

# ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

## 1 Familles de vecteurs

### 1.1 Opérations sur une famille engendrant un sous-espace vectoriel

#### Lemme 1.1

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . Alors

$$\text{vect}(A) = \text{vect}(B) \iff A \subset \text{vect}(B) \text{ ET } B \subset \text{vect}(A)$$

#### Proposition 1.1

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ . Alors  $\text{vect}(u_i)_{i \in I}$  n'est pas modifié si on effectue les opérations suivantes sur la famille  $(u_i)_{i \in I}$  :

- (i) permutation des  $u_i$  ;
- (ii) multiplication de l'un des  $u_i$  par un scalaire non nul ;
- (iii) ajout à l'un des  $u_i$  une combinaison linéaire des autres vecteurs ;
- (iv) suppression d'un  $u_i$  combinaison linéaire des autres vecteurs (notamment les  $u_i$  nuls) ;
- (v) adjonction d'un vecteur combinaison linéaire des  $u_i$ .

#### Définition 1.1 Pivot de Gauss

Les opérations (i), (ii), (iii) de la proposition précédente seront appelées opérations du pivot de Gauss.

#### Exercice 1.1

Soient  $a = (1, 2, 1)$ ,  $b = (1, 3, 2)$ ,  $c = (1, 1, 0)$  et  $d = (3, 8, 5)$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que  $\text{vect}(a, b) = \text{vect}(c, d)$ .

### 1.2 Familles génératrices

#### Définition 1.2 Famille génératrice

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ . On dit que la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est une **famille génératrice** de  $E$  ou encore qu'elle **engendre**  $E$  si tout vecteur de  $E$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des  $u_i$ , autrement dit si  $\text{vect}(u_i)_{i \in I} = E$ .

**REMARQUE.** L'espace vectoriel  $\{0\}$  admet la famille vide pour famille génératrice puisqu'on a vu que  $\text{vect}(\emptyset) = \{0\}$ .

**Exemple 1.1**

Trois vecteurs non coplanaires de l'espace engendrent l'espace vectoriel.

**Exemple 1.2**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Posons  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$  des vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ . Alors  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  engendrent  $\mathbb{K}^n$ .

**Exemple 1.3**

La famille  $(1, X, X^2, \dots, X^n)$  est une famille génératrice de  $\mathbb{K}_n[X]$ .  
La famille  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{K}[X]$ .

**Proposition 1.2**

Une famille génératrice reste génératrice si :

- (i) on effectue les opérations du pivot de Gauss ;
- (ii) on lui ajoute un vecteur (i.e. une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice) ;
- (iii) on lui enlève un vecteur qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille (notamment un vecteur nul).

**Méthode** Montrer qu'une famille est génératrice

Pour montrer qu'une famille finie  $(u_1, \dots, u_n)$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est génératrice, on se donne  $x \in E$  et on montre qu'il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ .

Pour montrer qu'une famille infinie  $(u_i)_{i \in I}$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est génératrice, on se donne  $x \in E$  et on montre qu'il existe  $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$  (famille presque nulle) telle que  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$ .

**1.3 Familles libres, familles liées****Définition 1.3 Famille libre, famille liée (cas d'une famille finie)**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u_1, \dots, u_n \in E$ . On dit que la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est **libre** ou encore que les  $u_i$  sont **linéairement indépendants** si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est **liée** ou encore que les  $u_i$  sont **linéairement dépendants**. De manière équivalente, la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est liée **si et seulement si** l'un des  $u_i$  est combinaison linéaire des autres.

**REMARQUE.** La famille vide  $\emptyset$  est toujours une famille libre.

Une famille qui contient le vecteur nul est liée.

Une famille qui contient plusieurs fois le même vecteur est liée.



**ATTENTION !** Le contraire de « libre » n'est pas « génératrice » mais « liée ».

### Méthode Montrer qu'une famille est libre

Pour montrer qu'une famille  $(u_1, \dots, u_n)$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est libre, on se donne  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E$  et on montre que tous les  $\lambda_i$  sont nuls.

#### Exemple 1.4

Une famille à un vecteur est libre **si et seulement si** ce vecteur est non nul.

Une famille à deux vecteurs est libre **si et seulement si** ces deux vecteurs sont non colinéaires.

Une famille à trois vecteurs est libre **si et seulement si** ces trois vecteurs sont non coplanaires.

