Devoir à la maison n° 17

Problème 1 —

Partie I – Intégrales de Wallis

On pose pour tout $n \geqslant 0$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. En intégrant par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
3. En déduire une expression de I_{2n} et I_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de factorielles.
4. Vérifier que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. En déduire que $\dfrac{n+1}{n+2} I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Démontrer que $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$.
6. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.
7. En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Partie II – Formule de Stirling

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
2. En déduire que (u_n) converge vers une certaine limite $l \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $l = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et en déduire un équivalent de $n!$.