# Natures de séries

### Exercice 1

Déterminer, en fonction de $\alpha > 0$, la nature de la série de terme général

$$u_n = \cos^n(1/n^\alpha).$$

### Exercice 2 ★

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n+1}}.$$

### Exercice 3 **Autour du binôme**

Convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

### Exercice 4

Soient $a, b$ et $c > 0$. Etudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = a^{1/n} - \frac{b^{1/n} + c^{1/n}}{2}.$$

### Exercice 5

Nature de la série de terme général $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+1/n}$.

### Exercice 6

Nature de la série de terme général : $u_n = e^{-\sqrt{n}}$.

### Exercice 7

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = (\ln(n))^{-\ln(n)}$.

### Exercice 8

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \tan\left(\pi(7+4\sqrt{3})^n\right)$.

### Exercice 9 ★ **Autour de la série harmonique**

Soit $a > 0$. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

### Exercice 10

Soient $a$ et $b$ dans $\mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2).$$

### Exercice 11

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

### Exercice 12

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}$ où $a, b > 0$.

### Exercice 13

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+p)!}$ suivant les valeurs de $p \in \mathbb{N}$.

### Exercice 14

Soit $(u_n)$ une suite réelle strictement positive. On pose $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$. Comparer la nature des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{S_n}$.

**Exercice 15**

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} \upsilon_n$ des séries à termes réels strictement positifs. On suppose que $\sum_{n\geq 0} \upsilon_n$ converge et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+2}}{u_n} \leq \frac{\upsilon_{n+2}}{\upsilon_n}$$

Montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

**Exercice 16** **Critère de Raabe-Duhamel**

1. Soient $(u_n)$ et $(\upsilon_n)$ de suites de réels strictement positifs vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\upsilon_{n+1}}{\upsilon_n}$ à partir d'un certain rang. Montrer que $u_n = \mathcal{O}(\upsilon_n)$.
2. Soit $(u_n)$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   **a.** On suppose $\alpha > 1$. A l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

   **b.** On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.

   **c.** On suppose $\alpha = 1$. Montrer à l'aide d'exemples qu'on ne peut rien conclure en général.
3. Application. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{2\times 4\times\cdots\times(2n)}{3\times 5\times\cdots\times(2n+1}$

**Exercice 17**

Soit $(a_n)$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge. Etudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{1+a_n}$
3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n a_{2n}$
4. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$

**Exercice 18** **Sommation d'Abel**

Soient $(a_n)_{n\geq n_0}$ et $(\mathrm{B}_n)_{n\geq n_0}$ deux suites complexes. On définit deux suites $(\mathrm{A}_n)_{n\geq n_0}$ et $(b_n)_{n\geq n_0}$ de la manière suivante :

$$\forall n \geq n_0,\ \mathrm{A}_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k,\ b_n = \mathrm{B}_{n+1} - \mathrm{B}_n$$

1. Montrer que $\sum_{k=n_0}^{n} a_k\mathrm{B}_k = \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathrm{A}_k b_k$ pour tout $n \geq n_0$.
2. Utiliser la question précédente pour étudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$.
3. De manière générale, montrer que si $(\mathrm{B}_n)$ converge vers 0, si $(\mathrm{A}_n)$ est bornée et si $\sum_{n\geq n_0} b_n$ est absolument convergente, alors $\sum_{n\geq n_0} a_n\mathrm{B}_n$ est convergente.

**Exercice 19**

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} \upsilon_n$ des séries à termes strictement positifs vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\upsilon_{n+1}}{\upsilon_n}$$

1. Montrer que si $\sum_{n\geq 0} \upsilon_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge également.
2. Montrer que si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} \upsilon_n$ diverge également.

**Exercice 20**

Soient $\sum u_n$ et $\sum \upsilon_n$ deux séries à termes positifs convergentes.

