

DEVOIR SURVEILLÉ N°02

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – Un développement asymptotique de la série harmonique (d'après ENS BL 2010)

Dans tout le problème, on considère les suites $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies pour tout entier naturel non nul n par :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = H_n - \ln n$$

Partie I –

1. Etablir pour tout entier naturel k non nul l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

2. **a.** Quelle est la limite de la suite (H_n) ?
b. En utilisant le résultat de la question 1, montrer pour tout entier naturel non nul n l'encadrement suivant :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

- c.** En déduire un équivalent simple de H_n quand n tend vers $+\infty$.

3. **a.** En utilisant à nouveau l'encadrement obtenu à la question 1, montrer que la suite (u_n) est décroissante.
b. En déduire que cette suite est convergente ; on note γ sa limite. Montrer que γ appartient à $[0, 1]$.

4. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* . On pose pour tout entier naturel non nul k :

$$J_k = \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t) \, dt$$

- a.** Établir pour tout entier naturel non nul k l'égalité suivante :

$$J_k = \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t) \, dt$$

- b.** En déduire pour tout entier naturel non nul n la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t) \, dt - \sum_{k=1}^{n-1} J_k$$

5. On suppose dans cette question que la fonction f est définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \frac{1}{x}$.

a. Établir pour tout entier naturel non nul k la double inégalité suivante :

$$0 \leq J_k \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{4t^3}$$

b. En déduire que la série de terme général J_k est convergente.

c. En déduire également, pour tout entier naturel non nul n l'encadrement suivant :

$$0 \leq \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leq \frac{1}{8n^2}$$

d. En déduire le développement asymptotique suivant :

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Partie II –

On considère les suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 2}$ définies par :

$$\forall n \geq 1, x_n = u_n - \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, y_n = x_n - x_{n-1}$$

1. a. Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$?

b. Justifier pour tout entier naturel non nul n l'égalité suivante :

$$\gamma - x_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k$$

c. En déduire pour tout entier naturel non nul n l'égalité suivante :

$$\gamma - x_n = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2 \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right)$$

2. Montrer que

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2 \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3k^3}$$

3. En déduire que

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$