Interrogation écrite n°8

NOM : Prénom : Note :

---

1. Soit (u_n) la suite telle que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) converge vers 0.

2. Soit (u_n) la suite telle que $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

3. Soit E un ensemble. On note $S(E)$ l'ensemble des bijections de E dans lui-même. On sait que $(S(E), \circ)$ est un groupe. On fixe $a \in E$, on pose $S_a(E) = \{f \in S(E),\ f(a) = a\}$. Montrer que $S_a(E)$ est un sous-groupe de $(S(E), \circ)$.

4. Montrer que $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array} \right.$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ et déterminer son image et son noyau.

5. Soit (u_n) la suite *arithmético-géométrique* telle que $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression du terme général de la suite (u_n).