Semaine du 05/11 au 09/11

1 Cours

Fonctions d'une variable réelle

Généralités Ensemble de définition. Représentation graphique. Fonctions associées ($x \mapsto f(x)+a$, $x \mapsto f(x+a)$, $x \mapsto \lambda f(x)$, $x \mapsto f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$). Parité, périodicité. Monotonie. Fonctions majorées, minorées, bornées. Minimum et maximum d'une fonction.

Continuité Continuité et opérations (continuité d'une composée). Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire pour les fonctions strictement monotones. Théorème de la bijection.

Dérivabilité Dérivabilité et opérations (dérivabilité et dérivée d'une composée). Dérivabilité et dérivée d'une bijection réciproque.

Asymptotes Asymptotes verticales, horizontales et obliques.

Fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes La continuité et la dérivabilité équivalent à celles des parties réelle et imaginaire.

Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle, puissances, logarithme Étude générale de ces trois types de fonctions, propriétés algébriques, croissances comparées des fonctions exponentielle, puissances et logarithme.

Fonctions trigonométriques Dérivabilité et dérivée des fonctions trigonométriques. Les formules usuelles de trigonométrie (addition, duplication, factorisation) sont à connaître.

2 Méthodes à maîtriser

- Majorer, minorer, borner (majorer en valeur absolue) une fonction.
- Savoir déterminer le minimum ou le maximum éventuel d'une fonction par une étude de cette fonction.
- Justifier la continuité d'une composée.
- Déterminer une asymptote oblique (par exemple, limite ℓ de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ en $\pm\infty$ puis limite de $x \mapsto f(x) - \ell x$).
- Déterminer le nombre de solutions d'une équation par étude de fonctions.
- Savoir prouver une inégalité par étude de fonction.
- Pour étudier une expression du type $f(x)^{g(x)}$, mettre cette expression sous forme exponentielle $\exp\big(g(x)\ln(f(x))\big)$.
- Savoir utiliser les croissances comparées (uniquement en cas de forme indéterminée).

3 Questions de cours

Pour les trois premières questions de cours, la fonction ln a été définie comme l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1.

- Montrer que pour tout $(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
- Établir que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. On admettra qu'une fonction croissante admet en $+\infty$ une limite finie ou égale à $+\infty$.
- Établir que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.
- **Retour sur l'interro n°3**
  1. Déterminer les racines cubiques de $8i$.
  2. Résoudre l'équation $e^z = \sqrt{3} + i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
  3. Résoudre l'équation $z^2 = 2\overline{z}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.