# Devoir surveillé n°09

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

**Solution 1**

1. **a.** Comme 4 est une racine multiple de P, on peut factoriser P par $(X-4)^2$. On en déduit après calcul que

$$P = (X-4)^2(X^2+2)$$

Les racines complexes de P sont donc $-i\sqrt{2}$, $i\sqrt{2}$ et 4.

**b.** On a $P' = 4X^3 - 24X + 36X - 16 = 4(X^3 - 6X + 9X - 4)$. Comme 4 est une racine multiple de P, 4 est une racine de $P'$. On peut donc factoriser $P'$ par $X-4$. Après calcul, on trouve

$$P' = 4(X-4)(X-1)^2$$

Les racines complexes de $P'$ sont donc 1 et 4.

**c.**

$$4 = 0\cdot(-i\sqrt{2}) + 0\cdot i\sqrt{2} + 1\cdot 4$$
$$1 = \frac{3}{8}\cdot(-i\sqrt{2}) + \frac{3}{8}\cdot i\sqrt{2} + \frac{1}{4}\cdot 4$$

2. **a.** On sait que $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{X-\alpha_k}$.

**b.** D'une part, $\frac{P'(z)}{P(z)} = 0$. D'autre part,

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{z-\alpha_k} = \sum_{k=1}^n r_k \cdot \frac{\overline{z-\alpha_k}}{(z-\alpha_k)\cdot\overline{(z-\alpha_k)}} = \sum_{k=1}^n r_k \frac{\overline{z-\alpha_k}}{|z-\alpha_k|^2}$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^n r_k \cdot \frac{\overline{z-\alpha_k}}{|z-\alpha_k|^2} = 0$$

puis, en conjuguant,

$$\sum_{k=1}^n r_k \cdot \frac{z-\alpha_k}{|z-\alpha_k|^2} = 0$$

**c.** L'égalité de la question précédente peut s'écrire

$$\sum_{k=1}^n \frac{r_k}{|z-\alpha_k|^2}\cdot z = \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{|z-\alpha_k|^2}\cdot \alpha_k$$

Posons $S = \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{|z-\alpha_k|^2}$. On a donc

$$Sz = \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{|z-\alpha_k|^2}\cdot\alpha_k$$

Remarquons que les $r_k$ sont des entiers naturels non nuls donc $S > 0$. Ainsi, en posant $\lambda_k = \frac{1}{S}\cdot\frac{r_k}{|z-\alpha_k|^2}$.

$$z = \sum_{k=1}^n \lambda_k\alpha_k$$

De plus, les $\lambda_k$ sont bien des réels positifs et, par définition de S, leur somme vaut bien 1.

**Solution 2**

**1.** **a.** Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(r) = (p+1)r^p - p(\mathrm{M}+1)r^{p-1} = r^{p-1}((p+1)r - p(\mathrm{M}+1))$$

Ainsi l'unique zéro strictement positif de $f'$ est

$$r_0 = \frac{p(\mathrm{M}+1)}{p+1}$$

Or

$$r_0 - 1 = \frac{p(\mathrm{M}+1)}{p+1} - 1 = \frac{\mathrm{M}p - 1}{p+1}$$

Ainsi

- $r_0 > 1$ lorsque $\mathrm{M} > 1/p$ ;
- $r_0 < 1$ lorsque $\mathrm{M} < 1/p$ ;
- $r_0 = 1$ lorsque $\mathrm{M} = 1/p$.

**b.** On remarque que $f(1) = 0$.

| $r$ | $0$ | | $r_0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(r)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(r)$ | $\mathrm{M}$ | $\searrow$ | $f(r_0)$ | $\nearrow$ $0$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

On en déduit que $f(r) > 0$ lorsque $r > 1$.

**c.** On remarque que $r_0 = \frac{\mathrm{M}+1}{1+1/p} < \mathrm{M} + 1$.

| $r$ | $0$ | $1$ | $r_0$ | $\mathrm{M}+1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(r)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(r)$ | $\mathrm{M}$ | $\searrow$ $0$ $\searrow$ | $f(r_0)$ | $\nearrow$ $\mathrm{M}$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

On en déduit que $f(r) \geq \mathrm{M} > \frac{1}{p} > 0$ lorsque $r \geq \mathrm{M} + 1$.

**2.** **a.** Soit $z$ une racine complexe de P de module différent de 1. Alors

$$z^p = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k z^k$$

puis, par inégalité triangulaire,

$$|z|^p \leq \sum_{k=0}^{p-1} |a_k||z|^k \leq \mathrm{M}\sum_{k=0}^{p-1} |z|^k = \mathrm{M}\frac{|z|^p - 1}{|z| - 1}$$

Si $|z| > 1$, on obtient en multipliant cette inégalité par $|z| - 1 > 0$,

$$|z|^{p+1} - |z|^p \leq \mathrm{M}|z|^p - \mathrm{M}$$

c'est-à-dire
$$|z|^{p+1}-(\mathrm{M}+1)|z|^p+\mathrm{M}\leq 0$$
c'est-à-dire $f(|z|)\leq 0$.

**b.** Soit $z$ une racine de P et supposons $\mathrm{M}\leq\frac{1}{p}$. D'après la question **1.b**, $f(r)>0$ lorsque $r>1$. Or si $|z|>1$, la question **2.a** montre que $f(|z|)\leq 0$. C'est donc que $|z|\leq 1$.

**c.** Soit $z$ une racine de P et supposons $\mathrm{M}>\frac{1}{p}$. Supposons que $|z|\geq\mathrm{M}+1$. D'après la question **1.c**, $f(|z|)>0$. Mais comme on a également $|z|\geq\mathrm{M}+1>\frac{1}{p}+1>1$, la question **2.a** montre que $f(|z|)\leq 0$, ce qui est contradictoire. C'est donc que $|z|<\mathrm{M}+1$.

