Fonctions d'une variable réelle, applications

Solution 1.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $x < f(x)$ alors $f(x) \leqslant f(f(x)) = x$. Contradiction !
Si $x > f(x)$ alors $f(x) \geqslant f(f(x)) = x$. Contradiction !
Donc $f(x) = x$.

Solution 2.

Il suffit de lire le tableau de variation de la fonction $x \mapsto x^2$...

1. $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$;
2. $f([-3,2]) = [0,9]$;
3. $f([-3,3]) = [0,9]$;
4. $f^{-1}([9,10]) = [-\sqrt{10}, -\sqrt{9}] \cup [\sqrt{9}, \sqrt{10}]$;
5. $f^{-1}([-5,-3]) = \varnothing$;
6. $f^{-1}([-4,4[) =]-2,2[$;
7. $f^{-1}(f([0,1])) = [-1,1]$;
8. $f(f^{-1}([-1,4])) = [0,4]$;
9. $f(f^{-1}(\mathbb{R}_-)) = \{0\}$.

Solution 3.

① Puisque $f_1(1) = f_1(3)$, f_1 n'est pas injective. On a clairement $-1 \notin f_1(\mathbb{R})$ donc f_1 n'est pas surjective.

② Puisque $f_2\left(4 \pm 2\sqrt{3}\right) = 1/4$, f_2 n'est pas injective. On a $1 \notin f_2(\mathbb{R})$ donc f_2 n'est pas surjective.

③ Puisque $\forall x \geqslant 0$,
$$f_3(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{16x+4},$$
la fonction f_3 est injective. Puisque $3/4 \notin f_3(\mathbb{R})$, la fonction f_3 n'est pas surjective.

④ La fonction f_4 est une bijection d'après le cours sur les fonctions usuelles.

⑤ Puisque tout nombre complexe admet au moins une racine cubique, f_5 est surjective. Puisque $f_5(1) = f_5(j)$ et $j \neq 1$, f_5 n'est pas injective.

Solution 4.

La fonction f est un produit de fonctions strictement croissantes et strictement positives sur $]0,1[$, f est donc strictement croissante sur cet intervalle ; f étant de plus continue, elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur l'intervalle $[f(0), f(1)] = [0, 2e]$.

Solution 5.

1. **a.** On a $\Psi(\varnothing) = (\varnothing \cap A, \varnothing \cap B) = (\varnothing, \varnothing)$.
   b. On a $\Psi(\overline{A \cup B}) = \Psi(\overline{A} \cap \overline{B}) = (\overline{A} \cap \overline{B} \cap A, \overline{A} \cap \overline{B} \cap B) = (\varnothing, \varnothing)$.

c. Supposons Ψ injective. Comme $\Psi(\varnothing) = \Psi(\overline{A \cup B})$, on en déduit $\overline{A \cup B} = \varnothing$ i.e. $A \cup B = E$.
Réciproquement, supposons $A \cup B = E$. Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $\Psi(X) = \Psi(Y)$. On a donc $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$. Ainsi $(X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$ i.e. $X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B)$. Comme $A \cup B = E$, on en déduit $X = Y$. D'où l'injectivité de Ψ.

2. **a.** Supposons que $(\varnothing, B)$ admette un antécédent X par Ψ. Alors $X \cap A = \varnothing$ et $X \cap B = B$ i.e. $B \subset X$. Donc $B \cap A = \varnothing$.
Réciproquement, si $A \cap B = \varnothing$, $\Psi(B) = (\varnothing, B)$. Ainsi $(\varnothing, B)$ admet un antécédent *si et seulement si* $A \cap B = \varnothing$.

b. La question précédente montre que si Ψ est surjective, alors $A \cap B = \varnothing$.
Supposons $A \cap B = \varnothing$. Soient $(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. On a alors $(X \cup Y) \cap A = (X \cap A) \cup (X \cap B)$. Comme $X \subset A$, $X \cap A = X$. De plus, $A \cap B = \varnothing$ donc $X \cap B = \varnothing$. Ainsi $(X \cup Y) \cap A = X$. De même, $(X \cup Y) \cap B = Y$. D'où $\Psi(X \cup Y) = (X, Y)$. Ainsi Ψ est surjective.

Solution 6.

1. • Déterminons par exemple l'ensemble

$$\mathcal{A} = \mathcal{T}^{-1}\left(\{M(0)\}\right).$$

$$Z = 0 \iff 2z^2 - z = 0.$$

Ainsi $\mathcal{A} = \{M(0), M(1/2)\}$ et $\mathcal{T}$ n'est pas injective puisque l'origine a deux antécédents par $\mathcal{T}$.

• Soient $u \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z = u &\iff (z-2)u = (2z+3)(z-2) + 6 \\ &\iff 2z^2 - (1+u)z + 2u = 0 \end{aligned}$$

Soit alors $u \in \mathbb{C}$. Posons pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = 2z^2 - (1+u)z + 2u.$$

P est un polynôme de degré deux à cœfficients complexes et admet donc une racine z_0. Puisque $P(2) = 6 \neq 0$, on a $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$. D'après l'équivalence précédente, z_0 est un antécédent de u. L'application $\mathcal{T}$ est donc surjective.

2. Déterminons les nombres complexes z tels que $z = Z$.

$$\begin{aligned} z = Z &\iff z + 3 + \frac{6}{z-2} = 0 \\ &\iff z^2 + z = 0 \end{aligned}$$

Ainsi seuls les points $M(0)$ et $M(-1)$ sont invariants par $\mathcal{T}$.

