

## CORRIGÉ TD : SÉRIES

### SOLUTION 1.

Comme  $\alpha > 0$ , on a

$$\cos(1/n^\alpha) = 1 - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

ainsi, pour  $n$  au voisinage de  $+\infty$  :

$$\begin{aligned} n \ln(\cos(1/n^\alpha)) &= n \ln\left(1 - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right) \\ &= -\frac{n^{1-2\alpha}}{2} + o(n^{1-2\alpha}) \end{aligned}$$

► Si  $1 - 2\alpha < 0$ , par continuité de l'exponentielle au point 0, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \neq 0$$

donc  $\sum u_n$  diverge banalement.

► Si  $1 - 2\alpha = 0$ , par continuité de l'exponentielle en  $-1/2$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$$

donc  $\sum u_n$  diverge.

► Si  $1 - 2\alpha > 0$ , on a par croissances comparées au voisinage de  $+\infty$ ,

$$u_n = e^{-n^{1-2\alpha}/2 + o(n^{1-2\alpha})} = o(1/n^2)$$

donc  $\sum u_n$  converge par comparaison à la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$ .

En conclusion :  $\sum u_n$  converge si et seulement si

$$0 < \alpha < 1/2.$$

### SOLUTION 2.

On a clairement

$$u_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

donc  $\sum u_n$  converge par comparaison à la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ .

### SOLUTION 3.

Pour tout  $n \geq 0$ , notons  $u_n = 1/\binom{2n}{n}$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(2n)!}{n!^2} / \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{1}{4} < 1$$

la série  $\sum u_n$  est donc convergente d'après le critère de D'Alembert.

---

**SOLUTION 4.**

On a, pour tout  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{\ln(a)}{n} - \frac{2 + \ln(bc)/n}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{\ln(a/\sqrt{bc})}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Puisque toute série dont le terme général est en  $\mathcal{O}(1/n^2)$  converge, on déduit du théorème sur les séries de Riemann que  $\sum u_n$  converge *si et seulement si*

$$\ln(a/\sqrt{bc}) = 0,$$

i.e.  $a = \sqrt{bc}$ .

---

**SOLUTION 5.**

Comme

$$u_n = e^{-(1+1/n)\ln(n)} = \frac{1}{n} e^{-\ln(n)/n} \sim \frac{1}{n},$$

car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0.$$

Ainsi la série  $\sum u_n$  diverge.

---

**SOLUTION 6.**

Comme

$$n^2 u_n = e^{2\ln(n) - \sqrt{n}},$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 0,$$

la série  $\sum u_n$  converge par comparaison à la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$ .

---

**SOLUTION 7.**

On a :

$$n^2 u_n = e^{2\ln(n) - \ln(n)\ln(\ln(n))}.$$

Or

$$2\ln(n) = o(\ln(n)\ln(\ln(n))).$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 0$$

et donc, par comparaison aux séries de Riemann,  $\sum u_n$  converge.

**SOLUTION 8.**

Pour tout entier  $n$ , notons

$$\alpha_n = (7 + 4\sqrt{3})^n + (7 - 4\sqrt{3})^n.$$

D'après la formule du binôme, on a pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  :

$$\alpha_n = \sum_{0 \leq k \leq n} 2 \binom{n}{2k} 7^{n-2k} 4^{2k} 3^k$$

ainsi  $\alpha_n \in \mathbb{Z}$  et donc, par  $\pi$ -périodicité et imparité de la tangente :

$$u_n = -\tan(\pi(7 - 4\sqrt{3})^n).$$

Comme  $0 < 7 - 4\sqrt{3} < 1$ , on a

$$u_n \sim -\pi(7 - 4\sqrt{3})^n$$

et puisque la série géométrique  $\sum (7 - 4\sqrt{3})^n$  converge, la série  $\sum u_n$  est convergente.

**SOLUTION 9.**

Comme

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= a^{H_n} = a^{\ln(n) + \gamma + o(1)} = e^{(\ln(n) + \gamma + o(1)) \ln(a)} \\ &= e^{\ln(n^{\ln(a)})} e^{\gamma + o(1)} = \frac{1}{n^{-\ln(a)}} e^{\gamma + o(1)} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$u_n \sim \frac{e^\gamma}{n^{-\ln(a)}}.$$

Comme  $e^\gamma \neq 0$ , on déduit du théorème sur les séries de Riemman que  $\sum u_n$  converge *si et seulement si*  $-\ln(a) > 1$ , c'est-à-dire

$$a < \frac{1}{e}.$$

**REMARQUE.** Sans être aussi savant sur la série harmonique, on peut déduire d'une comparaison série-intégrale que

$$\ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

ce qui permet de conclure avec des encadrements au lieu d'équivalents. ■

**SOLUTION 10.**

On a clairement

$$u_n \underset{+\infty}{=} (1 + a + b) \ln(n) + \frac{a + 2b}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On a donc que  $\sum u_n$  converge *si et seulement si*

$$a + b + 1 = a + 2b = 0,$$

ie  $(a, b) = (-2, 1)$ .

**SOLUTION 11.**

Pour tout entier  $n$ , notons

$$\alpha_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n.$$

D'après la formule du binôme, on a pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  :

$$\alpha_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} 2 \binom{n}{2k} 2^{n-2k} 3^k$$

ainsi  $\alpha_n \in \mathbb{Z}$  et donc, par  $\pi$ -antipériodicité du sinus :

$$|u_n| = |\sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n)|.$$

Comme  $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$ , on a

$$|u_n| \sim (2 - \sqrt{3})^n$$

et puisque la série géométrique  $\sum (2 - \sqrt{3})^n$  converge, la série  $\sum u_n$  est absolument convergente donc convergente.

### SOLUTION 12.

- On suppose  $0 < b < 1$ . Dans ce cas,  $b^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Or  $2^{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  donc  $b^n = o(2^{\sqrt{n}})$  puis  $2^{\sqrt{n}} + b^n \sim 2^{\sqrt{n}}$ . Finalement  $u_n \sim a^n$ . On en déduit que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge pour  $0 < a < 1$  et diverge vers  $+\infty$  sinon.
- On suppose  $b > 1$ . Dans ce cas,  $2^{\sqrt{n}} = o(b^n)$  et donc  $2^{\sqrt{n}} + b^n \sim b^n$ . Finalement,  $u_n \sim \left(\frac{a}{b}\right)^n 2^{\sqrt{n}}$ . Si  $a < b$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\frac{a}{b} + \varepsilon < 1$ . On montre alors que  $u_n = o\left(\left(\frac{a}{b} + \varepsilon\right)^n\right)$  donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge. Si  $a \geq b$ ,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge grossièrement.

### SOLUTION 13.

#### Première méthode :

- Supposons  $p = 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!} \geq \frac{n!}{n!} = 1$$

La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  diverge grossièrement.

- Supposons  $p = 1$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1} \frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!} \geq \frac{1}{n+1}$$

Or la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n+1}$  diverge vers  $+\infty$ . Par minoration, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  diverge.

- Supposons  $p \geq 2$ . Pour  $n \geq 2$ ,

$$1! + 2! + \dots + n! \leq (n-1)(n-1)! + n! \leq n(n-1)! + n! = 2n!$$

Ainsi

$$u_n \leq \frac{2n!}{(n+p)!} \leq \frac{2n!}{(n+2)!} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{2}{n^2}$$

Or la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$  converge donc la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  également.

**Seconde méthode :** On peut également montrer que  $1! + 2! + \dots + n! \sim n!$ . En effet, on a pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!} \geq 1$$

et pour  $n \geq 3$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!} &\leq 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} \\ &\leq 1 + \frac{1}{n} + (n-2) \frac{(n-2)!}{n!} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{(n-2)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

Par encadrement,  $\frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  i.e.  $1! + 2! + \dots + n! \sim n!$ . On en déduit que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^p}$$

La série de terme général  $u_n$  est donc de même nature que celle de terme général  $\frac{1}{n^p}$  : elle converge donc *si et seulement si*  $p \geq 2$ .

#### SOLUTION 14.

Supposons que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge. Alors  $(S_n)$  converge vers la somme  $S > 0$  de cette série. On a donc  $\frac{u_n}{S_n} \sim \frac{u_n}{S}$ . La série

$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{S_n}$  converge donc.

Supposons que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge. Puisque cette série est à termes positifs, elle diverge donc vers  $+\infty$ . Si  $\frac{u_n}{S_n}$  ne tend pas vers 0 lorsque

$n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{S_n}$  diverge grossièrement. Sinon,  $\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) \sim -\frac{u_n}{S_n}$  donc les séries de terme général  $\frac{u_n}{S_n}$  et  $\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$  sont de même nature. Or

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) &= \sum_{n=1}^N \ln \frac{S_{n-1}}{S_n} \\ &= \sum_{n=1}^N (\ln S_{n-1} - \ln S_n) = \ln S_0 - \ln S_N \end{aligned}$$

Or  $S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$  puisque  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge vers  $+\infty$ . Ainsi  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$  diverge de même que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{S_n}$ .

Les deux séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{S_n}$  sont donc toujours de même nature.

#### SOLUTION 15.

On prouve par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{u_{2n}}{u_0} \leq \frac{v_{2n}}{v_0}$  et  $\frac{u_{2n+1}}{u_1} \leq \frac{v_{2n+1}}{v_1}$ . En posant  $K = \max\left(\frac{u_0}{v_0}, \frac{u_1}{v_1}\right)$ , on a donc  $u_n \leq K v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est à termes positifs et son terme général est majoré par celui d'une série convergente : elle converge également.

#### SOLUTION 16.

1. Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$  pour  $n \geq N$ . Par télescopage, on obtient,  $\frac{u_n}{u_N} \leq \frac{v_n}{v_N}$  i.e.  $u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n$  pour tout  $n \geq N$ . On a donc  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ .
2. a. Soit  $\beta$  tel que  $1 < \beta < \alpha$  et posons  $v_n = \frac{1}{n^\beta}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a alors

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} \\ &= 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Ainsi  $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{\alpha - \beta}{n}$ . Puisque  $\alpha - \beta > 0$ , on a donc  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$  à partir d'un certain rang. D'après la première question,  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  converge car  $\beta > 1$  et, comme elle est à termes positifs, sa convergence entraîne celle de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

- b. Cette fois-ci, on se donne  $\beta$  tel que  $\alpha < \beta < 1$  et on pose à nouveau  $v_n = \frac{1}{n^\beta}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . On montre comme précédemment que  $v_n = \mathcal{O}(u_n)$ . La divergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  entraîne la divergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .
- c. Si on pose  $u_n = \frac{1}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  diverge.

Si on pose maintenant  $u_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$  pour  $n \geq 2$ , on a à nouveau  $u_n = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ . Mais la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x \ln^2 x}$  étant décroissante, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et l'intégrale  $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^2 t}$  sont de même nature. Or une primitive de  $t \mapsto \frac{1}{t \ln^2 t}$  est  $t \mapsto -\frac{1}{\ln t}$ , ce qui prouve la convergence de l'intégrale précédente et par conséquent celle de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

3. On a

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2n+2}{2n+3} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{2n}} \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Autrement dit,  $\alpha = \frac{1}{2} < 1$  avec les notations précédentes. La série de terme général  $u_n$  diverge.

**REMARQUE.** Le critère de Raabe-Duhamel permet de conclure (sauf si  $\alpha = 1$ ) dans les cas où le critère de d'Alembert ne le permet pas ( $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1$ ). ■

#### SOLUTION 17.

1. Comme  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  converge,  $a_n = o(1)$  et donc  $a_n^2 = o(a_n)$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  étant convergente à termes positifs, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2$  converge également.
2. Comme  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  converge,  $a_n = o(1)$  et donc  $\frac{a_n}{1 + a_n} \sim a_n$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  étant convergente à termes positifs, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{1 + a_n}$  converge également.
3. Comme  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  converge,  $a_n = o(1)$ . Ainsi  $a_{2n} = o(1)$  et donc  $a_n a_{2n} = o(a_n)$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  étant convergente à termes positifs, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n a_{2n}$  converge également.

4. On démontre facilement que pour  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ . Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{\sqrt{a_n}}{n} \leq \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{n^2} \right)$ . On sait que les séries de terme général  $a_n$  et  $\frac{1}{n^2}$  convergent donc celle de terme général  $\frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{n^2} \right)$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$  est à termes positifs et son terme général est majoré par celui d'une série convergente : elle converge donc également.

### SOLUTION 18.

1. En convenant que  $A_{n_0-1} = 0$  :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=n_0}^n a_k B_k &= \sum_{k=n_0}^n (A_k - A_{k-1}) B_k \\
 &= \sum_{k=n_0}^n A_k B_k - \sum_{k=n_0}^n A_{k-1} B_k \\
 &= \sum_{k=n_0}^n A_k B_k - \sum_{k=n_0-1}^{n-1} A_k B_{k+1} \\
 &= A_n B_n + \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k (B_k - B_{k+1}) \\
 &= A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k
 \end{aligned}$$

2. Il suffit de poser  $a_n = \sin n$  et  $B_n = \frac{1}{n}$  pour tout  $n \geq 1$ . Avec les notations précédentes, pour tout  $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
 A_n &= \sum_{k=1}^n \sin k \\
 &= \operatorname{Im} \left( \sum_{k=1}^n e^{ik} \right) \\
 &= \operatorname{Im} \left( e^i \frac{e^{in} - 1}{e^i - 1} \right) \\
 &= \operatorname{Im} \left( e^{\frac{i(n+1)}{2}} \frac{\sin \frac{n}{2}}{\sin \frac{1}{2}} \right) \\
 &= \frac{\sin \frac{n+1}{2} \sin \frac{n}{2}}{\sin \frac{1}{2}} \\
 b_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

D'après la question précédente, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k} = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k$$

Or  $(A_n)$  est bornée et  $(b_n)$  converge vers 0 donc  $(A_n b_n)$  converge vers 0. De plus pour tout  $k \geq 1$ ,

$$|A_k b_k| \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}} |b_k| = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

Or la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  converge (série télescopique) donc la série  $\sum_{n \geq 1} A_n b_n$  est absolument convergente donc convergente.

On en déduit la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n}$ .

3. Rappelons que pour tout  $n \geq n_0$

$$\sum_{k=n_0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$$

La suite  $(B_n)$  converge vers 0 et  $(A_n)$  est bornée donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n B_n = 0$ .

Puisque  $(A_n)$  est bornée,  $A_n b_n = \mathcal{O}(|b_n|)$ . Or la série  $\sum_{n \geq n_0} |b_n|$  converge car  $\sum_{n \geq n_0} b_n$  est absolument convergente et est à termes

positifs donc  $\sum_{n \geq n_0} A_n b_n$  converge (absolument). Ainsi  $\sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$  admet une limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Il s'ensuit que  $\sum_{k=n_0}^n a_k B_k$  admet également une limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  i.e. que la série  $\sum_{n \geq n_0} a_n B_n$  converge.

#### SOLUTION 19.

- Supposons que  $\sum_{n \geq 0} v_n$  converge. On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$ . Par une récurrence évidente,  $\frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_0}{v_0}$ . Posons  $\lambda = \frac{u_0}{v_0}$ . On a alors  $0 < u_n \leq \lambda v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et donc  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ . Comme la série  $\sum_{n \geq 0} v_n$  est à termes positifs et converge, la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge également.
- C'est tout simplement la contraposée de la proposition montrée à la question précédente.

#### SOLUTION 20.

- On remarque tout d'abord que  $\sum \max(u_n, v_n)$  est à termes positifs.  
De plus,  $\max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n$  car  $u_n$  et  $v_n$  sont positifs.  
Enfin,  $\sum u_n + v_n$  converge, ce qui permet de conclure à la convergence de  $\sum \max(u_n, v_n)$ .
- On remarque tout d'abord que  $\sum \sqrt{u_n v_n}$  est à termes positifs.  
De plus,  $\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ .  
Enfin,  $\sum \frac{1}{2}(u_n + v_n)$  converge, ce qui permet de conclure à la convergence de  $\sum \max(u_n, v_n)$ .
- On remarque tout d'abord que  $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$  est à termes positifs.  
De plus,  $\frac{u_n v_n}{u_n + v_n} \leq v_n$  car  $u_n + v_n$  est positif.  
Enfin,  $\sum v_n$  converge, ce qui permet de conclure à la convergence de  $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ .

#### SOLUTION 21.

- Soit  $k \in ]l, 1[$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ , il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$  pour tout  $n \geq N$ . Une récurrence montre que  $u_n \leq k^{n-N} u_N$  pour tout  $n \geq N$ . Ainsi  $u_n = \mathcal{O}(k^n)$ . Puisque la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} k^n$  est une série à termes positifs convergente donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge.



2. Soit  $k \in ]1, 1[$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ , il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq k$  pour tout  $n \geq N$ . Une récurrence montre que  $u_n \geq k^{n-N} u_N$  pour tout  $n \geq N$ . En particulier, la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  et a fortiori ne converge pas vers 0. Ainsi  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge.
3. Posons  $u_n = n+1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge. Posons  $u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge.
4. Posons  $u_n = \frac{n!}{n^n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  est à termes strictement positifs et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ . On prouve alors classiquement que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}$  et la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  converge.

