Devoir surveillé n°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

1. Les sempiternelles intégrales de Wallis...
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions sin et $\cos^{2n-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ de dérivées respectives cos et $-(2n-1)\sin\cos^{2n-2}$ donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
C_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos^{2n-1}(x)\, dx \\
&= \left[\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(x))\cos^{2n-2}(x)\, dx \\
&= (2n-1)(C_{n-1} - C_n)
\end{aligned}$$

2. Les fonctions sin et $-\frac{1}{2n-1}\cos^{2n-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ de dérivées respectives cos et $\sin\cos^{2n-2}$ donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cdot\sin(x)\cos^{2n-2}(x)\, dx \\
&= -\frac{1}{2n-1}\left[\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\right] + \frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\, dx \\
&= \frac{C_n}{2n-1}
\end{aligned}$$

Mais d'après la question précédente, $C_n = (2n-1)(C_{n-1} - C_n)$ donc $\frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}$.

3. C'est reparti pour une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
C_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\cos^{2n}(x)\, dx \\
&= \left[x\cos^{2n}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\, dx \\
&= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\, dx
\end{aligned}$$

Devinez quoi ? Une intégration par parties !

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\,\mathrm{d}x &= \left[x^2\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^{2n}(x)-(2n-1)\sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)\right)\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^{2n}(x)-(2n-1)(1-\cos^2(x))\cos^{2n-2}(x)\right)\mathrm{d}x\\ &= (2n-1)\mathrm{D}_{n-1}-2n\mathrm{D}_n\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{C}_n = n(2n-1)\mathrm{D}_{n-1}-2n^2\mathrm{D}_n$.

4. On divise l'égalité précédente par $n^2\mathrm{C}_n$ pour obtenir

$$\frac{1}{n^2} = \frac{2n-1}{n}\cdot\frac{\mathrm{D}_{n-1}}{\mathrm{C}_n} - \frac{2\mathrm{D}_n}{\mathrm{C}_n}$$

Mais d'après la pénultième question $\dfrac{\mathrm{C}_n}{2n-1} = \dfrac{\mathrm{C}_{n-1}}{2n}$ donc

$$\frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{\mathrm{D}_{n-1}}{\mathrm{C}_{n-1}} - \frac{\mathrm{D}_n}{\mathrm{C}_n}\right)$$

5. a. Comme $\sin'' = -\sin$ est négative sur $[0,\pi/2]$, sin est concave sur cet intervalle. Notamment, le graphe de f est situé au-dessus de sa corde reliant les points d'abscisses 0 et $\dfrac{\pi}{2}$. Ceci signifie que $\sin x \geq \dfrac{2}{\pi}x$ pour tout $x\in[0,\pi/2]$.

b. On a donc $x^2 \leq \dfrac{\pi^2}{4}\sin^2(x)$ pour tout $x\in[0,\pi/2]$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\mathrm{D}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$$

Mais, d'après la question **2**,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{C}_n}{2n+2}$$

de sorte que $\mathrm{D}_n \leq \dfrac{\pi^2}{4}\cdot\dfrac{\mathrm{C}_n}{2n+2}$.

6. La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc, d'après la question **4**, la série télescopique $\sum \dfrac{\mathrm{D}_{n-1}}{\mathrm{C}_{n-1}} - \dfrac{\mathrm{D}_n}{\mathrm{C}_n}$ converge et on peut affirmer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{D}_{n-1}}{\mathrm{C}_{n-1}} - \frac{\mathrm{D}_n}{\mathrm{C}_n} = 2\left(\frac{\mathrm{D}_0}{\mathrm{C}_0} - \lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{D}_n}{\mathrm{C}_n}\right)$$

On calcule aisément, $\mathrm{C}_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\mathrm{D}_0 = \dfrac{\pi^3}{24}$. La question précédente montre que

$$0 \leq \frac{\mathrm{D}_n}{\mathrm{C}_n} \leq \frac{\pi^2}{8(n+1)}$$

(C_n et D_n sont manifestement positives), ce qui permet d'affirmer grâce au théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\mathrm{D}_n}{\mathrm{C}_n} = 0$. On en déduit bien que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = 2\cdot\frac{\pi^3/24}{\pi/2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Solution 2

1. Remarquons que $u_n(\mu) = u_n(\lambda) + \dfrac{\mu-\lambda}{n}$. Or $\sum u_n(\lambda)$ converge par hypothèse et, puisque $\lambda - \mu \neq 0$, $\sum \dfrac{\mu-\lambda}{n}$ diverge. On en déduit que $\sum u_n(\mu)$ diverge.

