

## Partie entière

## Exercice 1 ★★

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Montrer que  $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ .

## Exercice 2 ★★★

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$ .

## Exercice 3 ★★

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Etablir que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

## Exercice 4 ★

## Calcul d'une partie entière

On se propose de calculer la partie entière du réel

$$\alpha = \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. En déduire  $\lfloor \alpha \rfloor$ .

## Exercice 5 ★

Prouver que  $\forall x \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

## Exercice 6 ★★

Prouver que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

## Exercice 7 ★

## Partie fractionnaire d'un réel

On définit la *partie fractionnaire* d'un nombre réel  $x$  par

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

1. Calculer  $\{54, 465\}$  et  $\{-36, 456\}$ .

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Comparer  $\{x\}$  et  $\{-x\}$ .

3. Prouver que la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$x \mapsto \{x\}$$

est périodique et tracer son graphe.

## Exercice 8 ★

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par l'expression

$$\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$$

lorsque  $x$  et  $y$  décrivent  $\mathbb{R}$ .

## Exercice 9 ★★

## Une addition par paliers

Un classique.

1. Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Déterminer les entiers naturels  $k$  tels que

$$\lfloor \sqrt{k} \rfloor = m.$$

2. Soit  $n \geq 0$ . Calculer en fonction de  $n$ ,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n^2+2n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor.$$

**Exercice 10 ★****Deux équations avec partie entière**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations

1.  $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x + 1 \rfloor$ ;
2.  $\lfloor x + 3 \rfloor = \lfloor x - 1 \rfloor$ .

**Exercice 11 ★****Un tracé**

Tracer le graphe de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$x \mapsto \left\lfloor \frac{3}{2} - x \right\rfloor.$$

**Exercice 12 ★****Une inégalité sur la partie entière**

Etablir que  $\forall x \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  :

$$0 \leq \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leq n - 1.$$

**Bornes supérieures et inférieures****Exercice 13 ★★****Point fixe**

Soit  $f$  une application *croissante* de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ . On souhaite montrer que  $f$  admet un point fixe, c'est-à-dire que'il existe  $l \in [0, 1]$  tel que  $f(l) = l$ .

1. On pose  $A = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq x\}$ . Montrer que  $A$  est non vide et majorée.
2. On note alors  $c = \sup A$ . Montrer que  $c \in [0, 1]$ .
3. Montrer que  $c \leq f(c)$ .
4. Montrer que  $f(c) \in A$ . Conclure.

**Exercice 14 ★★★****ENSEA 2010**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $s_n$  la somme des chiffres de l'écriture décimale de  $n$ .

1. Montrer que  $s_n \leq 9(\log_{10} n + 1)$ .
2. Montrer que la suite  $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)$  est bornée. Quelles sont les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble des valeurs de cette suite ? Sont-elles atteintes ?

**Exercice 15 ★★★**

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles non vides et  $f$  une application bornée de  $A \times B$  dans  $\mathbb{R}$ . Comparer  $\sup_{x \in A} \left( \inf_{y \in B} f(x, y) \right)$  et  $\inf_{y \in B} \left( \sup_{x \in A} f(x, y) \right)$ .

**Exercice 16 ★★**

Soit  $f$  une application bornée de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose

$$g(x) = \inf_{y \geq x} f(y) \quad \text{et} \quad h(x) = \sup_{y \geq x} f(y)$$

Déterminer le sens de variation de  $g$  et  $h$ .

**Exercice 17 ★**

Etudier l'existence puis déterminer le cas échéant les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants :

1.  $\mathcal{A} = \left\{1 - \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ ;
2.  $\mathcal{B} = \left\{1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}, (m, n) \in (\mathbb{Z}^*)^2\right\}$ ;
3.  $\mathcal{C} = \left\{1 - \frac{1}{n-m}, (m, n) \in \mathbb{Z}^2, m \neq n\right\}$ ;
4.  $\mathcal{D} = \left\{\frac{pq}{p^2 + q^2}, (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$ ;
5.  $\mathcal{E} = \left\{\frac{2^n}{2^m + 3^{n+m}}, (m, n) \in \mathbb{N}^2\right\}$ ;
6.  $\mathcal{F} = \left\{\frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1}, (n, q) \in \mathbb{N}^2\right\}$ ;
7.  $\mathcal{G} = \left\{\frac{mn}{m^2 + mn + n^2}, (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$ .

