Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

Solution 1

On montre aisément que $P \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$ est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$. Il est alors clair que $(i) \implies (iii)$ (on a même l'équivalence).
Il est également évident que $(iii) \implies (ii)$.
Reste à montrer que $(ii) \implies (i)$. Supposons donc que (P_n) converge simplement. Soient $x_0, \dots, x_d$ des réels distincts dans $[0,1]$. Notons X_n le vecteur colonne de P_n dans la base canonique. Puisque (P_n) converge simplement sur $[0,1]$, il existe des réels $y_0, \dots, y_d$ tels que $P_n(x_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y_k$. Notons $V = \left(x_i^j\right)_{1\leq i,j\leq n}$ et Y le vecteur colonne formé des y_k. On a donc $VX_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Y$ pour la norme infinie sur $\mathbb{R}^{d+1}$. Or V est une matrice de Vandermonde inversible et la multiplication par V^{-1} étant continue, on en déduit que $X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} V^{-1}Y$. On montre facilement que $P \mapsto \max_{0\leq k\leq d} |a_k|$ où $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$. Le fait que (X_n) converge dans $\mathbb{R}^{d+1}$ signifie donc que (P_n) converge dans $\mathbb{R}_d[X]$ pour la norme précédente.
Remarque. Comme $\mathbb{R}^{d+1}$ et $\mathbb{R}_d[X]$ sont isomorphes, la convergence de (X_n) entraîne automatiquement la convergence de (P_n). Il n'est pas nécessaire de parler de normes.

Solution 2

Soient $a_0, \dots, a_p$ des éléments distincts de $[a,b]$ et notons $L_0, \dots, L_p$ les polynômes de Lagrange associés ces $p+1$ points. Il existe donc des suites $(\lambda_{0,n}), \dots (\lambda_{p,n})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \sum_{k=0}^{p} \lambda_{k,n} L_k$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, $P_n(a_k) = \lambda_{k,n}$. La convergence simple de (P_n) vers f montre que pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, $(\lambda_{k,n})$ converge vers $\lambda_k = f(a_k)$. On en déduit que (P_n) converge simplement vers $\sum_{k=0}^{p} \lambda_k L_k$, ce qui prouve que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à p.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a par inégalité triangulaire :

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |\lambda_{k,n} - \lambda_k||L_k(x)|$$

Les polynômes de Lagrange L_k étant continus sur le segment $[a,b]$, ils y sont bornés. Posons $M = \max_{0\leq k\leq p} \|L_k\|_\infty$. On a donc

$$\|P_n - f\|_\infty \leq M \sum_{k=0}^{n} |\lambda_{k,n} - \lambda_k|$$

Comme chacune des suites $(\lambda_{k,n})$ converge vers λ_k, la suite (P_n) converge uniformément vers f.

Solution 3

Posons $f_n = f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (f_n') est une suite extraite de la suite (f_n) : elle converge donc uniformément vers φ. Mais puisque (f_n) converge uniformément et donc a fortiori simplement vers φ, le théorème de dérivabilité des suites de fonctions nous assure que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\varphi' = \varphi$. On en déduit que φ est colinéaire à la fonction exponentielle.
Réciproquement, si $f = \lambda \exp$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite $(f^{(n)})$ converge uniformément vers $\lambda \exp$ puisqu'elle est constante.

Solution 4

1. Soit $x \in \pi\mathbb{Z}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 0$.
   Soit maintenant $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Alors $|\cos x| < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} n\cos^n x = 0$ puis $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
   Finalement la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

2. Posons $x_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
D'une part, $n\sin(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'autre part, $\cos^n(x_n) = e^{n\ln(\cos(1/n))}$ et

$$\ln(\cos(1/n)) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(1 + o(1/n)) = \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n))$$

de sorte que $\cos^n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = 1 \neq 0$ donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément.
Soit maintenant $a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Alors pour tout $x \in \left[a, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$|f_n(x)| \leq n\cos^n(a)\sin(a)$$

donc

$$|f_n|_\infty \leq n\cos^n(a)\sin(a)$$

(c'est même une égalité) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n| = 0$ puisque $0 \leq \cos a < 1$. Ainsi (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\left[a, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

3. Méthode n°1
Remarquons tout d'abord que f_n est positive et que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{n}{n+1}\left[\cos^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{n}{n+1}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme g est continue en 0, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|g(x) - g(0)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \in [0, \alpha]$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)|g(t) - g(0)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{\alpha} f_n(t)|g(t) - g(0)|\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)|g(t) - g(0)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{\alpha} f_n(t)\varepsilon\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\|g - g(0)\|_\infty\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\varepsilon\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\|g - g(0)\|_\infty\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{n\varepsilon}{2(n+1)} + \|g - g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|g - g(0)\|_\infty \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Comme (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur le segment $\left[\alpha, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Il existe donc $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq \mathrm{N}$, $\|g - g(0)\|_\infty \displaystyle\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon$. On en déduit que pour $n \geq \mathrm{N}$,

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\,\mathrm{d}t = 0$$

Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(0)\ \mathrm{d}t = \frac{ng(0)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(0)$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\ \mathrm{d}t = g(0)$$

Méthode n°2
L'application $t \mapsto \cos^{n+1} t$ est bijective de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$, strictement décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ donc, par changement de variable

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\ \mathrm{d}t = \frac{n}{n+1} \int_0^1 f(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))\ \mathrm{d}u$$

La fonction $u \mapsto f(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))$ converge simplement sur $]0, 1]$ vers la fonction constante égale à $f(0)$ car f est continue en 0. De plus, g est bornée $[0, 1]$ (continue sur un segment) donc $u \mapsto g(\arccos(\sqrt[n+1]{u}))$ est dominée par une constante (clairement intégrable sur le segment $[0, 1]$). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g(\sqrt[n+1]{u})\ \mathrm{d}u = \int_0^1 g(0)\ \mathrm{d}u = g(0)$$

On en conclut immédiatement que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)\ \mathrm{d}t = g(0)$$

Solution 5

---

1. Posons $g_n = f - f_n$. Alors la suite (g_n) est positive, décroissante et converge simplement vers la fonction nulle. Puisque g_n est continue sur le segment $[a, b]$, elle y admet un maximum M_n (positif) atteint en $\alpha_n \in [a, b]$. Puisque la suite (α_n) est à valeurs dans le segment $[a, b]$, on peut en extraire une suite $(\alpha_{\varphi(n)})$ convergeant vers $\alpha \in [a, b]$ d'après le théorème de Bozano-Weierstrass.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. La suite $(g_n(\alpha))$ converge vers 0 donc il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $g_\mathrm{N}(\alpha) \leq \varepsilon$. Soit un entier $n \geq \mathrm{N}$. Alors $g_n \leq g_\mathrm{N}$ et notamment $g_n(\alpha_n) \leq g_\mathrm{N}(\alpha_n)$. Ainsi
$$\mathrm{M}_n = g_n(\alpha_n) = g_\mathrm{N}(\alpha) + (g_n(\alpha_n) - g_\mathrm{N}(\alpha_n)) + (g_\mathrm{N}(\alpha_n) - g_\mathrm{N}(\alpha)) \leq \varepsilon + (g_\mathrm{N}(\alpha_n) - g_\mathrm{N}(\alpha))$$
Puisque $\varphi(n) \geq n \geq \mathrm{N}$ on a également
$$\mathrm{M}_{\varphi(n)} \leq \varepsilon + (g_\mathrm{N}(\alpha_{\varphi(n)}) - g_\mathrm{N}(\alpha))$$
Puisque la suite $(\alpha_{\varphi(n)})$ converge vers α et que g_N est continue, il existe $\mathrm{N}' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq \mathrm{N}'$, $g_\mathrm{N}(\alpha_{\varphi(n)}) - g_\mathrm{N}(\alpha) \leq \varepsilon$.
On en déduit que pour $n \geq \max\{\mathrm{N}, \mathrm{N}'\}$, $0 \leq \mathrm{M}_{\varphi(n)} \leq 2\varepsilon$. Ceci signifie que la suite $(\mathrm{M}_{\varphi(n)})$ converge vers 0.
Par ailleurs, puisque la suite (g_n) est décroissante, la suite (M_n) est également décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge. On vient de voir que 0 est une valeur d'adhérence donc (M_n) converge vers 0. Puisque $0 \leq f - f_n \leq \mathrm{M}_n$, (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

2. On peut déjà affirmer que f est croissante en tant que limite simple d'une suite de fonctions croissantes. Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et un entier naturel non nul $p \geq \dfrac{f(b) - f(a)}{\varepsilon}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires et la croissance de f, il existe des entiers $a_0, \dots, a_p$ tels que $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_p = b$ et $f(a_k) = f(a) + k\dfrac{f(b) - f(a)}{p}$. On a donc $f(a_{k+1}) - f(a_k) = \dfrac{f(b) - f(a)}{p} \leq \varepsilon$.
Comme f est limite simple de la suite (f_n), pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, il existe $\mathrm{N}_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq \mathrm{N}_k$, $|f_n(a_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon$.
Posons $\mathrm{N} = \max\{\mathrm{N}_0, \dots, \mathrm{N}_k\}$ et donnons-nous un entier $n \geq \mathrm{N}$.
Soit $x \in [a, b]$. Il existe $k \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $x \in [a_k, a_{k+1}]$. Par croissance de f et f_N
$$f_n(x) - f(x) \leq f_n(a_{k+1}) - f(a_k) = f_n(a_{k+1}) - f(a_{k+1}) + f(a_{k+1}) - f(a_k) \leq 2\varepsilon$$
et
$$f(x) - f_n(x) \leq f(a_{k+1}) - f_n(a_k) = f(a_{k+1}) - f(a_k) + f(a_k) - f_n(a_k) \leq 2\varepsilon$$
Finalement, $|f(x) - f_n(x)| \leq 2\varepsilon$ pour tout $x \in [a, b]$ i.e. $\|f - f_n\|_\infty \leq 2\varepsilon$. La suite (f_n) converge donc uniformément vers f.

