Semaine du 17/01 au 21/01

1 Cours

Fonctions à valeurs vectorielles

Les fonction considérées sont des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.

Dérivabilité Définition. La dérivabilité implique la continuité. Une fonction est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1 en a. Coordonnées de la dérivée dans une base. Opérations : dérivabilité et dérivée d'une combinaison linéaire, de $\mathrm{L} \circ f$ où L est linéaire, de $\mathrm{B}(f, g)$ où B est bilinéaire (cas du produit scalaire), de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et opérations.

Intégration Fonctions continues par morceaux. Définition de l'intégrale sur un segment à partir des fonctions coordonnées (indépendante de la base choisie). Propriétés : linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire. Sommes de Riemann. Dérivabilité et dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Inégalité des accroissements finis pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.

Arcs paramétrés Définition. Paramètre régulier. Tangente et normale en un point régulier d'un arc plan. Exemples d'étude.

Suites et séries de fonctions Interversion limite/intégration, série/intégration, limite/dérivation, série/dérivation. Dérivabilité et dérivée de $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(t\mathrm{A})$ où $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tu)$ où $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}^n$, dérivabilité et dérivée à partir des composantes.
- Le produit matriciel est bilinéaire : dérivabilité et dérivée de $t \mapsto \mathrm{M}(t)\mathrm{N}(t)$ où M et N sont à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Reconnaître les cas où on peut appliquer les différentes «formules» de Taylor.

3 Questions de cours

Exponentielle Dérivabilité et dérivée de $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(t\mathrm{A})$ où $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Banque CCP Exercices 3, 4, 56.