Devoir à la maison n°01 : corrigé

Solution 1

1. D'après l'énoncé, $x_0^3 = x_0^2$ donc $x_0 \in \{0, 1\}$.

2. Si $x_0 = 0$, alors $x_1^3 = x_1^2$ donc $x_1 \in \{0, 1\}$. Si $x_0 = 1$, alors $1 + x_1^3 = (1 + x_1)^2$ ce qui équivaut à $x_1(x_1^2 - x_1 - 2) = 0$ ou encore $x_1(x_1 - 2)(x_1 + 1) = 0$ de sorte que $x_1 \in \{-1, 0, 2\}$.

3. Si $(x_0, x_1) = (0, 0)$, alors $(S_0, S_1) = (0, 0)$.
Si $(x_0, x_1) = (0, 1)$, alors $(S_0, S_1) = (0, 1)$.
Si $(x_0, x_1) = (1, 0)$, alors $(S_0, S_1) = (1, 1)$.
Si $(x_0, x_1) = (1, -1)$, alors $(S_0, S_1) = (1, 0)$.
Si $(x_0, x_1) = (1, 2)$, alors $(S_0, S_1) = (1, 3)$.

4. On raisonne par récurrence. On note $\mathcal{P}_n$ l'assertion

$$\exists m \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{m(m+1)}{2}$$

Tout d'abord, $\mathcal{P}_0$ est vraie puisque $S_0 = 0 = \frac{0\cdot(0+1)}{2}$ ou $S_1 = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$.
Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $S_n = \frac{m(m+1)}{2}$. D'une part,

$$\sum_{k=0}^{n+1} x_k^3 = S_{n+1}^2 = (S_n + x_{n+1})^2$$

et d'autre part

$$\sum_{k=0}^{n+1} x_k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^3\right) + x_{n+1}^3 = S_n^2 + x_{n+1}^3$$

On en déduit que

$$(S_n + x_{n+1})^2 = S_n^2 + x_{n+1}^3$$

ou encore

$$x_{n+1}(x_{n+1}^2 - x_{n+1} - 2S_n) = 0$$

Cette dernière égalité équivaut à

$$x_{n+1}(x_{n+1}^2 - x_{n+1} - m(m+1)) = 0$$

ou encore

$$x_{n+1}(x_{n+1} + m)(x_{n+1} - (m+1)) = 0$$

de sorte que $x_{n+1} \in \{-m, 0, m+1\}$.
Si $x_{n+1} = -m$, alors $S_{n+1} = S_n - m = \frac{m(m-1)}{2} = \frac{(m-1)((m-1)+1)}{2}$. Si $m \geq 1$, alors $m - 1 \in \mathbb{N}$. Sinon $m = 0$ et alors $S_{n+1} = 0 = \frac{0\cdot(0+1)}{2}$.
Si $x_{n+1} = 0$, alors $S_{n+1} = S_n = \frac{m(m+1)}{2}$ et $m \in \mathbb{N}$.
Si $x_{n+1} = m+1$, alors $S_{n+1} = S_n + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$ et $m+1 \in \mathbb{N}$. Dans tous les cas de figure, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 2

1. On remarque que

$$f(0) = f(0^2 + 0^2) = f(0)^2 + f(0)^2 = 2f(0)^2$$

de sorte que $f(0) = 0$ ou $f(0) = \frac{1}{2}$. Or f est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc $f(0) = 0$.
De même

$$f(1) = f(1^2 + 0^2) = f(1)^2 + f(0)^2 = f(1)^2$$

donc $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$. Or l'énoncé stipule que $f(1) \neq 0$ donc $f(1) = 1$.

2. On utilise à nouveau le même genre d'astuce.

$$\begin{aligned}
f(2) &= f(1^2+1^2) = f(1)^2 + f(1)^2 = 2 \\
f(4) &= f(2^2+0^2) = f(2)^2 + f(0)^2 = 4 \\
f(5) &= f(2^2+1^2) = f(2)^2 + f(1)^2 = 5 \\
f(8) &= f(2^2+2^2) = f(2)^2 + f(2)^2 = 8
\end{aligned}$$

3. On décompose 5^2 de deux manières sous la forme d'une somme de deux carrés.

$$\begin{aligned}
f(5^2) &= f(3^2+4^2) = f(3)^2 + f(4)^2 \\
&= f(5^2+0^2) = f(5)^2 + f(0)^2 = f(5)^2
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$f(3)^2 = f(5)^2 - f(4)^2 = 5^2 - 4^2 = 3^2$$

Puisque f est à valeurs positives, $f(3) = 3$. On en déduit aussitôt que

$$f(9) = f(3^2+0^2) = f(3)^2 + f(0)^2 = 3^2 + 0^2 = 9$$

De la même manière, puisque $10^2 = 6^2 + 8^2$,

$$f(10)^2 = f(10^2) = f(6)^2 + f(8)^2$$

Ainsi

$$f(6)^2 = f(10)^2 - f(8)^2 = 10^2 - 8^2 = 6^2$$

de sorte que $f(6) = 6$.
Enfin,

$$f(10) = f(1^2+3^2) = f(1)^2 + f(3)^2 = 1^2 + 3^2 = 10$$

4. Tout d'abord

$$f(50) = f(5^2+5^2) = f(5)^2 + f(5)^2 = 5^2 + 5^2 = 50$$

Enfin,

$$50 = f(50) = f(1^2+7^2) = f(1)^2 + f(7)^2 = 1 + f(7)^2$$

donc $f(7)^2 = 49 = 7^2$ puis $f(7) = 7$.