2. **a.** Soit $m \in \mathbb{N}$. Puisque ω est d-périodique, $\omega_{md+k} = \omega_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi

$$\frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k} = \frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d}\omega_k = \frac{\Omega}{md+1}$$

b. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} S_{(m+1)d} - S_{md} &= \sum_{k=md+1}^{(m+1)d} \frac{\omega_k}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{d} \frac{\omega_{md+k}}{md+k} \qquad \text{par changement d'indice} \end{aligned}$$

Ensuite

$$S_{(m+1)d} - S_{md} - \frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d}\omega_{md+k} = \sum_{k=1}^{d}\omega_{md+k}\left(\frac{1}{md+k} - \frac{1}{md+1}\right)$$

La suite ω étant périodique, elle est bornée. De plus, pour $k \in [\![1, d]\!]$,

$$\frac{1}{md+k} - \frac{1}{md+1} = \frac{1-k}{(md+k)(md+1)} = \underset{m\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

Ainsi

$$\omega_{md+k}\left(\frac{1}{md+k} - \frac{1}{md+1}\right) = \underset{m\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

puis (somme finie)

$$S_{(m+1)d} - S_{md} - \frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d}\omega_{md+k} = \underset{m\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

ou encore

$$S_{(m+1)d} - S_{md} = \frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d}\omega_{md+k} + \underset{m\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

c. D'après les deux questions précdentes,

$$S_{(m+1)d} - S_{md} = \frac{\Omega}{md+1} + \underset{m\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

Comme la série $\sum \dfrac{1}{m^2}$ est une série à termes positifs convergente, la série $\sum_{m\in\mathbb{N}} S_{(m+1)d} - S_{md}$ converge si et seulement si la série $\sum_{m\in\mathbb{N}} \dfrac{\Omega}{md+1}$ converge. Ceci est le cas si et seulement si $\Omega = 0$.

d. Supposons que la série $\sum u_n$ converge. Alors la suite $(S_n)_{n\geq1}$ converge. Par conséquent, la suite extraite $(S_{md})_{m\in\mathbb{N}}$ converge. Il s'ensuit alors que la série télescopique $\sum_{m\in\mathbb{N}}(S_{(m+1)d} - S_{md})$ converge, ce qui impose $\Omega = 0$ d'après la question précédente.
Réciproquement, supposons que $\Omega = 0$. Avec le même argument de série télescopique, on montre que la suite $(S_{md})_{m\in\mathbb{N}}$ converge.

> **Attention !** Ceci ne signifie pas forcément que la suite (S_n) converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons m et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par d. Ainsi, $n = md + r$ avec $r \in [\![0, d-1]\!]$. Alors

$$S_n - S_{md} = \sum_{k=md+1}^{md+r}\frac{\omega_k}{k} = \sum_{k=1}^{r}\frac{\omega_{md+k}}{md+k} = \sum_{k=1}^{r}\frac{\omega_k}{md+k}$$

Alors, par inégalité trangulaire,

$$|S_n - S_{md}| \leq \sum_{k=1}^{r} \frac{|\omega_k|}{md+k} \leq \sum_{k=1}^{r} \frac{A}{md+k} \leq \sum_{k=1}^{d} \frac{A}{md} = \frac{A}{m}$$

en notant $A = \max_{1\leq k\leq d} |\omega_k|$.

Remarque. Comme ω est d-périodique, on a en fait $A = \|\omega\|_\infty$.

