

# DEVOIR À LA MAISON N°03

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1

### Partie I – Étude d'une application

1. Il s'agit de déterminer les solutions éventuelles de l'équation  $f(z) = i$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}^*$ . Cette équation équivaut à  $z^2 - iz + 1 = 0$  qui est une équation du second degré dont le discriminant est égal à  $-5 = (i\sqrt{5})^2$ . Les solutions de cette équation sont donc  $\frac{i(1+\sqrt{5})}{2}$  et  $\frac{i(1-\sqrt{5})}{2}$  qui sont donc également les antécédents de  $i$  par  $f$ .
2. On vient de voir que  $i$  admettait deux antécédents par  $f$  :  $f$  n'est donc pas injective.
3. Soit  $Z \in \mathbb{C}$ . On s'intéresse à l'équation (E) :  $f(z) = Z$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ . Celle-ci équivaut à  $z^2 - zZ + 1 = 0$ . Il s'agit d'une équation du second degré dont 0 n'est manifestement pas solution. Cette dernière équation admet donc toujours au moins une solution non nulle donc  $Z$  admet au moins un antécédent par  $f$ . L'application  $f$  est donc surjective.
4. Puisque  $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$ ,

$$f(\mathbb{U}) = \{f(e^{i\theta}), \theta \in \mathbb{R}\} = \{e^{i\theta} + e^{-i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\} = \{2\cos\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$$

Puisque  $\text{Im}(\cos) = [-1, 1]$ ,  $f(\mathbb{U}) = [-2, 2]$ .

5. Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ . Alors

$$\begin{aligned} z \in f^{-1}(\mathbb{R}) &\iff f(z) \in \mathbb{R} \\ &\iff f(z) = \overline{f(z)} \\ &\iff z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \\ &\iff z - \bar{z} - \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}} = 0 \\ &\iff (z - \bar{z})\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) = 0 \\ &\iff \bar{z} = z \text{ ou } |z| = 1 \\ &\iff z \in \mathbb{R}^* \text{ ou } z \in \mathbb{U} \end{aligned}$$

Ainsi  $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}$ .

6. On étudie pour cela l'application  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \frac{1}{x} \end{cases}$ .  $\varphi$  est clairement dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ . On en déduit le tableau de variations suivant.

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		$+$	$0$	$-$	$+$
Variations de $\varphi$		$-\infty$	$-2$	$+\infty$	$+\infty$

Les variations de  $\varphi$  montrent que  $\text{Im}(\varphi) \subset ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ . Mais la continuité de  $\varphi$  montre via le théorème des valeurs intermédiaires que  $\varphi$  prend toutes les valeurs dans  $] -\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ . Il en résulte que  $f(\mathbb{R}^*) = \text{Im}(\varphi) = ] -\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ .

