

# DEVOIR SURVEILLÉ N° 6 : CORRIGÉ

## SOLUTION 1.

1. On trouve

$$\begin{array}{ll} d_0 = 123 & \varepsilon_0 = 0,456 \\ d_1 = 4 & \varepsilon_1 = 0,56 \\ d_2 = 5 & \varepsilon_2 = 0,6 \\ d_3 = 6 & \varepsilon_3 = 0 \end{array}$$

On montre alors par récurrence que  $d_n = \varepsilon_n = 0$  pour tout  $n \geq 4$ . En effet,  $d_4 = \lfloor 10\varepsilon_3 \rfloor = 0$  et  $\varepsilon_4 = 10\varepsilon_3 - d_4 = 0$  puisque  $\varepsilon_3 = 0$ . Supposons que  $d_n = 0$  pour un certain  $n \geq 4$ . Alors  $d_{n+1} = \lfloor 10\varepsilon_n \rfloor = 0$  et  $\varepsilon_{n+1} = 10\varepsilon_n - d_{n+1} = 0$ . Par récurrence,  $d_n = 0$  pour tout  $n \geq 4$ .

2. a. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $n = 0$ ,  $\varepsilon_0 = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$  puisque  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ . Sinon  $\varepsilon_n = 10\varepsilon_{n-1} - \lfloor 10\varepsilon_{n-1} \rfloor \in [0, 1[$  car  $\lfloor 10\varepsilon_{n-1} \rfloor \leq 10\varepsilon_{n-1} < \lfloor 10\varepsilon_{n-1} \rfloor + 1$ .
- b. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $\varepsilon_{n-1} \in [0, 1[$  d'après la question 2.a et donc  $10\varepsilon_{n-1} \in [0, 10[$ . On en déduit que  $d_n = \lfloor 10\varepsilon_{n-1} \rfloor \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ .
- c. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\left( S_{n+1} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{10^{n+1}} \right) - \left( S_n + \frac{\varepsilon_n}{10^n} \right) = S_{n+1} - S_n + \frac{\varepsilon_{n+1} - 10\varepsilon_n}{10^{n+1}} = \frac{d_{n+1}}{10^{n+1}} - \frac{\lfloor 10\varepsilon_n \rfloor}{10^{n+1}} = 0$$

La suite de terme général  $S_n + \frac{\varepsilon_n}{10^n}$  est donc constante égale à son premier terme  $S_0 + \frac{\varepsilon_0}{10^0} = d_0 + \varepsilon_0 = x$ .

- d. Puisque  $\varepsilon_n \in [0, 1[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on déduit de la question précédente que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$x - \frac{1}{10^n} < S_n \leq x$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^n} = 0$ , on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = x$  d'après le théorème des gendarmes.

3. a. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 10^{N+T} S_{n+N+T+1} - 10^N S_{n+N+1} = 10^{N+T} \left( S_{n+N+T} + \frac{d_{n+N+T+1}}{10^{n+N+T+1}} \right) - 10^N \left( S_{n+N} + \frac{d_{n+N+1}}{10^{n+N+1}} \right) \\ &= u_n + \frac{d_{n+N+T+1} - d_{n+N+1}}{10^{n+1}} = u_n \end{aligned}$$

car  $(d_n)$  est  $T$ -périodique à partir du rang  $N$ . On en déduit que  $(u_n)$  est constante.

- b. Comme  $(u_n)$  est constante,  $u_n = u_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

$$u_0 = 10^{N+T} S_{N+T} - 10^N S_N = \sum_{k=0}^{N+T} d_k 10^{N+T-k} - \sum_{k=0}^N d_k 10^{N-k}$$

Pour  $k \in \llbracket 0, N+T \rrbracket$ ,  $10^{N+T-k} \in \mathbb{Z}$  et  $d_k \in \mathbb{Z}$  donc  $\sum_{k=0}^{N+T} d_k 10^{N+T-k} \in \mathbb{Z}$ .

De même, pour  $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ ,  $10^{N-k} \in \mathbb{Z}$  et  $d_k \in \mathbb{Z}$  donc  $\sum_{k=0}^N d_k 10^{N-k} \in \mathbb{Z}$ .

