Devoir surveillé n°10 : corrigé

Problème 1 — D'après Petites Mines 1995

Partie I –

1. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$.

$$T(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) = \lambda T(P) + \mu T(Q)$$

Ainsi T est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
On remarque que $\Delta = T - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$. Or T et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ donc Δ en est un aussi puisque $\mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. **a.** Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $\deg \Delta(P) \leqslant \max(\deg P(X+1), \deg P) \leqslant n$. Ainsi $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ceci prouve que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ.

b. Soit $P \in \operatorname{Ker} \Delta_n$. Alors $P(X+1) = P(X)$. On pose alors $Q = P - P(0)$ et on prouve par récurrence que $Q(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\mathbb{N}$ est infini, Q est nul de sorte que P est constant. Réciproquement tout polynôme constant appartient au noyau de Δ_n. Finalement $\operatorname{Ker} \Delta_n = \mathbb{R}_0[X]$.

c. D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg} \Delta_n = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \operatorname{Ker} \Delta_n = n+1-1 = n$.
Prouvons que $\operatorname{Im} \Delta_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\deg \Delta_n(X^k) \leqslant k \leqslant n-1$ donc $\Delta_n(X^k) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. De plus,

$$\Delta_n(X^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - X^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k$$

Ainsi $\deg \Delta_n(X^n) \leqslant n-1$ et $\Delta_n(X^n) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Finalement, $\Delta_n(X^k) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Comme $(X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que Δ_n est linéaire, $\operatorname{Im} \Delta_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Enfin, $\dim \operatorname{Im} \Delta_n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$ donc $\operatorname{Im} \Delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3. **a.**

$$\begin{aligned}
\Delta(N_k) &= \frac{1}{k!}\left[\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1}(X-j)\right] \\
&= \frac{1}{k!}\left[\prod_{j=-1}^{k-2}(X-j) - \prod_{j=0}^{k-1}(X-j)\right] \\
&= \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\,[(X+1)-(X-k+1)] \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-j) = N_{k-1}
\end{aligned}$$

b. Puisque $\Delta(N_0) = 0$, on déduit de la question précédente que $\Delta^j(N_k) = N_{k-j}$ si $j \leqslant k$ et que $\Delta^j(N_k) = 0$ si $j > k$.
De plus, on a clairement $N_0(0) = 1$ et $N_l(0) = 0$ pour $l \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $\Delta^j(N_k)(0) = 1$ si $j = k$ et $\Delta^j(N_k) = 0$ si $j \neq k$.

c. Tout d'abord, la famille $(N_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est bien une famille de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, cette famille est une famille de polynômes à degrés étagés : elle est donc libre. Enfin, elle comporte $n+1$ éléments et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. On peut donc affirmer que $(N_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

d. Posons $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{N}_k$. Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Par linéarité de Δ^j,

$$\Delta^j(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta^j(\mathrm{N}_k)$$

On évalue ensuite cette égalité en 0

$$\Delta^j(\mathrm{P})(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta^j(\mathrm{N}_k)(0)$$

D'après la question **I.3.b**, on a alors $a_j = \Delta^j(\mathrm{P})(0)$.

4. **a.** Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\widetilde{\mathrm{T}}(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda f + \mu g)(x+1) = \lambda f(x+1) + \mu g(x+1) = \lambda \widetilde{\mathrm{T}}(f)(x) + \mu \widetilde{\mathrm{T}}(g)(x)$$

Ainsi $\widetilde{\mathrm{T}}(\lambda f + \mu g) = \lambda \widetilde{\mathrm{T}}(f) + \mu \widetilde{\mathrm{T}}(g)$. Ceci prouve que $\widetilde{\mathrm{T}}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
On remarque que $\widetilde{\Delta} = \widetilde{\mathrm{T}} - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$. Or $\widetilde{\mathrm{T}}$ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ donc $\widetilde{\Delta}$ en est un aussi puisque $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b. On a clairement $\widetilde{\mathrm{T}}^k(f)(x) = f(x+k)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c. Puisque $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ et $\widetilde{\mathrm{T}}$ commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\widetilde{\Delta}^j = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \widetilde{\mathrm{T}}^k$$

d. D'après les deux questions précédentes

$$\widetilde{\Delta}^j(f)(0) = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \widetilde{\mathrm{T}}^k(f)(0) = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} f(k)$$

Partie II –

1. **a.** Φ est clairement linéaire. Soit $\mathrm{P} \in \operatorname{Ker} \Phi$. Alors $\deg \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{P}(k) = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Ainsi $\deg \mathrm{P} = n$ et P possède $n+1$ racines : il est donc nul. On en déduit que $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$.
Ainsi Φ est injective. Or $\dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] = \dim \mathbb{R}^{n+1} = n+1$ donc Φ est un isomorphisme.

b. Comme Φ est bijective, le $n+1$-uplet $(f(k))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ admet un unique antécédent par Φ, c'est-à-dire que le problème $(\mathscr{P})$ admet une unique solution P_f.

