

NOMBRES RÉELS, RELATIONS BINAIRE

SOLUTION 1.

1. On a clairement dans le premier cas

$$d(1, A) = 0,$$

dans le deuxième

$$d(2, A) = 1,$$

et dans le troisième

$$d(1/2, A) = 0.$$

2. L'ensemble

$$\Omega = \{ |x - a| \mid a \in A \}$$

est une partie non vide (puisque A est non vide) de \mathbb{R} , Ω est de plus minorée par 0, Ω admet donc une borne inférieure.

3. La borne inférieure $d(x, A)$ n'est pas nécessairement un plus petit élément :

- si $A =]0, 1]$ et $x = 0$, on a $\Omega =]0, 1]$ et $d(x, A) = 0$ et $0 \notin A$, la borne inférieure n'est donc pas un plus petit élément.
- si $A = [0, 1]$ et $x = 0$, on a $\Omega = [0, 1]$ et $d(x, A) = 0$ et $0 \in A$, la borne inférieure est donc un plus petit élément.

4. Soit $\varepsilon > 0$, puisque \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} ,

$$\mathbb{Q} \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\neq \emptyset,$$

ainsi $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel que

$$|x - r| < \varepsilon$$

et donc $d(x, \mathbb{Q}) \leq \varepsilon$. Par définition de la borne inférieure de Ω , $d(x, \mathbb{Q}) \leq \varepsilon$. Puisque $d(x, \mathbb{Q}) \geq 0$ et

$$\forall \varepsilon > 0, \quad d(x, \mathbb{Q}) \leq \varepsilon$$

on peut conclure que $d(x, \mathbb{Q}) = 0$. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ étant dense dans \mathbb{R} , on adapte sans peine ce qui précède pour montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad d(x, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0.$$

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$|x - a| \leq |x - y| + |y - a|,$$

or $\forall a \in A$,

$$d(x, A) \leq |x - a|,$$

ainsi $\forall a \in A$

$$d(x, A) - |x - y| \leq |y - a|.$$

Le nombre $d(x, A) - |x - y|$ est donc un minorant de l'ensemble

$$\{ |y - a|, a \in A \},$$

d'où

$$d(x, A) - |x - y| \leq d(y, A)$$

soit

$$d(x, A) - d(y, A) \leq |x - y|,$$

et puisque x et y jouent des rôles symétriques, on a aussi

$$d(y, A) - d(x, A) \leq |x - y|,$$

ainsi

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|.$$

SOLUTION 2.

Posons, pour tout réel x ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor.$$

► La fonction f est $1/n$ -périodique car, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f(x + 1/n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{1}{n} + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor n(x + 1/n) \rfloor \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k+1}{n} \right\rfloor - \lfloor nx + 1 \rfloor \\ &= \sum_{k=1}^n \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor - 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor + \lfloor x + 1 \rfloor - \lfloor nx \rfloor - 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor + 1 - \lfloor nx \rfloor - 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor \\ &= f(x) \end{aligned}$$

◇ Soit alors $x \in [0, 1/n[$. On a $\lfloor nx \rfloor = 0$ et

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, \quad 0 \leq x + \frac{k}{n} < \frac{n-1+1}{n} = 1$$

d'où

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, \quad \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = 0,$$

et finalement $f(x) = 0$.

► La fonction f est $1/n$ -périodique et nulle sur $[0, 1/n[$, elle est donc nulle sur \mathbb{R} .

SOLUTION 3.

1. Soit $n \geq 1$. L'inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

est équivalente à

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2 \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

i.e.

$$2\sqrt{n} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < 2\sqrt{n+1}.$$

Comme

$$\sqrt{n} < \sqrt{n+1},$$

cette dernière inégalité est vraie, d'où l'inégalité initiale.

2. D'après le 1., pour tout $1 \leq k \leq 9999$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

En additionnant ces 9999 inégalités, on aboutit après telescoping à :

$$\alpha - 1 < 2(\sqrt{1000} - \sqrt{1}) < \alpha - \frac{1}{100},$$

d'où

$$198 + \frac{1}{100} < \alpha < 199$$

ainsi

$$[\alpha] = 198.$$

SOLUTION 4.

Posons, pour tout réel x ,

$$f(x) = \left\lfloor \frac{[nx]}{n} \right\rfloor - [x].$$

► La fonction f est 1-périodique car, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \left\lfloor \frac{[nx+n]}{n} \right\rfloor - [x+1] = \left\lfloor \frac{[nx] + n}{n} \right\rfloor - [x+1] \\ &= \left\lfloor \frac{[nx]}{n} + 1 \right\rfloor - [x+1] = \left\lfloor \frac{[nx]}{n} \right\rfloor + 1 - [x] - 1 = \left\lfloor \frac{[nx]}{n} \right\rfloor - [x] \\ &= f(x) \end{aligned}$$

► Soit alors $x \in [0, 1[$. On a $[x] = 0$ et $nx \in [0, n[$ d'où $\frac{[nx]}{n} \in [0, 1[$ et donc

$$\left\lfloor \frac{[nx]}{n} \right\rfloor = 0$$

et finalement $f(x) = 0$.

► La fonction f est 1-périodique et nulle sur $[0, 1[$, elle est donc nulle sur \mathbb{R} .

SOLUTION 5.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - [x].$$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x+1) &= \left\lfloor \frac{x+1+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - [x+1] \\ &= \left\lfloor \frac{x}{2} + 1 \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - [x] - 1 \\ &= \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - [x] - 1 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver que g est nulle sur $[0, 1[$. Soit alors $0 \leq x < 1$. On a

$$\frac{x}{2}, \frac{x+1}{2} \in [0, 1[$$

d'où $g(x) = 0 + 0 - 0 = 0$.

SOLUTION 6.

