Limite et continuité de fonctions

Solution 1.

Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$$

d'où, puisque $x^2 > 0$,

$$x - x^2 < f(x) \leqslant x$$

et donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Solution 2.

1. **a.** Pour tout $x > 1$, on a :

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$$

donc $f(x) = 0$. Ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

b. Pour tout réel x, on a :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

et pour tout $x > 0$, on aboutit à :

$$1 - \frac{1}{x} < g(x) \leqslant 1.$$

On déduit alors du théorème des gendarmes que

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1.$$

2. Pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) = g(1/x),$$

et on a vu que

$$\lim_{u \to +\infty} g(u) = 1.$$

Comme $u = 1/x$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0+, on déduit du théorème de composition de s limites que

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1.$$

3. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$h(n) = 1$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} h(n) = 1.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a aussi

$$h(n + 1/2) = \frac{(n + 1/2)^{n+1/2}}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \sqrt{n + 1/2}$$

et donc :

$$h(n + 1/2) \geqslant \sqrt{n + 1/2}.$$

Ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} h(n + 1/2) = +\infty \neq 1.$$

Comme les deux suites $(n)_{n \geqslant 1}$ et $(n + 1/2)_{n \geqslant 1}$ tendent vers $+\infty$, on déduit du critère séquentiel sur les limites que h n'admet aucune limite en $+\infty$.

Solution 3.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est croissante et

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0,$$

il existe $M \geqslant 1$ tel que

$$\forall x \geqslant M, \quad 0 \leqslant f(x) - f(x-1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $x \geqslant M$. Notons $n = \lfloor x - M \rfloor$. On a alors les $n+1$ inégalités suivantes

$$\forall 0 \leqslant k \leqslant n, \quad 0 \leqslant f(x-k) - f(x-k-1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

En sommant ces inégalités, on aboutit après telescopage à

$$0 \leqslant f(x) - f(x-n-1) \leqslant (n+1)\frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $n = \lfloor x - M \rfloor \leqslant x - M$, on a en divisant par $x > 0$ et en remarquant que $x - n \leqslant x$,

$$0 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(x-n-1)}{x} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or,

$$n \leqslant x - M < n+1$$

ainsi

$$M - 1 \leqslant x - n - 1 < M$$

et donc, par croissante de f, on a

$$f(x-n-1) \leqslant f(M)$$

et ainsi, pour $x \geqslant M$,

$$0 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(M)}{x} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En choisssant $x \geqslant \max(1, 2f(M)/\varepsilon)$, on a alors

$$0 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a prouvé que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Solution 4.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \in \mathbb{Q}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = p/q$ et

  $$\forall n \geqslant q, \quad |\cos(n!\pi x)| = 1$$

  car q divise alors $n!$ et $n!\pi x \in \pi\mathbb{Z}$. Ainsi

  $$f(x) = 1.$$

- Si $x \notin \mathbb{Q}$, on a

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n!\pi x \notin \pi\mathbb{Z}$$

  et donc

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\cos(n!\pi x)| < 1$$

  et donc

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{m \to +\infty} |\cos(n!\pi x)|^m = 0$$

  et donc

  $$f(x) = 0.$$

On a prouvé que $f = \chi_{\mathbb{Q}}$, fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$.

Solution 5.

Montrons d'abord que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(2^n)}{n} = 0$. Posons $u_n = f(2^{n+1}) - f(2^n)$. Par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$$\frac{f(2^n)}{n} = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}}{n} + \frac{f(1)}{n}$$

Le lemme de Césaro nous dit alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(2^n)}{n} = 0$. Soit maintenant $x \in]1;+\infty[$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^n \leqslant x < 2^{n+1}$: il suffit de prendre $n = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \right\rfloor$.

$$0 \leqslant \frac{f(x)}{\ln x} \leqslant \frac{f(2^{n+1})}{n \ln 2}$$

Or $n \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ et $\frac{f(2^{n+1})}{n\ln 2} \to 0$ d'après ce qui précède.

Solution 6.

Notons l la limite de f en $+\infty$. Soient T une période de f et $x \in \mathrm{D}_f$. Comme $x + n\mathrm{T} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+n\mathrm{T}) = l$. Mais la suite $(f(x+n\mathrm{T}))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $f(x)$. D'où $f(x) = l$.

Solution 7.

Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$. Comme la suite $(f(n))$ tend vers $+\infty$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $f(\mathrm{N}) \geqslant \mathrm{A}$. Mais comme f est croissante, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$x \geqslant \mathrm{N} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \geqslant f(\mathrm{N}) \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \geqslant \mathrm{A}$$

Ce raisonnement étant valable pour tout $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Solution 8.

