# DEVOIR SURVEILLÉ N°03 : CORRIGÉ

## Problème 1 — Tchebychev : premier contact

### Partie I – Étude d'une application

1. Il s'agit de déterminer les solutions éventuelles de l'équation $f(z)=i$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}^*$. Cette équation équivaut à $z^2-iz+1=0$ qui est une équation du second degré dont le discriminant est égal à $-5=(i\sqrt{5})^2$. Les solutions de cette équation sont donc $\frac{i(1+\sqrt{5})}{2}$ et $\frac{i(1-\sqrt{5})}{2}$ qui sont donc également les antécédents de $i$ par $f$.

2. On vient de voir que $i$ admettait deux antécédents par $f$ : $f$ n'est donc pas injective.

3. Soit $Z\in\mathbb{C}$. On s'intéresse à l'équation (E) : $f(z)=Z$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$. Celle-ci équivaut à $z^2-zZ+1=0$. Il s'agit d'une équation du second degré dont 0 n'est manifestement pas solution. Cette dernière équation admet donc toujours au moins une solution non nulle donc Z admet au moins un antécédent par $f$. L'application $f$ est donc surjective.

### Partie II – Une suite d'applications

1. Pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\varphi_2(z)&=z\varphi_1(z)-\varphi_0(z)=z^2-2\\ \varphi_3(z)&=z\varphi_2(z)-\varphi_1(z)=z^3-3z\\ \varphi_4(z)&=z\varphi_3(z)-\varphi_2(z)=z^4-4z^2+2\end{aligned}$$

2. Les solutions de l'équation $\varphi_2(z)=0$ sont clairement $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
De même, les solutions de l'équation $\varphi_3(z)=0$ sont $0$, $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.
L'équation $\varphi_4(z)=0$ est une équation bicarrée. On la résout classiquement en effectuant le changement de variable $Z=z^2$. Les solutions de l'équation $Z^2-4Z+2=0$ sont $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. On en déduit que les solutions de l'équation $\varphi_4(z)=0$ sont

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}},-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}},\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}},-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

3. On note $P_n$ l'assertion

$$\forall z\in\mathbb{C}^*,\ \varphi_n(f(z))=f(z^n)$$

Puisque pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, $\varphi_0(z)=2$ et $f(z^0)=f(1)=2$, $P_0$ est vraie. De même, pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, $\varphi_1(f(z))=z+\frac{1}{z}$ et $f(z^1)=z+\frac{1}{z}$ donc $P_1$ est vraie.
Supposons $P_n$ et $P_{n+1}$ vraies pour un certain $n\in\mathbb{N}$. Alors pour tout $z\in\mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned}\varphi_{n+2}(f(z))&=f(z)\varphi_{n+1}(f(z))-\varphi_n(f(z))\\ &=f(z)f(z^{n+1})-f(z^n)\\ &=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right)-\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)\\ &=z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}}=f(z^{n+2})\end{aligned}$$

Ainsi $P_{n+2}$ est vraie.
Par récurrence double, $P_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

**4.** L'équation $f(z^n)=0$ équivaut à $z^{2n}=-1$. L'ensemble des solutions de cette équation est donc l'ensemble des racines $2n^{\text{èmes}}$ de $-1$, c'est-à-dire

$$A_n=\left\{e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}},\ k\in[\![0,2n-1]\!]\right\}$$

**5.** Remarquons que pour $\omega\in A_n$,

$$\varphi_n(f(\omega))=f(\omega^n)=0$$

Donc les $f(\omega)$ pour $\omega\in A_n$ sont des solutions de l'équation $\varphi_n(z)=0$. Via une formule d'Euler, ceci signifie que les réels $2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k\in[\![0,2n-1]\!]$ sont des solutions de l'équation $\varphi_n(z)=0$.
Réciproquement, soit $\alpha\in\mathbb{C}$ une solution de l'équation $\varphi_n(z)=0$. Puisque $f$ est surjective, il existe donc $\omega\in\mathbb{C}^*$ tel que $\alpha=f(\omega)$. Alors $f(\omega^n)=\varphi_n(f(\omega))=f(\omega^n)=0$ de sorte que $\omega$ est solution de l'équation $f(z^n)=0$. Il existe donc $k\in[\![0,2n-1]\!]$ tel que $\alpha=e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}$. Mais alors $\alpha=f(\omega)=2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.
Finalement l'ensemble des solutions de l'équations $\varphi_n(z)=0$ est

$$B_n=\left\{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![0,2n-1]\!]\right\}$$