Solution 6

Pour simplifier, posons $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Il est classique de montrer que (u_n) converge vers e^{-1}. Montrons alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{u_n}^1 x^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{e^{-1}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\left|\int_{u_n}^1 x^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{e^{-1}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| &\le \left|\int_{u_n}^1 x^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{e^{-1}}^1 x^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{e^{-1}}^1 x^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{e^{-1}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \left|\int_{u_n}^{e^{-1}} x^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \int_{e^{-1}}^1 (1 - x^{\frac{1}{n}})|f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\le |e^{-1} - u_n|\|f\|_\infty + (1 - e^{-\frac{1}{n}}) \int_{e^{-1}}^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Il suffit alors de faire tendre n vers $+\infty$ pour obtenir le résultat escompté.

Solution 7

Remarquons déjà que $f([0,1]) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et que les seuls points fixes de f sont 0 et $\frac{1}{2}$.
Etudions la convergence simple. Tout d'abord, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit maintenant $x \in]0,1[$ et posons $u_n = f_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Puisque $f([0,1]) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $0 \le u_n \le \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = u_n(1 - 2u_n) \ge 0$$

donc (u_n) est croissante à partir du rang 1. La suite (u_n) converge donc en vertu du théorème de convergence monotone. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que f est continue sur $[0,1]$, (u_n) converge vers un point fixe ℓ de f. Mais par croissance de (u_n) à partir du rang 1, $\ell \ge u_1 = 2x(1-x) > 0$ donc $\ell = \frac{1}{2}$.

En conclusion, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $g : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \{0,1\} \\ \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$.

On montre aisément par récurrence que les f_n sont continues sur $[0,1]$ mais g n'est pas continue sur $[0,1]$ donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Solution 8

Convergence simple.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in \pi\mathbb{Z}$, alors $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Si $x \notin \pi\mathbb{Z}$, alors $|\cos x| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ par croissances comparées. La suite (f_n) converge donc simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
Convergence uniforme. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \exp\left(n \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right) \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Or $\sin\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et

$$\cos\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$\ln\left(n\cos\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$$

puis

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right) = e^{-\frac{1}{2}}$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-\frac{1}{2}} \ne 0$$

Donc (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Solution 9

Convergence simple.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, alors $f_n(x)=0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$. Si $x \notin \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, alors $|\sin x|<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$. La suite (f_n) converge donc simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
Convergence uniforme. Remarquons que les $|f_n|$ sont paires et π-périodiques. Ainsi $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \|f_n\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$. On peut donc se contenter d'étudier la convergence uniforme sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. f_n est clairement dérivable sur cet intervalle et

$$\forall x \in [0,\pi],\ f_n'(x)=\sin^{n-1}(x)(n\cos^2 x-\sin^2 x)=\sin^{n-1}(x)\left(n-(n+1)\sin^2 x\right)$$

Ainsi f_n atteint son maximum sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ en $x_n=\arcsin\sqrt{\frac{n}{n+1}}$. De plus, f_n est positive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. On rappelle que $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$ pour $x\in[-1,1]$.. On en déduit que

$$\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)=\sin^n x_n \cdot \frac{1}{\sqrt{1n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n\|_\infty=0$ et (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Solution 10

---

1. Soit $x\in[0,1]$. On a bien $0\leq P_0(x)=0\leq\sqrt{x}$. Supposons que $0\leq P_n(x)\leq\sqrt{x}$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$. Alors $x-P_n(x)^2\geq 0$ donc $P_{n+1}(x)\geq P_n(x)\geq 0$ et
$$\sqrt{x}-P_{n+1}(x)=\left(\sqrt{x}-P_n(x)\right)\left(1-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+P_n(x)\right)\right)\geq 0$$
donc $P_{n+1}(x)\leq\sqrt{x}$. On conclut par récurrence.

2. On reprend l'inégalité précédente
$$\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq\sqrt{x}-P_{n+1}(x)=\left(\sqrt{x}-P_n(x)\right)\left(1-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+P_n(x)\right)\right)\leq\left(\sqrt{x}-P_n(x)\right)\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$
On prouve alors aisément par récurrence que
$$0\leq\sqrt{x}-P_n(x)\leq\left(\sqrt{x}-P_0(x)\right)\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n=\sqrt{x}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

3. On pose $g_n : t\mapsto t\left(1-\frac{t}{2}\right)^n$. L'étude de la fonction g_n montre qu'elle atteint son maximum en $\frac{2}{n+1}$. Ainsi
$$\forall x\in[0,1],\ 0\leq\sqrt{x}-P_n(x)\leq g_n(\sqrt{x})\leq g_n\left(\frac{2}{n+1}\right)=\frac{2}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\leq\frac{2}{n+1}$$
On en déduit que (P_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$.

Solution 11

---

1. La fonction f_n est clairement positive et une étude de fonctions montre qu'elle admet un maximum en n. Ainsi
$$\forall x\in[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq f_n(x)\leq f_n(n)=\frac{n^ne^{-n}}{n!}$$
On rappelle la formule de Stirling
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}$$
Ainsi
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^ne^{-n}}{n!}=0$$
donc (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

2. En posant $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\, \mathrm{d}t$, une intégration par parties montre que $\mathrm{I}_{n+1} = \mathrm{I}_n$ donc $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_0 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 1$. Evidemment, $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t = 0$.

   Remarque. On ne peut pas ici appliquer le théorème d'interversion limite/intégrale car la convergence uniforme n'a pas lieu sur un segment.

Solution 12

On a clairement $f_n(1) = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(1) = 0$. Si $x \in [0,1[$, la suite $(f_n(x))$ est géométrique de raison $x \in [0,1[$ donc converge vers 0. Ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
De plus, f_n est positive sur $[0,1]$ et atteint son maximum en $\frac{n}{n+1}$ (étude facile). Ainsi

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^\alpha}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

On montre facilement que $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\alpha-1}e^{-1}$. Ainsi (f_n) converge uniformément si et seulement si $\alpha < 1$.

Solution 13

1. Remarquons déjà que si $x < 0$, $\ln(1+nx)$ n'est pas définie à partir d'un certain rang. Ensuite $f_n(0) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$. Supposons donc $x > 0$. Par concavité de ln, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Or $\frac{nx}{1+n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{nx}$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Finalement, (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

2. Posons $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. (x_n) est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $f_n(x_n) = \frac{\ln 2}{2}$. Notamment, $(f_n(x_n))$ ne converge pas vers 0. La suite (f_n) ne converge donc pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Solution 14

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après l'énoncé

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f(2^n x) - 2f(2^{n-1}x)| \leq \mathrm{M}$$

   puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |h_n(x) - h_{n-1}(x)| \leq \frac{\mathrm{M}}{2^n}$$

   Notamment,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|h_n - h_{n-1}\|_\infty \leq \frac{\mathrm{M}}{2^n}$$

   On en déduit que la série de fonctions $\sum h_n - h_{n-1}$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Comme il s'agit d'une série télescopique, la suite (h_n) converge uniformément vers une fonction h sur $\mathbb{R}$. Comme chacune des fonctions h_n est continue sur $\mathbb{R}$, h l'est également.

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)| \leq \mathrm{M}$$

   puis

$$|h_n(x+y) - h_n(x) - h_n(y)| \leq \frac{\mathrm{M}}{2^n}$$

   Par convergence simple de (h_n) vers h, on obtient bien $h(x+y) = h(x) + h(y)$.

