Nombres complexes

Exercice 1.

1. Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe $4\sqrt{2}(-1+i)$.
2. Trois nombres complexes ont pour produit $4\sqrt{2}(-1+i)$. Leurs modules sont en progression géométrique de raison 2 et leurs arguments sont en progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$. On note z_1, z_2 et z_3 ces trois nombres, où la numérotation respecte l'ordre des modules. Sachant que z_1 a un argument compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, déterminer le module et un argument de chacun des trois nombres z_1, z_2 et z_3.
3. Construire les images M_1, M_2 et M_3 des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 dans le plan complexe.

Exercice 2.

On note $j = e^{2i\pi/3}$.

1. Calculer j^3, $1+j+j^2$, $1+j^2+j^4$, j^{-1} et $\bar{j}$ en fonction de j.
2. Simplifier l'expression
$$\frac{1+j}{(1-i)^2}+\frac{1-j}{(1+i)^2}.$$

Exercice 3.

Voici quelques calculs pour se délier les doigts...

1. Représenter sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :
$$\frac{2-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i},\quad \frac{(2+i)(3+2i)}{2-i},\quad \frac{3+4i}{(2+3i)(4+i)}.$$
2. On considère les nombres complexes
$$z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{1}{\sqrt{3}+i}.$$
Représenter sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

a. z_1+z_2
b. z_1z_2
c. z_1/z_2
d. $z_1^2+z_2^2$
e. $z_1^3+z_2^3$

Exercice 4.

Voici un peu d'entraînement...

1. On pose $z_1=\dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=1+i$.
   a. Représenter le quotient z_1/z_2 sous forme polaire.
   b. En déduire les valeurs de $\cos(7\pi/12)$ et de $\sin(7\pi/12)$.
2. En précisant pour quelles valeurs des réels x et y, elles ont un sens, mettre sous forme polaire les expressions suivantes :

a. $1+\sin x - i\cos x$
b. $\dfrac{1}{1+i\tan x}$
c. $\dfrac{1+\cos x+i\sin x}{1-\cos x-i\sin x}$
d. $\dfrac{e^{ix}+e^{iy}}{1+e^{i(x+y)}}$
e. $\dfrac{(1-i\sqrt{3})(\cos x+i\sin x)}{\cos x+\sin x+i(\cos x-\sin x)}$

Exercice 5.✯

Voici quelques calculs de puissances.

1. Pour tout entier naturel n, simplifier les expressions suivantes :

a. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^n$
b. $\dfrac{(1-i)^n-\sqrt{2}^n}{(1+i)^n-\sqrt{2}^n}$
c. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^n$
d. $(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n$
e. $\dfrac{(1+i)^n-(1-i)^n}{i}$

2. Pour quelles valeurs de l'entier relatif n le nombre complexe $(\sqrt{3}+i)^n$ appartient-il à $\mathbb{R}_+$? Pour quelles valeurs est-il imaginaire pur ?

Exercice 6.✯

Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et $z_\theta=-\sin(2\theta)+2i\cos^2(\theta)$.

1. Déterminer le module et un argument de z_θ. On discutera en fonction des valeurs de θ.
2. Déterminer l'ensemble des nombres réels θ tels que $|z_\theta|=|z_\theta-1|$.

Exercice 7.

Soit
$$v=\frac{\sqrt{3}+i}{i-1}.$$
Ecrire v^{2002} sous forme polaire puis sous forme algébrique.

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 8.

On pose $\omega = \sqrt{3} + i$. Déterminer $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega^n \in \mathbb{R}$. Même question avec $\omega^n \in i\mathbb{R}$.

Exercice 9.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

1. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur *si et seulement si* $z \in \mathbb{U}$.
2. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U}$ *si et seulement si* z est imaginaire pur.

Exercice 10.

1. Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| \leqslant 1$. Montrer que $|u| \leqslant |2-u|$ et qu'il y a égalité *si et seulement si* $u = 1$.

