Devoir surveillé n° 3

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$, on pose $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

1. Donner des expressions $T_0(x)$, $T_1(x)$ et $T_2(x)$ valables pour tout $x \in [-1, 1]$ sous la forme de polynômes.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $T_n(0)$, $T_n(1)$ et $T_n(-1)$. On distinguera des cas suivant les valeurs de n.

3. **a.** Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$.

b. Déterminer une relation entre $T_n(x)$ et $T_n(-x)$ valable pour tout $x \in [-1, 1]$. Qu'en déduit-on sur la parité de T_n ?

4. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $g_n(t) = T_n(\cos(t)) - \cos(nt)$. Que vaut g_n sur $[0, \pi]$?

b. En déduire que $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

5. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $T_m \circ T_n(x) = T_{mn}(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

6. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$T_{n+2}(\cos(t)) - 2\cos(t)T_{n+1}(\cos(t)) + T_n(\cos(t)) = 0$$

En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$, $T_{n+2}(x) - 2xT_{n+1}(x) + T_n(x) = 0$.

b. En déduire des expressions de $T_3(x)$ et $T_4(x)$ valables pour tout $x \in [-1, 1]$ sous la forme de polynômes.

7. **a.** Justifier que T_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sin^2(t)T_n''(\cos t) - \cos(t)T_n'(\cos(t)) + n^2T_n(\cos(t)) = 0$$

En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$$

8. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $T_n(x) = 0$ admet n solutions distinctes que l'on explicitera.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les réels de $[-1, 1]$ en lesquels T_n admet ses extrema.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + i\sqrt{1 - x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1 - x^2}\right)^n\right]$$

Exercice 2.

On définit la suite (F_n) par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite (F_n) est positive.

2. Montrer que la suite (F_n) est croissante.
   En particulier, $F_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ de sorte que l'on peut poser $G_n = \arctan\left(\frac{1}{F_n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que $F_{2n+1} = \dfrac{F_{2n+2}F_{2n+3} - 1}{F_{2n+2} + F_{2n+3}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que $G_{2n+1} = G_{2n+2} + G_{2n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. En déduire que pour pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$G_{2n+1} + \sum_{k=1}^{n} G_{2k} = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 3.★

Soit f définie par $f(x) = x - \operatorname{th}(x)\ln(\operatorname{ch}(x))$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est une fonction impaire.
3. Montrer que l'équation $\operatorname{ch}(x) = e$ n'admet qu'une seule solution positive. On notera a cette solution. On ne demande pas de la calculer.
4. Montrer que si $|x| < a$, $\ln(\operatorname{ch}(x)) < 1$ et que si $|x| > a$, $\ln(\operatorname{ch}(x)) > 1$.
5. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
6. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. On ne demande pas les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ dans cette question.
7. Montrer que $\ln(\operatorname{ch}(x)) = x - \ln(2) + \ln(1 + e^{-2x})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
8. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - \operatorname{th}(x)) = 0$.
9. Déduire des deux questions précédentes les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
10. Tracer la courbe représentative de f. On fera figurer les asymptotes et tangentes horizontales éventuelles. On donne $a \approx 1,66$, $f(a) \approx 0,73$ et $\ln(2) \approx 0,69$.

Exercice 4.

On pose pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$.

1. Pour quels nombres complexes z, $f(z)$ est-il défini ?
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.
3. Montrer que $\begin{cases} |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2} \\ |f(z)| < 1 \end{cases} \iff |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4}$.
4. On pose $\Delta = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4}\right\}$ et $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Vérifier que $f(\Delta) \subset U$.
5. Soit $Z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Montrer que l'équation $e^z = Z$ d'inconnue z admet une unique solution telle que $\operatorname{Im}(z) \in]-\pi, \pi[$.
6. Soit $u \in U$. Montrer que $\dfrac{1+u}{1-u} \notin \mathbb{R}_-$.
7. Montrer que l'application f induit une bijection de Δ sur U.