

DEVOIR À LA MAISON N°9 : CORRIGÉ

SOLUTION 1.

1. Soit $x \in [0, 1]$. Alors $\sqrt{x} \in [0, 1]$ donc $f(x) = 1 - \sqrt{x} \in [0, 1]$.
2. On procède par récurrence. Tout d'abord, $u_0 \in [0, 1]$. Supposons que $u_n \in [0, 1]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 1]$ d'après la question précédente.
3. f est clairement décroissante sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$. On en déduit que $f \circ f$ est croissante sur $[0, 1]$.
4. Pour $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
 & f(x) = x \\
 \iff & \sqrt{x} = 1 - x \\
 \iff & x = (1 - x)^2 \quad \text{car les membres de l'égalité précédente sont positifs} \\
 \iff & x^2 - 3x + 1 = 0
 \end{aligned}$$

Les racines du trinôme précédent sont $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. La première racine appartient à l'intervalle $[0, 1]$ puisque $1 \leq \sqrt{5} \leq 3$ mais la seconde racine n'appartient pas à l'intervalle $[0, 1]$ car $\sqrt{5} > 1$.

Finalement, l'unique point fixe de f sur $[0, 1]$ est $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

5. Puisque $20 \leq 25$, $5 \leq \frac{25}{4}$ puis $\sqrt{5} \leq \frac{5}{2}$ puis $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \geq \frac{1}{4} = u_0$.
6. On procède par récurrence. Tout d'abord, $u_0 \leq \alpha$. Supposons $u_{2n} \leq \alpha$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors par croissance de $f \circ f$ sur $[0, 1]$,

$$f \circ f(u_{2n}) \leq f \circ f(\alpha)$$

c'est-à-dire

$$u_{2n+2} \leq \alpha$$

On en déduit que $u_{2n} \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. On a $u_0 = \frac{1}{4}$ puis $u_1 = \frac{1}{2}$ et enfin $u_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Puisque $8 \leq 9$, $\frac{1}{2} \leq \frac{9}{16}$ puis $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{3}{4}$ et enfin $u_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{4} = u_0$.
Supposons maintenant que $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de $f \circ f$, $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) \leq f \circ f(u_{2n+2}) = u_{2n+4}$. Par récurrence, on a donc $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi (u_{2n}) est croissante. La suite (u_{2n}) est croissante et majorée par α donc elle converge.
8. Soit $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
 & f \circ f(x) = x \\
 \iff & 1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}} = x \\
 \iff & 1 - x = \sqrt{1 - \sqrt{x}} \\
 \iff & (1 - x)^2 = 1 - \sqrt{x} \quad \text{car les membres de l'égalité précédente sont positifs} \\
 \iff & \sqrt{x} = 1 - (1 - x)^2 \\
 \iff & \sqrt{x} = x(2 - x) \\
 \iff & x = x^2(2 - x)^2 \quad \text{car les membres de l'égalité précédente sont positifs} \\
 \iff & x^2(2 - x)^2 - x = 0 \\
 \iff & x(x(2 - x)^2 - 1) = 0 \\
 \iff & x(x^3 - 4x^2 + 4x - 1) = 0 \\
 \iff & x(x - 1)(x^2 - 3x + 1) = 0
 \end{aligned}$$

Or on a vu précédemment que α est la seule racine du trinôme $x^2 - 3x + 1$ dans l'intervalle $[0, 1]$. On en déduit que les points fixes de $f \circ f$ sur $[0, 1]$ sont 0, α et 1.

