

1 Cours

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire et norme Définition d'un produit scalaire. Orthogonalité. Espace préhilbertien réel, espace euclidien. Norme associée à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Inégalité triangulaire. Identités de polarisation.

Familles orthogonales Définition des familles orthogonales et orthonormales. Une famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. Théorème de Pythagore. Bases orthonormales : coordonnées, expression du produit scalaire et de la norme. Procédé de Gram-Schmidt. Existence de bases orthonormales. Toute famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormale.

Orthogonalité Orthogonal d'une partie. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, F^\perp est l'unique supplémentaire orthogonal de F . Dimension de l'orthogonal en dimension finie. Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales. Expression du projeté orthogonal à l'aide d'une base orthonormale. Distance à un sous-espace vectoriel. Hyperplans affines : équations, distance à un hyperplan affine.

2 Méthodes à maîtriser

- Montrer qu'une application est un produit scalaire. Dans l'ordre : symétrie, linéarité par rapport à l'**une** des deux variables (la linéarité par rapport à la seconde variable s'obtient par symétrie), positivité, définition.
- Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas des produits scalaires usuels sur \mathbb{R}^n et $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
- Orthonormaliser une famille libre à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.
- Déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel.
- Calculer un projeté orthogonal.
- Calculer la distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie.

3 Questions de cours

Produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ Montrer que l'application $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2 \mapsto \langle A | B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire.

BCCP 76 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$. On pose $\|x\| = \sqrt{(x | x)}$ pour $x \in E$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
(b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b], f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{dt}{f(t)}, f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

BCCP 77 Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E . Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
(a) Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
(b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

BCCP 79 Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Démontrer que $\int_a^b h(x) dx = 0 \implies h = 0$.
2. Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On pose pour $(f, g) \in E^2$, $(f | g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x} dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

BCCP 80 Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1. Démontrer que $(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2(x)$.

BCCP 81 On admet que $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2 \mapsto A^T B$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de \mathcal{F}^\perp .
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur \mathcal{F}^\perp .
4. Calculer la distance de J à \mathcal{F} .

BCCP 82 Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A | A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires.