Applications linéaires

1 Définition et premiers exemples

1.1 Définition

Définition 1.1 Application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle **application linéaire de** E **dans** F toute application $f : E \to F$ vérifiant :

(i) $\forall (x, y) \in E^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$ i.e. f est un morphisme du groupe $(E, +)$ dans le groupe $(F, +)$;

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E,\ f(\lambda.x) = \lambda.f(x)$.

Cette définition équivaut à la suivante :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2,\ f(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.f(x) + \mu.f(y)$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.
Une application linéaire de E dans E est appelé un **endomorphisme** (linéaire) de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.
Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelé une **forme linéaire** de E. L'ensemble des formes linéaires de E est noté E^*.

Remarque.

- On a en particulier $f(0_E) = 0_F$.
- L'application nulle $\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}\right.$ est une application linéaire de E dans F.
- L'identité Id_E est un endomorphisme de E.

1.2 Exemples

1.2.1 Géométrie

Exemple 1.1

On note $\vec{E}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

- Soit $\vec{v} \in \vec{E}$. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{E} \\ \vec{u} & \longmapsto & \vec{u} \wedge \vec{v} \end{array}\right.$ est un endomorphisme de $\vec{E}$.
- Soit $\vec{v} \in \vec{E}$. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{u} & \longmapsto & \vec{u}.\vec{v} \end{array}\right.$ est une forme linéaire de $\vec{E}$.
- Soit $\vec{v}, \vec{w}$. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{u} & \longmapsto & \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \end{array}\right.$ est une forme linéaire de $\vec{E}$.

1.2.2 Suites

Exemple 1.2

- L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \longmapsto & (u_{n+1}) \end{array}\right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- Notons E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites convergentes. L'application qui à $(u_n) \in \mathrm{E}$ associe $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est une forme linéaire sur E.

1.2.3 Espaces fonctionnels

Exemple 1.3

Soit I un intervalle.

- L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathrm{I},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathrm{I}} \\ f & \longmapsto & f' \end{array}\right.$ est linéaire.
- Soit $a \in \bar{\mathrm{I}}$. Notons E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur I admettant une limite finie en a. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \lim\limits_{a} f \end{array}\right.$ est une forme linéaire de E.
- Soit $a \in \mathrm{I}$. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathrm{I}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array}\right.$ est une forme linéaire de $\mathbb{R}^{\mathrm{I}}$.

1.2.4 Polynômes

Exemple 1.4

- L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}' \end{array}\right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
- Soit $a \in \mathbb{K}$. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(a) \end{array}\right.$ est une forme linéaire de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
- Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{PQ} \end{array}\right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

1.2.5 Espaces $\mathbb{K}^n$

Exemple 1.5

- L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (y-2x, 3y+x-2z, x+z) \end{array}\right.$ est linéaire.
- L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y+1 \end{array}\right.$ n'est pas linéaire.
- L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}\right.$ n'est pas linéaire.

1.3 Opérations sur les applications linéaires

Théorème 1.1 Opérations sur les applications linéaires

(i) Une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire :

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall(f,g)\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})^2,\ \lambda f+\mu g\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$$

(ii) La composée d'applications linéaires est linéaire.
Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $g\in\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. Alors $g\circ f\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})$.

(iii) La composition à gauche et à droite est linéaire.
Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall f\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\ \forall(g,h)\in\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})^2,\ (\lambda g+\mu h)\circ f=\lambda g\circ f+\mu h\circ f$$
$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall(f,g)\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})^2,\ \forall h\in\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G}),\ h\circ(\lambda f+\mu g)=\lambda h\circ f+\mu h\circ g$$

Corollaire 1.1 Espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est l'application nulle $\left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{E}&\longrightarrow&\mathrm{F}\\x&\longmapsto&0_{\mathrm{F}}\end{array}\right.$.

Remarque. $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est un sous-espace vectoriel de F^{E}.

Corollaire 1.2 Anneau $\mathcal{L}(\mathrm{E})$

$(\mathcal{L}(\mathrm{E}),+,\circ)$ est un anneau (**non commutatif** et **non intègre** en général). De plus, $1_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}=\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

Remarque. Si u et v sont deux endomorphismes d'un même espace vectoriel, la composée $u\circ v$ sera parfois notée uv.