1. On a clairement

$$\{54, 465\} = 0,465 \quad \text{et} \quad \{-36, 456\} = 0,544.$$

2. Si $x \in \mathbb{Z}$,

$$\{-x\} = \{x\}.$$

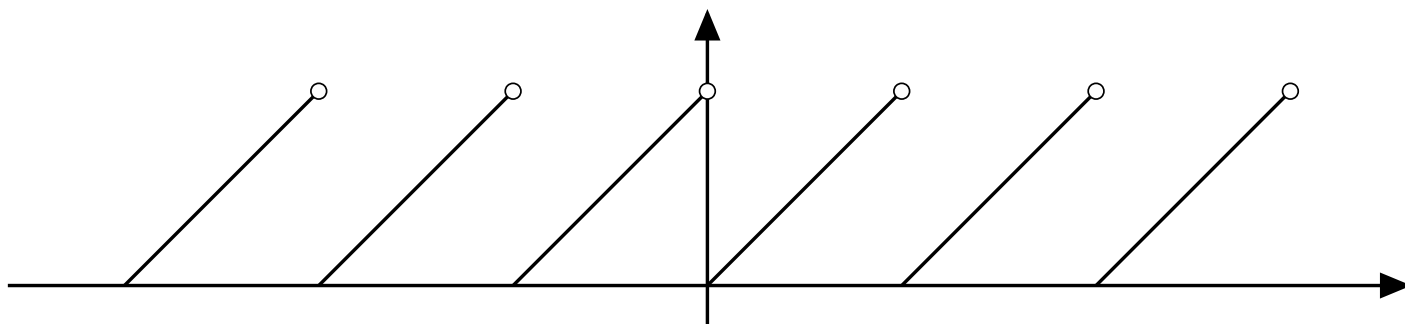
Si $x \notin \mathbb{Z}$, on a $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$ donc

$$\{-x\} = 1 - \{x\}.$$

3. on a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\{x+1\} = x+1 - \lfloor x+1 \rfloor = x+1 - \lfloor x \rfloor - 1 = \{x\}.$$

D'où l'allure du graphe de la partie fractionnaire ...

**SOLUTION 7.**

Puisque

$$x+y-1 < \lfloor x+y \rfloor \leq x+y,$$

$$x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

et

$$y-1 < \lfloor y \rfloor \leq y,$$

on a

$$-1 < \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor < 2,$$

ainsi

$$\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}.$$

Les deux valeurs sont bien prises par l'expression car, par exemple,

$$\lfloor 0+0 \rfloor - \lfloor 0 \rfloor - \lfloor 0 \rfloor = 0$$

et

$$\lfloor 1.5+1.5 \rfloor - \lfloor 1.5 \rfloor - \lfloor 1.5 \rfloor = 1.$$

SOLUTION 8.

1. On a $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = m$ si et seulement si

$$m \leq \sqrt{k} < m+1,$$

c'est-à-dire

$$m^2 \leq k < (m+1)^2.$$

2. On a

$$\begin{aligned}
 u_n &= \sum_{m=1}^n \sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor = \sum_{m=1}^n \sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} m \\
 &= \sum_{m=1}^n m(2m+1) = 2 \sum_{m=1}^n m^2 - \sum_{m=1}^n m \\
 &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{3} - \frac{m(m+1)}{2} \\
 &= \frac{m(m+1)(4m-1)}{6}
 \end{aligned}$$

SOLUTION 9.

1. Soit x tel que $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor$. On a alors,

$$2x-2 < \lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor \leq x+1$$

et donc $2x-2 < x+1$, ie $x < 3$. De même,

$$x < \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor 2x-1 \rfloor \leq 2x-1$$

et donc $x < 2x-1$, ie $1 < x$. Ainsi, toute solution de l'équation appartient à $]1, 3[$.

Réciproquement ...

- Si $1 < x < \frac{3}{2}$, on a $\lfloor 2x-1 \rfloor = 1$ et $\lfloor x+1 \rfloor = 2$, x n'est donc pas solution.
- Si $\frac{3}{2} \leq x < 2$, on a $\lfloor 2x-1 \rfloor = 2$ et $\lfloor x+1 \rfloor = 2$, x est donc solution.
- Si $2 \leq x < \frac{5}{2}$, on a $\lfloor 2x-1 \rfloor = 3$ et $\lfloor x+1 \rfloor = 3$, x est donc solution.
- Si $\frac{5}{2} \leq x < 3$, on a $\lfloor 2x-1 \rfloor = 4$ et $\lfloor x+1 \rfloor = 4$, x n'est donc pas solution.

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right[.$$

2. Soit x tel que $\lfloor x+3 \rfloor = \lfloor x-1 \rfloor$. On a alors,

$$x+2 < \lfloor x+3 \rfloor = \lfloor x-1 \rfloor \leq x-1$$

et donc $x+2 < x-1$, ie $2 < -1$, ce qui est absurde. Il n'y a donc aucune solution.

SOLUTION 10.

