Probabilités

Contrairement au programme de première année, l'univers d'une expérience aléatoire n'est plus supposé fini.

1 Univers probabilisé

1.1 Ensembles dénombrables

Définition 1.1 Ensemble dénombrable

Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Remarque. On dit qu'un ensemble est **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable.

Remarque. La relation «être en bijection avec» est une relation d'équivalence. Autrement dit, un ensemble en bijection avec un ensemble dénombrable est lui-même dénombrable.

Proposition 1.1

Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Exemple 1.1

L'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs sont dénombrables.

Proposition 1.2

Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement si il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Exercice 1.1

Soit A un ensemble. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) A est dénombrable ;

(ii) il existe une injection de A dans un ensemble dénombrable ;

(iii) il existe une surjection d'un ensemble dénombrable sur A.

Proposition 1.3 Opération sur les ensembles dénombrables

- Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

Corollaire 1.1

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Exercice 1.2

Montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.

Proposition 1.4 Dénombrabilité du support d'une famille sommable

Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille **sommable**. Alors le support de la famille $(u_i)_{i\in I}$, c'est-à-dire l'ensemble $\{i \in I,\ u_i \neq 0\}$, est au plus dénombrable.

Proposition 1.5

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exemple 1.2

L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable. Supposons qu'il le soit. Il existerait alors une bijection f de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Considérons alors $A = \{n \in \mathbb{N},\ n \notin f(n)\}$. Par surjectivité de f, il existerait $k \in \mathbb{N}$ telle que $A = f(k)$. Mais alors $k \in A \iff k \notin f(k) \iff k \notin A$, ce qui est absurde. Ainsi $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.
Comme l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathrm{N}) & \longrightarrow & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ X & \longmapsto & \mathbb{1}_X \end{array}\right.$ est bijective, ceci prouve également que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Remarque. On peut aussi prouver que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable à l'aide d'un argument du type «diagonale de Cantor». Supposons que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ soit dénombrable. Il existe donc une bijection f de $\mathbb{N}$ sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On définit la suite $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n = 1 - f(n)_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $u \notin f(\mathbb{N})$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u \neq f(n)$ puisque $u_n \neq f(n)_n$. Ceci contredit la surjectivité de f.

1.2 Notion de tribu

Définition 1.2 Tribu

On appelle **tribu** sur un ensemble Ω toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes.

L'univers appartient à la tribu $\Omega \in \mathcal{A}$.

Stabilité par passage au complémentaire $\forall A \in \mathcal{A}, \overline{A} \in \mathcal{A}$.

Stabilité par union dénombrable $\forall (A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Remarque. Une tribu est aussi parfois appellée une **σ-algèbre**.

Exemple 1.3

- $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω. On l'appelle la **tribu pleine**.
- $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu sur Ω. On l'appelle la **tribu triviale**.

Définition 1.3 Événement

- On appelle **événement** tout élément de la tribu.
- Un événement est dit **élémentaire** si c'est un singleton.
- On appelle événement **contraire** d'un événement A le complémentaire $\overline{A}$ de cet événement dans l'univers.
- L'ensemble vide est appelé événement **impossible**.
- Ω est appelé l'événement **certain**.
- On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** si l'événement $A \cap B$ est impossible.
- On appelle **système complet d'événements** toute partition de l'univers formée d'événements.

Les propriétés suivantes des tribus découlent directement de la définition.

Proposition 1.6

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble Ω. On a alors les résultats suivants :

Ensemble vide $\varnothing \in \Omega$.

Stabilité par intersection dénombrable $\forall (A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Stabilité par union ou intersection finie $\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n, \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

Définition 1.4 Espace probabilisable

On appelle **espace probabilisable** tout couple $(\Omega, \mathcal{A})$ où $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω.

Tribu engendrée

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$. On appelle **tribu engendrée par** $\mathcal{C}$ la plus petite tribu de Ω contenant $\mathcal{C}$. C'est l'intersection des tribus contenant $\mathcal{C}$.

