Séries et familles sommables

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Compléments sur les séries numériques

1.1 Comparaison à une série géométrique

Proposition 1.1 Règle de d'Alembert

Soit (a_n) une suite de **réels strictement positifs** (au moins à partir d'un certain rang).

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, alors $\sum a_n$ converge.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, alors $\sum a_n$ diverge grossièrement.

Exemple 1.1

La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{n^n}$ converge.

Exemple 1.2 Série exponentielle

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série exponentielle $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument.

Remarque. On ne peut a priori pas conclure si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ ou si la suite de terme général $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'admet pas de limite.

Exemple 1.3

Posons $a_n = 1$ et $b_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$ mais $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge tandis que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ converge.

Attention ! Il s'agit bien de **limites** dans l'énoncé de la règle de d'Alembert. Le fait d'avoir $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ou $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ne permet pas de conclure. En prenant $a_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ mais la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ diverge.

Corollaire 1.1

Soit (a_n) une suite de réels non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, alors $\sum a_n$ converge absolument.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, alors $\sum a_n$ diverge grossièrement.

1.2 Séries alternées

Proposition 1.2 Critère spécial des séries alternées

Soit (u_n) une suite monotone (à partir d'un certain rang) et de limite nulle. Alors la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Remarque. Ce critère est utile pour montrer la convergence de série non absolument convergent. Il serait par exemple ridicule d'invoquer ce résultat pour justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$. Il suffit en effet de constater que $\dfrac{(-1)^n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exemple 1.4

La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Exemple 1.5

On souhaite étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.

Bien entendu, $\sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge car elle respecte le critère spécial des séries alternées. Mais on ne peut pas utiliser le théorème de comparaison car il ne s'agit pas là de séries à **termes positifs**.
Néanmoins, comme $\sin u \underset{u\to0}{=} u + \mathcal{O}(u^3)$,

$$\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge car elle respecte le critère spécial des séries alternées et la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge également. On en déduit que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ converge en tant que somme de deux séries convergentes.

Exercice 1.1

Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Proposition 1.3 Majoration du reste d'une série alternée

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite monotone de limite nulle. On note R_n le reste d'ordre n de la série $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n u_n$ i.e. $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$. Alors pour tout $n \geq n_0 - 1$,

- R_n est du signe de $(-1)^{n+1} u_{n+1}$;
- $|\mathrm{R}_n| \leq |u_{n+1}|$.

Remarque. En français : le reste d'une série vérifiant le critère des séries alternées est du même signe que son premier terme et est majoré en valeur absolue par la valeur absolue de ce premier terme.

Exemple 1.6

Considérons la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ avec $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. D'après le critère spécial des séries alternées, cette série converge. Notons S sa somme et $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

- Alors $\mathrm{S} = \mathrm{R}_0$ donc S est du signe de u_1 et $|\mathrm{S}| \leq |u_1|$. On en déduit que $0 \leq \mathrm{S} \leq u_1 = 1$.
- On peut affiner l'encadrement. En effet, R_1 est du signe de u_2 et $|\mathrm{R}_1| \leq |u_2|$ donc $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \mathrm{R}_1 \leq 0$. Comme $\mathrm{S} = u_1 + \mathrm{R}_1$, $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \mathrm{S} \leq 1$.
- On peut encore aller plus loin. R_2 est du signe de u_3 et $|\mathrm{R}_2| \leq |u_3|$ donc $0 \leq \mathrm{R}_2 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Comme $\mathrm{S} = u_1 + u_2 + \mathrm{R}_2$, $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \mathrm{S} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

1.3 Comparaison série-intégrale

Proposition 1.4

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une application continue par morceaux et décroissante. Alors la série de terme général $\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ converge.

Exemple 1.7 Constante γ d'Euler

Si l'on considère l'application $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{1}{x}$, on peut montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
En effet, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) = \ln(n) - \ln(n-1) - \frac{1}{n}$$

La série $\sum \ln(n) - \ln(n-1) - \dfrac{1}{n}$ converge donc vers un réel C. En termes de sommes partielles,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1) - \frac{1}{k} = \mathrm{C}$$

On a alors le résultat voulu en posant $\gamma = 1 - \mathrm{C}$.

Corollaire 1.2

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une application continue par morceaux et décroissante. Alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

1.4 Sommation des relations de comparaison

Proposition 1.5

Soient $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques. On suppose de plus que (v_n) est **à termes positifs** à partir d'un certain rang.

Domination On suppose que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

- Si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
- Si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

Négligeabilité On suppose que $u_n = o(v_n)$.

- Si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
- Si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

Equivalence On suppose que $u_n \sim v_n$.

- Si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.
- Si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge, alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Attention ! Il est essentiel que la suite de référence soit de signe constant à partir d'un certain rang.

Remarque. Dans les cas de convergence, les résultats restent vrais même si les sommes partielles débutent à un indice non nul.

Lemme de Césaro

Soit (u_n) est une suite numérique convergente de limite ℓ. Posons $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (suite des moyennes).

- Si $\ell \neq 0$, $u_n \sim \ell$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell$ diverge. Ainsi $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} \ell = (n+1)\ell$ i.e. $v_n \sim \ell$. Donc (v_n) converge vers ℓ.
- Si $\ell = 0$, $u_n = o(1)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1$ diverge. Ainsi $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right)$ i.e. $v_n = o(1)$. Donc (v_n) converge vers 0.

Dans les deux cas, (v_n) est de même limite que (u_n).

Exemple 1.8

On veut déterminer un équivalent de la somme partielle de la série harmonique. On remarque que

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs divergente

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Exemple 1.9

On veut déterminer un équivalent du reste de la série $\sum \frac{1}{n^2}$. On remarque que

$$\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est un série à termes positifs convergente donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{n}$$

Exercice 1.2

On pose $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que
$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$
2. Montrer que
$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right)$$

2 Familles sommables

2.1 Ensembles dénombrables

Définition 2.1 Ensemble dénombrable

Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Proposition 2.1

Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Exemple 2.1

L'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs sont dénombrables.

Proposition 2.2

Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement si il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Exercice 2.1

Soit A un ensemble. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) A est dénombrable ;

(ii) il existe une injection de A dans un ensemble dénombrable ;

(iii) il existe une surjection d'un ensemble dénombrable sur A.

Proposition 2.3 Opération sur les ensembles dénombrables

- Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Corollaire 2.1

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Proposition 2.4

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

2.2 Familles sommables

Définition 2.2 Famille sommable de réels positifs

Soit J un ensemble **dénombrable** et $(u_j)_{j\in\mathrm{J}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathrm{J}}$ une famille de réels **positifs**. Notons $\mathcal{P}_f(\mathrm{J})$ l'ensemble des parties finies de J.

On dit que la famille $(u_j)_{j\in\mathrm{J}}$ est **sommable** si l'ensemble $\left\{\sum_{j\in\mathrm{K}} u_j,\ \mathrm{K}\in\mathcal{P}_f(\mathrm{J})\right\}$ est majoré. Dans ce cas, définit la somme de la famille $(u_j)_{j\in\mathrm{J}}$ par

$$\sum_{j\in\mathrm{J}} u_j = \sup\left\{\sum_{j\in\mathrm{K}} u_j,\ \mathrm{K}\in\mathcal{P}_f(\mathrm{J})\right\}$$

Remarque. Autrement dit, une famille est sommable si les sommes de ses sous-familles finies sont majorées.

Remarque. Toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.

Exemple 2.2

Soit $q \in [0,1[$. La famille $\left(q^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. En effet, si J est une partie finie de $\mathbb{Z}$, il existe $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$ tel que $\mathrm{J}\subset [\![-\mathrm{N},\mathrm{N}]\!]$. Alors

$$\sum_{n\in\mathrm{J}} q^{|n|} \le \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} q^{|n|} = 1 + 2q\frac{1-q^{\mathrm{N}}}{1-q} \le 1 + \frac{2q}{1-q} = \frac{1+q}{1-q}$$

La somme de la famille $\left(q^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est $\dfrac{1+q}{1-q}$ puisque

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} q^{|n|} = \frac{1+q}{1-q}$$

Exemple 2.3

La famille $\left(\dfrac{1}{pq}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ n'est pas sommable. En effet, posons $\mathrm{J}_\mathrm{N} = [\![1,\mathrm{N}]\!]^2$ pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum_{(p,q)\in\mathrm{J}_\mathrm{N}} \frac{1}{pq} = \left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n}\right)^2 \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

puisque la série harmonique diverge vers $+\infty$.