1. D'après le théorème de la limite monotone, f admet en $+\infty$ une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Donc $f(x) + f(x+1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2l$. Or $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $l = 0$.
2. Comme f est décroissante, $f(x) + f(x+1) \leqslant 2f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De même, $2f(x) \leqslant f(x-1) + f(x)$. Donc, pour $x \leqslant 0$
$$x\left[f(x) + f(x+1)\right] \leqslant 2xf(x) \leqslant x\left[f(x-1) + f(x)\right]$$
Or $f(x) + f(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\big(f(x) + f(x+1)\big) = 1$. Comme $x - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a également $f(x) + f(x-1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[f(x-1) + f(x)\right] = 1$. Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2xf(x) = 1$ et donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

Solution 9.

- Puisque la fonction partie entière est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

- Il reste à examiner la continuité en $n \in \mathbb{Z}$. Puisque sur $[n, n+1[$, $f(x) = n + \sqrt{x-n}$, on a
$$\lim_{x \to n+} f(x) = n = f(n).$$
Comme sur $]n-1, n[$, $f(x) = n - 1 + \sqrt{x-n+1}$, on a
$$\lim_{x \to n-} f(x) = \lim_{x \to n+} f(x) = n = f(n).$$
La fonction est donc continue à droite et à gauche en n, elle est donc continue en n.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution 10.

- Puisque la fonction partie entière est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

- Il reste à examiner la continuité en $n \in \mathbb{Z}$. Puisque sur $[n, n+1[$, $f(x) = n\sin(\pi x)$, on a
$$\lim_{x \to n+} f(x) = 0 = f(n).$$
Comme sur $]n-1, n[$, $f(x) = (n-1)\sin(\pi x)$, on a
$$\lim_{x \to n-} f(x) = \lim_{x \to n+} f(x) = 0 = f(n).$$
La fonction est donc continue à droite et à gauche en n, elle est donc continue en n.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution 11.

La fonction $x \mapsto (-1)^{\mathrm{E}(x)}$ est constante au voisinage de tout point non entier donc continue en ces points. La fonction $x \mapsto x - \mathrm{E}(x) - \frac{1}{2}$ est également continue en tout point non entier. f est donc continue en tout point non entier.
Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Pour $x \in [n-1, n[$, $\mathrm{E}(x) = n-1$ donc $\displaystyle\lim_{x \to n^-} f(x) = (-1)^{n-1}\left(n - (n-1) - \frac{1}{2}\right) = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}$.

- Pour $x \in [n, n+1[$, $\mathrm{E}(x) = n$ donc $\displaystyle\lim_{x \to n^+} f(x) = (-1)^n\left(n - n - \frac{1}{2}\right) = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}$.

Ainsi lim $\displaystyle\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^+} f(x) = f(n) = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}$. f est donc continue en n.
Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution 12.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

   - **Premier cas :** x_0 est irrationnel, donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_0) = 0$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge versx_0 et par conséquent, $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(q_n) = 1 \neq 0$. Ainsi $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en x_0.

- **Deuxième cas :** x_0 est rationnel, donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_0) = 1$. Cette fois, il existe une suite d'irrationnels $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x_0 et, cette fois encore, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(z_n) = 0 \neq 1$. Ainsi $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en x_0.

2. Comme $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est bornée, $f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathcal{O}(x^2)$ et a fortiori, $f(x) = o(x)$. Ainsi f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 : elle est donc dérivable en 0 (et $f'(0) = 0$). A fortiori, f est continue en 0.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Si f était continue en x_0, alors $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ serait aussi continue en x_0, puisque la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue en x_0 et que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = fg$. Par conséquent, la fonction f n'est continue en aucun autre point que 0.

Solution 13.

1. Notons $\mathrm{D} =]0,1[\cup]1,+\infty[$. Soit $x \in \mathrm{D}$. Alors $\ln x$ est bien défini et $x(\ln x)^2 + 1 > 0$. De plus, $\ln x \neq 0$ donc $\frac{1}{\ln x}$ est bien défini. Ainsi $f(x)$ est bien défini. f est donc définie sur D.

2. On a pour $x \in \mathrm{D}$:

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{\ln x}\ln\left[x(\ln x)^2+1\right]\right)$$

$x \mapsto x(\ln x)^2 + 1$ est continue sur D comme produit et somme de fonctions continues et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Comme ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \ln\left[x(\ln x)^2+1\right]$ est continue sur D par composition de fonctions continues. De plus, ln est continue et ne s'annule pas sur D donc $x \mapsto \frac{1}{\ln x}\ln\left[x(\ln x)^2+1\right]$ est continue sur D. exp étant continue sur $\mathbb{R}$, f est continue sur D.

3. Comme $x(\ln x)^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, $\ln\left[x(\ln x)^2+1\right] \underset{x\to 0}{\sim} x(\ln x)^2$. On a donc :

$$\frac{1}{\ln x}\ln\left[x(\ln x)^2+1\right] \underset{x\to 0}{\sim} x\ln x$$

Or $x\ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.
On a à nouveau $x(\ln x)^2 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln\left[x(\ln x)^2+1\right] \underset{x\to 1}{\sim} x(\ln x)^2 \underset{x\to 1}{\sim} (\ln x)^2$. Par conséquent :

$$\frac{1}{\ln x}\ln\left[x(\ln x)^2+1\right] \underset{x\to 1}{\sim} \ln x$$

Or $\ln x \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.
Comme f admet des limites finies en 0 et 1, f est prolongeable par continuité en 0 et 1.

