Ouverts et fermés

Exercice 1

Soit (u_n) une suite strictement croissante de réels. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ soit fermé.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'ensemble des projecteurs de E est fermé dans $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 3 — CCP 2013

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme uniforme. On pose

$$A = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0,\ \int_0^1 f(t)\,dt \geq 1 \right\}$$

1. Montrer que A est une partie fermée de E.

2. Montrer que pour tout $f \in A$, $\|f\|_\infty > 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'on peut choisir $\alpha \in]0,1]$ tel que la fonction

$$f_n : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{1}{n}\right)x & \text{si } x \leq \alpha \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

appartienne à A.

4. En déduire la distance $d(0, A)$.

Exercice 4

Soit (u_n) une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé E. On note V l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).

1. Montrer que $V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_k,\ k \geq n\}}$.

2. En déduire que V est fermé.

Exercice 5

Montrer que les seules parties à la fois ouvertes et fermées d'un espace vectoriel normé E sont $\varnothing$ et E.

Exercice 6

Soit E l'ensemble des suites complexes u telles que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ converge. On pose $\|u\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

L'ensemble $F = \left\{ u \in E, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1 \right\}$ est-il fermé ? ouvert ? borné ?

Exercice 7 ★★ — Petites Mines MP 2016

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On pose

$$O = \{ f \in E \mid f(1) > 0 \} \qquad \text{et} \qquad F = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t)\,dt \leq 0 \right\}$$

1. Montrer que O est ouvert pour $\|\cdot\|_\infty$.

2. Montrer que F est fermé pour $\|\cdot\|_\infty$ et pour $\|\cdot\|_1$.

3. O est-il ouvert pour $\|\cdot\|_1$?

Exercice 8

On note F l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. On note E l'ensemble des suites réelles bornées muni de la norme infinie.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2. F est-il fermé dans E ? ouvert dans E ?

Exercice 9 ★★★★ **Centrale MP**

On note E l'ensemble des suites réelles bornées muni de la norme infinie. Les ensembles suivants sont-ils fermés ?

1. l'ensemble A des suites croissantes ;

2. l'ensemble B des suites convergeant vers 0 ;

3. l'ensemble C des suites convergentes ;

4. l'ensemble D des suites admettant 0 pour valeur d'adhérence ;

5. l'ensemble E des suites périodiques.

Exercice 10 ★

1. Montrer que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{xy} > (x + y)^2\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ln(1 + x^2 + y^2) \leq x + y\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \sin(x + y) = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Adhérence et intérieur

Exercice 11

Montrer que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
On pourra montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé sur $\mathbb{R}$, unitaire et de degré n, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$.

Exercice 12

Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\overline{A}$ et $\mathring{A}$ sont convexes.

Exercice 13

Soient $(n, p, r) \in (\mathbb{N}^*)^2 \times \mathbb{N}$. On pose

$$A_r = \{M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \operatorname{rg} M = r\}$$
$$B_r = \{M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \operatorname{rg} M \leq r\}$$
$$C_r = \{M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \operatorname{rg} M \geq r\}$$

Les ensembles A_r, B_r, C_r sont-ils ouverts ? fermés ?
Déterminer leurs adhérences et leurs intérieurs.

Exercice 14 **X (non PC/PSI) MP 2019**

1. On note A l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré n scindés à racines simples. Montrer que A est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Quelle est l'adhérence de A ?

Exercice 15 ★★

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E.

1. Montrer que si F est ouvert, alors $F = E$.

2. Montrer que si $F \neq E$, alors $\mathring{F} = \varnothing$.

Exercice 16 ★★

Soit F une partie fermée d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\operatorname{Fr}(\operatorname{Fr}(F)) = \operatorname{Fr}(F)$.

Densité

Exercice 17 **ENS PC 2010**

1. Déterminer f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 f(t)t^n \, dt = 0$$

2. Le résultat précédent persiste-t-il si on change la condition en

$$\forall n \geq n_0, \int_0^1 f(t)t^n \, dt = 0$$

où n_0 est un entier non nul.

Exercice 18 **X MP 2010**

Soit A une partie convexe et dense de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $A = \mathbb{R}^n$.

Exercice 19 **ENS MP 2010**

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(i) le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x \mapsto x^{a_n})_{n\geq 0}$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ pour la norme $\| \ \|_2 : f \mapsto \sqrt{\int_0^1 f^2}$;

(ii) la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ diverge.

