

## Sommes de termes d'une suite arithmétique ou géométrique

### Exercice 1 ★

Calculer les sommes suivantes.

$$1. S_n = \sum_{k=2}^{n-1} 3k - 2$$

$$3. U_n = \sum_{k=n-2}^{n+5} 2 - k$$

$$2. T_n = \sum_{k=-1}^{n+1} 2k - 1$$

$$4. V_n = \sum_{k=n}^{2n} k - 1$$

### Exercice 2 ★

Calculer les sommes suivantes.

$$1. S_n = \sum_{k=2}^{n-1} 3^{k-2}$$

$$3. U_n = \sum_{k=n-2}^{n+5} \frac{4}{2^k}$$

$$2. T_n = \sum_{k=-1}^{n+1} 2^{k-1}$$

$$4. V_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{2^{k-1}}{3^{k+2}}$$

## Techniques de calcul

### Exercice 3 ★

Calculer, pour tout entier non nul  $n$ ,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + 1/k)$$

au moyen d'un télescope.

### Exercice 4

Simplifier les sommes suivantes,

$$1. \sum_{k=p}^q (u_{k+1} - u_k);$$

$$2. \sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1}).$$

### Exercice 5 ★

Calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$4. \sum_{k=0}^n (k+2) 2^k$$

$$2. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$5. \sum_{k=1}^n \ln(1 + 1/k)$$

$$3. \sum_{k=1}^n k \cdot k!$$

$$6. \sum_{k=0}^n 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(kx)$$

### Exercice 6 ★

#### Sommation par paquets

Simplifier la somme

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$$

en sommant par paquets.

### Exercice 7 ★

#### Un changement d'indice

Calculer la somme  $\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$ .

**Exercice 8 ★**

Vérifier que

$$\sum_{k=1}^n k 2^k = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} 2^k$$

et calculer une expression simple de cette somme en permutant l'ordre des sommations dans la somme double.

**Exercice 9 ★★**

Simplifier la somme

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right).$$

**Exercice 10 ★**

On utilise une décomposition de la fraction en éléments simples.

1. Montrer qu'il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\forall t > 1, \quad \frac{1}{t^2-1} = \frac{\alpha}{t-1} + \frac{\beta}{t+1}.$$

2. En déduire une simplification de la somme

$$v_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2-1}.$$

**Exercice 11 ★★****Sommation d'Abel**

Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites complexes. On définit deux suites  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \sum_{k=0}^n a_k, b_n = B_{n+1} - B_n$$

1. Montrer que  $\sum_{k=0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$ .

2. Application : calcul de  $\sum_{k=0}^n 2^k k$ .

**Exercice 12 ★★**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On pose  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n k x^k$ . On cherche à calculer  $S_n(x)$  de deux manières :

1. en introduisant  $T_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ ;

2. en calculant dans un premier temps  $(x-1)S_n(x)$ .

**Formule du binôme****Exercice 13 ★**

Simplifier, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} 3^{n-k+1} \binom{n}{k}.$$

**Exercice 14 ★★**

Pour tous  $n$  et  $p$  dans  $\mathbb{N}$ , établir que l'on a

$$\sum_{k=0}^p \binom{n+k}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$

**Exercice 15 ★★**

Calculer les sommes suivantes

1.  $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$ .

2.  $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{2n}{2k}$ .

**Exercice 16 ★★★**

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

1. Calculer  $S_1 = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$  et  $S_2 = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k$ .
2. En déduire  $T_1 = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$  et  $T_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$ .
3. Calculer  $U_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k}$  et  $U_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k+1}$ . On pourra, si on le souhaite, s'inspirer des questions précédentes.
4. A l'aide des changements d'indices  $\ell = n - k$  et  $\ell = n - 1 - k$ , calculer  $V_1 = \sum_{k=0}^n k \binom{2n}{2k}$  et  $V_2 = \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{2n}{2k+1}$ .
5. Calculer enfin  $W_1 = \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{2n-1}{2k}$  et  $W_2 = \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{2n-1}{2k+1}$ .

**Sommes doubles****Exercice 17 ★★**

Calculer les sommes suivantes :

1.  $U_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$ .
2.  $V_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$ .
3.  $W_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |i - j|$ .
4.  $X_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i$ .
5.  $Y_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$ .

**Exercice 18 ★★**

En permutant l'ordre des sommations, démontrer l'égalité

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=n+1}^N \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}.$$

**Exercice 19 ★**

Sommes doubles.

1. Calculer la somme double

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j).$$

2. Calculer la somme double

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij.$$

**Exercice 20 ★**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Simplifier

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j}.$$

**Exercice 21 ★**

Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = \sum_{k=1}^n S_k.$$

Établir que

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = (n+1)S_n - n.$$

**Exercice 22 ★**

Vérifier que

$$\sum_{k=1}^n k 2^k = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} 2^k$$

et calculer une expression simple de cette somme en permutant l'ordre des sommations dans la somme double.

