# Devoir à la maison n°08

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

## Problème 1 —

Soit $(A, +, \times)$ un anneau (non commutatif a priori).
L'élément neutre pour la loi $+$ sera noté $0$ et l'élément neutre pour la loi $\times$ sera noté $1$.
On appelle *dérivation* sur $A$ toute application $\delta\colon A \to A$ telle que

$$\forall (x, y) \in A^2, \begin{cases} \delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y) \\ \delta(x \times y) = \delta(x) \times y + x \times \delta(y) \end{cases}$$

### Partie I – Crochet de Lie

Pour $(a, b) \in A^2$, on pose $[a, b] = a \times b - b \times a$.

**1.** Soit $(a, b) \in A^2$. Quelle relation existe-t-il entre $[a, b]$ et $[b, a]$ ?

**2.** Montrer que pour tout $(a, b, c) \in A^3$, $[a, b + c] = [a, b] + [a, c]$.

**3.** Montrer que pour tout $(a, b, c) \in A^3$,

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$$

**4.** Pour $a \in A$, on définit l'application

$$d_A\colon \begin{cases} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & [a, x] \end{cases}$$

**a.** Déterminer les applications $d_0$ et $d_1$.

**b.** Montrer que pour tout $a \in A$, $d_a$ est une *dérivation* de $A$.

### Partie II –

Soit $\delta$ une dérivation de $A$.

**1.** Montrer que $\delta(0) = 0$ et $\delta(1) = 0$.

**2.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in A$, $\delta(nx) = n\delta(x)$.

**3.** Soit $a$ un élément *inversible* de $A$. Montrer que

$$\delta(a^{-1}) = -a^{-1} \times \delta(a) \times a^{-1}$$

**4.** On pose $D_\delta = \{a \in A,\ \delta(a) = 0\}$.

**a.** Montrer que $D_\delta$ est un sous-anneau de $A$.

**b.** On suppose que $A$ est un corps. Montrer que $D_\delta$ est un sous-corps de $A$.

## Partie III –

Si $f$ et $g$ sont deux applications de $A$ dans $A$, on note $f+g$ l'application $x \in A \mapsto f(x)+g(x)$ et $[f,g]$ l'application $f \circ g - g \circ f$.
Si $f$ est une application de $A$ dans $A$, on note $f^0 = \mathrm{Id}_A$ et $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
On remarquera en particulier que $f^{n+1} = f \circ f^n = f^n \circ f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**1.** Soient $\delta_1$ et $\delta_2$ deux *dérivations* de $A$.

**a.** Montrer que $\delta_1 + \delta_2$ est une dérivation de $A$.

**b.** Montrer que $[\delta_1, \delta_2]$ est une dérivation de $A$.

**2.** Pour $a \in A$, on définit $d_a$ comme à la question **I.4**.

**a.** Soient $a \in A$ et $\delta$ une dérivation de $A$. Montrer que $[\delta, d_a] = d_{\delta(a)}$.

**b.** Soit $(a,b) \in A^2$. Montrer que $[d_a, d_b] = d_{[a,b]}$.

**3.** **a.** Soit $a \in A$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in A,\ d_a^n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} \times x \times a^k$$

**b.** On se donne $a \in A$ et on suppose $a$ *nilpotent*. Il existe donc $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^m = 0$.
Montrer que $d_a$ est également *nilpotente*, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $d_a^p$ soit l'application nulle.

**4.** Soit $(a,b) \in A^2$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta^n(a \times b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^k(a) \times \delta^{n-k}(b)$$