(\pi(7 + 4\sqrt{3})^n)$.

EXERCICE 9.★

Soit $a > 0$. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$.

EXERCICE 10.

Soient a et b dans \mathbb{R} . Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2).$$

EXERCICE 11.

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$.

EXERCICE 12.

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}$ où $a, b > 0$.

EXERCICE 13.

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!}$ suivant les valeurs de $p \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 14.

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive. On pose $S_n = \sum_{p=0}^n u_p$. Comparer la nature des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{S_n}$.

EXERCICE 15.

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ des séries à termes réels strictement positifs. On suppose que $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+2}}{u_n} \leq \frac{v_{n+2}}{v_n}$$

Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

EXERCICE 16.

1. Soient (u_n) et (v_n) de suites de réels strictement positifs vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang. Montrer que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.
2. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

- a. On suppose $\alpha > 1$. À l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.
 - b. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.
 - c. On suppose $\alpha = 1$. Montrer à l'aide d'exemples qu'on ne peut rien conclure en général.
3. Application. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$.

EXERCICE 17.

Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge. Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2$
2. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{1 + a_n}$
3. $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n a_{2n}$
4. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$

EXERCICE 18.

Soient $(a_n)_{n \geq n_0}$ et $(b_n)_{n \geq n_0}$ deux suites complexes. On définit deux suites $(A_n)_{n \geq n_0}$ et $(b_n)_{n \geq n_0}$ de la manière suivante :

$$\forall n \geq n_0, A_n = \sum_{k=n_0}^n a_k, b_n = b_{n+1} - b_n$$

1. Montrer que $\sum_{k=n_0}^n a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$ pour tout $n \geq n_0$.
2. Utiliser la question précédente pour étudier la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n}$.
3. De manière générale, montrer que si (b_n) converge vers 0, si (A_n) est bornée et si $\sum_{n \geq n_0} b_n$ est absolument convergente, alors $\sum_{n \geq n_0} a_n b_n$ est convergente.

EXERCICE 19.

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ des séries à termes strictement positifs vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

1. Montrer que si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge également.
2. Montrer que si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge également.

EXERCICE 20.

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.

1. Montrer que la série $\sum \max(u_n, v_n)$ converge.
2. Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.
3. On suppose que $u_n + v_n$ ne s'annule pas. Montrer que la série $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ converge.

EXERCICE 21.

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série à termes *strictement positifs*.

1. Montrer que si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite $l < 1$, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.
2. Montrer que si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite $l > 1$, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.
3. Montrer à l'aide de deux exemples que l'on ne peut pas conclure si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet 1 pour limite.
4. Étudier la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^n}$.

EXERCICE 22.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et on s'intéresse à la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$.

1. On suppose $\alpha > 1$. Montrer que $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.
2. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.
3. On suppose $\alpha = 1$ et $\beta \leq 0$. Montrer que $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.
4. On suppose $\alpha = 1$ et $\beta > 0$. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 2} u_n$ suivant la valeur de β via une comparaison à une intégrale.

EXERCICE 23.

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On suppose que la suite de terme général $\sqrt[n]{u_n}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. Montrer que si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
3. Montrer à l'aide de deux exemples qu'on ne peut conclure dans le cas $l = 1$.

EXERCICE 24.

On note (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que les suites (S_{2n-1}) et (S_{2n}) sont adjacentes. En déduire la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

EXERCICE 25.

Soit $\sum u_n$ une série réelle.

1. On suppose $\sum u_n$ à termes positifs. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum u_n^2$ converge. La réciproque est-elle vraie ?
2. On ne suppose plus $\sum u_n$ à termes positifs. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que la convergence de la série $\sum u_n$ n'implique pas la convergence de la série $\sum u_n^2$.

EXERCICE 26.

Soit (u_n) une suite décroissante de limite nulle. On note (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum (-1)^n u_n$. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la série $\sum (-1)^n u_n$?

EXERCICE 27.

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right)$.
2. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$.
3. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln \left(\cos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)$.
4. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\operatorname{ch} \left(\frac{1}{\sqrt{3n}} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sqrt{n} \right)$.

EXERCICE 28.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge.
2. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

EXERCICE 29.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à termes positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k u_k$$

A l'aide d'une permutation de sommes, montrer que les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ sont de même nature et, qu'en cas de convergence, elles ont même somme.

Etude asymptotique de sommes partielles ou de restes**EXERCICE 30.**

Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha \leq 1$.

