Devoir à la maison n°09

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

$\boxed{1}$ L'application

$$\mathrm{T} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{2n-1} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ (t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) & \longmapsto & \mathrm{T}(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) \end{array} \right.$$

est clairement linéaire. Ainsi $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Im}\,\mathrm{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De plus, le noyau de T est clairement nul donc T induit un isomorphisme de $\mathbb{C}^{2n-1}$ sur $\mathrm{Im}\,\mathrm{T} = \mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$. Par conséquent, $\dim \mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) = \dim \mathbb{C}^{2n-1} = 2n-1$.
On en déduit également que l'image de la base canonique de $\mathbb{C}^{2n-1}$ est une base de $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$. Les vecteurs de cette base sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec des 1 sur l'une des $2n-1$ diagonales et des 0 ailleurs.

$\boxed{2}$ Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. On montre par une récurrence évident que A^k et B commutent pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par linéarité de la multiplication matricielle à gauche et à droite P(A) et B commutent pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. En appliquant ce qui précède à B et P(A), on montre que Q(B) et P(A) commutent pour tout couple $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]^2$.

$\boxed{3}$ Comme A est une matrice carrée de taille 2 :

$$\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{A})\mathrm{X} + \det(\mathrm{A}) = \mathrm{X}^2 - 2a\mathrm{X} + (a^2 - bc)$$

$\boxed{4}$ Le discriminant de χ_A est $4bc$.
Si $bc \neq 0$, χ_A est simplement scindé donc A est diagonalisable.
Si $bc = 0$, alors $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{a\}$. Ainsi A est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à $a\mathrm{I}_2$, ce qui signifie qu'elle est égale à $a\mathrm{I}_2$. Ceci équivaut donc à $b = c = 0$.
Pour récapituler, A est diagonalisable si et seulement si $bc \neq 0$ ou $b = c = 0$.

$\boxed{5}$ Comme A est de taille 2, $\mathrm{card}\,\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \leq 2$. De plus, A est une matrice à coefficients complexes donc elle possède au moins une valeur propre. Finalement, $\mathrm{card}\,\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \in \{1, 2\}$.
Si $\mathrm{card}\,\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = 2$, alors $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{al, \beta\}$ avec $\alpha \neq \beta$. Dans ce cas, A est diagonalisable puisqu'elle possède autant de valeurs propres que sa taille. Ainsi A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.
Si $\mathrm{card}\,\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = 1$, alors $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{\alpha\}$. A étant une matrice à coefficients complexes, elle est au moins trigonalisable donc semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

$\boxed{6}$ Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Si M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, alors M est bien semblable à une matrice de Toeplitz puisque $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathrm{T}(0, \alpha, \gamma)$.

Supposons maintenant que M est semblable à une matrice de la forme $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq \beta$. Il suffit donc de montrer que cette matrice est semblable à une matrice de Toeplitz i.e. une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$. En identifiant trace et

déterminant, on est donc incité à choisir $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\begin{cases} 2a = \alpha+\beta \\ a^2 - bc = \alpha\beta \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} a = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ bc = \left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 \end{cases}$. Posons par exemple, $a = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ et $b = c = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ puis $\mathrm{N} = \mathrm{T}(c,a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$. On a $bc = \left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 \neq 0$ car $\alpha \neq \beta$. On vérifie que $\chi_{\mathrm{N}} = \mathrm{X}^2 - 2a\mathrm{X} + a^2 - bc = (\mathrm{X}-\alpha)(\mathrm{X}-\beta)$ avec $\alpha \neq \beta$ donc N est bien semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Par transitivité de la similitude, M est semblable à la matrice de Toeplitz N.
On a bien montré que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ était semblable à une matrice de Toeplitz.

7 On a donc $\mathrm{A}_n(a,b,c)\mathrm{X} = \lambda\mathrm{X}$. En observant la première ligne, on obtient

$$ax_1 + bx_2 = \lambda x_1$$

et, comme $x_0 = 0$,

$$bx_2 + (a-\lambda)x_1 + cx_0 = 0$$

En observant la dernière ligne

$$cx_{n-1} + ax_n = \lambda x_n$$

et, comme $x_{n+1} = 0$,

$$bx_{n+1} + (a-\lambda)x_n + cx_{n-1} = 0$$

Pour la ligne $i \in [\![2, n-1]\!]$,

$$cx_{i-1} + ax_i + bx_{i+1} = \lambda x_i$$

ou encore

$$bx_{i+1} + (a-\lambda)x_i + cx_{i-1} = 0$$

Finalement, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$bx_{k+2} + (a-\lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$$

