Devoir surveillé n°02

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 Tout d'abord, $t \mapsto \ln(\sin t)$ est continue sur $]0,1]$. De plus, pour tout $t \in]0,\pi/2]$,

$$\ln(\sin t) = \ln t + \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)$$

Puisque $\sin t \underset{t\to 0^+}{\sim} t$, $\lim_{t\to 0^+} \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) = 0$. De plus, $\lim_{t\to 0^+} \ln t = -\infty$ donc $\ln(\sin t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \ln t$. Par croissances comparées, $\ln(t) \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$ donc $\ln(\sin t) \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$. Comme $1/2 < 1$, $t \mapsto \ln(\sin t)$ est intégrable sur $]0,1]$. En particulier, l'intégrale L converge.

2 Par le changement de variable $u = \pi - t$,

$$\mathrm{L} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\pi - u))\,\mathrm{d}u = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{J}$$

Par le changement de variable, $u = \pi/2 - t$,

$$\mathrm{L} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\sin(\pi/2 - u))\,\mathrm{d}u = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{K}$$

3

$$\mathrm{K}+\mathrm{L} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1/2) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi\ln 2}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $u = 2t$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u$$

Via la relation de Chasles, on obtient finalement

$$\mathrm{K} + \mathrm{L} = \frac{\pi\ln 2}{2} + \frac{1}{2}(\mathrm{L} + \mathrm{J})$$

4 Puisque $\mathrm{J} = \mathrm{K} = \mathrm{L}$, on obtient $\mathrm{J} = \mathrm{K} = \mathrm{L} = \dfrac{\pi\ln 2}{2}$.

5 Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Pour tout $t \in [0,\pi/2]$, $\sin t \in [0,1]$ donc $\sin^y(t) \le \sin^x(t)$ puis, par croissance de l'intégrale, $\mathrm{W}(y) \le \mathrm{W}(x)$. La fonction W est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

6 **6.a** La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-at}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|\varphi'(t)| = ae^{-at} \le a$. La fonction φ est donc a-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \le a|x-y|$$

ou encore

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |e^{-ax} - e^{-ay}| \le a|x-y|$$

6.b Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Par inégalité triangulaire,

$$|W(x) - W(y)| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin^x(t) - \sin^y(t)| \, dt$$

Or pour $t \in]0, \pi/2]$,

$$|\sin^x(t) - \sin^y(t)| = \left|e^{x\ln(\sin t)} - e^{y\ln(\sin t)}\right|$$

donc en posant $a = -\ln(\sin t) \in \mathbb{R}_+$ dans la question précédente, on obtient

$$|\sin^x(t) - \sin^y(t)| \leq -\ln(\sin t)|x-y|$$

Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$|W(x) - W(y)| \leq -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)|x-y| \, dt = L|x-y| = \frac{\pi\ln 2}{2}|x-y|$$

6.c La question précédente montre que W est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. Elle est notamment continue sur $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{7}$ Les applications $\sin^{x+1}$ et $-\cos$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ de dérivées respectives $(x+1)\cos\sin^x$ et sin donc, par intégration par parties

$$\begin{aligned}
W(x+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{x+1}(t)\sin(t) \, dt \\
&= -\left[\sin^{x+1}(t)\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (x+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)\cos^2(t) \, dt \\
&= (x+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)(1-\sin^2 t) \, dt \\
&= (x+1)(W(x) - W(x+2))
\end{aligned}$$

On en déduit que $W(x+2) = \dfrac{x+1}{x+2}W(x)$.

$\boxed{8}$ **8.a** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. D'après la question précédente,

$$g(x+1) = (x+2)W(x+2)W(x+1) = (x+1)W(x)W(x+1) = g(x)$$

Notamment, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n+1) = g(n)$ donc $g(n) = g(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

8.b Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times [0,1]$. Puisque $n \leq n+x \leq n+1$, on obtient par décroissance de W : $W(n+1) \leq W(n+x) \leq W(n)$. Pour les mêmes raisons, $W(n+2) \leq W(n+1+x) \leq W(n+1)$. On peut multiplier membre à membre ces deux suites d'inégalités car tous leurs membres sont positifs. On obtient alors

$$W(n+1)W(n+2) \leq W(n+x)W(n+1+x) \leq W(n)W(n+1)$$

c'est-à-dire

$$\frac{g(n+1)}{n+2} \leq \frac{g(x+n)}{x+n+1} \leq \frac{g(n)}{n+1}$$

Or on a vu dans les questions précédentes que $g(n) = g(n+1) = \dfrac{\pi}{2}$ et que g était 1-périodique de sorte que $g(x+n) = g(x)$. Ainsi

$$\frac{\pi}{2(n+2)} \leq \frac{g(x)}{x+n+1} \leq \frac{\pi}{2}(n+1)$$

puis

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x+n+1}{n+2} \leq g(x) \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x+n+1}{n+1}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x+n+1}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x+n+1}{n+1} = 1$, on obtient $g(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
g est donc constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$ sur $[0,1]$. Comme g est 1-périodique, g est constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

