

## Etude de limites

### EXERCICE 1.

Etudier le comportement en 0 de la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

### EXERCICE 2. ★

On note  $\lfloor x \rfloor$  la partie entière d'un réel  $x$ .

- Déterminer les limites en  $+\infty$  des expressions suivantes :

$$\text{a. } f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor; \quad \text{b. } g(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}.$$

- Déterminer la limite en  $0+$  de :

$$f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

- Montrer que

$$h(x) = \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$$

n'admet pas de limite en  $+\infty$ .

### EXERCICE 3.

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  croissante telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f(x-1)) = 0.$$

Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

### EXERCICE 4.

Reconnaître la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} |\cos(n! \pi x)|^m.$$

### EXERCICE 5.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  croissante telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(2x) - f(x) = 0$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln x} = 0$ .

### EXERCICE 6.

Montrer que toute fonction périodique  $f$  qui admet une limite finie en  $+\infty$  est constante.

### EXERCICE 7.

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  croissante telle que la suite  $(f(n))$  diverge vers  $+\infty$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

### EXERCICE 8.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction décroissante telle que  $f(x) + f(x+1) \sim \frac{1}{x}$ .

- Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- Donner un équivalent de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .

## Continuité ponctuelle

### EXERCICE 9. ★

Etudier la continuité sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f$  définie par

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}.$$

### EXERCICE 10. ★

Etudier la continuité sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f$  définie par

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \lfloor x \rfloor \sin(\pi x).$$

### EXERCICE 11.

Etudier la continuité sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = (-1)^{E(x)} \left( x - E(x) - \frac{1}{2} \right)$ .

### EXERCICE 12.

On note  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$  la fonction indicatrice de  $\mathbb{Q}$ .

- Montrer que  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$  n'est continue en *aucun* point de  $\mathbb{R}$ .
- Démontrer que l'application  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$  est continue en 0 (et même dérivable en 0), alors qu'elle est discontinue en tout autre point de  $\mathbb{R}$ .

### EXERCICE 13.

Soit  $f : x \mapsto [x(\ln x)^2 + 1]^{\frac{1}{\ln x}}$ .

1. Montrer que  $f$  est définie sur  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .
2. Montrer *avec soin* que  $f$  est continue sur  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .
3. Montrer que  $f$  est prolongable par continuité en 0 et 1.
4. Etudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

### EXERCICE 14. ★★

Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

1.  $f$  est croissante ;
2.  $x > 0 \mapsto \frac{f(x)}{x}$  est décroissante.

Etablir que  $f$  est continue.

## Applications du TVI

### EXERCICE 15.

Soit  $f$ , une application continue, périodique, de période  $T > 0$ . Démontrer qu'il existe un réel  $t_0$  tel que

$$f(t_0) = f\left(t_0 + \frac{T}{2}\right).$$

### EXERCICE 16. ★

Soit  $f$  une fonction réelle définie et continue sur  $[0, 1]$  telle que  $f(0) = f(1) = 0$ . On suppose que

$$\forall x \in [0, 7/10], \quad f(x + 3/10) \neq f(x).$$

Montrer que  $f$  s'annule au moins 7 fois sur  $[0, 1]$ .

### EXERCICE 17.

Soit  $f$  une application réelle, continue sur un segment  $I$  telle que  $I \subset f(I)$ . Montrer qu'il existe  $t_0 \in I$  tel que  $f(t_0) = t_0$ .

### EXERCICE 18.

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue. On suppose qu'il existe  $l \in [0, 1[$  tel que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$ . Montrer que  $f$  possède au moins un point fixe.

### EXERCICE 19.

Soit  $f$  une fonction numérique continue sur  $[0, 1]$  telle que  $f(0) = f(1)$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$  tel que  $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$ .

### EXERCICE 20.

Soient  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ . Montrer qu'il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$ .

### EXERCICE 21.

Soit  $f$  une fonction décroissante et continue sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  admet un unique point fixe.

### EXERCICE 22. ★

Soit  $f$ , une fonction continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Démontrer l'existence d'un nombre réel  $c \in [0, 1]$  tel que  $f(c) = c$ .

### EXERCICE 23.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $f \circ f$  admette un point fixe.  $f$  admet-elle un point fixe ?

## Continuité sur un segment

### EXERCICE 24. ★★

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue ayant une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ . Prouver que  $f$  est bornée.

### EXERCICE 25.

Soient  $f$  et  $g$  continues sur  $[0, 1]$  telles que

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) < g(x).$$

Montrer qu'il existe  $m > 0$  tel que

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) + m < g(x).$$

**EXERCICE 26.**

Soit  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ . Montrer que  $f$  est minorée et atteint sa borne inférieure.

**EXERCICE 27.★**

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b$  et

$$f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$$

continue. Montrer que  $f$  admet au moins un point fixe.

**EXERCICE 28.**

Soit  $I$  un segment de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction continue de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $I \subset f(I)$ . Montrer que  $f$  admet un point fixe.

