

## Natures de séries

### EXERCICE 1.

Déterminer, en fonction de  $\alpha > 0$ , la nature de la série de terme général

$$u_n = \cos^n(1/n^\alpha).$$

### EXERCICE 2.

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n+1}}.$$

### EXERCICE 3.

Convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ .

### EXERCICE 4.

Soient  $a, b$  et  $c > 0$ . Etudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = a^{1/n} - \frac{b^{1/n} + c^{1/n}}{2}.$$

### EXERCICE 5.

Nature de la série de terme général  $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+1/n}$ .

### EXERCICE 6.

Nature de la série de terme général :  $u_n = e^{-\sqrt{n}}$ .

### EXERCICE 7.

Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = (\ln(n))^{-\ln(n)}$ .

### EXERCICE 8.

Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \tan(\pi(7 + 4\sqrt{3})^n)$ .

### EXERCICE 9.★

Soit  $a > 0$ . Étudier la nature de la série de terme général  $u_n = a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$ .

### EXERCICE 10.

Soient  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$ . Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2).$$

### EXERCICE 11.

Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$ .

### EXERCICE 12.

Étudier la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}$  où  $a, b > 0$ .

### EXERCICE 13.

Etudier la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!}$  suivant les valeurs de  $p \in \mathbb{N}$ .

### EXERCICE 14.

Soit  $(u_n)$  une suite réelle strictement positive. On pose  $S_n = \sum_{p=0}^n u_p$ . Comparer la nature des séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{S_n}$ .

### EXERCICE 15.

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  des séries à termes réels strictement positifs. On suppose que  $\sum_{n \geq 0} v_n$  converge et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+2}}{u_n} \leq \frac{v_{n+2}}{v_n}$$

Montrer que  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge.

**EXERCICE 16.**

1. Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  de suites de réels strictement positifs vérifiant  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$  à partir d'un certain rang. Montrer que  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ .
2. Soit  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

- a. On suppose  $\alpha > 1$ . À l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, montrer que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge.
  - b. On suppose  $\alpha < 1$ . Montrer que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge.
  - c. On suppose  $\alpha = 1$ . Montrer à l'aide d'exemples qu'on ne peut rien conclure en général.
3. Application. Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$ .

**EXERCICE 17.**

Soit  $(a_n)$  une suite de réels positifs telle que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  converge. Étudier la nature des séries suivantes :

1.  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2$
2.  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{1 + a_n}$
3.  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n a_{2n}$
4.  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$

**EXERCICE 18.**

Soient  $(a_n)_{n \geq n_0}$  et  $(b_n)_{n \geq n_0}$  deux suites complexes. On définit deux suites  $(A_n)_{n \geq n_0}$  et  $(B_n)_{n \geq n_0}$  de la manière suivante :

$$\forall n \geq n_0, A_n = \sum_{k=n_0}^n a_k, B_n = B_{n+1} - B_n$$

1. Montrer que  $\sum_{k=n_0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$  pour tout  $n \geq n_0$ .
2. Utiliser la question précédente pour étudier la convergence de  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n}$ .
3. De manière générale, montrer que si  $(B_n)$  converge vers 0, si  $(A_n)$  est bornée et si  $\sum_{n \geq n_0} b_n$  est absolument convergente, alors  $\sum_{n \geq n_0} a_n B_n$  est convergente.

**EXERCICE 19.**

Soient  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  des séries à termes strictement positifs vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

1. Montrer que si  $\sum_{n \geq 0} v_n$  converge, alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge également.
2. Montrer que si  $\sum_{n \geq 0} u_n$  diverge, alors  $\sum_{n \geq 0} v_n$  diverge également.

**EXERCICE 20.**

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs convergentes.

1. Montrer que la série  $\sum \max(u_n, v_n)$  converge.
2. Montrer que la série  $\sum \sqrt{u_n v_n}$  converge.
3. On suppose que  $u_n + v_n$  ne s'annule pas. Montrer que la série  $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$  converge.

**EXERCICE 21.**

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  une série à termes *strictement positifs*.

