

DEVOIR À LA MAISON N° 13 : CORRIGÉ

SOLUTION 1.

1. a. On a évidemment $[(1-X) + X]^{2n-1} = 1$. En développant le membre de gauche à l'aide de la formule du binôme de Newton, on obtient

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{2n-1-k} = 1$$

En séparant la somme en deux parties, on a également

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{2n-1-k} + \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{2n-1-k} = 1$$

ou encore

$$(1-X)^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k} + X^n \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^{k-n} (1-X)^{2n-1-k} = 1$$

Il suffit donc de poser

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k} \quad G_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^{k-n} (1-X)^{2n-1-k}$$

F_n et G_n ainsi définis sont des combinaisons linéaires de polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

- b. Soit (F, G) un couple de polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant

$$(1-X)^n F + X^n G = 1$$

Alors

$$(1-X)^n (F - F_n) + X^n (G - G_n) = 0$$

Ainsi X^n divise $F - F_n$. Or $\deg(F - F_n) \leq n-1$ donc $F = F_n$. De même, $(1-X)^n$ divise $G - G_n$ mais $\deg(G - G_n) \leq n-1$ donc $G = G_n$.

2. a. En substituant $1-X$ à X dans l'égalité $(1-X)^n F_n(X) + X^n G_n(X) = 1$, on obtient

$$(1-X)^n G_n(1-X) + X^n F_n(1-X) = 1$$

Mais l'unicité des polynômes F_n et G_n prouvée à la question 1.b montre que $F_n(1-X) = G_n(X)$ et que $G_n(1-X) = F_n(X)$.

- b. En évaluant l'égalité $(1-X)^n F_n(X) + X^n G_n(X) = 1$ en 0, on obtient $F_n(0) = 1$. En évaluant cette même égalité en $\frac{1}{2}$, on obtient

$$\frac{1}{2^n} F_n\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^n} G_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Or $G_n\left(\frac{1}{2}\right) = F_n\left(1 - \frac{1}{2}\right) = F_n\left(\frac{1}{2}\right)$ d'après la question 2.a. Ainsi $F_n\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{n-1}$.

Enfin, on a prouvé à la question 1.a que

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k}$$

Ainsi $F_n(1) = \binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n}$.

3. a. Pour $x \neq 1$,

$$F_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n} - \frac{x^n G_n(x)}{(1-x)^n} = \frac{1}{(1-x)^n} - x^{n-1} \frac{x G_n(x)}{(1-x)^n}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x G_n(x)}{(1-x)^n} = 0$ car G_n est continue en 0. Il s'ensuit donc que

$$F_n(x) = (1-x)^{-n} + o(x^{n-1})$$

b. Le développement limité de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0 est usuel.

$$\begin{aligned}
 (1-x)^{-n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (-n-j)}{k!} (-x)^k + o(x^{n-1}) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \prod_{j=0}^{k-1} (n+j)}{k!} (-x)^k + o(x^{n-1}) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (n+j)}{k!} x^k + o(x^{n-1}) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} x^k + o(x^{n-1}) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} x^k + o(x^{n-1})
 \end{aligned}$$

Puisque $\deg F_n \leq n-1$, on a par unicité du développement limité, on a pour x au voisinage de 0

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

Comme tout voisinage de 0 est infini

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} X^k$$

4. a. **Première méthode :** En dérivant la relation $(1-X)^n + X^n G_n = 1$, on obtient

$$-n(1-X)^{n-1} F_n + (1-X)^n F'_n + nX^{n-1} G_n + X^n G'_n = 0$$

ou encore

$$(1-X)^{n-1} (nF_n - (1-X)F'_n) = X^{n-1} (nG_n + F'_n)$$

Comme X^{n-1} et $(1-X)^{n-1}$ sont premiers entre eux, X^{n-1} divise $nF_n - (1-X)F'_n$. De plus,

$$\deg(nF_n - (1-X)F'_n) \leq n-1$$

donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $nF_n - (1-X)F'_n = kX^{n-1}$. En évaluant cette égalité en 1, on obtient $k = nF_n(1) = n\binom{2n-1}{n}$.

Seconde méthode : D'après 3.b, $F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} X^k$. Ainsi

$$\begin{aligned}
 nF_n - (1-X)F'_n &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} X^k - (1-X) \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n+k-1}{k} X^{k-1} \\
 &= n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} X^k - \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n+k-1}{k} X^{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n+k-1}{k} X^k \\
 &= n + \sum_{k=1}^{n-1} (n+k) \binom{n+k-1}{k} X^k - \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n+k-1}{k} X^{k-1} \\
 &= n + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \binom{n+k}{k+1} X^k - \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \binom{n+k}{k+1} X^k \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n+k}{k+1} X^k - \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \binom{n+k}{k+1} X^k \\
 &= n \binom{2n-1}{n} X^{n-1}
 \end{aligned}$$

- b. Le polynôme $X^{n-1}(1-X)^{n-1}$ admet évidemment une primitive $P_n \in \mathbb{R}[X]$. Alors, en posant $H_n = P_n - P_n(0)$, on a bien $H'_n = X^{n-1}(1-X)^{n-1}$ et $H_n(0) = 0$.
Si $K_n \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $K'_n = X^{n-1}(1-X)^{n-1}$ et $K_n(0) = 0$ alors $K'_n = H'_n$ donc H_n et K_n sont égaux à une constante additive près. Puisque $H_n(0) = K_n(0)$, H_n et K_n sont égaux. On en déduit l'unicité de H_n .
- c. En utilisant la question 4.a,

$$\begin{aligned} ((1-X)^n F_n)' &= -n(1-X)^{n-1} F_n + (1-X)^n F'_n \\ &= -(1-X)^{n-1} (nF_n - (1-X)F'_n) \\ &= -n \binom{2n-1}{n} (1-X)^{n-1} X^{n-1} \\ &= -n \binom{2n-1}{n} H'_n = \left(1 - n \binom{2n-1}{n} H_n \right)' \end{aligned}$$

Les polynômes $(1-X)^n F_n$ et $1 - n \binom{2n-1}{n} H_n$ sont donc égaux à une constante additive près. Par ailleurs, puisque $F_n(0) = 1$ et $H_n(0) = 0$, ces deux polynômes coïncident en 0 : ils sont donc égaux.

5. a. Puisque $(1-X)^n F_n = 1 - n \binom{2n-1}{n} H_n$, on obtient $H_n(1) = \frac{1}{n \binom{2n-1}{n}}$.
- b. Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H'_n(x) = x^{n-1}(1-x)^{n-1}$.
- Si n est impair, H'_n est positive sur \mathbb{R} et ne s'annule qu'en 0 et 1. H_n est donc strictement croissante sur \mathbb{R} . De plus, $\deg H_n = 2n-1 \geq 1$ donc les limites de H_n en $-\infty$ et $+\infty$ sont infinies. Les variations de H_n imposent $\lim_{-\infty} H_n = -\infty$ et $\lim_{+\infty} H_n = +\infty$.
 - Si n est pair, H'_n est négative sur $] -\infty, 0]$, positive sur $[0, 1]$, négative sur $[1, +\infty[$ et ne s'annule qu'en 0 et 1. Ainsi H_n est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$, strictement croissante sur $[0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour les mêmes raisons que précédemment, les limites de H_n en $-\infty$ et $+\infty$ sont infinies et les variations de H_n imposent $\lim_{-\infty} H_n = +\infty$ et $\lim_{+\infty} H_n = -\infty$.
- c. Puisque $(1-X)^n F_n = 1 - n \binom{2n-1}{n} H_n$ et que $F_n(1) \neq 0$, les racines réelles de F_n sont exactement les antécédents distincts de 1 de $\frac{1}{n \binom{2n-1}{n}}$ par H_n .
- Si n est impair, les variations et la continuité de H_n montrent que $\frac{1}{n \binom{2n-1}{n}}$ admet un unique antécédent par H_n . Puisque $H_n(1) = \frac{1}{n \binom{2n-1}{n}}$, 1 est l'unique antécédent de $\frac{1}{n \binom{2n-1}{n}}$ par H_n . Mais celui-ci est à exclure puisque $F_n(1) \neq 0$. Ainsi F_n n'admet pas de racine réelle.
 - Si n est pair, les variations et la continuité de H_n montrent que $\frac{1}{n \binom{2n-1}{n}}$ admet un unique antécédent par H_n sur $] -\infty, 0]$. Puisque $H_n(1) = \frac{1}{n \binom{2n-1}{n}}$, les variations de H_n montrent que le seul autre antécédent de $\frac{1}{n \binom{2n-1}{n}}$ par H_n est 1. Mais celui-ci est à exclure puisque $F_n(1) \neq 0$. Ainsi F_n admet une unique racine réelle et on peut même préciser que celle-ci est strictement négative.