1. Montrer que la série $\sum \max(u_n, \upsilon_n)$ converge.
2. Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n\upsilon_n}$ converge.
3. On suppose que $u_n + \upsilon_n$ ne s'annule pas. Montrer que la série $\sum \frac{u_n\upsilon_n}{u_n+\upsilon_n}$ converge.

**Exercice 21** **Règle de d'Alembert**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes *strictement positifs*.

1. Montrer que si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite $l<1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
2. Montrer que si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite $l>1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.
3. Montrer à l'aide de deux exemples que l'on ne peut pas conclure si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet 1 pour limite.
4. Étudier la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^n}$.

**Exercice 22** **Séries de Bertrand**

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. On pose $u_n=\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ pour $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et on s'intéresse à la convergence de la série $\sum_{n\geq2} u_n$.

1. On suppose $\alpha>1$. Montrer que $\sum_{n\geq2} u_n$ converge.
2. On suppose $\alpha<1$. Montrer que $\sum_{n\geq2} u_n$ diverge.
3. On suppose $\alpha=1$ et $\beta\leq0$. Montrer que $\sum_{n\geq2} u_n$ diverge.
4. On suppose $\alpha=1$ et $\beta>0$. Déterminer la nature de $\sum_{n\geq2} u_n$ suivant la valeur de $\beta$ via une comparaison à une intégrale.

**Exercice 23 ★★★** **Règle de Cauchy**

Soit $(u_n)$ une suite de réels positifs. On suppose que la suite de terme général $\sqrt[n]{u_n}$ admet une limite $\ell\in\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$.

1. Montrer que si $\ell<1$, la série $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que si $\ell>1$, la série $\sum u_n$ diverge.
3. Montrer à l'aide de deux exemples qu'on ne peut conclure dans le cas $\ell=1$.

**Exercice 24**

On note $(S_n)$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que les suites $(S_{2n-1})$ et $(S_{2n})$ sont adjacentes. En déduire la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

**Exercice 25**

Soit $\sum u_n$ une série réelle.

1. On suppose $\sum u_n$ à termes positifs. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum u_n^2$ converge. La réciproque est-elle vraie ?
2. On ne suppose plus $\sum u_n$ à termes positifs. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que la convergence de la série $\sum u_n$ n'implique pas la convergence de la série $\sum u_n^2$.

**Exercice 26**

Soit $(u_n)$ une suite décroissante de limite nulle. On note $(S_n)$ la suite des sommes partielles de la série $\sum(-1)^n u_n$. Montrer que les suites $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la série $\sum(-1)^n u_n$ ?

**Exercice 27**

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$.
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}\right)$.
3. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$.
4. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}\right)$.

**Exercice 28** **Constante $\gamma$ d'Euler**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.
2. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$$

**Exercice 29**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k$$

A l'aide d'une permutation de sommes, montrer que les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ sont de même nature et, qu'en cas de convergence, elles ont même somme.

## Etude asymptotique de sommes partielles ou de restes

**Exercice 30**

Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha \leq 1$.

Déterminer un équivalent du reste de la série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.

**Exercice 31**

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$S_n = C - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

**Exercice 32**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \ln(n!)$.

1. Par une comparaison à une intégrale montrer que $u_n \sim n \ln n$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq2} \frac{1}{u_n^2}$.
3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$.
4. A l'aide d'une comparaison à une intégrale, déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq2} \frac{1}{u_n}$.

**Exercice 33**

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\ln(n+2^k)}{k!}$ converge et que pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\ln(n+2^k)}{k!} \underset{n\to+\infty}{=} e \ln n + \sum_{p=1}^{m} \frac{(-1)^{p+1} e^{2^p}}{p n^p} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$$

**Exercice 34**

Déterminer un équivalent simple de la somme partielle de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln n$ par comparaison à une intégrale.

## Calculs de sommes

**Exercice 35**

Soit $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(\cos \frac{\alpha}{2^n}\right)$ et calcul de la somme.

