

EXERCICE 1.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- | | |
|--|---|
| 1. $t \mapsto te^{-3t^2}$ | 7. $t \mapsto \frac{1}{\cos^2 t \sqrt{\tan t}}$ |
| 2. $t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^4}$ | 8. $t \mapsto \frac{1}{t + \sqrt{t}}$ |
| 3. $t \mapsto \frac{1}{\operatorname{th} t}$ | 9. $t \mapsto \frac{\ln(\ln t)}{t}$ |
| 4. $t \mapsto \frac{t^2}{1 + t^3}$ | 10. $t \mapsto e^{e^t + t}$ |
| 5. $t \mapsto \frac{\sin(2t)}{1 + \sin^2 t}$ | 11. $t \mapsto \frac{1}{t + t(\ln t)^2}$ |
| 6. $t \mapsto \tan^2 t$ | 12. $t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$ |

EXERCICE 2.

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer

- $I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt$
- $J_{m,n} = \int_0^{2\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt$
- $K_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \sin(nt) dt$

EXERCICE 3.

Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_0^{\pi/2} x \sin x dx, \quad J = \int_0^1 \sqrt{e^x} dx, \quad K = \int_0^2 \frac{2^x dx}{\sqrt{2+2^x}}.$$

EXERCICE 4.

Calculer les intégrales suivantes

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx, \quad B = \int_0^\pi (\sin x)^3 dx, \quad C = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

EXERCICE 5.

Déterminer une primitive de la fonction $f(x) = (\sin(2x))^3 \cos(3x)$.

EXERCICE 6.

Calculer l'intégrale $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(2x)^3 dx$.

EXERCICE 7.★

Calculer, en fonction du nombre réel x , l'intégrale suivante

$$f(x) = \int_0^1 |x - t| dt.$$

EXERCICE 8.★

Calculer :

- $I = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2(t)} dt$ en posant $u = \tan(t)$;
- $J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + 1}$ en posant $u = \sqrt{x}$;
- $K = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1} dx$ en posant $u = \sqrt{e^x - 1}$;
- $L = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2 + u + 1}}$ en posant $x = \sqrt{u^2 + u + 1} - u$;
- $M = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos(x)}$ en posant $u = \sin(x)$;
- $N = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin(x)}$ en posant $u = \cos(x)$;
- $O = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \sin^3(x) dx$ en posant $u = \cos(x)$;
- $P = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x) dx}{1 + \cos^2(x)}$ en posant $u = \cos(2x)$;
- $Q = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ en posant $x = \cos(2u)$;
- $R = \int_0^1 \frac{\sqrt{x} + x^{1/4}}{\sqrt{x} + 1} dx$ en posant $u = x^{1/4}$.

EXERCICE 9.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et H la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \alpha \cos x + \sin x + 2$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que H ne s'annule pas.
2. On suppose la condition précédente satisfaite et on pose pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{H(t)}$. Justifier que F est bien définie et continue sur \mathbb{R} et donner une expression de $F(x)$ pour $x \in]-\pi, \pi[$.
3. Calculer l'intégrale $F(2\pi)$.

EXERCICE 10.

Soient α et β deux réels strictement positifs. On définit une fonction f par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\alpha + \beta \cos^2 x}$$

1. Justifier que f admet des primitives sur \mathbb{R} . On note F celle qui s'annule en 0.
2. Montrer que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Déterminer une expression de $F(x)$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
4. Calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{49 - 45 \sin^2 t}$.

EXERCICE 11.

Calculer $I = \int_{a^2}^{b^2} x \sqrt{(x - a^2)(b^2 - x)} dx$.

EXERCICE 12.

Calculer

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\int x \arctan^2(x) dx$ 2. $\int e^x \sin^2(x) dx$ 3. $\int \cos(\ln x) dx$ en posant $u = \ln x$ | <ol style="list-style-type: none"> 4. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$ en posant $u = \sqrt{1+x}$. 5. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$ |
|---|--|

EXERCICE 13.

On pose $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt$ et $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$.

1. Justifier que S et C sont bien définies.
2. Montrer que $S = C$ par changement de variable.
3. Que vaut $S + C$? En déduire S et C .
4. En déduire $I = \int_0^1 \frac{dt}{t + \sqrt{1-t^2}}$.

EXERCICE 14.

Calculer

1. $\int_0^{\pi} \frac{\sin t dt}{4 - \cos^2 t}$ en posant $u = \cos t$;
2. $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{dt}{\sin t}$ pour $x \in]0, \pi[$ en posant $u = \cos t$;
3. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t}$ en posant $u = \sin t$;
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t + \cos t}$ en posant $u = \tan \frac{t}{2}$.

EXERCICE 15.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

1. Déterminer une relation entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$.
2. En déduire l'existence et une expression simple de $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x)$.

EXERCICE 16.

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

1. Montrer que (I_n) converge vers 0.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .
3. En déduire que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

EXERCICE 17.

On considère la suite de terme général $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

1. Déterminer la limite de (I_n) .
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .
3. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer S_n en fonction de I_n .
4. En déduire la convergence et la limite de (S_n) .

EXERCICE 18.

Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$I_{n,p} = \int_0^1 t^n (1-t)^p dt$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$

$$I_{n,p} = \frac{n}{p+1} I_{n-1,p+1}$$

2. En déduire une expression de $I_{n,p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 19.★★

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t} dt.$$

1. Trouver une relation de récurrence entre I_{n-1} et I_n .
2. Calculer I_0 puis I_n pour tout $n \geq 0$.
3. Calculer I_n d'une autre manière et montrer que

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+3} \binom{n}{k} = 2^{2n+2} \frac{n!(n+2)!}{(2n+4)!}.$$

EXERCICE 20.

Calculer une primitive des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{l} 1. t \mapsto \frac{1}{1+t+t^2} \\ 2. t \mapsto \frac{2-5t}{1+t^2} \end{array}$$

$$3. t \mapsto \frac{3t+2}{2t^2-4t+3}$$

EXERCICE 21.★

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Etablir la dérivabilité puis calculer la dérivée de la fonction ψ définie par

$$x \mapsto \int_0^1 f(t+x) dt.$$

EXERCICE 22.

Justifier que $f : x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} \frac{t}{1+e^t} dt$ est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.

EXERCICE 23.

Calculer les limites suivantes. On ne cherchera pas à calculer les intégrales.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-x}^x \sin(t^2) dt.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt.$$