Exercice 1 **Lemme de Borel-Cantelli et loi du zéro-un de Borel**

Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose $\mathrm{B}_n = \bigcup_{k\geq n} \mathrm{A}_k$ et $\mathrm{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n$.

1. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ converge.

a. Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$.

b. En déduire que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 0$.

2. On suppose que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ diverge.

a. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{\mathrm{A}_k}\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)\right)$$

b. En déduire que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1$.

Exercice 2 ★★★ **BECEAS MP 2019**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires réelles définies sur cet espace.
Montrer que $\mathrm{A} = \left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to+\infty} \mathrm{X}_n(\omega) = 0\right\}$ est un événement.

Exercice 3 ★★

Deux archers A_1 et A_2 sont en compétition : ils tirent alternativement (A_1 aux rangs impairs, A_2 aux rangs pairs), touchant la cible avec probabilité p_i ($i = 1, 2$), et la partie s'arrête dès que l'un des deux a atteint la cible.

1. Quelle est la probabilité que A_1 l'emporte au tour $2n + 1$?

2. Quelle est la probabilité que A_2 l'emporte au tour $2n + 2$?

3. En déduire les probabilités que A_1 (resp A_2) l'emporte, et celle que le jeu dure indéfiniment.

4. A quelle condition le jeu est-il équitable ? Est-ce le cas si $p_1 > 1/2$?

Exercice 4 **D'après ESCP 2006**

Des joueurs $\mathrm{J}_1, \dots, \mathrm{J}_n$ jouent successivement l'un après l'autre à un jeu indéterminé jusqu'à ce que l'un des joueurs gagnent (si aucun des joueurs n'a gagné lors du premier tour, on recommence un tour et ainsi de suite). On considère qu'à chaque fois que le joueur J_k joue, il a une probabilité $p_k > 0$ de gagner. On pose également $q_k = 1 - p_k$. On note G_k l'événement «le joueur J_k gagne».

1. Exprimer la probabilité de G_k en fonction de $q_1, \dots, q_n$ et p_k.

2. Montrer que le jeu se finit presque sûrement i.e. avec une probabilité 1.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le jeu soit équitable i.e. que chaque joueur ait une probabilité $1/n$ de gagner.

4. Déterminer le nombre moyen de coups joués lors d'une partie.

Probabilités conditionnelles

Exercice 5

On dispose initialement d'une fleur F_0 qui meurt à l'instant 1 en ayant deux descendances avec probabilité p, ou aucune. Chaque nouvelle fleur suit le même destin, les unes indépendamment des autres. On note D_n : «la lignée de F_0 est éteinte à l'instant n (ou avant)» et p_n sa probabilité.

1. Calculer p_0 et p_1.

2. Justifier que la suite (p_n) converge.

3. Prouver que $p_{n+1} = pp_n^2 + 1 - p$.

4. Déterminer la limite de (p_n).

5. Déterminer une expression de p_n en fonction de n et p.

Exercice 6

On lance une pièce de monnaie et on gagne un point si pile apparaît (avec probabilité p), deux points si c'est face (avec probabilité $q = 1 - p$). Le jeu s'arrête dès qu'on a atteint ou dépassé n, et l'on s'intéresse à la probabilité g_n qu'on ait marqué n points exactement. Prouver la relation $g_{n+2} = pg_{n+1} + qg_n$ et en déduire g_n en fonction de n.

Variables aléatoires

Exercice 7 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $\mathbb{P}(X = k) = r \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^r \, dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que cette relation définit bien la loi d'une variable aléatoire.
2. Donner une condition sur r pour que l'espérance soit définie et la calculer.

Lois usuelles

Exercice 8

Soient X et Y deux variables aléatoires suivant des lois de Poisson telles que X + Y suit une loi de Poisson.

1. Montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
2. X et Y sont-elles nécessairement indépendantes ?

Exercice 9 ★★★★ **ENS MP 2018**

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que XY suit une loi de Poisson. Montrer que X ou Y est presque sûrement à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Espérance et variance

Exercice 10 **Centrale MP 2016**

1. Pour $(x, t) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}$, montrer que
$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}$$
2. Soit X une variable aléatoire discrète centrée telle que $|X| \leq 1$. Montrer que e^{tX} admet une espérance et que
$$E(e^{tX}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$
3. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes centrées et $a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ |X_i| \leq a_i$$
et on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$
4. On pose $s = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$. Montrer que
$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \ \mathbb{P}(|S_n| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2s}}$$

Exercice 11 ★★★★ **Centrale MP 2015**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{E}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite d'événements quelconques. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathrm{E}_n)$ converge.

Pour X un ensemble, on note $\mathbb{1}_{\mathrm{X}}$ la fonction indicatrice de X.

1. Soit $\mathrm{Z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathrm{E}_n}$ (on convient que $\mathrm{Z} = \infty$ si la série diverge). Montrer que Z est une variable aléatoire. Prouver que Z est une variable aléatoire.

2. Soit
$$\mathrm{F} = \{\omega \in \Omega,\ \omega \text{ appartient à un nombre fini de } \mathrm{E}_n\}$$
Prouver que F est un événement et que $\mathbb{P}(\mathrm{F}) = 1$.

3. Prouver que Z admet une espérance.

Fonctions génératrices

Exercice 12

Soient $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Déterminer la loi de $\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$.

Inégalités

Exercice 13 **Inégalité de Hoeffding**

On considère une variable aléatoire discrète X *centrée* et à valeurs dans $[-1, 1]$.

1. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in [-1,1],\ e^{tx} \leq \frac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)e^{t}$$

2. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

3. En déduire que
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}(e^{t\mathrm{X}}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

On considère une variable aléatoire réelle discrète Y.

4. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(\mathrm{Y} \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon}\mathbb{E}(e^{t\mathrm{Y}})$$

On considère maintenant des variables aléatoires discrètes réelles centrées $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ indépendantes telles que $|\mathrm{X}_k| \leq c_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ ($c_k > 0$). On pose $\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$.

5. Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\mathbb{P}(|\mathrm{S}| \geq \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right)$$

Temps d'arrêt

Exercice 14 **ENS Ulm MPI 2019**

On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que le nombre de «piles» soit égal au double du nombre de «faces». Quelle est la probabilité qu'on ne s'arrête jamais ?

Exercice 15 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

On considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0,1[$.
Soit $r\in\mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire

$$T_r = \min\left(\left\{n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{i=1}^{n} X_i = r\right\}\bigcup\{+\infty\}\right)$$

1. Pour $r=1$, reconnaître la loi de T_r.
2. Calculer $P(T_r=n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
3. Montrer que l'évènement $(T_r=+\infty)$ est négligeable.