**SOLUTION 22.**

1. Si  $\beta \geq 0$ , alors  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$  pour  $n \geq 3$ . Or la série de Riemann  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge puisque  $\alpha > 1$ . On en déduit que  $\sum_{n \geq 2} u_n$  converge.  
Si  $\beta < 0$ , donnons-nous  $\gamma \in ]1, \alpha[$ . Alors  $(\ln n)^{-\beta} = o(n^{\alpha-\gamma})$  par croissances comparées. Ceci signifie que  $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ .  
Or la série de Riemann  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\gamma}$  est à termes positifs et converge puisque  $\gamma > 1$ . On en déduit que  $\sum_{n \geq 2} u_n$  converge.
2. Si  $\beta \leq 0$ , alors  $0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq u_n$  pour  $n \geq 3$ . Or  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  diverge donc  $\sum_{n \geq 2} u_n$  diverge.  
Si  $\beta > 0$ , donnons-nous  $\gamma \in ]\alpha, 1[$ . Alors  $(\ln n)^\beta = o(n^{\gamma-\alpha})$  par croissances comparées. Ceci signifie que  $\frac{1}{n^\gamma} = o(u_n)$ .  
la série  $\sum_{n \geq 2} u_n$  est à termes positifs et la série de Riemann  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\gamma}$  diverge puisque  $\gamma < 1$ . On en déduit que  $\sum_{n \geq 2} u_n$  diverge.
3. On a alors  $0 \leq \frac{1}{n} \leq u_n$  pour  $n \geq 3$ . Or la série harmonique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge. On en déduit que  $\sum_{n \geq 2} u_n$  diverge.
4. Posons  $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$  pour  $x > 1$ .  $f$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$  de sorte que

$$\int_2^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=2}^n u_k \leq \frac{1}{(\ln 2)^\beta} + \int_2^n f(x) dx$$

Si  $\beta \neq 1$ , alors  $x \mapsto \frac{(\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta}$  est une primitive de  $f$  de sorte que

$$\frac{(\ln(n+1))^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta} \leq \sum_{k=2}^n u_k \leq \frac{1}{(\ln 2)^\beta} + \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta}$$

Le théorème de minoration nous permet d'affirmer que la série  $\sum u_n$  diverge si  $\beta < 1$ . Par contre, si  $\beta > 1$ , la suite des sommes partielles de la série  $\sum_{n \geq 2} u_n$  est croissante (puisque la série est à termes positifs) et majorée par une suite convergente donc elle converge en vertu du théorème de la limite monotone. On peut donc affirmer que  $\sum_{n \geq 2} u_n$  converge.

Si  $\beta = 1$ , alors  $x \mapsto \ln(\ln x)$  est une primitive de  $f$  de sorte que

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leq \sum_{k=2}^n u_k$$

On conclut à la divergence de  $\sum_{n \geq 2} u_n$  via le théorème de minoration.

**SOLUTION 23.**

1. Soit  $q \in ]l, 1[$ . Par définition de la limite, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq \sqrt[n]{u_n} \leq q$  pour  $n \geq N$ . Ainsi  $0 \leq u_n \leq q^n$  pour  $n \geq N$ . Puisque la série  $\sum q^n$  converge, il en est de même de la série  $\sum u_n$ .
2. Soit  $q \in ]1, l[$ . Par définition de la limite, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq q \leq \sqrt[n]{u_n}$  pour  $n \geq N$ . Ainsi  $0 \leq q^n \leq u_n$  pour  $n \geq N$ . Puisque la série  $\sum q^n$  diverge, il en est de même de la série  $\sum u_n$ .
3. Posons  $u_n = 1$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$  et  $\sum u_n$  diverge.  
Posons  $u_n = \frac{1}{n^2}$ . Alors  $\sqrt[n]{u_n} = \exp\left(-\frac{2 \ln n}{n}\right)$  d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$  et  $\sum u_n$  converge.

**SOLUTION 24.**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq 0$$

et

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq 0$$

Ainsi la suite  $(S_{2n-1})$  est croissante et la suite  $(S_{2n})$  est décroissante. De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_{2n} - S_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} - S_{2n-1} = 0$ . Les suites  $(S_{2n-1})$  et  $(S_{2n})$  sont donc adjacentes. Elles convergent vers la même limite, ce qui assure la convergence de la suite  $(S_n)$  et donc de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .

**SOLUTION 25.**

1. Supposons que  $\sum u_n$  converge. Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . Il s'ensuit que  $u_n = o(1)$  et donc  $u_n^2 = o(u_n)$ . Puisque  $\sum u_n$  est à termes positifs et converge,  $\sum u_n^2$  converge également.  
La réciproque est fautive puisque  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge mais pas  $\sum \frac{1}{n}$ .
2. Il suffit de poser  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .

**SOLUTION 26.**

$(S_{2n})$  est décroissante car

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$$

$(S_{2n+1})$  est croissante car

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0$$

De plus

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Aussi les suites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont-elles adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite, ce qui entraîne la convergence de la suite  $(S_n)$ , c'est-à-dire de la série  $\sum (-1)^n u_n$ .

### SOLUTION 27.

1. On sait que  $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \mathcal{O}(x^2)$  donc  $\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Puisque  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$  converge et est à termes positifs, il en est de même

de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left( \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right)$ .

2. Puisque  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ ,

$$\sqrt[n]{3} = e^{\frac{\ln 3}{n}} = 1 + \frac{\ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et

$$\sqrt[n]{2} = e^{\frac{\ln 2}{n}} = 1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On en déduit que

$$\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2} \sim \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{n}$$

Puisque  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$  diverge, il en est de même de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left( \sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2} \right)$ .

3. Puisque  $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

De plus,  $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$  donc

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sim -\frac{1}{2n}$$

Puisque  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$  diverge, il en est de même de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ .

4. Puisque  $\operatorname{ch} x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) = 1 + \frac{1}{6n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisque  $\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sqrt{n} = 1 + \frac{1}{6n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sqrt{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisque  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$  converge et est à termes positifs, il en est de même de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left( \operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sqrt{n} \right)$ .

### SOLUTION 28.

1. Remarquons que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Or

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$  converge et est à termes positifs donc la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  converge.

2. Notons  $\gamma$  la somme de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ . On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) \right) = \gamma$$

puis, par télescopage

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \ln(n) = \gamma$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$$

### SOLUTION 29.

Remarquons tout d'abord que la suite  $(v_n)$  est également à termes positifs.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n v_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \sum_{p=1}^k p u_p \\
 &= \sum_{1 \leq p \leq k \leq n} \frac{p u_p}{k(k+1)} \\
 &= \sum_{p=1}^n \sum_{k=p}^n \frac{p u_p}{k(k+1)} \\
 &= \sum_{p=1}^n p u_p \sum_{k=p}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\
 &= \sum_{p=1}^n p u_p \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= \sum_{p=1}^n u_p - \frac{1}{n+1} \sum_{p=1}^n p u_p \\
 &= \sum_{p=1}^n u_p - n v_n
 \end{aligned}$$

Supposons que la série  $\sum v_n$  diverge. Alors elle diverge vers  $+\infty$  puisqu'elle est à termes positifs. Ainsi la suite de terme général  $\sum_{k=1}^n v_k$  diverge vers  $+\infty$ . Mais

$$\sum_{p=1}^n u_p = \sum_{k=1}^n v_k + n v_n \geq \sum_{k=1}^n v_k$$

donc la suite de terme général  $\sum_{p=1}^n u_p$  diverge également vers  $+\infty$ . Ainsi la série  $\sum u_n$  diverge (vers  $+\infty$ ).

Supposons que la série  $\sum v_n$  converge. Alors la suite de terme général  $\sum_{k=1}^n v_k$  converge. Si jamais la série  $\sum u_n$  divergeait, ce serait forcément vers  $+\infty$  puisqu'elle est à termes positifs et on aurait alors

$$n v_n = \sum_{p=1}^n u_p - \sum_{k=1}^{+\infty} v_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

autrement dit  $\frac{1}{n} = o(v_n)$ . Mais puisque  $\sum v_n$  est une série convergente à termes positifs, cela signifierait que  $\sum \frac{1}{n}$  converge également, ce qui est faux. Ainsi la série  $\sum u_n$  converge.

Finalement, les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

Plaçons-nous dans le cas de convergence et notons  $S$  et  $S'$  les sommes respectives des séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ . Alors

$$n v_n = \sum_{p=1}^n u_p - \sum_{k=1}^{+\infty} v_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S - S'$$

Supposons  $S \neq S'$ . Alors  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{S-S'}{n}$ , ce qui contredit la convergence de  $\sum v_n$ . Ainsi  $S = S'$ .

### SOLUTION 30.

On posera  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$  et  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  lorsque  $\alpha > 1$ .

► Supposons  $\alpha \leq 0$ . Par comparaison à une intégrale

$$\int_0^n \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha}$$

ou encore

$$\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

On en déduit  $S_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ .

► Supposons  $0 < \alpha \leq 1$ . Par comparaison à une intégrale

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}$$

Si  $0 < \alpha < 1$ , on en déduit

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leq S_n \leq 1 + \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

On en déduit à nouveau  $S_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ .

Si  $\alpha = 1$ ,

$$\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$$

et donc  $S_n \sim \ln n$ .

► Supposons  $\alpha > 1$ . On compare à nouveau à une intégrale. Pour des entiers  $n$  et  $N$  tels que  $1 \leq n < N$

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}$$

ou encore

$$\frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \right) \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}} \right)$$

En faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$ , on obtient

$$\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

On en déduit que  $R_n \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ .

### SOLUTION 31.

Remarquons que  $S_n$  est la somme partielle de rang  $n$  de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}$ . Puisque  $\frac{1}{n^2 + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^2}$  et que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est une série à termes positifs convergente, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}$  converge vers un réel  $C$ . En notant  $R_n$  le reste de rang  $n$  de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}$ , on a  $S_n = C - R_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Puisque  $\frac{1}{k^2 + \sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^2}$ ,  $R_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ . Une comparaison à une intégrale montre que  $R_n \sim \frac{1}{n}$  d'où le résultat annoncé.

### SOLUTION 32.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a évidemment  $u_n = \sum_{k=1}^n \ln k$ . La fonction  $\ln$  étant croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,

$$\int_1^n \ln(t) dt \leq u_n \leq \int_1^{n+1} \ln(t) dt$$

ou encore

$$n \ln(n) - n + 1 \leq u_n \leq (n+1) \ln(n+1) - n$$

On a clairement  $1 = o(n \ln n)$ ,  $n = o(n \ln n)$  donc  $n \ln n - n + 1 \sim n \ln n$ .

De plus,

$$(n+1) \ln(n+1) - n = n \ln n + n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln n + \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - n$$

On a clairement  $n = o(n \ln n)$  et  $\ln n = o(n \ln n)$ .

Par ailleurs,  $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = o(n \ln n)$ .

On en déduit également que  $n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = o(n)$  et a fortiori  $n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = o(n \ln n)$ .

Finalement,  $(n+1) \ln(n+1) - n \sim n \ln n$ .

Le théorème des gendarmes assure alors que  $u_n \sim n \ln n$ .

2. D'après la question précédente,  $\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{1}{n^2 (\ln n)^2}$ . On en déduit par exemple que  $\frac{1}{u_n^2} = \mathcal{O} \left( \frac{1}{n^2} \right)$ , ce qui assure la convergence de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{u_n^2}$ .

3. Soit  $(x, y) \in ]1, +\infty[$  tel que  $x \leq y$ . Alors  $0 < \ln x \leq \ln y$  donc  $0 \leq \frac{1}{\ln y} \leq \frac{1}{\ln x}$ . Puisque  $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$ , on en déduit que  $0 \leq f(y) \leq f(x)$ . Ainsi  $f$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$ .

4. Soit  $n \geq 2$ . Puisque la fonction  $f$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$

$$\int_2^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=2}^n f(k)$$

ou encore

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{u_k}$$

Par théorème de minoration, la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{u_n}$  diverge (vers  $+\infty$ ).

### SOLUTION 33.

Posons  $f : t \mapsto \ln(1+t)$ .  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, +\infty$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f^{(n)}$  est l'application  $t \mapsto \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+t)^n}$ . Soient  $x \in \mathbb{R}_+$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ . D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à  $f$  entre 0 et  $x$  à l'ordre  $m$ ,

$$\left| f(x) - \sum_{p=1}^m \frac{(-1)^{p-1} x^p}{p} \right| \leq \frac{M x^{m+1}}{(m+1)!}$$

avec  $M = \sup_{[0, x]} |f^{(m+1)}|$ . Or on a clairement  $M = m!$  donc

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| \leq \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Remarquons que  $\ln(n+2^k) = \ln n + f\left(\frac{2^k}{n}\right)$ . Ainsi pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{\ln(n+2^k)}{k!} = \frac{\ln n}{k!} + \frac{1}{k!} \left( f\left(\frac{2^k}{n}\right) - u_k \right) + \frac{u_k}{k!}$$

en posant

$$u_k = \sum_{p=1}^m \frac{(-1)^{p-1} 2^{kp}}{p n^p}$$

► La série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\ln n}{k!}$  converge puisque c'est une série exponentielle à un facteur multiplicatif près et sa somme vaut  $e \ln n$ .

► La série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{u_k}{k!}$  converge puisque c'est une combinaison linéaire de séries exponentielles et sa somme vaut  $\sum_{p=1}^{m-1} \frac{(-1)^{p+1} e^{2^p}}{p n^p}$ .

► D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange écrite plus haut appliquée avec  $x = \frac{2^k}{n}$ ,

$$\left| \frac{1}{k!} \left( f\left(\frac{2^k}{n}\right) - u_k \right) \right| \leq \frac{2^{k(m+1)}}{k!(m+1)n^{m+1}}$$

Or la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2^{k(m+1)}}{k!(m+1)n^{m+1}}$  converge puisque c'est une série exponentielle à un facteur multiplicatif près. On en déduit que la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!} \left( f\left(\frac{2^k}{n}\right) - u_k \right)$  converge (absolument) et que sa somme est majorée en valeur absolue par  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{k(m+1)}}{k!(m+1)n^{m+1}} = \frac{e^{2^{m+1}}}{(m+1)n^{m+1}}$ .

On déduit de ces trois points que la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\ln(n+2^k)}{k!}$  converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\ln(n+2^k)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} = e \ln n + \sum_{p=1}^{m-1} \frac{(-1)^{p+1} e^{2^p}}{p n^p} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left( f\left(\frac{2^k}{n}\right) - u_k \right)$$

Or on a vu que

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left( f\left(\frac{2^k}{n}\right) - u_k \right) \right| \leq \frac{e^{2^{m+1}}}{(m+1)n^{m+1}}$$

et  $\frac{e^{2^{m+1}}}{(m+1)n^{m+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$  donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\ln(n+2^k)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} = e \ln n + \sum_{p=1}^{m-1} \frac{(-1)^{p+1} e^{2^p}}{p n^p} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^m}\right)$$

#### SOLUTION 34.

Comme  $\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$ , on a pour  $k \in \mathbb{N}$  et pour  $x = \frac{\alpha}{2^k}$  :

$$\cos \frac{\alpha}{2^k} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{\alpha}{2^k}} = \frac{u_{k-1}}{u_k}$$

avec  $u_k = 2^k \sin \frac{\alpha}{2^k}$ .

Notons  $S_n$  la somme partielle de la série de l'énoncé. On a donc par télescopage :

$$S_n = \ln u_{-1} - \ln u_n$$

Or  $\ln u_{-1} = \ln \frac{\sin 2\alpha}{2}$ . De plus, comme  $\sin \frac{\alpha}{2^n} \sim \frac{\alpha}{2^n}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = \ln \alpha$$

On en déduit que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln \left( \cos \frac{\alpha}{2^n} \right)$  converge et que sa somme vaut  $\ln \left( \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right)$ .

#### SOLUTION 35.

On a

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_p} \sum_{n \geq 0} \frac{\omega^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{\sum_{\omega \in \mathbb{U}_p} \omega^n}{n!}$$



puisque les séries intervenant dans cette égalité convergent. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . L'endomorphisme de groupes  $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{U}_p & \longrightarrow & \mathbb{U}_p \\ \omega & \longmapsto & \omega^n \end{array} \right.$  est un automorphisme *si et seulement si*  $n$  est premier avec  $p$  autrement dit *si et seulement si*  $p$  ne divise pas  $n$  (puisque  $p$  est premier). De plus, on sait que la somme des racines  $p^{\text{èmes}}$  de l'unité est nulle. Donc pour  $n$  non multiple de  $p$ ,  $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_p} \omega^n = 0$  et pour  $n$  multiple de  $p$ ,  $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_p} \omega^n = p$ .

Finalement,

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_p} \sum_{n \geq 0} \frac{\omega^n}{n!} = p \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(pn)!}$$

$$\text{Or } \sum_{n \geq 0} \frac{\omega^n}{n!} = e^\omega. \text{ Donc } \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(pn)!} = \frac{1}{p} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_p} e^\omega.$$

### SOLUTION 36.

Considérons la fraction rationnelle  $F = \frac{X}{X^4 + X^2 + 1}$ . Elle admet une décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  du type

$$F = \frac{aX + b}{X^2 - X + 1} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1}$$

L'imparité de  $F$  donne  $a = c$  et  $b = -d$ . En considérant la limite de  $x F(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $\pm\infty$ , on trouve  $a + c = 0$  et donc  $a = c = 0$ . On trouve alors facilement  $b = \frac{1}{2}$  et  $d = -\frac{1}{2}$  d'où

$$F = \frac{1}{2(X^2 - X + 1)} - \frac{1}{2(X^2 + X + 1)}$$

On remarque alors que  $X^2 - X + 1 = X^2 - (X - 1)$  et que  $X^2 + X + 1 = (X + 1)^2 - X$ . Ainsi pour  $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^p \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^p \frac{1}{n^2 - (n - 1)} - \frac{1}{(n + 1)^2 - n} \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{(p + 1)^2 - p} \right) \text{ par télescopage} \\ &\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi la série de l'énoncé converge bien et sa somme vaut  $\frac{1}{2}$ .

