

# DEVOIR SURVEILLÉ N° 6

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## EXERCICE 1.

### Vocabulaire et notations

- Pour un réel  $t$ , on notera  $\lfloor t \rfloor$  la partie entière de  $t$ .
- La notation  $\llbracket 0, 9 \rrbracket$  désigne l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .
- On dit qu'une suite  $(u_n)$  est périodique à partir d'un certain rang s'il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $T \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u_{n+T} = u_n$  pour tout  $n \geq N$ . On dit alors que  $(u_n)$  est  $T$ -périodique à partir du rang  $N$ .

Soit  $x$  un nombre réel. On définit deux suites  $(d_n)$  et  $(\varepsilon_n)$  de la manière suivante :

- On pose  $d_0 = \lfloor x \rfloor$  et  $\varepsilon_0 = x - \lfloor x \rfloor$ .
  - Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $d_{n+1} = \lfloor 10\varepsilon_n \rfloor$  et  $\varepsilon_{n+1} = 10\varepsilon_n - \lfloor 10\varepsilon_n \rfloor$ .
1. Dans cette question uniquement, on suppose  $x = 123,456$ . Calculer  $d_0, d_1, d_2, d_3$  et  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ . Que valent  $d_n$  et  $\varepsilon_n$  pour  $n \geq 4$  ?
  2. On revient au cas général.
    - a. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon_n \in [0, 1[$ .
    - b. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $d_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ .
    - c. On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{d_k}{10^k}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $x = S_n + \frac{\varepsilon_n}{10^n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
    - d. En déduire que  $(S_n)$  converge vers  $x$ .
  3. Soient  $T \in \mathbb{N}^*$  et  $N \in \mathbb{N}$ . On suppose que la suite  $(d_n)$  est  $T$ -périodique à partir du rang  $N$ .
    - a. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = 10^{N+T}S_{n+N+T} - 10^N S_{n+N}$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  est constante.
    - b. En déduire qu'il existe  $p \in \mathbb{Z}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ 

$$10^{N+T}S_{n+N+T} - 10^N S_{n+N} = p$$
    - c. En déduire que  $x$  est rationnel.
  4. Soit  $\alpha$  le nombre dont l'écriture décimale est  $0,123456456456456\dots$ . Montrer que  $\alpha$  est rationnel et l'écrire sous la forme d'une fraction de deux entiers.
  5. On suppose que  $x$  est rationnel. Il existe donc  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{N}^*$  tel que  $x = \frac{a}{b}$ . On définit deux suites  $(q_n)$  et  $(r_n)$  de la manière suivante.
    - $q_0$  et  $r_0$  sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .
    - Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q_{n+1}$  et  $r_{n+1}$  sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de  $10r_n$  par  $b$ .

- a. Justifier qu'il existe deux entiers naturels  $N$  et  $M$  distincts tels que  $r_N = r_M$ .
- b. En déduire que  $(r_n)$  est périodique à partir d'un certain rang.
- c. En déduire que  $(q_n)$  est également périodique à partir d'un certain rang.
- d. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r_n = b\varepsilon_n$  et  $q_n = d_n$ .

On a donc prouvé que la suite  $(d_n)$  était périodique à partir d'un certain rang.

6. On suppose que  $x = \frac{13}{35}$ . Déterminer  $N \in \mathbb{N}$  et  $T \in \mathbb{N}^*$  tels que la suite  $(d_n)$  soit  $T$ -périodique à partir du rang  $N$ .

### EXERCICE 2.

Soient  $m$  et  $n$  des entiers naturels non nuls. On pose  $G = \{z_1 z_2, (z_1, z_2) \in \mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n\}$ .

1. Dans cette question uniquement, on pose  $m = 4$  et  $n = 6$ . Déterminer les éléments et le cardinal de  $\mathbb{U}_m$ ,  $\mathbb{U}_n$ ,  $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$  et  $G$ .
2. Montrer que  $\mathbb{U}_{m \wedge n} \subset \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$ .
3. A l'aide d'une relation de Bézout entre  $m$  et  $n$ , montrer que  $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_{m \wedge n}$ .
4. Montrer que  $G \subset \mathbb{U}_{m \vee n}$ .
5. A l'aide d'une relation de Bézout entre  $m$  et  $n$ , montrer que  $\mathbb{U}_{m \vee n} \subset G$ .

### EXERCICE 3.

L'objectif de cet exercice est d'obtenir une majoration du nombre de divisions euclidiennes effectuées lors du calcul d'un PGCD par l'algorithme d'Euclide.

1. On considère la suite  $(F_n)$  telle que  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  et  $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On note par ailleurs  $\varphi$  l'unique racine strictement positive du trinôme  $X^2 - X - 1$ .
  - a. Calculer  $\varphi$ .
  - b. Montrer que  $F_{n+2} > \varphi^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Soit  $(a, b, q, r) \in \mathbb{Z}^4$  tel que  $a = bq + r$ . Montrer que  $a \wedge b = b \wedge r$ .
3. Soit  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $0 < b < a$ . On rappelle le principe de l'algorithme d'Euclide appliqué au couple  $(a, b)$  : il consiste à construire une suite finie  $(r_k)_{0 \leq k \leq N+1}$  telle que
  - $r_0 = a$  et  $r_1 = b$  ;
  - pour tout  $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ ,  $r_{k+2}$  est le reste de la division euclidienne de  $r_k$  par  $r_{k+1}$  ;
  - $0 = r_{N+1} < r_N < \dots < r_1 < r_0$ .

L'entier  $N$  est donc le nombre de divisions euclidiennes effectuées dans l'algorithme d'Euclide appliqué au couple  $(a, b)$ .

- a. Dans cette question uniquement, on suppose  $a = 154$  et  $b = 48$ . Déterminer  $N$ .
- b. Justifier que  $a \wedge b = r_N$ .
- c. Montrer que  $r_k \geq r_{k+1} + r_{k+2}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ .
- d. Montrer par récurrence que  $r_k \geq F_{N+2-k}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ .
- e. Dans cette question uniquement, on suppose  $N \geq 2$ . Montrer que  $N < \frac{\ln b}{\ln \varphi} + 1$ .
- f. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $b$  s'écrit avec au plus  $k$  chiffres en base 10. Montrer que  $N \leq 5k$ .  
On donne  $\frac{\ln 10}{\ln \varphi} \approx 4,78$ .
4. a. Écrire une fonction Python d'arguments deux entiers naturels  $a$  et  $b$  renvoyant le PGCD de  $a$  et  $b$  calculé à l'aide de l'algorithme d'Euclide décrit dans la question précédente.
- b. Modifier légèrement la fonction de la question précédente afin qu'elle renvoie le nombre de divisions euclidiennes effectuées dans l'algorithme d'Euclide.