

## Théorème de Rolle

### EXERCICE 1.

Soit  $P$  un polynôme réel non-constant dont les racines sont réelles et simples.

1. Montrer que les racines de  $P'$  sont aussi réelles et simples.
2. En déduire que pour tout  $\alpha > 0$  les racines de  $P^2 + \alpha$  sont simples.

### EXERCICE 2.★

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable admettant une limite  $\ell$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Prouver l'existence de  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f'(c) = 0$ .

### EXERCICE 3.★

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  et  $f$  une fonction de classe  $C^{n-1}$  sur  $[a, b]$ ,  $n$  fois dérivable sur  $]a, b[$ . Soient

$$a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$$

et supposons que

$$f(a_0) = f(a_1) = \dots = f(a_n).$$

Montrer qu'il existe alors  $c \in ]a, b[$  tel que  $f^{(n)}(c) = 0$ .

### EXERCICE 4.

Soient  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $A$  et  $B$  deux points distincts de sa courbe représentative  $\mathcal{C}$  tels que  $B$  est sur la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $A$ . Montrer qu'il existe un point  $M$  de  $\mathcal{C}$ , distinct de  $A$ , tel que  $A$  est sur la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M$ .

## Théorème des accroissements finis

### EXERCICE 5.

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer les inégalités suivantes :

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$ ;
2.  $\forall x \geq 0, 0 \leq \ln(1+x) \leq x$ .

### EXERCICE 6.★

Etudier la limite en  $+\infty$  de l'expression

$$(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}.$$

### EXERCICE 7.★★

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  continues sur  $[a, b]$  et dérivables sur  $]a, b[$ .

1. Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

2. Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions définies et continues sur  $I$ , dérivables sur  $I \setminus \{x_0\}$  telles que  $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ ,  $g'(x) \neq 0$  et telles que le rapport

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tende vers  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ . Montrer que le rapport

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

est défini pour tout  $x \neq x_0$  et qu'il tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ .  
Le résultat démontré s'appelle la *règle de l'Hospital*.

3. Retrouver, en utilisant la règle de l'Hospital, les développements limités suivants au point 0,

$$\sin(x) = x + o(x), \quad \cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

### EXERCICE 8.★

Démontrer que :

1.  $\forall 0 < x < 1, \arcsin(x) < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ;
2.  $\forall x > 0, \arctan(x) > \frac{x}{1+x^2}$ .

**EXERCICE 9.★★**

Soit  $f$ , une application dérivable de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . On ne suppose pas que la dérivée  $f'$  est continue sur  $[a, b]$ .

1. On considère les fonctions définies par

$$\phi(x) = \begin{cases} f'(a) & \text{si } x = a, \\ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } a < x \leq b. \end{cases}$$

et

$$\psi(x) = \begin{cases} f'(b) & \text{si } x = b, \\ \frac{f(b) - f(x)}{b - x} & \text{si } a \leq x < b. \end{cases}$$

Démontrer que  $\phi$  et  $\psi$  sont continues sur  $[a, b]$ .

2. Démontrer que l'application dérivée  $f'$  vérifie le théorème des valeurs intermédiaires : si  $f'(a) < 0$  et  $f'(b) > 0$ , alors il existe  $a < c < b$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Variations****EXERCICE 10.**

Soient  $p$  et  $q$ , deux nombres réels et  $n$ , un entier strictement positif. Démontrer que le polynôme  $X^n + pX + q$  ne peut avoir plus de trois racines réelles distinctes.

**EXERCICE 11.★★**

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  dérivable telle que  $f^2 + (1 + f')^2 \leq 1$ . Montrer que  $f$  est nulle.

**EXERCICE 12.**

Soit  $f$  une application dérivable de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . On ne suppose pas que la dérivée  $f'$  est continue. On va cependant montrer que  $f'$  vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Soit  $y$  un réel strictement compris entre  $f'(a)$  et  $f'(b)$ . On souhaite donc montrer que  $f'$  prend la valeur  $y$  sur l'intervalle  $]a, b[$ . Pour simplifier, on supposera dans un premier temps  $f'(a) < f'(b)$ .

- On pose  $g(x) = f(x) - xy$  pour  $x \in [a, b]$ . Justifier que  $g$  admet un minimum sur  $[a, b]$ .
- Montrer que ce minimum ne peut être atteint ni en  $a$  ni en  $b$ .
- Conclure.
- Traiter le cas où  $f'(a) > f'(b)$ .

