Devoir surveillé n°13

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 La variable aléatoire S_n représente la position du pion à l'issue du $n^{\text{ème}}$ déplacement.

2 Tout d'abord, $p_0 = \mathbb{P}(S_0 = 0) = 1$.
Clairement, $X_1(\Omega) = \{-1, 1\}$ donc $p_1 = \mathbb{P}(X_1 = 0) = 0$.
Enfin,

$$\{S_2 = 0\} = \{X_1 + X_2 = 0\} = (\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = -1\}) \sqcup (\{X_1 = -1\} \cap \{X_2 = 1\})$$

Par indépendance de X_1 et X_2,

$$p_2 = \mathbb{P}(S_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = -1) + \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

3 Soit $n \in \mathbb{N}$ impair. Soit $\omega \in \Omega$. Puisque les X_k sont à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et que $-1 \equiv 1[2]$,

$$S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) \equiv n[2]$$

Mais comme n est impair, $S_n(\omega) \equiv 1[2]$. Notamment, l'événement $\{S_n = 0\}$ est impossible. Ainsi $p_n = \mathbb{P}(S_n = 0) = 0$.

4 Comme X_k est à valeurs dans $\{-1, 1\}$, Y_k est à valeurs dans $\{0, 1\}$, de sorte que Y_k suit une loi de Bernoulli.
De plus,

$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2}$$

donc Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

5 Z_n est la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi $\mathcal{B}(1/2)$ donc $Z_n \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$.
De plus,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} (2Y_k - 1) = 2S_n - n$$

6 La formule proposée est clairement vraie pour $m = 0$ puisque $p_0 = 1$.
Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on peut appliquer la question précédente pour affirmer que

$$p_{2m} = \mathbb{P}(S_{2m} = 0) = \mathbb{P}(Z_{2m} = m) = \binom{2m}{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-m} = \binom{2m}{m} \cdot \frac{1}{4^m}$$

7 La suite (p_n) est à valeurs dans $[0, 1]$ (suite de probabilités) donc elle est bornée. Par définition du rayon de convergence, $R_p \geq 1$.

8 Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{1}{2} - k + 1\right) = \prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{2k-1}{2}\right) = \frac{(-1)^m}{2^m} \prod_{k=1}^{m} (2k-1) = \frac{(-1)^m}{2^m} \frac{\prod_{k=1}^{2m} k}{\prod_{k=1}^{m} 2k} = \frac{(-1)^m}{2^m} \frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{(-1)^m (2m)!}{4^m m!}$$

On en déduit que
$$\frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)=\frac{1}{4^m}\cdot\frac{(2m)!}{(m!)^2}=\frac{1}{4^m}\binom{2m}{m}=p_{2m}$$
Cette expression est encore valide lorsque $m=0$ en convenant qu'un produit indexé sur l'ensemble vide vaut 1.

9 D'après un développement en série entière usuel
$$\forall t\in]-1,1[,\ (1+t)^{-1/2}=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}\left[\prod_{k=0}^{m-1}(-1/2-k)\right]t^m=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}\left[\prod_{k=1}^{m}(-1/2-k+1)\right]t^m$$
donc
$$\begin{aligned}\forall x\in]-1,1[,\ (1-x^2)^{-1/2}&=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}\left[\prod_{k=1}^{m}(-1/2-k+1)\right](-x^2)^m\\&=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left[\prod_{k=1}^{m}(-1/2-k+1)\right]x^{2m}\\&=\sum_{m=0}^{+\infty}p_{2m}x^{2m}\\&=\sum_{m=0}^{+\infty}p_mx^m\qquad\text{car } p_{2m+1}=0 \text{ pour tout } m\in\mathbb{N}\\&=f(x)\end{aligned}$$

10 • Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\{T=n\}\subset\{S_n=0\}$, donc $\mathbb{P}(T=n)\leq\mathbb{P}(S_n=0)$.
Or, pour tout n impair, $\mathbb{P}(S_n=0)=0$, donc, pour tout n impair, $q_n=\mathbb{P}(T=n)=0$. En particulier, pour $n=1$, $q_1=0$.
• $S_1=0$ est impossible, donc, par définition de T, on a $T\geq 2$ et $T=2\Leftrightarrow S_2=0$, donc $q_2=\mathbb{P}(T=2)=\mathbb{P}(S_2=0)=p_2=\frac{1}{2}$.

