Matrices

Exercice 1.

Calculez

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 2+2i \\ 4 & 1 & -2i \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2-i \\ 2 & -i \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

Soit $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. Etablir que

$$M^2 - (a+d)M + (ad-bc)\mathbb{I}_2 = \mathbb{O}_2.$$

Exercice 3.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $U = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\sigma(A)$ la somme des coefficients de A. Exprimer UAU en fonction de $\sigma(A)$ et de U.

Exercice 4.

Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$AB = \mathbb{I}_n + A + A^2.$$

Montrer que $AB = BA$.

Exercice 5.

On considère dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices A et B définies par $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et

$$a_{i,j} = i+j, \quad b_{i,j} = i-j.$$

Calculer le terme général des matrices $C = A - B$ et $D = AB$.

Exercice 6.

Montrer que l'ensemble G des matrices $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$ est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$ isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 7.

On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est *stochastique* si elle est à coefficients positifs et si la somme des éléments de chaque colonne vaut 1. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ deux matrices stochastiques. Montrer que AB est stochastique.

Exercice 8.✯

Calculer les puissances des matrices A, B, C et D suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$;
4. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.✯

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les trois suites de nombres réels définies par $u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geqslant 0$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

Déterminer les expressions des termes généraux de (u_n), (v_n) et (w_n) en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.

Exercice 10.

Soit A une matrice de $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3 - A^2 - 4A + 4\mathbb{I}_p = 0_p.$$

Etablir que, pour tout entier naturel n, A^n appartient à $\mathrm{vect}(\mathbb{I}_p, A, A^2)$ et exprimer A^n en fonction de $\mathbb{I}_p, A$ et A^2.

Exercice 11.

On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2, B^2 et B^3. En déduire A^n et B^n pour tout entier $n \geqslant 1$.
2. Calculer AB, AB^2, BA et B^2A.

Exercice 12.☆

Soient a et b, deux nombres complexes. Calculer les puissances de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A + A^{-1} = I_n$. Déterminer $A^k + A^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 14.

Soit E l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. **a.** Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Donner sa dimension ainsi qu'une base.

   b. Montrer que E est un anneau. Est-il commutatif ?

   c. On note G l'ensemble des matrices de E telles que $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que G est un groupe.

2. Soit $A \in E$. Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$. On pourra distinguer les cas $a \neq b$ et $a = b$.

3. On pose $B_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{A^p}{p!}$. Montrer que la suite (B_n) et préciser sa limite B. (On dit qu'une suite de matrices converge si les suites des coefficients convergent ; dans ce cas, la limite est la matrice constituée des limites des coefficients).

4. On note f l'application de E dans E qui à la matrice A associe la matrice B définie dans la question précédente. f est-elle linéaire ? injective ? surjective ? Préciser son image.

Exercice 15.

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$. Calculer de deux façons M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16.☆☆

Soient $n \geqslant 1$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 17.☆

Soit $\mathfrak{U}_n$ le sous-ensemble de $T_n^+(\mathbb{K})$ constitué des matrices dont tous les coefficients diagonaux valent 1. Prouver que $\mathfrak{U}_n$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 18.

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -9 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 19.

Soit A_n la matrice carrée de taille n suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que A_n est inversible *si et seulement si* n est pair et calculer son inverse dans ce cas.

Exercice 20.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = (\min(i, j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer que A_n est inversible et calculer son inverse.

EXERCICE 21.

Dire si les matrices suivantes sont inversibles ou non. Le cas échéant, calculer leur inverse ou sinon, donner une base de leur image et une base de leur noyau.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

3. $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

4. $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

6. $A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

7. $A_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

8. $A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 22.★

Soit $n \geqslant 1$. Prouver l'inversibilité et calculer l'inverse des matrices suivantes,

1. $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 23.★

Soient $n \geqslant 1$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n + A$ soit inversible. On pose alors $B = (\mathbb{I}_n - A)(\mathbb{I}_n + A)^{-1}$.

