Intégrales impropres

On a défini en première année l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Il s'agit maintenant de donner un sens si possible à l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle autre qu'un segment. On parle alors d'intégrales impropres ou généralisées.

Exemple 0.1

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale impropre puisque $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$ mais $[1, +\infty[$ n'est pas un segment.

Exemple 0.2

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$ est une intégrale impropre car tan est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ mais $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ n'est pas un segment.

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Convergence d'intégrales

1.1 Continuité par morceaux

On a vu en premier la définition d'une fonction continue par morceaux sur un **segment**. On peut étendre cette notion à un intervalle quelconque.

Définition 1.1 Fonction continue par morceaux sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que f est continue par morceaux si la restriction de f à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.

1.2 Intégrales impropres

Définition 1.2 Intégrale convergente sur un intervalle semi-ouvert

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ **converge** si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite en b^-. Cette limite est alors notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale **diverge**.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ **converge** si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$ admet une limite en a^+. Cette limite est alors notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale **diverge**.

Remarque.

- Si l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge, alors pour tout $c \in [a, b[$ l'intégrale de f converge.
- Si l'intégrale de f sur $]a, b]$ converge, alors pour tout $c \in]a, b]$ l'intégrale de f converge.

Analogie avec les séries

Par analogie avec les séries, on peut définir le concept d'«intégrale partielle» et de «reste».

- Dans le cas d'une intégrale sur $[a, b[$, l'«intégrale partielle» sera $x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ pour $x \in [a, b[$. On peut alors dire que l'intégrale converge si l'«intégrale partielle» admet une limite finie en b^-. Dans ce cas, le «reste» sera $x \mapsto \int_x^b f(t)\, dt$ et il est de limite nulle en b^-.
- Dans le cas d'une intégrale sur $]a, b]$, l'«intégrale partielle» sera $x \mapsto \int_x^b f(t)\, dt$ pour $x \in]a, b]$. On peut alors dire que l'intégrale converge si l'«intégrale partielle» admet une limite finie en a^+. Dans ce cas, le «reste» sera $x \mapsto \int_x^b f(t)\, dt$ et il est de limite nulle en a^+.

Attention ! Contrairement aux séries, une intégrale du type $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ peut converger sans que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. Pire, f peut même ne pas être bornée.

Exemple 1.1

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^{a} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Définition 1.3 Intégrale sur un intervalle ouvert

Soient $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $a \leq b$ et f continue par morceaux sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les convergences des intégrales de f sur $[c, b[$ et sur $]a, c]$ ne dépendent pas de $c \in]a, b[$. Dans le cas où ces deux intégrales convergent, on dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ converge et on pose

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt$$

Cette quantité ne dépend pas de $c \in]a, b[$.

Exemple 1.2

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge.

Remarque. Si $\mathrm{I} =]a, b[$ est un intervalle **borné** et si f est continue par morceaux sur I et admet des limites finies en a^+ et b^-, alors l'intégrale de f sur I converge.

1.3 Propriétés

Proposition 1.1

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On pose $a = \inf \mathrm{I}$ et $b = \sup \mathrm{I}$.

Linéarité Si les intégrales de f et g sur I convergent, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, l'intégrale de $\lambda f + \mu g$ sur I converge et

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\ \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$$

Autrement dit, l'ensemble des fonctions dont l'intégrale sur I converge est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application qui à une telle fonction associe son intégrale sur I est une forme linéaire.

Positivité Si f est positive sur I et si l'intégrale de f sur I converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geq 0$.

Stricte positivité On suppose $a < b$. Si f est positive et continue sur I et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0$, alors f est nulle sur I.

Relation de Chasles Si l'intégrale de f sur I converge, alors pour tout $c \in]a, b[$,

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

Attention ! Prendre garde à l'ordre des bornes pour la positivité.

Proposition 1.2 Dérivation

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si l'intégrale de f sur $[a, b[$ **converge**, alors $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a, b[$, de dérivée $-f$.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue sur $]a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si l'intégrale de f sur $]a, b]$ **converge**, alors $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est dérivable sur $]a, b]$ de dérivée f.

