Devoir surveillé n°09

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

Le but de cet exercice est de montrer l'existence de points fixes de l'exponentielle complexe, c'est-à-dire qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = z$.

1. L'exponentielle admet-elle des points fixes sur $\mathbb{R}$? On justifiera sa réponse.

2. Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose

$$f(x) = \exp\left(\frac{x}{\tan x}\right) - \frac{x}{\sin x}$$

Déterminer les limites de f en 0 et $\frac{\pi}{2}$.

3. En déduire qu'il existe $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(b) = 0$.

4. On pose $a = \frac{b}{\tan b}$ et $z = a + ib$. Montrer que $e^z = z$.

Exercice 2.

On se donne $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_p$ des réels *distincts deux à deux.*

1. On considère l'application

$$\varphi \colon \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{2p-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2p} \\ P & \longmapsto & (P(x_1), \dots, P(x_p), P'(x_1), \dots, P'(x_p)) \end{array} \right.$$

Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. Soient $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ et $(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ tel que $P(x_i) = a_i$ et $P'(x_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

3. On pose pour $i \in [\![1, p]\!]$, $Q_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \left(\frac{X - x_j}{x_i - x_j}\right)^2$.

Que vaut $Q_i(x_j)$ pour $j \in [\![1, p]\!]$?

4. Que vaut $Q_i'(x_j)$ lorsque $j \in [\![1, p]\!]$ et $j \neq i$? Donner la décomposition en éléments simples de $\frac{Q_i'}{Q_i}$ et en déduire que $Q_i'(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \frac{2}{x_i - x_j}$.

5. Démontrer que le polynôme P de la question **2** vérifie

$$\mathrm{P}=\sum_{i=1}^{p}\left[\left(1-\mathrm{Q}_i'(x_i)(\mathrm{X}-x_i)\right)a_i+(\mathrm{X}-x_i)b_i\right]\mathrm{Q}_i$$

6. Montrer que la famille $(\mathrm{Q}_1,\dots,\mathrm{Q}_p,(\mathrm{X}-x_1)\mathrm{Q}_1,\dots,(\mathrm{X}-x_p)\mathrm{Q}_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{2p-1}[\mathrm{X}]$.

Exercice 3.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul fixé.

1. **a.** Montrer l'existence de deux polynômes F_n et G_n de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tels que

$$(1-\mathrm{X})^n\mathrm{F}_n+\mathrm{X}^n\mathrm{G}_n=1$$

On pourra par exemple développer $[(1-\mathrm{X})+\mathrm{X}]^{2n-1}$ et on ne cherchera pas pour l'instant à calculer les coefficients de F_n et G_n.

b. Montrer que $(\mathrm{F}_n,\mathrm{G}_n)$ est l'unique couple de polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ vérifiant l'égalité de la question précédente.

2. **a.** Montrer que $\mathrm{F}_n(1-\mathrm{X})=\mathrm{G}_n(\mathrm{X})$.

b. Calculer $\mathrm{F}_n(0)$, $\mathrm{F}_n\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\mathrm{F}_n(1)$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra librement admettre que $\mathrm{F}_n(1)\neq 0$.

3. **a.** Montrer que $\mathrm{F}_n(x)\underset{x\to 0}{=}(1-x)^{-n}+o\left(x^{n-1}\right)$.

b. En déduire que

$$\mathrm{F}_n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\mathrm{X}^k$$

4. **a.** Montrer que $n\mathrm{F}_n-(1-\mathrm{X})\mathrm{F}_n'=n\binom{2n-1}{n}\mathrm{X}^{n-1}$.

b. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{H}_n\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{H}_n'=\mathrm{X}^{n-1}(1-\mathrm{X})^{n-1}$ et $\mathrm{H}_n(0)=0$.

c. Montrer que

$$(1-\mathrm{X})^n\mathrm{F}_n=1-n\binom{2n-1}{n}\mathrm{H}_n$$

5. **a.** Que vaut $\mathrm{H}_n(1)$?

b. Donner le tableau de variations de H_n sur $\mathbb{R}$ suivant la parité de n (on identifie le polynôme H_n à la fonction polynomiale qui lui est associée).

c. En déduire le nombre de racines réelles de F_n suivant la parité de n.