Séries entières

1 Généralités

Définition 1.1 Série entière

On appelle **série entière** toute série de fonctions de la variable complexe ou réelle de la forme $\sum a_n z^n$ où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Remarque. On s'autorise un abus de notation en confondant z^n et la fonction $z \mapsto z^n$.

Lemme 1.1 Lemme d'Abel

Soient $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ **converge absolument**.

Définition 1.2 Rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle **rayon de convergence** de cette série entière la borne supérieure

$$\sup \{r \in \mathbb{R}_+,\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Exemple 1.1

Considérons la série entière $\sum \cos(n) z^n$. Notons R son rayon de convergence.

- La suite de terme général $\cos(n)$ est bornée donc $\mathrm{R} \geq 1$.
- Si $r > 1$, la suite $(\cos(n) r^n)$ n'est pas bornée. Donc $\mathrm{R} = 1$.

Proposition 1.1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si $|z| < \mathrm{R}$, alors $\sum a_n z^n$ **converge absolument**.
- Si $|z| > \mathrm{R}$, alors $\sum a_n z^n$ **diverge grossièrement**.

Remarque. Si $|z| = \mathrm{R}$, on ne peut rien dire.

Rappel Règle de d'Alembert

Soit (u_n) une suite réelle **strictement positive** telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
- Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Remarque. Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Attention ! La suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ peut ne pas avoir de limite.

Proposition 1.2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R telle que (a_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors $\mathrm{R} = \frac{1}{\ell}$

Remarque. $\mathrm{R} = 0$ si $\ell = +\infty$ et $\mathrm{R} = +\infty$ si $\ell = 0$.

Exemple 1.2

- La série entière $\sum 2^n z^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{2}$.
- La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

Exercice 1.1

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \binom{2n}{n} z^n$.

Attention ! On ne peut pas toujours utiliser la règle de d'Alembert pour calculer le raon de convergence d'une série de cette manière. Par exemple, la suite $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ peut ne pas avoir de limite ou la suite (a_n) peut s'annuler une infinité de fois.

Exemple 1.3

Considérons la série entière $\sum a_n z^n$ avec $a_n = 2^n$ si n est pair et $a_n = 3^n$ si n est impair. On note R son rayon de convergence.
La suite de terme général $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'admet pas de limite puisqu'elle prend alternativement les valeurs $\frac{3}{2}$ et $\frac{2}{3}$.
Néanmoins la suite de terme général $u_n = \frac{a_n}{9^n}$ est bornée puisque $u_{2n} = \frac{4^n}{9^n} \leq 1$ et $u_{2n+1} = 3$. Ainsi $\mathrm{R} \geq \frac{1}{9}$. Mais si $r > \frac{1}{9}$, la suite de terme général $v_n = a_n r^n$ n'est pas bornée puisque la suite extraite de terme général $v_{2n+1} = 3 \cdot (9r)^n$ diverge vers $+\infty$. Ainsi le rayon de convergence vaut $\frac{1}{9}$.

Exemple 1.4 Série lacunaire

Considérons par exemple la série entière $\sum z^{n^2}$. C'est bien une série entière dans le sens où sa somme en cas de convergence est la même que celle de $\sum a_n z^n$ avec $a_n = 1$ si n est un carré d'entier et $a_n = 0$ sinon. On ne peut pas calculer le rayon de convergence en étudiant la limite de la suite (a_{n+1}/a_n) puisque (a_n) s'annule une infinité de fois. On peut néanmoins appliquer la règle de d'Alembert directement.

$$\frac{|z^{(n+1)^2}|}{|z^{n^2}|} = |z|^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$$

Ainsi le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

Définition 1.3 Disque ouvert/intervalle ouvert de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

- On appelle **disque ouvert de convergence** le disque $\{z \in \mathbb{C}, \ |z| < \mathrm{R}\}$.
- On appelle **intervalle ouvert de convergence** l'intervalle $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

Remarque. Si $\mathrm{R} = +\infty$, le disque ouvert de convergence est $\mathbb{C}$ tandis que l'intervalle ouvert de convergence est $\mathbb{R}$.

Convergence au bord du disque ouvert de convergence

On ne peut rien dire quant à la convergence d'une série entière au bord du disque ouvert de convergence. Par exemple, la série $\sum \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1 (critère de d'Alembert). La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge tandis que la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge. On peut en fait montrer que si $|z| = 1$, la série $\sum \frac{z^n}{n}$ converge si et seulement si $z \neq 1$.