# Devoir surveillé n°11

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1 – Centrale MP 1990

Dans tout le texte, $z$ désigne une variable complexe ; l'exponentielle de $z$ sera notée indifféremment $e^z$ et $\exp z$, la partie réelle de $z$ sera notée $\mathrm{Re}(z)$. On appellera $\Delta$ l'ensemble des nombres complexes de module strictement inférieur à 1. On conviendra de poser $0^0 = 1$.
On définit une application F de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ comme suit :

- $\mathrm{F}(1) = 0$ ;
- pour tout $z \neq 1$, $\mathrm{F}(z) = \exp\left(-\dfrac{z}{1-z}\right)$.

Le but du problème est d'établir que F est développable en série entière dans $\Delta$ et d'étudier quelques propriétés de la suite des coefficients de cette série entière.

**La seconde et la troisième partie sont indépendantes.**

## 1 PREMIERE PARTIE

**1** Soit $n$ un entier naturel. Etablir que la fonction qui, à tout $z \neq 1$, associe $\left(\dfrac{z}{1-z}\right)^n$ admet un développement en série entière dans $\Delta$, développement que l'on notera $\left(\dfrac{z}{1-z}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k$.

**2** En utilisant le développement en série entière de $(1+x)^\gamma$, où $\gamma$ est une constante réelle convenable et $x$ une variable réelle comprise strictement entre $-1$ et 1, déterminer $a_{n,k}$ en fonction de $n$ et de $k$.

**3** **3.a** Montrer que l'égalité $b_k = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_{n,k}}{n!}$ définit une suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels.

**3.b** Calculer $b_0$, $b_1$, $b_2$.

**4** Etantant donné $z$ appartenant à $\Delta$, on définit pour tout couple $(n,k)$ d'entiers naturels $u_{n,k} = (-1)^n \dfrac{a_{n,k}}{n!} z^k$.
Montrer que la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

**5** Déduire de ce qui précède que, pour tout $z$ appartenant à $\Delta$, l'on a : $\mathrm{F}(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$.
On désignera par R le rayon de convergence de cette série entière (on a évidemment $\mathrm{R} \geq 1$).

## 2 DEUXIEME PARTIE

On se propose dans cette partie de déterminer R et de trouver une suite majorant la suite de terme général $|b_n|$.

On désigne par $\Delta'$ l'ensemble des $z$ vérifiant $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$. On confondra dans le langage les nombres complexes et les points du plan complexe les représentant.

**6** **6.a** Pour tout $z$ complexe, on pose $z = x + iy$, $x$ et $y$ étant réels ; calculer $\ln|F(z)|$ en fonction de $x$ et $y$.

**6.b** Etant donné un réel $\lambda$ strictement positif, on appelle $C_\lambda$ l'ensemble des $z$ vérifiant $|F(z)| = \lambda$. Déterminer une équation cartésienne de $C_\lambda$ ; indiquer la nature et la position de $C_\lambda$.

**6.c** Tracer sur un même graphique les $C_\lambda$ correspondant à $\lambda = \frac{1}{e},\ 1,\ \sqrt{e},\ e,\ e^2$.

**7** Quelle est la borne supérieure de $|F(z)|$ lorsque $z$ décrit $\Delta'$ ? Est-elle atteinte ? Si oui, en quels points ?

**8** **8.a** Montrer que F est continue en tout point autre que 1.

**8.b** F admet-elle une limite au point 1 ?

**8.c** La restriction de F à $\Delta$ a-t-elle une limite au point 1 ?

**9** Déduire de **8** la valeur de R.
La série $\sum |b_n|$ est-elle convergente ?

**10** **10.a** On donne $r$ compris strictement entre 0 et 1. Etablir les formules valables pour tout $n$ entier naturel :

$$b_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(re^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left(\int_0^{\pi} F(re^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta\right)$$

**10.b** Etablir la convergence de l'intégrale $\int_0^{\pi} F(e^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta$.

**10.c** Démontrer que l'on a

$$\lim_{r\to 1^-}\int_0^{\pi} F(re^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi} F(e^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta$$

**11** En déduire la formule :

$$b_n = \frac{2\sqrt{e}}{\pi}\operatorname{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(2int + \frac{i}{2\tan t}\right) dt\right)$$

**12** Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donner une constante majorant $|b_n|$.

**13** On pose, pour tout $t$ compris strictement entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et pour tout $n$ entier strictement positif : $u_n(t) = 2nt + \frac{1}{2\tan t}$.
Etudier les variations et le signe des fonctions $u_n, u_n', u_n''$. Expliciter en fonction de $n$ la valeur $T_n$ de l'unique zéro de $u_n'$.

**14** **14.a** Etablir, pour tout $n > 0$, l'existence et l'unicité d'un couple $\alpha_n$, $\beta_n$ de réels tels que :
$0 < \alpha_n < T_n < \beta_n < \frac{\pi}{2}$ et $u_n'(\beta_n) = -u_n'(\alpha_n) = n^{3/4}$.

