Devoir à la maison n°4

Problème 1 —

1. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \arcsin(\sin(2t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   a. Étudier la parité et la périodicité de φ.

   b. Simplifier $\varphi(t)$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et pour $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   c. Tracer la courbe représentative de φ sur $[-2\pi, 2\pi]$.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

   a. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|2x| \leqslant 1 + x^2$.

   b. En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.

   c. Étudier la parité de f.

3. **a.** Montrer que pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(\tan t) = \varphi(t)$.

   b. Exprimer f à l'aide de φ et arctan.

   c. En déduire les variations de f sans calculer la dérivée de f.

   d. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On précisera notamment les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

4. **a.** Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (on pourra distinguer les cas $|x| < 1$ et $|x| > 1$).

   b. Donner les équations des tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisse 0, $\sqrt{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

   c. Déterminer les limites à gauche et à droite de f' en 1.

   d. Tracer la courbe représentative de f. On fera notamment figurer la tangente en 0 ainsi que les demi-tangentes en -1 et 1.

5. **a.** Soit $h \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Justifier que la droite d'équation $y = h$ coupe la courbe représentative de f en deux points distincts.

   b. On note M_1 et M_2 ces deux points et x_1 et x_2 leurs abscisses respectives. Quitte à échanger M_1 et M_2, on peut supposer $x_1 < x_2$. Calculer x_1 et x_2 en fonction de h.

   c. On note I le milieu de $[M_1M_2]$. Tracer la courbe décrite par I lorsque h décrit l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.