Devoir à la maison n° 13

Exercice 1.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul fixé.

1. **a.** Montrer l'existence de deux polynômes F_n et G_n de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que

$$(1-X)^n F_n + X^n G_n = 1$$

On pourra par exemple développer $[(1-X)+X]^{2n-1}$ et on ne cherchera pas pour l'instant à calculer les coefficients de F_n et G_n.

b. Montrer que (F_n, G_n) est l'unique couple de polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant l'égalité de la question précédente.

2. **a.** Montrer que $F_n(1-X) = G_n(X)$.

b. Calculer $F_n(0)$, $F_n\left(\frac{1}{2}\right)$ et $F_n(1)$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra librement admettre que $F_n(1) \neq 0$.

3. **a.** Montrer que $F_n(x) \underset{x\to 0}{=} (1-x)^{-n} + o\left(x^{n-1}\right)$.

b. En déduire que $F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} X^k$.

4. **a.** Montrer que $nF_n - (1-X)F_n' = n\binom{2n-1}{n} X^{n-1}$.

b. Résoudre l'équation différentielle $ny - (1-x)y' = 0$ sur $]-\infty, 1[$.

c. Montrer qu'il existe un unique polynôme $H_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $H_n' = X^{n-1}(1-X)^{n-1}$ et $H_n(0) = 0$.

d. Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 1[$

$$F_n(x) = \frac{1 - n\binom{2n-1}{n} H_n(x)}{(1-x)^n}$$

e. En déduire que

$$(1-X)^n F_n = 1 - n\binom{2n-1}{n} H_n$$

5. **a.** Que vaut $H_n(1)$?

b. Donner le tableau de variations de H_n sur $\mathbb{R}$ suivant la parité de n (on identifie le polynôme H_n à la fonction polynomiale qui lui est associée).

c. En déduire le nombre de racines réelles de F_n suivant la parité de n.