Sommes, produits, systèmes, trigonométrie

Sommes de termes d'une suite arithmétique ou géométrique

Exercice 1.

Calculer les sommes suivantes.

1. $S_n = \sum_{k=2}^{n-1} 3k-2$
2. $T_n = \sum_{k=-1}^{n+1} 2k-1$
3. $U_n = \sum_{k=n-2}^{n+5} 2-k$
4. $V_n = \sum_{k=n}^{2n} k-1$

Exercice 2.

Calculer les sommes suivantes.

1. $S_n = \sum_{k=2}^{n-1} 3^{k-2}$
2. $T_n = \sum_{k=-1}^{n+1} 2^{k-1}$
3. $U_n = \sum_{k=n-2}^{n+5} \frac{4}{2^k}$
4. $V_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{2^{k-1}}{3^{k+2}}$

Techniques de calcul

Exercice 3.

Calculer, pour tout entier non nul n,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+1/k)$$

au moyen d'un telescopage.

Exercice 4.

Simplifier les sommes suivantes,

1. $\sum_{k=p}^{q} (u_{k+1} - u_k)$;
2. $\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$.

Exercice 5.

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
2. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
3. $\sum_{k=1}^{n} k\,.\,k!$
4. $\sum_{k=0}^{n} (k+2)2^k$
5. $\sum_{k=1}^{n} \ln(1+1/k)$
6. $\sum_{k=0}^{n} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)$

Exercice 6.

Simplifier la somme

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$$

en sommant par paquets.

Exercice 7.

Calculer la somme $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$.

Exercice 8.

Vérifier que

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} 2^k$$

et calculer une expression simple de cette somme en permutant l'ordre des sommations dans la somme double.

Exercice 9.

Simplifier la somme

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right).$$

EXERCICE 10.☆

On utilise une décomposition de la fraction en éléments simples.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall t > 1, \quad \frac{1}{t^2-1} = \frac{\alpha}{t-1} + \frac{\beta}{t+1}.$$
2. En déduire une simplification de la somme
$$v_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}.$$

EXERCICE 11.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On définit deux suites $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,\ b_n = \mathrm{B}_{n+1} - \mathrm{B}_n$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{B}_k = \mathrm{A}_n \mathrm{B}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{A}_k b_k$.
2. Application : calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k k$.

EXERCICE 12.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\mathrm{S}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k x^k$. On cherche à calculer $\mathrm{S}_n(x)$ de deux manières :

1. en introduisant $\mathrm{T}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$;
2. en calculant dans un premier temps $(x-1)\mathrm{S}_n(x)$.

Formule du binôme

EXERCICE 13.

Simplifier, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la somme
$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} 3^{n-k+1} \binom{n}{k}.$$

EXERCICE 14.

Pour tous n et p dans $\mathbb{N}$, établir que l'on a
$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$

EXERCICE 15.

Calculer les sommes suivantes

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{2n}{2k}$.

EXERCICE 16.

Soit n un entier naturel non nul.

1. Calculer $\mathrm{S}_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$ et $\mathrm{S}_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k$.
2. En déduire $\mathrm{T}_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ et $\mathrm{T}_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$.
3. Calculer $\mathrm{U}_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k}$ et $\mathrm{U}_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k+1}$. On pourra, si on le souhaite, s'inspirer des questions précédentes.
4. A l'aide des changements d'indices $\ell = n-k$ et $\ell = n-1-k$, calculer $\mathrm{V}_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{2n}{2k}$ et $\mathrm{V}_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k \binom{2n}{2k+1}$.
5. Calculer enfin $\mathrm{W}_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k \binom{2n-1}{2k}$ et $\mathrm{W}_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k \binom{2n-1}{2k+1}$.

Sommes doubles

EXERCICE 17.

Calculer les sommes suivantes :

1. $U_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$.
2. $V_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$.
3. $W_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |i-j|$.
4. $X_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} i$.
5. $Y_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$

EXERCICE 18.

En permutant l'ordre des sommations, démontrer l'égalité

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}.$$

EXERCICE 19.

Sommes doubles.

1. Calculer la somme double
$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i+j).$$
2. Calculer la somme double
$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij.$$

EXERCICE 20.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}.$$

EXERCICE 21.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} S_k.$$

Établir que

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = (n+1)S_n - n.$$

EXERCICE 22.

Vérifier que

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} 2^k$$

et calculer une expression simple de cette somme en permutant l'ordre des sommations dans la somme double.

EXERCICE 23.

On pose pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$.

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} S_j(n) = (n+1)^{p+1}$$

Produits

EXERCICE 24.

Simplifier le produit suivant :

$$P = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

EXERCICE 25.

