

# TOPOLOGIE

## 1 Topologie d'un espace vectoriel normé

Toutes les propriétés des parties vues dans cette section (ouvert, fermé, voisinage, intérieur, adhérence, densité, frontière) restent inchangées si on remplace la norme de l'espace vectoriel normé considéré par une norme équivalente.

### 1.1 Ouverts et fermés

#### Définition 1.1 Boules ouvertes, boules fermées, sphère

Soient  $E$  un espace vectoriel normé,  $a \in E$  et  $r \in \mathbb{R}_+^*$ .

- On appelle **boule ouverte** de centre  $a$  et de rayon  $r$  l'ensemble

$$B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$$

- On appelle **boule fermée** de centre  $a$  et de rayon  $r$  l'ensemble

$$B_f(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$$

- On appelle **sphère** de centre  $a$  et de rayon  $r$  l'ensemble

$$S(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$$

#### Exemple 1.1

Si on munit  $\mathbb{R}$  de la valeur absolue,

$$B(a, r) = ]a - r, a + r[$$

$$B_f(a, r) = [a - r, a + r]$$

$$S(a, r) = \{a - r, a + r\}$$

#### Définition 1.2 Ouvert et fermé

Soient  $E$  un espace vectoriel normé et  $A$  une partie de  $E$ .

- On dit que  $A$  est une **partie ouverte** ou un **ouvert** de  $E$  si pour tout  $a \in A$ , il existe  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  telle que  $B(a, \varepsilon) \subset A$ .
- On dit que  $A$  est une **partie fermée** ou un **fermé** de  $E$  si  $E \setminus A$  est un ouvert de  $E$ .

#### Exemple 1.2 Boules ouvertes et fermées, sphères

Une boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée ou une sphère sont des fermés.

#### Exemple 1.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Les intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$  (i.e. de la forme  $]a, b[$ ) sont des ouverts (ce sont des boules ouvertes), de même que les intervalles de la forme  $]a, +\infty[$ ,  $] - \infty, a[$  et  $] - \infty, +\infty[$ .

Les intervalles fermés de  $\mathbb{R}$  (i.e. de la forme  $[a, b]$ ) sont des fermés (ce sont des boules fermées), de même que les intervalles de la forme  $[a, +\infty[$ ,  $] - \infty, a]$  et  $] - \infty, +\infty[$ .



**ATTENTION !** L'erreur classique consiste à penser que fermé est le contraire d'ouvert.

Une partie peut être à la fois un ouvert et un fermé : c'est le cas de l'ensemble vide et de l'espace total (ce sont d'ailleurs les seules parties à la fois ouvertes et fermées d'un espace vectoriel normé).

Une partie peut n'être ni un ouvert ni un fermé. Par exemple, l'intervalle  $[0, 1[$  n'est ni un ouvert ni un fermé de  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 1.1

Montrer que les seules parties à la fois ouvertes et fermées d'un espace vectoriel normé  $E$  sont  $\emptyset$  et  $E$ .

### Proposition 1.1 Réunion et intersection d'ouverts ou de fermés

- (i) Une réunion quelconque ou une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.
- (ii) Une intersection quelconque ou une réunion **finie** de fermés est un fermé.



**ATTENTION !** Une intersection infinie d'ouverts peut ne pas être un ouvert. Par exemple,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[ = \{0\}$$

De même, une réunion infinie de fermés peut ne pas être un fermé. Par exemple,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[ \frac{1}{n}, 1 \right] = ]0, 1]$$

### Proposition 1.2 Caractérisation séquentielle des fermés

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé. Alors  $A$  est un fermé si et seulement si toute suite convergente d'éléments de  $A$  admet sa limite dans  $A$ .

### Exemple 1.4

Un singleton est fermé.

### Définition 1.3 Voisinage

Soit  $a$  un élément d'un espace vectoriel normé  $E$ . On appelle **voisinage** de  $a$  toute partie de  $E$  contenant un ouvert de  $E$  comprenant  $a$ .

### Proposition 1.3

Soit  $a$  un élément d'un espace vectoriel normé  $E$ . Une partie  $V$  de  $E$  est un voisinage de  $a$  si et seulement si il existe  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(a, \varepsilon) \subset V$ .

### Exemple 1.5

Un ouvert est un voisinage de chacun de ses points.

**REMARQUE.** Les notions de limite ou de valeur d'adhérence peuvent se traduire en terme de voisinage. Notons  $\mathcal{V}(\ell)$  l'ensemble des voisinages d'un point  $\ell$  de  $E$ .

- $(u_n)$  converge vers  $\ell \in E$  si et seulement si

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in V$$

- $\ell \in E$  est une valeur d'adhérence de  $(u_n)$  si et seulement si

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n \in V$$

## 1.2 Intérieur et adhérence

### Définition 1.4 Intérieur d'une partie

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . On dit que  $a \in E$  est **intérieur** à  $A$  si  $A$  est un voisinage de  $a$  ou, de manière équivalente si,

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, B(a, \varepsilon) \subset A$$

L'ensemble des points intérieurs à  $A$  s'appelle l'**intérieur** de  $A$  et se note  $\overset{\circ}{A}$ .

### Exemple 1.6

Pour  $a \in E$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ , l'intérieur de la boule fermée  $B_f(a, \varepsilon)$  est la boule ouverte  $B(a, \varepsilon)$ .

### Exemple 1.7

L'intérieur d'un intervalle non vide est l'intervalle ouvert de mêmes extrémités.

### Proposition 1.4

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . Alors  $\overset{\circ}{A}$  est le plus grand ouvert inclus dans  $A$ . En particulier,  $A$  est un ouvert si et seulement si  $\overset{\circ}{A} = A$ .

### Exercice 1.2

Soient  $A$  et  $B$  des parties d'un espace vectoriel normé  $E$ . Montrer que

$$1. \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$$

$$3. \overline{\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$$

$$2. A \subset B \implies \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$$

$$4. \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overline{\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}}$$

Dans le dernier cas, on donnera un exemple d'inclusion stricte.

**Définition 1.5 Adhérence d'une partie**

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . On dit que  $a \in E$  est **adhérent** à  $A$  si l'intersection de tout voisinage de  $a$  avec  $A$  est non vide ou, de manière équivalente, si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

L'ensemble des points adhérents à  $A$  s'appelle l'**adhérence** de  $A$  et se note  $\overline{A}$ .

**Exemple 1.8**

Pour  $a \in E$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ , l'adhérence de la boule ouverte  $B(a, \varepsilon)$  est la boule fermée  $B_f(a, \varepsilon)$ .

