Devoir surveillé n°2 : corrigé

Solution 1.

1. Puisque ω est une racine cinquième de l'unité, $\omega^4 = \omega^{-1}$. On en déduit que $A = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ via une relation d'Euler. De même, $\omega^3 = \omega^{-2}$ donc $B = 2\cos\frac{4\pi}{5}$.
2. Tout d'abord
$$A + B = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 - 1 = \frac{\omega^5 - 1}{\omega - 1} - 1 = -1$$
Puis
$$AB = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = -1$$
A et B sont solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. Or ces solutions sont $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
Puisque $\frac{2\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\frac{2\pi}{5} \geqslant 0$ et donc $A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $B = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
3. On en déduit donc $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.
Il s'ensuit $\cos\frac{3\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Solution 2.

1.
   a. On utilise la méthode de l'arc-moitié.
$$\frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1} = \frac{2ie^{i\theta}\sin\theta}{2e^{i\theta}\cos\theta} = i\tan\theta$$
   b. Remarquons que $-i$ n'est pas solution de (E) et que pour $z \neq -i$, $1 - iz \neq 0$ de sorte que
$$\begin{aligned}
(1+iz)^5 = (1-iz)^5 &\iff \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5 = 1\\
&\iff \frac{1+iz}{1-iz} \in \mathbb{U}_5\\
&\iff \exists k \in \{-2,-1,0,1,2\},\ \frac{1+iz}{1-iz} = e^{\frac{2ik\pi}{5}}\\
&\iff \exists k \in \{-2,-1,0,1,2\},\ 1+iz = e^{\frac{2ik\pi}{5}}(1-iz)\\
&\iff \exists k \in \{-2,-1,0,1,2\},\ z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{5}} - 1}{i(e^{\frac{2ik\pi}{5}} + 1)} \qquad \text{car } \forall k \in \{-2,-1,0,1,2\},\ e^{\frac{2ik\pi}{5}} \neq -1\\
&\iff \exists k \in \{-2,-1,0,1,2\},\ z = \tan\frac{k\pi}{5} \qquad \text{d'après la question } \mathbf{1.a}
\end{aligned}$$
   Les solutions de (E) sont donc les *réels* $-\tan\frac{2\pi}{5}$, $-\tan\frac{\pi}{5}$, 0, $\tan\frac{\pi}{5}$ et $\tan\frac{2\pi}{5}$.

   c. Tout d'abord, pour $z \in \mathbb{C}$,
$$(1+iz)^5 = \binom{5}{0} + \binom{5}{1}iz + \binom{5}{2}(iz)^2 + \binom{5}{3}(iz)^3 + \binom{5}{4}(iz)^4 + \binom{5}{5}(iz)^5 = 1 + 5iz - 10z^2 - 10iz^3 + 5z^4 + iz^5$$
   On en déduit que
$$(1-iz)^5 = 1 - 5iz - 10z^2 + 10iz^3 + 5z^4 - iz^5$$
   Ainsi
$$\begin{aligned}
(1+iz)^5 = (1-iz)^5 &\iff 10iz - 20iz^3 + 2iz^5 = 0\\
&\iff z(5 - 10z^2 + z^4) = 0\\
&\iff z = 0 \text{ ou } z^4 - 10z^2 + 5 = 0\\
&\iff z = 0 \text{ ou } z^2 = 5 + 2\sqrt{5} \text{ ou } z^2 = 5 - 2\sqrt{5}\\
&\iff z = 0 \text{ ou } z = \sqrt{5+2\sqrt{5}} \text{ ou } z = -\sqrt{5+2\sqrt{5}} \text{ ou } z = \sqrt{5-2\sqrt{5}} \text{ ou } z = -\sqrt{5-2\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

d. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$. Ainsi la fonction tan est-elle croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Or

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{2\pi}{5} < -\frac{\pi}{5} < 0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$$

et

$$-\sqrt{5+2\sqrt{5}} < -\sqrt{5-2\sqrt{5}} < 0 < \sqrt{5-2\sqrt{5}} < \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

de sorte qu'en particulier, $\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

