Réduction géométrique

Eléments propres

Solution 1

- Supposons $\lambda = 0$. Alors $\operatorname{Ker}(g \circ f) \neq \{0_E\}$ et donc $g \circ f$ est non inversible. Ainsi $\det(g \circ f) = 0$. Mais alors

$$\det(f \circ g) = \det(f)\det(g) = \det(g \circ f) = 0$$

  Donc $f \circ g$ est non inversible i.e. 0 est valeur propre de $f \circ g$.

- Supposons $\lambda \neq 0$. Alors il existe un vecteur $x \in E$ non nul tel que $g \circ f(x) = \lambda x$. Par conséquent, $f \circ g \circ f(x) = \lambda f(x)$. On ne peut avoir $f(x) = 0_E$ sinon on aurait $g \circ f(x) = \lambda x = 0_E$, ce qui est impossible puisque $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0_E$. Ainsi $f(x)$ est un vecteur propre de $f \circ g$ associée à la valeur propre λ.

Solution 2

Rappelons que tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe E de dimension finie possède au moins une valeur propre (son polynôme caractéristique admet au moins une racine complexe) et donc également un vecteur propre.

- Supposons que v admet une valeur propre λ autre que a. Soit alors x un vecteur propre associé. Alors $u \circ v(x) = au(x) + bv(x)$ i.e. $\lambda u(x) = au(x) + \lambda bx$. Puisque $\lambda \neq a$, $u(x) = \frac{\lambda b}{\lambda - a}x$: x est donc un vecteur propre commun à u et v.

- Supposons que v admet a pour seule valeur propre. Soit x un vecteur propre de v associé à cette valeur propre. Or $u \circ v(x) = au(x) + bv(x)$, ce qui donne $abx = 0_E$. Comme x est non nul, on a soit $a = 0$, soit $b = 0$. Remarquons également que le polynôme caractéristique de v est $(X - a)^n$, où $n = \dim E$. Enfin l'égalité $u \circ v = au + bv$ peut également s'écrire

$$u \circ (v - a\operatorname{Id}_E) = bv = b(v - a\operatorname{Id}_E) + ab\operatorname{Id}_E = b(v - a\operatorname{Id}_e)$$

  puisque $ab = 0$.

  - Si $v = a\operatorname{Id}_E$, alors tout vecteur propre de u (il en existe d'après la remarque préliminaire) est également vecteur propre de v pour la valeur propre de a.
  - Si $v \neq a\operatorname{Id}_E$, alors il existe un vecteur x de E n'appartenant pas au noyau de $v - a\operatorname{Id}_E$. De plus, $v - a\operatorname{Id}_E$ est nilpotent puisque le polynôme caractéristique de v est $(X - a)^n$. Notons k le plus grand entier naturel tel que $(v - a\operatorname{Id}_E)^k(x) \neq 0_E$ (on a en particulier $k \geq 1$). Puisque $u \circ (v - a\operatorname{Id}_E) = b(v - a\operatorname{Id}_E)$, $u \circ (v - a\operatorname{Id}_E)^k = b(v - a\operatorname{Id}_E)^k$ et donc $(v - a\operatorname{Id}_E)^k(x)$ est vecteur propre de u pour la valeur propre b. Mais par définition de k, $(v - a\operatorname{Id}_E)\left((v - a\operatorname{Id}_E)^k(x)\right) = (v - a\operatorname{Id}_E)^{k+1}(x) = 0$, ce qui équivaut à $v\left((v - a\operatorname{Id}_E)^k(x)\right) = a(v - a\operatorname{Id}_E)^k(x)$: $(v - a\operatorname{Id}_E)^k(x)$ est donc un vecteur propre de v pour la valeur propre a.

Solution 3

Soient λ une valeur propre de $u \circ v$ et x un vecteur propre associé à cette valeur propre.

- Si $\lambda \neq 0$, alors $v(x) \neq 0_E$ sinon $u \circ v(x) = 0_E$ et donc $\lambda x = 0_E$, ce qui est impossible puisque $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0_E$. De plus, $v \circ u \circ v(x) = \lambda v(x)$ et λ est donc une valeur propre de λ de u.

- Si $\lambda = 0$, alors $u \circ v$ n'est pas inversible, d'où $\det(u \circ v) = 0$. De plus, $\det(v \circ u) = \det(v)\det(u) = \det(u)\det(v) = \det(u \circ v) = 0$. Ainsi, $v \circ u$ n'est pas inversible i.e. 0 est valeur propre de $v \circ u$.

On a montré que toute valeur propre de $u \circ v$ est une valeur propre de $v \circ u$. La réciproque se montre de manière symétrique.

Solution 4

Soient λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé dont on note x_j les composantes. On a donc pour $1 \leq i \leq n$:

$$(\lambda - a_{i,i})x_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j$$

Choisissons un indice i pour lequel $|x_i|$ est maximal. En particulier, $x_i \neq 0$ car X est non nul (c'est un vecteur propre). Ainsi

$$\begin{aligned}|\lambda - a_{i,i}| &= \left|\sum_{j\neq i} a_{i,j}\frac{x_j}{x_i}\right| \\ &\leq \sum_{j\neq i}|a_{i,j}|\frac{|x_j|}{|x_i|} && \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \sum_{j\neq i}|a_{i,j}| = \mathrm{R}_i && \text{car } |x_j| \leq |x_i| \text{ pour } 1 \leq j \leq n\end{aligned}$$

Ceci signifie bien que $\lambda \in \mathrm{D}_i$.

Solution 5

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ non nul. Posons $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ avec $n = \deg \mathrm{P}$, $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$. Alors $\varphi(\mathrm{P}) = \lambda\mathrm{P}$ si et seulement si $\lambda a_k = k a_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Puisque $a_n \neq 0$, ceci équivaut à $\lambda = n$ et $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$.
Ainsi les valeurs propres de φ sont les entiers naturels et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}_n(\varphi) = \mathrm{vect}(\mathrm{X}^n)$.

Solution 6

1. T est linéaire par linéarité d l'intégrale.
Soit $f \in \mathrm{E}$. Alors $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)e^t \,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^\infty$ comme primitive de la fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ $t \mapsto f(t)e^t$. Enfin, $\mathrm{T}(f)$ est $\mathcal{C}^\infty$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$.

2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{E}$ tels que $\mathrm{T}(f) = \lambda f$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda f(x)e^x = \displaystyle\int_0^x f(t)e^t \,\mathrm{d}t$ ou encore $\lambda g(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ en posant $g(x) = f(x)e^x$.
Si $\lambda = 0$, alors $\displaystyle\int_0^x g(t)e^t \,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En dérivant, on obtient $g = 0$ puis $f = 0$, ce qui prouve que 0 n'est pas valeur propre de T.
Supposons $\lambda \neq 0$. Alors $g(x) = \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui prouve que g est dérivable. On remarque également que $g(0) = 0$.
En dérivant, on obtient $g'(x) = \frac{1}{\lambda}g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par unicité de la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{\lambda}y \\ y(0) = 0 \end{cases}$, g est nulle et f également de sorte que λ n'est pas valeur propre de f.
Finalement, T n'admet aucune valeur propre.

Solution 7

1. La fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ et nulle en 0, elle admet une limite finie en 0 à savoir $f'(0)$. Cette fonction est donc prolongeable par continuité en 0 en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, ce qui justifie la définition de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

2. La linéarité de Φ provient de la linéarité de l'intégrale.
Soit $f \in \mathrm{E}$. Il est clair que $\Phi(f)(0) = 0$ et $\Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ en tant que primitive d'une fonction continue, à savoir $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ prolongée par continuité en 0. Ainsi $\Phi(f) \in \mathrm{E}$.

3. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{E}$ tels que $\Phi(f) = \lambda f$. Alors $\Phi(f)' = \lambda f'$ et donc $f(x) = \lambda x f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Si $\lambda = 0$, alors $f = 0$ de sorte que 0 n'est pas une valeur propre de Φ. Supposons donc $\lambda \neq 0$. Ainsi $f'(x) = \frac{f(x)}{\lambda x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On en déduit qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \mathrm{A}x^{\frac{1}{\lambda}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. De plus, $f'(x) = \frac{\mathrm{A}}{\lambda}x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Or f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc f' admet une limite finie en 0. Si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$, alors nécessairement $\mathrm{A} = 0$ de sorte que $f = 0$. Dans ce cas, λ n'est pas

une valeur propre de Φ.

Réciproquement soit $\lambda \in]0,1]$ et posons $f_\lambda(x) = x^{\frac{1}{\lambda}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$. On vérifie que f_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathrm{T}(f_\lambda)(x) = \int_0^x \frac{f_\lambda(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x t^{\frac{1}{\lambda}-1}\,\mathrm{d}t = \left[\lambda t^{\frac{1}{\lambda}}\right]_0^x = \lambda f_\lambda(x)$$

Ainsi λ est bien valeur propre de Φ et f_λ est un vecteur propre associé.
Finalement, λ est valeur propre de Φ si et seulement si $\lambda \in]0,1]$ et, dans ce cas, $\mathrm{E}_\lambda(\Phi) = \mathrm{vect}(f_\lambda)$.

Solution 8

---

1. Tout d'abord, l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de application continue f. On en déduit que $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
De plus, l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable en 0 en tant que primitive de application continue f et sa dérivée en 0 vaut donc $f(0)$. On en déduit que
$$\lim_{x\to 0} \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$
ce qui prouve que $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est prolongeable en 0 en une application continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. La linéarité de T provient de la linéarité de l'intégrale. La question précédente montre que si $f \in \mathrm{E}$, alors $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$.

3. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{E}$ tels que $\mathrm{T}(f) = \lambda f$.
Si $\lambda = 0$, alors $\mathrm{T}(f) = 0$ d'où $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. En dérivant, f est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Finalement, f est nulle sur $\mathbb{R}_+$ car f est continue en 0 ou bien car $f(0) = \mathrm{T}(f)(0) = 0$. Ainsi 0 n'est pas valeur propre de T.
Supposons $\lambda \neq 0$. Alors $f = \frac{1}{\lambda}\mathrm{T}(f)$. Puisque $\mathrm{T}(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, f l'est également. De plus, $\lambda x f(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ donc, en dérivant, $f'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda x}f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. On en déduit qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \mathrm{A}x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$, f n'admet une limite finie en 0 que si $\mathrm{A} = 0$ de sorte que f est nulle. Dans ce cas, λ n'est pas valeur propre de f.
Réciproquement, soit $\lambda \in]0,1]$ et posons $f_\lambda : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On vérifie que f_λ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$
$$\mathrm{T}(f_\lambda)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x t^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\lambda t^{\frac{1}{\lambda}}\right]_0^x = \lambda x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = \lambda f_\lambda(x)$$
Cette égalité est encore valable pour $x = 0$ par continuité de f_λ et $\mathrm{T}(f_\lambda)$ en 0 de sorte que $\mathrm{T}(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$.
Finalement, λ est valeur propre de T si et seulement si $\lambda \in]0,1]$ et, dans ce cas, $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{T}) = \mathrm{vect}(f_\lambda)$.

Solution 9

---

1. En posant $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1, $\mathrm{AU} = \mathrm{U}$ de sorte que $1 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.

2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$ et V un vecteur propre associé. Alors
$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^n \mathrm{A}_{i,j}\mathrm{V}_j = \lambda \mathrm{V}_i$$
Notons i_0 l'indice d'un coefficient de V de module maximal. Par inégalité triangulaire
$$|\lambda||\mathrm{V}_{i_0}| = \left|\sum_{j=1}^n \mathrm{A}_{i_0,j}\mathrm{V}_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |\mathrm{A}_{i_0,j}\mathrm{V}_j|$$

Mais les $A_{i_0,j}$ sont des réels positifs et $|V_j| \leq |V_{i_0}|$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ de sorte que

$$|\lambda||V_{i_0}| \leq |V_{i_0}| \sum_{j=1}^{n} A_{i_0,j} = |V_{i_0}|$$

Enfin, $|V_{i_0}| = \|V\|_\infty > 0$ car, sinon, V serait nul. On en déduit que $|\lambda| < 1$.

Solution 10

---

1. Φ est linéaire par linéarité de l'intégration. Soit $f \in E$. Par la relation de Chasles

$$\forall x \in [0,1],\ \Phi(f)(x) = \int_0^x tf(t)\ dt - x\int_1^x f(t)\ dt$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse, $\Phi(f)$ est donc dérivable et a fortiori continue. Ainsi $\Phi(f) \in E$. Φ est donc bien un endomorphisme de E.

2. Soit $f \in E$. D'après la question précédente, $\Phi(f)$ est dérivable et on a donc

$$\forall x \in [0,1],\ \Phi(f)'(x) = xf(x) - \int_1^x f(t)\ dt - xf(x) = -\int_1^x f(t)\ dt$$

$\Phi(f)'$ est à nouveau dérivable et $\Phi(f)'' = -f$.
Soit λ une valeur propre de Φ et f un vecteur propre associé.
Si $\lambda = 0$, on a $\Phi(f) = 0$ et donc $f = -\Phi(f)'' = 0$, ce qui contredit le fait que f est un vecteur propre. Ainsi 0 n'est pas valeur propre de Φ.
Supposons donc $\lambda \neq 0$. Alors $f = \frac{1}{\lambda}\Phi(f)$. Ainsi f est deux fois dérivable et $f'' = \frac{1}{\lambda}\Phi(f)'' = -\frac{1}{\lambda}f$. Par ailleurs, $f(0) = \frac{1}{\lambda}\Phi(f)(0) = 0$ et $f'(1) = \frac{1}{\lambda}\Phi(f)'(1) = 0$.
Supposons $\lambda < 0$. Comme $f'' = -\frac{1}{\lambda}f$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \alpha \operatorname{ch}\left(\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right) + \beta \operatorname{sh}\left(\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right)$$

Comme $f(0) = 0$, $\alpha = 0$. Puis comme $f'(1) = 0$, $\beta = 0$. Ainsi $f = 0$ et λ ne peut être valeur propre de Φ.
Supposons $\lambda > 0$. Comme $f'' = -\frac{1}{\lambda}f$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \alpha \cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + \beta \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Comme $f(0) = 0$, $\alpha = 0$. Puis comme $f'(1) = 0$, $\beta\cos(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) = 0$. On ne peut avoir $\beta = 0$ sinon $f = 0$. Ainsi $\cos(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) = 0$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Ainsi $\lambda = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2}$.
Par conséquent, les valeurs propres de Φ sont les $\lambda_n = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2}$ et les sous-espaces propres associés sont les $\operatorname{vect}(f_n)$ où $f_n : x \in [0,1] \mapsto \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)x\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution 11

Déterminons dans un premier temps le noyau de ϕ. Comme (a, b) est libre

$$\begin{aligned} & x \in \operatorname{Ker}\phi \\ \iff & \langle a \mid x \rangle = \langle b \mid x \rangle = 0 \\ \iff & x \in \operatorname{vect}(a,b)^\perp \end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{vect}(a,b)^\perp$.
Par ailleurs, comme a et b sont unitaires,

$$\phi(a+b) = (1+\langle a \mid b\rangle)(a+b)$$
$$\phi(a-b) = (1-\langle a \mid b\rangle)(a+b)$$

Ainsi si $\langle a \mid b\rangle = 0$,

$$\operatorname{Ker}(\phi - \operatorname{Id}_E) = \operatorname{vect}(a+b, a-b) = \operatorname{vect}(a,b)$$

et sinon

$$\operatorname{Ker}\left(\phi - (1+\langle a \mid b\rangle)\operatorname{Id}_E\right) = \operatorname{vect}(a+b)$$
$$\operatorname{Ker}\left(\phi - (1-\langle a \mid b\rangle)\operatorname{Id}_E\right) = \operatorname{vect}(a-b)$$

