Devoir surveillé n°09 : corrigé

Solution 1.

1. La linéarité est évidente. Soit $P \in \operatorname{Ker} \varphi$. Alors $x_1, \dots, x_p$ sont des racines de P de multiplicité au moins égale à 2. Ainsi P compte au moins $2p$ racines comptées avec multiplicité. Or $\deg P < 2p$ donc P est nul. Par conséquent, $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ et φ est injectif. Puisque $\dim \mathbb{R}_{2p-1}[X] = \dim \mathbb{R}^{2p} = 2p$, φ est un isomorphisme.

2. Il suffit de constater que P est l'unique antécédent de $(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$ par φ dans $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$.

3. On a clairement $Q_i(x_i) = 1$ et $Q_i(x_j) = 0$ pour $j \neq i$.

4. Puisque pour tout $j \neq i$, $(X - x_j)^2$ divise Q_i, x_j est une racine de Q_i de multiplicité au moins égale à 2. Ainsi $Q_i(x_j) = Q_i'(x_j) = 0$.
C'est du cours : $\frac{Q_i'}{Q_i} = \sum_{j \neq i} \frac{2}{X - x_j}$. En particulier, $\frac{Q_i'(x_i)}{Q_i(x_i)} = \sum_{j \neq i} \frac{2}{x_i - x_j}$. Or $Q_i(x_i) = 1$ donc $Q_i'(x_i) = \sum_{j \neq i} \frac{2}{x_i - x_j}$.

5. Posons $Q = \sum_{i=1}^{p} \left[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i))\, a_i + (X - x_i) b_i \right] Q_i$. D'après les résultats des questions **3** et **4**,

$$Q(x_j) = \sum_{i=1}^{p} \left[(1 - Q_i'(x_i)(x_j - x_i))\, a_i + (x_j - x_i) b_i \right] Q_i(x_j) = (1 - Q_i'(x_i)(x_i - x_i)) a_i + (x_i - x_i) b_i = a_i$$

car $Q_i(x_j) = \delta_{i,j}$.
Ensuite

$$Q' = \sum_{i=1}^{p} (b_i - Q_i'(x_i)) Q_i + \left[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i))\, a_i + (X - x_i) b_i \right] Q_i'$$

puis

$$\begin{aligned} Q'(x_j) &= \sum_{i=1}^{p} (b_i - Q_i'(x_i)) Q_i(x_j) + \left[(1 - Q_i'(x_i)(x_j - x_i))\, a_i + (x_j - x_i) b_i \right] Q_i'(x_j) \\ &= (b_i - Q_i'(x_i)) Q_i(x_i) + \left[(1 - Q_i'(x_i)(x_i - x_i))\, a_i + (x_i - x_i) b_i \right] Q_i'(x_i) \\ &= b_i - Q_i'(x_i) + Q_i'(x_i) = b_i \end{aligned}$$

car $Q_i(x_j) = \delta_{i,j}$.
Enfin, $\deg Q_i = 2p - 2$ et $\deg (X - x_i) Q_i = 2p - 1$ donc $\deg Q \leqslant 2p - 1$. Par unicité du polynôme P de la question **2**, $P = Q$.

6. Tout d'abord, les polynômes Q_i et $(X - x_i) Q_i$ sont bien dans $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$.
Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En posant $a_i = P(x_i)$ et $b_i = P'(x_i)$, on a d'après la question précédente

$$P = \sum_{i=1}^{p} \left[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i))\, a_i + (X - x_i) b_i \right] Q_i \in \operatorname{vect}(Q_1, \dots, Q_p, (X - x_1) Q_1, \dots, (X - x_p) Q_p)$$

La famille $(Q_1, \dots, Q_p, (X - x_1) Q_1, \dots, (X - x_p) Q_p)$ engendre donc $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$. Puisqu'elle contient $2p$ éléments et que $\dim \mathbb{R}_{2p-1}[X] = 2p$, c'est une base de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$.

Solution 2.

1. **a.** On a évidemment $[(1 - X) + X]^{2n-1} = 1$. En développant le membre de gauche à l'aide de la formule du binôme de Newton, on obtient

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1 - X)^{2n-1-k} = 1$$

En séparant la somme en deux parties, on a également

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{2n-1-k}+\sum_{k=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{2n-1-k}=1$$

ou encore

$$(1-X)^n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k}+X^n\sum_{k=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}X^{k-n}(1-X)^{2n-1-k}=1$$

Il suffit donc de poser

$$F_n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k} \qquad G_n=\sum_{k=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}X^{k-n}(1-X)^{2n-1-k}$$

F_n et G_n ainsi définis sont des combinaisons linéaires de polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b. Soit (F, G) un couple de polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant

$$(1-X)^nF+X^nG=1$$

Alors

$$(1-X)^n(F-F_n)+X^n(G-G_n)=0$$

Ainsi X^n divise $F-F_n$. Or $\deg(F-F_n)\leqslant n-1$ donc $F=F_n$. De même, $(1-X)^n$ divise $G-G_n$ mais $\deg(G-G_n)\leqslant n-1$ donc $G=G_n$.

