

DEVOIR SURVEILLÉ N°08

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

EXERCICE 1.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (2y - 2z, x + y - 2z, x - y) \end{cases}$. On notera $\text{Id} = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

1.
 - a. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
 - b. Déterminer des bases et les dimensions de $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$. f est-il injectif, surjectif, bijectif?
 - c. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.
 - d. Soit p le projecteur sur $\text{Im } f$ parallèlement à $\text{Ker } f$. Calculer $p((x, y, z))$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $f^2((x, y, z))$ et $f^3((x, y, z))$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. En déduire que $f^3 - f^2 - 2f = 0$.
3. Soit $q = -\frac{1}{2}(f^2 - f - 2\text{Id})$.
 - a. Montrer que q est un projecteur.
 - b. Calculer $q \circ f$ et $f \circ q$.
 - c. Montrer que $\text{Ker } q = \text{Im } f$ et que $\text{Im } q = \text{Ker } f$.
 - d. En déduire que $p + q = \text{Id}$.
4. Soient $r = \frac{1}{6}(f^2 + f)$ et $s = \frac{1}{3}(f^2 - 2f)$.
 - a. Montrer que r et s sont des projecteurs.
 - b. Vérifier que $r \circ s = s \circ r = 0$.
 - c. Montrer que $f \circ r = r \circ f = 2r$ et que $f \circ s = s \circ f = -s$.
 - d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = 2^n r + (-1)^n s$.
 - e. En déduire l'expression de $f^n(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Soient (x_n) , (y_n) et (z_n) trois suites vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n \end{cases}$$

- a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_n, y_n, z_n) = f^n((x_0, y_0, z_0))$.
- b. En déduire les expressions de x_n , y_n et z_n en fonction de x_0 , y_0 , z_0 et $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 2.

On note \mathcal{E} l'ensemble des applications continues sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Pour tout élément f de \mathcal{E} , on note $U(f)$ l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

1. Soit $f \in \mathcal{E}$, T -périodique ($T > 0$). Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

2. Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} . Montrer que si f est T -périodique, alors il en est de même de f' .
Montrer que la réciproque est fausse.

3. Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que $U(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

4. Montrer que U est un endomorphisme de \mathcal{E} .

5. Justifier que si $f \in \text{Ker } U$, alors

(i) $\int_0^1 f(t) dt = 0;$

(ii) f est périodique de période 1.

6. Le noyau de U est-il l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{E}$ périodiques de période 1 telles que $\int_0^1 f(t) dt = 0$?

7. L'endomorphisme U est-il injectif? surjectif?

8. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f_a : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{at}$.

- a. Déterminer $F_a = U(f_a)$.

- b. Soit la fonction $g : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. On note encore g son prolongement. Dresser le tableau de variations de g .

- c. Montrer que pour tout réel λ strictement positif, l'endomorphisme $U - \lambda \text{Id}_{\mathcal{E}}$ n'est pas injectif.

EXERCICE 3.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension d . On se donne un endomorphisme f de E et un vecteur non nul $x \in E$. On définit alors une suite de vecteurs $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose alors $E_x = \text{vect}(x_n, n \in \mathbb{N})$.

1. Montrer que E_x est stable par f .
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant x et stable par f . Montrer que $E_x \subset F$.
3. Soit p le plus grand entier naturel non nul tel que (x_0, \dots, x_{p-1}) est une famille libre.
 - a. Justifier l'existence d'un tel entier p .
 - b. Montrer qu'il existe des réels a_0, \dots, a_{p-1} tels que $x_p = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x_k$.
 - c. On note $F_x = \text{vect}(x_0, \dots, x_{p-1})$. Montrer que F_x est stable par f .
 - d. En déduire que $E_x = F_x$ et que (x_0, \dots, x_{p-1}) est une base de E_x .
4. On note g l'endomorphisme de E_x induit par f . Montrer que $(\text{Id}_{E_x}, g, g^2, \dots, g^{p-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E_x)$.
5. En déduire que $g^p = \sum_{k=0}^{p-1} a_k g^k$.