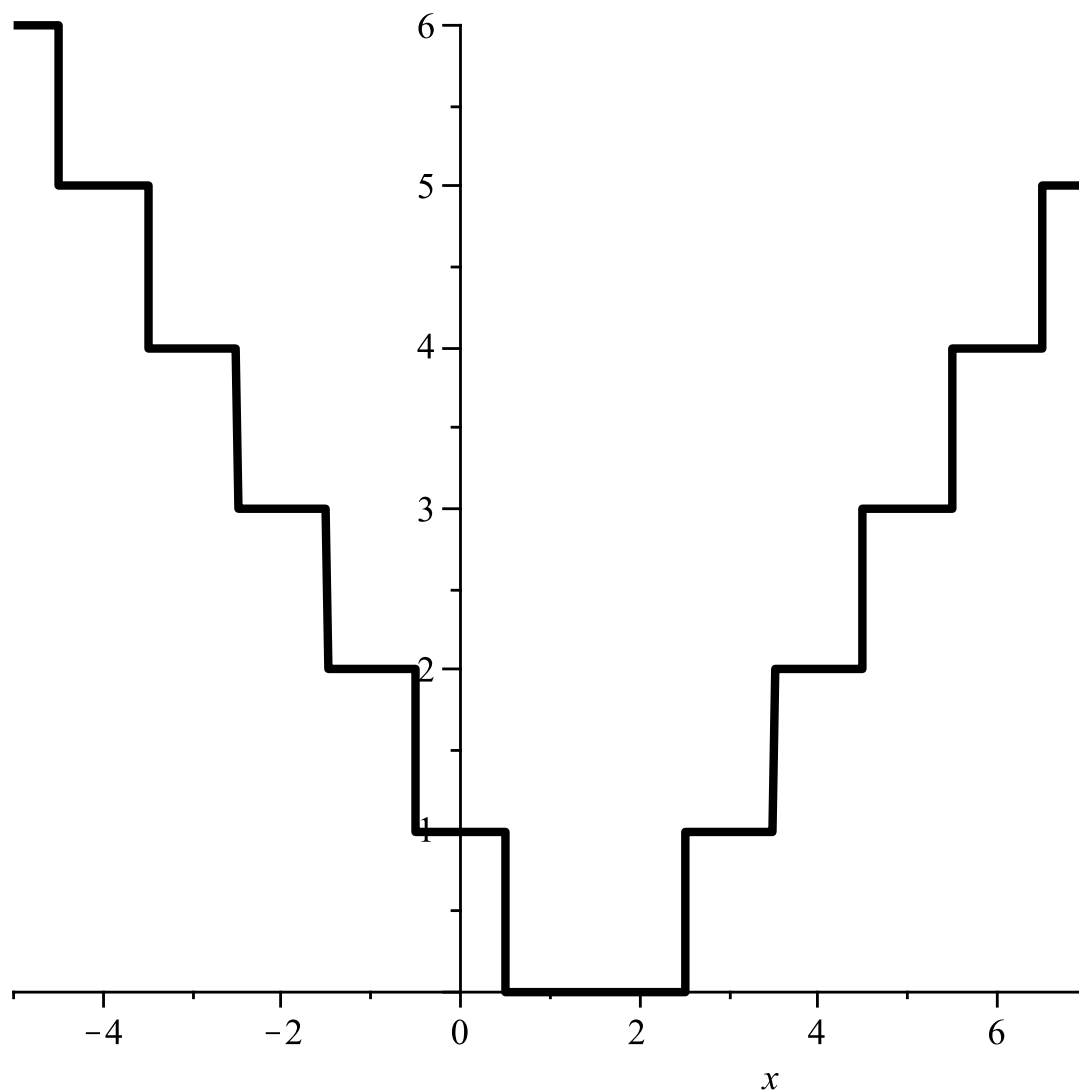
On a $\forall x \geq 3/2$,

$$\lfloor 3/2 - x \rfloor = \lfloor x - 3/2 \rfloor = -1 + \lfloor x - 1/2 \rfloor.$$

De même, $\forall x \leq 3/2$,

$$\lfloor 3/2 - x \rfloor = \lfloor -x + 3/2 \rfloor = 1 + \lfloor -x + 1/2 \rfloor.$$

D'où l'allure du graphe de f sur \mathbb{R}

**SOLUTION 11.**

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = [nx] - n[x].$$

Comme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = f(x),$$

il suffit d'établir l'inégalité sur $[0, 1[$. Or, sur cet intervalle,

$$[x] = 0$$

d'où

$$f(x) = [nx] \geq 0.$$

De plus, comme $nx < n$, on a

$$f(x) = [nx] \leq n-1.$$

SOLUTION 12.

1. $A \neq \emptyset$ car $0 \in A$. En effet, $f(0) \in [0, 1]$ donc $f(0) \geq 0$. A est clairement majorée par 1.
2. $0 \in A$ donc $0 \leq c$. De plus, 1 est un majorant de A . Comme c est le plus petit majorant de A , $c \leq 1$. Par conséquent, $c \in [0, 1]$.
3. Soit $x \in A$. On a $x \leq c$. Comme f est croissante, on a $f(x) \leq f(c)$. Comme $x \in A$, $x \leq f(x) \leq f(c)$. Ceci étant valable pour tout $x \in A$, on obtient après passage à la borne supérieure $c \leq f(c)$.
4. On a montré à la question précédente que $c \leq f(c)$. Par croissance de f , on a donc $f(c) \leq f(f(c))$. Donc $f(c) \in A$. Comme $c = \sup A$, on en déduit que $f(c) \leq c$. Finalement $f(c) = c$ et c est un point fixe de f .

SOLUTION 13.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n . On a donc $n \geq 10^{k-1}$ i.e. $k \leq \log_{10} n + 1$ et $s_n \leq 9k$ puisque tout chiffre est inférieur ou égal à 9. Finalement, on obtient bien $s_n \leq 9(\log_{10} n + 1)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons p le nombre de chiffres 9 par lequel se termine l'écriture décimale de n . Lorsque l'on ajoute 1 à n , on transforme les p derniers chiffres 9 en des 0 et on ajoute 1 au chiffre précédent les p derniers chiffres 9. Ainsi $s_{n+1} = s_n - 9p + 1 \leq s_n + 1$. On a donc $\frac{s_{n+1}}{s_n} \leq 1 + \frac{1}{s_n} \leq 2$ puisque $s_n \geq 1$. Bien évidemment, on a également $\frac{s_{n+1}}{s_n} \geq 0$. Ainsi $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)$ est bien bornée.
Puisque $\frac{s_2}{s_1} = 2$, la borne supérieure de $\left\{\frac{s_{n+1}}{s_n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est 2 et elle est atteinte (c'est donc un maximum). De plus $\frac{s_{10^k}}{s_{10^k-1}} = \frac{1}{9k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ donc 0 est la borne inférieure de $\left\{\frac{s_{n+1}}{s_n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Cette borne n'est pas atteinte puisque $\frac{s_{n+1}}{s_n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

SOLUTION 14.

Posons $g(x) = \inf_{y \in B} f(x, y)$ pour tout $x \in A$ et $h(y) = \sup_{x \in A} f(x, y)$ pour tout $y \in B$.
Soit $(x, y) \in A \times B$. Alors $g(x) \leq f(x, y) \leq h(y)$. Ceci étant vrai quelque soit le choix de $x \in A$, $h(y)$ est un majorant de g sur A . Ainsi $\sup_{x \in A} g(x) \leq h(y)$. Cette dernière inégalité est vraie quelque soit le choix de $y \in B$ donc $\sup_{x \in A} g(x)$ est un minorant de h sur B . Ainsi $\sup_{x \in A} g(x) \leq \inf_{y \in B} h(y)$. Cette dernière inégalité est celle demandée par l'énoncé.

SOLUTION 15.

Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \inf f([x, +\infty[)$ et $h(x) = \sup f([x, +\infty[)$.
Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1 \leq x_2$.
Puisque $x_1 \leq x_2$, $[x_2, +\infty[\subset [x_1, +\infty[$ puis $f([x_2, +\infty[) \subset f([x_1, +\infty[)$. Il s'ensuit que $\inf f([x_1, +\infty[) \leq \inf f([x_2, +\infty[)$ i.e. $g(x_1) \leq g(x_2)$ et $\sup f([x_2, +\infty[) \leq \sup f([x_1, +\infty[)$ i.e. $h(x_2) \leq h(x_1)$.
Ainsi g est croissante et h est décroissante.

SOLUTION 16.

Soit $x \in A \cup B$. Alors, puisque $x \in A$ ou $x \in B$,

$$x \leq \max[\sup(A), \sup(B)],$$

$A \cup B$ est donc majoré et $\sup(A \cup B)$ étant le plus petit majorant de $A \cup B$,

$$\sup(A \cup B) \leq \max[\sup(A), \sup(B)].$$

De plus, puisque A et B sont inclus dans $A \cup B$,

$$\sup(A) \leq \sup(A \cup B) \quad \text{et} \quad \sup(B) \leq \sup(A \cup B),$$

et ainsi

$$\sup(A \cup B) \geq \max[\sup(A), \sup(B)],$$

et finalement

$$\sup(A \cup B) = \max[\sup(A), \sup(B)].$$

On prouve sans peine selon le même schéma la formule

$$\inf(A \cup B) = \min[\inf(A), \inf(B)].$$

SOLUTION 17.