3. Soient $m(z)$ et $m'(z')$, avec z et z' disctincts et différents de 2 ;m et m' sont associés *si et seulement si*

$$z + \frac{3}{z-2} = z' + \frac{3}{z'-2},$$

c'est-à-dire,après tout calcul,

$$(z'-2)(z-2) = 3.$$

4. Etudions la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto 2 + 3 + \frac{6}{x-2}.$$

La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Et on a $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{6}{(x-2)^2} = 2\frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2} \\ &= 2\frac{\left(x - 2 - \sqrt{3}\right)\left(x - 2 + \sqrt{3}\right)}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

D'où le tableau de variations de f en deux morceaux :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2
f'		$+$	0	$-$	‖
f	$-\infty$	$\nearrow$	$7-4\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖

et

x	2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$7+4\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

L'image de f est donc égale à

$$\left]-\infty, 7-4\sqrt{3}\right] \cup \left[7+4\sqrt{3}, +\infty\right[.$$

$\mathcal{T}(\mathcal{E})$ est la droite réelle privée de $]BC[$.

5. Notons $\mathcal{R}$ l'axe des réels.

• Soit $m(z)$ appartenant à $\mathcal{T}^{-1}\big([BC]\big)$. On a alors $M = \mathcal{T}(m) \in [BC] \subset \mathcal{R}$ donc $Z \in \mathbb{R}$. D'où $Z = \overline{Z}$ i.e. $\mathcal{T}(m) = \mathcal{T}(m')$. Les points $m(z)$ et $m'(\overline{z})$ sont donc associés et ainsi

$$|z-2|^2 = 3$$

Le point $m(z)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon $\sqrt{3}$. Ainsi $\mathcal{T}^{-1}([BC]) \subset \mathcal{C}$. On a même montré $T^{-1}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{C}$.

• Réciproquement, soit $m(z) \in \mathcal{C}$. Alors $m(z)$ et $m'(\overline{z})$ sont associés donc Z est réel. Supposons par l'absurde que $M(Z) \notin [BC]$. D'après la question **4**, $M(Z)$ admet un antécédent $m''(z'')$ dans $\mathcal{E}$. Comme $M \in \mathcal{R}$, $m'' \in \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{C}$ (voir ce qui précède). On a donc $m'' \in \mathcal{C} \cap \mathcal{E}$. Ceci signifie que $z'' = 2 \pm \sqrt{3}$. On aurait alors $Z = 7 \pm 4\sqrt{3}$ (cf. question **4**) i.e. $M = B$ ou $M = C$, ce qui n'est pas puisque $M \notin [BC]$. Ainsi $M \in [BC]$ et on a donc $m \in \mathcal{T}^{-1}([BC])$. Finalement, $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}^{-1}([BC])$.

Solution 7.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$f(2m) = 2m, \qquad f(2m+1) = m+1.$$

Ainsi $f(2) = f(3) = 2$ donc f n'est pas injective. En revanche, $f(0) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$n = f(2n-1).$$

L'application f est donc surjective.

Solution 8.

1. Il est clair que g est injective elle aussi. On vérifie que $g \circ f \circ g \circ g \circ f = g$ et comme l'application g est injective, on en déduit que f est surjective et donc que g est surjective.
2. Il est clair que f est surjective elle aussi. Soient y et y' tels que $g(y) = g(y')$. Par surjectivité de f, il existe x et x' tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Alors $(f \circ g \circ f)(x) = (f \circ g \circ f)(x')$, c'est-à-dire $g(x) = g(x')$. Mézalor

$$y = f(x) = (g \circ f \circ g)(x) = (g \circ f \circ g)(x') = f(x') = y',$$

donc g est injective et on en déduit que f est elle aussi injective.

Solution 9.

1. f n'est ni injective, ni surjective.
2. f est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]0, \frac{1}{2}]$.

Solution 10.

1. f est injective mais pas surjective.
2. **a.** E est le cercle de centre le point d'affixe 1 et de rayon 1. Son équation cartésienne est donc $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ou encore $x^2 - 2x + y^2 = 0$.
   F est la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

   b. Soit $z = x + iy \in E \setminus \{0\}$. On a donc $x^2 + y^2 = 2x$. Or $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$. Donc $\text{Re}(f(z)) = \frac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}$. Donc $f(z) \in F$. Ainsi $f(E \setminus \{0\}) \subset F$.

   c. La restriction de f à $E \setminus \{0\}$ est injective comme restriction d'une application injective.
   Tirons partie du fait que $f \circ f(z) = z$. Montrons que $f(F) \subset E \setminus \{0\}$. Soit $z = \frac{1}{2} + iy \in F$. Alors $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\frac{1}{2}-iy}{\frac{1}{4}+y^2} = \frac{2}{1+4y^2} - \frac{4iy}{1+4y^2} = x' + iy'$. On vérifie que (x', y') vérifie l'équation du cercle E. De plus, $\dfrac{1}{z} \neq 0$ donc $f(z) \in E \setminus \{0\}$.
   Ceci signifie que tout élément de F admet un antécédent (égal à $f(z)$ puisque $f \circ f(z) = z$) dans $E \setminus \{0\}$. L'application de $E \setminus \{0\}$ dans F induite par f est donc surjective.

Solution 11.

1. $f(I) = \left[-\dfrac{27}{6}, +\infty\right[$.
2. $f(I) = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.
3. $f(I) =]-\infty, -1]$.
4. $f(I) = [0; +\infty[$.
5. $f(I) = \mathbb{R}$.

Solution 12.

Il est équivalent de montrer que l'équation $f'(x) = 1$ admet 1 pour unique solution. On calcule pour $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

Par conséquent, $f'(x) = 1 \Leftrightarrow x^3 + 2\ln x - 1 = 0$. Posons $g(x) = x^3 + 2\ln x - 1$ pour $x > 0$. On a facilement :

$$\forall x > 0,\ g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} > 0$$

Par conséquent, g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$. De plus, $g(1) = 0$ donc la seule solution de l'équation $f'(x) = 1$ est 1.

Solution 13.

1. Par distributivité de $\cap$ sur $\cup$, on a :

$$(X \cup A) \cap (X \cup B) = (X \cap X) \cup (X \cap A) \cup (X \cap B) \cup (A \cap B)$$

   Or $X \cap X = X$, $X \cap A \subset X$, $X \cap B \subset X$ et $A \cap B = \varnothing$. Donc $(X \cup A) \cap (X \cup B) = X$.