Exemple 1.6

Les applications $\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})&\longrightarrow&\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\\f&\longmapsto&f'\end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})&\longrightarrow&\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\\f&\longmapsto&(x\mapsto xf(x))\end{array}\right.$ sont deux endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ qui ne commutent pas.

Exemple 1.7

Considérons $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\longrightarrow&\mathbb{R}^2\\(x,y)&\longmapsto&(x,0)\end{array}\right.$ et $g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\longrightarrow&\mathbb{R}^2\\(x,y)&\longmapsto&(0,y)\end{array}\right.$. On a $f,g\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et $g\circ f=f\circ g=0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ et pourtant $f\neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ et $g\neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$.

Comme $(\mathcal{L}(\mathrm{E}),+,\circ)$ est un anneau, on a les deux formules suivantes.

Proposition 1.1

Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ qui **commutent**.

(i) $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$

(ii) $f^n - g^n = (f-g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}$

La notion suivante n'est pas au programme de MPSI.

Structure d'algèbre

Soit $\mathbb{K}$ un corps. On appele $\mathbb{K}$**-algèbre** tout quadruplet $(\mathcal{A}, +, ., \times)$ tel que :

(i) $(\mathrm{A}, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;

(ii) $(\mathrm{A}, +, \times)$ est un anneau ;

(iii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in \mathcal{A}^2, (\lambda.x) \times (\mu.y) = (\lambda\mu).(x \times y)$.

Si $\times$ est commutative, on dit que l'algèbre est commutative.

Exemple 1.8

Si $(\mathrm{E}, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(\mathcal{L}(\mathrm{E}), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative en général.

1.4 Isomorphismes linéaires

Définition 1.2 Isomorphisme linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle **isomorphisme (linéaire)** toute application linéaire **bijective** de E sur F.
Un isomorphisme de E sur E est appelé un **automorphisme**.
On dit que E est **isomorphe à** F ou que E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E sur F.

Proposition 1.2 Propriétés des isomorphismes

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

(i) Si f est un isomorphisme de E sur F, f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

(ii) Si f est un isomorphisme de E sur F et g un isomorphisme de F sur G, alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G.

Exemple 1.9

L'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ z & \longmapsto & (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) \end{array}\right.$$

est un isomorphisme de du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}^2$ d'isomorphisme réciproque

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a, b) & \longmapsto & a + ib \end{array}\right.$$

Corollaire 1.3 Groupe linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E muni de la loi $\circ$ est un groupe. On l'appelle le **groupe linéaire** de E et on le note $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$. Plus précisément, c'est le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Exemple 1.10

L'espace vectoriel des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 de polynôme caractéristique $\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b$ est isomorphe à $\mathbb{K}^2$.

Exercice 1.1

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 - 2f + 3\,\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0$. Montrer que $f \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ et déterminer f^{-1} en fonction de f.

2 Images directe et réciproque par une application linéaire

2.1 Images directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel

Proposition 2.1 Images directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Soit A un sous-espace vectoriel de E et B un sous-espace vectoriel de F. ALors

(i) $f(\mathrm{A})$ est un sous-espace vectoriel de F ;

(ii) $f^{-1}(\mathrm{B})$ est un sous-espace vectoriel de E.

2.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 2.1 Noyau et image d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

(i) Le **noyau** de f noté $\mathrm{Ker}\, f$ est défini par $\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(\{0_\mathrm{F}\})$. C'est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) L'**image** de f notée $\mathrm{Im}\, f$ est définie par $\mathrm{Im}\, f = f(\mathrm{E})$. C'est un sous-espace vectoriel de F.

Méthode **Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel**

Soit F une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de montrer que F est le noyau d'une application linéaire de E dans un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 2.1

L'ensemble
$$\mathrm{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$
est le noyau de la forme linéaire
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x + y + z \end{array} \right.$$
F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2.2

L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'' \end{array}\right.$ est linéaire. Son noyau, à savoir l'ensemble des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel.

Exercice 2.1

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

Théorème 2.1 Injectivité et surjectivité d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

(i) f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

(ii) f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = \mathrm{F}$.

Exemple 2.3

Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}' \end{array}\right.$. Alors $\operatorname{Ker} f = \mathbb{K}_0[\mathrm{X}]$ et $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Ainsi f est surjective mais pas injective.