Définition 2.3 Famille sommable de réels

Soient J un ensemble **dénombrable** et $(u_j)_{j\in\mathrm{J}} \in \mathbb{R}^{\mathrm{J}}$ une famille de réels. On dit que la famille $(u_j)_{j\in\mathrm{J}}$ est sommable si la famille $(|u_j|)_{j\in\mathrm{J}}$ l'est.

Rappel **Parties positive et négative d'un réel**

Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $x^+ = \max(0,x)$ et $x^- = \max(0,-x)$. Alors $x = x^- x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Proposition 2.5

La famille $(u_j)_{j\in\mathrm{J}} \in \mathbb{R}^{\mathrm{J}}$ est sommable si et seulement si les familles $(u_j^+)_{j\in\mathrm{J}}$ et $(u_j^-)_{j\in\mathrm{J}}$ sont sommables.

Définition 2.4 Somme d'une famille de réels

Soit $(u_j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^J$ une famille sommable. On définit la somme de la famille $(u_j)_{j\in J}$ en posant

$$\sum_{j\in J} u_j = \sum_{j\in J} u_j^+ - \sum_{j\in J} u_j^-$$

Définition 2.5 Famille sommable de complexes

Soient J un ensemble **dénombrable** et $(u_j)_{j\in J} \in \mathbb{C}^J$ une famille de complexes. On dit que la famille $(u_j)_{j\in J}$ est sommable si la famille $(|u_j|)_{j\in J}$ l'est.

Proposition 2.6

La famille $(u_j)_{j\in J} \in \mathbb{C}^J$ est sommable si et seulement si les familles $(\mathrm{Re}(u_j))_{j\in J}$ et $(\mathrm{Im}(u_j))_{j\in J}$ sont sommables.

Définition 2.6 Somme d'une famille de complexes

Soit $(u_j)_{j\in J} \in \mathbb{C}^J$ une famille sommable. On définit la somme de la famille $(u_j)_{j\in J}$ en posant

$$\sum_{j\in J} u_j = \sum_{j\in J} \mathrm{Re}(u_j) + i \sum_{j\in J} \mathrm{Im}(u_j)$$

Exemple 2.4

Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. Alors la famille $\left(q^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable de somme $\dfrac{1+q}{1-q}$.

Proposition 2.7 Linéarité de la somme

Soient J un ensemble dénombrable ainsi que $(u_j)_{j\in J}$ et $(v_j)_{j\in J}$ deux familles de complexes. Si les familles $(u_j)_{j\in J}$ et $(v_j)_{j\in J}$ sont sommables, alors pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$,

- la famille $(\lambda u_j + \mu v_j)_{j\in J}$ est sommable ;
- $\displaystyle\sum_{j\in J} \lambda u_j + \mu v_j = \lambda \sum_{j\in I} v_j + \mu \sum_{j\in J} v_j$.

Proposition 2.8 Lien entre série et famille sommable

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique. La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument. Dans ce cas, la somme de la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Remarque. Dans le cadre des séries, la notation $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ peut être ambiguë puisqu'elle peut donc désigner à la fois une série (i.e. la suite des sommes partielles) et la somme de la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 2.9 Sommation par paquets

Soient $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition d'un ensemble dénombrable J et $(u_j)_{j\in\mathrm{J}} \in \mathbb{K}^{\mathrm{J}}$. Alors la famille $(u_j)_{j\in\mathrm{J}}$ est sommable si et seulement si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_j)_{j\in\mathrm{J}_n}$ est sommable ;
- la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j\in\mathrm{J}_n} |u_j|\right)$ converge ;

Dans ce cas,

- la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j\in\mathrm{J}_n} u_j\right)$ converge ;
- $\sum_{j\in\mathrm{J}} u_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j\in\mathrm{J}_n} u_j\right)$.

Exemple 2.5 Produit de deux familles sommables

Soient $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(v_j)_{j\in\mathrm{J}}$ deux familles sommables où I et J sont deux ensembles dénombrables. Il existe donc une bijection φ de $\mathbb{N}$ dans I. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{J}_n = \{\varphi(n)\} \times \mathrm{J}$.