2. **a.** Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset X \cup A$ et $B \subset X \cup B$. Si $A \neq \varnothing$ ou $B \neq \varnothing$, alors $(\varnothing, \varnothing)$ n'admet pas d'antécédent par f. Si $A = \varnothing$ et $B = \varnothing$, alors $f(X) = (X, X)$. Puisque $E \neq \varnothing$, $(\varnothing, E)$ n'admet pas d'antécédent par f. Dans les deux cas, f n'est pas surjective.

   b. Supposons que $A \cap B = \varnothing$. Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $f(X) = f(Y)$. On a donc $X \cup A = Y \cup A$ et $X \cup B = Y \cup B$. Par conséquent, $(X \cup A) \cap (X \cup B) = (Y \cup A) \cap (Y \cup B)$. En utilisant la première question, on a donc $X = Y$. Ceci prouve que f est injective.
   Supposons que f soit injective. On a $f(A \cap B) = f(\varnothing) = (A, B)$. Par injectivité de f, on en déduit que $A \cap B = \varnothing$.

Solution 14.

Soit f une telle application (si elle existe). On va montrer par récurrence que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $HR(n)$ l'hypothèse de récurrence : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $f(k) = k$.
On a $f(0) + f^2(0) + f^3(0) = 3 \times 0 = 0$. Or $f(0)$, $f^2(0)$ et $f^3(0)$ sont des entiers naturels ; en particulier, ils sont positifs. On a donc $f(0) = 0$.
Supposons $HR(n)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a $f(n+1) + f^2(n+1) + f^3(n+1) = 3(n+1)$. Supposons par l'absurde que $f(n+1) \neq n+1$. Un des trois entiers $f(n+1)$, $f^2(n+1)$ et $f^3(n+1)$ est nécessairement strictement inférieur à $n+1$. Examinons les trois cas.

- Si $f(n+1) < n+1$. Notons $k = f(n+1)$. Puisque $k \leqslant n$, $f^2(n+1) = f(k) = k$ en utilisant $HR(n)$. De même, $f^3(n+1) = k$. Ainsi $f(n+1) + f^2(n+1) + f^3(n+1) = 3k < 3(n+1)$, ce qui est impossible.
- Si $f^2(n+1) < n+1$. Notons $k = f^2(n+1)$. Puisque $k \leqslant n$, $f^3(n+1) = f(k) = k$ en utilisant $HR(n)$. De même, $f^4(n+1) = k$. Ainsi $f^2(n+1) + f^3(n+1) + f^4(n+1) = 3k$. Mais on a également $f^2(n+1) + f^3(n+1) + f^4(n+1) = 3f(n+1)$. Donc $f(n+1) = k$. Mais alors $f(n+1) + f^2(n+1) + f^3(n+1) = 3k < 3(n+1)$, ce qui est impossible.
- Si $f^3(n+1) < n+1$. Notons $k = f^3(n+1)$. Puisque $k \leqslant n$, $f^4(n+1) = f(k) = k$ en utilisant $HR(n)$. De même, $f^5(n+1) = k$. Ainsi $f^3(n+1) + f^4(n+1) + f^5(n+1) = 3k$. Mais on a également $f^3(n+1) + f^4(n+1) + f^5(n+1) = 3f^2(n+1)$. Donc $f^2(n+1) = k$. Mais alors $f^2(n+1) + f^3(n+1) + f^4(n+1) = 3k$. On a également $f^2(n+1) + f^3(n+1) + f^4(n+1) = 3f(n+1)$ donc $f(n+1) = k$. Finalement, $f(n+1) + f^2(n+1) + f^3(n+1) = 3k < 3(n+1)$, ce qui est impossible.

On a donc nécessairement $f(n+1) = n+1$ et donc $HR(n+1)$ est vraie.
On a donc montré que si f vérifiait la condition de l'énoncé, alors f était nécessairement l'identité. Réciproquement, la fonction identité vérifie bien la condition recherchée.

Solution 15.

1. Supposons que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A))) = A$. Soient $x, y \in E$ tel que $f(x) = f(y)$. On a alors $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$ et $f^{-1}(f(\{y\})) = \{y\}$. Mais $f(\{x\}) = f(\{y\})$ donc $\{x\} = \{y\}$ i.e. $x = y$. Ainsi f est injective.
   Supposons que f soit injective. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On a toujours $A \subset f^{-1}(f(A))$ puisque les éléments de A ont leurs images dans $f(A)$. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. On a donc $f(x) \in f(A)$. Il existe donc $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Par injectivité de f, $x = a$ et donc $x \in A$. Donc $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

2. Supposons que pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) = B$. En particulier, $f(f^{-1}(F)) = F$. Comme $f^{-1}(F) \subset E$, $F = f(f^{-1}(F)) \subset f(E) \subset F$. Donc $f(E) = F$ et f est surjective.
Supposons que f soit surjective. Soit $B \in \mathcal{P}(F)$. On a toujours $f(f^{-1}(B)) \subset B$ puisque $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des éléments de E qui ont leurs images dans B. Soit $y \in B$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On a donc $x \in f^{-1}(B)$ et $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Donc $B \subset f(f^{-1}(B))$.

Solution 16.

On a $f(0) \geqslant 0$. Or $f(0) \in \mathbb{N}$ donc $f(0) = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f(k) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Notons $k = f(n+1)$. D'après l'énoncé, $k \leqslant n+1$. Si $k < n+1$, alors $f(k) = k$ par hypothèse de récurrence et donc $f(n+1) = f(k)$, ce qui contredit l'injectivité de f. Ainsi $f(n+1) = n+1$.
Par récurrence forte, $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 17.

1. Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $|\overline{\alpha}z| = |\overline{\alpha}| \neq 1$. On ne peut donc avoir $\overline{\alpha}z = -1$ sinon on aurait $|\overline{\alpha}z| = |-1| = 1$. Ceci prouve que $\overline{\alpha}z + 1 \neq 0$ et donc que f est définie sur $\mathbb{U}$.