Jeu de pile ou face infini

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer une infinité de fois une pièce. On associe face à 0 et pile à 1. On peut alors considérer l'univers $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$. On note P_n l'événement «obtenir pile au lancer n» autrement dit

$$P_n = \{\omega \in \Omega,\ \omega_n = 1\}$$

L'univers Ω est généralement muni de la tribu engendrée par $\{P_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exemple 1.4

- L'événement «obtenir uniquement pile à partir du lancer n» est $\bigcap_{k\geq n} P_k$.
- L'événement «obtenir au moins un pile à partir du lancer n» est $\bigcup_{k\geq n} P_k$.
- L'événement «obtenir une infinité de fois pile» est $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} P_k$.

1.3 Espace probabilisé

Définition 1.5 Probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ telle que

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- $\mathbb{P}$ est σ-additive : pour toute suite d'événements **deux à deux disjoints**, $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Définition 1.6 Espace probabilisé

On appelle **espace probabilisé** tout triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Proposition 1.7 Propriétés des probabilités

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- Soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$. Alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- Soit $A \in \mathcal{A}$. Alors $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- Soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- Soit $\mathcal{S}$ un système complet d'événements. Alors $\sum_{A\in\mathcal{S}} \mathbb{P}(A) = 1$.

Définition 1.7 Distribution de probabilités discrète

On appelle **distribution de probababilités discrète** sur un ensemble Ω une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega} \in (\mathbb{R}_+)^\Omega$ telle que $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.

Proposition 1.8 Support d'une distribution de probababilités discrète

Si $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une distribution de probabilités discrète, alors son support $\{\omega \in \Omega,\ p_\omega \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Proposition 1.9

Soient Ω un univers **au plus dénombrable**.

- Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Alors la famille $(\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$ est sommable de somme 1.
- Soit $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilités discrète. Alors il existe une unique probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Exemple 1.5

On peut définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ en posant $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2^{n+1}} \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$.

Pile ou face infini

On considère un jeu de pile ou face infini modélisé par l'univers $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$. On peut prouver que l'on ne peut pas munir $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ d'une probabilité «raisonnable», c'est-à-dire telle que la probabilité d'obtenir «pile» ou «face» lors d'un lancer donné soit égale à $\dfrac{1}{2}$.
On munit alors Ω de la tribu $\mathcal{A}$ engendrée par les événements «obtenir pile au $n^{\text{ème}}$ lancer» pour $n \in \mathbb{N}^*$. Un théorème de Kolmogorov assure l'existence d'une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\tilde{\omega} \in \{0,1\}^n$

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega,\ \forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ \omega_i = \tilde{\omega}_i\}\right) = \frac{1}{2^n}$$

Autrement dit, il existe une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que la probabilité d'obtenir une séquence **finie** donnée au cours des n premiers lancers est $\dfrac{1}{2^n}$.
On peut alors prouver sans peine que les événements «obtenir pile au $n^{\text{ème}}$ lancer» ou «obtenir face au $n^{\text{ème}}$ lancer» sont de probabilité $\dfrac{1}{2}$.

1.4 Propriétés des probabilités

Proposition 1.10 Continuité croissante et décroissante

Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Continuité croissante Si (A_n) est **croissante** pour l'inclusion, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right)$.

Continuité décroissante Si (A_n) est **décroissante** pour l'inclusion, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right)$.

Remarque. La continuité croissante et décroissante donne en particulier l'existence des limites des suites $(\mathbb{P}(\mathrm{A}_n))$ dans le cas où la suite d'événements (A_n) est monotone.

Corollaire 1.2

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements (non nécessairement monotone) d'un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

Exemple 1.6

Dans un jeu de pile ou face infini, considérons l'événement A : «obtenir uniquement des faces». Alors $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Posons $E_n = \bigcap_{k=0}^{n} F_k$. Alors $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n)$. Mais $\mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\mathbb{P}(A) = 0$.

