Devoir surveillé n° 5 : corrigé

Solution 1.

1. Dans ce cas, on a $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Une récurrence évidente montre que (u_n) est constamment nulle.

b. Puisque $\lambda \neq 0$, $u_1 = \frac{3}{4}\lambda^2 > 0$.
Supposons que $u_n > 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 > 0$.
Par récurrence, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$$w_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\frac{3}{4} + 2\ln(u_n) = 2w_n + \ln\frac{3}{4}$$

La suite (w_n) est donc arithmético-géométrique. On a tout simplement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$w_{n+1} + \ln\frac{3}{4} = 2\left(w_n + \ln\frac{3}{4}\right)$$

La suite $\left(w_n + \ln\frac{3}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc géométrique de raison 2. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$w_n + \ln\frac{3}{4} = 2^n\left(w_1 + \ln\frac{3}{4}\right)$$

ou encore

$$w_n = 2^{n-1}\left(w_1 + \ln\frac{3}{4}\right) - \ln\frac{3}{4}$$

Puisque $w_1 = \ln(u_1) = \ln\left(\frac{3}{4}\lambda^2\right)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$w_n = 2^{n-1}\ln\left(\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2\right) - \ln\frac{3}{4}$$

Attention ! On ne peut pas écrire $\ln\left(\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2\right) = 2\ln\left(\frac{3}{4}\lambda\right)$ car λ est éventuellement négatif.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = e^{w_n} = \frac{4}{3}\exp\left(w_1 + \ln\frac{3}{4}\right)^{2^{n-1}} = \frac{4}{3}u_1^{2^{n-1}}\left(\frac{3}{4}\right)^{2^{n-1}}$$

Or $u_1 = \frac{3}{4}\lambda^2$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \frac{4}{3}\lambda^{2^n}\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n} = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^{2^n}$$

Remarque. Cette expression est encore valable lorsque $n = 0$ ou $\lambda = 0$.

e. Si $|\lambda| < \frac{4}{3}$, alors $\left|\frac{3}{4}\lambda\right| < 1$ et donc (u_n) converge vers 0.
Si $|\lambda| > \frac{4}{3}$, alors $\left|\frac{3}{4}\lambda\right| > 1$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{4}{3}\left|\frac{3}{4}\lambda\right|^{2^n}$$

car 2^n est pair. On en déduit que (u_n) diverge vers $+\infty$.
Si $|\lambda| = \frac{4}{3}$, alors la dernière expression montre que la suite (u_n) est constante égale à $\frac{4}{3}$ à partir du rang 1. Elle converge donc vers $\frac{4}{3}$.

Remarque. On pouvait également utiliser la suite (w_n) dans le cas où $\lambda \neq 0$. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = 2^{n-1} \ln\left(\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2\right) - \ln\frac{3}{4}$$

Si $|\lambda| < \frac{4}{3}$, alors $0 < \left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2 < 1$ puis $\ln\left(\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2\right) < 0$ donc (w_n) diverge vers $-\infty$. Puisque $u_n = e^{w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (u_n) converge vers 0.
Si $|\lambda| > \frac{4}{3}$, alors $\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2 > 1$ puis $\ln\left(\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2\right) > 0$ donc (w_n) diverge vers $+\infty$. Puisque $u_n = e^{w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (u_n) converge vers $+\infty$.
Si $|\lambda| = \frac{4}{3}$, alors $\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2 = 1$ puis $\ln\left(\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2\right) = 0$ donc (w_n) est constante égale à $-\ln\frac{3}{4}$ et converge donc vers $-\ln\frac{3}{4}$. Puisque $u_n = e^{w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (u_n) converge vers $\frac{4}{3}$.

