

# DEVOIR À LA MAISON N°3

## Problème 1 –

### Partie I –

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  strictement monotone telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

On pose  $c = f(1)$ .

1. Déterminer  $f(0)$  et montrer que  $c \neq 0$ . Dans la suite, on pose  $g = \frac{1}{c}f$ .

2. Montrer que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \quad \text{et} \quad g(x - y) = g(x) - g(y)$$

3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g(n) = n$ .

4. Montrer que  $g$  est une fonction impaire et en déduire que  $g(n) = n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

5. Montrer que pour tout  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $g(r) = r$ .

6. Montrer que  $g$  est strictement croissante.

7. Montrer que  $g(x) = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

On pourra raisonner par l'absurde et admettre qu'il existe toujours un rationnel strictement compris entre deux réels distincts.

8. En déduire  $f$ .

### Partie II –

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On se propose de déterminer les applications  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  strictement monotones telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + f(y)) = f(x) + y^n$$

Dans la suite,  $f$  désigne une telle application.

1. Justifier que  $f$  est injective.

2. Montrer que  $f(0) = 0$ .

3. Montrer que  $f(f(y)) = y^n$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ .

4. On suppose  $n = 1$  dans cette question.

a. Montrer que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ .

b. Justifier qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = cx$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

c. Conclure.

5. On suppose maintenant  $n > 1$ .

a. En déduire que  $n$  ne peut être pair. On suppose donc  $n$  impair dans la suite.

b. Montrer que  $f \circ f$  est bijective. En déduire que  $f$  l'est également.

c. Montrer que  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

d. En déduire une contradiction.

e. Conclure.