Devoir à la maison n° 18

Problème 1 —

Partie I –

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et préciser sa dimension.

2. Montrer que $\mathcal{A}$ est un anneau commutatif.

3. On pose $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que (I_3, M, M^2) est une base de $\mathcal{A}$.

4. Exprimer M^3 en fonction de I_3 et M.

Partie II –

On définit une suite (u_n) par $u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = 4$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+1} - 4u_n$.

1. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_k, b_k, c_k tels que $M^k = \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k & c_k \\ 0 & -c_k & b_k \end{pmatrix}$.

2. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (a_k) et deux relations de récurrence liant les suites (b_k) et (c_k).

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on appelle z_k le nombre complexe $z_k = b_k + ic_k$. Exprimer z_{k+1} en fonction de z_k et montrer que $b_k = \operatorname{Re}\left((1+i)^k\right)$.

4. Retrouver ce dernier résultat en trouvant une relation de récurrence vérifiée par la suite (b_k).

5. Montrer que la suite (u_n) est à valeurs entières.

6. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \operatorname{tr}(M^n)$.

7. Soit p un nombre premier. On rappelle que pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$ et que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, p divise $a^p - a$ (petit théorème de Fermat).
Montrer que p divise u_p.