Les termes d'indices de la suite (x_k) sont alors définis à partir du rang $n+2$ par la relation de récurrence

$$\forall k \geq n,\ x_{k+2} = -\frac{1}{b}\left((a-\lambda)x_{k+1} + cx_k\right)$$

ce qui est valide car $b \neq 0$.
La suite (x_k) vérifie donc bien

$$\forall k \in \mathbb{N},\ bx_{k+2} + (a-\lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$$

8 Puisque $b \neq 0$, (E) est une équation du second degré qui possède une ou deux racines.
Si l'équation (E) possède une racine double r, alors $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x_n = (\alpha k + \beta)r^k$$

Si l'équation (E) possède deux racines distinctes r_1 et r_2, alors $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x_n = \alpha r_1^k + \beta r_2^k$$

9 Supposons que (E) possède une unique racine r. Comme $c \neq 0$, $r \neq 0$. Avec les notations de la question précédente, $x_0 = \beta = 0$ et $x_{n+1} = (\alpha(n+1)+\beta)r^{n+1} = 0$ puis $\alpha(n+1)r^{n+1} = 0$. Comme $r \neq 0$, $\lambda = 0$. Ainsi (x_k) est nulle puis $\mathrm{X} = 0$, ce qui contredit le fait que X est un vecteur propre.
L'équation (E) possède donc deux racines distinctes r_1 et r_2.

10 A nouveau, $c \neq 0$ donc r_1 et r_2 sont non nuls. On utilise toujours les notations précédentes de sorte que $x_0 = \alpha+\beta = 0$ et $x_{n+1} = \alpha r_1^{n+1} + \beta r_2^{n+1} = 0$. Ainsi $\alpha(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) = 0$. De plus, $\alpha \neq 0$, sinon $\alpha = \beta = 0$ puis $\mathrm{X} = 0$, ce qui contredit le fait que X est un vecteur propre. On en déduit que $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$, c'est-à-dire $(r_1/r_2)^{n+1} = 1$ ou encore $r_1/r_2 \in \mathbb{U}_{n+1}$.

11 Les relations coefficients/racines nous enseignent que $r_1 + r_2 = \dfrac{\lambda - a}{b}$ et $r_1 r_2 = \dfrac{c}{b}$. Alors

$$\lambda = a + b(r_1+r_2) = a + br_2\left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right)$$

Or $r_1/r_2 \in \mathbb{U}_{n+1}$ donc il existe $\ell \in [\![0, n]\!]$ tel que $r_1/r_2 = e^{\frac{2i\ell\pi}{n+1}}$. De plus, $r_1 \neq r_2$ donc $\ell \neq 0$ et $\ell \in [\![1, n]\!]$. En utilisant la formule de l'arc moitié

$$\lambda = a + 2br_2 e^{\frac{i\ell\pi}{n+1}} \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$

en posant $\rho = br_2 e^{\frac{i\ell\pi}{n+1}}$. Alors

$$\rho^2 = b^2 r_2^2 e^{\frac{2i\ell\pi}{n+1}} = b^2 r_2^2 \cdot \frac{r_1}{r_2} = b^2 r_1 r_2 = bc$$

car $r_1 r_2 = \dfrac{c}{b}$.

12 On rappelle qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k$$

Puisque $x_0 = \alpha + \beta = 0$, on obtient grâce à la formule de l'arc-moitié,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x_k = \alpha(r_1^k - r_2^k) = \alpha r_2^k\left((r_1/r_2)^k - 1\right) = \alpha r_2^k\left(e^{\frac{2i\ell k\pi}{n+1}} - 1\right) = 2i\alpha\left(r_2 e^{\frac{i\ell k\pi}{n+1}}\right)^k \sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$$

Or on a posé $\rho = br_2 e^{\frac{i\ell\pi}{n+1}}$ à la question précédente de sorte que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x_k = 2i\alpha \cdot \frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$$

Notamment,

$$\forall k \in [\![0, n+1]\!],\ x_k = 2i\alpha \cdot \frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$$

13 Réciproquement soit $\ell \in [\![1, n]\!]$. Notons ρ une racine carrée de bc et posons

$$\lambda_\ell = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$

ainsi que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x_k = \frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$bx_{k+2} + (a - \lambda_\ell)x_{k+1} + cx_k = \frac{\rho^{k+2}}{b^{k+1}}\sin\left(\frac{\ell(k+2)\pi}{n+1}\right) - 2\frac{\rho^{k+2}}{b^{k+1}}\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)\sin\left(\frac{\ell(k+1)\pi}{n+1}\right) + c\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$$

