Primitives et intégrales

Les fonctions de ce chapitre sont des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes.

1 Primitives

1.1 Définition

Définition 1.1 Primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle *primitive* de f sur I toute fonction définie sur I dont la dérivée vaut f.

Exemple 1.1

Une primitive de tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est $t \mapsto -\ln(\cos t)$.

Remarque. Une primitive est toujours dérivable donc continue. ■

Proposition 1.1 Linéarité

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et F et G deux primitives respectivement de f et g sur I. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.

Exercice 1.1

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ de primitive F sur $\mathbb{R}$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Déterminer à l'aide de F une primitive de $x \mapsto f(x+a)$ et de $x \mapsto f(\lambda x)$.

Proposition 1.2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur I, alors les primitives de f sont les fonctions de la forme $F + C$ où C est une constante.

Attention ! Il est important de considérer une fonction continue sur un *intervalle*. Les fonctions f_1 : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln|x| \end{array}\right.$ et f_2 : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln|x| - 1 \text{ si } x < 0 \\ \ln|x| + 1 \text{ si } x > 0 \end{cases} \end{array}\right.$ admettent toutes deux pour dérivée la fonction inverse mais elles ne diffèrent pas d'une constante ($f_2 - f_1 = -1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f_2 - f_1 = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$). En effet, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle mais la réunion de deux intervalles (d'où les deux constantes différentes).

Exercice 1.2

Déterminer des primitives de $x \mapsto e^x \cos(2x)$ et $x \mapsto e^x \sin(2x)$ par passage en complexes.

On admet pour l'instant le théorème suivant.

Théorème 1.1 Théorème fondamental de l'analyse

Soient f une fonction continue sur I et $a \in I$. Alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ est dérivable sur I et $F' = f$.

Autrement dit, F est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

ATTENTION ! Il ressort des deux résultats précédents qu'une fonction continue sur un intervalle admet toujours une infinité de primitives sur cet intervalle. On prendra donc garde à ne jamais écrire des phrases du type «Soit F la primitive de f» mais plutôt «Soit F *une* primitive de f».

Corollaire 1.1 Calcul d'intégrale

Soit f une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I. Pour $(a,b) \in I^2$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

La quantité $F(b) - F(a)$ se note souvent $\left[F(t)\right]_{t=a}^{t=b}$.

REMARQUE. On a en particulier $\int_a^b C\,dt = C(b-a)$. ■

Exercice 1.3 **Banal**

Etablir la dérivabilité puis calculer la dérivée de la fonction ψ définie par

$$x \longmapsto \int_{e^{-x}}^{e^x} \sqrt{1+\ln^2(t)}\,dt.$$

Exercice 1.4

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

Exercice 1.5

Montrer que si f est une fonction continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$$

1.2 Primitives usuelles

La connaissance des dérivées des fonctions usuelles permet de déterminer des primitives des fonctions usuelles.

Primitives usuelles

- Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Une primitive de $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Une primitive de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.
- Soit $n \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1\}$. Une primitive de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ est $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.
- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \ln x$ et une primitive de $\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ est $x \mapsto \ln(-x)$.
- Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Une primitive de $x \mapsto e^{ax}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{e^{ax}}{a}$.
- Une primitive de $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto x\ln x - x$.
- Une primitive de $x \mapsto \sin x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -\cos x$.
- Une primitive de $x \mapsto \cos x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \sin x$.
- Soit $k \in \mathbb{Z}$. Une primitive de $x \mapsto \tan x$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ est $x \mapsto -\ln|\cos x|$.
- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$ est $x \mapsto \arcsin x$.
- Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$ est $x \mapsto \arccos x$.
- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $]-1,1[$ est $x \mapsto \arctan x$.
- Une primitive de $x \mapsto \operatorname{sh} x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \operatorname{ch} x$.
- Une primitive de $x \mapsto \operatorname{ch} x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \operatorname{sh} x$.
- Une primitive de $x \mapsto \operatorname{th} x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x)$.

Remarque. Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$ est également $x \mapsto -\arcsin x$. En effet, les fonctions arccos et $-\arcsin$ différent d'une constante, à savoir $\arccos = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin$. ■

Remarque. $x \mapsto \ln|x|$ est une primitive de $\dfrac{1}{x}$ aussi bien sur $\mathbb{R}_+^*$ que sur $\mathbb{R}_-^*$.

