Devoir surveillé n°10

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1. **a.** Puisque A est la matrice de f dans une base, $\det(f) = \det(\mathrm{A})$. Ainsi

$$\begin{aligned}\det(f) &= \begin{vmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{vmatrix} \\ &= -u\begin{vmatrix} 0 & 2v \\ -1 & u \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} v & 0 \\ -1 & u \end{vmatrix} && \text{en développant par rapport à la première colonne} \\ &= -u \times 2v + 2 \times uv = 0\end{aligned}$$

b. Puisque $\det(\mathrm{A}) = 0$, A n'est pas inversible de sorte que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) < 3$. Mais les deux premières colonnes de A sont clairement non colinéaires donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) \geq 2$. Ainsi $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2$. De plus, $\left(\begin{pmatrix} -u \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$ et donc $(-u - 2\mathrm{X}, v - \mathrm{X}^2)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

On voit que $\begin{pmatrix} v \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{A})$ donc $v + u\mathrm{X} + \mathrm{X}^2 \in \mathrm{Ker}(f)$. Or, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$ donc $(v + u\mathrm{X} + \mathrm{X}^2)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

2. **a.** A nouveau,

$$\begin{aligned}
\det(g) &= \begin{vmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3w \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= -9\begin{vmatrix} 1 & w & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 1 & w \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} && \text{en factorisant par 3 la première et la dernière colonne} \\
&= -9\begin{vmatrix} 1 & w & 0 & 0 \\ 0 & -1-w & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 1 & w \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} && \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\
&= 9\begin{vmatrix} 1+w & 2w & 0 \\ 2 & 1 & w \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 9\left((1+w)\begin{vmatrix} 1 & w \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2w & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right) && \text{en développant par rapport à la première colonne} \\
&= 9((w+1)^2 - 4w) = 9(w-1)^2
\end{aligned}$$

Avec les notations de l'énoncé, on a donc $w_0 = 1$.

b. Supposons donc $w = 1$. Alors

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Puisque $\det(\mathrm{B}) = 0$, $\mathrm{rg}(\mathrm{B}) < 4$. Les trois premières colonnes de B sont clairement linéairement indépendantes donc $\mathrm{rg}(\mathrm{B}) \geq 3$. Ainsi $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(\mathrm{B}) = 3$ puis $\dim \mathrm{Ker}(g) = 1$. On remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{A})$ donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{A})$. Par conséquent, $(\mathrm{X}^3 + 3\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} + 1)$ i.e. $((\mathrm{X}+1)^3)$ est une base de $\mathrm{Ker}(g)$.

3. φ est clairement linéaire.
Comme $\deg(\mathrm{Q}) = 2$ et Q est unitaire, il existe $(u, v) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^2 + u\mathrm{X} + v$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors

$$\varphi(\mathrm{X}^k) = 2k\mathrm{X}^{k-1}(\mathrm{X}^2 + u\mathrm{X} + v) - n\mathrm{X}^k(2\mathrm{X} + u) = 2(k-n)\mathrm{X}^{k+1} + u(2k-n)\mathrm{X}^k + 2vk\mathrm{X}^{k-1}$$

Ainsi pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\deg(\varphi(\mathrm{X}^k)) = k + 1 \leq n$ et $\deg(\varphi(\mathrm{X}^n)) \leq n$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(\mathrm{X}^k) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
Comme $(\mathrm{X}^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est stable par φ par linéarité de φ.
Finalement, φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

4. **a.** D'après la question précédente,

$$\varphi(1) = -2u - 4\mathrm{X} \qquad \varphi(\mathrm{X}) = 2v - 2\mathrm{X}^2 \qquad \varphi(\mathrm{X}^2) = 4v\mathrm{X} + 2u\mathrm{X}^2$$

La matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ est donc 2A.

b. D'après la question ,

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{vect}(\mathrm{X}^2 + u\mathrm{X} + v) = \mathrm{vect}(\mathrm{Q})$$

5. **a.** On calcule à nouveau

$$\varphi(1) = -6 - 6\mathrm{X} \qquad \varphi(\mathrm{X}) = 2w - 2\mathrm{X} - 4\mathrm{X}^2 \qquad \varphi(\mathrm{X}^2) = 4w\mathrm{X} + 2\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}^3 \qquad \varphi(\mathrm{X}^3) = 6w\mathrm{X}^2 + 6\mathrm{X}^3$$

La matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ est donc 2B.

b. Si $w = 1$, d'après la question , $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{vect}((X+1)^3)$.
Si $w \neq 1$, $\det(B) = 9(w-1)^2 \neq 0$ donc φ est bijectif et $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

