Devoir à la maison n°07

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 **1.a** Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}_n$. Tout d'abord, $t \mapsto \mathrm{P}(t)e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, par croissance comparée, $t^2\mathrm{P}(t)e^t \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e. $\mathrm{P}(t)e^t \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Comme l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positive, l'intégrale $\int_{-\infty}^{x} \mathrm{P}(t)e^t \,\mathrm{d}t$ converge quelque soit le réel x. Ainsi l'application $\mathrm{L}(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
L'application L est donc bien définie sur E_n.

1.b Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{L}(1)(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^t \,\mathrm{d}t = e^{-x}\left[e^t\right]_{t=-\infty}^{t=x} = e^{-x}e^x = 1$$

Ainsi $\mathrm{L}(1) = 1$.

1.c Soient $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$. Les applications $t \mapsto t^{k+1}$ et $t \mapsto e^t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{t\to-\infty} t^{k+1}e^t = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}(\mathrm{X}^{k+1})(x) &= e^{-x}\int_{-\infty}^{x} t^{k+1}e^t \,\mathrm{d}t \\
&= e^{-x}\left(\left[t^{k+1}e^t\right]_{t=-\infty}^{x} - \int_{-\infty} (k+1)t^k e^t \,\mathrm{d}t\right) \\
&= e^{-x}\left(x^{k+1}e^x - (k+1)\int_{-\infty}^{x} t^k e^t \,\mathrm{d}t\right) \\
&= x^{k+1} - (k+1)\mathrm{L}(\mathrm{X}^k)(x)
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{L}(\mathrm{X}^{k+1}) = \mathrm{X}^{k+1} - (k+1)\mathrm{L}(\mathrm{X}^k)$.

1.d On a bien $\mathrm{L}(1) = 1 \in \mathrm{E}_n$ et si $\mathrm{L}(\mathrm{X}^k) \in \mathrm{E}_n$ pour un certain $k \in [\![0, n-1]\!]$, alors $\mathrm{L}(\mathrm{X}^{k+1}) = \mathrm{X}^{k+1} - (k+1)\mathrm{L}(\mathrm{X}^k) \in \mathrm{E}_n$. Par récurrence, $\mathrm{L}(\mathrm{X}^k) \in \mathrm{E}_n$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. De plus, L est clairement linéaire et $(\mathrm{X}^k)_{0\le k\le n}$ est une base de E_n donc L est bien un endomorphisme de E_n.

2 **2.a** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \mathrm{L}(f)(x) = e^{-x}\int_{-\infty} f(t)e^t \,\mathrm{d}t$$

De plus, $x \mapsto e^{-x}$ est de dérivable sur $\mathbb{R}$, de même que $x \mapsto \int_{-\infty} f(t)e^t \,\mathrm{d}t$. La dérivée de cette seconde fonction est $x \mapsto f(x)e^x$ donc g est dérivable comme produit de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -e^{-x}\int_{-\infty} f(t)e^t \,\mathrm{d}t + e^{-x}\cdot e^x f(x) = -\mathrm{L}(f)(x) + f(x) = -g(x) + f(x)$$

g est donc bien solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y = f$.

2.b Si $f \in \operatorname{Ker} \mathrm{L}$, alors $g = \mathrm{L}(f) = 0$ et, d'après la question précédente, $f = g' + g = 0$. On en déduit que $\operatorname{Ker}(\mathrm{L}) = \{0\}$. L'endomorphisme L est donc injectif. Puisque E_n est de dimension finie, L est un automorphisme de E_n.

3 **3.a** Comme $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, 0 n'est pas valeur propre de E_n.

3.b D'après une question précédente, $g = \mathrm{L}(f) = \lambda f$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = f$. Ainsi $\lambda f' + \lambda f = f$ ou encore $\lambda f' + (\lambda - 1)f = 0$. f est bien solution de l'équation différentielle $\lambda y' + (1 - \lambda)y = 0$.

3.c D'après le cours, les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ sont les fonctions $x \mapsto \mathrm{C}e^{\frac{(1-\lambda)x}{\lambda}}$ avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.

3.d Soit P une éventuelle solution polynomiale de $(\mathcal{E})$. En notant d son degré, on a donc $\mathrm{P}^{(d+1)} = 0$. Mais la question précédente montre qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = \mathrm{C}e^{\frac{(1-\lambda)x}{\lambda}}$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}^{(d+1)}(x) = \mathrm{C}\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^{d+1} e^{\frac{(1-\lambda)x}{\lambda}}$$

Cette fonction n'est pas nulle à moins que $\lambda = 1$ ou $\mathrm{C} = 0$. On en déduit que

- si $\lambda \neq 1$, l'unique solution polynomiale de $(\mathcal{E})$ est la fonction nulle ;
- si $\lambda = 1$, les solutions polynomiales de $(\mathcal{E})$ sont les fonctions constantes.

3.e D'après ce qui précède, la seule valeur propre de L est 1 et le sous-espace propre associé est l'ensemble des fonctions constantes i.e. $\mathbb{R}_0[\mathrm{X}] = \mathrm{vect}(1)$.

3.f Comme 1 est la seule valeur propre de L, si L était diagonalisable, on aurait $\mathrm{L} = \mathrm{Id}$. Ceci n'est pas le cas puisque, par exemple, $\mathrm{L}(\mathrm{X}) = \mathrm{X} - \mathrm{L}(1) = \mathrm{X} - 1$. Par conséquent, L n'est pas diagonalisable.

4 **4.a** Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}_n$. On a vu que $\mathrm{L}(\mathrm{P})$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = \mathrm{P}$ donc $\mathrm{L}(\mathrm{P})' + \mathrm{L}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$ ou encore $(\mathrm{D} + \mathrm{Id}) \circ \mathrm{L}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$. On en déduit que $(d + \mathrm{Id}) \circ \mathrm{L} = \mathrm{Id}$. Comme L est un automorphisme de E_n, $\mathrm{D} + \mathrm{Id} = \mathrm{L}^{-1}$.

4.b La matrice de L^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ est donc la matrice de $\mathrm{D} + \mathrm{Id}$ dans la base $\mathcal{B}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $(\mathrm{D} + \mathrm{Id})(\mathrm{X}^k) = \mathrm{X}^k + k\mathrm{X}^{k-1}$. Ainsi

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.c On en déduit que $\chi_{\mathrm{L}^{-1}} = (\mathrm{X} - 1)^{n+1}$. Ainsi 1 est la seule valeur propre de L^{-1}. Soit λ une valeur propre de L. Il existe donc $\mathrm{P} \in \mathrm{E}_n$ non nul tel que $\mathrm{L}(\mathrm{P}) = \lambda\mathrm{P}$. Ainsi $\mathrm{P} = \lambda\mathrm{L}^{-1}(\mathrm{P})$. On a déjà vu plus haut que $\lambda \neq 0$ donc $\mathrm{L}^{-1}(\mathrm{P}) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{P}$. Donc $1/\lambda$ est une valeur propre de L^{-1} et donc $1/\lambda = 1$ i.e. $\lambda = 1$.