Devoir à la maison n°6 : corrigé

Problème 1 — Equation de Legendre

Partie I – Résolution de $(\mathbf{E_0})$

1. En posant $z = y'$, l'équation $(\mathbf{E_0})$ est équivalente sur $]-1,1[$ à $(\mathbf{E_0'}) : \ z' + \frac{2x}{x^2-1}z = 0$.
Une primitive de $x \mapsto \frac{2x}{x^2-1}$ sur Ω est $x \mapsto \ln(1-x^2)$: les solutions de $(\mathbf{E_0'})$ sur $]-1,1[$ sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda}{1-x^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Les solutions de $(\mathbf{E_0})$ sont les primitives de ces fonctions, c'est-à-dire les fonctions $x \mapsto \lambda \operatorname{argth}(x) + \mu$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
2. Avec les notations précédentes, on a f solution de $(\mathbf{E_0})$, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ *si et seulement si* $\mu = 0$ et $\lambda = 1$. L'unique fonction f adéquate est donc la fonction argth.

Partie II – Résolution de $(\mathbf{E_1})$

1. Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une solution polynomiale de $(\mathbf{E_1})$ avec $a_n \neq 0$. On a alors
$$(x^2-1)P''(x) + 2xP'(x) - 2P(x) = a_n[n(n-1)+2n-2]x^n + Q(x) = a_n[n^2+n-2]x^n + Q(x)$$
avec Q une fonction polynomiale de degré inférieur à $n-1$. Ainsi $n^2+n-2 = (n-1)(n+2) = 0$, d'où $n = 1$. Ainsi, les seules *éventuelles* solutions polynomiales non nulles de $(\mathbf{E_1})$ sont de degré un. On trouve sans peine, en posant $P(x) = ax+b$ avec $a \neq 0$, que P est solution *si et seulement si* $b = 0$ i.e. $P(x) = ax$.
2. **a.** On a pour tout $x \in \Omega^*$, $y(x) = xz(x)$, $y'(x) = xz'(x) + z(x)$ et $y''(x) = xz''(x) + 2z'(x)$ d'où z est solution sur Ω^* de l'équation
$$(\mathbf{E_1'}) : \ x(x^2-1)z'' + (4x^2-2)z' = 0$$
c'est-à-dire
$$(\mathbf{E_1'}) : \ z'' + \frac{4x^2-2}{x(x^2-1)}z' = 0$$
b. Soient α, β et γ trois réels. Pour tout x dans Ω^*, on a
$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x+1} = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\beta-\gamma)x - \alpha}{x(x^2-1)}$$
En choisissant α, β et γ tels que
$$\alpha+\beta+\gamma = 4 \qquad \beta - \gamma = 0 \qquad -\alpha = -2$$
i.e. $\alpha = 2$ et $\beta = \gamma = 1$, on a bien l'égalité voulue sur Ω^*. Ainsi,
$$\forall x \in \Omega^*, \ \frac{4x^2-2}{x(x^2-1)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$
c. Une primitive de $x \mapsto \frac{4x^2-2}{x(x^2-1)}$ sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$ est donc $x \mapsto \ln(x^2(1-x^2))$. Les solutions de $(\mathbf{E_1'})$ sur $]-1,0[$ et $]0,1[$ sont les primitives des fonctions $x \mapsto \frac{\lambda}{x^2(1-x^2)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or pour tout $x \in \Omega^*$
$$\frac{1}{x^2(1-x^2)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2}$$
donc les solutions de $(\mathbf{E_1'})$ sur $]-1,0[$ et $]0,1[$ sont les fonctions $x \mapsto -\frac{\lambda}{x} + \lambda \operatorname{argth}(x) + \mu$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

d. Soit y une solution de $(\mathbf{E_1})$ sur Ω. Alors, d'après la question **II.2.a**, la fonction $x \mapsto z(x) = y(x)/x$ vérifie $(\mathbf{E_1'})$ et donc, d'après la question **II.2.c**, qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in]-1, 0[,\ z(x) = -\frac{\lambda_1}{x} + \lambda_1 \operatorname{argth}(x) + \mu_1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]0, 1[,\ z(x) = -\frac{\lambda_2}{x} + \lambda_2 \operatorname{argth}(x) + \mu_2$$

et donc

$$\forall x \in]-1, 0[,\ y(x) = -\lambda_1 + \lambda_1 x \operatorname{argth}(x) + \mu_1 x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]0, 1[,\ z(x) = -\lambda_2 + \lambda_2 x \operatorname{argth}(x) + \mu_2 x$$

Comme y est continue en 0, on doit avoir $\lim_{x\to 0^-} y(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ i.e. $\lambda_1 = \lambda_2$. On a alors en particulier $y(0) = \lambda_1 = \lambda_2$. Comme y est dérivable en 0, on doit aussi avoir $\lim_{x\to 0^-} \frac{y(x)-y(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)-y(0)}{x}$, ce qui équivaut, après tout calcul, à $\mu_1 = \mu_2$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in]-1, 1[,\ y(x) = -\lambda + \lambda x \operatorname{argth}(x) + \mu x$$