1. Puisque $\forall n \geq 1$,

$$2 - \frac{1}{n} \geq 1$$

et que $1 \in \mathcal{A}$, cet ensemble admet 1 comme plus petit élément, donc comme borne inférieure. De plus puisque $\forall n \geq 1$,

$$2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

et que la suite d'éléments de \mathcal{A} de terme général $2 - 1/n$ tend vers 0, \mathcal{A} admet une borne inférieure qui vaut 2.

2. Puisque $\forall n, m \in \mathbb{Z}^*$,

$$-1 = 1 - 1 - 1 \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq 3$$

et que $3, -1 \in \mathcal{B}$, cet ensemble admet -1 comme plus petit élément (donc comme borne inférieure) et 3 comme plus grand élément (donc comme borne supérieure).

3. Puisque $\forall n, m \in \mathbb{Z}^*$ avec $m \neq n$,

$$0 \leq 1 - \frac{1}{n-m} \leq 2$$

et que $0, 2 \in \mathcal{C}$, cet ensemble admet 0 comme plus petit élément (donc comme borne inférieure) et 2 comme plus grand élément (donc comme borne supérieure).

4. De l'inégalité $(p - q)^2 \geq 0$, on conclut sans peine que

$$\frac{pq}{p^2 + q^2} \leq \frac{1}{2}.$$

On en déduit que \mathcal{D} est majoré ; puisque $1/2 \in \mathcal{A}$, $1/2$ est le plus grand élément de \mathcal{D} (donc la borne supérieure). De plus 0 minore clairement \mathcal{D} et \mathcal{D} contient la suite de terme général

$$u_n = \frac{n}{n^2 + 1},$$

qui tend vers 0, ainsi $\inf(\mathcal{D}) = 0$.

5. 0 minore clairement \mathcal{E} et puisque \mathcal{E} contient la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{2^n + 3^n},$$

qui tend vers 0, $\inf(\mathcal{E}) = 0$. Prouvons que $\forall m, n \geq 0$,

$$\frac{2^n}{2^m + 3^{m+n}} \leq \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$2^{n+1} \leq 2^m + 3^{m+n}.$$

Si $m \geq 1$, l'inégalité est acquise car alors

$$3^{m+n} \geq 3^{n+1} \geq 2^{n+1}.$$

Examinons le cas où $n = 0$: prouvons par récurrence que $\forall n \geq 0$,

$$3^n + 1 \geq 2^{n+1}.$$

L'inégalité est banale pour $n = 0$. Supposons-la vérifiée pour $n \geq 0$. On a alors

$$3^{n+1} + 1 \geq 3 \times [2^{n+1} - 1] + 1.$$

De plus

$$3 \times [2^{n+1} - 1] + 1 = 2^{n+2} + 2^{n+1} - 2 \geq 2^{n+2},$$

l'inégalité est donc vérifiée au rang $n + 1$, elle est donc vraie $\forall n \geq 0$ d'après le principe de récurrence. On a donc, puisque $1/2 \in \mathcal{E}$, $\sup(\mathcal{E}) = 1/2$.

6. Puisque $\forall n, q \geq 0$,

$$\frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1} = 2 + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{q+1},$$

on a

$$1 = 2 + 1 - 2 \leq \frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1} \leq 2 + 1 = 0.$$

Puisque $1 \in \mathcal{F}$, $\inf(\mathcal{F}) = 1$. De plus \mathcal{F} contient la suite de terme général

$$v_n = 3 - \frac{2}{n+1},$$

qui tend vers 3 donc $\sup(\mathcal{F}) = 3$.

7. Puisque $\forall n, m \geq 1$,

$$m^2 + 2mn + n^2 \geq 0,$$

on a

$$\frac{mn}{n^2 + mn + m^2} \leq \frac{1}{3},$$

et puisque $1/3 \in \mathcal{G}$, $\sup(\mathcal{G}) = 1/3$. De plus 0 minore \mathcal{G} et cet ensemble contient la suite de terme général

$$w_n = \frac{n}{n^2 + n + 1},$$

qui tend vers 0 donc $\inf(\mathcal{G}) = 0$.

SOLUTION 18.

L'ensemble, que nous noterons A , est non vide et borné car $\forall n \geq 1$,

$$-1 \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq 1.$$

A admet donc une borne supérieure et une borne inférieure. Puisque $\forall n \geq 3$,

$$-1 < \frac{(-1)^n}{n} < \frac{1}{2},$$

et $1/2, -1 \in A$, $\sup(A) = 1/2$ et il s'agit d'un plus grand élément. De même $\inf(A) = -1$ qui est aussi un plus petit élément.

SOLUTION 19.

Si A et B sont bornées non vides, on a pour tous $a \in A$ et $b \in B$,

$$\inf A \leq a \leq \sup A \quad \text{et} \quad \inf B \leq b \leq \sup B,$$

d'où en sommant

$$\forall a \in A, b \in B : \inf A + \inf B \leq a + b \leq \sup A + \sup B.$$

Cela montre que $A + B$ est bornée et possède donc une borne supérieure et une borne inférieure. En plus, ça exhibe $\inf A + \inf B$ en tant que minorant de $A + B$. Or $\inf(A + B)$ est le minorant le plus grand de $A + B$, d'où

$$\inf A + \inf B \leq \inf(A + B).$$

Et de même

$$\sup A + \sup B \geq \sup(A + B).$$

Il nous reste à voir que ces deux inégalités sont des égalités ; les deux cas étant analogues, nous traiterons uniquement le cas de la borne supérieure. Supposons donc par l'absurde que l'on ait

$$\sup A + \sup B > \sup(A + B).$$

Notons

$$\epsilon := \sup A + \sup B - \sup(A + B) > 0.$$

Par définition d'une borne supérieure, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que

$$\sup A - \frac{\epsilon}{2} < a \leq \sup A$$

et

$$\sup B - \frac{\epsilon}{2} < b \leq \sup B.$$

Par addition des parties gauches de ces encadrements

$$\sup A + \sup B - \epsilon < a + b.$$

Par définition de ϵ , cela équivaut à la contradiction

$$\sup(A + B) < a + b.$$

SOLUTION 20.