2 Intégrabilité

2.1 Définition

Définition 2.1 Intégrabilité

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I. On dit que f est **intégrable** sur I si l'intégrale de $|f|$ sur I converge.

Remarque. On dit également que l'intégrale **converge absolument**. L'intégrabilité pour les fonctions est donc l'analogue de l'absolue convergence pour les séries.

Remarque. Pour une fonction à valeurs **positives**, l'intégrabilité équivaut à la convergence de l'intégrale.

Remarque. Si $\mathrm{I} =]a, b[$ est un intervalle **borné** et si f est continue par morceaux sur I et admet des limites finies en a^+ et b^-, f est intégrable sur I.

Proposition 2.1 Structure d'espace vectoriel

L'ensemble des fonctions intégrables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 2.2 Intégrales de Riemann

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
- $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]0, a[$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ est intégrable sur $]a, b]$ si et seulement si $\alpha < 1$.
- $x \mapsto \dfrac{1}{|x-b|^\alpha}$ est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Proposition 2.3 Inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si f est intégrable sur I, alors l'intégrale de f sur I converge. De plus,

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

où $a = \inf \mathrm{I}$ et $b = \sup \mathrm{I}$.

Remarque. Ce résultat est à mettre en parallèle avec le fait que la convergence absolue implique la convergence pour les séries.

Attention ! L'intégrale d'une fonction peut très bien converger sans que la fonction soit intégrable. On parle alors d'intégrale **semi-convergente**.

Exemple 2.1

L'intégrale de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sur $]0, +\infty[$ converge mais cette fonction n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

2.2 Intégrabilité par comparaison

Proposition 2.4

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b[$ **à valeurs positives**. L'intégrale de f sur $[a, b[$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $]a, b]$ **à valeurs positives**. L'intégrale de f sur $]a, b]$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $]a, b]$.

Proposition 2.5 Majoration

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I, f à valeurs dans $\mathbb{K}$ et g **à valeurs positives**. Si $|f| \leq g$ sur I et si g est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.

Exemple 2.2

$f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2+1}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ puisque pour tout $t \in [1, +\infty[$, $|f(t)| \leq \dfrac{1}{t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Proposition 2.6 Domination

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$, f à valeurs dans $\mathbb{K}$ et g **à valeurs positives**. Si $f \underset{b^-}{=} \mathcal{O}(g)$ et si g est intégrable sur $[a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$, f à valeurs dans $\mathbb{K}$ et g **à valeurs positives**. Si $f \underset{a^+}{=} \mathcal{O}(g)$ et si g est intégrable sur $]a, b]$, alors f est intégrable sur $]a, b]$.

Proposition 2.7 Négligeabilité

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$, f à valeurs dans $\mathbb{K}$ et g **à valeurs positives**. Si $f \underset{b^-}{=} o(g)$ et si g est intégrable sur $[a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$, f à valeurs dans $\mathbb{K}$ et g **à valeurs positives**. Si $f \underset{a^+}{=} o(g)$ et si g est intégrable sur $]a, b]$, alors f est intégrable sur $]a, b]$.

Proposition 2.8 Equivalence

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$, f à valeurs dans $\mathbb{K}$ et g **à valeurs positives**. Si $f \underset{b^-}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si g l'est.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$, f à valeurs dans $\mathbb{K}$ et g **à valeurs positives**. Si $f \underset{a^+}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $]a, b]$ si et seulement si g l'est.

Exemple 2.3 Fonction Γ d'Euler

La fonction $\Gamma\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Tout d'abord, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- De plus, $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1}$ et la fonction positive $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable au voisinage de 0^+ si et seulement si $x > 0$.
- Enfin, $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to0^+}{=} o(1/t^2)$ et la fonction positive $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Ainsi $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x > 0$. Comme cette fonction est positive, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.