Pour récapituler, 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé est $\operatorname{vect}(a,b)^\perp$.
Si $\langle a \mid b\rangle = 0$, 1 est valeur propre et le sous-espace propre associé est $\operatorname{vect}(a,b)$.
Si $\langle a \mid b\rangle \neq 0$, $1+\langle a \mid b\rangle$ et $1-\langle a \mid b\rangle$ sont valeurs propres et leurs sous-espaces propres associés respectifs sont $\operatorname{vect}(a+b)$ et $\operatorname{vect}(a-b)$.
Dans tous les cas, la somme des dimensions de ces sous-espaces propres est égale à la dimension de E donc on a bien trouvé toutes les valeurs propres de ϕ. On peut également en conclure que ϕ est diagonalisable. On aurait aussi pu constater que ϕ est un endomorphisme symétrique pour justifier qu'il était diagonalisable. En effet, pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$\langle \phi(x) \mid y\rangle = \langle x \mid \phi(y)\rangle = \langle a \mid x\rangle\langle a \mid y\rangle + \langle b \mid x\rangle\langle b \mid y\rangle$$

Solution 12

φ est clairement linéaire. De plus,

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \varphi(X^k) = (k-n)X^{k+1} + kX^k \in \mathbb{R}_n[X]$$

Par linéarité, $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ de sorte que φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. La matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux sont $0, 1, \dots, n$. On en déduit que $\operatorname{Sp}(\varphi) = [\![0,n]\!]$ et que tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.
Soit $k \in [\![0,n]\!]$ et P_k le vecteur propre unitaire associé à la valeur propre k. Alors $\varphi(P) = kP$ ou encore

$$\frac{P_k'}{P_k} = \frac{nX+k}{X(X+1)} = \frac{k}{X} + \frac{n-k}{X}$$

On en déduit que $P_k = X^k(X+1)^n_k$.

Solution 13

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ et M un vecteur propre associé. Alors $M + \operatorname{tr}(M)I_n = \lambda M$ puis en considérant la trace des deux membres, $(n+1)\operatorname{tr}(M) = \lambda\operatorname{tr}(M)$. Si $\lambda = n+1$ ou $\operatorname{tr}(M) = 0$. Si $\operatorname{tr}(M) = 0$ alors $M = \lambda M$ et donc $\lambda = 1$. Ainsi $\operatorname{Sp}(u) \subset \{1, n+1\}$.
Déterminons les sous-espaces propres associés à ces potentielles valeurs propres. Clairement, le sous-espace associé à la valeur propre 1 est l'hyperplan des matrices de traces nulles. De plus, I_n est clairement un vecteur propre associé à la valeur propre $n+1$ donc le sous-espace propre associé à la valeur propre $n+1$ est $\operatorname{vect}(I_n)$ puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut excéder la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Remarque. On constate que u est diagonalisable puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque. Si $n = 1$, 1 n'est en fait pas valeur propre puisqu'alors le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle est le sous-espace nul.

Polynôme caractéristique

Solution 14

---

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}\chi_{u\circ v}(\lambda) &= \det(u \circ v - \lambda \operatorname{Id}_E) \\ &= \det(u \circ (v - \lambda u^{-1})) \\ &= \det(u)\det(v - \lambda u^{-1}) \\ &= \det(v - \lambda u^{-1})\det(u) \\ &= \det((v - \lambda u^{-1}) \circ u) \\ &= \det(v \circ u - \lambda \operatorname{Id}_E) = \chi_{v\circ u}(\lambda)\end{aligned}$$

On en déduit que $\chi_{u\circ v} = \chi_{v\circ u}$ puisque ces deux polynômes coïncident sur l'ensemble infini $\mathbb{K}$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $\mu \in \mathbb{K} \setminus \operatorname{Sp}(u)$, $u - \mu \operatorname{Id}_E$ est inversible donc d'après la question précédente

$$\det((u - \mu \operatorname{Id}_E) \circ v - \lambda \operatorname{Id}_E) = \det(v \circ (u - \mu \operatorname{Id}_E) - \lambda \operatorname{Id}_E)$$

Les deux membres de cette égalité définissent des fonctions polynomiales de la variable μ qui coïncident sur l'ensemble infini $\mathbb{K} \setminus \operatorname{Sp}(u)$. Elles coïncident donc en tout point de $\mathbb{K}$ et notamment en 0. Ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_{u\circ v}(\lambda) = \chi_{v\circ u}(\lambda)$ et donc $\chi_{u\circ v} = \chi_{v\circ u}$.

Solution 15

1. Les coefficients dans les cofacteurs de A sont du type $-A_{ij}$ ou $\lambda - A_{ij}$, ce qui explique que chaque cofacteur de A est polynomial en λ. De plus, chaque cofacteur de A possède exactement $n-1$ coefficients du type $\lambda - A_{ii}$ donc est de degré au plus $n-1$ en λ. On en déduit le résultat demandé.

2. Notons $C_1(\lambda), \dots, C_n(\lambda)$ les vecteurs colonnes de $\lambda I_n - A$, de sorte que

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \det(C_1(\lambda), \dots, C_n(\lambda))$$

Par multilinéarité du déterminant, on obtient

$$P'(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \det(C_1(\lambda), \dots, C_{k-1}(\lambda), C_k'(\lambda), C_{k+1}(\lambda), \dots, C_n(\lambda))$$

Or $C_k'(\lambda) = E_k$ où E_k est le k-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. En développant

$$\det(C_1(\lambda), \dots, C_{k-1}(\lambda), C_k'(\lambda), C_{k+1}(\lambda), \dots, C_n(\lambda))$$

par rapport à la k-ème colonne, on trouve que celui-ci vaut le cofacteur en position (k,k) de la matrice $\lambda I_n - A$, autrement dit B_{kk}. Ainsi $P'(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} B_{kk} = \operatorname{tr}(B)$.

3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $P'(\lambda) = \operatorname{tr}(B(\lambda))$ i.e.

$$n\lambda^{n-1} - p_1(n-1)\lambda^{n-2} \cdots - p_{n-1} = \lambda^{n-1}\operatorname{tr}(I_n) + \lambda^{n-2}\operatorname{tr}(B_1) \cdots + \operatorname{tr}(B_{n-1})$$

En identifiant coefficient par coefficient, on obtient $p_k(n-k) = -\operatorname{tr}(B_k)$.
Par ailleurs, $(\lambda I_n - A)B(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)I_n = P(\lambda)I_n$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, ce qui s'écrit également

$$(\lambda I_n - A)\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-1-k} B_k = (\lambda^n - \sum_{k=1}^{n} p_k \lambda^{n-k})I_n$$

Après un changement d'indice et en tirant parti du fait que $B_n = 0$, on trouve pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda^n B_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k (B_k - AB_{k-1}) = \lambda^n I_n - \sum_{k=1}^{n} p_k \lambda^{n-k} I_n$$

En identifiant «coefficient» par «coefficient» (les coefficients des puissances de λ sont des matrices, mais on peut raisonner indépendamment sur chaque coefficient des matrices si cela vous choque), on obtient $B_0 = I_n$ et $B_k - AB_{k-1} = -p_k I_n$ i.e. $B_k = AB_{k-1} - p_k I_n$ pour $1 \le k \le n$.
En reportant cette expression de B_k dans la relation $p_k(n-k) = -\operatorname{tr}(B_k)$ trouvée plus haut, on obtient

$$p_k(n-k) = -\operatorname{tr}(AB_{k-1} - p_k I_n) = -\operatorname{tr}(AB_{k-1}) + np_k$$

ce qui s'écrit encore $p_k = \frac{1}{k}\operatorname{tr}(AB_{k-1})$ pour $1 \le k \le n$.

