DEVOIR SURVEILLÉ N° 6

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

EXERCICE 1.

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(\mathcal{E}) : \ y''' - y = 0 \qquad (\mathcal{F}) : \ y'' + y' + y = 0 \qquad (\mathcal{G}) : \ y' - y = 0$$

On note E, F et G les ensembles respectifs des solutions *à valeurs réelles* de $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{G})$. Les solutions de $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{G})$ sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, ce qu'on ne demande pas de montrer. On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Montrer que $\mathsf{F} \subset \mathsf{E}$ et $\mathsf{G} \subset \mathsf{E}$.

3. Donner les solutions des équations différentielles $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{G})$.

4. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et donner pour chacun une famille génératrice.

5. **a.** Soit $y \in \mathsf{E}$. On pose $y_1 = 2y - y' - y''$ et $y_2 = y + y' + y''$. Montrer que $y_1 \in \mathsf{F}$ et $y_2 \in \mathsf{G}$.

b. Montrer que F et G sont supplémentaires de E.

6. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

EXERCICE 2.

1. Soient a et n des entiers strictement supérieurs à 1. On suppose que $a^n + 1$ est un nombre premier.

a. Montrer que a est pair.

b. On suppose que n admet un diviseur positif impair m supérieur ou égal à 3. Il existe alors $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = km$. Montrer que $a^k + 1$ divise $a^n + 1$ et aboutir à une contradiction.

c. Que peut-on en déduire sur n ?

2. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n - 2 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} F_k$.

c. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m < n$. Montrer que $F_m \wedge F_n = 1$.

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et p un nombre premier divisant F_n et distinct de F_n. On considère l'ensemble

$$A = \left\{ k \in \mathbb{N}^*, \ 2^k \equiv 1[p] \right\}$$

a. Montrer que $2^{n+1} \in A$.

b. Justifier que A admet un minimum que l'on notera m.

c. En écrivant la division euclidienne de 2^{n+1} par m, montrer que m divise 2^{n+1}.

d. Montrer que $m = 2^{n+1}$.

e. Justifier que $p - 1 \in A$.

f. En déduire que $p \equiv 1 \left[2^{n+1}\right]$.

Problème 1 —

On admettra l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Partie I –

On introduit l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
$(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ est donc un anneau.

2. **a.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, il existe un *unique* couple $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$.
On peut alors définir le *conjugué* de x par $\overline{x} = a - b\sqrt{2}$.

b. Montrer que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\sqrt{2}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \\ x & \longmapsto & \overline{x} \end{array} \right.$ est un automorphisme d'anneau.

3. Pour $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $N(x) = x\overline{x}$.

a. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $N(x) \in \mathbb{Z}$.

b. Montrer que pour tout $(x,y) \in \left(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\right)^2$, $N(xy) = N(x)N(y)$.

c. Montrer que $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est inversible dans l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ *si et seulement si* $|N(x)| = 1$.

Partie II –

On note H l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Autrement dit, $H = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], |N(x)| = 1\}$.

1. Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

2. Soient $x \in H$ et $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$.

a. Montrer que si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, alors $x \geqslant 1$.

b. Montrer que si $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$, alors $x \leqslant -1$.

c. Montrer que si $ab \leqslant 0$, alors $|x| \leqslant 1$.

3. On note $H^+ = H \cap]1, +\infty[$.

a. Soient $x \in H^+$ et $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$. Montrer que $a > 0$ et $b > 0$.

b. En déduire que $u = 1 + \sqrt{2}$ est le plus petit élément de H^+.

4. Soit $x \in H^+$.

a. Montrer qu'il existe un entier n tel que $u^n \leqslant x < u^{n+1}$.

b. Montrer que $x = u^n$.

5. En déduire que $H = \{u^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{-u^n, n \in \mathbb{Z}\}$.