1. Montrer que $B = (\mathbb{I}_n + A)^{-1}(\mathbb{I}_n - A)$.

2. Prouver que $\mathbb{I}_n + B$ est inversible.

EXERCICE 24.★★

Soient $n \geqslant 1$ et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Prouver l'inversibilité et inverser M par la méthode du pivot de Gauss.

2. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   a. Calculer les puissances de J.

   b. Exprimer M en fonction de J.

   c. En déduire que M est inversible et retrouver l'expression de son inverse.

EXERCICE 25.

En utilisant l'algorithme du pivot, vérifier que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leur inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 6 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 26.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^3 - A$.
2. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Exercice 27.

Les applications suivantes sont clairement linéaires. Déterminer leur noyau et leur image et écrire dans chaque cas la matrice M correspondante rapportée aux bases canoniques.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$;
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x - y, x + y, x + 2y)$;
3. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x - 3y + 2z$;
4. $\theta : \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}^3[X],\ P \mapsto P'$ (polynôme dérivé).

Exercice 28.

Soit

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

considérée comme matrice d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique. En déterminer l'image et le noyau. Montrer qu'il s'agit d'un projecteur.

Exercice 29.

Déterminer des bases du noyau et de l'image de $A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Donner aussi des systèmes d'équations cartésiennes (avec un nombre minimum d'équations) de $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.

Exercice 30.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer *sans calculs* des bases de $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.

Exercice 31.✮

Discuter le rang de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 32.

Soit M une matrice carrée de taille $n \geqslant 2$ à coefficients réels de rang 1.

1. Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes U et V tels que $M = U{}^tV$.
2. Exprimer les puissances entières de M en fonction de M et de $\operatorname{tr}(M)$.
3. A quelle condition une matrice de rang 1 est-elle une matrice de projection ?
4. Quelles sont les matrices de rang 1 qui sont nilpotentes ?

Exercice 33.

Soit A une matrice réelle. Montrer que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tAA = \operatorname{rg} A{}^tA$.

EXERCICE 34.

On considère une application f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, non constamment égale à 0 ou 1, telle que :

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, f(AB) = f(A)f(B)$$

1. Montrer que pour toute matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A)$ est non nul.
2. Soit A une matrice de rang r, strictement inférieur à n.
   - **a.** Montrer l'existence de $r+1$ matrices, notées $A_1, A_2, \ldots, A_{r+1}$, toutes équivalentes à A et telles que le produit $A_1A_2\ldots A_{r+1}$ soit nul.
   - **b.** En déduire que $f(A) = 0$.
3. Que peut-on en conclure pour l'application f ?
   Donner un exemple d'une telle application.

EXERCICE 35.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *non nul* tel que $AU = \lambda U$. Montrer qu'il existe $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que ${}^tAV = \lambda V$.

EXERCICE 36.

Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang r *si et seulement si* il existe deux familles libres $(X_1,\ldots,X_r)$ et $(Y_1,\ldots,Y_r)$ de vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $M = X_1{}^tY_1 + \cdots + X_r{}^tY_r$.

EXERCICE 37. ✯

Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $M \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de M en fonction de ceux de A et B.
2. En cas d'inversibilité, exprimer l'inverse de M en fonction de A et B.

EXERCICE 38.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$.
Montrer que M est inversible *si et seulement si* A et B le sont et que, dans ce cas, il existe $C' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $M^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & C' \\ \hline 0 & B^{-1} \end{array}\right)$.

EXERCICE 39.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ un groupe pour la multiplication matricielle. On suppose $\mathcal{G} \neq \{0\}$.

REMARQUE. L'inversibilité et l'élément neutre pour le groupe $\mathcal{G}$ n'ont a priori rien à voir avec l'inversibilité et l'élément neutre pour le groupe $GL_n(\mathbb{K})$. ■

On souhaite montrer qu'il existe $r \in [\![1,n]\!]$ tel que $\mathcal{G}$ soit isomorphe à un sous-groupe de $GL_r(\mathbb{K})$.
On note E l'élément neutre de $\mathcal{G}$.