4. On sait que $B_n = AB_{n-1} - p_n I_n$ d'après la question précédente et on a posé $B_n = 0$ donc $AB_{n-1} = p_n I_n$. A est donc inversible si $p_n \neq 0$ et dans ce cas, $A^{-1} = \frac{1}{p_n} B_{n-1}$.

5.
```
from numpy.polynomial import Polynomial
import numpy as np

def polycar(A):
  n,p=A.shape
  if n!=p:
    return
  Id=np.eye(n)
  B=Id
  X=Polynomial([0,1])
  P=X**n
  for k in range(1,n+1):
    p=np.trace(A@B)/k
    B=A@B-p*Id
    P=P-p*X**(n-k)
  return P

def inverse(A):
  n,p=A.shape
  if n!=p:
    return
  Id=np.eye(n)
  B=Id
  for k in range(1,n):
    p=np.trace(A@B)/k
    B=A@B-p*Id
  p=np.trace(A@B)/n
  return B/p
```

Solution 16

Remarquons tout d'abord que E_p est un espace vectoriel de dimension p. On peut par exemple voir que l'application $\begin{cases} E_p & \longrightarrow & \mathbb{C}^p \\ (u_n) & \longmapsto & (u_0, u_1, \dots, u_{p-1}) \end{cases}$ est un isomorphisme.

Posons $\omega_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{p}\right)$ pour $k \in [\![0, p-1]\!]$. On vérifie que $2\omega_k^n - \omega_k^{n+1} - \omega_k^{n-1} = 2\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{p}\right)\omega_k^n$. Autrement dit la suite (ω_k^n) est un vecteur propre de D_p associée à la valeur propre $2\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{p}\right)$. La famille formée des suites (ω_k^n) pour $0 \leq k \leq p-1$ est libre. On peut par exemple voir qu'elle est orthonormale pour le produit hermitien $((u_n), (v_n)) \mapsto \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u_k \overline{v_k}$. C'est donc une base de E_p.

Ainsi les valeurs propres de D_p sont exactement les $\lambda_k = 2\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{p}\right)$ pour $0 \leq k \leq p-1$ et elles sont toutes de multiplicité 1 dans le polynôme caractéristique. Or le coefficient de X dans ce polynôme est $(-1)^{p-1}\sigma_{p-1}$ où σ_{p-1} est la $(p-1)^{\text{ème}}$ fonction symétrique des λ_k. Puisque $\lambda_0 = 0$, on a tout simplement $\sigma_{p-1} = \prod_{k=1}^{p-1} \lambda_k$.

Posons $P = \prod_{k=1}^{p-1}\left(X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{p} + 1\right)$ de sorte que $\sigma_{p-1} = P(1)$. De plus, $X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{p} + 1 = (X - \omega_k)(X - \overline{\omega_k})$ donc $P = \left(\frac{X^n - 1}{X - 1}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{p-1} X^k\right)^2$. On en déduit que $\sigma_{p-1} = P(1) = p^2$. Le coefficient de X dans le polynôme caractéristique de D_p est donc $(-1)^{p-1}p^2$.

Solution 17

Notons A, B, et C les matrices de f, g et h dans une base de E. On a alors $CB = AC$. Comme C est de rang r, il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $C = PJ_rQ^{-1}$, où J_r désigne traditionnellement la matrice dont tous les coefficients sont nuls hormis les r premiers coefficients diagonaux qui valent 1. On a donc $PJ_RQ^{-1}B = APJ_RQ^{-1}$ ou encore $J_r(Q^{-1}BQ) = (P^{-1}AP)J_r$. Comme deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, on peut supposer pour simplifier que $J_rB = AJ_r$. En effectuant un calcul par blocs, on trouve que A et B sont

respectivements de la forme $\begin{pmatrix} M & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} M & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ où M est un bloc carré de taille r. On en déduit que χ_M, qui est bien un polynôme de degré r, divise χ_A et χ_B et donc également χ_f et χ_g.
La réciproque est fausse dès que $n \geq 2$. En effet, on peut encore raisonner matriciellement en considèrant A la matrice nulle et B une matrice non nulle nilpotente. Alors $\chi_A = \chi_B = X^n$ de sorte que χ_A et χ_B ont un facteur commun de degré n (à savoir X^n). Mais il n'existe évidemment pas de matrice C de rang n (i.e. inversible) telle que $CB = AC$ car AC est nulle tandis que CB ne l'est pas (C est inversible et B est non nulle).

Solution 18

Remarquons que

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n & -A \\ \hline -B & I_p \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline B & I_p \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n - AB & -A \\ \hline 0 & I_p \end{array}\right)$$

En considérant les déterminants, on obtient

$$\left|\begin{array}{c|c} \lambda I_n & -A \\ \hline -B & I_p \end{array}\right| = \chi_{AB}(\lambda)$$

Remarquons maintenant que

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline B & \lambda I_p \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n & -A \\ \hline -B & I_p \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n & -A \\ \hline 0 & I_p - BA \end{array}\right)$$

En considérant les déterminants, on obtient maintenant

$$\lambda^p \left|\begin{array}{c|c} \lambda I_n & -A \\ \hline -B & I_p \end{array}\right| = \lambda^n \chi_{BA}(\lambda)$$

Finalement, $\lambda^p \chi_{AB}(\lambda) = \lambda^n \chi_B A(\lambda)$. Ceci étant vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$X^p \chi_{AB} = X^n \chi_{BA}$$

Si $n = p$, on obtient bien $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ par intégrité de $\mathbb{K}[X]$.

Solution 19

---

1. La matrice A de u dans la base $(e_1, \dots, e_{2n+1})$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Ainsi

$$\chi_u(X) = \chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X-1 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & X-1 \end{vmatrix}$$

   En développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\chi_u(X) = (X-1)^{2n+1} - 1$$

2. $\chi_u(0) = -2 \neq 0$ donc 0 n'est pas valeur propre de u et u est inversible.
   D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_u(u) = 0$ i.e. $(u - \mathrm{Id}_E)^{2n+1} = \mathrm{Id}_E$. Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^{2n+1-k} u^k = \mathrm{Id}_E$$

ou encore

$$u \circ \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k+1}(-1)^{2n-k}u^k = 2\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$$

Ainsi en posant $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k+1}(-1)^{2n-k}\mathrm{X}^k$, on a bien $u^{-1} = \mathrm{P}(u)$.

3. Les valeurs propres de u sont les racines de χ_u. Autrement dit,

$$\mathrm{Sp}(u) = 1 + \mathbb{U}_{2n+1} = \left\{1 + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}},\ k \in [\![0, 2n]\!]\right\} = \left\{2e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right),\ k \in [\![0, 2n]\!]\right\}$$

4. Comme $\operatorname{card}\mathbb{U}_{2n+1} = 2n+1$ et $\deg\chi_u = 2n+1$, toutes les valeurs propres de u sont simples (on en déduit également que u est diagonalisable, ce qui n'est pas demandé). D'après les liens entre les coefficients et les racines d'un polynôme

$$\prod_{k=0}^{2n} 2e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = (-1)^{2n+1}\chi_u(0) = 2$$

En notant P_n le produit à calculer,

$$2^{2n+1}\mathrm{P}_n\prod_{k=0}^{2n} e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} = 2$$

Comme $\sum_{k=0}^{2n} k = n(2n+1)$,

$$\prod_{k=0}^{2n} e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} = e^{in\pi} = (-1)^n$$

Finalement,

$$\mathrm{P}_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}$$

Solution 20

Tout d'abord,

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \mathrm{X} + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

En numérotant $\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_{n-1}$ les lignes de ce déterminant et en effectuant l'opération $\mathrm{L}_0 \leftarrow \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{L}_k$, on obtient

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathrm{P}(\mathrm{X}) \\ -1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \mathrm{X} + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

avec $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\mathrm{X}^k$. En développant par rapport à la première ligne, on obtient $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$.

