Primitives et intégrales

Exercice 1.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto te^{-3t^2}$
2. $t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^4}$
3. $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{th} t}$
4. $t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^3}$
5. $t \mapsto \dfrac{\sin(2t)}{1+\sin^2 t}$
6. $t \mapsto \tan^2 t$
7. $t \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 t\sqrt{\tan t}}$
8. $t \mapsto \dfrac{1}{t+\sqrt{t}}$
9. $t \mapsto \dfrac{\ln(\ln t)}{t}$
10. $t \mapsto e^{e^t+t}$
11. $t \mapsto \dfrac{1}{t+t(\ln t)^2}$
12. $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$

Exercice 2.

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer

1. $I_{m,n} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,dt$
2. $J_{m,n} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(mt)\sin(nt)\,dt$
3. $K_{m,n} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(mt)\sin(nt)\,dt$

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx\,, \qquad J = \int_0^1 \sqrt{e^x}\,dx\,, \qquad K = \int_0^2 \frac{2^x\,dx}{\sqrt{2+2^x}}\,.$$

Exercice 4.

Calculer les intégrales suivantes

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\,, \qquad B = \int_0^{\pi} (\sin x)^3\,dx\,, \qquad C = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Exercice 5.

Déterminer une primitive de la fonction $f(x) = (\sin(2x))^3\cos(3x)$.

Exercice 6.

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(2x)^3 dx$.

Exercice 7.★

Calculer, en fonction du nombre réel x, l'intégrale suivante

$$f(x) = \int_0^1 |x-t|\,dt.$$

Exercice 8.★

Calculer :

1. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2(t)}dt$ en posant $u = \tan(t)$;
2. $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$ en posant $u = \sqrt{x}$;
3. $K = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1}dx$ en posant $u = \sqrt{e^x-1}$;
4. $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+u+1}}$ en posant $x = \sqrt{u^2+u+1}-u$;
5. $M = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos(x)}$ en posant $u = \sin(x)$;
6. $N = \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin(x)}$ en posant $u = \cos(x)$;
7. $O = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^3(x)dx$ en posant $u = \cos(x)$;
8. $P = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)dx}{1+\cos^2(x)}$ en posant $u = \cos(2x)$;
9. $Q = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ en posant $x = \cos(2u)$;
10. $R = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+x^{1/4}}{\sqrt{x}+1}dx$ en posant $u = x^{1/4}$.

EXERCICE 9.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et H la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = \alpha \cos x + \sin x + 2$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que H ne s'annule pas.
2. On suppose la condtion précédente satisfaite et on pose pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{H(t)}$. Justifier que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $F(x)$ pour $x \in]-\pi, \pi[$.
3. Calculer l'intégrale $F(2\pi)$.

EXERCICE 10.

Soient α et β deux réels strictement positifs. On définit une fonction f par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\alpha + \beta \cos^2 x}$$

1. Justifier que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On note F celle qui s'annule en 0.
2. Montrer que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Déterminer une expression de $F(x)$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
4. Calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{49 - 45\sin^2 t}$.

EXERCICE 11.

Calculer $I = \int_{a^2}^{b^2} x\sqrt{(x-a^2)(b^2-x)}\,dx$.

EXERCICE 12.

Calculer

1. $\int x \arctan^2(x)\,dx$
2. $\int e^x \sin^2(x)\,dx$
3. $\int \cos(\ln x)\,dx$ en posant $u = \ln x$
4. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$ en posant $u = \sqrt{1+x}$.
5. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$

EXERCICE 13.

On pose $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\,dt$ et $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\,dt$.

1. Justifier que S et C sont bien définies.
2. Montrer que $S = C$ par changement de variable.
3. Que vaut $S + C$? En déduire S et C.
4. En déduire $I = \int_0^1 \frac{dt}{t + \sqrt{1-t^2}}$.

EXERCICE 14.

Calculer

1. $\int_0^{\pi} \frac{\sin t\,dt}{4 - \cos^2 t}$ en posant $u = \cos t$;
2. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{dt}{\sin t}$ pour $x \in]0, \pi[$ en posant $u = \cos t$;
3. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t}$ en posant $u = \sin t$;
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t + \cos t}$ en posant $u = \tan \frac{t}{2}$.

EXERCICE 15.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

1. Déterminer une relation entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$.
2. En déduire l'existence et une expression simple de $\lim_{x\to+\infty} I_n(x)$.

EXERCICE 16.

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x\,dx$.

1. Montrer que (I_n) converge vers 0.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
3. En déduire que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Exercice 17.

On considère la suite de terme général $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

1. Déterminer la limite de (I_n).
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
3. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer S_n en fonction de I_n.
4. En déduire la convergence et la limite de (S_n).

Exercice 18.

Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$I_{n,p} = \int_0^1 t^n (1-t)^p dt$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$

$$I_{n,p} = \frac{n}{p+1} I_{n-1,p+1}$$

2. En déduire un expression de $I_{n,p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 19.⋆⋆

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t} dt.$$

1. Trouver une relation de récurrence entre I_{n-1} et I_n.
2. Calculer I_0 puis I_n pour tout $n \geqslant 0$.
3. Calculer I_n d'une autre manière et montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+3} \binom{n}{k} = 2^{2n+2} \frac{n!(n+2)!}{(2n+4)!}.$$

Exercice 20.

Calculer une primitive des fonctions suivantes.

1. $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^2}$
2. $t \mapsto \frac{2-5t}{1+t^2}$
3. $t \mapsto \frac{3t+2}{2t^2-4t+3}$

Exercice 21.⋆

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Etablir la dérivabilité puis calculer la dérivée de la fonction ψ définie par

$$x \longmapsto \int_0^1 f(t+x) dt.$$

Exercice 22.

Justifier que $f : x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} \frac{t}{1+e^t} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 23.

Calculer les limites suivantes. On ne cherchera pas à calculer les intégrales.

1. $\lim_{x \to 0} \int_{-x}^{x} \sin(t^2) dt$.
2. $\lim_{x \to +\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$.
3. $\lim_{x \to +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$.