**Exercice 18 ★**

Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides et bornées de  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $A \cup B$  est non vide et bornée et que

$$\sup(A \cup B) = \max [\sup(A), \sup(B)]$$

et

$$\inf(A \cup B) = \min [\inf(A), \inf(B)].$$

**Exercice 19 ★****Un calcul de bornes**

Prouver l'existence puis calculer les bornes supérieures et inférieures de l'ensemble

$$A = \{(-1)^n/n \mid n \geq 1\}.$$

**Exercice 20 ★****Bornes d'une somme de parties**

Soient  $A$  et  $B$  des parties non vides de  $\mathbb{R}$ . On définit

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Montrer que si  $A$  et  $B$  sont bornées, alors  $A + B$  l'est aussi et que

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$$

et

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

**Exercice 21 ★★****Distance à une partie**

Pour tout  $A \subset \mathbb{R}$  *non vide* et tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose

$$d(x, A) = \inf \{ |x - a| \mid a \in A \}.$$

(*expression qui se lit : « distance de  $x$  à  $A$  »*)

1. Donner une interprétation *géométrique* de  $d(x, A)$  sur la droite réelle.
2. Examiner les cas où  $A = [0, 1[$  et  $x = 1, 2, 1/2$  ou  $-3$ .
3. On revient au cas général. Justifier l'existence de  $d(x, A)$ .
4. La borne inférieure  $d(x, A)$  est-elle un plus petit élément ? Illustrer par divers exemples.
5. Calculer  $d(x, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Même question avec  $d(x, \mathbb{Q})$ .
6. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|.$$

**Densité****Exercice 22 ★★★**

Montrer que  $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n}, (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 23 ★★**

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

On pose  $a = f(1)$ .

- Déterminer  $f(0)$ .
- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(n) = an$ .
- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f(n) = an$ .
- Montrer que pour tout  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $f(r) = ar$ .
- Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe deux suites de rationnels  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$  convergent vers  $x$  telles que  $\alpha_n \leq x \leq \beta_n$ .
  - On suppose  $f$  croissante. Montrer que  $f(x) = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- Déterminer toutes les applications croissantes  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

**Exercice 24 ★**

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? On justifiera à chaque fois sa réponse.

- Si  $\mathcal{A}$  est une partie de  $\mathbb{R}$  dense dans  $\mathbb{R}$ , alors  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$  n'est pas dense dans  $\mathbb{R}$ .
- $\mathbb{Z}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
- Si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont deux parties de  $\mathbb{R}$  telles que  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  et  $\mathcal{A}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , alors  $\mathcal{B}$  est également dense dans  $\mathbb{R}$ .
- Il existe des parties de  $\mathbb{R}$  bornées et denses dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 25 ★★**

Etablir que  $E = \{r^3 \mid r \in \mathbb{Q}\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Irrationnels****Exercice 26 ★★****Irrationalité de  $e$** 

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. On définit une fonction  $g$  par  $g(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$  pour  $x \in [0, 1]$ . On définit également une fonction  $h$  par  $h(x) = g(x) + e^{-x} \frac{x^n}{n!}$ .

- Montrer que  $g$  est strictement décroissante sur  $[0, 1]$ .
- En déduire que  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e$ .
- Montrer que  $h$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$ .
- En déduire que  $e < \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) + \frac{1}{n!}$ .
- On suppose que  $e$  est rationnel. Il existe donc deux entiers naturels  $p, q$  tels que  $e = \frac{p}{q}$ . Montrer par l'absurde que  $q > n$ .
- Conclure.

