

# DEVOIR À LA MAISON N°14 : CORRIGÉ

## Problème 1 – Division selon les puissances croissantes et applications

### Partie I – Division selon les puissances croissantes

1. Soit  $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $B(0) \neq 0$  et  $p \in \mathbb{N}$ . Supposons qu'il existe  $Q_1, R_1, Q_2, R_2 \in \mathbb{K}[X]$  tels que

$$A = BQ_1 + X^{p+1}R_1 = BQ_2 + X^{p+1}R_2 \quad \deg Q_1 \leq p \quad \deg Q_2 \leq p$$

On a donc  $B(Q_1 - Q_2) = X^{p+1}(R_2 - R_1)$ . Puisque 0 n'est pas racine de B, X n'est pas un facteur irréductible de B. Puisque le seul facteur irréductible de  $X^{p+1}$  est X, B et  $X^{p+1}$  n'ont aucun facteur irréductible commun : ils sont donc premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss,  $X^{p+1}$  divise  $Q_1 - Q_2$ . Or  $\deg(Q_1 - Q_2) \leq p$  donc  $Q_1 - Q_2 = 0$  i.e.  $Q_1 = Q_2$ . Ensuite,  $X^{p+1}(R_2 - R_1) = 0$  puis  $R_1 = R_2$  par intégrité.

2. Soient  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $B(0) \neq 0$ . On fait l'hypothèse de récurrence suivante :

HR(p) : il existe  $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $A = BQ + X^{p+1}R$  et  $\deg Q \leq p$ .

**Initialisation** : Posons  $Q = \frac{A(0)}{B(0)}$ . Alors  $A - BQ$  admet 0 pour racine : on peut donc le factoriser par X. Il existe alors  $R \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $A - BQ = XR$  i.e.  $A = BQ + XR$ . On a bien  $\deg Q \leq 0$ .

**Hérédité** : Supposons HR(p) vraie pour un certain  $p \in \mathbb{N}$ . Il existe donc  $(\tilde{Q}, \tilde{R}) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $A = B\tilde{Q} + X^{p+1}\tilde{R}$  et  $\deg \tilde{Q} \leq p$ . Mais en raisonnant comme dans l'initialisation, on montre qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $\tilde{R} = \lambda B + XR$ . On a alors  $A = BQ + X^{p+2}R$  en posant  $Q = \tilde{Q} + \lambda X^{p+1}$ . Comme  $\deg \tilde{Q} \leq p$ ,  $\deg Q \leq p + 1$ .

**Conclusion** : Par récurrence, HR(p) est vraie pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

3.

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 2 \quad - \quad X \quad + \quad X^2 \quad - \quad X^3 \\
 \ominus \quad \begin{array}{r} 2 \quad - \quad 4X \quad + \quad 2X^2 \end{array} \\
 \hline
 \quad \quad \quad 3X \quad - \quad X^2 \quad - \quad X^3 \\
 \ominus \quad \quad \quad \begin{array}{r} 3X \quad - \quad 6X^2 \quad + \quad 3X^3 \end{array} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad 5X^2 \quad - \quad 4X^3 \\
 \ominus \quad \quad \quad \quad \begin{array}{r} 5X^2 \quad - \quad 10X^3 \quad + \quad 5X^4 \end{array} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad 6X^3 \quad - \quad 5X^4
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 1 - 2X + X^2 \\
 \hline
 2 + 3X + 5X^2
 \end{array}
 \end{array}$$

Le quotient est donc  $2 + 3X + 5X^2$  et le reste est  $6 - 5X$ .

### Partie II – Application aux développements limités

1. Si on note R le reste de la division selon les puissances croissantes de A par B à l'ordre p, on a  $A - BQ = X^{p+1}R$ . Comme R est continue en 0, elle est bornée au voisinage de 0 et donc  $A(x) - B(x)Q(x) = \mathcal{O}(x^{p+1})$  et a fortiori  $A(x) - B(x)Q(x) =$

$o(x^p)$ . Comme B est continue et non nulle en 0,  $\frac{1}{B}$  est continue et donc bornée au voisinage de 0. On en déduit que

$$\frac{A(x) - B(x)Q(x)}{B(x)} = o(x^p) \text{ i.e. } \frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + o(x^p).$$

