Interrogation écrite n°03

NOM : Prénom : Note :

1. Déterminer la signature de la permutation $\sigma \in S_5$ définie par

$$\sigma(1) = 4 \qquad \sigma(2) = 3 \qquad \sigma(3) = 2 \qquad \sigma(4) = 5 \qquad \sigma(5) = 1$$

Remarquons que $\sigma = (1,4,5) \circ (2,3)$. *Ainsi* $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((1,4,5)\varepsilon(2,3)) = (-1)^{3-1}(-1) = -1$. ∎

2. Calculer la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Comme les termes sont positifs, on peut intervertir l'ordre de sommation sans se soucier de sommabilité. Ainsi

$$S = \sum_{0 \leq n \leq k} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 2e$$

∎

3. On considère $\overline{9}$ comme un élément du groupe $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$. Déterminer son ordre.

Il est clair que $4 \cdot \overline{9} = \overline{36} = \overline{0}$ *donc l'ordre de* $\overline{9}$ *divise* 4. *Or* $\overline{9} \neq \overline{0}$ *et* $2 \cdot \overline{9} = \overline{18} = \overline{6} \neq \overline{0}$. *Ainsi l'ordre de* $\overline{9}$ *est* 4.

Remarque. *A nouveau, on aurait pu calculer les mutiples successifs de* $\overline{4}$ *jusqu'à obtenir* $\overline{0}$.

∎

4. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

__Première méthode.__ Remarquons que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. *Ainsi la suite* $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et de limite nulle. La série* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ *converge d'après le critère spécial des séries alternées.*
__Deuxième méthode.__ On remarque que

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Ainsi

$$(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *converge d'après le critère spécial des séries alternées* (($\sqrt{n}$) *converge vers* 0 *en décroissant) et* $\sum \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ *converge par comparaison à une série de Riemann. On en déduit que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ *converge.* ∎

5. Déterminer un équivalent simple du reste de la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$.

__Première méthode.__ On sait que $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$. *Comme la série* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *est un série à termes positifs convergente,*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

__Seconde méthode.__ On sait que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ *est décroissante sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Par comapraison série/intégrale*

$$\frac{1}{n+1} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{n}$$

Comme $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, *on obtient*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

∎

6. On fixe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $\varphi : \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ est un automorphisme de groupe.

Remarquons que φ *est bien à valeurs dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *car le groupe* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *est stable par produit.*
Soit $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$. *Alors*

$$\varphi(\mathrm{M})\varphi(\mathrm{N}) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MPP}^{-1}\mathrm{NP} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MNP} = \varphi(\mathrm{MN})$$

Enfin, en posant $\psi : \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{PMP}^{-1}$, *on vérifie que* $\psi\circ\varphi = \varphi\circ\psi = \mathrm{Id}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}$ *donc* φ *est bijective.*
On en conclut que φ *est bien un automorphisme du groupe* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. ∎