Devoir à la maison n°04

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Solution 1

1. **a.** Soit $(z,z') \in (\mathbb{C}\setminus\{-i\})^2$ tel que $f(z)=f(z')$. Alors $\frac{iz+1}{z+i}=\frac{iz'+1}{z'+i}$ donc $(iz+1)(z'+i)=(iz'+1)(z+i)$. En développant, on obtient $izz'+z'-z+i=izz'+z-z'+i$ puis $z=z'$ donc f est injective.

b. Soit $\mathrm{Z}\in\operatorname{Im} f$. Il existe donc $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ tel que $\mathrm{Z}=f(z)$. Supposons $\mathrm{Z}=i$. Alors $\frac{iz+1}{z+i}=i$ puis $iz+1=i(z+i)=iz-i$, ce qui est absurde. Ainsi $\mathrm{Z}\neq i$ de sorte que $\operatorname{Im} f\subset\mathbb{C}\setminus\{i\}$. Réciproquement, soit $\mathrm{Z}\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$. Posons $z=\frac{1-i\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-i}$. Alors $z(\mathrm{Z}-i)=1-i\mathrm{Z}$ puis $\mathrm{Z}(z+i)=iz+1$. En particulier, $z\neq -i$ puisqu'alors on aurait $0=i\times(-1)+1=2$. Ainsi $\mathrm{Z}=\frac{iz+1}{z+i}=f(z)$ de sorte que $\mathrm{Z}\in\operatorname{Im} f$. Par conséquent, $\mathbb{C}\setminus\{i\}\subset\operatorname{Im} f$. Par double inclusion, $\operatorname{Im} f=\mathbb{C}\setminus\{i\}$. En particulier, f n'est pas surjective puisque $\operatorname{Im} f\neq\mathbb{C}$.

c. Soit $\mathrm{Z}\in f(\mathcal{P})$. Il existe donc $z\in\mathcal{P}$ tel que $\mathrm{Z}=f(z)$. Remarquons alors que

$$\begin{aligned}
|iz+1|^2-|z+i|^2 &= (iz+1)\overline{iz+1}-(z+i)\overline{z+i}\\
&=(iz+1)(-i\overline{z}+1)-(z+i)(\overline{z}-i)\\
&=\left(z\overline{z}+iz-i\overline{z}+1\right)-\left(z\overline{z}-iz+i\overline{z}+1\right)\\
&=2i(z-\overline{z})=-4\operatorname{Im}(z)<0
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$|\mathrm{Z}|=|f(z)|=\frac{|iz+1|}{|z+i|}<1$$

Ceci signifie que $\mathrm{Z}\in\mathcal{D}$. Finalement, $f(\mathcal{P})\subset\mathcal{D}$.

d. Soit $\mathrm{Z}\in\mathcal{D}$. Alors $\mathrm{Z}\neq i$ donc Z admet un unique antécédent z par f par injectivité de f. On a déjà montré à la question **1.b** que cet unique antécédent était $z=\frac{1-i\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-i}$. Il s'agit alors de montrer que $z\in\mathcal{P}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(z) &= \frac{1}{2i}(z-\overline{z})\\
&=\frac{1}{2i}\left(\frac{1-i\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-i}-\overline{\left(\frac{1-i\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-i}\right)}\right)\\
&=\frac{1}{2i}\left(\frac{1-i\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-i}-\frac{1+i\overline{\mathrm{Z}}}{\overline{\mathrm{Z}}+i}\right)\\
&=\frac{1}{2i}\cdot\frac{(1-i\mathrm{Z})(\overline{\mathrm{Z}}+i)-(1+i\overline{\mathrm{Z}})(\mathrm{Z}-i)}{(\mathrm{Z}-i)(\overline{\mathrm{Z}}+i)}\\
&=\frac{1}{2i}\cdot\frac{\left(\mathrm{Z}+\overline{\mathrm{Z}}+i-i\mathrm{Z}\overline{\mathrm{Z}}\right)-\left(\mathrm{Z}+\overline{\mathrm{Z}}-i+i\mathrm{Z}\overline{\mathrm{Z}}\right)}{(\mathrm{Z}-i)\overline{\mathrm{Z}-i}}\\
&=\frac{1}{2i}\cdot\frac{2i-2i\mathrm{Z}\overline{\mathrm{Z}}}{|\mathrm{Z}-i|^2}=\frac{1-|\mathrm{Z}|^2}{|\mathrm{Z}-i|^2}
\end{aligned}$$