**Exercice 36**

Soit $p$ un nombre premier. Calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(pn)!}$.

**Exercice 37**

Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^4+n^2+1}$.

**Exercice 38**

Montrer la convergence et déterminer la somme de la série $\sum_{n\geq 3} \frac{2n-1}{n^3-4n}$.

**Exercice 39**

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$ et calcul de la somme.

**Exercice 40** **Taylor-Lagrange**

A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange prouver la convergence et déterminer la somme des séries suivantes

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ pour $x \in \mathbb{R}$ ;
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ pour $x \in [0,1]$.

**Exercice 41**

Soit $x \in ]-1,1]$. En remarquant que $\frac{x^k}{k} = \int_0^x t^{k-1}\,dt$, montrer la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ et déterminer sa somme.
On pourra distinguer les cas $x \leq 0$ et $x \geq 0$.

**Exercice 42**

En remarquant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,dt$, montrer la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et déterminer sa somme.

**Exercice 43** **D'après École de l'Air 1984**

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{I}(\lambda) = \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{J}(\lambda) = \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathrm{I}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathrm{J}(\lambda) = 0$.

2. Déterminer deux réels $u$ et $v$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^\pi (ux + vx^2)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour $x \in ]0, \pi]$,

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

4. Montrer que la fonction $\varphi : x \in ]0, \pi] \mapsto \dfrac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

5. A l'aide des questions précédentes, déterminer la somme de la série de Riemann $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2}$.

6. En adaptant les deux réels $u$ et $v$ de la question **2**, justifier la convergence et déterminer les sommes des séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$.

**Exercice 44** **Une fraction rationnelle**

Convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n^2+3n}$ et calcul de la somme.

**Exercice 45 ★** **Un classique sur l'arctangente**

Convergence et calcul de la somme de la série de terme général :

$$v_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right).$$

**Exercice 46 ★** **Un peu de numération**

Soit $n \geqslant 1$. On note $p(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture de $n$ en base 10. Etablir la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{p(n)}{n(n+1)}.$$

**Exercice 47 ★★**

Convergence et calcul de la somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

**Exercice 48 ★★** **Avec Stirling**

Convergence et somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

**Exercice 49**

Etudier la convergence et calculer somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})\cdots(1+\sqrt{n})}.$$

## Applications

### Exercice 50

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $k$-lipschitzienne avec $k < 1$ et $(x_n)$ une suite telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$.
2. En considérant la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{n+1} - x_n$, montrer que la suite $(x_n)$ converge.
3. En déduire que $f$ admet un unique point fixe.

### Exercice 51 — CCP

On pose $\mathrm{G}(x,y) = \int_0^y \frac{t-[t]}{t(t+x)}\,\mathrm{d}t$ où $[t]$ représente la partie entière de $t$.

1. Montrer que G est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
2. Montrer que $\mathrm{G}(x,y)$ tend vers une limite finie $\mathrm{G}(x)$ quand $y$ tend vers $+\infty$.
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{G}(n,y) = \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t - \int_y^{y+n} \frac{t-[t]}{t}\,\mathrm{d}t\right)$$
4. On note $\mathrm{H}(n) = n\mathrm{G}(n)$. Montrer que la série de terme général $\mathrm{H}(n) - \mathrm{H}(n-1) - \frac{1}{2n}$ converge et en déduire un équivalent de $\mathrm{G}(n)$.

### Exercice 52 — Séries de Engel

Soit $x \in ]0,1]$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 telle que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n}$.
2. Montrer que $x$ est rationnel si et seulement si la suite $(q_n)$ est stationnaire.
3. Montrer que $e$ est irrationnel.

### Exercice 53

Montrer que le développement décimal d'un réel est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si ce réel est rationnel.

### Exercice 54

Soient $k \in [0,1[$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tels que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$$
Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En considérant la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n+1} - u_n$, montrer que $u$ converge.