1. On suppose que $E = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ avec $r \in [\![1,n]\!]$. Montrer que les éléments de $\mathcal{G}$ sont de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ avec $A \in GL_r(\mathbb{K})$. Conclure dans ce cas.
2. On revient au cas général. Montrer que E est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Conclure.

EXERCICE 40.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$.
On suppose A inversible. Montrer que $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$. Le résultat reste-t-il valable si A n'est pas inversible ?

EXERCICE 41.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. On pose $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,r} \\ \hline 0_{q,p} & B \end{array}\right)$. Montrer que $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B)$.

EXERCICE 42.

Soient $E = \mathbb{R}^2$, $u = (1,1)$, $v = (1,-1)$ et $\mathcal{B} = (u,v)$.

1. Justifier que $\mathcal{B}$ est une base de E.
2. Donner les matrices de passage entre $\mathcal{B}$ et la base canonique $\mathcal{B}_0$ de E.

EXERCICE 43.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$(x, y, z) \longmapsto (2x - y, y - z, -z + 2x).$$

1. Calculer la matrice M de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
2. Prouver que la famille $\mathcal{B}'$ définie par
$$f_1 = e_2 - e_3, \quad f_2 = -e_1 + e_3, \quad f_3 = e_1 + e_2$$
est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer la matrice $P = \operatorname{mat}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ et son inverse.
4. Calculer la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.
5. Quel est le lien entre M, M' et P ?

EXERCICE 44.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique vaut

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\operatorname{Im}(f), \operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f)$.
2. Soit la famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ définie par
$$f_1 = (1, 0, 0, 0), \quad f_2 = (1, 1, -1, 1), \quad f_3 = (3, 2, 0, -1)$$
et $f_4 = (7, 4, -4, 5)$. Vérifier que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$.

EXERCICE 45.

SOient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $A = a + bX + cX^2$ un élément de E. On définit l'application f par :

$$\forall P \in E, \ f(P) = (AP)''$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Donner la matrice M de f dans la base canonique de E.
3. Déterminer une condition sur A pour que f soit bijective.
4. On pose $A = X^2 + 1$. Déterminer M^{-1} et M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans ce cas.

EXERCICE 46.

Soit $f : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$.

1. Montrer que P est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. En déduire $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}_3[X]$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 47.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & X + \operatorname{tr}(AX)B \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur A et B pour que f soit une symétrie.
3. Déterminer la base et la direction de f dans ce cas.

EXERCICE 48.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ *si et seulement si* n est pair et il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\left(\begin{array}{c|c} 0_p & I_p \\ \hline 0_p & 0_p \end{array}\right)$ avec $n = 2p$.

EXERCICE 49.✯

Soient $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et T_n l'application définie sur E_n par

$$T_n(P) = (nX+1)P + (1-X^2)P'.$$

1. Prouver que $T_n \in \mathcal{L}(E_n)$.
2. Ecrire la matrice $M_n = \text{mat}_{\mathcal{B}_n}(T_n)$ de T_n dans la base canonique de E_n.
3. Dans le cas où $n = 3$, déterminer des bases de $\text{Ker}(T_n)$ et de $\text{Im}(T_n)$.

EXERCICE 50.✯

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et φ_A l'application de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\varphi_A : M \longmapsto AM - MA.$$

1. Prouver que φ_A est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau et l'image de φ_A.
3. En déduire que le commutant de A, ie l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dont on donnera une base.

EXERCICE 51.

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et f l'application défine sur l'espace E par $f(P) = P + P'$.

1. Prouver que f est un endomorphisme de E.
2. On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de E. Déterminer la matrice $M = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$.
3. Etablir que f est un automorphisme de E et calculer M^{-1}.
4. En déduire la solution P de $P + P' = X^2 + X + 1$.