Exemple 2.4

Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \longmapsto & (u_{n+1} - u_n) \end{array}\right.$. Alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}((1))$ et $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 2.2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ nilpotent. Montrer que f est non injectif.

Exercice 2.3

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, \dots, u_n \in \mathrm{E}$.
Notons $\Phi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \end{array}\right.$. Démontrer les assertions suivantes.

(i) La famille $(u_1, \dots, u_n)$ engendre E si et seulement si Φ est surjective.

(ii) La famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre si et seulement si Φ est injective.

(iii) La famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E si et seulement si Φ est injective.

2.3 Image d'une famille de vecteurs

Proposition 2.2

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$. Alors $f(\operatorname{vect}(\mathrm{A})) = \operatorname{vect}(f(\mathrm{A}))$.
En particulier, si $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est une famille génératrice de E (notamment une base), $(f(u_i))_{i\in\mathrm{I}}$ engendre $\operatorname{Im} f$.

Proposition 2.3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Soit $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une base de E.

(i) f est surjective si et seulement si $(f(u_i))_{i\in\mathrm{I}}$ engendre F.

(ii) f est injective si et seulement si $(f(u_i))_{i\in\mathrm{I}}$ est libre dans F.

(iii) f est bijective si et seulement si $(f(u_i))_{i\in\mathrm{I}}$ est une base de F.

Exercice 2.4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

1. Montrer que f est surjective si et seulement si l'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.
2. Montrer que f est injective si et seulement si l'image de toute famille libre de E est une famille libre de E.

Proposition 2.4 Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Soient $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une base de E et $(f_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de F. Il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ telle que $f(e_i) = f_i$ pour tout $i \in \mathrm{I}$.

Remarque. Ce résultat signifie que pour définir une application linéaire, il suffit de la définir sur une base. Il prendra toute son importance lors de l'étude des matrices.

2.4 Cas d'une application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$

Une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ est souvent donnée sous forme d'un p-uplet d'expressions linéaires en fonction des n coordonnées d'un élément de $\mathbb{K}^n$.

Exemple 2.5

L'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z) \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Méthode **Déterminer le noyau**

Le noyau de f est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par le système linéaire

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

On a vu dans un chapitre précédent comment déterminer une base de ce sous-espace vectoriel.

Méthode **Déterminer l'image**

L'image est formé des vecteurs $x(1,2,1)+y(2,1,2)+z(1,-1,1)$ avec $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Ainsi

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}((1,2,1),(2,1,2),(1,-1,1))$$

On a vu dans un chapitre précédent comment déterminer une base et un système d'équations cartésiennes de ce sous-espace vectoriel.

Méthode **Déterminer le noyau et l'image en même temps !**

On reprend la méthode matricielle utilisée pour déterminer le noyau. On écrit d'abord la matrice correspondant à f puis on ajoute une matrice carrée formée de zéros et de 1 sur la diagonale.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Puis on pivote sur les colonnes.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{lcl} C_2 & \leftarrow & C_2 - 2C_1 \\ C_3 & \leftarrow & C_3 - C_1 \end{array}$$

Encore une fois pour avoir la dernière colonne nulle.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_2$$

On a alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}((1,2,1),(0,-3,0))$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}((-3,-1,1))$.

2.5 Restriction et corestriction d'une application linéaire

Proposition 2.5 Restriction et corestriction d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

(i) Si G un sous-espace vectoriel de E, alors $f_{|\mathrm{G}} \in \mathcal{L}(\mathrm{G}, \mathrm{F})$.

(ii) Si H est un sous-espace vectoriel de F contenant $\operatorname{Im} f$, alors $f^{|\mathrm{H}} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{H})$.

(iii) Si G est un sous-espace vectoriel de E et H est un sous-espace vectoriel de F contenant $f(\mathrm{G})$, alors $f_{|\mathrm{G}}^{|\mathrm{H}} \in \mathcal{L}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$.

Exemple 2.6

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et G un sous-espace vectoriel de E. Alors $\operatorname{Ker} f_{|\mathrm{G}} = \operatorname{Ker} f \cap \mathrm{G}$ et $\operatorname{Im} f_{|\mathrm{G}} = f(\mathrm{G})$.
Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. Alors $\operatorname{Im} g_{|\operatorname{Im} f} = \operatorname{Im} g \circ f$.