Or $\mathrm{Z}\in\mathcal{D}$ donc $|\mathrm{Z}|<1$ de sorte que $\operatorname{Im}(z)>0$ i.e. $z\in\mathcal{P}$. On a donc prouvé que tout élément de $\mathcal{D}$ admettait un unique antécédent par f dans $\mathcal{P}$. Puisqu'on sait également que $f(\mathcal{P})\subset\mathcal{D}$, f induit une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{D}$.

e. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Alors

$$\begin{aligned}
& z \in f^{-1}(\mathbb{U}) \\
\iff\; & f(z) \in \mathbb{U} \\
\iff\; & f(z)\overline{f(z)} = 1 \\
\iff\; & \frac{iz+1}{z+i} \cdot \frac{-i\overline{z}+1}{\overline{z}-i} = 1 \\
\iff\; & (iz+1)(-i\overline{z}+1) = (z+i)(\overline{z}-i) \\
\iff\; & z\overline{z} + iz - i\overline{z} + 1 = z\overline{z} + i\overline{z} - iz + 1 \\
\iff\; & z = \overline{z} \\
\iff\; & z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ainsi $f^{-1}(\mathbb{U}) = \mathbb{R}$.

2. **a.** Soit $z \in \mathcal{P}$.

$$\operatorname{Im}(g(z)) = \frac{1}{2i}(g(z) - \overline{g(z)}) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{z - \overline{z}}{2i|z|^2} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|^2} > 0$$

donc $g(z) \in \mathcal{P}$. L'application g est par conséquent bien définie.

b. Il suffit de vérifier que g est une involution. En effet, pour tout $z \in \mathcal{P}$, $g(g(z)) = z$ donc $g \circ g = \operatorname{Id}_{\mathcal{P}}$. Puisque g est une involution, elle est bijective.

3. **a.** Soit $z \in \mathcal{P}$. Supposons $z\sin\theta + \cos\theta = 0$. Alors $\operatorname{Im}(z\sin\theta + \cos\theta) = 0$ et donc $\sin\theta \cdot \operatorname{Im}(z) = 0$. Puisque $\operatorname{Im}(z) > 0$, $\sin\theta = 0$. Or $z\sin\theta + \cos\theta = 0$ donc $\cos\theta = 0$. On a donc $\sin\theta = \cos\theta = 0$, ce qui est absurde puisque $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Finalement $z\sin\theta + \cos\theta \neq 0$, ce qui prouve que $A_\theta(z)$ est bien défini.
Montrons maintenant que $A_\theta(z) \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(A_\theta(z)) &= \frac{1}{2i}\left(A_\theta(z) - \overline{A_\theta(z)}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta} - \frac{\overline{z}\cos\theta - \sin\theta}{\overline{z}\sin\theta + \cos\theta}\right) \\
&= \frac{1}{2i} \cdot \frac{(z\cos\theta - \sin\theta)(\overline{z}\sin\theta + \cos\theta) - (\overline{z}\cos\theta - \sin\theta)(z\sin\theta + \cos\theta)}{|z\sin\theta + \cos\theta|^2} \\
&= \frac{1}{2i} \cdot \frac{(z\overline{z}\cos\theta\sin\theta + z\cos^2\theta - \overline{z}\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta) - (z\overline{z}\cos\theta\sin\theta - z\sin^2\theta + \overline{z}\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta)}{|z\sin\theta + \cos\theta|^2} \\
&= \frac{1}{2i} \cdot \frac{z(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - \overline{z}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{|z\sin\theta + \cos\theta|^2} \\
&= \frac{z - \overline{z}}{2i|z\sin\theta + \cos\theta|^2} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z\sin\theta + \cos\theta|^2}
\end{aligned}$$