4. On met en facteur le terme prépondérant dans l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\ln\left[x(\ln x)^2+1\right] &= \ln\left[x(\ln x)^2\left(1+\frac{1}{x(\ln x)^2}\right)\right]\\ &= \ln\left[x(\ln x)^2\right] + \ln\left[1+\frac{1}{x(\ln x)^2}\right]\\ &= \ln x + 2\ln(\ln x) + \ln\left[1+\frac{1}{x(\ln x)^2}\right] \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x}\ln\left[x(\ln x)^2+1\right] = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e$.

Solution 14.

La fonction g définie par

$$g(t) = f(t) - f\left(t+\frac{\mathrm{T}}{2}\right)$$

est continue (par continuité de f) et, puisque T est une période de f,

$$g(\mathrm{T}/2) = f(\mathrm{T}/2) - f(\mathrm{T}) = -f(0) + f(\mathrm{T}/2) = -g(0).$$

Par conséquent,

- ou bien $g(0) = g(\mathrm{T}/2) = 0$ et donc $f(0) = f(\mathrm{T}/2)$,
- ou bien g change de signe sur l'intervalle $[0, \mathrm{T}/2]$ et, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $t_0 \in [0, \mathrm{T}/2]$ tel que $g(t_0) = 0$, donc tel que $f(t_0) = f(t_0 + \mathrm{T}/2)$.

Solution 15.

Notons, pour tout $x \in [0, 7/10]$,

$$g(x) = f(x + 3/10) - f(x).$$

La fonction g est continue en tant que somme de deux fonctions continues et ne s'annule pas. On déduit alors du théorème des valeurs intermédiaires qu'elle est de signe constant sur l'intervalle $[0, 7/10]$. Quitte à considérer $-f$ plutôt que f, on peut supposer que $g > 0$. On remarque alors que

$$g(0) = f(3/10) - f(0) = f(3/10) > 0,$$

$$g(0) + g(3/10) = f(6/10) - f(0) = f(6/10) > 0,$$

$$g(0) + g(3/10) + g(6/10) = f(9/10) - f(0) = f(9/10) > 0$$

et

$$g(7/10) = f(1) - f(7/10) = -f(7/10) > 0,$$

$$g(7/10) + g(4/10) = f(1) - f(4/10) = -f(4/10) > 0,$$

$$\begin{aligned} g(7/10) + g(4/10) + g(1/10) &= f(1) - f(1/10) \\ &= -f(1/10) > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction continue f s'annule sur les intervalles

$$]1/10, 3/10[, \quad]3/10, 4/10[, \quad]4/10, 6/10[, \quad]6/10, 7/10[$$

et $]7/10, 9/10[$. Comme $f(0) = f(1) = 0$, on en déduit que f s'annule au moins 7 fois sur $[0, 1]$.

Solution 16.

Posons $\mathrm{I} = [a, b]$ et notons g l'application $g(t) = f(t) - t$. De l'inclusion $\mathrm{I} \subset f(\mathrm{I})$, on déduit l'existence de c et d appartenant à $[a, b]$ tels que $f(c) = a$ et $f(d) = b$. Nous avons $g(c) = f(c) - c = a - c \leqslant 0$ et $g(d) = f(d) - d = b - d \geqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [c, d]$ tel que $g(t_0) = 0$, c'est-à-dire $f(t_0) = t_0$.

Solution 17.

Si $f(0) = 0$, alors f admet un point fixe. Sinon $f(0) > 0$ et $\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Puisque $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l < 1$, $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ prend la valeur 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ i.e. f admet un point fixe.

Solution 18.

Soit $g \left\{ \begin{array}{rcl} [0, 1 - \frac{1}{n}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \end{array} \right.$. Il suffit donc de prouver ue g s'annule. g est continue et

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0$$

Les $g\left(\frac{k}{n}\right)$ ne peuvent pas être tous strictement positifs ou négatifs, donc il existe $k_1, k_2 \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $g\left(\frac{k_1}{n}\right) \leqslant 0$ et $g\left(\frac{k_2}{n}\right) \geqslant 0$. Si $k_1 = k_2$, g s'annule évidemment et si $k_1 \neq k_2$, g s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Solution 19.

Posons $m = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$. Quitte à permuter les x_i, ce qui ne change pas la valeur de m, on peut supposer $f(x_1) \leqslant f(x_2) \leqslant \ldots \leqslant f(x_n)$. On a alors

$$f(x_1) \leqslant m \leqslant f(x_n)$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [x_1, x_n] \subset [0,1]$ tel que $f(x) = m$.

Solution 20.