11 • Pour tout $x\in[-1,1]$,
$$|g_n(x)|=|q_nx^n|=\mathbb{P}(T=n)|x|^n\leq\mathbb{P}(T=n)$$
donc $\|g_n\|_\infty^{[-1,1]}\leq\mathbb{P}(T=n)$.
Or $\sum_{n\geq0}\mathbb{P}(T=n)$ converge (et vaut $1-\mathbb{P}(T=+\infty)$ car $T(\Omega)=\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$), donc, par comparaison, $\sum_{n\geq0}\|g_n\|_\infty^{[-1,1]}$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n\geq0}g_n$ converge normalement sur $[-1,1]$.
• Comme $\sum_{n\geq0}g_n$ converge normalement sur $[-1,1]$, $\sum_{n\geq0}g_n$ converge simplement sur $[-1,1]$, donc, en particulier, pour $x=1$, $\sum_{n\geq0}g_n(1)$ converge, ce qui assure que
$$R_q=\sup\{\rho>0\ :\ \sum_{n\geq0}q_n\rho^n\text{ converge}\}\geq 1$$

12 f et g sont deux fonctions développables en série entière au moins sur $]-1,1[$, donc, par produit de Cauchy, fg est développable en série entière au moins sur $]-1,1[$ et, pour tout $x\in]-1,1[$,
$$\begin{aligned}f(x)g(x)&=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}p_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}q_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}p_kq_{n-k}\right)x^n\\&=\left(\sum_{k=0}^{0}p_kq_{n-k}\right)x^0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}p_kq_{n-k}\right)x^n\\&=p_0q_0+\sum_{n=1}^{+\infty}p_nx^n\quad\text{(d'après la relation admise pour tout } n\in\mathbb{N}^*)\\&=0+\sum_{n=1}^{+\infty}p_nx^n\\&=-1+p_0x^0+\sum_{n=1}^{+\infty}p_nx^n\\&=-1+\sum_{n=0}^{+\infty}p_nx^n=-1+f(x).\end{aligned}$$

13 • Comme, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ (d'après la question **9**), la relation obtenue à la question précédente devient :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x^2)^{-1/2} g(x) = (1-x^2)^{-1/2} - 1$$

donc, en multipliant de part et d'autre par $\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{1/2}$, on a bien, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$$

• Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (\alpha - k + 1) x^n$$

donc, pour $\alpha = 1/2$, on a , pour tout $x \in]-1,1[$, comme $(-x^2) \in]-1,1[$,

$$\sqrt{1-x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)(-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n}$$

donc

$$g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n}$$

où le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

14 Pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n}$, donc, par unicité du développement en série entière sur $]-1,1[$, on a :

$$q_0 = 0, \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}^*, q_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)\right) \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}, q_{2n+1} = 0)$$

15 • Comme $\mathrm{T}(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{T} = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{T} = n) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n 1^n = 1 - g(1)$$

• Or, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $[-1,1]$ et $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-1,1]$ (d'après la questin **11**), la fonction $g = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ est continue sur $[-1,1]$.
En particulier, elle est continue en 1, donc

$$\begin{aligned} g(1) &= \lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} 1 - \sqrt{1-x^2} \quad \text{(d'après l'expression trouvée en } \mathbf{13}\text{)} \\ &= 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

• On a donc $\mathbb{P}(\mathrm{T} = +\infty) = 1 - g(1) = 0$, donc l'événement $\mathrm{T} = +\infty$ est quasi impossible, donc on est quasi certain que le pion reviendra à l'origine à un instant donné.

16 *Pour me raccrocher au programme, je vais alors considérer que* $\mathrm{T}(\Omega) = \mathbb{N}$.
$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \mathbb{P}(\mathrm{T} = n)$ est la série génératrice de T.
D'après le cours, T admet une espérance si et seulement si g est dérivable en 1. Or, pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$, donc g est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x \to 1^-}{\to} +\infty$$

g est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et $\lim_{x \to 1^-} g'(x) = +\infty$, donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, g n'est pas dérivable en 1, et, par suite, T n'admet pas d'espérance.

Problème 2

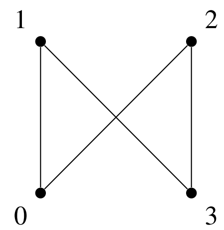
On importe auparavant la bibliothèque `random` pour tout ce qui suit.

```
import random as rd
```

1 On propose une première version à l'aide de l'indication de l'énoncé.

```
def VA(V):
    n = len(V)
    A = [[0]*n for j in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in V[i]:
            A[i][j] = 1
    return A
```

On l'applique au graphe suivant.




```
>>> V= [ [1, 2], [0, 3], [0, 3], [1, 2] ]
>>> VA(V)
[[0, 1, 1, 0], [1, 0, 0, 1], [1, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0]]
```

On propose ensuite une seconde version à l'aide de listes en compréhension.

```
def VA(V):
    n = len(V)
    return [ [1 if j in v else 0 for j in range(n)] for v in V]
```

On l'applique à nouveau au graphe précédent.

```
>>> V= [ [1, 2], [0, 3], [0, 3], [1, 2] ]
>>> VA(V)
[[0, 1, 1, 0], [1, 0, 0, 1], [1, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0]]
```

2 Une première version à l'aide de boucles itératives.

```
def AV(A):
    V = []
    for i in range(len(A)):
        voisin = []
        for j in range(len(A[i])):
            if A[i][j] == 1:
                voisin.append(j)
        V.append(voisin)
    return V
```

```
>>> A = [[0, 1, 1, 0], [1, 0, 0, 1], [1, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0]]
>>> AV(A)
[[1, 2], [0, 3], [0, 3], [1, 2]]
```

Une seconde version à l'aide de listes en compréhension.

```
def AV(A):
    return [ [j for j in range(len(ligne)) if ligne[j]==1] for ligne in A]
```



```
>>> A = [[0, 1, 1, 0], [1, 0, 0, 1], [1, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0]]
>>> AV(A)
[[1, 2], [0, 3], [0, 3], [1, 2]]
```


3 On a clairement $N = \sum_{0\leq i<j\leq n-1} X_{i,j}$.

4 Comme les $X_{i,j}$ sont mutuellement indépendants et de même loi $\mathcal{B}(p)$, $N \sim \mathcal{B}(m,p)$. En particulier, N possède une espérance et une variance. Plus précisément, $\mathbb{E}(N) = mp$ et $\mathbb{V}(N) = mp(1-p)$.

5 On prend garde au fait que la matrice d'adjacence doit être symétrique.

```
def GrapheAleatoire(n, p):
    A = [[0]*n for j in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in range(i+1):
            A[i][j] = A[j][i] = 1 if rd.random()<p else 0
    return A
```

```
>>> import pprint
>>> pprint.pprint(GrapheAleatoire(10, .5))
[[0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0],
 [0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1],
 [1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0],
 [0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1],
 [0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0],
 [1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0],
 [0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1],
 [0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1],
 [0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1],
 [0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0]]
```

6 **6.a** Tout d'abord I_k est à valeurs dans $\{0,1\}$ donc il suit une loi de Bernoulli. De plus, le sommet k est sisolé si et seulement s'il n'est l'extrémité d'aucune arête. Autrement dit,

$$\{I_k = 1\} = \bigcap_{i\neq k}\{X_{i,k} = 0\}$$

Remarque. On considère que $X_{i,k} = X_{k,i}$ pour $k \neq i$.

Les $X_{i,k}$ étant mutuellement indépendantes,

$$\mathbb{P}(I_k = 1) = \prod_{i\neq k} \mathbb{P}(X_{i,k} = 0) = (1-p_n)^{n-1}$$

Finalement $I_k \sim \mathcal{B}(q_n)$ avec $q_n = (1-p_n)^{n-1}$.

6.b Il est clair que $\mathrm{Y}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{I}_k$. Donc Y_n possède une espérance et $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(\mathrm{Y}_k)$. Comme $\mathrm{Y}_k \sim \mathcal{B}(q_n)$, $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_k) = q_n$ puis $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) = nq_n$.

$\boxed{7}$ **7.a** La fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ est concave sur $]-1,+\infty$ puisque $f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} \leq 0$ pour tout $t \in]-1,+\infty[$. Notamment, pour tout $t \in]-1,+\infty[$, $f(t) \leq f'(0)t + f(0)$ i.e. $\ln(1+t) \leq t$ pour tout $t \in]-1,+\infty[$. On en déduit que $\ln(1-x) \leq -x$ pour tout $x \in [0,1[$.
De plus,

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) = nq_n = n(1-p_n)^{n-1} = \exp\left(\ln(n) + (n-1)\ln(1-p_n)\right)$$

Or $\ln(1-p_n) \leq -p_n$ donc

$$\ln(n) + (n-1)\ln(1-p_n) \leq \ln(n) - (n-1)p_n = \ln(n) - (n-1)f(n)\frac{\ln n}{n} = \ln(n)\left(1 - \frac{n-1}{n}f(n)\right)$$

Par hypothèse, $f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc, par opérations sur les limites,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(n)\left(1 - \frac{n-1}{n}f(n)\right) = -\infty$$

Par majoration,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(n) + (n-1)\ln(1-p_n) = -\infty$$

puis, par composition par l'exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) = 0$.

