Fractions rationnelles

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Corps des fractions rationnelles

Définition 1.1 Fraction rationnelle

On appelle **fraction rationnelle** à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute fraction F de la forme $\frac{P}{Q}$ où $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \neq 0$. On dit que le couple (P, Q) est un **représentant** de la fraction rationnelle F. On convient que deux couples (P_1, Q_1) et (P_2, Q_2) représentent la même fraction rationnelle si $P_1Q_2 = P_2Q_1$.
On appelle $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque. On appelle **représentant irréductible** de F tout représentant (P, Q) de F tel que $P \wedge Q = 1$.

Définition 1.2 Opérations sur $\mathbb{K}(X)$

Soient $F = \frac{P}{Q}$ et $G = \frac{R}{S}$ deux éléments de $\mathbb{K}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Addition On pose $F + G = \frac{PS+RQ}{QS}$.

Multiplication On pose $FG = \frac{PR}{QS}$.

Multiplication par un scalaire On pose $\lambda.F = \frac{\lambda.P}{Q}$.

Composition Si G n'est pas constante, on pose $F \circ G = \frac{P(G)}{Q(G)}$.

Remarque. Chacune des expressions intervenant dans la définition des différentes opérations est indépendante des représentants des fractions rationnelles choisies.

Proposition 1.1 Structure de corps et de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps admettant $\mathbb{K}[X]$ comme sous-anneau.
$(\mathbb{K}(X), +, .)$ est $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant $\mathbb{K}[X]$ comme sous-espace vectoriel.

Remarque. $\mathbb{K}(X)$ est appelé le **corps des fractions** de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.
$(\mathbb{K}(X), +, ., \times)$ est également une $\mathbb{K}$-algèbre.

Définition 1.3 Degré d'une fraction rationnelle

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. Le **degré** de F, noté $\deg F$, est défini par :

$$\deg F = \deg P - \deg Q$$

Remarque. Le degré de F est bien défini car $\deg Q \neq -\infty$ et car il est indépendant du représentant choisi.

Proposition 1.2 Degré et opérations

Soient $(F, G) \in \mathbb{K}(X)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

(i) $\deg(\lambda F + \mu G) \leq \max(\deg F, \deg G)$.

(ii) $\deg(FG) = \deg F + \deg G$.

Attention ! Contrairement aux polynômes, une fraction rationnelle de degré nul n'est pas forcément constante.
En général, $\deg(F \circ G) \neq \deg F \times \deg G$ contrairement aux polynômes. Par exemple, pour $F = \frac{1}{X-1}$ et $G = \frac{X+1}{X}$, on a $\deg F = -1$ et $\deg G = 0$. Par contre $F \circ G = X$ et donc $\deg(F \circ G) = 1 \neq \deg F \times \deg G$.

Définition 1.4 Conjugaison

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On appelle fraction rationnelle conjuguée de F la fraction rationnelle $\overline{F} = \frac{\overline{P}}{\overline{Q}}$.

Remarque. La définition est encore indépendante du représentant choisi.

Remarque. En particulier, $F \in \mathbb{R}(X)$ si et seulement si $F = \overline{F}$.

Proposition 1.3

Soient $(F, G \in)\mathbb{C}(X)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors

$$\overline{\lambda F + \mu G} = \overline{\lambda}\,\overline{F} + \overline{\mu}\,\overline{G} \qquad \overline{FG} = \overline{F}\,\overline{G}$$

En particulier, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\overline{\lambda F + \mu G} = \lambda \overline{F} + \mu \overline{G}$.

Définition 1.5 Dérivée

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On pose $F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$.
On peut alors définir les dérivées successives de F en posant $F^{(n+1)} = \left(F^{(n)}\right)'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. A nouveau, cette définition est indépendante du représentant choisi.

Attention ! En général, $\deg F' \neq \deg F - 1$. Par exemple, si $F = \deg \frac{X+1}{X}$, $F' = -\frac{1}{X^2}$. On a donc $\deg F = 0$ et $\deg F = -2$.

