Interrogation écrite n°06

NOM : Prénom : Note :

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \ln(1-x)\tan(x)$.

$$\begin{aligned}
\ln(1-x) &\underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} -x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \\
\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} x\left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\ln(1-x)\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} -x^2\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + o(x^2)\right) \\
&= \underset{x\to 0}{=} -x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{2x^4}{3} + o(x^4)
\end{aligned}$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.

On sait que

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

donc en posant $u = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$, on a $u^2 = \dfrac{x^4}{4} + o(x^4)$ et donc

$$\frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$$

3. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de arccos.

On sait que

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \underset{x\to 0}{=} -1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Comme arccos est une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\arccos(x) &\underset{x\to 0}{=} \arccos(0) - x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)
\end{aligned}$$

4. Déterminer la limite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$.

   Remarquons que pour $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$,
$$f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$$
   Tout d'abord, $x\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$. De plus, $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $x - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$. On en déduit que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}$ i.e. $\lim_0 f = \dfrac{1}{2}$.

5. Déterminer les solutions *à valeurs réelles* de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 5y = -5$.

   Les racines de l'équation caractéristique sont $-1+2i$ et $-1-2i$. On en déduit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions
$$t \mapsto (\lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t))\,e^{-t} \qquad \text{avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$
   De plus, la fonction $t \mapsto -1$ est solution évidente de l'équation différentielle initiale donc ses solutions sont les fonctions
$$t \mapsto -1 + (\lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t))\,e^{-t} \qquad \text{avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

6. Déterminer les solutions *à valeurs complexes* de l'équation différentielle $y'' - (1-i)y' - iy = 1$.

   1 est une racine évidente de l'équation caractéristique donc $-i$ est également une racine. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions
$$t \mapsto \lambda e^{t} + \mu e^{-it} \qquad \text{avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$$
   De plus, la fonction $t \mapsto i$ est solution évidente de l'équation différentielle initiale donc ses solutions sont les fonctions
$$t \mapsto i + \lambda e^{t} + \mu e^{-it} \qquad \text{avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$$