8.c Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par décroissance de W, on a donc bien $\mathrm{W}(x+2) \leq \mathrm{W}(x+1) \leq \mathrm{W}(x)$. Ceci également que $\frac{x+1}{x+2}\mathrm{W}(x) \leq \mathrm{W}(x+1) \leq \mathrm{W}(x)$. Or $\mathrm{W}(x) > 0$ comme intégrale d'une fonction continue, positive et non constamment nulle sur $[0, \pi/2]$. Il s'ensuit que

$$\frac{x+1}{x+2} \leq \frac{\mathrm{W}(x+1)}{\mathrm{W}(x)} \leq 1$$

Par encadrement, on obtient donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{W}(x+1)}{\mathrm{W}(x)} = 1$, c'est-à-dire $\mathrm{W}(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{W}(x)$.

8.d On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(x+1)\mathrm{W}(x+1)\mathrm{W}(x) = g(x) = \frac{\pi}{2}$. D'après la question précédente, $(x+1)\mathrm{W}(x+1)\mathrm{W}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\mathrm{W}(x)^2$. Ainsi $x\mathrm{W}(x)^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$. Or W est positive sur $\mathbb{R}_+$ donc $\mathrm{W}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

$\boxed{9}$ **9.a** Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $u > -x$. Par concavité de ln, $\ln\left(1+\frac{u}{x}\right) \leq \frac{u}{x}$ puis $x\ln\left(1+\frac{u}{x}\right) \leq u$. Par croissance de l'exponentielle, on obtient alors $\left(1+\frac{u}{x}\right)^x \leq e^u$.

9.b Soit $x \geq 1$. On remarque que pour $t \in [0, \sqrt{x}[$, $-t^2 > -x$. D'après la question précédente,

$$\forall t \in [0, \sqrt{x}],\ \left(1 - \frac{t^2}{x}\right)^x \leq e^{-t^2}$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\int_0^{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{t^2}{x}\right)^x \mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$$

De la même manière,

$$\forall t \in [0, \sqrt{x}],\ \left(1 + \frac{t^2}{x}\right)^x \leq e^{t^2}$$

donc, par décroissance de la fonction inverse,

$$\forall t \in [0, \sqrt{x}],\ e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{x}\right)^{-x}$$

puis, par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{t^2}{x}\right)^{-x} \mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{x}\right)^{-x} \mathrm{d}t$$

Cette denière intégrale converge car $\left(1+\frac{t^2}{x}\right)^{-x} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{2x}}\right)$ et $2x \geq 2 > 1$.

9.c On effectue le changement de variable $t = \sqrt{x}\cos u$ dans la première intégrale :

$$\int_0^{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{t^2}{x}\right)^x \mathrm{d}t = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-\cos^2 u)^x \sqrt{x}\sin u\ \mathrm{d}u = \sqrt{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x+1}(u)\ \mathrm{d}u = \sqrt{x}\mathrm{W}(2x+1)$$

La deuxième intégrale étant généralisée, on vérifie que $u \mapsto \sqrt{x}\frac{\cos u}{\sin u}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $]0, \pi/2]$ sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée est $u \mapsto -\frac{\sqrt{x}}{\sin^2 u}$. Ainsi

$$\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{x}\right)^{-x} \mathrm{d}t = -\sqrt{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(1 + \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}\right)^{-x} \frac{\mathrm{d}u}{\sin^2 u} = \sqrt{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-2}(u)\ \mathrm{d}y = \sqrt{x}\mathrm{W}(2x-2)$$

Ainsi

$$\sqrt{x}\mathrm{W}(2x+1) \leq \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t \leq \sqrt{x}\mathrm{W}(2x-2)$$

9.d On a vu précédement que $W(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$. Ainsi

$$W(2x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} W(2x-2) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

puis

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}W(2x+1) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}W(2x-2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Ceci signifie que l'intégrale G converge et que $G = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.