Semaine du 15/05 au 19/05

1 Cours

Matrices

Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ Définition d'une matrice à n lignes et p colonnes. Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Produit matriciel : bilinéarité et associativité. Transposition : linéarité, involutivité , transposée d'un produit. Matrices définies par blocs et produit de telles matrices.

Matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$ Structure d'anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Élément neutre I_n. Matrices inversibles. Groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$. Inverse d'un produit de matrices inversibles. Inverse d'une transposée de matrice inversible. Trace : linéarité, trace d'une transposée, trace d'un produit.

Matrices particulières de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ Matrices diagonales, triangulaires supérieures et inférieures. Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$. Matrices symétriques et antisymétriques. Structure de sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Représentation des vecteurs Matrice colonne d'un vecteur dans une base. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. L'application qui à un vecteur associe sa matrice dans une base est un isomorphisme.

Opérations sur les lignes et colonnes d'une colonne Interprétation matricielle des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes d'une matrice. Calcul de l'inverse par pivot de Gauss. Calcul du rang par pivot de Gauss.

Représentation des applications linéaires Matrice d'une application linéaire dans des bases. L'application qui à une application linéaire associe sa matrice dans des bases est un isomorphisme. Interprétation matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire. La matrice d'une composée est le produit des matrices. Une application linéaire est bijective **si et seulement si** sa matrice est inversible et la matrice de la bijection réciproque est l'inverse de la matrice.

Représentation des endomorphismes Matrice d'un endomorphisme dans une base. L'application qui à un endomorphisme associe sa matrice dans une base est un isomorphisme d'algèbres. $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles et inverses l'une de l'autre **si et seulement si** $AB = I_n$ **<u>ou</u>** $BA = I_n$.

Noyau, image et rang de matrices Noyau, image et rang d'une matrice. Critère d'inversibilité d'une matrice carrée : noyau nul. Invariance du rang par multiplication par une matrice inversible. Invariance du rang par transposition. Caractérisation de l'inversibilité par le rang.

2 Méthodes à maîtriser

- Calculer une puissance de matrice grâce à un polynôme annulateur ou à la formule du binôme de Newton.
- Calculer l'inverse d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur ou à l'aide du pivot de Gauss.
- Écrire la matrice d'une application linéaire dans des bases ou d'un endomorphisme dans une base.
- Déterminer noyau, image et rang d'une matrice par pivot de Gauss.
- Traduire matriciellement des informations sur des applications linéaires ou des endomorphismes et inversement.

3 Questions de cours

- Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique, alors $I_n + A$ est inversible.
- Montrer que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathrm{rg}({}^tAA) = \mathrm{rg}(A)$.
- Matrices à diagonale dominante : montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $|A_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |A_{i,j}|$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors A est inversible.
- On convient que le coefficient binomial $\binom{j}{i}$ est nul si $i > j$. Montrer que la matrice $A = \left(\binom{j}{i}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ est inversible et déterminer son inverse à l'aide d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ bien choisi.