Dans le même ordre d'idée, si u est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas sur un intervalle I, une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur I est $x \mapsto \ln|u(x)|$. ■

Méthode **Calcul d'une primitive de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et de $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$**

Pour calculer une primitive de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$, on utilise le fait que ces fonctions sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de $x \mapsto e^{\alpha x}$ avec $\alpha = a + ib$.
Une primitive de $x \mapsto e^{\alpha x}$ est $x \mapsto \dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}$. La partie réelle et la partie imaginaire de $x \mapsto \dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}$ sont donc respectivement des primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et de $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$.

Remarque. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$.
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ est $x \mapsto \arcsin\frac{x}{a}$. ■

Primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$. On cherche à déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$.

- Si le trinôme aX^2+bX+c admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 (avec $r_1 < r_2$), on déterminer deux réels C_1 et C_2 tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\}, \ \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{C_1}{x-r_1} + \frac{C_2}{x-r_2}$$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ sur $]-\infty, r_1[,]r_1, r_2[,]r_2, +\infty[$ est alors

$$x \mapsto C_1 \ln|x-r_1| + C_2 \ln|x-R_2|$$

La valeur absolue assure la validité de cette primitive sur chacun des trois intervalles cités.

- Si le trinôme aX^2+bX+c admet une racine double r, alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{r\}, \ \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-r)^2}$$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ sur $]-\infty, r[$ et $]r, +\infty[$ est tout simplement

$$x \mapsto -\frac{1}{a(x-r)}$$

- Si le trinôme aX^2+bX+c n'admet pas de racine réelle, on le met sous forme canonique

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a\left[(x+\alpha)^2+\beta^2\right]}$$

On a en fait $\alpha = \dfrac{b}{2a}$ et $\beta^2 = -\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ mais peu importe. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ est alors

$$x \mapsto \frac{1}{a\beta} \arctan \frac{x+\alpha}{\beta}$$

Remarque. Il est *INUTILE* (et d'ailleurs impossible) de retenir ces résultats par coeur. Seuls les trois cas et les méthodes associées sont à connaître. ■

Exercice 1.6

Déterminer des primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2+5x-3}$, $x \mapsto \dfrac{1}{4x^2+4x+1}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

Méthode **Vérification des primitives**

Après avoir déterminé une primitive d'une fonction, on essaiera toujours de vérifier la validité de ses calculs en dérivant la primitive pour voir si on retrouve bien la fonction initiale.

2 Intégrales

2.1 Propriétés de l'intégrale

Proposition 2.1 Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I à valeurs réelles et $(a, b, c) \in I^3$.

Linéarité Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\, dt = \lambda \int_a^b f(t)\, dt + \mu \int_a^b g(t)\, dt$.

Positivité de l'intégrale Si $a \leqslant b$ et si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)\, dt \geqslant 0$.

Croissance de l'intégrale Si $a \leqslant b$ et si $f \leqslant g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)\, dt \leqslant \int_a^b g(t)\, dt$.

Relation de Chasles $\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t) + \int_c^b f(t)\, dt$

Attention ! Il faut prendre garde à l'ordre des bornes dès qu'on écrit des inégalités avec des intégrales. On essaiera toujours de se ramener au cas $a \leqslant b$.

Remarque. On rappelle que $\int_a^a f(t)\, dt = 0$.

On rappelle également que $\int_b^a f(t)\, dt = -\int_a^b f(t)\, dt$, ce qui est par exemple une conséquence de la relation de Chasles. ■

Remarque. La variable d'intégration est muette (comme l'indice de sommation dans une somme), c'est-à-dire que $\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(u)\, du$.
Dans le même registre, une intégrale ne dépend pas de sa variable de sommation mais seulement de ses bornes (et évidemment de la fonction intégrée). ■

Exercice 2.1

On pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+e^t}\, dt$. Déterminer le sens de variation et la limite de (I_n).

Exercice 2.2

Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{e^t}{t+1}\, dt = +\infty$.

Proposition 2.2 Inégalité triangulaire

Soient f une fonction continue sur I à valeurs réelles et $(a, b) \in I^2$. Si $a \leqslant b$, alors

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt$$

Remarque. Si on pense à l'intégrale comme à une somme infinitésimale, ceci n'est que l'analogue de l'inégalité triangulaire pour les sommes. ■

Exercice 2.3

On pose $I_n = \int_0^1 \frac{(-1)^n t^n}{1+t} \,dt$. Montrer que (I_n) converge vers 0.

Exercice 2.4

Montrer que $\lim_{x\to 0^+} \int_x^{x^2} \frac{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} \,dt = 0$.

Proposition 2.3

Soit f une fonction *continue* et de *signe constant* sur un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$ à valeurs réelles. Alors $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ *si et seulement si* f est nulle sur $[a,b]$.

Remarque. On sait qu'une somme de termes positifs est nulle *si et seulement si* chacun des termes est nul. La proposition précédente est l'analogue de ce résultat pour les intégrales. ■

Par contraposition, on a le résultat suivant.