Or $z \in \mathcal{P}$ donc $\operatorname{Im}(z) > 0$. Ainsi $\operatorname{Im}(A_\theta(z)) > 0$ i.e. $A_\theta(z) \in \mathcal{P}$.

b. On vérifie immédiatement que $A_0(z) = z$ pour tout $z \in \mathcal{P}$. Autrement dit, $A_0 = \operatorname{Id}_{\mathcal{P}}$.

c. Soit $z \in \mathcal{P}$. Alors

$$\begin{aligned}
A_\theta(A_\varphi(z)) &= \frac{A_\varphi(z)\cos\theta - \sin\theta}{A_\varphi(z)\sin\theta + \cos\theta} \\
&= \frac{\frac{z\cos\varphi - \sin\varphi}{z\sin\varphi + \cos\varphi} \cdot \cos\theta - \sin\theta}{\frac{z\cos\varphi - \sin\varphi}{z\sin\varphi + \cos\varphi} \cdot \sin\theta + \cos\theta} \\
&= \frac{(z\cos\varphi - \sin\varphi)\cos\theta - (z\sin\varphi + \cos\varphi)\sin\theta}{(z\cos\varphi - \sin\varphi)\sin\theta + (z\sin\varphi + \cos\varphi)\cos\theta} \\
&= \frac{z(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) - (\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta)}{z(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta) + \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta} \\
&= \frac{z\cos(\theta+\varphi) - \sin(\theta+\varphi)}{z\sin(\theta+\varphi) + \cos(\theta+\varphi)} \\
&= A_{\theta+\varphi}(z)
\end{aligned}$$

On en déduit que $A_\theta \circ A_\varphi = A_{\theta+\varphi}$.

d. Il suffit de remarquer

$$A_\theta \circ A_{-\theta} = A_{-\theta} \circ A_\theta = A_{\theta-\theta} = A_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$$

Ainsi A_θ est bijective et $A_\theta^{-1} = A_{-\theta}$.

Solution 2

1. On a donc $z = e^{i\theta}$. Tout d'abord,

$$1 + z = 1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$$

de sorte que

$$|1+z| = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$$

De plus,

$$\begin{aligned}
1 - z + z^2 &= 1 - e^{i\theta} + e^{2i\theta} \\
&= e^{i\theta}\left(e^{-i\theta} - 1 + e^{i\theta}\right) \\
&= e^{i\theta}(2\cos\theta - 1) \\
&= e^{i\theta}\left(2\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right) - 1\right) \\
&= e^{i\theta}\left(4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3\right)
\end{aligned}$$

de sorte que

$$|1 - z + z^2| = \left|4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3\right|$$

Finalement,

$$f(z) = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| + \left|4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3\right|$$

2. La fonction g étant paire, on peut se contenter de déterminer ses extrema sur $[0,1]$.
Pour $t \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$,

$$g(t) = -4t^2 + 2t + 3$$

Ainsi g est croissante sur $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.
Pour $t \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$,

$$g(t) = 4t^2 + 2t - 3$$

Ainsi g est croissante sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$.
On peut résumer la situation par un tableau de variations.

t	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
$g(t)$	3	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	3

On en déduit que g admet pour maximum $\frac{13}{4}$ et pour minimum $\sqrt{3}$ sur l'intervalle $[0,1]$. Puisque g est paire, il s'agit également du maximum et du minimum de g sur l'intervalle $[-1,1]$.

3. Remarquons que pour $z \in \mathbb{U}$

$$f(z) = g\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

où θ désigne un argument de z. Comme cos est à valeurs dans $[-1,1]$, la question précédente montre que

$$\forall z \in \mathbb{U},\ \sqrt{3} \leq f(z) \leq \frac{13}{4}$$