D'après la définition de la limite, il existe $\mathrm{A} \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \geqslant \mathrm{A}, \quad |f(x) - \ell| \leqslant 1,$$

ainsi $\forall x \geqslant \mathrm{A}$,

$$|f(x)| \leqslant 1 + |\ell|.$$

De plus, f étant continue sur le segment $[0, \mathrm{A}]$, elle est bornée sur cet intervalle :il existe un nombre réel $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que $\forall t \in [0, \mathrm{A}]$,

$$|f(t)| \leqslant \mathrm{M}.$$

En posant

$$\mathrm{M}' = \max(|\ell| + 1, \mathrm{M}),$$

on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|f(x)| \leqslant \mathrm{M}'.$$

Solution 21.

La fonction $h = g - f$ rest continue sur le segment $[a, b]$ donc est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\forall x \in [a, b], \quad h(x) \geqslant h(c) > 0.$$

En posant $m = \frac{h(c)}{2}$, on obtient le résultat demandé.

Solution 22.

Comme $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x < \mathrm{A}, f(x) > f(0)$. De même, il existe $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > \mathrm{B}, f(x) > f(0)$. Remarquons qu'on a nécessairement $\mathrm{A} < 0$ et $\mathrm{B} > 0$. De plus, f étant continue sur $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$, f est minorée sur $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ et atteint sa borne inférieure m sur $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$. Comme $0 \in [\mathrm{A}, \mathrm{B}]$, on a $m \leqslant f(0)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant m$. f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par m et m est atteint sur le segment $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$.

Solution 23.

Posons $\forall x \in [a, b], \quad g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue, $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.

Solution 24.

Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$g(t) = f(t) - t.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que g ne s'annule pas sur $[0,1]$. Puisque g est continue sur cet intervalle, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que g est de signe constant sur $[0,1]$, par exemple positif. On sait qu'alors

$$\int_0^1 g(t)dt > 0$$

ce qui est absurde car

$$\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 tdt = \int_0^1 f(t)dt - 1/2 = 0$$

Solution 25.

Notons $\mathrm{I} = [a;b]$. f étant continue, elle atteint ses bornes sur I : il existe $c, d \in \mathrm{I}$ tels que

$$f(c) = \min_{\mathrm{I}} f \text{ et } f(d) = \max_{\mathrm{I}} f.$$

Comme $\mathrm{I} \subset f(\mathrm{I})$ et $c, d \in \mathrm{I}$, on a

$$f(c) \leqslant a \leqslant c \text{ et } f(d) \geqslant b \geqslant d.$$

Par conséquent, $f(c) - c \leqslant 0$ et $f(d) - d \geqslant 0$. Le théorème des valeurs intermédaires appliquées à la fonction continue $x \mapsto f(x) - x$ entre c et d nous donne le résultat.

Solution 26.

1. On pose $\mathrm{I} = [a;b]$. Considérons l'application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array}$$

Comme $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$, $f(a), f(b) \in [a;b]$. Ainsi $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in \mathrm{I}$ tel que $g(x) = 0$ i.e. $f(x) = x$.

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ et $x \in [-\mathrm{M};\mathrm{M}]$.

$$\big||f(x)| - |f(0)|\big| \leqslant |f(x) - f(0)| \leqslant k|x| \leqslant k\mathrm{M}.$$

Par conséquent

$$|f(x)| \leqslant k\mathrm{M} + |f(0)|$$

Il suffit donc de choisir M tel que $k\mathrm{M} + |f(0)| = \mathrm{M}$ i.e. $\mathrm{M} = \dfrac{|f(0)|}{1-k} \in \mathbb{R}_+$.

3. En appliquant la première question à l'intervalle $[-\mathrm{M};\mathrm{M}]$ de la question précédente, on en déduit que f admet un point fixe sur $[-\mathrm{M};\mathrm{M}]$. Montrons que ce point fixe est unique. Soient x et y deux points fixes de f. Alors

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \leqslant k|x - y| \Longrightarrow (1-k)|x - y| \leqslant 0.$$

Puisque $1 - k > 0$

$$|x - y| \leqslant 0 \Longrightarrow |x - y| = 0 \Longrightarrow x = y$$

Solution 27.

Posons $g : x \mapsto f(x) - x$. On a $g(a) = f(a) - a$ et $g(f(a)) = a - f(a) = -g(a)$. Donc g s'annule entre a et $f(a)$ i.e. f a un point fixe entre a et $f(a)$.

Solution 28.

1. De l'inclusion $\mathrm{I} \subset f(\mathrm{I})$, on déduit l'existence de c et d appartenant à $[a,b]$ tels que $f(c) = a$ et $f(d) = b$. f prend donc les valeurs a et b sur I.

2. Notons g l'application définie par $g(t) = f(t) - t$ pour $t \in [a,b]$. Nous avons $g(c) = f(c) - c = a - c \leqslant 0$ et $g(d) = f(d) - d = b - d \geqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [c,d]$ tel que $g(t_0) = 0$, c'est-à-dire $f(t_0) = t_0$. f admet donc un point fix sur I.