**Exercice 27 ★★★****Théorème de Beatty**

Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels non nuls tels que  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ . On suppose  $\alpha > 1$  et  $\alpha$  *irrationnel*. On pose

$$A = \{[n\alpha] \mid n \in \mathbb{N}^*\} \text{ et } B = \{[n\beta] \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

1. Montrer que  $\beta > 1$  et que  $\beta$  est également irrationnel.
2. On suppose qu'il existe un couple  $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que  $[p\alpha] = [q\beta]$ . On pose alors  $k = [p\alpha] = [q\beta]$ .
  - a. Montrer que  $p - \frac{1}{\alpha} < \frac{k}{\alpha} < p$  et  $q - \frac{1}{\beta} < \frac{k}{\beta} < q$  et aboutir à une contradiction.
  - b. En déduire que  $A \cap B = \emptyset$ .
3. On suppose qu'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  qui n'est ni dans  $A$  ni dans  $B$ .
  - a. Montrer qu'il existe un couple  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $[p\alpha] < k < [(p+1)\alpha]$  et  $[q\beta] < k < [(q+1)\beta]$ .
  - b. Montrer que  $p < \frac{k}{\alpha} < p+1 - \frac{1}{\alpha}$  et  $q < \frac{k}{\beta} < q+1 - \frac{1}{\beta}$  et aboutir à une contradiction.
  - c. En déduire que  $A \cup B = \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 28 ★★**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  impair tel que  $n \geq 3$ . On pose  $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}$ . On souhaite montrer que  $\frac{\varphi}{\pi}$  est irrationnel.

1. Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on pose  $A_k = (\sqrt{n})^k \cos k\varphi$ . Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_{k+1} + nA_{k-1} = 2A_k$ .
2. En déduire que les  $A_k$  sont des entiers.
3. Montrer qu'aucun des  $A_k$  n'est divisible par  $n$ .
4. Conclure en raisonnant par l'absurde.

**Exercice 29 ★**

Prouver que le nombre  $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$  est irrationnel.

**Exercice 30 ★**

Le réel  $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$  est-il rationnel ?

**Exercice 31****Rationnels et irrationnels**

Que dire de  $x + y$  et  $xy$  dans les quatre cas suivants ?

1.  $x, y \in \mathbb{Q}$ ;
2.  $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;
3.  $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;
4.  $y \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**Exercice 32 ★****Racines carrées d'entiers**

Montrer que si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sqrt{n}$  est rationnel si et seulement si  $n$  est un carré parfait (ie de la forme  $m^2$  avec  $m \in \mathbb{N}$ ).

**Intervalles****Exercice 33 ★**

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a \leq b$ . Montrer que

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb, t \in [0, 1]\}$$

**Exercice 34**

Prouver l'égalité

$$\bigcup_{n \geq 1} \left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[ = ]0, 1[ \cup ]1, 2[.$$

**Relations binaires**

### Exercice 35 ★

Soit  $\varphi$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour tous réels  $a, b$  on pose

$$a \leq_{\varphi} b \iff \varphi(b) - \varphi(a) \geq |b - a|.$$

1. Montrer que  $\leq_{\varphi}$  est une relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que cet ordre est total si et seulement si pour tous réels  $a, b$ ,  $|\varphi(b) - \varphi(a)| \geq |b - a|$ .
3. Quel ordre obtient on si  $\varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}}$  ?

### Exercice 36 ★

Soit  $X$  un ensemble de cardinal supérieur à 1. On munit  $\mathcal{P}(X)$  de l'ordre  $\subset$ . On note  $E \subset \mathcal{P}(X)$  l'ensemble des singletons de  $E$ .

1.  $E$  possède-t-il un plus grand élément ?
2.  $E$  possède-t-il une borne supérieure ?

### Exercice 37 ★★

#### L'ordre lexicographique

On définit une relation binaire sur  $\mathbb{N}^2$  par

$$x \leq y \text{ si et seulement si } \begin{pmatrix} x_1 < y_1 \\ \text{ou} \\ x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2 \end{pmatrix}$$

où  $x = (x_1, x_2)$  et  $y = (y_1, y_2)$

1. Prouver que  $\leq$  est une relation d'ordre sur  $\mathbb{N}^2$ .
2. L'ordre est-il total ?
3. On pose  $A = \{(p, p), p \in \mathbb{N}\}$  et

$$B = \{(2, 10^p), p \in \mathbb{N}\}.$$

Les parties  $A$  et  $B$  de  $(\mathbb{N}^2, \leq)$  sont-elles majorées ? Possèdent-elles un plus grand élément ? Une borne supérieure ?

### Exercice 38 ★

Soit  $E$  un ensemble.