3. On montre classiquement que f est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Par inégalité triangulaire,

$$|h_{n+1}(x) - f(x)| \leq |h_{n+1}(x) - h_n(x)| + |h_n(x) - f(x)|$$

Or on a vu à la première question que

$$|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \frac{\mathrm{M}}{2^{n+1}}$$

donc

$$|h_{n+1}(x) - f(x)| \leq \frac{\mathrm{M}}{2^{n+1}} + |h_n(x) - f(x)|$$

Autrement dit

$$|h_{n+1}(x) - f(x)| - |h_n(x) - f(x)| \leq \frac{\mathrm{M}}{2^{n+1}}$$

Comme la suite (h_n) converge simplement vers h, la série télescopique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |h_{n+1}(x) - f(x)| - |h_n(x) - f(x)|$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h_{n+1}(x) - f(x)| - |h_n(x) - f(x)| = |h(x) - f(x)| - |h_0(x) - f(x)| = |h(x) - f(x)|$$

Ainsi

$$|h(x) - f(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{M}}{2^{n+1}} = \mathrm{M}$$

La fonction $h - f$ est donc bien bornée.

5. Ainsi $f = h + (f - h)$ est bien la somme d'une homothétie et d'une fonction bornée.

De plus, si $f(x) = \lambda x + b(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et b bornée sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} = \lambda + \frac{b(x)}{x}$ de sorte que $\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Ainsi λ est uniquement déterminé et, par suite, b également.

Séries de fonctions

Solution 15

---

1. Posons $f_n(x) = \frac{nx^{2n-1}}{1 - x^{2n}}$ pour $n \geq 1$. Remarquons que les f_n sont définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

- Si $|x| > 1$, $|f_n(x)| \geq \frac{n}{|x|}$. Ainsi $|f_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série $\sum\limits_{n\geq1} f_n(x)$ diverge grossièrement.
- Si $|x| < 1$, $|f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} n|x|^{2n-1}$. Or la série $\sum\limits_{n\geq1} n|x|^{2n-1}$ converge d'après le critére de d'Alembert. La série $\sum\limits_{n\geq1} f_n(x)$ converge donc absolument.

La série $\sum\limits_{n\geq1}$ converge donc simplement sur $\mathrm{D} =]-1, 1[$ qui est le domaine de définition de f.

2. Pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et pour tout $x \in \mathrm{D}$,

$$f_n'(x) = \frac{nx^{2n-2}\left(2n - 1 + x^{2n}\right)}{\left(1 - x^{2n}\right)^2}$$

Soit $a \in]0, 1[$. Pour $x \in]-a, a[$,

$$|f_n'(x)| \leq \frac{2n^2a^{2n-2}}{1 - a^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^2a^{2n-2}$$

Or la série $\sum\limits_{n\geq1} 2n^2a^{2n-2}$ converge d'après le critère de d'Alembert. On en déduit que $\sum\limits_{n\geq1} \frac{2n^2a^{2n-2}}{1 - a^{2n}}$ converge puis que $\sum\limits_{n\geq1} f_n'$ converge normalement sur $[-a, a]$. Puis que $\sum\limits_{n\geq1} f_n$ converge simplement sur $[-a, a]$, on en déduit que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$. Ceci étant valable pour tout $a \in]0, 1[$, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$.

3. On a facilement $f_n' \geq 0$ sur D pour tout $n \geq 1$. De plus f_n' ne s'annule qu'en 0. On en déduit que $S' \geq 0$ sur D et ne s'annule qu'en 0. Ainsi S est strictement croissante sur D.

4. Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1[$, $f_n(x) \geq x^{2n-1}$. Or $\sum_{n\geq 1} x^{2n-1} = \frac{x}{1-x^2} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi $\lim_{1^-} S = +\infty$. Toutes les f_n étant impaires, S est également impaire et on en déduit $\lim_{-1^+} S = -\infty$.

Solution 16

1. On remarque tout d'abord que les f_n sont définies sur $]-1,+\infty[$. On calcule un développement limité de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \frac{1}{n+1+x} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{n+1+x} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \left(-\frac{1}{4} - \frac{x}{2}\right)\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

Comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge, on en déduit que $\sum_{n\geq 1} f_{n+1} - f_n$ converge simplement sur $]-1,+\infty[$.

2. La convergence simple de la série $\sum_{n\geq 1} f_{n+1} - f_n$ équivaut à la convergence simple de la suite (f_n) vers une fonction f. Notons f sa limite et posons $g_n = f_{n+1} - f_n$. g_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour $x \in]-1,+\infty[$:

$$g_n'(x) = -\frac{1}{2(n+1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

De plus, pour $x \in]-1,+\infty[$

$$|g_n'(x)| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

ce qui prouve que $\sum_{n\geq 1} g_n'$ converge normalement. Comme $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge simplement vers une fonction g, on en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$. De plus, en utilisant un télescopage, $g = f - f_1$. Comme f_1 est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Comme $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge normalement, cette série converge uniformément. Par conséquent, la suite (f_n) converge uniformément. Par conséquent :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$$

Or, par une intégration facile :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(t)\,dt &= \left(2\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) - 2\sqrt{n} \\ &= 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - 2 \end{aligned}$$

On en déduit que $\int_0^1 f(t)\,dt = -2$.

Solution 17

Posons $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On montre classiquement que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$F_n(x) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} a_n f_n(x)$ est triviale. Supposons donc $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|F_n(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$$

Par une transformation d'Abel, on trouve

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) = a_n F_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k-1})F_k(x)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$|a_n F_n(x)| \leq \frac{a_n}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$$

La suite $(a_n F_n(x))$ converge donc vers 0 puisque (a_n) converge vers 0. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|(a_n - a_{n-1})F_n(x)| \leq \frac{a_n - a_{n-1}}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$$

La série télescopique $\sum_{n\geq 1} a_n - a_{n-1}$ converge puisque (a_n) converge. La série $\sum_{n\geq 1}(a_n - a_{n-1})F_n(x)$ converge donc absolument. La suite de ses sommes partielles, à savoir la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k-1})F_k(x)$, converge donc.

La transformation d'Abel montre donc que la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)$ converge i.e. la série $\sum_{n\geq 1} a_n f_n(x)$ converge.

On en conclut la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 1} a_n f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Solution 18

Supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Alors la suite de terme général. $\sum_{k=n+1}^{2n} a_k f_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. En particulier,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} a_k f_k\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 0$$

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\frac{k\pi}{2n} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et la fonction sin est concave sur cet intervalle donc

$$f_k\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \sin\frac{k\pi}{2n} \geq \frac{2}{\pi}\cdot\frac{k\pi}{2n} = \frac{k}{n}$$

Par ailleurs, la suite (a_n) est positive donc

$$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k f_k\left(\frac{\pi}{2n}\right) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{ka_k}{n}$$

Par décroissance de la suite (a_n),

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{ka_k}{n} \geq \frac{(n+1)a_{n+1}}{2} \geq \frac{na_n}{2} \geq 0$$

Finalement,

$$0 \leq na_n \leq 2\sum_{k=n+1}^{2n} a_k f_k\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

donc la suite (na_n) converge vers 0 par encadrement.

Réciproquement, supposons que la suite (na_n) converge vers 0. Montrons d'abord la convergence simple. Il est clair que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n f_n$ converge simplement en tout point de $2\pi\mathbb{Z}$. Donnons-nous maintenant un réel $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On va alors utiliser une transformation d'Abel.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k f_k &= \sum_{k=1}^{n} a_k(S_k - S_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k S_k - \sum_{k=n-1}^{p-1} a_{k+1} S_k \\ &= a_{n+1} S_n + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) S_k\end{aligned}$$

On calcule alors classiquement

$$S_n(x) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2} \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

On en déduit que $|S_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} S_n(x) = 0$$

et, comme (a_n) est décroissante,

$$0 \leq |(a_n - a_{n+1}) S_n(x)| \leq \frac{a_n - a_{n+1}}{|\sin(x/2)|}$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n - a_{n+1}$ converge car (a_n) converge donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (a_n - a_{n+1}) S_n(x)$ est absolument convergente donc convergente. La suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) S_k(x)$ converge donc. D'après la transformation d'Abel précédemment écrite, la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)$ converge également. Autrement dit, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n f_n(x)$ converge. Finalement, la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On peut alors poser $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k f_k$. A nouveau, par transformation d'Abel

$$\sum_{k=n+1}^{p} a_k f_k = \sum_{k=1}^{p} a_k f_k - \sum_{k=1}^{n} a_k f_k = a_{p+1} S_p - a_{n+1} S_n + \sum_{k=n+1}^{p} (a_k - a_{k+1}) S_k$$

puis, en faisant tendre p vers $+\infty$

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1}) S_k - a_{n+1} S_n$$

car pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(S_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée et (a_p) converge vers 0.