2. **a.** D'après la question **I.4.d**

$$\widetilde{\Delta}^j(f)(0) = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} f(k) = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \mathrm{P}_f(k) = \widetilde{\Delta}^j(\mathrm{P}_f)(0) = \Delta^j(\mathrm{P}_f)(0)$$

quitte à confondre polynômes et fonctions polynomiales associées.

b. D'après la question **I.3.d** et la question précédente

$$\mathrm{P}_f = \sum_{j=0}^{n} \Delta^j(\mathrm{P}_f)(0) \mathrm{N}_j = \sum_{j=0}^{n} \widetilde{\Delta}^j(f)(0) \mathrm{N}_j$$

3. **a.** Comme x n'est pas entier, $\mathrm{N}(x) \neq 0$, on peut poser $\mathrm{K} = \frac{f(x) - \mathrm{P}_f(x)}{\mathrm{N}(x)}$ de sorte que $\varphi(x) = 0$.
φ s'annule $n+2$ fois sur $[0, n]$ à savoir en les entiers $k \in [\![0, n]\!]$ et en x. Comme φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de Rolle entre ces zéros consécutifs de φ pour montrer que φ' s'annule $n+1$ fois sur l'intervalle $]0, n[$ (remarquer que l'intervalle est ouvert maintenant. On fait l'hypothèse de récurrence suivante :

HR(k) : $\varphi^{(k)}$ s'annule $n+2-k$ fois sur $]0, n[$

HR(1) est vraie. On suppose que HR(k) est vraie pour un certain $k \in [\![1,n]\!]$. Ainsi $\varphi^{(k)}$ s'annule $n+1-k$ fois sur $]0,n[$. Comme $\varphi^{(k)}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de Rolle entre ces zéros consécutifs de $\varphi^{(k)}$ pour montrer que $\varphi^{(k+1)}$ s'annule $n-k$ fois sur $]0,n[$. Ainsi HR($k+1$) est vraie. Par récurrence finie, HR($n+1$) est vraie i.e. $\varphi^{(n+1)}$ s'annule une fois sur $]0,n[$. Il existe donc $c \in]0,n[$ tel que $\varphi^{(n+1)}(c) = 0$.
Ainsi $f^{(n+1)}(c) - \mathrm{P}_f^{(n+1)}(c) - \mathrm{KN}^{(n+1)}(c) = 0$. Puisque $\deg \mathrm{P}_f \leqslant n$, $\mathrm{P}_f^{(n+1)} = 0$. Comme N est un polynôme unitaire de degré $n+1$, $\mathrm{N}^{(n+1)} = (n+1)!$. Ainsi $f^{(n+1)}(c) = \mathrm{K}(n+1)!$. Mais K a été défini tel que $f(x) - \mathrm{P}_f(x) = \mathrm{KN}(x)$, ce qui permet de conclure.

b. L'existence de c dans la question précédente est également garantie lorsque x est entier puisque dans ce cas, $f(x) = \mathrm{P}_f(x)$ et $\mathrm{N}(x) = 0$ (n'importe quel $c \in]0,n[$ convient).
Soit $x \in [0,n]$. On fait l'hypothèse de récurrence suivante

$$\mathrm{HR}(k) : \forall x \in [0,k], \left|\prod_{j=0}^k (x-j)\right| \leqslant k!.$$

HR(1) est vraie puisque pour $x \in [0,1]$, $|x| \leqslant 1$ et $|x-1| \leqslant 1$.
Supposons HR(k) vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0,k+1]$.

