Devoir surveillé n°03 : corrigé

Problème 1 — Tchebychev : premier contact

Partie I – Étude d'une application

1. Il s'agit de déterminer les solutions éventuelles de l'équation $f(z) = i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$. Cette équation équivaut à $z^2 - iz + 1 = 0$ qui est une équation du second degré dont le discriminant est égal à $-5 = (i\sqrt{5})^2$. Les solutions de cette équation sont donc $\frac{i(1+\sqrt{5})}{2}$ et $\frac{i(1-\sqrt{5})}{2}$ qui sont donc également les antécédents de i par f.

2. On vient de voir que i admettait deux antécédents par f : f n'est donc pas injective.

3. Soit $Z \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à l'équation (E) : $f(z) = Z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Celle-ci équivaut à $z^2 - zZ + 1 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré dont 0 n'est manifestement pas solution. Cette dernière équation admet donc toujours au moins une solution non nulle donc Z admet au moins un antécédent par f. L'application f est donc surjective.

Partie II – Une suite d'applications

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_2(z) &= z\varphi_1(z) - \varphi_0(z) = z^2 - 2\\
\varphi_3(z) &= z\varphi_2(z) - \varphi_1(z) = z^3 - 3z\\
\varphi_4(z) &= z\varphi_3(z) - \varphi_2(z) = z^4 - 4z^2 + 2
\end{aligned}$$

2. Les solutions de l'équation $\varphi_2(z) = 0$ sont clairement $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
De même, les solutions de l'équation $\varphi_3(z) = 0$ sont 0, $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.
L'équation $\varphi_4(z) = 0$ est une équation bicarrée. On la résout classiquement en effectuant le changement de variable $Z = z^2$. Les solutions de l'équation $Z^2 - 4Z + 2 = 0$ sont $2+\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$. On en déduit que les solutions de l'équation $\varphi_4(z) = 0$ sont
$$\sqrt{2+\sqrt{2}},\ -\sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2-\sqrt{2}},\ -\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

3. On note P_n l'assertion
$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \varphi_n(f(z)) = f(z^n)$$
Puisque pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\varphi_0(z) = 2$ et $f(z^0) = f(1) = 2$, P_0 est vraie. De même, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\varphi_1(f(z)) = z + \frac{1}{z}$ et $f(z^1) = z + \frac{1}{z}$ donc P_1 est vraie.
Supposons P_n et P_{n+1} vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,
$$\begin{aligned}
\varphi_{n+2}(f(z)) &= f(z)\varphi_{n+1}(f(z)) - \varphi_n(f(z))\\
&= f(z)f(z^{n+1}) - f(z^n)\\
&= \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\\
&= z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}} = f(z^{n+2})
\end{aligned}$$
Ainsi P_{n+2} est vraie.
Par récurrence double, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. L'équation $f(z^n)=0$ équivaut à $z^{2n}=-1$. L'ensemble des solutions de cette équation est donc l'ensemble des racines $2n^{\text{èmes}}$ de -1, c'est-à-dire
$$\mathrm{A}_n=\left\{e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}},\ k\in[\![0,2n-1]\!]\right\}$$

