Devoir à la maison n°12

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Partie I – Étude d'un endomorphisme

1. Évident.

2. Notons a_n le coefficient dominant de P. On a donc $a_n \neq 0$. Le coefficient de X^n dans $(X^2-1)P''+4XP'$ est alors $n(n-1)a_n+4na_n$. Puisque $f(P)=\lambda P$, $n(n-1)a_n+4na_n=\lambda a_n$ et donc $\lambda=n(n+3)$ puisque $a_n\neq 0$.

3. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ non nul tel que $f(P)=\lambda_n P$. En notant d son degré, la question précédente montre que $\lambda_n=d(d+3)$ i.e. $n(n+3)=d(d+3)$. La fonction $x\mapsto x(x+3)$ est strictement croissante et donc injective sur $\mathbb{R}_+$ de sorte que $n=d$.

4. Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. Alors $\deg P\leq n$ donc $\deg P'\leq n-1$ et $\deg P''\leq n-2$. On en déduit que $\deg XP'\leq n$ et $\deg(X^2-1)P''\leq n$ puis que $\deg f(P)\leq n$. Ainsi $f(P)\in\mathbb{R}_n[X]$. $\mathbb{R}_n[X]$ est donc stable par f et f induit alors un endomorphisme f_n de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. **a.** Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et notons a le coefficient de X^n dans P (éventuellement nul). Alors le coefficient de X^n dans $f_n(P)-\lambda_n P$ est $n(n-1)a+4na-n(n+3)a=0$. Ainsi $f_n(P)-\lambda_n P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On en déduit que

$$G_n\subset\mathbb{R}_{n-1}[X]$$

Puisque $f_n-\lambda_n I_n\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$,

$$\dim\mathbb{R}_n[X]=\operatorname{rg}(f_n-\lambda_n I_n)+\dim\operatorname{Ker}(f_n-\lambda_n I_n)=\dim F_n+\dim G_n$$

d'après le théorème du rang. Or $\dim\mathbb{R}_n[X]=n+1$ et $\dim G_n\leq\dim\mathbb{R}_{n-1}[X]=n$ puisque $G_n\subset\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On en déduit que $\dim F_n\geq 1$.

b. Soit $P\in F_n\cap\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Supposons P non nul. Puisque $f(P)=\lambda_n P$, la question **3** montrer que $\deg P=n$, ce qui est absurde puisque $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi $P=0$ et $F_n\cap\mathbb{R}_{n-1}[X]=\{0\}$. On peut alors affirmer que

$$\dim(F_n\oplus\mathbb{R}_{n-1}[X])=\dim F_n+\dim\mathbb{R}_{n-1}[X]\geq 1+n=n+1$$

Par ailleurs, $F_n\oplus\mathbb{R}_{n-1}[X]\subset\mathbb{R}_n[X]$ donc $\dim(F_n\oplus\mathbb{R}_{n-1}[X])\leq n+1$. Finalement, $\dim(F_n\oplus\mathbb{R}_{n-1}[X])=n+1$ et donc $F_n\oplus\mathbb{R}_{n-1}[X]=\mathbb{R}_n[X]$.

c. On déduit de la question précédente que

$$\dim F_n=\dim\mathbb{R}_n[X]-\dim\mathbb{R}_{n-1}[X]=1$$

Notamment, il existe un polynôme $P_n\in\mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que $F_n=\operatorname{vect}(P_n)$. Puisque $P_n\in F_n$, $f(P_n)=f_n(P_n)=\lambda_n P_n$. Quitte à diviser P_n par son coefficient dominant, on peut supposer P_n unitaire.
De plus, $f(P_n)=\lambda_n P_n$ et $P_n\neq 0$ donc $\deg P_n=n$ d'après la question **3**.
Reste à prouver l'unicité. Soit alors $Q\in\mathbb{R}[X]$ unitaire tel que $f(Q)=\lambda_n Q$. A nouveau, la question **3** montre que $\deg Q=n$. Ainsi $Q\in\mathbb{R}_n[X]$ de sorte que $f_n(Q)=f(Q)=\lambda_n P$ et donc $Q\in F_n=\operatorname{vect}(P_n)$. Finalement, Q et P_n sont donc colinéaires mais comme ils sont tous deux unitaires, ils sont égaux.

