Devoir à la maison n°06 : corrigé

Solution 1.

1. A l'aide de la relation de Chasles,

$$\int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}t$$

A l'aide du changement de variable $t \mapsto 2\pi - t$,

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}t &= -\int_{\pi}^{0} g(2\pi - t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} g(2\pi - t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} g(-t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } g \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \\ &= \int_0^{\pi} g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } g \text{ est paire}\end{aligned}$$

2. Soient $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Remarquons que

$$\begin{aligned}f_r(\theta) &= (r - e^{i\theta})(r - e^{-i\theta}) \\ &= (r - e^{i\theta})\overline{(r - e^{i\theta})} \qquad \text{car } r \in \mathbb{R} \\ &= |r - e^{i\theta}|^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

Supposons que $f_r(\theta) = 0$, alors $r = e^{i\theta}$, puis $|r| = |e^{i\theta}| = 1$ et donc, comme $r \in \mathbb{R}$, $r = \pm 1$, ce qui est exclu. Ainsi

$$\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ f_r(\theta) > 0$$

3. Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On effectue le changement de variable $\theta \mapsto \pi - \theta$. Ainsi

$$\mathrm{I}(r) = -\int_{\pi}^{0} \ln \circ f_r(\pi - \theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \ln \circ f_r(\pi - \theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \ln \circ f_{-r}(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{I}(-r)$$

car pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f_r(\pi - \theta) = r^2 - 2r\cos(\pi - \theta) + 1 = r^2 + 2r\cos\theta + 1 = f_{-r}(\theta)$$

4. Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Comme indiqué

$$\begin{aligned}2\mathrm{I}(r) &= \mathrm{I}(r) + \mathrm{I}(-r) \\ &= \int_0^{\pi} \ln \circ f_r(\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi} \ln \circ f_{-r}(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi} \ln(f_r(\theta) f_{-r}(\theta))\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Or, comme vu plus haut, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f_r(\theta) = |r - e^{i\theta}|^2 \qquad \text{et} \qquad f_{-r}(\theta) = |-r - e^{i\theta}|^2 = |r + e^{i\theta}|^2$$

de sorte que

$$f_r(\theta) f_{-r}(\theta) = \left|r - e^{i\theta}\right|^2 \left|r + e^{i\theta}\right|^2 = \left|(r - e^{i\theta})(r + e^{i\theta}\right|^2 = \left|r^2 - e^{2i\theta}\right|^2 = f_{r^2}(2\theta)$$

Finalement

$$2\mathrm{I}(r) = \int_0^{\pi} \ln \circ f_{r^2}(2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

En effectuant le changement de variable $\theta \mapsto 2\theta$, on obtient

$$2\mathrm{I}(r) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln\circ f_{r^2}(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Or $\ln\circ f_{r^2}$ est clairement 2π-périodique et paire donc, d'après la question **1**,

$$2\mathrm{I}(r) = \int_0^{\pi} \ln\circ f_{r^2}(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{I}(r^2)$$

5. On fixe $r \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ et on procède à une récurrence. Tout d'abord, $2^0\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}(r^1) = \mathrm{I}(r^{2^0})$. Supposons alors qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}(r^{2^n})$. D'après la question **4**,

$$2^{n+1}\mathrm{I}(r) = 2\mathrm{I}(r^{2^n}) = \mathrm{I}((r^{2^n})^2) = \mathrm{I}(r^{2^{n+1}})$$

Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}(r^{2^n})$$

6. Remarquons déjà que puisque $\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}(-r)$, $\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}(|r|)$.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$ donc

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ |r|^2 - 2|r| + 1 \leqslant |r|^2 - 2|r|\cos\theta + 1 \leqslant |r|^2 + 2|r| + 1$$

ou encore

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ (1-|r|)^2 \leqslant f_{|r|}(\theta) \leqslant (1+|r|)^2$$

donc

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ 2\ln(1-|r|) \leqslant \ln\circ f_{|r|}(\theta) \leqslant 2\ln(1+|r|)$$

puis, par croissance de l'intégrale,

$$2\pi\ln(1-|r|) \leqslant \mathrm{I}(|r|) \leqslant 2\pi\ln(1+|r|)$$

Donc, d'après notre remarque initiale

$$2\pi\ln(1-|r|) \leqslant \mathrm{I}(r) \leqslant 2\pi\ln(1+|r|)$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $|r| < 1$, on a également $|r|^{2^n} < 1$: on peut donc appliquer la question **6** de sorte que

$$\ln(1-|r^{2^n}|) \leqslant \mathrm{I}(r^{2^n}) \leqslant \ln(1+|r^{2^n}|)$$

ou encore

$$\ln(1-|r|^{2^n}) \leqslant \mathrm{I}(r^{2^n}) \leqslant \ln(1+|r|^{2^n})$$

Finalement,

$$\frac{1}{2^n}\ln(1-|r|^{2^n}) \leqslant \frac{1}{2^n}\mathrm{I}(r^{2^n}) \leqslant \frac{1}{2^n}\ln(1+|r|^{2^n})$$

D'après la question **5**, on a donc

$$\frac{1}{2^n}\ln(1-|r|^{2^n}) \leqslant \mathrm{I}(r) \leqslant \frac{1}{2^n}\ln(1+|r|^{2^n})$$

Comme $|r| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} |r|^{2^n} = 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(1-|r|^{2^n}) = \lim_{n\to+\infty} \ln(1+|r|^{2^n}) = 0$$

De plus, $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\ln(1-|r|^{2^n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\ln(1+|r|^{2^n}) = 0$$

En passant à la limite l'encadrement précédent lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $\mathrm{I}(r) = 0$.

8. Soit $r \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f_{1/r}(\theta) = \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r}\cos\theta + 1 = \frac{1}{r^2}(1 - 2r\cos\theta + r^2) = \frac{1}{r^2}f_r(\theta)$$

Ainsi

$$\mathrm{I}\left(\frac{1}{r}\right) = \int_0^{\pi} \ln\circ f_{1/r}(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \ln\left(\frac{1}{r^2}f_r(\theta)\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \left(\ln\circ f_r(\theta) - 2\ln(|r|)\right)\mathrm{d}\theta = \mathrm{I}(r) - 2\pi\ln(|r|)$$

9. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $|r| > 1$. Alors $\left|\frac{1}{r}\right| < 1$. D'après la question **7**, $\mathrm{I}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$. Ainsi

$$\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}\left(\frac{1}{r}\right) + 2\pi\ln(|r|) = 2\pi\ln(|r|)$$