Diagonalisation

Solution 21

La matrice de Φ dans une base adaptée à la décomposition en somme directe $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_{\frac{n(n+1)}{2}} & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_{\frac{n(n-1)}{2}} \end{array}\right)$. On en déduit $\mathrm{tr}(\Phi) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$.

Solution 22

Supposons que u et v commutent et donnons-nous $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Pour tout $x \in \mathrm{E}_\lambda(u)$, $u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda v(x)$ donc $v(x) \in \mathrm{E}_\lambda(u)$, ce qui prouve que $\mathrm{E}_\lambda(u)$ est stable par v.

Supposons maintenant tout sous-espace propre de u stable par v. Puisque u est diagonalisable, $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$. Soit $x \in \mathrm{E}$. Alors il existe une famille $(x_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \in \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$ telle que $x = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} x_\lambda$. D'une part,

$$v(u(x)) = v\left(u\left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} x_\lambda\right)\right) = v\left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda x_\lambda\right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda v(x_\lambda)$$

D'autre part, en notant que $v(x_\lambda) \in \mathrm{E}_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$

$$u(v(x)) = u\left(v\left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} x_\lambda\right)\right) = u\left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} v(x_\lambda)\right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda v(x_\lambda)$$

Finalement, $v(u(x)) = u(v(x))$ donc u et v commutent.

Solution 23

Puisque u est diagonalisable, on sait que $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$. Choisissons une base $\mathcal{B}$ adaptée à cette décomposition en somme directe. On montre sans peine qu'un endomorphisme de E commute avec u si et seulement si il stabilise ses sous-espaces propres autrement dit si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant de la taille du sous-espace propre correspondant. Il est clair que l'ensemble des matrices de cette forme est un sous-espace vectoriel de dimension $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\dim \mathrm{E}_\lambda(u))^2$. Puisque l'application qui à un endomorphisme associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme, on en déduit que la dimension du commutant de u est également $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\dim \mathrm{E}_\lambda(u))^2$.

Solution 24

On montre que A est diagonalisable et plus précisément que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Le commutant de D est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ dC & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ où (a, b, c, d, e) décrit $\mathbb{K}^5$.

Il suffit alors de remarquer que $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ commute avec D si et seulement si PMP^{-1} commute avec A. Le commutant de A est donc l'ensemble des matrices de la forme

$$\mathrm{P}\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ dC & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -2a - c + 4b + 2d + e & 6a + 3c - 8b - 4d - 2e & -2a - c + 2b + d + e \\ -a + 2b + e & 3a - 4b - 2e & -a + b + e \\ dC - 2d + 2e & -3c + 4d - 4e & c - d + 2e \end{pmatrix}$$

où (a, b, c, d, e) décrit $\mathbb{K}^5$.

Solution 25

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Pour tout $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{E}_\lambda(u)$, $u(x) = \lambda x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{E}_\lambda(u)$ donc $\mathrm{F} \cap \mathrm{E}_\lambda(u)$ est stable par u. Par conséquent, G est stable par u.

2. On sait que F est stable par u et que u est diagonalisable donc $u_{|\mathrm{F}}$ est également diagonalisable. De plus, $\mathrm{Sp}(u_{|\mathrm{F}}) \subset \mathrm{Sp}(u)$ et quitte à poser $\mathrm{E}_\lambda(u_{|\mathrm{F}}) = \{0\}$ si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u_{|\mathrm{F}})$, on a $\mathrm{F} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{E}_\lambda(u_{|\mathrm{F}})$. On conclut en remarquant que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$

$$\mathrm{E}_\lambda(u_{|\mathrm{F}}) = \mathrm{Ker}(u_{|\mathrm{F}} - \lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{F}) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \cap \mathrm{F} = \mathrm{E}_\lambda(u) \cap \mathrm{F}$$

3. Soit $\mathrm{F} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{F}_\lambda$ où pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, F_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{E}_\lambda(u)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Alors pour tout $x \in \mathrm{F}_\lambda$, $u(x) = \lambda x \in \mathrm{F}_\lambda$ donc F_λ est stable par u. Par conséquent, F est stable par u.
Réciproquement, soit F un sous-espace stable par u et posons $\mathrm{F}_\lambda = \mathrm{F} \cap \mathrm{E}_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Alors F_λ est un sous-espace vectoriel de E_λ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $\mathrm{F} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{F}_\lambda$ d'après la question précédente.

Solution 26

1. On montre par exemple aisément que c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{G}$. Puisque le morphisme de groupe $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathrm{G} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}^n \end{array} \right.$ ne peut être injectif puisque $\mathbb{Z}$ est infini et que G est fini. Son noyau contient donc un entier non nul n tel que $\mathrm{M}^n = \mathrm{I}_2$. On peut même supposer n positif quitte à le changer en son opposé.
Puisque le polynôme $\mathrm{X}^n - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annule M, M est diagonalisable. On peut également ajouter que ses valeurs propres sont des racines de l'unité et en particulier des complexes de module 1.

   Si M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, ses valeurs propres ne peuvent être que 1 ou -1. Dans ce cas, M est semblable à I_2, $-\mathrm{I}_2$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Dans tous les cas, $\mathrm{M}^{12} = \mathrm{I}_2$.
Si M n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, elle l'est quand même dans $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont des complexes de module 1 conjugués puisque M est à coefficients réels. M est donc semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Puisque la trace est un invariant de similitude, $2\cos\theta = \mathrm{tr}(\mathrm{M}) \in \mathbb{Z}$. Puisque cos est à valeurs dans $[-1, 1]$, $\cos\theta \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$.

   - Si $\cos\theta = \pm 1$, $e^{i\theta} = e^{-i\theta} = \pm 1$ et on est ramené au cas précédent (en fait, M serait diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et on a supposé que ce n'était pas le cas).
   - Si $\cos\theta = \frac{1}{2}$, alors $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Il est alors clair que $\mathrm{M}^{12} = \mathrm{I}_2$.
   - Si $\cos\theta = \frac{-1}{2}$, alors $\theta \equiv \pm\frac{2\pi}{3}[2\pi]$. Il est alors clair que $\mathrm{M}^{12} = \mathrm{I}_2$.
   - Si $\cos\theta = 0$, alors $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Il est alors clair que $\mathrm{M}^{12} = \mathrm{I}_2$.

Solution 27

1. Puisque $\mathrm{X}^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples, A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \{-1, 1\}$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité. Ainsi pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k = \pm 1$ et, a fortiori, $\lambda_k \equiv 1[2]$. Puisque $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$, $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) \equiv n[2]$.

2. Les valeurs propres de A ne peuvent pas toutes être égales à 1 ou -1 sinon, A serait semblable à I_n ou $-\mathrm{I}_n$ et donc égale à I_n ou $-\mathrm{I}_n$. En notant a le nombre de valeurs propres égales à 1 et b le nombre de valeurs propres égales à -1. On a donc $a + b = n$, $1 \leq a \leq n - 1$ et $1 \leq b \leq n - 1$. Ainsi $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = a - b$ est compris entre $-n + 2$ et $n - 2$ i.e. $|\,\mathrm{tr}(\mathrm{A})| \leq n - 2$.