On en déduit que  $u_0 \in \mathbb{Z}$ . En posant  $p = u_0$ , on a donc bien pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$10^{N+T} S_{n+N+T} - 10^N S_{n+N} = p$$

- c. Puisque  $(S_{n+N})$  et  $(S_{n+N+T})$  convergent toutes deux vers  $x$  (en tant que suites extraites de  $(S_n)$ ), on obtient par unicité de la limite  $10^{N+T}x - 10^N x = p$  et donc  $x = \frac{p}{10^N(10^T - 1)}$  puisque  $10^T \geq 10 > 1$ . Ceci prouve que  $x$  est rationnel.

4. On remarque que  $10^6 x - 10^3 x = 123333$ . Ainsi  $x = \frac{123333}{999000} = \frac{41111}{333000}$ .

5. a. La suite  $(r_n)$  est à valeurs dans l'ensemble fini  $\llbracket 0, q-1 \rrbracket$ . Elle ne peut donc être injective. Ainsi il existe des entiers  $N$  et  $M$  distincts tels que  $r_N = r_M$ .

- b. Pour simplifier, supposons  $N < M$  et posons  $T = M - N$ . On va montrer par récurrence que  $(r_n)$  est  $T$ -périodique à partir du rang  $N$ .

On a bien  $r_{N+T} = r_N$ .

Supposons que  $r_{n+T} = r_n$  pour un certain entier  $n \geq N$ . On sait que  $r_{n+1}$  et  $r_{n+1+T}$  sont les restes respectifs des divisions euclidiennes de  $10r_n$  et  $10r_{n+T}$  par  $b$ . Mais puisque  $10r_n = 10r_{n+T}$ , on a  $r_{n+1} = r_{n+1+T}$  par unicité du reste dans la division euclidienne.

Par récurrence,  $r_{n+T} = r_n$  pour tout  $n \geq N$ . Ainsi  $(r_n)$  est  $T$ -périodique à partir du rang  $N$ .

- c. Soit  $n \geq N + 1$ . On sait que  $q_n$  et  $q_{n+T}$  sont les quotients respectifs de  $10r_{n-1}$  et  $10r_{n-1+T}$  par  $b$ . Puisque  $n - 1 \geq N$  et que  $(r_n)$  est  $T$ -périodique à partir du rang  $N$ ,  $r_{n-1} = r_{n-1+T}$  et donc  $10r_{n-1} = 10r_{n-1+T}$ . Par unicité du quotient dans la division euclidienne,  $q_n = q_{n+T}$ .

On a donc prouvé que  $(q_n)$  était  $T$ -périodique à partir du rang  $N + 1$ .

- d. Tout d'abord,  $a = bq_0 + r_0$  avec  $0 \leq r_0 < b$ . On en déduit que

$$x - 1 = \frac{a}{b} - 1 < q_0 \leq \frac{a}{b} = x$$

et donc que  $q_0 = \lfloor x \rfloor = d_0$ . Par ailleurs,

$$r_0 = a - bq_0 = b \left( \frac{a}{b} - q_0 \right) = b(x - \lfloor x \rfloor) = b\varepsilon_0$$

Supposons que  $q_n = d_n$  et  $r_n = b\varepsilon_n$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Par définition,

$$10\varepsilon_n = d_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$$

et donc

$$10b\varepsilon_n = bd_{n+1} + b\varepsilon_{n+1}$$

ou encore

$$10r_n = bd_{n+1} + b\varepsilon_{n+1}$$

On sait que  $d_{n+1} \in \mathbb{Z}$  d'après la question 2.b. De plus,  $b\varepsilon_{n+1} = 10r_n - bd_{n+1} \in \mathbb{Z}$ . Enfin,  $\varepsilon_{n+1} \in [0, 1[$  d'après la question 2.a donc  $0 \leq b\varepsilon_{n+1} < b$ . On en déduit que  $d_{n+1}$  et  $q\varepsilon_{n+1}$  sont le quotient et le reste de la division euclidienne de  $10r_n$  par  $b$ . Par unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne,  $q_{n+1} = d_{n+1}$  et  $r_{n+1} = b\varepsilon_{n+1}$ .

Par récurrence,  $q_n = d_n$  et  $r_n = b\varepsilon_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

6. On trouve successivement

$q_0 = 0$	$r_0 = 13$
$q_1 = 3$	$r_1 = 25$
$q_2 = 7$	$r_2 = 5$
$q_3 = 1$	$r_3 = 15$
$q_4 = 4$	$r_4 = 10$
$q_5 = 2$	$r_5 = 30$
$q_6 = 8$	$r_6 = 20$
$q_7 = 5$	$r_7 = 25$

On a  $r_1 = r_7$  donc  $(r_n)$  est 6-périodique à partir du rang 1 d'après la question 5.b. Toujours d'après la question 5.b,  $(q_n)$  est 6-périodique à partir du rang 2. Mais puisque les suites  $(d_n)$  et  $(q_n)$  sont identiques,  $(d_n)$  est également 6-périodique à partir du rang 2.