2. **a.** En substituant $1-X$ à X dans l'égalité $(1-X)^nF_n(X)+X^nG_n(X)=1$, on obtient

$$(1-X)^nG_n(1-X)+X^nF_n(1-X)=1$$

Or $\deg G_n(1-X)=\deg G_n\leqslant n-1$ et $\deg F_n(1-X)=\deg F_n\leqslant n-1$ donc l'unicité des polynômes F_n et G_n prouvée à la question **1.b** montre que $F_n(1-X)=G_n(X)$ et que $G_n(1-X)=F_n(X)$.

b. En évaluant l'égalité $(1-X)^nF_n(X)+X^nG_n(X)=1$ en 0, on obtient $F_n(0)=1$. En évaluant cette même égalité en $\frac{1}{2}$, on obtient

$$\frac{1}{2^n}F_n\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2^n}G_n\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

Or $G_n\left(\frac{1}{2}\right)=F_n\left(1-\frac{1}{2}\right)=F_n\left(\frac{1}{2}\right)$ d'après la question **2.a**. Ainsi $F_n\left(\frac{1}{2}\right)=2^{n-1}$.
Enfin, on a prouvé à la question **1.a** que

$$F_n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k}$$

Ainsi $F_n(1)=\binom{2n-1}{n-1}=\binom{2n-1}{n}$.

3. **a.** Pour $x\neq 1$,

$$F_n(x)=\frac{1}{(1-x)^n}-\frac{x^nG_n(x)}{(1-x)^n}=\frac{1}{(1-x)^n}-x^{n-1}\frac{xG_n(x)}{(1-x)^n}$$

Or $\lim_{x\to 0}\frac{xG_n(x)}{(1-x)^n}=0$ car G_n est continue en 0. Il s'ensuit donc que

$$F_n(x)\underset{x\to 0}{=}(1-x)^{-n}+o\left(x^{n-1}\right)$$

b. Le développement limité de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0 est usuel.

$$\begin{aligned}
(1-x)^{-n} &\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(-n-j)}{k!}(-x)^k + o\left(x^{n-1}\right)\\
&\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k\prod_{j=0}^{k-1}(n+j)}{k!}(-x)^k + o\left(x^{n-1}\right)\\
&\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(n+j)}{k!}x^k + o\left(x^{n-1}\right)\\
&\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}x^k + o\left(x^{n-1}\right)\\
&\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k}x^k + o\left(x^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Puisque $\deg F_n \leqslant n-1$, on a par unicité du développement limité, on a pour x au voisinage de 0

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

Comme tout voisinage de 0 est infini

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}X^k$$

4. **a.** **Première méthode :** En dérivant la relation $(1-X)^n + X^n G_n = 1$, on obtient

$$-n(1-X)^{n-1}F_n + (1-X)^n F_n' + nX^{n-1}G_n + X^n G_n' = 0$$

ou encore

$$(1-X)^{n-1}\left(nF_n - (1-X)F_n'\right) = X^{n-1}\left(nG_n + F_n'\right)$$

Comme X^{n-1} et $(1-X)^{n-1}$ sont premiers entre eux, X^{n-1} divise $nF_n - (1-X)F_n'$. De plus,

$$\deg(nF_n - (1-X)F_n' \leqslant n-1$$

donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $nF_n - (1-X)F_n' = kX^{n-1}$. En évaluant cette égalité en 1, on obtient $k = nF_n(1) = n\binom{2n-1}{n}$.

Seconde méthode : D'après **3.b**, $F_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}X^k$. Ainsi

$$\begin{aligned}
nF_n - (1-X)F_n' &= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}X^k - (1-X)\sum_{k=1}^{n-1}k\binom{n+k-1}{k}X^{k-1}\\
&= n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}X^k - \sum_{k=1}^{n-1}k\binom{n+k-1}{k}X^{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1}k\binom{n+k-1}{k}X^k\\
&= n + \sum_{k=1}^{n-1}(n+k)\binom{n+k-1}{k}X^k - \sum_{k=1}^{n-1}k\binom{n+k-1}{k}X^{k-1}\\
&= n + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)\binom{n+k}{k+1}X^k - \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\binom{n+k}{k+1}X^k\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\binom{n+k}{k+1}X^k - \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\binom{n+k}{k+1}X^k\\
&= n\binom{2n-1}{n}X^{n-1}
\end{aligned}$$

b. Le polynôme $X^{n-1}(1-X)^{n-1}$ admet évidemment une primitive $P_n \in \mathbb{R}[X]$. Alors, en posant $H_n = P_n - P_n(0)$, on a bien $H_n' = X^{n-1}(1-X)^{n-1}$ et $H_n(0)$.
Si $K_n \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $K_n' = X^{n-1}(1-X)^{n-1}$ et $K_n(0) = 0$ alors $K_n' = H_n'$ donc H_n et K_n sont égaux à une constante additive près. Puisque $H_n(0) = K_n(0)$, H_n et K_n sont égaux. On en déduit l'unicité de H_n.

c. En utilisant la question **4.a**,

$$\begin{aligned}((1-X)^n F_n)' &= -n(1-X)^{n-1}F_n + (1-X)^n F_n' \\ &= -(1-X)^{n-1}\left(nF_n - (1-X)F_n'\right) \\ &= -n\binom{2n-1}{n}(1-X)^{n-1}X^{n-1} \\ &= -n\binom{2n-1}{n}H_n' = \left(1-n\binom{2n-1}{n}H_n\right)'\end{aligned}$$

Les polynômes $(1-X)^n F_n$ et $1-n\binom{2n-1}{n}H_n$ sont donc égaux à une constante additive près. Par ailleurs, puisque $F_n(0)=1$ et $H_n(0)=0$, ces deux polynômes coïncident en 0 : ils sont donc égaux.