Corollaire 1.3

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Remarque. On peut donner un sens à l'inégalité précédente même si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ diverge, puisqu'étant à termes positifs, elle diverge dans ce cas vers $+\infty$.

Définition 1.8 Evénement négligeable/presque sûr

Soit A un événement d'un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Evénement négligeable On dit que A est **négligeable** si $\mathbb{P}(A) = 0$.

Evénement presque sûr On dit que A est **presque sûr** si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Attention !

- A peut être un événement négligeable sans que $A = \varnothing$.
- A peut être un événement presque sûr sans que $A = \Omega$.

Proposition 1.11

- Une réunion **finie ou dénombrable** d'événements négligeables est un événement négligeable.
- Une intersection **finie ou dénombrable** d'événements presque sûrs est un événement presque sûr.

Définition 1.9 Système quasi-complet d'événements

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On dit que $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \mathcal{A}^{\mathrm{I}}$ est un **système quasi-complet** d'événements si les A_i sont deux à deux disjoints et si $\bigsqcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i$ est un événement presque sûr.

1.5 Probabilité conditionnelle

Définition 1.10 Probabilité conditionnelle

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{A}^2$ tel que $\mathbb{P}(\mathrm{B}) \neq 0$. On appelle **probabilité de** A **sachant** B notée $\mathbb{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B})$ ou $\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ le quotient $\dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})}$.

Attention ! La notation $\mathbb{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B})$ peut être trompeuse. En effet, $\mathrm{A} \mid \mathrm{B}$ ne désigne pas un événement : il n'existe pas de notion d'«événement conditionnel».

Proposition 1.12

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(\mathrm{B}) \neq 0$. Alors $\mathbb{P}_{\mathrm{B}} : \mathrm{A} \in \mathcal{A} \mapsto \mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Proposition 1.13 Formule des probabilités composées

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n) \in \mathcal{A}^n$ tel que $\mathbb{P}(\mathrm{A}_1 \cap \dots \cap \mathrm{A}_{n-1}) \neq 0$. Alors

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_1 \cap \dots \cap \mathrm{A}_n) = \mathbb{P}(\mathrm{A}_1)\mathbb{P}(\mathrm{A}_2 \mid \mathrm{A}_1)\mathbb{P}(\mathrm{A}_3 \mid \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2) \dots \mathbb{P}(\mathrm{A}_n \mid \mathrm{A}_1 \cap \dots \cap \mathrm{A}_{n-1})$$

Proposition 1.14 Formule des probabilités totales

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{S}$ un système complet d'événements et B un événement. Alors

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \sum_{\mathrm{A}\in\mathcal{S}} \mathbb{P}(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{A})$$

Remarque. La propriété reste vraie si $\mathcal{S}$ est un sytème-quasi complet d'événements.

1.6 Événements indépendants

Définition 1.11 Événements indépendants

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On dit que deux événements A et B sont **indépendants** si $\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B})$.

Proposition 1.15

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements avec $\mathbb{P}(\mathrm{B}) > 0$. Alors A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A})$

Attention ! Dire que deux événements sont indépendants ne signifient pas qu'ils sont incompatibles.
Au contraire, deux événements incompatibles ne sont généralement pas indépendants à moins que l'un d'entre eux soit de probabilité nulle.

Définition 1.12 Famille d'événements indépendants

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements. On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements **mutuellement indépendants** si, pour toute partie **finie** J de I

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Remarque. Il découle directement de la définition que toute sous-famille d'une famille d'événements mutuellement indépendants est encore une famille d'événements mutuellement indépendants.

Exemple 1.7 Pile ou face infini

Si l'on considère le jeu de pile ou face infini muni de la tribu et de la probabilité vues précédemment, la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où P_n est l'événement «obtenir pile au $n^{\text{ème}}$ lancer» est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Attention ! Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants alors les A_i sont indépendants deux à deux. Cependant, la réciproque est fausse.