1. Montrer que si la suite de terme général  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  admet une limite  $l < 1$ , alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge.
2. Montrer que si la suite de terme général  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  admet une limite  $l > 1$ , alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge.
3. Montrer à l'aide de deux exemples que l'on ne peut pas conclure si la suite de terme général  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  admet 1 pour limite.
4. Étudier la nature de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^n}$ .

**EXERCICE 22.**

Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . On pose  $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  et on s'intéresse à la convergence de la série  $\sum_{n \geq 2} u_n$ .

1. On suppose  $\alpha > 1$ . Montrer que  $\sum_{n \geq 2} u_n$  converge.
2. On suppose  $\alpha < 1$ . Montrer que  $\sum_{n \geq 2} u_n$  diverge.
3. On suppose  $\alpha = 1$  et  $\beta \leq 0$ . Montrer que  $\sum_{n \geq 2} u_n$  diverge.
4. On suppose  $\alpha = 1$  et  $\beta > 0$ . Déterminer la nature de  $\sum_{n \geq 2} u_n$  suivant la valeur de  $\beta$  via une comparaison à une intégrale.

**EXERCICE 23.**

Soit  $(u_n)$  une suite de réels positifs. On suppose que la suite de terme général  $\sqrt[n]{u_n}$  admet une limite  $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ .

1. Montrer que si  $l < 1$ , la série  $\sum u_n$  converge.
2. Montrer que si  $l > 1$ , la série  $\sum u_n$  diverge.
3. Montrer à l'aide de deux exemples qu'on ne peut conclure dans le cas  $l = 1$ .

**EXERCICE 24.**

On note  $(S_n)$  la suite des sommes partielles de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ . Montrer que les suites  $(S_{2n-1})$  et  $(S_{2n})$  sont adjacentes. En déduire la convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .

**EXERCICE 25.**

Soit  $\sum u_n$  une série réelle.

1. On suppose  $\sum u_n$  à termes positifs. Montrer que si  $\sum u_n$  converge, alors  $\sum u_n^2$  converge. La réciproque est-elle vraie ?
2. On ne suppose plus  $\sum u_n$  à termes positifs. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que la convergence de la série  $\sum u_n$  n'implique pas la convergence de la série  $\sum u_n^2$ .

**EXERCICE 26.**

Soit  $(u_n)$  une suite décroissante de limite nulle. On note  $(S_n)$  la suite des sommes partielles de la série  $\sum (-1)^n u_n$ . Montrer que les suites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la série  $\sum (-1)^n u_n$  ?

**EXERCICE 27.**

Déterminer la nature des séries suivantes.

1.  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left( \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right)$ .
2.  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left( \sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2} \right)$ .
3.  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln \left( \cos \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)$ .
4.  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left( \operatorname{ch} \left( \frac{1}{\sqrt{3n}} \right) - \operatorname{sh} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sqrt{n} \right)$ .

**EXERCICE 28.**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$ .

1. Montrer que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  converge.
2. En déduire qu'il existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

**EXERCICE 29.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite à termes positifs. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k u_k$$

A l'aide d'une permutation de sommes, montrer que les séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$  sont de même nature et, qu'en cas de convergence, elles ont même somme.

**Etude asymptotique de sommes partielles et de reste****EXERCICE 30.**

Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  lorsque  $\alpha \leq 1$ .

Déterminer un équivalent du reste de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  lorsque  $\alpha > 1$ .

**EXERCICE 31.**

On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que

$$S_n = C - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

**EXERCICE 32.**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \ln(n!)$ .

1. Par une comparaison à une intégrale montrer que  $u_n \sim n \ln n$ .
2. Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{u_n^2}$ .
3. Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$ .
4. A l'aide d'une comparaison à une intégrale, déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{u_n}$ .

**EXERCICE 33.**

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\ln(n+2^k)}{k!}$  converge et que pour tout  $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\ln(n+2^k)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e \ln n + \sum_{p=1}^m \frac{(-1)^{p+1} e^{2^p}}{p n^p} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$$

**Calculs de sommes****EXERCICE 34.**

Soit  $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ . Convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln\left(\cos \frac{\alpha}{2^n}\right)$  et calcul de la somme.

**EXERCICE 35.**

Soit  $p$  un nombre premier. Calculer  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(pn)!}$ .

**EXERCICE 36.**

Montrer la convergence et calculer la somme de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$ .