Proposition 1.4 Linéarité de la dérivation

Soient $(F, G) \in \mathbb{K}(X)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors $(\lambda F + \mu G)' = \lambda F' + \mu G'$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda F + \mu G)^{(n)} = \lambda F^{(n)} + \mu G^{(n)}$.

Proposition 1.5 Dérivée d'un produit

Soit $(F, G) \in \mathbb{K}(X)^2$. Alors $(FG)' = F'G + FG'$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(FG)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F^{(k)} G^{(n-k)}$.

2 Fonctions rationnelles, zéros et pôles

Définition 2.1 Zéros et pôles d'une fraction rationnelle

Soient $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction irréductible, $a \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N}$.

(i) On dit que a est un **zéro** de F (de multiplicité r) si a est une racine de P (de multiplicité r).

(ii) On dit que a est un **pôle** de F (de multiplicité r) si a est une racine de Q (de multiplicité r).

Remarque. Comme on a imposé à la fraction $\frac{P}{Q}$ d'être irréductible, l'ensemble des zéros de F et l'ensemble des pôles de F sont disjoints.

Proposition 2.1

Soient $F \in \mathbb{K}(X)$ paire ou impaire et $a \in \mathbb{K}$.
Alors a est un zéro (resp. un pôle) de F de multiplicité r si et seulement si $-a$ est un zéro (resp. un pôle) de F de multiplicité r.

Proposition 2.2

Soient $F \in \mathbb{C}(X)$ et $a \in \mathbb{C}$.
Alors a est un zéro (resp. un pôle) de F de multiplicité r si et seulement si $\overline{a}$ est un zéro (resp. un pôle) de $\overline{F}$ de multiplicité r.
En particulier, si $F \in \mathbb{R}(X)$ les zéros (resp. les pôles) non réels de F sont conjugués deux à deux et deux zéros (resp. deux pôles) de F conjugués ont même multiplicité.

Définition 2.2 Fonction rationnelle

Soit F une fraction rationnelle de forme **irréductible** $\frac{P}{Q}$. Pour $x \in \mathbb{K}$ qui n'est pas un pôle de F, on pose $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (cela ne dépend pas du représentant irréductible de F choisi).
La fonction $\tilde{F} : \begin{cases} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & F(x) \end{cases}$ est appelée **fonction rationnelle** associée à la fraction rationnelle F.
Elle est définie sur $\mathbb{K}$ privé de l'ensemble des racines de Q.

Remarque. On a imposé à la fraction $\frac{P}{Q}$ d'être irréductible afin que la fonction rationnelle ne dépende pas du couple (P, Q) choisi et que $\tilde{F}$ soit définie sur le plus grand ensemble possible. En effet, $\frac{X+1}{X-3}$ et $\frac{(X+2)(X+1)}{(X+2)(X-3)}$ représentent la même fraction rationnelle mais $x \mapsto \frac{x+1}{x-3}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ tandis que $x \mapsto \frac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-3)}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$.

Remarque. Soient $F, G \in \mathbb{K}(X)$. Si $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$ coïncident sur une partie infinie de $\mathbb{K}$, alors $F = G$.

3 Décomposition en éléments simples

Proposition 3.1 Partie entière

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique fraction rationnelle $N \in \mathbb{K}(X)$ de degré strictement négatif tels que $F = E + N$. Le polynôme E s'appelle la **partie entière** de la fraction rationnelle F.

Remarque. Si $\mathrm{F} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$, la partie entière de F est le quotient de la division euclidienne de P par Q.
Si $\deg \mathrm{P} < \deg \mathrm{Q}$, la partie entière est nulle.