## SOLUTION 2.

- 1.

$$\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$$

$$\mathbb{U}_6 = \left\{ 1, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}, -1, e^{\frac{4i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{3}} \right\}$$

$$\mathbb{U}_4 \cap \mathbb{U}_6 = \{-1, 1\} = \mathbb{U}_2$$

$$G = \left\{ 1, e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{i\pi}{3}}, i, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}, -1, e^{\frac{7i\pi}{6}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}, -i, e^{\frac{5i\pi}{3}}, e^{\frac{11i\pi}{6}} \right\} = \mathbb{U}_{12}$$

Ainsi  $\text{card } \mathbb{U}_4 = 4$ ,  $\text{card } \mathbb{U}_6 = 6$ ,  $\text{card } \mathbb{U}_4 \cap \mathbb{U}_6 = 2$  et  $\text{card } G = 12$ .

2. Soit  $z \in \mathbb{U}_{m \wedge n}$ . On a donc  $z^{m \wedge n} = 1$ . Puisque  $m$  et  $n$  sont des multiples de  $m \wedge n$ , on a également  $z^m = 1$  et  $z^n = 1$ . Donc  $z \in \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$ . Ainsi  $\mathbb{U}_{m \wedge n} \subset \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$ .
3. Soit  $z \in \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$ . On a donc  $z^m = 1$  et  $z^n = 1$ . D'après le théorème de Bezout, il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $mu + nv = m \wedge n$ . Ainsi  $z^{m \wedge n} = (z^m)^u (z^n)^v = 1$  et  $z \in \mathbb{U}_{m \wedge n}$ . Ainsi  $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_{m \wedge n}$ .
4. Soit  $z \in G$ . Il existe donc  $z_1 \in \mathbb{U}_m$  et  $z_2 \in \mathbb{U}_n$  tels que  $z = z_1 z_2$ . Dans ce cas,  $z^{m \vee n} = z_1^{m \vee n} z_2^{m \vee n}$ . Mais comme  $m \vee n$  est un multiple de  $m$ ,  $z_1^{m \vee n} = 1$ . De même,  $m \vee n$  étant un multiple de  $n$ ,  $z_2^{m \vee n} = 1$ . Ainsi  $z^{m \vee n} = 1$  et  $z \in \mathbb{U}_{m \vee n}$ . Ainsi  $G \subset \mathbb{U}_{m \vee n}$ .
5. Soit  $z \in \mathbb{U}_{m \vee n}$ . Par le théorème de Bezout, il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $um + vn = m \wedge n$ . Posons  $m' = \frac{m}{m \wedge n}$  et  $n' = \frac{n}{m \wedge n}$ . Remarquons que  $m'$  et  $n'$  sont entiers. On peut alors poser  $z_1 = z^{vn'}$  et  $z_2 = z^{um'}$ . On a bien  $z = z_1 z_2$  puisque  $um' + vn' = 1$ . De plus,  $\frac{mn}{m \wedge n} = m \vee n$  donc  $z_1^m = z^{v(m \vee n)} = 1$  et  $z_2^n = z^{u(m \vee n)} = 1$ . Ainsi  $z = z_1 z_2$  avec  $z_1 \in \mathbb{U}_m$  et  $z_2 \in \mathbb{U}_n$ . Donc  $z \in G$ . Ainsi  $\mathbb{U}_{m \vee n} \subset G$ .

### SOLUTION 3.

1. a. On a évidemment  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .
- b. On procède par récurrence. Tout d'abord,  $F_3 = 2 > \varphi$ . En effet,  $5 < 9$  donc  $\sqrt{5} < 3$  puis  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$ . Ensuite,  $F_4 = 3 > \varphi^2$ . En effet,  $\varphi^2 = \varphi + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  et il suffit alors de remarquer que  $\sqrt{5} < 3$ .  
Supposons  $F_{n+2} > \varphi^n$  et  $F_{n+3} > \varphi^{n+1}$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$F_{n+4} = F_{n+2} + F_{n+3} > \varphi^n + \varphi^{n+1} = \varphi^n(1 + \varphi) = \varphi^{n+2}$$

puisque  $\varphi^2 = 1 + \varphi$ .