### SOLUTION 37.

La fraction rationnelle  $F = \frac{2X - 1}{X^3 - 4X}$  admet une décomposition en éléments simples du type

$$F = \frac{a}{X - 2} + \frac{b}{X} + \frac{c}{X + 2}$$

En posant  $P = 2X - 1$  et  $Q = X^3 - 4X$ , on a

$$\begin{aligned} a &= \frac{P(2)}{Q'(2)} = \frac{3}{8} \\ b &= \frac{P(0)}{Q'(0)} = \frac{1}{4} \\ c &= \frac{P(-2)}{Q'(-2)} = -\frac{5}{8} \end{aligned}$$

Pour  $p \geq 3$ , on a en remarquant que  $\frac{1}{4} = \frac{5}{8} - \frac{3}{8}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^p \frac{2n-1}{n^3-4n} &= \frac{3}{8} \sum_{n=3}^p \left( \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) + \frac{5}{8} \sum_{n=3}^p \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{3}{8} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) + \frac{5}{8} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} \right) \text{ par télescopeage} \\ &\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{89}{96} \end{aligned}$$

Ainsi la série de l'énoncé converge et sa somme vaut  $\frac{89}{96}$ .

### SOLUTION 38.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\binom{n+p}{n}} &= \frac{p!}{(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)} \\ &= \frac{p!}{p-1} \frac{(n+p) - (n+1)}{(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)} \\ &= \frac{p!}{p-1} \left( \frac{1}{(n+p-1)\dots(n+1)} - \frac{1}{(n+p)\dots(n+2)} \right) \end{aligned}$$

Donc pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a par télescopeage

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{1}{\binom{n+p}{n}} &= \frac{p!}{p-1} \sum_{n=0}^N \left( \frac{1}{(n+p-1)\dots(n+1)} - \frac{1}{(n+p)\dots(n+2)} \right) \\ &= \frac{p!}{p-1} \left( \frac{1}{(p-1)\dots 1} - \frac{1}{(N+p)\dots(N+2)} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{p!}{(p-1)(p-1)!} = \frac{p}{p-1} \end{aligned}$$

Ainsi la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$  converge et sa somme vaut  $\frac{p}{p-1}$ .

### SOLUTION 39.

#### 1. On reconnaît le développement de Taylor en 0 de exp.

Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . exp est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  donc, a fortiori, de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur le segment d'extrémités 0 et  $x$ . De plus, la dérivée d'ordre  $n+1$  de exp est encore exp pour tout  $t$  compris entre 0 et  $x$ ,  $|e^t| = e^t \leq M$  avec  $M = \max(e^x, 1)$  (pour éviter de distinguer suivant le signe de  $x$ ). En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et  $x$  à l'ordre  $n$ , on a

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Remarquons que  $M$  est indépendant de  $n$  donc l'inégalité précédente est valable pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par comparaison des suites de référence,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$  par encadrement. La série  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$  converge donc et sa somme est  $e^x$ .

#### 2. On reconnaît les développements de Taylor en 0 de cos et sin.

Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . cos et sin sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  donc, a fortiori, de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur le segment d'extrémités 0 et  $x$ . Une récurrence évidente montre que  $\cos^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin$  et  $\sin^{(2n+2)} = (-1)^{n+1} \sin$ . Il est alors évident que  $\cos^{(2n+1)}$  et

$\sin^{(2n+2)}$  sont majorées en valeur absolue par 1 sur  $\mathbb{R}$ . En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à  $\cos$  entre 0 et  $x$  à l'ordre  $2n$ , on a

$$\left| \cos x - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à  $\sin$  entre 0 et  $x$  à l'ordre  $2n+1$ , on a

$$\left| \sin x - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Par comparaison des suites de référence,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0$$

Ceci permet de conclure que les séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  convergent et ont respectivement pour sommes  $\cos x$  et  $\sin x$ .

**REMARQUE.** On peut, en reprenant la preuve de la première question, montrer que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$  converge et a pour somme

$e^{ix}$ . On obtient la convergence et la somme des séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  en passant à la partie réelle et imaginaire.

■

3. On reconnaît le développement de Taylor en 0 de  $x \mapsto \ln(1+x)$ .

Soient  $x \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $f : t \mapsto \ln(1+t)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, +\infty[$  donc, a fortiori, de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $[0, x]$ . Une récurrence évidente montre que  $f^{(n+1)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}$  pour tout  $t \in ] -1, +\infty[$ . Ainsi pour tout  $t \in [0, x]$ ,

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq n!$$

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et  $x$  à l'ordre  $n$ , on a

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| \leq \frac{x^{n+1} n!}{(n+1)!} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

car  $x \in [0, 1]$ . Par encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = \ln(1+x)$ . La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$  converge donc et sa somme vaut  $\ln(1+x)$ .

#### SOLUTION 40.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^x t^{k-1} dt \\ &= \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k dt \\ &= \int_0^x \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt \\ &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \\ &= \ln(1+x) + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \end{aligned}$$

Si  $x$  est positif, on a pour tout  $t \in [0, x]$

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$$

et par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt = 0$  puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = \ln(1+x)$$

On en déduit que  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$  converge et que sa somme est  $\ln(1+x)$ .

Supposons maintenant  $x \leq 0$ . Remarquons que

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

Puis en effectuant le changement de variables  $u = -t$  (pour se ramener à une variable d'intégration positive et s'éviter des maux de tête)

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = \ln(1+x) + \int_0^{-x} \frac{u^n}{1-u} du$$

Pour tout  $u \in [0, -x]$

$$1 \leq \frac{1}{1-u} \leq \frac{1}{1+x}$$

Par croissance de l'intégrale

$$\int_0^{-x} u^n du \leq \int_0^{-x} \frac{u^n}{1-u} du \leq \frac{1}{1+x} \int_0^{-x} u^n du$$

ou encore

$$\frac{(-x)^{n+1}}{n+1} \leq \int_0^{-x} \frac{u^n}{1-u} du \leq \frac{1}{1+x} \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}$$

Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{-x} \frac{u^n}{1-u} du = 0$  puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = \ln(1+x)$$

On en déduit que  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$  converge et que sa somme est  $\ln(1+x)$ .

#### SOLUTION 41.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \\ &= \ln(1+x) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \end{aligned}$$

On a pour tout  $t \in [0, 1]$

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$$

et par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+1}$$

Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$  puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = \ln(1+x)$$

On en déduit que  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  converge et que sa somme est  $\ln(1+x)$ .

#### SOLUTION 42.

1. Il s'agit bien évidemment du lemme de Riemann-Lebesgue. Le plus simple est de passer en complexes afin de faire d'une pierre deux coups. Par intégration par parties, pour tout  $\lambda \neq 0$

$$\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} (f(b) e^{i\lambda b} - f(a) e^{i\lambda a}) - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) e^{i\lambda t} dt$$

Pour tout  $\lambda > 0$

$$\left| \frac{f(a) e^{i\lambda a}}{\lambda} \right| = \frac{|f(a)|}{\lambda} \qquad \left| \frac{f(b) e^{i\lambda b}}{\lambda} \right| = \frac{|f(b)|}{\lambda}$$

On en déduit que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{f(a) e^{i\lambda a}}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{f(b) e^{i\lambda b}}{\lambda} = 0$$

Enfin par inégalité triangulaire, pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$\left| \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f'(t)| dt$$

On en déduit que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) e^{i\lambda t} dt = 0$$

Par suite

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$$

Puisque  $f$  est à valeurs réelles, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\operatorname{Re} \left( \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \right) = I(\lambda) \qquad \operatorname{Im} \left( \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \right) = J(\lambda)$$

On en déduit les limites demandées.

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On obtient par intégration par parties

$$\int_0^\pi x \cos(nx) dx = \frac{-1 + (-1)^n}{n^2}$$

puis

$$\int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx = \frac{2(-1)^n \pi}{n^2}$$

Il suffit donc de choisir  $u = -1$  et  $v = \frac{1}{2\pi}$  pour avoir

$$\int_0^\pi (ux + vx^2) \cos(nx) \, dx = \frac{1}{n^2}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

3. Soit  $x \in ]0, \pi]$ . Puisqu'alors  $e^{ix} \neq 1$ ,

$$\sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{ix} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \frac{e^{\frac{inx}{2}} - e^{-\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\left(\sin\frac{x}{2}\right)}$$

En passant à la partie réelle, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\left(\sin\frac{x}{2}\right)}$$

Puisque

$$2 \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) = \sin\left(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{nx}{2}\right) - \sin\left(\frac{(n+1)x}{2} - \frac{nx}{2}\right) = \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

on obtient bien la relation demandée.

4.  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, \pi]$  en tant que quotient de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  dont le dénominateur ne s'annule pas.

De plus,  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 2$  car  $\sin \frac{x}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$ .

Par ailleurs, pour tout  $x \in ]0, \pi]$ ,

$$\varphi'(x) = \frac{\sin \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

Or  $\sin \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + o(x^2)$  et  $\cos \frac{x}{2} = 1 + o(x)$  donc

$$\sin \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$$

Puisque  $\sin^2 \frac{x}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{4}$ ,  $\varphi'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1)$  et donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = 0$ .

D'après le théorème de prolongement  $\mathcal{C}^1$ ,  $\varphi$  admet un prolongement de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi]$ .

5. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En notant  $u$  et  $v$  les réels déterminés à la question 2, on a d'après cette même question

$$S_n = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi (ux + vx^2) \cos(kx) \, dx = \int_0^\pi (u + vx)x \sum_{k=1}^n \cos(kx) \, dx$$

On notera encore  $\varphi$  le prolongement de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\varphi$  déterminé à la question 4. Remarquons que les fonctions  $x \mapsto x \sum_{k=1}^n \cos(kx)$  et  $x \mapsto \frac{1}{2} \varphi(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \frac{x}{2}$  coïncident sur  $]0, \pi]$  d'après la question 3. Puisqu'elles sont toutes les deux continues sur  $[0, \pi]$  et donc en 0, elles coïncident sur  $[0, \pi]$  en considérant leurs limites en 0. Ainsi

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^\pi (u + vx) \left( \frac{1}{2} \varphi(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \frac{x}{2} \right) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (u + vx) \varphi(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \, dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi (ux + vx^2) \, dx \end{aligned}$$

La fonction  $x \mapsto (u + vx)\varphi(x)$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi]$ , on peut appliquer la question 1 pour affirmer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi (u + vx) \varphi(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \, dx = 0$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\frac{1}{2} \int_0^\pi (ux + vx^2) \, dx = -\frac{u\pi^2}{4} - \frac{v\pi^3}{6} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{Ainsi } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. On constate qu'en prenant  $u = 0$  et  $v = -\frac{1}{2\pi}$ , on a

$$\int_0^\pi (ux + vx^2) \cos(nx) \, dx = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le même raisonnement que précédemment montre que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2}$  converge et que sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = -\frac{u\pi^2}{4} - \frac{v\pi^3}{6} = \frac{\pi^2}{12}$$

On constate qu'en prenant  $u = -\frac{1}{2}$  et  $v = 0$ , on a

$$\int_0^\pi (ux + vx^2) \cos(nx) \, dx = \frac{1 - (-1)^n}{n^2}$$

En particulier,

$$\int_0^\pi (ux + vx^2) \cos((2n-1)x) \, dx = \frac{1}{(2n-1)^2} \qquad \int_0^\pi (ux + vx^2) \cos(2nx) \, dx = 0$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le même raisonnement que précédemment montre que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n-1)^2}$  converge et que sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = -\frac{u\pi^2}{4} - \frac{v\pi^3}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

#### SOLUTION 43.

Notons  $u_n$  le terme général de la série étudiée. Puisque  $u_n \sim 1/n^2$ , la série  $\sum u_n$  est clairement convergente. On remarque que, pour tout réel  $x > 0$  :

$$\frac{1}{x^2 + 3x} = \frac{1}{3x} - \frac{1}{3(x+3)}.$$

Il y a donc télescopage dans les sommes partielles de  $\sum u_n$  qui converge et dont la somme vaut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{18}.$$

#### SOLUTION 44.

Pour tout  $n \geq 0$ , on a par croissance sur  $\mathbb{R}_+$  de la fonction arctangente de 0 à  $\pi/2$  :

$$\alpha_n = \arctan(n+1) - \arctan(n) \in [0, \pi/2[.$$

De plus,

$$\tan(\alpha_n) = \frac{n+n-n}{1+n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n+1}$$

et ainsi

$$\alpha_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right).$$

Il y donc télescopage dans les sommes partielles de  $\sum u_n$  qui converge et dont la somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{\pi}{2}.$$

#### SOLUTION 45.

Puisque  $0 \leq p(n) \leq \log_{10} n + 1$  pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\frac{p(n)}{n(n+1)} = \mathcal{O}\left(\frac{9}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

et la série de l'énoncé est convergente. On remarque que, pour tout  $m$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on a  $p(n) = m$  si et seulement si  $10^{m-1} \leq n < 10^m$ . Notons  $(S_n)_{n \geq 1}$  la suite de sommes partielles de la série de l'énoncé. On sait que  $(S_{10^m-1})_{m \geq 1}$  converge vers la même limite que  $(S_n)_{n \geq 1}$  en tant que suite extraite. Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p(n)}{n(n+1)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} S_{10^m-1}.$$

Or, pour tout  $m \geq 1$  :

$$\begin{aligned} S_{10^m-1} &= \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=10^{k-1}}^{10^k-1} \frac{p(\ell)}{\ell(\ell+1)} = \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=10^{k-1}}^{10^k-1} \frac{k}{\ell(\ell+1)} \\ &= \sum_{k=1}^m k \sum_{\ell=10^{k-1}}^{10^k-1} \left( \frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m k \left( \frac{1}{10^{k-1}} - \frac{1}{10^k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{k}{10^{k-1}} - \sum_{k=1}^m \frac{k}{10^k} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{k-1+1}{10^{k-1}} - \sum_{k=1}^m \frac{k}{10^k} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{10^{k-1}} - \frac{m}{10^m} = \frac{1-1/10^m}{1-1/10} - \frac{m}{10^m} \\ &= \frac{10}{9}(1-10^{-m}) - \frac{m}{10^m} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_{10^m-1} = \frac{10}{9}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p(n)}{n(n+1)} = \frac{10}{9}.$$

#### SOLUTION 46.

► La série est clairement alternée de terme général convergeant vers 0 : elle est donc convergente.



► Soit  $n \geq 1$ . Notons  $(\Sigma_n)_{n \geq 2}$  la suite des sommes partielles de cette série et posons, pour tout entier naturel  $n \geq 2$

$$S_n = \sum_{k=2}^n (-1)^k \ln(k).$$

On a, après tout calcul

$$\begin{aligned} \Sigma_{2n} &= \sum_{k=2}^{2n} (-1)^k [\ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln(k)] \\ &= -4S_{2n} + \ln(2n(2n+1)) \\ &= -4 \ln \left( \frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}{3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} \right) + \ln(2n(2n+1)) \\ &= \ln \left( \frac{2n(2n+1)(2n)!^4}{2^{8n} n!^8} \right) \end{aligned}$$

En utilisant l'équivalent de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n,$$

on trouve que

$$\frac{2n(2n+1)(2n)!^4}{2^{8n} n!^8} \sim \frac{4n^2 (2\pi \times 2n)^2 \left(\frac{2n}{e}\right)^{8n}}{2^{8n} (2\pi \times n)^4 \left(\frac{n}{e}\right)^{8n}} \sim \frac{4}{\pi^2}$$

et donc, par continuité du logarithme, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Sigma_{2n} = \ln \left( \frac{4}{\pi^2} \right),$$

et, puisque la série converge, on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) = \ln \left( \frac{4}{\pi^2} \right).$$

#### SOLUTION 47.

La série

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln(1 + 1/n)$$

est clairement alternée. Comme

$$(\ln(1 + 1/n))_{n \in \mathbb{N}^*}$$

tend vers 0 en décroissant, on déduit du critère spécial des séries alternées que la série converge. Notons  $(S_n)_{n \geq 1}$  la suite des sommes

partielles de cette série. Pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned}
 S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) = - \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left( 1 + \frac{1}{2k+1} \right) + \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{2k} \right) \\
 &= - \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left( \frac{2k+2}{2k+1} \right) + \sum_{k=1}^n \ln \left( \frac{2k+1}{2k} \right) = - \sum_{k=0}^{n-1} [\ln(2k+2) - \ln(2k+1)] + \sum_{k=1}^n [\ln(2k+1) - \ln(2k)] \\
 &= - \sum_{k=0}^{n-1} \ln(2k+2) - \sum_{k=1}^n \ln(2k) + \sum_{k=1}^n \ln(2k+1) + \sum_{k=0}^{n-1} \ln(2k+1) \\
 &= -2 \sum_{k=1}^n \ln(2k) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \ln(2k+1) + \ln(2n+1) \\
 &= \ln \left( \left[ \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} \right]^2 (2n+1) \right) = \ln \left( \left[ \frac{(2n)!}{(2 \times 4 \times \dots \times (2n))^2} \right]^2 (2n+1) \right) \\
 &= \ln \left( \left[ \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \right]^2 (2n+1) \right) = \ln \left( \frac{(2n)!^2}{2^{4n} n!^4} (2n+1) \right)
 \end{aligned}$$