Remarque. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f i.e. $f(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$, on dit que f induit un endomorphisme de F (qui n'est autre que $f_{|\mathrm{F}}^{|\mathrm{F}}$).

Proposition 2.6

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $\mathrm{E} = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{E}_k$.
Soient $(u_1, \dots, u_p) \in \prod_{k=1}^{p} \mathcal{L}(\mathrm{E}_k, \mathrm{F})$. Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ telle que $u_{|\mathrm{E}_k} = u_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

Théorème 2.2

Soit E et F deux espaces vectoriels avec E. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Si S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E, alors f induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} f$.

Remarque. Autrement dit, $f_{|\mathrm{S}}^{|\operatorname{Im} f}$ est bijective.

Remarque. En termes savants, on dit qu'on factorise f par son noyau.

2.6 Formes linéaires et hyperplans

Définition 2.2 Formes coordonnées dans une base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$. Pour tout $i \in \mathrm{I}$, il existe une unique forme linéaire sur e_i^* telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $j \in \mathrm{I}$.
La famille $(e_i^*)_{i \in \mathrm{I}}$ s'appelle la famille des **formes coordonnées** relativement à la base $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$.

Proposition 2.7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, $x = \sum_{i \in \mathrm{I}} e_i^*(x) e_i$.

Remarque. De là vient le nom de «formes coordonnées».

Définition 2.3 Hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle **hyperplan** de E tout noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Exemple 2.7

L'application $\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 4x-5y+3z \end{cases}$ est une forme linéaire de $\mathbb{R}^3$.
$\mathrm{H} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x-5y+3z=0\}$ est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2.8

Soit $a \in \mathbb{K}$. L'application $\begin{cases} \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(a) \end{cases}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
$\mathrm{H} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(a) = 0\}$ est donc un hyperplan de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Proposition 2.8 Hyperplans et droites vectorielles

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(i) Si H est un hyperplan de E et si D est une droite vectorielle de E non contenue dans H, alors $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{D}$.

(ii) Tout supplémentaire d'une droite vectorielle de E est un hyperplan.

(iii) Tout supplémentaire d'un hyperplan de E est une droite vectorielle.

3 Applications linéaires en dimension finie

3.1 Isomorphisme et dimension

Théorème 3.1 Isomorphisme et dimension

(i) Si deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes et si E est de dimension finie, alors F est de dimension finie et $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$.

(ii) Deux espaces vectoriels de même dimension finie sont isomorphes.

Remarque. Ce résultat est d'une importance capitale puisqu'il dit que tous les espaces vectoriels de dimension n sont isomorphes à $\mathbb{K}^n$. L'étude d'un espace vectoriel de dimension n se résume par exemple à l'étude de $\mathbb{K}^n$, ce qu'exploite à fond la théorie des matrices.

Remarque. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est seulement injective, on peut tout de même affirmer que $\dim \mathrm{E} \leq \dim \mathrm{F}$.
Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est seulement surjective, on peut tout de même affirmer que $\dim \mathrm{E} \geq \dim \mathrm{F}$.

Exemple 3.1

$\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ sont isomorphes en tant que $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Exemple 3.2

$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de dimension finie. En effet, le sous-espace vectoriel des suites presque nulles $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est isomorphe à $\mathbb{K}[X]$. Or $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie donc $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ non plus. Comme $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, ce dernier n'est pas non plus de dimension finie.

Exemple 3.3

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble E des suites réelles p-périodiques est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension car $\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ (u_n) & \longmapsto & (u_0, \dots, u_{p-1}) \end{array}\right.$ est un isomorphisme.

3.2 Rang d'une application linéaire

Définition 3.1 Rang d'une application linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On dit que f est de **rang fini** si $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension finie. On appelle alors **rang** de f la dimension de $\mathrm{Im}\, f$ et on la note $\mathrm{rg}\, f$.

Remarque. Si $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une famille génératrice de E et si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est de rang fini, alors $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}((f(e_i)_{i \in \mathrm{I}})$.
Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ e E et F sont de dimensions finies, $\mathrm{rg}\, f \leq \min(\dim \mathrm{E}, \dim \mathrm{F})$.
Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et si G est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors $f(\mathrm{G})$ est de dimension finie et $\dim f(\mathrm{G}) \leq \dim \mathrm{G}$ (une application linéaire fait toujours baisser la dimension).