On a déjà vu que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z},\ |(a_k - a_{k+1}) S_k(x)| \leq \frac{a_k - a_{k+1}}{|\sin(x/2)|}$$

et la série télescopique $\sum a_n - a_{n+1}$ converge puisque la suite (a_n) converge vers 0. On a donc par inégalité triangulaire

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z},\ |R_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1}) + a_{n+1} |S_n(x)| \leq \frac{2a_{n+1}}{|\sin(x/2)|}$$

Comme les f_n sont 2π-périodiques, on va supposer que $x \in]0, \pi]$. Par positivité et concavité de sin sur $[0, \pi/2]$,

$$|\sin(x/2)| = \sin(x/2) \geq \frac{x}{\pi}$$

Finalement,

$$\forall x \in]0, \pi],\ |R_n(x)| \leq \frac{2\pi a_{n+1}}{x}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme (na_n) converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $na_n \leq \varepsilon$ pour tout entier $n \geq N$.Fixons alors $x \in]0, \pi]$ et posons $p = \lfloor \pi/x \rfloor$. Soit un entier $n \geq N$.

- Si $n \geq \max\{p, \mathrm{N}\}$, alors
$$|\mathrm{R}_n(x)| \leq \frac{2\pi a_{n+1}}{x} \leq \frac{2\pi a_{p+1}}{x} \leq \frac{2(p+1)a_{p+1}}{\leq} 2\varepsilon$$
- Sinon, $\mathrm{N} \leq n < p$. Dans ce cas,
$$\begin{aligned}
|\mathrm{R}_n(x)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{p} a_k \sin(kx) + \mathrm{R}_p(x)\right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{p} a_k |\sin(kx)| + |\mathrm{R}_p(x)| \qquad \text{par inégalité triangulaire} \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{p} a_k kx + |\mathrm{R}_p(x)| \qquad \text{car } |\sin(u)| \leq |u| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{p} k a_k x + 2\varepsilon \qquad \text{d'après le cas précédent} \\
&\leq (p-n)x\varepsilon + 2\varepsilon \qquad \text{car } ka_k \leq \varepsilon \text{ pour } k \geq \mathrm{N} \\
&\leq px\varepsilon + 2\varepsilon \leq (\pi+2)\varepsilon \qquad \text{par définition de } p
\end{aligned}$$

Dans tous les cas, $|\mathrm{R}_n(x)| \leq (\pi + 2)\varepsilon$ pour tout $x \in]0, \pi]$. Cette inégalité est encore vraie de manière évidente lorsque $x = 0$ et donc finalement vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ puisque R_n est 2π-périodique et impaire. Ceci montre que (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle i.e. que $\sum a_n f_n$ converge uniformément.

Solution 19

---

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2e^{-nx}$ et $\sum e^{-nx}$ est une série à termes positifs convergente (série géométrique de raison $e^{-x} \in [0, 1[$). Ainsi la série $\sum \dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$ converge. f est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais f est manifestement impaire donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

On utilise ensuite une comparaison à une intégrale. Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}(xt)}$ est décroissante de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(xt)} \leq f(x) \leq \frac{1}{\mathrm{sh}\, x} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(xt)}$$
Une primitive de $\dfrac{1}{\mathrm{sh}}$ étant $t \mapsto \ln(\mathrm{th}(x/2))$, on trouve
$$-\frac{1}{x}\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leq f(x) \leq \frac{1}{\mathrm{sh}\, x} - \frac{1}{x}\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$
On montre aisément que $\ln\left(\mathrm{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) \underset{x\to0^+}{\sim} \ln x$ et on sait que $\dfrac{1}{\mathrm{sh}\, x} \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$. Comme $\dfrac{1}{x} \underset{x\to0^+}{=} o\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$, on en déduit que
$$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{x}$$
Comme f est impaire, on peut affirmer que
$$f(x) \underset{x\to0}{\sim} -\frac{\ln|x|}{x}$$

Remarque. On peut également remarquer que pour $x \in]0, 1]$, par le changement de variable $u = xt$,
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(xt)} = \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{sh}\, u} = \frac{1}{x}\int_x^1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{sh}\, u} + \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{sh}\, u}$$
Mais $\dfrac{1}{\mathrm{sh}\, u} \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u}$, $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u}$ diverge, donc
$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{sh}\, u} \underset{x\to0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln x$$

On en déduit donc que
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh}(xt)} \underset{x\to 0^+}{=} -\frac{\ln x}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$
et on peut alors à nouveau conclure que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\dfrac{\ln x}{x}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4e^{-2nx}$ et $\sum e^{-2nx}$ est une série à termes positifs convergente (série géométrique de raison $e^{-2x} \in [0,1[$). Ainsi la série $\sum \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$ converge. g est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais g est manifestement impaire donc g est définie sur $\mathbb{R}^*$.
Posons ensuite $u_n(x) = \dfrac{x^2}{\operatorname{sh}^2(nx)}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_0 u_n = \dfrac{1}{n^2}$. De plus, sh est convexe sur $\mathbb{R}_+$ donc $\operatorname{sh} x \geq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et donc $\dfrac{x^2}{\operatorname{sh}^2(nx)} \leq \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et même pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ (parité). On en déduit que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^*$. On peut alors utiliser le théorème d'interversion limite/série
$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
ou encore $\lim\limits_{x\to 0} x^2 g(x) = \pi^2/6$. Par conséquent,
$$g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi^2}{6x^2}$$

Solution 20

---

1. On raisonne par récurrence. Tout d'abord, g_0 est bornée. Si on suppose g_n bornée pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors
$$\forall x \in [0,1],\ |g_{n+1}(x)| \leq \int_0^x |g_n(1-t)|\ \mathrm{d}t \leq \int_0^x \|g_n\|_\infty\ \mathrm{d}t = x\|g_n\|_\infty \leq \|g_n\|_\infty$$
Notamment, g_{n+1} est bornée. On a donc montré par récurrence que g_n est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En fait, on a montré plus précisément que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $|g_{n+1}(x)| \leq x\|g_n\|_\infty$. Ainsi pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$|g_{n+1}(x)| \leq \int_0^x |g_n(1-t)|\ \mathrm{d}t \leq \int_0^x (1-t)\|g_{n-1}\|_\infty\ \mathrm{d}t \leq \int_0^1 (1-t)\|g_{n-1}\|_\infty\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\|g_{n-1}\|_\infty$$
Par conséquent, $\|g_{n+1}\|_\infty \leq \dfrac{1}{2}\|g_{n-1}\|_\infty$.

2. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|g_{n+1}\|_\infty \leq \dfrac{1}{2}\|g_{n-1}\|_\infty$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|g_{2n}\|_\infty \leq \dfrac{1}{2^n}\|g_0\|_\infty$ et $\|g_{2n+1}\|_\infty \leq \dfrac{1}{2^n}\|g_1\|_\infty$. On vérifie alors qu'en prenant $\mathrm{K} = \max(\|g_0\|_\infty, \sqrt{2}\|g_1\|_\infty)$, on a $\|g_n\|_\infty \leq \dfrac{\mathrm{K}}{\sqrt{2}^n}$.

Remarque. On calcule aisément $\|g_0\|_\infty = \|g_1\|_\infty = 1$ de sorte que $\mathrm{K} = \sqrt{2}$.

Comme la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{2}^n}$ est une série géométrique convergente, il en est de même de la série $\sum \|g_n\|_\infty$. Par conséquent, la série $\sum g_n$ converge normalement sur $[0,1]$ et donc simplement. La fonction G est bien définie sur $[0,1]$.
Tout d'abord, g_0 est dérivable de dérivée nulle. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est également dérivable d'après le théorème fondamental de l'analyse et $g_n'(x) = g_{n-1}(1-x)$. La série $\sum g_n'$ converge donc normalement et donc uniformément. On en déduit que G est dérivable et que
$$\forall x \in [0,1],\ \mathrm{G}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_{n-1}(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(1-x) = \mathrm{G}(1-x)$$
Cette égalité montre à nouveau que G′ est dérivable et que
$$\forall x \in [0,1],\ \mathrm{G}''(x) = -\mathrm{G}'(1-x) = -\mathrm{G}(x)$$

3. Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $G = \alpha\cos + \beta\sin$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(0) = 0$ donc $G(0) = g_0(0) = 1$. De plus, $G'(1) = G(0) = 1$. On en déduit que $\alpha = 1$ et $-\alpha\sin(1) + \beta\cos(1) = 1$ puis que $\beta = \dfrac{1+\sin(1)}{\cos(1)}$.

