Raisonnements et ensembles

Exercice 1.

Soient P et Q deux propositions logiques.

1. Montrer que
$$(P \implies Q) \equiv ((\text{NON } P) \text{ OU } Q)$$
2. En déduire que
$$(P \implies Q) \equiv (\text{NON } Q \implies \text{NON } P)$$

Exercice 2.

Ecrire la négation des propositions suivantes et préciser la validité de ces énoncés.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists m \in \mathbb{N}, \quad m$ divise n ;
2. $\exists m \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad m$ divise n ;
3. $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \quad \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, \quad au + bv = 1$;
4. $\exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall \epsilon > 0, \quad |a| \leqslant \epsilon$;
5. $\forall \epsilon > 0, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad |a| \leqslant \epsilon$;
6. $\forall M > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad 2^n \geqslant M$.

Exercice 3.

On note $\mathcal{A}$ l'assertion suivante.
$$\forall x \in]0, +\infty[, \ \forall y \in]x, +\infty[, \ \exists z \in]0, +\infty[, \ x < z < y$$

1. Écrire la négation de $\mathcal{A}$.
2. L'assertion $\mathcal{A}$ est-elle vraie ? Prouvez votre réponse.

Exercice 4.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = (n + 1)(u_{n+1} + u_n)$$
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (n - 1)! \leqslant u_n \leqslant n!$$

Exercice 5.

Prouver que $\forall n \geqslant 1$,
$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Exercice 6.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant n$.

Exercice 7.

Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n ensembles distincts deux à deux. Montrer que l'un au moins des ensembles ne contient aucun autre.

Exercice 8.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant n!$.

Exercice 9.

On considère la suite (F_n) définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et par la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

1. Calculer F_2, F_3, F_4 et F_5.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 5$, $F_n \geqslant n$. Que peut-on en déduire quant à la limite de la suite (F_n) ?
3. **a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_{n+1}$.

   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1} = F_{2n}$.

   c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k} = F_{2n-1}$.
4. **a.** Résoudre l'équation $x^2 = x + 1$. On notera α la solution positive et β la solution négative. Que vaut le produit $\alpha\beta$?

   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$.

   c. Soit $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$ tel que $p \geqslant r$. Montrer que $F_p F_{q+r} - (-1)^r F_{p-r} F_q = F_{p+q} F_r$.

EXERCICE 10.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^3}\right) \leqslant 3-\frac{1}{n}$$

EXERCICE 11.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 12.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Prouver que $(\forall \varepsilon > 0, \quad |a| < \varepsilon) \implies a = 0$.

EXERCICE 13.

Soient $a_1, a_2, \dots, a_9$ neuf entiers naturels tels que

$$a_1 + \dots + a_9 = 90.$$

Prouver qu'il existe trois de ces nombres dont la somme est supérieure à 30.

EXERCICE 14.

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que n est pair *si et seulement si* n^2 est pair.
2. Prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

EXERCICE 15.

Prouver que le nombre $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

> **REMARQUE.** Un nombre réel r est dit rationnel lorsqu'il existe deux entiers p et q tels que $r = p/q$. Un réel est dit irrationnel dans le cas contraire.

EXERCICE 16.

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P à coefficients réels tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = P(x).$$

EXERCICE 17.

Déterminer les fonctions impaires f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f - 1$ soit paire.

EXERCICE 18.

Déterminer les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(n) + f(m).$$

EXERCICE 19.

Déterminer les solutions f de l'équation fonctionnelle suivante

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) + f(y) = 2f(x-y) + 1$$

EXERCICE 20.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe un couple de réels (x, y) tel que

$$x^2 + y^2 = \alpha xy \quad \text{et} \quad xy \neq 0.$$

EXERCICE 21.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1,\ u_1 = 7,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Démontrer l'existence de deux réels a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + b2^n$$

EXERCICE 22.

Soient s, p deux nombres réels. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que s et p soient respectivement la somme et le produit de deux nombres réels.

EXERCICE 23.

Déterminer les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(n)f(m).$$

EXERCICE 24.

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $|x+2| \geqslant \dfrac{1-x}{1+x}$.
2. $x + 1 \leqslant \sqrt{x+2}$.

EXERCICE 25.

Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x + 1 \geqslant |x-1|$.

EXERCICE 26.

Soient x et y deux réels. Montrer que $|x+y| = |x| + |y| \iff xy \geqslant 0$.

EXERCICE 27.