Méthode **Déterminer le rang d'une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$**

On a vu au chapitre précédent comment déterminer une base de l'image d'une telle application linéaire. Le cardinal de cette base est le rang de l'application linéaire.

Corollaire 3.1 Théorème du rang

Soit E et F deux espaces vectoriels avec E de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors

$$\dim \mathrm{E} = \mathrm{rg}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f$$

Exemple 3.4

On peut prouver différemment la formule $\dim \mathrm{E} \times \mathrm{F} = \dim \mathrm{E} + \dim \mathrm{F}$ en considérant l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{E} \times \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}\right.$.

Exemple 3.5

On peut aussi prouver différemment la formule de Grassmann $\dim \mathrm{F} + \mathrm{G} = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ en considérant l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{F} \times \mathrm{G} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}\right.$.

Corollaire 3.2 Injectivité, surjectivité et rang

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors

(i) f est surjective si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim \mathrm{F}$.

(ii) f est injective si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim \mathrm{E}$.

Corollaire 3.3

Soient E et F deux espaces vectoriels de **<u>même</u>** dimension **<u>finie</u>** et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est bijective.

(ii) f est injective.

(iii) f est surjective.

C'est en particulier le cas lorsque f est un **endomorphisme** d'un espace vectoriel de dimension **<u>finie</u>**.

Remarque. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

- Si $\dim \mathrm{E} < \dim \mathrm{F}$, f ne peut être surjective.
- Si $\dim \mathrm{E} > \dim \mathrm{F}$, f ne peut être injective.

Méthode Prouver qu'une application linéaire est un isomorphisme

Si on sait que les dimensions de l'espace d'arrivée et de l'espace de départ sont égales, pour montrer qu'une application linéaire est bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective **<u>ou</u>** surjective (en pratique, on montre plus souvent l'injectivité). Encore une fois, travail divisé par deux grâce à la dimension !

Exercice 3.1

Montrer que $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+y, -x+y, z) \end{array}\right.$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 3.1

Soient E et F deux espaces vectoriels de **<u>même</u>** dimension **<u>finie</u>** et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors f est bijective si et seulement si il existe $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ **<u>ou</u>** $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$. Dans ce cas $g = f^{-1}$.

Remarque. En dimension finie, il suffit donc de prouver l'inversibilité à gauche **<u>ou</u>** à droite.
On suppose E de dimension finie. Pour montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est un automorphisme d'inverse $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, il suffit de prouver que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ **<u>ou</u>** $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

Proposition 3.2 Invariance du rang par composition avec un isomorphisme

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.

(i) Si u est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg} v \circ u = \operatorname{rg} v$.

(ii) Si v est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg} v \circ u = \operatorname{rg} u$.

Exercice 3.2

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. Montrer que $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$.

3.3 Dimension de $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$

Exercice 3.3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(f_j)_{1 \leq j \leq p}$.
Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^{[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} \\ u & \longmapsto & \left(f_j^*(u(e_i))\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Proposition 3.3 Dimension de $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est aussi de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) = \dim \mathrm{E} \times \dim \mathrm{F}$$

Remarque. En particulier, si E est de dimension finie, $\dim \mathrm{E}^* = \dim \mathrm{E}$. On montre alors que si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*.

3.4 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Proposition 3.4 Hyperplans en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension $n - 1$.

Exemple 3.6

Les hyperplans de l'espace vectoriel géométrique sont les plans vectoriels. Les hyperplans du plan vectoriel géométrique sont les droites vectorielles.

Proposition 3.5 Équations d'un hyperplan en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$.

(i) Tout hyperplan de E admet une équation de la forme $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$ où $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ et $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$.

(ii) Soient $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ des n-uplets de $\mathbb{K}^n$ non nuls. Alors $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$ et $\sum_{k=1}^{n} b_k x_k$ sont deux équations d'un même hyperplan si et seulement si les n-uplets $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ sont colinéaires.

Exemple 3.7

Tout plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ admet une équation de la forme $ax + by + cz = 0$ où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda ax + \lambda by + \lambda cz = 0$ est également une équation de ce même hyperplan.

Proposition 3.6 Intersections d'hyperplans

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

(i) L'intersection de m hyperplans de E est de dimension au moins $n - m$.