Soit r un rationnel. Il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$. Posons $u_n = \sqrt{q^2 n^2 + 2pn} - \sqrt{q^2 n^2}$ pour n suffisamment grand. La suite (u_n) est une suite d'éléments de A et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = qn \left(\sqrt{1 + \frac{2p}{q^2 n}} - 1 \right)$$

Comme $\sqrt{1 + \frac{2p}{q^2 n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p}{q^2 n}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{p}{q} = r$.

On en déduit que $\mathbb{Q} \subset \bar{A}$. Comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , $\mathbb{R} = \bar{\mathbb{Q}} \subset \bar{\bar{A}} = \bar{A}$. Ainsi A est dense dans \mathbb{R} .

SOLUTION 21.

Soient $x < y$. On a donc, par stricte croissance sur \mathbb{R} de $x \mapsto \sqrt[3]{x}$,

$$\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}.$$

Comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que

$$\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{y},$$

d'où

$$x < r^3 < y.$$

Ainsi E est dense dans \mathbb{R}

SOLUTION 22.

1. g est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$,

$$g'(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = -e^{-x} \frac{x^n}{n!}$$

Par conséquent, $g'(x) < 0$ pour $x \in]0, 1[$. g est donc strictement croissante sur $[0, 1]$.

2. On a en particulier $g(1) < g(0)$. Or $g(0) = 1$ et $g(1) = e^{-1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ d'où l'inégalité voulue.
3. h est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in]0, 1[$,

$$h'(x) = g'(x) + e^{-x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - e^{-x} \frac{x^n}{n!} = e^{-x} \frac{x^{n-1}}{n!} (n - 2x)$$

Comme $n \geq 2$, $h'(x) < 0$ pour $x \in [0, 1[$. Donc h est strictement croissante sur $[0, 1]$.

4. On a en particulier $h(0) < h(1)$. Or $h(0) = 1$ et $h(1) = e^{-1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \right)$ d'où l'inégalité voulue.
5. D'après ce qui précède, on a $a_n < n!e < a_n + 1$ avec $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$. a_n est un entier puisque $k!$ divise $n!$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Supposons $q \leq n$. Alors q divise $n!$ et $n!e$ est donc un entier compris strictement entre les deux entiers consécutifs a_n et $a_n + 1$, ce qui est impossible.
6. Comme ce qui a été fait est valable pour tout $n \geq 2$. On a $q > n$ pour tout entier $n \geq 2$, ce qui est clairement impossible.

SOLUTION 23.

1. On a $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$. Or $\alpha > \alpha - 1 > 0$ donc $\beta > 1$. On a également $\alpha = \frac{\beta}{\beta-1}$ donc, si β était rationnel, α le serait aussi.
2. a. On a $p\alpha - 1 < k \leq p\alpha$. L'inégalité large ne peut être une égalité car α est irrationnel. On obtient les premières inégalités en divisant par $\alpha > 0$. On procède de même pour les secondes inégalités. En additionnant les deux séries d'inégalités et en tenant compte du fait que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, on obtient $p + q - 1 < k < p + q$, ce qui est absurde puisque $p + q - 1$ et $p + q$ sont deux entiers consécutifs.
- b. Si $A \cap B \neq \emptyset$, il existe $k \in A \cap B$ i.e. il existe $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $k = \lfloor p\alpha \rfloor = \lfloor q\beta \rfloor$, ce qui est impossible d'après ce qui précède.
3. a. On a $\lfloor n\alpha \rfloor > n\alpha - 1$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha - 1 = +\infty$ car $\alpha > 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lfloor n\alpha \rfloor = +\infty$. De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lfloor n\beta \rfloor = +\infty$.
- b. Notons $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \lfloor n\alpha \rfloor < k\}$. E est non vide puisque $0 \in E$. Comme $\lfloor n\alpha \rfloor \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, E est majorée. Enfin E est une partie de \mathbb{N} donc elle admet un plus grand élément que l'on note p . Comme $p + 1 \notin E$, $\lfloor (p + 1)\alpha \rfloor \geq k$. Enfin $k \notin E$, donc $k \neq \lfloor (p + 1)\alpha \rfloor$. Ainsi $\lfloor p\alpha \rfloor < k < \lfloor (p + 1)\alpha \rfloor$.
On montre de la même manière l'existence de q .
- c. Les inégalités strictes entre entiers $\lfloor p\alpha \rfloor < k < \lfloor (p + 1)\alpha \rfloor$ équivalent à $\lfloor p\alpha \rfloor + 1 \leq k \leq \lfloor (p + 1)\alpha \rfloor - 1$. Or $\lfloor p\alpha \rfloor > p\alpha - 1$ et $\lfloor (p + 1)\alpha \rfloor - 1 \leq (p + 1)\alpha - 1$. Cette dernière inégalité ne peut être une égalité car α est irrationnel. Ainsi $p\alpha < k < (p + 1)\alpha - 1$. Il suffit alors de diviser par $\alpha > 0$ pour obtenir les premières inégalités. En additionnant les deux séries d'inégalités et en tenant compte du fait que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, on obtient $p + q < k < p + q + 1$, ce qui est absurde puisque $p + q$ et $p + q + 1$ sont deux entiers consécutifs.
- d. Si $A \cup B \neq \mathbb{N}^*$, il existe k qui n'est ni dans A ni dans B , ce qui est impossible d'après ce qui précède.

SOLUTION 24.

1. On a $\cos(k + 1)\varphi + \cos(k - 1)\varphi = 2 \cos \varphi \cos k\varphi$ ou encore

$$\frac{A_{k+1}}{(\sqrt{n})^{k+1}} + \frac{A_{k-1}}{(\sqrt{n})^{k-1}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \frac{A_k}{(\sqrt{n})^k}$$

ce qui équivaut à

$$A_{k+1} + nA_{k-1} = 2A_k$$

2. Puisque $A_0 = A_1 = 1$, on montre par récurrence double que les A_k sont des entiers.
3. On raisonne par récurrence. $A_0 = 1$ n'est pas divisible par n car $n \geq 3$. Supposons A_k non divisible par n pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Si A_{k+1} était divisible par n , alors $2A_k$ le serait également d'après la relation de récurrence de la question précédente. Comme n est impair, 2 est premier avec n et n divise donc A_k d'après le théorème de Gauss, ce qui n'est pas. Ainsi A_{k+1} n'est pas divisible par n . Par récurrence, aucun des A_k n'est divisible par n .
4. Supposons $\frac{p}{\pi}$ rationnel : il existe donc $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{p}{\pi} = \frac{p}{q}$. On en déduit que $2q\varphi = 2p\pi$, puis que $\cos 2q\varphi = 1$ i.e. $A_{2q} = (\sqrt{n})^{2q} = n^q$. Ainsi $A_{2q} = n^q$. Puisque $q \geq 1$, n divise A_{2q} , ce qui est impossible d'après la question précédente. Notre hypothèse de départ, à savoir que $\frac{p}{\pi} \in \mathbb{Q}$, est donc fausse.