On peut remarquer que certains éléments de $B_n$ figurent en double dans la description précédente. En effet,

$$B_n=\left\{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}\cup\left\{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![n,2n-1]\!]\right\}$$

On montre alors que les deux ensembles de cette union sont égaux.

$$\begin{aligned}
\left\{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![n,2n-1]\!]\right\}&=\left\{2\cos\left(\frac{(2(k+n)+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}\\
&\qquad\text{via le "changement d'indice" } k\to k+n\\
&=\left\{2\cos\left(\pi+\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}\\
&=\left\{-2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}\\
&=\left\{-2\cos\left(\frac{(2(n-1-k)+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}\\
&\qquad\text{via le "changement d'indice" } k\to n-1-k\\
&=\left\{-2\cos\left(\pi-\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}\\
&=\left\{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}
\end{aligned}$$

Finalement, on peut affirmer que

$$B_n=\left\{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$$

Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $\frac{(2k+1)\pi}{2n}\in[0,\pi]$ et cos est injective sur $[0,\pi]$ puisqu'elle y est strictement décroissante. Les réels $2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$ sont donc deux à deux distincts. Le nombre de solutions de l'équation $\varphi_n(z)=0$ est donc $n$.

**Remarque.** Le lecteur cultivé aura remarqué que les fonctions $\varphi_n$ sont reliées aux *polynômes de Tchebychev*. ■

**Solution 1.**

**1.** Le discriminant de l'équation est $\Delta=-32+24i$. Or

$$\Delta=4(-8+6i)=2^2(1+3i)^2=(2+6i)^2$$

donc les solutions de l'équation sont

$$a=\frac{4-2i+2+6i}{2}=3+2i\qquad\text{et}\qquad b=\frac{4-2i-2-6i}{2}=1-4i$$

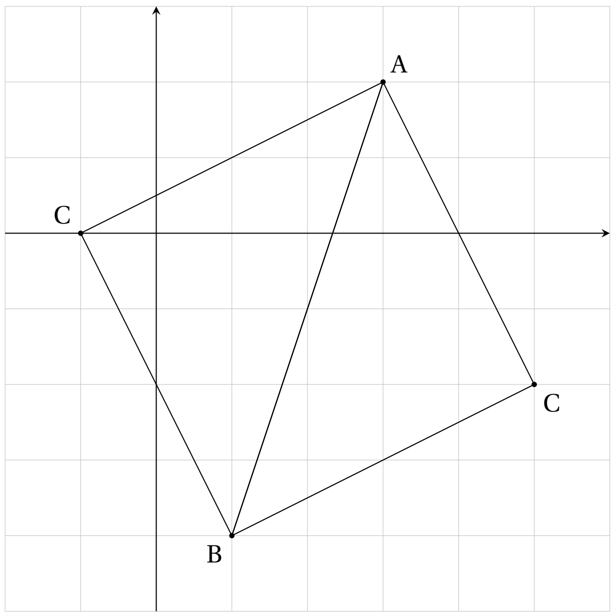
**2.** Notons $c$ l'affixe du point C. Le point C convient *si et seulement si* CA = CB et $(\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, ce qui équivaut en termes d'affixes à

$$\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = 1 \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Autrement dit, $c$ convient *si et seulement si* $\frac{b-c}{a-c} = \pm i$ autrement dit *si et seulement si*

$$c = \frac{b-ia}{1-i} = 5-2i \qquad \text{ou} \qquad c = \frac{b+ia}{1+i} = -1$$

**3.** On représente les deux triangles déterminés à la question précédente.




**Solution 2.**

**1.**

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta+\theta)\\ &= \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta\\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

