

## Généralités

### Exercice 1 ★

### Croissant et involutif

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application croissante telle que  $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ . Prouver que  $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ .

### Exercice 2 ★★★

Déterminer les applications  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telles que :  $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n$ .

### Exercice 3 ★

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  vérifiant  $f(1) = 1$  et telle que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

On rappelle que  $\text{Im } f = f(\mathbb{N})$  et on note  $\mathcal{F}$  l'ensemble des points fixes de  $f$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{F} = \{a \in \mathbb{N}, f(a) = a\}$$

1. Montrer que  $f(0) = 0$ .
2. En déduire que  $f \circ f = f$ .
3. Montrer que  $\text{Im } f = \mathcal{F}$ .
4. Montrer que pour tout  $a \in \mathcal{F}, a + 1 \in \mathcal{F}$ .
5. En déduire que  $\mathcal{F} = \mathbb{N}$  et en déduire  $f$ .

## Injectivité et surjectivité

### Exercice 4

### Quizz

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1.  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_1(x) = |x - 2|$ ;
2.  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_2(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ ;
3.  $f_3 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_3(x) = \frac{3x + 1}{4x + 1}$ ;
4.  $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ ;
5.  $f_5 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto x^3$ .

### Exercice 5 ★★

Soient  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux parties *fixées* de  $E$ , et  $\Psi$  l'application de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$  définie par

$$\forall X \subset E, \quad \Psi(X) = (X \cap A, X \cap B).$$

1. Etude de l'injectivité de  $\Psi$ .

- a. Calculer  $\Psi(\emptyset)$ .
- b. Calculer  $\Psi(\overline{A \cup B})$ .
- c. Prouver que  $\Psi$  est injective si et seulement si  $A \cup B = E$ .

2. Etude de la surjectivité de  $\Psi$ .

- a. Le couple  $(\emptyset, B)$  admet-il un antécédent par  $\Psi$  ?
- b. Déterminer une condition *nécessaire et suffisante* sur  $A, B$  et  $E$  pour que  $\Psi$  soit surjective.

### Exercice 6 ★

### Etude d'une application

Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par

$$\begin{cases} f(n) = n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ f(n) = \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Etudier l'injectivité et la surjectivité de  $f$ .

**Exercice 7 ★★**

Soit  $E$  un ensemble non vide et  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

1. Montrer que si  $A \cap B = \emptyset$ , alors pour toute partie  $X$  de  $E$

$$(X \cup A) \cap (X \cup B) = X$$

2. Soit l'application  $f: \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E)^2 \\ X & \longmapsto & (X \cup A, X \cup B) \end{cases}$ .

- a. Montrer que  $f$  n'est pas surjective.
- b. Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $A \cap B = \emptyset$ .

**Exercice 8 ★**

Soit  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application injective, telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq n$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n$ .

**Exercice 9 ★****Bijection de  $\mathbb{U}$  sur  $\mathbb{U}$** 

Soit  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ . Pour  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\bar{\alpha}z + 1 \neq 0$ , on pose  $f(z) = \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1}$ .

1. Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{U}$ .
2. Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\bar{\alpha}z + 1 \neq 0$ . Montrer que  $z \in \mathbb{U}$  si et seulement si  $f(z) \in \mathbb{U}$ .
3. Montrer que  $f$  induit une bijection de  $\mathbb{U}$  sur  $\mathbb{U}$ .

**Exercice 10 ★**

Soit  $f: E \rightarrow F$  une application. Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  pour tout couple  $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ .

**Exercice 11 ★★**

Soient  $f$  et  $g$  deux applications d'un ensemble  $E$  dans lui-même, telles que  $g \circ f \circ g = f$  et  $f \circ g \circ f = g$ .

1. On suppose que  $f$  est injective. Démontrer que  $f$  et  $g$  sont bijectives.
2. On suppose que  $g$  est surjective. Démontrer que  $f$  et  $g$  sont bijectives.

**Exercice 12 ★★★**

Le plan  $\mathcal{P}$  est muni d'un repère orthonormé direct.  $A$  est le point d'affixe 2. On définit une application  $\mathcal{T}: \mathcal{P} \setminus \{A\} \rightarrow \mathcal{P}$  qui au point d'affixe  $z$  associe le point d'affixe  $f(z) = 2z + 3 + \frac{6}{z-2}$ .

