Devoir à la maison n°03

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – CCP MP Maths1 2011 – Autour de la transformation de Laplace

Dans tout ce problème, on note :

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$;
- E l'ensemble des applications $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues, telles que, pour tout $x > 0$, l'application $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$;
- F l'ensemble des applications continues et bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $f \in \mathrm{E}$, on appelle *transformée de Laplace* de f et on note $\mathcal{L}(f)$ l'application définie pour tout réel $x > 0$ par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} \, \mathrm{d}t$$

1 **Question préliminaire.** Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on pose

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$$

On considère les propositions suivantes :

(i) f est intégrable sur $[a, +\infty[$;

(ii) F admet une limite finie en $+\infty$.

Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre (i) et (ii) lorsque :

1.a f est positive sur $[a, +\infty[$;

1.b f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$.

I Exemples et propriétés

2 **2.a** Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

2.b Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2.c Justifier que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

3 **3.a** On considère la fonction $\mathrm{U} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{U}(t) = 1$. Déterminer $\mathcal{L}(\mathrm{U})$.

3.b Soit un réel $\lambda \geq 0$. On considère la fonction $h_\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$.
Démontrer que $h_\lambda \in \mathrm{E}$ et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.

4 Soient $f \in \mathrm{E}$ et $n \in \mathbb{N}$. On considère $g_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^n f(t)$. Montrer que $g_n \in \mathrm{E}$.

5 **Transformée de Laplace d'une dérivée.** Soit $f \in \mathrm{E}$ de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Démontrer que $f' \in \mathrm{E}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$$

6 **Régularité d'une transformée de Laplace.**

6.a Démontrer que pour tout $f \in \mathrm{E}$, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'on a $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$ où g_1 a été définie à la question **4**.

6.b Démontrer que pour tout $f \in \mathrm{E}$, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

II Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

Dans toute cette partie, f est un élément de E.

7 On suppose dans cette question que $f \in \mathrm{F}$.

7.a Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

7.b **Théorème de la valeur initiale.** On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec f' bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

8 **Théorème de la valeur finale.** On suppose dans cette question que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{R}$. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

8.a Démontrer que $f \in \mathrm{F}$.

8.b Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x)\,\mathrm{d}x$ où h_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h_n(x) = e^{-x} f\left(\dfrac{x}{a_n}\right)$.

8.c En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée, que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.

8.d Lorque $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ quand x tend vers 0.

9 Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et on pose $\mathrm{R}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

9.a Démontrer que R est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer R'.
En déduire que pour tout réel $x > 0$, $\mathcal{L}(f)(x) = \mathrm{R}(0) - x\mathcal{L}(\mathrm{R})(x)$.

9.b On fixe $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un réel positif A tel que pour tout $t \geq \mathrm{A}$, on ait $|\mathrm{R}(t)| \leq \varepsilon$.
En déduire que, pour tout $x > 0$, on a :

$$|\mathcal{L}(f)(x) - \mathrm{R}(0)| \leq x\int_0^{\mathrm{A}} |\mathrm{R}(t)|\,\mathrm{d}t + \varepsilon$$

9.c Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

III Application : calcul de l'intégrale de Dirichlet

Dans cette partie, f est la fonction définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ pour tout réel $t > 0$.

10 Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

11 En considérant la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ où $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|\ \mathrm{d}t$, démontrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

12 Soit $x > 0$. Démontrer, en détaillant les calculs, que pour tout $\mathrm{X} > 0$,

$$\int_0^{\mathrm{X}} \sin(t)e^{-xt}\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{1+x^2}\left(e^{-x\mathrm{X}}(x\sin\mathrm{X} + \cos\mathrm{X}) - 1\right)$$

Démontrer que la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\ \mathrm{d}t$.

13 Déterminer, pour $x > 0$, une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire ℓ.
Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant (la démarche de la preuve étant identique à celle de la question **9**) :

> Lorsque $f \in \mathrm{E}$ vérifie $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0}\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

On notera que, par rapport à la question **9**, on a remplacé l'hypothèse «f intégrable sur $\mathbb{R}_+$» par l'hypothèse «$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}$».