5. Remarquons que pour $\omega\in\mathrm{A}_n$,
$$\varphi_n(f(\omega))=f(\omega^n)=0$$
Donc les $f(\omega)$ pour $\omega\in\mathrm{A}_n$ sont des solutions de l'équation $\varphi_n(z)=0$. Via une formule d'Euler, ceci signifie que les réels $2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k\in[\![0,2n-1]\!]$ sont des solutions de l'équation $\varphi_n(z)=0$.
Réciproquement, soit $\alpha\in\mathbb{C}$ une solution de l'équation $\varphi_n(z)=0$. Puisque f est surjective, il existe donc $\omega\in\mathbb{C}^*$ tel que $\alpha=f(\omega)$. Alors $f(\omega^n)=\varphi_n(f(\omega))=f(\omega^n)=0$ de sorte que ω est solution de l'équation $f(z^n)=0$. Il existe donc $k\in[\![0,2n-1]\!]$ tel que $\alpha=e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}$. Mais alors $\alpha=f(\omega)=2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.
Finalement l'ensemble des solutions de l'équations $\varphi_n(z)=0$ est
$$\mathrm{B}_n=\left\{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![0,2n-1]\!]\right\}$$
On peut remarquer que certains éléments de B_n figurent en double dans la description précédente. En effet,
$$\mathrm{B}_n=\left\{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}\cup\left\{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![n,2n-1]\!]\right\}$$
On montre alors que les deux ensembles de cette union sont égaux.
$$\begin{aligned}\left\{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![n,2n-1]\!]\right\}&=\left\{2\cos\left(\frac{(2(k+n)+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}\\&\qquad\text{via le "changement d'indice" } k\to k+n\\&=\left\{2\cos\left(\pi+\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}\\&=\left\{-2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}\\&=\left\{-2\cos\left(\frac{(2(n-1-k)+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}\\&\qquad\text{via le "changement d'indice" } k\to n-1-k\\&=\left\{-2\cos\left(\pi-\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}\\&=\left\{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}\end{aligned}$$
Finalement, on peut affirmer que
$$\mathrm{B}_n=\left\{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$$
Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $\frac{(2k+1)\pi}{2n}\in[0,\pi]$ et cos est injective sur $[0,\pi]$ puisqu'elle y est strictement décroissante. Les réels $2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$ sont donc deux à deux distincts. Le nombre de solutions de l'équation $\varphi_n(z)=0$ est donc n.

Remarque. Le lecteur cultivé aura remarqué que les fonctions φ_n sont reliées aux *polynômes de Tchebychev*. ■

Solution 1.

1. Le discriminant de l'équation est $\Delta=-32+24i$. Or
$$\Delta=4(-8+6i)=2^2(1+3i)^2=(2+6i)^2$$
donc les solutions de l'équation sont
$$a=\frac{4-2i+2+6i}{2}=3+2i\qquad\text{et}\qquad b=\frac{4-2i-2-6i}{2}=1-4i$$

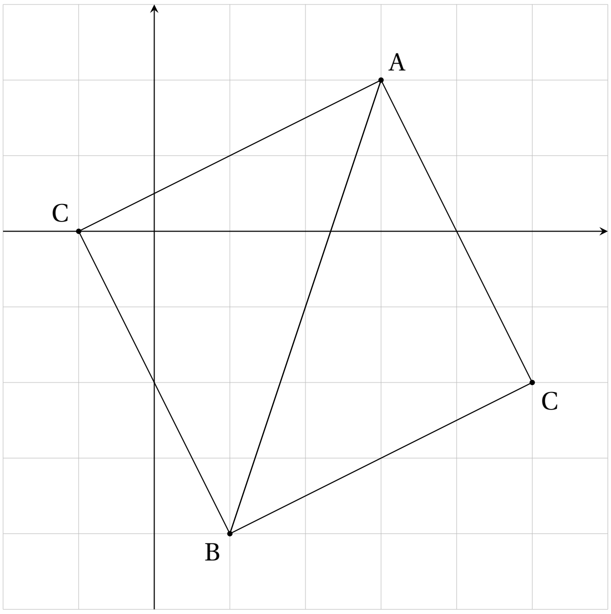
2. Notons c l'affixe du point C. Le point C convient *si et seulement si* CA = CB et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, ce qui équivaut en termes d'affixes à

$$\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = 1 \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Autrement dit, c convient *si et seulement si* $\frac{b-c}{a-c} = \pm i$ autrement dit *si et seulement si*

$$c = \frac{b-ia}{1-i} = 5-2i \qquad \text{ou} \qquad c = \frac{b+ia}{1+i} = -1$$

3. On représente les deux triangles déterminés à la question précédente.



Solution 2.

1.

