Devoir à la maison n$^{\text{o}}$ 2

Exercice 1.

Soit n un entier naturel impair. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $G = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$.

1. Soit $r \in \mathbb{Z}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk}$ selon les valeurs de r.

2. Montrer que l'application $\phi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ k & \longmapsto & \omega^{k^2} \end{array}\right.$ est n-périodique.

3. Soit $j \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+j)^2} = G$.

4. Montrer que $G\overline{G} = n$ et en déduire $|G|$.

Exercice 2.

Soient A, B, C, D quatre points du plan distincts deux à deux. On suppose de plus A, B, C non alignés et on introduit le cercle $\mathcal{C}$ de centre O circonscrit au triangle ABC.
On choisit un repère orthonormé du plan de centre O tel que $\mathcal{C}$ ait pour rayon 1. On note a, b, c, d les affixes respectifs de A, B, C, D.
On pose enfin $Z = \frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b}$.

1. Dans cette question, on suppose que D appartient à $\mathcal{C}$.

- **a.** Justifier que $\overline{a} = \frac{1}{a}$, $\overline{b} = \frac{1}{b}$, $\overline{c} = \frac{1}{c}$, $\overline{d} = \frac{1}{d}$.
- **b.** Montrer que Z est un réel.
- **c.** En déduire que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})[\pi]$.

2. Réciproquement, on suppose que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})[\pi]$ et on veut montrer que D appartient à $\mathcal{C}$.

- **a.** Que peut-on dire de Z ?
- **b.** Exprimer d en fonction de a, b, c, Z.
- **c.** Calculer $\overline{d}$ et en déduire que D appartient à $\mathcal{C}$.

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer de deux manières $(1+i)^n$ et en déduire les sommes suivantes

$$S_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k} \qquad T_n = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$$