5. **a.** Puisque $(1-X)^n F_n = 1-n\binom{2n-1}{n}H_n$, on obtient $H_n(1)=\frac{1}{n\binom{2n-1}{n}}$.

b. Rappelons que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $H_n'(x)=x^{n-1}(1-x)^{n-1}$.

- Si n est impair, H_n' est positive sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 0 et 1. H_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\deg H_n = 2n-1 \geqslant 1$ donc les limites de H_n en $-\infty$ et $+\infty$ sont infinies. Les variations de H_n imposent $\lim_{-\infty} H_n = -\infty$ et $\lim_{+\infty} H_n = +\infty$.
- Si n est pair, H_n' est négative sur $]-\infty,0]$, positive sur $[0,1]$, négative sur $[1,+\infty[$ et ne s'annule qu'en 0 et 1. Ainsi H_n est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$, strictement croissante sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. Pour les mêmes raisons que précédemment, les limites de H_n en $-\infty$ et $+\infty$ sont infinies et les variations de H_n imposent $\lim_{-\infty} H_n = +\infty$ et $\lim_{+\infty} H_n = -\infty$.

c. Puisque $(1-X)^n F_n = 1-n\binom{2n-1}{n}H_n$ et que $F_n(1)\neq 0$, les racines réelles de F_n sont exactement les antécédents distincts de 1 de $\frac{1}{n\binom{2n-1}{n}}$ par H_n.

- Si n est impair, les variations et la continuité de H_n montrent que $\frac{1}{n\binom{2n-1}{n}}$ admet un unique antécédent par H_n. Puisque $H_n(1)=\frac{1}{n\binom{2n-1}{n}}$, 1 est l'unique antécédent de $\frac{1}{n\binom{2n-1}{n}}$ par H_n. Mais celui-ci est à exclure puisque $F_n(1)\neq 0$. Ainsi F_n n'admet pas de racine réelle.
- Si n est pair, les variations et la continuité de H_n montrent que $\frac{1}{n\binom{2n-1}{n}}$ admet un unique antécédent par H_n sur $]-\infty,0]$. Puisque $H_n(1)=\frac{1}{n\binom{2n-1}{n}}$, les variations de H_n montrent que le seul autre antécédent de $\frac{1}{n\binom{2n-1}{n}}$ par H_n est 1. Mais celui-ci est à exclure puisque $F_n(1)\neq 0$. Ainsi F_n admet une unique racine réelle et on peut même préciser que celle-ci est strictement négative.

Solution 3.

1. En considérant sa dérivée, on montre que l'application $\varphi : x\in\mathbb{R}\mapsto e^x - x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet donc un minimum en 0. Puisque $\varphi(0)=1$, φ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et en particulier, ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. L'exponentielle n'admet donc pas de point fixe sur $\mathbb{R}$.

2. On sait que $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$ puis $\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{x}{\tan x}\right)=e$. De même, $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$. Ainsi $\lim_{x\to 0} f(x)=e-1$.
On sait que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\pm\infty$ donc $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}=0$ puis $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x}{\tan x}}=1$. Puisque $x\mapsto\frac{x}{\sin x}$ est continue en $\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}=\frac{\pi}{2}$. Ainsi $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=1-\frac{\pi}{2}$.

3. Tout d'abord, $e-1>0$ car $e\geqslant 2$ et $1-\frac{\pi}{2}<0$ car $\pi\geqslant 3$.
Puisque $\tan$ ne s'annule pas sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $x\mapsto\frac{x}{\tan x}$ est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Puisque $x\mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, $x\mapsto\exp\left(\frac{x}{\tan x}\right)$ est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
Comme $\sin$ ne s'annule pas sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $x\mapsto\frac{x}{\sin x}$ est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
Ainsi f est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ comme différence de deux fonctions continues sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
Puisque $\lim_0 f>0$ et $\lim_{\frac{\pi}{2}} f<0$, f s'annule sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ en vertu du théorème des valeurs intermédiaires. Il existe donc $b\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(b)=0$.

4. Tout d'abord,

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b) = e^a(1+i\tan b)\cos b = e^a\left(1+i\frac{b}{a}\right)\cos b = \frac{e^a\cos b}{a}(a+ib) = \frac{e^a\cos b}{a}z$$

Puisque $f(b) = 0$, $e^a = \frac{b}{\sin b}$. Ainsi

$$\frac{e^a \cos b}{a} = \frac{b}{a \tan b} = 1$$

D'où $e^z = z$.