2. On peut écrire les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& |f(z)| = 1 \\
\iff\quad & |z+\alpha| = |\overline{\alpha}z+1| \\
\iff\quad & |z+\alpha|^2 = |\overline{\alpha}z+1|^2 \\
\iff\quad & (z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha}) = (\overline{\alpha}z+1)(\alpha\overline{z}+1) \\
\iff\quad & |z|^2 + |\alpha|^2 + \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z = |\alpha|^2|z|^2 + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + 1 \\
\iff\quad & (1-|\alpha|^2)|z|^2 = 1 - |\alpha|^2 \\
\iff\quad & |z|^2 = 1 \qquad \text{car } 1-|\alpha|^2 \neq 0 \\
\iff\quad & |z| = 1
\end{aligned}$$

On a donc bien montré que $z \in \mathbb{U} \iff f(z) \in \mathbb{U}$.

3. Tout d'abord, d'après la question précédente, $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
Soit $Z \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{\alpha}z + 1 \neq 0$. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
& Z = f(z) \\
\iff\quad & Z = \frac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1} \\
\iff\quad & Z(\overline{\alpha}z+1) = z+\alpha \\
\iff\quad & z(Z\overline{\alpha}-1) = \alpha - Z
\end{aligned}$$

Puisque $Z \in \mathbb{U}$, on prouve comme à la première question que $Z\overline{\alpha} - 1 \neq 0$. L'équation $f(z) = Z$ d'inconnue z admet une unique solution. De plus, si z est solution de cette équation, $f(z) = Z \in \mathbb{U}$ et d'après la question précédente $z \in \mathbb{U}$.
Ceci prouve que f induit une bijection de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$.

Solution 18.

1. On sait que $A\Delta B = (A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\Delta B} &= \mathbb{1}_{(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})}\\ &= \mathbb{1}_{A\cap\bar{B}} + \mathbb{1}_{A\cap\bar{B}} - \mathbb{1}_{A\cap\bar{B}\cap B\cap\bar{A}}\\ &= \mathbb{1}_{A\cap\bar{B}} + \mathbb{1}_{A\cap\bar{B}} \qquad \text{car } A\cap\bar{B}\cap B\cap\bar{A} = \varnothing\\ &= \mathbb{1}_A(1-\mathbb{1}_B) + \mathbb{1}_B(1-\mathbb{1}_A)\\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\end{aligned}$$

2. On pourrait raisonner directement sur les ensembles mais il est peut-être plus simple de raisonner sur les fonctions indicatrices.

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)} &= (\mathbb{1}_{A\cap B} - \mathbb{1}_{A\cap C})^2\\ &= (\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C)^2\\ &= (\mathbb{1}_A)^2(\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C)^2\\ &= \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\Delta C}\\ &= \mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)}\end{aligned}$$

Par conséquent, $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

3. Raisonnons à nouveau sur les fonctions indicatrices.

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} &= (\mathbb{1}_{A\Delta B} - \mathbb{1}_C)^2\\ &= \mathbb{1}_{A\Delta B}^2 + \mathbb{1}_C^2 - 2\mathbb{1}_{A\Delta B}\mathbb{1}_C\\ &= \mathbb{1}_{A\Delta B} + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_{A\Delta B}\mathbb{1}_C\\ &= (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2 + \mathbb{1}_C - 2(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2\mathbb{1}_C\\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_C\\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C) + 4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C\end{aligned}$$

La dernière expression est invariante par permutation de A, B et C. Par conséquent,

$$\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} = \mathbb{1}_{(B\Delta C)\Delta A}$$

Finalement, $(A\Delta B)\Delta C = (B\Delta C)\Delta A = A\Delta(B\Delta C)$.

Solution 19.

1. On trouve sans difficulté que $\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$ et $\mathbb{1}_Y = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$.
2. $X = Y \Leftrightarrow \mathbb{1}_X = \mathbb{1}_Y \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C \iff \mathbb{1}_A(1-\mathbb{1}_C) = 0 \iff \mathbb{1}_{A\setminus C} = 0 \iff A\setminus C = \varnothing \iff A\subset C$.

Solution 20.

f est clairement définie sur $\mathbb{R}$. On remarque également que f est paire.
Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
D'abord, $x\mapsto x^2-1$ est dérivable sur $]-\infty,-1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'ensuit que $x\mapsto\sqrt{|x^2-1|}$ est dérivable sur $]-\infty,-1[$.
De même, $x\mapsto x^2-1$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'ensuit que $x\mapsto\sqrt{|x^2-1|}$ est dérivable sur $]1,\infty[$.
Enfin, $x\mapsto x^2-1$ est dérivable sur $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$, $x\mapsto|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'ensuit que $x\mapsto\sqrt{|x^2-1|}$ est dérivable sur $]-1,1[$.
Finalement, f est bien dérivable sur $dR\setminus\{-1,1\}$.
Pour tout $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ et donc

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et donc

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

f est donc décroissante sur $[0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$. Par parité, f est croissante sur $[-1,0]$ et décroissante sur $]-\infty,-1]$. De plus, la courbe représentative de f admet une tangente horizontale en le point d'abscisse 0.
Pour $x \in [0,1[$,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} -\infty$$

et pour $x \in]1,+\infty[$,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$$