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \cos(2\theta + \theta) \\
&= \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta \\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 12x^2 - 2x - 4 = 2(2x+1)(3x-2)$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\frac{2}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. D'après l'énoncé, on a $z = e^{i\theta}$. De plus,

$$\begin{aligned}
|z^3-z+2|^2 &= \left(z^3-z+2\right)\overline{\left(z^3-z+2\right)} \\
&= |z|^6+|z|^2+4-2(z+\overline{z})-|z|^2(z^2+\overline{z}^2)+2(z^3+\overline{z}^3) \\
&= 6-2(z+\overline{z})-(z^2+\overline{z}^2)+2(z^3+\overline{z}^3)\text{car } |z|=1 \\
&= 6-2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})-(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta})+2(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}) \qquad \text{car } z=e^{i\theta} \\
&= 6-4\cos\theta-2\cos(2\theta)+4\cos(3\theta) \qquad \text{en vertu d'une relation d'Euler} \\
&= 6-4\cos\theta-2(2\cos^2\theta-1)+4(4\cos^3\theta-3\cos\theta) \\
&= 8-16\cos\theta-4\cos^2\theta+16\cos^3\theta \\
&= 4f(\cos\theta)
\end{aligned}$$

4. Puisque $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta\in\mathbb{R}\}$, on a en vertu de la première question

$$\max_{z\in\mathbb{U}}\varphi(z) = \max_{\theta\in\mathbb{R}} 2\sqrt{f(\cos\theta)}$$

Mais puisque $\operatorname{Im}\cos = [-1,1]$,

$$\max_{z\in\mathbb{U}}\varphi(z) = \max_{x\in[-1,1]} 2\sqrt{f(x)}$$

La question précédente nous renseigne sur les variations de f sur $[-1,1]$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\frac{2}{27}$	$\nearrow$	1

On peut en déduire que

$$\max_{z\in\mathbb{U}}\varphi(z) = 2\sqrt{\frac{13}{4}} = \sqrt{13}$$

Ce maximum est atteint en un élément de $\mathbb{U}$ dont un argument θ est tel que $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ i.e. tel que $\theta \equiv \pm\frac{2\pi}{3}[2\pi]$. On en déduit donc que le maximum de φ est atteint en j et j^2.

Solution 3.

1. Si on avait $\omega = 1$, on aurait $\omega^n = 1$ et donc $-1 = 1$, ce qui est faux. Ainsi $\omega \neq 1$.

2. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\omega \neq 1$. Ainsi

$$\mathrm{A}_n = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{1-e^{i\pi}}{1-\omega} = \frac{2}{1-\omega}$$

3. Classiquement

$$\mathrm{C}_n = \sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Re}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Re}\left(\omega^k\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k\right) = \operatorname{Re}(\mathrm{A}_n)$$
$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Im}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Im}\left(\omega^k\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k\right) = \operatorname{Im}(\mathrm{A}_n)$$

En utilisant la méthode de l'arc-moitié :

$$\mathrm{A}_n = \frac{2}{e^{\frac{i\pi}{2n}}\left(e^{-\frac{i\pi}{2n}}-e^{\frac{i\pi}{2n}}\right)} = \frac{2e^{-\frac{i\pi}{2n}}}{-2i\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{ie^{-\frac{i\pi}{2n}}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{i\left(\cos\frac{\pi}{2n}-i\sin\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2n}+i\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = 1+i\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

On en déduit les résultats voulus.

4. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\omega^{2k} - 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 2ie^{\frac{ik\pi}{n}} \sin\frac{k\pi}{n}$$

Puisque $\frac{k\pi}{n} \in [0, \pi]$, $\sin\frac{k\pi}{n} \geqslant 0$ de sorte que

$$|\omega^{2k} - 1| = 2|i|\left|e^{\frac{ik\pi}{n}}\right|\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$$

Ainsi

$$\mathrm{B}_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = 2\mathrm{S}_n = \frac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$