Devoir surveillé n°10

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 —

Dans tout le problème, on considère les suites $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout entier naturel non nul n par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad u_n = H_n - \ln n$$

Partie I –

1. Etablir pour tout entier naturel k non nul l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

2. **a.** Quelle est la limite de la suite (H_n) ?

b. En utilisant le résultat de la question **I.1**, montrer pour tout entier naturel non nul n l'encadrement suivant :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$$

c. En déduire un équivalent simple de H_n quand n tend vers $+\infty$.

3. **a.** En utilisant à nouveau l'encadrement obtenu à la question **I.1**, montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b. En déduire que cette suite est convergente ; on note γ sa limite. Montrer que γ appartient à $[0, 1]$.

4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose pour tout entier naturel non nul k :

$$J_k = \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t)\, dt$$

a. Établir pour tout entier naturel non nul k l'égalité suivante :

$$J_k = \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t)\, dt$$

b. En déduire pour tout entier naturel non nul n la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n-1} J_k$$

5. On suppose dans cette question que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

a. Établir pour tout entier naturel non nul k la double inégalité suivante :

$$0 \leqslant J_k \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{4t^3}$$

b. En déduire que la série de terme général J_k est convergente.

c. En déduire également, pour tout entier naturel non nul n l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leqslant \frac{1}{8n^2}$$

d. En déduire le développement asymptotique suivant :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Partie II –

On considère les suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$ définies par :

$$\forall n \geqslant 1,\ x_n = u_n - \frac{1}{2n} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 2,\ y_n = x_n - x_{n-1}$$

1. **a.** Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$?

b. Justifier pour tout entier naturel non nul n l'égalité suivante :

$$\gamma - x_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k$$

c. En déduire pour tout entier naturel non nul n l'égalité suivante :

$$\gamma - x_n = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)$$

2. Montrer que

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3k^3}$$

Pour la dernière question, on va admettre le résultat suivant.

Si $\sum a_n$ est une série à termes positifs convergente et si $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$, alors $\sum b_n$ est également convergente (ce que l'on sait déjà) et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

3. En déduire que

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Problème 2 —

Partie I –

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et préciser sa dimension.

2. Montrer que $\mathcal{A}$ est un anneau commutatif.

3. On pose $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que (I_3, M, M^2) est une base de $\mathcal{A}$.

4. Exprimer M^3 en fonction de I_3 et M.

Partie II –

On définit une suite (u_n) par $u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = 4$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+1} - 4u_n$.

1. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_k, b_k, c_k tels que $M^k = \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k & c_k \\ 0 & -c_k & b_k \end{pmatrix}$.

2. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (a_k) et deux relations de récurrence liant les suites (b_k) et (c_k).

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on appelle z_k le nombre complexe $z_k = b_k + ic_k$. Exprimer z_{k+1} en fonction de z_k et montrer que $b_k = \mathrm{Re}\left((1+i)^k\right)$.

4. Retrouver ce dernier résultat en trouvant une relation de récurrence vérifiée par la suite (b_k).

5. Montrer que la suite (u_n) est à valeurs entières.

6. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{tr}(M^n)$.

7. Soit p un nombre premier. On rappelle que pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$ et que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, p divise $a^p - a$ (petit théorème de Fermat).
Montrer que p divise u_p.