Devoir à la maison n°10 : corrigé

Solution 1.

1. **a.** L'application f^{n-1} n'étant pas constamment nulle, il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

   b. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x) = 0$$
On montre alors que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ par récurrence.
Initialisation : En composant par f^{n-1}, on obtient
$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^{n-1+i}(x) = 0_E$$
Or pour $i \geqslant 1$, $n-1+i \geqslant n$ donc $f^{n-1+i}(x) = 0$. On en déduit que $\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0$. Comme $f^{n-1}(x) \neq 0$, $\lambda_0 = 0$.
Hérédité : Supposons qu'il existe $k \in [\![0, n-2]\!]$ tel que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, k]\!]$. On a alors
$$\sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i f^i(x) = 0$$
En composant par f^{n-k-2}, on obtient ensuite
$$\sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i f^{n-k-2+i}(x) = 0$$
Or pour $i \geqslant k+2$, $n-k-2+i \geqslant n$ donc $\lambda_i = 0$. Il reste finalement $\lambda_{k+1} f^{n-1}(x) = 0$ puis $\lambda_{k+1} = 0$ puisque $f^{n-1}(x) \neq 0$.
Conclusion : Par récurrence, $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.
Par conséquent, la famille $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$ est libre. Puisqu'elle comporte n éléments et que $n = \dim E$, c'est une base de E.

2. **a.** La famille $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f^{n-k}(x))$ est une sous-famille de la famille libre $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$. Elle est donc également libre. On en déduit $\dim F_k = k$.

   b. Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $f^k(f^{n-i}(x)) = f^{n+k-i}(x) = 0$ car $n+k-i \geqslant n$ et donc $f^{n-i}(x) \in \operatorname{Ker} f^k$. Comme $(f^{n-i}(x))_{1 \leqslant i \leqslant k}$ engendre F_k, $F_k \subset \operatorname{Ker} f^k$. Donc $\dim \operatorname{Ker} f^k \geqslant \dim F_k = k$.
Pour $1 \leqslant i \leqslant n-k$, $f^{n-i}(x) \in \operatorname{Im} f^k$ car $n-i \geqslant k$. Comme $(f^{n-i}(x))_{1 \leqslant i \leqslant n-k}$ engendre F_{n-k}, $F_{n-k} \subset \operatorname{Im} f^k$. D'où $\dim \operatorname{Im} f^k \geqslant \dim F_{n-k} = n-k$. Par le théorème du rang, on a donc $\dim \operatorname{Ker} f^k = n - \dim \operatorname{Im} f^k \leqslant k$. On en déduit que $\dim \operatorname{Ker} f^k = k = \dim F_k$ et, comme $F_k \subset \operatorname{Ker} f^k$, $F_k = \operatorname{Ker} f^k$.
Quitte à remplacer k par $n-k$, on a également $F_k \subset \operatorname{Im} f^{n-k}$. Et comme $f^k \circ f^{n-k} = \mathbf{0}$, on a aussi $\operatorname{Im} f^{n-k} \subset \operatorname{Ker} f^k$. On en déduit que $F_k = \operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Im} f^{n-k}$.

   c. On a $F_k = \operatorname{Im} f^{n-k}$ d'après la question précédente. Donc $f(F_k) = \operatorname{Im} f^{n-k+1} \subset \operatorname{Im} f^{n-k} = F_k$. F_k est donc stable par f.

3. **a.** On considère $A = \{k \in \mathbb{N}^* \mid \tilde{f}^k = \tilde{\mathbf{0}}\}$. A est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ puisque $n \in A$. Elle admet donc un plus petit élément $p \geqslant 1$. Si $p = 1$, alors $p - 1 = 0$ mais $\tilde{f}^{p-1} = \operatorname{Id}_F \neq \tilde{\mathbf{0}}$ car $F \neq \{0_E\}$. Si $p \geqslant 2$, alors $p-1 \in \mathbb{N}^*$ et on ne peut avoir $\tilde{f}^{p-1} = \tilde{\mathbf{0}}$ sinon $p-1 \in A$, ce qui contredit la minimalité de p. On a donc dans tous les cas $\tilde{f}^{p-1} \neq \tilde{\mathbf{0}}$ et $\tilde{f}^p = \tilde{\mathbf{0}}$.

   b. On prouve comme à la question **1.b** que la famille $(y, \tilde{f}(y), \dots, \tilde{f}^{p-1}(y))$ est libre. Comme $k = \dim F$ et que la famille précédente est de cardinal p, on en déduit $p \leqslant k$. Ainsi $\tilde{f}^k = \tilde{\mathbf{0}}$.

   c. La question précédente prouve que $F \subset \operatorname{Ker} f^k$. Or on a vu à la question **2.b** que $\dim \operatorname{Ker} f^k = k$. Comme $\dim F = k$, on a donc $F = \operatorname{Ker} f^k$.

d. On vient de voir que tous les sous-espaces stables de dimension k avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$ était de la forme $\operatorname{Ker} f^k$. Réciproquement, on a vu à la question **2** que les sous-espaces $\operatorname{Ker} f^k$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$ étaient stables par f. Il reste à remarquer que le seul sous-espace de dimension 0 i.e. le sous-espace nul et que le seul sous-espace de dimension n i.e. E tout entier sont évidemment stables par f. Enfin, comme $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $f^n = \mathbf{0}$, on a $\{0\} = \operatorname{Ker} f^0$ et $E = \operatorname{Ker} f^n$.
Les sous-espaces stables par f sont donc exactement les sous-espaces $\operatorname{Ker} f^k$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

4. **a.** La famille $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$ étant une base de E, il existe un unique n-uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ de réels tel que :

$$g(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x)$$

Ce sont les coordonnées de $g(x)$ dans la base $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$.

b. Si g commute avec f, g commute avec f^i pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Par conséquent,

$$g\left(f^i(x)\right) = f^i(g(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^{k+i}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k\right)\left(f^i(x)\right)$$

On en déduit que les endomorphismes g et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$ coïncident sur la base $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$.

Ceci prouve que

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = \alpha_0 \mathrm{Id}_E + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$$

c. Notons $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par la famille $(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ et $\mathcal{C}'$ l'ensemble des endomorphismes commutant avec f. La question précédente montre que $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$. Mais comme toute puissance de f commute avec f, il est clair que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$. Ainsi $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$. Comme la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$ est une famille libre de E, a fortiori la famille $(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$. On en déduit que $\dim \mathcal{C} = n$.