Solution 28

1. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_\mathrm{A} = (\mathrm{X} - 2)(\mathrm{X} - 3) - 2 = \mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} + 4 = (\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} - 4)$$

   Ainsi A est diagonalisable et le spectre de A est $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{1, 4\}$. On vérifie que

$$\mathrm{A}x_1 = x_1 \qquad \text{avec} \qquad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et que

$$\mathrm{A}x_2 = 4x_2 \qquad \text{avec} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Comme A est de taille 2, les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 4 dont donc de dimension 1. Ce sont respectivement $\mathrm{vect}(x_1)$ et $\mathrm{vect}(x_2)$.
De plus, $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{M}^2 = \mathrm{A}$. Alors $\mathrm{AM} = \mathrm{M}^3 = \mathrm{MA}$. Alors $\mathrm{AM}x_1 = \mathrm{MA}x_1 = \mathrm{M}x_1$ donc $\mathrm{M}x_1$ est un vecteur propre de A. Comme le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est $\mathrm{vect}(x_1)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{M}x_1 = \lambda x_1$. Donc $\lambda^2 x_1 = \mathrm{M}^2 x_1 = \mathrm{A}x_1 = x_1$. Don $\lambda^2 = 1$ i.e. $\lambda = \pm 1$ et $\mathrm{M}x_1 = \pm x_1$. De même, $\mathrm{A}x_2 = \pm 2x_2$. On peut alors affirmer que

$$\mathrm{M} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$$

Réciproquement ces quatres matrices conviennent.

Remarque. Les quatre matrices en question sont

$$\pm\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 29

1. On trouve $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^2 + 7\mathrm{X} - 8 = (\mathrm{X}+8)(\mathrm{X}-1)$. De plus, $\mathrm{E}_{-8}(\mathrm{A}) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{E}_1(\mathrm{A}) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. Ainsi $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Soit X une éventuelle solution. Alors en posant $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{XP}$, $\mathrm{Y}^2 = \mathrm{D}$. Alors Y commute avec $\mathrm{Y}^2 = \mathrm{D}$. En notant, $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathrm{YD} = \mathrm{DY}$ donne $b = c = 0$. Par conséquent Y est diagonale. On a donc $a^2 = -8$ et $b^2 = 1$. Il n'y a donc pas de solution à coefficients réels. Les solutions à coefficients complexes sont les matrices $\mathrm{P}\begin{pmatrix} \pm i\sqrt{8} & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$ (quatre solutions en tout).

Solution 30

1. On trouve $\mathrm{A} = a\mathrm{I}_3 + b\mathrm{J} + c\mathrm{J}^2$.

2. On trouve $\chi_\mathrm{J} = \mathrm{X}^3 - 1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-j)(\mathrm{X}-j^2)$. Comme χ_J est scindé à racines simples, J est diagonalisable.

3. Les sous-espaces propres associés à 1, j et j^2 sont respectivement engendrés par $\omega_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\omega_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ et $\omega_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$. Remarquons que $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ car J est diagonalisable.
Enfin, $\mathrm{A}\omega_0 = (a+b+c)\omega_0$, $\mathrm{A}\omega_1 = (a+bj+cj^2)\omega_1$, $\mathrm{A}\omega_2 = (a+bj^2+cj^4)\omega_2$ donc $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ est également une base de vecteurs propres de A. Ainsi A est diagonalisable. En posant $\mathrm{P} = a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2$, $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(1) & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{P}(j) & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{P}(j^2) \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$, $\mathrm{A} = \mathrm{QDQ}^{-1}$.

Solution 31

On vérifie que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $u\big((X-a)^k\big) = k(X-a)^k$. Ainsi tout entier $k \in [\![0, n]\!]$ est valeur propre de u est un vecteur propre associé est $(X-a)^k$. Comme $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$, u est diagonalisable et ses valeurs propres sont exactement les entiers compris entre 0 et n.

Solution 32

1. La linéarité de Φ est évidente. Pour montrer que $\Phi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$, il suffit de montrer que $\Phi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ car $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors, en convenant qu'une somme indexée sur l'ensemble vide est nulle
   $$\Phi(X^k) = (X+1)X^k - X(X+1)^k = (1-k)X^k - \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} X^j \in \mathbb{R}_n[X]$$
   Φ est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. D'après la question précédente, la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les $1-k \in [\![0, n]\!]$. On peut donc affirmer que les valeurs propres de Φ sont ces mêmes coefficients diagonaux. Φ possède donc $n+1$ valeurs propres distinctes et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ donc Φ est diagonalisable. De plus, on peut préciser que tous les sous-espaces propres de Φ sont de dimension 1.
   Recherchons maintenant les éléments propres de Φ. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Posons $\Gamma_k = \prod_{i=0}^{k-1} X - i$ (en particulier $\Gamma_0 = 1$). On vérifie aisément que $\Phi(\Gamma_k) = (1-k)\Gamma_k$. Comme les sous-espaces propres de Φ sont de dimension 1, le sosu-espace propre associé à la valeur propre $1-k$ est la droite vectorielle $\mathrm{vect}(\Gamma_k)$.

Solution 33

Puisque $\mathrm{rg}(A) = 1$, 0 est valeur propre de A et $\dim E_0 = \dim \mathrm{Ker}\, A = n-1$. Ainsi X^{n-1} divise χ_A. On a alors $\chi_A = X^{n-1}(X-\lambda)$. Comme la trace est égale à la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité, $\lambda = \mathrm{tr}(A)$.
Si $\lambda = 0$, alors A n'est pas diagonalisable puisque la multiplicité de 0 dans χ_A n'est pas égale à la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0.
Si $\lambda \neq 0$, alors λ est valeur propre de A. Comme E_0 et E_λ sont en somme directe, $\dim E_0 + \dim E_\lambda \leq n$ i.e. $\dim E_\lambda \leq 1$. De plus, $\dim E_\lambda \geq 1$ donc $\dim E_\lambda = 1$. La somme des dimensions des sous-espaces propres est alors égale à n et A est diagonalisable.

Solution 34

1. On a $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} + 2g$ avec $g : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^\top$. Comme $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et g sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, f en est un également.

2. Notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.
   $$\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = 3M$$
   $$\forall M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = -M$$
   Ainsi
   $$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \qquad\qquad \subset \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$
   Comme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut affirmer (détailler si cela ne semble pas clair) que
   $$\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$
   $$\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$
   $$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$
   On en déduit que f est diagonalisable, que ses valeurs propres sont 3 et 1 et que les sous-espaces propres associés respectifs sont $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

3. Déjà répondu à la question précédente.

4. Comme la trace et le déterminant d'un endomorphisme sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité et comme f est diagonalisable,

$$\operatorname{tr}(f) = 3 \cdot \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + (-1) \cdot \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = 3\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n(n+2) \quad \det(f) = 3^{\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \cdot (-1)^{\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Solution 35

---

1. Après un calcul sans difficulté, on trouve que

$$\chi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X}-1)^3.$$

Si la matrice A était diagonalisable sur $\mathbb{R}$, elle serait semblable à I_3 donc égale à I_3, ce qui n'est pas le cas : A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2. Après tout calcul on trouve que :

$$\chi_{\mathrm{B}} = (\mathrm{X}+1)^2(\mathrm{X}-1)^2$$

et

$$\dim(\operatorname{Ker}(\mathrm{B}+\mathrm{I}_3)) < 2$$

donc B n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

3. On trouve sans peine que

$$\chi_{\mathrm{C}} = (\mathrm{X}-3)(\mathrm{X}+3)(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1).$$

Comme $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ admet quatre valeurs propres réelles distinctes, C est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

4. On trouve sans peine que

$$\chi_{\mathrm{D}} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2).$$

D est donc diagonalisable que $\mathbb{R}$ en tant que matrice de taille trois admettant trois valeurs propres réelles dictinctes.

Solution 36

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(v)$. On montre classiquement que $\mathrm{E}_\lambda = \operatorname{Ker}(v - \lambda \operatorname{Id}_{\mathrm{E}})$ est stable par u : u induit donc un endomorphisme u_λ de E_λ. Puisque u est diagonalisable, u annule un polynôme scindé à racines simples à coefficients dans $\mathbb{K}$. A fortiori, u_λ annule ce même polynôme et est donc également diagonalisable. Notons $\mathcal{B}_\lambda$ une base de E_λ dans laquelle la matrice de u_λ est diagonale. Notons alors $\mathcal{B}$ la juxtaposition des bases $\mathcal{B}_\lambda$ pour $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$. Comme v est diagonalisable, E est la somme directe des sous-espaces propres de v et $\mathcal{B}$ est donc une base de E. Par construction, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est diagonale et celle de v l'est évidemment puisque $\mathcal{B}$ est la juxtaposition de bases de sous-espaces propres de v.