SOLUTION 25.

Raisonnons par l'absurde en supposant $\ln(2)/\ln(3)$ rationnel. Il existe donc deux entiers naturels p et $q \neq 0$ tels que $\ln(2)/\ln(3) = p/q$, i.e. $q \ln(2) = p \ln(3)$, i.e. $\ln(2^q) = \ln(3^p)$ d'où $2^q = 3^p$. Puisque $q \geq 1$, 2^q est un nombre pair, ce qui est absurde car 3^p est toujours impair.

SOLUTION 26.

Supposons pas l'absurde que

$$r = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}.$$

Si ce nombre était rationnel, son carré le serait aussi. Mais alors, $3 = (r - \sqrt{2})^2 = r^2 - 2\sqrt{2}r + 2$ et donc, puisque $r \neq 0$,

$$\sqrt{2} = \frac{r^2 - 1}{2r} \in \mathbb{Q},$$

ce qui est absurde.

SOLUTION 27.

1. On a $x + y$ et xy dans \mathbb{Q} .
2. Il peut tout se passer... Par exemple

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

mais $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$. De même, $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$ mais

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}!$$

3. On a $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si $x = 0$, $xy = 0 \in \mathbb{Q}$ mais par contre lorsque $x \neq 0$, $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
4. C'est la même situation qu'au 3.

SOLUTION 28.

Si n est un carré parfait, \sqrt{n} est un entier donc c'est un rationnel. Inversement, par contraposition, si n n'est pas un carré parfait, alors l'un au moins de ses diviseurs premiers, que nous noterons p , apparaît avec une puissance impaire dans la décomposition en facteurs premiers de n . Si donc \sqrt{n} est rationnel, il s'écrit a/b avec a et b entiers d'où $nb^2 = a^2$, ce qui contredit à nouveau l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, le nombre p étant nécessairement affecté d'une puissance impaire dans le membre de gauche et d'une puissance paire dans celui de droite.

SOLUTION 29.

Raisonnons par double inclusion.

► Soit $n = 1$. On a alors

$$\left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[=]1, 2[.$$

Soit $n \geq 2$. On a alors

$$\left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[\subset]0, 1[.$$

Ainsi

$$\bigcup_{n \geq 1} \left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[\subset]0, 1[\cup]1, 2[.$$

► Il est équivalent de prouver que

$$]0, 1[\subset \bigcup_{n \geq 2} \left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[.$$

Remarquons alors que $\forall n \geq 2$,

$$\frac{1}{n} < \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

Soit $x \in]0, 1[$, il existe un unique entier n tel que

$$n < \frac{2}{x} \leq n+1,$$

et puisque $2/x > 2$, $n \geq 2$. On a alors

$$x \in \left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[$$

et ainsi

$$x \in \bigcup_{n \geq 2} \left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[.$$

SOLUTION 30.

1. On doit vérifier trois propriétés.

Reflexivité : trivial.

Transitivité : soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq_{\varphi} b \leq_{\varphi} c$. Cela signifie que

$$\varphi(b) - \varphi(a) \geq |b - a| \quad \text{et} \quad \varphi(c) - \varphi(b) \geq |c - b|.$$

En ajoutant ces deux inégalités et en utilisant l'inégalité triangulaire on a

$$\begin{aligned} \varphi(c) - \varphi(a) &\geq |c - b| + |b - a| \\ &\geq |c - b + b - a| = |c - a|. \end{aligned}$$

Ainsi $a \leq_{\varphi} c$.

Antisymétrie : soient a, b des réels tels que $a \leq_{\varphi} b$ et $b \leq_{\varphi} a$. Ainsi

$$\varphi(b) - \varphi(a) \geq |b - a| \quad \text{et} \quad \varphi(a) - \varphi(b) \geq |a - b|.$$

En ajoutant ces deux inégalités on obtient

$$0 \geq 2|b - a| \geq 0,$$

donc $a = b$.

2. Nous présentons une preuve par chaîne d'équivalences.

$$\begin{aligned}
 & \iff \begin{array}{ll} \forall a, b \in \mathbb{R}, & a \text{ comparable à } b \\ \forall a, b \in \mathbb{R}, & a \leq_{\varphi} b \text{ ou } b \leq_{\varphi} a \end{array} \\
 & \iff \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \varphi(b) - \varphi(a) \geq |b - a| \\ \text{ou} \\ -(\varphi(b) - \varphi(a)) \geq |b - a| \end{cases} \\
 & \iff \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |\varphi(b) - \varphi(a)| \geq |b - a|
 \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que la valeur absolue $|x|$ est supérieure à y si et seulement si x ou son opposé $-x$ est supérieur à y .

3. L'ordre $\leq_{\text{Id}_{\mathbb{R}}}$ est l'ordre habituel \leq .

SOLUTION 31.

- Non, car E n'est pas une partie totalement ordonnée de $\mathcal{P}(X)$. En effet si x, y sont deux éléments distincts de X alors $\{x\}$ et $\{y\}$ sont dans E , mais ne sont pas comparables.
- Oui, X est une borne supérieure de E . Vérification : $X \in \mathcal{P}(X)$ et pour tout $A \in E$ on a $A \subset X$, donc X est un majorant de E . Supposons que $Y' \in \mathcal{P}(X)$ soit aussi un majorant de E avec $Y' \subset X$. Ainsi pour tout $x \in X$ on a $\{x\} \subset Y'$, d'où $X \subset Y'$. Par conséquent $X = Y'$, c'est-à-dire X est le plus petit majorant de E .

SOLUTION 32.

1. Il faut vérifier que la relation \preccurlyeq est réflexive, antisymétrique et transitive.

◇ *La relation \preccurlyeq est clairement réflexive.*

◇ *La relation est antisymétrique.*

Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ tels que

$$x \preccurlyeq y \text{ et } y \preccurlyeq x.$$

On a donc $x_1 \leq y_1$ et $y_1 \leq x_1$. Ainsi $x_1 = y_1$. On a alors $x_2 \leq y_2$ et $y_2 \leq x_2$. Ainsi $x_2 = y_2$. d'où

$$x = y.$$

◇ *La relation est transitive.*

Soient

$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

et $z = (z_1, z_2)$ tels que

$$x \preccurlyeq y \text{ et } y \preccurlyeq z.$$

Si $x_1 < y_1$, puisque $y_1 \leq z_1$, on a $x_1 < z_1$ et donc $x \preccurlyeq z$. Si $x_1 = y_1$ et $y_1 < z_1$, alors $x_1 < z_1$ et donc $x \preccurlyeq z$. Si $x_1 = y_1$ et $y_1 = z_1$, alors $x_1 = z_1$, $x_2 \leq y_2$, $y_2 \leq z_2$ donc $x_2 \leq z_2$. Ainsi $x \preccurlyeq z$.