**Exemple 1.9**

L'adhérence d'un intervalle borné non vide est l'intervalle fermé de mêmes extrémités.

**REMARQUE.** Si  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , on dira que  $+\infty$  est adhérent à  $A$  si  $A$  est non majorée et que  $-\infty$  est adhérent à  $A$  si  $A$  est non minorée.

**Proposition 1.5**

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . Alors  $\overline{A}$  est le plus petit fermé contenant  $A$ .  
En particulier,  $A$  est un fermé si et seulement si  $\overline{A} = A$ .

**Exercice 1.3**

Soient  $A$  et  $B$  des parties d'un espace vectoriel normé  $E$ . Montrer que

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$                 | 3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$       |
| 2. $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$ | 4. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ |

Dans le dernier cas, on donnera un exemple d'inclusion stricte.

**Proposition 1.6 Caractérisation séquentielle de l'adhérence**

Soient  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$  et  $a \in E$ . Alors  $a \in \overline{A}$  si et seulement si il existe  $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ .

**REMARQUE.** Ceci signifie que  $\overline{A}$  est l'ensemble des limites des suites convergentes à valeurs dans  $A$ .

**Exercice 1.4**

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . Montrer que  $E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}$  et  $E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{E \setminus A}$ .

**Définition 1.6 Frontière**

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . On appelle **frontière** de  $A$  l'ensemble  $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ .

**Exemple 1.10**

La frontière de la boule  $B(a, \varepsilon)$  est la sphère  $S(a, \varepsilon)$ .

**Proposition 1.7**

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . Alors  $\text{Fr}(A)$  est un fermé.

**Définition 1.7 Densité**

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . On dit que  $A$  est dense si  $\overline{A} = E$  ou, de manière équivalente, si

$$\forall x \in E, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

**Proposition 1.8 Caractérisation séquentielle de la densité**

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . Alors  $A$  est dense si et seulement si pour tout  $x \in E$ , il existe une suite à valeurs dans  $A$  de limite  $x$ .

**Exemple 1.11 Densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$** 

$\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . En effet, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la suite de terme général de terme  $\frac{[nx]}{n}$  est à valeurs dans  $\mathbb{Q}$  et de limite  $x$ .

**Exemple 1.12 Densité de  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$** 

$\text{GL}_n(\mathbb{K})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et posons  $M_p = M + \frac{1}{p}I_n$  pour  $p \in \mathbb{N}^*$ . On a clairement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_p = M$ . De plus, la suite  $(M_p)$  est injective (elle prend une infinité de valeurs) et  $M$  ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres. Par conséquent, la suite  $(M_p)$  est à valeurs dans  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  à partir d'un certain rang.

**Sous-groupes de  $(\mathbb{R}, +)$** 

Les sous-groupes de  $(\mathbb{R}, +)$  sont soit monogènes (i.e. de la forme  $a\mathbb{Z}$  avec  $a \in \mathbb{R}$ ) soit denses.

**1.3 Topologie relative à une partie****Définition 1.8 Ouvert et fermé relatifs**

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ .

- (i) On appelle **ouvert relatif** à  $A$  toute partie de la forme  $A \cap U$  où  $U$  est un ouvert de  $E$ .
- (ii) On appelle **fermé relatif** à  $A$  toute partie de la forme  $A \cap F$  où  $F$  est un fermé de  $E$ .

**Exemple 1.13**

$[0, 1[$  est un ouvert relatif à  $\mathbb{R}_+$  car  $[0, 1[ = ] - 1, 1[ \cap \mathbb{R}_+$  est  $] - 1, 1[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ .  
 $]0, 1]$  est un fermé relatif à  $\mathbb{R}_+$  car  $]0, 1] = [0, 1] \cap \mathbb{R}_+^*$  est  $[0, 1]$  est un fermé de  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 1.9 Caractérisation séquentielle**

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . Une partie  $F$  de  $A$  est un fermé relatif à  $A$  si et seulement si toute suite d'éléments de  $F$  convergeant dans  $A$  a sa limite dans  $F$ .

**Définition 1.9 Voisinage relatif**

Soient  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$  et  $a \in E$ . On appelle **voisinage relatif** de  $a$  à  $A$  toute partie de la forme  $A \cap V$  où  $V$  est un voisinage de  $a$ .

**Définition 1.10 Densité relative**

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . Une partie  $X$  de  $E$  est dense dans  $A$  si  $A \subset \overline{X}$ .

**Exercice 1.5**

Sachant que les sous-groupes de  $(\mathbb{R}, +)$  sont monogènes ou denses, montrer que  $\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $[-1, 1]$ .

## 2 Limite d'une application

Toutes les propriétés des applications vues dans cette section restent inchangées si on remplace les normes des espaces vectoriels normés considérés par des normes équivalentes.

### 2.1 Définition et propriétés de la limite

**Définition 2.1 Limite**

Soient  $(E, N_1)$  et  $(F, N_2)$  deux espaces vectoriels normés,  $A$  une partie de  $E$ ,  $f$  une application de  $A$  dans  $F$ ,  $a$  un point adhérent à  $A$  et  $\ell \in F$ .

On dit que  $f$  admet pour **limite**  $\ell$  en  $a$  si pour tout voisinage  $V$  de  $\ell$ , il existe un voisinage  $U$  de  $a$  relatif à  $A$  tel que  $f(U) \subset V$  ou, de manière équivalente, si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, f(B(a, \alpha) \cap A) \subset B(\ell, \varepsilon)$$

ou encore

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A, N_1(x - a) < \alpha \implies N_2(f(x) - \ell) < \varepsilon$$

**REMARQUE.** On obtient une définition équivalente en remplaçant les boules ouvertes par des boules fermées ou les inégalités strictes par des inégalités larges.

**REMARQUE.** La partie  $A$  peut avoir son importance. Par exemple, si on considère  $f : (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto \arctan(y/x)$ . Alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Mais si on considère  $g : (x, y) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R} \mapsto \arctan(y/x)$ . Alors  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} = -\frac{\pi}{2}$

**Proposition 2.1 Unicité de la limite**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés,  $A$  une partie de  $E$ ,  $f$  une application de  $A$  dans  $F$  et  $a$  un point adhérent à  $A$ .

Si  $f$  admet une limite en  $a$ , alors celle-ci est unique.

**Proposition 2.2 Passage à la limite**

Soient  $f$  et  $g$  deux applications d'une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  admettant des limites respectives  $\ell$  et  $\ell'$  en  $a \in \overline{A}$ .

