Devoir surveillé n°02

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

On pose $s = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $p = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

1. Montrer que $s = 2p$.
2. En calculant $p\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, déterminer la valeur de p et en déduire celle de s.
3. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}$.

1. Calculer S_0, S_1 et S_2.
2. Calculer les sommes $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} 2^k$.
3. En intervertissant l'ordre de sommation, calculer S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.

Résoudre le système

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x+y-z=1 \\ x+my-z=1 \\ x+y+mz=m \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4k(k+1)}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4k}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4(k+1)}\right)}$$

1. Déterminer une expression simple de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Problème 1 —

Partie I – Préliminaires

On rappelle que pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est défini par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dans cette partie, on redémontre deux résultats sur les coefficients binomiaux qui serviront par la suite.

1. **Question de cours.** Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$. Montrer que $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

2. **Question de cours.** Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$. Montrer que

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Partie II – Une formule célèbre

3. On convient dans cette question que pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = 0$ lorsque $k < 0$ ou $k > n$. On admet que les relations démontrées à la partie I restent vraies dans ces cas.
Démontrer par récurrence la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_n : \ \forall (m, p) \in \mathbb{N}^2, \ \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

4. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

5. A l'aide du changement d'indice $\ell = n - k$, déterminer la valeur de $T_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

6. En déduire que si n est un entier naturel impair, $\binom{2n}{n}$ est pair.