Or $\rho^2 = bc$ donc $c\dfrac{\rho^k}{b^k} = \dfrac{\rho^{k+2}}{b^{k+1}}$ puis

$$bx_{k+2} + (a - \lambda_\ell)x_{k+1} + cx_k = \frac{\rho^{k+2}}{b^{k+1}}\left(\sin\left(\frac{\ell(k+2)\pi}{n+1}\right) - 2\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)\sin\left(\frac{\ell(k+1)\pi}{n+1}\right) + \sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)\right)$$

Or pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ donc

$$\sin\left(\frac{\ell(k+2)\pi}{n+1}\right) + \sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right) = 2\sin\left(\frac{\ell(k+1)\pi}{n+1}\right)\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$

puis

$$bx_{k+2} + (a - \lambda_\ell)x_{k+1} + cx_k = 0$$

On a de plus $x_0 = x_{n+1} = 0$ de sorte que

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= \lambda_\ell x_1 \\ \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ cx_{i-1} + ax_i + bx_{i+1} &= \lambda_\ell x_i \\ cx_{n-1} + ax_n &= \lambda_\ell x_n \end{aligned}$$

Ainsi en posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a $A_n(a, b, c)X = \lambda_\ell X$ et $X \neq 0$ puisque $x_1 = \dfrac{\rho}{b}\sin\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right) \neq 0$ ($\rho^2 = bc \neq 0$). Ainsi λ est bien valeur propre de $A_n(a, b, c)$.

La fonction cos étant injective sur $[0, \pi]$, les λ_ℓ pour $\ell \in [\![1, n]\!]$ sont distincts. Ainsi la matrice $A_n(a, b, c)$ possède n valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

14 Notons σ le cycle $(n, n-1, \dots, 2, 1)$. En notant f_n l'endomorphisme canoniquement associé à M_n et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a donc $f_n(e_j) = e_{\sigma(j)}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $j \in [\![1, n]\!]$, $f_n^k(e_j) = e_{\sigma^k(j)}$. Par conséquent, $(\mathrm{M}_n^k)_{i,j} = \delta_{i,\sigma^k(j)}$. On peut alors écrire

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathrm{M}_n^k = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathrm{I}_{n-k} \\ \hline \mathrm{I}_k & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

En particulier, $\mathrm{M}_n^n = \mathrm{I}_n$. La matrice M_n est inversible et $\mathrm{M}_n^{-1} = \mathrm{M}_n^{n-1}$. De plus, $\mathrm{X}^n - 1$ est un polynôme annulateur de M_n.

15 Le polynôme $\mathrm{X}^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (\mathrm{X} - \omega)$ est simplement scindé et annule M_n donc M_n est diagonalisable. De plus,

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{M}_n) \subset \mathbb{U}_n = \left\{\omega_n^p,\ p \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$.En posant $\mathrm{X}_p = (\omega_n^{pq})_{0 \le q \le n-1}^{\mathsf{T}}$, on vérifie que $\mathrm{M}_n\mathrm{X}_p = \omega_n^p\mathrm{X}_p$ donc ω_n^p valeur propre de M_n. Ainsi

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{U}_n) = \left\{\omega_n^p,\ p \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

et chaque sous-espace propre est de dimension 1. Par conséquent, le sous-espace propre associé à la valeur propre ω_n^p est $\mathrm{vect}(\mathrm{X}_p)$. Une base de vecteurs propres de M_n est donc $(\mathrm{X}_p)_{0 \le p \le n-1}$.

16 La matrice Φ_n est la matrice de passage de la base canonique vers la base de vecteurs propres de la question précédente. Ainsi $\Phi_n^{-1}\mathrm{M}_n\Phi_n$ est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{p-1})$.

17 Il existe $(t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{T}(t_1, t_2, \dots, t_0, \dots, t_{n-1})$. On vérifie alors que $\mathrm{A} = \sum_{k=0}^{n-1} t_k \mathrm{M}_n^k$. Ainsi en posant $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n-1} t_k \mathrm{X}^k$, $\mathrm{A} = \mathrm{P}(\mathrm{M}_n)$.

18 Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Notons Q et R le reste de la division euclidienne de P par $\mathrm{X}^n - 1$. Alors

$$\mathrm{P}(\mathrm{M}_n) = (\mathrm{M}_n^n - \mathrm{I}_n)\mathrm{Q}(\mathrm{M}_n) + \mathrm{R}(\mathrm{M}_n)$$

De plus, $\mathrm{R} \in \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$ donc il existe $(t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathrm{R} = \sum_{k=0}^{n-1} t_k \mathrm{X}^k$. Ainsi

$$\mathrm{P}(\mathrm{M}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k \mathrm{M}_n^k = \mathrm{T}(t_1, t_2, \dots, t_0, \dots, t_{n-1})$$

donc $\mathrm{P}(\mathrm{M}_n)$ est bien une matrice circulante.

