Devoir surveillé n°12

NOM : Prénom : Note :

A lire attentivement avant de répondre aux questions

- Certaines questions, de numéros consécutifs, sont liées et regroupées dans des parties distinctes.
- Pour chaque question, il peut y avoir 0, 1 ou 2 bonnes réponses.
- Répondre directement sur le sujet : entourer les réponses justes A, B, C, D et barrer les réponses fausses ~~A~~, ~~B~~, ~~C~~, ~~D~~.
- Lorsqu'une question admet deux réponses justes, 2 points par réponse juste entourée. Lorsqu'une question admet une seule réponse juste, 4 points si seule la réponse juste est entourée, 2 points si la réponse juste est entourée mais qu'une autre réponse est également entourée, 0 point sinon. Lorsqu'une question n'admet aucune réponse juste, 4 points si toutes les réponses sont barrées, 0 point sinon. Les questions où toutes les réponses ne sont pas soit entourées soit barrées ainsi que les réponses ou plus de deux réponses sont entourées ne seront pas corrigées.
- Les calculatrices sont **interdites**.
- **Ne pas d'oublier d'indiquer son nom sur le sujet.**
- Conseil d'ami : faites marcher votre esprit de déduction et votre bon sens. En particulier, vérifiez la cohérence entre vos réponses aux différentes questions.

Exemple

On considère le polynôme $P = X^2 - 1$.

~~A~~ 0 est racine de P.	~~A~~ 0 est racine de P.	~~A~~ 0 est racine de P.
B 1 est racine de P.	~~B~~ 1 est racine de P.	B 1 est racine de P.
C -1 est racine de P.	C -1 est racine de P.	C -1 est racine de P.
~~D~~ P n'admet pas de racine réelle.	~~D~~ P n'admet pas de racine réelle.	D P n'admet pas de racine réelle.
Question corrigée (4 points)	Question corrigée (2 points)	Question non corrigée (0 point)
~~A~~ $P(0) = 1$.	~~A~~ $P' = 1$.	~~A~~ $P(0) = 1$
~~B~~ $P'(0) = 1$.	B $P'(0) = 1$.	~~B~~ $P'' = 1$.
C $P' = 2X$.	C $P' = 2X$.	~~C~~ $P(1) = -1$.
~~D~~ $P(X^2) = (X^2 - 1)^2$.	~~D~~ $P(X^2) = (X^2 - 1)^2$.	~~D~~ $P''(1) = 1$.
Question corrigée (4 points)	Question corrigée (2 points)	Question corrigée (4 points)

Géométrie euclidienne

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
On considère le plan F d'équation $2x-2y+z=0$.

Q1. La matrice du projecteur orthogonal p sur le plan F est

~~A.~~ $M=\begin{pmatrix}-3&4&-2\\4&-3&2\\-2&2&0\end{pmatrix}$

~~B.~~ $M=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&4&-2\\4&-1&2\\-2&2&2\end{pmatrix}$

~~C.~~ $M=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7&-4&2\\-4&7&2\\2&-2&4\end{pmatrix}$

D. $M=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}5&4&-2\\4&5&2\\-2&2&8\end{pmatrix}$

Q2. ~~A.~~ p est un automorphisme orthogonal

~~B.~~ $\mathrm{rg}(p)=1$

C. $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^3)^2,\ \langle p(x),y\rangle=\langle x,p(y)\rangle$

~~D.~~ $\mathrm{tr}(p)=1$

Q3. On note s la symétrie orthogonale par rapport au plan F.

A. La matrice de s dans la base canonique est orthogonale.

~~B.~~ Le déterminant de s vaut 1.

~~C.~~ Le vecteur $(2,-2,1)$ est invariant par s.

D. Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de s est $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

Q4. On considère le vecteur $u=(1,2,3)$. La distance de u à F vaut

A. $\frac{1}{3}$ ~~B.~~ $\frac{1}{9}$ ~~C.~~ $\frac{2}{9}$ ~~D.~~ $\frac{2}{3}$

Q5. On considère maintenant le plan G d'équation $x+y-2z=0$.