Notons alors ℓ la limite de la suite $(S_{md})_{m\in\mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(S_{md})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|S_{md} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $m \geq M_1$. De même, $\lim_{m\to+\infty} \frac{A}{m} = 0$ donc il existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{A}{m} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $m \geq M_2$. Posons $N = \max(dM_1, dM_2)$. Soit également $n \geq N$. Notons à nouveau m le quotient de la division euclidienne de n par d. Alors $n - md < d$ donc $m > \frac{n}{d} - 1 \geq \frac{N}{d} - 1 = \max(M_1, M_2) - 1$. Comme m est entier, on a donc $m \geq \max(M_1, M_2)$. Notamment, $|S_{md} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\frac{A}{m} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi

$$|S_n - \ell| = |(S_n - S_{md}) + (S_{md} - \ell)| \leq |S_n - S_{md}| + |S_{md} - \ell| \leq \frac{A}{m} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

Ona donc prouvé (laborieusement) que (S_n) convergeait (vers ℓ). Ceci signifie que la série $\sum u_n$ converge.
En conclusion, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\Omega = 0$.

3. En appliquant le résultat de la question précédente à la suite périodique $(u_n(\lambda))$, on montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(\lambda)$ converge si et seulement si $\sum_{k=1}^{d} u_n(\lambda) = 0$ i.e. $\lambda = -\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} \omega_k = -\frac{\Omega}{d}$. Il existe donc bien un unique complexe λ tel que $\sum u_n(\lambda)$ converge.

Remarque. La question **1** montrait déjà que si un tel complexe λ existait, il était unique.

4. a. Remarquons que

$$T_{n+d} - T_n = \sum_{k=n+1}^{n+d} \omega_k$$

Ainsi $T_{n+d} - T_n$ est la somme de d termes consécutifs de la suite ω. Comme ω est d-périodique, on peut affirmer que

$$T_{n+d} - T_n = \sum_{k=1}^{d} \omega_k = 0$$

La suite (T_n) est donc également d-périodique. Par conséquent, elle est bornée.

b. Il s'agit d'effectuer une transformation d'Abel (notion hors-programme donc à démontrer) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} T_k\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k}{a_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k}{a_{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k}{a_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{T_k}{a_{k+1}} - \frac{T_n}{a_{n+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k}{a_k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T_k}{a_{k+1}} - \frac{T_n}{a_{n+1}} && \text{car } T_0 = 0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k}{a_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{T_{k-1}}{a_k} - \frac{T_n}{a_{n+1}} && \text{par changement d'indice} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k - T_{k-1}}{a_k} - \frac{T_n}{a_{n+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{T_n}{a_{n+1}}
\end{aligned}$$

Ainsi on a bien

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} T_k\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) + \frac{T_n}{a_{n+1}}$$

c. Comme la suite (T_n) est bornée,

$$\mathrm{T}_k\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right) \underset{m\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

Comme (a_k) est croissante et strictement positive, la série $\sum \frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}$ est à termes positifs. De plus, $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{a_k} = 0$ donc cette série télescopique converge. On en déduit par domination que la série $\sum \mathrm{T}_k\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$ converge également.

d. Comme la série $\sum \mathrm{T}_k\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$, la suite de ses sommes partielles converge i.e. la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{T}_k\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$ admet une limite finie.

Par ailleurs, (T_n) est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{T}_n}{a_{n+1}} = 0$.

La question **4.b** permet donc d'affirmer que la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} u_k$ admet une limite finie : ceci signifie que la série $\sum u_n$ converge.

Problème 1

1 On pourrait calculer cette somme par passage en complexes, mais, comme l'expression de la somme est donnée, il suffit de la vérifier par récurrence.
On fixe $x \in]0, \pi]$. La relation est vraie pour $n = 0$ en convenant que $C_0(x) = 0$. Supposons la vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + C_{n+1}(x) &= \cos((n+1)x) + \frac{1}{2} + C_n(x)\\ &= \cos((n+1)x) + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos((n+1)x) + \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

On sait de plus que $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) - \sin(b-a)$ donc

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos((n+1)x) = \sin\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)$$

On en déduit finalement que

$$\frac{1}{2} + C_{n+1}(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

La relation de l'énoncé est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Via l'équivalent $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$, on obtient $\dfrac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} n + \dfrac{1}{2}$.

Remarque. On peut également utiliser la relation de la question précédente et la continuité de C_n en 0 pour obtenir le même résultat.

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)}$ est donc prolongeable en une fonction continue sur $[0, \pi]$ ce qui justifie l'existence de l'intégrale J_n. De plus,

$$\begin{aligned}J_n &= \int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx\\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + C_n(x)\right) dx\\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(kx)\,dx\\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\left[\sin(kx)\right]_0^\pi\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

3 Tout d'abord, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$. De plus,

$$\varphi(x) = \frac{\cos(ax) - 1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-a^2x^2/2}{x/2} = -a^2x$$

Notamment $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Enfin, pour $x \in]0, \pi]$,

$$\varphi'(x) = \frac{-a\sin(ax)\sin(x/2) - (\cos(ax) - 1)\cos(x/2)/2}{\sin^2(x/2)}$$

D'une part

$$-a\sin(ax)\sin(x/2) \underset{x\to 0}{\sim} -a^2x^2/2$$

ou encore

$$-a\sin(ax)\sin(x/2) \underset{x\to 0}{=} -a^2x^2/2 + o(x^2)$$

et d'autre part,

$$(\cos(ax)-1)\cos(x/2) \underset{x\to 0}{\sim} -a^2x^2/2$$

ou encore

$$(\cos(ax)-1)\cos(x/2) \underset{x\to 0}{=} -a^2x^2/2 + o(x^2)$$

On en déduit que

$$-a\sin(ax)\sin(x/2) - (\cos(ax)-1)\cos(x/2)/2 \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$$

Comme $\sin^2(x/2) \underset{x\to 0}{=} x^2/4$, on en déduit que $\varphi'(x) \underset{x\to 0}{=} o(1)$ i.e. $\varphi'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, φ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

4 Il s'agit du lemme de Riemann-Lebesgue. Quitte à confondre φ et son prolongement sur $[0,\pi]$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ (et $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$) de sorte qu'on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= -\frac{1}{n+1/2}\left[\varphi(x)\cos((n+1/2)x)\right]_0^\pi + \frac{1}{n+1/2}\int_0^\pi \varphi'(x)\cos((n+1/2)x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\varphi(0)}{n+1/2} + \frac{1}{n+1/2}\int_0^\pi \varphi'(x)\cos((n+1/2)x)\,\mathrm{d}x \qquad = \frac{1}{n+1/2}\int_0^\pi \varphi'(x)\cos((n+1/2)x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Par inégalité trangulaire,

$$|\mathrm{I}_n| \leq \frac{1}{n+1/2}\int_0^\pi |\varphi'(x)\cos((n+1/2)x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n+1/2}\int_0^\pi |\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

5

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n u_k &= \int_0^\pi \cos(ax)\mathrm{C}_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \cos(ax)\left(\frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(ax)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(x)\sin((n+1/2)x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2}\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n
\end{aligned}$$

6 On a montré précédemment que $\mathrm{J}_n = \dfrac{\pi}{2}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi a)}{2a}$$

Ainsi la série $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi a)}{2a}$$

7 On utilise la formule de linéarisation $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$ donc

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi \cos((n+a)x)\ \mathrm{d}x + \int_0^\pi \cos((n-a)x)\ \mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+a}\left[\sin((n+a)x)\right]_0^\pi + \frac{1}{n-a}\left[\sin((n-a)x)\right]_0^\pi\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n\pi+a\pi)}{n+a} + \frac{\sin(n\pi-a\pi)}{n-a}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n\sin(a\pi)}{n+a} - \frac{(-1)^n\sin(a\pi)}{n-a}\right)\\
&= \frac{(-1)^n\sin(a\pi)}{2}\left(\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n-a}\right)\\
&= \frac{(-1)^{n-1}a\sin(a\pi)}{n^2-a^2}
\end{aligned}$$

8 On a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}a\sin(\pi a)}{n^2-a^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi a)}{2a}$$

Comme $a \in]0,1[$, $\sin(\pi a) \neq 0$ et on peut diviser la relation précédente par $\sin(\pi a)/2$ pour obtenir :

$$2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}a}{n^2-a^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a}$$

9 La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\dfrac{1}{1+t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$, il en est de même de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$. Cette fonction est donc intégrable sur $[0,+\infty[$. Notamment, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$ converge.