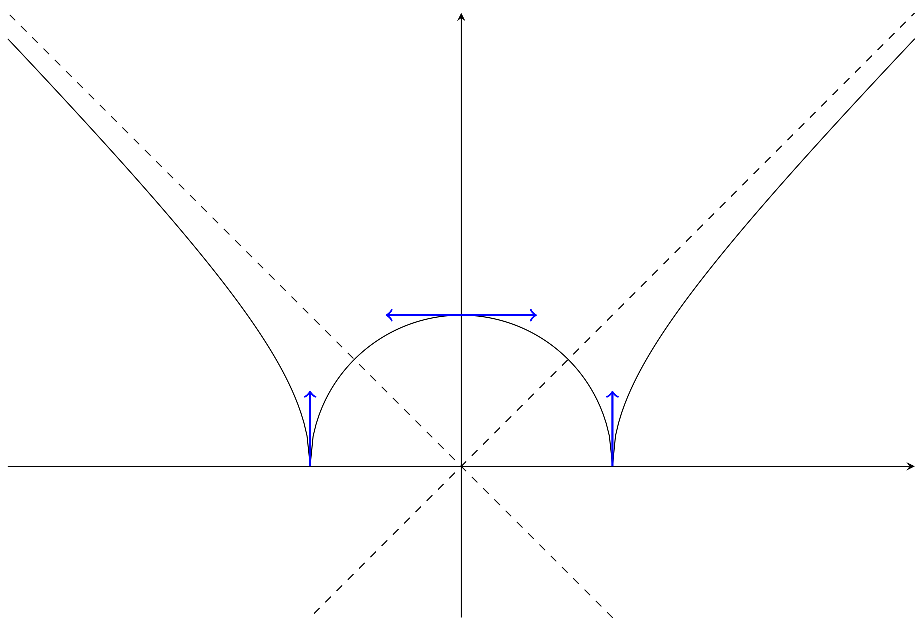
La courbe représentative de f admet donc une tangente verticale au point d'abscisse 1. Par parité, elle admet également une tangente verticale au point d'abscisse -1.
Pour $x \geqslant 1$

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

et

$$f(x) - x = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x$ pour asymptote en $+\infty$ et est située en-dessous de celle-ci sur $[1,+\infty[$. Par parité, elle admet la droite d'équation $y = -x$ pour asymptote en $-\infty$ et elle est également située en-dessous de celle-ci sur $]-\infty,-1]$.
On en déduit le tracé suivant.



Solution 21.

1. Généralement pour calculer des limites faisant intervenir des sommes racines carrées, il est utile de faire intervenir "l'expression conjuguées" :

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Les racines au numérateur ont "disparu" en utilisant l'identité $(x-y)(x+y) = x^2-y^2$. Appliquons ceci : pour tout $x > -1$, on a

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} = \frac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

et donc
$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}.$$
Il est alors clair que
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1$$
par les opérations usuelles sur les limites.

2. On reconduis la même méthode.
$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}\\
&=\frac{(\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m})((\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}))}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}\\
&=\frac{1+x^m-(1-x^m)}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}\\
&=\frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}\\
&=\frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}
\end{aligned}$$

Et nous avons
$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}=1.$$
Donc l'étude de la limite de f en 0 est la même que celle de la fonction $x\mapsto x^{m-n}$.
Distinguons plusieurs pour la limite de f en 0.

- Si $m>n$ alors x^{m-n} et donc $f(x)$ tend vers 0.
- Si $m=n$ alors x^{m-n} et $f(x)$ vers 1.
- Si $m<n$ alors $x^{m-n}=\frac{1}{x^{n-m}}=\frac{1}{x^k}$ avec $k=n-m$ un exposant positif. Si k est pair alors les limites à droite et à gauche de $\frac{1}{x^k}$ sont $+\infty$. Pour k impair la limite à droite vaut $+\infty$ et la limite à gauche vaut $-\infty$. Conclusion pour $k=n-m>0$ pair, la limite de f en 0 vaut $+\infty$ et pour $k=n-m>0$ impair f *n'a pas de limite en* 0 car les limites à droite et à gauche ne sont pas égales.

3. On a, pour tout $x\neq 0$,
$$\sqrt{1+x+x^2}-1=\frac{x+x^2}{\sqrt{1+x+x^2}+1}$$
et donc
$$\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)=\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}$$
d'où
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)=\frac{1}{2}$$
par les opérations usuelles sur les limites.

Solution 22.

1. La limite à droite vaut $+2$, la limite à gauche -2 donc il n'y a pas de limite au point 2.

2. Comme
$$\forall x\neq 0,\quad \frac{x^2+2|x|}{x}=x+2\text{signe de }x$$
avec $x\mapsto 2\text{signe de }x$ bornée, on trouve $-\infty$.

3. Comme

$$\forall x \neq 2, \quad \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{x+2}{x-1},$$

On trouve 4.

4. Comme

$$\frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)} = \frac{(2\sin(x/2)\cos(x/2))^2}{2\cos^2(x/2)} = 2\sin^2(x/2),$$

on trouve 2.

5. Pour $x > -1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} &= \frac{x-x^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}\\ &= \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}},\end{aligned}$$

on trouve ainsi $\frac{1}{2}$.

6. Comme pour $x > -5$, on a

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} = \frac{2}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}},$$

on trouve 0.

7. En utilisant que $a^3-1 = (a-1)(1+a+a^2)$ pour $a = \sqrt[3]{1+x^2}$, on obtient pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{1}{1+a+a^2}.$$

On trouve donc $\frac{1}{3}$.

8. L'énoncé n'a de sens que pour $n \geqslant 1$. Pour $x \neq 1$, on a

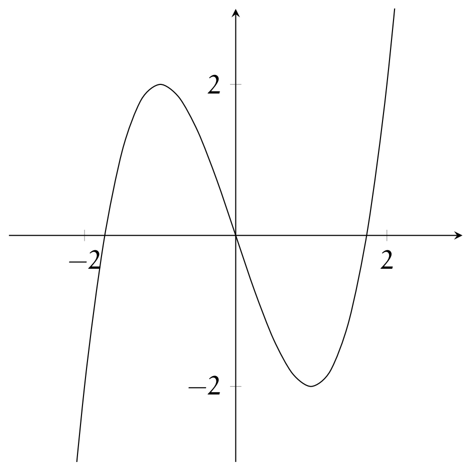
$$\frac{x^n-1}{x-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

Ainsi, on trouve $\frac{1}{n}$.

Solution 23.

