Problème 1 – Méthode de Newton

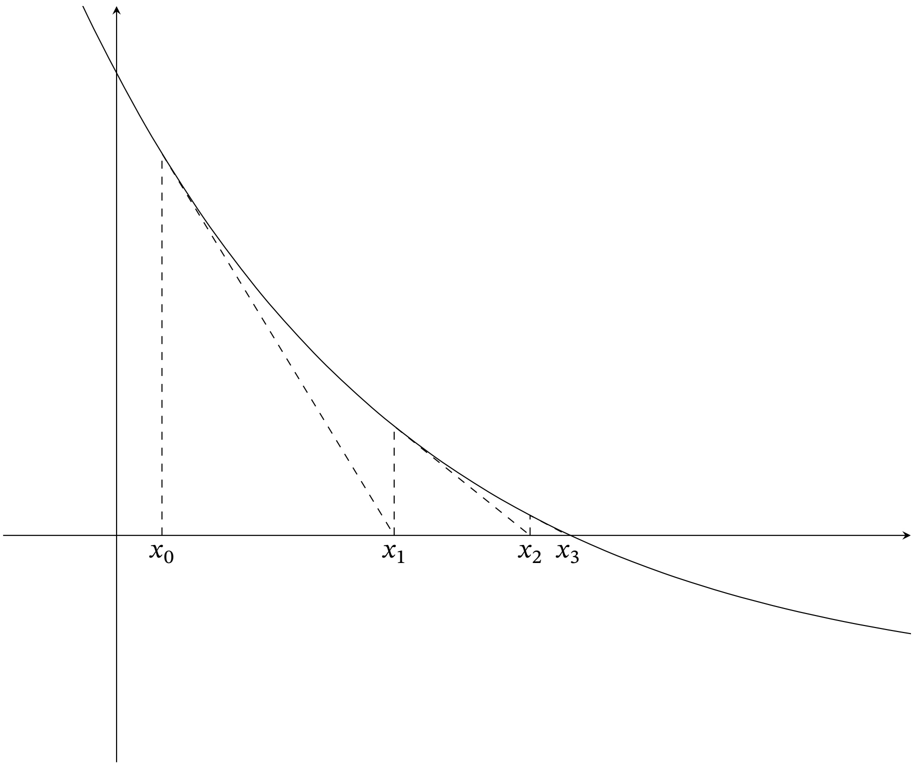
Partie I – Description de la méthode de Newton

1. La fonction f est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $[a,b]$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés. Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence et l'unicité de $c \in]a,b[$ tel que $f(c)=0$.

2. **a.** Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse u est $y = f'(u)(x-u)+f(u)$. Cette droite coupe l'axe des abscisses en un point d'ordonnée nulle, donc son abscisse x vérifie

$$x = u - \frac{f(u)}{f'(u)}$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} est l'abscisse de l'intersection de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_n avec l'axe des abscisses.



3. **a.** Puisque f est dérivable sur I et que f' est dérivable et ne s'annule pas sur I, la fonction g est dérivable sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

b. Puisque $f' < 0$ sur I, f est décroissante sur I. De plus, $f(c)=0$ donc f est positive sur $[a,c]$ et négative sur $[c,b]$. Enfin, $f'' \geq 0$ sur I. On en déduit que $g' \leq 0$ sur $[a,c]$ et $g' \geq 0$ sur $[c,b]$. Ainsi g est croissante sur $[a,c]$ puis décroissante sur $[c,b]$.

c. Par croissance de g sur $[a,c]$, pour tout $x \in [a,c]$

$$g(a) \leq g(x) \leq g(c)$$

Or $g(a) = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \geq a$ car $f(a) > 0$ et $f'(a) < 0$ et $g(c) = c$ car $f(c) = 0$. Ainsi pour tout $x \in [a,c]$, $g(x) \in [a,c]$. Autrement dit, $g([a,c]) \subset [a,c]$.

d. Une récurrence simple montre que $x_n \in [a,c]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II – Convergence de la méthode de Newton

.

1. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} - x_n = g(x_n) - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \geq 0$$

car $f'(x_n) < 0$ et $f(x_n) \geq 0$ puisque $x_n \in [a, c]$. Ainsi (x_n) est croissante.

b. On a vu que (x_n) est à valeurs dans $[a, c]$ donc en particulier elle est majorée par c. Puisque (x_n) est croissante, elle converge. Puisque g est continue, (x_n) converge vers un point fixe de g i.e. un zéro de f. Puisque c est l'unique zéro de f sur I, (x_n) converge vers c.

2. *Étude du type de convergence de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a. $|f'|$ est strictement positive et continue sur le segment I. Elle est donc minorée par une constante strictement positive m.
De plus, f'' est continue sur le segment I : elle y est donc bornée. D'où l'existence de M.

b. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne, pour tout $x \in \mathrm{I}$

$$|f(c) - f(x) - (c - x)f'(x)| \leqslant \mathrm{M}\frac{(c - x)^2}{2}$$

En utilisant la question précédente, on obtient :

$$\left|\frac{f(c) - f(x)}{f'(x)} - (c - x)\right| \leqslant \frac{(c - x)^2}{2} \times \frac{\mathrm{M}}{m}$$

soit

$$|g(x) - c| \leqslant \frac{(c - x)^2}{2} \times \frac{\mathrm{M}}{m}$$

c. Comme $x_n - x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{K}|x_\mathrm{N} - c| < 1$.
Prouvons par récurrence que pour tout $n \geq \mathrm{N}$,

$$|x_n - c| \leq \mathrm{K}^{2^{n-\mathrm{N}}-1}|x_\mathrm{N} - c|^{2^{n-\mathrm{N}}}$$

Cette propriété est vraie au rang $n = \mathrm{N}$ (c'est une égalité). Supposons la vraie à un certain rang $n \geq \mathrm{N}$. D'après la question précédente :

$$|x_{n+1} - c| = |g(x_n) - c| \leq \mathrm{K}(x_n - c)^2$$

En appliquant notre hypothèse de récurrence, on obtient :

$$|x_{n+1} - c| \leq \mathrm{K}^{2^{n+1-\mathrm{N}}-1}|x_\mathrm{N} - c|^{2^{n+1-\mathrm{N}}}$$

et la propriété est vérifiée au rang $n + 1$. On conclut en utilisant le principe de récurrence.
Il suffit alors de prendre $\mathrm{C} = \frac{1}{\mathrm{K}}$ et $k = (\mathrm{K}|x_n - c|)^{2^{-\mathrm{N}}}$. Comme $0 < \mathrm{K}|x_n - c| < 1$, on a bien $0 < k < 1$.

d. Pour tout $n \geq \mathrm{N}$:

$$\frac{|x_n - c|}{q^n} \leq \frac{\mathrm{C}k^{2^n}}{q^n}$$

De plus,

$$\ln\left(\frac{\mathrm{C}k^{2^n}}{q^n}\right) = \ln \mathrm{C} + 2^n \ln k - n \ln q \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n \ln k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \qquad \text{car } k \in]0, 1[$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x_n - c|}{q^n} = 0$ et $x_n - c = o(q^n)$.