Devoir à la maison n°16 : corrigé

Problème 1 — D'après Centrale MP 1996

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - \lambda F(x+a) = f(x) \tag{$\star$}$$

Partie I – Questions préliminaires

1. Soit φ constante sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|\varphi(x) - \varphi(y)| = 0 \leqslant K|x - y|$ quelque soit $K \in \mathbb{R}_+$. Ainsi $\varphi \in \mathcal{L}$.

2. cos et sin sont dérivables à dérivées bornées donc lipschitziennes.

3. Par définition, $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$. La fonction nulle est constante donc lipschitzienne.
Soient $(\varphi, \psi) \in \mathcal{L}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Il existe $(K, L) \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant K|x - y| \qquad \text{et} \qquad |\psi(x) - \psi(y)| \leqslant L|x - y|$$

Par inégalité triangulaire, our tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|(\lambda\varphi+\mu\psi)(x)-(\lambda\varphi+\mu\psi)(y)| = |\lambda(\varphi(x)-\varphi(y))+\mu(\psi(x)-\psi(y))| \leqslant |\lambda||\varphi(x)-\varphi(y)|+|\mu||\psi(x)-\psi(y)| \leqslant (|\lambda|K+|\mu|L)|x-y|$$

On a donc bien $\lambda\varphi + \mu\psi \in \mathcal{L}$.
$\mathcal{L}$ est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

4. Puisque $\varphi \in \mathcal{L}$, il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant K|x - y|$$

En particulier,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |\varphi(t) - \varphi(0)| \leqslant K|t|$$

Par inégalité triangulaire,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |\varphi(t)| \leqslant K|t| + |\varphi(0)|$$

Il suffit alors de poser $A = K$ et $B = |\varphi(0)|$.

5. **a.** C'est du cours.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

b. Par croissance comparées, $q^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ donc $nq^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente à termes positifs, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} nq^n$ converge.

6. **a.** Puisque $|\lambda e^{ia}| = |\lambda| < 1$, la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n e^{nia}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n e^{ina} = \frac{1}{1-\lambda e^{ia}}$. Par conséquent, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n e^{i(x+na)}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n e^{i(x+na)} = \frac{e^{ix}}{1-\lambda e^{ia}}$.

b. Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n \cos(x+na)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n \sin(x+na)$ sont les parties réelle et imaginaire de la série convergente $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n e^{i(x+na)}$ donc ce sont des séries convergentes. De plus, leurs sommes sont respectivement les parties réelle et imaginaire de $\frac{e^{ix}}{1-\lambda e^{ia}}$. Or

$$\frac{e^{ix}}{1-\lambda e^{ia}} = \frac{e^{ix}(1-\lambda e^{-ia}}{(1-\lambda e^{ia})(1-\lambda e^{-ia})} = \frac{e^{ix}-\lambda e^{i(x-a)}}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}$$

On en déduit les résultats demandés.

Partie II – Etude de $(\star)$ lorsque f est nulle et $|\lambda| \neq 1$

On suppose dans cette partie que f est nulle sur $\mathbb{R}$ et $|\lambda| \neq 1$.

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Puisque F vérifie $(\star)$ et que f est nulle, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\lambda^k F(x+ka) - \lambda^{k+1} F(x+(k+1)a) = 0$$

Puis, via un télescopage

$$F(x) - \lambda^n F(x+a) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k F(x+ka) - \lambda^{k+1} F(x+(k+1)a) = 0$$

De la même manière pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\lambda^{-k} f(x-ka) = \lambda^{-k} kF(x-ka) - \lambda^{-(k-1)} F(x-(k-1)a)$$

Puis, via un télescopage

$$\lambda^{-n} F(x-na) - F(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} kF(x-ka) - \lambda^{-(k-1)} F(x-(k-1)a) = 0$$

On en déduit les égalités demandées.