2. On note à nouveau  $R$  le reste de la division selon les puissances croissantes de  $A$  par  $B$  à l'ordre  $p$ . Pour  $x$  au voisinage de  $0$ ,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x)Q(x) &= A(x) - B(x)Q(x) + (f(x) - A(x)) - (g(x) - B(x))Q(x) \\ &= x^{p+1}R(x) + (f(x) - A(x)) - (g(x) - B(x))Q(x) \end{aligned}$$

On prouve comme à la question précédente que  $x^{p+1}R(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^p)$ . De plus,  $f(x) - A(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^p)$ . Enfin,  $g(x) - B(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^p)$  et comme  $Q$  est continue et donc bornée au voisinage de  $0$ ,  $(g(x) - B(x))Q(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^p)$ . On a donc  $f(x) - g(x)Q(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^p)$ . Puisque  $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} B(x) + o(x^p)$ ,  $g$  admet  $B(0) \neq 0$  pour limite en  $0$ , de sorte que  $\frac{1}{g}$  est bornée au voisinage de  $0$ . Par conséquent,  $\frac{f(x) - g(x)Q(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^p)$  i.e.  $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^p)$ .

3. On a  $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$  et  $\exp(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ . On effectue donc la division selon les puissances croissantes de  $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$  par  $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$  à l'ordre 4.

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 1 \qquad \qquad - \frac{x^2}{2} \qquad \qquad + \frac{x^4}{24} \\ \hline 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \\ \hline -x - x^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \\ \hline -x - x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} \\ \hline \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6} \\ \hline \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} \\ \hline - \frac{x^4}{6} \end{array} & \begin{array}{l} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \\ \hline 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} \end{array} \end{array}$$

On a volontairement omis les puissances strictement supérieures à 5 dans les restes car elles n'interviennent pas dans le calcul du quotient qui est de degré au plus 4. D'après la question précédente, on a donc

$$\frac{\cos x}{\exp x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

### Partie III – Décomposition en éléments simples

1. On effectue la division selon les puissances croissantes de  $X^3 - 1$  par  $X + 1$ .

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} -1 \qquad \qquad \qquad + X^3 \\ \hline -1 - X \\ \hline X \qquad \qquad + X^3 \\ \hline X + X^2 \\ \hline -X^2 + X^3 \\ \hline -X^2 - X^3 \\ \hline 2X^3 \\ \hline 2X^3 + 2X^4 \\ \hline -2X^4 \end{array} & \begin{array}{l} 1 + X \\ \hline -1 + X - X^2 + 2X^3 \end{array} \end{array}$$

Ainsi  $X^3 - 1 = (X + 1)(2X^3 - X^2 + X - 1) - 2X^4$ . On en déduit que

$$\frac{X^3 - 1}{X^4(X + 1)} = \frac{2}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{X^3} - \frac{1}{X^4} - \frac{2}{X + 1}$$

ce qui est bien la décomposition en éléments simples de  $\frac{X^3 - 1}{X^4(X + 1)}$ .

2. Posons  $F = \frac{X^2 + 1}{(X-1)^4(X+1)^3}$  et

$$G = F(X+1) = \frac{X^2 + 2X + 2}{X^4(X+2)^3} = \frac{X^2 + 2X + 2}{X^4(X^3 + 6X^2 + 12X + 8)}$$

On effectue la division selon les puissances croissantes de  $X^2 + 2X + 2$  par  $X^3 + 2X^2 + 4X + 8$  à l'ordre 3.

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} \ominus \quad \begin{array}{r} 2 + 2X + X^2 \\ 2 + 3X + \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{4}X^3 \\ \hline - X - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{4}X^3 \\ \ominus \quad \begin{array}{r} - X - \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{4}X^3 - \frac{1}{8}X^4 \\ \hline X^2 + \frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{8}X^4 \\ \ominus \quad \begin{array}{r} X^2 + \frac{3}{2}X^3 + \frac{3}{4}X^4 + \frac{1}{8}X^5 \\ \hline - X^3 - \frac{5}{8}X^4 - \frac{1}{8}X^5 \\ \ominus \quad \begin{array}{r} - X^3 - \frac{3}{2}X^4 - \frac{3}{4}X^5 - \frac{1}{8}X^6 \\ \hline \frac{7}{8}X^4 + \frac{5}{8}X^5 + \frac{1}{8}X^6 \end{array} \end{array} \end{array} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} 8 + 12X + 6X^2 + X^3 \\ \hline \frac{1}{4} - \frac{1}{8}X + \frac{1}{8}X^2 - \frac{1}{8}X^3 \end{array}$$

