

## Axiomes

### EXERCICE 1.

Préciser pour chacun des triplets suivants les lois  $+$  et  $\cdot$  qui les munissent d'une structure d'espace vectoriel ainsi que le vecteur nul.

1.  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$
2.  $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$
3.  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$
4.  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

### EXERCICE 2.

Vérifier que l'ensemble  $\mathbb{R}_+^*$  muni des lois interne et externe suivantes

$$u \boxplus v = uv \quad \text{et} \quad \lambda \boxdot u = u^\lambda,$$

où  $u$  et  $v$  sont dans  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

## Sous-espaces vectoriels

### EXERCICE 3.

L'axe réel dans  $\mathbb{C}$  est-il un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ ? du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ ?

### EXERCICE 4.

Dans l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^3$ , on considère les ensembles suivants,

$$F = \left\{ (\lambda - 3\mu, 2\lambda + 3\mu, \lambda) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

et

$$G = \left\{ (x, y, z) \in E \mid x + 2y = 0 \right\}.$$

1. Prouver que les ensembles  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .
2. Déterminer le sous-espace vectoriel  $F \cap G$ .

### EXERCICE 5.

On note  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $E$  ?

1.  $E_1 = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \right\};$
2.  $E_2 = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid u_n = \mathcal{O}(n^2) \right\};$
3.  $E_3 = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid u_n \sim \frac{1}{n} \right\};$
4.  $E_4 = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid \exists k \in \mathbb{R}, u_n \sim \frac{k}{n} \right\}.$

### EXERCICE 6.

Parmi les parties suivantes de l'espace vectoriel  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , déterminer celles qui sont des sous-espaces vectoriels,

1. L'ensemble des fonctions telles que  $f(1) = 0$ ;
2. L'ensemble des fonctions telles que  $f(0) = 1$ ;
3. L'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ ;
4. L'ensemble des fonctions monotones;
5. L'ensemble des fonctions impaires;
6. L'ensemble des fonctions  $2\pi$ -périodiques.

### EXERCICE 7.

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $X, Y$  deux parties de  $E$ . Prouver que

$$\text{vect}(X \cap Y) \subset \text{vect}(X) \cap \text{vect}(Y).$$

Donner un exemple où cette inclusion est *stricte*.

### EXERCICE 8.

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

1.  $E_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0, \text{ et } x + 3az = 0 \right\};$
2.  $E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\};$
3.  $E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\};$
4.  $E_4 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \alpha y + 1 \geq 0 \right\}.$

**EXERCICE 9.**

Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

1.  $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$ ;
2.  $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$ ;
3.  $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0, y = z\}$ ;
4.  $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$ ;
5.  $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy \geq 0\}$ ;
6.  $E_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \geq 0\}$ ;
7.  $E_7 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(1) = 0\}$ ;
8.  $E_8 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 1\}$ ;
9.  $E_9 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est croissante}\}$ .

**EXERCICE 10.**

Montrer qu'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  n'est jamais l'union de deux sous espaces-vectoriels stricts (i.e. distincts de  $E$ ).

**Sommes de sous-espaces vectoriels****EXERCICE 11.**

Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $x + y + z = 0$  et  $G$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  d'équations  $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ .

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .
2. Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Déterminer la projection de  $(x, y, z)$  sur  $F$  (resp.  $G$ ) parallèlement à  $G$  (resp.  $F$ ).

**EXERCICE 12.**

Soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Montrer que  $F_1, \dots, F_p$  sont en somme directe *si et seulement si*

$$\forall k \in \llbracket 2, p \rrbracket, \left( \sum_{j=1}^{k-1} F_j \right) \cap F_k = \{0_E\}$$

**EXERCICE 13.**

Soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie tels que  $F_1 + \dots + F_p = E$ . Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels  $G_1, \dots, G_p$  de  $E$  tels que  $G_k \subset F_k$  pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $G_1 \oplus \dots \oplus G_p = E$ .

**EXERCICE 14.**

On note  $E$  l'ensemble des suites réelles convergentes,  $F$  l'ensemble des suites réelles de limite nulle et  $G$  l'ensemble des suites réelles constantes.

1. Montrer que  $E, F, G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
2. Montrer que  $E = F \oplus G$ .

**EXERCICE 15.**

Soient  $E$  l'ensemble des suites réelles constantes,  $F$  l'ensemble des suites réelles  $(u_n)$  vérifiant  $u_{n+1} + u_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $G$  l'ensemble des suites réelles  $(u_n)$  vérifiant  $u_{n+2} + u_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et enfin  $H$  l'ensemble des suites réelles périodiques de période 4.

1. Montrer que  $E, F, G, H$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
2. Montrer que  $E, F, G$  sont inclus dans  $H$ .
3. Montrer que  $E \oplus F \oplus G = H$ .

**EXERCICE 16.**

On note  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) + f(1) = 0\}$  et  $G$  l'ensemble des fonctions constantes sur  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .
2. Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**EXERCICE 17.**

Soient  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Quelles assertions parmi les suivantes sont vraies en général ?