1. Étudier l'injectivité et la surjectivité de  $\mathcal{T}$ .
2. Déterminer l'ensemble des points de  $\mathcal{P}$  invariants par  $\mathcal{T}$ .
3. Deux points  $m$  et  $m'$  de  $\mathcal{P} \setminus \{A\}$  sont dits associés s'ils ont la même image par  $\mathcal{T}$ . Montrer que les points  $m$  et  $m'$ , d'affixes respectifs  $z$  et  $z'$ , sont associés si et seulement si  $z = z'$  ou  $(z-2)(z'-2) = 3$ .
4. On note  $\mathcal{E}$  l'axe réel privé du point  $A$ . Déterminer l'ensemble  $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ .
5. Soient  $B$  et  $C$  les points d'affixes  $7 - 4\sqrt{3}$  et  $7 + 4\sqrt{3}$ . Déterminer l'ensemble  $\mathcal{T}^{-1}([BC])$ .

**Exercice 13 ★**

1. Soit  $f: \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^z + e^{-z} \end{cases}$  est-elle injective ? surjective ?  
Déterminer  $f(\mathbb{R})$  et  $f(i\mathbb{R})$ .
2. Soit  $f: \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^z - e^{-z} \end{cases}$  est-elle injective ? surjective ?  
Déterminer  $f(\mathbb{R})$  et  $f(i\mathbb{R})$ .

**Exercice 14 ★**

Soit  $f: \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (m, n) & \longmapsto & 2^m(2n+1) \end{cases}$ . Montrer que  $f$  est bijective.

**Images directes et réciproques**

**Exercice 15 ★**

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image de l'ensemble  $I$  par la fonction  $f$  :

$$1. I = [-5, 1[ \text{ et } f(x) = \frac{5x-2}{1-x}.$$

$$4. I = ]1, +\infty[ \text{ et } f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

$$2. I = \left[\frac{1}{2}, 1\right[ \text{ et } f(x) = \frac{5x^2-1}{1-x}.$$

$$5. I = ]-\pi, \pi[ \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\} \text{ et } f(x) = \tan x.$$

$$3. I = ]-\frac{1}{x-1}, 1[ \text{ et } f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)}.$$

**Exercice 16 ★★**

Soit  $f : E \rightarrow F$ .

1. Montrer que  $f$  est injective si et seulement si pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $f^{-1}(f(A)) = A$ .
2. Montrer que  $f$  est surjective si et seulement si pour toute partie  $B$  de  $F$ ,  $f(f^{-1}(B)) = B$ .

**Exercice 17****Mise en jambe**

Soit  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$ . Déterminer les ensembles suivants :

1.  $f(\mathbb{R})$ ;
2.  $f([-3, 2])$ ;
3.  $f([-3, 3])$ ;
4.  $f^{-1}([9, 10])$ ;
5.  $f^{-1}([-5, -3])$ ;
6.  $f^{-1}([-4, 4])$ ;
7.  $f^{-1}(f([0, 1]))$ ;
8.  $f(f^{-1}([-1, 4]))$ ;
9.  $f(f^{-1}(\mathbb{R}_-))$ .

**Exercice 18 ★★**

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{C}^*$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $f(z) = \frac{1}{z}$ .

1.  $f$  est-elle injective ? surjective ?
2. On considère les ensembles  $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$  et  $F = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\right\}$ .
  - a. Si on identifie  $\mathbb{C}$  au plan, donner la nature géométrique de  $E$  et  $F$ , et donner leurs équations cartésiennes.
  - b. Vérifier que  $f(E \setminus \{0\}) \subset F$ .
  - c. Montrer que  $f$  induit une bijection de  $E \setminus \{0\}$  sur  $F$ .

**Fonctions indicatrices****Exercice 19**

Soient  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ . On définit la *différence symétrique* de  $A$  et  $B$  par :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Montrer que  $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$ ,

$$1_{A \Delta B} = (1_A - 1_B)^2.$$

2. Montrer que  $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ ,

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

3. Montrer que  $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

**Exercice 20**

Soient  $A, B, C$  trois ensembles. On pose  $X = A \cup (B \cap C)$  et  $Y = (A \cup B) \cap C$ .

1. Déterminer les fonctions indicatrices de  $X$  et  $Y$  en fonction de celles de  $A, B$  et  $C$ .
2. En déduire à quelle condition nécessaire et suffisante (portant sur  $A$  et  $C$ ) les ensembles  $X$  et  $Y$  sont égaux.

## Calcul de limites

### Exercice 21 ★

### Quantités conjuguées

1. Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1.$$

2. Soient  $m, n$  des entiers positifs. Etudier

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}.$$

3. Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\sqrt{1+x+x^2} - 1) = \frac{1}{2}.$$

### Exercice 22 ★

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x};$

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x};$

3.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2};$

4.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)};$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x};$

6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3};$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2};$

8.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1}.$

## Dérivabilité

### Exercice 23

Soit  $f$  une application dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

- Si  $f$  est paire ou impaire, que peut-on dire de la parité de  $f'$ , de  $f^{(n)}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ ?
- Si  $f$  est périodique, que peut-on dire de la périodicité de  $f'$ , de  $f^{(n)}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ ?