9. f est continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ donc $f \circ f$ est continue sur $[0, 1]$. De plus, $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ et $u_{2n} \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite (u_{2n}) converge vers un point fixe de $f \circ f$ sur $[0, 1]$, à savoir 0, α ou 1.
 Or (u_{2n}) est croissante et majorée par α donc $u_0 \leq u_{2n} \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sa limite ℓ vérifie donc $u_0 \leq \ell \leq \alpha$. A fortiori, $0 < \ell \leq \alpha$. Puisque ℓ est un point fixe de $f \circ f$, $\ell = \alpha$.
 Enfin, $u_{2n+1} = f(u_{2n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f est continue sur $[0, 1]$ donc (u_{2n+1}) converge vers $f(\alpha) = \alpha$.
 Puisque les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes les deux vers α , la suite (u_n) converge également vers α .

SOLUTION 2.

1. a. $H \cap K \subset G$ puisque $H \subset G$ et $K \subset G$.
 $e \in H$ et $e \in K$ car H et K sont des sous-groupes de G . Ainsi $e \in H \cap K$.
 Soit $(x, y) \in (H \cap K)^2$. Alors $(x, y) \in H^2$ donc $xy^{-1} \in H$ puisque H est un sous-groupe de G . De même, $(x, y) \in K^2$ donc $xy^{-1} \in K$ puisque K est un sous-groupe de G . Ainsi $xy^{-1} \in H \cap K$.
 On a donc bien montré que $H \cap K$ était un sous-groupe de G .
 b. Soit $(x, h) \in G \times (H \cap K)$. A fortiori, $(x, h) \in G \times H$ donc $x^{-1}hx \in H$ et $xhx^{-1} \in H$ car H est distingué dans G . De même, $(x, h) \in G \times K$ donc $x^{-1}hx \in K$ et $xhx^{-1} \in K$ puisque K est distingué dans G . Ainsi $x^{-1}hx \in H \cap K$ et $xhx^{-1} \in H \cap K$. Ceci prouve que $H \cap K$ est distingué dans G .
2. a. Clairement $Z(G) \subset G$.
 Pour tout $x \in G$, $ex = xe = x$ donc $e \in Z(G)$.
 Soit $(a, b) \in Z(G)^2$. Alors pour tout $x \in G$

$$\begin{aligned} abx &= axb & \text{car } b \in Z(G) \\ &= xab & \text{car } a \in Z(G) \end{aligned}$$

Ainsi $ab \in Z(G)$.

Soit $a \in Z(G)$. Alors pour tout $x \in G$, $ax = xa$ et donc $xa^{-1} = a^{-1}x$ en multipliant chaque membre de l'inégalité précédente à gauche et à droite par a^{-1} . Ainsi $a^{-1} \in Z(G)$.

On a bien prouvé que $Z(G)$ est un sous-groupe de G .

- b. Soit $(x, a) \in G \times Z(G)$. Alors, puisque $a \in Z(G)$, $x^{-1}ax = x^{-1}xa = a \in Z(G)$ et $xax^{-1} = axx^{-1} = a \in Z(G)$. $Z(G)$ est donc bien distingué dans G .
3. a. Pour tout $h \in H$, $e^{-1}he = ehe^{-1} = h \in H$ donc $e \in N_H$.
 Soient $(x, y) \in N_H^2$ et $h \in H$. Tout d'abord, $x^{-1}hx \in H$ car $x \in N_H$ et donc $y^{-1}x^{-1}hxy \in H$ puisque $y \in N_H$. Ainsi $(xy)^{-1}hxy \in H$. De même, $yhy^{-1} \in H$ car $y \in N_H$ et donc $xyhy^{-1}x^{-1} \in H$ puisque $x \in N_H$. Ainsi $xyh(xy)^{-1} \in H$. On en déduit que $xy \in N_H$.
 Soient $x \in N_H$ et $h \in H$. Alors $x^{-1}h(x^{-1})^{-1} = x^{-1}hx \in H$ et $(x^{-1})^{-1}hx^{-1} = xhx^{-1} \in H$ car $x \in N_H$. Ainsi $x^{-1} \in N_H$.
 On a donc bien prouvé que N_H est un sous-groupe de G .
 b. Puisque H est distingué dans G , alors pour tout $x \in G$ et tout $h \in H$, $x^{-1}hx \in H$ et $(x^{-1})^{-1}hx^{-1} = xhx^{-1} \in H$ donc $x \in N_H$. Ainsi $G \subset N_H$. Puisqu'on a clairement $N_H \subset G$, $N_H = G$.
 c. Soit $x \in H$. Alors pour tout $h \in H$, $x^{-1}hx \in H$ et $(x^{-1})^{-1}hx^{-1} = xhx^{-1} \in H$ car H est un sous-groupe de G . Ainsi $x \in N_H$. Ceci prouve que $H \subset N_H$.
 d. Soit $(x, h) \in N_H \times H$. Par définition de N_H , $x^{-1}hx \in H$. Ceci prouve que H est distingué dans N_H .
4. a. Soient $((x, y), (x', y')) \in G^2$. Comme $(x, x') \in (\mathbb{C}^*)^2$, $xx' \in \mathbb{C}^*$ et il est évident que $xy' + y \in \mathbb{C}$. Donc $(x, y) * (x', y') \in G$.
 Soit $((x, y), (x', y'), (x'', y'')) \in G^3$. On voit facilement que :