2. *L'ordre est total.*

Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$. Si $x_1 \neq y_1$ alors $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$. Si $x_1 = y_1$, puisque soit $x_2 \leq y_2$, soit $y_2 \leq x_2$, on a $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$.

3. La partie A n'est pas majorée au contraire de B. Cette dernière admet une borne supérieure.

◇ La partie A n'est pas majorée. En effet, soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. Il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > x$ donc (x, y) ne peut majorer A.

◇ La partie B est majorée par $(3, 0)$. Déterminons l'ensemble \mathcal{M} des majorants de B ; $(x, y) \in \mathcal{M}$ si et seulement si

$$\forall p \in \mathbb{N}, (2, 10^p) \preccurlyeq (x, y),$$

ie $2 < x$ car on ne peut avoir $\forall p \in \mathbb{N}, y \geq 10^p$. Ainsi

$$\mathcal{M} = \{(3, y), y \in \mathbb{N}\}.$$

L'ensemble \mathcal{M} admet clairement un plus petit élément : $(3, 0)$. Ainsi B admet une borne supérieure valant $(3, 0)$ mais pas de plus grand élément puisque $(3, 0) \notin B$.

SOLUTION 33.

1. Il faut vérifier que la relation \preccurlyeq est réflexive, antisymétrique et transitive.

◇ La relation est clairement réflexive.

◇ La relation est antisymétrique d'après le principe de double inclusion.

◇ La relation est transitive.

Soient A, B et C trois parties de E telles que $A \subset B$ et $B \subset C$. On a alors $A \subset C$.

2. L'ordre n'est pas total dès que E contient au moins deux éléments distincts a et b puisqu'alors les ensembles $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables par inclusion.

3. Il faut revenir aux définitions du cours.

◇ Déterminons l'ensemble \mathcal{M} des majorants de $U = \{A, B\}$; $F \in \mathcal{M}$ si et seulement si

$$A \subset F \text{ et } B \subset F,$$

ie $A \cup B \subset F$ et ainsi \mathcal{M} est l'ensemble des parties de E contenant $A \cup B$; cet ensemble \mathcal{M} admet donc clairement un plus petit élément qui vaut $A \cup B$. Ainsi U admet une borne supérieure valant $A \cup B$.

◇ Déterminons l'ensemble \mathfrak{m} des minorants de l'ensemble $U = \{A, B\}$; $F \in \mathfrak{m}$ si et seulement si

$$F \subset A \text{ et } F \subset B,$$

ie $F \subset A \cap B$ et ainsi \mathfrak{m} est l'ensemble des parties de E contenues dans $A \cap B$; cet ensemble \mathfrak{m} admet donc clairement un plus grand élément qui vaut $A \cap B$. Ainsi U admet une borne inférieure valant $A \cap B$.

4. En reprenant pas à pas les raisonnements menés ci-dessus, on prouve que toute partie non vide \mathcal{F} de $\mathcal{P}(E)$ admet une borne inférieure et une borne supérieure valant

$$\sup(\mathcal{F}) = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$$

et

$$\inf(\mathcal{F}) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A.$$

SOLUTION 34.

Tout d'abord, toute classe d'équivalence est non vide puisque pour tout $x \in E$, xRx (réflexivité) et donc $x \in C(x)$. On en déduit également que tout élément x de E appartient à une classe d'équivalence (la sienne). Enfin, soient $x, y \in E$ tels que $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$. Il existe donc $z \in C(x) \cap C(y)$. Soit $u \in C(x)$. Alors xRu et xRz . Par symétrie, on a également zRx puis zRu par transitivité. Mais on a également yRz donc yRu par transitivité. On en déduit que $u \in C(y)$. Ainsi $C(x) \subset C(y)$. En échangeant les rôles de x et y , on a également $C(y) \subset C(x)$. Par conséquent $C(x) = C(y)$. Deux classes d'équivalences sont donc disjointes ou confondues. Ceci prouve que les classes d'équivalence forment une partition de E .

SOLUTION 35.

- On pose $f(t) = \frac{t}{e^t}$ pour $t \in \mathbb{R}$ et on remarque que $xRy \iff f(x) = f(y)$. Il est alors évident que R est une relation d'équivalence.
- Une étude rapide donne le tableau de variations suivant pour f .

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$	0

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $f(x) \in]0, \frac{1}{e}[$ et le théorème des valeurs intermédiaires garantit que l'équation $f(y) = f(x)$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}$ possède exactement deux solutions (dont l'une est évidemment x). Autrement dit, la classe d'équivalence de x possède deux éléments.
- Si $x = 1$, la classe d'équivalence de x ne possède qu'un élément (x lui-même) car les variations de f montrent que f ne prend qu'une seule fois la valeur $f(1) = \frac{1}{e}$.
- Si $x \leq 0$, $f(x) \leq 0$ et le théorème des valeurs intermédiaires garantit que l'équation $f(y) = f(x)$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}$ possède une seule solution (x lui-même). Autrement dit, la classe d'équivalence de x possède un unique élément.

SOLUTION 36.

Le fait que R est une relation d'équivalence est quasi évident (il suffit d'écrire les trois axiomes). Les classes d'équivalence sont des cercles (quitte à identifier les complexes à leurs images dans le plan complexe).

SOLUTION 37.

On remarque que pour $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, xRy si et seulement si x et y ont la même parité. Le fait que R est une relation d'équivalence est alors quasi évident.

La classe de 0 est évidemment $2\mathbb{Z}$ et la classe de 1 est $2\mathbb{Z} + 1$. De plus, $2\mathbb{Z} \cup (2\mathbb{Z} + 1) = \mathbb{Z}$ donc ce sont les deux seules classes d'équivalence.

SOLUTION 38.

En remarquant que $x\mathcal{R}y \iff x^2 - x = y^2 - y$, il est quasi évident que \mathcal{R} est une relation d'équivalence. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\iff (x-y)(x+y) = x-y \\ &\iff (x-y)(x+y-1) = 0 &\iff y = x \text{ ou } y = 1-x \end{aligned}$$

La classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$ est donc formée des réels x et $1-x$.

