Devoir surveillé n°02 : corrigé

Solution 1.

1. On utilise une formule de factorisation.

$$s=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=2\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}}{2}\right)=2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Or
$$\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi-\frac{4\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$
et on a donc bien $s=2p$.

2. En utilisant la formule de duplication du sinus,

$$p\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$$

Or
$$\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)=\sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=-\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$
Ainsi
$$p\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$
Or $\frac{2\pi}{5}$ n'est pas un multiple entier de π donc $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\neq 0$, ce qui permet d'affirmer que $p=-\frac{1}{4}$ et donc $s=-\frac{1}{2}$.

3. Puisque $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ ont pour somme $s=-\frac{1}{2}$ et pour produit $p=-\frac{1}{4}$, ils sont racines du trinôme $X^2+\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}$. Ces racines sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Comme $\frac{2\pi}{5}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$ et donc

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

Remarque. On aurait aussi pu remarquer que
$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\left(2\times\frac{2\pi}{5}\right)=2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1$$
Ainsi
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1=s=-\frac{1}{2}$$
ou encore
$$2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-\frac{1}{2}=0$$
Ainsi $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine du trinôme $2X^2+X-\frac{1}{2}$. Ces racines sont à nouveau $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Comme précédemment, on invoque que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$ pour en déduire que
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$
Puis
$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=s-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

■

Solution 2.

On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$(\mathscr{S}) \iff \begin{cases} x+y+az=1 & \\ (a-1)y+(1-a)z=0 & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ (1-a)y+(1-a^2)z=1-a & L_3 \leftarrow L_3-aL_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x+y+az=1 & \\ (a-1)y+(1-a)z=0 & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ (2-a-a^2)z=1-a & L_3 \leftarrow L_3+L_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x+y+az=1 \\ (a-1)y+(1-a)z=0 \\ (2+a)(1-a)z=1-a \end{cases}$$

- Si $a=1$, alors
$$(\mathscr{S}) \iff x+y+z=1$$
Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\{(1-y-z,y,z),(y,z)\in\mathbb{R}^2\}$.
- Si $a=-2$, alors
$$(\mathscr{S}) \iff \begin{cases} x+y-2z=1 \\ -3y+3z=0 \\ 0=3 \end{cases}$$
L'ensemble des solutions est vide.
- Si $a\neq-2$ et $a\neq1$, alors
$$(\mathscr{S}) \iff \begin{cases} x+y+az=1 \\ y-z=0 \\ (2+a)z=1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=\dfrac{1}{2+a} \\ y=\dfrac{1}{2+a} \\ z=\dfrac{1}{2+a} \end{cases}$$
Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\left\{\left(\frac{1}{2+a},\frac{1}{2+a},\frac{1}{2+a}\right)\right\}$.

Solution 3.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$.
$$\binom{2n+2}{n+1}=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}=\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2n!^2}=\frac{2(n+1)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2n!^2}=\frac{2(2n+1)}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!^2}=\frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$$

2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons
$$\mathrm{HR}(n):\ \frac{4^n}{2\sqrt{n}}\leqslant\binom{2n}{n}\leqslant\frac{4^n}{n^{\frac{1}{3}}}$$
Tout d'abord, $\frac{4^1}{2\sqrt{1}}=2$, $\binom{2}{1}=2$ et $\frac{4^1}{1^{\frac{1}{3}}}=4$ donc HR(1) est vraie.
Supposons HR(n) vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$. On a alors d'après la question **1**,
$$\frac{2(2n+1)}{n+1}\cdot\frac{4^n}{2\sqrt{n}}\leqslant\binom{2n+2}{n+1}\leqslant\frac{2(2n+1)}{n+1}\cdot\frac{4^n}{n^{\frac{1}{3}}}$$

Il reste donc à montrer d'une part que $\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{2(2n+1)}{n+1}\cdot\frac{4^n}{2\sqrt{n}}$ et d'autre part que $\frac{2(2n+1)}{n+1}\cdot\frac{4^n}{n^{\frac13}} \leqslant \frac{4^{n+1}}{(n+1)^{\frac13}}$.
On procède par récurrence dans les deux cas.

$$
\begin{aligned}
&& \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} &\leqslant \frac{2(2n+1)}{n+1}\cdot\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \\
\iff && 2(n+1)\sqrt{n} &\leqslant (2n+1)\sqrt{n+1} \\
\iff && 4(n+1)^2 n &\leqslant (2n+1)^2(n+1) \\
\iff && 4(n+1)n &\leqslant (2n+1)^2 \\
\iff && 4n^2+4n &\leqslant 4n^2+4n+1
\end{aligned}
$$

La dernière inégalité étant vraie, la première l'est également.

$$
\begin{aligned}
&& \frac{2(2n+1)}{n+1}\cdot\frac{4^n}{n^{\frac13}} &\leqslant \frac{4^{n+1}}{(n+1)^{\frac13}} \\
\iff && (2n+1)(n+1)^{\frac13} &\leqslant 2(n+1)n^{\frac13} \\
\iff && (2n+1)^3(n+1) &\leqslant 8(n+1)^3 n \\
\iff && (2n+1)^3 &\leqslant 8(n+1)^2 n \\
\iff && 8n^3+12n^2+6n+1 &\leqslant 8n^3+16n^2+8n \\
\iff && 0 &\leqslant 4n^2+2n-1
\end{aligned}
$$

La dernière inégalité est vraie puisque $n \geqslant 1$ donc la première l'est également. Finalement, $\mathrm{HR}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, $\mathrm{HR}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution 4.

