

DEVOIR SURVEILLÉ N°08 : CORRIGÉ

Problème 1 — Petites Mines 2003

Partie I –

1. Le noyau de D est le sous-espace vectoriel des applications de dérivée nulle sur \mathbb{R} , c'est à-dire les applications constantes sur \mathbb{R} . Toute application de classe \mathcal{C}^∞ admettant une primitive de classe \mathcal{C}^∞ , D est surjective et donc l'image de D est E .

2. \blacktriangleright En prenant $t = 0$, on obtient (1) : $a + c = 0$.
 \blacktriangleright En prenant $t = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$, on obtient (2) : $ae^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} + be^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}} = 0$.
 \blacktriangleright En prenant $t = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, on obtient (3) : $ae^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} - ce^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}} = 0$.

D'après (1) et (2), $a \left(e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}} \right) = 0$, puis $a = 0$ puisque la somme d'exponentielles est strictement positive donc non nulle. D'après (1), on a alors $c = 0$ et d'après (2), on a également $b = 0$ puisque qu'une exponentielle est non nulle.

3. On a $e^t \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$.
 On a également d'une part

$$e^{-\frac{t}{2}} \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{t}{2} + o(t)$$

et d'autre part :

$$\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{t\sqrt{3}}{2} + o(t^2) = t \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + o(t) \right)$$

d'où

$$e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{=} t \left(1 - \frac{t}{2} + o(t) \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + o(t) \right) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{t\sqrt{3}}{2} - \frac{t^2\sqrt{3}}{4} + o(t^2)$$

Enfin, on a d'une part :

$$e^{-\frac{t}{2}} \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2)$$

et d'autre part :

$$\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{3t^2}{8} + o(t^2)$$

On en déduit

$$e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2) \right) \left(1 - \frac{3t^2}{8} + o(t^2) \right) \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} + o(t^2)$$

Par conséquent,

$$af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} a + c + \left(a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2} \right) t + \left(\frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{4} - \frac{c}{4} \right) t^2 + o(t^2)$$

Par unicité du développement limité, on a :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2} = 0 \\ \frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{4} - \frac{c}{4} = 0 \end{cases}$$

On en déduit à nouveau $a = b = c = 0$.

4. Supposons $a \neq 0$. Alors $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} ae^t$. D'où $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \pm\infty$, ce qui est impossible puisque $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit $a = 0$.
 Par conséquent, $b \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + c \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En choisissant $t = 0$, on obtient $c = 0$. Et enfin, $b = 0$ en prenant pour t une valeur n'annulant pas $\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$.
5. On a $D(f_1) = f_1$, $D(f_2) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$ et $D(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3$. Ainsi $D(f_1)$, $D(f_2)$ et $D(f_3)$ sont des vecteurs de G . Comme la famille (f_1, f_2, f_3) engendre G , on a $D(G) \subset G$.
6. Comme $D(f_1) = f_1$, il est clair que $D^3(f_1) = f_1$.
 De plus,

$$D(f_2) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$$

donc

$$D^2(f_2) = -\frac{1}{2}D(f_2) + \frac{\sqrt{3}}{2}D(f_3) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3\right) = -\frac{1}{2}f_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$$

puis

$$D^3(f_2) = -\frac{1}{2}D(f_2) - \frac{\sqrt{3}}{2}D(f_3) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3\right) = f_2$$

De même,

$$D(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3$$

donc

$$D^2(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}D(f_2) - \frac{1}{2}D(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3$$

puis

$$D^3(f_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}D(f_2) - \frac{1}{2}D(f_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3\right) = f_3$$

Ainsi les endomorphismes \widehat{D}^3 et Id_G coïncident sur une base de G , d'où $\widehat{D}^3 = \text{Id}_G$.

7. Comme $\widehat{D} \circ \widehat{D}^2 = \widehat{D}^2 \circ \widehat{D} = \text{Id}_G$, \widehat{D} est inversible d'inverse $\widehat{D}^{-1} = \widehat{D}^2$.