1. L'étude ne pose aucun problème.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$



2.

$$\begin{aligned}
&(x,y) \in \mathcal{C}_f\\
\iff\quad & y = f(x)\\
\iff\quad & y+1 = f((x-2)+2)-1\\
\iff\quad & y+1 = g(x-2)\\
\iff\quad & (x-2, y+1) \in \mathcal{C}_g
\end{aligned}$$

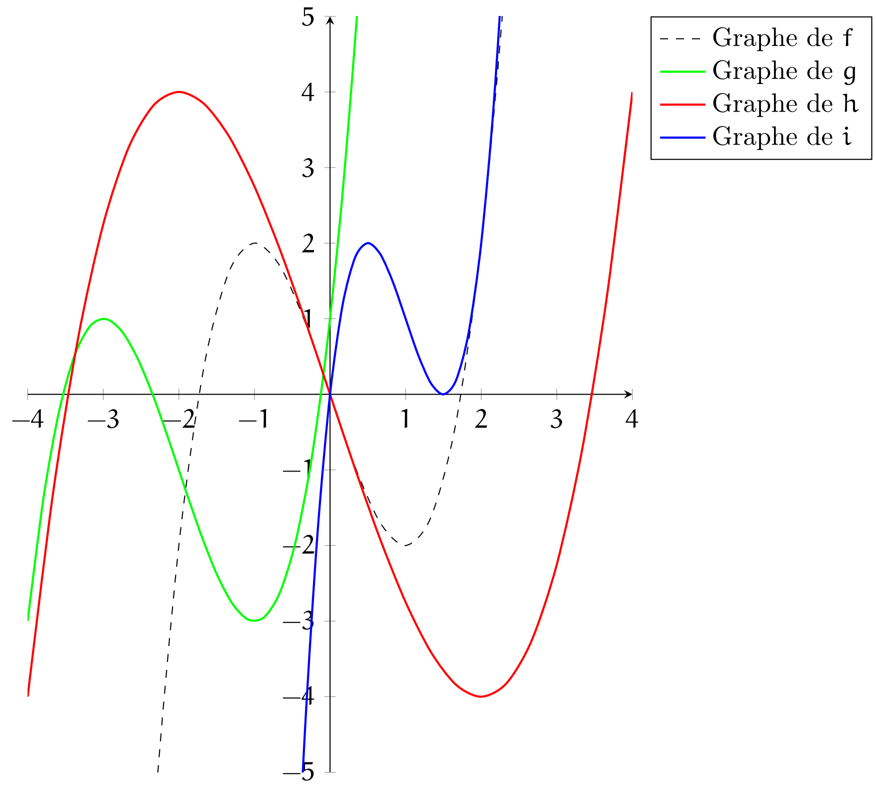
La courbe représentative de g est l'image de celle de f par une translation de vecteur de coordonnées $(-2,1)$.

$$\begin{aligned}
&(x,y) \in \mathcal{C}_f\\
\iff\quad & y = f(x)\\
\iff\quad & 2y = 2f\left(\frac{2x}{2}\right)\\
\iff\quad & 2y = h(2x)\\
\iff\quad & (2x, 2y) \in \mathcal{C}_h
\end{aligned}$$

La courbe représentative de h est l'image de celle de f par une homothétie de centre l'origine et de rapport 2.

$$\begin{aligned}
&(x,y) \in \mathcal{C}_f\\
\iff\quad & y = f(x)\\
\iff\quad & \frac{1}{2}y+1 = \frac{1}{2}f\left(2\left(\frac{x}{2}+1\right)-2\right)+1\\
\iff\quad & \frac{1}{2}y+1 = i\left(\frac{x}{2}+1\right)\\
\iff\quad & \left(\frac{x}{2}+1, \frac{1}{2}y+1\right) \in \mathcal{C}_i
\end{aligned}$$

La courbe représentative de i est l'image de celle de f par une homothétie de centre l'origine et de rapport $\frac{1}{2}$ suivie d'une translation de vecteur de coordonnées $(1,1)$.



Solution 24.

1. Si f est paire, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. En dérivant cette relation, on obtient que $-f'(-x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit, f' est impaire. On prouve de la même manière que f' est paire lorsque f est impaire.
   Par récurrence, on prouve alors que, si f est paire, $f^{(n)}$ a la parité de n et que, si f est impaire, $f^{(n)}$ a la parité contraire de celle de n.
2. Soit T une période de f. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$. En dérivant cette relation, on obtient que $f'(x+T) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit, f' est également périodique de période T. Par récurrence, on prouve que $f^{(n)}$ est périodique de période T.

Solution 25.

1. $x \mapsto x^4 - x^2$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi f est dérivable sur $]1, +\infty[$. Par parité, f est également dérivable sur $]-\infty, -1[$.
   f n'est pas définie sur $]-1, 1[$ donc pas dérivable sur $]-1, 1[$.
   Pour $x > 1$, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ donc $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$. Ainsi f n'est pas dérivable en 1. Par parité, f n'est pas dérivable en -1.
   Pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$,
   $$f'(x) = \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - x^2}}$$
2. ▶ $x \mapsto x^2 + x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$
   ▶ $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
   ▶ $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
   Ainsi g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$g'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} e^{\sqrt{x^2+x+1}}$$

3. ▶ $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable sur $]\sqrt{2}, +\infty[$ à valeurs dans $]1, +\infty[$.
   ▶ $x \mapsto \sqrt{x} - 1$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$
   ▶ $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

   Ainsi h est dérivable sur $]\sqrt{2}, +\infty[$. Par parité, h est également dérivable sur $]-\infty, -\sqrt{2}[$.
   h n'est pas définie sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ donc pas dérivable sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
   Pour tout $x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$,

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}-1} \times \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{x^2-1-\sqrt{x^2-1}}$$

4. Tout d'abord i est 2π-périodique et paire donc on peut se contenter d'étudier la dérivabilité sur $[0, \pi]$. Sur cet intervalle, i n'est définie que sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   ▶ cos est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ à valeurs dans $]0, 1[$
   ▶ $x \mapsto 1 - \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, 1[$ à valeurs dans $]0, 1[$
   ▶ $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0, 1[$