Ainsi

$$X^2 + 2X + 2 = (X^3 + 2X^2 + 4X + 8) \left( -\frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{8}X^2 - \frac{1}{8}X + \frac{1}{4} \right) + X^4 \left( \frac{1}{8}X^2 + \frac{5}{8}X + \frac{7}{8} \right)$$

d'où

$$G = -\frac{1}{8X} + \frac{1}{8X^2} - \frac{1}{8X^3} + \frac{1}{4X^4} + \frac{X^2 + 5X + 7}{8(X+2)^3}$$

On en déduit

$$F = G(X-1) = -\frac{1}{8(X-1)} + \frac{1}{8(X-1)^2} - \frac{1}{8(X-1)^3} + \frac{1}{4(X-1)^4} + \frac{X^2 + 3X + 3}{8(X+1)^3}$$

Posons  $\tilde{F} = \frac{X^2 + 3X + 3}{8(X+1)^3}$  et  $\tilde{G} = \tilde{F}(X-1)$ . Ainsi

$$\tilde{G} = \frac{X^2 + X + 1}{8X^3} = \frac{1}{8X} + \frac{1}{8X^2} + \frac{1}{8X^3}$$

On en déduit

$$\tilde{F} = \tilde{G}(X+1) = \frac{1}{8(X+1)} + \frac{1}{8(X+1)^2} + \frac{1}{8(X+1)^3}$$

puis

$$F = -\frac{1}{8(X-1)} + \frac{1}{8(X-1)^2} - \frac{1}{8(X-1)^3} + \frac{1}{4(X-1)^4} + \frac{1}{8(X+1)} + \frac{1}{8(X+1)^2} + \frac{1}{8(X+1)^3}$$

## Problème 2 – ENSI 1979

### Partie I – Etude de cas particuliers

1. On trouve

$$P_1 = X$$

$$P_2 = 2X$$

$$P_3 = 3X - X^3$$

$$P_4 = 4X - 4X^3$$

$$Q_1 = 1$$

$$Q_2 = 1 - X^2$$

$$Q_3 = 1 - 3X^2$$

$$Q_4 = 1 - 6X^2 + X^4$$

2. Les décompositions en facteurs irréductibles de  $P_2$ ,  $Q_2$ ,  $P_3$ ,  $Q_3$  ne posent pas de problèmes.

$$P_2 = 2X \quad Q_2 = (1 - X)(1 + X) \quad P_3 = X(\sqrt{3} - X)(\sqrt{3} + X) \quad Q_3 = (1 - X\sqrt{3})(1 + X\sqrt{3})$$

La factorisation de  $P_4$  est évidente. Les racines de  $1 - 6X + X^2$  sont  $3 - 2\sqrt{2}$  et  $3 + 2\sqrt{2}$ . Les racines de  $Q_4$  sont donc les racines carrées de ces derniers réels. Puisque  $3 - 2\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^2$  et  $3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$ , les racines de  $Q_4$  sont  $1 - \sqrt{2}$ ,  $-1 + \sqrt{2}$ ,  $1 + \sqrt{2}$ ,  $-1 - \sqrt{2}$ . Finalement,

$$P_4 = 4X(1 - X)(1 + X) \quad Q_4 = (X + 1 + \sqrt{2})(X - 1 + \sqrt{2})(X + 1 - \sqrt{2})(X - 1 - \sqrt{2})$$

3. La décomposition en éléments simples de  $R_2$  est directe :

$$R_2 = \frac{2X}{(1 - X)(1 + X)} = \frac{(X + 1) - (1 - X)}{(1 - X)(1 + X)} = \frac{1}{1 - X} - \frac{1}{1 + X}$$

Une division euclidienne montre que la partie entière de  $R_3$  est  $\frac{1}{3}X$ . La méthode usuelle montre que

$$R_3 = \frac{1}{3}X - \frac{4}{9\left(X - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} - \frac{4}{9\left(X + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