7.b Comme Y_n est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$,

$$0 \leq \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n > 0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = k) \leq \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = k) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = k) = \mathbb{E}(\mathrm{Y}_n)$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n > 0) = 0$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = 0) = 1$. Autrement dit, pour un graphe dense avec un grand nombre de sommets, il est peu probable qu'un sommet soit isolé.

$\boxed{8}$ **8.a** Soient i et j deux sommets distincts. Alors

$$\{\mathrm{I}_i = 1\} \cap \{\mathrm{I}_j = 1\} = \left(\bigcap_{k\notin\{i,j\}} \{\mathrm{X}_{i,k} = 0\}\right) \cap \left(\bigcap_{k\notin\{i,j\}} \{\mathrm{X}_{j,k} = 0\}\right) \cap \{\mathrm{X}_{i,j} = 0\}$$

Par indépendance des $\mathrm{X}_{i,j}$,

$$\mathbb{P}(\{\mathrm{I}_i = 1\} \cap \{\mathrm{I}_j = 1\}) = (1-p_n)^{2n-1}$$

On sait que $\mathrm{Y}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{I}_k$ donc

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n^2) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(\mathrm{I}_k^2) + 2\sum_{0\leq i<j\leq n-1} \mathbb{E}(\mathrm{I}_i\mathrm{I}_j)$$

Puisque I_k est à valeurs dans $\{0,1\}$, $\mathrm{I}_k^2 = \mathrm{I}_k$ donc $\mathbb{E}(\mathrm{I}_k^2) = \mathbb{E}(\mathrm{I}_k) = q_n$. De même, pour $i < j$, $\mathrm{I}_j\mathrm{I}_j$ est à valeurs dans $\{0,1\}$ donc suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$\mathbb{P}(\mathrm{I}_i\mathrm{I}_j = 1) = \mathbb{P}(\{\mathrm{I}_i = 1\} \cap \{\mathrm{I}_j = 1\}) = (1-p_n)^{2n-1}$$

de sorte que $\mathbb{E}(\mathrm{I}_i\mathrm{I}_j) = (1-p_n)^{2n-1}$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n^2) = nq_n + 2\binom{n}{2}(1-p_n)^{2n-1} = n(1-p_n)^{n-1} + n(n-1)(1-p_n)^{2n-1}$$

8.b Posons $\mathrm{P}(t) = \mathbb{E}((\mathrm{U}+t\mathrm{V})^2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par positivité de l'espérance, P est positive sur $\mathbb{R}$. De plus, par linéarité de l'espérance, $\mathrm{P}(t) = \mathbb{E}(\mathrm{U}^2) + 2t\mathbb{E}(\mathrm{UV}) + t^2\mathbb{E}(\mathrm{V}^2)$.
Si $\mathbb{E}(\mathrm{V})^2 \neq 0$, P est polynomiale de degré 2 et de signe constant. Ainsi $\Delta = 4\mathbb{E}(\mathrm{UV})^2 - 4\mathbb{E}(\mathrm{U})^2\mathbb{E}(\mathrm{V}^2) \geq 0$ ou encore $\mathbb{E}(\mathrm{UV})^2 \leq \mathbb{E}(\mathrm{U}^2)\mathbb{E}(\mathrm{V}^2)$.
Si $\mathbb{E}(\mathrm{V}^2) = 0$, alors P est affine de signe constant. En considérant les limites de P en $\pm\infty$, on en déduit que $\mathbb{E}(\mathrm{UV}) = 0 \leq \mathbb{E}(\mathrm{U}^2)\mathbb{E}(\mathrm{V}^2)$.

