INTERROGATION ÉCRITE N°02

NOM : Prénom : Note :

1. On pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{N}(x, y) = |x + y|$. N est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

   On constate que $\mathrm{N}(1, -1) = 0$ *mais* $(1, -1)$ *n'est pas le vecteur nul.* N *n'est donc pas une norme sur* $\mathbb{R}^2$. ■

2. On pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{N}(x, y) = \sqrt{x^4 + y^2}$. N est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

   On constate que $\mathrm{N}(1, 0) = 1$ *mais* $\mathrm{N}(2, 0) = 4$. *Ainsi* $\mathrm{N}(2 \cdot (1, 0)) \neq 2\mathrm{N}(1, 0)$*, ce qui contredit l'homogénéité.* N *n'est donc pas une norme sur* $\mathbb{R}^2$. ■

3. On pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{N}(x, y) = \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2$. N est-elle une norme ? Justifier.

   $\mathrm{N}(1, 0) = \mathrm{N}(0, 1) = 1$ *mais* $\mathrm{N}(1, 1) = 4$. *Ainsi* $\mathrm{N}(1, 1) > \mathrm{N}((1, 0) + (0, 1))$. N *n'est donc pas une norme sur* $\mathbb{R}^2$. ■

4. La fonction $f: x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x\ln(x)$ est-elle convexe ? concave ? ni l'un ni l'autre ?

   Par opérations, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 1 + \ln(x)$$

   puis

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = \frac{1}{x} \geq 0$$

   La fonction f est donc convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. ■

5. Donner la définition de la convexité d'une fonction f sur un intervalle I.

   f est convexe sur I *si*

$$\forall (a,b) \in \mathrm{E}^2,\ \forall t \in [0,1],\ f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

■

6. Enoncer la propriété de convexité généralisée d'une fonction f sur un intervalle I.

   f est convexe sur I *si et seulement si*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{I}^n,\ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \implies f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

■

7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Donner la définition d'un segment de E puis la définition de la convexité d'une partie de E.

   Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$. *On appelle segment* $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$ *l'ensemble* $\{(1-\lambda)\mathrm{A} + \lambda\mathrm{B},\ \lambda \in [0,1]\}$.
   Soit $\mathcal{C}$ une partie de E. *$\mathcal{C}$ est convexe si pour tout* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{C}^2$, $[\mathrm{A},\mathrm{B}] \subset \mathcal{C}$. ■