Prouver que

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \implies \alpha = \beta = 0.$$

EXERCICE 28.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{|x-3|} = |x-1|$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{|x-3|} \leqslant x - 1$.

EXERCICE 29.

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

EXERCICE 30.

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\sqrt{|x^2 - 4|} \leqslant |x-1|$;
2. $\dfrac{x+1}{x-1} \leqslant \dfrac{x-2}{x+2}$;
3. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}} \leqslant \sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$;

EXERCICE 31.

Déterminer tous les réels tels que $\sqrt{2x - x^2} < x - 1$.

EXERCICE 32.

Prouver que $\forall n \geqslant 1$,

$$\frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

EXERCICE 33.★★

Prouver que $\forall a \in]0,1[, \quad \forall n \geqslant 2$,

$$1 - na < (1-a)^n < \frac{1}{1+na}.$$

EXERCICE 34.

Prouver que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad , \quad \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

EXERCICE 35.★★

Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$. Etablir les inégalités suivantes

1. $(a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geqslant 4$;
2. $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$;
3. $a + \dfrac{b}{a} \geqslant 2\sqrt{b}$.

EXERCICE 36.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $|x+3| = 5$;
2. $|x+3| \leqslant 5$;
3. $|x+3| > 5$;
4. $|2x-5| = |x^2-4|$;
5. $|2x-4| \leqslant |x+2|$;
6. $|x+12| \leqslant |x^2-8|$.

EXERCICE 37.★

Prouver que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$1 + |xy - 1| \leqslant \left[1 + |y-1|\right]\left[1 + |x-1|\right].$$

EXERCICE 38.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$|x^2 - 3| > 2.$$

EXERCICE 39.

Soient x et y des réels tels que $0 \leqslant x \leqslant y$. Prouver que

$$0 \leqslant x \leqslant \sqrt{xy} \leqslant y.$$

Exercice 40.

Soient a et b deux réels positifs.

1. Montrer que $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. En déduire que $\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$.

Exercice 41.★

Soient a et b des réels positifs. Pour tout λ appartenant à $[0, 1]$, on pose

$$a_\lambda = \lambda a + (1-\lambda)b \qquad\qquad b_\lambda = \lambda b + (1-\lambda)a$$

Montrer que pour tout réel $\lambda \in [0, 1]$,

$$\sqrt{a_\lambda} + \sqrt{b_\lambda} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Exercice 42.

Soient E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E tels que

$$A \cup B = A \cap C\ ,\ B \cup C = B \cap A \ \text{ et } \ C \cup A = C \cap B.$$

Montrer que $A = B = C$.

Exercice 43.

Soient A, B et C trois ensembles. Comparer

$$X = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

et

$$Y = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A).$$

Exercice 44.

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. Montrer que

$$A = B \quad \textit{si et seulement si} \quad A \cup B = A \cap B.$$

Exercice 45.

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ les deux ensembles définis par

$$\mathcal{E} = \left\{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{m},\ (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$$

et

$$\mathcal{F} = \left\{1 - \frac{1}{n(n+1)},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Prouver que $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$. Y-a-t-il égalité des deux ensembles ?

Exercice 46.

On définit les trois ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| < 1\right\} \\ A_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y| < 1\right\} \\ A_3 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| + |y| < 1\right\} \end{aligned}$$

1. Représenter ces trois ensembles.
2. En déduire une démonstration géométrique de

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (|x+y| < 1 \text{ ET } |x-y| < 1) \iff |x| + |y| < 1$$

Exercice 47.

Soient A, B et C trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.

Exercice 48.

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Montrer que D ne peut pas s'écrire comme produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 49.

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Démontrer les affirmations suivantes :

1. $\left(A \cap B = A \cap C \text{ ET } A \cup B = A \cup C\right) \implies B = C$
2. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$

EXERCICE 50.

1. Décrire de deux manières l'ensemble des nombres rationnels.
2. Décrire de deux manières l'ensemble des entiers relatifs impairs.
3. Décrire de trois manières l'ensemble des nombres complexes imaginaires purs.
4. Décrire l'ensemble des fonctions paires définies sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 51.

Décrire de manière formelle les ensembles de fonctions suivants :

1. l'ensemble des applications périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de période $T > 0$ donnée ;
2. l'ensemble des applications périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
3. l'ensemble des applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 52.

Soient X, Y et Z trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que

$$(X \cup Z) \cap (Y \cup \overline{Z}) = (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z)$$