Si  $f \leq g$  sur un voisinage de  $a$  relatif à  $A$ , alors  $\ell \leq \ell'$ .



**ATTENTION !** Ceci n'a bien évidemment aucun sens pour des applications qui ne sont pas à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 2.3 Encadrement**

Soient  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois applications d'une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  et  $h$  admettent la même limite  $\ell$  en  $a \in \overline{A}$ .

Si  $f \leq g \leq h$  sur un voisinage de  $a$  relatif à  $A$ , alors  $g$  admet également pour limite  $\ell$  en  $a$ .

**Méthode Déterminer la limite d'une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$** 

Soit  $f$  une application d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Pour déterminer la limite de  $f$  en  $a \in \overline{A}$ , on peut :

- se ramener en  $(0, \dots, 0)$  en posant  $x = a + h$  de sorte que  $h$  tend vers  $(0, \dots, 0)$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  ;
- choisir une norme adaptée ;
- tirer parti du fait que pour  $x(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $|x_i| \leq \|x\|$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  (que  $\|\cdot\|$  soit la norme  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  ou  $\|\cdot\|_\infty$ ).

**Exemple 2.1**

Soit  $f : (x, y, z) \mapsto \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$ . Déterminons la limite éventuelle de  $f$  en  $(0, 0, 0)$ .

Munissons  $\mathbb{R}^3$  de la norme euclidienne. Alors

$$|f(x, y, z)| = \frac{|x||y||z|}{\|(x, y, z)\|_2^2} \leq \frac{\|(x, y, z)\|_2^3}{\|(x, y, z)\|_2^2} = \|(x, y, z)\|_2$$

On en déduit que  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, z) = 0$ .

**Proposition 2.4 Caractérisation séquentielle de la limite**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés,  $A$  une partie de  $E$ ,  $f$  une application de  $A$  dans  $F$ ,  $a$  un point adhérent à  $A$  et  $\ell \in F$ .

Alors  $\lim_a f = \ell$  si et seulement si pour toute suite  $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$  convergeant vers  $a$ ,  $(f(u_n))$  converge vers  $\ell$ .

**Méthode** Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite

Pour montrer qu'une fonction  $f$  définie sur une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $E$  n'admet pas de limite en  $a \in \overline{A}$ , il suffit au choix :

- d'exhiber une suite  $(u_n)$  à valeurs dans  $A$  et de limite  $a$  telle que la suite  $(f(u_n))$  n'ait pas de limite ;
- ou d'exhiber deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  à valeurs dans  $A$  et de limite  $a$  telle que les suites  $(f(u_n))$  et  $(f(v_n))$  aient des limites différentes.

**Exemple 2.2**

L'application  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$  n'admet pas de limite en  $(0, 0)$ . En effet, si on pose  $u_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$  et  $v_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont bien à valeurs dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et de limite  $(0, 0)$  mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = \frac{1}{2}$ .



**ATTENTION !** L'exemple précédent montre en particulier que, si  $f$  est une application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , il ne suffit pas que les fonctions  $x \mapsto f(x, b)$  et  $y \mapsto f(a, y)$  admettent des limites respectives en  $a$  et  $b$  pour que  $f$  admette une limite en  $(a, b)$ .

En effet, pour  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$ , les applications  $x \mapsto f(x, 0)$  et  $y \mapsto f(0, y)$  admettent bien des limites en 0 puisqu'elles sont constamment nulles et pourtant,  $f$  n'admet pas de limite en  $(0, 0)$ .



**Proposition 2.5 Extensions**

Soient  $(E, N_1)$  et  $(F, N_2)$  deux espaces vectoriels normés,  $A$  une partie de  $E$ ,  $f$  une application de  $A$  dans  $F$ ,  $a$  un point adhérent à  $A$  et  $\ell \in F$ .

- On suppose  $A$  non bornée. Alors  $\lim_{N_1(x) \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  signifie que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists K \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, N_1(x) \geq K \implies N_2(f(x) - \ell) \leq \varepsilon$$

- On suppose que  $A$  est une partie non bornée de  $\mathbb{R}$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  signifie que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \geq K \implies N_2(f(x) - \ell) \leq \varepsilon$$

- On suppose que  $A$  est une partie non bornée de  $\mathbb{R}$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$  signifie que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq K \implies N_2(f(x) - \ell) \leq \varepsilon$$

- On suppose que  $F = \mathbb{R}$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  signifie que

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A, N_1(x - a) \leq \varepsilon \implies f(x) \geq M$$

- On suppose que  $F = \mathbb{R}$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  signifie que

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A, N_1(x - a) \leq \varepsilon \implies f(x) \leq M$$

- On suppose  $A$  non bornée et  $F = \mathbb{R}$ . Alors  $\lim_{N_1(x) \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  signifie que

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, N_1(x) \geq K \implies f(x) \geq M$$

- On suppose  $A$  non bornée et  $F = \mathbb{R}$ . Alors  $\lim_{N_1(x) \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  signifie que

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, N_1(x) \geq K \implies f(x) \leq M$$

On peut également donner une caractérisation séquentielle de la limite dans chacun de ces cas.

**Exemple 2.3**

Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$ . Alors  $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$ .

**Exemple 2.4**

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme non constant. Alors  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$ .

**Exemple 2.5**

L'application  $f : t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t)$  n'admet pas de limite en  $+\infty$ . En effet, la suite de terme général  $n\pi$  est de limite  $+\infty$  mais la suite de terme général  $f(n\pi)$  n'admet pas de limite. En effet, elle admet deux valeurs d'adhérences, à savoir  $(-1, 0)$  et  $(1, 0)$ .

**Exemple 2.6**

L'application  $f : (x, y) \mapsto \sin(x + y)$  n'admet pas de limite lorsque  $\|(x, y)\|$  tend vers  $+\infty$ . En effet, la suite de terme général  $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$  tend bien en norme vers  $+\infty$  mais la suite de terme général  $f\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$  n'admet pas de limite. En effet, elle admet deux valeurs d'adhérences  $-1$  et  $1$ .

**Proposition 2.6 Majoration, minoration**

Soient  $f$  et  $g$  deux applications d'une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telles que  $f \leq g$  sur un voisinage de  $a$  relatif à  $A$ .

- (i) Si  $\lim_a f = +\infty$ , alors  $\lim_a g = +\infty$ .
- (ii) Si  $\lim_a g = -\infty$ , alors  $\lim_a f = -\infty$ .