6. Remarquons que $Q_n' = -(-1)^n P_n'(-X)$ et $Q_n'' = (-1)^n P_n''(-X)$. Or on sait que

$$(X^2-1)P_n'' + 4XP_n' = n(n+3)P_n$$

donc en substituant $-X$ à X,

$$(X^2-1)P_n''(-X) - 4XP_n'(-X) = n(n+3)P_n(-X)$$

puis en multipliant par $(-1)^n$

$$(X^2-1)(-1)^n P_n''(-X) - 4X(-1)^n P_n'(-X) = n(n+3)(-1)^n P_n(-X)$$

ou encore $f(Q_n) = \lambda_n Q_n$. Or on vérifie aisément que Q_n est unitaire puisque P_n l'est. L'unicité du polynôme P_n montre alors que $P_n = Q_n$. Ceci signifie que P_n a la parité de n.

7. Soit un entier $n \geq 2$. Puisque P_n est unitaire, de degré n et de même parité que n, on peut affirmer qu'il existe un réel α_n et un polynôme $\tilde{P}_n \in \mathbb{R}_{n-3}[X]$ tel que

$$P_n = X^n + \alpha_n X^{n-2} + \tilde{P}_n$$

Par linéarité de f,

$$f(P_n) = f(X^n) + \alpha_n f(X^{n-2}) + f(\tilde{P}_n)$$

Or

$$\begin{aligned} f(X^n) &= n(n+3)X^n - n(n-1)X^{n-2} \\ f(X^{n-2}) &= (n-2)(n+1)X^{n-2} - (n-2)(n-3)X^{n-4} \end{aligned}$$

et $f(P_n) \in \mathbb{R}_{n-3}[X]$ car $\mathbb{R}_{n-3}[X]$ est stable par f d'après la question **4**. Ainsi il existe un polynôme $\hat{P}_n \in \mathbb{R}_{n-3}[X]$ tel que

$$f(P_n) = n(n+3)X^n + (\alpha_n(n-2)(n+1) - n(n-1))X^{n-2} + \hat{P}_n$$

Mais on sait que

$$f(P_n) = \lambda_n P_n = \lambda_n X^n + \lambda_n \alpha_n X^{n-2} + \lambda_n \tilde{P}_n$$

En identifiant les coefficients de X^{n-2}, on obtient,

$$\alpha_n(n-2)(n+1) - n(n-1) = \lambda_n \alpha_n = n(n+3)\alpha_n$$

ou encore

$$\alpha_n = -\frac{n(n-1)}{2(2n+1)}$$

8. Puisque P_0 est unitaire et de degré 0, $P_0 = 1$.
P_1 est impair, unitaire et de degré 1 donc $P_1 = X$.
Enfin, P_2 est pair, unitaire, de degré 2 et son coefficient constant est $-\frac{1}{5}$ d'après la question **7**. Ainsi $P_2 = X^2 - \frac{1}{5}$.

9. **a.** Tout d'abord

$$R_n' = 2XP_n' + (X^2-1)P_n'' - nP_n - nXP_n' = (X^2-1)P_n'' - (n-2)XP_n' - nP_n$$

Or $f(P_n) = \lambda_n P_n$ donc

$$(X^2-1)P_n'' = \lambda_n P_n - 4XP_n' = n(n+3)P_n - 4XP_n'$$

Ainsi

$$R_n' = n(n+3)P_n - 4XP_n' - (n-2)XP_n' - nP_n = n(n+2)P_n - (n+2)XP_n' = (n+2)(nP_n - XP_n')$$

On en déduit ensuite que

$$R_n'' = (n+2)(nP_n' - P_n' - XP_n'') = (n+2)(n-1)P_n' - (n+2)XP_n''$$

puis que

$$(X^2-1)R_n'' = (n+2)(n-1)(X^2-1)P_n' - (n+2)X(X^2-1)P_n''$$

Or on rappelle que

$$(X^2-1)P_n'' = n(n+3)P_n - 4XP_n'$$

donc

$$\begin{aligned}(X^2-1)R_n'' &= (n+2)(n-1)(X^2-1)P_n' - (n+2)X(n(n+3)P_n - 4XP_n') \\ &= (n+2)(n-1)(X^2-1)P_n' - n(n+2)(n+3)XP_n + 4(n+2)X^2P_n'\end{aligned}$$

