DEVOIR À LA MAISON N°10

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – CCP 2001 Maths2 MP - Utilisation des matrices compagnons

Notations et définitions

- Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n est un entier naturel.
- Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on note $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u^{n+1} = u^n \circ u$.
- On note $\mathbb{K}_n[X]$ la $\mathbb{K}$-algèbre des polynômes de degré inférieur ou égal à n, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ de matrice unité I_n et $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont notés $M = (m_{i,j})$.
- Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note A^T la transposée de la matrice A, $\mathrm{rg}(A)$ son rang, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique et $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres.
- Si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ est un polynôme unitaire de $\mathbb{K}_n[X]$ on lui associe la **matrice compagnon**

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & . & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

  (c'est-à-dire la matrice $C_P = (c_{i,j})$ est définie par $c_{i,j} = 1$ pour $i - j = 1$, $c_{i,n} = -a_{i-1}$ et $c_{i,j} = 0$ dans les autres cas).

Les parties II, III et IV utilisent les résultats de la partie I et sont indépendantes entre elles.

I Propriétés générales

Dans cette partie on considère le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ de $\mathbb{K}_n[X]$ et C_P sa matrice compagnon associée.

1 Montrer que C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

2 Montrer que $\chi_{C_p} = P$.

3 Soit Q un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A = Q$.

4 On note C_P^T la transposée de la matrice C_P.

4.a Justifier la proposition : $\mathrm{Sp}(C_P) = \mathrm{Sp}(C_P^T)$.

4.b Soit λ élément de $\mathrm{Sp}(C_P^T)$, déterminer le sous-espace propre de C_P^T associé à λ.

4.c Montrer que C_P^T est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

4.d On suppose que P admet n racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes, montrer que C_P^T est diagonalisable et en déduire que le déterminant de Vandermonde $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$ est non nul.

5 *Exemples :*

5.a Déterminer une matrice A (dont on précisera la taille n) vérifiant :

$$A^{2002} = A^{2001} + A^{2000} + 1999I_n$$

5.b Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E vérifiant : $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Montrer que l'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice compagnon que l'on déterminera.

II Localisation des racines d'un polynôme

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$:

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \qquad \text{et} \qquad D_i = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq r_i\}$$

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $\|X\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

6 Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ.

Montrer que pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$: $|\lambda x_i| \leq r_i \|X|_\infty$.

7 Démontrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$.

8 Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Etablir que toutes les racines de P sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \ldots, 1 + |a_{n-1}|\}$.

9 *Application :*
Soit a, b, c et d quatre entiers naturels distincts et non nuls, montrer que l'équation d'inconnue n :

$$n^a + n^b = n^c + n^d$$

n'admet pas de solution sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

III Suites récurrentes linéaires

On note $\mathrm{E} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites de complexes et si u est une suite de E, on écrira $u(n)$ à la place de u_n pour désigner l'image de n par u.

On considère le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^p + a_{p-1}\mathrm{X}^{p-1} + \cdots + a_0$ de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ avec $a_0 \neq 0$ et on lui associe le sous-espace vectoriel F de E formé des éléments u vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \, : \, u(n+p) = -a_{p-1}u(n+p-1) - \cdots - a_0 u(n)$$

10 Montrer que si λ est racine de P alors la suite $n \mapsto \lambda^n$ est élément de F.

11 Soit φ l'application de F vers $\mathbb{C}^p$ définie par : $u \mapsto (u(0), u(1), \dots, u(p-1))$. Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de F ?

12 Pour tout entier $i \in [\![0, p-1]\!]$, on définit les élements e_i de F par :

$$\forall j \in [\![0, p-1]\!] \, , \; e_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

12.a Déterminer $e_i(p)$ pour $i \in [\![0, p-1]\!]$.

12.b Montrer que le système de vecteurs $\left(e_0, e_1, \dots, e_{p-1}\right)$ est une base de F.

12.c Soit u un élément de F, établir que $u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)e_i$.

13 Si u est un élément de E, on définit l'élément $f(u)$ de E par : $f(u) : \; n \mapsto u(n+1)$.
Montrer que l'application f ainsi définie est un endomorphisme de E et que F est stable par f.

14 Si g est l'endomorphisme de F induit par f, montrer que la matrice de g dans la base $\left(e_0, e_1, \dots, e_{p-1}\right)$ est $\mathrm{C}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}$.

15 On suppose que P admet p racines non nulles et deux à deux distinctes : λ_0, λ_1, …, λ_{p-1}.

15.a Déterminer une base de F formée de vecteurs propres de g.