   Ainsi i est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, posons $h = \frac{\pi}{2} - x$ de sorte que

$$\frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = -\frac{\ln\left(1 - \sqrt{\sin h}\right)}{h} = \frac{\ln(1 - \sqrt{\sin h}}{-\sqrt{\sin h}}\sqrt{\frac{\sin h}{h}}\frac{1}{\sqrt{h}}$$

   Ainsi

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\ln(1 - \sqrt{\sin h}}{-\sqrt{\sin h}}\sqrt{\frac{\sin h}{h}}\frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

   Ainsi i n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{2}$.
   Par parité et périodicité, i est dérivable sur $A = \left(\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) + 2\pi\mathbb{Z}$ et pour tout $x \in A$

$$i'(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{\cos x}} \times \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} = \frac{\sin x}{2\left(\sqrt{\cos x} - \cos x\right)}$$

Solution 26.

1. Par définition, $x^x = e^{x \ln x}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   $x \mapsto x \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle et exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = (\ln x + 1)x^x$. Ainsi f' est positive sur $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ et négative sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.
   Puisque $x \ln x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. De plus, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

   Enfin, $\frac{f(x)}{x} = e^{(x-1)\ln x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc le graphe de f admet une branche parabolique de direction (Oy).
   On laisse au lecteur de tracer le graphe de f.
   Le tableau de varaitions nous apprend que $\operatorname{Im} f = \left[e^{-\frac{1}{e}}, +\infty\right[$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et dérivable sur cet intervalle comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ donc f' est positive sur $]0, e]$ et négative sur $[e, +\infty[$.
   On a sans problème $f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$. Par croissances comparées, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, le graphe de f admet une

asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

On a clairement $\operatorname{Im} f = \left]-\infty, \frac{1}{e}\right]$.

3. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \geqslant 0$, f est définie sur $\mathbb{R}$. f est clairement paire donc il suffit de procéder à une étude sur $\mathbb{R}_+$.
$x \mapsto 1 + x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
On a clairement $= \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On a clairement $\operatorname{Im} f = [1, +\infty[$.

4. f est clairement définie sur $\mathbb{R}$. De plus, f est impaire et 2π-périodique donc on peut l'étudier sur $[0, \pi]$.
f est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout $x \in [0, \pi]$, $f'(x) = \cos(x) - \cos(3x) = 2\sin(2x)\sin(x)$. Comme $\sin$ est positive sur $[0, \pi]$, $f'(x)$ est du signe de $\sin(2x)$ pour $x \in [0, \pi]$. f' est donc positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et négative sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0

On trace ensuite le graphe de f sur $[0, \pi]$ qu'on complète par une symétrie par rapport à l'origine puis par 2π-périodicité.
On a clairement $f([0, \pi]) = \left[0, \frac{4}{3}\right]$ puis $f([-\pi, \pi]) = \left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$ car f est impaire et finalement $\operatorname{Im} f = \left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$ par 2π-périodicité.

Solution 27.

On pose $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$. Il suffit donc de montrer que f est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
f est clairement dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x) = \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = \frac{(\cos x - 1)^2(2\cos x + 1)}{\cos^2 x}$$

Ainsi $f' \geqslant 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et f est donc croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Puisque $f(0) = 0$, f est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on en déduit l'inégalité demandée.

Solution 28.

On étudie la fonction $x :\mapsto 6x - 8\sin x + \sin 2x$. f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 6 - 8\cos 2x + 2\cos 2x = 4\cos^2 x - 8\cos x + 4 = 4(\cos x - 1)^2 \geqslant 0$$

Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $f(0) = 0$, f est positive sur $\mathbb{R}_+$ et on en déduit l'inégalité demandée.

Solution 29.

1. Le discriminant du trinôme $x \mapsto x^2 + x + 1$ est strictement négatif donc $x \mapsto x^2 + x + 1$ est positif sur $\mathbb{R}$. Ceci prouve que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. On trouve $f(-1 - x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ comme axe de symétrie.

3. $x \mapsto x^2 + x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

Ainsi f est décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
De plus, $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Ainsi $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Puis pour tout $x > 0$,

$$f(x) - x = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

Ainsi $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \frac{1}{2}$. $\mathcal{C}_f$ admet donc pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$.
Par symétrie, la droite d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est asypmtote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

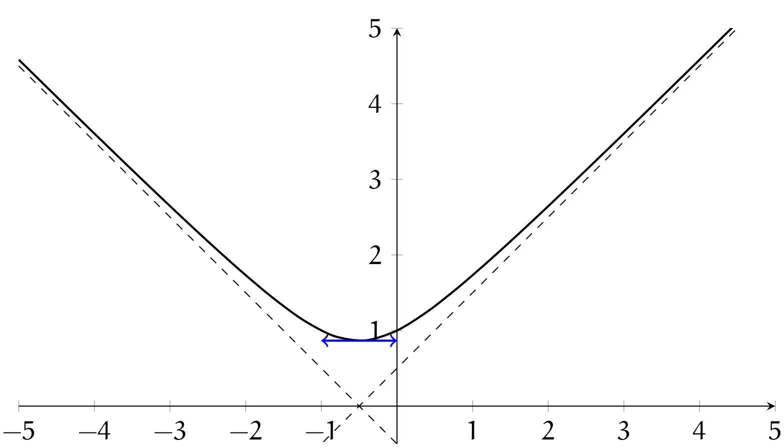
$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geqslant \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{1}{2}\right|$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \geqslant x + \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad f(x) \geqslant -x - \frac{1}{2}$$

On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses asymptotes.

6.



Solution 30.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$.

Variations. Après un petit calcul on trouve

$$f'(x) = \frac{2(x-2)(x+1)}{2x-1}.$$

Par l'étude du signe de f' on déduit que f est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$ et sur $[2, \infty[$, et strictement décroissante sur $[-1, 1/2[$ et sur $]1/2, 2]$.

