Devoir surveillé n°05 : corrigé

Solution 1.

1. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{3x}{1+x^2}$ est $x \mapsto \frac{3}{2}\ln(1+x^2)$. On en déduit que les solutions de $(\mathrm{E_H})$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda \exp\left(\frac{3}{2}\ln(1+x^2)\right) = (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Posons donc $\mathrm{P}\colon x \mapsto ax^3+bx^2+cx+d$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. On obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (1+x^2)\mathrm{P}'(x) - 3x\mathrm{P}(x) = -bx^3 + (3a-2c)x^2 + (2b-3d)x + c$$

Une condition suffisante (et même nécessaire en fait, mais qu'importe) pour que P soit solution de (E) est donc que (a,b,c,d) vérifie le système $\begin{cases} -b = 0 \\ 3a-2c=0 \\ 2b-3d=0 \\ d=1 \end{cases}$. On trouve alors $a = \frac{2}{3}$, $b=0$, $c=1$ et $d=0$. Ceci signifie que la fonction polynomiale $\mathrm{P}\colon x \mapsto \frac{2}{3}x^3 + x$ est solution de (E).
On en déduit que les solutions (E) sont les fonctions

$$f_\lambda\colon x \mapsto \frac{2}{3}x^3 + x + \lambda(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Remarquons que pour tout $x > 0$,

$$(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, on obtient via un développement limité classique

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{3}{2x^2} + \frac{3}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

A fortiori

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

On en déduit

$$(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \underset{x\to+\infty}{=} x^3 + \frac{3}{2}x + o(1)$$

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente,

$$f_\lambda(x) \underset{x\to+\infty}{=} \left(\frac{2}{3}+\lambda\right)x^3 + \left(1+\frac{3}{2}\lambda\right)x + o(1)$$

Si $\lambda \neq -\frac{2}{3}$, $f_\lambda(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\frac{2}{3}+\lambda\right)x^3$ et f admet une limite infinie en $+\infty$.
Si $\lambda = -\frac{2}{3}$, $f_\lambda = g$ et $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$ de sorte que g admet une limite finie (nulle) en $+\infty$.
g est donc l'unique solution de (E) admettant une limite finie en $+\infty$.

5. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on trouve $g'(x) = 2x^2+1-2x\sqrt{1+x^2} = \left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, par stricte croissance de la racine carrée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant x$. On en déduit que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Par opérations sur les limites, il est clair que $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$. Par ailleurs, on a vu à la question précédente que $\lim_{+\infty} g = 0$.

Solution 2.

1. On a
$$\mathrm{I}_0=\int_0^1 e^{-2x}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1=\frac{1-e^{-2}}{2}$$
Par intégration par parties :
$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1&=\int_0^1(1-x)e^{-2x}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{2}(1-x)e^{-2x}\right]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{e^{-2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-e^{-2}}{2}=\frac{1+e^{-2}}{4}\end{aligned}$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour $x\in[0,1]$, $1-x\in[0,1]$ et donc $(1-x)^{n+1}\leqslant(1-x)^n$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\mathrm{I}_{n+1}\leqslant\mathrm{I}_n$. Ceci signifie que (I_n) est décroissante.

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. Comme $\varphi_n\geqslant0$ sur $[0,1]$, $\mathrm{I}_n\geqslant0$.

4. Par décroissance de g, on a $g(x)\leqslant1$ pour tout $x\in[0,1]$. Par conséquent, $\varphi_n(x)\leqslant(1-x)^n$ pour tout $x\in[0,1]$. Ainsi
$$0\leqslant\mathrm{I}_n\leqslant\int_0^1(1-x)^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$$
D'après le théorème des gendarmes, (I_n) converge vers 0.

5. Soit $n\in\mathbb{N}$. Par intégration par parties :
$$2\mathrm{I}_{n+1}=\int_0^1 2(1-x)^{n+1}e^{-2x}\,\mathrm{d}x=\left[-(1-x)^{n+1}e^{-2x}\right]_0^1+(n+1)\int_0^1(1-x)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x=1-(n+1)\mathrm{I}_n$$

6. On a donc $n\mathrm{I}_n=1-\mathrm{I}_n-2\mathrm{I}_{n+1}$. Puisque (I_n) converge vers 0, (I_{n+1}) converge également vers 0 (suite extraite) et $(n\mathrm{I}_n)$ converge vers 1.

7. On a $n\mathrm{I}_n-1=-\mathrm{I}_n-2\mathrm{I}_{n+1}$ donc
$$n(n\mathrm{I}_n-1)=-n\mathrm{I}_n-2n\mathrm{I}_{n+1}=-n\mathrm{I}_n-2(n+1)\mathrm{I}_{n+1}+2\mathrm{I}_{n+1}$$
Comme $(n\mathrm{I}_n)$ converge vers 1, $((n+1)\mathrm{I}_{n+1})$ converge également vers 1 (suite extraite) et puisque que (I_{n+1}) converge vers 0, la suite $(n(n\mathrm{I}_n-1))$ converge vers -3.

8. Puisque $(n(n\mathrm{I}_n-1))$ converge vers -3, on en déduit que $n\mathrm{I}_n-1\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{3}{n}$ i.e. $n\mathrm{I}_n-1\underset{n\to+\infty}{=}-\dfrac{3}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Puis il vient $\mathrm{I}_n\underset{n\to+\infty}{=}\dfrac{1}{n}-\dfrac{3}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ainsi $a=0$, $b=1$ et $c=-3$.

Solution 3.

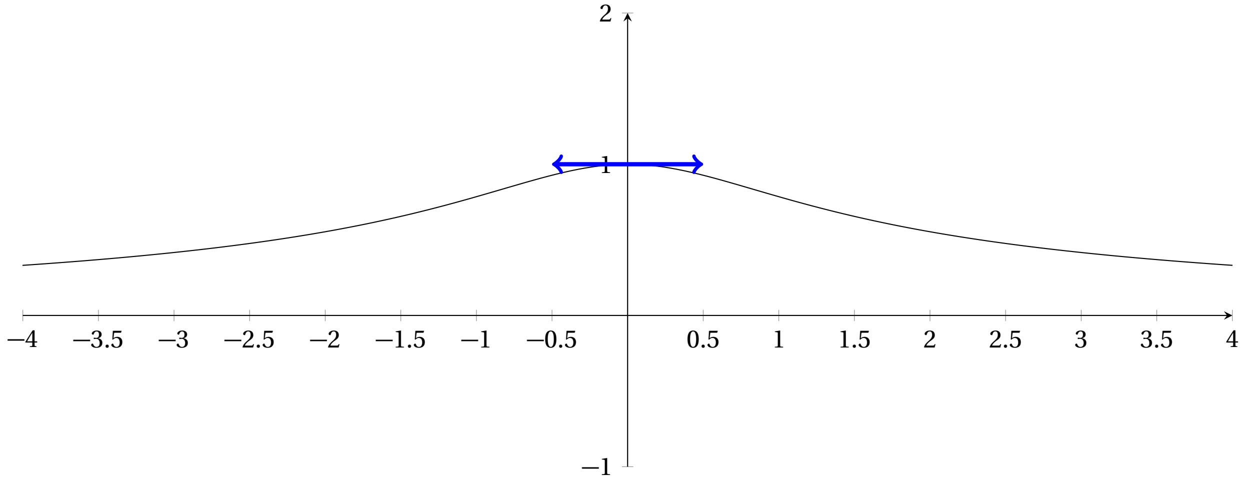
1. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.
De plus, $\arctan t\underset{t\to0}{\sim}t$ donc $\lim_{t\to0}\frac{\arctan t}{t}=1=f(0)$ donc f est continue en 0. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$.
Enfin, arctan étant impaire, f est paire.

2. On sait que $\frac{1}{1+t^2}\underset{t\to0}{=}1+o(t)$. Par intégration, $\arctan t\underset{t\to0}{=}\arctan 0+t+o(t^2)$. On en déduit que $f(t)\underset{t\to0}{=}1+o(t)$.
Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comment quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, f est dérivable en 0 d'après la question précédente. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $t\in\mathbb{R}^*$,
$$f'(t)=\frac{1}{t(1+t^2)}-\frac{\arctan t}{t^2}$$

4. $u\mapsto u$ et $u\mapsto-\frac{1}{2(1+u^2)}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivées respectives $u\mapsto1$ et $u\mapsto\frac{u}{(1+u^2)^2}$. Soit $t\in\mathbb{R}^*$. Par intégration par parties
$$\int_0^t\frac{u^2}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u=\left[-\frac{u}{2(1+u^2)}\right]_0^t+\int_0^t\frac{\mathrm{d}u}{2(1+u^2)}=-\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{\arctan t}{2}=-\frac{1}{2}t^2f'(t)$$
Si $t>0$, $\int_0^t\frac{u^2}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u>0$ comme intégrale d'une fonction continue positive non constamment nulle et donc $f'(t)<0$. Ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme f est paire, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$.

5. Puisque $\lim_{+\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{+\infty} f = 0$. Par parité, $\lim_{-\infty} f = 0$. Ainsi la courbe représentative de f admet l'axe des abscisses pour asymptote.



6. Posons $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi $\phi(x) = \frac{\mathrm{F}(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. F est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de f. Ainsi ϕ est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
De plus, F est dérivable en 0 donc $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(0)}{x-0} = \mathrm{F}'(0)$ i.e. $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{F}(x)}{x} = f(0)$. Ainsi ϕ est continue en 0. Finalement, ϕ est continue sur $\mathbb{R}$.
Posons $u(x) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = \mathrm{F}'(x) - \mathrm{F}'(-x) = f(x) - f(-x) = 0$. Ainsi u est constante sur $\mathbb{R}$ égale à $u(0) = 2\mathrm{F}(0) = 0$. On en déduit que F est impaire. Il s'ensuite que ϕ est paire.

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est décroissante sur $[0, x]$ d'après la question **4**, pour tout $t \in [0, x]$, $f(x) \leqslant f(t) \leqslant f(0)$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x dt$$

et par suite

$$x f(x) \leqslant x\phi(x) \leqslant x$$

Puisque $x > 0$,

$$f(x) \leqslant \phi(x) \leqslant 1$$

L'inégalité est encore valable si $x \in \mathbb{R}_-^*$ puisque f et ϕ sont paires. Enfin, l'égalité est valable si $x = 0$ puisque $f(0) = \phi(0) = 1$.
Finalement, $f(x) \leqslant \phi(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

8. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de f. ϕ est alors dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comment quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\phi'(x) = \frac{\mathrm{F}'(x)}{x} - \frac{\mathrm{F}(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\big(f(x) - \phi(x)\big)$$

On sait d'après la question **2** que $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x)$. Comme F est une primitive de f, $\mathrm{F}(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{F}(0) + x + o\left(x^2\right)$. Or $\mathrm{F}(0) = 0$ donc $\mathrm{F}(x) \underset{x\to 0}{=} x + o\left(x^2\right)$. Par suite, $\phi(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x)$. Ainsi ϕ est dérivable en 0 et $\phi'(0) = 0$.
Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \leqslant \phi(x)$ et que $\phi'(x) = \frac{1}{x}\big(f(x) - \phi(x)\big)$, ϕ' est négative sur $\mathbb{R}_+^*$ et ϕ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque ϕ est paire, ϕ est croissante sur $\mathbb{R}_-$.

9. Soit $x \in [1, +\infty[$. Pour tout $t \in [1, x[$, $0 \leqslant \arctan t \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc $0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{\pi}{2t}$. Par croissance de l'intégrale

$$\int_1^x 0\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \frac{\pi}{2t}\,\mathrm{d}t$$

ou encore

$$0 \leqslant \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\ln x$$

puis

$$0 \leqslant \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x}$$

Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ via le théorème des gendarmes.
Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$\phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$.

10. L'équation différentielle équivaut à $xy' + xy = f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ ou encore à $(xy)' = f(x)$. On en déduit que les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $x \mapsto \phi(x) + \frac{\lambda}{x}$ où λ décrit $\mathbb{R}$.

11. Soit y une éventuelle solution de $x^2y' + xy = \arctan x$ sur $\mathbb{R}$. La question **10** montre qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y(x) = \begin{cases} \phi(x) + \frac{\lambda_1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \phi(x) + \frac{\lambda_2}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$. La continuité de y en 0 impose $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ainsi ϕ et y coïncident sur $\mathbb{R}^*$. Puisque ces deux fonctions sont continues, elles coïncident également en 0 et sont donc égales.
Réciproquement, ϕ vérifie bien l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$. C'est donc l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2y' + xy = \arctan x$.