Exemple 2.4 Fonction B d'Euler

La fonction $\mathrm{B}\colon (x,y) \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

- Tout d'abord, la fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1[$.
- De plus, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1}$ et la fonction positive $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable au voisinage de 0^+ si et seulement si $x > 0$.
- Enfin, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to1^-}{\sim} (1-t)^{y-1}$ et la fonction positive $t \mapsto (1-t)^{y-1}$ est intégrable au voisinage de $1-$ si et seulement si $y > 0$.

Ainsi $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$. Comme cette fonction est positive, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ converge si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

3 Calcul d'intégrales

3.1 Changement de variables

Proposition 3.1 Changement de variables

Soient $(a,b,\alpha,\beta) \in \overline{\mathbb{R}}^4$ tel que $a \leq b$ et $\alpha \leq \beta$, f une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et φ une bijection croissante de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors les intégrales

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature et, en cas de convergence, sont égales.

Remarque. Si φ est décroissante, on a

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

Méthode **Changement de variable**

On dit qu'on effectue le changement de variable $t = \varphi(u)$. Comment alors se souvenir de la formule ?

- On remplace t par $\varphi(u)$ dans la fonction à intégrer.
- $\frac{dt}{du} = \varphi'(u)$ donc $dt = \varphi'(u)\,du$ et on remplace dans l'intégrale.
- t doit varier entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ lorsque u varie entre a et b, ce qui nous donne les bornes de l'intégrale en u.

Exemple 3.1

Montrons que l'intégrale $\mathrm{I} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$ converge et déterminons sa valeur. On va effectuer le changement de variable $u = \sqrt{1+t^2}$ i.e. $t = \sqrt{u^2-1}$. L'application $u \mapsto \sqrt{u^2-1}$ est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\sqrt{2}, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. On en déduit que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$ et $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{du}{u^2-1}$ sont de même nature puisque $dt = \frac{u\,du}{\sqrt{u^2-1}}$. Une décomposition en éléments simples montre alors que

$$\forall u \in \left[\sqrt{2}, +\infty\right[, \ \frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)$$

On en déduit que

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Exemple 3.2 Symétrie de la fonction B

On rappelle que $\mathrm{B} : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. A l'aide du changement de variable affine $t \mapsto 1-t$, on montre que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ \mathrm{B}(x, y) = \mathrm{B}(y, x)$$

Exercice 3.1 Expressions alternatives de la fonction B

On rappelle que $\mathrm{B} : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

1. A l'aide du changement de variable $t = \sin^2\theta$, montrer que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ \mathrm{B}(x, y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2y-1}(\theta)\,d\theta$$

2. A l'aide du changement de variable $t = \frac{u}{1+u}$, montrer que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ \mathrm{B}(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du$$

3.2 Intégration par parties

Proposition 3.2 Intégration par parties

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si fg admet des limites finies en a^+ et b^-, alors les intégrales de $f'g$ et fg' sur $]a,b[$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

où $[fg]_a^b = \lim_{t\to b^-} f(t)g(t) - \lim_{t\to a^+} f(t)g(t)$.

Remarque. Le résultat reste valable si $b \leq a$.

Exemple 3.3

Montrons la convergence et calculons l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$. Posons $f(t) = t$ et $g(t) = -e^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ de sorte que $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$. Puisque fg admet des limites finies en 0 et $+\infty$, les intégrales $\int_0^{+\infty} te^{-t}$ et $\int_0^{+\infty} f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Puisque $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, il en est donc de même pour $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$, ce que l'on aurait pu prouver directement. De plus,

$$\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{+\infty} fg - \lim_0 fg + \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

Exemple 3.4 Relation fonctionelle de la fonction Γ

On rappelle que $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto t^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $t \mapsto xt^{x-1}$. La fonction $t \mapsto -e^{-t}$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $t \mapsto e^{-t}$. Par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

L'égalité est assurée par la convergence des deux intégrales. De plus, comme $x > 0$

$$\lim_{t\to 0^+} t^x e^{-t} = 0$$

et, par croissances comparées,

$$\lim_{t\to+\infty} t^x e^{-t} = 0$$

On en déduit que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)$$

Exercice 3.2

Calculer $\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exemple 3.5 Relation fonctionnelle de la fonction B

