

Equations différentielles linéaires d'ordre 1

EXERCICE 1.

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$y' + \operatorname{th}(t)y = \operatorname{sh}(t).$$

EXERCICE 2.

Résoudre sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$ l'équation

$$y' - \tan(t)y = \frac{1}{1 + \cos(t)}.$$

EXERCICE 3.

Résoudre sur $] -\infty, 1[$ l'équation :

$$(1-x)^2 y' = (2-x)y.$$

EXERCICE 4.

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation :

$$z' + \operatorname{th}(t)z = t \operatorname{th}(t).$$

Trouver l'unique solution z_1 vérifiant la condition initiale $z_1(0) = 1$.

EXERCICE 5.

Soit (E) l'équation :

$$y' + \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)} y = 2 \sin(x).$$

1. Résoudre (E_H) .
2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme

$$x \mapsto a \cos(x) + b$$

avec a et b réel.

3. Résoudre (E) sur \mathbb{R} et déterminer l'unique solution de (E), notée h , vérifiant la condition initiale $h(0) = 1$.

EXERCICE 6.

Résoudre sur $I =]0, \pi[$ l'équation différentielle

$$(E) : y' + \cotan(t)y = \cos^2(t).$$

EXERCICE 7.

Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

$$1. \quad y' - y = \arctan(e^x)$$

$$2. \quad y' + y = \arctan(e^x)$$

EXERCICE 8.

Résoudre sur \mathbb{R} les équations

$$1. \quad y' + 2y = t e^{-t}$$

$$2. \quad y' + 2y = e^{-2t}$$

EXERCICE 9.

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$y' + y = t \cos(t).$$

EXERCICE 10.

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$y' - y = e^t + e^{2t}.$$

EXERCICE 11.

On considère l'équation (E) : $y' - \ln(x)y = x^x$.

1. Calculer en intégrant par parties les primitives de $x \mapsto \ln(x)$ sur \mathbb{R}_+^* .
2. Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* .

EXERCICE 12.

Résoudre sur \mathbb{R} les équations suivantes :

$$1. \quad (E_1) : y' + 3y = \sin(x);$$

$$2. \quad (E_2) : y' - 3y = e^{-x}(1 - x^3);$$

$$3. \quad (E_3) : y''' - y'' = x.$$

EXERCICE 13.

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation (E) : $y' + x y = x^2 + 1$ sachant qu'elle admet une solution particulière polynomiale.

EXERCICE 14.

Résoudre les équations suivantes

1. $y' + y = x$;
2. $y' + y = e^{-x}$;
3. $y' + y = x e^{-x}$;
4. $y' + y = x^2 e^{-x}$;
5. $y' + y = e^{2x}$;
6. $y' + y = e^{-x} + e^{2x}$;
7. $y' + y = \sin(x)$;
8. $y' + y = \cos(x) e^x$.

EXERCICE 15.

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants

1. $y' + 2xy = e^{x-x^2}$, $y(0) = 0$;
2. $x^2 y' + y = 0$, $y(0) = 1$;
3. $x^3 y' - 2y = 0$, $y(1) = 1$.

EXERCICE 16.Résoudre sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* l'équation

$$|x|y' + (x-1)y = x^2.$$

EXERCICE 17.

Résoudre l'équation

$$|x(x-1)|y' + y = x^2$$

sur $] -\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.**EXERCICE 18.**

Résoudre l'équation différentielle :

$$(1+t^2)x' - x = 1$$

EXERCICE 19.

Soit a et b deux fonction impaires continues sur \mathbb{R} . Soit f une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$. Montrer que f est paire.

EXERCICE 20.

Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$, a et b deux fonctions continues et T -périodiques sur \mathbb{R} et f une solution de l'équation différentielle (E) : $y' + ay = b$. Montrer que f est T -périodique *si et seulement si* $f(0) = f(T)$.