19 Soit $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(\mathrm{M}_n) \end{array}\right.$. On vérifie aisément que φ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. De plus, les deux questions précédentes montrent que l'ensemble des matrices circulantes est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par produit. Comme l'ensemble des matrices circulantes est inclus dans $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$, c'est donc également un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$.
Enfin, pour tout $(t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$,

$$\mathrm{T}(t_1, \dots, t_{n-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1})^{\mathsf{T}} = \mathrm{T}(t_{n-1}, \dots, t_1, t_0, t_{n-1}, \dots, t_1)$$

donc l'ensemble des matrices circulantes est stable par transposition.

Remarque. On aurait aussi pu remarquer que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{M}_n)^{\mathsf{T}} = \mathrm{P}(\mathrm{M}_n^{\mathsf{T}}) = \mathrm{P}(\mathrm{M}_n^{n-1}) = \mathrm{Q}(\mathrm{M}_n)$$

avec $\mathrm{Q} = \mathrm{P}(\mathrm{X}^{n-1})$.

20 Soit A une matrice circulante. Il existe donc $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{P}(\mathrm{M}_n)$. On a vu qu'avec $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(1, \omega_n, \dots, \omega_n^{n-1})$, $\Phi_n^{-1}\mathrm{M}_n\Phi_n = \mathrm{D}$. Alors

$$\Phi_n^{-1}\mathrm{A}\Phi_n = \Phi_n^{-1}\mathrm{P}(\mathrm{M}_n)\Phi_n = \mathrm{P}(\phi_n^{-1}\mathrm{M}_n\Phi_n) = \mathrm{P}(\mathrm{D}) = \mathrm{diag}(\mathrm{P}(1), \dots, \mathrm{P}(\omega_n^{n-1}))$$

Les valeurs propres de A sont donc $P(1), \dots, P(\omega_n^{n-1})$. On peut exprimer ces valeurs propres en fonction des coefficients de A puisqu'on peut choisir $P = \sum_{k=0}^{n-1} t_k X^k$ où $A = T(t_1, \dots, t_{n-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$.
Enfin, une base de vecteurs propres de A est formée des colonnes de Φ_n, c'est-à-dire des vecteurs $X_0, \dots, X_{n-1}$ définis à la question **15**.

21 Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $(x_0, f_M(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0))$ soit une base de $\mathbb{C}^n$. Alors il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$f_M^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f_M^k(x_0)$$

La matrice de f_M dans la base $(x_0, f_M(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0))$ est alors $C(a_0, \dots, a_{n-1})$. Comme M et $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ sont les matrices de f_M dans deux bases de $\mathbb{C}^n$, elles sont semblables.
Réciproquement, supposons que M soit semblable à une matrice $C(a_0, \dots, a_{n-1})$. Il existe donc une base $(x_0, \dots, x_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de f_M est $C(a_0, \dots, a_{n-1})$. Pour tout $j \in [\![0, n-2]\!]$, on a donc $f_M(x_j) = x_{j+1}$, ce qui permet d'affirmer que $x_j = f_M^j(x_0)$ pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$. Ainsi $(x_0, \dots, f_M^{n-1}(x_0))$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

22 Remarquons que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$f_M^k(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k u_i e_i$$

La matrice de la famille $(u, f_M(u), \dots, f_M^{n-1}(u))$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & \lambda_1 u_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} u_1 \\ u_2 & \lambda_2 u_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} u_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n & \lambda_n u_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} u_n \end{pmatrix}$$

La famille $(u, f_M(u), \dots, f_M^{n-1}(u))$ est une base de $\mathbb{C}^n$ si et seulement si $\det(U) \neq 0$. Or, par multilinéarité du déterminant,

$$\det(U) = \left(\prod_{i=1}^{n} u_i\right) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Le dernier déterminant est un déterminant de Vandermonde dont on sait qu'il est non nul si et seulement si les λ_i sont deux à deux distincts.
Finalement, $(u, f_M(u), \dots, f_M^{n-1}(u))$ est une base de $\mathbb{C}^n$ si et seulement si aucun des u_i n'est nul et les λ_i sont deux à deux distincts.