**Proposition 2.7 Limite d'une application à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés**

Soient  $E, F_1, \dots, F_n$  des espaces vectoriels normés,  $f$  une application d'une partie  $A$  de  $E$  dans  $\prod_{i=1}^n F_i$ ,  $a \in \overline{A}$  et  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \prod_{i=1}^n F_i$ . On note  $f_1, \dots, f_n$  les applications composantes de  $f$ . Alors  $f$  admet pour limite  $\ell$  en  $a$  si et seulement si pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f_i$  admet pour limite  $\ell_i$  en  $a$ .

**2.2 Opérations sur les limites****Proposition 2.8**

Soient  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ ,  $F$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé,  $f$  une application de  $A$  dans  $\mathbb{K}$  et  $g$  une application de  $A$  dans  $F$ .

Si  $f$  et  $g$  admettent des limites en  $a \in \overline{A}$ , alors  $fg$  admet une limite en  $a$  et  $\lim_a fg = (\lim_a f)(\lim_a g)$ .

**Proposition 2.9**

Soient  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ ,  $F$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé,  $f$  et  $g$  deux applications de  $A$  dans  $F$ .

Si  $f$  et  $g$  admettent des limites en  $a \in \overline{A}$ , alors pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ ,  $\lambda f + \mu g$  admet une limite en  $a$  et  $\lim_a \lambda f + \mu g = \lambda \lim_a f + \mu \lim_a g$ .

**Proposition 2.10 Limite et composition**

Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels normés,  $A$  et  $B$  des parties respectives de  $E$  et  $F$ ,  $f$  une application de  $A$  dans  $F$ ,  $g$  une application de  $B$  dans  $G$  et enfin  $a \in \overline{A}$ ,  $b \in F$  et  $l \in G$ . On suppose que  $f(A) \subset B$ .

Si  $\lim_a f = b$  et  $\lim_b g = l$ , alors  $\lim_a g \circ f = l$ .

**REMARQUE.** Puisque  $f(A) \subset B$ ,  $\lim_a f = b$  implique  $b \in \overline{B}$ .

### 3 Continuité

Toutes les propriétés des applications vues dans cette section (continuité, continuité uniforme, lipschitzianité) restent inchangées si on remplace les normes des espaces vectoriels normés considérés par des normes équivalentes.

#### 3.1 Définition et premières propriétés

##### Définition 3.1 Continuité

Soit  $f$  une application d'une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $(E, N_1)$  à valeurs dans un espace vectoriel normé  $(F, N_2)$ .

On dit que  $f$  est **continue** en  $a \in A$  si  $f$  admet une limite en  $a$ . Dans ce cas,  $\lim_a f = f(a)$ .

Autrement dit,  $f$  est continue en  $a$  si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, f(B(a, \alpha) \cap A) \subset B(f(a), \varepsilon)$$

ou encore

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A, N_1(x - a) < \alpha \implies N_2(f(x) - f(a)) < \varepsilon$$

On dit que  $f$  est continue sur  $A$  si  $f$  est continue en tout  $a \in A$ .

**REMARQUE.** On obtient une définition équivalente en remplaçant les boules ouvertes par des boules fermées ou les inégalités strictes par des inégalités larges.

##### Proposition 3.1 Caractérisation séquentielle de la continuité

Soit  $f$  une application d'une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $E$  à valeurs dans un espace vectoriel normé  $F$ .

Alors  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si pour toute suite  $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$  convergeant vers  $a$ ,  $(f(u_n))$  converge vers  $f(a)$ .

##### Proposition 3.2 Continuité d'une application à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés

Soient  $E, F_1, \dots, F_n$  des espaces vectoriels normés,  $f$  une application d'une partie  $A$  de  $E$  dans  $\prod_{i=1}^n F_i$  et  $a \in A$ . On note  $f_1, \dots, f_n$  les applications composantes de  $f$ .

Alors  $f$  est continue en  $a$  (resp. sur  $A$ ) si et seulement si pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f_i$  est continue en  $a$  (resp. sur  $A$ ).

#### 3.2 Opérations sur les applications continues

##### Proposition 3.3

Soient  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ ,  $F$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé,  $f$  une application de  $A$  dans  $\mathbb{K}$  et  $g$  une application de  $A$  dans  $F$ .

Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $a \in A$  (resp. sur  $A$ ), alors  $fg$  est continue en  $a$  (resp. sur  $A$ ).

##### Proposition 3.4

Soient  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ ,  $F$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé,  $f$  et  $g$  deux applications de  $A$  dans  $F$ .

Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $a \in A$  (resp. sur  $A$ ), alors pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ ,  $\lambda f + \mu g$  est continue en  $a$  (resp. sur  $A$ ).

**Proposition 3.5 Continuité et composition**

Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels normés,  $A$  et  $B$  des parties respectives de  $E$  et  $F$ ,  $f$  une application de  $A$  dans  $F$ ,  $g$  une application de  $B$  dans  $G$ . On suppose que  $f(A) \subset B$ .

Si  $f$  est continue en  $a \in A$  (resp. sur  $A$ ) et  $g$  est continue en  $f(a)$  (resp. sur  $B$ ), alors  $g \circ f$  est continue en  $a$  (resp. sur  $A$ ).

**3.3 Continuité uniforme et lipschitzianité****Définition 3.2 Continuité uniforme**

Soit  $f$  une application d'une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $(E, N_1)$  à valeurs dans un espace vectoriel normé  $(E, N_2)$ . On dit que  $f$  est **uniformément continue** sur  $A$  si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall a \in A, f(B(a, \alpha) \cap A) \subset B(f(a), \varepsilon)$$

ou, de manière équivalente, si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in A^2, N_1(x - y) < \alpha \implies N_2(f(x) - f(y)) < \varepsilon$$

**REMARQUE.** On obtient une définition équivalente en remplaçant les boules ouvertes par des boules fermées ou les inégalités strictes par des inégalités larges.

**Proposition 3.6**

Soit  $f$  une application d'une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $E$  à valeurs dans un espace vectoriel normé  $F$ . Si  $f$  est **uniformément continue** sur  $A$ , alors  $f$  est **continue** sur  $A$ .



**ATTENTION !** La réciproque est fausse. La fonction  $x \mapsto x^2$  est continue sur  $\mathbb{R}$  mais pas uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 3.3 Application lipschitzienne**

Soit  $f$  une application d'une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $(E, N_1)$  à valeurs dans un espace vectoriel normé  $(E, N_2)$ . On dit que  $f$  est **lipschitzienne** sur  $A$  si

$$\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in A^2, N_2(f(x) - f(y)) \leq K N_1(x - y)$$

Dans ce cas, on dit que  $f$  est lipschitzienne de rapport  $K$  ou  $K$ -lipschitzienne.

