Devoir surveillé n°03 : corrigé

Solution 1

1. On trouve

$$S_1 = \binom{2}{0} - \binom{2}{2} = 0 \qquad T_1 = \binom{2}{1} = 2$$
$$S_2 = \binom{4}{0} - \binom{4}{2} + \binom{4}{4} = -4 \qquad T_2 = \binom{4}{1} - \binom{4}{3} = 0$$
$$S_3 = \binom{6}{0} - \binom{6}{2} + \binom{6}{4} - \binom{6}{6} = 0 \qquad T_3 = \binom{6}{1} - \binom{6}{3} + \binom{6}{5} = -8$$

2. On a évidemment $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$.

3. D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned}
(1+i)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2k} i^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} i^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} i^{2k+1} && \text{en séparant les termes d'indices pairs et impairs} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k i && \text{car } i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k \\
&= S_n + iT_n
\end{aligned}$$

4. Tout d'abord,

$$(1+i)^{2n} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{2n} = 2^n e^{\frac{ni\pi}{2}}$$

De plus, $(1+i)^{2n} = S_n + iT_n$ et S_n et T_n sont *réels* (et même entiers) donc ce sont respectivement les parties réelle et imaginaire de $(1+i)^{2n}$. Finalement,

$$S_n = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad T_n = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Solution 2

1. On a évidemment $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{\frac{3i\pi}{4}}$.

2. Les racines cubiques de α sont $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\pi}{4}}$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{11i\pi}{12}}$ et $z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{19i\pi}{12}}$.

3. Tout d'abord $z_1^4 = -\frac{1}{4} \in \mathbb{R}$.
Ensuite, $z_2^4 = \frac{1}{4} e^{\frac{11i\pi}{3}} \notin \mathbb{R}$ car $\frac{11\pi}{3} \not\equiv 0[\pi]$.
Enfin, $z_3^4 = \frac{1}{4} e^{\frac{19i\pi}{3}} \notin \mathbb{R}$ car $\frac{19\pi}{3} \not\equiv 0[\pi]$.
Seul z_1 a une puissance quatrième réelle.

4. Remarquons que

$$(z+\beta)^4 = z^4 + 4\beta z^3 + 6\beta^2 z^2 + 4\beta^3 z + \beta^4$$

Il suffit donc de choisir β tel que $\beta^4 = -\frac{1}{4}$, $\beta^3 = \frac{-1+i}{4} = \alpha$ et de poser ensuite $\lambda = 4\beta$ et $\mu = 6\beta^2$.
On constate que $\beta = z_1$ convient. En effet, z_1 est une racine cubique de α de sorte que $\beta^3 = z_1^3 = \alpha$ et $\beta^4 = z_1^4 = -\frac{1}{4}$.
Finalement, il suffit de choisir

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\
\lambda &= 4\beta = 2 + 2i \\
\mu &= 6\beta^2 = 6 \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{2}} = 3i
\end{aligned}$$

Solution 3

1. **a.** On utilise la méthode de l'arc-moitié.

$$\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1} = \frac{2ie^{i\theta}\sin\theta}{2e^{i\theta}\cos\theta} = i\tan\theta$$

b. Remarquons que $-i$ n'est pas solution de (E) et que pour $z \neq -i$, $1 - iz \neq 0$ de sorte que

$$\begin{aligned}
(1+iz)^5 = (1-iz)^5 &\iff \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5 = 1 \\
&\iff \frac{1+iz}{1-iz} \in \mathbb{U}_5 \\
&\iff \exists k \in \{-2,-1,0,1,2\},\ \frac{1+iz}{1-iz} = e^{\frac{2ik\pi}{5}} \\
&\iff \exists k \in \{-2,-1,0,1,2\},\ 1+iz = e^{\frac{2ik\pi}{5}}(1-iz) \\
&\iff \exists k \in \{-2,-1,0,1,2\},\ z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{5}}-1}{i(e^{\frac{2ik\pi}{5}}+1)} \qquad \text{car } \forall k \in \{-2,-1,0,1,2\},\ e^{\frac{2ik\pi}{5}} \neq -1 \\
&\iff \exists k \in \{-2,-1,0,1,2\},\ z = \tan\frac{k\pi}{5} \qquad \text{d'après la question } \textbf{1.a}
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont donc les *réels* $-\tan\frac{2\pi}{5}$, $-\tan\frac{\pi}{5}$, 0, $\tan\frac{\pi}{5}$ et $\tan\frac{2\pi}{5}$.

c. Tout d'abord, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$(1+iz)^5 = \binom{5}{0} + \binom{5}{1}iz + \binom{5}{2}(iz)^2 + \binom{5}{3}(iz)^3 + \binom{5}{4}(iz)^4 + \binom{5}{5}(iz)^5 = 1 + 5iz - 10z^2 - 10iz^3 + 5z^4 + iz^5$$

On en déduit que

$$(1-iz)^5 = 1 - 5iz - 10z^2 + 10iz^3 + 5z^4 - iz^5$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
(1+iz)^5 = (1-iz)^5 &\iff 10iz - 20iz^3 + 2iz^5 = 0 \\
&\iff z(5 - 10z^2 + z^4) = 0 \\
&\iff z = 0 \text{ ou } z^4 - 10z^2 + 5 = 0 \\
&\iff z = 0 \text{ ou } z^2 = 5 + 2\sqrt{5} \text{ ou } z^2 = 5 - 2\sqrt{5} \\
&\iff z = 0 \text{ ou } z = \sqrt{5+2\sqrt{5}} \text{ ou } z = -\sqrt{5+2\sqrt{5}} \text{ ou } z = \sqrt{5-2\sqrt{5}} \text{ ou } z = -\sqrt{5-2\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

d. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$. Ainsi la fonction tan est-elle strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Or

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{2\pi}{5} < -\frac{\pi}{5} < 0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$$

et

$$-\sqrt{5+2\sqrt{5}} < -\sqrt{5-2\sqrt{5}} < 0 < \sqrt{5-2\sqrt{5}} < \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

de sorte qu'en particulier, $\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

2. **a.**

$$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \frac{1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$$

b. Il s'agit d'un problème d'extraction de racines cinquièmes. Les solutions sont donc les complexes $e^{\frac{2i(\alpha+k\pi)}{5}}$ pour $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$.

c. L'équation (E_α) équivaut à l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5 = e^{2i\alpha}$. D'après la question précédente, les solutions de (E_α) sont les complexes z tels qu'il existe $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$ tel que $\frac{1+iz}{1-iz} = e^{\frac{i(\alpha+2k\pi)}{5}}$. Or, pour $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$, en posant $\alpha_k = \frac{\alpha+k\pi}{5}$

$$\begin{aligned} & \frac{1+iz}{1-iz} = e^{2i\alpha_k} \\ \iff\quad & z = \frac{e^{2i\alpha_k}-1}{i(e^{2i\alpha_k}+1)} \\ \iff\quad & z = \tan\alpha_k \qquad \text{d'après la question } \textbf{1.a} \end{aligned}$$

Les solutions de (E_α) sont donc les réels $\tan\alpha_k$ pour $k \in \{-2,0,1,2\}$, autrement dit les réels $\tan\left(\frac{\alpha-2\pi}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha-\pi}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha+\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{\alpha+2\pi}{5}\right)$.