Devoir surveillé n° 4

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx$.

On se propose de démontrer l'existence de trois réels a, b, c tels que :

$$I_n \underset{n\to+\infty}{=} a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. Calculer I_0, I_1.

2. **a.** Étudier la monotonie de la suite (I_n).

b. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n.

c. Qu'en déduit-on pour la suite (I_n) ?

3. **a.** Majorer la fonction $g : x \mapsto e^{-2x}$ sur $[0,1]$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

b. Déterminer la limite de la suite (I_n).

4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$

5. En déduire la limite de la suite (nI_n).

6. Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n - 1))$.

7. Donner alors les valeurs de a, b, c. On justifiera sa réponse.

Problème 1 —

Partie I –

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = \dfrac{\arctan t}{t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

2. Donner le développement limité de f à l'ordre 1 en 0. En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.

4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2}\,du = -\frac{1}{2}t^2 f'(t)$$

En déduire le sens de variation de f.

5. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2cm). On précisera les éventuelles branches infinies.

Partie II –

Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\phi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

1. Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant \phi(x) \leqslant 1$. On pourra commencer par supposer $x > 0$.

3. Montrer que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\phi'(x) = \dfrac{1}{x}\left(f(x) - \phi(x)\right)$.
Montrer que ϕ est dérivable en 0 avec $\phi'(0) = 0$. Donner les variations de ϕ.

4. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt = 0$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$.

5. Tracer la courbe représentative de ϕ dans un repère orthonormé (unité : 2cm). On précisera les éventuelles branches infinies.

Partie III –

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \phi(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|\phi'(x)| \leqslant \frac{1}{x}(1 - f(x)) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$$

On pourra utiliser les questions **II.2** et **II.3**.
En déduire que $|\phi'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ puis que cette inégalité reste vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que l'équation $\phi(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note α cette solution.
Montrer que $\alpha \in]0, 1]$.

4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
En déduire que (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Partie IV –

On considère l'équation différentielle $x^2y' + xy = \arctan(x)$.

1. Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

2. Montrer que ϕ est l'unique solution de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$.