EXERCICE 52.

Soit f, un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, admettant pour matrice relative à la base canonique la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau et de l'image de f.
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de f^2.
3. Vérifier que $\text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 53.

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient f, g et h les applications de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définies par :

$$f(P(X)) = XP(X), \quad g(P(X)) = P'(X) \;\text{ et }\; h(P(X)) = (P(X))^2.$$

1. Montrer que les applications f et g sont linéaires, mais que h ne l'est pas.
2. Les applications f et g sont-elles injectives ? Surjectives ? Déterminer la dimension de leurs noyaux respectifs. Déterminer l'image de f.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On désigne par f_n et g_n les restrictions de f et de g à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que l'image de g_n est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$ et celle de f_n est incluse dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
4. Déterminer la matrice de g_n dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice de f_n relativement aux bases

$$\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n) \;\text{ et }\; \mathcal{B}_{n+1} = (1, X, \dots, X^{n+1}).$$

5. Calculer les dimensions respectives des images de f_n et de g_n.

EXERCICE 54.

Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, définie en posant, pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

1. Montrer que f est linéaire et que son image est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Dans le cas où $n = 3$, donner la matrice de f dans la base $(1, X, X^2, X^3)$. Déterminer ensuite, pour une valeur de n quelconque, la matrice de f dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f pour $n \geqslant 3$. Calculer leurs dimensions respectives.
4. Soit Q un élément de l'image de f. Montrer (en utilisant en particulier les résultats de la deuxième question) qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(P) = Q \quad \text{et} \quad P(0) = P'(0) = 0.$$

EXERCICE 55.

Soit $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$L(x, y, z) = (x + 2y - z\,,\ y + z\,,\ x + y - 2z).$$

1. Ecrire la matrice associée à L dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une base et déterminer la dimension de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :
$$\mathrm{Ker}(L), \quad \mathrm{Im}(L), \quad \mathrm{Ker}(L) \cap \mathrm{Im}(L).$$
3. Déterminer $L \circ L = L^2$ et $L \circ L \circ L = L^3$ en calculant leurs matrices dans la base canonique. Quelle est la matrice de L^{16} dans la base canonique ?

EXERCICE 56.✯

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On considère l'application ϕ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\phi(M) = AM$.

1. Vérifier que ϕ est linéaire.
2. Montrer que ϕ est un isomorphisme. Donner une expression simple de l'isomorphisme réciproque.
3. Déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

EXERCICE 57.

On considère l'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) + P(X) \end{array}$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$. On notera M cette matrice.
3. **a.** Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

   b. En déduire que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$, et donner la matrice de ϕ^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
4. En déduire que l'équation $P(X+1) + P(X) = 4X^3 - 2X^2 + X - 1$ admet une unique solution $P \in \mathbb{R}_3[X]$, et donner cette solution.

EXERCICE 58.

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et les fonctions g_1, g_2, g_3 et g_4 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_1(x) = xe^x,\ g_2(x) = xe^{-x},\ g_3(x) = e^x,\ g_4(x) = e^{-x} \ .$$

On note $F = \mathrm{vect}(g_1, g_2, g_3, g_4)$.

1. **a.** Si a, b, c et d sont quatre réels tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ axe^x + bxe^{-x} + ce^x + de^{-x} = 0$, montrer qu'alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+c)e^x = 0$, puis que $a = c = 0$.

   b. Montrer que (g_1, g_2, g_3, g_4) est une base de F, qu'on notera $\mathcal{B}_1$ par la suite. Quelle est la dimension de F ?
2. **a.** Vérifier que g_1' et g_2' appartiennent à F.

   b. Montrer que (g_1, g_2, g_1', g_2') est aussi une base de F, qu'on notera $\mathcal{B}_2$. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.
3. Soit φ l'application définie sur F par $\varphi(f) = f'$.

   a. Montrer que φ est un endomorphisme de F.

   b. Déterminer la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}_1$.

   c. En déduire que φ est un automorphisme de F.

   d. Déterminer la matrice N de φ dans la base $\mathcal{B}_2$. Cette matrice est-elle inversible ?