15.b En déduire que, si u est élément de F, il existe des constantes complexes k_0, k_1, …, k_{p-1} telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = k_0\lambda_0^n + k_1\lambda_1^n + \cdots + k_{p-1}\lambda_{p-1}^n$$

16 *Exemple :* (On revient à la notation usuelle u_n)
Soient a, b et c trois réels distincts. Déterminer une base de l'espace vectoriel des suites définies par u_0, u_1 et u_2 et par la relation de récurrence valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+3} = (a+b+c)u_{n+2} - (ab+ac+bc)u_{n+1} + abc$$

IV Matrices vérifiant $\mathrm{rg}(\mathrm{U} - \mathrm{V}) = 1$

Dans cette partie, pour une matrice A, on notera C_{A} la matrice compagnon du polynôme χ_{A}.

17 Une matrice A est-elle nécessairement semblable à la matrice compagnon C_{A} ?

Pour tout couple (U, V) de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on considère les deux propositions suivantes, que l'on identifie chacune par un symbole :

(*) : $\mathrm{rg}\,(\mathrm{U} - \mathrm{V}) = 1$

(**) : Il existe une matrice inversible P telle que $\mathrm{U} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{C}_{\mathrm{U}}\mathrm{P}$ et $\mathrm{V} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{C}_{\mathrm{V}}\mathrm{P}$.

18 Montrer qu'un couple (U, V) de matrices distinctes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifiant (**) vérifie (*).

19 Déterminer un couple (U, V) de matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ ($n = 2$) vérifiant (*) mais ne vérifiant pas (**) et déterminer le plus grand commun diviseur des polynômes χ_{U} et χ_{V}.

Dans la suite de cette partie, (U, V) est un couple de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifiant (*) et tel que χ_{U} et χ_{V} sont deux polynômes premiers entre eux.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et de base B. On désigne par u et v les automorphismes de E tels que U (respectivement V) soit la matrice de u (respectivement v) dans la base B.

Enfin on pose $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}\,(u - v)$.

20 Montrer que H est un hyperplan vectoriel de E.

21 Soit F un sous-espace vectoriel non nul de E stable par u et par v c'est-à-dire :

$$u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F} \qquad \text{et} \qquad v(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$$

On notera u_{F} (respectivement v_{F}) l'endomorphisme induit par u (respectivement v) sur F.

On rappelle que $\chi_{u_{\mathrm{F}}}$ divise χ_u.

21.a Montrer que F n'est pas inclus dans H.

21.b On suppose que $\mathrm{F} \neq \mathrm{E}$. Montrer que $\mathrm{F} + \mathrm{H} = \mathrm{E}$ puis que l'on peut compléter une base B_{F} de F par des vecteurs de H pour obtenir une base B' de E. En utilisant les matrices de u et v dans la base B', montrer que l'on aboutit à une contradiction.

21.c Quels sont les seuls sous-espaces stables à la fois par u et par v ?

22 Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{G}_j = \{x \in \mathrm{E},\ u^j(x) \in \mathrm{H}\}$.

22.a Montrer que les sous-espaces G_j sont des hyperplans vectoriels de E.

22.b Montrer que $\displaystyle\bigcap_{j=0}^{n-2} \mathrm{G}_j \neq \{0\}$.

22.c Soit y un vecteur non nul de $\displaystyle\bigcap_{j=0}^{n-2} \mathrm{G}_j$. On pose pour $j \in [\![0, n-1]\!]$: $e_j = u^j(y)$.
Montrer que $\mathrm{B}'' = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de E.
(On pourra considérer $\mathrm{F} = \mathrm{vect}(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y))$ où p est le plus grand entier naturel non nul pour lequel la famille $\big(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y)\big)$ est libre).

22.d Montrer que la matrice de u (respectivement v) dans B'' est C_{U} (respectivement C_{V}).

22.e Conclure.

23 *Application :*
Soient u et v deux automorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n vérifiant :

$$\mathrm{rg}(u - v) = 1,\ \chi_u(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n + 1 \text{ et } \chi_v(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n - 1$$

23.a Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $u(e_i) = v(e_i) = e_i$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $v(e_n) = -u(e_n) = e_1$.

23.b On note G le sous-groupe de GL(E) engendré par u et v. Montrer que $\mathrm{card}\,\mathrm{G} \leq (2n)!$. On pourra considérer l'ensemble $\mathrm{X} = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$.