Proposition 3.2 Partie polaire

Soit $\mathrm{F} \in \mathbb{K}(\mathrm{X})$ admettant $a \in \mathbb{C}$ pour pôle de multiplicité $r \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe un unique couple $(\mathrm{G}, \mathrm{R}) \in \mathbb{K}(\mathrm{X}) \times \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que :

(i) $\mathrm{F} = \mathrm{G} + \frac{\mathrm{R}}{(\mathrm{X}-a)^r}$;

(ii) a n'est pas pôle de G ;

(iii) $\deg \mathrm{R} < r$.

La fraction rationnelle $\frac{\mathrm{R}}{(\mathrm{X}-a)^r}$ est alors appelée la **partie polaire** de F relative au pôle a.

Remarque. Les pôles de G sont alors les pôles de F autres que a avec même multiplicité que ceux de F.

Proposition 3.3 Décomposition en éléments simples d'une partie polaire

Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{K}$ et $\mathrm{R} \in \mathbb{K}_{r-1}[\mathrm{X}]$. Alors il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que

$$\frac{\mathrm{R}}{(\mathrm{X}-a)^r} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\lambda_k}{(\mathrm{X}-a)^k}$$

Théorème 3.1

Toute fraction rationnelle de $\mathbb{C}(\mathrm{X})$ est la somme de sa partie entière et de ses parties polaires.

Corollaire 3.1 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(\mathrm{X})$

Soit $\mathrm{F} \in \mathbb{C}(\mathrm{X})$ admettant pour pôles $a_1, \dots, a_n$ de multiplicités respectives $r_1, \dots, r_n$. Alors

$$\mathrm{F} = \mathrm{E} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(\mathrm{X}-a_i)^j}$$

avec $\mathrm{E} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $\lambda_{i,j} \in \mathbb{C}$.
Cette écriture est unique.

Remarque. E est la partie entière de F et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(\mathrm{X}-a_i)^j}$ est la partie polaire de F relative au pôle a_i.

Proposition 3.4

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On sait que P est scindé sur $\mathbb{C}$. Notons $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ les racines de P et $(r_i)_{1\leq i\leq n}$ leurs multiplicités respectives.
Alors la décomposition de $\frac{P'}{P}$ est :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{X-a_i}$$

Remarque. $\frac{P'}{P}$ s'appelle la dérivée logarithmique de P. En effet, pour une fonction f strictement positive, $(\ln\circ f)' = \frac{f'}{f}$. Le logarithme d'un polynôme n'est pas défini mais, d'un point de vue formel, si

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X-a_i)^{r_i}$$

alors

$$\ln(P) = \ln\lambda + \sum_{i=1}^{n} r_i \ln(X-a_i)$$

et en dérivant

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{X-a_i}$$

Attention, ce qui précède n'est pas du tout rigoureux ! C'est seulement un moyen de retrouver l'exemple précédent.

Corollaire 3.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ une fraction irréductible. Si la décomposition en facteurs irréductibles de Q est

$$Q = \lambda \prod_{i=1}^{m} (X-a_i)^{r_i} \prod_{j=1}^{n} (X^2+b_jX+c_j)^{s_j}$$

alors

$$F = E + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X-a_i)^j} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{s_j} \frac{\mu_{j,l}X+\nu_{j,l}}{(X^2+b_jX+c_j)^l}$$

avec $E \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda_{i,l} \in \mathbb{R}$, $\mu_{j,l} \in \mathbb{R}$, $\nu_{j,l} \in \mathbb{R}$.
Cette écriture est unique.

Remarque. De manière plus générale, si $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ est une fraction irréductible et si la décomposition en facteurs irréductibles de Q est

$$Q = \lambda \prod_{i=1}^{n} R_i^{\alpha_i}$$

Alors la décomposition en éléments simples de F est

$$F = E + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{P_{i,j}}{R_i^j}$$

où $(P_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq\alpha_i}}$ est une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\deg P_{i,j} < \deg R_i$ pour tout couple (i,j) tel que $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq\alpha_i$.

