Interrogation écrite n°07

NOM : Prénom : Note :

1. Soit $\mathrm{F} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ e^x - y^2 \geq 1\}$. Montrer que F est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

   L'application $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^x - y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus, $\mathrm{F} = f^{-1}([1,+\infty[)$ et $[1,+\infty[$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$ donc F est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue. ∎

2. Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel que l'on munit de la norme euclidienne associée au produit scalaire. Soit A une partie de E. Montrer que pour tout $a \in \mathrm{A}$, $\varphi_a : x \in \mathrm{E} \mapsto \langle a, x\rangle$ et continue et en déduire que $\mathrm{A}^\perp$ est une partie fermée de E.

   φ_a est une forme linéaire et, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

   $$\forall x \in \mathrm{E},\ |\varphi_a(x)| \leq \|a\|\|x\|$$

   donc φ_a est continue par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.

   $$\mathrm{A}^\perp = \{x \in \mathrm{E},\ \forall a \in \mathrm{A},\ \langle a, x\rangle = 0\} = \bigcap_{a\in\mathrm{A}} \operatorname{Ker}\varphi_a$$

   Or, pour tout $a \in \mathrm{A}$, $\operatorname{Ker}\varphi_a = \varphi_a^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue donc $\mathrm{A}^\perp$ est fermé comme intersection de fermés. ∎

3. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   L'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det \mathrm{M}$ est continue comme fonction polynomiale. De plus, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est ouvert comme complémentaire d'un fermé donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue. ∎

4. On rappelle que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{M}^\top\mathrm{M} = \mathrm{I}_n\}$. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, il suffit de montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné.
   Si l'on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa norme euclidienne canonique $\|\cdot\|$, alors

   $$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ \|\mathrm{M}\|^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}) = \mathrm{tr}(\mathrm{I}_n) = n$$

   donc $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est borné.
   De plus, l'application $f:\ \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ est continue.
   ***Première méthode.** Chaque coefficient de $\mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ est polynomial en les coefficients de M.*
   ***Deuxième méthode.** L'application $g:\ \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\mathrm{M}^\top, \mathrm{M})$ est continue car elle est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. L'application $h:\ (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{AB}$ est continue car elle est bilinéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. Ainsi $f = h \circ g$ est continue.*
   Finalement, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{\mathrm{I}_n\})$ est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue. ∎

5. On note $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Soit $\mathrm{D}:\ (u_n) \in \mathcal{B} \mapsto (u_{n+1} - u_n)$. Montrer que D est un endomorphisme continu de $\mathcal{B}$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et calculer sa norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

   D *est clairement un endomorphisme de $\mathcal{B}$. Soit $u \in \mathcal{B}$.*

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ |\mathrm{D}(u)_n| = |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2\|u\|_\infty$$

   Ainsi, $\|\mathrm{D}(u)\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty$ et D est continu par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.
   On peut également ajouter que $|||\mathrm{D}||| \leq 2$. De plus, en posant $v:\ n \in \mathbb{N} \mapsto (-1)^n$, $\|v\|_\infty = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{D}(v)_n = -2(-1)^n$ donc $\|\mathrm{D}(v)\|_\infty = 2$. Ainsi $|||\mathrm{D}||| \geq \dfrac{\|\mathrm{D}(v)\|_\infty}{\|v\|_\infty} = 2$ puis $|||\mathrm{D}||| = 2$. ∎

6. On munit $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\mathrm{X}^n\right\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. Montrer que l'endomorphisme $\mathrm{D}:\ \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}'$ n'est pas continu.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|\mathrm{X}^k\|_1 = 1$ et $\|\mathrm{D}(\mathrm{X}^k)\|_1 = \|k\mathrm{X}^{k-1}\|_1 = k$. Ainsi $\dfrac{\|\mathrm{D}(\mathrm{X}^k)\|_1}{\|\mathrm{X}^k\|_1} = k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit que D n'est pas un endomorphisme continu de $(\mathbb{R}[\mathrm{X}], \|\cdot\|_1)$. ∎