### Exercice 24 ★

Etudier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1.  $f : x \mapsto \sqrt{x^4 - x^2}$

2.  $g : x \mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}}$

3.  $h : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2-1}-1)$

4.  $i : x \mapsto \ln(1 - \sqrt{\cos x})$

### Exercice 25 ★

### Dérivation des fractions rationnelles

1. Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\forall x \neq \pm 1$ ,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} - \frac{b}{1-x}.$$

2. Calculer la dérivée  $n$ -ième sur  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$  de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

### Exercice 26 ★

### Calcul d'une dérivée $n$ -e

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , calculer la dérivée  $n$ -ième de

$$x \mapsto e^{x \cos(\alpha)} \cos(x \sin(\alpha)).$$

## Etude de fonctions

### Exercice 27 ★

- Tracer la courbe représentative de la fonction  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 - 3x$ .
- Sans calculs*, tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x+2) - 1 \quad h : x \in \mathbb{R} \mapsto 2f\left(\frac{x}{2}\right) \quad i : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}f(2x-2) + 1$$

**Exercice 28 ★★**

On considère la fonction réelle définie par  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$  et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative. Montrer que le point  $(1, 0)$  est le seul point de la courbe où la tangente est parallèle à la droite d'équation  $y = x$ .

**Exercice 29 ★**

Montrer que l'équation  $x \ln x = 1$  admet une unique solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 30 ★**

Montrer que la fonction définie par

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = 2xe^x$$

induit une bijection de  $[0, 1]$  sur un ensemble à déterminer.

**Exercice 31 ★**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ .

1.  $f$  est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que  $f$  induit une bijection de  $[1, +\infty[$  sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  à préciser.

**Exercice 32 ★★****Une étude de fonction**

Soit  $f : x \mapsto \sqrt{|x^2 - 1|}$ . Etudier la fonction  $f$ , puis représenter  $f$  graphiquement. On précisera les tangentes remarquables ainsi que les asymptotes.

**Exercice 33 ★**

Etudier les fonctions suivantes. On précisera également leurs images.

1.  $f : x \mapsto x^x$
2.  $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$
3.  $f : x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$
4.  $f : x \mapsto \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x$

**Exercice 34 ★**

Soient  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère ortho-normé.

1. Donner l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Calculer  $f(-1 - x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . En déduire sans justification une symétrie de  $\mathcal{C}_f$ .
3. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Calculer sa dérivée. En déduire les variations de  $f$  que l'on présentera dans un tableau de variations. On précisera les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition
4. Montrer que  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote oblique en  $+\infty$  dont on déterminera une équation. En déduire sans calcul que  $\mathcal{C}_f$  admet également une asymptote oblique en  $-\infty$  dont on précisera une équation.
5. Préciser la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à ses asymptotes.
6. Tracer  $\mathcal{C}_f$ . On fera figurer les asymptotes et les tangentes remarquables.

**Exercice 35 ★★**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer en fonction de  $n$  le nombre de solutions de l'équation  $x^n \ln x = -\frac{1}{n^2}$ .

**Exercice 36 ★★**

Soit  $k \in \mathbb{R}_+^*$ . Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation  $e^x = 1 + kx$ .

**Exercice 37 ★**

On considère la fonction réelle  $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{2x-1}$ .

1. Etudiez  $f$ , déterminez ses éventuelles asymptotes, puis tracez la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
2. Prouvez que  $\mathcal{C}_f$  possède un centre de symétrie.

**Inégalités**

### Exercice 38 ★

Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ .

### Exercice 39 ★

#### Inégalité de Huyghens

Montrer que pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$x \leq \frac{2}{3} \sin x + \frac{1}{3} \tan x$$

### Exercice 40 ★

Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{8 \sin x - \sin(2x)}{6} \leq x$$

## Minorant, majorant, minimum, maximum

### Exercice 41 ★

Les fonctions suivantes sont-elles majorées, minorées, bornées ? Justifier.

1.  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \sin x$

3.  $h : x \in \mathbb{R} \mapsto (1 + \sin x) \ln(1 + x^2)$

2.  $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2 \sin x + 3 \cos x^2}{1 + e^x}$

4.  $i : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2} \sin x$

### Exercice 42 ★

Les fonctions suivantes admettent-elles un minimum ou un maximum ?

1.  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2}$

3.  $h : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-x} \sqrt{x}$ .

2.  $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\ln x}{x}$

4.  $i : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x + \frac{a}{x}$  où  $a \in \mathbb{R}_+^*$