- Si $x = \frac{1}{2}$, alors $x = 1-x$ et la classe d'équivalence de x est de cardinal 1.
- Si $x \neq \frac{1}{2}$, alors $x \neq 1-x$ et la classe d'équivalence de x est de cardinal 2.

SOLUTION 39.

1. a. **Réflexivité** : Soit $f \in E^E$. Id_E est une bijection de E dans E et $f = \text{Id}_E^{-1} \circ f \circ \text{Id}_E$. Ainsi $f \sim f$.
Symétrie Soit $(f, g) \in (E^E)^2$ tel que $f\mathcal{R}g$. Il existe donc une bijection φ de E dans E telle que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$.
 Mais alors

$$g = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1} = (\varphi^{-1})^{-1} \circ f \circ \varphi^{-1}$$

Comme φ^{-1} est également une bijection de E dans E , $g \sim f$.

Transitivité Soit $(f, g, h) \in (E^E)^3$ tel que $f\mathcal{R}g$ et $g\mathcal{R}h$. Il existe donc deux bijections φ et ψ de E dans E telles que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$ et $g = \psi^{-1} \circ h \circ \psi$. Mais alors

$$f = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1} \circ h \circ \psi \circ \varphi = (\psi \circ \varphi)^{-1} \circ h \circ (\psi \circ \varphi)$$

Comme $\psi \circ \varphi$ est une bijection de E dans E , $f \sim h$.

- b. Soit f conjuguée à Id_E . Alors il existe une bijection φ de E dans E telle que $f = \varphi^{-1} \circ \text{Id}_E \circ \varphi$, d'où $f = \text{Id}_E$. La classe d'équivalence de Id_E est $\{\text{Id}_E\}$.
- c. Soit $f \in E^E$ une application constante. Il existe donc $a \in E$ tel que $f(x) = a$ pour tout $x \in E$.
 Soit maintenant g une application conjuguée à f . Il existe donc une bijection φ de E dans E telle que $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$. Ainsi pour tout $x \in E$, $g(x) = \varphi^{-1}(f(\varphi(x))) = \varphi^{-1}(a)$. Ainsi g est constante.
 Réciproquement, soit $g \in E^E$ une application constante. Il existe donc $b \in E$ tel que $g(x) = b$ pour tout

$x \in E$. Posons $\varphi(x) = \begin{cases} b & \text{si } x = a \\ a & \text{si } x = b \\ x & \text{sinon} \end{cases}$. Remarquons que cette définition est valide même si $a = b$. On vérifie que

$\varphi \circ \varphi = \text{Id}_E$ donc φ est bijective en tant qu'involution. On vérifie également que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$ donc g est conjuguée à f .

Ainsi la classe d'équivalence de f est formée de toutes les applications constantes. Autrement dit, les applications constantes forment une classe d'équivalence.

2. a. Posons $\varphi(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque $a \neq 0$, φ est bijective et $\varphi^{-1}(x) = \frac{x}{a}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On vérifie que $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$. Ainsi f et g sont conjuguées.
- b. Supposons que \sin et \cos soient conjuguées. Il existe donc une bijection φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $\cos = \varphi^{-1} \circ \sin \circ \varphi$ ou encore $\varphi \circ \cos = \sin \circ \varphi$. En particulier, $\varphi(\cos(1)) = \sin(\varphi(1))$ et $\varphi(\cos(-1)) = \sin(\varphi(-1))$. Puisque \cos est paire, $\sin(\varphi(1)) = \sin(\varphi(-1))$.
 Mais on a encore $\varphi(1) = \varphi(\cos(0)) = \sin(\varphi(0)) \in [-1, 1]$ et $\varphi(-1) = \varphi(\cos(\pi)) = \sin(\varphi(\pi)) \in [-1, 1]$. Or \sin est injective sur $[-1, 1]$ et $\sin(\varphi(1)) = \sin(\varphi(-1))$ donc $\varphi(1) = \varphi(-1)$, ce qui contredit la bijectivité de φ (l'injectivité en fait).

SOLUTION 40.

L'interprétation géométrique de la relation est claire : $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}'$ signifie que le cercle \mathcal{C} est à l'intérieur de \mathcal{C}' . Notons que cela implique nécessairement $R' \geq R$.

- La réflexivité est évidente.

- Si $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}' \leq \mathcal{C}$, alors $OO' \leq R' - R$ et $O'O \leq R - R'$. Cela implique $R' \geq R$ et $R \geq R'$, donc $R = R'$, et donc $OO' = 0$, d'où $O = O'$. Ainsi les deux cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' ont même centre et même rayon, donc sont égaux.
La relation est donc antisymétrique.
- Soient trois cercles $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ tels que $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}' \leq \mathcal{C}''$. On a $OO' \leq R' - R$ et $O'O'' \leq R'' - R'$. D'après l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$OO'' \leq OO' + O'O'' \leq (R' - R) + (R'' - R') = R'' - R,$$

ce qui prouve bien que $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}''$.

La relation est donc transitive.

SOLUTION 41.

1. — La réflexivité est claire : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $p\mathcal{R}p$ puisque $p = p^1$.
— Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}p$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $q = p^n$ et $p = q^m$. Cela implique que $p^{nm} = p$. Puisque $p \neq 0$,

$$p^{nm} = p \iff p^{nm-1} = 1 \iff p = 1 \text{ ou } nm = 1$$

Si $p = 1$, on a $q = 1^n = 1 = p$, et si $nm = 1$, on a $n = m = 1$ d'où $q = p^1 = p$.

La relation est donc antisymétrique.

- Soient $(p, q, r) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}r$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $q = p^n$ et $r = q^m$, ce qui implique $r = p^{nm}$, donc $p\mathcal{R}r$.

La relation est donc transitive.

L'ordre n'est pas total puisque par exemple aucune des relations $2\mathcal{R}3$ ni $3\mathcal{R}2$ n'est vraie.

2. Supposons que $\{2, 3\}$ admette un majorant p . On a alors $2\mathcal{R}p$ et $3\mathcal{R}p$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $p = 2^n$ et $p = 3^m$. Ainsi p est à la fois pair et impair, ce qui est absurde.
Ce raisonnement par l'absurde prouve que $\{2, 3\}$ n'est pas majorée.

SOLUTION 42.

- La réflexivité est évidente.
- Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(x)$. On en déduit par antisymétrie de \leq sur F que $f(x) = f(y)$, ce qui implique que $x = y$ puisque f est injective.
La relation \mathcal{R} est donc antisymétrique.
- Soient $(x, y, z) \in E^3$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. On a alors $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(z)$, d'où $f(x) \leq f(z)$ par transitivité de \leq sur F , et donc $x\mathcal{R}z$.
La relation \mathcal{R} est donc transitive.