**REMARQUE.** La lipschitzianité est inchangée si on change les normes en des normes équivalents. Néanmoins, le **rapport** de lipschitzianité peut changer.

**Exemple 3.1**

Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé. Par inégalité triangulaire, l'application  $N$  est 1-lipschitzienne et en particulier continue.

**Proposition 3.7**

Soit  $f$  une application d'une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $E$  à valeurs dans un espace vectoriel normé  $F$ . Si  $f$  est **lipschitzienne** sur  $A$ , alors  $f$  est **uniformément continue** sur  $A$ .



**ATTENTION !** La réciproque est fautive. La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}_+$  mais pas lipschitzienne sur  $\mathbb{R}_+$ .

### Distance à une partie

Soit  $A$  une partie non vide d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé  $(E, N)$ . Pour  $x \in E$ , on appelle **distance** de  $x$  à  $A$  le réel positif

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} N(x - a)$$

L'application  $x \in E \mapsto d(x, A)$  est lipschitzienne sur  $E$  donc uniformément continue sur  $E$  donc continue sur  $E$ .

### Exemple 3.2 Projections canoniques

Soient  $F_1, \dots, F_n$  des espaces vectoriels normés. Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'application

$$p_k : (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n \mapsto x_k$$

est lipschitzienne donc uniformément continue donc continue.

### Proposition 3.8 Cas des applications linéaires

Soient  $(E, N_1)$  et  $(F, N_2)$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $f$  est continue sur  $E$  si et seulement si

$$\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, N_2(f(x)) \leq CN_1(x)$$

**REMARQUE.** Pour les applications linéaires, il y a donc équivalence entre continuité, uniforme continuité et lipschitzianité.

### Exemple 3.3

On munit l'espace vectoriel  $E$  des suites bornées de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  de la norme infinie  $\|\cdot\|_{\infty}$ . L'endomorphisme  $T : (u_n) \in E \mapsto (u_{n+1} - u_n)$  est continu. Soit en effet  $u \in E$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|T(u)_n| = |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2\|u\|_{\infty}$$

Donc  $\|T(u)\|_{\infty} \leq 2\|u\|_{\infty}$ .

### Méthode Montrer qu'une application linéaire n'est pas continue

Soient  $(E, N_1)$  et  $(F, N_2)$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. Pour montrer qu'une application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  n'est pas continue, il suffit de trouver une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $E$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_2(f(x_n))}{N_1(x_n)} = +\infty$$

**Exemple 3.4**

On munit  $\mathbb{R}[X]$  de la norme  $N$  définie par  $N(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$ . L'endomorphisme de dérivation

$$D : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P'$$

n'est pas continu. En effet, si on pose  $P_n = X^n$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $N(P_n) = 1$  tandis que  $N(D(P_n)) = N(nX^{n-1}) = n$ . Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N(D(P_n))}{N(P_n)} = +\infty$$

**Définition 3.4**

Soient  $(E, N_1)$  et  $(F, N_2)$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. On note  $\mathcal{L}_c(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E, F)$ .

**Proposition 3.9 Continuité des applications linéaires en dimension finie**

Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. Si  $E$  est de **dimension finie**, toute application **linéaire** de  $E$  dans  $F$  est continue i.e.  $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ .

**Exemple 3.5**

Fixons  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ . L'application  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto P^{-1}MP$  est linéaire. Comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est de dimension finie, elle est également continue.

**Exercice 3.1**

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ . Montrer que si  $B = P^{-1}AP$  avec  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ , alors  $\exp(B) = P^{-1} \exp(A)P$ .

**Proposition 3.10 Continuité des applications multilinéaires en dimension finie**

Soient  $E_1, \dots, E_n, F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. Si  $E_1, \dots, E_n$  sont de **dimension finie**, toute application multilinéaire de  $E_1 \times \dots \times E_n$  dans  $F$  est continue.

**Exemple 3.6**

Soient  $E, F, G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. L'application  $\begin{cases} \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ (f, g) & \longmapsto & g \circ f \end{cases}$  est bilinéaire donc continue ( $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{L}(F, G)$  sont de dimensions finies car  $E, F, G$  le sont).

**Exemple 3.7**

L'application  $\begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{cases}$  est bilinéaire donc continue ( $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  sont de dimensions finies).

### 3.4 Applications polynomiales

#### Définition 3.5 Application polynomiale

On appelle **application polynomiale** toute application du type

$$\begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \end{cases}$$

où  $(a_{i_1, \dots, i_n})_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n}$  est une famille presque nulle d'éléments de  $\mathbb{K}$ .

#### Proposition 3.11

Toute application **polynomiale** est **continue**.

#### Exemple 3.8

L'application  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(M)$  est continue en tant que fonction polynomiale des coefficients de la matrice.

#### Exemple 3.9

L'application  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \text{com}(M)$  est continue car chacun des coefficients de la comatrice est au signe près un déterminant et donc une fonction polynomiale des coefficients de la matrice.

#### Exemple 3.10

L'application  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^{-1}$  est continue. En effet, pour tout  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ,  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \text{com}(M)$ . De plus,  $M \mapsto \text{com}(M)$  est continue et  $M \mapsto \det(M)$  est continue et ne s'annule pas sur  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ .

#### Exemple 3.11

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . L'application  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^p$  est continue car les coefficients de  $M^p$  sont polynomiaux en les coefficients de  $M$ .

### 3.5 Continuité et topologie

#### Proposition 3.12 Caractérisation de la continuité par les ouverts et les fermés

Soit  $f$  une application d'une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $E$  à valeurs dans un espace vectoriel normé  $F$ . Les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $f$  est **continue** sur  $A$ .
- (ii) L'image réciproque d'un **ouvert** quelconque de  $F$  est un **ouvert** de  $E$  relatif à  $A$ .
- (iii) L'image réciproque d'un **fermé** quelconque de  $F$  est un **fermé** de  $E$  relatif à  $A$ .

Notamment, on a le résultat utile suivant.

**Corollaire 3.1 Caractérisation de la continuité par les ouverts et les fermés**

Soit  $f$  une application d'un espace vectoriel normé  $E$  à valeurs dans un espace vectoriel normé  $F$ . Les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $f$  est **continue** sur  $E$ .
- (ii) L'image réciproque d'un **ouvert** quelconque de  $F$  est un **ouvert** de  $E$ .
- (iii) L'image réciproque d'un **fermé** quelconque de  $F$  est un **fermé** de  $E$ .

