Semaine du 04/02 au 08/02

1 Cours

Espaces vectoriels

Définition et exemples fondamentaux Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Exemples. Si X est un ensemble, on peut munir $\mathbb{K}^X$ d'une struture de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Conséquence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Sous-espaces vectoriels Définition. Intersection de sous-espaces vectoriels. Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs. Espace vectoriel engendré par une partie ou une famille.

Somme de sous-espaces vectoriels Somme de deux sous-espaces vectoriels. Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces supplémentaires. Si $E = F \oplus G$, définition du projeté de $x \in E$ sur F parallèlement à G. Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.

Espaces vectoriels de dimension finie

Famille de vecteurs Familles génératrices. Familles libres/liées. Bases. Base adaptée à une décomposition en somme directe. Cas particulier des familles de $\mathbb{K}^n$ (pivot de Gauss).

Dimension d'un espace vectoriel Théorème de la base incomplète/extraite. Existence de bases. Définition de la dimension. Dans un espace de dimension n une famille génératrice/libre possède au moins/au plus n éléments. Si $\mathcal{B}$ est une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n, alors $\mathcal{B}$ est une base si elle est libre **ou** génératrice.

Dimension et sous-espaces vectoriels Si F sous-espace vectoriel de E, alors $\dim F \leqslant \dim E$ avec égalité **si et seulement si** $F = E$. Hyperplans. Dimension d'une somme directe. Existence de supplémentaire en dimension finie. Formule de Grassmann. Caractérisation de la supplémentarité par la dimension.

2 Méthodes à maîtriser

- Savoir montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel.
- Savoir déterminer une partie génératrice d'une partie de $\mathbb{K}^n$ définie par des équations linéaires.
- Savoir montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires (utiliser éventuellement une méthode par analyse/synthèse).
- Savoir montrer qu'un nombre fini de sous-espaces vectoriels sont en somme directe (somme nulle $\implies$ termes nuls).
- Montrer qu'une famille est libre.
- Montrer qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre, liée ou génératrice par pivot de Gauss.
- Déterminer une base et la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ défini par un système d'équations cartésiennes (mettre sous forme d'un vect) ou par une famille génératrice (pivot de Gauss).
- Déterminer la dimension d'un espace vectoriel en exhibant une base.
- Utiliser la dimension pour montrer qu'une famille libre/génératrice est une base.
- Utiliser la dimension pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont égaux.
- Utiliser la dimension pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

3 Questions de cours

- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel E. Montrer que si F et G sont en somme directe, alors $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.
- Démontrer la formule de Grassmann.
- Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que F possède un supplémentaire dans E.
- **Banque CCP Exo 84** Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.
- **Banque CCP Exo 89** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
  1. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

- Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = 0$. Montrer que f est nulle sur $[a, b]$.

- Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n e^x}{n!}\ dx$. Déterminer une relation de récurrence liant I_n et I_{n+1}. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$.

- Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\ dt$. Déterminer une relation de récurrence liant I_n et I_{n+1}. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$.