Or

$$4XR_n' = 4X(n+2)(nP_n - XP_n') = 4n(n+2)XP_n - 4(n+2)X^2P_n'$$

donc

$$\begin{aligned}f(R_n) &= (X^2-1)R_n'' + 4XR_n' \\ &= (n+2)(n-1)(X^2-1)P_n' - n(n+2)(n+3)XP_n + 4n(n+2)XP_n \\ &= (n+2)(n-1)(X^2-1)P_n' - n(n+2)(n-1)XP_n \\ &= (n+2)(n-1)((X^2-1)P_n' - nXP_n) = (n+2)(n-1)R_n = \lambda_{n-1}R_n\end{aligned}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La question **5.c** montrer que R_n est colinéaire à P_{n-1}. Il existe donc $\beta_n \in \mathbb{R}$ tel que $R_n = \beta_n P_{n-1}$. Puisque P_{n-1} est unitaire, β_n est en fait le coefficient de X^{n-1} dans R_n.
En reprenant les notations de la question **7**,

$$P_n = X^n + \alpha_n X^{n-2} + \tilde{P}_n$$

où l'on rappelle que $\tilde{P}_n \in \mathbb{R}_{n-3}[X]$. Cette relation est valable même si $n = 1$, puisque $\alpha_1 = 0$. Un calcul donne alors

$$R_n = -(n+2\alpha_n)X^{n-1} - (n-2)X^{n-3} + (X^2-1)\tilde{P}_n' - nX\tilde{P}_n$$

ou encore, en posant $\hat{P}_n = -(n-2)X^{n-3} + (X^2-1)\tilde{P}_n' - nX\tilde{P}_n$,

$$R_n = -(n+2\alpha_n)X^{n-1} + \hat{P}_n$$

avec $\deg \hat{P}_n \leq n-2$. Ainsi le coefficient de X^{n-1} dans R_n est

$$\beta_n = -(n+2\alpha_n) = -n + \frac{n(n-1)}{2n+1} = -\frac{n(n+2)}{2n+1}$$

On en déduit donc bien que

$$R_n + \frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1} = 0$$

c. En dérivant la relation de la question précédente, on obtient

$$R_n' + \frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1}' = 0$$

Or on a vu que $R_n' = (n+2)(nP_n - XP_n')$ de sorte que

$$(n+2)(nP_n - XP_n') + \frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1}' = 0$$

ou même, en simplifiant par $n+2$

$$nP_n - XP_n' + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}' = 0$$

En multipliant par (X^2-1), on obtient

$$n(X^2-1)P_n - X(X^2-1)P_n' + \frac{n}{2n+1}(X^2-1)P_{n-1}' = 0$$

Or

$$(X^2-1)P_n' = R_n + nXP_n = -\frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1} + nXP_n$$

et

$$(X^2-1)P_{n-1}' = R_{n-1} + (n-1)XP_{n-1} = -\frac{(n-1)(n+1)}{2n-1}P_{n-2} + (n-1)XP_{n-1}$$

donc

$$n(X^2-1)P_n + \frac{n(n+2)}{2n+1}XP_{n-1} - nX^2P_n - \frac{(n-1)n(n+1)}{4n^2-1}P_{n-2} + \frac{n(n-1)}{2n+1}XP_{n-1} = 0$$

En simplifiant par n

$$(X^2-1)P_n + \frac{n+2}{2n+1}XP_{n-1} - X^2P_n - \frac{(n-1)(n+1)}{4n^2-1}P_{n-2} + \frac{n-1}{2n+1}XP_{n-1} = 0$$

ce qui donne

$$-\mathrm{P}_n + \mathrm{XP}_{n-1} - \frac{n^2-1}{4n^2-1}\mathrm{P}_{n-2} = 0$$

et enfin, en passant à l'opposé,

$$\mathrm{P}_n - \mathrm{XP}_{n-1} + \frac{n^2-1}{4n^2-1}\mathrm{P}_{n-2} = 0$$

Partie II – Comportement asymptotique d'une suite

10. On a clairement

$$\frac{1}{4\mathrm{X}^2-1} = \frac{1}{(2\mathrm{X}-1)(2\mathrm{X}+1)} = \frac{1}{2}\frac{(2\mathrm{X}+1)-(2\mathrm{X}-1)}{(2\mathrm{X}+1)(2\mathrm{X}-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\mathrm{X}-1} - \frac{1}{2\mathrm{X}+1}\right)$$