**EXERCICE 29.**

Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $I = [a, b]$  telle que  $I \subset f(I)$ .

1. Montrer que  $f$  prend les valeurs  $a$  et  $b$  sur  $I$ .
2. En déduire que  $f$  admet un point fixe.

**EXERCICE 30.**

Soit  $f$  et  $g$  deux applications continues de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$  telles que  $g \circ f = f \circ g$ .

1. Montrer que  $f$  admet au moins un point fixe.
2. On note  $F$  l'ensemble des points fixes de  $f$ . Montrer que  $F$  admet un plus grand et un plus petit élément.
3. Montrer que  $F$  est stable par  $g$ .
4. Montrer qu'il existe  $x \in [0, 1]$  tel que  $f(x) = g(x)$ .

**EXERCICE 31.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction périodique.

1. Si  $f$  admet une limite finie en  $+\infty$ , montrer que  $f$  est constante.
2. Si  $f$  est continue non constante, montrer que  $f$  admet une plus petite période.
3. Si  $f$  est continue, montrer que  $f$  est bornée et atteint ses bornes.

## Continuité et bijectivité

**EXERCICE 32.★★**

On se propose d'établir la continuité d'une fonction définie implicitement.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction

$$f : [0, 2] \longrightarrow [0, 1]$$

telle que

$$\forall x \in [0, 2], \quad f(x)^5 + f(x) = x.$$

2. Prouver que  $f$  est continue.

**EXERCICE 33.★★**

Soit  $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$  continue telle que  $f \circ f = id_{[0,1]}$  et  $f(0) = 0$ .

1. Etablir que  $f$  est strictement croissante.
2. En déduire que  $f = id_{[0,1]}$ .

## Equations fonctionnelles

**EXERCICE 34.★★**

Soit  $f$ , une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y). \quad (*)$$

1. Calculer  $f(0)$ .
2. Vérifier que  $f$  est impaire.
3. On pose  $a = f(1)$ . Calculer par récurrence  $f(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .
4. Montrer que  $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = ar$ .
5. On suppose en outre que  $f$  est continue en 0.
  - a. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
  - b. En déduire que  $f(x) = ax$  pour tout réel  $x$  par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ .
6. Déterminer toutes les applications continues  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant (\*).

**EXERCICE 35. ★★**

Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  continues telles que

$$\exists a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(ax) = f(x).$$

**EXERCICE 36. ★★**

Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  continues telles que

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x^n) = f(x).$$

**EXERCICE 37. ★★**

Déterminer les fonctions  $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  continues telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) = g(x) + g(y)$$

**EXERCICE 38.**

Soit  $f$ , une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

Pour tout réel  $x$ , on pose  $g(x) = f(x) - f(0)$ .

1. Etablir que  $f$  et  $g$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ .
2. Calculer  $(g(x))^2$  pour tout réel  $x$  et en calculant  $(g(x) - g(y))^2$ , démontrer que  $g(x)g(y) = xy$  pour tous réels  $x$  et  $y$ .
3. En déduire l'expression de  $f$ .

**EXERCICE 39.**

Soit  $f$ , une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

1. Quelles sont les valeurs possibles de  $f(0)$  ?
2. Déterminer  $f$  si  $f(0) = 0$ .
3. On suppose  $f(0) \neq 0$ .
  - a. Démontrer que  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .
  - b. En déduire que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x)$  est strictement positif.
  - c. Montrer qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{ax}.$$

**EXERCICE 40.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue en 0 telle que  $f(2x) = f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est constante.

**EXERCICE 41.**

1. Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $P_n(x) = \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k}$ . Montrer que pour  $x \neq 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

2. Rechercher les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues en 0 telles que  $f(2x) = f(x)\cos x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

## Lipschitzianité

**EXERCICE 42.**

1. Soit  $I$  un segment de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $f(I) \subset I$ . Montrer que  $f$  admet un point fixe.
2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application lipschitzienne de rapport  $0 \leq k < 1$ . Montrer qu'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que  $f([-M; M]) \subset [-M; M]$ .
3. En déduire qu'une application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzienne de rapport  $0 \leq k < 1$  admet un unique point fixe.

## Continuité uniforme

**EXERCICE 43.**

Soit  $f : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue ayant une limite finie en  $+\infty$ .

1. Montrer que  $f$  est bornée.
2. Montrer que  $f$  admet un minimum ou un maximum absolu mais pas nécessairement les deux.
3. Montrer que  $f$  est uniformément continue.

**EXERCICE 44.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uniformément continue telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  avec  $x \in \mathbb{R}$ .

**EXERCICE 45.**

Soit  $f$  une application continue sur  $\mathbb{R}_+$  admettant une limite finie en  $+\infty$ . Montrer que  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

**EXERCICE 46.**

Montrer que toute fonction périodique continue sur  $\mathbb{R}$  est uniformément continue.