**EXERCICE 13.**

Soit  $f$ , une application de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$ , telle que  $f(0) = 0$  et vérifiant

$$\forall x \geq 0, \quad f'(x) \leq f(x).$$

En étudiant les variations de la fonction  $g : x \mapsto e^{-x}f(x)$ , démontrer que la fonction  $f$  est identiquement nulle.

**Equations fonctionnelles****EXERCICE 14.**

Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$

**EXERCICE 15.**

Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables en 0 telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

**EXERCICE 16.★★**

Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = 2f(x).$$

**Dérivées successives****EXERCICE 17.★**

On pose pour tout entier naturel  $n \geq 1$  et tout réel  $x$  strictement positif,

$$f_n(x) = x^{n-1} e^{1/x}.$$

On pose  $g_n = f_n^{(n)}$  pour tout  $n \geq 1$ .

1. Justifier l'existence de  $g_n$  et prouver que pour tout  $x$  positif,

$$g_{n+1}(x) = x g_n'(x) + (n+1) g_n(x).$$

2. Montrer que pour tout  $n \geq 1$  et tout  $x$  positif,

$$g_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{1/x}.$$

**EXERCICE 18.**

Calculer la dérivée  $n$ -ième de la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + 1)e^x$ .

**EXERCICE 19. ★★**

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $P_n$  la fonction polynôme définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$x \mapsto P_n(x) = (x - a)^n(x - b)^n.$$

1. Calculer à l'aide de la formule de Leibniz  $P_n^{(n)}(x)$  pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ .
2. Calculer d'une autre manière  $P_n^{(n)}(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  lorsque  $a = b$ .
3. En déduire la formule de Vandermonde

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

**EXERCICE 20.**

Soit  $f$  la fonction à valeurs réelles définie sur  $I = ]-1, 1[$  par

$$f : x \in I \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , sa dérivée  $n$ -ème s'écrit

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

où  $P_n$  est un polynôme réel.

2. Montrer que le monôme de plus haut degré de  $P_n$  est  $n!x^n$ .

3. Prouver que  $\forall x \in I$  :

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 0.$$

4. Prouver, en utilisant la formule de Leibniz, que pour tout  $n \geq 1$  et  $\forall x \in I$ ,

$$P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) + n^2(1-x^2)P_{n-1}(x).$$

5. En déduire la valeur de  $P_n(0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (On distinguera les cas  $n$  pair et  $n$  impair et on exprimera le résultat sous la forme d'un quotient de factorielles).
6. Prouver que pour tout  $n \geq 1$  et tout  $x \in I$ ,

$$P'_n(x) = n^2 P_{n-1}(x).$$

7. En déduire une technique de calcul des polynômes  $P_n$ . A titre d'exemple, expliciter  $f^{(5)}(x)$  pour tout  $x$  réel.

**EXERCICE 21.**

Soit  $f : x \mapsto \arctan(x)$ .

1. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique polynôme  $P_{n-1}$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}.$$
2. Préciser le degré, la parité et le coefficient dominant de  $P_n$ .
3. Déterminer les limites de  $f^{(n)}$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  pour  $n \geq 1$ .
4. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , toutes les racines de  $P_n$  sont réelles et simples. Raisonner par récurrence en utilisant le théorème de Rolle.

**EXERCICE 22.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On considère l'équation différentielle d'inconnue  $y$  suivante :

$$(E) : y' - (nx - 1)y = 0$$

1. Résoudre (E) et déterminer la solution  $f_n$  telle que  $f_n(0) = 1$ .
2. Trouver l'extremum de cette fonction. On note  $(u_n, v_n)$  les coordonnées du point correspondant sur le graphe de  $f_n$ .
3. Déterminer les limites  $u$  et  $v$  des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  et donner un équivalent de  $v_n - u$ .
4. En utilisant la formule de Leibniz, montrer que  $f_n^{(2n+1)}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ .

**EXERCICE 23.**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2n}}$$

2. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 24.**

1. Soient  $p$  et  $q$  deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  telles que  $p \leq q$  sur  $\mathbb{R}$ . Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  telles que  $u'' + pu = 0$  et  $v'' + qv = 0$ . On suppose que  $u$  s'annule en des réels  $a$  et  $b$  avec  $a < b$  mais qu'elle ne s'annule pas sur  $]a, b[$ .
  - a. On pose  $W = u'v - uv'$ . Déterminer  $W'$ .
  - b. En déduire que  $v$  s'annule sur  $[a, b]$ .
2. Application. Soient  $r$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f'' + rf = 0$  et  $M \in \mathbb{R}_+^*$ .
  - a. On suppose  $r \geq M^2$ . Montrer que tout intervalle fermé de longueur  $\frac{\pi}{M}$  contient au moins un zéro de  $f$ .
  - b. On suppose  $r \leq M^2$ . On suppose que  $f$  s'annule en des réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$  mais qu'elle ne s'annule pas sur  $]a, b[$ . Montrer que  $b - a \geq \frac{\pi}{M}$ .

**Formules de Taylor****EXERCICE 25.★★**

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tel que  $f(0) = 1$  et  $\forall x \geq \frac{1}{2}, f(x) = 0$ .

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{\mathbb{R}_+} |f^{(n)}| \geq 2^n n!$ .
2. Montrer que pour  $n \geq 1, \sup_{\mathbb{R}_+} |f^{(n)}| > 2^n n!$ .

**EXERCICE 26.★★**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$ . On suppose de plus que :

$$\exists \lambda > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{\mathbb{R}} |f^{(n)}| \leq \lambda^n n!$$

Montrer que  $f$  est nulle sur  $\left]-\frac{1}{\lambda}; \frac{1}{\lambda}\right[$  puis sur  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 27.**

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^n$  sur  $[a, b]$  et  $n + 1$  fois dérivable sur  $]a, b[$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

On appliquera le théorème de Rolle à la fonction  $\varphi$  définie par

$$\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k + A \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec une constante  $A$  bien choisie.

**REMARQUE.** La formule établie plus haut s'appelle *formule de Taylor-Lagrange*. ■

**EXERCICE 28.**

On pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$  pour  $n \geq 1$ .

1. Soit  $f : x \mapsto \ln(1+x)$ . Déterminer par récurrence une expression de  $f^{(n)}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1, montrer que  $|u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3. En déduire la convergence et la limite de  $(u_n)$ .

**EXERCICE 29.**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$ ,  $f'$  et  $f''$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$  et on pose

$$M_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \quad M_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| \quad M_2 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f''(t)|$$

On souhaite montrer que  $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$ .

1. Démontrer l'inégalité demandée dans le cas où  $M_0 = 0$  ou  $M_2 = 0$ . Dans la suite de l'énoncé on supposera  $M_0$  et  $M_2$  strictement positifs.
2. Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ . Justifier que

$$|f(x+h) - f(x) - f'(x)h| \leq \frac{M_2 h^2}{2}$$

3. En déduire que

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$$

4. Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs. On pose  $g : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{a}{t} + bt$ . Étudier les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . En déduire que  $g$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}_+^*$  et calculer celui-ci en fonction de  $a$  et  $b$ .
5. Conclure.

**EXERCICE 30.**

Soient  $R > 0$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  avec  $I = ]-R, R[$ . On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in I$ , on pose  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$  et  $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$ .

1. Soit  $r \in ]0, R[$  et  $x \in ]-r, r[$ . Montrer que  $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}} R_n(r)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. En déduire que pour tout  $x \in I$ ,  $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(x)$ .

**EXERCICE 31.**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1]$  nulle en 0. On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$  pour  $n \geq 1$ . Étudier la limite de  $(S_n)$ . On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

**EXERCICE 32.**

On dit qu'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  admet *une dérivée symétrique* en  $a \in \mathbb{R}$  lorsque le rapport

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

admet une limite lorsque  $h$  tend vers 0.

1. Prouver que la dérivabilité en  $a$  est *une condition suffisante* de dérivabilité symétrique en  $a$ .
2. Est-ce une condition nécessaire ?