On en déduit par télescopage que

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

puis que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \frac{1}{6}$$

11. **a.** On a clairement $u_1 \geq u_0 \geq 1$. Supposons que $u_{n-1} \geq u_{n-2} \geq 1$ pou un certain entier $n \geq 2$. Alors

$$\frac{1}{9}\left[u_{n-1} - u_{n-2} + \frac{3}{4n^2-1}\right] \geq 0$$

donc $u_n \geq u_{n-1}$. Mais on sait déjà que $u_{n-1} \geq 1$ donc $u_n \geq u_{n-1} \geq 1$. Par récurrence, ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Soit un entier $n \geq 2$. Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,

$$u_k = u_{k-1} + \frac{1}{9}\left[u_{k-1} - u_{k-2} + \frac{3}{4k^2-1}u_{k-2}\right]$$

En additionnant ces inégalités et en télescopant, on obtient le résultat voulu.

c. On a clairement $u_0 \leq u_1 \leq \frac{6}{5}$. De plus, pour $n \geq 2$,

$$u_n = u_1 + \frac{1}{9}\left[u_{n-1} - u_0 + \sum_{k=2}^{n} \frac{3}{4k^2-1}u_{k-2}\right] \leq u_1 + \frac{1}{9}(u_n - u_0 + \mathrm{S}_n u_n) = 1 + \frac{1}{9}u_n + \frac{1}{3}\mathrm{S}_n u_n$$

par croissance de la suite (u_n) et car (S_n) est positive. Par ailleurs, la suite (S_n) est également croissante (évident) et converge vers $\frac{1}{6}$ donc elle est majorée par $\frac{1}{6}$. On en déduit

$$u_n \leq 1 + \frac{1}{9}u_n + \frac{1}{18}u_n = 1 + \frac{1}{6}u_n$$

On en déduit immédiatement que $u_n \leq \frac{6}{5}$.
La suite (u_n) étant croissante et majorée, elle converge.

12. **a.** On rappelle que $\mathrm{P}_0 = 1$ et $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_0(t) = 1 \qquad\qquad f_1(t) = \frac{2\operatorname{ch} t}{e^t} = 1 + e^{-2t}$$

Soit maintenant un entier $n \geq 2$. On rappelle que

$$\mathrm{P}_n - \mathrm{XP}_{n-1} + \frac{n^2-1}{4n^2-1}\mathrm{P}_{n-2} = 0$$

En fixant $t \in \mathbb{R}$ et en évaluant en $\operatorname{ch} t$, on obtient

$$\mathrm{P}_n(\operatorname{ch} t) - \operatorname{ch}(t)\mathrm{P}_{n-1}(\operatorname{ch} t) + \frac{n^2-1}{4n^2-1}\mathrm{P}_{n-2}(\operatorname{ch} t) = 0$$

ou encore

$$\frac{e^{nt}}{2^n}f_n(t) - \operatorname{ch}(t)\frac{e^{(n-1)t}}{2^{n-1}}f_{n-1}(t) + \frac{n^2-1}{4n^2-1}\frac{e^{(n-2)t}}{2^{n-2}}f_{n-2}(t) = 0$$

En multipliant par $\frac{2^n}{e^{nt}}$, on obtient

$$f_n(t) - 2\operatorname{ch}(t)e^{-t}f_{n-1}(t) + \frac{4(n^2-1)}{4n^2-1}e^{-2t}f_{n-2}(t) = 0$$

ou encore

$$f_n(t) - (1+e^{-2t})f_{n-1}(t) + \left(1 - \frac{3}{4n^2-1}\right)e^{-2t}f_{n-2}(t) = 0$$

puis

$$f_n(t) - f_{n-1}(t) = e^{-2t}\left[f_{n-1}(t) - f_{n-2}(t) + \frac{3}{4n^2-1}f_{n-2}(t)\right]$$

b. Tout d'abord, $f_0 : t \mapsto 1$ et $f_1 - f_0 : t \mapsto e^{-2t}$ sont bien positives et décroissantes sur $\mathbb{R}$. Supposons que f_{n-2} et $f_{n-1} - f_{n-2}$ soient positives et décroissantes sur $\mathbb{R}$ pour un certain entier $n \geq 2$.
Tout d'abord, $f_{n-1} = f_{n-2} + (f_{n-1} - f_{n-2})$ est positive et décroissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de telles fonctions.
Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_n(t) - f_{n-1}(t) = e^{-2t}\left[f_{n-1}(t) - f_{n-2}(t) + \frac{3}{4n^2-1}f_{n-2}(t)\right]$$