Exemple 1.8

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés. On munit l'univers de la probabibilité uniforme. On considère les événements suivants :

- A : «le résultat du premier dé est pair» ;
- B : «le résultat du deuxième dé est pair» ;
- C : «la somme des résultats des deux dés est pair».

Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Proposition 1.16 Indépendance et complémentaire

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si A et B sont des événements indépendants, les événements A et $\overline{B}$ sont également indépendants.

Exercice 1.3

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On considère une famille $(B_i)_{i \in I}$ telle que pour tout $i \in I$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$. Montrer que $(B_i)_{i \in I}$ est également une famille d'événements mutuellement indépendants.

2 Variables aléatoires discrètes

2.1 Définitions

Définition 2.1 Variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle **variable aléatoire discrète** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application X définie sur Ω telle que

- $X(\Omega)$ est au plus dénombrable ;
- pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

Remarque. Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, alors $X(\mathcal{A}) = \{X(A),\ A \in \mathcal{A}\} = \mathcal{P}(X(\Omega))$.

Notation 2.1

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$, $X^{-1}(A)$ est un élément de $\mathcal{A}$ donc un événement. L'événement $X^{-1}(A)$ se note plutôt $X \in A$.
L'événement $X^{-1}(\{x\})$ se note plutôt $X = x$.
On peut alors parler des probabilités $\mathbb{P}(X \in A)$ et $\mathbb{P}(X = x)$.
Si X est une variable aléatoire réelle et $x \in \mathbb{R}$, alors $\mathbb{P}(X \in]-\infty, x])$ et $\mathbb{P}(X \in [x, +\infty[)$ se note alors plutôt $\mathbb{P}(X \leq x)$ et $\mathbb{P}(X \geq x)$ respectivement.

Définition 2.2 Loi d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle **loi** de X l'application

$$\mathbb{P}_X : \begin{cases} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{cases}$$

Notation 2.2

Si X et Y sont des variables aléatoires de même loi, on note $X \sim Y$.
Lorsque X suit une loi $\mathcal{L}$ donnée, on notera également $X \sim \mathcal{L}$.

Proposition 2.1

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors la loi $\mathbb{P}_X$ de X est une probabilité sur l'espace probabilisable $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$.

Corollaire 2.1

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors $\mathbb{P}_X$ est entièrement déterminée par la donnée des $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Remarque. C'est pour cela qu'en pratique, lorsque l'on demande la loi d'une variable aléatoire X sur Ω, on ne demande pas $\mathbb{P}(X \in A)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ mais $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Définition 2.3 Image d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors pour toute application f définie sur $X(\Omega)$, $f(X) = f \circ X$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Proposition 2.2

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. Si $X \sim Y$, alors pour toute application f, $f(X) \sim f(Y)$.

Définition 2.4 Loi conditionnelle

Soient X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) > 0$. On appelle **loi de X conditionnée par l'événement** B l'application

$$P_{X|B} : \begin{cases} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P(X \in A \mid B) \end{cases}$$

Remarque. A nouveau, quand on demande en pratique la loi conditionnelle de X conditionnée par l'événement B, on se contente de donner $P(X = x \mid B)$ pour tout $x \in X(\Omega)$ plutôt que $P(X \in A \mid B)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$.

2.2 Lois usuelles

Définition 2.5 Loi géométrique

Soient X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On dit que X suit la **loi géométrique de paramètre** p si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1}p$$

Pour abréger, on dit que X suit la loi $\mathcal{G}(p)$ ou encore $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Interprétation de la loi géométrique

On considère une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Le rang d'apparition du premier succès suit une loi géométrique de paramètre p.