Solution 21

1. Supposons qu'il existe une telle suite. Notamment
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = 2$$
On en déduit notamment que $a_n^2 \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^4 = 4$$
de sorte que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n^2 - a_n^4 = 0$$
ou encore
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2(2 - a_n^2) = 0$$
Notre remarque initiale montre qu'il s'agit d'une somme de termes positifs. Par conséquent, $a_n = 0$ ou $a_n^2 = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = 2$, il existe un unique $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_p^2 = 2$ et $a_n = 0$ pour tout entier naturel $n \neq p$. Mais alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^6 = a_p^6 = 2^3 = 8 \neq 6$$
On a donc montré par l'absurde qu'il n'existe pas de suite vérifiant la condition de l'énoncé.

2. Supposons qu'il existe une telle suite (a_n). Alors
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{+\infty} k^2 a_n^k = 1$$
Puisque
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = \frac{1}{4}$$
on a $a_n^2 \leq \frac{1}{4}$ i.e. $|a_n| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Posons $\varphi_n(k) = k^2 a_n^k$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \geq 2$
$$|\varphi_n(k)| = k^2 |a_n|^{k-2} |a_n|^2 \leq \frac{k^2}{2^{k-2}} a_n^2$$
La suite $(k^2/2^{k-2})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc est bornée. On en déduit qu'il existe M tel que pour tout $^n \in \mathbb{N}$ et tout $k \geq 2$
$$|\varphi_n(k)| \leq \mathrm{M} a_n^2$$
Comme la série $\sum_{a_n^2}$ converge, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$ converge normalement sur $\mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to+\infty} \varphi_n(k) = 0$ par la majoration précédente. Par le théorème de la double limite,
$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} k^2 a_n^k = 0$$
ce qui contredit le fait que
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{+\infty} k^2 a_n^k = 1$$

Solution 22

1. Posons $f_n : t \mapsto \ln(1+e^{nt})$. Si $t \in \mathbb{R}_+$, alors la suite $(f_n(t))$ ne converge pas vers 0 donc la série $\sum f_n(t)$ diverge. Si $t \in \mathbb{R}_-^*$, alors $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-nt}$ et la série $\sum e^{-nt}$ est une série géométrique à termes positifs convergente (de raison $e^{-t} \in]0,1[$). Par conséquent, la série $\sum f_n(t)$ converge.
Finalement, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.

2. On sait que $0 \leq \ln(1+u) \leq u$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$0 \leq f_n(t) \leq e^{nt}$$
Fixons $a \in \mathbb{R}_-^*$. Alors pour tout $t \in]-\infty, a]$,
$$0 \leq f_n(t) \leq e^{nt} \leq e^{na}$$
et donc $\|f_n\|_\infty \leq e^{na}$ où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme uniforme sur $]-\infty,a]$. A nouveau, la série géométrique $\sum e^{na}$ converge donc la série $\sum f_n$ converge normalement sur $]-\infty,a]$. A fortiori, elle converge uniformément sur $]-\infty,a]$. Par ailleurs, f_n admet pour limite 0 en $-\infty$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\ln 2$ si $n=0$. Le théorème d'interversion limite/série permet alors d'affirmer que
$$\lim_{-\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{-\infty} f_n = \ln 2$$

3. En étudiant la fonction $u \mapsto \ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2}$, on prouve que
$$\forall u \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+u) \geq u - \frac{u^2}{2}$$
Ainsi
$$\forall t \in \mathbb{R}_-^*,\ f_n(t) \geq e^{nt} - \frac{1}{2}e^{2nt}$$
Par conséquent,
$$\forall t \in \mathbb{R}_-^*,\ f(t) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{nt} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{2nt} = \frac{1}{1-e^t} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{2t}} = \frac{1+2e^t}{2(1-e^{2t})}$$
Puisque $\lim_{t\to 0^-} \frac{1+2e^t}{2(1-e^{2t})} = +\infty$, $\lim_{0^-} f = +\infty$.

Solution 23

1. Soit $t \in]0,1[$. Puisque $-t^b \in]-1,0[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-t^b)^n = \frac{1}{1+t^b}$. On en déduit que
$$\frac{t^{a-1}}{1+t^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$$
avec $u_n(t) = (-1)^n t^{a-1+nb}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $a-1+nb > -1$, $|u_n|$ est intégrable sur $]0,1]$ et
$$\int_0^1 |u_n|(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 t^{a-1+nb} = \frac{1}{a+nb}$$
La série $\sum \frac{1}{a+nb}$ diverge. On ne peut donc pas apppliquer le théorème d'intégration terme à terme.

3. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{S_N}(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (-1)^n t^{a-1+nb}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^{a-1} \cdot \frac{1-(-1)^{\mathrm{N}+1}t^{(\mathrm{N}+1)b}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(somme des termes d'une suite géométrique)} \\
&= \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t - (-1)^{\mathrm{N}+1}\int_0^1 \frac{t^{a-1+(\mathrm{N}+1)b}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{a-1+(\mathrm{N}+1)b}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{a-1+(\mathrm{N}+1)b}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a+(\mathrm{N}+1)b}$$

Ainsi, par théorème des gendarmes

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{a-1+(\mathrm{N}+1)b}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = 0$$

de sorte que

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \int_0^1 \mathrm{S_N}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$$

4. On déduit de la question précédente que

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$$

5. D'après la question précédente, en prenant $a=1$ et $b=3$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$$

On décompose $\dfrac{1}{1+\mathrm{X}^3}$ en éléments simples. Il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\mathrm{F} = \frac{1}{1+\mathrm{X}^3} = \frac{1}{\mathrm{X}+1}\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1 = \frac{a}{\mathrm{X}+1} + \frac{b\mathrm{X}+c}{\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1}$$

On trouve $a = ((\mathrm{X}+1)\mathrm{F})(-1) = \frac{1}{3}$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{F}(x) = 0 = a+b$ donc $b = -\frac{1}{3}$. Enfin, $\mathrm{F}(0) = 1 = a+c$ donc $c = \frac{2}{3}$. On peut réécrire sous la forme

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\mathrm{X}+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{X}-2}{\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\mathrm{X}+1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2\mathrm{X}-1}{\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1}$$

On calcule successivement

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} &= [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2) \\
\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t &= \left[\ln(t^2-t+1)\right]_0^1 = 0 \\
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Solution 24

1. Si $x \leq 0$, la suite $(f_n(x))$ ne tend pas vers 0 donc $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x > 0$, on vérifie que $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum f_n(x)$ diverge. On en déduit que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.

2. Fixons $a \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f_n est décroissante et positive, $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a)$. A nouveau, la série $\sum f_n(a)$ converge donc la série $\sum f_n$ converge normalement et, par suite, uniformément sur $[a,+\infty[$. Comme les f_n sont clairement continues sur $[a,+\infty[$, f est continue sur $[a,+\infty[$. Par caractère local de la continuité, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. On a montré que $\sum f_n$ convergeait uniformément sur $[1,+\infty[$ par exemple. Remarquons que $\lim_{n\to+\infty} f_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On peut donc appliquer le théorème de la double limite
$$\lim_{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n = 1$$

Solution 25

1. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f_{n+1}' = f_n$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ est que $f_n^{(k)} = f_{n-k}$. Remarquons également que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(a) = 0$ i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(a) = 0$.
Fixons $x \in [a,b]$ et appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f_n entre a et x.
$$\left| f_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \max_{[a,x]} |f_n^{(n)}| \frac{(x-a)^n}{n!}$$
Or pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,
$$f_n^{(k)}(a) = f_{n-k}(a) = 0$$
et $f_n^{(n)} = f$ donc
$$|f_n(x)| \leq \max_{[a,x]} |f| \frac{(x-a)^n}{n!} \leq \|f\|_\infty \frac{(b-a)^n}{n!}$$
Par conséquent
$$\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty \frac{(b-a)^n}{n!}$$
Comme la série exponentielle $\sum \frac{(b-a)^n}{n!}$ converge, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

2. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement vers $\mathrm{F} - f$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$, c'est-à-dire la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_{n-1}$ converge normalement sur $[a,b]$. On en déduit que $\mathrm{F} - f_0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et que
$$(\mathrm{F} - f)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \mathrm{F}$$
La fonction $\varphi : x \mapsto e^{-x}(\mathrm{F}(x) - f(x))$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et
$$\varphi'(x) = -e^{-x}(\mathrm{F}(x) - f(x)) + e^{-x}(\mathrm{F} - f)'(x) = -e^{-x}(\mathrm{F}(x) - f(x)) + e^{-x}\mathrm{F}(x) = e^{-x} f(x)$$
Ainsi φ est une primitive de $x \mapsto e^{-x} f(x)$ sur $[a,b]$. Par ailleurs
$$\varphi(a) = e^{-a}(\mathrm{F}(a) - f(a)) = 0$$
car $f_n(a) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi
$$\forall x \in [a,b],\ \varphi(x) = \int_a^x e^{-t} f(t)\ \mathrm{d}t$$
ou encore
$$\forall x \in [a,b],\ \mathrm{F}(x) = f(x) + e^x \int_a^x e^{-t} f(t)\ \mathrm{d}t$$

Solution 26

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Via des développements limités usuels :

$$x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{x}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{x}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n(x)$ converge. La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_n'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x}$$

On montre classiquement que

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

donc

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \leq u_n'(x) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

ou encore

$$\frac{x-1}{(n+1)(n+x)} \leq u_n'(x) \leq \frac{x}{n(n+x)}$$

Ainsi

$$|u_n'(x)| \leq \frac{x+1}{n^2}$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

$$\forall x \in [0,a],\ |u_n'(x)| \leq \frac{a+1}{n^2}$$

La série $\sum u_n'$ converge donc normalement sur $[0,a]$. Ainsi g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$ et, par suite, sur $\mathbb{R}_+$.

