Semaine du 03/04 au 07/04

1 Cours

Equations différentielles linéaires

Révisions de première année Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1. Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants.

Généralités Equation différentielle linéaire. Equation homogène associée. Principe de superposition. Problème de Cauchy.

Solutions d'une équation différentielle linéaire Théorème de Cauchy linéaire. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $x' = a(t)(x)$ avec $a : \mathrm{I} \to \mathcal{L}(\mathrm{E})$ continue est un espace vectoriel de dimension égale $\dim \mathrm{E}$. L'ensemble des solutions l'équation différentielle linéaire $x' = a(t)(x) + b(t)$ avec $a : \mathrm{I} \to \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $b : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ continues est un espace affine de direction l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée.

Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants Rappels sur l'exponentielle d'une matrice/d'un endomorphisme : $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \exp(\mathrm{M})$ est continue ; $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(t\mathrm{M})$ est dérivable de dérivée $t \mapsto \mathrm{M}\exp(t\mathrm{M}) = \exp(t\mathrm{M})\mathrm{M}$; si A et B commutent, $\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \exp(\mathrm{A})\exp(\mathrm{B})$. Solutions d'un système différentiel homogène à coefficients constants. Résolution par réduction matricielle (diagonalisation/trigonalisation).

Méthode de variation des constantes Si $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ est une base de l'espace vectoriel des solutions du système différentiel homogène $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}$, les solutions du système $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t)$ ($\mathrm{A} : \mathrm{I} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} : \mathrm{I} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ continues) sont les fonctions $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{X}_i$ avec les λ_i dérivables sur I et vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \mathrm{X}_i = \mathrm{B}$.

Equations différentielles linéaires scalaires Définition. Lien entre équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n et système différentiel linéaire scalaire d'ordre 1. Problème de Cauchy. Adaptation des résultats précédents aux équations différentielles linéaires scalaires : théorème de Cauchy linéaire, structure et dimension de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène/avec second membre. Variation des constantes et wronskien pour les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2.

Calcul différentiel

Différentiabilité Dérivée directionnelle (selon un vecteur). Dérivées partielles. Différentiabilité (existence d'un DL à l'ordre 1). Lien entre dufférentielle et dérivées directionnelles. Lien entre différentielle et dérivées partielles. Différentielle d'une application constante, linéaire. Gradient et expression dans une base orthonormée.

Opérations sur les applications différentiables Différentielle d'une combinaison linéaire, de $\mathrm{M}(f_1, \dots, f_p)$ où M est multilinéaire et $f_1, \dots, f_p$ sont différentiables. Différentielle d'une composée d'applications différentielles. Dérivée de $f \circ \gamma$ où f est différentiable et γ est dérivable sur un intervalle.

2 Méthodes à maîtriser

- Méthode générale de résolution d'une équation différentielle linéaire : résolution de l'équation homogène puis recherche d'une solution particulière.
- Dans le cas d'un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants : écriture matricielle puis réduction.
- Recherche d'une solution particulière : du flair ou méthode de variation des constantes.
- Recherche de solutions développables en séries entières dans le cas de coefficients polynomiaux.
- Problèmes de raccord pour les équations différentielles non résolues : résolution sur les intervalles où le coefficient de la dérivée d'ordre le plus élevé ne s'annule pas puis recollement en les points «problématiques» : étude de la continuité, de la dérivabilité, ...
- Changement de variable (indiqué par l'énoncé) pour se ramener à une équation différentielle «plus simple».
- Prouver la différentiabilité et calculer la différentielle en exhibant un DL d'ordre 1.
- Calculer la différentielle à l'aide des dérivées partielles.
- Calculer le gradient à l'aide de la différentielle.
- Calculer le gradient à l'aide des dérivées partielles.

3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 31, 52, 57, 58