#### Exemple 1.5

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Posons  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$  des vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ . Alors  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille libre de  $\mathbb{K}^n$ .

#### Exemple 1.6

La famille  $(1, X, X^2, \dots, X^n)$  est une famille libre de  $\mathbb{K}[X]$ .



**ATTENTION !** Quand on considère une famille de fonctions  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}^I$ , dire que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$  signifie que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) = 0$  **pour tout**  $x \in I$  (le premier zéro désigne la fonction nulle et le second désigne le zéro de  $\mathbb{R}$ ).

#### Exercice 1.2

Montrer que la famille  $(\sin, \cos)$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

#### Définition 1.4 Famille libre, famille liée (cas d'une famille quelconque)

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ . On dit que la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est **libre** ou encore que les  $u_i$  sont **linéairement indépendants** si

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0_E \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est **liée** ou encore que les  $u_i$  sont **linéairement dépendants**. De manière équivalente, la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est liée **si et seulement si** l'un des  $u_i$  est combinaison linéaire des autres.

**REMARQUE.** Pour montrer qu'une famille infinie est libre, il est donc équivalent de montrer que toute sous-famille finie de cette famille est libre.

**REMARQUE.** Si  $(u_i)_{i \in I}$  est une famille libre et si  $(\lambda_i)_{i \in I}$  et  $(\mu_i)_{i \in I}$  sont deux familles presque nulles de scalaires telles que  $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = \sum_{i \in I} \mu_i u_i$ , alors  $\lambda_i = \mu_i$  pour tout  $i \in I$ .

### Exemple 1.7

La famille  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille libre de  $\mathbb{K}[X]$ .

### Proposition 1.3

Une famille libre reste libre si :

- (i) on effectue les opérations du pivot de Gauss ;
- (ii) on lui enlève un vecteur (une sous-famille d'une famille libre est libre) ;
- (iii) on lui ajoute un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

Une famille liée reste liée si :

- (i) on effectue les opérations du pivot de Gauss ;
- (ii) on lui ajoute un vecteur (i.e. une sur-famille d'une famille liée est liée) ;
- (iii) on lui enlève un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille ;

## 1.4 Bases

### Définition 1.5 Base

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ . On dit que la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est une **base** de  $E$  si elle est à la fois génératrice de  $E$  et libre.

**REMARQUE.** La famille vide est une base de l'espace vectoriel nul.

### Exemple 1.8

Une famille de trois vecteurs non coplanaires de l'espace est une base de l'espace vectoriel géométrique.

### Exemple 1.9

$(1, i)$  est une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ .

### Exemple 1.10

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Posons  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$  des vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ . Alors  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $\mathbb{K}^n$ . On l'appelle la **base canonique** de  $\mathbb{K}^n$ .

### Exemple 1.11

La famille  $(1, X, X^2, \dots, X^n)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ . On l'appelle la **base canonique** de  $\mathbb{K}_n[X]$ .  
La famille  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{K}[X]$ .



**ATTENTION !** Il n'y a pas unicité de la base pour un espace vectoriel donné.

### Définition 1.6 Coordonnées dans une base finie

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Soit  $x \in E$ . On appelle **coordonnées** de  $x$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  l'unique  $n$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ .

### Définition 1.7 Coordonnées dans une base quelconque

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Soit  $x \in E$ . On appelle **coordonnées** de  $x$  dans la base  $(e_i)_{i \in I}$  l'unique famille presque nulle  $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$  telle que  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ .

### Proposition 1.4 Base d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels en somme directe d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On suppose qu'il existe une base  $\mathcal{F}$  de  $F$  et une base  $\mathcal{G}$  de  $G$ . Alors la famille  $\mathcal{B}$  obtenue par concaténation des bases  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  est une base de  $F \oplus G$ .

$\mathcal{B}$  est dite **base adaptée** à la somme directe  $F \oplus G$ .



**ATTENTION !** Il est essentiel que  $F$  et  $G$  soient en somme directe. En effet, dans  $\mathbb{R}^3$ , soit  $P$  le plan vectoriel d'équation  $x = 0$  et  $Q$  le plan vectoriel d'équation  $y = 0$ . Il est clair que  $((0, 1, 0), (0, 0, 1))$  est une base de  $P$  et que  $((1, 0, 0), (0, 0, 1))$  est une base de  $Q$ . Or  $P$  et  $Q$  ne sont pas en somme directe puisque  $P \cap Q$  est la droite vectorielle d'équations  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ . Et on voit bien que  $((0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$  n'est pas une base puisqu'elle contient deux fois le même vecteur.

