

INTERROGATION ÉCRITE N°10

NOM :

Prénom :

Note :

1. On considère la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (-1, 0, 3)$ et $u_3 = (2, 2, -2)$. Calculer le rang de \mathcal{F} . La famille \mathcal{F} est-elle libre? Engendre-t-elle \mathbb{R}^3 ? Est-ce une base de \mathbb{R}^3 ?
2. On note E l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} et pour $f \in E$, on pose $D(f) = f'$. Montrer que D est un endomorphisme de E . Déterminer son noyau et son image. D est-il injectif? surjectif?
3. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Quelles inclusions ou égalités existe-il *toujours* entre les sous-espaces vectoriels $\text{Im}(g \circ f)$, $\text{Ker}(g \circ f)$, $\text{Im } g$, $\text{Ker } g$, $\text{Im } f$, $\text{Ker } f$? On justifiera ces inclusions.

4. Montrer que l'ensemble \mathcal{A} des suites arithmétiques réelles est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Donner une base et la dimension de \mathcal{A} . On justifiera sa réponse.
5. On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 tel que $f((x, y, z)) = (2x - 3y + 4z, -x + y + 5z, 8x - 11y + 2z)$. Déterminer des bases respectives du noyau et de l'image de f .
6. Montrer que la famille $(\text{ch}, \text{sh}, \cos, \sin)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.