Devoir à la maison n°13 : corrigé

Problème 1 — Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass

1. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$.

$$\mathrm{B}_n(e_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

d'après la formule du binôme de Newton. On a donc bien $\mathrm{B}_n(e_0)(x) = e_0(x)$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \frac{k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \binom{n-1}{k-1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_n(e_1)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-(k+1)} \\
&= x\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k} (1-x)^{n-1-k} \\
&= x(x+1-x)^{n-1} = x
\end{aligned}$$

On a donc bien $\mathrm{B}_n(e_1)(x) = e_1(x)$.

c. Soit $n \geqslant 2$ et $k \in [\![2,n]\!]$:

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\binom{n}{k} = \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} = \binom{n-2}{k-2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_n(e_2)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n-1}{n}\left(\sum_{k=2}^{n} x^k (1-x)^{n-k}\right) + \frac{1}{n}\mathrm{B}_n(e_1)(x) \\
&= \frac{n-1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-2} x^{k+2} (1-x)^{n-k-2}\right) + \frac{x}{n} \\
&= \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{x}{n} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}
\end{aligned}$$

On a donc bien $\mathrm{B}_n(e_2)(x) = e_2(x) + \frac{x(1-x)}{n}$.

2. f est continue sur le segment $[0,1]$ donc bornée sur $[0,1]$. L'existence de M en découle.

3. f est continue sur le segment $[0,1]$ donc uniformément continue sur $[0,1]$. L'existence de δ en découle.

4. Soient $(u,v)\in[0,1]^2$.

- Si $|u-v|<\delta$, $|f(u)-f(v)|<\varepsilon\leqslant\varepsilon+2\mathrm{M}\left(\frac{u-v}{\delta}\right)^2$.
- Si $|u-v|\geqslant\delta$, alors $\left(\frac{u-v}{\delta}\right)^2\geqslant 1$. De plus,

$$|f(u)-f(v)|\leqslant|f(u)|+|f(v)|\leqslant 2\mathrm{M}\leqslant 2\mathrm{M}\left(\frac{u-v}{\delta}\right)^2<\varepsilon+2\mathrm{M}\left(\frac{u-v}{\delta}\right)^2$$

5. Il suffit d'utiliser à nouveau le fait que $\displaystyle\sum_{k=0}^n x^k(1-x)^{n-k}=1$.

6. Soient $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Par inégalité triangulaire et en utilisant la question **.5** :

$$|f(x)-\mathrm{B}_n(f)(x)|\leqslant\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k}$$

D'après la question **.4** :

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\varepsilon+\frac{2\mathrm{M}}{\delta^2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2$$

On développe et on obtient en remarquant que $e_0\left(\frac{k}{n}\right)=1$, $e_1\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{k}{n}$ et $e_2\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{k^2}{n^2}$:

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\varepsilon e_0\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{2\mathrm{M}}{\delta^2}\left[x^2e_0\left(\frac{k}{n}\right)-2xe_1\left(\frac{k}{n}\right)+e_2\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

On a alors :

$$|f(x)-\mathrm{B}_n(f)(x)|<\varepsilon\mathrm{B}_n(e_0)(x)+\frac{2\mathrm{M}}{\delta^2}\left(x^2\mathrm{B}_n(e_0)(x)-2x\mathrm{B}_n(e_1)(x)+\mathrm{B}_n(e_2)(x)\right)$$

En utilisant les résultats de la question **.1**, on obtient :

$$|f(x)-\mathrm{B}_n(f)(x)|<\varepsilon+\frac{2\mathrm{M}}{\delta^2}\left(x^2-2x^2+x^2+\frac{x(1-x)}{n}\right)$$

La fonction trinôme $x\mapsto x-x^2$ atteint son maximum en $\frac{1}{2}$. Celui-ci vaut donc $\frac{1}{4}$. Finalement,

$$|f(x)-\mathrm{B}_n(f)(x)|<\varepsilon+\frac{\mathrm{M}}{2n\delta^2}$$

7. Comme $\frac{\mathrm{M}}{2n\delta^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on a donc pour n suffisamment grand, $|f(x)-\mathrm{B}_n(f)(x)|<2\varepsilon$ pour tout $x\in[0,1]$ i.e. $\mathrm{S}_n<2\varepsilon$. Le raisonnement étant valable quelque soit le choix de ε, on en déduit que $\mathrm{S}_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.