23 Soit f un endomorphisme de diagonalisable et cyclique. D'après la question précédente, f possède n valeurs propres.
Réciproquement si f est un endomorphisme cyclique de possédant n valeurs propres, il est bien diagonalisable.
Finalement, un endomorphisme cyclique est diagonalisable si et seulement si il possède n valeurs propres.
De plus, la question précédente montre également que, dans ce cas, les vecteurs cycliques sont ceux dont aucune coordonnée dans une base de vecteurs propres n'est nulle.

24 Supposons que λ est valeur propre de $C(a_0, \dots, a_{n-1})$. Alors il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ non nul tel que $C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \lambda X$. Alors

$$\begin{cases} a_0 x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + a_1 x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} + a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

En numérotant $L_0, \dots, L_{n-1}$ les lignes de ce système, la combinaison linéaire $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k L_k$ donne

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k x_k + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k a_k\right) x_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda^k x_k$$

et donc

$$\left(\lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k\right) x_n = 0$$

Remarquons que si $x_n = 0$, on obtient successivement $x_{n-1} = 0$, …, $x_1 = 0$, en observant les lignes L_{n-1}, …, L_1 du système initial. Ceci est impossible car $X \neq 0$. Finalement $P(\lambda) = 0$ avec $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P(\lambda) = 0$. On définit un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. En posant

$$\begin{cases} x_n = 1 \\ x_{n-1} = \lambda x_n - a_{n-1} x_n \\ \vdots \\ x_1 = \lambda x_2 - a_1 x_n \end{cases}$$

En numérotant $L_n, \dots, L_1$ les lignes du système précédent la combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k L_k$ donne

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k x_k = \sum_{k=2}^{n} \lambda^k x_k - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k a_k x_n$$

ou encore

$$\lambda x_1 = \left(\lambda^n - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k\right) x_n = (P(\lambda) + a_0) x_n = a_0 x_n$$

Finalement on obtient

$$\begin{cases} a_0 x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + a_1 x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} + a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

ce qui prouve que $C(a_0, \dots, a_{n-1})X = \lambda X$. Or $X \neq 0$ donc λ est valeur propre de $C(a_0, \dots, a_{n-1})$.

Remarque. Il eût sans doute été plus simple de calculer le polynôme caractéristique de $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ qui est le polynôme P. La matrice $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ s'appelle en fait la *matrice compagnon* de ce polynôme.

25 D'après la question précédente, tout vecteur X du sous-espace propre associé à la valeur propre λ est déterminé par la valeur de x_n. On en déduit que ce sous-espace propre est de dimension 1. De plus, si $x_n = 1$, avec les notations de la question précédente, on obtient

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ x_k = \lambda^{n-k} - \sum_{j=k}^{n-1} a_j \lambda^{j-k}$$

26 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice cyclique. Si M est diagonalisable, alors M possède n valeurs propres d'après la question **23**. Réciproquement, si M possède n valeurs propres, elle est diagonalisable.

Remarque. On peut donc tout à fait se passer de la question précédente.

27 On sait que $\mathbb{C}[f_M] = \{P(f_M),\ \mathbb{P} \in \mathbb{C}[X]\}$ est une sous-algèbre *commutative* de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. On en déduit que $\mathbb{C}[f_M] \subset \mathcal{C}(f_M)$.

28 Comme $(f_M^k(x_0))_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $\mathbb{C}^n$, il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^k(x_0)$$

Posons $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ de sorte que

$$g(x_0) = P(f_M)(x_0)$$

De manière générale, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f_{M}^k commute avec g de sorte que

$$g(f_{\mathrm{M}}^k(x_0)) = f_{\mathrm{M}}^k(g(x_0)) = f_{\mathrm{M}}^k(\mathrm{P}(f_{\mathrm{M}}(x_0))) = (\mathrm{X}^k\mathrm{P})(f_{\mathrm{M}})(x_0) = \mathrm{P}(f_{\mathrm{M}})(f_{\mathrm{M}}^k(x_0))$$

Finalement, les endomorphismes g et $\mathrm{P}(f_{\mathrm{M}})$ coïncident sur la base $(f_{\mathrm{M}}^k(x_0))_{0 \le k \le n-1}$: ils sont donc égaux.

29 La question **27** montre que $\mathbb{C}[f_{\mathrm{M}}] \subset \mathcal{C}(f_{\mathrm{M}})$ tandis que la question **28** montre que $\mathcal{C}(f_{\mathrm{M}}) \subset \mathbb{C}[f_{\mathrm{M}}]$. Par double inclusion, $\mathcal{C}(f_{\mathrm{M}}) = \mathbb{C}[f_{\mathrm{M}}]$.

