Devoir à la maison n° 15 : corrigé

Problème 1 — Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass

1. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$.

$$B_n(e_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

d'après la formule du binôme de Newton. On a donc bien $B_n(e_0)(x) = e_0(x)$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \frac{k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \binom{n-1}{k-1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
B_n(e_1)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-(k+1)} \\
&= x\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k} (1-x)^{n-1-k} \\
&= x(x+1-x)^{n-1} = x
\end{aligned}$$

On a donc bien $B_n(e_1)(x) = e_1(x)$.

c. Soit $n \geqslant 2$ et $k \in [\![2,n]\!]$:

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\binom{n}{k} = \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} = \binom{n-2}{k-2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
B_n(e_2)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n-1}{n}\left(\sum_{k=2}^{n} x^k (1-x)^{n-k}\right) + \frac{1}{n}B_n(e_1)(x) \\
&= \frac{n-1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-2} x^{k+2} (1-x)^{n-k-2}\right) + \frac{x}{n} \\
&= \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{x}{n} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}
\end{aligned}$$

On a donc bien $B_n(e_2)(x) = e_2(x) + \frac{x(1-x)}{n}$.

2. f est continue sur le segment $[0,1]$ donc bornée sur $[0,1]$. L'existence de M en découle.

3. f est continue sur le segment $[0,1]$ donc uniformément continue sur $[0,1]$. L'existence de δ en découle.

4. Soient $(u,v) \in [0,1]^2$.

- Si $|u-v| < \delta$, $|f(u)-f(v)| < \varepsilon \leqslant \varepsilon + 2M\left(\frac{u-v}{\delta}\right)^2$.
- Si $|u-v| \geqslant \delta$, alors $\left(\frac{u-v}{\delta}\right)^2 \geqslant 1$. De plus,

$$|f(u)-f(v)| \leqslant |f(u)|+|f(v)| \leqslant 2M \leqslant 2M\left(\frac{u-v}{\delta}\right)^2 < \varepsilon + 2M\left(\frac{u-v}{\delta}\right)^2$$

5. Il suffit d'utiliser à nouveau le fait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k(1-x)^{n-k} = 1$.

6. Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Par inégalité triangulaire et en utilisant la question **.5** :

$$|f(x)-B_n(f)(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k(1-x)^{n-k}$$

D'après la question **.4** :

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2$$

On développe et on obtient en remarquant que $e_0\left(\frac{k}{n}\right)=1$, $e_1\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{k}{n}$ et $e_2\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{k^2}{n^2}$:

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \varepsilon e_0\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{2M}{\delta^2}\left[x^2 e_0\left(\frac{k}{n}\right) - 2x e_1\left(\frac{k}{n}\right) + e_2\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

On a alors :

$$|f(x)-B_n(f)(x)| < \varepsilon B_n(e_0)(x) + \frac{2M}{\delta^2}\left(x^2 B_n(e_0)(x) - 2x B_n(e_1)(x) + B_n(e_2)(x)\right)$$

En utilisant les résultats de la question **.1**, on obtient :

$$|f(x)-B_n(f)(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\left(x^2 - 2x^2 + x^2 + \frac{x(1-x)}{n}\right)$$

La fonction trinôme $x \mapsto x - x^2$ atteint son maximum en $\frac{1}{2}$. Celui-ci vaut donc $\frac{1}{4}$. Finalement,

$$|f(x)-B_n(f)(x)| < \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}$$

7. Comme $\frac{M}{2n\delta^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a donc pour n suffisamment grand, $|f(x)-B_n(f)(x)| < 2\varepsilon$ pour tout $x \in [0,1]$ i.e. $S_n < 2\varepsilon$. Le raisonnement étant valable quelque soit le choix de ε, on en déduit que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.