EXERCICE 59.★

Soient $n \geqslant 1$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices carrées antisymétriques d'ordre n.

1. Justifier que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser leurs dimensions.
2. Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 60.★

Soit E le sous ensemble de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ défini par

$$E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication des matrices. Calculer $\dim(E)$.
2. Soit $M(a,b,c)$ un élément de E. Déterminer, suivant les valeurs des paramètres a, b et $c \in \mathbb{R}$ son rang.
3. Calculer (lorsque cela est possible) l'inverse $M(a,b,c)^{-1}$ de $M(a,b,c)$.
4. Donner une base de E formée de matrices inversibles et une autre formée de matrices de rang 1.

EXERCICE 61.

Montrer que

$$F = \{M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de F et la compléter en une base de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

EXERCICE 62.

On dit qu'une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est magique si les sommes des coefficients de M par ligne et par colonne sont constantes. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices magiques et, pour $M \in \mathcal{M}$, $s(M)$ la valeur commune des sommes.

1. Montrer que $\mathcal{M}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $s : \mathcal{M} \to \mathbb{K}$ est un morphisme d'algèbres.

   REMARQUE. Il s'agit de montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que s est un morphisme d'anneau et une forme linéaire. ■
2. Montrer que si $M \in \mathcal{M}$ est inversible, alors $M^{-1} \in \mathcal{M}$.
3. Montrer que $\mathcal{M}$ est la somme directe du sous-espace vectoriel $\mathcal{M}_s$ des matrices magiques symétriques et du sous-espace vectoriel $\mathcal{M}_a$ des matrices magiques antisymétriques.
4. On note ϕ_M l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M et on pose

   $$\mathcal{H} = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n, x_1 + \dots + x_n = 0\} \text{ et } \mathcal{K} = \{(x,\dots,x), x \in \mathbb{K}\}.$$

   Montrer que $M \in \mathcal{M}$ *si et seulement si* $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont stables par ϕ_M.
5. En déduire la dimension de $\mathcal{M}$.

EXERCICE 63.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\Delta_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M + {}^tM = \operatorname{tr}(M)A\}$. On note respctivement $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ les ensembles des matrices symétriques et des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que Δ_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ contenant $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.
2. Si $\operatorname{tr}(A) \neq 2$, montrer que $\Delta_A = \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.
3. Déterminer Δ_A dans le cas où $A \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$.
4. Déterminer Δ_A dans le cas où $\operatorname{tr}(A) = 2$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$. On pourra remarquer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est la somme directe de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 64.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $M(z) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Re}(z) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{E} = \{M(z),\ z \in \mathbb{C}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que l'application $M : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ z & \longmapsto & M(z) \end{array} \right.$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
3. Montrer que $\mathcal{E}$ est un anneau commutatif et que M est un isomorphisme d'anneaux.
4. Montrer que $\mathcal{E}$ est un corps.
5. Résoudre l'équation $A^4 = I_2$ d'inconnue $A \in \mathcal{E}$.
6. Pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $N(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $\mathcal{F} = \left\{N(a, b),\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un anneau commutatif. Quels sont ses éléments inversibles ?

Exercice 65.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathcal{N}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$.
Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on pose $[A, B] = AB - BA$. On note $\mathcal{L}_n = \left\{[A, B], (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2\right\}$.

1. a. Montrer que $\mathcal{N}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer sa dimension.
   b. Montrer que $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{N}_n$.
2. a. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de diagonale nulle appartient à $\mathcal{N}_n$.
   b. Montrer que toute matrice de $\mathcal{N}_n$ est semblable à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de diagonale nulle.
   c. En déduire que $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{L}_n$.

