Devoir surveillé n°10

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

1. $0 < a_0 \leq 1$ car $a_0 = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, $0 < a_k \leq 1$. Alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$0 < \frac{1}{n-k+2} \leq \frac{1}{2}$$

et, puisque $0 < a_k \leq 1$

$$0 < \frac{a_k}{n-k+2} \leq \frac{a_k}{2} \leq \frac{1}{2}$$

Par conséquent,

$$0 < \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

et enfin

$$0 < \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} \leq \frac{1}{2}$$

A fortiori, $0 < a_{n+1} \leq 1$.
Par récurrence forte : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in]0, 1].}$

2. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n \leq 1$, le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de la série entière géométrique $\sum x^n$, qui vaut 1.
$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum a_n x^n \text{ est supérieur ou égal à 1.}}$

3. **a.** On applique la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1/(n+3)}{1/(n+2)} = 1$$

$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum \frac{x^n}{n+2} \text{ vaut 1.}}$

b. On en déduit que :

- $\sum \frac{x^n}{n+2}$ converge lorsque $|x| < 1$,
- $\sum \frac{x^n}{n+2}$ diverge lorsque $|x| > 1$.

Par ailleurs, pour $x = 1$, $\sum \frac{1}{n+2}$ diverge (série harmonique).
Pour $x = -1$, $\sum \frac{(-1)^n}{n+2}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées ($(\frac{1}{n+2})$ tend vers 0 en décroissant).
Par conséquent, $\boxed{x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \text{ est uniquement définie sur } [-1, 1[.}$

c. Le rayon de convergence de la série entière produit de Cauchy de deux séries entières est supérieur ou égal au minimum des deux rayons de convergence. Comme ce minimum vaut 1,
$\boxed{\sum w_n x^n \text{ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1}}$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n+2-k} = (n+1)a_{n+1}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (n+1)a_{n+1}}$$

d. D'après la question précédente,

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} w_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = f'(x)$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right)}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n > 0$ et $a_0 = 1$ donc

$$\forall x \in [0,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \geq a_0 = 1 > 0$$

De plus,

$$\forall x \in [0,1[,\ \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

Or $\ln \circ f$ est une primitive de f'/f sur $[0,1[$ donc on obtient par primitivation terme à terme d'une série entière

$$\forall x \in [0,1[,\ \ln \circ f(x) = \ln \circ f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$$

Comme $f(0) = a_0 = 1$. On obtient finalement

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ \ln \circ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}}$$

5. On rappelle que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

de sorte que

$$\forall x \in]-1,1[,\ -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

On utilise alors l'indication de l'énoncé.

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0,1[,\ \ln \circ f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\
&= -\ln(1-x) - \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x\right) \\
&= \frac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x}
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ f(x) = e(1-x)^{\frac{1}{x}-1} \text{ et } f(0) = e^0 = 1}$$

6. $\frac{1}{2} \in [0,1[$, donc $\sum a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e}{2}$. $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} = \frac{e}{2}.}$

Problème 1

1 Puisque $\rho \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\rho^n$ converge. Ainsi $(a_n\rho^n)$ converge vers 0 et est a fortori bornée.

2 Il existe donc $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que $|a_n|\rho^n \leq \mathrm{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose alors $\mathrm{K} = \max\{1,\mathrm{M}\} \geq 1$. Alors $|a_n|\rho^n \leq \mathrm{M} \leq \mathrm{K} \leq \mathrm{K}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui donne le résultat voulu.

3 On procède par récurrence forte. Puisque $b_0 = 1$, l'initialisation est claire. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|b_k| \leq \left(\frac{2k}{\rho}\right)^k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors, par inégalité triangulaire,

$$|b_n| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j||b_{n-j}| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{K}^j}{\rho^j} \cdot \frac{2^{n-j}\mathrm{K}^{n-j}}{\rho^{n-j}} = \frac{\mathrm{K}^n}{\rho^n}\sum_{j=1}^{n} 2^{n-j}$$

Or

$$\sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} = \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n - 1 \leq 2^n$$

donc

$$|b_n| \leq \left(\frac{2\mathrm{K}}{\rho}\right)^n$$

Par récurence forte, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 D'après la question précédente, la suite $\left(b_n\left(\frac{\rho}{2\mathrm{K}}\right)^n\right)$ est bornée. Par définition du rayon de convergence, le rayon de convergence r de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ vérifie $r \geq \frac{\rho}{2\mathrm{K}} > 0$.

5 Le produit de Cauchy des deux séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ possède un rayon de convergence supérieur ou égal au minimum des rayons de convergence de ces deux séries entières, c'est-à-dire R'. De plus

$$\forall z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}'),\ \mathrm{S}(z)\mathrm{T}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

De plus,

$$c_0 = a_0 b_0 = 1$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = a_0 b_n + \sum_{j=1}^{n} a_j b_{n-j} = b_n - b_n = 0$$

6 D'après la question précédente,

$$\forall z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}'),\ \mathrm{S}(z)\mathrm{T}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = 1$$

7 Tout d'abord, 0 n'est pas solution puisque $f(0) = 1$. De plus, pour $z \in \mathbb{C}^*$, $f(z) = 0 \iff e^z = 1$. On en déduit que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$ est

$$2i\pi\mathbb{Z}^* = \{2i\pi n,\ n \in \mathbb{Z}^*\}$$

8 D'après la question précédente, f ne s'annule pas sur $\mathrm{D}(0, 2\pi)$, d'où l'existence de g.

9 Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

donc pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$$

Puisque $f(0) = 1$, cette égalité est encore valable pour $z = 0$. Ainsi

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$$

Ainsi f est bien la somme d'une série entière de rayon de convergence infini.