On définit une suite *complexe* (z_n) par son premier terme z_0 et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{z_n}{2 - z_n}$$

On suppose $|z_0| \leqslant 1$.

2. Que peut-on dire de la suite (z_n) lorsque $z_0 = 0$? Justifier.
3. Même question lorsque $z_0 = 1$.
4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \leqslant 1$.
5. En déduire que la suite $(|z_n|)$ est décroissante.

Dans la suite, on suppose $z_0 \neq 1$.

6. Montrer que $|z_1| < 1$.
7. On pose $q = \frac{1}{2-|z_1|}$. Montrer que $|z_{n+1}| \leqslant q|z_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
8. En déduire par récurrence que $|z_n| \leqslant q^{n-1}|z_1|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
9. Quelle est la limite de la suite $(|z_n|)$?

Exercice 11.✭

Soient a et b de module 1 tels que $a \neq \pm b$.

1. Prouver que $\dfrac{1+ab}{a+b} \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{z + ab\bar{z} - (a+b)}{a-b} \in i\mathbb{R}.$$

Exercice 12.✭

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ de module 1. Montrer que

$$|a+b+c| = |ab+bc+ac|.$$

Exercice 13.✭

Déterminer les nombres complexes z tels que z, $1/z$ et $1+z$ soient de même module.

Exercice 14.✭

Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1 tels que $a \neq c$. Montrer que

$$\frac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2} \in \mathbb{R}_+.$$

Exercice 15.

Dans tout l'exercice, le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$.

1. Déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les nombres complexes z, $1/z$ et $1+z$ aient même module.
2. Déterminer les nombres complexes tels que

$$|z-1| = |\bar{z}+1|.$$

Interprétation géométrique ?

3. Déterminer le lieu des points du plan dont l'affixe z vérifie

$$|(1+i)\bar{z} - 2i| = 2.$$

Exercice 16.

Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer que $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.

NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 17.★

Soient $\mathcal{E} = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ et $f : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$\forall z \in \mathcal{E}, \quad f(z) = \frac{z+i}{z-2i}.$$

Déterminer les ensembles suivants :

1. $\mathcal{E}_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathbb{R} \right\}$;
2. $\mathcal{E}_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in i\mathbb{R} \right\}$;
3. $\mathcal{E}_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(f(z)) = \pi/2 \right\}$.

EXERCICE 18.★

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$
2. $\operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$
3. $\operatorname{Re}(z^3) = \operatorname{Im}(z^3)$

EXERCICE 19.

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 + (5-2i)z + 5 - 5i = 0$;
2. $z^2 + (-3+i)z + 4 - 3i = 0$;
3. $z^2 - (9-2i)z + 26 = 0$;
4. $z^4 + (3-6i)z^2 + 2(16-63i) = 0$;
5. $z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0$;
6. $z^4 - z^3 - z + 1 = 0$;
7. $z^4 + 2 - i\sqrt{12} = 0$.

EXERCICE 20.★

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 = \bar{z}$;
2. $z^3 = \bar{z}$;
3. $z^2 = 27\,\bar{z}$.

EXERCICE 21.★

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + 8|z| - 3 = 0.$$

EXERCICE 22.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(3+i)z^2 - (8+6i)z + 25 + 5i = 0$;
2. $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$;
3. $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$;
4. $(1-5i)z^2 - (20+4i)z + 61 + 7i = 0$;
5. $z^6 - 2\cos(\theta)z^3 + 1 = 0$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 23.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^5 = 16\bar{z}$;
2. $2\bar{z} - 3z = 2 + 3i$.

EXERCICE 24.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $2z + 3\bar{z} = 1$;
2. $z^2 = \bar{z}$;
3. $z^2 = -\bar{z}^2$;
4. $z^4 = \frac{1}{\bar{z}}$.

EXERCICE 25.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $(z+i)^3 + iz^3 = 0$;
2. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

EXERCICE 26.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i$.