Solution 29.

1. C'est un classique. On a $f(0) \in [0,1]$ donc $f(0) \geqslant 0$. De même, $f(1) \in [0,1]$ donc $f(1) \leqslant 1$. Ainsi l'application continue $x \mapsto f(x) - x$ prend une valeur positive et une valeur négative sur $[0,1]$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que cette application s'annule sur $[0,1]$ i.e. que f admet un point fixe.

2. D'après la première question, F est non vide. De plus, $\mathrm{F} \subset [0,1]$ donc F est borné. Ainsi F admet une borne inférieure a et une borne supérieure b. Il existe donc deux suites (a_n) et (b_n) d'éléments de F convergeant respectivement vers a et b. On a $f(a_n) = a_n$ et $f(b_n) = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme f est continue, on a $f(a) = a$ et $f(b) = b$ par passage à la limite. Ainsi $a, b \in \mathrm{F}$ donc $a = \min \mathrm{F}$ et $b = \max \mathrm{F}$.

3. Soit $x \in \mathrm{F}$. Alors $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$ car $f(x) = x$. Ainsi $g(x)$ est un point fixe de f.

4. Supposons que $f - g$ ne s'annule pas sur $[0,1]$. Alors $f - g$ est de signe constant sur $[0,1]$.
   Supposons que $f - g > 0$. On a donc $f(a) > g(a)$ et donc $g(a) < a$ car a est un point fixe de f. Or, d'après la question précédente, $g(a)$ est également un point fixe de f. Mais a est le plus petit point fixe de f : il y a contradiction.
   Supposons que $f - g < 0$. On a donc $f(b) < g(b)$ et donc $g(b) > b$ car b est un point fixe de f. Or, d'après la question précédente, $g(b)$ est également un point fixe de f. Mais b est le plus grand point fixe de f : il y a également contradiction.
   Par conséquent $f - g$ s'annule sur $[0,1]$.

Solution 30.

1. Remarquons que la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(y) = y^5 + y$ est strictement croissante sur ce segment. Puisqu'elle est continue, elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[0,2]$. On a donc, pour tout $1 \leqslant x \leqslant 2$ et $\forall y \in [0,1]$, $g(y) = y^5 + y = x$ *si et seulement si* $y = g^{-1}(x)$. La fonction f existe donc et est unique car $f = g^{-1}$.

2. La fonction f étant la bijection réciproque d'une fonction continue, elle est continue.

Solution 31.

1. Puisque $f \circ f = id_{[0,1]}$, f est est une bijection de l'intervalle $[0,1]$ sur lui-même. En tant que bijection continue sur un intervalle, elle est strictement monotone (cf. le cours). Raisonnons par l'absurde en supposant f sctrictement décroissante. On aurait alors $0 = f(0) > f(1)$ et donc $f(1) < 0$ ce qui est absurde car f est à valeurs dans $[0,1]$.

2. Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) \neq \alpha$. Si $f(\alpha) < \alpha$, par stricte croissance de f, on a $\alpha = f(f(\alpha)) < f(\alpha)$ ce qui absurde. De même, si $f(\alpha) > \alpha$, par stricte croissance de f, on a $\alpha = f(f(\alpha)) > f(\alpha)$ ce qui absurde. On aboutit donc dans tous les cas de figure à une absurdité.

Solution 32.

Soit $x_0 > 0$. Il existe deux réels strictement positifs a et b tels que $x_0 \in [a,b]$ et, sur le segment $[a,b]$, la fonction f est croissante, majorée (par $f(b)$) et minorée (par $f(a)$). Elle possède donc une limite à gauche finie et une limite à droite finie en x_0. Posons

$$\ell_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \text{et} \quad \ell_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Comme f est croissante, alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

Par composition des limites, on en déduit que

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{x} = \frac{\ell_1}{x_0} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{x} = \frac{\ell_2}{x_0}.$$

Or la fonction $x \mapsto f(x)/x$ est décroissante, donc

$$\frac{\ell_2}{x_0} \leqslant \frac{\ell_1}{x_0}.$$

Mais $x_0 > 0$, donc

$$\ell_2 \leqslant \ell_1$$

et par conséquent, $\ell_1 = \ell_2$, ce qui signifie que f est continue en x_0.

Solution 33.

Soit $g : x \mapsto f(x) - x$.
Puisque f est décroissante, f admet une limite finie ou une limite égale à $-\infty$ en $+\infty$. Dans les deux cas, $\lim_{+\infty} g = -\infty$.
De même, f admet une limite finie ou une limite égale à $+\infty$ en $+\infty$. Dans les deux cas, $\lim_{+\infty} g = +\infty$.
Comme g est continue, g s'annule sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
De plus, g est strictement décroissante donc injective. Elle s'annule donc exactement une fois, ce qui prouve que f admet un unique point fixe.

Solution 34.

