Devoir à la maison n°04 : corrigé

Problème 1 — Étude d'une fonction

1. **a.** Pour tout $x \in I$, $\cos x \leqslant 1$ et donc $5 - 4\cos x \geqslant 1 > 0$. f est donc bien définie sur I (et même sur $\mathbb{R}$).

   b. On peut utiliser la quantité conjuguée. Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) - \sin x &= \sin x \left(\frac{1}{\sqrt{5 - 4\cos x}} - 1 \right) = \frac{\sin x}{\sqrt{5 - 4\cos x}} \left(1 - \sqrt{5 - 4\cos x} \right) \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{5 - 4\cos x}} \frac{1 - (5 - 4\cos x)}{1 + \sqrt{5 - 4\cos x}} = -\frac{4\sin x}{\sqrt{5 - 4\cos x}} \frac{1 - \cos x}{1 + \sqrt{5 - 4\cos x}} \end{aligned}$$

   Comme $1 - \cos x \geqslant 0$ et $\sin x \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant \sin x$ i.e. $f(x) - \sin x \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.

   c. On étudie la fonction $\varphi : x \mapsto \sin x - x$ sur I. On a $\varphi'(x) = \cos x - 1 \leqslant 0$ pour tout $x \in I$ et φ' ne s'annule qu'en 0 sur $[0, \pi]$. Ainsi φ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Puisque $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) < 0$ pour tout $x \in]0, \pi]$.
   $f(0) = 0$ et pour tout $x \in]0, \pi]$, $f(x) \leqslant \sin x < x$. Donc l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur I est $x = 0$.

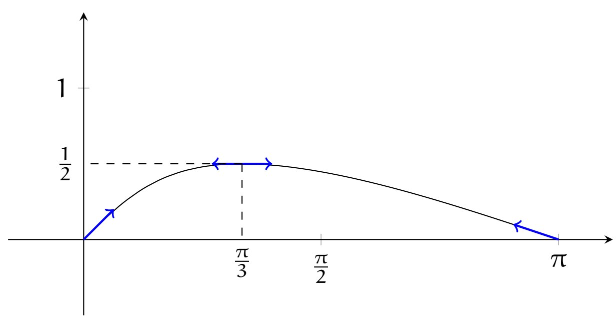
2. Pour tout $x \in I$, $5 - 4\cos x > 0$ donc $x \mapsto \sqrt{5 - 4\cos x}$ est dérivable sur I et ne s'y annule pas. Comme sin est également dérivable sur I, f est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables sur I et pour $x \in I$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x}{\sqrt{5 - 4\cos x}} - \frac{4\sin^2 x}{2(5 - 4\cos x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cos x(5 - 4\cos x) - 2\sin^2 x}{(5 - 4\cos x)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-2\cos^2 x + 5\cos x - 2}{(5 - 4\cos x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(2 - \cos x)(2\cos x - 1)}{(5 - 4\cos x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

   En effet, $-2X^2 + 5X - 2$ se factorise sous la forme $(2 - X)(2X - 1)$. Comme $2 - \cos x > 0$ pour tout $x \in I$, le signe de $f(x)$ ne dépend que du signe de $2\cos x - 1$. On en déduit le tableau de variations et le graphe suivants.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

   On a notamment $f'(0) = 1$ et $f'(\pi) = -\frac{1}{3}$.



3. **a.** Comme $t \mapsto 5-4t$ ne s'annule pas sur $[-1,1]$, ϕ est dérivable sur $[-1,1]$ et $\phi'(t) = -\frac{9}{(4t-5)^2} < 0$ pour $t \in [-1,1]$. ϕ est donc strictement décroissante sur $[-1,1]$. Comme ϕ est continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$, $\phi([-1,1]) = [\phi(1), \phi(-1)] = [-1,1]$.

   b. cos est définie sur I à valeurs dans $[-1,1]$, ϕ est définie sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[-1,1]$ et arccos est définie sur $[-1,1]$ donc $g = \arccos \circ \phi \circ \cos$ est définie sur I.

   c. cos est strictement décroissante sur I à valeurs dans $[-1,1]$, ϕ est strictement décroissante sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[-1,1]$ et arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$. On en déduit que $g = \arccos \circ \phi \circ \cos$ est strictement décroissante sur I. Comme g est également continue sur I comme composée de fonctions continues, $g(I) = [g(\pi), g(0)] = [0,\pi] = I$.