2. Dans ce cas, on a donc $u_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3u_n^2 - 8u_n + 12\right)$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}\left(3u_n^2 - 12u_n + 12\right) = \frac{3}{4}(u_n - 2)^2 \geqslant 0$$

La suite (u_n) est donc croissante.

b. Supposons que (u_n) converge vers une limite l. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{4}(u_n - 2)^2 = \frac{3}{4}(l-2)^2$. Par unicité de la limite, $\frac{3}{4}(l-2)^2 = 0$ et donc $l = 2$.

c. Comme (u_n) est croissante, $u_n \geqslant \lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si (u_n) convergeait vers une certaine limite l, on aurait $l \geqslant \lambda > 2$ par passage à la limite. Ceci est impossible d'après la question **2.b**. Comme (u_n) est croissante, elle converge ou diverge vers $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. Puisqu'elle ne peut converger, elle diverge vers $+\infty$.

d. Il s'agit de résoudre une équation du second degré.

$$\begin{aligned} & u_1 = 2 \\ \iff & \frac{1}{4}\left(3\lambda^2 - 8\lambda + 12\right) = 2 \\ \iff & 3\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0 \\ \iff & (3\lambda - 2)(\lambda - 2) = 0 \\ \iff & \lambda \in \left\{\frac{2}{3}, 2\right\} \end{aligned}$$

Les réels recherchés sont donc $\lambda_1 = \frac{2}{3}$ et $\lambda_2 = 2$.

e. Puisque (u_n) est croissante, on a clairement $u_n \geqslant \lambda \geqslant \lambda_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On montre alors par récurrence que $u_n \leqslant \lambda_2 = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
L'initialisation est claire.
Supposons $u_n \leqslant \lambda_2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'après notre remarque préliminaire, on a même $\lambda_1 \leqslant u_n \leqslant \lambda_2$.
Alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3u_n^2 - 8u_n + 12\right) = \frac{1}{4}\left((3u_n - 2)(u_n - 2) + 8\right) = \frac{3}{4}(u_n - \lambda_1)(u_n - \lambda_2) + 2 \leqslant 2$$

car $u_n - \lambda_1 \geqslant 0$ et $u_n - \lambda_2 \leqslant 0$.
Par récurrence, $u_n \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La suite (u_n) étant croissante et majorée, elle converge. D'après la question **2.b**, (u_n) converge vers 2.

f. On remarque que

$$u_1 = \frac{3}{4}(3\lambda^2 - 8\lambda + 12) = \frac{3}{4}(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) + 2 > 2$$

Il suffit alors de reprendre la preuve de la question **2.c**. Puisque (u_n) est croissante, $u_n \geqslant u_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si (u_n) convergeait vers une limite l, on aurait $l \geqslant u_1 > 2$ ce qui est impossible d'après la question **2.b**. La suite (u_n) ne converge donc pas donc, étant croissante, elle diverge vers $+\infty$.

3. **a.** On remarque que $P(a) = (a-2)(a-b) > 0$, $P(b) = (b-2)(b-a) < 0$ et $P(2) = (2-a)(2-b) > 0$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}P(u_n) + u_n$$

Comme P est continue en L, on obtient par passage à la limite

$$\mathrm{L} = \frac{1}{4}\mathrm{P}(\mathrm{L}) + \mathrm{L}$$

et donc $\mathrm{P}(\mathrm{L}) = 0$. Ainsi L est une des deux racines de P.
Le signe de $\mathrm{P}(a)$, $\mathrm{P}(b)$ et $\mathrm{P}(2)$ et la continuité de P montre que P s'annule sur $]a, b[$ et $]b, 2[$ via le théorème des valeurs intermédiaires. Puisque P possède au plus deux racines, c'est qu'il en possède exactement deux et qu'elles sont situés dans les intervalles $]a, b[$ et $]b, 2[$.
On en déduit que $a < \mathrm{L} < b$ ou $b < \mathrm{L} < 2$.

SOLUTION 2.

1. Soit $x \in [0, 1]$. Alors $\sqrt{x} \in [0, 1]$ donc $f(x) = 1 - \sqrt{x} \in [0, 1]$.
2. On procède par récurrence. Tout d'abord, $u_0 \in [0, 1]$. Supposons que $u_n \in [0, 1]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 1]$ d'après la question précédente.
3. f est clairement décroissante sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$. On en déduit que $f \circ f$ est croissante sur $[0, 1]$.
4. Pour $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} & f(x) = x \\ \iff & \sqrt{x} = 1 - x \\ \iff & x = (1-x)^2 \qquad \text{car les membres de l'égalité précédente sont positifs} \\ \iff & x^2 - 3x + 1 = 0 \end{aligned}$$

