Devoir surveillé n°09

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – CCP 2003 – Utilisation des polynômes de Tchebychev en analyse

On note E l'ensemble des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On désigne par E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n, où n est un entier naturel.
On pourra confondre les expressions «polynôme» et «fonction polynomiale».
Si f est un élément de E, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.
Les parties II et III sont indépendantes et utilisent les résultats de la partie I.

I Polynômes de Tchebychev

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel.

1 Existence et unicité

1.a Déterminer un polynôme T à coefficients réels de degré n vérifiant la propriété

$$(\star) \qquad \forall \theta \in \mathbb{R},\ T(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

On pourra remarquer que $\cos(n\theta)$ est la partie réelle de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$.

1.b Vérifier qu'un polynôme vérifiant $(\star)$ est unique.
On l'appelle le polynôme de Tchebychev d'indice n, on le note T_n.

On définit alors une fonction polynomiale sur $[-1,1]$ par

$$\forall x \in [-1,1],\ T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

2

2.a Montrer que

$$\forall x \in [-1,1],\ T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

On pourra calculer $T_{n+2}(x) + T_n(x)$.

2.b Calculer T_0, T_1, T_2 et T_3.

2.c Donner le coefficient dominant de T_n.

3 Racines et extrema

On suppose n non nul dans cette question.

3.a Montrer que

$$\forall x \in [-1,1],\ T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(x-\cos\theta_k) \text{ où } \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

3.b On pose pour $k \in [\![0, n]\!]$, $c_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
Calculer $\|\mathrm{T}_n\|_\infty$ puis montrer que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ |\mathrm{T}_n(c_k)| = \|\mathrm{T}_n\|_\infty$$

et que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathrm{T}_n(c_{k+1}) = -\mathrm{T}_n(c_k)$$

Les $n+1$ réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ sont appelés «points de Tchebychev».

3.c Dessiner le graphe de T_3 et préciser sur le graphe les réels c_0, c_1, c_2 et c_3.

II Polynômes de Tchebychev et orthogonalité

Orthogonalité des T_n

4 Montrer que pour toute fonction h de E, l'application $t \mapsto \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1, 1[$.

Pour $(f, g) \in \mathrm{E}^2$, on pose $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

5 Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

Ceci nous permet de définir une norme euclidienne sur E : pour tout élément h de E, on pose $\|h\|_2 = \sqrt{\langle h, h \rangle}$.

6 Calculer $\langle \mathrm{T}_n, \mathrm{T}_m \rangle$ selon les valeurs des entiers naturels m et n. En déduire pour tout entier naturel n que la famille $(\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \dots, \mathrm{T}_n)$ est une base orthogonale de E_n.

Polynôme de meilleure approximation quadratique

Dans toute la suite de la partie II, f désignera un élément de E et n un entier naturel.
On pose $d_2(f, \mathrm{E}_n) = \inf\{\|f - \mathrm{Q}\|_2,\ \mathrm{Q} \in \mathrm{E}_n\}$.
Le but de la suite de la partie II est d'exprimer $\|f\|_2$ en fonction des $\frac{\langle f, \mathrm{T}_k \rangle}{\|\mathrm{T}_k\|_2}$.

7 **7.a** Enoncer un théorème justifiant l'existence et l'unicité d'un vecteur $t_n(f)$ dans E_n tel que $\|f - t_n(f)\|_2 = d_2(f, \mathrm{E}_n)$.

7.b Exprimer $t_n(f)$ à l'aide des polynômes de Tchebychev.
On dit que $t_n(f)$ est le polynôme de meilleure approximation quadratique de f sur E_n.

8 Montrer que

$$d_2(f, \mathrm{E}_n) = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, \mathrm{T}_k \rangle^2}{\|\mathrm{T}_k\|_2^2}}$$

9 **9.a** En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\langle f, \mathrm{T}_k \rangle^2}{\|\mathrm{T}_k\|_2^2}$ est convergente.

9.b Que pensez-vous de la limite de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\mathrm{T}_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Convergence en norme quadratique

10 **10.a** Soit h un élément de E. Montrer que $\|h\|_2 \leq \sqrt{\pi}\|h\|_\infty$.

10.b Montrer en utilisant un théorème de Weierstrass que $\lim_{n\to+\infty} \|f - t_n(f)\|_2 = 0$.

