

Sommes de termes d'une suite arithmétique ou géométrique

EXERCICE 1.

Calculer les sommes suivantes.

$$1. S_n = \sum_{k=2}^{n-1} 3k - 2$$

$$2. T_n = \sum_{k=-1}^{n+1} 2k - 1$$

$$3. U_n = \sum_{k=n-2}^{n+5} 2 - k$$

$$4. V_n = \sum_{k=n}^{2n} k - 1$$

EXERCICE 2.

Calculer les sommes suivantes.

$$1. S_n = \sum_{k=2}^{n-1} 3^{k-2}$$

$$2. T_n = \sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1}$$

$$3. U_n = \sum_{k=n-2}^{n+5} \frac{4}{2^k}$$

$$4. V_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{2^{k-1}}{3^{k+2}}$$

Techniques de calcul

EXERCICE 3.

Calculer, pour tout entier non nul n ,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + 1/k)$$

au moyen d'un télescope.

EXERCICE 4.

Simplifier les sommes suivantes,

$$1. \sum_{k=p}^q (u_{k+1} - u_k);$$

$$2. \sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1}).$$

EXERCICE 5.

Calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$2. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$3. \sum_{k=1}^n k \cdot k!$$

$$4. \sum_{k=0}^n (k+2)2^k$$

$$5. \sum_{k=1}^n \ln(1 + 1/k)$$

$$6. \sum_{k=0}^n 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(kx)$$

EXERCICE 6.

Simplifier la somme

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$$

en sommant par paquets.

EXERCICE 7.

Calculer la somme $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$.

EXERCICE 8.

Vérifier que

$$\sum_{k=1}^n k 2^k = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} 2^k$$

et calculer une expression simple de cette somme en permutant l'ordre des sommations dans la somme double.

EXERCICE 9.

Simplifier la somme

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right).$$

EXERCICE 10.★

On utilise une décomposition de la fraction en éléments simples.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t > 1, \quad \frac{1}{t^2 - 1} = \frac{\alpha}{t - 1} + \frac{\beta}{t + 1}.$$

2. En déduire une simplification de la somme

$$v_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}.$$

EXERCICE 11.

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes. On définit deux suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad b_n = B_{n+1} - B_n$$

1. Montrer que $\sum_{k=0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$.

2. Application : calcul de $\sum_{k=0}^n 2^k k$.

EXERCICE 12.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n k x^k$. On cherche à calculer $S_n(x)$ de deux manières :

- en introduisant $T_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$;
- en calculant dans un premier temps $(x-1)S_n(x)$.

Formule du binôme**EXERCICE 13.**

Simplifier, pour tout n dans \mathbb{N} , la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} 3^{n-k+1} \binom{n}{k}.$$

EXERCICE 14.

Pour tous n et p dans \mathbb{N} , établir que l'on a

$$\sum_{k=0}^p \binom{n+k}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$

EXERCICE 15.

Calculer les sommes suivantes

$$1. \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}. \quad 2. \sum_{k=0}^n k^2 \binom{2n}{2k}.$$

EXERCICE 16.

Soit n un entier naturel non nul.

$$1. \text{ Calculer } S_1 = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \text{ et } S_2 = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k.$$

$$2. \text{ En déduire } T_1 = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \text{ et } T_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

$$3. \text{ Calculer } U_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} \text{ et } U_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k+1}. \text{ On pourra, si on le souhaite, s'inspirer des questions précédentes.}$$

$$4. \text{ A l'aide des changements d'indices } \ell = n - k \text{ et } \ell = n - 1 - k, \text{ calculer } V_1 = \sum_{k=0}^n k \binom{2n}{2k}$$

$$\text{et } V_2 = \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{2n}{2k+1}.$$

$$5. \text{ Calculer enfin } W_1 = \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{2n-1}{2k} \text{ et } W_2 = \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{2n-1}{2k+1}.$$

Sommes doubles

EXERCICE 17.

Calculer les sommes suivantes :

$$1. U_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j).$$

$$4. X_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i.$$

$$2. V_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i j.$$

$$5. Y_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i j$$

$$3. W_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |i - j|.$$

EXERCICE 18.

En permutant l'ordre des sommations, démontrer l'égalité

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=n+1}^N \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}.$$

EXERCICE 19.

Sommes doubles.

1. Calculer la somme double

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j).$$

2. Calculer la somme double

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} i j.$$

EXERCICE 20.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j}.$$

EXERCICE 21.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = \sum_{k=1}^n S_k.$$

Établir que

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = (n+1)S_n - n.$$

EXERCICE 22.

Vérifier que

$$\sum_{k=1}^n k 2^k = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} 2^k$$

et calculer une expression simple de cette somme en permutant l'ordre des sommations dans la somme double.

EXERCICE 23.

