Devoir à la maison n°01

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – D'après Petites Mines 2001

Les parties 2 et 3 sont liées mais la partie 1 est indépendante du reste du problème.

Partie I –

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$.

I.1 Vérifier que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $E(s+t) = E(s)E(t)$.

I.2 En déduire que $E(t)^n = E(nt)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

I.3 Montrer que $E(t)$ est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$ et déterminer son inverse.

I.4 Montrer que la famille (I, A, A^2) est une famille libre de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

I.5 En déduire que l'application $E : t \in \mathbb{R} \mapsto E(t)$ est injective.

I.6 Dans cette question, $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Expliciter la matrice $E(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ sous la forme d'un tableau matriciel.

Partie II –

On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

II.1 Montrer que $F = \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Préciser un vecteur directeur u de F et un vecteur directeur v de G.

II.2 Sans calculs, déterminer la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B} = (u, v)$.

II.3 En déduire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter P, D et P^{-1}.

II.4 Expliciter D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sous forme d'un tableau matriciel.

Partie III –

On reprend les notations de la partie 2.

III.1 En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout réel t,

$$e^t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$

III.2 Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{E}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\mathrm{A}^k$. On écrira cette matrice sous la forme $\begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.

Expliciter sous forme de sommes les coefficients $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

III.3 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$a(t) = \lim_{n\to+\infty} a_n(t) \qquad b(t) = \lim_{n\to+\infty} b_n(t) \qquad c(t) = \lim_{n\to+\infty} c_n(t) \qquad d(t) = \lim_{n\to+\infty} d_n(t)$$

et $\mathrm{E}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$. Expliciter $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ et $d(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

III.4 Montrer qu'il existe des matrices Q et R de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{E}(t) = e^{2t}\mathrm{Q} + e^t\mathrm{R}$$

et expliciter Q et R.

III.5 Calculer les matrices Q^2, R^2, QR et RQ. Que peut-on dire des endomorphismes q et r canoniquement associés à Q et R ? On précisera sa réponse à l'aide des droites F et G de la question **II.1**.

III.6 En déduire que

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{E}(s+t) = \mathrm{E}(s)\mathrm{E}(t)$$

Que dire de $\mathrm{E}(t)^n$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$? Que dire de l'inversibilité de $\mathrm{E}(t)$ et de son éventuel inverse pour $t \in \mathbb{R}$?

L'application $\mathrm{E} : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{E}(t)$ est-elle injective ?

Problème 2 – Résolution d'une équation différentielle

Partie I – Résolution de deux équations différentielles simples

On considère les équations différentielles

$$z'' + 4z = 0 \tag{E$_1$}$$

$$z'' - 4z = 0 \tag{E$_2$}$$

I.1 Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle (E_1).

I.2 Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle (E_2).

I.3 Montrer que l'ensemble des solutions de (E_2) peut en fait s'écrire

$$\left\{t \mapsto \lambda \operatorname{ch}(2t) + \mu \operatorname{sh}(2t),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Partie II – Résolution d'une seconde équation différentielle par changement de variable

On considère l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0 \tag{F}$$

II.4 Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]-1, 1[$. On pose $g = f \circ \cos$. Montrer que g est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0, \pi[$.

II.5 Montrer que f est solution de (F) sur $]-1, 1[$ si et seulement si g est solution sur $]0, \pi[$ d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants à déterminer.

II.6 En déduire que les solutions de (F) sur $]-1, 1[$ sont les fonctions

$$x \in]-1, 1[\mapsto \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x\sqrt{1 - x^2}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Partie III – La fonction argument cosinus hyperbolique

III.7 Montrer que la fonction ch induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$. On notera argch la bijection réciproque de cette bijection induite.

III.8 Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{sh} \circ \operatorname{argch}(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

III.9 Justifier que la fonction argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et déterminer une expression de sa dérivée.

III.10 Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(2\theta) = 2\operatorname{ch}^2(\theta) - 1$ et $\operatorname{sh}(2\theta) = 2\operatorname{ch}(\theta)\operatorname{sh}(\theta)$.

III.11 En déduire pour $x \in [1, +\infty[$ des expressions de $\operatorname{ch}(2\operatorname{argch}(x))$ et $\operatorname{sh}(2\operatorname{argch}(x))$ ne faisant pas intervenir la fonction argch.

Partie IV – Un problème de raccord

IV.12 En considérant cette fois-ci une fonction f deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$ et en posant $g = f \circ \operatorname{ch}$, montrer que les solutions de l'équation différentielle (F) sur $]1, +\infty[$ sont les fonctions

$$x \in]1, +\infty[\mapsto \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x\sqrt{x^2 - 1}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

IV.13 En déduire les solutions de l'équation différentielle (F) sur $]-\infty, -1[$.

IV.14 Déterminer les solutions de (F) sur $\mathbb{R}$.