Partie II –

8. On sait que f est trois fois dérivable. Soit $n \geq 3$ et supposons f n fois dérivable sur \mathbb{R} . Comme $f''' = f$, f''' est n fois dérivable sur \mathbb{R} . Par conséquent, f est $n+3$ fois dérivable sur \mathbb{R} . A fortiori, elle est $n+1$ fois dérivable sur \mathbb{R} . On conclut par récurrence que f est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} .
9. On a vu précédemment que $\widehat{D}^3 = \text{Id}_G$ ce qui signifie que la restriction de T à G est nulle i.e. $G \subset \text{Ker } T$.
10. On a $g' = f''' + f'' + f' = f + f'' + f' = g$. Ainsi g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.
11. Les solutions de l'équation $y' - y = 0$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^t$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
12. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ est $X^2 + X + 1 = 0$. Ses solutions sont j et \bar{j} . On en déduit que l'ensemble des solutions réelles sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \left(A \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + B \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \right) e^{-\frac{t}{2}}$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ c'est-à-dire les fonctions du type $Af_2 + Bf_3$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Autrement dit l'ensemble des solutions réelles de $y'' + y' + y = 0$ est $\text{vect}(f_2, f_3)$.

On a vu que (f_1, f_2, f_3) était libre donc (f_2, f_3) est aussi libre. Par conséquent, (f_2, f_3) est une base de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$.

13. Une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$ est $t \mapsto \frac{\lambda}{3} e^t$. Les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$ sont donc les fonctions :

$$\frac{\lambda}{3} f_1 + A f_2 + B f_3$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

14. Soit $f \in \text{Ker } T$ i.e. f une solution de (\mathcal{E}) . En posant $g = f'' + f' + f$, on a montré en II.10 que g vérifiait l'équation différentielle $y' - y = 0$. Ceci prouve qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda f_1$ (cf. II.11). f est alors solution de $y'' + y' + y = \lambda f_1$ dont on a vu en II.13 que les solutions étaient de la forme $\frac{\lambda}{3} f_1 + A f_2 + B f_3$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Donc $f \in \text{vect}(f_1, f_2, f_3) = G$. On a donc prouvé que $\text{Ker } T \subset G$. Or $G \subset \text{Ker } T$ d'après II.9 donc $\text{Ker } T = G$ par double inclusion. L'ensemble des solutions de (\mathcal{E}) est exactement G .

Problème 2 – Mélanges

Partie I – Préliminaires

1. Le lecteur vérifiera que S est bien linéaire. C'est donc un endomorphisme de \mathbb{R}^2 . De plus, il est évident que $S^2 = I$.
2. Comme I est également un endomorphisme, U_p est une combinaison linéaire d'endomorphismes donc un endomorphisme.
3. On montre sans peine que le noyau de $U_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(S + I)$ est $\text{vect}((1, -1))$ et que son noyau est $\text{vect}((1, 1))$.

Partie II – Un sous-groupe de $GL(\mathbb{R})^2$

4. En tenant compte du fait que $S^2 = I$,

$$U_p \circ U_q = (pS + (1-p)I) \circ (qS + (1-q)I) = (p+q-2pq)S + (1-p-q+2pq)I$$

Ainsi, en posant $r = p + q - 2pq$, on a bien $U_p \circ U_q = U_r$. Comme l'expression de r est invariant par échange de p et q , on a également $U_q \circ U_p = U_r$.

5. Puisque $I = U_0$, la question précédente insiste à rechercher q tel que $p + q - 2pq = 0$. En supposant $p \neq \frac{1}{2}$, on peut poser $q = \frac{p}{2p-1}$ de sorte que $p + q - 2pq = 0$. La question précédente montre alors que

$$U_p \circ U_q = U_q \circ U_p = U_0 = I$$

Ainsi $U_p \in GL(\mathbb{R})^2$ et $U_p^{-1} = U_q$.

La question I.3 montre en particulier que le noyau de $U_{\frac{1}{2}}$ n'est pas nul : $U_{\frac{1}{2}}$ n'est donc pas un automorphisme.

Finalement $U_p \in GL(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $p \neq \frac{1}{2}$ et, dans ce cas, $U_p^{-1} = U_q$ avec $q = \frac{p}{2p-1}$.