Les racines du trinôme précédent sont $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. La première racine appartient à l'intervalle $[0, 1]$ puisque $1 \leqslant \sqrt{5} \leqslant 3$ mais la seconde racine n'appartient pas à l'intervalle $[0, 1]$ car $\sqrt{5} > 1$.
Finalement, l'unique point fixe de f sur $[0, 1]$ est $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

5. Puisque $20 \leqslant 25$, $5 \leqslant \frac{25}{4}$ puis $\sqrt{5} \leqslant \frac{5}{2}$ puis $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \geqslant \frac{1}{4} = u_0$.
6. On procède par récurrence. Tout d'abord, $u_0 \leqslant \alpha$. Supposons $u_{2n} \leqslant \alpha$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors par croissance de $f \circ f$ sur $[0, 1]$,

$$f \circ f(u_{2n}) \leqslant f \circ f(\alpha)$$

c'est-à-dire

$$u_{2n+2} \leqslant \alpha$$

On en déduit que $u_{2n} \leqslant \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. On a $u_0 = \frac{1}{4}$ puis $u_1 = \frac{1}{2}$ et enfin $u_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Puisque $8 \leqslant 9$, $\frac{1}{2} \leqslant \frac{9}{16}$ puis $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{3}{4}$ et enfin $u_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant \frac{1}{4} = u_0$. Supposons maintenant que $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de $f \circ f$, $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) \leqslant f \circ f(u_{2n+2}) = u_{2n+4}$. Par récurrence, on a donc $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi (u_{2n}) est croissante. La suite (u_{2n}) est croissante et majorée par α donc elle converge.
8. Soit $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} & f \circ f(x) = x \\ \iff & 1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}} = x \\ \iff & 1 - x = \sqrt{1 - \sqrt{x}} \\ \iff & (1-x)^2 = 1 - \sqrt{x} \qquad \text{car les membres de l'égalité précédente sont positifs} \\ \iff & \sqrt{x} = 1 - (1-x)^2 \\ \iff & \sqrt{x} = x(2-x) \\ \iff & x = x^2(2-x)^2 \qquad \text{car les membres de l'égalité précédente sont positifs} \\ \iff & x^2(2-x)^2 - x = 0 \\ \iff & x\left(x(2-x)^2 - 1\right) = 0 \\ \iff & x(x^3 - 4x^2 + 4x - 1) = 0 \\ \iff & x(x-1)(x^2 - 3x + 1) = 0 \end{aligned}$$

Or on a vu précédemment que α est la seule racine du trinôme $x^2 - 3x + 1$ dans l'intervalle $[0, 1]$. On en déduit que les points fixes de $f \circ f$ sur $[0, 1]$ sont 0, α et 1.

9. f est continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ donc $f \circ f$ est continue sur $[0, 1]$. De plus, $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ et $u_{2n} \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite (u_{2n}) converge vers un point fixe de $f \circ f$ sur $[0, 1]$, à savoir 0, α ou 1.
Or (u_{2n}) est croissante et majorée par α donc $u_0 \leqslant u_{2n} \leqslant \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sa limite ℓ vérifie donc $u_0 \leqslant \ell \leqslant \alpha$. A fortiori, $0 < \ell \leqslant \alpha$. Puisque ℓ est un point fixe de $f \circ f$, $\ell = \alpha$.
Enfin, $u_{2n+1} = f(u_{2n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f est continue sur $[0, 1]$ donc (u_{2n+1}) converge vers $f(\alpha) = \alpha$.
Puisque les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes les deux vers α, la suite (u_n) converge également vers α.

Solution 3.

1. Posons $f : x \mapsto x + \tan x$. f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ f(x) = 2 + \tan^2 x > 0$$

f est donc strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Par ailleurs, f est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Enfin, f admet$-\infty$ pour limite en $-\frac{\pi}{2}$ et $+\infty$ pour limite en $+\infty$[.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de u_n,

$$\tan u_n = n - u_n$$

Or $u_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $u_n = \arctan(\tan u_n)$. Il s'ensuit que $u_n = \arctan(n - u_n)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \frac{\pi}{2}$ donc $n - u_n > n - \frac{\pi}{2}$. Par théorème de minoration, $\lim_{n\to+\infty} n - u_n = +\infty$. Puisque arctan admet pour limite $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$.

3. Posons $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

Ainsi g est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $g(1) = \frac{\pi}{2}$, g est constante égale à $\frac{\pi}{2}$ sur cet intervalle. On en déduit le résultat demandé.