$f_n - f_{n-1}$ est bien positive sur $\mathbb{R}$. De plus, les fonctions $t \mapsto e^{-2t}$ et $f_{n-1} - f_{n-2} + \frac{3}{4n^2-1}f_{n-2}$ sont décroissantes sont décroissante et *positives* sur $\mathbb{R}$ (la seconde est une somme de fonctions décroissantes) : leur produit $f_n - f_{n-1}$ est donc décroissant sur $\mathbb{R}$.
Par récurrence, f_{n-1} et $f_n - f_{n-1}$ sont bien positives et décroissantes sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

13. ch est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $\operatorname{ch}(0) = 1$ et $\lim_{+\infty} \operatorname{ch} = +\infty$, elle induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$. Sa bijection réciproque est également strictement croissante.

14. **a.** Par définition, $\operatorname{ch}\alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} = \frac{5}{3}$. Ainsi $e^\alpha + e^{-\alpha} = \frac{10}{3}$ ou encore $e^{2\alpha} - \frac{10}{3}e^\alpha + 1 = 0$. Les racines du polynôme $X^2 - \frac{10}{3}X + 1$ sont $\frac{1}{3}$ et 3. Or $\alpha \geq 0$ par définition de argch de sorte que $e^\alpha \geq 1$. Ainsi $e^\alpha = 3$.
On a clairement $u_1 = 1 = f_0(\alpha)$. De plus, $f_1(\alpha) = 1 + e^{-2\alpha} = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$. Supposons que $u_{n-1} = f_{n-1}(\alpha)$ et $u_{n-2} = f_{n-2}(\alpha)$ pour un certain entier $n \geq 2$. Alors

$$\begin{aligned} f_n(\alpha) &= f_{n-1}(\alpha) + e^{-2\alpha}\left[f_{n-1}(\alpha) - f_{n-2}(\alpha) + \frac{3}{4n^2-1}f_{n-2}(\alpha)\right] \\ &= u_{n-1} + \frac{1}{9}\left[u_{n-1} - u_{n-2} + \frac{3}{4n^2-1}u_{n-2}\right] = u_n \end{aligned}$$

Par récurrence double, $u_n = f_n(\alpha)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la fonction $f_n - f_{n-1}$ est positive sur $\mathbb{R}$, $f_n(\operatorname{argch} x) \geq f_{n-1}(\operatorname{argch} x)$. La suite de terme général $f_n(\operatorname{argch} x)$ est donc croissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de argch, $\operatorname{argch} x \geq \alpha$. Par décroissance de f_n,

$$f_n(\operatorname{argch} x) \leq f_n(\alpha) = u_n \leq \frac{6}{5}$$

La suite de terme général $f_n(\operatorname{argch} x)$ est donc également majorée par $\frac{6}{5}$.
Cette suite étant croissante et majorée, elle converge vers un réel $\ell(x)$. Par ailleurs, la croissance de la suite de terme général $f_n(\operatorname{argch} x)$ montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(\operatorname{argch} x) \geq f_0(\operatorname{argch} x) = 1$. Par passage à la limite, $\ell(x) \geq 1 > 0$.
Par définition de f_n,

$$P_n(x) = \frac{e^{n \operatorname{argch} x}}{2^n}f_n(\operatorname{argch} x)$$

Comme $\ell(x) \neq 0$, on peut alors affirmer que

$$P_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell(x)e^{n \operatorname{argch} x}}{2^n}$$

Si on pose $u = \operatorname{argch} x$, alors $x = \operatorname{ch}(u) = \frac{e^u+e^{-u}}{2}$. Ainsi e^u est racine du polynôme $X^2 - 2xX + 1$. Ses racines sont $x+\sqrt{x^2-1}$ et $x-\sqrt{x^2-1}$. Ces deux racines sont positives et leur produit vaut 1. Or $u \geq 0$ donc $e^u \geq 1$: e^u est la plus grande de ces deux racines, c'est-à-dire $x+\sqrt{x^2-1}$. Finalement,

$$e^{n \operatorname{argch} x} = (e^u)^n = \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n$$

Finalement,

$$P_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^n \ell(x)$$