

# DEVOIR SURVEILLÉ N°11

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1 – Centrale MP 1990

Dans tout le texte,  $z$  désigne une variable complexe ; l'exponentielle de  $z$  sera notée indifféremment  $e^z$  et  $\exp z$ , la partie réelle de  $z$  sera notée  $\operatorname{Re}(z)$ . On appellera  $\Delta$  l'ensemble des nombres complexes de module strictement inférieur à 1. On conviendra de poser  $0^0 = 1$ .

On définit une application  $F$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  comme suit :

- $F(1) = 0$ ;
- pour tout  $z \neq 1$ ,  $F(z) = \exp\left(-\frac{z}{1-z}\right)$ .

Le but du problème est d'établir que  $F$  est développable en série entière dans  $\Delta$  et d'étudier quelques propriétés de la suite des coefficients de cette série entière.

**La seconde et la troisième partie sont indépendantes.**

### 1 PREMIERE PARTIE

- 1** Soit  $n$  un entier naturel. Etablir que la fonction qui, à tout  $z \neq 1$ , associe  $\left(\frac{z}{1-z}\right)^n$  admet un développement en série entière dans  $\Delta$ , développement que l'on notera  $\left(\frac{z}{1-z}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k$ .
- 2** En utilisant le développement en série entière de  $(1+x)^\gamma$ , où  $\gamma$  est une constante réelle convenable et  $x$  une variable réelle comprise strictement entre  $-1$  et  $1$ , déterminer  $a_{n,k}$  en fonction de  $n$  et de  $k$ .
- 3** **3.a** Montrer que l'égalité  $b_k = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_{n,k}}{n!}$  définit une suite  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de réels.  
**3.b** Calculer  $b_0, b_1, b_2$ .
- 4** Etant donné  $z$  appartenant à  $\Delta$ , on définit pour tout couple  $(n, k)$  d'entiers naturels  $u_{n,k} = (-1)^n \frac{a_{n,k}}{n!} z^k$ . Montrer que la famille  $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable.
- 5** Dédurre de ce qui précède que, pour tout  $z$  appartenant à  $\Delta$ , l'on a :  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ .  
On désignera par  $R$  le rayon de convergence de cette série entière (on a évidemment  $R \geq 1$ ).

## 2 DEUXIEME PARTIE

On se propose dans cette partie de déterminer  $R$  et de trouver une suite majorant la suite de terme général  $|b_n|$ .

On désigne par  $\Delta'$  l'ensemble des  $z$  vérifiant  $|z| \leq 1$  et  $z \neq 1$ . On confondra dans le langage les nombres complexes et les points du plan complexe les représentant.

**6** **6.a** Pour tout  $z$  complexe, on pose  $z = x + iy$ ,  $x$  et  $y$  étant réels ; calculer  $\ln |F(z)|$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

**6.b** Etant donné un réel  $\lambda$  strictement positif, on appelle  $C_\lambda$  l'ensemble des  $z$  vérifiant  $|F(z)| = \lambda$ .  
Déterminer une équation cartésienne de  $C_\lambda$  ; indiquer la nature et la position de  $C_\lambda$ .

**6.c** Tracer sur un même graphique les  $C_\lambda$  correspondant à  $\lambda = \frac{1}{e}, 1, \sqrt{e}, e, e^2$ .

**7** Quelle est la borne supérieure de  $|F(z)|$  lorsque  $z$  décrit  $\Delta'$  ? Est-elle atteinte ? Si oui, en quels points ?

**8** **8.a** Montrer que  $F$  est continue en tout point autre que 1.

**8.b**  $F$  admet-elle une limite au point 1 ?

**8.c** La restriction de  $F$  à  $\Delta$  a-t-elle une limite au point 1 ?

**9** Dédurre de **8** la valeur de  $R$ .

La série  $\sum |b_n|$  est-elle convergente ?

**10** **10.a** On donne  $r$  compris strictement entre 0 et 1. Etablir les formules valables pour tout  $n$  entier naturel :

$$b_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left( \int_0^\pi F(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right)$$

**10.b** Etablir la convergence de l'intégrale  $\int_0^\pi F(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$ .

**10.c** Démontrer que l'on a

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_0^\pi F(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \int_0^\pi F(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

**11** En déduire la formule :

$$b_n = \frac{2\sqrt{e}}{\pi} \operatorname{Re} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp \left( 2int + \frac{i}{2 \tan t} \right) dt \right)$$

**12** Montrer que la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et donner une constante majorant  $|b_n|$ .

**13** On pose, pour tout  $t$  compris strictement entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  et pour tout  $n$  entier strictement positif :  $u_n(t) = 2nt + \frac{1}{2 \tan t}$ .  
Etudier les variations et le signe des fonctions  $u_n, u'_n, u''_n$ . Expliciter en fonction de  $n$  la valeur  $T_n$  de l'unique zéro de  $u'_n$ .