**EXERCICE 37.**

Montrer la convergence et déterminer la somme de la série  $\sum_{n \geq 3} \frac{2n-1}{n^3 - 4n}$ .

**EXERCICE 38.**

Soit  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$  et calcul de la somme.

**EXERCICE 39.**

A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange prouver la convergence et déterminer la somme des séries suivantes

1.  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ ;
2.  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .
3.  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$  pour  $x \in [0, 1]$ .

**EXERCICE 40.**

Soit  $x \in ]-1, 1]$ . En remarquant que  $\frac{x^k}{k} = \int_0^x t^{k-1} dt$ , montrer la convergence de la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \text{ et déterminer sa somme.}$$

On pourra distinguer les cas  $x \leq 0$  et  $x \geq 0$ .

**EXERCICE 41.**

En remarquant que  $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$ , montrer la convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  et déterminer sa somme.

**EXERCICE 42.**

1. Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$  et  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On pose pour  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$I(\lambda) = \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt \quad J(\lambda) = \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt$$

Montrer que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} J(\lambda) = 0$ .

2. Déterminer deux réels  $u$  et  $v$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^\pi (ux + vx^2) \cos(nx) dx = \frac{1}{n^2}$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que pour  $x \in ]0, \pi]$ ,

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin(\frac{x}{2})} - \frac{1}{2}$$

4. Montrer que la fonction  $\varphi : x \in ]0, \pi] \mapsto \frac{x}{\sin(\frac{x}{2})}$  est prolongeable en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi]$ .

5. A l'aide des questions précédentes, déterminer la somme de la série de Riemann

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}.$$

6. En adaptant les deux réels  $u$  et  $v$  de la question 2, justifier la convergence et déterminer

$$\text{les sommes des séries } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

**EXERCICE 43.**

Convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2 + 3n}$  et calcul de la somme.

**EXERCICE 44. ★**

Convergence et calcul de la somme de la série de terme général :

$$v_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right).$$

**EXERCICE 45. ★**

Soit  $n \geq 1$ . On note  $p(n)$  le nombre de chiffres de l'écriture de  $n$  en base 10. Etablir la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{p(n)}{n(n+1)}.$$

**EXERCICE 46. ★★**

Convergence et calcul de la somme de la série

$$\sum_{n \geq 2} (-1)^n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

**EXERCICE 47. ★★**

Convergence et somme de la série

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

**EXERCICE 48.**

Etudier la convergence et calculer somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1 + \sqrt{1}) \cdots (1 + \sqrt{n})}.$$

## Applications

### EXERCICE 49.

On pose  $G(x, y) = \int_0^y \frac{t - [t]}{t(t+x)} dt$  où  $[t]$  représente la partie entière de  $t$ .

1. Montrer que  $G$  est définie sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ .
2. Montrer que  $G(x, y)$  tend vers une limite finie  $G(x)$  quand  $y$  tend vers  $+\infty$ .
3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, G(n, y) = \frac{1}{n} \left( \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt - \int_y^{y+n} \frac{t - [t]}{t} dt \right)$$

4. On note  $H(n) = nG(n)$ . Montrer que la série de terme général  $H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n}$  converge et en déduire un équivalent de  $G(n)$ .

### EXERCICE 50.

Soit  $x \in ]0, 1]$ .

1. Montrer qu'il existe une unique suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 telle que  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n}$ .
2. Montrer que  $x$  est rationnel *si et seulement si* la suite  $(q_n)$  est stationnaire.
3. Montrer que  $e$  est irrationnel.

### EXERCICE 51.

Montrer que le développement décimal d'un réel est périodique à partir d'un certain rang *si et seulement si* ce réel est rationnel.

### EXERCICE 52.

Soient  $k \in [0, 1[$  et  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tels que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Soit  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telle que  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En considérant la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n+1} - u_n$ , montrer que  $u$  converge.

### EXERCICE 53.

Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -lipschitzienne avec  $k < 1$  et  $(x_n)$  une suite telle que  $x_{n+1} = f(x_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$ .
2. En considérant la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_{n+1} - x_n$ , montrer que la suite  $(x_n)$  converge.
3. En déduire que  $f$  admet un unique point fixe.