1. D'après l'équation, $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ d'où $f(0) = 0$.

2. La fonction f est nécessairement impaire car

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f(-x) = f(0) = 0.$$

3. On montre facilement par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = an.$$

On déduit alors de l'imparité de f que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = an.$$

4. On démontre facilement par récurrence que

$$\forall (x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \quad f(nx) = nf(x).$$

Soit $r \in \mathbb{Q}$:$\exists (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$. Par le point précédent,

$$f(r) = pf\left(\frac{1}{q}\right).$$

Or

$$f\left(\frac{q}{q}\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right) = a.$$

D'où $f(\frac{1}{q}) = a\frac{1}{q}$ et $f(r) = ar$.

5. La fonction f est supposée continue au point 0.

a. Prouvons que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Comme

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + f(h)$$

et, par continuité de f au point 0,

$$\lim_{h \to 0} f(h) = f(0) = 0,$$

la fonction f admet une limite au point x_0 et

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0) + \lim_{h \to 0} f(h)\\ &= f(x_0)\end{aligned}$$

Ainsi f est continue au point x_0.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de nombres rationnels convergeant vers x. Puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(r_n) = ar_n,$$

on a

$$\lim_{n \to +\infty} f(r_n) = \lim_{n \to +\infty} ar_n = ax,$$

puis $f(x) = ax$ par continuité de f au point x.

6. Réciproquement les fonctions du type $x \mapsto ax$ vérifie bien la relation de l'énoncé. On en déduit que les applications recherchées sont exactement les fonctions linéaires.

Solution 35.

► Supposons $|a| < 1$. Par une récurrence facile, on prouve que $\forall n \geqslant 0$,

$$f(a^n x) = f(x).$$

Par continuité de f en 0,

$$\lim_{n \to +\infty} f(a^n x) = f(0),$$

et par passage à la limite dans l'égailité de ci-dessus, $f(x) = f(0)$. La fonction f est donc constante. *Réciproquement*, toute fonction constante vérifie l'équation initiale.

► Supposons $|a| > 1$. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x/a).$$

On est ainsi ramené au cas précédent car $|1/a| < 1$.

Solution 36.

- Si $n = 0$, les fonctions recherchées sont les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.
- Si $n = 1$, toute fonction continue est solution.
- Si $n \geqslant 2$ est impair. On a alors, par une récurrence immédiate, $\forall x \neq 0$,
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad f(x^{1/n^p}) = f(x).$$
Par continuité de f en 1, et puisque x^{1/n^p} tend vers 1 lorsque p tend vers $+\infty$,
$$f(x) = f(1).$$
Puis, par continuité de f en 0, on a alors $f(0) = f(1)$. La fonction f est donc constante. La réciproque est facile à vérifier.
- Si $n \geqslant 2$ est pair. On raisonne de même pour prouver que $\forall x > 0$,
$$f(x) = f(1).$$
Si $x < 0$, on a
$$f(x) = f(x^n) = f(1).$$
Par continuité de f en 0, on a alors $f(x) = f(1)$. La fonction f est donc constante. La réciproque est facile à vérifier.

Solution 37.

Posons $f(x) = g(x) - g(0)$ pour tout x réel. On vérifie alors sans peine que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$
On en déduit classiquement que $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax$$
et donc que g est de la forme
$$x \mapsto ax + b$$
avec a et b dans $\mathbb{R}$. Réciproquement, on vérifie que toute fonction de la forme
$$x \mapsto ax + b$$
avec a et b dans $\mathbb{R}$ est solution de l'équation fonctionnelle proposée.

Solution 38.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction lipschitzienne sur cet intervalle. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
2. On a, pour tout réel x,
$$\begin{aligned}(g(x))^2 = |g(x)|^2 &= |f(x) - f(0)|^2 \\ &= |x - 0|^2 = x^2\end{aligned}$$
De plus, pour tous réels x et y,
$$\begin{aligned}(g(x) - g(y))^2 = |g(x) - g(y)|^2 &= |f(x) - f(y)|^2 \\ &= |x - y|^2 = x^2 - 2xy + y^2\end{aligned}$$
Or, on a aussi
$$\begin{aligned}(g(x) - g(y))^2 &= (g(x))^2 - 2g(x)g(y) + (g(y))^2 \\ &= x^2 - 2g(x)g(y) + y^2\end{aligned}$$
et donc
$$g(x)g(y) = xy.$$

3. On remarque que g est injective (si $g(x) = g(y)$ alors $f(x) = f(y)$ et $|x - y| = 0$, d'où $x = y$). Comme $f(0) = 0$, on a $g(1) \neq 0$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x}{g(1)}.$$

Ainsi $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b.$$

Réciproquement, une fonction de la forme

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = ax + b,$$

avec a et b réels est une isométrie *si et seulement si*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |a(x - y)| = |x - y|,$$

ie *si et seulement si* $|a| = 1$, ie $a = \pm$. Les seules isométries de $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \pm x + b,$$

avec $b \in \mathbb{R}$.

Solution 39.