Soient

$$V = \prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij \quad , \quad W = \prod_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} ij \; , \quad X = \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$$
$$Y = \prod_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} ij \; , \quad Z = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij.$$

Calculer V. En déduire W. Exprimer W en fonction de X et Y. Montrer, sans calcul, que $X = Y$. En déduire X puis Z.

EXERCICE 26.

Simplifier le produit

$$\prod_{k=1}^{n} 2^{1/k(k+1)}.$$

Exercice 27.

Pour tout $n \geqslant 2$, on pose

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}.$$

1. Déterminer une suite d'entiers relatifs $(v_k)_{k\geqslant 1}$ telle que

$$\forall k \geqslant 2, \quad \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{k-1}{k+1} \times \frac{v_k}{v_{k-1}}.$$

2. En déduire une simplification de u_n.

3. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 28.

Soit $\alpha \in]0,\pi[$. Simplifier le produit $\mathrm{P}_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \cos\frac{\alpha}{2^k}$. En déduire la limite de P_n.

Systèmes linéaires

Exercice 29.

Résoudre

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & + & t & = & -1 \end{array}\right.$$

Exercice 30.

Résoudre

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -3x_1 & + & 9x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & = & 4 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ 8x_1 & - & 24x_2 & + & 4x_3 & - & 12x_4 & - & 4x_5 & = & -8 \\ -x_1 & + & 3x_2 & & & - & 2x_4 & + & 7x_5 & = & 10 \end{array}\right.$$

Exercice 31.

Résoudre selon les valeurs des paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & a \\ -2x & - & 3y & + & 3z & = & b \\ x & + & y & - & 2z & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 32.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on note E_a l'ensemble de solutions du système suivant.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ ax & + & 3y & - & z & = & 3 \\ 5x & - & 8y & + & z & = & -9 \end{array}\right.$$

Pour quels $a \in \mathbb{R}$ est-ce que E_a est vide ? contient un unique élément ? contient une infinité d'éléments ?

Exercice 33.

Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 2 \\ 2x & + & 2y & - & z & = & -2 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

Exercice 34.

Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 2 \\ 2x & + & 2y & - & z & = & -2 \\ -x & - & y & + & \frac{1}{2}z & = & 4 \end{array}\right.$$

Exercice 35.

Déterminer les valeurs de a pour lesqelles le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & az & = & 2 \\ 2x & + & ay & + & 2z & = & 3. \end{array}\right.$$

1. possède une seule solution,

2. ne possède pas de solution,

3. possède une infinité de solutions.

EXERCICE 36.

Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = -4 \\ 3x + 2y - 3z = 17 \\ 5x - 3y + 8z = -10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - 3z = 2 \\ -x + 6y - 11z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - z = -2 \\ x + y + z = 2 \\ -2x + 4y - 5z = -10. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y - 5z = 3 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \\ x + y - 7z = 2 \\ 2x - 3y + 8z = 5. \end{cases}$$

Trigonométrie

EXERCICE 37.

Simplifier le produit $p = \sin\left(\frac{\pi}{14}\right)\sin\left(\frac{3}{14}\pi\right)\sin\left(\frac{5}{14}\pi\right)$ en le multipliant par $\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$.

EXERCICE 38.★

On cherche à calculer $\cos(\pi/5)$ et $\sin(\pi/5)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(3x) = \sin(2x)$.
2. En déduire les valeurs de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ pour $x = \pi/5$.

EXERCICE 39.

Calculer

$$\alpha = \frac{1}{\sin(\pi/18)} - \frac{\sqrt{3}}{\cos(\pi/18)}.$$

EXERCICE 40.

On pose

$$p = \cos(\pi/7)\cos(2\pi/7)\cos(4\pi/7),$$

et

$$s = \cos(2\pi/7) + \cos(4\pi/7) + \cos(6\pi/7).$$

1. Simplifier $p\sin(\pi/7)$. En déduire la valeur de p.
2. Calculer s à l'aide de la première question.

EXERCICE 41.

Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

1. $\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \tan(x/2)$;
2. $\sin(x - 2\pi/3) + \sin(x) + \sin(x + 2\pi/3) = 0$;
3. $\tan(\pi/4 + x) + \tan(\pi/4 - x) = \dfrac{2}{\cos(2x)}$;
4. $\dfrac{1}{\tan(x)} - \tan(x) = \dfrac{2}{\tan(2x)}$.

EXERCICE 42.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin(x) + \sin(5x) = \sqrt{3}\cos(2x)$;
2. $\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x)$;
3. $2\sin^2(x) + \sin^2(2x) = 2$;
4. $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$;
5. $\sin(2x) + \sin(x) = 0$;
6. $12\cos^2(x) - 8\sin^2(x) = 2$.

EXERCICE 43.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sin 5x \leqslant \sin x$.