- On vérifie que $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i v_j)_{(i,j)\in\mathrm{J}_n}$ est sommable puisque la famille $(u_{\varphi(n)} v_j)_{j\in\mathrm{J}}$ l'est et
$$\mathrm{S}_n = \sum_{(i,j)\in\mathrm{J}_n} |u_i v_j| = |u_{\varphi(n)}| \sum_{j\in\mathrm{J}} |v_j| = \mathrm{S}|u_{\varphi(n)}|$$
en posant $\mathrm{S} = |\sum_{j\in\mathrm{J}} |v_j|$.
- La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{S}_n$ converge car la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_{\varphi(n)}|$ converge.

Le théorème de sommation par paquets permet alors d'affirmer que la famille $(u_i v_j)_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ est sommable. De plus,

$$\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} u_i v_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{(i,j)\in\mathrm{J}_n} u_i v_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j\in\mathrm{J}} u_{\varphi(n)} v_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j\in\mathrm{J}} v_j\right) u_{\varphi(n)} = \left(\sum_{j\in\mathrm{J}} v_j\right) \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = \left(\sum_{j\in\mathrm{J}} v_j\right)\left(\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i\right)$$

Remarque. Par récurrence, le résultat précédent s'étend à un produit de plus de deux familles sommables.

Exemple 2.6

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. On souhaite montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1-z}$$

La famille $\left(\dfrac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable puisque la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}$ converge absolument (en utilisant la règle de d'Alembert, par exemple).
Fixons $n \in \mathbb{N}$. En faisant intervenir une série géométrique,

$$\frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose alors $\mathrm{J}_n = \{2^n(2k+1),\ k \in \mathbb{N}\}$. En partitionnant $\mathbb{N}^*$ suivant la valuation 2-adique, on montre que $(\mathrm{J}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^*$. Le théorème de sommation par paquets permet alors d'affirmer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)} = \sum_{j=1}^{+\infty} z^j$$

Ce qui peut encore s'écrire d'après ce qui précède et en reconnaissant dans le second membre la somme d'une série géométrique :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1-z}$$

Proposition 2.10 Invariance par permutation des indices

Soient J un ensemble dénombrable, $(u_j)_{j \in \mathrm{J}} \in \mathbb{K}^{\mathrm{J}}$ et φ une permutation de J. Alors $(u_j)_{j \in \mathrm{J}}$ est sommable si et seulement si $(u_{\varphi(j)})_{j \in \mathrm{J}}$ l'est également et, dans ce cas,

$$\sum_{j \in \mathrm{J}} u_{\varphi(j)} = \sum_{j \in \mathrm{J}} u_j$$

Attention ! Dans le cadre des séries, cela ne veut pas dire que la somme d'une série convergente est invariante par permutation des indices. Considérons la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. On montre facilement que cette série converge vers $\ln 2$. Considérons la permutation de φ de $\mathbb{N}^*$ telle que $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 2$, $\varphi(3) = 4$, $\varphi(4) = 3$, $\varphi(5) = 6$, $\varphi(6) = 8$, $\varphi(7) = 5$, …(un impair, deux pairs, un impair, deux pairs, …).

2.3 Séries doubles

Proposition 2.11 Interversion de sommes

Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^2}$. La famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{m\in\mathbb{N}} |a_{m,n}|$ converge ;
- la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |a_{m,n}|\right)$ converge.

Dans ce cas, on a la relation suivante dans laquelle la convergence des différentes séries est assurée :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}$$

Attention ! On ne peut pas toujours permuter l'ordre de sommation. Par exemple, en prenant

$$a_{p,q} = \frac{2p+1}{p+q+2} - \frac{p}{p+q+1} - \frac{p+1}{p+q+3}$$

On obtient

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = 1$$

Définition 2.7 Produit de Cauchy

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{l=0}^{n} a_{n-k} b_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.12

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ deux séries numériques **absolument convergentes**. Alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ est une série absolument convergente. De plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

Exemple 2.7

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{n!}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{b^n}{n!}$ sont absolument convergentes de sommes respectives e^a et e^b. On vérifie facilement que leur produit de Cauchy est $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(a+b)^n}{n!}$. On en déduit que $e^{a+b} = e^a e^b$.