Devoir à la maison n°05

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1 ★★★ **Norme** $\|.\|_p$

Pour $p \in \mathbb{R}_+^*$, on convient que $0^p = 0$ et on pose

$$\forall x \in \mathbb{K}^n,\ \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, on posera $x.y = (x_1y_1, \dots, x_ny_n)$.

1. Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\|.\|_p$ vérifie les propriétés de séparation et d'homogénéité.

2. Soit $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

a. En utilisant la concavité de ln, montrer que pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $uv \leq \dfrac{u^p}{p} + \dfrac{v^q}{q}$.

b. En déduire que pour $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, $\|x.y\|_1 \leq \|x\|_p\|y\|_q$. On pourra d'abord traiter le cas où $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.

3. Soit $p \in [1, +\infty[$. Montrer que $\|.\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire. On pourra remarquer pour $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$,

$$\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p = \sum_{k=1}^n |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k||x_k + y_k|^{p-1}$$

4. a. Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$.

b. Soit $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $p < q$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_q \leq \|x\|_p$, puis déterminer $\displaystyle\sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|x\|_q}{\|x\|_p}$.

5. a. Soit $(p, q, r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$. Montrer que pour $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$

$$\|x.y\|_r \leq \|x\|_p\|y\|_q$$

b. Soit $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $p < q$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}\|x\|_q$$

puis déterminer $\displaystyle\sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|x\|_p}{\|x\|_q}$.

6. Soit $x \in \mathbb{K}^n$. Montrer que $\|x\|_\infty = \displaystyle\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p$.

Exercice 2 ★★★ **Norme $\|.\|_p$**

On pose $\mathrm{E} = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ et pour $p \in \mathbb{R}_+^*$, on convient que $0^p = 0$ et on pose

$$\forall f \in \mathrm{E},\ \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

1. Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\|.\|_p$ vérifie les propriétés de séparation et d'homogénéité.

2. Soit $(p,q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a. En utilisant la concavité de ln, montrer que pour tout $(u,v) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$.

b. En déduire que pour $(f,g) \in \mathrm{E}^2$, $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q$. On pourra d'abord traiter le cas où $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$.

3. Soit $p \in [1,+\infty[$. Montrer que $\|.\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire. On pourra remarquer pour $(f,g) \in \mathrm{E}^2$,

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p \,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)||f(t)+g(t)|^{p-1} \,\mathrm{d}t + \int_a^b |g(t)||f(t)+g(t)|^{p-1} \,\mathrm{d}t$$

4. a. Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n \in \mathrm{E}$ en posant

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - n\frac{t-a}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq a + \frac{b-a}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $\|f_n\|_p$.

b. Soit $(p,q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $p < q$. Déterminer $\sup_{f \in \mathrm{E}\setminus\{0\}} \frac{\|f\|_q}{\|f\|_p}$.

5. a. Soit $(p,q,r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Montrer que pour $(f,g) \in \mathrm{E}^2$, $\|fg\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$.

b. Soit $(p,q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $p < q$. Montrer que pour tout $f \in \mathrm{E}$,

$$\|f\|_p \leq (b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q$$

puis déterminer $\sup_{f \in \mathrm{E}\setminus\{0\}} \frac{\|f\|_p}{\|f\|_q}$.

6. Soit $f \in \mathrm{E}$. Montrer que $\|f\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|f\|_p$.