

# CORRIGÉ TD : FRACTIONS RATIONNELLES, SOUS-ESPACES AFFINES

## SOLUTION 1.

1. Les pôles sont les racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité et ils sont simples donc :

$$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{a_\omega}{X - \omega}$$

avec

$$a_\omega = \frac{1}{(X^n - 1)'(\omega)} = \frac{1}{n\omega^{n-1}} = \frac{\omega}{n}$$

2. De la même façon,

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{a_\omega}{X - \omega}$$

avec

$$a_\omega = \frac{X^{n-1}(\omega)}{(X^n - 1)'(\omega)} = \frac{\omega^{n-1}}{n\omega^{n-1}} = \frac{1}{n}$$

3. Les pôles sont les racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité. Pour  $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ , le pôle  $\omega$  est simple donc le coefficient de  $\frac{1}{X - \omega}$  dans la décomposition en éléments simples est :

$$\begin{aligned} a_\omega &= \frac{1}{[(X-1)(X^n-1)]'(\omega)} \\ &= \frac{1}{(X^n-1+n(X-1)X^{n-1})(\omega)} = \frac{\omega}{n(\omega-1)} \end{aligned}$$

Notons  $a_1$  et  $b_1$  les coefficients respectifs de  $\frac{1}{X-1}$  et  $\frac{1}{(X-1)^2}$  dans la décomposition en éléments simples. On remarque que

$$\frac{1}{(X-1)(X^n-1)} = \frac{1}{(X-1)^2(1+X+\dots+X^{n-1})}$$

donc en multipliant par  $(X-1)^2$  et en prenant la valeur en 1, on obtient  $b_1 = \frac{1}{n}$ . Enfin, on obtient  $a_1$  en dérivant  $\frac{1}{1+X+\dots+X^{n-1}}$  et en prenant la valeur en 1 :

$$a_1 = -\frac{1+2+\dots+(n-1)}{n^2} = \frac{1-n}{2n}$$

## SOLUTION 2.

La décomposition en éléments simples de  $F$  est du type :

$$F = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{X^k} + \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{(1-X)^k}$$

Le développement limité de  $\frac{1}{(1-x)^n}$  en 0 à l'ordre  $n-1$  est :

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k}{k} x^k$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} x^n F(x) &= \sum_{k=1}^n a_k x^{n-k} + x^n \left( \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{(1-x)^k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} x^k + o(x^{n-1}) \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on en déduit  $a_k = \binom{n+k}{k}$  pour  $1 \leq k \leq n$ . De plus,  $F(1-X) = F(X)$  donc  $b_k = a_k$  pour  $1 \leq k \leq n$ .

### SOLUTION 3.

1. La partie entière de  $F$  est 1.  $F$  admet deux pôles simples 1 et 2. Par conséquent la DES de  $F$  est :

$$F = \frac{X^2 + 2X + 5}{(X-1)(X-2)} = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}$$

De plus,

$$(X-1)F = \frac{X^2 + 2X + 5}{X-2}$$

En substituant 1 à  $X$ , on trouve  $a = -8$ .

De même,

$$(X-2)F = \frac{X^2 + 2X + 5}{X-1}$$

En substituant 2 à  $X$ , on trouve  $b = 13$ .

La DES de  $F$  est donc :

$$F = 1 - \frac{8}{X-1} + \frac{13}{X-2}$$

2. La partie entière de  $F$  est nulle.  $F$  admet deux pôles doubles conjugués  $i$  et  $-i$ . Comme  $F$  est à coefficients réels, la DES de  $F$  est :

$$F = \frac{4}{(X-i)^2(X+i)^2} = \frac{a}{(X-i)^2} + \frac{b}{X-i} + \frac{\bar{a}}{(X+i)^2} + \frac{\bar{b}}{X+i}$$

On a

$$(X-i)^2 F = \frac{4}{(X+i)^2}$$

En substituant  $i$  à  $X$ , on trouve  $a = -1$ .

De plus,

$$[(X-i)^2 F]' = -\frac{8}{(X+i)^3}$$

En substituant  $i$  à  $X$ , on trouve  $b = -i$ .

La DES de  $F$  est donc :

$$F = -\frac{1}{(X-i)^2} - \frac{i}{X-i} - \frac{1}{(X+i)^2} + \frac{i}{X+i}$$

3. La partie entière de  $F$  est nulle.  $F$  admet un pôle simple 0 et un pôle triple 1. La DES de  $F$  est :

$$F = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X}$$

On évalue  $(X-1)^3 F = \frac{1}{X}$  en 1 et on trouve  $a = 1$ .

On pose alors

$$G = F - \frac{1}{(X-1)^3} = -\frac{1}{X(X-1)^2}$$

et la DES de G est :

$$G = \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X}$$

On évalue  $(X-1)^2 G = -\frac{1}{X}$  en 1 et on trouve  $b = -1$ .