Exercice 20

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b f(t)t^k \, dt = 0$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 21 **Mines MP**

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F}$ est encore un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit H un hyperplan de E. Montrer que H est fermé ou dense dans E.

Exercice 22 **Lemme de Riemann-Lebesgue**

On considère un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et un espace vectoriel normé de dimension finie E.

1. Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans E. Montrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b e^{i\lambda t}\varphi(t) \, dt = 0$$

2. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans E. Montrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b e^{i\lambda t}f(t) \, dt = 0$$

3. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans E. Montrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}f(t) \, dt = 0$$

Exercice 23 **Adhérence des matrices diagonalisables**

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices diagonalisables (resp. trigonalisables) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. **a.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré d. Montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^d$$

   b. En déduire que $\overline{D_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 24

On note $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{T}_2(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices diagonalisables (resp. trigonalisables) de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $\varphi : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{M})^2 - 4\det(\mathrm{M})$ est continue.
2. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\varphi(\mathrm{M}) \geq 0$.
3. En déduire que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $\overline{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 25 ★★

Soient U et V deux parties denses d'un espace vectoriel normé E. On suppose que U est ouvert. Montrer que $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ est dense dans E.

Exercice 26 ★★

Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

1. On suppose A inversible. Montrer que $\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$.
2. Montrer par un argument de densité que le résultat précédent reste valable si on ne suppose plus A inversible.

Limite et continuité

Exercice 27

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0, 0)$?

1. $f(x, y) = (x + y)\sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)$.
2. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
3. $f(x, y) = \dfrac{|x + y|}{x^2 + y^2}$.
4. $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.
5. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x}\sin x$.
6. $f(x, y) = x^y$.
7. $f(x, y) = \dfrac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Exercice 28 ★★

Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on pose $\mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\mathrm{P}^{(n)}(0)\right|$ et $\mathrm{N}_2(\mathrm{P}) = \displaystyle\sup_{t \in [-1,1]} |\mathrm{P}(t)|$. On considère l'endomorphisme D de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ défini par $\mathrm{D}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

1. Vérifier que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
2. Montrer que si l'on munit $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de la norme N_1, alors D est continu.
3. Montrer que si l'on munit $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de la norme N_2, alors D n'est pas continu.

Exercice 29

On pose $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que l'application $\varphi : f \in \mathrm{E} \mapsto f'$ n'est jamais continue de (E, N) dans (E, N) quelque soit la norme N dont on munit E.

Exercice 30 ★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Pour $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k \in \mathrm{E}$, on pose $\|\mathrm{P}\| = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$. Soit $b \in \mathbb{C}$. On définit l'application $f : \mathrm{P} \in \mathrm{E} \mapsto \mathrm{P}(b)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Etudier la continuité de f.

Exercice 31 ★★

On note $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On munit E d'une norme ddéfinie de la manière suivante :

$$\forall f \in E,\ \|f\| = \int_0^1 |f(t)|\ dt$$

Pour $f \in E$, on définit

$$\phi(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^x f(t)\ dt$$

1. Justifier que ϕ est un endomorphisme de E.
2. Démontrer que ϕ est continu.
3. On pose $f_n : x \in [0,1] \mapsto ne^{-nx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n\|$ et $\|\phi(f_n)\|$.
4. En déduire la norme de ϕ subordonnée à la norme $\|\cdot\|$, c'est-à-dire

$$|||\phi||| = \sup_{f \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|\phi(f)\|}{\|f\|}$$

Exercice 32 ★

On note E l'ensemble des suites réelles bornées. On pose $\Delta : (u_n) \in E \mapsto (u_{n+1} - u_n)$. Montrer que Δ est un endomorphisme continu de E.

Compacité

Exercice 33 **Centrale MP 2010**

Donner un exemple de partie fermée bornée non compacte d'un espace vectoriel normé.

Exercice 34 **ENS Ulm/Lyon/Cachan MP 2001**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue.

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(\{a\})$ soit un singleton. Montrer que f admet un extremum global.
2. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(\{a\})$ soit compact et non vide. Montrer que f admet un extremum global.
3. On suppose que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{a\})$ est compact. Montrer que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x)$ existe.

Exercice 35 **Centrale MP 2018**

Soient E un espace vectoriel normé, K un compact de E et $g : K \to K$ une application 1-lipschitzienne. On cherche à montrer que g est surjective si, et seulement si, c'est une isométrie.

