# Devoir surveillé n°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Exercice 1.

On définit la suite $(F_n)$ par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite $(F_n)$ est positive.
2. Montrer que la suite $(F_n)$ est croissante.
   En particulier, $F_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ de sorte que l'on peut poser $G_n = \arctan\left(\frac{1}{F_n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que $F_{2n+1} = \dfrac{F_{2n+2}F_{2n+3} - 1}{F_{2n+2} + F_{2n+3}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que $G_{2n+1} = G_{2n+2} + G_{2n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. En déduire que pour pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$G_{2n+1} + \sum_{k=1}^{n} G_{2k} = \frac{\pi}{4}$$

## Exercice 2.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathrm{sh}(\alpha) = 1$.
2. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^\alpha \mathrm{sh}(t)^n \, dt$. Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)$.
3. Justifier que $(I_n)$ converge. On ne cherchera pas à calculer sa limite pour l'instant.
4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (n+2)I_{n+2} = \mathrm{ch}(\alpha) - (n+1)I_n$$

5. En déduire la limite de la suite $(I_n)$.

**Exercice 3.**

1. Soit $g$ une fonction paire, $2\pi$-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\int_0^{2\pi} g(t)\,dt = 2\int_0^{\pi} g(t)\,dt$$

2. On pose pour $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$,
$$f_r(\theta) = r^2 - 2r\cos\theta + 1$$
Montrer que
$$\forall r \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \forall\theta \in \mathbb{R},\ f_r(\theta) > 0$$

3. On pose pour $r \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$
$$I(r) = \int_0^{\pi} \ln(f_r(\theta))\,d\theta$$
A l'aide d'un changement de variable, montrer que
$$\forall r \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ I(-r) = I(r)$$

4. En remarquant que $2I(r) = I(r) + I(-r)$, montrer que
$$\forall r \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ 2I(r) = I(r^2)$$

5. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ 2^n I(r) = I(r^{2^n})$$

6. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $|r| < 1$. Montrer que
$$2\pi\ln(1-|r|) \leqslant I(r) \leqslant 2\pi\ln(1+|r|)$$

7. En déduire que $I(r) = 0$ lorsque $|r| < 1$.

8. Montrer également que
$$\forall r \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ I\left(\frac{1}{r}\right) = I(r) - 2\pi\ln(|r|)$$

9. En déduire la valeur de $I(r)$ lorsque $|r| > 1$.

**Exercice 4.**

Tracer les graphes des fonctions $f = \arcsin\circ\cos$ et $g = \arccos\circ\sin$ sur l'intervalle $[-4\pi, 4\pi]$.
On justifiera ces tracés.