On évalue  $[(X-1)^2 G]' = \frac{1}{X^2}$  en 1 et on trouve  $c = 1$ .

On évalue enfin  $XF = \frac{1}{(X-1)^3}$  en 0 et on trouve  $d = -1$ .

La DES de F est donc :

$$F = \frac{1}{(X-1)^3} - \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X}$$

4. La partie entière de F est nulle. F admet deux pôles simples  $i$  et  $-i$ . Comme  $2X = (X+i) + (X-i)$ , la DES de F est :

$$F = \frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i}$$

5. La partie entière de F est nulle. Elle admet deux pôles simples conjugués  $j$  et  $\bar{j}$ . Comme F est à coefficients réels :

$$F = \frac{1}{(X-j)(X-\bar{j})} = \frac{a}{X-j} + \frac{\bar{a}}{X-\bar{j}}$$

On évalue  $(X-j)F = \frac{1}{X-\bar{j}}$  en  $j$  et on trouve  $a = \frac{1}{j-\bar{j}} = -\frac{i\sqrt{3}}{3}$ . La DES de F est donc :

$$F = -\frac{i\sqrt{3}}{3(X-j)} + \frac{i\sqrt{3}}{3(X-\bar{j})}$$

6. La partie entière de F est nulle. F admet deux pôles triples 1 et  $-1$ . La DES de F est :

$$F = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X+1)^3} + \frac{e}{(X+1)^2} + \frac{f}{X+1}$$

Comme F est impaire, on a  $d = a$ ,  $e = -b$  et  $f = c$ . On évalue  $(X-1)^3 F = \frac{X}{(X+1)^3}$  en 1 et on trouve  $a = \frac{1}{8}$  et donc  $d = \frac{1}{8}$ .

On a  $XF = \frac{X^2}{(X-1)^3}$ . En considérant la limite en  $+\infty$ , on trouve  $c + f = 0$  i.e.  $2c = 0$  et donc  $c = f = 0$ .

En évaluant F en 2, on obtient  $b = -\frac{1}{16}$ .

La DES de F est donc :

$$F = -\frac{1}{16(X-1)^2} + \frac{1}{8(X-1)^3} + \frac{1}{16(X+1)^2} + \frac{1}{8(X+1)^3}$$

#### SOLUTION 4.

Posons  $F = -\frac{P'}{P}$ . On a

$$F' = \frac{P'^2 - PP''}{P^2} = \frac{Q}{P^2}$$

Notons  $x_1, x_2, \dots, x_n$  les racines de P. On sait que

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - x_k}$$

Et donc

$$F' = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(X - x_k)^2}$$

Par conséquent,

$$Q = P^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(X - x_k)^2}$$

Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_k, 1 \leq k \leq n\}$ . On a donc  $Q(x) > 0$ . De plus, pour  $1 \leq k \leq n$ ,

$$Q(x_k) = P'(x_k)^2 > 0$$

car  $x_k$  étant une racine simple de  $P$ , il n'est pas racine de  $P'$ . Finalement,  $Q(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , ce qui prouve que  $Q$  n'a pas de racines réelles.

### SOLUTION 5.

1. On peut démontrer l'existence par récurrence ou à l'aide de la formule de Moivre. Utilisons cette dernière méthode.

$$\begin{aligned} e^{ni\theta} &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \sin^k \theta \cos^{n-k} \theta \\ &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k} \theta \cos^{n-2k} \theta + i \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k \sin^{2k} \theta \cos^{n-2k-1} \theta \\ &= \cos n\theta + i \sin n\theta \end{aligned}$$

On a donc

$$\cos n\theta = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k} \theta \cos^{n-2k} \theta = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (\cos^2 \theta - 1)^k \cos^{n-2k} \theta$$

Il suffit donc de prendre  $T_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}$ .

Démontrons l'unicité. Supposons qu'il existe deux polynômes  $T_n$  et  $\tilde{T}_n$  vérifiant la condition de l'énoncé. Comme  $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ ,  $T_n$  et  $\tilde{T}_n$  coïncident sur  $[-1, 1]$  qui est un ensemble infini. Donc  $T_n = \tilde{T}_n$ .

Chaque terme de la somme définissant  $T_n$  est degré  $n$  et de coefficient dominant  $\binom{n}{2k}$ . La somme de ces coefficients étant non nulle, on en déduit que  $\deg T_n = n$ .

2. Remarquons que  $\cos n\theta$  s'annule pour  $\theta = \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . On a donc  $T_n(\cos \theta_k) = 0$ . Pour  $0 \leq k \leq n-1$ ,  $\theta_k \in [0, \pi]$  et  $\cos$  est injective sur  $[0, \pi]$ , ce qui prouve que les  $x_k = \cos \theta_k$  pour  $0 \leq k \leq n-1$  sont  $n$  racines *distinctes* de  $T_n$ . Or  $\deg T_n = n$ . Les  $x_k$  pour  $0 \leq k \leq n-1$  sont donc exactement les racines de  $T_n$ .

3. Pour  $n = 0$ ,  $T_0 = 1$ . Donc  $\frac{1}{T_0} = 1$ . Supposons  $n \geq 1$ . Alors  $\deg \frac{1}{T_n} < 0$  et la partie entière de  $\frac{1}{T_n}$  est nulle. Tous les pôles de  $\frac{1}{T_n}$  sont simples et le coefficient de  $\frac{1}{X - x_k}$  dans la décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{A_n}$  est  $\frac{1}{A'_n(x_k)}$ . Dérivons l'identité  $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$ . On obtient  $-T'_n(\cos \theta) \sin \theta = -n \sin n\theta$ . On a donc  $T'_n(x_k) \sin \theta_k = n \sin n\theta_k$ . Or pour  $0 \leq k \leq n-1$ ,  $\theta_k \in ]0, \pi[$  donc  $\sin \theta_k \neq 0$  et  $\sin n\theta_k = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$ . On en déduit  $A'_n(x_k) = \frac{(-1)^k n}{\sin \theta_k}$ . La décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{T_n}$  est donc

$$\frac{1}{T_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin \theta_k}{X - \cos \theta_k}$$

### SOLUTION 6.

1. On montre l'existence par récurrence double. Soit  $HR(n)$  l'hypothèse de récurrence :

«Il existe un polynôme  $A_n \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $A_n\left(X + \frac{1}{X}\right) = X^n + \frac{1}{X^n}$ .»

HR(0) et HR(1) sont vraies : il suffit de prendre  $A_0 = 2$  et  $A_1 = X$ . Supposons HR(n) et HR(n + 1) pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . On remarque que  $X^{n+2} + \frac{1}{X^{n+2}} = \left(X^{n+1} + \frac{1}{X^{n+1}}\right) \left(X + \frac{1}{X}\right) - \left(X^n + \frac{1}{X^n}\right)$ . Il suffit donc de prendre  $A_{n+2} = XA_{n+1} - A_n$ . HR(n + 2) est donc vraie et on conclut par récurrence double.

Supposons qu'il existe deux polynômes  $A_n$  et  $\tilde{A}_n$  vérifiant la condition de l'énoncé. Comme l'application  $\begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x + \frac{1}{x} \end{cases}$  est surjective, les polynômes  $A_n$  et  $\tilde{A}_n$  coïncident sur  $\mathbb{R}$  qui est un ensemble infini. Donc  $A_n = \tilde{A}_n$ .

2. Les racines de l'équation  $z^n + \frac{1}{z^n} = 0$  sont les racines  $2n^{\text{èmes}}$  de  $-1$ , à savoir les  $z_k = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}$  pour  $0 \leq k \leq 2n-1$ . On en déduit que les  $x_k = z_k + \frac{1}{z_k}$  sont des racines de  $A_n$ . On trouve alors  $x_k = 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ . Pour  $0 \leq k \leq n-1$ ,  $\frac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$  et  $\cos$  est injective sur  $[0, \pi]$  : les  $x_k$  pour  $0 \leq k \leq n-1$  sont donc deux à deux distincts.  $A_n$  possède donc  $n$  racines distinctes. Or l'égalité définissant  $A_n$  montre que  $A_n$  est de degré  $n$ . Les  $x_k$  pour  $0 \leq k \leq n-1$  sont donc exactement les racines de  $A_n$ .

3. Pour  $n = 0$ ,  $\frac{1}{A_0} = \frac{1}{2}$ . Supposons  $n \geq 1$ . Alors  $\deg \frac{1}{A_n} < 0$ . La fraction rationnelle  $\frac{1}{A_n}$  admet donc une partie entière nulle. De plus, tous les pôles de  $\frac{1}{A_n}$  sont simples et le coefficient de  $\frac{1}{X - x_k}$  dans la décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{A_n}$  est  $\frac{1}{A'_n(x_k)}$ . En dérivant l'identité  $A_n \left(X + \frac{1}{X}\right) = X^n + \frac{1}{X^n}$ , on obtient

$$\left(1 - \frac{1}{X^2}\right) A'_n \left(X + \frac{1}{X}\right) = n \left(X^{n-1} - \frac{1}{X^{n+1}}\right)$$

En substituant  $z_k$  à  $X$  et en utilisant le fait que  $x_k = z_k + \frac{1}{z_k}$ , on obtient

$$\left(1 - \frac{1}{z_k^2}\right) A'_n(x_k) = n \left(z_k^{n-1} - \frac{1}{z_k^{n+1}}\right)$$

Comme les  $z_k$  sont des racines  $2n^{\text{èmes}}$  de  $-1$ ,  $z_k^2 \neq 1$  et donc  $1 - \frac{1}{z_k^2} \neq 0$ . De plus,  $z_k^n = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2}} = (-1)^k i$ . Ainsi

$$A'_n(x_k) = \frac{2(-1)^k i}{z_k} \frac{1}{1 - \frac{1}{z_k^2}} = \frac{2n(-1)^k i}{z_k - \frac{1}{z_k}} = \frac{(-1)^k n}{\sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

La décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{A_n}$  est donc :

$$\frac{1}{A_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin \theta_k}{X - 2 \cos \theta_k}$$

avec  $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ .

#### SOLUTION 7.

1. On a  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{x-k}$ .  $f_n$  est continue sur  $]0, 1[$  et  $f_n$  est strictement décroissante sur  $]0, 1[$  comme somme de fonctions strictement décroissantes sur  $]0, 1[$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = -\infty$ . Donc  $f_n$  s'annule une unique fois sur  $]0, 1[$ . Par conséquent,  $P'_n$  s'annule une unique fois sur  $]0, 1[$ .

2. Posons  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Puisque  $f_n(x_n) = 0$ ,

$$\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k - x_n}$$

Puisque  $0 < x_n < 1$ ,  $\frac{1}{x_n} > H_n$ . Il est classique de montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$ . Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ .

3. A nouveau,

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{1 - x_n} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k - x_n}$$

Puisque  $x_n < 1$ ,

$$H_n < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{1 - x_n} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k - 1} = \frac{1}{1 - x_n} + H_{n-1} = \frac{1}{1 - x_n} + \frac{1}{n} + H_n$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - x_n} + \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$

$$\frac{1}{1 - x_n} + \frac{1}{n} + H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} H_n$$

On en déduit que  $\frac{1}{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} H_n$ . Il est classique de montrer que  $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$  donc  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}$ .

#### SOLUTION 8.

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P'$  divise  $P$ . Il existe donc  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P = P'Q$ . Si  $P$  est constant, alors  $P$  est nul. Supposons donc  $\deg P = n \geq 1$ . Alors  $\deg Q = 1$  et en raisonnant sur les coefficients dominants, il existe  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $Q = \frac{1}{n}(X - a)$ . Ainsi  $nP = (X - a)P'$ . Posons  $F = \frac{P}{(X - a)^n}$ . Alors  $F' = (X - a)^n P' - n(X - a)^{n-1} P(X - a)^{2n} = 0$ . Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $F = \lambda$  et donc  $P = \lambda(X - a)^n$ . En prenant  $\lambda = 0$ , on retrouve le polynôme nul. Réciproquement, on vérifie que tout polynôme de la forme  $\lambda(X - a)^n$  convient.

#### SOLUTION 9.

1. On a  $\frac{1}{X^2 + X} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X + 1}$ . Ainsi

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1} = 1 - \frac{1}{n + 1}$$

On en déduit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

2. On a  $\frac{1}{4X^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2X - 1} - \frac{1}{2X + 1} \right)$ . Ainsi

$$v_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k - 1} - \frac{1}{2k + 1} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n + 1} \right)$$

On en déduit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$ .

3. On a  $\frac{1}{X^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{X - 1} - \frac{1}{X + 1} \right)$ . Ainsi

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k - 1} - \frac{1}{k + 1} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1} \right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n + 1)} \end{aligned}$$

On en déduit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{3}{4}$ .

4. On a  $\frac{X-2}{X^3+3X^2+2X} = -\frac{2}{X+2} + \frac{3}{X+1} - \frac{1}{X}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} z_n &= \sum_{k=1}^n -\frac{2}{k+2} + \frac{3}{k+1} - \frac{1}{k} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \\ &= 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) + \frac{1}{n+1} - 1 = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} \end{aligned}$$

On en déduit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$ .

### SOLUTION 10.

1. La partie polaire relative au pôle 1 est du type  $\frac{\lambda}{X-1}$ . On trouve  $\lambda = \frac{2}{2^6} = \frac{1}{32}$ .

2. On a

$$\begin{aligned} G(-1+h) &= \frac{2-2h+h^2}{-2+h} = -\frac{1-h+\frac{h^2}{2}}{1-\frac{h}{2}} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} -1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} - \frac{h^4}{16} - \frac{h^5}{32} + o(h^5) \end{aligned}$$

Ainsi

$$G(x) \underset{x \rightarrow -1}{=} -1 + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{1}{8}(x+1)^3 - \frac{1}{16}(x+1)^4 - \frac{1}{32}(x+1)^5 + o((x+1)^5)$$

3. Or on sait que la décomposition en éléments simples de F est du type

$$F(X) = \frac{1}{32(X-1)} + \sum_{k=1}^6 \frac{\lambda_k}{(X+1)^k}$$

On en déduit que

$$G(x) \underset{x \rightarrow -1}{=} \sum_{k=0}^5 \lambda_{6-k} (x+1)^k$$

Par unicité du développement limité, on trouve :

$$\lambda_1 = -\frac{1}{32} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{16} \quad \lambda_3 = -\frac{1}{8} \quad \lambda_4 = -\frac{1}{4} \quad \lambda_5 = \frac{1}{2} \quad \lambda_6 = -1$$

La décomposition en éléments simples de F est donc

$$F = \frac{1}{32(X-1)} - \frac{1}{32(X+1)} - \frac{1}{16(X+1)^2} - \frac{1}{8(X+1)^3} - \frac{1}{4(X+1)^4} + \frac{1}{2(X+1)^5} - \frac{1}{(X+1)^6}$$

### SOLUTION 11.

1. Il existe des réels a, b, c, d tels que

$$F = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{X^2-X+1}$$

En multipliant par  $X^2 + 1$  et en évaluant en  $i$ , on obtient  $ai + b = -1 + i$  d'où  $a = 1$  et  $b = -1$ .

En multipliant par  $X^2 - X + 1$  et en évaluant en  $-j$ , on obtient  $-cj + d = 2 + j$  d'où  $c = -1$  et  $d = 2$ . Finalement, la décomposition en éléments simples de  $F$  est

$$F = \frac{X-1}{X^2+1} - \frac{X-2}{X^2-X+1}$$

2. Il existe des réels  $\lambda, \mu, a, b, c, d$  tels que

$$F = \frac{\lambda}{X} + \frac{\mu}{X^2} + \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{(X^2+1)^2}$$

$F$  est paire ce qui fournit par unicité de la décomposition en éléments simples,

$$\lambda = 0$$

$$a = 0$$

$$c = 0$$

En multipliant par  $X^2$  et en évaluant en  $0$ , on obtient  $\mu = 1$ .

En multipliant par  $(X^2 + 1)^2$  et en évaluant en  $i$ , on obtient  $d = -1$ .

Enfin en évaluant en  $1$ , on obtient  $a = -1$ . Finalement, la décomposition en éléments simples de  $F$  est

$$F = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X^2+1} - \frac{1}{(X^2+1)^2}$$

De manière plus astucieuse,

$$\begin{aligned} F &= \frac{X^2+1-X^2}{X^2(X^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{X^2(X^2+1)} - \frac{1}{(X^2+1)^2} \\ &= \frac{X^2+1-X^2}{X^2(X^2+1)} - \frac{1}{(X^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X^2+1} - \frac{1}{(X^2+1)^2} \end{aligned}$$

3. Il existe des réels  $\lambda, a, b, c, d$  tels que

$$F = \frac{\lambda}{X} + \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{cX+d}{(X^2+X+1)^2}$$

En multipliant par  $X$  et en évaluant en  $0$ , on obtient  $\lambda = 1$ . En multipliant par  $(X^2 + X + 1)^2$  et en évaluant en  $j$ , on obtient  $\frac{j^2+1}{j} = cj + d$  d'où  $c = 0$  et  $d = -1$ .

En considérant  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x)$ , on obtient  $a = -\lambda = -1$ .

Enfin, en évaluant en  $-1$ , on obtient  $b = -1$ . Finalement, la décomposition en éléments simples de  $F$  est

$$F = \frac{1}{X} - \frac{X+1}{X^2+X+1} - \frac{1}{(X^2+X+1)^2}$$

De manière plus astucieuse,

$$\begin{aligned} F &= \frac{X^2+X+1-X}{X(X^2+X+1)^2} = \frac{1}{X(X^2+X+1)} - \frac{1}{(X^2+X+1)^2} \\ &= \frac{X^2+X+1-X(X+1)}{X(X^2+X+1)} - \frac{1}{(X^2+X+1)^2} \\ &= \frac{1}{X} - \frac{X+1}{X^2+X+1} - \frac{1}{(X^2+X+1)^2} \end{aligned}$$

4. Il existe des réels  $\lambda, a, b, c, d$  tels que

$$F = \frac{\lambda}{X} + \frac{aX+b}{X^2+X+3} + \frac{cX+d}{(X^2+X+3)^2}$$

En multipliant par  $X$  et en évaluant en  $0$ , on obtient  $\lambda = \frac{1}{3}$ . En multipliant par  $(X^2 + X + 3)^2$  et en évaluant une racine  $\alpha$  de  $X^2 + X + 3$ , on obtient  $2 + \frac{3}{\alpha} = c\alpha + d$ . Or  $\alpha^2 + \alpha + 3 = 0$  donc  $\frac{3}{\alpha} = -\alpha - 1$  puis  $1 - \alpha = c\alpha + d$  donc  $c = -1$  et  $d = 1$ . En



considérant  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x)$ , on obtient  $a = -\lambda = -\frac{1}{3}$ .

Enfin, en évaluant en  $-1$ , on trouve  $b = -\frac{1}{3}$ . Finalement, la décomposition en éléments simples de  $F$  est

$$F = \frac{1}{3X} - \frac{X+1}{3(X^2+X+3)} - \frac{X-1}{(X^2+X+1)^2}$$

### SOLUTION 12.

On pose  $Q = \frac{4X}{X^4-1}$ . On sait que  $Q$  possède les quatre pôles simples  $\pm 1, \pm i$ . Il existe donc des complexes (non-nuls)  $a, b, c, d$  tels que

$$Q = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i}.$$

(La partie entière est nulle car  $\deg Q$  est négatif.) En multipliant avec  $X-1$  puis en remplaçant  $X = 1$  on trouve  $a = 1$ . De manière analogue on procède pour  $b, c, d$ . Enfin on trouve

$$\frac{4X}{X^4-1} = \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i}.$$

En rassemblant les termes conjugués ci-dessus, on obtient

$$\varphi(x) = \frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1}.$$

Donc

$$\Phi(x) = \ln|x^2-1| - \ln(x^2+1) = \ln \frac{|x^2-1|}{x^2+1}$$

est une primitive de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

### SOLUTION 13.

Supposons par l'absurde qu'il existe  $R \in \mathbb{K}(X)$  telle que  $R' = \frac{1}{X}$ . Quitte à factoriser "maximalement"  $X$  au numérateur et au dénominateur on peut écrire  $R$  sous la forme

$$R = \frac{X^m A}{B},$$

où  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $A, B \in \mathbb{K}[X]$ ,  $A(0) \neq 0$ ,  $B(0) \neq 0$ . Alors on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} &= \left( \frac{X^m A}{B} \right)' = \frac{(mX^{m-1}A + X^m A')B - X^m AB'}{B^2} \\ &= \frac{X^{m-1}(mAB + X(A'B - AB'))}{B^2} \end{aligned}$$

ou encore

$$B^2 = X^m(mAB + X(A'B - AB')).$$

- Si  $m = 0$ , alors  $B^2 = X(A'B - AB')$ , d'où  $B(0)^2 = 0$ . Contradiction.
- Si  $m > 0$ , alors on a aussi  $B(0)^2 = 0$ . Contradiction.
- Si  $m < 0$ , alors la contradiction est que le polynôme  $B^2$  possède un pôle d'ordre  $-m$  en  $0$ . En effet, ce pôle ne se "simplifie" pas car pour le numérateur on a

$$(mAB + X(A'B - AB'))(0) = mA(0)B(0) \neq 0.$$

**SOLUTION 14.**

Faisons le changement de variable  $x = \cos t$ . Alors pour les formes différentielles on a  $dx = -\sin t \, dt$ , d'où

$$\int_0^\pi \frac{\sin t \, dt}{4 - \cos^2 t} = \int_1^{-1} \frac{-dx}{4 - x^2} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{4 - x^2}$$

Il est aisé de décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{1}{4 - x^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} \right)$$

Ainsi

$$\int_0^\pi \frac{\sin t \, dt}{4 - \cos^2 t} = \frac{1}{4} \left( \int_{-1}^1 \frac{dx}{x+2} - \int_{-1}^1 \frac{dx}{x-2} \right) = \frac{\ln 3}{2}.$$

**SOLUTION 15.**

1. La fraction

$$\frac{1}{x^2 + 2}$$

est un élément simple.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

2. Décomposition :

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1/2}{x+1} - \frac{1/2}{x-1}.$$

Intégrale :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1 - x^2} = \ln(3).$$

3. Pas besoin de décomposer la fraction rationnelle, car  $2x + 1$  est la dérivée de  $x^2 + x - 3$  !

$$\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3} dx = \ln(3).$$

4. On peut évidemment décomposer la fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{x}{x^4 + 16} = \frac{\sqrt{2}/8}{x^2 - 2x\sqrt{2} + 4} - \frac{\sqrt{2}/8}{x^2 + 2x\sqrt{2} + 4},$$

mais il est bien plus simple de faire le changement de variables  $x^2 = u$ . Alors

$$\int_0^2 \frac{x \, dx}{x^4 + 16} = \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{du}{u^2 + 16} = \frac{\pi}{32}.$$

5. La décomposition de la fraction

$$\frac{x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{(x-4)^3}$$

est

$$1 + \frac{565}{(x-4)^4} + \frac{163}{(x-4)^2} + \frac{22}{x-4} + \frac{507}{(x-4)^3}$$

primitives sont

$$x - \frac{507}{2(x-4)^2} - \frac{565}{3(x-4)^3} - 163 \frac{(x-4)}{+} 22 \ln|x-4|$$

Enfin,

$$\int_0^3 \frac{x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{(x-4)^3} dx = \frac{4671}{64} - 44 \ln(2).$$

6. Décomposition :

$$\frac{1}{x^3 - 7x + 6} = \frac{1}{20(x+3)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{5(x-2)}.$$

Primitives :

$$\frac{1}{20} \ln \left| \frac{(x-2)^4(x+3)}{(x-1)^5} \right|,$$

d'où

$$\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3 - 7x + 6} = \frac{1}{10} \ln(27/4).$$

7. Décomposition :

$$\frac{2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 17x + 30}{x^3 + 8} = 2x + 3 + \frac{2}{x+2} + \frac{3x-1}{x^2-2x+4}.$$

Les primitives sont :

$$x^2 + 3x + \ln(x+2)^2 + \frac{3}{2} \ln(x^2 - 2x + 4) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Intégrale :

$$I = 6 + \frac{7 \ln(3) - 3 \ln(7)}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

8. Décomposition :

$$\frac{4x^2}{x^4 - 1} = \frac{2}{x^2 + 1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}.$$

Primitives :

$$\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + 2 \arctan(x),$$

d'où

$$\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4 - 1} dx = \ln(3/2) + 2 \arctan(1/7).$$

9. La décomposition est

$$\frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 - 3x + 2} = 1 + \frac{4/3}{(x-1)^2} + \frac{11/9}{x-1} - \frac{11/9}{x+2}.$$

On trouve alors

$$\int_{-1}^0 \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 - 3x + 2} dx = \frac{5}{3} - \frac{22}{9} \ln(2).$$

10. La décomposition de la fraction

$$\frac{2x^8 + 5x^6 - 12x^5 + 30x^4 + 36x^2 + 24}{x^4(x^2 + 2)^3}$$

est

$$\frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^2 + 2} - \frac{6}{(x^2 + 2)^2} - \frac{12x - 16}{(x^2 + 2)^3};$$

les primitives sont

$$-\frac{1}{x^3} + \frac{2x+3}{(x^2+2)^2} + \sqrt{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Enfin

$$I = \frac{37}{72} + 2\sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

11. Décomposition de la fraction rationnelle :

$$\frac{-2x^2 + 6x + 7}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{2x + 3}{x^2 + 1} - \frac{2x + 5}{x^2 + 4}.$$

Primitives :

$$\ln \left| \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4} \right| + 3 \arctan(x) - \frac{5}{2} \arctan(x/2).$$

Alors

$$I_a = \ln \left| \frac{a^2 + 1}{a^2 + 4} \right| + 3 \arctan(a) - \frac{5}{2} \arctan(a/2) + 2 \ln(2).$$

Enfin

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} I_a = \frac{\pi}{4} + 2 \ln(2).$$

12. Pour factoriser le dénominateur, penser à écrire

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2;$$

on trouve alors

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{(x\sqrt{2} + 2)/4}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} - \frac{(x\sqrt{2} - 2)/4}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}.$$

Les primitives s'écrivent

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \\ & \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \arctan(x\sqrt{2} + 1) + \arctan(x\sqrt{2} - 1) \right) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left( \frac{33 + 20\sqrt{2}}{17} \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \pi - \arctan(2\sqrt{2}/3) \right).$$

## SOLUTION 16.

1. Notons I l'intégrale à calculer. Le changement de variable  $u = \cos t$  donne

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \frac{du}{4 - u^2} \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{2 + u} + \frac{1}{2 - u} \right) du \\ &= [\ln(2 + u)]_{-1}^1 - [\ln(2 - u)]_{-1}^1 = 2 \ln 3 \end{aligned}$$

2. Notons J l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin t \, dt}{1 - \cos^2 t}$$

Le changement de variable  $u = \cos t$  donne

$$\begin{aligned} J &= - \int_0^{\cos x} \frac{du}{1 - u^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\cos x} \left( \frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u + 1} \right) du \\ &= \frac{1}{2} ([\ln(1 - u)]_0^{\cos x} - [\ln(u + 1)]_0^{\cos x}) \\ &= \frac{1}{2} (\ln(1 - \cos x) - \ln(1 + \cos x)) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \tan^2 \frac{x}{2} \right) = \ln \left( \tan \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

car pour  $x \in ]0, \pi[, \tan \frac{x}{2} > 0$ .

3. Notons  $K$  l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$K = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t \, dt}{(1 - \sin^2 t)^2}$$

Le changement de variable  $u = \sin t$  fournit donc

$$K = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{(1 - u^2)^2}$$

Une décomposition en éléments simples donne ensuite

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \frac{1}{(u-1)^2} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u+1)^2} + \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \frac{1}{4} \left( \left[ \frac{1}{u-1} \right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - [\ln(1-u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[ \frac{1}{u+1} \right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + [\ln(1+u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \\ &= \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \end{aligned}$$

4. Notons  $L$  l'intégrale à calculer. Le changement de variable  $u = \tan \frac{t}{2}$  allié à la paramétrisation rationnelle du cercle donne

$$L = 2 \int_0^1 \frac{du}{1 - u^2 + 2u}$$

Une décomposition en éléments simples donne alors

$$\begin{aligned} K &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{u + \sqrt{2} - 1} - \frac{1}{u - 1 - \sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( [\ln(u + \sqrt{2} - 1)]_0^1 - [\ln(1 + \sqrt{2} - u)]_0^1 \right) \\ &= \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

#### SOLUTION 17.

1. On cherche une suite  $(v_n)$  vérifiant la relation de récurrence sous la forme  $(an^2 + bn + c)_{n \in \mathbb{N}}$ . Cela implique

$$\forall n \in \mathbb{N}, a(n+2)^2 + b(n+2) + c - an^2 - bn - c = n - 1$$

Il suffit alors de prendre  $a = \frac{1}{4}$  et  $b = -1$ . On choisira donc  $v_n = \frac{1}{4}n^2 - n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. On a  $\mathcal{A} = (v_n) + F$  avec  $F$  le sous-espace vectoriel des suites  $(u_n)$  telles que  $u_{n+2} - u_n = 0$ . Les racines de  $X^2 - 1$  sont  $\pm 1$ . Une base de  $F$  est donc  $((1)_{n \in \mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}})$ .

#### SOLUTION 18.

Ponsons  $\Phi(P) = X^2 P'' - 3XP' + 4P$  pour  $P \in \mathbb{R}[X]$ .  $\Phi$  est clairement un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ . Si  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ , alors  $\mathcal{F}$  est un sous-espace affine de direction  $\text{Ker } \Phi$ .

**Recherche de la solution générale** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  non nul. Notons  $n$  le degré de  $P$  et  $a$  le coefficient dominant de  $P$ . Si  $n \geq 2$ ,  $P$  est de degré au plus  $n$  et le coefficient du terme de degré  $n$  de  $\Phi(P)$  est  $n(n-1)a - 3na + 4a = a(n^2 - 4n + 4)$ . Donc  $P \in \text{Ker } \Phi$  implique  $n \geq 2$ . Posons  $P = aX^2 + bX + c$ . Alors  $\Phi(P) = bX + 4c$ . Donc  $P \in \text{Ker } \Phi$  implique  $b = c = 0$ . On en déduit que  $\text{Ker } \Phi = \text{vect}(X^2)$ .

**Recherche d'une solution particulière** On recherche  $P$  tel que  $\Phi(P) = 4 - X$ . En reprenant les notations précédentes, on a vu que si  $n > 2$  alors  $\deg \Phi(P) = n > 2$ . On recherche donc  $P$  de degré  $n \leq 2$ . Comme  $\text{Ker } \Phi = \text{vect}(X^2)$ , on peut rechercher  $P$  de degré  $n \leq 1$ . Posons donc  $P = aX + b$ . On a  $\Phi(P) = aX + 4b$ . Il suffit donc de prendre  $a = -1$  et  $b = 1$ .

En conclusion  $\mathcal{F} = (-X + 1) + \text{vect}(X^2)$ .

#### SOLUTION 19.

1. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . En considérant les coefficients dominants, on voit que  $\deg(P(X+1) - P(X)) = \deg P - 1$  si  $\deg P \geq 1$  et  $\deg(P(X+1) - P(X)) = -\infty$  sinon. On va donc chercher  $P$  de degré 3 appartenant à  $E$ . Posons donc  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . On a alors  $P(X+1) - P(X) = 3aX^2 + (2b + 3a)X + a + b + c$ . On peut donc prendre  $d = 0$  et  $a, b, c$  vérifiant le système

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 2b + 3a = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

On trouve  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = -\frac{1}{2}$  et  $c = \frac{1}{6}$ . On peut donc choisir  $P = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X$ .

2. Notons  $\Phi$  l'endomorphisme de  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  qui à une fonction  $f$  associe  $x \mapsto f(x+1) - f(x)$  et  $g : x \mapsto x^2$ . On a donc  $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid \Phi(f) = g\}$ . Comme  $\Phi(P) = g$ ,  $E = P + \text{Ker } \Phi$ . Enfin,  $\text{Ker } \Phi$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  constitué des fonctions continues périodiques de période 1.

#### SOLUTION 20.

1. Soient  $A \in \mathcal{F}$  et  $b \in \mathcal{G}$ . Puisque  $E = F + G$ , il existe  $\vec{u} \in F$  et  $\vec{v} \in G$  tels que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ . Par suite  $B - \vec{v} = A + \vec{u} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ .
2. Comme  $E = F + G$ ,  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  est non vide d'après la première question et c'est un sous-espace affine. De plus, la direction de  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  est  $F \cap G = \{0_E\}$ . Ainsi  $\dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = 0$  :  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  est un singleton.