Devoir à la maison n°11

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1. On a clairement $\delta_h \circ \delta_{h^{-1}} = \delta_{h^{-1}} \circ \delta_h = \mathrm{Id}_G$ donc δ_h est une bijection de G dans G.

2. $\mathcal{L}(E)$ étant une algèbre, on a directement $u^+ \in \mathcal{L}(E)$. Soit $h \in G$.

$$u^+h = \left(\frac{1}{m}\sum_{g\in G} g^{-1}\,u\,g\right)h = \frac{1}{m}\sum_{g\in G} g^{-1}\,u\,g\,h = \frac{1}{m}\sum_{g\in G} h\,h^{-1}g^{-1}\,u\,gh = \frac{1}{m}\sum_{g\in G} h\left(\delta_h(g)\right)^{-1}u\left(\delta_h(g)\right)$$
$$= h\left(\frac{1}{m}\sum_{g\in G}\left(\delta_h(g)\right)^{-1}u\,\delta_h(g)\right) = h\left(\frac{1}{m}\sum_{g'\in G} g'^{-1}\,u\,g'\right) = hu^+ \qquad \text{en posant } g' = \delta_h(g)$$

donc $\forall h \in G, \quad u^+h = hu^+$.

3. Comme u^+ commute avec tout élément de G, on a :

$$(u^+)^+ = \frac{1}{m}\sum_{g\in G} g^{-1}\,u^+\,g = \frac{1}{m}\sum_{g\in G} g^{-1}\,g\,u^+ = \frac{1}{m}\sum_{g\in G} u^+ = \frac{1}{m}\,m\,u^+$$

soit $(u^+)^+ = u^+$.

4. Soit $x \in F = \mathrm{Im}\, p$, on a donc

$$p^+(x) = \frac{1}{m}\sum_{g\in G} g^{-1}\,p\,g(x)$$

Or, pour tout $g \in G$, F est stable par g donc $g(x) \in F = \mathrm{Im}\, p$ et donc $p\big(g(x)\big) = g(x)$. Ainsi,

$$p^+(x) = \frac{1}{m}\sum_{g\in G} g^{-1}g(x) = \frac{1}{m}\sum_{g\in G} x = x$$

donc $x \in \mathrm{Im}\, p^+$. Donc $F \subset \mathrm{Im}\, p^+$.

5. On a vu à la question **4** que pour tout $y \in F$, $g^{-1}\,p\,g(y) = y$. Or pour tout $x \in E$, $p\,h(x) \in \mathrm{Im}\, p = F$. Donc $h^{-1}\,p\,h(x) \in F$ car F est stable par $h^{-1} \in G$. On a, par conséquent,

$$\forall x \in E,\ g^{-1}\,p\,g\big(h^{-1}\,p\,h(x)\big) = h^{-1}\,p\,h(x)$$

donc $g^{-1}\,p\,g\,h^{-1}\,p\,h = h^{-1}\,p\,h$.

6. On a

$$\begin{aligned}
\left(p^+\right)^2 &= \left(\frac{1}{m}\sum_{g\in G} g^{-1}\,p\,g\right)\left(\frac{1}{m}\sum_{h\in G} h^{-1}\,p\,h\right)\\
&= \frac{1}{m^2}\sum_{g\in G}\sum_{h\in G} g^{-1}\,p\,g\,h^{-1}\,p\,h\\
&= \frac{1}{m^2}\sum_{g\in G}\sum_{h\in G} h^{-1}\,p\,h \qquad \text{d'après la question } \mathbf{5}\\
&= \frac{1}{m^2}\sum_{g\in G} m\,p^+ = \frac{1}{m^2}\,m^2\,p^+ = p^+
\end{aligned}$$

donc p^+ est un projecteur.

7. On a vu précédemment que, pour tout $x \in \mathrm{E}$ et tout $g \in \mathrm{G}$, $g^{-1}\,p\,g(x) \in \mathrm{F}$ donc $p^+(x) = \frac{1}{m}\sum_{g\in\mathrm{G}} g^{-1}\,p\,g(x) \in \mathrm{F}$ donc $\mathrm{Im}\,p^+ \subset \mathrm{F}$ et, comme $\mathrm{F} \subset \mathrm{Im}\,p^+$, $\mathrm{Im}\,p^+ = \mathrm{F} = \mathrm{Im}\,p$.

8. Puisque p^+ est un projecteur, $\mathrm{Ker}\,p^+$ est un supplémentaire de $\mathrm{F} = \mathrm{Im}\,p^+$.
Pour tout $g \in \mathrm{G}$, g et p^+ commutent, donc $\mathrm{Ker}\,p^+$ est stable par g.

9. Si F est stable par tout $g \in \mathrm{G}$, il suffit de choisir un projecteur d'image F (qui existe car F admet des supplémentaires) et d'appliquer la question précédente. Tout sous-espace stable par tout $g \in \mathrm{G}$ admet au moins un supplémentaire stable par tout $g \in \mathrm{G}$.