EXERCICE 21.Résoudre sur $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$ puis $]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(1-x^2)y' - xy = 1$$

EXERCICE 22.Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle $xy' - \alpha y = 0$. Déterminer l'unique solution f vérifiant $f(1) = 1$.
2. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle $xy' - \alpha y = f$. Déterminer l'unique solution g vérifiant $g(1) = 0$.
3. On définit par récurrence une suite de fonctions (u_n) sur \mathbb{R}_+^* de la manière suivante :
 - $u_0 = f$;
 - pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} est l'unique solution de l'équation différentielle $xy' - \alpha y = u_n$ sur \mathbb{R}_+^* valant 0 en 1.

REMARQUE. On a donc $u_1 = g$. ■Déterminer par récurrence u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.**EXERCICE 23.**

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + f'(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

EXERCICE 24.

On considère l'équation différentielle suivante :
 $(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1$.

1. Trouver une solution polynomiale.
2. En déduire l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} .
3. Déterminer la solution vérifiant la condition initiale $y(1) = 1$.

Equations différentielles linéaires d'ordre 2

EXERCICE 25.

Calculer les solutions (réelles) des équations différentielles suivantes :

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $y'' - 2y' - 3y = t^2 e^t$ | 6. $y'' - 2y' + y = \cos(2t)$ |
| 2. $y'' + 4y' + 3y = t e^{-2t}$ | 7. $y'' + 5y' + 4y = t e^{-t}$ |
| 3. $y'' + 4y' + 3y = \cos(3t)$ | 8. $y'' + y = \cos(t)$ |
| 4. $y'' + 3y' + 2y = \sin(t)$ | 9. $y'' - 6y' + 9y = (t+1)e^{-3t}$ |
| 5. $y'' - 4y' + 4y = e^{-t}$ | 10. $y'' - 2y' + 2y = e^{-t} \cos(t)$ |

EXERCICE 26.

Deux problèmes de Cauchy.

1. Déterminer l'unique fonction f , deux fois dérivable sur \mathbb{R} , solution de

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-3t}$$

pour la condition initiale $f(0) = 0, f'(0) = 1$.

2. Déterminer l'unique fonction g , deux fois dérivable sur \mathbb{R} , solution de

$$y'' + 5y' + 4y = e^{-t}$$

pour la condition initiale $g(0) = 0, g'(0) = 1$.

EXERCICE 27.

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \sin(x).$$

EXERCICE 28.

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 4y = \sin^2(t).$$

EXERCICE 29.

Déterminer les solutions à valeurs complexes des équations suivantes :

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1. $y'' + y' + y = 0$ | 3. $y'' - iy' + 2y = 0$ |
| 2. $y'' - 2iy' - y = 0$ | 4. $y'' + 4y' + 4y = 0$ |

EXERCICE 30.

Résoudre sur \mathbb{R} les problèmes de Cauchy suivants :

- $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0$
- $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
- $y'' - 3y' + 2y = x, \quad y(0) = y'(0) = 1$
- $y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

EXERCICE 31.

Résoudre l'équation suivante

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x).$$

EXERCICE 32.

Résoudre les équations suivantes

- $y'' - 3y' + 2y = x;$
- $y'' - 3y' + 2y = e^{2x};$
- $y'' - 3y' + 2y = e^{2x};$
- $y'' - 3y' + 2y = x e^x;$
- $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{ch}(x).$

EXERCICE 33.

- Résoudre l'équation différentielle $y'' - (1-i)y' - 2(1+i)y = 0$.
- Donner l'unique solution f vérifiant $f(0) = f'(0) = 1$.

EXERCICE 34.

Soit f une application de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $f + f'' \geq 0$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x + \pi) \geq 0$$

EXERCICE 35.

On considère l'équation différentielle dont on recherche les solutions à valeurs *réelles*

$$(E) : y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin(x)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Déterminer une solution particulière de (E).
3. Résoudre l'équation (E).
4. Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

EXERCICE 36.

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t) dt$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t) dt$.
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 et que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = g$.

EXERCICE 37.