Déterminer un équivalent du reste de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.

EXERCICE 31.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$S_n = C - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

EXERCICE 32.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \ln(n!)$.

1. Par une comparaison à une intégrale montrer que $u_n \sim n \ln n$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{u_n^2}$.
3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$.
4. A l'aide d'une comparaison à une intégrale, déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{u_n}$.

EXERCICE 33.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\ln(n+2^k)}{k!}$ converge et que pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\ln(n+2^k)}{k!} = e \ln n + \sum_{p=1}^m \frac{(-1)^{p+1} e^{2^p}}{p n^p} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$$

EXERCICE 34.

Déterminer un équivalent simple de la somme partielle de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln n$ par comparaison à une intégrale.

Calculs de sommes**EXERCICE 35.**

Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln\left(\cos \frac{\alpha}{2^n}\right)$ et calcul de la somme.

EXERCICE 36.

Soit p un nombre premier. Calculer $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(pn)!}$.

EXERCICE 37.

Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$.

EXERCICE 38.

Montrer la convergence et déterminer la somme de la série $\sum_{n \geq 3} \frac{2n-1}{n^3-4n}$.

EXERCICE 39.

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$ et calcul de la somme.

EXERCICE 40.

A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange prouver la convergence et déterminer la somme des séries suivantes

1. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ pour $x \in \mathbb{R}$;
2. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ pour $x \in [0, 1]$.

EXERCICE 41.

Soit $x \in]-1, 1]$. En remarquant que $\frac{x^k}{k} = \int_0^x t^{k-1} dt$, montrer la convergence de la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \text{ et déterminer sa somme.}$$

On pourra distinguer les cas $x \leq 0$ et $x \geq 0$.

EXERCICE 42.

En remarquant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$, montrer la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et déterminer sa somme.

EXERCICE 43.

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . On pose pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$$I(\lambda) = \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt \quad J(\lambda) = \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt$$

Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} J(\lambda) = 0$.

2. Déterminer deux réels u et v tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^\pi (ux + vx^2) \cos(nx) dx = \frac{1}{n^2}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour $x \in]0, \pi]$,

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

4. Montrer que la fonction $\varphi : x \in]0, \pi] \mapsto \frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est prolongeable en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$.

5. A l'aide des questions précédentes, déterminer la somme de la série de Riemann $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$.

6. En adaptant les deux réels u et v de la question 2, justifier la convergence et déterminer les sommes des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

EXERCICE 44.

Convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2 + 3n}$ et calcul de la somme.

EXERCICE 45.★

Convergence et calcul de la somme de la série de terme général :

$$v_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right).$$

EXERCICE 46.★

Soit $n \geq 1$. On note $p(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture de n en base 10. Etablir la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{p(n)}{n(n+1)}.$$

EXERCICE 47.★★

Convergence et calcul de la somme de la série

$$\sum_{n \geq 2} (-1)^n \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

EXERCICE 48.★★

Convergence et somme de la série

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

EXERCICE 49.

Etudier la convergence et calculer somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1}) \cdots (1+\sqrt{n})}.$$

Applications

EXERCICE 50.

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ k -lipschitzienne avec $k < 1$ et (x_n) une suite telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$.
2. En considérant la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_{n+1} - x_n$, montrer que la suite (x_n) converge.
3. En déduire que f admet un unique point fixe.

EXERCICE 51.

On pose $G(x, y) = \int_0^y \frac{t - [t]}{t(t+x)} dt$ où $[t]$ représente la partie entière de t .

1. Montrer que G est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
2. Montrer que $G(x, y)$ tend vers une limite finie $G(x)$ quand y tend vers $+\infty$.
3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, G(n, y) = \frac{1}{n} \left(\int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt - \int_y^{y+n} \frac{t - [t]}{t} dt \right)$$

4. On note $H(n) = nG(n)$. Montrer que la série de terme général $H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n}$ converge et en déduire un équivalent de $G(n)$.

EXERCICE 52.

Soit $x \in]0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 telle que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_0 q_1 \cdots q_n}$.
2. Montrer que x est rationnel si et seulement si la suite (q_n) est stationnaire.
3. Montrer que e est irrationnel.

EXERCICE 53.

Montrer que le développement décimal d'un réel est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si ce réel est rationnel.

EXERCICE 54.

Soient $k \in [0, 1[$ et $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tels que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En considérant la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n+1} - u_n$, montrer que u converge.