

# DEVOIR À LA MAISON N°08

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1 —

### Partie I – Étude de deux suites

Soient  $a$  et  $b$  deux réels positifs. On considère désormais les deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par

$$\begin{aligned} u_0 &= a & v_0 &= b \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= \sqrt{u_n v_n} & \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \end{aligned}$$

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont alors bien définies et positives, ce que l'on ne demande pas de prouver.

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \leq v_n$ .
2. Déterminer le sens de variation des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
3. Établir que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$$

4. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq v_n - u_n \leq \frac{v_1 - u_1}{2^{n-1}}$$

5. En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers une limite commune que l'on notera  $M(a, b)$ .

### Partie II – Propriétés de la moyenne arithmético-géométrique

Soient  $a$  et  $b$  deux réels positifs.

1. Montrer que  $M(a, b) = M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$ .
2. Montrer que  $M(a, b) = M(b, a)$ .
3. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Montrer que  $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$ .
4. Montrer que  $\sqrt{ab} \leq M(a, b) \leq \frac{a+b}{2}$ .

### Partie III – Étude d'une fonction

On pose  $F(x) = M(1, x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ .

1. Calculer  $F(0)$  et  $F(1)$ .
2. Montrer que  $F$  est positive sur  $\mathbb{R}_+$ .
3. Montrer que  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .
4. a. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\sqrt{x} \leq F(x) \leq \frac{1+x}{2}$$

- b. Montrer que  $F$  est dérivable en 1 et calculer  $F'(1)$ .
5. a. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$F(x) = \frac{1}{2}(1+x)F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

- b. En déduire que  $F$  est continue en 0.  $F$  est-elle dérivable en 0 ?
6. a. Préciser la limite de  $F$  en  $+\infty$ .
- b. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$F(x) = xF\left(\frac{1}{x}\right)$$

- c. En déduire que  $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$ .
- d. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$F(x) = \sqrt{x}F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$$

- e. En déduire que  $\sqrt{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(F(x))$ .
7. a. Écrire une fonction en Python d'arguments  $x \in \mathbb{R}_+$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  donnant une valeur approchée de  $F(x)$  à  $\varepsilon$  près.
- b. Représenter sur le même graphe, les courbes représentatives des fonctions  $F$ ,  $x \mapsto \sqrt{x}$  et  $x \mapsto \frac{1+x}{2}$ .  
On effectuera si possible le tracé à l'aide du package `matplotlib` du langage Python ou, à défaut, à la main.