

# DEVOIR SURVEILLÉ N°06

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1 – D'après CCP PSI 2012

### Notations

On désigne par  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels et par  $\mathbb{C}$  celui des nombres complexes. Etant donné un entier naturel  $n \geq 2$ , pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (resp.  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ) désigne le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées à  $n$  lignes (resp. des matrices colonnes à  $n$  lignes), à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . La notation  $A = (a_{i,j})$  signifie que  $a_{i,j}$  est le coefficient de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  de  $A$ . On note  $A^T$  la transposée d'une matrice  $A$ .

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note  $\det(A)$  le déterminant de  $A$ ,  $\text{tr}(A)$  la trace de  $A$ ,  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  le spectre complexe de  $A$  et si  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ , on note  $E_{\lambda}(A)$  le sous-espace propre des vecteurs  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  qui vérifient  $AX = \lambda X$ . On note également  $I_n$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On note  $\llbracket 1, n \rrbracket$  l'ensemble des entiers naturels  $k$  tels que  $1 \leq k \leq n$ .

Enfin, pour tout nombre complexe  $z$ ,  $|z|$  désigne le module de  $z$ .

On dit qu'une matrice  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifie la propriété (S) lorsque

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} > 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$$

### Partie I –

Dans cette partie, on suppose  $n = 3$ . On note classiquement  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ .

On considère les points P, Q et R d'affixes respectifs 1,  $j$  et  $j^2$ . On note T l'intérieur du triangle PQR, bords non compris.

**I.1**     **I.1.a** Déterminer les équations cartésiennes des droites (PQ), (QR) et (RP).

**I.1.b** En déduire qu'un point d'affixe  $x + iy$  appartient à T si et seulement si  $x$  et  $y$  vérifient les trois inégalités suivantes :

$$2x + 1 > 0 \qquad x - \sqrt{3}y - 1 < 0 \qquad x + \sqrt{3}y - 1 < 0$$

**I.2** Dans cette question, on considère une matrice  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  vérifiant la propriété (S).

**I.2.a** Montrer que 1 est valeur propre de  $A$ .

Dans la suite de la question **I.2**, on suppose que les autres valeurs propres de  $A$  sont des nombres complexes conjugués distincts  $\lambda$  et  $\bar{\lambda}$  avec  $0 < |\lambda| < 1$ . On note  $\lambda = a + ib$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

**I.2.b** Exprimer  $\text{tr}(A)$  et  $\text{tr}(A^2)$  en fonction de  $\lambda$  et  $\bar{\lambda}$ , puis en fonction de  $a$  et  $b$ .

**I.2.c** Montrer les inégalités  $\operatorname{tr}(A) > 0$  et  $\operatorname{tr}(A^2) > a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2$ .

**I.2.d** En déduire l'inégalité  $\operatorname{tr}(A)^2 < 3 \operatorname{tr}(A^2)$ .

**I.2.e** En déduire que  $2a + 1 > 0$  et  $(a - \sqrt{3}b - 1)(a + \sqrt{3}b - 1) > 0$ .

**I.2.f** En déduire que le point d'affixe  $\lambda$  appartient à T.

**I.3** Dans cette question, on se donne  $\lambda = re^{i\theta}$  avec  $r \in ]0, 1[$  et  $\theta \in ]0, \pi[$ . On suppose que le point d'affixe  $\lambda$  appartient à T et on note

$$\alpha = \frac{1 + 2r \cos(\theta)}{3} \quad \beta = \frac{1 + 2r \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)}{3} \quad \gamma = \frac{1 + 2r \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)}{3}$$

**I.3.a** Montrer les égalités suivantes

$$\alpha = \frac{1 + \lambda + \bar{\lambda}}{3} \quad \beta = \frac{1 + j\lambda + j^2\bar{\lambda}}{3} \quad \gamma = \frac{1 + j^2\lambda + j\bar{\lambda}}{3}$$

**I.3.b** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ . Montrer que A vérifie la propriété (S).

**I.3.c** Soit  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $J^2$ . Exprimer la matrice A en fonction de  $I_3$ , J et  $J^2$ .