### Proposition 1.5 Base d'une somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels en somme directe d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On suppose qu'il existe des bases  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$  de  $F_1, \dots, F_p$ . Alors la famille  $\mathcal{B}$  obtenue par concaténation des bases  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$  est une base de  $\bigoplus_{i=1}^p F_i$ .

$\mathcal{B}$  est dite **base adaptée** à la somme directe  $\bigoplus_{i=1}^p F_i$ .

### Proposition 1.6 Base d'un produit de deux espaces vectoriels (cas de bases finies)

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels. On suppose que  $E$  et  $F$  admettent des bases respectives  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $(f_1, \dots, f_p)$ . Alors la famille  $((e_1, 0_F), \dots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_p))$  est une base de  $E \times F$ .

### Proposition 1.7 Base d'un produit de deux espaces vectoriels (cas de bases quelconques)

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels. On suppose que  $E$  et  $F$  admettent des bases respectives  $(e_i)_{i \in I}$  et  $(f_j)_{j \in J}$ . Alors la concaténation des familles  $(e_i, 0_F)_{i \in I}$  et  $(0_E, f_j)_{j \in J}$  est une base de  $E \times F$ .

**Proposition 1.8 Base d'un produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels (cas de base finies)**

Soient  $E_1, \dots, E_p$  des espaces vectoriels. On suppose que  $E_1, \dots, E_p$  admettent des bases respectives  $(e_1^1, \dots, e_{n_1}^1), \dots, (e_1^p, \dots, e_{n_p}^p)$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et tout  $i \in \llbracket 1, n_k \rrbracket$ , on pose  $f_i^k = (0_{E_1}, \dots, 0_{E_{k-1}}, e_i^k, 0_{E_{k+1}}, \dots, 0_{E_p})$ . Alors la concaténation des familles  $(f_1^1, \dots, f_{n_1}^1), \dots, (f_1^p, \dots, f_{n_p}^p)$  est une base de  $\prod_{k=1}^p E_p$ .

**Proposition 1.9 Base d'un produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels (cas de bases quelconques)**

Soient  $E_1, \dots, E_p$  des espaces vectoriels. On suppose que  $E_1, \dots, E_p$  admettent des bases respectives  $(e_i^1)_{i \in I_1}, \dots, (e_i^p)_{i \in I_p}$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et tout  $i \in I_k$ , on pose  $f_i^k = (0_{E_1}, \dots, 0_{E_{k-1}}, e_i^k, 0_{E_{k+1}}, \dots, 0_{E_p})$ . Alors la concaténation des familles  $(f_i^1)_{i \in I_1}, \dots, (f_i^p)_{i \in I_p}$  est une base de  $\prod_{k=1}^p E_p$ .

**1.5 Cas particulier de  $\mathbb{K}^n$** **Définition 1.8 Famille échelonnée de vecteurs de  $\mathbb{K}^n$** 

Soit  $(u_1, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $a_i$  (resp.  $b_i$ ) le nombre de zéros initiaux (resp. terminaux) dans le vecteur  $u_i$ . On dit que la famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est **échelonnée** si une des suites finies  $(a_1, \dots, a_n)$  ou  $(b_1, \dots, b_n)$  est strictement monotone.

**Exemple 1.12**

Les vecteurs  $(2, 3, 1, 2)$ ,  $(-2, 1, 0, 0)$  et  $(1, 0, 0, 0)$  forment une famille échelonnée de  $\mathbb{R}^4$ .  
Les vecteurs  $(3, 2, 1, -1)$ ,  $(0, 2, -1, 4)$ ,  $(0, 0, 2, 3)$  et  $(0, 0, 0, 0)$  forment une famille échelonnée de  $\mathbb{R}^4$ .

**Proposition 1.10 Liberté d'une famille échelonnée**

Une famille échelonnée de  $\mathbb{K}^n$  est libre **si et seulement si** elle ne comporte pas le vecteur nul.

**Proposition 1.11**

Toute famille de  $\mathbb{K}^n$  peut être transformée à l'aide des opérations du pivot de Gauss en une famille échelonnée.

