Semaine du 04/06 au 08/06

1 Cours

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire et norme Définition d'un produit scalaire. Orthogonalité. Espace préhilbertien réel, espace euclidien. Norme associée à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Inégalité triangulaire. Identités de polarisation.

Familles orthogonales Définition d'une famille orthogonale et d'une famille orthonormale. Une famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. Théorème de Pythagore. Expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale à l'aide du produit scalaire. Expression du produit scalaire et de la norme à l'aide des coordonnées dans une base orthonormale. Procédé d'orthnormalisation de Gram-Schmidt. Tout espace euclidien admet une base orthonormale. Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

Sous-espaces orthogonaux Sous-espaces vectoriels orthogonaux. Orthogonal d'une partie. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace vectoriel. L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie est son unique supplémentaire orthogonal. Dimension de l'orthogonal. Projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Distance à un sous-espace vectoriel. Cas d'un sous-espace vectoriel de dimension finie : expression de la distance à l'aide de la projection orthogonale.

Automorphismes orthogonaux Définition : conservation de la norme et du produit scalaire. Groupe orthogonal $\mathrm{O}(\mathsf{E})$. Automorphismes orthogonaux positifs/négatifs (ou isométries vectorielles directes/indirectes). Groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(\mathsf{E})$. Un endomorphisme est un automorphisme orthogonal (positif) **si et seulement si** il envoie une base orthonormée (directe) sur une base orthonormée (directe).

Matrices orthogonales Définition. Groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$. Matrices orthogonales positives et négatives. Groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n)$. Une famille de vecteurs est une base orthonormée (directe) **si et seulement si** sa matrice dans une base orthonormée (directe) est une matrice orthogonale (positive). Un endomorphisme est un automorphisme orthogonal (positif) **si et seulement si** sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale (positive).

Automorphismes orthogonaux du plan euclidien Description de $\mathrm{O}(2)$ et $\mathrm{SO}(2)$. Les automorphismes orthogonaux positifs du plan euclidien sont les rotations. Les automorphismes orthogonaux négatifs du plan euclidien sont les réflexions. Angles du plan euclidien orienté.

2 Méthodes à maîtriser

- Montrer qu'une application est un produit scalaire. Dans l'ordre : symétrie, linéarité par rapport à l'**une** des deux variables (la linéarité par rapport à la seconde variable s'obtient par symétrie), positivité, définition.
- Montrer qu'une famille est orthonormale.
- Orthonormaliser une famille libre par le procédé de Gram-Schmidt.
- Calculer la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel.
- Calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.

3 Démonstrations classiques

- Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire plus cas d'égalité.
- Polynômes de Legendre : la famille $((X^2-1)^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthongonale de $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P,Q)\mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$.
- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(A,B)\mapsto \operatorname{tr}({}^tAB)$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
- Soit p un projecteur orthogonal d'un espace euclidien E. Montrer que pour tout $(x,y)\in E^2$, $\langle p(x),y\rangle = \langle x,p(y)\rangle$.
- Soit E un espace préhilbertien réel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp\cap G^\perp$ et que si E est de dimension finie, $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
- Soit s une symétrie d'un espace euclidien. Montrer que s est un automorphisme orthogonal **si et seulement si** s est une symétrie orthogonale.
- Déterminer $\mathrm{O}(2)$ et $\mathrm{SO}(2)$.
- Montrer que toute matrice inversible peut s'écrire comme le produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice triangulaire supérieure à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.

- Montrer que si $(A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, les matrices $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ minimisant $\|AX - B\|$ sont les matrices vérifiant ${}^tAAX = {}^tAB$.
- Déterminants de Gram.
- Si on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$, alors pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.