Devoir à la maison n°06 : corrigé

Solution 1.

1. On sait de manière générale que
$$(1+u)^\alpha \underset{u\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-1} \alpha - j\right) u^k + o(u^n)$$
Notamment pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $u = -x$,
$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-1} -\frac{1}{2} - j\right)(-x)^k + o(x^n)$$
En posant
$$a_k = \frac{1}{k!}(-1)^k \prod_{j=0}^{k-1}\left(-\frac{1}{2} - j\right)$$
on a donc
$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$
Remarquons maintenant que
$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{2j+1}{2} \\ &= \frac{1}{2^k k!}\prod_{j=0}^{k-1}(2j+1) \\ &= \frac{1}{2^k k!}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{2k} j}{\prod_{j=1}^{k} 2j} \\ &= \frac{1}{2^k k!}\cdot\frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k} \end{aligned}$$
On en déduit bien le résultat voulu.

2. A l'aide la question précédente ;
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k} x^{2k} + o(x^{2n})$$
Puisque arcsin est la primitive sur $]-1,1[$ de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ s'annulant en 0,
$$\arcsin x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{2k}(2k+1)}\binom{2k}{k} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

Solution 2.

1. Soit f une solution sur I de l'équation différentielle $y' + ay = b$. Montrons par récurrence que f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Tout d'abord, f est dérivable sur I en tant que solution d'une équation différentielle. A fortiori, elle est continue donc de classe $\mathcal{C}^0$ sur I. Supposons maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $f' = b - af$ est également de classe $\mathcal{C}^n$ sur I puisque a, b et f le sont. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Par récurrence, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

2. Soit f une solution sur I de l'équation différentielle $y' + ay = b$. Montrons par récurrence que f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Tout d'abord, f est dérivable deux fois sur I en tant que solution d'une équation différentielle. A fortiori, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Supposons maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $f'' = c - af' - bf$ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I puisque a, b, f et f' le sont. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Par récurrence, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Solution 3.

1. Résolvons d'abord l'équation homogène associée :

$$(E_H) \quad (1+x^2)y' = 3xy$$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{3x}{1+x^2}$ est $x \mapsto \frac{3}{2}\ln(1+x^2)$. On en déduit que les solutions de (E_H) sont les fonctions $x \mapsto \lambda \exp\left(\frac{3}{2}\ln(1+x^2)\right) = (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Recherchons maintenant une solution particulière de (E) sous forme polynomiale. Soit P une telle solution en supposant qu'elle existe. P est nécessairement non nulle ; notons n son degré et a sont coefficient dominant. Le coefficient de X^{n+1} dans $(1+X^2)P' - 3XP$ est $(n-3)a$. Or 1 est un polynôme de degré 0. On en déduit que $(n-3)a = 0$ i.e. $n = 3$. Posons donc $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On obtient $(1+X^2)P' - 3XP = -bX^3 + (3a-2c)X^2 + (2b-3d)X + c$. On est donc amené à résoudre le système $\begin{cases} -b = 0 \\ 3a - 2c = 0 \\ 2b - 3d = 0 \\ dC = 1 \end{cases}$. On trouve $a = \frac{2}{3}$, $b = 0$, $c = 1$ et $d = 0$. Ceci signifie que la fonction polynomiale P telle que $P(x) = \frac{2}{3}x^3 + x$ est solution de (E).
On en déduit que les solutions f_λ de (E) sont telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_\lambda(x) = \frac{2}{3}x^3 + x + \lambda(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

2. On a $\frac{2}{3}x^3 + x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}x^3$ et $(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$. Pour que f_λ admette une limite finie en $+\infty$ il faut donc nécessairement que $\lambda = -\frac{2}{3}$ (on a donc l'unicité sous réserve d'existence). Posons $g = f_{-\frac{2}{3}}$. Or $(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ pour $x \geqslant 0$ et

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

On en déduit que $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$ i.e. $g(x)$ tend vers 0 en $+\infty$. g est donc l'unique solution de (E) admettant une limite finie en $+\infty$.

3. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on trouve $g'(x) = 2x^2 + 1 - 2x\sqrt{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On voit facilement que $g'(x) > 0$ pour $x \leqslant 0$. Supposons maintenant $x \geqslant 0$. Alors

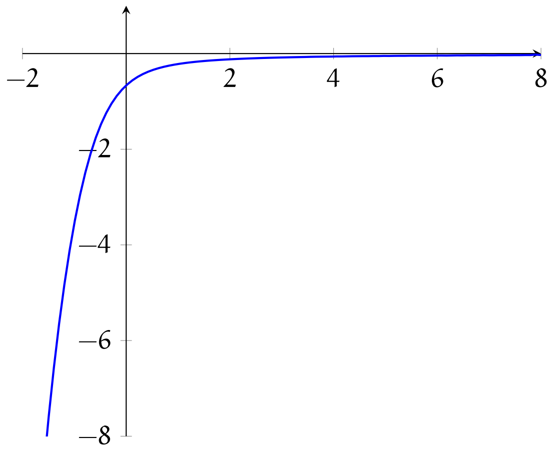
$$g'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 1 > 2x\sqrt{1+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad (2x^2+1)^2 > \left(2x\sqrt{1+x^2}\right)^2$$

car les membres de l'inégalité sont positifs. Finalement $g'(x) > 0$ équivaut à $1 > 0$, ce qui est toujours vrai. On en déduit que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. On aurait également pu remarquer que $g'(x) = \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^2$. ■

4. On a $(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \underset{x\to-\infty}{\sim} -x^3$. On en déduit que $g(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{4}{3}x^3$. Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x^3} = \frac{4}{3}$.

5. La fonction g est strictement croissante, admet pour limites $-\infty$ en $-\infty$ et 0 en $+\infty$.



Solution 4.

1. **a.** Puisque f_λ est solution de (E), pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$(1+x^2)f_\lambda'(x) + 2xf_\lambda(x) = \frac{1}{x}$$

Notamment pour $x=1$,

$$2f_\lambda'(1) + 2f_\lambda(1) = 1$$

et donc $f_\lambda'(1) = \frac{1}{2} - \lambda$.
D_λ admet donc pour équation cartésienne

$$y = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)(x-1) + \lambda$$

b. Une équation de D_λ est également

$$y = \frac{1}{2}(x-1) + \lambda(2-x)$$

Ceci permet de constater que toutes les droites D_λ passent par le point de coordonnées $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

2. **a.** L'équation (E) s'écrit également

$$y' + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

La fonction $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ admet pour primitive $x \mapsto \ln(1+x^2)$. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{C}{1+x^2}$ où $C \in \mathbb{R}$.
On utilise la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre. On cherche donc une solution sous la forme $x \mapsto \frac{C(x)}{1+x^2}$ avec C dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui conduit à

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \frac{C'(x)}{1+x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ C'(x) = \frac{1}{x}$$

On peut donc choisir $C : x \mapsto \ln x$ ce qui fournit $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$ comme solution particulière.
Les solutions de (E) sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{\ln x + C}{1+x^2}$ où $C \in \mathbb{R}$.

b. D'après la question précédente, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f(x) = \frac{\ln x + C}{1+x^2}$$

La condition $f_\lambda(1) = \lambda$ fournit $C = 2\lambda$. On a donc $f_\lambda : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\ln x + 2\lambda}{1+x^2}$.

3. En raisonnant comme dans la première question, on trouve

$$f'(x_0) = \frac{c(x_0) - \lambda b(x_0)}{a(x_0)}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}_\lambda$ est donc

$$y = \frac{c(x_0) - \lambda b(x_0)}{a(x_0)}(x - x_0) + \lambda$$

ou encore

$$a(x_0)(y - \lambda) + (\lambda b(x_0) - c(x_0))(x - x_0) = 0$$

En regroupant les λ, cette dernière équation équivaut à

$$\lambda(b(x_0)(x - x_0) - a(x_0)) + a(x_0)y - c(x_0)(x - x_0) = 0$$

Si $b(x_0) \neq 0$, alors toutes les droites $\mathcal{D}_\lambda$ passent par le point de coordonnées $\left(x_0 + \frac{a(x_0)}{b(x_0)}, \frac{c(x_0)}{b(x_0)}\right)$.
Si $b(x_0) = 0$, une équation de $\mathcal{D}_\lambda$ est

$$y = \frac{c(x_0)}{a(x_0)}(x - x_0) + \lambda$$

Les droites $\mathcal{D}_\lambda$ ont toutes le même coefficient directeur et sont donc parallèles.