Devoir à la maison n° 17 : corrigé

Problème 1 — Intégrales de Wallis et formule de Stirling

Partie I – Intégrales de Wallis

1. Le calcul ne pose aucune difficulté, on trouve $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

2. On intègre par parties

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= [-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^n(t)dt \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)dt \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^n(t) - \sin^{n+2}(t))dt \\
&= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}
\end{aligned}$$

D'où la relation de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

3. D'après la relation de récurrence établie précédemment :

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 3\times 1}{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2} I_0 \\
&= \frac{(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times(2n-3)\times\cdots\times 4\times 3\times 2\times 1}{[(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2]^2} I_0 \\
&= \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2} I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
I_{2n+1} &= \frac{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times 5\times 3} I_1 \\
&= \frac{[(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2]^2}{(2n+1)\times(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times\cdots\times 5\times 4\times 3\times 2} I_1 \\
&= \frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!} I_1 = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

4. Puisque $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$$

Ainsi après intégration sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, $I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. On a donc en particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

Soit encore, d'après la relation de récurrence obtenue ci-dessus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

5. Par une récurrence sans difficulté, on prouve à l'aide de l'inégalité précédente que pour tout n positif, $I_n > 0$. D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$$

De plus,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

d'où , en appliquant le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$$

et donc $I_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} I_n$.

6. On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_nI_{n+1}$$

La suite $((n+1)I_nI_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante égale à $\frac{\pi}{2}$ car $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

7. On a $(n+1)I_{n+1}I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} nI_n^2$ d'après ce qui précède. Ainsi,

$$\lim_{n \to +\infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}$$

Puisque la fonction racine carrée est continue en $\frac{\pi}{2}$ et que I_n est positive,

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Ainsi $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Partie II – Formule de Stirling

1. On a $v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$. Or

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc $v_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. Comme $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$ et que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge. Par télescopage, cela signifie que la suite $(\ln(u_n))_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite $\lambda \in \mathbb{R}$. Par continuité de l'exponentielle, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $l = e^\lambda > 0$.

3. On déduit de la question précédente que $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{l}$.
En utilisant l'expression factorielle de I_{2n} trouvée en **??**, on obtient $I_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi l}{\sqrt{2n}}$. Or d'après la question **??**, on a $I_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$. On en déduit $l = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Ainsi $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}n^n e^{-n}\sqrt{n}$.