11 **11.a** En déduire que $\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle f, \mathrm{T}_k\rangle^2}{\|\mathrm{T}_k\|^2}}$.

11.b Application : un théorème des moments.

Que peut-on dire d'une fonction h de E telle que pour tout entier naturel n, $\int_{-1}^{1} \frac{h(t)\mathrm{T}_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 0$.

III Polynôme de meilleure approximation au sens de Tchebychev

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel et f un élément de E.
On note $d_\infty(f, \mathrm{E}_n) = \inf\{\|f - \mathrm{Q}\|_\infty,\ \mathrm{Q} \in \mathrm{E}_n\}$.
On dit qu'un élément P de E_n est un polynôme de meilleure approximation (on notera en abrégé PMA) au sens de Tchebychev d'ordre n s'il vérifie une des deux conditions équivalentes

(i) $\|f - \mathrm{P}\|_\infty = d_\infty(f, \mathrm{E}_n)$

(ii) $\forall \mathrm{Q} \in \mathrm{E}_n,\ \|f - \mathrm{P}\|_\infty \leq \|f - \mathrm{Q}\|_\infty$.

Existence d'un PMA d'ordre n pour f

On pose $\mathrm{K} = \{\mathrm{Q} \in \mathrm{E}_n,\ \|f - \mathrm{Q}\|_\infty \leq \|f\|_\infty\}$.

12 **12.a** Montrer que K est une partie non vide fermée et bornée de E_n.

12.b En déduire que K est une partie compacte non vide de E_n.

13 **13.a** Montrer que $d_\infty(f, \mathrm{E}_n) = d_\infty(f, \mathrm{K})$.

13.b En déduire qu'il existe un élément P de E_n tel que $\|f - \mathrm{P}\|_\infty = d_\infty(f, \mathrm{E}_n)$.
P est donc un PMA d'ordre n de f.

Condition suffisante pour être un PMA

Soit h un élément de E. On dit que h *équioscille* sur $k+1$ points s'il existe $k+1$ réels $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$ de l'intervalle $[-1, 1]$ tels que

$$\forall i \in [\![0, k]\!],\ |h(x_i)| = \|h\|_\infty$$

et

$$\forall i \in [\![0, k-1]\!],\ h(x_{i+1}) = -h(x_i)$$

On dit que les extrema sont alternés.

14 Exemples.

14.a Dessiner le graphe d'une fonction ϕ de E telle que $\|\phi\|_\infty = \frac{1}{2}$ et ϕ équioscille sur 4 points.
On ne cherchera pas à expliciter une telle fonction.

14.b Montrer que le polynôme T_{n+1} de Tchebychev d'indice $n+1$ équioscille sur $n+2$ points.

Le but de la question **15** est de montrer le résultat suivant :

Si P est un élément de E_n tel que $f - \mathrm{P}$ équioscille sur $n+2$ points, alors P est un PMA d'ordre n de f.

15 Soit P un élément de E_n tel que $f - P$ équioscille sur $n+2$ points que l'on note $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$.
Soit Q un élément de E_n tel que $\|f - Q\|_\infty < \|f - P\|_\infty$.

15.a Soit $i \in [\![0, n+1]\!]$. Montrer que si $f(x_i) - P(x_i) > 0$, alors $Q(x_i) - P(x_i) > 0$.
On obtiendrait de même que, si $f(x_i) - P(x_i) < 0$, alors $Q(x_i) - P(x_i) < 0$.

15.b En déduire que $P = Q$ et conclure.

Détermination de PMA

16 Dans cette question, on pose $f(x) = x^{n+1}$ et $q_n(x) = x^{n+1} - 2^{-n}T_{n+1}(x)$ pour $x \in [-1, 1]$.
Montrer que q_n est un PMA d'ordre n de f.

17 En déduire que pour tout polynôme P unitaire de degré $n+1$, $2^{-n}\|T_{n+1}\|_\infty \leq \|P\|_\infty$.

18 **18.a** Dans cette question, f est un polynôme de degré $n+1$. Déterminer un PMA d'ordre n de f.

18.b Application : déterminer un PMA d'ordre 2 de $f(x) = 5x^3 + 2x - 3$.

Remarque. On peut montrer l'unicité du PMA.
Il n'existe pas de formule générale qui donne l'expression du PMA d'une fonction quelconque. On peut cependant utiliser un algorithme (de Remes) qui fournit une suite de polynômes qui converge vers le PMA.