Soient $\omega \in \mathbb{R}$, $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\begin{cases} x' &= -y + \sin(\omega t) \\ y' &= x - \cos(\omega t) \end{cases}$$

1. Soit $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$t \mapsto x(t) + iy(t).$$

Justifier la dérivabilité de z et montrer que z vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

2. Déterminer x et y .

Changement de fonction ou de variable**EXERCICE 38.**

On souhaite résoudre l'équation

$$(E) : x^2 y'' + 3x y' + y = \frac{1}{x^2}$$

sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

1. Soient $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $Y(t) = y(e^t)$.
 - a. Calculer les dérivées y , y' et y'' en fonction de Y , Y' et Y'' .
 - b. En déduire que y est solution de (E) *si et seulement si* Y est solution d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants (E') que l'on précisera.
2. Résoudre (E') sur \mathbb{R} .
3. En déduire les solutions de (E) sur I .
4. Montrer qu'il existe une unique solution y de (E) sur I telle que $y(1) = y'(1) = 0$.

EXERCICE 39.

Résoudre l'équation

$$y^2 + x^2 - 2y y' = 0$$

en effectuant le changement de fonction $z = y^2$.

EXERCICE 40.

Résoudre l'équation

$$y' = e^{x+y}$$

en posant $z = e^{-y}$.

EXERCICE 41.

Soit (E) l'équation $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0$.

1. Etablir qu'une éventuelle solution polynomiale et non nulle de (E) est nécessairement de degré deux.
2. Trouver une solution polynomiale et non nulle p de (E).
3. Justifier qu'une fonction y deux fois dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} peut s'écrire sous la forme $y = p \times z$ où z est une fonction deux fois dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
4. Montrer qu'une fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable est solution de (E) *si et seulement si* la fonction $Z = z'$ (où z est définie comme à la question précédente) est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre un (E') à préciser.
5. Résoudre (E).

EXERCICE 42.

Soient $I =]1, +\infty[$ et (E) l'équation

$$(E) : -t^2 y' + t y = y^2.$$

1. Soit y une fonction ne s'annulant pas sur I . Prouver que y est solution de (E) *si et seulement si* $z = \frac{1}{y}$ est solution sur I d'une équation différentielle (E') linéaire d'ordre un.
2. Résoudre (E') sur I .
3. En déduire les solutions de (E) ne s'annulant pas sur l'intervalle I .

EXERCICE 43.

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y'' - x y' - 3y = x^4$$

1. a. Montrer que f est une solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* *si et seulement si* $g : t \mapsto f(e^t)$ est solution sur \mathbb{R} d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.
b. En déduire les solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* .
2. a. Montrer que f est une solution de (E) sur \mathbb{R}_-^* *si et seulement si* $g : t \mapsto f(-e^t)$ est solution sur \mathbb{R} d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.
b. En déduire les solutions de (E) sur \mathbb{R}_-^* .
3. Déterminer les solutions de (E) sur \mathbb{R} .

Equations fonctionnelles**EXERCICE 44.**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche l'ensemble S_α des fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^1 vérifiant $f'(x) = -f(\alpha - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une telle fonction est de classe \mathcal{C}^2 .
2. Montrer que les éléments de S_α sont solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
3. Conclure.

EXERCICE 45.

Déterminer les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$$

EXERCICE 46.

Déterminer les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f(-x)$$

EXERCICE 47.

Déterminer les applications f dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = x e^{-x}$$

EXERCICE 48.

Déterminer les applications f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^2 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1.$$

Problèmes de raccord**EXERCICE 49.**

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $x^2 y' - y = 0$.

EXERCICE 50.

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$.

EXERCICE 51.

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $x y' - y = x$.

EXERCICE 52.

On considère l'équation différentielle (E) : $x y'' - y' - x^3 y = 0$.

1. Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* en effectuant le changement de variable $t = x^2$.
2. En déduire les solutions sur \mathbb{R}_-^* .
3. Résoudre (E) sur \mathbb{R} .

EXERCICE 53.

Résoudre sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E) : $t y' + (1 - t)y = e^{2t}$.