La décomposition en éléments simples de  $R_4$  est de la forme

$$R_4 = \frac{\alpha}{X - 1 - \sqrt{2}} + \frac{\beta}{X - 1 + \sqrt{2}} + \frac{\gamma}{X + 1 - \sqrt{2}} + \frac{\delta}{X + 1 + \sqrt{2}}$$

avec

$$\alpha = \frac{P_4(1 + \sqrt{2})}{Q'_4(1 + \sqrt{2})} \quad \beta = \frac{P_4(1 - \sqrt{2})}{Q'_4(1 - \sqrt{2})} \quad \gamma = \frac{P_4(-1 + \sqrt{2})}{Q'_4(-1 + \sqrt{2})} \quad \delta = \frac{P_4(-1 - \sqrt{2})}{Q'_4(-1 - \sqrt{2})}$$

On remarquera pour simplifier les calculs que  $\frac{P_4}{Q'_4} = \frac{1 - X^2}{X^2 - 3}$  et on tirera profit du fait que  $R_4$  est impaire. On trouve alors

$$R_4 = \frac{-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{X - 1 - \sqrt{2}} + \frac{-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{X - 1 + \sqrt{2}} + \frac{-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{X + 1 - \sqrt{2}} + \frac{-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{X + 1 + \sqrt{2}}$$

## Partie II – Etude du cas général

1. Remarquons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$Z_{n+1} = Q_{n+1} + iP_{n+1} = -XP_n + Q_n + iP_n + iXQ_n = (1 + iX)(Q_n + iP_n) = (1 + iX)Z_n$$

Puisque  $Z_0 = 1$ , on montre alors aisément que  $Z_{n+1} = (1 + iX)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Tout d'abord,  $1 + i \tan \alpha = \frac{e^{i\alpha}}{\cos \alpha}$  donc  $(1 + i \tan \alpha)^n = \frac{e^{in\alpha}}{\cos^n \alpha}$ . Puisque  $P_n$  et  $Q_n$  sont à coefficients réels, il s'ensuit que

$$P_n(\tan \alpha) = \operatorname{Im}((1 + i \tan \alpha)^n) = \frac{\sin n\alpha}{\cos^n \alpha} \quad Q_n(\tan \alpha) = \operatorname{Re}((1 + i \tan \alpha)^n) = \frac{\cos n\alpha}{\cos^n \alpha}$$

3. D'après la formule du binôme,

$$Z_n = (1 + iX)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k X^k = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k X^{2k} + i \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k X^{2k+1}$$

donc

$$P_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k X^{2k+1} \quad Q_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k X^{2k}$$

4. D'après la question II.3,  $P_n$  est impair et  $Q_n$  est pair.

**REMARQUE.** On peut également déterminer la parité de  $P_n$  et  $Q_n$  sans leurs formes développées. D'une part,

$$\bar{Z}_n = (1 - iX)^n = Z_n(-X) = Q_n(-X) + iP_n(-X)$$

D'autre part, puisque  $P_n$  et  $Q_n$  sont à coefficients réels,

$$\bar{Z}_n = Q_n - iP_n$$

Puisque  $P_n$ ,  $Q_n$ ,  $P_n(-X)$ ,  $Q_n(-X)$  sont à coefficients réels,  $P_n(-X) = -P_n(X)$  et  $Q_n(-X) = Q_n(X)$ . Autrement dit,  $P_n$  est impair et  $Q_n$  est pair. ■

La question II.3 montre également que

- si  $n$  est pair,  $\deg P_n = n - 1$ ,  $\deg Q_n = n$ , le coefficient dominant de  $P_n$  est  $-(-1)^{\frac{n}{2}}n$  et le coefficient dominant de  $Q_n$  est  $(-1)^{\frac{n}{2}}$  ;
- si  $n$  est impair,  $\deg P_n = n$ ,  $\deg Q_n = n - 1$ , le coefficient dominant de  $P_n$  est  $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$  et le coefficient dominant de  $Q_n$  est  $(-1)^{\frac{n-1}{2}}n$ .

5. ► Supposons  $n$  pair.

La question II.2 montre que les réels  $\tan \frac{k\pi}{n}$  pour  $k \in \llbracket -\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} - 1 \rrbracket$  sont racines de  $P_n$ . La fonction  $\tan$  étant strictement croissante sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , ces  $n - 1$  réels sont distincts. Puisque  $\deg P_n = n - 1$ , ce sont exactement les racines de  $P_n$  et elles sont simples.