**Exemple 3.12**

- $GL_n(\mathbb{K})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  car c'est l'image réciproque de l'ouvert  $\mathbb{K}^*$  de  $\mathbb{K}$  par le déterminant qui est une application continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- $O(n)$  est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  car c'est l'image réciproque du fermé  $\{I_n\}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par l'application continue  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T M$ .
- $SL_n(\mathbb{K})$  est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  car c'est l'image réciproque du fermé  $\{1\}$  de  $\mathbb{R}$  par le déterminant qui est une application continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- $SO(n)$  est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  car c'est l'intersection des fermés  $O(n)$  et  $SL_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 3.2**

Soit  $f$  une application d'un espace vectoriel normé  $E$  à valeurs dans un espace vectoriel normé  $F$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est continue sur  $E$ ;
- (ii) pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ ;
- (iii) pour toute partie  $B$  de  $F$ ,  $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ .

**Proposition 3.13 Densité et continuité**

Soient  $f$  et  $g$  deux applications **continues** d'un espace vectoriel normé  $E$  à valeurs dans un espace vectoriel normé  $F$ . Si  $f$  et  $g$  coïncident sur une **partie dense** de  $E$ , alors elles sont égales.

**Exercice 3.3 Endomorphismes continus de  $(\mathbb{R}, +)$** 

Soit  $f$  un endomorphisme **continu** du groupe  $(\mathbb{R}, +)$ .

1. Montrer que pour tout  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $f(r) = rf(1)$ .
2. En déduire que  $f = f(1) \text{Id}_{\mathbb{R}}$ .

**Exercice 3.4 Similitude et comatrice**

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices semblables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $\text{com}(A)$  et  $\text{com}(B)$  sont également semblables. On pourra d'abord traiter le cas où  $A$  et  $B$  sont inversibles.

**REMARQUE.** Soit  $f : E \rightarrow F$  **continue**. Si  $A$  est une partie dense de  $E$ , alors  $f(A)$  est dense dans  $f(E)$ .



## 4 Compacité

### 4.1 Parties compactes

#### Définition 4.1 Compact

On dit qu'une partie  $K$  d'un espace vectoriel normé  $E$  est une **partie compacte** ou un **compact** de  $E$  si toute suite à valeurs dans  $K$  admet une valeur d'adhérence.

#### Exemple 4.1

Un segment de  $\mathbb{R}$

#### Exercice 4.1

Soit  $K$  un compact et  $F$  un fermé d'un espace vectoriel normé  $E$ . Montrer que  $K + F$  est fermé.

#### Proposition 4.1

Tout compact d'un espace vectoriel normé est fermé et borné.



**ATTENTION !** La réciproque est fausse en général en dimension infinie.

Par exemple, si on munit  $\mathbb{K}[X]$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  (maximum des valeurs absolues des coefficients), la partie  $A = \{X^n, n \in \mathbb{N}\}$  est fermée et bornée mais non compacte. Si elle était compacte, on pourrait extraire de la suite  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite  $(X^{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  convergente. Sa limite appartiendrait à  $A$  donc il existerait  $p \in \mathbb{N}$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X^{\varphi(n)} = X^p$$

Or comme  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante,  $\varphi(n) > \varphi(p) \geq p$  pour tout entier  $p > n$ . Ainsi  $\|X^{\varphi(n)} - X^p\|_\infty = 1$  pour tout  $n > p$ , ce qui contredit le fait que  $(X^{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $X^p$ .

#### Proposition 4.2

Toute partie fermée d'une partie compacte est compacte.

#### Proposition 4.3 Compacité et convergence

Une suite à valeurs dans un compact d'un espace vectoriel normé converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

#### Proposition 4.4 Produit de compacts

Soient  $E_1, \dots, E_n$  des espaces vectoriels normés et  $K_1, \dots, K_n$  des compacts respectifs de ces espaces vectoriels normés. Alors  $K_1 \times \dots \times K_n$  est un compact de  $E_1 \times \dots \times E_n$ .

## 4.2 Compacité en dimension finie

### Théorème 4.1 Compacts d'un espace vectoriel de dimension finie

Les compacts d'un espace vectoriel normé de **dimension finie** sont exactement les parties fermées et bornées.

### Exemple 4.2

Les boules fermées d'un espace vectoriel de dimension finie sont compactes.

### Exemple 4.3

$O(n)$  et  $SO(n)$  sont des compacts de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### Proposition 4.5

Une suite **bornée** à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.



**ATTENTION !** Il est essentiel que la suite soit bornée. Par exemple la suite de terme général  $2^n(1 - (-1)^n)$  admet 0 comme unique valeur d'adhérence mais ne converge pas.

### Proposition 4.6 Sous-espaces vectoriels de dimension finie

Tout sous-espace vectoriel de **dimension finie** d'un espace vectoriel normé est fermé.

### Exemple 4.4

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors il existe  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $\exp(A) = P(A)$ . En effet,  $\mathbb{K}[A]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est de dimension finie,  $\mathbb{K}[A]$  est fermé dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{K}[A]$  et

$$\exp(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$$

donc  $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$ .

Comme  $\mathbb{K}[A]$  est une algèbre commutative, on en déduit notamment que  $A$  et  $\exp(A)$  commutent.

### Exemple 4.5

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un espace vectoriel de **dimension finie**. Alors il existe  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $\exp(u) = P(u)$ . En effet,  $\mathbb{K}[u]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ . Comme  $\mathcal{L}(E)$  est de dimension finie,  $\mathbb{K}[u]$  est fermé dans  $\mathcal{L}(E)$ . Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} \in \mathbb{K}[u]$  et

$$\exp(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!}$$

donc  $\exp(u) \in \mathbb{K}[u]$ .

Comme  $\mathbb{K}[u]$  est une algèbre commutative, on en déduit notamment que  $u$  et  $\exp(u)$  commutent.

### 4.3 Continuité et compacité

#### Proposition 4.7

Soit  $f$  une application d'un espace vectoriel normé  $E$  à valeurs dans un espace vectoriel normé  $F$ .  
L'image d'une partie compacte de  $E$  par  $f$  est une partie compacte de  $F$ .

#### Corollaire 4.1

Soient  $K$  un compact d'un espace vectoriel normé  $E$  et  $f$  une application continue sur  $K$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .  
Alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes.