4. **a.** Les variations de f montrent que $f(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Comme f est strictement décroissante et continue sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, f induit une bijection de $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Il existe donc un unique $z \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ tel que $f(z) = f(x)$.

   b. $\cos(g(x)) = \cos(\arccos(\phi(\cos x))) = \phi(\cos x)$. Ainsi $\cos(g(x)) = \phi(\cos x) = \dfrac{4-5\cos x}{5-4\cos x}$.
   $\sin(g(x)) = \sqrt{1-\cos^2(g(x))}$. On obtient $\sin(g(x)) = \sqrt{\dfrac{9\sin^2 x}{(5-4\cos x)^2}} = \dfrac{3\sin x}{5-4\cos x}$ car $\sin x \geqslant 0$ et $5-4\cos x \geqslant 0$.

   c. $f(g(x)) = \dfrac{\sin(g(x))}{\sqrt{5-4\cos(g(x))}}$. En remplaçant $\cos(g(x))$ et $\sin(g(x))$ par les expressions trouvées à la question précédente, on obtient bien $f(g(x)) = f(x)$.
   De plus, $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et g est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ donc $g(x) \in \left[g(\frac{\pi}{3}), g(0)\right] = \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.
   Enfin, z est l'unique réel appartenant à $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ tel que $f(z) = f(x)$ donc $z = g(x)$.

5. **a.** On a $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$. Or $\theta \in [0,\pi]$ donc $\frac{\theta}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi $\cos\frac{\theta}{2}$ et $\sin\frac{\theta}{2}$ sont positifs. On en déduit les résultats annoncés.

   b. On a $\cos\left(\dfrac{x+z}{2}\right) = \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{z}{2} - \sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{z}{2}$ et $\cos\left(\dfrac{z-x}{2}\right) = \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{z}{2} + \sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{z}{2}$. De plus, $x, z \in [0,\pi]$ donc

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{z}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\sqrt{\frac{1+\cos z}{2}} \qquad \sin\frac{x}{2}\sin\frac{z}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos z}{2}}$$

   Or $\cos z = \cos(g(x)) = \dfrac{4-5\cos x}{5-4\cos x}$ donc

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{z}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(1+\cos x)\left(1+\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(1+\cos x)(9-9\cos x)}}{\sqrt{5-4\cos x}} = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sqrt{5-4\cos x}} = \frac{3}{2}f(x)$$

$$\sin\frac{x}{2}\sin\frac{z}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(1-\cos x)\left(1-\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(1+\cos x)(1+\cos x)}}{\sqrt{5-4\cos x}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sqrt{5-4\cos x}} = \frac{1}{2}f(x)$$

   car $\sin x \geqslant 0$. On en déduit que $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right) = f(x)$ et $\cos\left(\frac{z-x}{2}\right) = 2f(x)$.

6. **a.** f est strictement croissante et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ donc induit une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ sur $\left[f(0), f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

   b. Soit $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et posons $x = h(y)$ de sorte que $y = f(x)$. Posons également $z = g(x)$.
   D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right) = y$. De plus, $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et $z \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ donc $\frac{x+z}{2} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right] \subset [0,\pi]$. Ainsi $\frac{x+z}{2} = \arccos y$.
   D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{z-x}{2}\right) = 2y$. De plus, $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et $z \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ donc $\frac{z-x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset [0,\pi]$. Ainsi $\frac{z-x}{2} = \arccos 2y$.
   Enfin, $x = \frac{x+z}{2} - \frac{z-x}{2} = \arccos y - \arccos 2y$. On a donc $h(y) = \arccos y - \arccos 2y$.

Solution 1.

1. $f(z)$ est défini *si et seulement si* $e^z + e^{-z} \neq 0$. Or

$$e^z + e^{-z} = 0 \iff e^{2z} = -1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 2z = (2k+1)i\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = i\frac{\pi}{2} + ik\pi$$

   Donc $f(z)$ est défini pour $z \notin i\frac{\pi}{2} + i\pi\mathbb{Z}$.