**I.3.d** Déterminer les valeurs propres, réelles ou complexes, de la matrice J.

**I.3.e** En déduire que les valeurs propres de A sont 1,  $\lambda$  et  $\bar{\lambda}$ .

## Partie II –

Dans toute cette partie,  $A = (a_{i,j})$  désigne une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui vérifie la propriété (S).

**II.1** Soit  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1. Calculer AU et en déduire que 1 est valeur propre de A.

**II.2 Précision sur  $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ .**

**II.2.a** Soit une matrice  $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $\det(B) = 0$ .

**II.2.a.i** Justifier qu'il existe  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  tel que  $X \neq 0$  et  $BX = 0$ .

**II.2.a.ii** Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $|x_k| = \max\{|x_i|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ . Justifier l'inégalité

$$|b_{k,k}| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}|$$

**II.2.b** Soit  $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ . En appliquant la question **II.2.a** à la matrice  $B = A - \lambda I_n$ , montrer qu'il existe  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $|a_{k,k} - \lambda| \leq 1 - a_{k,k}$ . En déduire  $|\lambda| \leq 1$ .

**II.2.c** On suppose que  $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  vérifie  $|\lambda| = 1$  et on note  $\lambda = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ . Déduire de la question **II.2.b** que  $\cos(\theta) = 1$ , puis en déduire  $\lambda$ .

### II.3 Dimension de $E_1(A)$ .

**II.3.a** Montrer que  $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A^T)$ . En comparant le rang de  $A - I_n$  et celui de  $A^T - I_n$ , montrer que les sous-espaces  $E_1(A)$  et  $E_1(A^T)$  ont même dimension.

**II.3.b** Soit  $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ,  $V \neq 0$ , tel que  $A^T V = V$ .

**II.3.b.i** Montrer que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $|v_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j|$ .

**II.3.b.ii** En calculant  $\sum_{i=1}^n |v_i|$ , montrer que toutes ces inégalités sont en fait des égalités.

**II.3.b.iii** On note  $|V| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A^T |V| = |V|$ , puis que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $|v_i| > 0$ .

**II.3.c** **II.3.c.i** Soient  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  des matrices non nulles de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  qui appartiennent à  $E_1(A^T)$ . En considérant la matrice  $X - \frac{x_1}{y_1} Y$ , déterminer la dimension de  $E_1(A^T)$ .

**II.3.c.ii** Justifier qu'il existe un vecteur unique  $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$  qui engendre  $E_1(A^T)$ , tel que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on ait  $\omega_i > 0$  et  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ .

**II.3.c.iii** Montrer que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\sum_{j=1}^n a_{j,i} \omega_j = \omega_i$ .

### II.3.d Bilan des propriétés spectrales de $A$ et de $A^T$ .

Citer les propriétés des vecteurs propres et des sous-espaces propres de  $A$  et de  $A^T$  qui ont été démontrées dans les questions précédentes de la deuxième partie.

**II.4** A l'aide la matrice  $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$  définie en **II.3.c**, on considère l'application  $N$  définie de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, N(X) = \sum_{i=1}^n \omega_i |x_i|$$

Montrer que  $N$  est une norme sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ . Montrer que pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  on a  $N(AX) \leq N(X)$ . Retrouver le résultat de la question **II.2.b** : pour tout  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ ,  $|\lambda| \leq 1$ .

### II.5 Ordre de multiplicité de la valeur propre 1 de $A$ .

A l'aide la matrice colonne  $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ , on considère la forme linéaire  $\Phi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \Phi(X) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i$$

On note  $\ker(\Phi)$  le noyau de  $\Phi$ .

**II.5.a** Montrer que pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  on a  $\Phi(AX) = \Phi(X)$ .

**II.5.b** Justifier que  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \ker(\Phi)$ .

**II.5.c** Soit  $X \in E_\lambda(A)$  avec  $\lambda \neq 1$ . Montrer que  $X \in \ker(\Phi)$ .

**II.5.d** En utilisant les résultats précédents, déterminer l'ordre de multiplicité de la la valeur propre 1 de la matrice A.