6. On a donc $Q = (X - \alpha)^2$.

a. La famille $((X-\alpha)^k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ car à degrés échelonnés. De plus, $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\varphi((X-\alpha)^k) = 2k(X-\alpha)^{k-1}(X-\alpha)^2 - 2n(X-\alpha)^k(X-\alpha) = 2(k-n)(X-\alpha)^{k+1}$$

On en déduit que

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{vect}((X-\alpha)^{k+1})_{0\leq k\leq n-1} = \mathrm{vect}((X-\alpha)^k)_{1\leq k\leq n}$$

Notamment, $\mathrm{rg}(\varphi) = n$ et $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 1$. Comme $(X-a)^n \in \mathrm{Ker}(\varphi)$,

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{vect}((X-a)^n)$$

7. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme indiqué dans l'énoncé

$$\left(\frac{P^2}{Q^n}\right)' = \frac{2P'PQ^n - nP^2Q'Q^{n-1}}{Q^{2n}} = \frac{P\varphi(P)}{Q^{n+1}}$$

Ainsi $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ si et seulement si $\left(\frac{P^2}{Q}\right)' = 0$, autrement dit si et seulement si $\frac{P^2}{Q}$ est constante i.e. P^2 et Q^n sont colinéaires.

8. Supposons d'abord que Q n'admet aucune racine réelle. Q est donc irréductible. Supposons que $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$. Soit P un polynôme non nul de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors, d'après la question **7**, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $P^2 = \lambda Q^n$. Si D est un diviseur irréductible unitaire de P, alors D divise $P^2 = \lambda Q^n$ et donc Q. Ainsi $D = Q$ car Q est irréductible et unitaire. Q est donc le seul diviseur irréductible unitaire de P. Il existe donc $\mu \in \mathbb{R}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $P = \mu Q^k$. Mais alors $\mu^2 Q^{2k} = P^2 = \lambda Q^n$ puis $n = 2k$ par unicité de la décomposition en facteurs irréductible. Notamment n est pair et $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{vect}(Q^k)$. On vérifie aisément que $Q^k \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{vect}(Q^k)$. On a également montré que si n est impair, alors $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$.
Supposons maintenant que Q possède deux racines distinctes α et β i.e. $Q = (X-\alpha)(X-\beta)$. On suppose à nouveau que $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$ et on se donne un polynôme non nul P de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. On peut alors affirmer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $P^2 = \lambda(X-\alpha)^n(X-\beta)^n$. On prouve comme précédemment que $X-\alpha$ et $X-\beta$ sont les seuls diviseurs irréductibles unitaires de P. Il existe donc $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que $P = \mu(X-\alpha)^p(X-\beta)^q$. Par conséquent, $\mu^2(X-\alpha)^{2p}(X-\beta)^{2q} = P^2 = \lambda(X-\alpha)^n(X-\beta)^n$. Par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles, $n = 2p = 2q$. Notamment n est pair et $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{vect}(Q^{n/2})$ comme précédemment. A nouveau, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ si n est impair.

Solution 1

1. Posons $u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors
$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(n-1) - \ln(n) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/n^2)$$
car $\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{=} x + \mathcal{O}(x^2)$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série télescopique $\sum u_n - u_{n-1}$ converge et donc la suite (u_n) converge.

2. Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_{2\mathrm{N}} &= \sum_{n=1}^{2\mathrm{N}} \frac{(-1)^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n-1} && \text{en séparant termes d'indices pairs et impairs} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{H}_\mathrm{N} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n-1} \\
&= \mathrm{H}_\mathrm{N} - \frac{1}{2}\mathrm{H}_\mathrm{N} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n-1} \\
&= \mathrm{H}_\mathrm{N} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n-1} \\
&= \mathrm{H}_\mathrm{N} - \sum_{n=1}^{2\mathrm{N}} \frac{1}{n} && \text{en regroupant termes d'indices pairs et impairs} \\
&= \mathrm{H}_\mathrm{N} - \mathrm{H}_{2\mathrm{N}}
\end{aligned}$$

3. Remarquons que pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$,
$$\mathrm{S}_{3\mathrm{N}+3} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3}$$
Or
$$\begin{aligned}
\frac{1}{3n+1} &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
\frac{1}{3n+2} &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
\frac{1}{3n+3} &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$
donc $\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3}$ diverge donc puisque la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n}$ diverge. La suite (S_{3n+3}) diverge donc de même que la suite (S_n) puisqu'elle en est extraite. Par conséquent, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon_n}{n}$ diverge.

4. D'après la question **1**,
$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$
donc
$$\mathrm{H}_{2n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \ln(2) + \gamma + o(1)$$
Finalement,
$$\mathrm{S}_{2n} = \mathrm{H}_n - \mathrm{H}_{2n} \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(2) + o(1)$$
Donc (S_{2n}) converge vers $-\ln 2$. Par ailleurs, $\mathrm{S}_{2n+1} = \mathrm{S}_{2n} - \frac{1}{2n+1}$ donc (S_{2n+1}) converge également vers $-\ln 2$. Finalement, (S_n) converge vers $-\ln 2$ i.e. la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge et sa somme vaut $-\ln 2$.