Or, d'après la formule de Stirling, on sait que

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n,$$

d'où

$$\frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n} 2^{2n} (n/e)^{2n}}{2^{2n} 2\pi n (n/e)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

et donc

$$\frac{(2n)!^2}{2^{4n} n!^4} (2n+1) \sim \frac{2n}{n\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

On déduit alors de la continuité du logarithme que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \ln \left( \frac{2}{\pi} \right)$$

puis de la convergence de la série que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \ln \left( \frac{2}{\pi} \right).$$

#### SOLUTION 48.

Posons  $v_0 = 1$  et, pour tout  $k \geq 1$

$$v_k = \frac{\sqrt{k!}}{(1 + \sqrt{1}) \cdots (1 + \sqrt{k})}.$$

Pour tout  $n \geq 1$ , on a clairement

$$u_n = v_{n-1} - v_n.$$

Ainsi, en notant  $(S_n)_{n \geq 1}$  la suite des sommes partielles de la série  $\sum u_n$ , on obtient après télescopage

$$S_n = v_0 - v_n = 1 - v_n.$$

De plus, on a

$$v_n = \prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} = \frac{1}{\prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{k}} \right)}$$

et donc

$$-\ln(v_n) = \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{k}} \right).$$

Comme

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$$

et que  $\sum k^{-1/2}$  diverge vers  $+\infty$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln(v_n) = +\infty$$

et, par composition des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1.$$

#### SOLUTION 49.

1. Soient  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ . Notons  $f_x(t) = \frac{t - [t]}{t(t+x)}$ . Comme  $x > 0$ ,  $t(t+x)$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $]0, y]$ . De plus, pour  $0 \leq t < 1$ ,  $[t] = 0$  et donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - [t]}{t(t+x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t+x} = \frac{1}{x}$$

Enfin, la fonction partie entière est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que  $f_x$  est continue par morceaux sur  $[0, y]$  et l'intégrale  $G(x, y)$  est bien définie pour tout  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ .

2. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . La fonction  $f_x$  est positive sur  $\mathbb{R}_+$ . On en déduit que  $y \mapsto G(x, y)$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Il suffit donc maintenant de prouver que cette fonction est majorée. Pour  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $t - [t] < 1$  et  $t(t+x) \geq t^2$  donc  $f_x(t) \leq \frac{1}{t^2}$ . On peut supposer  $y \geq 1$ . Séparons l'intégrale définissant  $G(x, y)$  en deux parties pour éviter les problèmes en 0 :

$$G(x, y) = \int_0^1 f_x(t) dt + \int_1^y f_x(t) dt \leq \int_0^1 f_x(t) dt + \int_1^y \frac{dt}{t^2} \leq \int_0^1 f_x(t) dt + 1 - \frac{1}{y} \leq \int_0^1 f_x(t) dt + 1$$

Ainsi  $y \mapsto G(x, y)$  est croissante et majorée, elle admet donc une limite finie en  $+\infty$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a classiquement  $\frac{1}{t(t+n)} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+n} \right)$ . On en déduit que

$$G(n, y) = \frac{1}{n} \left( \int_0^y \frac{t - [t]}{t} dt - \int_0^y \frac{t - [t]}{t+n} dt \right)$$

On peut effectuer le changement de variable  $u = t + n$  dans la seconde intégrale. Comme  $n$  est entier  $[t] = [u - n] = [u] - n$  et donc  $t - [t] = u - [u]$ . On a donc

$$\int_0^y \frac{t - [t]}{t+n} dt = \int_n^{y+n} \frac{u - [u]}{u} du$$

On a alors

$$G(n, y) = \frac{1}{n} \left( \int_0^y \frac{t - [t]}{t} dt - \int_n^{y+n} \frac{t - [t]}{t} dt \right)$$

On utilise la relation de Chasles :

$$\int_0^y \frac{t - [t]}{t} dt = \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt + \int_n^y \frac{t - [t]}{t} dt \qquad \int_n^{y+n} \frac{t - [t]}{t} dt = \int_n^y \frac{t - [t]}{t} dt + \int_y^{y+n} \frac{t - [t]}{t} dt$$

Après simplification, on a la relation demandée.

4. Déterminons tout d'abord une expression de  $G(n)$ . Remarquons que

$$0 \leq \int_y^{y+n} \frac{t - [t]}{t} dt \leq \int_y^{y+n} y + n \frac{1}{y} dt = \frac{n}{y}$$

On en déduit que  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_y^{y+n} \frac{t - [t]}{t} dt = 0$ . Ainsi  $G(n) = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt$  et  $H(n) = \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt$ . On a donc

$$H(n) - H(n-1) = \int_{n-1}^n \frac{t - [t]}{t} dt$$

On effectue le changement de variables  $u = t - (n-1)$  de sorte que

$$H(n) - H(n-1) = \int_0^1 \frac{u - [u]}{u + n - 1} dt = \int_0^1 \frac{u}{u + n - 1}$$

car  $[u] = 0$  pour  $0 \leq u < 1$ . On obtient alors facilement

$$H(n) - H(n-1) = 1 - (n-1) \ln \frac{n-1}{n} = 1 - (n-1) \ln \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)$$

On va maintenant chercher un équivalent de  $H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n}$ .

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2(n-1)^2} + \frac{1}{3(n-1)^3} + o \left( \frac{1}{(n-1)^3} \right)$$

On en déduit que

$$H(n) - H(n-1) = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{3(n-1)^2} + o \left( \frac{1}{(n-1)^2} \right)$$

Or  $\frac{1}{2(n-1)} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} + o \left( \frac{1}{n^2} \right)$  et  $\frac{1}{(n-1)^2} \sim \frac{1}{n^2}$ . Finalement,

$$H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n} = \frac{1}{6n^2} + o \left( \frac{1}{n^2} \right)$$

Comme la série de terme général  $\frac{1}{6n^2}$  converge, on a également convergence de la série de terme général  $H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n}$ . Notons  $(S_n)$  la suite des sommes partielles de cette série i.e.

$$S_n = \sum_{k=2}^n H(k) - H(k-1) - \frac{1}{2k}$$

On a par télescopage  $S_n = H(n) - H(1) - \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k}$ . Comme  $(S_n)$  est bornée et que  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{2k} \sim \frac{1}{2} \ln n$  tend vers  $+\infty$ , on en déduit que  $H(n) \sim \frac{1}{2} \ln n$ . Ainsi  $G(n) \sim \frac{1}{n \ln n}$ .

## SOLUTION 50.

### 1. Définition

On définit deux suites  $(q_n)$  et  $(a_n)$  par récurrence. On pose  $a_0 = x$  et pour  $n \in \mathbb{N}$

$$q_n = \left\lfloor \frac{1}{a_n} \right\rfloor + 1 \qquad a_{n+1} = q_n a_n - 1$$

Il faut vérifier que ces deux suites sont bien définies. Nous démontrerons en même temps que  $(q_n)$  est une suite d'entiers supérieurs ou égaux à 2. Faisons l'hypothèse de récurrence suivante :

$HR(n)$  :  $a_n$  et  $q_n$  sont définis,  $q_n a_n > 1$ ,  $0 < a_n \leq 1$  et  $q_n \geq 2$ .

Initialisation :  $a_0$  est bien définie et comme  $a_0 = x > 0$ ,  $q_0$  est bien défini et c'est clairement un entier. De plus,  $\frac{1}{a_0} < q_0 \leq \frac{1}{a_0} + 1$  donc  $a_0 q_0 > 1$ . D'après l'énoncé  $a_0 = x \in ]0, 1]$ . On en déduit également que  $\frac{1}{a_0} \geq 1$  et donc, par croissance de la partie entière,  $q_0 \geq 2$ .

Hérédité : Supposons  $HR(n)$  vraie à un certain rang  $n \in \mathbb{N}$ .  $a_{n+1}$  est bien défini puisque  $a_n$  et  $q_n$  le sont. De plus,  $a_{n+1} = q_n a_n - 1 > 0$  donc  $q_{n+1}$  est bien défini et c'est clairement un entier. Par ailleurs,  $\frac{1}{a_{n+1}} < q_{n+1} \leq \frac{1}{a_{n+1}} + 1$  donc  $q_{n+1} a_{n+1} > 1$ . On sait également que  $\frac{1}{a_n} < q_n \leq \frac{1}{a_n} + 1$  donc  $q_n a_n \leq a_n + 1$  puis  $a_{n+1} = q_n a_n - 1 \leq a_n \leq 1$ .