La question II.2 montre que les réels  $\tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}$  pour  $k \in \llbracket -\frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1 \rrbracket$  sont racines de  $Q_n$ . La fonction  $\tan$  étant strictement croissante sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , ces  $n$  réels sont distincts. Puisque  $\deg Q_n = n$ , ce sont exactement les racines de  $P_n$  et elles sont simples.

► Supposons  $n$  impair.

La question II.2 montre que les réels  $\tan \frac{k\pi}{n}$  pour  $k \in \llbracket -\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2} \rrbracket$  sont racines de  $P_n$ . La fonction  $\tan$  étant strictement croissante sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , ces  $n$  réels sont distincts. Puisque  $\deg P_n = n$ , ce sont exactement les racines de  $P_n$  et elles sont simples.

La question II.2 montre que les réels  $\tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}$  pour  $k \in \llbracket -\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2} - 1 \rrbracket$  sont racines de  $Q_n$ . La fonction  $\tan$  étant strictement croissante sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , ces  $n - 1$  réels sont distincts. Puisque  $\deg Q_n = n - 1$ , ce sont exactement les racines de  $P_n$  et elles sont simples.

6. Les questions précédentes montrent que si  $n$  est pair

$$\begin{aligned} P_n &= -(-1)^{\frac{n}{2}}n \prod_{k=-\frac{n}{2}+1}^{\frac{n}{2}-1} \left( X - \tan \frac{k\pi}{n} \right) \\ &= -(-1)^{\frac{n}{2}}nX \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left( X - \tan \frac{k\pi}{n} \right) \left( X + \tan \frac{k\pi}{n} \right) \\ Q_n &= (-1)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}-1} \left( X - \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \\ &= (-1)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \left( X - \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \left( X + \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \end{aligned}$$

et que si  $n$  est impair

$$\begin{aligned} P_n &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \left( X - \tan \frac{k\pi}{n} \right) \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}X \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left( X - \tan \frac{k\pi}{n} \right) \left( X + \tan \frac{k\pi}{n} \right) \\ Q_n &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}n \prod_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}-1} \left( X - \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}n \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \left( X - \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \left( X + \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \end{aligned}$$

7. Lorsque  $n$  est pair,  $\deg P_n < \deg Q_n$  donc la partie entière de  $R_n$  est nulle.

Lorsque  $n$  est impair,  $\deg P_n = \deg Q_n + 1$  donc la partie entière de  $R_n$  est de degré 1. Puisque  $P_n$  et  $Q_n$  sont respectivement impair et pair,  $R_n$  est impaire. L'unicité de la décomposition en éléments simples nous apprend donc que la partie entière de  $R_n$  est également impaire. Elle est donc de la forme  $\alpha X$  où  $\alpha$  est le quotient du coefficient de  $P_n$  par le coefficient dominant de  $Q_n$ . Ainsi  $\alpha = \frac{1}{n}$ . La partie entière de la fraction rationnelle  $R_n$  est donc  $\frac{1}{n}X$ .

8. D'une part,

$$Z'_n = ni(1 + iX)^{n-1} = niZ_{n-1} = -nP_{n-1} + niQ_{n-1}$$

D'autre part,

$$Z'_n = Q'_n + iP'_n$$

Puisque  $P_{n-1}$ ,  $Q_{n-1}$ ,  $P'_n$ ,  $Q'_n$  sont à coefficients réels, on en déduit que  $Q'_n = -nP_{n-1}$  et  $P'_n = nQ_{n-1}$ .

9. Supposons  $n$  pair. Puisque  $R_n$  est impaire, la décomposition en éléments simples de  $R_n$  est de la forme

$$R_n = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\lambda_k}{X - \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}} + \frac{\lambda_k}{X + \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

avec

$$\lambda_k = \frac{P_n \left( \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)}{Q'_n \left( \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{P_n \left( \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)}{P_{n-1} \left( \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)}$$

D'après la question II.2, on obtient après simplification

$$\lambda_k = -\frac{1}{n \cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

Supposons  $n$  impair. Puisque  $R_n$  est impaire, la décomposition en éléments simples de  $R_n$  est de la forme

$$R_n = \frac{1}{n}X + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{\lambda_k}{X - \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}} + \frac{\lambda_k}{X + \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

avec

$$\lambda_k = -\frac{1}{n \cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

10. ► Supposons  $n$  pair.

