

### EXERCICE 1.

Soit  $G$  un groupe. Notre but est de montrer que  $G$  est isomorphe à un sous-groupe de  $S(G)$ .

1. Pour cela considérons pour tout  $g \in G$  l'application *translation à gauche par  $g$*

$$\varphi_g : G \rightarrow G, h \mapsto gh.$$

Montrer que  $\varphi_g \in S(G)$ .

2. Montrer que  $G \rightarrow S(G), g \mapsto \varphi_g$ , est un morphisme injectif. Conclure.

### EXERCICE 2.

Soient  $E$  un ensemble et  $x \in E$ . On pose

$$S(x) = \{\sigma \in \mathfrak{S}(E), \sigma(x) = x\}$$

Montrer que  $S(x)$  est un sous-groupe de  $\mathfrak{S}(E)$ .

### EXERCICE 3.

Soit  $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ . On pose pour tous éléments  $(x, y)$  et  $(x', y')$  de  $G$  :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Vérifier que  $*$  est une loi interne associative sur  $G$ .
2. Vérifier que  $(G, *)$  est un groupe. Est-il commutatif ?
3. Donner une expression de  $(x, y)^{*n}$ .

### EXERCICE 4.

Soit  $G = ]-1, 1[$ . On pose pour tous éléments  $x$  et  $y$  de  $G$  :

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

1. Vérifier que  $*$  est une loi interne associative sur  $G$ .
2. Vérifier que  $(G, *)$  est un groupe. Est-il commutatif ?
3. Donner une expression de  $x^{*n}$ .

### EXERCICE 5.

Soient  $G$  un groupe et  $H, K$  deux sous-groupes de  $G$ .

1. Montrer que  $H \cap K$  est un sous-groupe de  $G$ .
2. Montrer que  $H \cup K$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si  $H \subset K$  ou  $K \subset H$ .

### EXERCICE 6.★

Soit  $G$  un groupe. Etant donné un élément  $a$  de  $G$  on définit l'application :

$$\varphi_a : \begin{cases} G & \longrightarrow G \\ x & \longmapsto axa^{-1} \end{cases}$$

1. Soit  $a \in G$ . Montrer que  $\varphi_a$  est un automorphisme de  $G$ .
2. On pose  $\mathcal{I}(G) = \{\varphi_a, a \in G\}$ . Montrer que l'ensemble  $\mathcal{I}(G)$  est un sous-groupe de  $\text{Aut}(G)$ .
3. Montrer que  $\varphi : \begin{cases} G & \longrightarrow \mathfrak{S}(G) \\ a & \longmapsto \varphi_a \end{cases}$  est un morphisme de groupes.

### EXERCICE 7.

Soit  $G$  un groupe. Montrer que  $f : \begin{cases} G & \longrightarrow G \\ x & \longmapsto x^{-1} \end{cases}$  est un automorphisme de  $G$  si et seulement si  $G$  est commutatif.

### EXERCICE 8.

Déterminer les morphismes de groupes de  $(\mathbb{Q}, +)$  dans  $(\mathbb{Z}, +)$ .

### EXERCICE 9.

Soit  $G$  un groupe d'élément neutre  $e$  tel que  $\forall x \in G, x^2 = e$ . Montrer que  $G$  est commutatif.

### EXERCICE 10.

Montrer que les endomorphismes de groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  continus sont les homothéties i.e. les applications  $x \mapsto \lambda x$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### EXERCICE 11.

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe. On définit le centre de  $G$  par

$$Z(G) = \{a \in G \mid \forall x \in G, ax = xa\}$$

i.e. l'ensemble des éléments de  $G$  qui commutent avec tous les éléments de  $G$ . Montrer que  $Z(G)$  est un sous-groupe de  $G$ .

### EXERCICE 12.

On munit  $\mathbb{R}$  de la loi interne  $*$  défini par :  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a * b = a + b + ab$ .  $(\mathbb{R}, *)$  est-il un groupe ?

### EXERCICE 13.

Soit  $G$  un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ . On suppose  $G$  non trivial i.e.  $G \neq \{0\}$ .

- Question préliminaire : soient  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n\alpha \leq \beta < (n+1)\alpha$ .
- Justifier que  $G \cap \mathbb{R}_+^*$  possède une borne inférieure que l'on notera  $a$ .
- On suppose que  $a > 0$ .
  - On suppose que  $a \notin G$ . Justifier l'existence de deux éléments distincts  $x$  et  $y$  de  $G$  appartenant à l'intervalle  $]a, 2a[$ .
  - Aboutir à une contradiction et en déduire que  $a \in G$ .
  - En déduire que  $a\mathbb{Z} \subset G$ .
  - Soit  $z \in G$ . En utilisant la question 1, montrer qu'il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $z = na$ .
  - En déduire que  $G = a\mathbb{Z}$ .
- On suppose que  $a = 0$ .
  - Soient  $t \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$ . En utilisant la question 1, montrer qu'il existe  $g \in G$  tel que  $|g - t| < \varepsilon$ .
  - En déduire que  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

### EXERCICE 14.

Soit  $G$  un groupe abélien fini d'ordre impair. Calculer le produit des éléments de  $G$ .