- |                               |  |
|-------------------------------|--|
| 1. $F \cap G \subset F + G$ ; | 4. $F + F = F$ ;                       |
| 2. $F \cup G \subset F + G$ ; | 5. $F \cup (F \cap G) \subset F + G$ ; |
| 3. $F \subset F + G$ ;        | 6. $F + G = G + F$ .                   |

**EXERCICE 18.**

Soient  $F, G$  et  $H$  trois sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

1. Que pensez-vous de la proposition suivante,

$$F + G = F \text{ si et seulement si } F \supset G ?$$

2. Que pensez-vous de la proposition suivante,

$$F + G = F + H \implies G = H ?$$

**EXERCICE 19.★**

Soient  $F, G$  et  $H$  trois sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  tels que

$$F + H = G + H, \quad F \cap H = G \cap H,$$

et  $F \subset G$ . Prouver que  $F = G$ .

**EXERCICE 20.★**

On note  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $P$  le sous-ensemble de  $E$  formé par les fonctions paires et  $I$  le sous-ensemble de  $E$  formé par les fonctions impaires.

1. Montrer que  $P$  et  $I$  sont deux sous-espaces supplémentaires dans  $E$ .
2. Pour tout  $f \in E$ , la projection du vecteur  $f$  sur  $P$  parallèlement à  $I$  est appelée *partie paire* de  $f$ . On définit de même la *partie impaire* de  $f$ . Calculer les parties paire et impaire des fonctions suivantes : le cosinus, le sinus, l'exponentielle,  $f : x \mapsto x^4 + x$ .

**EXERCICE 21.★★**

Soient  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{C}$  l'ensemble des fonctions constantes sur  $[0, 1]$ , et  $\mathcal{A}$  l'ensemble des éléments de  $E$  s'annulant en 1.

1. Montrer que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{A}$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ .
2. Montrer que  $\mathcal{C}$  est également un supplémentaire dans  $E$  du sous-espace suivant

$$\mathcal{N} = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}.$$

3. Calculer les projections sur  $\mathcal{C}$  parallèlement à  $\mathcal{A}$  puis à  $\mathcal{N}$  d'une fonction  $f \in E$ .
4. Donner d'autres exemples de supplémentaires de  $\mathcal{C}$  dans  $E$ .

**EXERCICE 22.**

On note  $E = \mathbb{R}^3$  et

$$F = \{(x, y, z) \in E \mid x + y - z = 0\}$$

et

$$G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Etablir que  $F$  et  $G$  sont des sev de  $E$ .
2. Déterminer  $F \cap G$ .
3. Prouver que  $F + G = E$ . La somme est-elle directe ?

**EXERCICE 23.★★**

Soient  $A, B$  et  $C$  trois sev d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$ . On note

$$F = (A \cap B) + (A \cap C), \quad G = A \cap (B + (A \cap C))$$

et  $H = A \cap (B + C)$ .

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sev de  $H$ .
2. Etablir que  $F = G$ .
3. A-t-on toujours  $F = G = H$  ?

**EXERCICE 24.★★**

Soient  $F, G, F'$  et  $G'$  quatre sev d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$  tels que  $F \cap G = F' \cap G'$ . Etablir que

$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F.$$

**EXERCICE 25.**

On note  $E$  l'espace vectoriel réel des fonctions dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Soient  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{A}$  les sous-ensembles de  $E$  définis par,

$$\mathcal{A} = \{f \in E \mid f \text{ affine}\}$$

et

$$\mathcal{N} = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}.$$

1. Prouver que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{N}$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .
2. Montrer que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{N}$  sont supplémentaires dans  $E$ .
3. Déterminer la projection sur  $\mathcal{A}$  parallèlement à  $\mathcal{N}$  d'une fonction  $f \in E$ .

**REMARQUE.** On rappelle qu'une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est affine *si et seulement si* il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = at + b$ . ■

## Familles de vecteurs

### EXERCICE 26.

Soit  $\mathcal{F} = ((1, -2, 1), (2, -3, 1), (-1, 3, -2))$ .

1. Le vecteur  $(2, 1, 3)$  est-il combinaison linéaire de la famille  $\mathcal{F}$  ?
2. Même question pour le vecteur  $(2, 5, -7)$ .

### EXERCICE 27. ★★

Soit  $E = \mathbb{R}$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$f_n : x \mapsto \cos^n(x) \quad \text{et} \quad g_n : x \mapsto \cos(nx).$$

Montrer que pour tout  $n$  positif,

$$\text{vect}(f_k, 0 \leq k \leq n) = \text{vect}(g_k, 0 \leq k \leq n).$$

### EXERCICE 28.

Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $E = \mathbb{R}^3$  et

$$u = (1, -1, 1), \quad v = (0, 1, a).$$

Déterminer une condition *nécessaire et suffisante* portant sur  $a$  pour que  $(1, 1, 2) \in \text{vect}(u, v)$ .

### EXERCICE 29.

Donner une famille génératrice des espaces vectoriels suivants.

1. Le plan de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $x + y + z = 0$ .
2. Le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle  $y'' + 2y' + 2y = 0$ .
3. Le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des suites  $(u_n)$  à valeurs complexes vérifiant  $u_{n+2} + (2 - 3i)u_{n+1} - (5 + i)u_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### EXERCICE 30.

On définit les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  suivants

$$a = (1, 2, -3) \quad b = (3, 2, -2) \quad c = (-1, 2, -4) \quad d = (-6, -8, 11)$$

Montrer que  $\text{vect}(a, b) = \text{vect}(c, d)$ .