INTERROGATION ÉCRITE N°03

NOM : Prénom : Note :

1. Déterminer les racines cubiques de $-8i$ sous forme algébrique et exponentielle.

   Puisque $(2i)^3 = -8i$, une racine cubique de $-8i$ est $2i$. Les racines cubiques de $-8i$ sont donc

   - $2i = 2e^{\frac{i\pi}{2}}$;
   - $2ij = 2e^{\frac{i\pi}{2}}e^{\frac{2i\pi}{3}} = 2e^{\frac{7i\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i$;
   - $2ij^2 = 2e^{\frac{i\pi}{2}}e^{\frac{4i\pi}{3}} = 2e^{\frac{11i\pi}{6}} = \sqrt{3} - i$;

2. Résoudre l'équation $e^z = \sqrt{3} - i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

   Puisque $\sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$, les solutions de l'équation $e^z = \sqrt{3} - i$ sont les complexes $\ln 2 - \dfrac{i\pi}{3} + 2ik\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

3. L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^z \end{array} \right.$ est-elle injective ? surjective ? Justifier.

   Puisque $f(0) = f(2i\pi)$, f n'est pas injective. Par ailleurs, f ne prend jamais la valeur 0 donc f n'est pas surjective.

4. Résoudre l'équation $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

   Le discriminant de cette équation du second degré est :

$$(3i-4)^2 - 4(1-7i) = -9 - 24i + 16 - 4 + 28i = 3 + 4i = (2+i)^2$$

   Les solutions de cette équation sont donc

$$\frac{4-3i+2+i}{2} = 3 - i \qquad \text{et} \qquad \frac{4-3i-2-i}{2} = 1 - 2i$$

5. On considère à nouveau l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^z \end{array} \right.$. Déterminer $f(i\mathbb{R})$ et $f^{-1}(i\mathbb{R})$.

   Tout d'abord,

$$f(i\mathbb{R}) = \left\{ e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{U}$$

   Ensuite,

$$\begin{aligned}
z \in f^{-1}(i\mathbb{R}) &\iff f(z) \in i\mathbb{R} \\
&\iff e^z = -\overline{e^z} \\
&\iff e^z = -e^{\overline{z}} \\
&\iff e^{z-\overline{z}} = e^{i\pi} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z - \overline{z} = i\pi + 2ik\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 2i\,\mathrm{Im}(z) = i\pi + 2ik\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Im}(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \\
&\iff \exists (x,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ z = x + i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)
\end{aligned}$$

   Ainsi

$$f^{-1}(i\mathbb{R}) = \mathbb{R} + i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$$