**2.** D'après l'énoncé, on a $z = e^{i\theta}$. De plus,

$$\begin{aligned}|z^3-z+2|^2 &= \left(z^3-z+2\right)\overline{(z^3-z+2)}\\ &= |z|^6 + |z|^2 + 4 - 2(z+\overline{z}) - |z|^2(z^2+\overline{z}^2) + 2(z^3+\overline{z}^3)\\ &= 6 - 2(z+\overline{z}) - (z^2+\overline{z}^2) + 2(z^3+\overline{z}^3) \text{car } |z| = 1\\ &= 6 - 2(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) - (e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}) + 2(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}) \qquad \text{car } z = e^{i\theta}\\ &= 6 - 4\cos\theta - 2\cos(2\theta) + 4\cos(3\theta) \qquad \text{en vertu d'une relation d'Euler}\\ &= 6 - 4\cos\theta - 2(2\cos^2\theta - 1) + 4(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)\\ &= 8 - 16\cos\theta - 4\cos^2\theta + 16\cos^3\theta\\ &= 4f(\cos\theta)\end{aligned}$$

**3.** $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 12x^2 - 2x - 4 = 2(2x+1)(3x-2)$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{13}{4}$ | $\searrow$ | $\frac{2}{27}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**4.** Puisque $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$, on a en vertu de la première question

$$\max_{z\in\mathbb{U}} \varphi(z) = \max_{\theta\in\mathbb{R}} 2\sqrt{f(\cos\theta)}$$

Mais puisque $\operatorname{Im}\cos = [-1, 1]$,

$$\max_{z\in\mathbb{U}} \varphi(z) = \max_{x\in[-1,1]} 2\sqrt{f(x)}$$

La question précédente nous renseigne sur les variations de $f$ sur $[-1, 1]$.

| $x$ | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{2}{3}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $\frac{13}{4}$ | $\searrow$ | $\frac{2}{27}$ | $\nearrow$ | $1$ |

On peut en déduire que

$$\max_{z\in\mathbb{U}} \varphi(z) = 2\sqrt{\frac{13}{4}} = \sqrt{13}$$

Ce maximum est atteint en un élément de $\mathbb{U}$ dont un argument $\theta$ est tel que $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ i.e. tel que $\theta \equiv \pm\frac{2\pi}{3}[2\pi]$. On en déduit donc que le maximum de $\varphi$ est atteint en $j$ et $j^2$.

## Solution 3.

**1.** Si on avait $\omega = 1$, on aurait $\frac{\pi}{n} \equiv 0[2\pi]$ puis $1 \equiv 0[2n]$, ce qui est faux. Ainsi $\omega \neq 1$.

**2.** On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\omega \neq 1$. Ainsi

$$\mathrm{A}_n = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{1-e^{i\pi}}{1-\omega} = \frac{2}{1-\omega}$$

**3.** Classiquement

$$\mathrm{C}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re}\left(\omega^k\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k\right) = \operatorname{Re}(\mathrm{A}_n)$$
$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im}\left(\omega^k\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k\right) = \operatorname{Im}(\mathrm{A}_n)$$

En utilisant la méthode de l'arc-moitié :

$$\mathrm{A}_n = \frac{2}{e^{\frac{i\pi}{2n}}\left(e^{-\frac{i\pi}{2n}} - e^{\frac{i\pi}{2n}}\right)} = \frac{2e^{-\frac{i\pi}{2n}}}{-2i\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{ie^{-\frac{i\pi}{2n}}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{i\left(\cos\frac{\pi}{2n} - i\sin\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2n} + i\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = 1 + i\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

On en déduit les résultats voulus.

**4.** Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\omega^{2k} - 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 2ie^{\frac{ik\pi}{n}} \sin\frac{k\pi}{n}$$

Puisque $\frac{k\pi}{n} \in [\![0, n-1]\!]$, $\sin\frac{k\pi}{n} \geqslant 0$ de sorte que

$$|\omega^{2k} - 1| = 2|i|\left|e^{\frac{ik\pi}{n}}\right|\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$$

Ainsi

$$B_n = 2\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = 2S_n = \frac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$