Les racines non nulles de  $P_n$  autrement dit de  $\frac{P_n}{X}$  sont les  $\tan \frac{k\pi}{n}$  et les  $-\tan \frac{k\pi}{n}$  pour  $k \in \llbracket 1, \frac{n}{2} - 1 \rrbracket$ . Le produit de ces racines vaut donc

$$(-1)^{\frac{n}{2}-1} \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \tan^2 \frac{k\pi}{n} = (-1)^{\frac{n}{2}-1} A_n^2$$

Par ailleurs,

$$\frac{P_n}{X} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{2k+1} (-1)^k X^{2k}$$

donc le produit des racines de  $\frac{P_n}{X}$  est aussi

$$(-1)^{n-2} \frac{\binom{n}{1} (-1)^0}{\binom{n}{n-1} (-1)^{\frac{n}{2}-1}} = (-1)^{\frac{n}{2}-1}$$

Ainsi  $A_n^2 = 1$ . Puisque  $\tan \frac{k\pi}{n} > 0$  pour  $k \in \llbracket 1, \frac{n}{2} - 1 \rrbracket$ , on a donc  $A_n > 0$  de sorte que  $A_n = 1$ .

Les racines de  $Q_n$  sont les  $\tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}$  et les  $-\tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}$  pour  $k \in \llbracket 0, \frac{n}{2} - 1 \rrbracket$ . Le produit de ces racines vaut donc

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \tan^2 \frac{(2k+1)\pi}{2n} = (-1)^{\frac{n}{2}} B_n^2$$

Par ailleurs,

$$Q_n = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2k} (-1)^k X^{2k}$$

donc le produit des racines de  $Q_n$  est aussi

$$(-1)^n \frac{\binom{n}{0}(-1)^0}{\binom{n}{n}(-1)^{\frac{n}{2}}} = (-1)^{\frac{n}{2}}$$

Ainsi  $B_n^2 = 1$ . Puisque  $\tan \frac{(2k+1)\pi}{2n} > 0$  pour  $k \in \llbracket 0, \frac{n}{2} - 1 \rrbracket$ , on a donc  $B_n > 0$  de sorte que  $B_n = 1$ .

**REMARQUE.** On peut aussi remarquer que les tangentes intervenant dans chacun des produits  $A_n$  et  $B_n$  sont inverses l'une de l'autre deux à deux en vertu de la relation trigonométrique  $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$ . ■

► Supposons  $n$  impair.

Les racines non nulles de  $P_n$  autrement dit de  $\frac{P_n}{X}$  sont les  $\tan \frac{k\pi}{n}$  et les  $-\tan \frac{k\pi}{n}$  pour  $k \in \llbracket 1, \frac{n-1}{2} \rrbracket$ . Le produit de ces racines vaut donc

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \tan^2 \frac{k\pi}{n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} A_n^2$$

Par ailleurs,

$$\frac{P_n}{X} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} (-1)^k X^{2k}$$

donc le produit des racines de  $\frac{P_n}{X}$  est aussi

$$(-1)^{n-1} \frac{\binom{n}{1}(-1)^0}{\binom{n}{n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$$

Ainsi  $A_n^2 = n$ . Puisque  $\tan \frac{k\pi}{n} > 0$  pour  $k \in \llbracket 1, \frac{n-1}{2} \rrbracket$ , on a donc  $A_n > 0$  de sorte que  $A_n = \sqrt{n}$ .

Les racines de  $Q_n$  sont les  $\tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}$  et les  $-\tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}$  pour  $k \in \llbracket 0, \frac{n-1}{2} - 1 \rrbracket$ . Le produit de ces racines vaut donc

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \tan^2 \frac{(2k+1)\pi}{2n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} B_n^2$$

Par ailleurs,

$$Q_n = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k} (-1)^k X^{2k}$$

donc le produit des racines de  $Q_n$  est aussi

$$(-1)^{n-1} \frac{\binom{n}{0}(-1)^0}{\binom{n}{n-1}(-1)^{\frac{n-1}{2}}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n}$$

Ainsi  $B_n^2 = \frac{1}{n}$ . Puisque  $\tan \frac{(2k+1)\pi}{2n} > 0$  pour  $k \in \llbracket 0, \frac{n-1}{2} - 1 \rrbracket$ , on a donc  $B_n > 0$  de sorte que  $B_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

**REMARQUE.** A nouveau, en utilisant la relation trigonométrique  $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$ , on peut montrer que  $B_n = \frac{1}{A_n}$ . ■