Devoir à la maison n°6

Problème 1 —

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

1. Soit $f\in\mathcal{E}$.

a. Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.

b. Démontrer que la fonction f est impaire.

2. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

a. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $xy'-y = kx$ où k est une constante dépendant de f que l'on précisera.

b. En déduire $f(x)$ en fonction de k pour tout $x\in\mathbb{R}$.

3. On note φ l'unique élément de $\mathcal{E}$ vérifiant $\varphi'(1) = 1$.

a. φ est-elle dérivable en 0 ?

b. Déterminer les variations et les limites de φ en $+\infty$ et $-\infty$ puis tracer son graphe.

4. On considère $f\in\mathcal{E}$ que l'on suppose seulement continue sur $\mathbb{R}$. On note alors F l'unique primitive de f s'annulant en 0.

a. Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $F(xy) = x^2F(y) + \dfrac{xy^2}{2}f(x)$.

b. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.