

DEVOIR À LA MAISON N°13

EXERCICE 1.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul fixé.

1. a. Montrer l'existence de deux polynômes F_n et G_n de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que

$$(1 - X)^n F_n + X^n G_n = 1$$

On pourra par exemple développer $[(1 - X) + X]^{2n-1}$ et on ne cherchera pas pour l'instant à calculer les coefficients de F_n et G_n .

- b. Montrer que (F_n, G_n) est l'unique couple de polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant l'égalité de la question précédente.

2. a. Montrer que $F_n(1 - X) = G_n(X)$.

- b. Calculer $F_n(0)$, $F_n\left(\frac{1}{2}\right)$ et $F_n(1)$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra librement admettre que $F_n(1) \neq 0$.

3. a. Montrer que $F_n(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (1 - x)^{-n} + o(x^{n-1})$.

- b. En déduire que $F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} X^k$.

4. a. Montrer que $nF_n - (1 - X)F'_n = n \binom{2n-1}{n} X^{n-1}$.

- b. Montrer qu'il existe un unique polynôme $H_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $H'_n = X^{n-1}(1 - X)^{n-1}$ et $H_n(0) = 0$.

- c. Montrer que

$$(1 - X)^n F_n = 1 - n \binom{2n-1}{n} H_n$$

5. a. Que vaut $H_n(1)$?

- b. Donner le tableau de variations de H_n sur \mathbb{R} suivant la parité de n (on identifie le polynôme H_n à la fonction polynomiale qui lui est associée).

- c. En déduire le nombre de racines réelles de F_n suivant la parité de n .