**14.b** Démontrer l'inégalité $u_n''(\beta_n) \geq 2n^{3/2}$.

**14.c** En déduire une majoration de $\beta_n - \alpha_n$.

**15** Pour tout $n > 0$, on appelle respectivement $I_n$, $J_n$, $K_n$ et $L_n$ les intégrales de la fonction $t \mapsto \exp(iu_n(t))$ sur les intervalles $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $[0, \alpha_n]$, $[\alpha_n, \beta_n]$, $\left[\beta_n, \frac{\pi}{2}\right]$.

**16** **16.a** Donner une majoration de $|K_n|$.

**16.b** En écrivant : $\mathrm{L}_n = \displaystyle\int_{\beta_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{iu_n'(t)} e^{iu_n(t)} iu_n'(t)\,\mathrm{d}t$, établir l'inégalité $|\mathrm{L}_n| \leq \dfrac{2}{n^{3/4}}$.

**16.c** Majorer par la même technique $|\mathrm{J}_n|$.

**16.d** Déduire de ce qui précède une majoration de $|b_n|$ du type $\mathrm{C}n^{-3/4}$ où C est une constante entière, qui soit valable pour tout $n$. On ne cherchera pas la meilleure valeur possible de C.

## 3 TROISIEME PARTIE

Cette partie est indépendante de la précédente. Elle a pour but essentiel une étude sommaire de la variation du signe de $b_n$ en fonction de $n$.

**17** Déterminer une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 vérifiée par $\mathrm{F}(x)$ lorsque $x$ décrit $]-1, 1[$.

**18** On pose, dans la suite du problème, $c_n = nb_n$ pour tout $n$.

**19** **19.a** Etablir la relation de récurrence (R) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_{n+1} = \left(2 - \frac{1}{n}\right)c_n - c_{n-1}$$

**19.b** Déterminer $c_n$ pour $n$ allant de 0 à 6.

**19.c** Montrer que s'il existe $n$ non nul tel que $c_n = 0$, alors $c_{n-1}$ et $c_{n+1}$ sont non nuls et de signes opposés.

**20** On pose, pour tout $n$ entier strictement positif : $d_n = c_n - c_{n-1}$.
On suppose, dans cette seule question, qu'il existe $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $c_n > 0$. En remarquant que $d_{n+1} - d_n = -\dfrac{c_n}{n} = -b_n$, aboutir à une contradiction.

**21** On peut donc définir (on ne demande pas de le justifier) une suite $(\theta_n)_{n\geq1}$ strictement croissante et à valeurs entières, possédant les propriétés suivantes :

- $\theta_1 = 0$ ;
- $(-1)^n c_{\theta_n} \geq 0$ ;
- pour tout $k$ tel que $\theta_n < k < \theta_{n+1}$, on a $(-1)^n c_k > 0$.

On note $\mathrm{U}_n$ l'intervalle d'entiers $[\![\theta_n, \theta_{n+1}[\![$ et $\mathrm{M}_n = \max\limits_{k\in\mathrm{U}_n} |c_k|$.
Dans la suite de cette question on suppose que $n$ est pair.

**21.a** Etablir les inégalités :

$$0 \leq c_{\theta_n} < c_{\theta_n+1} \text{ et } c_{\theta_{n+1}-2} > c_{\theta_{n+1}-1} > 0$$

En déduire une minoration de $\theta_{n+1} - \theta_n$.

**21.b** Etudier les variations de $d_p$ lorsque $p$ varie de $\theta_n$ à $\theta_{n+1}$.

**21.c** En déduire les variations de $c_p$ quand $p$ décrit $\mathrm{U}_n$.

**21.d** Etablir que si $p, q, r$ appartiennent à $\mathrm{U}_n$ et vérifient $p < q < r$, on a alors : $\dfrac{c_q - c_p}{q - p} > \dfrac{c_r - c_q}{r - q}$.
Faire une figure représentant l'ensemble des points de coordonnées $(k, c_k)$, $k$ décrivant $\mathrm{U}_n$ ; interpréter géométriquement l'inégalité précédente.

**21.e** Indiquer très sommairement ce que deviennent les résultats ci-dessus pour $n$ impair.

**22** **22.a** Soit $n$ un entier pair et $h$ un entier vérifiant $0 \leq h < \theta_{n+1} - \theta_n$.
Etablir la relation $c_{\theta_n+h} \leq (h+1)d_{\theta_n}$.

**22.b** En déduire $d_{\theta_n+h} \geq d_{\theta_n}\left(1 - \dfrac{h(h+1)}{2\theta_n}\right)$.

**22.c** Soit $\omega_n$ le plus petit entier $k$ de $\mathrm{U}_n$ tel que $c_k = \mathrm{M}_n$.
Donner une minoration de $\omega_n - \theta_n$ ne faisant intervenir que $\theta_n$.

**22.d** Montrer que la minoration obtenue est valable aussi pour $n$ impair.
Quelle est la limite de $\theta_{n+1} - \theta_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?