8.c En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à W et $\mathbb{1}_{\{W>0\}}$, on obtient

$$\mathbb{E}(W\mathbb{1}_{\{W>0\}})^2 \leq \mathbb{E}(W^2)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W>0\}}^2)$$

Comme $\mathbb{1}_{\{W>0\}}$ est à valeurs dans $\{0,1\}$, $\mathbb{1}_{\{W<0\}}^2 = \mathbb{1}_{\{W<0\}}$ et $\mathbb{1}_{\{W<0\}} \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}(W>0))$ donc $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W>0\}}^2) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W>0\}}) = \mathbb{P}(W>0)$.
Ensuite, comme W est positive $\Omega = \{W>0\} \sqcup \{W=0\}$. Si $\omega \in \{W>0\}$, $W(\omega)\mathbb{1}_{\{W>0\}}(\omega) = W(\omega)$ et si $\omega \in \{W=0\}$, $W(\omega)\mathbb{1}_{\{W>0\}} = 0 = W(\omega)$. Finalement, $W\mathbb{1}_{\{W>0\}} = W$ puis $\mathbb{E}(W\mathbb{1}_{\{W>0\}}) = \mathbb{E}(W)$.
On en déduit que $\mathbb{E}(W)^2 \leq \mathbb{E}(W^2)\mathbb{P}(W>0)$, puis $\mathbb{P}(W>0) \geq \dfrac{\mathbb{E}(W)^2}{\mathbb{E}(W^2)}$ car $\mathbb{E}(W^2) > 0$ par hypothèse.

8.d Comme $p_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$. On a vu que

$$\mathbb{E}(Y_n) = n(1-p_n)^{n-1}$$
$$\mathbb{E}(Y_n^2) = n(1-p_n)^{n-1} + n(n-1)(1-p_n)^{2n-1}$$

On en déduit que

$$\frac{\mathbb{E}(Y_n^2)}{\mathbb{E}(Y_n)^2} = \frac{1}{n(1-p_n)^{n-1}} + \frac{(n-1)(1-p_n)}{n}$$

Par opérations, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n-1)(1-p_n)}{n} = 1$. De plus,

$$\frac{1}{n(1-p_n)^{n-1}} = \exp(-\ln(n) - (n-1)\ln(1-p_n))$$

Or

$$(n-1)\ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -np_n$$

donc $(n-1)\ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln n)$ puis $-\ln(n) - (n-1)\ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$. A fortiori,

$$\lim_{n\to+\infty} -\ln(n) - (n-1)\ln(1-p_n) = -\infty$$

puis, par passage à l'exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n(1-p_n)^{n-1}} = 0$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Y_n^2)}{\mathbb{E}(Y_n)^2} = 1$ et donc $\dfrac{\mathbb{E}(Y_n)^2}{\mathbb{E}(Y_n^2)} = 1$.

8.e Comme Y_n est positive, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\mathbb{E}(Y_n)^2}{\mathbb{E}(Y_n^2)} \leq \mathbb{P}(Y_n > 0) \leq 1$$

Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n > 0)$. Remarquons qu'un graphe connexe ne contient pas de sommets isolés. Ainsi, en notant C_n l'événement «le graphe $\mathcal{G}$ est connexe», $C_n \subset \{Y_n = 0\}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \mathbb{P}(C_n) \leq \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(Y_n > 0)$$

On en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n) = 0$. Autrement dit, un graphe peu dense avec un grand nombre de sommets a une faible probabilité d'être connexe.

9 Un sommet i d'un graphe $\mathcal{G}$ est isolé si la liste des voisins est vide. En notant A la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$, ceci correspond à $\sum\limits_{j=0}^{n-1} A_{i,j} = 0$.

```python
def Isoles(n, p):
    A = GrapheAleatoire(n, p)
    isoles = [i for i in range(n) if sum(A[i])==0]
    return len(isoles)
```

```python
>>> [Isoles(10,.1) for _ in range(10)]
[7, 2, 3, 2, 3, 4, 2, 3, 2, 2]
```

$\boxed{10}$ On utilise la loi faible des grands nombres pour utiliser la probabilité demandée. En effet, on sait que si A est un événement et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$, alors, en posant $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{P}(A)| \geq \varepsilon) = 0$$

On prend à nouveau comme paramètres le nombre n de sommets et la probabilité de connexion p.

```python
def ProbabiliteIsole(n, p):
    N = 10000
    return sum([Isoles(n, p)>0 for _ in range(N)]) / N
```

```
>>> ProbabiliteIsole(30,.1)
0.7132
```