Devoir à la maison n°16

Problème 1 —

Partie I – Intégrales de Wallis

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. En intégrant par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
3. En déduire une expression de I_{2n} et I_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de factorielles.
4. Vérifier que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. En déduire que $\dfrac{n+1}{n+2} I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Démontrer que $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$.
6. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.
7. En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Partie II – Formule de Stirling

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
2. En déduire que (u_n) converge vers une certaine limite $l \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $l = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et en déduire un équivalent de $n!$.

Exercice 1.

Soient $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(B_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites complexes. On définit alors deux suites $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ de la manière suivante :

$$\forall n \geqslant n_0,\ A_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k,\ b_n = B_{n+1} - B_n$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.

2. Dans cette question, on suppose que (A_n) est bornée et que (B_n) est une suite réelle décroissante de limite nulle.

a. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} b_n$ converge.

b. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} a_n B_n$ converge.

c. En déduire en particulier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} (-1)^n B_n$ converge.

3. Soient $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$.

b. Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}$.

On précisera notamment dans les cas de convergence s'il s'agit ou non de convergence absolue. De même, dans les cas de divergence, on précisera s'il s'agit ou non de divergence grossière.

c. En déduire la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$.

4. Montrer que si (B_n) converge vers 0, si (A_n) est bornée et si $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} b_n$ est absolument convergente, alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} a_n B_n$ est convergente.