- Si $x \in [0,k]$,
$$\left|\prod_{j=0}^{k+1}(x-j)\right| = \left|\prod_{j=0}^{k}(x-j)\right| \cdot (k+1-x) \leqslant k!(k+1) = (k+1)!$$
- Si $x \in [k,k+1]$,
$$\left|\prod_{j=0}^{k+1}(x-j)\right| = x \cdot \left|\prod_{j=1}^{k+1}(x-j)\right| = x \cdot \left|\prod_{j=0}^{k}(x-1-j)\right| \leqslant (k+1)k! = (k+1)!$$

car $x-1 \in [0,k]$ (il est essentiel ici d'avoir $k \geqslant 1$ d'où l'initialisation au rang 1).
Ainsi HR(k) est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (et également vraie pour $k=0$ mais peu importe). En particulier, HR(n) est vraie, c'est-à-dire que pour tout $x \in [0,n]$, $|\mathrm{N}(x)| \leqslant n!$.
En choisissant un réel $c \in]0,n[$ comme dans la question précédente

$$|f(x) - \mathrm{P}_f(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|\mathrm{N}(x)| \leqslant \frac{\mathrm{M}_n}{(n+1)!}n! = \frac{\mathrm{M}_n}{n+1}$$

Problème 2 — Suites implicites et équation différentielle

Partie I – Etude de deux suites implicites

1. $t \mapsto -\dfrac{1}{t}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et exp est de calsse $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de telles fonctions.

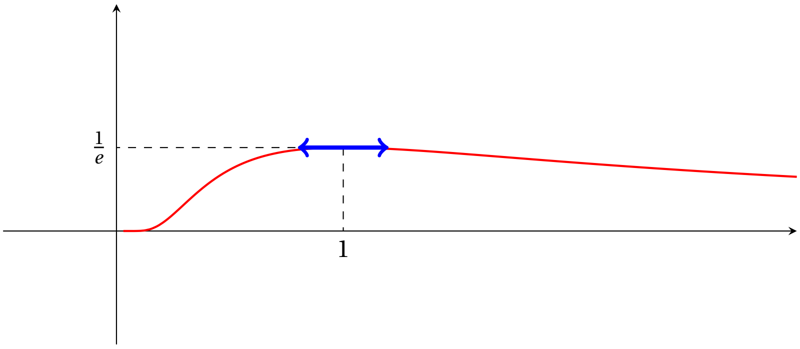
2. Posons $u = \frac{1}{t}$ de sorte que $u \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$. On a alors
$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{u\to+\infty} ue^{-u} = 0$$
par croissances comparées.
De plus, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$$g'(t) = \frac{1}{t^3}e^{-\frac{1}{t}} - \frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}$$
de sorte que
$$\lim_{t\to 0^+} g'(t) = \lim_{u\to+\infty} u^3e^{-u} - u^2e^{-u} = 0$$
à nouveau par croissances comparées.
Puisque g est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que g et g' admettent une limite finie en 0^+, g est prolongebale par continuité en 0^+ en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
Si on note encore g ce prolongement, $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$.

3. On a vu que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(t) = \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^3}(1-t)$$

On obtient sans difficulté $\lim_{+\infty} g = 0$.
On en déduit le tableau de variations puis le graphe suivants.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0



4. **a.** On a donc $\mathrm{H}(x) = \int_1^x te^{-t}\,dt$ pour $x > 0$. On intégre par parties :

$$\mathrm{H}(x) = \left[-te^{-t}\right]_1^x + \int_1^x e^{-t}\,dt = -\left(xe^{-x} - e^{-1}\right) + \left[-e^{-t}\right]_1^x = -(x+1)e^{-x} + 2e^{-1}$$

b. Pour se ramener au voisinage de 0, on pose $x = 1 + u$ de sorte que

$$\mathrm{H}(x) = \mathrm{H}(1+u) = -(2+u)e^{-1}e^{-u} + 2e^{-1}$$

En utilisant le développement limité de l'exponentielle en 0, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(1+u) &\underset{u\to 0}{=} -e^{-1}(2+u)\left(1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + o(u^3)\right) + 2e^{-1}\\ &\underset{u\to 0}{=} e^{-1}(u - \frac{u^3}{6} + o(u^3))\end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathrm{H}(x) \underset{x\to 1}{=} e^{-1}(x-1) - \frac{e^{-1}}{6}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right)$$

5. **a.** L'équation (E_n) équivaut à $g(t) = \frac{1}{n}$. g étant continue et strictement croissante sur $]0,1[$, elle établit une bijection de $]0,1[$ sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$. De même, g étant continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$, elle établit une bijection de $]1,+\infty[$ sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$. Puisque $n \geqslant 3 > e$, $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{e}$. Ainsi l'équation $g(t) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution sur $]0,1[$ et une unique solution sur $]1,+\infty[$. Il en est donc de même pour l'équation (E_n).

b. Soit $n \geqslant 3$. Puisque $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, $g(\alpha_{n+1}) < g(\alpha_n)$. Puisque $\alpha_n, \alpha_{n+1} \in]0,1[$ et que g est croissante sur $]0,1[$, $\alpha_{n+1} < \alpha_n$. Ainsi la suite (α_n) est strictement décroissante. De même, on $g(\beta_{n+1}) < g(\beta_n)$. Puisque $\beta_n, \beta_{n+1} \in]1,+\infty[$ et que g est décroissante sur $]1,+\infty[$, $\beta_{n+1} > \beta_n$. Ainsi la suite (β_n) est strictement croissante.

c. Supposons que (α_n) converge vers $l > 0$. Puisque $g(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par passage à la limite $g(l) = 0$ puisque g est continue en l. Or d'après les variations de g, on a $g > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Il y a donc contradiction.
La suite (α_n) est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers une limite $l \geqslant 0$. On vient de voir qu'on ne peut avoir $l > 0$. C'est donc que $l = 0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.
Pour les mêmes raisons, (β_n) ne peut converger vers un réel $l > 0$.
La suite (β_n) est croissante. Ainsi (β_n) converge ou diverge vers $+\infty$. Or (β_n) est minorée par 1 donc, si elle convergeait vers un réel l, on aurait $l \geqslant 1 > 0$, ce qui est impossible. Ainsi (β_n) diverge vers $+\infty$.

Partie II – Etude d'une équation différentielle

1. En posant $x = 0$ dans (E), on obient $u_0 = y(0) = 0$.

2. En dérivant E, on obtient $x^2 y'' + (2x+1)y' = 2x$. En posant à nouveau $x = 0$ dans cette équation différentielle, on obtient $u_1 = y'(0) = 0$.
En dérivant une nouvelle fois, on obtient $x^2 y''' + (4x+1)y'' + 2y' = 2$. En posant encore une fois $x = 0$, on obtient $u_2 = y''(0) = 2$.

3. Supposons qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $y(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Les deux questions précédentes montrent que $b = c = 0$ et $a = 1$. Or $x \mapsto x^2$ n'est manifestement pas solution de (E). y ne peut donc être polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

4. Posons $z(x) = x^2$ pour $x \geqslant 0$. D'après la formule de Leibniz :

$$(zy')^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{(k)} y^{n+1-k}$$

Or $z^{(k)}$ est nulle pour $k \geqslant 3$. On en déduit :

$$(zy')^{(n)} = zy^{(n+1)} + nz'y^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2} z'' y^{(n-1)}$$

Enfin $z^{(n)}$ est nulle puisque $n \geqslant 3$. On a donc en dérivant n fois (E)

$$x^2 y^{(n+1)}(x) + (1+2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{n-1}(x) = 0$$

pour tout $x \geqslant 0$. En posant $x = 0$, on a

$$u_n + n(n-1)u_{n-1} = 0$$

5. On fait l'hypothèse de récurrence suivante

$$\mathrm{HR}(n) : u_n = (-1)^n n\,((n-1)!)^2$$

HR(2) est vraie puisqu'on a vu que $u_2 = 2$.
Supposons HR(n) vraie pour un certain $n \geqslant 2$. Puisque $u_{n+1} = -n(n+1)u_n$ d'après la question précédente, on a :

$$u_{n+1} = -n(n+1)(-1)^n\,((n-1)!)^2 = (-1)^{n+1}(n+1)\,(n!)^2$$

en utilisant HR(n). Ainsi HR($n+1$) est vraie.
Par récurrence, HR(n) est vraie pour tout $n \geqslant 2$.
Comme y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, y admet un développement limité à tout ordre en 0 donné par la formule de Taylor-Young. On a donc pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} y(x) &\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \\ &\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!} x^k + o(x^n) \\ &\underset{x\to0}{=} \sum_{k=2}^{n} (-1)^k (k-1)!x^k + o(x^n) \end{aligned}$$

car $u_0 = u_1 = 0$. On a également $y(x) \underset{x\to0}{=} o(1)$ et $y(x) \underset{x\to0}{=} o(x)$ pour les ordres 0 et 1.