1. Montrer que la relation d'inclusion notée  $\subset$  est un ordre sur  $\mathcal{P}(E)$ .
2. L'ordre est-il total ?
3. On pose pour tout  $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ ,

$$\sup(A, B) = \sup(\{A, B\}) \text{ et } \inf(A, B) = \inf(\{A, B\}).$$

- a. Justifier ces définitions. On exprimera  $\sup(A, B)$  et  $\inf(A, B)$  en fonction des sous-ensembles  $A$  et  $B$  à l'aide des symboles  $\cup$  et  $\cap$ .
- b. Montrer plus généralement que toute partie non vide  $\mathcal{F}$  de  $(\mathcal{P}(E), \subset)$  admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on explicitera à l'aide de  $\mathcal{F}$  en utilisant les symboles  $\cap$  et  $\cup$ .

### Exercice 39 ★

Soit  $E$  un ensemble muni d'une relation d'équivalence  $\mathbb{R}$ . Pour  $x \in E$ , on appelle classe d'équivalence de  $x$  l'ensemble  $C(x) = \{y \in E \mid x \mathcal{R} y\}$ . Montrer que les classes d'équivalences forment une partition de  $E$ .

### Exercice 40 ★★

1. Montrer que la relation  $\mathcal{R}$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$x \mathcal{R} y \iff x e^y = y e^x$$

est une relation d'équivalence.

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Quel est le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de  $x$  ?

### Exercice 41 ★

On définit une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $\mathbb{C}$  par

$$z \mathcal{R} z' \iff |z| = |z'|$$

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence et décrire géométriquement les classes d'équivalence.

**Exercice 42 ★**

On définit sur  $\mathbb{Z}$  la relation  $\mathcal{R}$  par

$$x\mathcal{R}y \text{ si et seulement si } x + y \text{ est pair.}$$

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence et déterminer les classes d'équivalence.

**Exercice 43 ★**

On définit la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur  $\mathbb{R}$  par

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y$$

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence et déterminer les cardinaux des classes d'équivalence.

**Exercice 44 ★★****Conjugaison**

Soit  $E$  un ensemble. On rappelle que  $E^E$  est l'ensemble des applications de  $E$  dans  $E$ . Si  $f$  et  $g$  sont deux éléments de  $E^E$ , on dira que  $f$  est conjuguée à  $g$  s'il existe une bijection  $\varphi$  de  $E$  dans  $E$  telle que  $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$ . On notera alors  $f \sim g$ .

1.
  - a. Montrer que  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $E^E$ .
  - b. Quelle est la classe d'équivalence de  $\text{Id}_E$  ?
  - c. Quelle est la classe d'équivalence d'une application constante ?
2. On suppose dans cette question que  $E = \mathbb{R}$ .
  - a. Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ . Les applications  $f : x \mapsto x^2$  et  $g : x \mapsto ax^2$  sont-elles conjuguées ?
  - b. Les applications  $\sin$  et  $\cos$  sont-elles conjuguées ?

**Exercice 45 ★★★**

On définit une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff |x' - x| \leq y' - y$$

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?
2. On pose  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Montrer que  $\sup A = (0, \sqrt{2})$ .

**Exercice 46 ★★**

Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux cercles du plan, de centres respectifs  $O$ ,  $O'$  et de rayons respectifs  $R$  et  $R'$ . On dit que  $\mathcal{C}$  est inférieur à  $\mathcal{C}'$  si  $OO' \leq R' - R$ . On note alors  $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}'$ . Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre dans l'ensemble des cercles du plan.

**Exercice 47 ★★**

Dans  $\mathbb{N}^*$ , on considère la relation  $\mathcal{R}$  suivante :

$$p\mathcal{R}q \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad q = p^n$$

1. Démontrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?
2. La partie  $\{2, 3\}$  est-elle majorée ?

**Exercice 48 ★**

Soient  $E$  un ensemble,  $(F, \leq)$  un ensemble ordonné et  $f : E \rightarrow F$  une application injective. On définit dans  $E$  la relation  $\mathcal{R}$  par  $x\mathcal{R}y \iff f(x) \leq f(y)$ . Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre sur  $E$ .