**Méthode** Montrer qu'une famille de  $\mathbb{K}^n$  est libre ou liée

Il suffit d'écrire la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la famille et de se ramener à une famille échelonnée en utilisant le pivot de Gauss sur les **colonnes**. Si le vecteur nul apparaît, c'est que la famille est liée. Sinon, elle est libre.

**Exemple 1.13**

Montrer que la famille  $((1, 2, 1), (1, 3, 2), (1, 1, 0))$  est liée.  
Montrer que la famille  $((2, 1, 3, 4), (1, 3, 2, 0), (2, 3, 1, -1))$  est libre.

### Méthode Déterminer une base d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ .

- Si  $F$  est donné sous forme cartésienne (i.e. à l'aide d'un système d'équations linéaires), la méthode « mettre sous forme d'un vect » vu dans le chapitre **Espaces vectoriels** fournit une base de  $F$ .
- Si  $F$  est donné sous forme paramétrique (i.e. à l'aide d'une famille génératrice), la méthode du pivot de Gauss fournit une base de  $F$  après suppression des éventuels vecteurs nuls.

## 2 Dimension d'un espace vectoriel

### Définition 2.1 Dimension finie

On dit qu'un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.

#### Exemple 2.1

Pour  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{K}^n$  est de dimension finie puisque sa base canonique est une famille génératrice finie.

#### Exemple 2.2

$\mathbb{K}[X]$  n'est pas de dimension finie. En effet, supposons qu'il admette une famille génératrice finie  $(P_1, \dots, P_n)$ . Posons  $d = \max_{1 \leq i \leq n} \deg P_i$ . Alors  $X^{d+1}$  n'est pas une combinaison linéaire des  $P_i$ .

### 2.1 Existence de bases

#### Théorème 2.1

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient  $\mathcal{L}$  une famille libre finie de  $E$  et  $\mathcal{G}$  une famille génératrice finie de  $E$ . Alors on peut compléter  $\mathcal{L}$  en une base de  $E$  en lui ajoutant des vecteurs de  $\mathcal{G}$ .

#### Corollaire 2.1 Existence de bases

Tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie possède une base finie.

#### Corollaire 2.2 Théorème de la base incomplète/extraite

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

- (i) On peut compléter toute famille libre finie de  $E$  en une base de  $E$ .
- (ii) On peut extraire de toute famille génératrice finie de  $E$  une base de  $E$ .

#### Exemple 2.3

Soit  $F = \text{vect}((1, -5, 7), (2, 6, 8), (3, 1, 15), (1, 11, 1))$ . Alors  $((1, -5, 7), (2, 6, 8))$  est une base de  $F$ .

**REMARQUE.** Si on admet l'axiome du choix, les théorèmes précédents restent vraie en dimension infinie quitte à considérer des familles infinies.

## 2.2 Définition de la dimension

### Lemme 2.1

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie possédant une famille génératrice à  $n$  vecteurs. Alors toute famille libre de  $E$  comporte au plus  $n$  vecteurs.

### Théorème 2.2 Dimension

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de  $E$  ont même nombre d'éléments. On appelle cet entier la **dimension** de  $E$  (sur  $\mathbb{K}$ ) et on le note  $\dim E$ .

**REMARQUE.** La dimension de l'espace nul est 0.

**REMARQUE.** On appelle **droite vectorielle** un espace vectoriel de dimension 1 et **plan vectoriel** un espace vectoriel de dimension 2.

### Méthode Déterminer la dimension d'un espace vectoriel

Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, il suffit de déterminer une base de  $E$ . Son nombre d'éléments donnera la dimension.

### Exemple 2.4

- ◇ L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 est une droite vectorielle.
- ◇ L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants est un plan vectoriel.

### Exemple 2.5

- ◇ L'ensemble des suites réelles vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants est un plan vectoriel.

### Exemple 2.6

- ◇  $\dim \mathbb{K}^n = n$ .
- ◇  $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$ .
- ◇  $\mathbb{K}[X]$  est de dimension infinie.

**REMARQUE.** Un ensemble  $E$  peut être muni d'une structure d'espace vectoriel pour différents corps de base. La dimension peut alors différer suivant le corps de base. En cas d'ambiguïté, la dimension d'un espace vectoriel  $E$  pour le corps de base  $\mathbb{K}$  est notée  $\dim_{\mathbb{K}} E$ .