30 Il est clair que $\mathrm{Sp}(\mathrm{N}) = \{0\}$. Le seul sous-espace propre de N est donc Ker N. Comme $\mathrm{rg}(\mathrm{N}) = n - 1$, on en déduit que $\dim \mathrm{Ker}\,\mathrm{N} = 1$ puis que $\mathrm{Ker}\,\mathrm{N} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Si N était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle et donc nulle. N n'est donc pas diagonalisable.

31 $\mathrm{N} = \mathrm{C}(0, \dots, 0)$ est une matrice cyclique.

32 D'après la question **29**, $\mathcal{C}(\mathrm{N}) = \mathbb{C}[\mathrm{N}]$. En considérant l'endomorphisme canoniquement associé à N, on peut montrer que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathrm{N}^k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathrm{I}_{n-k} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

En particulier, $\mathcal{C}(\mathrm{N}) = \mathbb{C}[\mathrm{N}] = \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{N}]$. Finalement

$$\mathbb{C}(\mathrm{N}) = \{\mathrm{T}(t_{-n+1}, \dots, t_0, 0, \dots, 0),\ (t_{-n+1}, \dots, t_0) \in \mathbb{C}^n\}$$

i.e. $\mathcal{C}(\mathrm{N})$ est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.

33 Soit $\mathrm{A} = (a_{p,q}) \in \Delta_i$ et $\mathrm{B} = (b_{p,q}) \in \Delta_j$. Soit $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$. Alors

$$(\mathrm{AB})_{p,q} = \sum_{r=1}^n a_{p,r} b_{r,q}$$

Supposons que $p - q \neq i + j$. Alors pour tout $r \in [\![1, n]\!]$, on a $p - r \neq i$ ou $r - q \neq j$ (car sinon $p - q = (p - r) + (r - q) = i + j$) de sorte que $a_{p,r} = 0$ ou $b_{r,q} = 0$. Ainsi $(\mathrm{AB})_{p,q} = 0$. Ceci prouve que $\mathrm{AB} \in \Delta_{i+j}$.

34 Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{H}_i \times \mathrm{H}_j$. Alors

$$\mathrm{A} = \sum_{p=i}^{n-1} \mathrm{A}^{(p)} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \sum_{q=j}^{n-1} \mathrm{B}^{(q)}$$

puis

$$\mathrm{AB} = \sum_{p=i}^{n-1} \sum_{q=j}^{n-1} \mathrm{A}^{(p)} \mathrm{B}^{(q)}$$

Or $\mathrm{A}^{(p)} \in \Delta_p$ et $\mathrm{B}^{(q)} \in \Delta_q$ donc $\mathrm{A}^{(p)}\mathrm{B}^{(q)} \in \Delta_{p+q}$ d'après la question précédente. Or pour tout $(p, q) \in [\![i, n-1]\!] \times [\![j, n-1]\!]$, $p + q \ge i + j$ donc $\mathrm{A}^{(p)}\mathrm{B}^{(q)} \in \Delta_{p+q} \in \mathrm{H}_{i+j}$ (y compris si $p + q \ge n$ auquel cas $\mathrm{A}^{(p)}\mathrm{B}^{(q)} = 0$). Comme H_{i+j} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{AB} \in \mathrm{H}_{i+j}$.

35 Comme C est nilpotente, $\mathrm{C}^n = 0$ (l'indice de nilpotence est majoré par n). Par télescopage,

$$(\mathrm{I}_n + \mathrm{C}) \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \mathrm{C}^p = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \mathrm{C}^p - (-1)^{p+1} \mathrm{C}^{p+1} = (-1)^0 \mathrm{C}_0 - (-1)^n \mathrm{C}^n = \mathrm{I}_n$$

Ainsi $\mathrm{I}_n + \mathrm{C}$ est inversible et

$$(\mathrm{I}_n + \mathrm{C})^{-1} = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \mathrm{C}^p$$

36 C est triangulaire stricte donc C est nilpotente. Ainsi $\mathrm{P} = \mathrm{I}_n + \mathrm{C}$ est inversible.
Comme $\mathrm{C} \in \Delta_{k+1}$, la question **33** montre par récurrence que pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathrm{C}^p \in \Delta_{p(k+1)}$. Ainsi

$$(\mathrm{I}_n + \mathrm{C})^{-1} = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \mathrm{C}^p \in \bigoplus_{p=0}^{n-1} \Delta_{p(k+1)}$$

37 Remarquons que $P^{-1} = I_n + Q$ avec

$$Q = \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p C^p \in \bigoplus_{p=1}^{n-1} \Delta_{p(k+1)} \subset H_{k+1}$$

Alors

$$M' = \varphi(M) - M = P^{-1}MP - M = (I_n + Q)M(I_n + C) - M = QM + MC + QMC$$

Puisque $Q \in H_{k+1}$, $M \in \Delta_i \subset H_i$ et $C \in \Delta_{k+1} \subset H_{k+1}$, la question **34** montre que $QM \in H_{k+1+i}$, $MC \in H_{i+k+1}$ et $QMC \in H_{2(k+1)+i} \subset H_{i+k+1}$. Ainsi $M' \in H_{i+k+1} \subset H_{k+1}$.