5. Puisque $125 = 10^2 + 5^2 = 11^2 + 2^2$, on obtient

$$f(10)^2 + f(5)^2 = f(11)^2 + f(2)^2$$

Or on a montré que $f(10) = 10$, $f(5) = 5$ et $f(2) = 2$ donc $f(11)^2 = 11^2$ puis $f(11) = 11$. De même, $145 = 8^2 + 9^2 = 12^2 + 1^2$ et on a montré que $f(8) = 8$, $f(9) = 9$ et $f(1) = 1$. On en déduit comme précédemment que $f(12) = 12$.

6. On peu raisonnablement conjecturer que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On note $\mathcal{P}_n$ l'assertion

$$\forall k \in [\![0, 2n]\!],\ f(k) = k$$

D'après les questions précédentes, $\mathcal{P}_4$ est vraie (et même $\mathcal{P}_6$).
On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain entier $n \geq 4$ D'après les indications de l'énoncé,

$$f(2n+1)^2 + f(n-2)^2 = f(2n-1)^2 + f(n+2)^2$$

Or $n-2$, $n+2$ et $2n-1$ appartiennent à $[\![0, 2n]\!]$ car $n \geq 2$ donc $f(n-2) = n-2$, $f(n+2) = n+2$ et $f(2n-1) = 2n-1$ d'après $\mathcal{P}_n$. Ainsi $f(2n+1)^2 = (2n+1)^2$ puis $f(2n+1) = 2n+1$.
De même,

$$f(2n+2)^2 + f(n-4)^2 = f(2n-2)^2 + f(n+4)^2$$

Or $n-4$, $n+4$ et $2n-2$ appartiennent à $[\![0, 2n]\!]$ car $n \geq 4$ donc $f(n-4) = n-4$, $f(n+4) = n+4$ et $f(2n-2) = 2n-2$ d'après $\mathcal{P}_n$. Ainsi $f(2n+2)^2 = (2n+2)^2$ puis $f(2n+2) = 2n+2$.
Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui permet d'affirmer que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 3

1. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

b. D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = n(1+x)^{n-1}$$

et d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$

On a donc

$$f_n'(1) = 2^{n-1}n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

c. D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

et d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n''(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2}$$

On a donc

$$f_n''(1) = 2^{n-2}n(n-1) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$$

d. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k^2 = k(k-1) + k$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 2^{n-2}n(n-1) + 2n - 1n = 2^{n-2}n(n+1)$$

2. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k \\
&= \sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{2k} x^{2k} + \sum_{0 \le 2+1k \le n} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{2k} (-x)^{2k} + \sum_{0 \le 2+1k \le n} \binom{n}{2k+1} (-x)^{2k+1} \\
&= \sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{2k} x^{2k} + \sum_{0 \le 2+1k \le n} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{2k} x^{2k} - \sum_{0 \le 2+1k \le n} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1} \\
&= 2\sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{2k} x^{2k}
\end{aligned}$$

b. D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n'(x) = n(1+x)^{n-1} - n(1-x)^{n-1}$$

et d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n'(x) = 2\sum_{0 \le 2k \le n} 2k\binom{n}{2k} x^{2k-1} = 4\sum_{0 \le 2k \le n} k\binom{n}{2k} x^{2k-1}$$

On a donc

$$g_n'(1) = 2^{n-1}n = 4\sum_{0 \le 2k \le n} k\binom{n}{2k}$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{0 \le 2k \le n} k\binom{n}{2k} = 2^{n-3}n$.

c. D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} + n(n-1)(1-x)^{n-2}$$

et d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n''(x) = 2\sum_{0 \le 2k \le n} 2k(2k-1)\binom{n}{2k} x^{2k-2}$$

On a donc

$$g_n''(1) = 2^{n-2}n(n-1) = \sum_{0\leq 2k\leq n} 4k(2k-1)\binom{n}{2k}$$

Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k^2 = \frac{4k(2k-1)}{8} + \frac{k}{2}$,

$$\begin{aligned}\sum_{0\leq 2k\leq n} k^2\binom{n}{2k} &= \frac{1}{4}\sum_{0\leq 2k\leq n} 2k(2k-1)\binom{n}{2k} + \frac{1}{2}\sum_{0\leq 2k\leq n} k\binom{n}{2k}\\ &= \frac{2^{n-2}n(n-1)}{8} + \frac{2^{n-3}n}{2} = 2^{n-5}n(n+1)\end{aligned}$$