3. On a clairement $u_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit immédiatement que $f(1) = 0$.
Les u_n' sont clairement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc g' l'est également. Par ailleurs, $f'(x) = g'(x) - \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ donc f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de deux fonctions croissantes. On en déduit que f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$g'(x+1) - g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x+1) - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x+1) - u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+x} = 0$, $g'(x+1)-g'(x) = \frac{1}{x+1}$ par télescopage. Posons $\psi(x) = f(x+1)-f(x)-\ln(x) = g(x+1)-g(x)-\ln(x+1)$.
Alors ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\psi'(x) = g'(x+1) - g'(x) - \frac{1}{x+1} = 0$$

Ainsi ψ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais comme $\psi(x) = g(x+1) - g(x) - \ln(x+1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, ψ est en fait prolongebale par continuité (et même prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'on a vu que g était de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. En notant encore ψ ce prolongement, $\psi(0) = g(1) - g(0) - \ln(0+1) = 0$. Par conséquent, ψ est constamment nulle sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $f(x+1) - f(x) = \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

4. Posons $f_n(x) = x\ln(n) + \ln(n!) - \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k)$.
Soit $x \in]0,1]$. Par convexité de la fonction de f,

$$\frac{f(n+x) - f(n)}{x} \leq \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = \ln(n)$$

ou encore

$$f(n+x) \leq x\ln(n) + f(n)$$

Par ailleurs, par télescopage

$$f(n) = f(n) - f(1) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) - f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = -\ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = -\ln(n) + \ln(n!)$$

et

$$f(n+x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1+x) - f(k+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(x+k) = -\ln(x+n) + \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k)$$

On en déduit que

$$f(x) - \ln(x+n) + \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k) \leq x\ln(n) - \ln(n) + \ln(n!)$$

ou encore

$$f(x) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) \leq f_n(x)$$

Toujours par convexité de f,

$$\ln(n-1) = \frac{f(n) - f(n-1)}{n-(n-1)} \leq \frac{f(n+x) - f(n)}{x}$$

ou encore

$$x\ln(n-1) + f(n) \leq f(n+x)$$

ce qui équivaut à

$$x\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + x\ln(n) + f(n) \leq f(n+x)$$

En raisonnant comme précédemment, on obtient

$$f_n(x) \leq f(x) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) - x\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Finalement

$$f(x) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) \leq f_n(x) \leq f(x) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) - x\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

On procède par récurrence, et on note $\mathcal{P}_p$ l'assertion

$$\forall x \in]p, p+1], \ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

On vient de montrer que $\mathcal{P}_0$ est vraie. Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_p$ est vraie. Donnons-nous alors $x \in]p, p+1]$ et remarquons que

$$f_n(x+1) - f_n(x) = \ln(x) - \ln\left(\frac{x+n+1}{n}\right)$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x+1) = f(x) + \ln(x) = f(x+1)$$

Ceci prouve que $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie. Par récurrence, $\mathcal{P}_p$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$ ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

Solution 27

---

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $|u_n(x)| \leq \frac{|\alpha|^n}{n!}$. La série $\sum \frac{|\alpha|^n}{n!}$ converge en tant que série exponentielle. La série $\sum |u_n(x)|$ converge donc par majoration. La série $\sum u_n(x)$ converge donc (absolument). On en déduit que $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

2. D'après la question précédente, $\|u_n\|_\infty \leq \frac{|\alpha|^n}{n!}$. A nouveau, la série $\sum \frac{|\alpha|^n}{n!}$ donc la série $\sum \|u_n\|_\infty$ converge par majoration. La série $\sum u_n$ converge donc normalement sur $\mathbb{R}$ et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $v_n(x) = \frac{\alpha^n e^{inx}}{n!} = \frac{(\alpha e^{ix})^n}{n!}$. La série $\sum v_n(x)$ est une série exponentielle. Elle converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = e^{\alpha e^{ix}} = e^{\alpha\cos x} e^{i\alpha\sin x}$$

Ainsi

$$\mathrm{C}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(v_n(x)) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)\right) = e^{\alpha\cos x}\cos(\alpha\sin x)$$

4. **a.** Fixons $n \in \mathbb{N}$.
Remarquons que les fonctions u_n sont paires et donc C également. Par conséquent, $x \mapsto \sin(nx)\cos(nx)$ est impaire et $\mathrm{J}_n = 0$.
Posons ensuite $w_k(x) = \cos(nx)u_k(x)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Il est clair que $\sum_{k=0}^{+\infty} w_k(x) = \cos(nx)\mathrm{C}(x)$. De plus, $\|w_k\|_\infty \leq \|u_k\|_\infty$ donc $\sum w_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. En particulier, $\sum w_k$ converge uniformément sur le *segment* $[-\pi, \pi]$. Enfin, les w_k sont bien continues sur $[-\pi, \pi]$. On peut donc affirmer que

$$\mathrm{J}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} w_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} w_k(x)\,\mathrm{d}x$$

D'après l'indication de l'énoncé

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha^k}{2k!}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n+k)x) + \cos((n-k)x))\,\mathrm{d}x$$

On en déduit que

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_k(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 2\pi & \text{si } k = n = 0 \\ \frac{\pi\alpha^n}{n!} & \text{si } k = n \neq 0 \end{cases}$$

Par conséquent, $\mathrm{I}_0 = 2\pi$ et $\mathrm{I}_n = \frac{\pi\alpha^n}{n!}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

b. On en déuit immédiatement que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Remarquons que $\cos^2(nx) = \frac{1+\cos(2nx)}{2}$ de sorte que

$$\frac{\alpha^n\cos^2(nx)}{n!} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^n}{n!} + \frac{1}{2}\cdot u_n(2x)$$

Or les séries $\sum \frac{\alpha^n}{n!}$ et $\sum u_n(2x)$ convergent donc $\sum \frac{\alpha^n\cos^2(nx)}{n!}$ converge également. Ainsi S est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{S}(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(2x) = \frac{e^\alpha}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{C}(2x) = \frac{e^\alpha}{2} + e^{\alpha\cos 2x}\cos(\alpha\sin 2x)$$

Solution 28

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{e^{-nx}}{n+1}$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées.

2. Posons $f_n : \mapsto (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n+1}$. Alors $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \dfrac{1}{n+1}$ donc la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$. Néanmoins, en vertu du critère spécial des séries alternées et en notant $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ |\mathrm{R}_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \|\mathrm{R}_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leq \|f_{n+1}\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \frac{1}{n+2}$$

donc (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle. Par conséquent, $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

3. Les fonctions f_n étant continues sur $\mathbb{R}_+$ et $\sum f_n$ convergeant uniformément sur $\mathbb{R}_+$, S est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Par ailleurs, $\lim_{+\infty} f_n = \delta_{n,0}$ donc d'après le théorème de la double limite, $\lim_{+\infty} \mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n = 1$.

4. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda(x)e^x$ avec λ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui donne $\lambda'(x)e^x = -\dfrac{e^x}{e^x+1}$ ou encore $\lambda'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. On peut donc choisir, $\lambda(x) = \ln(1+e^{-x})$. Les solutions sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^x + \ln(1+e^{-x})e^x$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. Remarquons que les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f_n'(x) = -(-1)^n \dfrac{ne^{-nx}}{n+1}$. Soit $a > 0$. Alors $\|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} = \dfrac{ne^{-na}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum f_n'$ converge normalement et donc uniformément sur $[a,+\infty[$. Ainsi S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{ne^{-nx}}{n+1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-nx} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1} = -\frac{1}{1+e^{-x}} + \mathrm{S}(x) = -\frac{e^x}{e^x+1} + \mathrm{S}(x)$$

Ainsi S est solution de l'équation différentielle de la question précédente sur $\mathbb{R}_+^*$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{S}(x) = \lambda e^x + \ln(1+e^{-x})e^x$$

Or $\ln(1+e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$ donc $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x})e^x = 1$. Comme $\lim_{+\infty} \mathrm{S} = 1$, on a alors $\lambda = 0$. Finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{S}(x) = \ln(1+e^{-x})e^x$$

Par continuité de S et $x \mapsto \ln(1+e^{-x})e^x$ sur $\mathbb{R}_+$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{S}(x) = \ln(1+e^{-x})e^x$$

Séries alternées

Solution 29

1. Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. La suite $(e^{-\lambda_n x})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puisque $x > 0$. D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum f_n(x)$ converge i.e. la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Supposons que la série $\sum f_n$ converge uniformémement sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors la suite (f_n) convergerait uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{\lambda_n} \in \mathbb{R}_+^*$ et la suite de terme général $f_n(1/\lambda_n) = (-1)^n e^{-1}$ ne converge pas vers 0.
La série $\sum f_n$ ne converge donc pas uniformémement sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. D'après le critère spécial des séries alternées

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ |S(t)| \leq e^{-\lambda_0 t}$$

Or $t \mapsto e^{-\lambda_0 t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc S également.
Toujours d'après le critère des séries alternées,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \left|S(t) - \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\ dt\right| \leq e^{-\lambda_{n+1} t}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\int_0^{+\infty} S(t)\ dt - \sum_{k=0}^{n} \int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt\right| = \left|\int_0^{+\infty} \left(S(t) - \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\right) dt\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|S(t) - \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\right| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_{n+1} t}\ dt$$

ou encore

$$\left|\int_0^{+\infty} S(t)\ dt - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\lambda_k}\right| \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}}$$

On obtient alors en passant à la limite

$$\int_0^{+} S(t)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$$

Solution 30

---

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La suite $\left(\frac{1}{x+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle de sorte que la série $\sum u_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées. La série $\sum u_n(x)$ converge donc et

$$\forall x \in [a, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n}$$

La suite des restes $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ i.e. la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. Les u_n étant continues sur $\mathbb{R}_+^*$, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$

via le changement d'indice $k \mapsto k-1$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'une part,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$$

D'autre part,

$$f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$

En additionnant ces deux inégalités,

$$2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^k}{x+k} - \frac{(-1)^k}{x+k+1}\right] = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. A nouveau, la série $\sum \frac{(-1)^n x}{(x+n+1)(x+n)}$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Notamment,

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}\right| \leq \frac{1}{(x+1)x}$$

On en déduit d'après la question précédente que

$$2f(x) - \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

A fortiori

$$2f(x) - \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

et donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

5. D'après la question **2**,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{1}{x} - f(x+1)$$

Comme f est continue en 1,

$$f(x) \underset{x\to0^+}{=} \frac{1}{x} - f(1) + o(1)$$

A fortiori

$$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Tout d'abord, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge puisque $\displaystyle\frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1}$ et $x-1 > -1$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que

$$\forall t \in [0,1[,\ \frac{1}{1+t} = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t} + \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t} = \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k\right] + \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 t^{k+x-1}\,\mathrm{d}t\right] + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{x+k}\right] + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\forall t \in [0,1],\ 0 \leq \frac{t^{n+x}}{1+t} \leq t^{n+x}$$

donc

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{n+x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+x+1}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{n+x}\,\mathrm{d}t = 0$$

de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k} = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

i.e.

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Solution 31

---

1. Si $x > 0$, la suite de terme général $1/n^x$ décroît vers 0. La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge donc en vertu du critère spécial des séries alternées. Si $x \leq 0$, la suite de terme général $(-1)^{n-1}/n^x$ ne converge pas vers 0 donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge grossièrement. Le domaine de définition de S est donc $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $a \in]1,+\infty[$. Pour tout $x \in [a,+\infty[$,

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leq \frac{1}{n^a}$$

Comme $a > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^a}$ converge. La série de fonctions définissant S converge donc normalement et a fortiori uniformément sur $[a,+\infty[$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \delta_{n,1}$. D'après le théorème d'interversion limite/série, $\lim_{+\infty} \mathrm{S} = 1$.

Remarque. En utilisant la majoration d'un reste d'une série alternée, on peut même montrer que la série définissant S converge uniformément sur $[a,+\infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

3. Soit $x \in \mathrm{D}$. D'une part,

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

et d'autre part,

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^x} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^x}$$

Par sommation de deux séries convergentes,

$$2\mathrm{S}(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n(x)$$

4. Soit $x \in \mathrm{D}$. Tout d'abord, $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$. Par ailleurs, la fonction $f : t \mapsto t^x$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(t) = \frac{x(x+1)}{t^{x+2}} \geq 0$. D'après l'inégalité des pentes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} \leq \frac{f(n+2) - f(n+1)}{(n+2) - (n+1)}$$

ou encore

$$f(n) - f(n+1) \geq f(n+1) - f(n+2)$$

ou enfin

$$u_n(x) \geq u_{n+1}(x)$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n-1} u_n(x)$ vérifie donc le critère spécial des séries alternées. En particulier

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n(x)\right| \leq |u_1(x)|$$

ou encore

$$|2\mathrm{S}(x) - 1| \leq 1 - \frac{1}{2^x}$$

On en déduit grâce au théorème des gendarmes que $\lim_{x\to0^+} 2\mathrm{S}(x) - 1 = 0$. i.e. $\lim_{0^+} \mathrm{S} = \frac{1}{2}$.

Solution 32

---

1. Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. La suite de terme général $\frac{1}{n+x}$ décroît vers 0 donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+x}$ converge. Ainsi S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Posons $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$. La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, les u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivées $u_n' : x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ vérifie à nouveau le critère des séries alternées. Cette série converge donc et on peut majorer la valeur absolue du reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k'(x)\right| \leq \frac{1}{(n+1+x)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

Le reste converge donc uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ i.e. la série $\sum u_n'$ converge uniformément. Par conséquent, S est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

2. Toujours d'après le critère spécial des séries alternées, $\mathrm{S}'(x)$ est du signe du premier terme de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$, c'est-à-dire du signe de $-\frac{1}{x^2}$. Par conséquent, S′ est négative sur $\mathbb{R}_+^*$ de sorte que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par changement d'indice

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1+x} = \frac{1}{x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} = \frac{1}{x} - \mathrm{S}(x+1)$$

Comme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est a fortiori continue en 1. Ainsi $x \mapsto \mathrm{S}(x+1)$ admet une limite finie en 0. Comme $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Solution 33

---

1. Posons $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{1+nx}$. Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n f_n(x)$ vérifie clairement (?) le critère spécial des séries alternées donc converge. S est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Notons $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k f_k$. Fixons $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a, +\infty[,\ |\mathrm{R}_n(x)| \leq f_{n+1}(x) \leq f_{n+1}(a)$$

Or $\lim_{n\to+\infty} f_{n+1}(a) = 0$ donc (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$ i.e. $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n f_n$ converge uniformément vers S sur $[a, +\infty[$. Comme les f_n sont continues sur $[a, +\infty[$, S l'est également. D'après le caractère local de la continuité, S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On a montré que S convergeait uniformément sur $[1, +\infty$ par exemple. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n f_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On peut donc appliquer le théorème de la double limite :

$$\lim_{+\infty} \mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{+\infty} (-1)^n f_n = 1$$

3. Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$ et montrons que la série $\sum (-1)^n f_n'(x)$ vérifie encore le critère des séries alternées. Tout d'abord,

$$f_n'(x) = -\frac{n}{(1+nx)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{nx^2}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = 0$. Ensuite, après calcul,

$$f_{n+1}'(x) - f_n'(x) = \frac{n(n+1)x^2 - 1}{(1+nx)^2(1+(n+1)x)^2}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} n(n+1)x^2 = +\infty$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ (dépendant de x !) tel que pour tout $n \geq \mathrm{N}$, $f_{n+1}'(x) - f_n'(x) \geq 0$: la suite $(f_n'(x))$ est donc croissante à partir du rang N. On peut finalement appliquer le critère des séries alternées de sorte que $\sum (-1)^n f_n'$ converge. Soit à nouveau $a \in \mathbb{R}_+^*$. Choisissons N tel que pour tout $n \geq \mathrm{N}$, $n(n+1)a^2 \geq 1$. Alors pour tout $n \geq \mathrm{N}$ et tout $x \geq a$, $n(n+1)x^2 \geq 1$ et la série $\sum (-1)^n f_n'(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées à partir du rang N. Notamment

$$\forall n \geq \mathrm{N},\ \forall x \in [a, +\infty[,\ \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k f_k'(x) \right| \leq |f_{n+1}'(x)| = \frac{n+1}{(1+(n+1)x)^2} \leq \frac{n+1}{(1+(n+1)a)^2}$$

Remarque. Il est essentiel de remarquer que cette fois-ci, N ne dépend plus de x mais seulement de a.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{(1+(n+1)a)^2} = 0$, la série $\sum(-1)^n f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$. Comme $\sum f_n$ converge également simplement sur cet intervalle, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et par suite sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution 34

1. Soit $x \in \mathrm{J}$. Puisque $x > 0$, la suite de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{1+nx}}$ est décroissante et de limite nulle. D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum f_n(x)$ converge. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur J.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\|f_n\|_{\infty,\mathrm{J}} = \sup_{x\in\mathrm{J}} \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$
Or la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est une série à termes positifs divergente donc $\sum \|f_n\|_{\infty,\mathrm{J}}$ diverge également. Autrement dit, $\sum f_n$ ne converge pas normalement.
3. Comme la série $\sum f_n$ converge simplement sur J, il suffit de montrer que la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle sur J. Posons $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n$. D'après le critère spécial des séries alternées,
$$\forall x \in \mathrm{J},\ |\mathrm{R}_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$
Ainsi
$$\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,\mathrm{J}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \|\mathrm{R}_n\|_{\infty,\mathrm{J}} = 0$ i.e. (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur J. Par conséquent, $\sum f_n$ converge uniformément sur J.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{+\infty} f_n = 0$ et $\lim_{+\infty} f_0 = 1$. Comme $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathrm{J} = [1,+\infty[$, on peut utiliser le théorème d'interversion série/limite :
$$\lim_{+\infty} \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n = 1$$
5.
   a. Il s'agit à nouveau du critère spécial des séries alternées.

   b. Remarquons que
$$\forall x \in \mathrm{J},\ \varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right)$$
Remarquons que
$$\left|\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right| = \frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{\sqrt{1+nx}-\sqrt{nx}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+nx}+\sqrt{nx}\right)\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} \leq \frac{1}{2(nx)^{3/2}}$$
Ainsi, par inégalité triangulaire,
$$\forall x \in \mathrm{J},\ \left|\varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2(nx)^{3/2}} = \frac{\mathrm{K}}{x^{3/2}}$$
en posant $\mathrm{K} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$. On en déduit bien que
$$\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Solution 35

On notera $\|\cdot\|_\infty$ la norme uniforme sur $[0,1]$.

1. Posons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Il est clair que $S(0) = S(1) = 0$. Soit $x \in]0,1[$. La série $\sum (-1)^{n+1}x^{2n+2} = \sum (-x^2)^{n+1}$ est une série géométrique de raison $-x^2 \in]-1,0[$ donc elle converge. De plus,
$$S(x) = \ln(x)\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^{n+1} = -\frac{x^2\ln(x)}{1+x^2}$$

2. Notons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ pour $x \in [0,1]$. La suite de terme général $|u_n(x)|$ est monotone et de limite nulle (constamment nulle si $x = 0$ ou $x = 1$). D'après le critère spécial des séries alternées :
$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)|$$
Une rapide étude de $|u_n| = -u_n$ sur $[0,1]$ montre que $|u_n|$ admet un maximum en $\exp\left(\frac{-1}{2n+2}\right)$ et que $\|u_n\|_\infty = \frac{e^{-1}}{2n+2}$. Ainsi $\|R_n\|_\infty \leq \frac{e^{-1}}{2n+4}$ puis $\lim_{n\to+\infty}\|R_n\|_\infty = 0$. Ceci prouve que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers S car elle converge simplement vers S et son reste converge uniformément vers la fonction nulle.

3. Les u_n cont continues sur $[0,1]$ puisque $\lim_{x\to0^+} x^{2n+2}\ln(x) = 0$. Comme $\sum u_n$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$, on peut procéder à une interversion série intégrale. Ainsi
$$\int_0^1 \frac{x^2\ln(x)\,dx}{1+x^2} = -\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)\,dx = -\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 u_n(x)\,dx = -\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 u_{n-1}(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\int_0^1 x^{2n}\ln(x)\,dx$$
Par intégration par parties,
$$\int_0^1 x^{2n}\ln(x)\,dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\,dx$$
Cette intégration par parties est légitime car
   - $x \mapsto \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et ln sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ de dérivées respectives $x \mapsto x^{2n}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$;
   - $\lim_{x\to0^+}\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\ln(x) = 0$.

   On peut rajouter que
$$\int_0^1 x^{2n}\ln(x)\,dx = -\frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\,dx = -\frac{1}{(2n+1)^2}$$
On en déduit le résultat annoncé.

Remarque. On aurait pu utiliser le théorème d'intégration terme à terme pour le calcul de l'intégrale mais ce n'était pas ce qui était suggéré par la question précédente.

Approximations

Solution 36

Remarquons déjà que, par linéarité de l'intégrale, $\int_a^b f(t)P(t)\,dt = 0$ pour toute fonction polyomiale P.

Le théorème de Weierstrass permet d'affirmer qu'il existe une suite (P_n) de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$. De plus,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_a^b f(t)^2\,dt = \int_a^b f(t)(f(t)-P_n(t))\,dt + \int_a^b f(t)P_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)(f(t)-P_n(t))\,dt$$

Comme f^2 est positive

$$\int_a^b f(t)^2 \, \mathrm{d}t = \left|\int_a^b f(t)^2 \, \mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b f(t)(f(t)-\mathrm{P}_n(t)) \, \mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)| \cdot |f(t)-\mathrm{P}_n(t)| \, \mathrm{d}t \leq \|f-\mathrm{P}_n\|_\infty \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

Comme (P_n) converge uniformément vers f, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f-\mathrm{P}_n\|_\infty = 0$ puis $\int_a^b f(t)^2 \, \mathrm{d}t = 0$. Or f^2 est continue et positive sur $[a,b]$ donc elle y est nulle. f est donc également nulle sur $[a,b]$.

Solution 37

On notera $\|\cdot\|$ une norme sur E (peu importe laquelle, elles sont toutes équivalentes puisque E est de dimension finie).

1. Il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ et φ est constante sur chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$. Notons c_k la valeur de φ sur $]a_k, a_{k+1}[$. Alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$,

$$\int_a^b e^{i\lambda t}\varphi(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{i\lambda t} \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{i\lambda}\left(e^{i\lambda a_{k+1}} - e^{i\lambda a_k}\right)$$

Puisque $x \mapsto e^{i\lambda x}$ est bornée, on en déduit sans peine que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b e^{i\lambda t}\varphi(t) \, \mathrm{d}t = 0$$

2. Il existe une suite (φ_n) de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$. Posons $\Phi_n : \lambda \mapsto \int_a^b e^{i\lambda t}\varphi_n(t) \, \mathrm{d}t$ et $\mathrm{F} : \lambda \mapsto \int_a^b e^{i\lambda t}\mathrm{F}(t) \, \mathrm{d}t$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$|\mathrm{F}(\lambda) - \Phi_n(\lambda)| \leq \int_a^b |e^{i\lambda t}| \cdot \|f(t) - \varphi_n(t)\| \, \mathrm{d}t \leq (b-a)\|f-\varphi_n\|_\infty$$

et donc

$$\|\mathrm{F} - \Phi_n\|_\infty \leq (b-a)\|f-\varphi_n\|_\infty$$

Remarque. La première norme uniforme est une norme uniforme sur $\mathbb{R}$ tandis que la seconde est une norme uniforme sur $[a,b]$.

Puisque (φ_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, l'inégalité précédente montre que (Φ_n) converge uniformément vers F sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la double limite,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \mathrm{F}(\lambda) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{\lambda\to+\infty} \Phi_n(\lambda)$$

D'après la question précédente, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \Phi_n(\lambda) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathrm{F}(\lambda) = 0$, ce qui répond à la question.

3. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque f est intégrable, les intégrales $\int_0^{+\infty} \|f(t)\| \, \mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^0 \|f(t)\| \, \mathrm{d}t$ convergent. Ainsi $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_b^{+\infty} \|f(t)\| \, \mathrm{d}t = 0$ et $\lim\limits_{a\to-\infty} \int_{-\infty}^a \|f(t)\| \, \mathrm{d}t = 0$. Il existe donc des réels a et b tels que $a < b$, $\int_b^{+\infty} \|f(t)\| \, \mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $\int_{-\infty}^a \|f(t)\| \, \mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

D'après la question précédente, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) \, \mathrm{d}t = 0$. Il existe donc $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \lambda \geq \lambda_0, \left|\int_a^b e^{i\lambda t} f(t) \, \mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Soit donc $\lambda \geq \lambda_0$.

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_{-\infty}^{a} e^{i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{a}^{b} e^{i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{b}^{+\infty} e^{i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\right|$$
$$\leq \int_{-\infty}^{a} \|f(t)\|\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{3} + \int_{a}^{+\infty} \|f(t)\|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon$$

Ceci signifie que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$