2. D'après la question **I.4**, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |F(t)| \leqslant A|t| + B$$

Fixons alors $x \in \mathbb{R}$.
Supposons $|\lambda| < 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|F(x)| = |\lambda|^n |F(x+na)| \leqslant |\lambda|^n (A|x+na| + B) \leqslant A|a|n|\lambda|^n + (A|x|+B)|\lambda|^n$$

Puisque $|\lambda| < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} |\lambda|^n = \lim_{n\to+\infty} n|\lambda|^n = 0$$

de sorte que $F(x) = 0$.
Supposons $|\lambda| > 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|F(x)| = |\lambda|^{-n} |F(x-na)| \leqslant |\lambda|^{-n} (A|x-na| + B) \leqslant A|a|n|\lambda|^{-n} + (A|x|+B)|\lambda|^{-n}$$

Puisque $|\lambda| > 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} |\lambda|^{-n} = \lim_{n\to+\infty} n|\lambda|^{-n} = 0$$

de sorte que $F(x) = 0$.
Finalement, F est bien nulle sur $\mathbb{R}$.

Partie III – Etude de $(\star)$ lorsque $|\lambda| \neq 1$

1. Soit $(F, G) \in \mathcal{L}^2$ un couple éventuel de solutions de $(\star)$. D'après la question **I.3**, $H = F - G \in \mathcal{L}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$H(x) - \lambda H(x+a) = 0$$
La question **II.2** permet alors d'affirmer que $H = 0$ i.e. $F = G$.

2. **a.** D'après la question **I.4**, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que
$$\forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)| \leqslant A|t| + B$$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|\lambda^n f(x+na)| = |\lambda|^n |f(x+na)| \leqslant |\lambda|^n (A|x+na| + B) \leqslant A|a|n|\lambda|^n + (A|x| + B)|\lambda|^n$$
Puisque $|\lambda| < 1$, les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda|^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} n|\lambda|^n$ convergent donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda^n f(x+na)|$ converge i.e. la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n f(x+na)$ converge absolument.

b. Puisque $f \in \mathcal{L}$, il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|$$
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
$$\begin{aligned}|F_0(x) - F_0(y)| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n (f(x+na) - f(y+na))\right| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^n |f(x+na) - f(y+na)| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^n K|(x+na) - (y+na)| = \frac{K|x-y|}{1-|\lambda|}\end{aligned}$$
Ainsi $F_0 \in \mathcal{L}$.

c. Par définition de F_0, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}F_0(x) - \lambda F_0(x+a) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na) - \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} f(x+(n+1)a) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na) - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n f(x+na) = f(x)\end{aligned}$$
Donc F_0 est bien solution de $(\star)$ et c'est l'unique solution de $(\star)$ appartenant à $\mathcal{L}$ d'après la question **III.1**.

d. Dans ce cas, l'unique solution de $(\star)$ appartenant à $\mathcal{L}$ est la fonction F_0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}$$

e. Dans le cas où $f = \cos$, l'unique solution de $(\star)$ appartenant à $\mathcal{L}$ est la fonction F_0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos(x+na) = \frac{\cos x - \lambda\cos(x-a)}{1 - 2\lambda\cos a + \lambda^2}$$
Dans le cas où $f = \sin$, l'unique solution de $(\star)$ appartenant à $\mathcal{L}$ est la fonction F_0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \sin(x+na) = \frac{\sin x - \lambda\sin(x-a)}{1 - 2\lambda\cos a + \lambda^2}$$

3. **a.** Il suffit d'appliquer la question **III.2.a** en remplaçant λ par $\frac{1}{\lambda}$ et a par $-a$, ce qui est légitime car $\left|\frac{1}{\lambda}\right| < 1$.

b. On prouve à nouveau que $F_0 \in \mathcal{L}$ comme dans **III.2.b**. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_0(x) - \lambda F_0(x+a) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-(n-1)} f(x-(n-1)a) - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na) - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na) = f(x) \end{aligned}$$

Ainsi F_0 est bien solution de $(\star)$ et c'est la seule appartenant à $\mathcal{L}$ d'après la question **III.1**.