~~A.~~ $(F+G)^\perp=\mathrm{vect}(3,-1,-1)$

B. $(F\cap G)^\perp=\mathrm{vect}((2,-2,1),(1,1,-2))$

~~C.~~ $F^\perp+G^\perp=\mathrm{vect}((1,1,0),(1,1,1))$

D. $(F\cap G)^\perp=\mathrm{vect}((3,-1,-1),(1,-3,3))$

Une suite de polynômes

Q6. On pose $J_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \, dx$ et $K_n = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^{n-1} \, dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

~~A.~~ $K_n = (2n+1)J_n$ ~~B.~~ $K_n = 2nJ_n$ ~~C.~~ $K_n = \frac{1}{2n+1}J_n$ **D.** $K_n = \frac{1}{2n}J_n$

Q7. En calculant $J_n - J_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient la relation de récurrence suivante.

~~A.~~ $J_n = \frac{2n-1}{2n}J_{n-1}$ ~~B.~~ $J_n = \frac{2n+1}{2n-1}J_{n-1}$ **C.** $J_n = \frac{2n}{2n+1}J_{n-1}$ ~~D.~~ $J_n = \frac{2n}{2n-1}J_{n-1}$

Q8. On pose $I_n = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \, dx$.

~~A.~~ $I_n = (-1)^n 2^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$

~~B.~~ $I_n = (-1)^n 2^{2n} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$

C. $I_n = (-1)^n 2^{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

~~D.~~ $I_n = (-1)^n 2^{2n} \frac{(2n)!}{((n+1)!)^2}$

Q9. On définit pour $n \in \mathbb{N}$ les polynômes $P_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = P_n^{(n)}$ (dérivée $n^{\text{ème}}$ de P_n).

~~A.~~ Le monôme de plus haut degré de L_n est $\frac{(2n+1)!}{(n+1)!}X^{n+1}$.

~~B.~~ L_n est toujours un polynôme pair.

~~C.~~ L_n a la même parité que $n+1$.

D. L_n a la même parité que n.

Q10. A partir de la définition de L_n, on peut écrire :

~~A.~~ $L_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left[(X-1)^n\right]^{(k)} \left[(X+1)^n\right]^{(n-k)}$

B. $L_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[(X-1)^n\right]^{(k)} \left[(X+1)^n\right]^{(n-k)}$

~~C.~~ $L_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{k(k-1)\cdots 1} \left[(X-1)^n\right]^{(k)} \left[(X+1)^n\right]^{(n-k)}$

~~D.~~ $L_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{k(k-1)\cdots 1} \left[(X-1)^n\right]^{(k)} \left[(X+1)^n\right]^{(n-k)}$

Q11. On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

~~A.~~ $L_n(1) = L_n(-1)$ ~~B.~~ $L_n(1) = 0$ ~~C.~~ $L_n(1) = n!$ **D.** $L_n(1) = 2^n n!$

Q12. En calculant P_n' et P_n'', on constate que

~~A.~~ P_n' et P_n'' n'ont pas de racines autres que 1 et -1 dans $[-1,1]$.

~~B.~~ P_n' possède une racine dans $]-1,1[$ et P_n'' n'a pas de racines dans $]-1,1[$.

~~C.~~ P_n'' possède une racine double dans $]-1,1[$.

D. P_n'' possède deux racines opposées dans $]-1,1[$.

Q13. On considère deux entiers naturels k et n tels que $k<n$.

~~A.~~ Les seules racines de $P_n^{(k)}$ sont 1 et -1.

~~B.~~ A l'aide du théorème de Rolle, on montre que $P_n^{(k)}$ s'annule exactement k fois sur $[-1,1]$.

C. A l'aide du théorème de Rolle, on montre que $P_n^{(k)}$ s'annule exactement k fois sur $]-1,1[$.

~~D.~~ A l'aide du théorème de Rolle, on montre que $P_n^{(k)}$ s'annule exactement $k+1$ fois sur $]-1,1[$.

Q14. On peut déduire des questions précédentes que :

~~A.~~ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $L_n(1)=L_n(-1)$.

B. L_n est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples toutes comprises dans l'intervalle $]-1,1[$.

C. Si n est impair, les racines de L_n sont opposées deux à deux.

~~D.~~ Si n est pair, 0 est racine de L_n.

Q15. En calculant P_{n+1}'' pour $n\in\mathbb{N}^*$, on obtient la relation

~~A.~~ $P_{n+1}''=2(2n+1)^2P_n+4n(n+1)P_{n-1}$

~~B.~~ $P_{n+1}''=(n+1)^2P_{n-1}+4n(n+1)P_n$

C. $P_{n+1}''=2(2n+1)(n+1)P_n+4n(n+1)P_{n-1}$

~~D.~~ $P_{n+1}''=(2n-1)(n+1)P_n-4n(n+1)P_{n-1}$

Q16. En dérivant n fois P_{n+1}', on obtient pour n non nul :

~~A.~~ $L_{n+1}=2(n+1)XL_n+2(n+1)X^2P_n^{(n-1)}$

~~B.~~ $L_{n+1}=2(n+1)XL_n+2(n+1)(n-1)^2P_n^{(n-1)}$

C. $L_{n+1}=2(n+1)XL_n+2n(n+1)P_n^{(n-1)}$

~~D.~~ $L_{n+1}=2(n+1)XL_n+2(n-1)(n+1)P_n^{(n-1)}$

Q17. En dérivant $n-1$ fois l'expression de P_{n+1}'' obtenue précédemment, on obtient pour $n\in\mathbb{N}^*$,

~~A.~~ $L_{n+1}=2(2n+1)^2P_n^{(n-1)}+4n(n+1)L_{n-1}$

~~B.~~ $L_{n+1}=(n+1)^2P_{n-1}^{(n-1)}+4n(n+1)L_n$

C. $L_{n+1}=2(n+1)(2n+1)P_n^{(n-1)}+4n(n+1)L_{n-1}$

~~D.~~ $L_{n+1}=(n+1)(2n-1)P_n^{(n-1)}-4n(n+1)L_{n-1}$

Q18. On obtient finalement pour $n\in\mathbb{N}^*$ la relation permettant d'exprimer L_{n+1} en fonction de L_n et L_{n-1}.

~~A.~~ $L_{n+1}=2(n+1)XL_n-4(n-1)^2L_{n-1}$

~~B.~~ $L_{n+1}=2(n+1)XL_n-4n^2L_{n-1}$

~~C.~~ $L_{n+1}=2(n+1)XL_n+4n^2L_{n-1}$

~~D.~~ $L_{n+1}=2(n+1)XL_n+4(n-1)^2L_{n-1}$

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$$

On notera $\|P\|$ la norme d'un polynôme P.

Q19. En procédant à des intégrations par parties successives, on montre que pour $k \leqslant m < n$

~~A.~~ $\langle L_n, X^m\rangle = (-1)^{k+1} m(m-1)\cdots(m-k)\displaystyle\int_{-1}^{1} t^{m-k} P_n^{(n-k)}(t)\,dt$

~~B.~~ $\langle L_n, X^m\rangle = (-1)^{k} m(m-1)\cdots(m-k)\displaystyle\int_{-1}^{1} t^{m-k} P_n^{(n-k)}(t)\,dt$

~~C.~~ $\langle L_n, X^m\rangle = (-1)^{m} m!\displaystyle\int_{-1}^{1} t P_n^{(n-m+1)}(t)\,dt$

D. $\langle L_n, X^m\rangle = (-1)^{m-1} m!\displaystyle\int_{-1}^{1} t P_n^{(n-m+1)}(t)\,dt$

Q20. On en déduit que pour $m < n$:

~~A.~~ $\langle L_n, X^m\rangle = (-1)^m m!$

~~B.~~ $\langle L_n, X^m\rangle = (-1)^{m-1}(m-1)!$

~~C.~~ $\langle L_n, X^m\rangle = (n-m)!$

D. $\langle L_n, X^m\rangle = 0$

Q21. On peut alors en déduire que si m est différent de n :

~~A.~~ $\langle L_n, L_m\rangle = (-1)^{m+n}(m+n)!$

~~B.~~ $\langle L_n, L_m\rangle = (-1)^{m-1}(m-1)!$

~~C.~~ Si $n > m$, alors $\langle L_n, L_m\rangle = (-1)^{n-m}(n-m)!$

D. $\langle L_n, L_m\rangle = 0$

Q22. En intégrant n fois par parties l'intégrale définissant $\|L_n\|^2$, on obtient