2. $f(z) = 0$ équivaut à $e^z - e^{-z} = 0$. Or

$$e^z - e^{-z} = 0 \iff e^{2z} = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 2z = 2ik\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = ik\pi$$

L'ensemble des solutions est donc $i\pi\mathbb{Z}$.

3. Posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
|f(z)| < 1 &\iff \left|e^z - e^{-z}\right|^2 < \left|e^z + e^{-z}\right|^2 \\
&\iff \left(e^z - e^{-z}\right)\overline{\left(e^z - e^{-z}\right)} < \left(e^z + e^{-z}\right)\overline{\left(e^z + e^{-z}\right)} \\
&\iff \left(e^z - e^{-z}\right)\left(e^{\overline{z}} - e^{-\overline{z}}\right) < \left(e^z + e^{-z}\right)\left(e^{\overline{z}} + e^{-\overline{z}}\right) \\
&\iff -e^{z-\overline{z}} - e^{\overline{z}-z} < e^{z-\overline{z}} + e^{\overline{z}-z} \\
&\iff e^{2iy} + e^{-2iy} > 0 \\
&\iff \cos(2y) > 0
\end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} |\operatorname{Im} z| < \dfrac{\pi}{2} \\ |f(z)| < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |y| < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos(2y) > 0 \end{cases} \iff |y| < \dfrac{\pi}{4}$.

4. Soit $z \in \Delta$. D'après la question précédente, $|f(z)| < 1$ i.e. $f(z) \in \mathcal{D}$. Ainsi tout élément de Δ a pour image par f un élément de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire que $f(\Delta) \subset \mathcal{D}$.

5. **Existence :** Puisque Z est non nul, Z possède des arguments. De plus, les arguments de Z étant égaux à un multiple de 2π près, il existe un argument θ de Z appartenant à $]-\pi, \pi]$. On ne peut avoir $\theta = \pi$ sans quoi Z serait un réel négatif. Considérons également le module r de Z, qui est strictement positif puisque Z est non nul. On peut alors poser $z = \ln r + i\theta$ de sorte que $e^z = Z$ et $\operatorname{Im}(z) = \theta \in]-\pi, \pi[$.
Unicité : Supposons qu'il existe deux complexes z et z' tels que $e^z = e^{z'} = Z$ et les réels $\operatorname{Im}(z)$ et $\operatorname{Im}(z')$ soient dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$. Puisque $e^z = e^{z'}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z' = z + 2ik\pi$. En partiulier, $\operatorname{Im}(z') - \operatorname{Im}(z) = 2k\pi$. Mais comme les réels $\operatorname{Im}(z)$ et $\operatorname{Im}(z')$ soient dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$, $-2\pi < \operatorname{Im}(z') - \operatorname{Im}(z) < 2\pi$, de sorte que $-1 < k < 1$. Puisque k est entier k est nul puis $z' = z$.

6. Remarquons que

$$\frac{1+u}{1-u} = \frac{(1+u)(1-\overline{u})}{|1-u|^2} = \frac{1 - |u|^2 + 2i\operatorname{Im}(u)}{|1-u|^2}$$

On en déduit que si $\frac{1+u}{1-u} \in \mathbb{R}_-$, alors $1 - |u|^2 \leqslant 0$ i.e. $|u| \geqslant 1$. Par contraposition, si $u \in \mathcal{D}$, $\frac{1+u}{1-u} \notin \mathbb{R}_-$.

7. Montrons que tout élément de $\mathcal{D}$ admet un unique antécédent dans Δ. Soit $u \in \mathcal{D}$ et $z \in \mathbb{C}$. On a facilement $f(z) = u \iff e^{2z} = \frac{1+u}{1-u}$. D'après la question **6**, $\frac{1+u}{1-u} \notin \mathbb{R}_-$. D'après la question **5**, cette équation admet une unique solution telle que $\operatorname{Im}(2z) \in]-\pi, \pi[$ i.e. $\operatorname{Im}(z) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Notons encore z cette solution. Comme on a également $|f(z)| < 1$, la question **3** montre que $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4}$ i.e. $z \in \Delta$. L'équation $f(z) = u$ admet donc une unique solution dans Δ.
Puisqu'on a également montré que $f(\Delta) \subset \mathcal{D}$, f réalise bien une bijection de Δ sur $\mathcal{D}$.