1. On commence par supposer g surjective. On considère x et y dans K ainsi que x_n et y_n des antécédents par g^n de x et y respectivement. On note (x', y') une valeur d'adhérence de la suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que $x - y$ est une valeur d'adhérence de la suite $(g^n(x') - g^n(y'))_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(\|g^n(x') - g^n(y')\|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\|x - y\|$. En déduire que g est une isométrie.
3. On suppose maintenant que g est une isométrie. Montrer que g est surjective. Donner un contre-exemple lorsque K est seulement bornée.

Exercice 36 **Centrale MP**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Pour un compact K non vide, on pose $\delta(\mathrm{K}) = \sup_{(x,y)\in\mathrm{K}^2} \|x-y\|$. Montrer que $\delta(\mathrm{K})$ est bien défini. La borne supérieure est-elle atteinte ?

2. Pour $a \in \mathrm{E}$, on note $\mathcal{S}_a$ l'ensemble des compacts de E symétriques par rapport à a. Pour B compact de E, on pose

$$\mathrm{T}(\mathrm{B}) = \left\{x \in \mathrm{B} \mid \forall y \in \mathrm{B}, \|x-y\| \leq \frac{1}{2}\delta(\mathrm{B})\right\}$$

Montrer que T induit une application de $\mathcal{S}_a$ dans $\mathcal{S}_a$.

3. Soit $\mathrm{B}_0 \in \mathcal{S}_a$. On pose $\mathrm{B}_{n+1} = \mathrm{T}(\mathrm{B}_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\bigcap_{n\geq 0} \mathrm{B}_n$.

4. En déduire que toute isométrie de E conserve les milieux.
Remarque : une isométrie de E *est une application* $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ *telle que* $\|u(x) - u(y)\| = \|x-y\|$ *pour tout* $(x,y) \in \mathrm{E}^2$.

Exercice 37 **Mines MP**

Soit K une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé et $f : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{K}^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x-y\|$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe.

2. Soit (x_n) une suite de premier terme $x_0 \in \mathbb{K}$ et telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (x_n) converge vers l'unique point fixe de f.

3. Donner un contre-exemple en ne supposant plus K compact.

Exercice 38 ★★★ **Principe du maximum pour les polynômes (X 2019)**

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. On note

$$\mathrm{B} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$$

Montrer que

$$\max_{z\in\mathrm{B}} |\mathrm{P}(z)| = \max_{z\in\mathrm{S}} |\mathrm{P}(z)|$$

Exercice 39 ★

Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 40 **Norme d'opérateur (ou norme subordonnée)**

Soit (E,N) et (F,N') deux espaces vectoriels normés. On suppose E de dimension finie. Pour $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, on pose

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathrm{E}\setminus\{0_\mathrm{E}\}} \frac{\mathrm{N}'(f(x))}{\mathrm{N}(x)}$$

1. On pose $\mathrm{S} = \{x \in \mathrm{E},\ \mathrm{N}(x) = 1\}$ et $\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E}, \mathrm{N}(x) \leq 1\}$. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $\|f\|$ est bien défini et que

$$\|f\| = \max_{x\in\mathrm{S}} \mathrm{N}'(f(x)) = \max_{x\in\mathrm{B}} \mathrm{N}'(f(x))$$

2. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

3. On suppose dans cette question que $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ et $\mathrm{N} = \mathrm{N}'$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

4. On suppose dans cette question que $\mathrm{E} = \mathbb{R}^p$ et $\mathrm{F} = \mathbb{R}^n$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On considère l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ canoniquement associée à A.

a. On suppose que E et F sont munis de leurs normes uniformes respectives. Montrer que

$$\|f\| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{p} |\mathrm{A}_{i,j}|$$

b. On suppose que E et F sont munis de leurs normes 1 respectives. Montrer que

$$\|f\| = \max_{1\leq j\leq p} \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|$$

c. On suppose que E et F sont munis de leurs normes 2 respectives. Montrer que

$$\|f\| = \sqrt{\max \mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top \mathrm{A})}$$

Connexité

Exercice 41 **ENS MP 2010**

1. Soient $r, n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \dots, f_r$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ formant une famille libre. Quel est le nombre de composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^n \setminus \cup_{i=1}^n \operatorname{Ker} f_i$?
2. Même question en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

Exercice 42

Soit E un espace vectoriel normé de dimension supérieure ou égale à 2.

1. Montrer que la sphère unité S de E est connexe par arcs.
2. En déduire que toutes les sphères de E sont connexes par arcs.

Exercice 43 ★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $O_n(\mathbb{R})$ est-il connexe par arcs ?

Exercice 44 ★★

Montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.