4 Calcul d'une décomposition en éléments simples

Méthode **Calcul d'une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$**

- On met la fraction rationnelle F sous forme irréductible $\frac{P}{Q}$.
- On détermine la partie entière de F grâce à une division euclidienne.
- On factorise le dénominateur Q afin de déterminer les pôles et leur multiplicité.
- On écrit la décomposition en éléments simples de F à l'aide de coefficients inconnus.

Il s'agit alors de déterminer les coefficients inconnus intervenant dans les différentes parties polaires. Le programme stipule que vous devez savoir décomposer les parties polaires d'une fraction rationnelle relativement à un pôle de multiplicité 1 ou 2.

Méthode **Calcul de la partie polaire : cas d'un pôle simple**

La première chose à faire est de mettre sous forme irréductible $F = \frac{P}{Q}$ si ce n'est pas déjà le cas.
On a $F = \frac{\lambda_1}{X-a} + F_0$ où F_0 n'admet pas a pour pôle.
On a deux méthodes pour le calcul de λ_1.

- On simplifie $(X-a)F$ et on évalue en a, ce qui nous donne λ_1.
- On utilise la formule $\lambda_1 = \frac{P(a)}{Q'(a)}$.

Exercice 4.1

Décomposer en éléments simples $\frac{X^3+2}{X^2-X}$.

Exercice 4.2

Décomposer en éléments simples $\frac{1}{X^n-1}$.

Méthode **Calcul de la partie polaire : cas d'un pôle double**

La première chose à faire est de mettre sous forme irréductible $F = \frac{P}{Q}$ si ce n'est pas déjà le cas.
On a $F = \frac{\lambda_1}{X-a} + \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} + F_0$ où F_0 n'admet pas a pour pôle.

Calcul de λ_2 On simplifie $(X-a)^2F$ et on évalue en a ce qui nous donne λ_2.

Calcul de λ_1 On a deux possibilités :

- $G = F - \frac{\lambda_2}{(X-a)^2}$ est une fraction rationnelle admettant a pour pôle simple. On est alors ramené à la méthode précédente (attention : il faudra mettre G sous forme irréductible).
- On évalue $\left[(X-a)^2F\right]'$ en a, ce qui nous donne λ_1.

Remarque. Pour le calcul de λ_1, on n'utilise que rarement la méthode décrite ci-dessus. On préfère utiliser les méthodes décrites ci-après.

Exercice 4.3

Calculer les parties polaires relatives aux différents pôles de $\dfrac{X^5+1}{X(X-1)^2}$.

Méthode **Cas d'une fraction à coefficients réels**

Si $F \in \mathbb{R}(X)$, alors $\overline{F} = F$. Si a est un pôle non réel de F, alors $\overline{a}$ est un pôle de même multiplicité. Les coefficients de la partie polaire relative à $\overline{a}$ sont les conjugués des coefficients de la partie polaire relative à a. On peut de manière équivalente identifier les décompositions en éléments simples de $F = \overline{F}$.

Exercice 4.4

Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{X^2+X+1}$.

Méthode **Cas d'une fraction paire ou impaire**

Il suffit d'écrire formellement la décomposition en éléments simples de $F(X)$ et d'en déduire celle de $F(-X)$. La parité de F donne des relations entre les coefficients de la décomposition en éléments simples.

Exercice 4.5

Décomposer en éléments simples $\dfrac{4}{(X^2-1)^2}$.

Méthode **Cas d'une fraction de degré strictement négatif**

Si $\deg F < 0$, on peut déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$ pour en tirer des relations entre les coefficients des termes en $\frac{1}{X-a}$.

Exercice 4.6

Décomposer en éléments simples $\dfrac{4X^3}{(X^2-1)^2}$.

Méthode **Substituer des valeurs particulières à X**

S'il ne reste plus que quelques coefficients à calculer, plutôt que de chercher à finasser, il peut-être plus simple de substituer à X quelques valeurs simples (typiquement 0 s'il n'est pas pôle).

Exercice 4.7

Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)}$ sur $\mathbb{C}$.

Les mêmes méthodes s'appliquent mutatis mutandis à la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.8

Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{X(X^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.