Devoir à la maison n°13

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

Pour toute fonction g continue sur $[0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit un polynôme $\mathrm{B}_n(g)$ tel que :

$$\forall x \in [0,1],\ \mathrm{B}_n(g)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

Dans tout le problème, f désigne une fonction continue sur $[0,1]$.

1. On note $e_0 : x \mapsto 1$, $e_1 : x \mapsto x$ et $e_2 : x \mapsto x^2$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$:

$$\mathrm{B}_n(e_0)(x) = e_0(x)$$

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$

$$\mathrm{B}_n(e_1)(x) = e_1(x)$$

c. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout $k \in [\![2,n]\!]$

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2}$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$:

$$\mathrm{B}_n(e_2)(x) = e_2(x) + \frac{x(1-x)}{n}$$

2. Justifier l'existence d'un réel positif M tel que $\forall x \in [0,1],\ |f(x)| \leqslant \mathrm{M}$.

3. On se donne un réel strictement positif ε. Justifier l'existence d'un réel strictement positif δ tel que :

$$\forall (u,v) \in [0,1]^2,\ |u-v| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon$$

4. Montrer que :

$$\forall (u,v) \in [0,1]^2,\ |f(u) - f(v)| < \varepsilon + 2\mathrm{M}\left(\frac{u-v}{\delta}\right)^2$$

On pourra distinguer les cas $|u-v| < \delta$ et $|u-v| \geqslant \delta$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$:

$$f(x) - \mathrm{B}_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] x^k (1-x)^{n-k}$$

6. En déduire que pour tout tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$:

$$|f(x) - \mathrm{B}_n(f)(x)| < \varepsilon + \frac{\mathrm{M}}{2n\delta^2}$$

On pourra utiliser les résultats de la question **.1**.
On pourra également utiliser le fait que pour $x \in [0,1]$, $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$, après l'avoir démontré.

7. On pose $\mathrm{S}_n = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - \mathrm{B}_n(f)(x)|$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{S}_n = 0$.