On rappelle que $\mathrm{B}\colon (x,y)\mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrons que

$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ \mathrm{B}(x+1,y)=\frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x,y)$$

Les fonctions $t\mapsto t^x$ et $t\mapsto (1-t)^y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ de dérivées respectives $t\mapsto xt^{x-1}$ et $t\mapsto -y(1-t)^{y-1}$. Par intégrations par parties,

$$\int_0^1 yt^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = -\left[t^x(1-t)^y\right]_0^1+\int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t$$

L'égalité est assurée par la convergence des deux intégrales. Puisque $x>0$ et $y>0$,

$$\lim_{t\to0^+} t^x(1-t)^y=\lim_{t\to1^-} t^x(1-t)^y=0$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
y\mathrm{B}(x+1,y) &= \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t\\
&= x\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t)\,\mathrm{d}t\\
&= x\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t - x\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{car ces deux intégrales convergent}\\
&= x\mathrm{B}(x,y)-x\mathrm{B}(x+1,y)
\end{aligned}$$

ou encore

$$\mathrm{B}(x+1,y)=\frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x,y)$$

Exercice 3.3

Calculer $\mathrm{B}(n+1,p+1)=\int_0^1 t^n(1-t)^p\,\mathrm{d}t$ pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$.

Exercice 3.4 Intégrale de Dirichlet

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Cette intégrale converge-t-elle absolument ?

4 Intégration des relations de comparaison

Proposition 4.1

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$. On suppose de plus que g est **positive** au voisinage de b^-.

Domination On suppose que $f \underset{b^-}{=} \mathcal{O}(g)$.

- Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge et $\int_x^b f(t)\,dt \underset{x\to b^-}{=} \mathcal{O}\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$.
- Si $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^x f(t)\,dt \underset{x\to b^-}{=} \mathcal{O}\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$.

Négligeabilité On suppose que $f \underset{b^-}{=} o(g)$.

- Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge et $\int_x^b f(t)\,dt \underset{x\to b^-}{=} o\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$.
- Si $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^x f(t)\,dt \underset{x\to b^-}{=} o\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$.

Equivalence On suppose que $f \underset{b^-}{\sim} g$.

- Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge et $\int_x^b f(t)\,dt \underset{x\to b^-}{\sim} \int_x^b g(t)\,dt$.
- Si $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge et $\int_a^x f(t)\,dt \underset{x\to b^-}{\sim} \int_a^x g(t)\,dt$.

Remarque. On a des résultats analogues pour des fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$ quitte à utiliser des relations de comparaison en a^+ et non b^-.

Remarque. Ces résultats sont l'exact pendant des résultats sur les sommations de relations de comparaison dans le cadre des séries. Il vaut voir $x \mapsto \int_x^b f(t)\,dt$ comme un «reste» et $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ comme une «somme partielle».

Exemple 4.1

- On sait que $\frac{1}{t+\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$, que $t \mapsto \frac{1}{t}$ est positive au voisinage de $+\infty$ et que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+\sqrt{t}}$ diverge et $\int_1^x \frac{dt}{t+\sqrt{t}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$.
- On sait que $\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \underset{t\to0^+}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, que $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est positive au voisinage de 0^+ et que $\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge donc $\int_0^{\pi} \frac{\sin t\,dt}{\sqrt{t}}$ converge et $\int_0^x \frac{\sin t\,dt}{\sqrt{t}} \underset{x\to0^+}{=} \mathcal{O}\left(\int_0^x \frac{\sin t\,dt}{t}\right)$ ou encore $\int_0^x \frac{\sin t\,dt}{\sqrt{t}} \underset{x\to0^+}{=} \mathcal{O}(\sqrt{x})$.

Attention ! Il est essentiel que la fonction de référence soit positive au voisinage du point considéré. Par exemple $\frac{\cos t}{\sqrt{t}} + \frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}$. On montre que l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{t}}$ converge par intégration par parties. Par contre, l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty}\left(\frac{\cos t}{\sqrt{t}}+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ diverge puisque l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge.