

# DEVOIR SURVEILLÉ N°15

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1 – Centrale Maths I PC 2019

### Réduction de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Dans tout le problème,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ .

On note  $\mathcal{L}(E)$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des endomorphismes de  $E$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées à  $n$  lignes et  $n$  colonnes et à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

On note  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$  la matrice, dans la base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , de l'endomorphisme  $u$  de  $\mathcal{L}(E)$ .

La matrice transposée de toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est notée  $M^T$ .

On dit qu'un sous-ensemble  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{L}(E)$  est une *sous-algèbre* de  $\mathcal{L}(E)$  si  $\mathcal{A}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ , stable pour la composition, c'est-à-dire que  $u \circ v$  appartient à  $\mathcal{A}$  quels que soient les éléments  $u$  et  $v$  de  $\mathcal{A}$ . (Remarquer qu'on ne demande pas que  $\text{Id}_E$  appartienne à  $\mathcal{A}$ ).

On dit qu'une sous-algèbre  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{L}(E)$  est *commutative* si pour tous  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{A}$ ,  $u \circ v = v \circ u$ .

Une sous-algèbre  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{L}(E)$  est dite *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$  soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure) pour tout  $u$  de  $\mathcal{A}$ .

On dit qu'une partie  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est une *sous-algèbre* de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  si  $\mathcal{A}$  est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Elle est dite *commutative* si, pour toutes matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{A}$ ,  $AB = BA$ . Une sous-algèbre  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{A}$ ,  $P^{-1}MP$  soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure).

Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , l'application  $\text{mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est une bijection qui envoie une sous-algèbre (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable) de  $\mathcal{L}(E)$  sur une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable).

Un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est *strict* si  $F$  est différent de  $E$ .

On désigne par  $S_n(\mathbb{K})$  (respectivement  $A_n(\mathbb{K})$ ) l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (respectivement antisymétriques). On désigne par  $T_n(\mathbb{K})$  (respectivement  $T_n^+(\mathbb{K})$ ) le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  constitué des matrices triangulaires supérieures (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

## I Exemples de sous-algèbres

### I.1 Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- 1 Les sous-ensembles  $T_n(\mathbb{K})$  et  $T_n^+(\mathbb{K})$  sont-ils des sous-algèbres de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ?
- 2 Les sous-ensembles  $S_2(\mathbb{K})$  et  $A_2(\mathbb{K})$  sont-ils des sous-algèbres de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  ?
- 3 On suppose  $n \geq 3$ . Les sous-ensembles  $S_n(\mathbb{K})$  et  $A_n(\mathbb{K})$  sont-ils des sous-algèbres de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ?

### I.2 Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $p$  et  $\mathcal{A}_F$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$  qui stabilisent  $F$ , c'est-à-dire  $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(F) \subset F\}$ .

- 4 Montrer que  $\mathcal{A}_F$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$ .
- 5 Montrer que  $\dim \mathcal{A}_F = n^2 - pn + p^2$ .  
On pourra considérer une base de  $E$  dans laquelle la matrice de tout élément de  $\mathcal{A}_F$  est triangulaire par blocs.
- 6 Déterminer  $\max_{1 \leq p \leq n-1} (n^2 - pn + p^2)$ .

### I.3 Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

Soit  $\Gamma(\mathbb{K})$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  constitué des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  où  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ .

- 7 Montrer que  $\Gamma(\mathbb{K})$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .
- 8 Montrer que  $\Gamma(\mathbb{R})$  n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- 9 Montrer que  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ . En déduire que  $\Gamma(\mathbb{C})$  est une sous-algèbre diagonalisable de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

## II Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose  $n \geq 2$ .

Pour tout  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ , on pose

$$J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le coefficient d'indice  $(i, j)$  de  $J(a_0, \dots, a_{n-1})$  est  $a_{i-j}$  si  $i \geq j$  et  $a_{i-j+n}$  si  $i < j$ .

Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de la forme  $J(a_0, \dots, a_{n-1})$  où  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ .

Soit  $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  défini par  $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$  si  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  et  $\varphi(e_n) = e_1$ , où  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

## II.1 Calcul des puissances de J

- 10** Préciser les matrices J et  $J^2$ . (on pourra distinguer les cas  $n = 2$  et  $n \geq 2$ ).
- 11** Préciser les matrices  $J^n$  et  $J^k$  pour  $2 \leq k \leq n - 1$ .
- 12** Quel est le lien entre la matrice  $J(a_0, \dots, a_{n-1})$  et les  $J^k$ , où  $0 \leq k \leq n - 1$  ?

## II.2 Une base de $\mathcal{A}$

- 13** Montrer que  $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$  est une base de  $\mathcal{A}$ .
- 14** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que M commute avec J si et seulement si M commute avec tout élément de  $\mathcal{A}$ .
- 15** Montrer que  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

## II.3 Diagonalisation de J

- 16** Déterminer le polynôme caractéristique de J.
- 17** Montrer que J est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
- 18** La matrice J est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?
- 19** Déterminer les valeurs propres complexes de J et les espaces propres associés.

## II.4 Diagonalisation de $\mathcal{A}$

- 20** Le sous-ensemble  $\mathcal{A}$  est-il une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ?
- 21** Montrer qu'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que, pour toute matrice  $A \in \mathcal{A}$ , la matrice  $P^{-1}AP$  est diagonale.

Soit  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ . On note  $Q \in \mathbb{R}[X]$  le polynôme  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ .

- 22** Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice  $J(a_0, \dots, a_{n-1})$  ?

## III Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

On se propose de montrer dans cette partie que la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est égale à  $n^2 - n + 1$ .

Dans toute cette partie,  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  strictement incluse dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et on note  $d$  sa dimension. On a donc  $d < n^2$ .

### III.1 Un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

La trace de toute matrice M de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est notée  $\text{tr}(M)$ .

- 23** Montrer que l'application définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par  $(A, B) \mapsto \langle A | B \rangle = \text{tr}(A^T B)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On désigne  $\mathcal{A}^\perp$  l'orthogonal de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et on note  $r$  sa dimension.

- 24** Quelle relation a-t-on entre  $d$  et  $r$  ?

Jusqu'à la fin de cette partie, on fixe une base  $(A_1, \dots, A_r)$  de  $\mathcal{A}^\perp$ .

- 25** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que M appartient à  $\mathcal{A}$  si et seulement si, pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $\langle A_i | M \rangle = 0$ .
- 26** Montrer que pour toute matrice  $N \in \mathcal{A}$  et tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on a  $N^T A_i \in \mathcal{A}^\perp$ .

### III.2 Conclusion

Soit  $\mathcal{A}^\top = \{M^\top \mid M \in \mathcal{A}\}$ .

- 27** Montrer que  $\mathcal{A}^\top$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de même dimension que  $\mathcal{A}$ .

On note  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices colonnes à  $n$  lignes et à coefficients réels. On rappelle qu'à toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est associé canoniquement l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  défini par  $X \mapsto MX$ .

- 28** Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et soit  $F = \text{vect}(A_1X, \dots, A_rX)$ . Montrer que  $F$  est stable par les endomorphismes de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  canoniquement associés aux éléments de  $\mathcal{A}^\top$ .

- 29** Montrer que  $d \leq n^2 - n + 1$  et conclure.

## IV Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ . Soit  $\mathcal{A}$  une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$  constituée d'endomorphismes nilpotents. On admet dans cette partie le théorème ci-dessous, qui sera démontré dans la partie V.

### Théorème de Burnside

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$ . Soit  $\mathcal{A}$  une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$ . Si les seuls sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par tous les éléments de  $\mathcal{A}$  sont  $\{0\}$  et  $E$ , alors  $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ .

On se propose de démontrer par récurrence forte sur  $n \in \mathbb{N}^*$  que si tous les éléments de  $\mathcal{A}$  sont nilpotents, alors  $\mathcal{A}$  est trigonalisable.

- 30** Montrer que le résultat est vrai si  $n = 1$ .

On suppose désormais que  $n \geq 2$  et que le résultat est vrai pour tout entier naturel  $d \leq n - 1$ .

- 31** Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel  $V$  de  $E$  distinct de  $E$  et  $\{0\}$  stable par tous les éléments de  $\mathcal{A}$ .

On fixe dans la suite un tel sous-espace vectoriel et on note  $r$  sa dimension. Soit aussi  $s = n - r$ .

- 32** Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que pour tout  $u \in \mathcal{A}$ ,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}$$

où  $A(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ ,  $B(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$  et  $D(u) \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ .

- 33** Montrer que  $\{A(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$  constituée de matrices nilpotentes et que  $\{D(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$  constituée de matrices nilpotentes.

- 34** Montrer que  $\mathcal{A}$  est trigonalisable.

- 35** Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle les matrices des éléments de  $\mathcal{A}$  appartiennent à  $T_n^+(\mathbb{C})$ .

## V Le théorème de Burnside

On se propose de démontrer dans cette partie le théorème de Burnside énoncé dans la partie IV.

On fixe un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n \geq 2$ .

On dira qu'une sous-algèbre  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{L}(E)$  est irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de  $\mathcal{A}$  sont  $\{0\}$  et  $E$ .

Soit  $\mathcal{A}$  une sous-algèbre irréductible de  $\mathcal{L}(E)$ . Il s'agit donc de montrer que  $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ .

## V.1 Recherche d'un élément de rang 1

**36** Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $E$ ,  $x$  étant non nul. Montrer qu'il existe  $u \in \mathcal{A}$  tel que  $u(x) = y$ .  
On pourra considérer dans  $E$  le sous-espace vectoriel  $\{u(x) \mid u \in \mathcal{A}\}$ .

**37** Soit  $v \in \mathcal{A}$  de rang supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe  $u \in \mathcal{A}$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que :

$$0 < \text{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \text{rg}(v)$$

*Considérer  $x$  et  $y$  dans  $E$  tels que la famille  $(v(x), v(y))$  soit libre, justifier l'existence de  $u \in \mathcal{A}$  tel que  $u \circ v(x) = y$  et considérer l'endomorphisme induit par  $v \circ u$  sur  $\text{Im}(v)$ .*

**38** En déduire l'existence d'un élément de rang 1 dans  $\mathcal{A}$ .

## V.2 Conclusion

Soit  $u_0 \in \mathcal{A}$  de rang 1. On peut donc choisir une base  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $E$  telle que  $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  soit une base de  $\ker u_0$ .

**39** Montrer qu'il existe  $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{A}$  de rang 1 tels que  $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

**40** Conclure.