

# DEVOIR À LA MAISON N°06

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1 —

### Partie I – Étude d'une fonction

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = x \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$ .

1. Étudier la parité de  $f$ .
2.
  - a. Donner un équivalent de la fonction  $\operatorname{sh}$  en 0 et en déduire les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
  - b. Déterminer la limite de  $f$  en 0.
3. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$f'(x) = \left( \operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right) \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$$

4. Montrer que pour tout  $X \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\operatorname{th}(X) < X$ .
5. En déduire le tableau de variations de  $f$ .
6. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction  $X \mapsto \frac{\operatorname{sh} X}{X}$ .
7. En déduire qu'au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$ ,  $f$  admet un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

où  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  sont cinq réels que l'on précisera.

8. Montrer que la fonction  $g : x \in \mathbb{R}^* \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$  se prolonge sur  $\mathbb{R}$  en une fonction continue notée  $G$ , puis prouver que  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

### Partie II – Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) suivante que l'on va résoudre sur différents intervalles.

$$(E) : xy' + y = \operatorname{ch} x$$

9. Résoudre (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
10. Donner sans justification les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

11. Justifier que la fonction  $G$  définie à la question **I.8** est l'unique fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  qui soit solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

### Partie III – Une fonction définie par une intégrale

Pour  $x \in \mathbb{R}^*$ , on pose  $J(x) = \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt$ .

12. Déterminer la parité de  $J$ .
13. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ .
14. Justifier que  $J$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$J'(x) = f(x) \left( 1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{1}{x} \right)$$

15. En déduire le signe de  $J'$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On exprimera le (ou les) zéro(s) de  $J'$  à l'aide de la fonction  $\ln$ .

16. a. Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\operatorname{sh} t \geq t + \frac{t^3}{6}$ .
- b. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, J(x) \geq \frac{x}{2} + \frac{1}{6x}$$

puis les limites de  $J$  en  $0^+$  et en  $+\infty$ .

17. Donner le tableau de variations de  $J$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

18. On pose  $h(x) = \frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$  pour  $x \in \mathbb{R}^*$ .

- a. Montrer que  $h$  est prolongeable par continuité en 0. On note encore  $h$  son prolongement.
- b. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$J(x) - \frac{x}{2} = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} h(u) du$$

- c. Montrer

$$J(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{as } x \rightarrow +\infty$$

19. Montrer que la courbe de  $J$  admet en  $+\infty$  et en  $-\infty$  une asymptote oblique dont on précisera une équation. On donnera également la position de la courbe de  $J$  par rapport à cette asymptote.

20. Tracer l'allure de la courbe représentative de  $J$  sur  $\mathbb{R}$ .

On fera notamment figurer l'asymptote déterminée à la question **III.19** ainsi que les tangentes horizontales éventuelles.

On donne pour le tracé  $\frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})} \approx 0,76$  et  $J\left(\frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}\right) \approx 0,65$  à  $10^{-2}$  près.