Devoir surveillé n°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 ★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{2k+1}$.

1. Calculer S_1, S_2, S_3 d'une part et T_1, T_2, T_3 d'autre part.

2. Ecrire $1+i$ sous forme exponentielle.

3. Justifier que $S_n + iT_n = (1+i)^{2n}$.

4. En déduire des expressions des sommes S_n et T_n faisant intervenir les fonctions cos et sin.

Exercice 2 ★★

1. Soit $\alpha = \dfrac{-1+i}{4}$. Ecrire α sous forme exponentielle.

2. Déterminer les racines cubiques de α sous forme exponentielle.

3. Montrer qu'une seule de ses racines cubiques a une puissance quatrième réelle.

4. Déterminer des complexes β, λ et μ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z^4 + \lambda z^3 + \mu z^2 - (1-i)z - \frac{1}{4} = (z+\beta)^4$$

On écrira ces trois nombres complexes sous forme algébrique.

Exercice 3 ★★

1. On considère l'équation (E) : $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

a. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ non congru à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π. Montrer que $\dfrac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1} = i\tan\theta$.

b. Déterminer les solutions complexes de (E) à l'aide des racines cinquièmes de l'unité. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction tan.

c. Développer $(1+iz)^5$ et $(1-iz)^5$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. En déduire les solutions de (E) sous une autre forme.

d. Déterminer le sens de variation de la fonction tan sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. En déduire les valeurs de $\tan\frac{\pi}{5}$ et $\tan\frac{2\pi}{5}$.

2. On se donne maintenant $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et on considère l'équation

$$(\mathrm{E}_\alpha)\ :\ (1+iz)^5(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^5(1+i\tan\alpha)$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

a. Montrer que $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = e^{2i\alpha}$.

b. Résoudre l'équation $\mathrm{Z}^5 = e^{2i\alpha}$ d'inconnue $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}$.

c. En déduire les solutions de (E_α) que l'on exprimera à l'aide de la fonction tan.