10 On a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec $a_n = \frac{1}{(n+1)!}$. Notamment $a_0 = 1$ donc, d'après la question **6**, il existe une fonction $\tilde{g}$ développable en série entière de rayon de convergence R' telle que

$$\forall z \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R}), f(z)\tilde{g}(z) = 1$$

Comme f ne s'annule pas sur $\mathrm{D}(0, 2\pi)$, en posant $\mathrm{R} = \min(2\pi, \mathrm{R}')$,

$$\forall z \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R}),\ \tilde{g}(z) = \frac{1}{f(z)} = g(z)$$

Donc g est bien développable en série entière sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$.

11 Pour tout $t \in]-2\pi, 2\pi[\setminus\{0\}$,

$$\mathrm{G}(t) = t + 2g(t) = t + \frac{2}{f(t)} = t + \frac{2t}{e^t - 1} = \frac{te^t + t}{e^t - 1}$$

et

$$\mathrm{G}(-t) = \frac{-te^{-t} - t}{e^{-t} - 1} = \frac{-t - te^t}{1 - e^t} = \frac{te^t + t}{e^t - 1} = \mathrm{G}(t)$$

donc G est paire.
D'une part,

$$\mathrm{G}(t) = t + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n t^n = \gamma_0 + (2\gamma_1 + 1)t + \sum_{n=2}^{+\infty} \gamma_n t^n$$

et d'autre part,

$$\mathrm{G}(-t) = \gamma_0 - (2\gamma_1 + 1)t + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \gamma_n t^n$$

Par unicité du développement en série entière,

$$2\gamma_1 + 1 = -2\gamma_1 - 1 \text{ i.e. } \gamma_1 = -\frac{1}{2}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \gamma_{2n+1} = 0$$

12 On sait déjà que $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = -\frac{1}{2}$ et $\gamma_3 = 0$.

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}\right)x^2 + o(x^2) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$$

On en déduit que $\gamma_2 = \frac{1}{12}$.

13 Puisque $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$ et $f(z)g(z) = 1$, d'après la partie ???

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \gamma_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_{n-k}}{(k+1)!} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k}{(n-k+1)!}$$

On en déduit donc que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k}{(n-k+1)!} = 0$$

14 Récurrence forte

15 Prenons $\mathrm{I} =]-\ln 2, \ln 2[$. Alors pour tout $t \in \mathrm{I}$, $\frac{1}{2} < e^t < 2$ puis $-\frac{1}{2} < e^t - 1 < 1$ donc $|e^t - 1| < 1$.

16 On sait que S est de classe $\mathcal{C}_\infty$ sur $]-1, 1[$. Comme h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I à valeurs dans $]-1, 1[$, $\mathrm{S} \circ h$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

17 On rappelle que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Soit $t \in \mathrm{I}$ de sorte que $1 - e^t \in]-1,1[$. Si $t \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-e^t)^k}{k+1} = \frac{1}{1-e^t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-e^t)^{k+1}}{k+1} = -\frac{\ln(1-(1-e^t))}{1-e^t} = \frac{t}{e^t-1} = g(t)$$

Puisque $g(0) = \frac{1}{f(0)} = 1$, cette relation est encore vraie pour $t = 0$.

18 **18.a** On sait que $h(t) \underset{t\to0}{\sim} -t$ donc $h(t)^k \underset{t\to0}{\sim} (-1)^k t^k$. A fortiori, $h(t)^k \underset{t\to0}{=} o(t^{k-1})$. Mais comme h^k est de classe $\mathcal{C}^\infty$,

$$h(t)^k = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(h^k)^{(n)}(0)}{n!} + o(t^{k-1})$$

Par unicité du développement limité,

$$\forall n \in [\![0, k-1]\!],\ (h^k)^{(n)}(0) = 0$$

18.b Soit H de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. Alors H est a fortiori continue en 0 et donc bornée au voisinage de 0. Ainsi $\mathrm{H}(t) \underset{t\to0}{=} \mathcal{O}(1)$. On en déduit que $\mathrm{H}(t)h(t)^k \underset{t\to0}{=} \mathcal{O}(t^k)$ puis que $\mathrm{H}(t)h(t)^k \underset{t\to0}{=} o(t^{k-1})$. On conclut comme à la question précédente.

18.c Remarquons que

$$\forall t \in \mathrm{I},\ g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k(t)}{k+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{h^k(t)}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k(t)}{k+1} + h^{n+1}(t) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^k(t)}{k+n+2}$$

Posons $\mathrm{H}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^k(t)}{k+n+2}$ pour $t \in \mathrm{I}$. La série entière $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^k}{k+n+2}$ est de rayon de convergence 1 d'après la règle de d'Alembert. Notons S sa somme. D'après la question **16**, $\mathrm{H} = \mathrm{S} \circ h$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. De plus,

$$\forall t \in \mathrm{I},\ g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k(t)}{k+1} + h^{n+1}(t) + h^{n+1}(t)\mathrm{H}(t)$$

La somme étant *finie*, on en déduit que

$$g^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(h^k)^{(n)}(0)}{k+1} + (h^{n+1}\mathrm{H})^{(n)}(0)$$

Comme $n+1 > n$, $(h^{n+1}\mathrm{H})^{(n)}(0) = 0$ d'après la question **18.b**. Finalement,

$$g^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(h^k)^{(n)}(0)}{k+1}$$

19 **19.a** Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme,

$$\forall t \in \mathrm{I},\ h(t)^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)j \binom{k}{j} e^{jt}$$

Ainsi

$$\forall t \in \mathrm{I},\ (h^k)^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} j^n e^{jt}$$

puis

$$(h^k)^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} j^n$$

19.b D'après le cours

$$\gamma_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(h^k)^{(n)}(0)}{k+1} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{k+1} \binom{k}{j} j^n$$