1. Prenons $x = y = 0$ dans l'équation fonctionnelle. Il vient

$$(f(0))^2 - f(0) = f(0)(f(0) - 1) = 0,$$

ie $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

2. Sî $f(0) = 0$, pour tout réel x,

$$f(x) = f(x + 0) = f(x)f(0) = 0.$$

Ainsi $f = 0$.

3. On suppose que $f(0) \neq 0$. On a donc $f(0) = 1$ d'après la première question.

a. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x)f(-x) = f(x - x) = f(0) = 1$$

et *a fortiori* $f(x) \neq 0$. La fonction f ne s'annule donc pas sur $\mathbb{R}$.

b. On déduit classiquement du théorème des valeurs intermédiaires que la fonction f, continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et ne s'y annulant pas (d'après la question précédente), garde un signe constant sur $\mathbb{R}$. Comme $f(1) = 1$, on a $f > 0$.

c. Comme $f > 0$, on peut poser $g = \ln(f)$. On a alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x + y) = g(x) + g(y).$$

On est ainsi ramené à une équation fonctionnelle bien connue : il existe un réel a tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = ax$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{g(x)} = e^{ax}.$$

Solution 40.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = f\left(2\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)$. Par récurrence, on montre que $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par continuité de f en 0, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(0)$. Par conséquent, $f(x) = f(0)$.
La fonction f est donc constante.

Solution 41.

1. Supposons tout d'abord que $x \notin \pi\mathbb{Z}$. On a pour $k \in \mathbb{N}$, $\cos \dfrac{x}{2^k} = \dfrac{\sin \frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{\alpha}{2^k}}$ car $\dfrac{x}{2^k} \notin \pi\mathbb{Z}$ et donc le dénominateur de la fraction précédente est non nul. Par conséquent
$$\mathrm{P}_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin \frac{x}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^k}} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}}$$
en utilisant un télescopage. Puisque $\sin \frac{x}{2^n} \sim \frac{x}{2^n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n = \dfrac{\sin x}{x}$.
Si $x \in \pi\mathbb{Z}$ et $x \neq 0$, alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ impair et un entier $q \in \mathbb{N}$ tel que $x = p2^q\pi$ (considérer la décomposition en facteurs premiers). Donc pour $n > q$, $\mathrm{P}_n(x)$ contient le facteur $\cos \frac{p\pi}{2}$ qui est nul. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(x) = 0$. La formule de l'énoncé est encore valable puisque dans ce cas, $\sin x = 0$.

2. On notera g la fonction définie par $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 1$. On remarque que g est continue en 0.
Soit f une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right) \cos \dfrac{x}{2}$ d'après l'énoncé. On établit par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \mathrm{P}_n(x)$. Comme f est continue en 0 et que $\frac{x}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$. En passant à la limite dans l'égalité $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) \mathrm{P}_n(x)$, on obtient $f(x) = f(0) \frac{\sin x}{x}$. On a donc $f = f(0)g$.
Réciproquement soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f = \lambda g$. f est bien continue en 0 car g l'est. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors
$$f(2x) = \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{\sin x \cos x}{x} = f(x) \cos x$$
De plus, $f(2 \times 0) = f(0) = f(0) \times \cos 0$. La fonction f vérifie bien les conditions de l'énoncé.
Les fonctions recherchées sont donc les fonctions λg avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution 42.

1. Notons l la limite de f en $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geqslant \mathrm{A}$, $|f(x) - l| < \varepsilon$. Soit T une période de f. Pour tout $x \in [\mathrm{A}; \mathrm{A}+\mathrm{T}]$, $|f(x) - l| < \varepsilon$. La dernière égalité est vraie sur une période donc sur $\mathbb{R}$ tout entier. En faisant tendre ε vers 0, on obtient que f est constante égale à l.

2. Notons P l'ensemble des périodes de f et posons $p = \inf \mathrm{P}$. Il s'agit donc de prouver que $p \in \mathrm{P}$. Il existe une suite (t_n) d'éléments de P tendant vers p.
   - Supposons $p > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x + t_n) = f(x)$. Par continuité de f, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + p) = f(x)$ et donc $p \in \mathrm{P}$.
   - Supposons $p = 0$. Comme f est non constante, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) \neq f(0)$. Posons $\varepsilon = |f(y) - f(0)|$. Par continuité de f en 0, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [0; \alpha]$, $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Comme (t_n) converge vers 0, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 < t_k \leqslant \alpha$. L'intervalle de période $[0; t_k[$ contient un z tel que $f(z) = f(y)$. Comme $z \in [0; \alpha]$, $|f(z) - f(0)| < \varepsilon$ mais $|f(z) - f(0)| = [f(y) - f(0)| = \varepsilon$: il y a donc contradiction et p ne peut être égal à 0.

3. Soit T une période de f. f est bornée et atteint ses bornes sur l'intervalle compact $[0; \mathrm{T}]$. Par périodicité, f est bornée et atteint ses bornes sur $\mathbb{R}$.