~~A.~~ $\|L_n\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t) P_n^{(2n+1)}(t)\,dt$

~~B.~~ $\|L_n\|^2 = (-1)^n\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t) P_n^{(2n+1)}(t)\,dt$

C. $\|L_n\|^2 = (-1)^n\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t) P_n^{(2n)}(t)\,dt$

~~D.~~ $\|L_n\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t) P_n^{(2n)}(t)\,dt$

Q23. On obtient alors comme expression de $\|L_n\|^2$:

~~A.~~ $\|L_n\|^2 = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{2n+1}$ **B.** $\|L_n\|^2 = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}$ ~~C.~~ $\|L_n\|^2 = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ ~~D.~~ $\|L_n\|^2 = 1$

Une autre suite de polynômes

On note T_n l'unique polynôme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{T}_n(\cos x) = \cos(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q24. On s'intéresse au polynôme T_3.

~~A.~~ $\mathrm{T}_3 = 3\mathrm{X}^3 - 4\mathrm{X}$ **B.** $\mathrm{T}_3 = 4\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}$ ~~C.~~ $\mathrm{T}_3 = \mathrm{X}^3 - 4\mathrm{X}$ ~~D.~~ $\mathrm{T}_3 = 4\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}$

Q25. La suite (T_n) vérifie la relation de récurrence :

~~A.~~ $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{T}_{n+2} = \mathrm{T}_n - 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1}$

~~B.~~ $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{T}_{n+2} = \mathrm{T}_n + 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1}$

~~C.~~ $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{T}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_n + \mathrm{T}_{n+1}$

D. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{T}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n$

Q26. On note $\mathrm{P} \circ \mathrm{Q}$ la composée de deux polynômes P et Q.

A. $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathrm{T}_m \circ \mathrm{T}_n = \mathrm{T}_{mn}$

~~B.~~ $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ 0 \leqslant m \leqslant n \implies \mathrm{T}_{m+n} - \mathrm{T}_{m-n} = 2\mathrm{T}_m\mathrm{T}_n$

~~C.~~ $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathrm{T}_m \circ \mathrm{T}_n = \mathrm{T}_m + \mathrm{T}_n$

D. $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ 0 \leqslant m \leqslant n \implies \mathrm{T}_{m+n} + \mathrm{T}_{m-n} = 2\mathrm{T}_m\mathrm{T}_n$

Q27. On s'intéresse aux racines de T_n où $n \in \mathbb{N}^*$.

~~A.~~ Les racines de T_n sont les $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$

B. T_n est scindé à racines simples.

~~C.~~ La somme des racines de T_n est toujours nulle.

D. Le produit des racines de T_n est nul si n est impair.

Q28. On note $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$ le PGCD de deux polynômes P et Q.

~~A.~~ $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{T}_{n+2} \wedge \mathrm{T}_{n+1} = \mathrm{T}_n$

B. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{T}_{n+2} \wedge \mathrm{T}_{n+1} = \mathrm{T}_{n+1} \wedge \mathrm{T}_n$

C. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{T}_{n+1} \wedge \mathrm{T}_n = 1$

~~D.~~ $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{T}_{n+2} \wedge \mathrm{T}_n = \mathrm{T}_{n+1}$

Q29. ~~A.~~ $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \mathrm{T}_n'(\cos\theta) = -\sin(n\theta)$

B. $\forall \theta \in \mathbb{R},\ n\sin(\theta)\mathrm{T}_n'(\cos\theta) = \sin(n\theta)$

~~C.~~ $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \mathrm{T}_n'(\cos\theta) = -n\sin(n\theta)$

~~D.~~ $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \mathrm{T}_n'(\sin\theta) = -n\sin(n\theta)$

Q30. On en déduit que la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\mathrm{T}_n}$ est

~~A.~~ $\dfrac{1}{\mathrm{T}_n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\mathrm{X} - \cos \frac{2k\pi}{n}}$

~~B.~~ $\dfrac{1}{\mathrm{T}_n} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{\mathrm{X} - \cos \frac{(2k-1)\pi}{n}}$

~~C.~~ $\dfrac{1}{\mathrm{T}_n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin \frac{(2k-1)\pi}{n}}{\mathrm{X} - \cos \frac{(2k-1)\pi}{n}}$