Corollaire 2.1 Stricte positivité

Soient f une fonction *continue*, *positive* et *non constamment nulle* sur un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$. Alors $\int_a^b f(t)\,dt > 0$.

Exercice 2.5

Montrer que $\int_0^\pi \ln(1+\sin t)\,dt > 0$.

2.2 Cas des fonctions à valeurs complexes

Définition 2.1 Intégrale d'une fonction à valeurs complexes

Soient f une fonction continue sur un intervalle I à valeurs complexes et $(a,b) \in I^2$. On pose

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t))\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im}(f(t))\,dt$$

Remarque. On en déduit en particulier que

$$\operatorname{Re}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t))\,dt \qquad \operatorname{Im}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \operatorname{Im}(f(t))\,dt$$

■

Puisque des inégalités entre complexes n'ont pas de sens, seules les propriétés suivantes de l'intégrale subsistent.

Proposition 2.4 Propriétés de l'intégrale complexe

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I à valeurs complexes et $(a, b, c) \in I^3$.

Linéarité Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\ dt = \lambda \int_a^b f(t)\ dt + \mu \int_a^b g(t)\ dt$.

Inégalité triangulaire Si $a \leqslant b$, alors $\left| \int_a^b f(t)\ dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ dt$.

Relation de Chasles $\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t) + \int_c^b f(t)\ dt$

Attention ! La positivité et la croissance de l'intégrale n'ont plus aucun sens pour des fonctions à valeurs complexes. Dans l'inégalité triangulaire, les valeurs absolues sont à remplacer par des modules.

3 Méthodes de calcul

Définition 3.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Une fonction est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle si elle est dérivable sur cet intervalle et si sa dérivée y est continue.

Exemple 3.1

arcsin est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$.

Attention ! La condition de continuité n'est pas là pour décorer. On verra plus tard des exemples de fonctions dérivables à dérivées non continues.

3.1 Intégration par parties

La propriété suivante n'est qu'une conséquence de la formule de dérivation d'un produit.

Proposition 3.1 Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Alors pour $(a, b) \in I^2$

$$\int_a^b u(t)v'(t)\ dt = \left[u(t)v(t)\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u'(t)v(t)\ dt$$

Exercice 3.1

Calculer $\int_0^\pi t \cos t\ dt$.

Exercice 3.2

1. Calculer une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer une primitive de arctan sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer une primitive de arcsin sur $[-1, 1]$.

Exercice 3.3

Calculer des primitives de $x \mapsto e^x \cos(2x)$ et $x \mapsto e^x \sin(2x)$ par double intégration par parties.

Méthode **ALPES**

Lorsqu'on décide d'intégrer par parties un produit, se pose souvent la question de savoir quelle fonction dériver et quelle fonction «primitiver». De manière générale, on dérive par ordre de priorité décroissante :

A les **Ar**ctangentes, les **Ar**ccosinus, les **Ar**csinus ;

L les **L**ogarithmes ;

P les **P**olynômes ;

E les **E**xponentielles ;

S les **S**inus, les co**S**inus, les tangentes.

3.2 Changement de variable

Proposition 3.2 Changement de variable

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\varphi(I)$. Soit $(a, b) \in I^2$. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

Méthode **Changement de variable**

On dit qu'on effectue le changement de variable $t = \varphi(u)$. Comment alors se souvenir de la formule ?

- On remplace t par $\varphi(u)$ dans la fonction à intégrer.
- $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \varphi'(u)$ donc $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\mathrm{d}u$ et on remplace dans l'intégrale.
- t doit varier entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ lorsque u varie entre a et b, ce qui nous donne les bornes de l'intégrale en u.

Exemple 3.2

Soit à calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$. On effectue le changement de variable $t = \sin u$.

- On a $\mathrm{d}t = \cos u\,\mathrm{d}u$.
- Lorsque u varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, t varie bien entre -1 et 1.

On en déduit

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,\mathrm{d}u = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos u|\cos u\,\mathrm{d}u = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2u)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 3.4

Calculer par changement de variables une primitive de $x \mapsto \arctan(e^x)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.5

Soit f une fonction continue et paire sur un intervalle I.

- Montrer que si f est paire, alors pour tout $a \in I$,

$$\int_{-a}^{0} f(t)\ dt = \int_{0}^{a} f(t)\ dt \qquad \text{et} \qquad \int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$$

- Montrer que si f est impaire,

$$\int_{-a}^{0} f(t)\ dt = -\int_{0}^{a} f(t)\ dt \qquad \text{et} \qquad \int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$$