#### Exemple 4.6

Soit  $f$  une application linéaire d'un espace vectoriel normé  $(E, N_1)$  de dimension finie à valeurs dans un espace vectoriel normé  $(F, N_2)$ . L'application  $\varphi : x \in E \setminus \{0_E\} \mapsto \frac{N_2(f(x))}{N_1(x)}$  est bornée et atteint ses bornes. En effet, l'image de  $E \setminus \{0_E\}$  par  $\varphi$  est également l'image de la sphère unité par  $\varphi$  et la sphère unité est compacte puisque c'est une partie fermée et bornée d'un espace vectoriel de dimension finie.

#### Exercice 4.2 Norme d'opérateur (ou norme subordonnée)

Soit  $(E, N)$  et  $(F, N')$  deux espaces vectoriels normés. On suppose  $E$  de dimension finie. Pour  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , on pose

$$\|f\| = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{N'(f(x))}{N(x)}$$

1. On pose  $S = \{x \in E, N(x) = 1\}$  et  $B = \{x \in E, N(x) \leq 1\}$ . Montrer que pour tout  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\|f\|$  est bien défini et que

$$\|f\| = \max_{x \in S} N'(f(x)) = \max_{x \in B} N'(f(x))$$

2. Montrer que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathcal{L}(E, F)$ .
3. On suppose dans cette question que  $E = F$  et  $N = N'$ . Montrer que  $\|\cdot\|$  est une norme d'algèbre sur  $\mathcal{L}(E)$ .
4. On suppose dans cette question que  $E = \mathbb{R}^p$  et  $F = \mathbb{R}^n$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . On considère l'application linéaire  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$  canoniquement associée à  $A$ .

- (a) On suppose que  $E$  et  $F$  sont munis de leurs normes uniformes respectives. Montrer que

$$\|f\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |A_{i,j}|$$

- (b) On suppose que  $E$  et  $F$  sont munis de leurs normes 1 respectives. Montrer que

$$\|f\| = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|$$

- (c) On suppose que  $E$  et  $F$  sont munis de leurs normes 2 respectives. Montrer que

$$\|f\| = \sqrt{\max \operatorname{Sp}(A^T A)}$$

**Proposition 4.8 Théorème de Heine**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés,  $K$  une partie compacte de  $E$  et  $f$  une application de  $K$  dans  $F$ . Si  $f$  est continue sur  $K$ , alors elle est uniformément continue sur  $K$ .

**Exemple 4.7**

Toute application continue sur un segment de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans un espace vectoriel normé est uniformément continue sur ce segment.

## 5 Connexité par arcs

### 5.1 Parties connexes par arcs

**Définition 5.1 Chemin continu**

Soient  $E$  un espace vectoriel normé et  $(a, b) \in E^2$ . On appelle **chemin continu** joignant  $a$  à  $b$  toute application continue  $\gamma$  de  $[0, 1]$  dans  $E$  telle que  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma(1) = b$ .

**Définition 5.2 Partie connexe par arcs**

Soit  $C$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . On dit que  $E$  est **connexe par arcs** si pour tout  $(a, b) \in E^2$ , il existe un chemin continu joignant  $a$  à  $b$  à valeurs dans  $C$ .

**Exemple 5.1**

$\mathbb{U}$  est une partie connexe par arcs de  $\mathbb{C}$ . Soit  $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2$ . Il existe donc  $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $z_1 = e^{i\theta_1}$  et  $z_2 = e^{i\theta_2}$ . Posons

$$\gamma : t \in [0, 1] \mapsto \exp(i((1-t)\theta_1 + t\theta_2))$$

- $\gamma$  est continue sur  $[0, 1]$ ;
- $\gamma$  est à valeurs dans  $\mathbb{U}$ ;
- $\gamma(0) = z_1$  et  $\gamma(1) = z_2$ .

**Exemple 5.2**

$\text{SO}_2(\mathbb{R})$  est une partie connexe par arcs de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Soit  $(R_1, R_2) \in \text{SO}_2(\mathbb{R})^2$ . Posons  $R : \theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . Il existe  $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $R_1 = R(\theta_1)$  et  $R_2 = R(\theta_2)$ . Posons  $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto R((1-t)\theta_1 + t\theta_2)$ . Alors

- $\gamma$  est continue;
- $\gamma$  est à valeurs dans  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ ;
- $R_1 = \gamma(0)$  et  $R_2 = \gamma(1)$ .

**Proposition 5.1**

Toute partie **convexe** d'un espace vectoriel normé est **connexe par arcs**.

**Exemple 5.3**

Les boules fermées et ouvertes d'un espace vectoriel normé sont connexes par arcs.

**Définition 5.3 Partie étoilée**

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel  $E$ . On dit que  $A$  est **étoilée** s'il existe  $a \in A$  tel que pour tout  $x \in A$ ,  $[a, x] \subset A$ . Dans ce cas, on dit que  $A$  est étoilée par rapport à  $a$ .

**Exemple 5.4**

Une partie convexe est étoilée par rapport à chacun de ses points.

**Exemple 5.5**

L'ensemble des matrices diagonalisables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est étoilé par rapport à la matrice nulle.

**Proposition 5.2**

Toute partie **étoilée** d'un espace vectoriel normé est **connexe par arcs**.

**Proposition 5.3**

Les parties **connexes par arcs** de  $\mathbb{R}$  sont les **intervalles**.

**Proposition 5.4 Composantes connexes par arcs**

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . La relation «être joignable par un chemin continu à valeurs dans  $A$ » est une relation d'équivalence sur  $A$ .

Les classes d'équivalence sont appelées les **composantes connexes par arcs** de  $A$ . Ce sont des parties connexes par arcs.

**Exemple 5.6**

L'hyperbole d'équation  $x^2 - y^2 = 1$  admet deux composantes connexes par arcs à savoir ses intersections avec les demi-plans d'équations  $x < 0$  et  $x > 0$ .

## 5.2 Continuité et connexité par arcs

**Proposition 5.5**

L'image d'une partie **connexe par arcs** par une application **continue** est **connexe par arcs**.

**Exemple 5.7**

$GL_n(\mathbb{R})$  n'est pas connexe par arcs. En effet, l'image de  $GL_n(\mathbb{R})$  par le déterminant (qui est une application continue) est  $\mathbb{R}^*$  qui n'est pas connexe par arcs (ce n'est pas un intervalle de  $\mathbb{R}$ ).

On prouve de la même manière que  $O_n(\mathbb{R})$  n'est pas connexe par arcs.

**Exemple 5.8**

$\mathbb{U}$  est connexe par arcs car c'est l'image de l'intervalle  $\mathbb{R}$  par l'application continue  $t \mapsto e^{it}$ .