Réciproquement, on vérifie sans peine que les fonctions $x \mapsto -\lambda + \lambda x \operatorname{argth}(x) + \mu x$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ sont solution de l'équation $(\mathbf{E_1})$. Les solutions de cette équation sur Ω sont donc les fonctions

$$x \mapsto -\lambda + \lambda x \operatorname{argth}(x) + \mu x$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Partie III – Cas général

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(x^2-1)P''(x) + 2xP'(x) - 2P(x) = a_q[q(q-1) + 2q - n(n+1)]x^q + Q(x) = a_q[q^2 + q - n(n+1)]x^q + Q(x)$$

avec Q une fonction polynomiale de degré inférieur à $q-1$. Ainsi $q^2 + q - n(n+1) = (q-n)(q+n+1) = 0$, d'où $q = n$ car $q \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$Q(x) = [2(n-1) + (n-1)(n-2) - n(n+1)]a_{n-1}x^{n-1} + R(x) = -2na_{n-1} + R(x)$$

où R est une fonction polynomiale de degré inférieur à $n-2$. On en déduit que $-2na_{n-1} = 0$ et puisque $n \neq 0$, $a_{n-1} = 0$.

2. On suppose que $P \in \mathcal{P}_n$. On sait alors, d'après la question précédente, que P est de degré n et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_{n-1} = 0$.

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
-n(n+1)P(x) &= \sum_{k=0}^{n} -n(n+1)a_k x^k \\
2xP'(x) &= \sum_{k=0}^{n} 2ka_k x^k \\
x^2P''(x) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_k x^k \\
-P''(x) &= \sum_{k=2}^{n} -k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{n-2} -(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k
\end{aligned}$$

et donc, puisque les termes de degrés n s'éliminent et $a_{n-1} = 0$,

$$(x^2-1)P''(x) + 2xP'(x) - n(n+1)P(x) = \sum_{k=0}^{n-2} [-n(n+1)a_k + 2ka_k + k(k-1)a_k - (k+2)(k+1)a_{k+2}]x^k$$

Ainsi P est solution de $(\mathbf{E_n})$ *si et seulement si*

$$\forall k \in [\![0, n-2]\!],\ -n(n+1)a_k + 2ka_k + k(k-1)a_k - (k+2)(k+1)a_{k+2} = 0$$

i.e.

$$\forall k \in [\![0, n-2]\!],\ a_{k+2} = \frac{k^2 + k - n^2 - n}{(k+1)(k+2)} a_k = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)} a_k$$

b. Comme $a_{n-1} = 0$, on déduit de la relation établie à la question précédente par une récurrence immédiate que pour tout entier naturel k tel que $2k+1 \leqslant n$, $a_{n-2k-1} = 0$.

c. Raisonnons pour un entier naturel k tel que $2k \leqslant n$, on note

$$\mathrm{HR}(k) : \; a_{n-2k} = (-1)^k \frac{\binom{2n-2k}{n-k}\binom{n-k}{k}}{\binom{2n}{n}} a_n$$

- ► $\mathrm{HR}(0)$ est évidemment vraie.
- ► Soit k un entier naturel tel que $2k+2 \leqslant n$. On suppose $\mathrm{HR}(k)$ vraie. On a alors, d'après la formule de récurrence établie à la question **III.2.a**,

$$\begin{aligned} a_{n-2k-2} &= -\frac{(n-2k)(n-2k-1)}{2(k+1)(2n-2k-1)} a_{n-2k} \\ &= -\frac{(n-2k)(n-2k-1)}{2(k+1)(2n-2k-1)} \times (-1)^k \frac{\binom{2n-2k}{n-2k}\binom{n}{k}}{\binom{2n}{n}} a_n \end{aligned}$$

D'après une relation sur les coefficients binomiaux

$$(n-2k-1)(n-2k)\binom{2n-2k}{n-2k} = (n-2k-1)(2n-2k)\binom{2n-2k-1}{n-2k-1} = 2(n-k)(2n-2k-1)\binom{2n-2k-2}{n-2k-2}$$

de sorte que

$$a_{n-2k-2} = (-1)^{k+1} \frac{(n-k)\binom{2n-2k-2}{n-2k-2}\binom{n}{k}}{(k+1)\binom{2n}{n}}$$

Enfin on montre sans peine que $\frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$. Finalement,

$$a_{n-2k-2} = (-1)^{k+1} \frac{\binom{2n-2k-2}{n-2k-2}\binom{n}{k+1}}{\binom{2n}{n}}$$

Ainsi $\mathrm{HR}(k+1)$ est vraie.
Par récurrence finie, $\mathrm{HR}(k)$ est vraie pour tout entier naturel k tel que $2k \leqslant n$.

d. D'après ce qui précède, les solutions polynomiales de $(\mathbf{E_n})$ sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \frac{(-1)^k \binom{2n-2k}{n-k}\binom{n-k}{k}}{\binom{2n}{n}} x^{n-2k}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

e. Après calcul,

$$\mathcal{P}_4 = \left\{ x \mapsto \lambda\left(x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}\right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$