Proposition 2.3 Loi sans mémoire

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. X suit une loi géométrique si et seulement si

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(X > m + n \mid X > m) = \mathbb{P}(X > n)$$

Définition 2.6 Loi de Poisson

Soient X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que X suit la **loi de Poisson de paramètre** λ si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

Pour abréger, on dit que X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ ou encore $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Proposition 2.4 Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $np_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda > 0$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Remarque. On dit que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

2.3 Couples et uplets de variables aléatoires

Remarquons tout d'abord que si X et Y sont des variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, il en est de même du couple (X, Y), c'est-à-dire de l'application $\omega \in \Omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$.

Définition 2.7 Loi conjointe, lois marginales

Soient X et Y des variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
La loi du couple (X, Y) est appelée **loi conjointe** des variables aléatoires X et Y.
Les lois de X et Y sont appellées les **lois marginales** du couple (X, Y).

Proposition 2.5

Soient X et Y des variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
La loi conjointe de X et Y permet de retrouver les lois marginales. Plus précisément

$$\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}((X, Y) = (x, y))$$
$$\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}((X, Y) = (x, y))$$

Attention ! Les lois marginales ne permettent pas de retrouver la loi conjointe (à moins que les variables aléatoires soient indépendantes).

Définition 2.8 Vecteur aléatoire

De même, si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors $(X_1, \dots, X_n)$ est une variable aléatoire appelée **vecteur aléatoire**. Les lois de $X_1, \dots, X_n$ sont les lois marginales de ce vecteur aléatoire.

2.4 Variables aléatoires indépendantes

Définition 2.9 Couple de variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y des variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Les variables aléatoires X et Y sont dites **indépendantes** si

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega)),\ P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Proposition 2.6

Soient X et Y des variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x)P(Y = y)$$

Notation 2.3

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, on note $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Définition 2.10 Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille **finie** de variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On dit que $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de variables aléatoires **mutuellement indépendantes** si

$$\forall (A_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{P}(X_i(\Omega)),\ P\left(\bigcap_{i \in I} X_i \in A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

Une famille **infinie** de variables aléatoires est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes si toute sous-famille finie l'est.

Proposition 2.7

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille **finie** de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
$(X_i)_{i \in I}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes si et seulement si

$$\forall (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i(\Omega),\ P\left(\bigcap_{i \in I} X_i = x_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Remarque. Toute sous-famille d'une famille finie de variables mutuellement indépendantes est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Attention ! Si des variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, alors ces variables aléatoires sont indépendantes deux à deux mais la réciproque est fausse.

Exemple 2.1

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $Z = XY$. Alors X, Y, Z sont deux à deux indépendantes mais pas mutuellement indépendantes.

Exercice 2.1

Montrer que $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants si et seulement si $(\mathbb{1}_{A_i})_{i \in I}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Proposition 2.8

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors, pour toutes applications f et g définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Remarque. De manière plus condensée, $X \perp\!\!\!\perp Y \implies f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

Proposition 2.9 Lemme des coalitions

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soient $m \in [\![1, n-1]\!]$, f une application définie sur $\prod_{k=1}^{m} X_k(\Omega)$ et g une application définie sur $\prod_{k=m+1}^{n} X_k(\Omega)$. Alors, $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Exemple 2.2

Si X, Y et Z sont trois variables aléatoires discrètes réelles mutuellement indépendantes, alors $\cos(X^2 + Y^2)$ et e^Z sont indépendantes.

Proposition 2.10

Soit $(\mathcal{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de lois discrètes. Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \sim \mathcal{L}_n$.

Remarque. Une suite de variables aléatoires indépenddantes et de même loi est appellée une suite de variables aléatoires **indépendantes et identiquement distribuées** (en abrégé, suites de variables aléatoires i.i.d.).

Jeu de pile ou face infini

La proposition précédente permet de donner un cadre théorique au jeu de pile ou face infini. En effet, on peut affirmer l'existence d'un espace probabilisé pour lequel il existe une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre donné (1/2 si la pièce lancée est équilibrée).

