# Devoir à la maison n°3

## Problème 1 —

### Partie I –

Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone telle que

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(x)+f(y)$$

On pose $c=f(1)$.

**1.** Déterminer $f(0)$ et montrer que $c\neq 0$. Dans la suite, on pose $g=\frac{1}{c}f$.

**2.** Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$g(x+y)=g(x)+g(y) \qquad \text{et} \qquad g(x-y)=g(x)-g(y)$$

**3.** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g(n)=n$.

**4.** Montrer que $g$ est une fonction impaire et en déduire que $g(n)=n$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

**5.** Montrer que pour tout $r\in\mathbb{Q}$, $g(r)=r$.

**6.** Montrer que $g$ est strictement croissante.

**7.** Montrer que $g(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
On pourra raisonner par l'absurde et admettre qu'il existe toujours un rationnel strictement compris entre deux réels distincts.

**8.** En déduire $f$.

### Partie II –

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On se propose de déterminer les applications $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotones telles que

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+f(y))=f(x)+y^n$$

Dans la suite, $f$ désigne une telle application.

**1.** Justifier que $f$ est injective.

**2.** Montrer que $f(0)=0$.

**3.** Montrer que $f(f(y))=y^n$ pour tout $y\in\mathbb{R}$.

**4.** On suppose $n=1$ dans cette question.

- **a.** Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$.
- **b.** Justifier qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=cx$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
- **c.** Conclure.

**5.** On suppose maintenant $n>1$.

**a.** En déduire que $n$ ne peut être pair. On suppose donc $n$ impair dans la suite.

**b.** Montrer que $f \circ f$ est bijective. En déduire que $f$ l'est également.

**c.** Montrer que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

**d.** En déduire une contradiction.

**e.** Conclure.