- Soit  $Z \in f(D)$ . Il existe donc  $z \in D$  tel que  $Z = f(z)$ . Il s'agit maintenant de montrer que  $f(z) \notin [-2, 2]$ . On peut raisonner par l'absurde. Supposons que  $f(z) \in [-2, 2]$ . A fortiori,  $f(z) \in \mathbb{R}$  i.e.  $z \in f^{-1}(\mathbb{R})$ . D'après la question 5,  $z \in \mathbb{R}$  ou  $z \in \mathbb{U}$ . Or on ne peut avoir  $z \in \mathbb{U}$  puisque  $z \in D$ . C'est donc que  $z \in \mathbb{R}$ . Mais alors  $f(z) \in f(\mathbb{R}) = ] -\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ . Or  $f(z) \in [-2, 2]$  donc  $f(z) = -2$  ou  $f(z) = 2$ . Les variations de  $\varphi$  nous disent alors que  $z = -1$  ou  $z = 1$ , ce qui est à nouveau impossible puisque  $z \in D$ . On en conclut par l'absurde que  $f(z) \notin [-2, 2]$ . Ainsi on a bien  $f(D) \subset \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ .
- Soit  $Z \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ . On rappelle que les antécédents de  $Z$  par  $f$  sont les solutions de l'équation  $z^2 - Zz + 1 = 0$ . Cette équation du second degré admet pour discriminant  $Z^2 - 4$  qui est non nul puisque  $Z \notin \{-2, 2\}$ . Elle admet donc deux solutions. Ainsi  $Z$  admet exactement deux antécédents par  $f$  dans  $\mathbb{C}^*$ . Notons  $\alpha$  et  $\beta$  les deux antécédents de  $Z$  par  $f$ . Puisqu'ils sont solutions de l'équation  $z^2 - Zz + 1 = 0$ ,  $\alpha\beta = 1$ .
- On reprend les notations de la question précédente. Il s'agit maintenant de voir qu'un seul des deux antécédents de  $Z$  par  $f$  appartient à  $D$ . Puisque  $\alpha\beta = 1$ , on a également  $|\alpha||\beta| = 1$ . On ne peut avoir  $|\alpha| = 1$  ou  $|\beta| = 1$  puisqu'alors  $Z = f(\alpha) = f(\beta)$  appartiendrait à  $f(\mathbb{U}) = [-2, 2]$ . Ainsi  $\alpha$  et  $\beta$  sont de module distincts de 1. Puisque  $|\alpha||\beta| = 1$ , l'un de ces deux modules est strictement inférieur à 1 et l'autre est strictement supérieur à 1. Un seul de ces deux complexes appartient donc à  $D$  (ils sont évidemment tous deux de module non nul puisqu'ils appartiennent à  $\mathbb{C}^*$ ). Ainsi  $Z$  admet un unique antécédent dans  $D$  par  $f$ . Ceci prouve que  $f$  induit une bijection de  $D$  sur  $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ .

## Partie II – Un petit peu d'exponentielle complexe

- On a déjà vu que les antécédents de  $i$  par  $f$  étaient  $\frac{i(1+\sqrt{5})}{2}$  et  $\frac{i(1-\sqrt{5})}{2}$ . Les antécédents de  $i$  par  $g$  sont donc les antécédents de ces deux nombres par la fonction exponentielle. Les formes exponentielles de ces deux nombres sont

$$\frac{i(1+\sqrt{5})}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} \quad \frac{i(1-\sqrt{5})}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot e^{\frac{-i\pi}{2}}$$

On en déduit que leurs antécédents par l'exponentielle sont les complexes

$$\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \text{ et } \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

où  $k \in \mathbb{Z}$ . Il s'agit donc également des antécédents de  $i$  par  $g$ .

2.

$$g(i\mathbb{R}) = \{g(i\theta), \theta \in \mathbb{R}\} = \{2 \cos \theta, \theta \in \mathbb{R}\} = [-2, 2]$$

- On sait que  $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ . Ainsi  $g(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_+^*)$ . Les variations de la fonction  $\varphi$  étudiées à la question 6 montrent que  $f(\mathbb{R}_+^*) = [2, +\infty[$ .

## Partie III – Une suite d'applications

1. Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned}\varphi_2(z) &= z\varphi_1(z) - \varphi_0(z) = z^2 - 2 \\ \varphi_3(z) &= z\varphi_2(z) - \varphi_1(z) = z^3 - 3z \\ \varphi_4(z) &= z\varphi_3(z) - \varphi_2(z) = z^4 - 4z^2 + 2\end{aligned}$$

2. Les solutions de l'équation  $\varphi_2(z) = 0$  sont clairement  $-\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2}$ .

De même, les solutions de l'équation  $\varphi_3(z) = 0$  sont  $0$ ,  $-\sqrt{3}$  et  $\sqrt{3}$ .