1. On trouve $S_0 = \binom{0}{0} = 1$, $S_1 = \binom{0}{0}+\binom{1}{0}+\binom{1}{1} = 3$ et $S_2 = \binom{0}{0}+\binom{1}{0}+\binom{2}{0}+\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2} = 7$.
2. D'après la formule du binôme
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$
La suite (2^n) étant géométrique,
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1$$
3. On procède comme indiqué dans l'énoncé. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$S_n = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}$$
D'après la question précédente,
$$S_n = \sum_{j=0}^{n} 2^j = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1$$

Solution 5.

1. **a.** On a d'une part
$$\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{k!}{l!(k-l)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,l!\,(k-l)!}$$
et d'autre part
$$\binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l} = \frac{n!}{l!(n-l)!}\,\frac{(n-l)!}{(k-l)!(n-k)!} = \frac{n!}{l!(k-l)!(n-k)!}$$
On en déduit bien l'égalité demandée.

b.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=l}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{l} &= \sum_{k=l}^{n}(-1)^k\binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l} && \text{d'après la question précédente}\\
&= \binom{n}{l}\sum_{k=l}^{n}(-1)^k\binom{n-l}{k-l}\\
&= \binom{n}{l}\sum_{j=0}^{n-l}(-1)^{j+l}\binom{n-l}{j} && \text{en effectuant le changement d'indice } j=k-l\\
&= (-1)^l\binom{n}{l}\sum_{j=0}^{n-l}(-1)^j\binom{n-l}{j}\\
&= (-1)^l\binom{n}{l}(1-1)^{n-l} && \text{d'après la formule du binôme}\\
&= 0 && \text{car } n-l>0
\end{aligned}
$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}b_k &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}a_l\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{l}a_l\\
&= \sum_{0\leqslant l\leqslant k\leqslant n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{l}a_l\\
&= \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=l}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{l}\\
&= \sum_{l=0}^{n}a_l\sum_{k=l}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{l}
\end{aligned}
$$

Or, d'après la question précédente, $\sum_{k=l}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{l}=0$ quand $l<n$. On en déduit que

$$
(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}b_k = (-1)^n a_n\sum_{k=n}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{n} = (-1)^n a_n(-1)^n\binom{n}{n}\binom{n}{n} = a_n
$$

Solution 6.

1. **Première méthode :**
Soit $(p,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant n$. On sait que pour tout $k \in [\![p+1,n]\!]$, $\binom{k}{p}=\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}$. Cette relation est encore vraie pour $k=p$ si l'on convient que $\binom{p}{p+1}=0$. On obtient donc par télescopage

$$
\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\sum_{k=p}^{n}\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}-\binom{p}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}
$$

Seconde méthode :
On fixe $p\in\mathbb{N}$ et on montre par récurrence la relation pour tout entier $n \geqslant p$. Notons donc

$$
\mathrm{HR}(n):\ \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}
$$

$\mathrm{HR}(p)$ est vraie puisque

$$
\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{p}{p}=1 \qquad \text{et} \qquad \binom{p+1}{p+1}=1
$$

Supposons HR(n) vraie pour un certain entier $n \geqslant p$. Alors

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p}$$

Ainsi HR($n+1$) est vraie.
Par récurrence, HR(n) est vraie pour tout entier $n \geqslant p$.

2. On trouve évidemment

$$\binom{k}{1} = k \qquad \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} \qquad \binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

A noter que ces expressions sont également valables lorsque $k \in \{0,1,2\}$ puisque, par convention, $\binom{k}{p} = 0$ lorsque $p > k$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
6\binom{k}{3} + 6\binom{k}{2} + \binom{k}{1} &= k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k \\
&= k(k-1)[(k-2)+3] + k \\
&= k(k-1)(k+1) + k \\
&= k\left[(k^2-1)+1\right] \\
&= k^3
\end{aligned}$$

Remarque. On aurait pu déterminer les coefficients des coefficients binomiaux sans l'aide de l'énoncé. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$a\binom{k}{3} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{1} = \frac{a}{6}k^3 + \left(-\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)k^2 + \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c\right)k$$

Il suffit donc de choisir a, b et c tels que

$$\begin{cases} \dfrac{a}{6} = 1 \\ -\dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2} = 0 \\ \dfrac{a}{3} - \dfrac{b}{2} + c = 0 \end{cases}$$

On trouve alors $a = 6$, $b = 6$ et $c = 1$. ■

4.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= 6\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{3} + 6\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2} + \sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} \\
&= 6\sum_{k=3}^{n}\binom{k}{3} + 6\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} + \sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} \\
&= 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} + (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{4}[(n-1)(n-2) + 4(n-1) + 2] \\
&= \frac{n(n+1)}{4}\left(n^2+n\right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$