### Exemple 2.7

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$  et  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ .



**Exercice 2.1**

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que  $E$  peut être muni d'une structure de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et montrer que  $\dim_{\mathbb{R}} E = 2 \dim_{\mathbb{C}} E$ .

**Corollaire 2.3**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

- (i) Toute famille libre de  $E$  possède au plus  $n$  vecteurs.
- (ii) Toute famille génératrice de  $E$  possède au moins  $n$  vecteurs.
- (iii) Toute famille possédant strictement plus de  $n$  vecteurs est liée.



**ATTENTION !** Les réciproques sont fausses.

- ◇ Une famille d'un espace vectoriel de dimension  $n$  possédant moins de  $n$  vecteurs n'est pas forcément libre.
- ◇ Une famille d'un espace vectoriel de dimension  $n$  possédant plus de  $n$  vecteurs n'est pas forcément génératrice.
- ◇ Une famille liée peut posséder  $n$  vecteurs ou moins.

**Corollaire 2.4**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{B}$  une famille de  $n$  vecteurs. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\mathcal{B}$  est une famille génératrice de  $E$  ;
- (ii)  $\mathcal{B}$  est une famille libre de  $E$  ;
- (iii)  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ .

**Méthode** Prouver qu'une famille est une base en dimension finie

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{B}$  une famille à  $n$  vecteurs. Pour prouver que  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , pas besoin de prouver que  $\mathcal{B}$  est génératrice et libre. Le théorème précédent nous dit qu'il suffit de montrer que  $\mathcal{B}$  est génératrice ou libre (en pratique, on montre plus souvent la liberté). Le travail est donc divisé par deux si on connaît la dimension de l'espace vectoriel.

**Exemple 2.8**

La famille  $((0, 1, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 1))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposition 2.1 Dimension d'un produit**

Soient  $E_1, \dots, E_p$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Alors  $\prod_{k=1}^p E_k$  est de dimension finie et

$$\dim \left( \prod_{k=1}^p E_k \right) = \sum_{k=1}^p \dim E_k.$$

### 3 Dimension et sous-espaces vectoriels

#### 3.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

##### Proposition 3.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ . Alors  $F$  est de dimension finie et  $\dim F \leq \dim E$ . De plus,  $\dim F = \dim E$  si et seulement si  $E = F$ .

##### Exemple 3.1

Les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$  sont le sous-espace nul, les droites vectorielles et  $\mathbb{R}^2$ .  
Les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  sont le sous-espace nul, les droites vectorielles, les plans vectoriels et  $\mathbb{R}^3$ .

##### Exemple 3.2 Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1

Soit  $(E)$  l'équation différentielle  $y' + ay = 0$  où  $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Alors  $\mathcal{S}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^I$  de dimension 1.

##### Exemple 3.3 Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants

Soient  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$  et  $(E)$  l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = 0$ . On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Alors  $\mathcal{S}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$  de dimension 2.

##### Exemple 3.4 Récurrences linéaires homogènes

Soient  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$  et  $\mathcal{S}$  l'ensemble des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  telles que  $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $\mathcal{S}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  de dimension 2.

##### Méthode

##### Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ . Pour montrer que  $F = G$ , il suffit de montrer que  $F \subset G$  (ou  $G \subset F$ ) et que  $\dim F = \dim G$ . Travail divisé par deux.

##### Exercice 3.1

Soient  $a = (1, 2, 1)$ ,  $b = (1, 3, 2)$ ,  $c = (1, 1, 0)$  et  $d = (3, 8, 5)$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que  $\text{vect}(a, b) = \text{vect}(c, d)$ .

##### Définition 3.1 Hyperplan

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . On appelle **hyperplan** de  $E$  tout sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $n - 1$ .

## 3.2 Dimension d'une somme

### Proposition 3.2 Existence d'un supplémentaire

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Alors  $F$  possède un supplémentaire dans  $E$ .



**ATTENTION !** On rappelle qu'il n'y a pas unicité du supplémentaire.

**REMARQUE.** Si on admet l'axiome du choix, l'existence d'un supplémentaire est également garantie en dimension infinie.

### Proposition 3.3 Dimension d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de dimension finie en somme directe d'un espace vectoriel  $E$ . Alors  $F \oplus G$  est de dimension finie et  $\dim F \oplus G = \dim F + \dim G$ .