Conclusion :  $HR(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

En reprenant une partie de la récurrence, on voit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{a_n} < q_n \leq \frac{1}{a_n} + 1$  implique que  $q_n a_n \leq a_n + 1$  et donc que  $a_{n+1} = q_n a_n - 1 \leq a_n$ . La suite  $(a_n)$  est une suite décroissante de réels strictement positifs donc la suite  $\left(\frac{1}{a_n}\right)$  est croissante. Par croissance de la partie entière, la suite  $(q_n)$  est croissante.

Reste à montrer qu'on a bien  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n}$ . Montrons par récurrence que

$$x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_k} + \frac{a_{n+1}}{q_0 q_1 \dots q_n}$$

Puisque  $a_1 = q_0 a_0 + 1$ ,  $x = a_0 = \frac{1}{q_0} + \frac{a_1}{q_0}$ , ce qui initialise la récurrence. Supposons alors que  $x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_k} + \frac{a_{n+1}}{q_0 q_1 \dots q_n}$ .

Puisque  $a_{n+2} = q_{n+1} a_{n+1} - 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{q_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{q_{n+1}}$  et donc

$$x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_k} + \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n q_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{q_0 q_1 \dots q_n q_{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_k} + \frac{a_{n+2}}{q_0 q_1 \dots q_n q_{n+1}}$$

L'hérédité est donc prouvée.

Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q_n \geq 2$  et  $0 \leq a_n \leq 1$ , on a  $0 \leq \frac{a_{n+1}}{q_0 q_1 \dots q_n} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ . Ceci prouve que  $\frac{a_{n+1}}{q_0 q_1 \dots q_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et donc que

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x.$$

### Unicité

Supposons qu'il existe une suite croissante d'entiers supérieurs ou égaux à 2  $(q_n)$  telle que  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on

pose  $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{q_n q_{n+1} \dots q_k}$ . Cette somme est bien convergente puisque pour  $k \geq n$ ,  $\frac{1}{q_n q_{n+1} \dots q_k} \leq \frac{1}{2^{k-n+1}}$  et que la série

$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-n+1}}$  converge. On remarque que  $a_{n+1} = q_n a_n - 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . De plus, comme  $(q_n)$  est croissante, on a  $a_{n+1} \leq a_n$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Enfin,  $q_n = \frac{1}{a_n} + \frac{a_{n+1}}{a_n}$  et donc  $\frac{1}{a_n} < q_n \leq \frac{1}{a_n} + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Autrement dit,  $q_n = \left\lfloor \frac{1}{a_n} \right\rfloor + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi les suites  $(q_n)$  et  $(a_n)$  vérifient  $a_0 = x$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$q_n = \left\lfloor \frac{1}{a_n} \right\rfloor + 1 \qquad a_{n+1} = q_n a_n - 1$$

Ceci détermine la suite  $(q_n)$  de manière unique.

2. Supposons la suite  $(q_n)$  constante égale à  $C$  à partir du rang  $N$ .

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n} + \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_{N-1} C^{n-N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n} + \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_{N-1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{C^n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n} + \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_{N-1}} \frac{C}{C-1} \end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit bien que  $x$  est rationnel.

Supposons maintenant  $x$  rationnel. Il existe donc  $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$  tel que  $x = \frac{p}{q}$ . On garde les notations de la question précédente. Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un entier  $p_n$  tel que  $a_n = \frac{p_n}{q}$ . L'initialisation est claire puisque  $a_0 = x = \frac{p}{q}$  : il suffit donc de poser  $p_0 = p$ . Supposons maintenant que pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un entier  $p_n$  tel que  $a_n = \frac{p_n}{q}$ . On a alors  $a_{n+1} = q_n a_n - 1 = \frac{p_{n+1}}{q}$  avec  $p_{n+1} = q_n p_n - q$ , ce qui achève la récurrence. D'après la première question,  $(a_n)$  est une suite décroissante de réels strictement positifs : on en déduit que  $(p_n)$  est une suite décroissante d'entiers naturels (non nuls). La suite  $(p_n)$  est donc stationnaire. Il en est de même de la suite  $(a_n)$  puis de la suite  $(q_n)$  puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q_n = \left\lfloor \frac{1}{a_n} \right\rfloor + 1$ .

3. Posons  $x = e - 2$  de sorte que  $x \in ]0, 1]$ . On sait que  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!}$ . Si on pose  $q_n = n + 2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(q_n)$  est bien croissante et on a bien  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n}$ . La suite  $(q_n)$  n'étant pas stationnaire,  $x$  n'est pas rationnel d'après la question précédente.

### SOLUTION 51.

Remarquons tout d'abord que multiplier un réel par une puissance de 10 ou lui ajouter un entier ne change ni son caractère rationnel, ni le caractère périodique à partir d'un certain rang de son développement décimal.

Soit  $x \in \mathbb{R}$  dont le développement décimal est périodique à partir d'un certain rang. Pour les raisons exposées plus haut, on peut supposer que  $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$  où  $(a_n)_{n \geq 1}$  est une suite de chiffres périodique. Notons  $p \in \mathbb{N}^*$  la période de  $(a_n)$ . Alors  $10^p x = \sum_{n=1}^p a_n 10^{p-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+p}}{10^n}$ . En posant  $q = \sum_{n=1}^p a_n 10^{p-n}$  et en utilisant la  $p$ -périodicité de  $(a_n)$ , on a donc  $10^p x = q + x$  i.e.  $x = \frac{q}{10^p - 1}$ . Comme  $q$  est un entier,  $x$  est un rationnel.

Soit maintenant  $x \in \mathbb{Q}$ . Pour les raisons exprimées en préliminaire, on peut supposer  $x \in [0, 1]$ . Il existe donc des entiers naturels  $p$  et  $q$  tels que  $x = \frac{p}{q}$  avec  $0 \leq p < q$ . Définissons deux suites  $(r_n)_{n \geq 0}$  et  $(a_n)_{n \geq 1}$  en posant  $r_0 = p$  et en définissant  $a_{n+1}$  et  $r_{n+1}$  comme le reste et le quotient de la division euclidienne de  $10r_n$  par  $q$ . On montre alors par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{p}{q} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n q}$ . Puisque la suite  $(r_n)$  est bornée (car à valeurs dans  $[0, 9]$ ),  $\frac{p}{q} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k}$ . De plus pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n = \frac{10r_{n-1} - r_n}{q}$ . Comme  $r_{n-1}$  et  $r_n$  sont dans  $[0, q - 1]$ , on en déduit  $q_n \in [0, 9]$ . Ainsi  $(a_n)_{n \geq 1}$  est la suite des décimales de  $x$ . Comme la suite  $(r_n)$  est à valeurs dans un ensemble fini, à savoir  $[0, q - 1]$ , elle ne peut être injective. Il existe donc des entiers naturels non nuls  $n_1$  et  $n_2$  tels que  $n_1 < n_2$  et  $r_{n_1} = r_{n_2}$ . On montre alors par récurrence que pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $r_{n_1+k} = r_{n_2+k}$  et  $a_{n_1+k+1} = a_{n_2+k+1}$  en utilisant au passage l'unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne. Ceci prouve que la suite  $(a_n)$  est périodique de période  $n_2 - n_1$  à partir du rang  $n_1 + 1$ .

### SOLUTION 52.

On prouve aisément par récurrence que  $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$  et donc que  $u_{n+1} - u_n = \mathcal{O}(k^n)$ . Puisque  $k \in [0, 1]$ , la série télescopique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n+1} - u_n$  converge i.e. la suite  $u$  converge.

### SOLUTION 53.

1. L'inalité est clairement vraie pour  $n = 0$ . Supposons la vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq k |x_{n+1} - x_n| \leq k^{n+1} |x_1 - x_0|$$

Par récurrence, l'inégalité est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. D'après la question précédente  $x_{n+1} - x_n = \mathcal{O}(k^n)$  avec  $k \in [0, 1]$  donc la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_{n+1} - x_n$  converge (absolument). Ceci signifie que la suite  $(x_n)$  converge.

3. Notons  $l$  la limite de  $(x_n)$ . Puisque  $f$  est continue (car lipschitzienne),  $l = f(l)$  donc  $l$  est un point fixe de  $f$ . Soit  $l'$  un point fixe de  $f$ . Alors

$$|l - l'| = |f(l) - f(l')| \leq k |l - l'|$$

ou encore

$$(1 - k)|l - l'| \leq 0$$

Puisque  $1 - k > 0$ ,  $|l - l'| = 0$  i.e.  $l = l'$ .  
f admet donc un unique point fixe.