Asymptotes. On a

$$\lim_{x \to 1/2} |f(x)| = \infty.$$

Cela montre que f possède une asymptote verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$.
Pour trouver des asymptotes non-verticales on remarque que le terme dominant de $f(x)$ est $\frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$. On cherche donc $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$(*) \qquad \lim_{x \to \infty} (f(x) - (x/2 + b)) = 0.$$

On calcule

$$\begin{aligned} f(x) - (x/2 + b) &= \frac{(x+1)^2 - (x/2+b)(2x-1)}{2x-1} \\ &= \frac{(5/2 - 2b)x + 1 + b}{2x-1}. \end{aligned}$$

Pour avoir $(*)$ il faut donc prende $b = 5/4$. Ainsi la droite d'équation

$$y = x/2 + 5/4$$

est une asymptote ∞, et aussi en $-\infty$.
Voici une méthode plus systématique pour obtenir cette asymptote. La fonction f est une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes). On procède donc à la division polynomiale du numérateur x^2+2x+1 par le dénominateur $2x-1$:

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \\ 2x-1 & x^2 + 2x + 1 \\ & -x^2 + \frac{1}{2}x \\ & \frac{5}{2}x + 1 \\ & -\frac{5}{2}x + \frac{5}{4} \\ & \frac{9}{4} \end{array}$$

Le reste est $\frac{9}{4}$ et le quotient est $\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$. Autrement dit,

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{2x-1} = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} + \frac{9/4}{2x-1}.$$

En faisant tendre x vers l'infini dans cette expression on retrouve l'asymptote.

2. On soupçonne que le point d'intersection I des deux asymptotes est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$. Prouvons-le !
On constate que la courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à I *si et seulement si* la « fonction décalée » g définie par

$$g(x) = f(x + x_I) - y_I$$

est impaire. Les coordonnées de I étant $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ on a

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} = \frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}{2x} - \frac{3}{2} = \frac{x^2 + \frac{9}{4}}{2x}.$$

La fonction g est clairement impaire, et ainsi $\mathcal{C}_f$ est bien symétrique par rapport au point I.

SOLUTION 31.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$,
$$f\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
donc f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$. Elle n'est donc pas bornée sur $\mathbb{R}$ a fortiori.
Pour $n \in \mathbb{N}$,
$$f\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}+2n\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$
donc f n'est pas minorée sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}|g(x)| &= \frac{\left|2\sin x + 3\cos x^2\right|}{|1+e^x|} \\ &= \frac{\left|2\sin x + 3\cos x^2\right|}{1+e^x} \\ &\leqslant \left|2\sin x + 3\cos x^2\right| && \text{car } e^x \geqslant 0 \\ &\leqslant 2|\sin x| + 3\left|\cos x^2\right| && \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leqslant 5\end{aligned}$$
Ainsi g est bornée sur $\mathbb{R}$ donc majorée et minorée sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+\sin x \geqslant 0$ et $\ln(1+x^2) \geqslant 0$ donc $h(x) \geqslant 0$. Ainsi h est minorée sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$h\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 2\ln\left(1+\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^2\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
donc h n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|i(x)| = e^{-x^2}|\sin x|$. Or pout tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} \leqslant 1$ et $|\sin x| \leqslant 1$ donc $|i(x)| \leqslant 1$. Ainsi i est bornée sur $\mathbb{R}$.

SOLUTION 32.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant 1$ et $f(0) = 1$ donc f admet un maximum en 0 valant 1. Si m est un minorant de f, alors $m \leqslant \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Or f ne prend pas de valeurs négatives donc f n'admet pas de minimum sur $\mathbb{R}$.
2. Une étude de fonction montre que g admet un maximum en e valant $\frac{1}{e}$. Puisque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, f n'est pas minorée et n'admet donc pas de minimum sur $\mathbb{R}$.
3. h est clairement positive et $h(0) = 0$ donc h admet un minimum en 0 valant 0. Une étude de fonction montre que h admet un maximum en $\frac{1}{2}$ valant $\frac{1}{\sqrt{2e}}$.
4. On a $\lim_{x\to 0^+} i(x) = +\infty$ ou encore $\lim_{x\to+\infty} i(x) = +\infty$ donc i n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$: elle n'y admet donc pas de maximum.
De plus, i est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $i'(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$.
On en déduit que i admet un minimum en $\sqrt{a}$ valant $2\sqrt{a}$.

SOLUTION 33.

Posons $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x + x$.
f' est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$.
f' est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $f'(0) = 0$, f' est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.
On en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_-$. Puisque $f(0) = 0$, f est positive sur $\mathbb{R}$ et on en déduit l'inégalité demandée.

Solution 34.

1. On prouve après mise au même dénominateur et identification des coefficients que

$$a = \frac{1}{2}\ ,\ b = -\frac{1}{2}.$$

2. On prouve par une récurrence sans difficulté que

$$x \mapsto \frac{1}{1+x}$$

est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, et que sur cet ensemble,

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

On en déduit que la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et que sur cet ensemble,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, et sur cet ensemble,

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{n+1}}.$$

Solution 35.

Comme x et α sont *réels,*

$$\begin{aligned} e^{x\cos(\alpha)}\cos(x\sin(\alpha)) &= \mathfrak{R}\big(e^{x\cos(\alpha)}e^{ix\sin(\alpha)}\big) \\ &= \mathfrak{R}\big(e^{xe^{i\alpha}}\big) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\frac{d^n e^{x\cos(\alpha)}\cos(x\sin(\alpha))}{dx^n} \\ &\qquad = \mathfrak{R}\Big(\frac{d^n e^{xe^{i\alpha}}}{dx^n}\Big) \\ &\qquad = \mathfrak{R}\big(e^{in\alpha}e^{xe^{i\alpha}}\big) \\ &\qquad = e^{x\cos(\alpha)}\cos\big(n\alpha + x\sin(\alpha)\big). \end{aligned}$$