### Proposition 3.4 Formule de Grassmann

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel  $E$ . Alors  $F + G$  est de dimension finie et

$$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

### Exercice 3.2

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de dimension 3 de  $\mathbb{R}^5$ . Montrer que  $F \cap G \neq \{0\}$ .

### Corollaire 3.1 Caractérisation d'une somme directe

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel  $E$ . Alors  $F$  et  $G$  sont en somme directe **si et seulement si**  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$ .

### Corollaire 3.2 Caractérisation de la supplémentarité

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ . Alors  $F$  et  $G$  sont supplémentaires **si et seulement si** au moins deux des trois assertions suivantes sont vraies :

- (i)  $\dim F + \dim G = \dim E$ .
- (ii)  $F \cap G = \{0_E\}$ .
- (iii)  $F + G = E$ .

### Méthode Prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ . Si on connaît les dimensions de  $E$ ,  $F$  et  $G$ , pour prouver que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ , il suffit de vérifier que  $\dim F + \dim G = \dim E$  et de montrer, **au choix**, que  $F \cap G = \{0_E\}$  **ou**  $F + G = E$  (en pratique, on montre plus souvent que la somme est directe). Travail divisé par deux grâce à la dimension.

**Exercice 3.3**

Soient  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$  et  $G = \text{vect}((0, 1, 0))$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposition 3.5 Dimension d'une somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels**

Soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel  $E$ . Alors

$$\dim \left( \sum_{k=1}^p F_k \right) \leq \sum_{k=1}^p \dim F_k$$

De plus, l'inégalité précédente est une égalité **si et seulement si**  $F_1, \dots, F_p$  sont en somme directe.

**REMARQUE.** Soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Pour montrer que  $E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$ , il suffit de montrer que  $F_1, \dots, F_p$  sont en somme directe et que  $\sum_{k=1}^p \dim F_k = \dim E$ .

## 4 Rang d'une famille de vecteurs

**Définition 4.1 Rang d'une famille de vecteurs**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie). Soit  $\mathcal{F}$  une famille **finie** de vecteurs de  $E$ . Alors  $\text{vect}(\mathcal{F})$  est de dimension finie et sa dimension est appelée le **rang** de  $\mathcal{F}$  noté  $\text{rg } \mathcal{F}$ .

**Proposition 4.1**

Le rang d'une famille finie de vecteurs est invariant par opérations de pivot de Gauss sur cette famille.

**REMARQUE.** Si  $\mathcal{F}$  est une famille de  $p$  vecteurs, alors  $\text{rg } \mathcal{F} \leq p$ .  
 Si  $E$  est de dimension finie  $n$ ,  $\text{rg } \mathcal{F} \leq n$ .  
 Si ces deux conditions sont réunies, on a donc  $\text{rg } \mathcal{F} \leq \min(n, p)$ .

**Exercice 4.1**

Soient  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  deux familles finies d'un espace vectoriels  $E$  de dimension finie. Montrer que :

$$\max(\text{rg } \mathcal{F}_1, \text{rg } \mathcal{F}_2) \leq \text{rg}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \leq \text{rg } \mathcal{F}_1 + \text{rg } \mathcal{F}_2$$

**Proposition 4.2 Rang, liberté, génération**

Soit  $\mathcal{F}$  une famille finie de  $p$  vecteurs d'un espace vectoriel  $E$ .

Alors  $\text{rg } \mathcal{F} = \text{card } \mathcal{F}$  **si et seulement si**  $\mathcal{F}$  est libre.

Si de plus  $E$  est de dimension finie,  $\text{rg } \mathcal{F} = \dim E$  **si et seulement si**  $\mathcal{F}$  engendre  $E$ .

**Méthode** Rang d'une famille de  $\mathbb{K}^n$ 

Soit  $\mathcal{F}$  une famille de  $\mathbb{K}^n$ . On applique la méthode du pivot de Gauss pour déterminer une base de  $\text{vect}(\mathcal{F})$ . Son cardinal est le rang de  $\mathcal{F}$ .

**Exercice 4.2**

Déterminer le rang de la famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^4$  :

$$((1, 2, -3, 0), (-4, -6, 12, 2), (-3, -6, 12, 3), (-2, -4, 6, 0), (-2, -2, 3, 1))$$