**Exercice 23 ★★**

On pose pour  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ ,  $S_p(n) = \sum_{k=0}^n k^p$ .

$$\sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} S_j(n) = (n+1)^{p+1}$$

**Produits****Exercice 24 ★**

Simplifier le produit suivant :

$$P = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

**Exercice 25 ★★**

Soient

$$V = \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij, \quad W = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} ij, \quad X = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$$

$$Y = \prod_{1 \leq j \leq i \leq n} ij, \quad Z = \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij.$$

Calculer V. En déduire W. Exprimer W en fonction de X et Y. Montrer, sans calcul, que  $X = Y$ . En déduire X puis Z.

**Exercice 26 ★**

Simplifier le produit

$$\prod_{k=1}^n 2^{1/k(k+1)}.$$

**Exercice 27 ★****Calcul d'un produit infini**

Pour tout  $n \geq 2$ , on pose

$$u_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}.$$

1. Déterminer une suite d'entiers relatifs  $(v_k)_{k \geq 1}$  telle que

$$\forall k \geq 2, \quad \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{k-1}{k+1} \times \frac{v_k}{v_{k-1}}.$$

2. En déduire une simplification de  $u_n$ .
3. En déduire la limite de  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

**Exercice 28 ★★★**

Soit  $\alpha \in ]0, \pi[$ . Simplifier le produit  $P_n = \prod_{k=0}^n \cos \frac{\alpha}{2^k}$ . En déduire la limite de  $P_n$ .

**Systèmes linéaires****Exercice 29**

Résoudre

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x - 2y + z - t = 1 \\ x + y + 2z + t = -1 \end{cases}$$

**Exercice 30 ★**

Résoudre

$$\begin{cases} -3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 8x_1 - 24x_2 + 4x_3 - 12x_4 - 4x_5 = -8 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_4 + 7x_5 = 10 \end{cases}$$

**Exercice 31 ★**

Résoudre selon les valeurs des paramètres  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

**Exercice 32 ★★**

Pour tout  $a \in \mathbb{R}$  on note  $E_a$  l'ensemble de solutions du système suivant.

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 2 \\ ax + 3y - z = 3 \\ 5x - 8y + z = -9 \end{cases}$$

Pour quels  $a \in \mathbb{R}$  est-ce que  $E_a$  est vide ? contient un unique élément ? contient une infinité d'éléments ?

**Exercice 33 ★**

Résoudre le système

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 2y - z = -2 \\ -x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

**Exercice 34**

Résoudre le système

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 2y - z = -2 \\ -x - y + \frac{1}{2}z = 4 \end{cases}$$

**Exercice 35 ★★**

Déterminer les valeurs de  $a$  pour lesquelles le système

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3. \end{cases}$$

1. possède une seule solution,
2. ne possède pas de solution,
3. possède une infinité de solutions.

**Exercice 36 ★**

Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = -4 \\ 3x + 2y - 3z = 17 \\ 5x - 3y + 8z = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - 3z = 2 \\ -x + 6y - 11z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - z = -2 \\ x + y + z = 2 \\ -2x + 4y - 5z = -10. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - 5z = 3 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \\ x + y - 7z = 2 \\ 2x - 3y + 8z = 5. \end{cases}$$

**Trigonométrie****Exercice 37 ★**

Simplifier le produit  $p = \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) \sin\left(\frac{3}{14}\pi\right) \sin\left(\frac{5}{14}\pi\right)$  en le multipliant par  $\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$ .

**Exercice 38 ★**

On cherche à calculer  $\cos(\pi/5)$  et  $\sin(\pi/5)$ .

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos(3x) = \sin(2x)$ .
2. En déduire les valeurs de  $\sin(x)$  et  $\cos(x)$  pour  $x = \pi/5$ .

**Exercice 39 ★**

Calculer

$$\alpha = \frac{1}{\sin(\pi/18)} - \frac{\sqrt{3}}{\cos(\pi/18)}.$$

**Exercice 40 ★★**

On pose

$$p = \cos(\pi/7) \cos(2\pi/7) \cos(4\pi/7),$$

et

$$s = \cos(2\pi/7) + \cos(4\pi/7) + \cos(6\pi/7).$$

1. Simplifier  $p \sin(\pi/7)$ . En déduire la valeur de  $p$ .
2. Calculer  $s$  à l'aide de la première question.

**Exercice 41 ★**

Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

1.  $\frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = \tan(x/2)$ ;
2.  $\sin(x - 2\pi/3) + \sin(x) + \sin(x + 2\pi/3) = 0$ ;
3.  $\tan(\pi/4 + x) + \tan(\pi/4 - x) = \frac{2}{\cos(2x)}$ ;
4.  $\frac{1}{\tan(x)} - \tan(x) = \frac{2}{\tan(2x)}$ .

**Exercice 42 ★**Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\sin(x) + \sin(5x) = \sqrt{3} \cos(2x)$ ; | 4. $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$ ; |
| 2. $\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x)$ ;          | 5. $\sin(2x) + \sin(x) = 0$ ;            |
| 3. $2 \sin^2(x) + \sin^2(2x) = 2$ ;           | 6. $12 \cos^2(x) - 8 \sin^2(x) = 2$ .    |

**Exercice 43 ★★**Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $\sin 5x \leq \sin x$ .