4. Puisque $u_n < \frac{\pi}{2} \leqslant 2$, $n - u_n > 0$ pour tout entier $n \geqslant 2$. D'après la question précédente,

$$u_n = \arctan(n - u_n) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n - u_n}\right)$$

Par opérations sur les limites, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-u_n} = 0$. Or $\arctan x \underset{x\to0}{\sim} x$ donc $\arctan\left(\frac{1}{n-u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n-u_n}$.
Puisque (u_n) est bornée, $n - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc $\frac{1}{n-u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Ainsi

$$\arctan\left(\frac{1}{n-u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

ou encore

$$\arctan\left(\frac{1}{n-u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Il s'ensuit que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

5. Tout d'abord

$$\frac{1}{n-u_n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{u_n}{n}}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 0$,

$$\frac{1}{1 - \frac{u_n}{n}} = 1 + \frac{u_n}{n} + \frac{u_n^2}{n^2} + o\left(\frac{u_n^2}{n^2}\right)$$

D'après la question précédente,

$$\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

puis

$$\frac{u_n^2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit que

$$\frac{1}{1-\frac{u_n}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi^2-4}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Finalement,

$$\frac{1}{n-u_n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{u_n}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{\pi}{2n^2} + \frac{\pi^2-4}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

6. On sait que $\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to0}{=} 1 - x^2 + o(x^2)$. Puisque arctan est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ qui s'annule en 0, $\arctan x \underset{x\to0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

7. On sait que $\arctan x \underset{x\to0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. On en déduit via la question précédente que

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{1}{n-u_n}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{\pi}{2n^2} + \frac{\pi^2-4}{4n^3} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{\pi}{2n^2} + \frac{3\pi^2-16}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

Finalement

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2n^2} - \frac{3\pi^2-16}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Solution 4.

1. Récurrence évidente.

2. Si $u_n \geqslant 1$, alors $u_n \leqslant u_n^2$. De plus, $n \geqslant 1$ donc $1+u_n \leqslant n+u_n^2$. Par conséquent, $u_{n+1} \leqslant 1$.
Si $u_n \leqslant 1$, alors $1+u_n \leqslant 2$. On a aussi $n+u_n^2 \geqslant n$ de manière évidente. Donc $u_{n+1} \leqslant \frac{2}{n}$.

3. Si $u_2 \geqslant 1$, alors $u_3 \leqslant 1$.
Si $u_2 \leqslant 1$, alors $u_3 \leqslant \frac{2}{2} = 1$.
Montrons par récurrence que pour $n \geqslant 3$, $u_n \leqslant \frac{2}{n-1}$.
Initialisation : On a vu que $u_3 \leqslant 1$ donc l'hypothèse de récurrence est vraie au rang 3.
Hérédité : Supposons que $u_n \leqslant \frac{2}{n-1}$ pour un certain $n \geqslant 3$. On a donc $u_n \leqslant 1$ et donc $u_{n+1} \leqslant \frac{2}{n}$ et l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $n+1$.
Conclusion : L'hypothèse de récurrence est vraie pour tout $n \geqslant 3$.

4. Par le théorème des gendarmes, on conclut que (u_n) converge vers 0.

5. Pour $n \geqslant 2$, on a : $u_n = \frac{1+u_{n-1}}{n+u_{n-1}^2}$. Or $u_{n-1} = o(1)$ d'après la question précédente. Donc $1+u_{n-1} \sim 1$ et $n+u_n^2 \sim n$. On en déduit que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

6. Après un calcul laborieux, on trouve :

$$v_{n+1} = \frac{2n^2+n^2v_n+n+nv_n-v_n^2-2v_n-1}{n^3+v_n^2+2v_n+1}$$

7. On a $v_n = o(1)$. Par conséquent

$$\begin{aligned}2n^2+n^2v_n+n+nv_n-v_n^2-2v_n-1 &\sim 2n^2\\ n^3+v_n^2+2v_n+1 &\sim n^3\end{aligned}$$

Ainsi $v_{n+1} \sim \frac{2}{n}$ et $v_n \sim \frac{2}{n-1} \sim \frac{2}{n}$.

8. Comme $v_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, on a :

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{v_n}{n} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$