~~D.~~ $\dfrac{1}{\mathrm{T}_n} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{\mathrm{X} - \cos \frac{2k\pi}{n}}$

Q31. On munit $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ du produit scalaire défini par

$$\forall (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2,\ \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \int_0^{\pi} \mathrm{P}(\cos x)\mathrm{Q}(\cos x)\,\mathrm{d}x$$

~~A.~~ La famille $(\mathrm{T}_0, \dots, \mathrm{T}_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

~~B.~~ $\forall n \in \mathbb{N},\ \|\mathrm{T}_n\|^2 = \pi$

C. La famille $(\mathrm{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

D. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{T}_{n+1} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^{\perp}$.

Séries

Q32. On se donne a et b deux réels et on s'intéresse à la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a^n}{n^b}$.

~~A.~~ La série diverge grossièrement pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-$.

~~B.~~ La série converge pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}\times]1,+\infty[$.

~~C.~~ La série converge pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}_-^*\times\mathbb{R}$.

D. La série converge pour tout $(a,b)\in]-1,1[\times\mathbb{R}$.

Q33. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction $f : x\mapsto \ln(1+x)$.

~~A.~~ $\forall x\in]-1,+\infty[,\ f^{(n)}(x)=\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

~~B.~~ $\forall x\in]-1,+\infty[,\ f^{(n)}(x)=\dfrac{n!(-1)^n}{(1+x)^n}$

~~C.~~ $\forall x\in]-1,+\infty[,\ f^{(n)}(x)=\dfrac{n!(-1)^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}$

D. $\forall x\in]-1,+\infty[,\ f^{(n)}(x)=\dfrac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{(1+x)^n}$

Q34. On en déduit via l'inégalité de Taylor-Lagrange que

A. $\left|\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|\leqslant\frac{1}{n}$

~~B.~~ $\left|\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\right|\leqslant\frac{1}{n!}$

~~C.~~ $\left|\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k}\right|\leqslant\frac{1}{n}$

~~D.~~ $\left|\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!}\right|\leqslant\frac{1}{n!}$

Q35. On en déduit que

~~A.~~ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\ln(2)$ ~~B.~~ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\ln(2)$ **C.** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln(2)$ **D.** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln(2)$

Q36. On s'intéresse à la série $\sum_{n\geqslant2}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$.

~~A.~~ A l'aide d'une comparaison à une intégrale, on montre que la série $\sum_{n\geqslant2}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ converge *si et seulement si* $\alpha>0$.

B. A l'aide d'une comparaison à une intégrale, on montre que la série $\sum_{n\geqslant2}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ converge *si et seulement si* $\alpha>1$.

~~C.~~ $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}\leqslant\frac{1}{\ln 2}$.

~~D.~~ La série $\sum_{n\geqslant2}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ diverge grossièrement lorsque $\alpha<0$.

Q37. On pose $u_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

~~A.~~ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

~~B.~~ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

~~C.~~ La série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge absolument.

D. La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{u_n}$ diverge grossièrement.

Une suite de déterminants

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ **et** Δ_n **le déterminant d'ordre** n **suivant**

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

Q38. La suite (Δ_n) vérifie la relation de récurrence

A. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$

~~B.~~ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_{n+2} = bc\Delta_{n+1} + a\Delta_n$

~~C.~~ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_{n+2} = a\Delta_n - bc\Delta_{n+1}$

~~D.~~ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_{n+2} = ab\Delta_n - c\Delta_{n+1}$

Q39. Dans cette question, on suppose que $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

~~A.~~ $\Delta_n = 2^n - 1$ ~~B.~~ $\Delta_n = 4n - 1$ ~~C.~~ $\Delta_n = 3^n - n$ D. $\Delta_n \geqslant 0$

Q40. On suppose dans cette question que $a^2 = 4bc$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

A. $\Delta_n = \frac{(n+1)a^n}{2^n}$ ~~B.~~ $\Delta_n = \frac{na^{n+1}}{2^n}$ ~~C.~~ $\Delta_n = \frac{na^n}{2^{n-1}}$ ~~D.~~ $\Delta_n = \frac{bc}{2^{n+1}}$