Semaine du 02/04 au 06/04

1 Cours

Limite et continuité de fonctions

Limite d'une fonction Définition. Unicité de la limite. Toute fonction admettant une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est bornée au voisinage de a. Limite à gauche et à droite. Lien entre limite à gauche et à droite et limite simple.

Propriétés des limites Opérations sur les limites. Caractérisation séquentielle de la limite. Passage à la limite.

Théorèmes d'existence de limite Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration. Théorème de la limite monotone.

Continuité ponctuelle Définition. Continuité à gauche et à droite. Prolongement par continuité. Caractérisation séquentielle de la continuité. Opérations sur la continuité ponctuelle.

Continuité sur un intervalle Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle. Théorème des valeurs intermédiaires. L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle. Théorème de la bijection. Une fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone. La bijection réciproque d'une fonction continue sur un intervalle est continue. Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. L'image d'un segment par une application continue est un segment.

Continuité uniforme Définition. Continuité uniforme implique continuité. Théorème de Heine. Fonctions lipschitziennes : définition et uniforme continuité.

Limite et continuité des fonctions à valeurs complexes Une fonction à valeurs complexes f admet pour limite $l \in \mathbb{C}$ **si et seulement si** $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ admettent pour limites respectives $\operatorname{Re}(l)$ et $\operatorname{Im}(l)$. Une fonction f à valeurs complexes est continue **si et seulement si** $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour montrer qu'une fonction continue f admet un point fixe, on montre que $x \mapsto f(x) - x$ s'annule.
- Pour montrer qu'une fonction continue s'annule, il suffit de prouver qu'elle prend une valeur positive et une valeur négative.
- Équations fonctionnelles.

3 Questions de cours

- **Banque CCP 55** Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$$

  1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
     (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
  2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n. Indication : discuter suivant les valeurs de a.

- **Banque CCP 79** Soit h continue et positive sur $[a,b]$ ($a < b$). Montrer que si $\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx = 0$, alors $h = 0$.
- Soit f une fonction continue sur $I = [a,b]$ telle que $f(I) \subset I$. Montrer que f admet un point fixe sur I.
- On considère la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, à savoir l'application $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 0$ sinon. Montrer que f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.
- Déterminer les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$