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ a une unique solution imaginaire pure que l'on déterminera.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.
3. Etudier dans le plan complexe la nature du triangle ayant pour sommets les images des trois racines de cette équation.

EXERCICE 27.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. Montrer que $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i \operatorname{cotan} \frac{\theta}{2}$ où $\operatorname{cotan} = \frac{\cos}{\sin}$.
2. Résoudre l'équation $(z-1)^5 = (z+1)^5$. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction cotan.

EXERCICE 28.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. Montrer que $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}$ où $\operatorname{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$.
2. Résoudre de deux façons l'équation $(z-1)^5 = (z+1)^5$. En déduire les valeurs de $\operatorname{cotan}\frac{\pi}{5}$, $\operatorname{cotan}\frac{2\pi}{5}$, $\operatorname{cotan}\frac{3\pi}{5}$ et $\operatorname{cotan}\frac{4\pi}{5}$.

EXERCICE 29.

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

1. Déterminer une équation du second degré dont les racines sont α et β.
2. En déduire $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.
3. En déduire $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{\pi}{5}$.

EXERCICE 30.

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{11}}$ ainsi que

$$S = \omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9 \qquad T = \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$$

1.
   a. Montrer que $\sin\frac{6\pi}{11} + \sin\frac{18\pi}{11} > 0$. En déduire que $\operatorname{Im}(S) > 0$.
   b. Montrer que $S + T = -1$ et $ST = 3$.
   c. En déduire une équation du second degré dont sont solutions S et T puis les valeurs de S et T.
2.
   a. Montrer que $\omega - \omega^{10} = 2i\sin\frac{2\pi}{11}$.
   b. Montrer que $\frac{1-\omega^3}{1+\omega^3} = -i\tan\frac{3\pi}{11}$.
   c. Montrer que $\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k = \frac{1-\omega^3}{1+\omega^3}$.
   d. En déduire que $\tan\frac{3\pi}{11} + 4\sin\frac{2\pi}{11} = i(T-S) = \sqrt{11}$.

EXERCICE 31.✩

En linéarisant $\sin^4 x$, calculer une expression simple de la somme

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right).$$

EXERCICE 32.✩

Soient α et β, deux nombres réels. Simplifier les sommes

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(\alpha + k\beta),$$

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(\alpha + k\beta),$$

$$S''_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos(\alpha + k\beta).$$

EXERCICE 33.✩

Soit α, un nombre réel tel que $\cos\alpha \neq 0$. On pose

$$R_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{\cos k\alpha}{\cos^k\alpha} \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin k\alpha}{\cos^k\alpha}.$$

Calculer $R_n + iI_n$ et en déduire des expressions simplifiées de R_n et de I_n.

EXERCICE 34.

Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \frac{\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cdots + \cos((2n+1)x)}{\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x) + \cdots + \sin((2n+1)x)}.$$

EXERCICE 35.

On pose $\omega = e^{\dfrac{2i\pi}{5}}$ et $\alpha = \omega + \dfrac{1}{\omega}$.

1. Montrer que $\dfrac{1}{\omega^2} + \dfrac{1}{\omega} + 1 + \omega + \omega^2 = 0$.
2. En déduire que α est solution d'une équation du second degré que l'on précisera.
3. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ puis de $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

EXERCICE 36.✩

Soit ω une racine septième de l'unité distincte de 1. Simplifier le nombre

$$\alpha = \frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} + \frac{\omega^3}{1+\omega^6}.$$

Exercice 37.

Etablir par un calcul que $\mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2}$ équivaut à

$$\left|\frac{z}{z-1}\right| < 1.$$

Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 38.★

Soit λ un nombre réel irrationnel. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\lambda\pi}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(\lambda\pi)|}.$$

Exercice 39.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$1 + z + \cdots + z^{n-1} - nz^n = 0.$$

Montrer que $|z| \leqslant 1$.