$$\begin{aligned} ((x, y) * (x', y')) * (x'', y'') &= (x, y) * ((x', y') * (x'', y'')) \\ &= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y) \end{aligned}$$

On vient donc de prouver que $*$ est une loi interne associative sur G .

Pour tout $(x, y) \in G$, $(1, 0) * (x, y) = (x, y) * (1, 0) = (x, y)$ donc $(1, 0)$ est élément neutre.

Pour tout $(x, y) \in G$,

$$(x, y) * \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right) * (x, y) = (1, 0)$$

donc (x, y) est inversible.

En conclusion, $(G, *)$ est bien un groupe.

b. Soit $(x, y) \in Z(G)$.

En particulier, $(x, y) * (1, 1) = (1, 1) * (x, y)$ i.e. $(x, x + y) = (x, y + 1)$ d'où $x + y = y + 1$ puis $x = 1$. De même, $(x, y) * (2, 0) = (2, 0) * (x, y)$ i.e. $(2x, y) = (2x, 2y)$ d'où $y = 2y$ puis $y = 0$. Ainsi $(x, y) = (1, 0)$.

Réciproquement, $(1, 0) \in Z(G)$ puisque $(1, 0)$ est l'élément neutre de G et que $Z(G)$ est un sous-groupe de G .

Finalement, $Z(G) = \{(1, 0)\}$.

c. Vérifions d'abord que $\mathbb{U} \times \mathbb{C}$ est un sous-groupe de G .

Tout d'abord $H \subset G$ puisque $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$.

Ensuite, $(1, 0) \in H$ puisque $1 \in \mathbb{U}$.

Soit $((x, y), (x', y')) \in G^2$. Alors $(x, x') \in \mathbb{U}^2$ puis $xx' \in \mathbb{U}$ puisque \mathbb{U} est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) . De plus,

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

donc $(x, y) * (x', y') \in H$.

Soit $(x, y) \in G$. Alors $x \in \mathbb{U}$ puis $\frac{1}{x} \in \mathbb{U}$ puisque \mathbb{U} est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) . De plus, on a vu précédemment que

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x} \right)$$

Ainsi $(x, y)^{-1} \in H$.

On a donc bien prouvé que H est un sous-groupe de G .

d. Soit $(x, y) \in G$ et $(h, k) \in H$. Alors la première composante de $(x, y)^{-1} * (h, k) * (x, y)$ sera $\frac{1}{x} \cdot h \cdot x = h$ (la seconde composante ne nous intéresse pas). Puisque $(h, k) \in H$, $h \in \mathbb{U}$ de sorte que $(x, y)^{-1} * (h, k) * (x, y) \in H$. On a donc bien prouvé que H est distingué dans G .