2. **a.**

$$\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} = \frac{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$$

b. Il s'agit d'un problème d'extraction de racines cinquièmes. Les solutions sont donc les complexes $e^{\frac{2i(\alpha+k\pi)}{5}}$ pour $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

c. L'équation (E_α) équivaut à l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5 = e^{2i\alpha}$. D'après la question précédente, les solutions de (E_α) sont les complexes z tels qu'il existe $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ tel que $\frac{1+iz}{1-iz} = e^{\frac{i(\alpha+2k\pi)}{5}}$. Or, pour $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, en posant $\alpha_k = \frac{\alpha+k\pi}{5}$

$$\begin{aligned}
& & \frac{1+iz}{1-iz} &= e^{2i\alpha_k} \\
&\iff & z &= \frac{e^{2i\alpha_k}-1}{i(e^{2i\alpha_k}+1)} \\
&\iff & z &= \tan\alpha_k \qquad \text{d'après la question } \textbf{1.a}
\end{aligned}$$

Les solutions de (E_α) sont donc les réels $\tan\alpha_k$ pour $k \in \{-2, 0, 1, 2\}$, autrement dit les réels $\tan\left(\frac{\alpha-2\pi}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha-\pi}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha+\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{\alpha+2\pi}{5}\right)$.

Solution 3.

1. Tout d'abord

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$$

En remplaçant z_2 par $-z_2$, on obtient également

$$|z_1-z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2$$

Ceci permet d'obtenir le résultat voulu.

2.

$$\begin{aligned}
\left(\left|\frac{z_1+z_2}{2} - u\right| + \left|\frac{z_1+z_2}{2} + u\right|\right)^2 &= \left|\frac{z_1+z_2}{2} - u\right|^2 + \left|\frac{z_1+z_2}{2} + u\right|^2 + 2\left|\frac{z_1+z_2}{2} - u\right|\left|\frac{z_1+z_2}{2} + u\right| \\
&= 2\left|\frac{z_1+z_2}{2}\right|^2 + 2|u|^2 + 2\left|\left(\frac{z_1+z_2}{2} - u\right)\left(\frac{z_1+z_2}{2} - u\right)\right| \qquad \text{d'après la question } \textbf{1} \\
&= \frac{1}{2}|z_1+z_2|^2 + 2|u^2| + 2\left|\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)^2 - u^2\right| \\
&= \frac{1}{2}|z_1+z_2|^2 + 2|z_1z_2| + 2\left|\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)^2 - z_1z_2\right| \qquad \text{car } u^2 = z_1z_2 \\
&= \frac{1}{2}|z_1+z_2|^2 + 2|z_1||z_2| + \frac{1}{2}|(z_1+z_2)^2 - 2z_1z_2| \\
&= \frac{1}{2}|z_1+z_2|^2 + 2|z_1||z_2| + \frac{1}{2}|(z_1-z_2)^2| \\
&= \frac{1}{2}\left(|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2\right) + 2|z_1||z_2| \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \qquad \text{d'après la question } \textbf{1} \\
&= (|z_1|+|z_2|)^2
\end{aligned}$$

Puisque $\left|\frac{z_1+z_2}{2}-u\right|+\left|\frac{z_1+z_2}{2}+u\right|$ et $|z_1|+|z_2|$ sont des réels positifs, ils sont égaux.

3. Puisque a et b sont racines de l'équation $z^2+2mz+1=0$, $a+b=-2m$ et $ab=1$. En particulier, 1 est une racine carrée de ab. D'après la question **2**,

$$|a|+|b|=\left|\frac{a+b}{2}-1\right|+\left|\frac{a+b}{2}+1\right|=|-m-1|+|-m+1|=|m+1|+|m-1|$$

Solution 4.

1.

$$\begin{aligned}\cos(3\theta)&=\cos(2\theta+\theta)\\&=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta\\&=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta\\&=2\cos^3\theta-\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta\\&=4\cos^3\theta-3\cos\theta\end{aligned}$$

2. D'après l'énoncé, on a $z=e^{i\theta}$. De plus,

$$\begin{aligned}|z^3-z+2|^2&=\left(z^3-z+2\right)\overline{(z^3-z+2)}\\&=|z|^6+|z|^2+4-2(z+\overline{z})-|z|^2(z^2+\overline{z}^2)+2(z^3+\overline{z}^3)\\&=6-4\cos\theta-2\cos(2\theta)+4\cos(3\theta)\qquad\text{car } |z|=1 \text{ et en vertu d'une relation d'Euler}\\&=6-4\cos\theta-2(2\cos^2\theta-1)+4(4\cos^3\theta-3\cos\theta)\\&=8-16\cos\theta-4\cos^2\theta+16\cos^3\theta\\&=4f(\cos\theta)\end{aligned}$$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=12x^2-2x-4=2(2x+1)(3x-2)$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{13}{4}$	↘	$\frac{2}{27}$	↗	$+\infty$

4. Puisque $\mathbb{U}=\{e^{i\theta},\theta\in\mathbb{R}\}$, on a en vertu de la première question

$$\max_{z\in\mathbb{U}}\varphi(z)=\max_{\theta\in\mathbb{R}}2\sqrt{f(\cos\theta)}$$

Mais puisque $\operatorname{Im}\cos=[-1,1]$,

$$\max_{z\in\mathbb{U}}\varphi(z)=\max_{x\in[-1,1]}2\sqrt{f(x)}$$

La question précédente nous renseigne sur les variations de f sur $[-1,1]$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\frac{2}{27}$	$\nearrow$	1

On peut en déduire que

$$\max_{z\in\mathbb{U}} \varphi(z) = 2\sqrt{\frac{13}{4}} = \sqrt{13}$$

Ce maximum est atteint en un élément de $\mathbb{U}$ dont l'argument θ est tel que $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ i.e. tel que $\theta \equiv \pm\frac{2\pi}{3}[2\pi]$. On en déduit donc que le maximum de φ est atteint en j et j^2.

Solution 5.

1. On trouve $z_0 = 1$, $z_1 = 1-i$, $z_2 = -2i$ et $z_3 = -2-2i$.
2. On a $z_{n+1} = x_n + iy_n + y_n - ix_n = x_n + iy_n - i(x_n + iy_n) = (1-i)z_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi (z_n) est une suite géometrique de raison $1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$.
3. Comme (z_n) est une suite géométrique de premier terme $z_0 = 1$ et de raison $1-i$, on a $A_n = \dfrac{(1-i)^{n+1}-1}{1-i-1} = i(1-i)^{n+1} - i$.
   On a $B_n = \mathrm{Re}(A_n)$ et $C_n = \mathrm{Im}(A_n)$ donc

$$B_n = \mathrm{Re}\left(i(1-i)^{n+1} - i\right) = -\mathrm{Im}\left((1-i)^{n+1}\right) = -\mathrm{Im}\left(\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^{-\frac{(n+1)i\pi}{4}}\right) = 2^{\frac{n+1}{2}} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)$$
$$C_n = \mathrm{Im}\left(i(1-i)^{n+1} - i\right) = \mathrm{Re}\left((1-i)^{n+1}\right) - 1 = \mathrm{Re}\left(\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^{-\frac{(n+1)i\pi}{4}}\right) - 1 = 2^{\frac{n+1}{2}} \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right) - 1$$

Solution 6.

1. Supposons $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. On remarque que $D_n(\theta)$ est la somme de $2n+1$ termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta} \neq 1$.

$$\begin{aligned}
D_n(\theta) &= e^{-ni\theta} \cdot \frac{e^{(2n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \\
&= e^{-in\theta} \cdot \frac{e^{\frac{(2n+1)i\theta}{2}}\left(e^{\frac{(2n+1)i\theta}{2}} - e^{-\frac{(2n+1)i\theta}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} \\
&= \frac{e^{\frac{(2n+1)i\theta}{2}} - e^{-\frac{(2n+1)i\theta}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \\
&= \frac{2i\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Si $\theta \equiv 0[2\pi]$, on a évidemment $D_n(\theta) = 2n+1$.

2. Supposons $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. Posons $S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{\left(k+\frac{1}{2}\right)i\theta}$. Alors

$$\begin{aligned}
S_n(\theta) &= e^{\frac{i\theta}{2}} \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} \\
&= e^{\frac{i\theta}{2}} \cdot \frac{e^{(n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \\
&= e^{\frac{i\theta}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{(n+1)i\theta}{2}} \left(e^{\frac{(n+1)i\theta}{2}} - e^{-\frac{(n+1)i\theta}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)} \\
&= e^{\frac{(n+1)i\theta}{2}} \cdot \frac{2i \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= e^{\frac{(n+1)i\theta}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_n(\theta) &= \sum_{k=0}^{n} D_k(\theta) \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta\right) \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \operatorname{Im}(S_n(\theta)) \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{(n+1)i\theta}{2}}\right) \\
&= \frac{\sin^2\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Lorsque $\theta \equiv 0[2\pi]$,

$$F_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$$