Devoir surveillé n°10 : corrigé

Problème 1 —

Partie I – Cas d'une série géométrique

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est une série géométrique de raison q. On sait qu'elle converge *si et seulement si* $|q| < 1$.

2. On sait que

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = q^{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} r_k = \frac{1}{1-q}\sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \frac{q}{1-q}\sum_{k=0}^{n} q^k$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ converge vers $\frac{1}{1-q}$ donc $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}$ puis $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} r_k = \frac{q}{(1-q)^2}$. On en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} r_n$ converge et a pour somme $\frac{q}{(1-q)^2}$.

Partie II – Cas d'une série de Riemann

4. La série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^\alpha}$ converge *si et seulement si* $\alpha > 1$.

5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{n+1}^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha} \leqslant R_n \leqslant \int_{n}^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$$

ou encore

$$\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{n+1}^{+\infty} \leqslant R_n \leqslant \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{n}^{+\infty}$$

ou enfin

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

En multipliant par $n^{\alpha-1}$, on obtient

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} \leqslant n^{\alpha-1}R_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1}$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1}R_n = \frac{1}{\alpha-1}$ via le théorème des gendarmes. Autrement dit, $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

6. La série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann qui ne converge que si $\alpha - 1 > 1$. Puisque c'est une série à termes positifs, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} R_n$ est de même nature : elle ne converge donc que si $\alpha > 2$.

Partie III – Cas de la série harmonique alternée

7. On trouve évidemment $\int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la question précédente montre que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-1)^k x^{k-1} \, dx = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k \, dx$$

On reconnaît là la somme des termes d'une suite géométrique de raisons $-x$ donc

$$S_n = -\int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} \, dx = -\int_0^1 \frac{dx}{1+x} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{1+x}$$

On calcule aisément

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$$

de sorte que

$$S_n = -\ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx$$

9. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$$

donc, par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx \leqslant \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx = 0$. Puis la suite de terme général $(-1)^n$ est bornée, on a également $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx = 0$. La question précédente permet d'affirmer que (S_n) converge vers $-\ln(2)$. Autrement dit, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ converge et a pour somme $-\ln(2)$.

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n - S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{1+x}$$

A l'aide d'une intégration par parties,

$$R_n = (-1)^n \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \right]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1} \, dx}{(n+1)(1+x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1} \, dx}{(1+x)^2}$$

A nouveau, pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant \frac{x^n}{(1+x)^2} \leqslant x^n$$

donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1} \, dx}{(1+x)^2} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

On en déduit donc que $\int_0^1 \frac{x^{n+1} \, dx}{(1+x)^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. On sait également que $\frac{(-1)^n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi

$$\frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1} \, dx}{(1+x)^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et finalement

$$R_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Les constantes recherchées sont donc $\beta = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 2$.

11. La question précédente montre que $R_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2} a_{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Posons $v_n = R_n + \frac{1}{2} a_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge. Par ar ailleurs, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ converge donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_{n+1}$ converge également. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = -\frac{1}{2} a_{n+1} + v_n$ donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} R_n$ converge comme combinaison linéaire de deux séries convergentes.

Problème 2 — Puissances de matrices

Partie I –

1. Posons $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On a clairement $\mathcal{A} = \text{vect}(E_1, E_2, E_3)$ donc $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. De plus, la famille (E_1, E_2, E_3) est libre donc c'est une base de $\mathcal{A}$. Ainsi $\dim \mathcal{A} = 3$.

2. Comme $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, c'est a fortiori un sous-groupe de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. De plus, $I_3 \in \mathcal{A}$ (choisir $a = b = 1$ et $c = 0$). Enfin, pour $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & -c' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 & 0 \\ 0 & bb' - cc' & bc' + cb' \\ 0 & -bc' - cb' & bb' - cc' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & -c' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$$

Ceci montre que $\mathcal{A}$ est stable par produit et commutatif.

3. On calcule $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Tout d'abord, on a bien $I_3, M, M^2 \in \mathcal{A}$. Soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda I_3 + \mu M + \nu M^2 = 0$. Ceci équivaut à $\begin{cases} \lambda - 2\mu + 4\nu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \\ -\mu - 2\nu = 0 \end{cases}$. On voit facilement que l'unique solution de ce système est le triplet nul. La famille (I_3, M, M^2) est donc libre. Puisque $\dim \mathcal{A} = 3$, cette famille est une base de $\mathcal{A}$.

4. On obtient $M^3 = 2M - 4I_3$.

Partie II –

1. Comme $\mathcal{A}$ est un anneau, il est stable par produit. On peut donc montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \in \mathcal{A}$, d'où l'existence des réels a_k, b_k et c_k.

2. En écrivant $M^{k+1} = MM^k$, on trouve $\begin{cases} a_{k+1} = -2a_k \\ b_{k+1} = b_k - c_k \\ c_{k+1} = b_k + c_k \end{cases}$.

3. On a $z_{k+1} = b_{k+1} + ic_{k+1} = (b_k - c_k) + i(b_k + c_k) = (1+i)z_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite (z_k) est donc géométrique de raison $1 + i$ et de premier terme $z_0 = b_0 + ic_0 = 1$: on a alors $z_k = (1+i)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Enfin $b_k = \text{Re}(z_k) = \text{Re}\left((1+i)^k\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4. En utilisant la question **II.2**, on montre que $b_{k+2} = b_{k+1} - c_{k+1} = b_{k+1} - b_k - c_k = 2b_{k+1} - 2b_k$. La suite (b_k) est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 2$. Les racines de ce polynômes sont donc $1 \pm i$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que $b_k = \lambda(1+i)^k + \mu(1-i)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or $b_0 = b_1 = 1$ donc $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_k = \frac{(1+i)^k + \overline{(1+i)^k}}{2} = \text{Re}\left((1+i)^k\right)$.

5. Comme u_0, u_1 et u_2 sont entiers et que u_{n+3} s'exprime comme une combinaison linéaire à coefficients entiers de u_n et u_{n+1}, on prouve par récurrence triple ou par récurrence forte que la suite (u_n) est à valeurs entières.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{tr}(M^{n+3}) = \text{tr}(M^n M^3) = \text{tr}(M^n(2M - 4I_3)) = 2\,\text{tr}(M^{n+1}) - 4\,\text{tr}(M^n)$ en utilisant la question **I.4** et la linéarité de la trace. De plus, $\text{tr}(M^0) = \text{tr}(I_3) = 3$, $\text{tr}(M^1) = 0$ et $\text{tr}(M^2) = 4$: les suites (u_n) et $(\text{tr}(M^n))$ ont les mêmes trois premiers termes et vérifient la même relation de récurrence d'ordre 3, elles sont donc égales.

7. 2 divise bien $u_2 = 2$: on peut donc supposer p impair. Posons $n = \frac{p-1}{2}$.
Puisque (a_k) est géométrique de raison -2 et de premier terme $a_0 = 1$, on a $a_k = (-2)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$u_p = a_p + 2b_p = (-2)^p + 2\operatorname{Re}((1+i)^p) = -2^p + 2\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\operatorname{Re}(i^k)$$

Or pour k impair, $\operatorname{Re}(i^k) = 0$ donc

$$u_p = -2^p + \sum_{k=0}^{n}\binom{p}{2k}(-1)^k = -(2^p - 2) + 2\sum_{k=1}^{n}\binom{p}{2k}(-1)^k$$

D'après le petit théorème de Fermat, p divise $2^p - 2$ et puisque pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $2 \leqslant 2k \leqslant p-1$, p divise également $\binom{p}{2k}$ d'après le rappel de l'énoncé. Ainsi p divise u_p.