

# DEVOIR À LA MAISON N°02

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1 – Centrale PC 2003

### Partie I –

- Déterminer un équivalent simple de  $\frac{e^t}{\arcsin t}$  lorsque  $t$  tend vers  $0^+$ .
  - En déduire un équivalent simple de  $\int_x^1 \frac{e^t}{\arcsin t} dt$  lorsque  $x$  tend vers  $0^+$ .
  - En déduire un équivalent simple de  $\int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{\arcsin t} dt$  lorsque  $x$  tend vers  $0^+$ .
- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$$

- Plus généralement montrer que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{\ln^{k+1}(x)} + o\left(\frac{x}{\ln^{n+1}(x)}\right)$$

- Montrer que

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2 + 1} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right)$$

### Partie II –

Soit  $a$  un nombre réel et  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, +\infty[$  à valeurs strictement positives. On suppose que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \alpha \in \mathbb{R}$ .

- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \alpha$ .
- On suppose dans cette question que  $\alpha < -1$ .

- Montrer que  $f$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ .

- Montrer que

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{xf(x)}{\alpha + 1}$$

3. On suppose dans cette question que  $\alpha > -1$ .

a. Etudier l'intégrabilité de  $f$  sur  $[a, +\infty[$ .

b. Montrer que

$$\int_a^x f(t) \, dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{xf(x)}{\alpha + 1}$$

4. a. Etudier l'intégrabilité sur  $[2, +\infty[$  des applications  $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$  selon  $\beta \in \mathbb{R}$ .

b. Etudier à l'aide des questions précédentes l'intégrabilité sur  $[2, +\infty[$  des applications  $x \mapsto \frac{1}{x^\gamma(\ln x)^\beta}$  selon  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $\gamma \in \mathbb{R}$ .