Par récurrence double,  $F_{n+2} > \varphi^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

2. Posons  $d_1 = a \wedge b$  et  $d_2 = b \wedge r$ . Puisque  $d_1$  divise  $a$  et  $b$ , il divise également  $b$  et  $a - bq = r$  donc il divise  $d_2$ .  
Puisque  $d_2$  divise  $b$  et  $r$ , il divise également  $bq + r = a$  et  $b$  donc il divise  $d_1$ .  
Puisque  $d_1$  et  $d_2$  sont positifs,  $d_1 = d_2$ .  
On en déduit notamment que si  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ , alors  $a \wedge b = b \wedge r$ .

3. a.

$$154 = 48 \times 3 + 10$$

$$48 = 10 \times 4 + 8$$

$$10 = 8 \times 1 + 2$$

$$8 = 2 \times 4 + 0$$

Ainsi  $N = 4$ .

- b. D'après la question 2,  $r_k \wedge r_{k+1} = r_{k+1} \wedge r_{k+2}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ . En particulier,

$$a \wedge b = r_0 \wedge r_1 = r_N \wedge r_{N+1} = r_N \wedge 0 = r_N$$

- c. Soit  $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ . Notons  $q_k$  le quotient de la division euclidienne de  $r_k$  par  $r_{k+1}$ . Alors  $r_k = q_k r_{k+1} + r_{k+2}$ . Par définition de l'algorithme d'Euclide  $r_{k+2} < r_{k+1} < r_k$  et, puisque  $k \leq N-1$ ,  $r_{k+1} > 0$ . Donc  $q_k = \frac{r_k - r_{k+2}}{r_{k+1}} > 0$ .  
Puisque  $q_k$  est entier,  $q_k \geq 1$ . Finalement  $r_k = q_k r_{k+1} + r_{k+2} \geq r_{k+1} + r_{k+2}$  car  $q_k \geq 1$  et  $r_{k+1} \geq 0$ .
- d. On procède par récurrence double descendante finie. On note  $HR(k)$  la proposition  $r_k \geq F_{N+2-k}$ .  
**Initialisation.** On sait que  $r_N > 0$  donc  $r_N \geq 1 = F_2$ . De plus,  $r_{N-1} > r_N \geq 1$  donc  $r_{N-1} \geq 2 = F_3$ . Ainsi  $HR(N)$  et  $HR(N-1)$  sont vraies.  
**Hérédité.** Supposons  $HR(k+1)$  et  $HR(k+2)$  vraies pour un certain  $k \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket$  et montrons que  $HR(k)$  est vraie. On a alors  $r_{k+1} \geq F_{N-k}$  et  $r_{k+2} \geq F_{N-k-1}$ . D'après la question précédente,

$$r_k \geq r_{k+1} + r_{k+2} \geq F_{N-k} + F_{N-k-1} = F_{N-k+1}$$

de sorte que  $HR(k)$  est vraie.

**Conclusion.** Par récurrence descendante double finie,  $HR(k)$  est vraie pour tout  $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ .

- e. On a en particulier,  $b = r_1 \geq F_{N+1}$ . Puisque  $N \geq 2$ , on peut utiliser la question 1.b pour affirmer que  $F_{N+1} > \varphi^{N-1}$ . On a donc  $b > \varphi^{N-1}$  puis le résultat voulu par stricte croissance du logarithme.

- f. Supposons d'abord  $N \geq 2$ . Puisque  $b$  s'écrit avec au plus  $k$  chiffres en base 10,  $b < 10^k$ . La question précédente, montre alors que

$$b < k \frac{\ln 10}{\ln \varphi} + 1$$

On utilise alors l'indication de l'énoncé pour affirmer que  $b < 5k + 1$ . Mais puisque  $b$  et  $5k + 1$  sont des entiers, ceci donne  $b \leq 5k$ .

Remarquons maintenant que  $k \geq 1$  de sorte que, si  $N \leq 2$ , on a encore  $N \leq 5 \leq 5k$ .

4. a. **def** pgcd(a,b):  
    **while** b!=0:  
        a,b=b,a%b  
    **return** a
- b. **def** nb\_pgcd(a,b):  
    n=0  
    **while** b!=0:  
        a,b=b,a%b  
        n+=1  
    **return** n