**14** **14.a** Etablir, pour tout  $n > 0$ , l'existence et l'unicité d'un couple  $\alpha_n, \beta_n$  de réels tels que :  
 $0 < \alpha_n < T_n < \beta_n < \frac{\pi}{2}$  et  $u'_n(\beta_n) = -u'_n(\alpha_n) = n^{3/4}$ .

**14.b** Démontrer l'inégalité  $u''_n(\beta_n) \geq 2n^{3/2}$ .

**14.c** En déduire une majoration de  $\beta_n - \alpha_n$ .

**15** Pour tout  $n > 0$ , on appelle respectivement  $I_n, J_n, K_n$  et  $L_n$  les intégrales de la fonction  $t \mapsto \exp(iu_n(t))$  sur les intervalles  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right], [0, \alpha_n], [\alpha_n, \beta_n], \left[\beta_n, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**15.a** Donner une majoration de  $|K_n|$ .

**15.b** En écrivant :  $L_n = \int_{\beta_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{iu'_n(t)} e^{iu_n(t)} iu'_n(t) dt$ , établir l'inégalité  $|L_n| \leq \frac{2}{n^{3/4}}$ .

**15.c** Majorer par la même technique  $|J_n|$ .

**15.d** Dédire de ce qui précède une majoration de  $|b_n|$  du type  $Cn^{-3/4}$  où  $C$  est une constante entière, qui soit valable pour tout  $n$ . On ne cherchera pas la meilleure valeur possible de  $C$ .

### 3 TROISIEME PARTIE

Cette partie est indépendante de la précédente. Elle a pour but essentiel une étude sommaire de la variation du signe de  $b_n$  en fonction de  $n$ .

**16** Déterminer une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 vérifiée par  $F(x)$  lorsque  $x$  décrit  $] -1, 1[$ .

**17** On pose, dans la suite du problème,  $c_n = nb_n$  pour tout  $n$ .

**17.a** Etablir la relation de récurrence (R) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, c_{n+1} = \left(2 - \frac{1}{n}\right) c_n - c_{n-1}$$

**17.b** Déterminer  $c_n$  pour  $n$  allant de 0 à 6.

**17.c** Montrer que s'il existe  $n$  non nul tel que  $c_n = 0$ , alors  $c_{n-1}$  et  $c_{n+1}$  sont non nuls et de signes opposés.

**18** On pose, pour tout  $n$  entier strictement positif :  $d_n = c_n - c_{n-1}$ .

On suppose, dans cette seule question, qu'il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on ait  $c_n > 0$ . En remarquant que  $d_{n+1} - d_n = -\frac{c_n}{n} = -b_n$ , aboutir à une contradiction.

**19** On peut donc définir (on ne demande pas de le justifier) une suite  $(\theta_n)_{n \geq 1}$  strictement croissante et à valeurs entières, possédant les propriétés suivantes :

- $\theta_1 = 0$ ;
- $(-1)^n c_{\theta_n} \geq 0$ ;
- pour tout  $k$  tel que  $\theta_n < k < \theta_{n+1}$ , on a  $(-1)^n c_k > 0$ .

On note  $U_n$  l'intervalle d'entiers  $[\theta_n, \theta_{n+1}]$  et  $M_n = \max_{k \in U_n} |c_k|$ .

Dans la suite de cette question on suppose que  $n$  est pair.

**19.a** Etablir les inégalités :

$$0 \leq c_{\theta_n} < c_{\theta_{n+1}} \text{ et } c_{\theta_{n+1}-2} > c_{\theta_{n+1}-1} > 0$$

En déduire une minoration de  $\theta_{n+1} - \theta_n$ .

**19.b** Etudier les variations de  $d_p$  lorsque  $p$  varie de  $\theta_n$  à  $\theta_{n+1}$ .

**19.c** En déduire les variations de  $c_p$  quand  $p$  décrit  $U_n$ .

**19.d** Etablir que si  $p, q, r$  appartiennent à  $U_n$  et vérifient  $p < q < r$ , on a alors :  $\frac{c_q - c_p}{q - p} > \frac{c_r - c_q}{r - q}$ .

Faire une figure représentant l'ensemble des points de coordonnées  $(k, c_k)$ ,  $k$  décrivant  $U_n$ ; interpréter géométriquement l'inégalité précédente.

**19.e** Indiquer très sommairement ce que deviennent les résultats ci-dessus pour  $n$  impair.

**20** **20.a** Soit  $n$  un entier pair et  $h$  un entier vérifiant  $0 \leq h < \theta_{n+1} - \theta_n$ .

Etablir la relation  $c_{\theta_n+h} \leq (h+1)d_{\theta_n}$ .

**20.b** En déduire  $d_{\theta_n+h} \geq d_{\theta_n} \left(1 - \frac{h(h+1)}{2\theta_n}\right)$ .

**20.c** Soit  $\omega_n$  le plus petit entier  $k$  de  $U_n$  tel que  $c_k = M_n$ .

Donner une minoration de  $\omega_n - \theta_n$  ne faisant intervenir que  $\theta_n$ .

**20.d** Montrer que la minoration obtenue est valable aussi pour  $n$  impair.

Quelle est la limite de  $\theta_{n+1} - \theta_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ?