

## Rappels et compléments d'algèbre linéaire

### Exercice 1

Soient A et B deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  semblables sur  $\mathbb{C}$ . Montrer que A et B sont semblables sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 2

#### Rang du complément de Schur

Soit  $M = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$  où  $A \in GL_p(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ . On pose  $S = D - CA^{-1}B$ . Montrer que  $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) + \text{rg}(S)$ .

### Exercice 3 ★★★

#### Mines P' 1995

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de E nilpotent d'indice  $n$ . On pose

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ g &\longmapsto f \circ g - g \circ f \end{aligned}$$

1. Montrer que  $\Phi^p(g) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} f^{p-k} \circ g \circ f^k$ . En déduire que  $\Phi$  est nilpotent.
2. Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer qu'il existe  $b \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $a \circ b \circ a = a$ . En déduire l'indice de nilpotence de  $\Phi$ .

### Exercice 4 ★★

Soient  $p_1, \dots, p_n$  des projecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que  $p_1 + \dots + p_n = \text{Id}_E$ .

Montrer que  $\text{Im } p_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } p_n = E$ .

### Exercice 5

Soient E l'ensemble des suites réelles constantes, F l'ensemble des suites réelles  $(u_n)$  vérifiant  $u_{n+1} + u_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , G l'ensemble des suites réelles  $(u_n)$  vérifiant  $u_{n+2} + u_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et enfin H l'ensemble des suites réelles périodiques de période 4.

1. Montrer que E, F, G, H sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
2. Montrer que E, F, G sont inclus dans H.
3. Montrer que  $E \oplus F \oplus G = H$ .

### Exercice 6 ★

Pour  $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ , on note  $A \otimes B$  la matrice de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  définie par blocs de la manière suivante :  $A \otimes B = \left( \begin{array}{c|c} a_{11}B & a_{12}B \\ \hline a_{21}B & a_{22}B \end{array} \right)$ .

1. Soit  $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^4$ . Montrer que  $(A \otimes B).(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$ .
2. Calculer  $\det(I_2 \otimes B)$ ,  $\det(A \otimes I_2)$  et  $\det(A \otimes B)$  en fonction de  $\det A$  et  $\det B$ .
3. A quelle condition nécessaire et suffisante  $A \otimes B$  est-elle inversible ? Quel est alors son inverse ?

### Exercice 7 ★

#### Déterminant du complément de Schur

Soit  $M = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$  où  $A \in GL_p(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ . On pose  $S = D - CA^{-1}B$ . Montrer que  $\det(M) = \det(A) \det(S)$ .

### Exercice 8 ★

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On pose  $m_A : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto AM \end{cases}$ .

1. Justifier que  $m_A$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que  $\det m_A = (\det A)^2$ .
3. Généraliser en dimension quelconque.

## Eléments propres

### Exercice 9 ★★

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que si  $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre de  $g \circ f$ , alors  $\lambda$  est également valeur propre de  $f \circ g$ .

### Exercice 10 ★★★

Soient  $u, v$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel complexe  $E$  de dimension finie supérieure à 1. On suppose qu'il existe  $a, b$  complexes tels que  $u \circ v = au + bv$ . Montrer que  $u$  et  $v$  ont un vecteur propre commun.

### Exercice 11 ★★

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) de dimension finie  $E$ . Montrer que  $u \circ v$  et  $v \circ u$  ont les mêmes valeurs propres.

### Exercice 12 ★★★

### Théorème de Gerschgorin

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  dont les coefficients sont notés  $a_{i,j}$ . Pour  $1 \leq i \leq n$ , on pose  $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$  et on note  $D_i$  le disque de centre  $a_{i,i}$  et de rayon  $R_i$ . Montrer que toute valeur propre de  $A$  appartient à l'un au moins des disques  $D_i$ .

### Exercice 13 ★★

Soit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$  défini par  $\varphi(P) = XP'$  pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Déterminer les éléments propres de  $\varphi$ .

### Exercice 14 ★★★

Soit  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Pour  $f \in E$ , on définit l'application  $T(f)$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = e^{-x} \int_0^x f(t) e^t dt$$

1. Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Déterminer les valeurs propres de  $T$  et les sous-espaces propres associés.

### Exercice 15 ★★★

Soit  $E = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), f(0) = 0\}$ .

1. Soit  $f \in E$ . Montrer que  $\int_0^x \frac{f(t)}{t} dt$  est définie pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ .
2. Montrer que l'application  $\Phi$  qui à  $f \in E$  associe la fonction  $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt$  est un endomorphisme de  $E$ .
3. Déterminer les valeurs propres de  $\Phi$  et les sous-espaces propres associés.

### Exercice 16 ★★★

Soit  $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ .

1. Soit  $f \in E$ . Montrer que l'application  $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$  est prolongeable en 0 en une application continue sur  $\mathbb{R}_+$ . On notera ce prolongement  $T(f)$ .
2. Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .
3. Déterminer les valeurs propres de  $T$  et les sous-espaces propres associés.

### Exercice 17 ★★★

### Matrices stochastiques

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A_{ij} \geq 0$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  et  $\sum_{j=1}^n A_{i,j} = 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

1. Montrer que  $1 \in \text{Sp}(A)$ .
2. Montrer que  $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A), |\lambda| \leq 1$ .

**Exercice 18 ★★★**

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . A toute application  $f \in E$ , on associe l'application

$$\Phi(f) : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$$

1. Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Déterminer les éléments propres de  $\Phi$ .

**Exercice 19 ★★****Mines-Ponts MP 2016**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension finie. On considère des vecteurs unitaires  $a$  et  $b$  de  $E$  formant une famille libre.

Réduire l'endomorphisme

$$\phi : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto \langle a | x \rangle a + \langle b | x \rangle b \end{cases}$$

**Exercice 20 ★★★**

Montrer que l'application  $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto X(X+1)P' - nXP$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  et déterminer ses éléments propres.

**Exercice 21 ★★****Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Soit l'endomorphisme

$$u : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto M + \text{tr}(M)I_n \end{cases}$$

Déterminer les valeurs propres de  $u$ , ainsi que les espaces propres associés.

**Exercice 22 ★★★****Mines-Ponts MP 2022**

Soit  $p \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$ . Posons  $q = 1 - p$  et  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On pose pour  $f \in E$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u(f)(x) = f(px + q)$ .

1. Montrer que  $u$  est un automorphisme de  $E$ .
2. Montrer que  $\text{Sp}(u) \subset ]-1, 1[ \setminus \{0\}$ .
3. Montrer que si  $f$  est un vecteur propre de  $u$ , alors il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^{(k)} = 0$ .
4. Déterminer les éléments propres de  $u$ .

**Polynôme caractéristique****Exercice 23 ★★****Matrice compagnon**

Soient  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ . Déterminer le polynôme

caractéristique de  $A$ .

**Exercice 24 ★★**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1. Montrer que  $\chi_A = \chi_{A^\top}$ .
2. Montrer que  $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(A^\top)$ .
3. Montrer que pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ ,  $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(A^\top)$ .

**Exercice 25 ★★****E3A MP 2015 Maths 1**

A toute suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de réels et toute suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de réels non nuls, on associe la suite de matrices  $(A_n)$  où  $A_n$  est la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  suivante

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

On note  $P_n(X) = \det(XI_n - A_n)$  le polynôme caractéristique de  $A_n$ .

1. Déterminer une relation de récurrence entre les polynômes  $P_{n+1}(X)$ ,  $P_n(X)$  et  $P_{n-1}(X)$ .
2.
  - a. Justifier que la matrice  $A_n$  est diagonalisable.
  - b. Soit  $\lambda$  une valeur propre de la matrice  $A_n$ . Calculer le déterminant de la matrice extraite de  $\lambda I_n - A_n$  en supprimant sa première colonne et sa dernière ligne.
  - c. En déduire le rang de la matrice  $\lambda I_n - A_n$  pour  $\lambda$  valeur propre de la matrice  $A_n$ .
  - d. En déduire que le polynôme caractéristique  $P_n(X)$  de la matrice  $A_n$  admet  $n$  racines réelles distinctes.

3. On appelle  $\Delta_n(x)$  le déterminant de la matrice  $\begin{pmatrix} P'_{n+1}(x) & P'_n(x) \\ P_{n+1}(x) & P_n(x) \end{pmatrix}$ .

- a. Soit  $n \geq 2$ . Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Delta_n(x) = P_n^2(x) + b_n^2 \Delta_{n-1}(x)$$

- b. Montrer que  $\Delta_1(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . En déduire le signe de  $\Delta_n(x)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
4. Montrer que l'application  $x \in \mathbb{R} \mapsto P_{n+1}(x)$  s'annule une unique fois entre deux zéros consécutifs de  $P_n$ .

On pourra considérer l'application  $x \mapsto \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$ .

**Exercice 26 ★★★**

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) de dimension finie  $E$ .

1. On suppose  $u$  inversible. Montrer que  $u \circ v$  et  $v \circ u$  ont même polynôme caractéristique.
2. Traiter le cas où  $u$  est non inversible.

**Exercice 27****Algorithme de Faddeev**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note  $P$  le polynôme caractéristique de  $A$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on pose  $B(\lambda) = \text{com}(\lambda I_n - A)^\top$ .

1. Montrer qu'il existe des matrices  $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que :

$$B(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-1-k} B_k$$

2. Montrer que  $P'(\lambda) = \text{tr}(B(\lambda))$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ .
3. On pose  $P = X^n - \sum_{k=1}^n p_k X^{n-k}$  et  $B_n = 0$ . Montrer que pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\begin{cases} p_k = \frac{1}{k} \text{tr}(AB_{k-1}) \\ B_k = AB_{k-1} - p_k I_n \end{cases}$$

et préciser  $B_0$ .

4. Montrer que, si  $A$  est inversible,  $A^{-1} = \frac{1}{p_n} B_{n-1}$ .
5. Ecrire un algorithme en PYTHON calculant le polynôme caractéristique d'une matrice donnée et un autre calculant son inverse grâce aux questions précédentes.

**Exercice 28 ★★★**

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On note  $E_p$  l'ensemble des «suites» de  $\mathbb{C}^\mathbb{Z}$   $p$ -périodiques. On note  $D_p$  l'endomorphisme de  $E_p$  qui à une suite  $(u_n)$  associe la suite  $(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1})$ . Déterminer le coefficient de  $X$  dans le polynôme caractéristique de  $D_p$ .

**Exercice 29 ★★★****Mines-Ponts MP 2018**

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ .

On suppose qu'il existe  $h \in \mathcal{L}(E)$  de rang  $r \geq 1$  tel que  $h \circ g = f \circ h$ . Montrer que  $\chi_f$  et  $\chi_g$  ont un facteur commun de degré  $r$ .

La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 30 ★★★**

Soient  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ . On pose

$$M = \left( \begin{array}{c|c} \lambda I_n & -A \\ \hline -B & I_p \end{array} \right)$$

En multipliant  $M$  à gauche et à droite par des matrices bien choisies, montrer que

$$\lambda^p \chi_{AB}(\lambda) = \lambda^n \chi_{BA}(\lambda)$$

En déduire que  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$  si  $n = p$ .

**Exercice 31 ★★****CCP 2015**

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $2n + 1$  et de base  $(e_1, \dots, e_{2n+1})$  ainsi que  $u$  l'endomorphisme de  $E$  tel que  $u(e_1) = e_1 + e_{2n+1}$  et  $u(e_i) = e_{i-1} + e_i$  pour tout  $i \in \llbracket 2, 2n + 1 \rrbracket$ .

1. Déterminer le polynôme caractéristique de  $u$ .
2. Montrer que  $u$  est inversible et déterminer un polynôme  $P$  tel que  $u^{-1} = P(u)$ .
3. Déterminer les valeurs propres complexes de  $u$ .
4. En déduire  $\prod_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ .

**Diagonalisation****Exercice 32**

Calculer la trace de l'endomorphisme  $\Phi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto M^T \end{cases}$ .

**Exercice 33 ★★★**

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie. On suppose  $u$  diagonalisable.

Montrer que  $u$  et  $v$  commutent si et seulement si tout sous-espace propre de  $u$  est stable par  $v$ .

**Exercice 34 ★★★**

Soit  $u$  un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Montrer que le commutant de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  de dimension  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)^2$ .

**Exercice 35 ★★****Calcul d'un commutant**

On pose  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ . Déterminer le commutant de  $A$ .

**Exercice 36 ★★★**

Soient  $u$  un endomorphisme diagonalisable d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

1. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On pose  $G = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} F \cap E_\lambda(u)$ . Montrer que  $G$  est stable par  $u$ .
2. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . Montrer que  $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} F \cap E_\lambda(u)$ .
3. Montrer que les sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par  $u$  sont exactement les sous-espaces vectoriels de la forme  $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} F_\lambda$  où pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ ,  $F_\lambda$  est un sous-espace vectoriel de  $E_\lambda(u)$ .

**Exercice 37 ★★**
**Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

On pose  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. Étudier la diagonalisabilité de  $A$ , et la diagonaliser si possible.
2. Résoudre l'équation  $M^2 = A$  pour  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 38 ★**
**Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

On pose :  $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .  $A$  et  $B$  sont-elles semblables ?

**Exercice 39 ★★**
**Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

On considère la matrice :  $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $A$  s'écrit  $PDP^{-1}$  avec  $P \in GL_2(\mathbb{R})$  et  $D$  matrice diagonale de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. On cherche à résoudre l'équation  $X^2 = A$ .  
Montrer que si  $X$  est solution de cette équation alors  $P^{-1}XP$  commute avec  $D$  puis qu'elle est diagonale.  
Résoudre l'équation.

**Exercice 40**
**Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2021**

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  et  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Exprimer  $A$  en fonction de  $J$  et  $J^2$ .
2. Calculer le polynôme caractéristique de  $J$ . La matrice  $J$  est-elle diagonalisable ?
3. Diagonaliser  $A$ .

**Exercice 41 ★★**

Soient  $a \in \mathbb{K}$  et  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}_n[X]$  défini par  $u(P) = (X - a)P'$  pour tout  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ . Déterminer les éléments propres de  $u$ .  $u$  est-il diagonalisable ?

**Exercice 42 ★★**

Soit  $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X + 1)P(X) - XP(X + 1)$ .

1. Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Déterminer les éléments propres de  $\Phi$ .  $\Phi$  est-il diagonalisable ?

**Exercice 43 ★**
**CCP 2018**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avec  $n \geq 2$ , telle que  $\text{rg}(A) = 1$ .  
Montrer que  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{tr}(A) \neq 0$ .

**Exercice 44 ★★**
**CCINP (ou CCP) MP 2021**

On considère  $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto M + 2M^T \end{cases}$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme.
2. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $f$ .
3. L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?
4. Calculer  $\text{tr}(f)$  et  $\det(f)$ .

### Exercice 45 ★

Etudier la diagonalisabilité sur  $\mathbb{R}$  des matrices réelles suivantes :

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

2.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

3.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

4.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 46

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2018

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice diagonalisable et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix}$ . Montrer que  $B$  est diagonalisable.

### Exercice 47 ★★

CCINP (ou CCP) PSI 2021

$$\text{On définit : } \forall m \in \mathbb{R}, A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}.$$

1. Donner les valeurs propres et sous-espaces propres de  $A_m$ .
2. Donner les valeurs de  $m$  pour lesquelles  $A_m$  soit diagonalisable. Même question pour l'inversibilité.
3. Si  $A_m$  est diagonalisable, déterminer une matrice inversible  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

### Exercice 48 ★★★

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes diagonalisables d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$  tels que  $u \circ v = v \circ u$ . Montrer que  $u$  et  $v$  diagonalisent dans une base commune.

### Exercice 49 ★★★

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Montrer que  $u$  est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de  $E$  admet un supplémentaire dans  $E$  stable par  $u$ .

### Exercice 50 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2019

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On note  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  et on note  $A$  et  $B$  leurs matrices dans une même base de  $E$ .

1. On suppose  $f$  et  $g$  bijectifs dans cette question.
  - a. Montrer que  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ .
  - b. Montrer que si  $f \circ g$  est diagonalisable, alors  $g \circ f$  l'est aussi.
2.
  - a. Montrer que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  ont le même spectre.
  - b. Donner un exemple de matrices telles que  $AB$  soit diagonalisable mais pas  $BA$ .

### Exercice 51 ★★★

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ . On suppose que  $AB$  est diagonalisable et inversible. Montrer que  $BA$  est diagonalisable.

### Exercice 52 ★★★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2019

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$  vérifiant  $f \circ g = f + g$ .

1. Montrer que  $\text{Ker } f = \text{Ker } g$  et  $\text{Im } f = \text{Im } g$ .
2. On suppose  $g$  diagonalisable. Montrer que  $f$  et  $f \circ g$  sont aussi diagonalisables et que  $\text{Sp}(f \circ g) \subset \mathbb{R} \setminus ]0, 4[$ .

## Trigonalisation

### Exercice 53 ★

On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que  $A$  est semblable sur  $\mathbb{R}$  à la matrice  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

3. Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

4. Calculer  $\exp(A)$ .

### Exercice 54

X MP 2010

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que  $A\bar{A} = I_n$  si et seulement si il existe  $S \in GL_n(\mathbb{C})$  tel que  $A = S\bar{S}^{-1}$ .

### Exercice 55

X PC 2010

Déterminer les matrices de  $GL_3(\mathbb{C})$  semblables à leur inverse.

### Exercice 56 ★

CCP MP 2010

Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à spectres disjoints.

1. Montrer que  $\chi_A(B)$  est inversible.

2. Soit  $X$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $AX = XB$ . Montrer que pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $P(A)X = XP(B)$  et en déduire que  $X = 0$ .

3. Montrer que pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , il existe  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $AX - XB = M$ .

### Exercice 57 ★★★

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes trigonalisables d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie tels que  $u \circ v = v \circ u$ . Montrer que  $u$  et  $v$  trigonalisent dans une base commune.