Semaine du 12/12 au 16/12

1 Cours

Séries de fonctions

Modes de convergence Convergence simple. Convergence uniforme. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle. Convergence normale. Convergence normale $\implies$ convergence uniforme $\implies$ convergence simple.

Théorèmes d'interversion

- Théorème d'interversion série/limite : si $\sum f_n$ converge uniformément vers une fonction f sur un intervalle I, et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en $a \in \bar{\mathrm{I}}$, alors $\sum \ell_n$ converge, f admet une limite en a et $\lim\limits_a f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.
- Continuité : si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f sur tout segment d'un intervalle I, alors f est continue sur I.
- Primitivisation : si $\sum f_n$ est une séries de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f sur tout segment d'un intervalle I, alors, pour tout $a \in \mathrm{I}$, $\sum \left(x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \right)$ converge uniformément vers $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ sur tout segment de I.
- Intégration : si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f sur le segment $[a, b]$, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Dérivation : si $\sum f_n$ est une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ convergeant simplement vers une fonction f sur un intervalle I et si $\sum f_n'$ converge uniformément vers une fonction g sur tout segment de I, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$. Adaptation aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Approximations uniformes

Fonctions en escalier Toute fonction continue par morceaux sur un **segment** est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers.

Fonctions polynomiales Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un **segment** est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Topologie

On admet que toutes les définitions et les résultats du cours restent inchangés si une norme est remplacée par une norme **équivalente**.

Topologie d'un espace vectoriel normé Boules ouvertes, boules fermées, sphères. Ouverts, fermés, voisinages. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection quelconque de fermés est un fermé. Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert. Une réunion **finie** de fermés est un fermé. Caractérisation séquentielle des fermés. Intérieur, adhérence, frontière. Caractérisation séquentielle de l'adhérence. Densité. Caractérisation séquentielle de la densité. Topologie relative : ouvert, fermé, voisinage relatifs à une partie.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour montrer qu'une partie est fermée, on peut :
  - utiliser la définition (raisonner en termes de boules) ;
  - la décrire comme une intersection de fermés ;
  - la décrire comme une réunion finie de fermés ;
  - utiliser la caractérisation séquentielle.
- Pour montrer qu'une partie est ouverte, on peut :
  - utiliser la définition (raisonner en termes de boules) ;
  - la décrire comme une réunion d'ouverts ;
  - la décrire comme une intersection finie d'ouverts ;
  - montrer que son complémentaire est fermé (cf. point précédent).

3 Questions de cours

Complémentaire, adhérence et intérieur Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.

Montrer que $\mathrm{E} \setminus \mathring{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}}$ et que $\mathrm{E} \setminus \overline{\mathrm{A}} = \overset{\circ}{\widehat{\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}}}$.

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Banque CCP Exercices 34, 44, 45.

Bonnes fêtes et bonnes vacances.