

Problème 1 – E3A/E4A 2001

1. On a clairement $\delta_h \circ \delta_{h^{-1}} = \delta_{h^{-1}} \circ \delta_h = \text{Id}_G$ donc δ_h est une bijection de G dans G .
2. $\mathcal{L}(E)$ étant une algèbre, on a directement $u^+ \in \mathcal{L}(E)$. Soit $h \in G$.

$$\begin{aligned} u^+ h &= \left(\frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} u g \right) h = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} u g h = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} h h^{-1} g^{-1} u g h = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} h (\delta_h(g))^{-1} u (\delta_h(g)) \\ &= h \left(\frac{1}{m} \sum_{g \in G} (\delta_h(g))^{-1} u \delta_h(g) \right) = h \left(\frac{1}{m} \sum_{g' \in G} g'^{-1} u g' \right) = h u^+ \quad \text{en posant } g' = \delta_h(g) \end{aligned}$$

donc $\forall h \in G, \quad u^+ h = h u^+.$

3. Comme u^+ commute avec tout élément de G , on a :

$$(u^+)^+ = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} u^+ g = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} g u^+ = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} u^+ = \frac{1}{m} m u^+$$

soit $(u^+)^+ = u^+.$

4. Soit $x \in F = \text{Im } p$, on a donc

$$p^+(x) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} p g(x)$$

Or, pour tout $g \in G$, F est stable par g donc $g(x) \in F = \text{Im } p$ et donc $p(g(x)) = g(x)$. Ainsi,

$$p^+(x) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} g(x) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} x = x$$

donc $x \in \text{Im } p^+.$ Donc $F \subset \text{Im } p^+.$

5. On a vu à la question .4 que pour tout $y \in F$, $g^{-1} p g(y) = y$. Or pour tout $x \in E$, $p h(x) \in \text{Im } p = F$. Donc $h^{-1} p h(x) \in F$ car F est stable par $h^{-1} \in G$. On a, par conséquent,

$$\forall x \in E, \quad g^{-1} p g(h^{-1} p h(x)) = h^{-1} p h(x)$$

donc $g^{-1} p g h^{-1} p h = h^{-1} p h.$

6. On a

$$\begin{aligned} (p^+)^2 &= \left(\frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} p g \right) \left(\frac{1}{m} \sum_{h \in G} h^{-1} p h \right) \\ &= \frac{1}{m^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} g^{-1} p g h^{-1} p h \\ &= \frac{1}{m^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} h^{-1} p h \quad \text{d'après la question .5} \\ &= \frac{1}{m^2} \sum_{g \in G} m p^+ = \frac{1}{m^2} m^2 p^+ = p^+ \end{aligned}$$

donc p^+ est un projecteur.

7. On a vu précédemment que, pour tout $x \in E$ et tout $g \in G$, $g^{-1} p g(x) \in F$ donc $p^+(x) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} p g(x) \in F$ donc $\text{Im } p^+ \subset F$ et, comme $F \subset \text{Im } p^+$, $\text{Im } p^+ = F = \text{Im } p$.
8. Puisque p^+ est un projecteur, $\text{Ker } p^+$ est un supplémentaire de $F = \text{Im } p^+.$
Pour tout $g \in G$, g et p^+ commutent, donc $\text{Ker } p^+$ est stable par g .
9. Si F est stable par tout $g \in G$, il suffit de choisir un projecteur d'image F (qui existe car F admet des supplémentaires) et d'appliquer la question précédente. Tout sous-espace stable par tout $g \in G$ admet au moins un supplémentaire stable par tout $g \in G$.