Partie III – Application

6. Plaçons-nous à la fin du $n^{\text{ème}}$ mélange. Après la première phase du $(n+1)^{\text{ème}}$ mélange, la proportion de grenadine dans le récipient A vaut toujours a_n , tandis que dans le récipient B, elle vaut $\frac{va_n + Vb_n}{v+V}$. A la fin du $(n+1)^{\text{ème}}$ mélange, la proportion de grenadine dans le récipient A vaut $\frac{(V-v)a_n + v\frac{va_n + Vb_n}{v+V}}{V}$ tandis que dans le récipient B, elle vaut toujours $\frac{va_n + Vb_n}{v+V}$. Ainsi

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{(V-v)a_n + v\frac{va_n + Vb_n}{v+V}}{V} \\ &= \frac{V-v}{V}a_n + \frac{v^2}{V(V+v)}a_n + \frac{v}{V+v}b_n \\ &= \frac{(V-v)(V+v) + v^2}{V(V+v)}a_n + \frac{v}{V+v}b_n \\ &= \frac{V}{V+v}a_n + \frac{v}{V+v}b_n \\ b_{n+1} &= \frac{v}{V+v}a_n + \frac{V}{V+v}b_n \end{aligned}$$

Ainsi en posant $p = \frac{v}{V+v}$, on a $1-p = \frac{V}{V+v}$ et donc

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (1-p)a_n + pb_n \\ b_{n+1} &= pa_n + (1-p)b_n \end{aligned}$$

ou encore

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = (1-p)(a_n, b_n) + p(b_n, a_n) = pS(a_n, b_n) + (1-p)I(a_n, b_n) = U_p(a_n, b_n)$$

Puisque $0 < v < V$, on a clairement $p \in]0, 1[$.

7. Une récurrence simple montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (a_n, b_n) = U_p^n(a_0, b_0) = U_p^n(1, 0)$$

SOLUTION 1.

1. Supposons que $E = \text{Im } f + \text{Ker } g$ et montrons que $\text{Im } g \circ f = \text{Im } g$. Tout d'abord $\text{Im } g \circ f \subset \text{Im } g$. Soit maintenant $y \in \text{Im } g$. Il existe donc $x \in F$ tel que $y = g(x)$. Or $F = \text{Im } f + \text{Ker } g$ donc il existe $(a, b) \in \text{Im } f \times \text{Ker } g$ tel que $x = a + b$. Ainsi $y = g(x) = g(a) + g(b) = g(a)$. Mais comme $a \in \text{Im } f$, il existe $c \in E$ tel que $a = f(c)$. Finalement, $y = g(b) = g \circ f(c) \in \text{Im } g \circ f$. On a donc montré que $\text{Im } g \subset \text{Im } g \circ f$. Par double inclusion, $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$.

Supposons maintenant que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$ et montrons que $F = \text{Im } f + \text{Ker } g$. Tout d'abord, $\text{Im } f \subset F$ et $\text{Ker } g \subset F$ donc $\text{Im } f + \text{Ker } g \subset F$. Soit maintenant $x \in F$. Alors $g(x) \in \text{Im } g$. Puisque $\text{Im } g = \text{Im } g \circ f$, $g(x) \in \text{Im } g \circ f$. Il existe donc $a \in E$ tel que $g(x) = g \circ f(a)$. Remarquons que $x = f(a) + (x - f(a))$. De plus, $f(a) \in \text{Im } f$ et $g(x - f(a)) = g(x) - g \circ f(a) = 0_E$ donc $x - f(a) \in \text{Ker } g$. Ainsi $x \in \text{Im } f + \text{Ker } g$. On a donc $F \subset \text{Im } f + \text{Ker } g$ et donc $F = \text{Im } f + \text{Ker } g$ par double inclusion.

2. Supposons que $\text{Ker } g \cap \text{Im } f = \{0_F\}$ et montrons que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$. On a clairement $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g \circ f$. Soit donc maintenant $x \in \text{Ker } g \circ f$. Alors $g(f(x)) = 0_G$ donc $f(x) \in \text{Ker } g \cap \text{Im } f$. Or $\text{Ker } g \cap \text{Im } f = \{0_F\}$ donc $f(x) = 0_F$ i.e. $x \in \text{Ker } f$. On a donc montré que $\text{Ker } g \circ f \subset \text{Ker } f$ et donc $\text{Ker } g \circ f = \text{Ker } f$ par double inclusion.

Supposons maintenant que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$ et montrons que $\text{Ker } g \cap \text{Im } f = \{0_F\}$. Soit alors $y \in \text{Ker } g \cap \text{Im } f$. On a donc $g(y) = 0_G$ et il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi $g \circ f(x) = 0_G$ et donc $x \in \text{Ker } g \circ f$. Comme $\text{Ker } g \circ f = \text{Ker}(f)$, $x \in \text{Ker } f$ de sorte que $y = f(x) = 0_F$. On a bien montré que $\text{Ker } g \cap \text{Im } f = \{0_F\}$.