Semaine du 07/12 au 11/12

1 Cours

Développements limités

Définitions et propriétés Définition du développement limité d'une fonction. Partie régulière d'un DL. Unicité du développement limité. Une fonction est équivalente au monôme non nul de plus bas degré d'un DL (s'il existe). Lien avec la continuité (existence d'un DL d'ordre 0) et la dérivabilité (existence d'un DL d'ordre 1). DL et parité : le DL en 0 d'une fonction paire (resp. impaire) ne comporte que des puissances paires (resp.impaires).

Intégration et dérivation des DL, formule de Taylor-Young

- Intégration : si f admet un $DL_n(a)$, alors toute primitive F de f admet un $DL_{n+1}(a)$ et le DL de F s'obtient en intégrant terme à terme celui de f.
- Dérivation : si f admet un $DL_n(a)$ et si f' admet un $DL_{n-1}(a)$, alors le DL de f' s'obtient en dérivant terme à terme celui de f.
- Taylor-Young : Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un voisinage de a, alors f admet un $DL_n(a)$ donné par la formule de Taylor-Young. J'insiste : en plus de la formule, ce théorème donne surtout l'**existence** d'un DL !

Développements limités usuels $\dfrac{1}{1\pm x}$, e^x, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ en 0.

Calculs sur les DL Somme, produit, composition, inverse, quotient.

Application à l'étude de courbes Tangentes, asymptotes et positions locales relatives. Condition nécessaire/suffisante d'extremum local via un DL d'ordre 2.

Nombres réels

Approximations d'un réel Ensembles de nombres : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Partie entière. Approximations décimales. Densité dans $\mathbb{R}$. Caractérisation «epsilonesque» de la densité. Caractérisation séquentielle de la densité. $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$. Théorème de la borne supérieure. Caractérisation «epsilonesque» de la borne inférieure/supérieure. Caractérisation séquentielle de la borne inférieure et de la borne supérieure. Droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$. Borne supérieure et inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Extension aux applications à valeurs réelles Maximum, minimum, borne inférieure et borne supérieure d'une fonction à valeurs réelles sur un ensemble.

2 Méthodes à maîtriser

- Mettre les développements limités sous forme normalisée pour calculer des produits de DL.
- N'additionner que des développements limités de même ordre.
- Déterminer les ordres auxquels il faut développer les différentes composantes d'une expression pour obtenir un DL d'ordre donné de cette expression.
- Montrer qu'un réel est irrationnel (raisonnement par l'absurde).
- Partie entière et encadrements : pour $(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$,

$$k = \lfloor x \rfloor \iff k \leqslant x < k+1 \iff x-1 < k \leqslant x$$

- Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$:
  - la définition : tout interalle ouvert non vide contient un élément de ladite partie ;
  - la caractérisation «epsilonesque» ;
  - la caractérisation séquentielle.
- Montrer qu'un réel est la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$ en utilisant :
  - la définition : plus petit des majorants (resp. plus grand des minorants) ;
  - la caractérisation «epsilonesque» ;
  - la caractérisation séquentielle.

3 Questions de cours

- Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ en utilisant la caractérisation séquentielle de la densité.
- Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Montrer que $M = \sup \mathcal{A}$ **si et seulement si**
  - M est un majorant de $\mathcal{A}$;
  - pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $M - \varepsilon < a$.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application bornée. On pose $g(x) = \inf_{y \geqslant x} f(y)$ et $h(x) = \sup_{y \geqslant x} f(y)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer le sens de variation de g et h.
- Soit $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ une application croissante. Montrer que f admet un point fixe en considérant la borne supérieure de $A = \{x \in [0,1],\ f(x) \geqslant x\}$.