Solution 43.

1. Soit l la limite de f en $+\infty$. Il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > \mathrm{A}$, $|f(x) - l| < 1$: ainsi f est bornée sur $]\mathrm{A}; +\infty[$. De plus, par continuité, f est bornée sur l'intervalle compact $[0; \mathrm{A}]$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2. Soit (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de $[0; +\infty[$ tels que $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ convergent respectivement vers $\inf f$ et $\sup f$.

- Si l'une des deux suites (x_n) ou (y_n) est bornée, on peut en extraire une sous-suite convergeant vers un réel x ou y de $[0;+\infty[$. Mais, par continuité de f, on a $f(x) = \inf f$ ou $f(y) = \sup f$ et donc f admet un minimum ou un maximum absolu.
- Si aucune des deux suites n'est bornée, on peut extraire de chacune une sous-suite tendant vers $+\infty$. Par passage à la limite, $l = \inf f = \sup f$. Donc f est constante égale à l, elle admet bien évidemment un minimum et un maximum absolu.

En considérant la fonction $x \mapsto e^{-x}$ sur $[0;+\infty[$, on voit bien qu'une telle fonction n'admet pas forcément à la fois un minimum absolu et un maximum absolu.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geqslant A$, $|f(x) - l| < \varepsilon/3$. Comme f est continue, elle est uniformément continue sur l'intervalle compact $[0;A]$. Il existe donc α tel que pour tous $x, y \in [0;A]$ tels que $|x-y| < \alpha$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x-y| < \alpha$.

- Si $x, y \in [0;A]$,
$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3 < \varepsilon.$$
- Si $x, y \in [A;+\infty[$,
$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - l| + |l - f(y)| < 2\varepsilon/3 < \varepsilon.$$
- Si $x \in [0;A]$ et $y \in [A;+\infty[$, on a nécessairement $|x-A| \leqslant |x-y| < \alpha$ donc $|f(x) - f(A)| < \varepsilon/3$. De plus, $|f(A) - f(y)| \leqslant |f(A) - l| + |l - f(y)| < 2\varepsilon/3$. Finalement,
$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| < \varepsilon$$
- Si $x \in [A;+\infty[$ et $y \in [0;A]$, on procède comme précédemment.

On a donc prouvé que f était uniformément continue.

Solution 44.

Remarque. Si f est une fonction uniformément continue et si $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$, on sait qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$|x-y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Mais alors, on peut prouver par récurrence que, pour $m \in \mathbb{N}$,

$$|x-y| < m\alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < m\varepsilon$$

■

Comme f est uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que $|x-y| < \alpha$ implique $|f(x) - f(y)| < 1$. Posons $m = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor + 1$. Ainsi $m\alpha \geqslant 1$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $f(n) \geqslant A + m$. Soit $x \geqslant N$ et posons $n = \lfloor x \rfloor$. Ainsi $n \geqslant N$ et donc $f(n) \geqslant A + m$. De plus, $|x-n| < 1 \leqslant m\alpha$. D'après la remarque, $|f(x) - f(n)| < m$, ce qui implique $f(x) > f(n) - m \geqslant A$.
On a donc prouvé le résultat voulu.

Solution 45.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f admet une limite finie l en $+\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{3}$$

D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0, A]$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [0, A],\ |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Soit maintenant $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $|x-y| < \alpha$.

- Si $x, y \in [0, A]$, on a $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

- Si $x \geqslant A$ et $y \geqslant A$,
$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - l| + |l - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

- Si $x \in [0, A]$ et $y \geqslant A$,
$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(A)| + |f(A) - l| + |l - f(y)|$$
Comme $|x - y| < \alpha$, $|x - A| < \alpha$ donc $|f(x) - f(A)| < \frac{\varepsilon}{3}$ par uniforme continuité de f sur $[0, A]$.
On a également $|f(A) - l| < \frac{\varepsilon}{3}$ et $|l - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ car $A \geqslant A$ et $y \geqslant A$.
Finalement, on a bien $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

- On procéde de même si $y \in [0, A]$ et $x \geqslant A$.

Solution 46.

Soit f une fonction périodique continue sur $\mathbb{R}$ et T une de ses périodes. Soit $\varepsilon > 0$. f est uniformément continue sur $[-T, 2T]$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que :
$$\forall x, y \in [-T, 2T],\ |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$
On peut supposer $\alpha < T$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| < \alpha$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x - nT \in [0, T]$ (prendre $n = E\left(\frac{x}{T}\right)$). On a alors $y - nT \in]-\alpha, T + \alpha[\subset [-T, 2T]$. Comme $|(x - nT) - (y - nT)| = |x - y| < \alpha$ et que $x - nT$ et $y - nT$ appartiennent à l'intervalle $[-T, 2T]$, on a d'après ce qui précède :
$$|f(x) - f(y)| = |f(x - nT) - f(y - nT)| < \varepsilon$$
Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.