Devoir à la maison n°15

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1 ★★ **CCP PC 2020**

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$$

et de calculer sa valeur. On considère la fonction $f : [0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[, \quad f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}.$$

On définit également la fonction $u : [0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[, \quad u(x,t) = -\frac{x\sin(t) + \cos(t)}{1+x^2} e^{-xt}$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leq |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaires

1. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2. En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$$

est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.

3. Soit $x \geq 0$. Montrer que $t \mapsto u(x,t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $]0,+\infty[$.

Partie II - Calcul de F sur $]0,+\infty[$

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $\mathrm{F} : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad \mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\, \mathrm{d}t$$

4. Montrer que $|\mathrm{F}(x)| \leq \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

5. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\, \mathrm{d}t$$

6. En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Conclure que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

Partie III - Conclusion

On considère les fonctions $F_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ et $F_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x, t)\, \mathrm{d}t \text{ et } F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x, t)\, \mathrm{d}t$$

7. Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0, 1]$.

8. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{u(x, t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que :

$$F_2(x) = \frac{x\sin(1) + \cos(1)}{1 + x^2}e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$$

9. Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0, 1]$.

10. En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I.