Solution 37

Dans la suite, on posera $n = \dim \mathrm{E}$.

Supposons u diagonalisable et donnons-nous un sous-espace vectoriel F de E. Fixons une base $(f_1, \dots, f_p)$ de F. Puisque u est diagonalisable, il existe une base de E formée de vecteurs propres de u. D'après le théorème de la base incomplète, on peut alors compléter la famille libre $(f_1, \dots, f_p)$ en une base $(f_1, \dots, f_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ où $e_{p+1}, \dots, e_n$ sont des vecteurs propres de u. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{G} = \operatorname{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est alors un supplémentaire de F stable par u.

Supposons maintenant que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E stable par u. Soit H un hyperplan de E. Alors il existe une droite supplémentaire de H dans E stable par u. Alors un vecteur directeur e_1 de cette droite est un vecteur propre de u.
Supposons avoir prouvé l'existence d'une famille libre $(e_1, \dots, e_p)$ $(1 \leq p \leq n-1)$ formée de vecteurs propres de u. Soit alors H un hyperplan contenant les vecteurs $e_1, \dots, e_p$. A nouveau, il existe une droite supplémentaire de H dans E stable par u et un vecteur directeur e_{p+1} de cette droite est un vecteur propre de u. Puisque H et $\operatorname{vect}(e_{p+1})$ sont en somme directe, la famille $(e_1, \dots, e_{p+1})$ est libre.
Par récurrence, il existe une famille libre $(e_1, \dots, e_n)$ formée de vecteurs propres de u. Puisque $n = \dim \mathrm{E}$, cette famille est une base et u est donc diagonalisable.

Solution 38

---

1. **a.** Comme f est bijectif, A est inversible. Alors

$$\chi_{AB} = \det(XI_n - AB) = \det(A(XA^{-1} - B)) = \det(A)\det(XA^{-1} - B) = \det(XA^{-1} - B)\det(A) = \det((XA^{-1} - B)A) = \det(XI_n - BA) = \chi_{BA}$$

b. Supposons que $f \circ g$ est diagonalisable. Alors AB est diagonalisable et il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $AB = PDP^{-1}$. Alors $BA = A^{-1}PDP^{-1}A = A^{-1}PD(A^{-1}P)^{-1}$. Donc BA est diagonlisable et $g \circ f$ également.

2. **a.** Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f \circ g)$. Si $\lambda \neq 0$, considérons un vecteur propre x associé à λ. Alors $f \circ g(x) = \lambda x$. Remarquons que $g(x) \neq 0_E$ car $\lambda x \neq 0_E$. De plus, $g \circ f(g(x)) = \lambda g(x)$ donc λ est un vecteur propre de $g \circ f$. Si $\lambda = 0$, alors $f \circ g$ n'est pas inversible. Ainsi $\det(f \circ g) = 0$. Par conséquent $\det(g \circ f) = \det(g)\det(g) = \det(f)\det(g) = \det(f \circ g) = 0$. Donc $g \circ f$ n'est pas inversible et $0 \in \mathrm{Sp}(g \circ f)$. On a donc montré que $\mathrm{Sp}(g \circ f) \subset \mathrm{Sp}(f \circ g)$. En inversant les rôles de f et g, on a l'inclusion réciproque de sorte que $\mathrm{Sp}(f \circ g) = \mathrm{Sp}(g \circ f)$.

b. Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. AB est diagonale donc diagonalisable mais BA ne l'est pas. En effet, la seule valeur propre de BA est 0, donc, si BA était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle donc elle serait nulle, ce qu'elle n'est pas.

Solution 39

1. D'une part, $f = f \circ g - g = (f - \mathrm{Id}_E) \circ g$ donc $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$. D'autre part, $g = f \circ g - f = f \circ (g - \mathrm{Id}_E)$ donc $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}\, f$. On en déduit que $\dim \mathrm{Ker}\, g \leq \dim \mathrm{Ker}\, f$ et que $\dim \mathrm{Im}\, g \leq \dim \mathrm{Im}\, f$. Mais, d'après le théorème du rang, on a également

$$\dim \mathrm{Im}\, g = \dim E - \dim \mathrm{Ker}\, g \geq \dim E - \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathrm{Im}\, f$$

donc $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{Im}\, g$. Or $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}\, f$ donc $\mathrm{Im}\, g = \dim \mathrm{Im}\, f$. D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\, g = \dim \mathrm{Ker}\, f$. Or $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$ donc $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker}\, f$.

2. Comme g est diagonalisable, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de E. Notons λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i. Alors $f \circ g(e_i) = f(e_i) + g(e_i)$ i.e. $(\lambda_i - 1)f(e_i) = \lambda_i e_i$. On ne peut avoir $\lambda_i = 1$ sinon on devrait avoir $\lambda_i = 0$ car $e_i \neq 0_E$. Ainsi $f(e_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} e_i$. Les e_i sont donc également des vecteurs propres de f et comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, f est diagonalisable.
Ensuite, $f \circ g(e_i) = \lambda_i f(e_i) = \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i - 1} e_i$ donc $f \circ g$ est aussi diagonalisable pour les mêmes raisons. On peut également affirmer que $\mathrm{Sp}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}\, \varphi$ avec $\varphi : t \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \frac{t^2}{t-1}$. φ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\varphi'(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$. On en déduit le tableau de variations suivant.

t	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi $\mathrm{Sp}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}\, \varphi = \mathbb{R} \setminus]0, 4[$.

Trigonalisation

Solution 40

Remarquons tout d'abord que pour $S \in GL_n(\mathbb{C})$, $\overline{S^{-1}} = \overline{S}^{-1}$.
Commençons par le sens le plus simple : supposons qu'il existe $S \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = S\overline{S}^{-1}$. Dans ce cas,

$$A\overline{A} = S\overline{S}^{-1}\overline{S\overline{S}^{-1}} = S\overline{S}^{-1}\overline{S}S^{-1} = I_n$$

Pour la réciproque, on raisonne par récurrence sur n.

Si $n = 1$, alors $\mathrm{A} = (\lambda)$ avec $|\lambda| = 1$. On a donc $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Il suffit alors de prendre $\mathrm{S} = \left(e^{\frac{i\theta}{2}}\right)$.

On suppose maintenant la propriété vraie à un rang $n-1 \geq 1$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{I}_n$.
Montrons d'abord que toutes les valeurs propres de A sont de module 1. Soient $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{P} + i\mathrm{Q}$. Ainsi $(\mathrm{P}+i\mathrm{Q})(\mathrm{P}-i\mathrm{Q}) = \mathrm{I}_n$. En passant aux parties réelle et imaginaire, on obtient $\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{QP} - \mathrm{PQ} = 0$. Ainsi P et Q commutent et trigonalisent dans une base commune i.e. il existe $\mathrm{R} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{P} = \mathrm{RUR}^{-1}$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{RVR}^{-1}$. Posons $\mathrm{T} = \mathrm{U} + i\mathrm{V}$. On a donc $\mathrm{A} = \mathrm{RTR}^{-1}$ et $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{R}\overline{\mathrm{T}}\mathrm{R}^{-1}$. La diagonale de T contient les valeurs propres de A. Comme $\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{I}_n$, on en déduit que toutes les valeurs propres de A sont de module 1.

Soit λ une valeur propre de A (il en existe toujours une complexe). On a donc $|\lambda| = 1$. On a à nouveau $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $\mu = e^{\frac{i\theta}{2}}$, de sorte que $\frac{\mu}{\overline{\mu}} = 1$. Soit X un vecteur propre de A associée à la valeur propre λ. Dans ce cas, $\overline{\mathrm{X}}$ est également un vecteur propre de X associé à la valeur propre λ. En effet, $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$ donc $\overline{\mathrm{AX}} = \overline{\lambda\mathrm{X}}$ puis $\mathrm{A}\overline{\mathrm{AX}} = \overline{\lambda}\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}}$. Puisque $\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{I}_n$, on obtient $\overline{\mathrm{X}} = \overline{\lambda}\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}}$ puis $\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \lambda\overline{\mathrm{X}}$ puisque $\frac{1}{\overline{\lambda}} = \lambda$. On peut supposer X réel. En effet, les vecteurs $\mathrm{X} + \overline{\mathrm{X}}$ et $i(\mathrm{X} - \overline{\mathrm{X}})$ sont réels et l'un des deux est non nul. L'un de ces deux vecteurs est donc un vecteur propre réel associé à la valeur propre λ. On peut compléter X en une base de $\mathbb{C}^n$ à l'aide de vecteurs réels (ceux de la base canonique, par exemple). Notons P la matrice de cette base dans la base canonique. Posons $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. Cette matrice est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} \lambda & \mathrm{Y}^\mathsf{T} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{C} \\ 0 & \end{array}\right)$ avec $\mathrm{Y} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. On a $\mathrm{B}\overline{\mathrm{B}} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\overline{\mathrm{P}}^{-1}\overline{\mathrm{AP}} = \mathrm{I}_n$ car $\overline{\mathrm{P}} = \mathrm{P}$ et $\overline{\mathrm{P}}^{-1} = \mathrm{P}^{-1}$ (P est à coefficients réels). On en déduit que $\mathrm{C}\overline{\mathrm{C}} = \mathrm{I}_n$. D'après notre hypothèse de récurrence, il existe $\mathrm{T} \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{C} = \mathrm{T}\overline{\mathrm{T}}^{-1}$.

Montrons qu'il existe $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $\mathrm{Z} - \lambda\overline{\mathrm{Z}} = \mathrm{Y}^\mathsf{T}\overline{\mathrm{T}}$. Puisque $\mathrm{B}\overline{\mathrm{B}} = 0$, on a en particulier $\lambda\overline{\mathrm{Y}}^\mathsf{T}\mathrm{T} + \mathrm{Y}^\mathsf{T}\overline{\mathrm{T}} = 0$. Notons $\varphi(z) = z + \lambda\overline{z}$ et $\psi(z) = z - \lambda\overline{z}$ pour $z \in \mathbb{C}$. φ et ψ sont des endomorphismes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. On vérifie que $\varphi \circ \psi = 0$ en utilisant $|\lambda| = 1$. On a donc $\operatorname{Im}\psi \subset \operatorname{Ker}\varphi$. φ et ψ ne sont pas nuls donc $\dim \operatorname{Im}\psi \geq 1 \geq \dim \operatorname{Ker}\varphi$. Ainsi $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Ker}\varphi$. Les composantes de $\mathrm{Y}\overline{\mathrm{T}}$ sont dans $\operatorname{Ker}\varphi$ donc dans $\operatorname{Im}\psi$, ce qui justifie l'existence de Z.

Posons alors $\mathrm{U} = \left(\begin{array}{c|c} \mu & \mathrm{Z}^\mathsf{T} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{T} \\ 0 & \end{array}\right)$. On a alors $\overline{\mathrm{U}}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{\overline{\mu}} & -\frac{1}{\mu}\overline{\mathrm{Z}}^\mathsf{T}\overline{\mathrm{T}}^{-1} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{T} \\ 0 & \end{array}\right)$. On vérifie alors que $\mathrm{U}\overline{\mathrm{U}}^{-1} = \mathrm{B}$. Il suffit alors de poser $\mathrm{S} = \mathrm{PUP}^{-1}$ pour avoir $\mathrm{A} = \mathrm{S}\overline{\mathrm{S}}^{-1}$.

Solution 41

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ une matrice semblable à son inverse. Notons α, β, γ les racines du polynôme caractéristique comptée avec multiplicité. On a donc $(\mathrm{A} - \alpha\mathrm{I}_3)(\mathrm{A} - \beta\mathrm{I}_3)(\mathrm{A} - \gamma\mathrm{I}_3) = 0$. En multipliant par $\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\mathrm{A}^{-3}$, on obtient $(\mathrm{A}^{-1} - \frac{1}{\alpha}\mathrm{I}_3)(\mathrm{A}^{-1} - \frac{1}{\beta}\mathrm{I}_3)(\mathrm{A}^{-1} - \frac{1}{\gamma}\mathrm{I}_3) = 0$. Ainsi $(\mathrm{X} - \frac{1}{\alpha})(\mathrm{X} - \frac{1}{\beta})(\mathrm{X} - \frac{1}{\gamma})$ est le polynôme caractéristique de A^{-1}. A et A^{-1} étant semblables, elles ont même polynôme caractéristique. On montre alors par l'absurde qu'au moins un des trois complexes α, β, γ est égal à son inverse et donc égal à ± 1. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}^*$ telles que les racines du polynôme caractéristique (comptées avec multiplicité) soient $\pm 1, \lambda, \frac{1}{\lambda}$.

Réciproquement soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique admet pour racines $\pm 1, \lambda, \frac{1}{\lambda}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Quitte à changer A en $-\mathrm{A}$, on peut supposer que les racines sont $1, \lambda, \frac{1}{\lambda}$.

- Si $\lambda \neq \pm 1$, les complexes $1, \lambda, \frac{1}{\lambda}$ sont distincts : A et A^{-1} sont donc diagonalisables et semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$. A et A^{-1} sont donc semblables entre elles.
- Si $\lambda = -1$ et si $\dim \mathrm{E}_{-1}(\mathrm{A}) = 2$, alors on a également $\dim \mathrm{E}_{-1}(\mathrm{A}^{-1}) = 2$ et A et A^{-1} sont donc toutes deux diagonalisables et semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Si $\lambda = -1$ et si $\dim E_{-1}(A) = 1$, alors on a également $\dim E_{-1}(A^{-1}) = 1$ et A et A^{-1} sont donc toutes semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Si $\lambda = 1$ et si $\dim E_1(A) = 3$, alors $A = A^{-1} = I_3$.
- Si $\lambda = 1$ et si $\dim E_1(A) = 2$, alors on a également $\dim E_{-1}(A^{-1}) = 2$ et A et A^{-1} sont donc toutes deux semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Si $\lambda = 1$ et si $\dim E_1(A) = 1$, alors on a également $\dim E_{-1}(A^{-1}) = 1$ et A et A^{-1} sont donc toutes deux semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution 42

1. Il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $C = P^{-1}BP$ soit trigonale. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de C i.e. les valeurs propres de B. La matrice $\chi_A(C)$ est également triangulaire et a pour coefficients diagonaux $\chi_A(\lambda_1), \dots, \chi_A(\lambda_n)$. Les spectres de A et B étant disjoints, ces coefficients sont non nuls, ce qui prouve que $\chi_A(C)$ est inversible. Or les matrices $\chi_A(B)$ et $\chi_A(C)$ sont semblables puisque $\chi_A(C) = \chi_A(P^{-1}BP) = P^{-1}\chi_A(B)P$. Donc $\chi_A(B)$ est également inversible.
2. On montre par récurrence que $A^nX = XB^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montre ensuite le résultat voulu par bilinéarité du produit matriciel. On a notamment $\chi_A(A)X = X\chi_A(B)$. Or $\chi_A(A) = A$ d'après Cayley-Hamilton donc $X\chi_A(B) = 0$. Comme $\chi_A(B)$ est inversible, $X = 0$.
3. Considérons l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto & AX - XB \end{array} \right.$. Φ est clairement un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et la question précédente montre que $\operatorname{Ker}(\Phi) = \{0\}$ i.e. que Φ est injectif. Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, Φ est également surjectif, ce qui prouve le résultat voulu.