3 Espérance, variance et covariance

3.1 Espérance

Définition 3.1 Espérance d'une variable aléatoire dicrète réelle positive

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$. L'**espérance** de X est la somme, dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, de la famille $(x\mathbb{P}(X = x))_{x\in X(\Omega)}$. On la note $\mathbb{E}(X)$.

Proposition 3.1 Formule d'antirépartition

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

Définition 3.2 Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle

Soit X une variable aléatoire discrète réelle ou complexe sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X est **d'espérance finie** si la famille $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'**espérance** de X. On la note $\mathbb{E}(X)$.

Remarque. Il est primordial de remarquer que l'espérance d'une variable aléatoire ne dépend que de sa **loi**.

Remarque. Si $X(\Omega)$ est fini, X admet toujours une espérance finie.
Si $X(\Omega)$ est dénombrable, on peut écrire $X(\Omega) = \{x_n, \ n \in \mathbb{N}\}$. Alors X est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument et, dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X_n)$.

Remarque. Une variable aléatoire d'espérance finie est dite centrée si $\mathbb{E}(X) = 0$.

Notation 3.1

Si X est d'espérance finie, on note $X \in L^1$.

Proposition 3.2 Espérance des lois usuelles

- Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$.
- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

Proposition 3.3 Formule de transfert

Soient X une variable aléatoire discrète et $f : X(\Omega) \to \mathbb{C}$. Alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable et, dans ce cas,

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$$

Remarque. L'intérêt de la formule de transfert est qu'elle permet de calculer l'espérance de $f(X)$ sans connaître la loi de $f(X)$ mais uniquement la loi de X.

Exercice 3.1

Soit X une variable suivant la loi géométrique de paramètre p. Déterminer l'espérance de $1/X$.

Proposition 3.4 Propriétés de l'espérance

Linéarité Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes complexes d'espérances finies. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors $\lambda X + \mu Y$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$.

Positivité Soit X une variable aléatoire discrète positive. Alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

Croissance Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles d'espérances finies. Si $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

Inégalité triangulaire Soit X une variable aléatoire d'espérance finie. Alors $|X|$ est d'espérance finie et $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.

Proposition 3.5

L'ensemble des variables aléatoires discrètes réelles (resp. complexes) de L^1 forment un (resp. un $\mathbb{C}$-espace vectoriel).

Proposition 3.6

Soient X une variable aléatoire complexe et Y une variable aléatoire réelle telles que $|X| \leq Y$. Si $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$.

Proposition 3.7 Espérance et indépendance

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes complexes **indépendantes** d'espérances finies. Alors XY est d'espérance finie et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Corollaire 3.1 Espérance et indépendance

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes complexes **mutuellement indépendantes** d'espérances finies. Alors $\prod_{i=1}^{n} X_i$ est d'espérance finie et

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

3.2 Variance

Notation 3.2

Si X est une variable aléatoire réelle telle que X^2 est d'espérance finie, on note $X \in L^2$.

Proposition 3.8

Soit X une variable aléatoire réelle telle que X^2 est d'espérance finie. Alors X est d'espérance finie.

Remarque. De manière plus condensée, $X \in L^2 \implies X \in L^1$.

Proposition 3.9

L'ensemble des variables aléatoires discrètes réelles de L^2 forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 3.2

Montrer que l'application $(X, Y) \in (L^2)^2 \mapsto \mathbb{E}(XY)$ est bien définie, bilinéaire, symétrique et positive.

Proposition 3.10 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(X, Y) \in (L^2)^2$. Alors $XY \in L^1$ et
$$\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$$

Définition 3.3 Variance et écart-type

Soit $X \in L^2$.

- On appelle **variance** de X le réel positif
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$
- On appelle **écart-type** de X le réel
$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Remarque. La variance et l'écart-type d'une variable aléatoire ne dépendent que de sa **loi**.

Remarque. On dit qu'une variable aléatoire X est **réduite** si $\mathbb{V}(X) = 1$.

Proposition 3.11

Soit X une variable aléatoire discrète **positive**. Si $\mathbb{E}(X) = 0$, alors X est presque sûrement nulle.