10 **10.a** Soient $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme $-t^\alpha \neq 1$, on peut appliquer la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k\alpha} = \sum_{k=0}^n (-t^\alpha)^k = \frac{1-(-t^\alpha)^{n+1}}{1-(-t^\alpha)}$$

On en déduit que

$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1}\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}$$

10.b Pour tout $t \in [0,1]$,

$$0 \leq \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} \leq t^{(n+1)\alpha}$$

Par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\ \mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{(n+1)\alpha}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)\alpha+1}$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\ \mathrm{d}t = 0$$

10.c D'après la question **10.a**, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{k\alpha}\ \mathrm{d}t + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\ \mathrm{d}t$$

ou encore

$$\mathrm{G}(\alpha) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k\alpha+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\ \mathrm{d}t$$

Comme la suite de terme général $(-1)^{n+1}$ est bornée, la question précédente montre que

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\ \mathrm{d}t = 0$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k\alpha+1}=\mathrm{G}(\alpha)$$

Ainsi la série $\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k\alpha+1}=\mathrm{G}(\alpha)$$

$\boxed{11}$ **11.a** On effectue en fait le changement de variable $t=u^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Comme $\alpha>1$, l'application $u\mapsto u^{\frac{1}{1-\alpha}}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $[1,+\infty[$ sur $]0,1]$ de dérivée $u\mapsto\frac{1}{1-\alpha}u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. On peut alors affirmer que

$$\mathrm{H}(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}\int_0^1\frac{u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1+u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\,du=\frac{1}{\alpha-1}\int_0^1\frac{du}{u^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left(1+u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)}=\frac{1}{\alpha-1}\int_0^1\frac{du}{u^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}+1}=\frac{1}{\alpha-1}\mathrm{G}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$$

11.b D'après la question **10.c**,

$$\mathrm{H}(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}\mathrm{G}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)=\frac{1}{\alpha-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k\frac{\alpha}{\alpha-1}+1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k\alpha+\alpha-1}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\alpha-1}$$

11.c D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(\alpha)=\mathrm{G}(\alpha)+\mathrm{H}(\alpha)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\alpha+1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha-1}\\&=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha+1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha-1}\\&=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n\alpha-1}-\frac{1}{n\alpha+1}\right)\\&=1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2-1}\end{aligned}$$

11.d Posons $a=\frac{1}{\alpha}$. Comme $\alpha>1$, $a\in]0,1[$ et on peut appliquer la question **8** :

$$2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}/\alpha}{n^2-(1/\alpha)^2}=\frac{\pi}{\sin(\pi/\alpha)}-\alpha$$

ou encore

$$2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\alpha}{n^2\alpha^2-1}=\frac{\pi}{\sin(\pi/\alpha)}-\alpha$$

et enfin

$$2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2-1}=\frac{\pi}{\alpha\sin(\pi/\alpha)}-1$$

On en déduit comme annoncé que

$$\mathrm{F}(\alpha)=\frac{\pi}{\alpha\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$$

```python
import numpy as np
import scipy.integrate as integr
import matplotlib.pyplot as plt

π=np.pi

def F(α):
    return integr.quad(lambda t:1/(1+t**α),0,np.inf)[0]

def S(α):
    return π/(α*np.sin(π/α))
```

```
>>> [(F(α),S(α)) for α in np.linspace(2.,10.,10)]
[(1.5707963267948966, 1.5707963267948966), (1.2281517642692439,
 ↪  1.2281517642691895), (1.1252882556358892, 1.1252882556404917),
 ↪  (1.0797264426171973, 1.079726442617534), (1.0553534891220455,
 ↪  1.0553534891220375), (1.0407338400732362, 1.0407338400732362),
 ↪  (1.0312554549270578, 1.0312554549270576), (1.0247524604609213,
 ↪  1.0247524604609213), (1.0200938823165344, 1.0200938823165346),
 ↪  (1.0166407384630542, 1.016640738463052)]
```