Semaine du 01/02 au 05/02

1 Cours

Espaces vectoriels

Définition et exemples fondamentaux Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Exemples. Si X est un ensemble, on peut munir $\mathbb{K}^{\mathrm{X}}$ d'une struture de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Conséquence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Sous-espaces vectoriels Définition. Intersection de sous-espaces vectoriels. Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs. Espace vectoriel engendré par une partie ou une famille.

Somme de sous-espaces vectoriels Somme de deux sous-espaces vectoriels. Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces supplémentaires. Si $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, définition du projeté de $x \in \mathrm{E}$ sur F parallèlement à G. Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.

Espace vectoriel produit Si $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on peut munir $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Espace vectoriel d'applications Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X un ensemble, on peut munir E^{X} d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2 Méthodes à maîtriser

- Savoir montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel.
- Savoir déterminer une partie génératrice d'une partie de $\mathbb{K}^n$ définie par des équations linéaires.
- Savoir montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires (utiliser éventuellement une méthode par analyse/synthèse).
- Savoir montrer qu'un nombre fini de sous-espaces vectoriels sont en somme directe (somme nulle $\implies$ termes nuls).

3 Questions de cours

Retour sur le DS n°06 On définit deux suites d'entiers (a_n) et (b_n) en posant $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \end{cases}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

1. Prouver avec soin que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \geq n$.
2. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$.
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{b_n^2}$$
4. En déduire que la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\sqrt{2}$.

Retour sur le DS n°06 On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la suite (u_n) est strictement positive.
2. Montrer que la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{2}$.
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
4. En déduire la convergence et la limite de la suite (u_n).

Supplémentarité Soit P l'ensemble des applications paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et I l'ensemble des applications impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que P et I sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et que P et I sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Supplémentarité Soit $\mathrm{H} = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$ et $\mathrm{D} = \mathrm{vect}((1, \dots, 1))$. Montrer que H et D sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$.

Récurrences linéaires On note F l'ensembles des suites réelles vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants **au choix de l'examinateur**. Déterminer une famille génératrice de F («mettre sous forme d'un vect»).

Equations différentielles On note F l'ensemble des solutions à valeurs réelles d'une équation différentielle d'ordre 2 homogène à coefficients constants **au choix de l'examinateur**. Déterminer une famille génératrice de F («mettre sous forme d'un vect»).