On pose pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $S_p(n) = \sum_{k=0}^n k^p$.

$$\sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} S_j(n) = (n+1)^{p+1}$$

Produits

EXERCICE 24.

Simplifier le produit suivant :

$$P = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

EXERCICE 25.

Soient

$$V = \prod_{1 \leq i, j \leq n} i j, \quad W = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} i j, \quad X = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} i j$$

$$Y = \prod_{1 \leq j \leq i \leq n} i j, \quad Z = \prod_{1 \leq i < j \leq n} i j.$$

Calculer V. En déduire W. Exprimer W en fonction de X et Y. Montrer, sans calcul, que X = Y. En déduire X puis Z.

EXERCICE 26.

Simplifier le produit

$$\prod_{k=1}^n 2^{1/k(k+1)}.$$

EXERCICE 27.

Pour tout $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}.$$

1. Ecrire trouver une suite d'entiers relatifs $(v_k)_{k \geq 1}$ telle que

$$\forall k \geq 2, \quad \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{k-1}{k+1} \times \frac{v_k}{v_{k-1}}.$$

2. En déduire une simplification de u_n .

3. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 28.

Soit $\alpha \in]0, \pi[$. Simplifier le produit $P_n = \prod_{k=0}^n \cos \frac{\alpha}{2^k}$. En déduire la limite de P_n .

Systèmes linéaires**EXERCICE 29.**

Résoudre

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x - 2y + z - t = 1 \\ x + y + 2z + t = -1 \end{cases}$$

EXERCICE 30.

Résoudre

$$\begin{cases} -3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 8x_1 - 24x_2 + 4x_3 - 12x_4 - 4x_5 = -8 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_4 + 7x_5 = 10 \end{cases}$$

EXERCICE 31.

Résoudre selon les valeurs des paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

EXERCICE 32.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on note E_a l'ensemble de solutions du système suivant.

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 2 \\ ax + 3y - z = 3 \\ 5x - 8y + z = -9 \end{cases}$$

Pour quels $a \in \mathbb{R}$ est-ce que E_a est vide ? contient un unique élément ? contient une infinité d'éléments ?

EXERCICE 33.

Résoudre le système

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 2y - z = -2 \\ -x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

EXERCICE 34.

Résoudre le système

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 2y - z = -2 \\ -x - y + \frac{1}{2}z = 4 \end{cases}$$

EXERCICE 35.

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le système

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3. \end{cases}$$

1. possède une seule solution,
2. ne possède pas de solution,
3. possède une infinité de solutions.

EXERCICE 36.

Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = -4 \\ 3x + 2y - 3z = 17 \\ 5x - 3y + 8z = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - 3z = 2 \\ -x + 6y - 11z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - z = -2 \\ x + y + z = 2 \\ -2x + 4y - 5z = -10. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - 5z = 3 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \\ x + y - 7z = 2 \\ 2x - 3y + 8z = 5. \end{cases}$$

Trigonométrie**EXERCICE 37.**Simplifier le produit $p = \sin\left(\frac{\pi}{14}\right)\sin\left(\frac{3}{14}\pi\right)\sin\left(\frac{5}{14}\pi\right)$ en le multipliant par $\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$.**EXERCICE 38. ★**On cherche à calculer $\cos(\pi/5)$ et $\sin(\pi/5)$.

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\cos(3x) = \sin(2x)$.
2. En déduire les valeurs de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ pour $x = \pi/5$.

EXERCICE 39.

Calculer

$$\alpha = \frac{1}{\sin(\pi/18)} - \frac{\sqrt{3}}{\cos(\pi/18)}.$$

EXERCICE 40.

On pose

$$p = \cos(\pi/7)\cos(2\pi/7)\cos(4\pi/7),$$

et

$$s = \cos(2\pi/7) + \cos(4\pi/7) + \cos(6\pi/7).$$

1. Simplifier $p \sin(\pi/7)$. En déduire la valeur de p .
2. Calculer s à l'aide de la première question.

EXERCICE 41.

Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

1. $\frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = \tan(x/2)$;
2. $\sin(x - 2\pi/3) + \sin(x) + \sin(x + 2\pi/3) = 0$;
3. $\tan(\pi/4 + x) + \tan(\pi/4 - x) = \frac{2}{\cos(2x)}$;
4. $\frac{1}{\tan(x)} - \tan(x) = \frac{2}{\tan(2x)}$.

EXERCICE 42.Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\sin(x) + \sin(5x) = \sqrt{3}\cos(2x)$;
2. $\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x)$;
3. $2\sin^2(x) + \sin^2(2x) = 2$;
4. $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$;
5. $\sin(2x) + \sin(x) = 0$;
6. $12\cos^2(x) - 8\sin^2(x) = 2$.

EXERCICE 43.Résoudre sur \mathbb{R} l'inéquation $\sin 5x \leq \sin x$.