Exercice 40.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Montrer que

$$\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leqslant \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}.$$

Exercice 41.★

Prouver que

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, |a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|.$$

étudier les cas d'égalité.

Exercice 42.★

Soient $n \geqslant 2$ et $z_1, z_2, \dots, z_n$ appartenant à $\mathbb{C}^*$. Prouver que

$$|z_1 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|,$$

avec égalité *si et seulement si*

$$\arg(z_1) = \arg(z_2) = \ldots = \arg(z_n).$$

Exercice 43.

Soient A, B, C, D quatre points du plan distincts deux à deux. On suppose de plus A, B, C non alignés et on introduit le cercle $\mathcal{C}$ de centre O circonscrit au triangle ABC.
On choisit un repère orthonormé du plan de centre O tel que $\mathcal{C}$ ait pour rayon 1.
On note a, b, c, d les affixes respectifs de A, B, C, D.
On pose enfin $Z = \frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b}$.

1. Dans cette question, on suppose que D appartient à $\mathcal{C}$.
   - **a.** Justifier que $\overline{a} = \frac{1}{a}$, $\overline{b} = \frac{1}{b}$, $\overline{c} = \frac{1}{c}$, $\overline{d} = \frac{1}{d}$.
   - **b.** Montrer que Z est un réel.
   - **c.** En déduire que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})[\pi]$.
2. Réciproquement, on suppose que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})[\pi]$ et on veut montrer que D appartient à $\mathcal{C}$.
   - **a.** Que peut-on dire de Z ?
   - **b.** Exprimer d en fonction de a, b, c, Z.
   - **c.** Calculer $\overline{d}$ et en déduire que D appartient à $\mathcal{C}$.

Exercice 44.★

Déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe z tels que les points d'affixes 1, z et z^3 soient alignés.

Exercice 45.★

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que les points d'affixes respectives z, iz et z^2 soient alignés.

Exercice 46.★

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan $\mathcal{P}$ tels que les points d'affixes respectives $1, z^2$ et z^4 soient alignés.

Exercice 47.★★

Déterminer les points $M(z)$ du plan $\mathcal{P}$ tels que $\left(\frac{z}{z-1}\right)^4 \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 48.★★

Soient A, B, C trois points deux à deux distincts d'affixes a, b, c.

1. Prouver que ABC est un triangle équilatéral direct *si et seulement si*

$$a + jb + j^2c = 0,$$

et équilatéral indirect *si et seulement si*

$$a + jc + j^2b = 0.$$

2. Prouver que ABC est un triangle équilatéral *si et seulement si*

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$

EXERCICE 49.★

On se place dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $M_1M_2M_3$ un triangle inscrit dans un cercle de centre O. On note z_k l'affixe de M_k.

1. Montrer que l'orthocentre H du triangle $M_1M_2M_3$ a pour affixe

$$h = z_1 + z_2 + z_3.$$

2. En déduire que le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un vrai triangle sont alignés.

EXERCICE 50.★

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $e^z + e^{-z} = 1$;

2. $e^z + e^{-z} = 2i$.

EXERCICE 51.

Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et par $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n - x_n \end{cases}$. On pose $z_n = x_n + iy_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer z_0, z_1, z_2 et z_3.

2. Montrer que (z_n) est une suite géométrique. On donnera sa raison sous forme trigonométrique.

3. Exprimer $A_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$ en fonction de n.

EXERCICE 52.★

Simplifier la somme

$$S_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-3)^k \binom{n}{2k}.$$

EXERCICE 53.★

Pour tout entier naturel n, on pose

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}, \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+1},$$
$$\text{et} \quad S_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+2}.$$

1. Calculer $S_1 + S_2 + S_3$, puis $S_1 + jS_2 + j^2S_3$ et $S_1 + j^2S_2 + j^4S_2$.

2. En déduire les valeurs de S_1, S_2 et S_3.