**3.** Remarquons que dans cette question $\mathrm{M}=\frac{1}{p}$.

**a.** Puisque $\mathrm{M}=\frac{1}{p}$, la question **2.b** montrer que toutes les racines de P sont de module inférieur ou égal à 1.

**b.** On vérifie que
$$\mathrm{P}(1)=1-\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}1=0$$
donc 1 est racine de P. De plus,
$$\mathrm{P}'(1)=p-\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}k=p-\frac{1}{p}\cdot\frac{p(p-1)}{2}=\frac{p+1}{2}\neq 0$$
Ainsi 1 est racine simple de P.

**4.** Remarquons que dans cette question $\mathrm{M}=1$.

**a.** Puisque $p\geq 2$, $\mathrm{M}=1>\frac{1}{2}\geq\frac{1}{p}$. La question **2.c** montre que les racines de P sont de module strictement inférieur à $\mathrm{M}+1=2$.

**b.** Supposons que $z$ soit racine de P. Alors
$$z^p-\sum_{k=0}^{p-1}z^k=0$$
En mutipliant par $z-1$, on obtient
$$z^{p+1}-z^p-(z^p-1)=0$$
donc $z$ est racine du polynôme $\mathrm{X}^{p+1}-2\mathrm{X}^p+1$.

**c.** Pour tout $r\in\mathbb{R}_+$,
$$g'(r)=(p+1)r^p-2pr^{p-1}=(p+1)r^{p-1}\left(r-\frac{2p}{p+1}\right)$$
Remarquons que $1<\frac{2p}{p+1}<2$. On en déduit le tableau de variation suivant.

| $r$ | $0$ | $1$ | $\frac{2p}{p+1}$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(r)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(r)$ | $1$ | $0$ | $g\left(\frac{2p}{p+1}\right)$ | $1$ | $+\infty$ |

Puisque $g(1)=0$, $g(2p/(p+1))<0$. De plus, $g(2)=1>0$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[2p/(p+1),2]$, on montre donc que $g$ s'annule sur cet intervalle en un réel $x_p$. Ainsi $x_p$ est une racine de $\mathrm{X}^{p+1}-2\mathrm{X}^p+1=(\mathrm{X}-1)\mathrm{P}$. Comme $x_p\neq 1$, $x_p$ est également une racine de P.
Pour tout entier $p\geq 2$, $\frac{2p}{p+1}\leq x_p\leq 2$ donc le théorème des gendarmes montre que la suite $(x_p)$ converge vers 2.

**5.** On a déjà montré que $x_p$ était racine du polynôme $X^{p+1} - 2X^p + 1$. On en déduit imédiatement que $(2-x_p)x^p = 1$, c'est-à-dire $\varepsilon_p x_p^p = 1$ ou encore $\varepsilon_p = (2-\varepsilon_p)^{-p} = x_p^{-p}$. Or pour tout entier $p \geq 2$,

$$\frac{4}{3} = 2 - \frac{2}{3} \leq 2 - \frac{2}{p+1} = \frac{2p}{p+1} \leq x_p \leq 2$$

donc

$$0 \leq p\varepsilon_p \leq \frac{p}{(4/3)^p}$$

Par croissances comparées, $\lim_{p\to+\infty} \frac{p}{(4/3)^p} = 0$ donc la suite $(p\varepsilon_p)$ converge vers 0 par encadrement.
Enfin,

$$\varepsilon_p = (2-\varepsilon_p)^{-p} = \frac{1}{2^p}\left(1 - \frac{\varepsilon_p}{2}\right)^{-p} = \frac{1}{2^p}\exp\left(-p\ln\left(1-\frac{\varepsilon_p}{2}\right)\right)$$

Or comme la suite $(\varepsilon_p)$ converge vers 0,

$$\ln\left(1-\frac{\varepsilon_p}{2}\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} -\frac{\varepsilon_p}{2}$$

et don

$$-p\ln\left(1-\frac{\varepsilon_p}{2}\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p\varepsilon_p}{2}$$

Comme la suite $(p\varepsilon_p)$ converge également vers 0,

$$\lim_{p\to+\infty} -p\ln\left(1-\frac{\varepsilon_p}{2}\right) = 0$$

et donc

$$\exp\left(-p\ln\left(1-\frac{\varepsilon_p}{2}\right)\right) \underset{p\to+\infty}{=} 1 + o(1)$$

puis

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2^p}\exp\left(-p\ln\left(1-\frac{\varepsilon_p}{2}\right)\right) \underset{p\to+\infty}{=} \frac{1}{2^p} + o\left(\frac{1}{2^p}\right)$$

Comme $x_p = 2 - \varepsilon_p$,

$$x_p \underset{p\to+\infty}{=} 2 - \frac{1}{2^p} + o\left(\frac{1}{2^p}\right)$$

**6.** Soit $z$ une racine de P. Alors $z \neq 0$ puisque 0 n'est clairement pas racine de P. On en déduit que $Q(1/z) = -\frac{P(z)}{z^p} = 0$ et donc $1/z$ est racine de Q.
Le nombre M associé au polynôme Q est encore 1, de sorte que les racines de Q sont encore toutes de module strictement inférieur à 2. Donc $1/z$ est de module strictement inférieur à 2, ce qui signifie que $z$ est de module strictement supérieur à $\frac{1}{2}$.
Les racines de P sont donc toutes de module strictement compris entre $\frac{1}{2}$ et 2.