Devoir surveillé n°6

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 —

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Un élément de E sera noté u plutôt que (u_n) bien qu'il s'agisse d'une suite.
Pour $(u, v) \in E^2$, on définit la suite $u + v$ en posant $(u + v)_n = u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On définit également la suite $u \star v$ en posant $(u \star v)_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On rappelle que pour montrer que deux suites u et v de E sont égales, il suffit de montrer que $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie I – Structure d'anneau de $(E, +, \star)$

1. On admet que $(E, +)$ est un groupe. Préciser son élément neutre.

2. Montrer que la loi $\star$ est commutative.

3. Montrer que la loi $\star$ est associative.

4. On définit la suite ε en posant $\varepsilon_0 = 1$ et $\varepsilon_n = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que ε est neutre pour la loi $\star$.

5. Montrer que la loi $\star$ est distributive sur la loi $+$.

Les questions précédentes permettent alors d'affirmer que $(E, +, \star)$ est un anneau commutatif.

6. On dit qu'une suite $u \in E$ est nulle à partir du rang $N \in \mathbb{N}$ si $u_n = 0$ pour tout entier $n \geqslant N$.
Montrer que si $u \in E$ est nulle à partir du rang N_1 et $v \in E$ est nulle à partir du rang N_2, alors $u \star v$ est nulle à partir du rang $N_1 + N_2$.

7. On note F l'ensemble des suites de E nulles à partir d'un certain rang. Montrer que F est un sous-anneau de $(E, +, \star)$.

Partie II – Suites géométriques et calculs de puissances

Pour $q \in \mathbb{R}$, on note $[q]$ la suite géométrique définie par $[q]_n = q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour $u \in E$, on pose $u^0 = \varepsilon$ et $u^p = \underbrace{u \star u \star \cdots \star u}_{p \text{ fois}}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

8. On se donne deux réels q et r *distincts*. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$([q] \star [r])_n = \frac{q^{n+1} - r^{n+1}}{q - r}$$

9. On se donne $q \in \mathbb{R}$. Déterminer le terme général de la suite $[q]^2 = [q] \star [q]$.

10. On note a la suite constante égale à 1, autrement dit $a = [1]$. Déterminer le terme général des suites $a^2 = a \star a$ et $a^3 = a \star a \star a$ *sous forme factorisée.*

11. Montrer que de manière générale, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (a^p)_n = \binom{n+p-1}{p-1}$$

12. On fixe $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$(a^p)_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$$

Partie III – Inversibles de l'anneau $(E, +, \star)$

On rappelle qu'un élément de l'anneau $(E, +, \star)$ est dit inversible s'il est inversible pour la loi $\star$. Si $u \in E$ est inversible, on notera u^{-1} son inverse.

13. Montrer que $u \in E$ est inversible *si et seulement si* $u_0 \neq 0$.

14. On se donne $q \in \mathbb{R}$ et on rappelle que $[q]$ est la suite géométrique définie dans la partie II. Justifier que $[q]$ est inversible. On note y l'inverse de $[q]$. Calculer les termes y_0, y_1, y_2 et y_3.

15. Déterminer y_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie IV – Intégrité de l'anneau $(E, +, \star)$

16. On se donne u et v deux suites non constamment nulles. Justifier que les ensembles $\{n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0\}$ et $\{n \in \mathbb{N},\ v_n \neq 0\}$ admettent tous deux un minimum que l'on note respectivement p et q.

17. Montrer que $(u \star v)_{p+q} \neq 0$.

18. En déduire que l'anneau $(E, +, \star)$ est intègre.

Partie V – Résolution d'une équation dans E

On note u la suite de E telle que $u_0 = 1$, $u_1 = -5$, $u_2 = 6$ et $u_n = 0$ pour tout entier $n \geqslant 3$.
On note également v la suite de E telle que $v_0 = v_1 = 1$ et $v_n = 0$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

19. Justifier qu'il existe une unique suite $x \in E$ telle que $u \star x = v$.

20. Déterminer x_0 et x_1.

21. Montrer que la suite x vérifie une relation de récurrence homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

22. En déduire le terme général de la suite x.

23. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\{a\}$ la suite de E telle que $\{a\}_0 = 1$, $\{a\}_1 = -a$ et $\{a\}_n = 0$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Justifier que $\{a\}$ est inversible et donner son inverse en utilisant la partie III

24. Déterminer des réels a et b tels que $u = \{a\} \star \{b\}$.

25. Retrouver alors le terme général de la suite x à l'aide de la question **II.8**.

Partie VI – Un peu de Python

26. Écrire une fonction Python nommée `convol`

- prenant en arguments deux listes U et V de même taille contenant respectivement les $N+1$ premiers termes de deux suites u et v, c'est-à-dire

$$U = [u_0, u_1, \dots, u_N] \qquad \text{et} \qquad V = [v_0, v_1, \dots, v_N]$$

- et renvoyant la liste des $N+1$ premiers termes de la suite $u \star v$, c'est-à-dire la liste

$$[(u \star v)_0, (u \star v)_1, \dots, (u \star v)_N]$$