L'équation  $\varphi_4(z) = 0$  est une équation bicarrée. On la résout classiquement en effectuant le changement de variable  $Z = z^2$ . Les solutions de l'équation  $Z^2 - 4Z + 2 = 0$  sont  $2 + \sqrt{2}$  et  $2 - \sqrt{2}$ . On en déduit que les solutions de l'équation  $\varphi_4(z) = 0$  sont

$$\sqrt{2 + \sqrt{2}}, -\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 - \sqrt{2}}, -\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

3. On note  $P_n$  l'assertion

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \varphi_n(f(z)) = f(z^n)$$

Puisque pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $\varphi_0(z) = 2$  et  $f(z^0) = f(1) = 2$ ,  $P_0$  est vraie. De même, pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $\varphi_1(f(z)) = z + \frac{1}{z}$  et  $f(z^1) = z + \frac{1}{z}$  donc  $P_1$  est vraie.

Supposons  $P_n$  et  $P_{n+1}$  vraies pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Alors pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,

$$\begin{aligned}\varphi_{n+2}(f(z)) &= f(z)\varphi_{n+1}(f(z)) - \varphi_n(f(z)) \\ &= f(z)f(z^{n+1}) - f(z^n) \\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \\ &= z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}} = f(z^{n+2})\end{aligned}$$

Ainsi  $P_{n+2}$  est vraie.

Par récurrence double,  $P_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

4. L'équation  $f(z^n) = 0$  équivaut à  $z^{2n} = -1$ . L'ensemble des solutions de cette équation est donc l'ensemble des racines  $2n^{\text{èmes}}$  de  $-1$ , c'est-à-dire

$$A_n = \left\{ e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}, k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket \right\}$$

5. Remarquons que pour  $\omega \in A_n$ ,

$$\varphi_n(f(\omega)) = f(\omega^n) = 0$$

Donc les  $f(\omega)$  pour  $\omega \in A_n$  sont des solutions de l'équation  $\varphi_n(z) = 0$ . Via une formule d'Euler, ceci signifie que les réels  $2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$  pour  $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$  sont des solutions de l'équation  $\varphi_n(z) = 0$ .

Réciproquement, soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  une solution de l'équation  $\varphi_n(z) = 0$ . Puisque  $f$  est surjective, il existe donc  $\omega \in \mathbb{C}^*$  tel que  $\alpha = f(\omega)$ . Alors  $f(\omega^n) = \varphi_n(f(\omega)) = f(\omega^n) = 0$  de sorte que  $\omega$  est solution de l'équation  $f(z^n) = 0$ . Il existe donc  $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$  tel que  $\alpha = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}$ . Mais alors  $\alpha = f(\omega) = 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ .

Finalement l'ensemble des solutions de l'équations  $\varphi_n(z) = 0$  est

$$B_n = \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket \right\}$$

On peut remarquer que certains éléments de  $B_n$  figurent en double dans la description précédente. En effet,

$$B_n = \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \cup \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket n, 2n-1 \rrbracket \right\}$$

On montre alors que les deux ensembles de cette union sont égaux.

$$\begin{aligned}
\left\{ 2 \cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right), k \in \llbracket n, 2n-1 \rrbracket \right\} &= \left\{ 2 \cos \left( \frac{(2(k+n)+1)\pi}{2n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\
&\quad \text{via le "changement d'indice" } k \rightarrow k+n \\
&= \left\{ 2 \cos \left( \pi + \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\
&= \left\{ -2 \cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\
&= \left\{ -2 \cos \left( \frac{(2(n-1-k)+1)\pi}{2n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\
&\quad \text{via le "changement d'indice" } k \rightarrow n-1-k \\
&= \left\{ -2 \cos \left( \pi - \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \\
&= \left\{ 2 \cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}
\end{aligned}$$

Finalement, on peut affirmer que

$$B_n = \left\{ 2 \cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\frac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$  et  $\cos$  est injective sur  $[0, \pi]$  puisqu'elle y est strictement décroissante.

Les réels  $2 \cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)$  pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  sont donc deux à deux distincts. Le nombre de solutions de l'équation  $\varphi_n(z) = 0$  est donc  $n$ .

**REMARQUE.** Le lecteur cultivé aura remarqué que les fonctions  $\varphi_n$  sont reliées aux *polynômes de Tchebychev*.