

Etude de limites

EXERCICE 1.

Etudier le comportement en 0 de la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

EXERCICE 2. ★

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x .

- Déterminer les limites en $+\infty$ des expressions suivantes :

$$\text{a. } f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor; \quad \text{b. } g(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}.$$

- Déterminer la limite en $0+$ de :

$$f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

- Montrer que

$$h(x) = \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$$

n'admet pas de limite en $+\infty$.

EXERCICE 3.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissante telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f(x-1)) = 0.$$

Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

EXERCICE 4.

Reconnaître la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} |\cos(n! \pi x)|^m.$$

EXERCICE 5.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissante telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(2x) - f(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln x} = 0$.

EXERCICE 6.

Montrer que toute fonction périodique f qui admet une limite finie en $+\infty$ est constante.

EXERCICE 7.

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}_+ croissante telle que la suite $(f(n))$ diverge vers $+\infty$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

EXERCICE 8.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que $f(x) + f(x+1) \sim \frac{1}{x}$ en $+\infty$.

- Étudier la limite de f en $+\infty$.
- Donner un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

Continuité ponctuelle

EXERCICE 9. ★

Etudier la continuité sur \mathbb{R} de la fonction f définie par

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}.$$

EXERCICE 10. ★

Etudier la continuité sur \mathbb{R} de la fonction f définie par

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \lfloor x \rfloor \sin(\pi x).$$

EXERCICE 11.

Etudier la continuité sur \mathbb{R} de la fonction f définie par $f(x) = (-1)^{E(x)} \left(x - E(x) - \frac{1}{2} \right)$.

EXERCICE 12.

On note $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ la fonction indicatrice de \mathbb{Q} .

- Montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en *aucun* point de \mathbb{R} .
- Démontrer que l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ est continue en 0 (et même dérivable en 0), alors qu'elle est discontinue en tout autre point de \mathbb{R} .

EXERCICE 13.

Soit $f : x \mapsto [x(\ln x)^2 + 1]^{\frac{1}{\ln x}}$.

1. Montrer que f est définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
2. Montrer *avec soin* que f est continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
3. Montrer que f est prolongable par continuité en 0 et 1.
4. Etudier la limite de f en $+\infty$.

EXERCICE 14. ★★

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

1. f est croissante ;
2. $x > 0 \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante.

Etablir que f est continue.

Applications du TVI

EXERCICE 15.

Soit f , une application continue, périodique, de période $T > 0$. Démontrer qu'il existe un réel t_0 tel que

$$f(t_0) = f\left(t_0 + \frac{T}{2}\right).$$

EXERCICE 16. ★

Soit f une fonction réelle définie et continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. On suppose que

$$\forall x \in [0, 7/10], \quad f(x + 3/10) \neq f(x).$$

Montrer que f s'annule au moins 7 fois sur $[0, 1]$.

EXERCICE 17.

Soit f une application réelle, continue sur un segment I telle que $I \subset f(I)$. Montrer qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = t_0$.

EXERCICE 18.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $l \in [0, 1[$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$. Montrer que f possède au moins un point fixe.

EXERCICE 19.

Soit f une fonction numérique continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$.

EXERCICE 20.

Soient $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$.

EXERCICE 21.

Soit f une fonction décroissante et continue sur \mathbb{R} . Montrer que f admet un unique point fixe.

EXERCICE 22. ★

Soit f , une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telle que

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Démontrer l'existence d'un nombre réel $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

EXERCICE 23.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f$ admette un point fixe. f admet-elle un point fixe ?

Continuité sur un segment

EXERCICE 24. ★★

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue ayant une limite finie ℓ en $+\infty$. Prouver que f est bornée.

EXERCICE 25.

Soient f et g continues sur $[0, 1]$ telles que

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) < g(x).$$

Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) + m < g(x).$$

EXERCICE 26.

Soit f continue sur \mathbb{R} telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$. Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

EXERCICE 27.★

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et

$$f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$$

continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.

EXERCICE 28.

Soit I un segment de \mathbb{R} et f une fonction continue de I dans \mathbb{R} telle que $I \subset f(I)$. Montrer que f admet un point fixe.

EXERCICE 29.

Soit f une fonction continue sur un segment $I = [a, b]$ telle que $I \subset f(I)$.

1. Montrer que f prend les valeurs a et b sur I .
2. En déduire que f admet un point fixe.

EXERCICE 30.

Soit f et g deux applications continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telles que $g \circ f = f \circ g$.

1. Montrer que f admet au moins un point fixe.
2. On note F l'ensemble des points fixes de f . Montrer que F admet un plus grand et un plus petit élément.
3. Montrer que F est stable par g .
4. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

EXERCICE 31.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique.

1. Si f admet une limite finie en $+\infty$, montrer que f est constante.
2. Si f est continue non constante, montrer que f admet une plus petite période.
3. Si f est continue, montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

Continuité et bijectivité

EXERCICE 32.★★

On se propose d'établir la continuité d'une fonction définie implicitement.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction

$$f : [0, 2] \longrightarrow [0, 1]$$

telle que

$$\forall x \in [0, 2], \quad f(x)^5 + f(x) = x.$$

2. Prouver que f est continue.

EXERCICE 33.★★

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ continue telle que $f \circ f = id_{[0,1]}$ et $f(0) = 0$.

1. Etablir que f est strictement croissante.
2. En déduire que $f = id_{[0,1]}$.

Equations fonctionnelles

EXERCICE 34.★★

Soit f , une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y). \quad (*)$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Vérifier que f est impaire.
3. On pose $a = f(1)$. Calculer par récurrence $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = ar$.
5. On suppose en outre que f est continue en 0.
 - a. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
 - b. En déduire que $f(x) = ax$ pour tout réel x par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .
6. Déterminer toutes les applications continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (*).

EXERCICE 35. ★★

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\exists a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(ax) = f(x).$$

EXERCICE 36. ★★

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x^n) = f(x).$$

EXERCICE 37. ★★

Déterminer les fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) = g(x) + g(y)$$

EXERCICE 38.

Soit f , une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

Pour tout réel x , on pose $g(x) = f(x) - f(0)$.

1. Etablir que f et g sont continues sur \mathbb{R} .
2. Calculer $(g(x))^2$ pour tout réel x et en calculant $(g(x) - g(y))^2$, démontrer que $g(x)g(y) = x y$ pour tous réels x et y .
3. En déduire l'expression de f .

EXERCICE 39.

Soit f , une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

1. Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
2. Déterminer f si $f(0) = 0$.
3. On suppose $f(0) \neq 0$.
 - a. Démontrer que f ne s'annule pas sur \mathbb{R} .
 - b. En déduire que, pour tout réel x , $f(x)$ est strictement positif.
 - c. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{ax}.$$

EXERCICE 40.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que $f(2x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

EXERCICE 41.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(x) = \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k}$. Montrer que pour $x \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

2. Rechercher les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 telles que $f(2x) = f(x) \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Lipschitzianité

EXERCICE 42.

1. Soit I un segment de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(I) \subset I$. Montrer que f admet un point fixe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application lipschitzienne de rapport $0 \leq k < 1$. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $f([-M; M]) \subset [-M; M]$.
3. En déduire qu'une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne de rapport $0 \leq k < 1$ admet un unique point fixe.

Continuité uniforme

EXERCICE 43.

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ayant une limite finie en $+\infty$.

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que f admet un minimum ou un maximum absolu mais pas nécessairement les deux.
3. Montrer que f est uniformément continue.

EXERCICE 44.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$ avec $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ avec $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 45.

Soit f une application continue sur \mathbb{R}_+ admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur \mathbb{R}_+ .

EXERCICE 46.

Montrer que toute fonction périodique continue sur \mathbb{R} est uniformément continue.