38 Posons $P^{-1} = I_n - C + R$ avec

$$R = \sum_{p=2}^{n-1} (-1)^p C^p \in \bigoplus_{p=2}^{n-1} \Delta_{p(k+1)} \subset H_{2(k+1)}$$

Alors

$$N' = \varphi(N) - N - NC + CN = P^{-1}NP - N - NC + CN = (I_n - C + R)N(I_n + C) - N - NC + CN = RN + RNC - CNC$$

Or $N \in \Delta_{-1} \in H_{-1}$, $R \in H_{2(k+1)}$ et $C \in \Delta_{k+1} \subset H_{k+1}$ donc, d'après la question **34**, $RN \in H_{2k+1} \subset H_{k+1}$, $RNC \in H_{3k+2} \subset H_{k+1}$ et $CNC \in H_{2k+1} \subset H_{k+1}$. On en déduit que $N' \in H_{k+1}$.

39 Tout d'abord, $P^{-1} \in H_0$, $A \in H_{-1}$ et $P \in H_0$ donc $B = P^{-1}AP \in H_{-1}$ d'après **34**.
Comme $T \in H_0$, on montre comme à la question **37** que $T' = \varphi(T) - T \in H_{k+1}$. D'après la question précédente,

$$B = \varphi(N) + \varphi(T) = N + NC - CN + N' + T + T' = A + (NC - CN) + B'$$

avec $B' = N' + T' \in H_{k+1}$ et $NC - CN \in H_k$ puisque $N \in H_{-1}$ et $C \in H_{k+1}$. Il est alors clair que pour tout $i \in [\![-1, k-1]\!]$, $(B')^{(i)} = (NC - CN)^{(i)} = 0$ et que $(B')^{(k)} = 0$ tandis que $(NC - CN)^{(k)} = NC - CN$. On en déduit que

$$\forall i \in [\![-1, k-1]\!],\ B^{(i)} = A^{(i)}$$
$$B^{(k)} = A^{(k)} + NC - CN$$

40 D'après la question **32**, $\operatorname{Ker} \mathcal{S} = \mathcal{C}(N)$ est l'ensemble des matrices de Toeplitz réelles triangulaires inférieures.

41 Soit $X \in \Delta_{k+1}$. Comme $N \in \Delta_{-1}$, la question **33** montre que NX et XN appartiennent à Δ_k. Ainsi $\mathcal{S}(X) \in \Delta_k$ puis $\mathcal{S}(\Delta_{k+1}) \subset \Delta_k$.
De la même, manière, soit $X \in \Delta_k$. Puisque $N^\top \in \Delta_1$, $\mathcal{S}^*(X) = N^\top X - XN^\top \in \Delta_{k+1}$. Ainsi $\mathcal{S}^*(\Delta_k) \subset \Delta_{k+1}$.

42 Soit $(X, Y) \in \Delta_{k+1} \times \Delta_k$. D'une part

$$\langle \mathcal{S}_{k+1}(X), Y\rangle = \operatorname{tr}\left((NX - XN)^\top Y\right) = \operatorname{tr}\left((X^\top N^\top - N^\top X^\top)Y\right) = \operatorname{tr}(X^\top N^\top Y) - \operatorname{tr}(N^\top X^\top Y)$$

D'autre part,

$$\langle X, \mathcal{S}_{k+1}^*(Y)\rangle = \operatorname{tr}(X^\top(N^\top Y - YN^\top)) = \operatorname{tr}(X^\top N^\top Y) - \operatorname{tr}(X^\top Y N^\top)$$

Mais, par propriété de la trace, $\operatorname{tr}(X^\top Y N^\top) = \operatorname{tr}(N^\top X^\top Y)$ de sorte que $\langle \mathcal{S}_{k+1}(X), Y\rangle = \langle X, \mathcal{S}_{k+1}^*(Y)\rangle$.
Soit alors $(U, V) \in \operatorname{Ker} \mathcal{S}_k^* \times \operatorname{Im} \mathcal{S}_{k+1}$. Il existe $W \in \Delta_{k+1}$ tel que $V = \mathcal{S}_{k+1}(W)$. D'après ce qui précède,

$$\langle U, V\rangle = \langle U, \mathcal{S}_{k+1}(W)\rangle = \langle \mathcal{S}_k^*(U), W\rangle = \langle 0, W\rangle = 0$$

