DEVOIR À LA MAISON N°15

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Partie I – Polynômes de Bernoulli

On admet l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ vérifiant les trois conditions suivantes :

$$\mathrm{B}_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{B}_n' = \mathrm{B}_{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 \mathrm{B}_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

On pose également $b_n = \mathrm{B}_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer B_1 et B_2. En déduire b_1 et b_2.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\mathrm{B}_n(0) = \mathrm{B}_n(1)$.

3. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n = (-1)^n \mathrm{B}_n(1-\mathrm{X})$. Montrer que la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les trois mêmes conditions que celles définissant la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{B}_n = (-1)^n \mathrm{B}_n(1-\mathrm{X})$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{B}_{2n+1}(0) = \mathrm{B}_{2n+1}(1) = 0$.

5. A l'aide de la formule de Taylor, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}\mathrm{X}^k$.

6. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{b_k}{(2n+2-k)!}$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_{2n} = \frac{1}{(2n+1)!} - 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{2k}}{(2n+2-2k)!}$$

7. Calculer b_4.

Partie II – Lemme de Riemann-Lebesgue et noyau de Dirichlet

8. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^1 f(t)\sin(\lambda t) = 0$$

9. Montrer que $\varphi : t \in]0,1[\mapsto \dfrac{t(1-t)}{\sin(\pi t)}$ peut se prolonger en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

10. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall t \in]0,1[,\ \sum_{k=1}^{p} \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2p+1)\pi t)}{2\sin(\pi t)} - \frac{1}{2}$$

11. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1) = 0$. Montrer que

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} \int_0^1 \mathrm{P}(t)\cos(2k\pi t)\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{P}(t)\ \mathrm{d}t$$

Partie III – Fonction ζ de Riemann

On note pour tout réel $\alpha > 1$, $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
On pose pour $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$\mathrm{I}_{k,n} = \int_0^1 \mathrm{B}_{2n}(t)\cos(2k\pi t)\ \mathrm{d}t$$

12. Calculer $\mathrm{I}_{k,1}$.

13. Déterminer une relation entre $\mathrm{I}_{k,n}$ et $\mathrm{I}_{k,n-1}$ valide pour tout entier $n \geq 2$. En déduire que

$$\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \mathrm{I}_{k,n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}}$$

14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \cdot (2\pi)^{2n} b_{2n}$$

15. Calculer $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.