**Exemple 5.9**

$SO_2(\mathbb{R})$  est une partie connexe par arcs de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  car c'est l'image de l'intervalle  $\mathbb{R}$  par l'application continue  $t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ .

**Corollaire 5.1 Théorème des valeurs intermédiaires**

Soient  $C$  une partie **connexe par arcs** d'un espace vectoriel normé  $E$  et  $f$  une application **continue** sur  $C$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Alors  $f(C)$  est un **intervalle**.

Cela signifie que, si  $f$  prend les valeurs  $a$  et  $b$  sur  $C$ , alors  $f$  prend toutes les valeurs comprises entre  $a$  et  $b$  sur  $C$ .

## 6 Suites et séries de fonctions

Dans ce paragraphe,  $A$  désigne une partie d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie et  $F$  un espace vectoriel de dimension finie.

On rappelle que  $F$  étant de dimension finie, toutes les normes sur  $F$  sont équivalentes.

On notera  $\|\cdot\|$  la norme sur  $F$  et  $\|\cdot\|_\infty$  la norme uniforme sur  $A$ .

### 6.1 Suites de fonctions

**Définition 6.1 Convergence simple**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $A$  dans  $F$ . On dit que  $(f_n)$  **converge simplement** sur  $A$  vers une fonction  $f$  de  $A$  dans  $F$  si

$$\forall x \in A, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

**REMARQUE.** Toutes les normes sur  $F$  étant équivalentes, la convergence de la suite  $(f_n(x))$  ne dépend pas de la norme choisie.

**Rappel** Norme uniforme

On rappelle que la **norme uniforme** est définie sur l'ensemble des fonctions bornées de  $A$  dans  $F$  par

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in A} \|f(x)\|$$

où  $\|\cdot\|$  désigne une norme sur  $F$ .

**REMARQUE.** Le caractère borné d'une fonction ne dépend pas de la norme choisie sur  $F$  puisque toutes les normes sur  $F$  sont équivalentes.

Par contre, la norme infinie dépend donc de la norme choisie sur  $F$ .

**Définition 6.2 Convergence uniforme**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $A$  dans  $F$ . On dit que  $(f_n)$  **converge uniformément** sur  $A$  vers une fonction  $f$  de  $A$  dans  $F$  si les fonctions  $f_n - f$  sont bornées à partir d'un certain rang et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$$

**REMARQUE.** Si une suite de fonctions converge uniformément sur  $A$ , elle converge uniformément sur toute partie de  $A$ .

**Proposition 6.1 La convergence uniforme implique la convergence simple**

Si une suite de fonctions  $(f_n)$  converge **uniformément** sur  $A$  vers  $f$ , alors elle converge **simplement** vers  $f$  sur  $A$ .

**Théorème 6.1 Théorème de la double limite**

Soient  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $A$  dans  $F$  **convergeant uniformément** vers  $f$  sur  $A$  et  $a$  un point adhérent à  $A$ . Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  possède une limite  $\ell_n \in F$  en  $a$ , alors

- la suite  $(\ell_n)$  possède une limite en  $\ell$  ;
- $\lim_a f = \ell$ .

**Théorème 6.2 Transfert de continuité**

Si  $(f_n)$  est une suite de fonctions **continues** sur  $A$  à valeurs dans  $F$  convergeant **uniformément** vers  $f$  sur  $A$ , alors  $f$  est continue sur  $A$ .

**REMARQUE.** La continuité étant une notion locale, on peut remplacer la condition de convergence uniforme sur  $A$  par la convergence uniforme sur **tout compact** de  $A$ .

**6.2 Séries de fonctions**

**Définition 6.3 Série de fonctions**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $A$  dans  $F$ , on note  $\sum f_n$  la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$  est appelée la somme partielle de rang  $n$  de la série  $\sum f_n$ .

**Définition 6.4 Convergence simple**

On dit qu'une série de fonctions de  $A$  dans  $F$  converge simplement sur  $A$  si la suite de ses sommes partielles converge simplement sur  $A$ .

**REMARQUE.** Si la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $A$ , alors la suite  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $A$ .

**Définition 6.5 Reste**

Si  $\sum f_n$  converge simplement sur  $A$ , la fonction  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$  est bien définie sur  $A$  et est appelée reste de rang  $n$  de la série  $\sum f_n$ .

**Définition 6.6 Convergence uniforme**

On dit qu'une série de fonctions de  $A$  dans  $F$  converge uniformément sur  $A$  si la suite de ses sommes partielles converge uniformément sur  $A$ .

**REMARQUE.** Si la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$ , alors la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $A$ .

**Proposition 6.2**

Une série de fonctions converge uniformément sur  $A$  si et seulement si

- elle converge simplement sur  $A$
- et la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle sur  $A$ .

**Définition 6.7 Convergence normale**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions de  $A$  dans  $F$ . On dit que la série  $\sum f_n$  converge **normalement** sur  $A$  si  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge.

**Rappel Convergence absolue**

Soit  $\sum u_n$  une série de termes à valeurs dans  $F$ . On dit que  $\sum u_n$  converge **absolument** si la série  $\sum \|u_n\|$  converge. Quand  $F$  est de dimension finie, on peut en déduire que la série  $\sum u_n$  converge.



**Proposition 6.3**

Si une série de fonctions converge **normalement** sur  $A$ , alors elle converge **uniformément** sur  $A$  et **absolument** en tout point de  $A$ .

**REMARQUE.** On peut alors préciser que si  $\sum f_n$  converge normalement, alors  $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right\|_{\infty} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty}$ .

**Théorème 6.3 Théorème de la double limite**

Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  une série de fonctions de  $A$  dans  $F$  **convergeant uniformément** vers  $f$  sur  $A$  et  $a$  un point adhérent à  $A$ . Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  possède une limite  $\ell_n \in F$  en  $a$ , alors

- la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ell_n$  converge ;
- $\lim_a f = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ .

**Théorème 6.4 Transfert de continuité**

Si  $\sum f_n$  est une série de fonctions **continues** sur  $A$  à valeurs dans  $F$  convergeant **uniformément** vers  $f$ , alors  $f$  est continue sur  $A$ .

**REMARQUE.** La continuité étant une notion locale, on peut remplacer la condition de convergence uniforme sur  $A$  par la convergence uniforme sur **tout compact** de  $A$ .

**Proposition 6.4 Continuité de l'exponentielle**

- L'application  $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto \exp(u)$  est continue.
- L'application  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \exp(M)$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est continue.