### EXERCICE 15.

Soient  $(G, *)$  un groupe et  $H$  un ensemble. On suppose qu'il existe une bijection  $f$  de  $G$  sur  $H$ . On définit la loi  $\cdot$  sur  $H$  de la manière suivante :

$$\forall (x, y) \in H^2, x \cdot y = f(f^{-1}(x) * f^{-1}(y))$$

Montrer que  $(H, \cdot)$  est un groupe.

### EXERCICE 16.

Soient  $(G, *)$  un groupe et  $(H, \cdot)$  un ensemble muni d'une loi interne. On suppose qu'il existe une surjection de  $G$  sur  $H$  vérifiant

$$\forall (x, y) \in G^2, f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$$

Montrer que  $(H, \cdot)$  est un groupe. Que peut-on dire de  $f$  ?

### EXERCICE 17.

Soit  $G$  un groupe. On définit une relation binaire  $\sim$  sur  $G$  par

$$\forall (x, y) \in G^2, x \sim y \iff \exists g \in G, y = g^{-1}xg$$

Montrer que  $\sim$  est une relation d'équivalence.

### EXERCICE 18.

Soient  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . On définit une relation binaire  $\sim$  sur  $G$  par

$$\forall (x, y) \in G^2, x \sim y \iff \exists h \in H, y = xh$$

Montrer que  $\sim$  est une relation d'équivalence.

### EXERCICE 19.

Dans cette exercice, on pourra identifier le plan à  $\mathbb{C}$  via un repère orthonormé. On pourra en particulier identifier une transformation du plan à une application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ .

- On note  $G$  l'ensemble des translations et des similitudes directes du plan. Montrer que  $G$  muni de la loi de composition est un groupe.
- On note  $H$  l'ensemble des translations et des rotations du plan. Montrer que  $H$  est un sous-groupe de  $G$ .

**EXERCICE 20.**

Montrer que l'ensemble des nombres décimaux

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{k}{10^n} : (k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$$

est un sous-anneau de  $\mathbb{Q}$ . Est-ce aussi un sous-corps ?

**EXERCICE 21.**

Montrer que tout anneau commutatif intègre fini est un corps.

**EXERCICE 22.**

On note  $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ .

1. Montrer que  $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$  est un anneau commutatif.
2. Déterminer les éléments inversibles de  $\mathbb{Z}[i]$ .

**EXERCICE 23.**

Soit  $(A, +, \times)$  un anneau. Un élément  $a$  de  $A$  est dit nilpotent s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $a^n = 0$ .

1. Soit  $(x, y) \in A^2$ . Montrer que si  $xy$  est nilpotent, alors  $yx$  est nilpotent.
2. Soit  $(x, y) \in A^2$ . Montrer que si  $x$  et  $y$  commutent et que l'un des deux est nilpotent, alors  $xy$  est nilpotent.
3. Soit  $(x, y) \in A^2$ . Montrer que si  $x$  et  $y$  sont nilpotents et commutent, alors  $x + y$  est nilpotent.
4. Soit  $x \in A$ . Montrer que si  $x$  est nilpotent, alors  $1 - x$  est inversible et calculer son inverse.

**EXERCICE 24.**

Soit  $A$  un anneau tel que  $\forall x \in A, x^2 = x$  (on dit que les éléments de  $A$  sont idempotents).

1. Montrer que  $\forall x \in A, 2x = 0$ .
2. Montrer que  $A$  est commutatif.

**EXERCICE 25. ★★**

Soit  $f$  un endomorphisme de corps de  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $f|_{\mathbb{Q}} = \text{Id}_{\mathbb{Q}}$ .
2. Montrer que  $f$  est croissant.
3. Montrer que  $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ .

**EXERCICE 26.**

Soit  $E$  un ensemble non vide. Pour  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ , on définit la différence de  $A$  et  $B$  par  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

1. Montrer que  $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$  est un anneau commutatif. Préciser les éléments neutres pour  $\Delta$  et  $\cap$ .
2. Quels sont les éléments de  $\mathcal{P}(E)$  inversibles pour  $\cap$  ?
3. L'anneau  $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$  est-il intègre ?

**EXERCICE 27.**

On note  $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$  l'ensemble des réels de la forme  $a + b\sqrt{3}$  avec  $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ . Montrer que  $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$  est un corps.

**EXERCICE 28.**

Soit  $A$  un anneau intègre commutatif fini.

1. Soit  $a$  un élément non nul de  $A$ . Montrer que l'application  $\phi : \begin{cases} A & \longrightarrow A \\ x & \longmapsto ax \end{cases}$  est bijective.
2. En déduire que  $A$  est un corps.