(ii) Tout sous-espace vectoriel de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.

Exemple 3.8

Une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ est l'intersection de deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
Elle admet donc un système d'équations cartésiennes formé par deux équations de plans.

Exemple 3.9

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à m équations à coefficients dans $\mathbb{K}$ et à n inconnues dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension au moins $n - m$.

4 Projecteurs, symétries, homothéties

4.1 Projecteurs et symétries

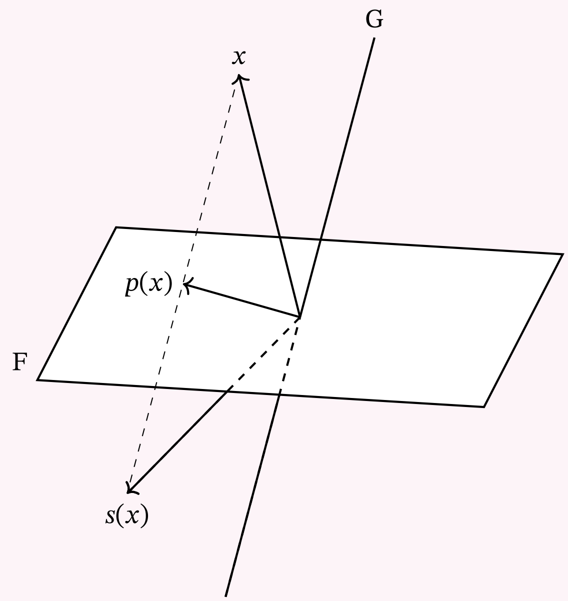
Définition 4.1 Projecteur et symétrie

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$.

(i) On appelle **projecteur sur** F **parallèlement à** G l'application qui à x associe x_F.

(ii) On appelle **symétrie par rapport** F **parallèlement à** G l'application qui à x associe $x_F - x_G$.

Le sous-espace vectoriel G est appelé la direction du projecteur ou de la symétrie.



Remarque. Si p est le projecteur sur F parallélement à G et q est le projecteur sur G parallélement à F, alors $p + q = \mathrm{Id}_E$.

Remarque. Si p et s sont le projecteur et la symétrie associés au même couple de sous-espaces supplémentaires, alors $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ ou encore $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Proposition 4.1 Propriétés des projecteurs

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G.

(i) p est un endomorphisme de E.

(ii) $p^2 = p$.

(iii) $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}(p - \mathrm{Id}_E) = G$ et $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = F$.

Remarque. $x \in G \iff p(x) = 0_E$ et $x \in F \iff p(x) = x$.

Proposition 4.2 Caractérisation des projecteurs

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.
Dans ce cas, $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$.

Remarque. $x \in \mathrm{Im}\, p \iff p(x) = x$.

Exemple 4.1

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application qui à un polynôme associe la somme de ses monômes de degré inférieur ou égal à n est le projecteur sur $\mathbb{K}_n[X]$ parallèlement à $X^{n+1}\mathbb{K}_n[X]$.

Projecteurs associés à une décomposition en somme directe

Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Pour tout $x \in E$, il existe un unique $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note p_i l'application qui à $x \in E$ associe x_i. Alors p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$ et pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.

Proposition 4.3 Propriétés des symétries

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

(i) s est un endomorphisme de E.

(ii) $s^2 = \mathrm{Id}_E$.

(iii) $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = F$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = G$.

Remarque. La dernière assertion signifie que $x \in F \iff s(x) = x$ et que $x \in G \iff s(x) = -x$.

Proposition 4.4 Caractérisation des symétries

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie si et seulement si $s^2 = \mathrm{Id}_E$.
Dans ce cas, $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Exemple 4.2

L'application qui à une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ associe la fonction $x \mapsto f(-x)$ est la symétrie par rapport au sous-espace vectoriel des fonctions paires parallèlement au sous-espace vectoriel des fonctions impaires.

Remarque. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans un espace vectoriel E. Si p est le projecteur sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

4.2 Homothéties

Définition 4.2 Homothétie

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle **homothétie de** E **de rapport** λ l'endomorphisme $\lambda\,\mathrm{Id}_E$.

Exercice 4.1

Montrer que les endomorphismes de E commutant avec tous les endomorphismes de E sont les homothéties.