**EXERCICE 33.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Déterminer la limite en 0 du quotient

$$\frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

**EXERCICE 34. ★**

Etablir que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

**EXERCICE 35.**

Etablir que

$$\forall x \leq 0, \quad 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

**Familles de polynômes****EXERCICE 36.**

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. Montrer que  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel. On pose

$$P_n(x) = (1+x^2)^{n+1} f^{(n)}(x)$$

où  $f^{(n)}$  désigne la dérivée  $n$ -ième de  $f$ .

a. Montrer que l'on a :

$$(1+x^2)P'_n(x) = 2(n+1)xP_n(x) + P_{n+1}(x).$$

b. Etablir que  $P_n$  est un polynôme dont le terme de plus haut degré est égal à  $(-1)^n(n+1)!x^n$ .

3. Soit  $a$  un réel et  $g$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ , dérivable sur l'intervalle  $]a, +\infty[$  et qui vérifie

$$g(a) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

a. On considère la fonction  $G$  définie sur l'intervalle  $[0, 1]$  par :

$$G : x \mapsto \begin{cases} g(1/x + a - 1) & \text{si } x \in ]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que  $G$  est continue sur  $[0, 1]$  et dérivable sur  $]0, 1[$ .

b. Montrer que  $G'$  s'annule en un point de  $]0, 1[$ . En déduire que  $g'$  s'annule en un point de  $]a, +\infty[$ .

4. Soit  $h$  une fonction qui est continue sur l'intervalle  $] -\infty, a]$ , dérivable sur l'intervalle  $] -\infty, a[$ , telle que

$$h(a) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0.$$

Montrer que la fonction  $h'$  s'annule en un point de l'intervalle  $] -\infty, a[$ .

5. Montrer par récurrence sur  $n$  que le polynôme  $P_n$  admet  $n$  racines réelles distinctes.

**EXERCICE 37.**

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  scindé sur  $\mathbb{R}$  à racines simples.

1. Montrer qu'il en est de même de  $P'$ .
2. Montrer que le polynôme  $P^2 + 1$  n'a que des racines simples dans  $\mathbb{C}$ .

**EXERCICE 38.**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $Q_n = (X^2 - 1)^n$  et  $P_n = \frac{1}{2^n n!} Q_n^{(n)}$ . On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

1. Calculer  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$ .
2. Quel est le degré de  $P_n$  ?
3. Montrer que  $P_n$  a la parité de  $n$ . En déduire  $P_n(0)$  pour  $n$  impair et  $P'_n(0)$  pour  $n$  pair.
4. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer  $P_n(0)$  pour  $n$  pair et  $P'_n(0)$  pour  $n$  impair. On exprimera les résultats à l'aide de factorielles.
5. a. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (X^2 - 1)Q'_n = 2nXQ_n$$

- b. En dérivant  $n + 1$  fois cette relation, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (X^2 - 1)P''_n + 2XP'_n = n(n + 1)P_n$$

6. a. Montrer que  $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ .  
b. En appliquant le théorème de Rolle et à l'aide d'une récurrence, montrer que  $P_n$  admet exactement  $n$  racines réelles distinctes dans  $] -1, 1[$ .

**Etude de suites****EXERCICE 39.**

Étudier la suite définie par la relation de récurrence

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

**EXERCICE 40.**

Étudier la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}.$$

**EXERCICE 41.**

Étudier la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4} \sin\left(\frac{1}{u_n}\right) + 1.$$

**Divers****EXERCICE 42.**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Montrer que  $f$  est dérivable mais n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 43.★**

Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes. On précisera systématiquement sur quelle partie de  $\mathbb{R}$  ces fonctions sont dérivables.

1.  $f(x) = \ln(\ln(x))$  ;

4.  $f(x) = \frac{\cos(x) + x \sin(x)}{\sin(x) - x \cos(x)}$  ;

2.  $f(x) = \arctan(\ln(x))$  ;

5.  $f(x) = \left(\cos^2(x) + \frac{3}{2}\right) \sin(2x)$  ;

3.  $f(x) = \ln(\sqrt{1 - 2\sin^2(x)})$  ;

6.  $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ .

**EXERCICE 44.**

Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  ( $n \geq 1$ ).

1. On suppose dans cette question que  $n = 1$  et que  $f$  admet une limite finie en  $+\infty$ . Prouver à l'aide d'un contre-exemple que  $f'$  peut n'admettre aucune limite en  $+\infty$ .

2. On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

Etablir que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. L'entier  $n$  est désormais quelconque. On suppose que  $f$  et  $f^{(n)}$  admettent des limites finies en  $+\infty$ . Etablir que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) = 0.$$