

# DEVOIR À LA MAISON N° 4 : CORRIGÉ

## SOLUTION 1.

1. a. sh est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . De plus  $\lim_{-\infty} \text{sh} = -\infty$  et  $\lim_{+\infty} \text{sh} = +\infty$ . Ainsi sh est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .
- b. ch est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . De plus,  $\text{ch}(0) = 1$  et  $\lim_{+\infty} \text{ch} = +\infty$ . Ainsi ch induit une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur  $]1, +\infty[$ .
- c. th est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . De plus,  $\lim_{-\infty} \text{th} = -1$  et  $\lim_{+\infty} \text{th} = 1$ . Ainsi th induit une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] -1, 1[$ .
2. a. Soit  $x \in \mathbb{R}$  et posons  $\theta = f(x)$ . Par définition de f,  $\text{sh } \theta = x$ . Or  $\text{ch}^2 \theta = \text{sh}^2 \theta + 1$ . Puisque  $\text{ch } \theta \geq 1 \geq 0$ ,  $\text{ch } \theta = \sqrt{\text{sh}^2 \theta + 1} = \sqrt{x^2 + 1}$ .
- b. Soit  $x \in ]1, +\infty[$  et posons  $\theta = g(x)$ . Par définition de g,  $\text{ch } \theta = x$ . Or  $\text{sh}^2 \theta = \text{ch}^2 \theta - 1$ . Par définition de g,  $\theta \in \mathbb{R}_+$  donc  $\text{sh } \theta \geq 0$ . Ainsi  $\text{sh } \theta = \sqrt{\text{ch}^2 \theta - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$ .
3. a. sh est dérivable et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée ch ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi f est dérivable sur  $\text{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{\text{sh}'(f(x))} = \frac{1}{\text{ch}(f(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- b. ch est dérivable et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sa dérivée sh ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Ainsi g est dérivable sur  $\text{ch}(\mathbb{R}_+^*) = ]1, +\infty[$  et pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ ,

$$g'(x) = \frac{1}{\text{ch}'(g(x))} = \frac{1}{\text{sh}(g(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

- c. th est dérivable et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée  $1 - \text{th}^2$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  car th est à valeurs dans  $] -1, 1[$ . Ainsi h est dérivable sur  $\text{th}(\mathbb{R}) = ] -1, 1[$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$h'(x) = \frac{1}{\text{th}'(h(x))} = \frac{1}{1 - \text{th}^2(h(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

4. a. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Posons  $y = f(x)$ . On a donc  $\text{sh}(y) = x$  et  $\text{ch}(y) = \sqrt{x^2 + 1}$  d'après ???. Ainsi

$$e^y = \text{sh}(y) + \text{ch}(y) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

donc

$$f(x) = y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

- b. Soit  $x \in ]1, +\infty[$ . On a donc  $\text{ch}(y) = x$  et  $\text{sh}(y) = \sqrt{x^2 - 1}$  d'après ???. Ainsi

$$e^y = \text{sh}(y) + \text{ch}(y) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

donc

$$g(x) = y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

- c. Soit  $x \in ] -1, 1[$ . Posons  $y = h(x)$ . On a donc  $\text{th}(y) = x$  i.e.  $\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x$  ou encore  $e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$ .  
On en déduit que

$$h(x) = y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

| **REMARQUE.** Les fonctions f, g et h s'appellent en fait argsh, argch et argth.