# Devoir à la maison n°01 : corrigé

## Problème 1 — Bac C 1992

### Partie I – Etude des fonctions $f_n$

**1.** La fonction $h_n$ est clairement dérivable sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall x \in ]-1,+\infty[,\ h'_n(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{1}{1+x}^{2} > 0$$

On en déduit que $h_n$ est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$.

**Remarque.** On peut aussi remarquer que

$$\forall x \in ]-1,+\infty[,\ h_n(x) = n\ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x}$$

Ainsi $h_n$ est-elle strictement croissante sur $]-1,+\infty[$ comme la différence d'une fonction strictement croissante t d'une fonction strictement décroissante sur cet intervalle. ■

**2.** A nouveau, $f_n$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall x \in ]-1,+\infty[,\ f'_n(x) = nx^{n-1}\ln(1+x) + \frac{x^n}{1+x} = x^{n-1}h_n(x)$$

La fonction $h_n$ est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$ et nulle en $0$. Ainsi est-elle strictement négative sur $]-1,0[$ et strictement positive sur $]-1,0[$.

**Cas n pair**
Si $n$ est pair, $(-1)^n = 1$ donc $\lim_{-1^+} f_n = -\infty$. Par ailleurs, il est clair que $\lim_{+\infty} f_n = +\infty$.

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^{n-1}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h_n(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'_n(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Cas n impair**
Si $n$ est impair, $(-1)^n = -1$ donc $\lim_{-1^+} f_n = +\infty$. Comme précédemment, $\lim_{+\infty} f_n = +\infty$.

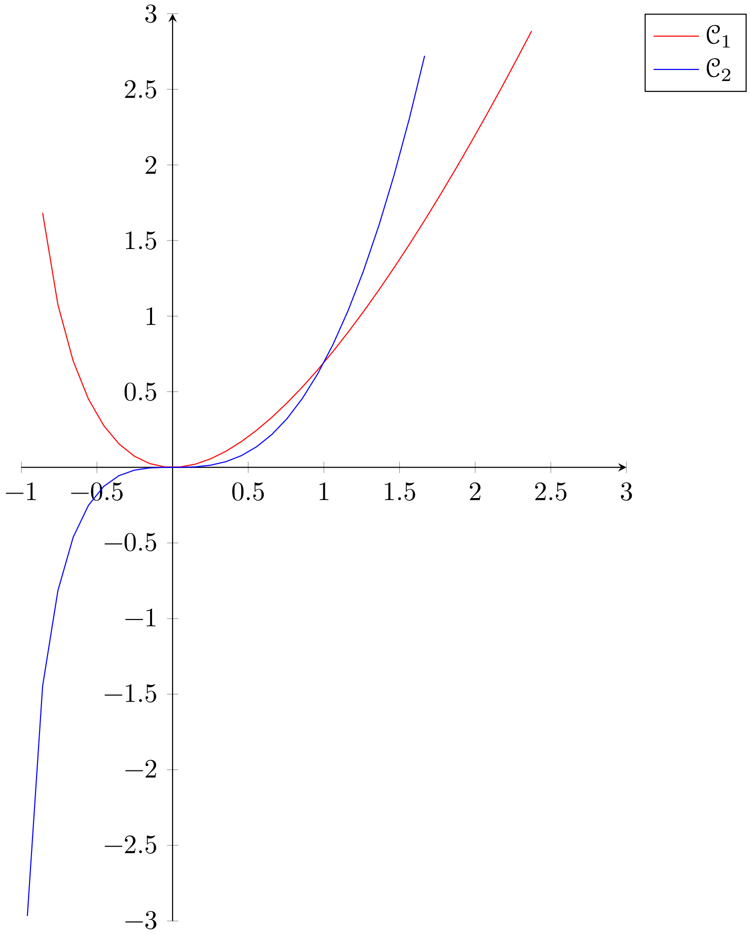
| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^{n-1}$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $h_n(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $f'_n(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n(x)$ | $\|\|$ $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**3.** On factorise $f_2(x) - f_1(x)$ :

$$\forall x \in ]-1, +\infty[,\ f_2(x) - f_1(x) = x(x-1)\ln(1+x)$$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x - 1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\ln(1 + x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f_2(x) - f_1(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On en déduit que $\mathcal{C}_1$ est situé au-dessus de $\mathcal{C}_2$ sur $]-1, 1]$ et au-dessous sur $[1, +\infty[$. On peut préciser que les deux courbes s'intersectent en les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(1, \ln 2)$.




**Partie II – Etude d'une suite**

1. Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant \ln 2$ par croissance du logarithme. Par suite, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^n \ln 2$ pour tout $x \in [0,1]$. Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$0 \leqslant U_n \leqslant \int_0^1 x^n \ln 2 \, dx = \frac{\ln 2}{n+1}$$

   Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement garantit que $(U_n)$ converge vers 0.

2. $f_{n+1}$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle et

$$\forall x \in ]-1,+\infty[,\ f'_{n+1}(x) = (n+1)f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

3. De manière équivalente,

$$\forall x \in ]-1,+\infty[,\ f_n(x) = \frac{1}{n+1}f'_{n+1}(x) - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

   En intégrant sur $[0,1]$, on obtient

$$U_n = \frac{1}{n+1}(f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0)) - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}\,dx}{1+x} = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}\,dx}{1+x}$$

4. La formule précédente donne

$$U_1 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x}$$

Remarquons alors que $x^2 = (x+1)(x-1)+1$ de sorte que

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x} = \int_0^1 (x-1)\,dx + \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = -\frac{1}{2} + \ln 2$$

Ainsi

$$U_1 = \frac{1}{4}$$

**5.** On peut procéder par récurrence mais on peut aussi remarquer que pour $x \neq -1$

$$\frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k$$

Par conséquent

$$\frac{x^{n+1}}{1+x} = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k\right)$$

En intégrant sur $[0,1]$, on obtient

$$V_n = (-1)^{n+1}\left(\ln 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right)$$

On en déduit par exemple que

$$U_n = \frac{1+(-1)^n}{2(n+1)}\ln 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$

## Solution 1.

1. On trouve évidemment $\overline{w} = -w$ donc $w$ est imaginaire pur.

2. D'une part
$$(b+c)(\overline{b}-\overline{c}) = |b|^2 - |c|^2 + w = w$$
car $|b| = |c|$ par hypothèse. Ainsi $(b+c)(\overline{b}-\overline{c})$ est imaginaire pur.
D'autre part
$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{(b+c)(\overline{b}-\overline{c})}{(b-c))(\overline{b}-\overline{c})} = \frac{w}{|b-c|^2}$$
Comme $|b-c|^2$ est réel et $w$ est imaginaire pur, $\frac{b+c}{b-c}$ est également imaginaire pur.

3. Notons $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Ainsi $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$. Alors
$$z_1\overline{z_2} = (x_1+iy_1)(x_2-iy_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)$$
Finalement,
$$\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = x_1x_2 + y_1y_2 = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

4. Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont pour affixes respectifs $b+c$ et $b-c$. Leur produit scalaire est donc
$$\mathrm{Re}\left((b+c)\overline{(b-c)}\right) = \mathrm{Re}(w) = 0$$
car $w$ est imaginaire pur. Les droites $(AH)$ et $(BC)$ sont donc perpendiculaires.

5. En inversant le rôle de $a$ et $b$ dans ce qui précède, on trouve également que $(BH)$ et $(AC)$ sont perpendiculaires. Les droites $(AH)$ et $(BH)$ sont donc deux hauteurs du triangle $ABC$ se coupant en $H$, qui est donc l'orthocentre de ce triangle.