Ainsi $\operatorname{Ker} \mathcal{S}_k^* \perp \operatorname{Im} \mathcal{S}_{k+1}$.
Remarquons déjà que $\operatorname{Ker} \mathcal{S}_k^*$ et $\operatorname{Im} \mathcal{S}_{k+1}$ sont bien des sous-espaces vectoriels de Δ_k. D'après le théorème du rang

$$\dim \operatorname{Im} \mathcal{S}_{k+1} = \dim \Delta_{k+1} - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{S}_{k+1}$$

Or $\operatorname{Ker} \mathcal{S}_{k+1} = \operatorname{Ker} \mathcal{S} \cap \Delta_{k+1}$. D'après la question **40**, $\operatorname{Ker} \mathcal{S} \cap \Delta_{k+1}$ est l'espace vectoriel des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures dont tous les coefficients hors de la diagonale d'ordre $k+1$ sont nuls. Puisque $k + 1 \geq 1$, une telle matrice est nécessairement nulle. Ainsi $\mathcal{S}_{k+1} = \{0\}$ puis $\dim \operatorname{Im} \mathcal{S}_{k+1} = \dim \Delta_{k+1}$.
De plus, $\operatorname{Ker} \mathcal{S}_k^* = \operatorname{Ker} \mathcal{S} \cap \Delta_k$ est l'espace vectoriel des matrices de Toeplitz triangulaires supérieures dont tous les coefficients hors de la diagonale d'ordre k sont nuls. Cet espace vectoriel est engendré par la matrice dont tous les coefficients

de la diagonale d'ordre k sont égaux à 1 et les autres coefficients sont nuls. Ainsi $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{S}_k^* = 1$.
Finalement,

$$\dim \operatorname{Im} \mathcal{S}_{k+1} + \dim \operatorname{Ker} \mathcal{S}_k^* = \dim \Delta_{k+1} + 1$$

Or il est clair que $\dim \Delta_k = n - k$ et $\dim \Delta_{k+1} = n - k - 1$ donc

$$\dim \operatorname{Im} \mathcal{S}_{k+1} + \dim \operatorname{Ker} \mathcal{S}_k^* = n - k = \dim \Delta_k$$

On en déduit bien que

$$\Delta_k = \operatorname{Ker}(\mathcal{S}_k^*) \oplus^{\perp} \operatorname{Im}(\mathcal{S}_{k+1})$$

43 Comme $A^{(k)} \in \Delta_k$, la question précédente montre qu'il existe $(B, C) \in \operatorname{Ker} \mathcal{S}_k^* \times \Delta_{k+1}$ tel que $A^{(k)} = B - NC + CN$. En posant $P = I_n + C$ et $L = P^{-1}AP$, la question **39** montre que

$$\forall i \in [\![-1, k-1]\!],\ L^{(i)} = A^{(i)}$$
$$L^{(k)} = A^{(k)} + NC - CN = B \in \operatorname{Ker} \mathcal{S}_k^*$$

Or on a vu précédemment que $\operatorname{Ker} \mathcal{S}_k^*$ était la droite vectorielle formée des matrices de Δ_k dont tous les coefficients de la diagonale d'ordre k sont égaux. La matrice L répond donc bien à la question.

44 Comme toute matrice cyclique est semblable à une matrice de la forme $C(a_0, \dots, a_{n-1})$, il suffit de prouver le résultat pour une matrice de ce type.
Soit donc $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Posons $A_0 = C(a_0, \dots, a_{n-1})$. Remarquons que

$$T_0 = A_0 - N = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

est bien une matrice triangulaire supérieure. D'après la question précédente appliquée avec $k = 0$, A_0 est semblable à une matrice A_1 de la forme

$$A_1 = \begin{pmatrix} t_0 & * & \cdots & \cdots & * \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t_0 \end{pmatrix}$$

A nouveau $T_1 = A_1 - N$ est bien une matrice triangulaire supérieure. La question précédente garantit que A_1 est semblable à une matrice A_2 de la forme

$$A_2 = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & * & \cdots & * \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t_0 \end{pmatrix}$$

A l'aide d'une récurrence (qu'il faudrait rédiger proprement), $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ est semblable à une matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & t_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t_0 \end{pmatrix} = C(0, \dots, 0, 1, t_0, \dots, t_{n-1})$$

qui est bien une matrice de Toeplitz.