Exercice 66.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right)$. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ est *symplectique* si ${}^t MJM = J$. Montrer que l'ensemble des matrices symplectiques de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{K})$.

Exercice 67.

Soient A et $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX).$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 68.

On considère l'équation

$$X^2 + X = A \tag{E}$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note respectivement f et ϕ les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés à A et X.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$.
2. Montrer que A n'est pas inversible.
3. Soit X vérifiant (E). Montrer que X ou $X + I_2$ n'est pas inversible.
4. On suppose X non inversible.
   a. Montrer que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, \phi$ et $\mathrm{Ker}\, \phi \subset \mathrm{Ker}\, f$.
   b. Montrer que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, \phi$ et $\mathrm{Ker}\, \phi = \mathrm{Ker}\, f$.
   c. En déduire qu'il existe $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $X = xA$. Quelles sont les seules valeurs possibles de x ? Quelles sont les matrices X correspondantes ?
5. On suppose $X + I_2$ non inversible. En posant $Y = -(X + I_2)$, se ramener au cas précédent.
6. En déduire toutes les solutions de (E).

MATRICES

Exercice 69.

On veut résoudre le système d'équations d'inconnues dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\begin{cases} XY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$.

1. On suppose que le système admet un couple de solutions (X, Y). Montrer que $\operatorname{rg} X = \operatorname{rg} Y = 1$.
2. Que peut-on en déduire sur la forme de X et Y ?
3. Résoudre le système.

Exercice 70.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + \operatorname{tr}(X)A = 0$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 71.

Résoudre selon les valeurs des paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

Exercice 72.

Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = -4 \\ 3x + 2y - 3z = 17 \\ 5x - 3y + 8z = -10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - 3z = 2 \\ -x + 6y - 11z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - z = -2 \\ x + y + z = 2 \\ -2x + 4y - 5z = -10. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y - 5z = 3 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \\ x + y - 7z = 2 \\ 2x - 3y + 8z = 5. \end{cases}$$

Exercice 73.

Résoudre le système $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et où m est un paramètre réel.

Exercice 74.

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f(AB) = f(BA)$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.
Montrer que f est proportionnelle à la trace.

Exercice 75.

Soient H_1 et H_2 deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (f, g) \in H_1 \times H_2,\ f \circ g + g \circ f = 0$$

1. Justifier qu'il existe $(p_1, p_2) \in H_1 \times H_2$ tel que $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}$.
2. Montrer que p_1 et p_2 sont des projecteurs.
3. Montrer que $\dim H_1 \leqslant (n - \operatorname{rg} p_2)^2$ et $\dim H_2 \leqslant (n - \operatorname{rg} p_1)^2$.
4. Quel est le nombre de choix possibles pour le couple (H_1, H_2) ?

Exercice 76.

Soient $p_1, \dots, p_n$ des projecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que $p_1 + \dots + p_n = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que $\operatorname{Im} p_1 \oplus \dots \oplus \operatorname{Im} p_n = E$.

Exercice 77.

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer le rang de l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ $\Phi : f \mapsto v \circ f \circ u$.

Exercice 78.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & iz + (1 - i)\bar{z} \end{cases}$.

1. Montrer que f est un automorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
2. Montrer qu'il existe une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Construire le point d'affixe $f(z)$ à partir du point d'affixe z.

Exercice 79.

On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (\sin, \cos, \mathrm{sh}, \mathrm{ch})$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F.
2. On note D l'opérateur de dérivation. Montrer que F est stable par D. On notera d l'endomorphisme de F induit par D.
3. On note M la matrice de d dans la base $\mathcal{B}$. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que d est un automorphisme de F. Écrire la matrice de d^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
5. On note $f = d - \mathrm{Id}$. Déterminer l'image et le noyau de f.
6. On note $g = d + \mathrm{Id}$. Déterminer l'image et le noyau de $g \circ f$.