Exercice 3.3

Soit X une variable aléatoire discrète réelle de variance nulle. Montrer que X est presque sûrement constante égale à $\mathbb{E}(X)$, autrement dit que $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$.

Proposition 3.12 Théorème de König-Huygens

Soit $X \in L^2$. Alors
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Proposition 3.13 Variance d'une fonction affine d'une variable aléatoire

Soient $X \in L^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

Remarque. Si X est une variable aléatoire admettant une variance finie non nulle, alors $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est **centrée réduite**.

Proposition 3.14 Variance des lois usuelles

- Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.
- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

3.3 Covariance

Définition 3.4 Covariance de deux variables aléatoires

Soit $(X, Y) \in (L^2)^2$. On appelle **covariance de** X **et** Y le réel

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right)$$

Remarque. $\mathbb{V}(X) = \mathrm{Cov}(X, X)$

Remarque. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathrm{Cov}(X, Y)^2 \leq \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$$

ou encore

$$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$$

Remarque. La covariance est «presque» un produit scalaire. C'est une forme bilinéaire symétrique positive mais pas nécessairement définie.

Remarque. Si $(X, Y) \in (L^2)^2$, alors, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $X - \mathbb{E}(X)$ et $Y - \mathbb{E}(Y)$, on obtient

$$\mathrm{Cov}(X, Y)^2 \leq \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$$

ou encore

$$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$$

Proposition 3.15

Soit $(X, Y) \in (L^2)^2$. Alors

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Corollaire 3.2 Covariance de variables aléatoires

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes réelles **indépendantes** de L^2, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Attention ! La réciproque est fausse. Il suffit par exemple de prendre $X \sim \mathcal{U}(\{-1, 1\})$ et $Y = -X$. On a bien $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ mais X et Y ne sont évidemment pas indépendantes.

Proposition 3.16 Variance d'une somme et théorème de Pythagore

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes de L^2. Alors

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Si de plus, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$,

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k)$$

Remarque. Notamment si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires **deux à deux indépendantes** de L^2, alors

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k)$$

3.4 Inégalités classiques

Proposition 3.17 Inégalité de Markov

Soient X une variable aléatoire discrète réelle **positive** d'espérance finie et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Si on ne suppose plus X positive, on peut affirmer que

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$$

Corollaire 3.3 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soient $X \in L^2$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$P\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma(X)^2}{\varepsilon^2}$$

Corollaire 3.4 Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi et admettant des variances finies. Alors, en posant $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et en notant m l'espérance commune des X_k,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Remarque. On peut en fait prouver à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev qu'en notant σ^2 la variance commune des X_k,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

La loi faible des grands nombres s'en déduit immédiatement.

4 Fonctions génératrices

Définition 4.1 Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X la fonction G_X définie par

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k$$

Remarque. A nouveau, la fonction génératrice d'une variable aléatoire ne dépend que de sa **loi**.

Remarque. Puisque la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=k)$ converge (vers 1),

- la série entière $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=k)t^k$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 ;
- elle converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1 ;
- sa somme G_X est continue sur ce même disque ;
- G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

Fonctions génératrices des lois usuelles

- Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $G_X(t) = 1-p+pt$.
- Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $G_X(t) = (1-p+pt)^n$.
- Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$.
- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

Proposition 4.1 Fonction génératrice et loi

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

Proposition 4.2

Deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ sont égales si et seulement si elles ont la même fonction génératrice.

Proposition 4.3 Fonction génératrice et espérance

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors X admet une espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 et, dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$.

Remarque. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si G_X est deux fois dérivable en 1, alors $X \in L^2$ et $\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$.

Proposition 4.4 Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors

$$G_{\sum_{k=1}^n X_k} = \prod_{k=1}^n G_{X_k}$$

Exemple 4.1

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ ont la même loi.

Exercice 4.1

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Déterminer la loi de $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$.