5. Remarquons que de manière général, $\frac{1}{n+1} = \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x$.

a. En particulier,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} &= \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (x^{4n} - x^{4n+2})\, dx \\ &= \int_0^1 (1-x^2) \sum_{n=0}^{N} x^{4n}\, dx \\ &= \int_0^1 (1-x^2) \cdot \frac{1-x^{4N+4}}{1-x^4}\, dx \qquad \text{(somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)} \\ &= \int_0^1 \frac{1-x^{4N+4}}{1+x^2}\, dx \qquad \text{car } 1-x^4 = (1-x^2)(1+x^2)\end{aligned}$$

b. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \frac{1-x^{4N+4}}{1+x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{x^{4N+4}}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^{4N+4}}{1+x^2}\, dx$$

De plus, pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq \frac{x^{4N+4}}{1+x^2} \leq x^{4N+4}$$

donc

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{4N+4}}{1+x^2}\, dx \leq \int_0^1 x^{4N+4}\, dx = \frac{1}{4N+5}$$

On en déduit que

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{4N+4}}{1+x^2}\, dx = 0$$

puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} = \frac{\pi}{4}$$

c. On procède de la même manière.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} &= \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (x^{4n+1} - x^{4n+3})\, dx \\ &= \int_0^1 x(1-x^2) \sum_{n=0}^{N} x^{4n}\, dx \\ &= \int_0^1 x(1-x^2) \cdot \frac{1-x^{4N+4}}{1-x^4}\, dx \qquad \text{(somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)} \\ &= \int_0^1 \frac{x(1-x^{4N+4})}{1+x^2}\, dx \qquad \text{car } 1-x^4 = (1-x^2)(1+x^2)\end{aligned}$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^{4N+4})}{1+x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{x\, dx}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{x^{4N+5}}{1+x^2}\, dx$$

D'une part,

$$\int_0^1 \frac{x\, dx}{1+x^2} = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

D'autre part, pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq \frac{x^{4N+5}}{1+x^2} \leq x^{4N+5}$$

donc

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{4N+5}}{1+x^2}\, dx \leq \int_0^1 x^{4N+5}\, dx = \frac{1}{4N+6}$$

On en déduit que

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{4N+5}}{1+x^2}\, dx = 0$$

puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} = \frac{1}{2}\ln 2$$

d. Puisque, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{S}_{4\mathrm{N}+4} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4}$$

la suite (S_{4n}) converge vers $\mathrm{S} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$. Comme

$$\mathrm{S}_{4n+1} = \mathrm{S}_{4n} + \frac{1}{4n+1} \qquad \mathrm{S}_{4n+2} = \mathrm{S}_{4n} + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+2} \qquad \mathrm{S}_{4n+3} = \mathrm{S}_{4n} + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+3}$$

les suites (S_{4n}), (S_{4n+1}), (S_{4n+2}), (S_{4n+3}) convergent toutes vers S.
En conclusion, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge et sa somme est $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.

6. **a.** Tout d'abord,

$$\int_0^1 \frac{1+x+x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

D'une part,

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\ln(1+x^3)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ln 2$$

D'autre part, comme $1 + x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) && \text{car arctan est impaire} \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^1 \frac{1+x+x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln 2$$

b. En raisonnant comme précédemment

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{6n+1} - \frac{1}{6n+4} &= \int_0^1 (1-x^3)\frac{1-x^{6\mathrm{N}+6}}{1-x^6}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1-x^{6\mathrm{N}+6}}{1+x^3}\,\mathrm{d}x \\
&\underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} \\
\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{6n+2} - \frac{1}{6n+5} &= \int_0^1 x(1-x^3)\frac{1-x^{6\mathrm{N}+6}}{1-x^6}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x(1-x^{6\mathrm{N}+6})}{1+x^3}\,\mathrm{d}x \\
&\underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^3} \\
\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{6n+3} - \frac{1}{6n+6} &= \int_0^1 x^2(1-x^3)\frac{1-x^{6\mathrm{N}+6}}{1-x^6}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x^2(1-x^{6\mathrm{N}+6})}{1+x^3}\,\mathrm{d}x \\
&\underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^3}
\end{aligned}
$$

En sommant les relations précédentes, on en déduit que (S_{6n+6}) converge vers $\int_0^1 \frac{1+x+x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln 2$ de même que (S_{6n}). Comme précédemment, on montre que (S_{6n}), (S_{6n+1}) ,(S_{6n+2}) ,(S_{6n+3}) ,(S_{6n+4}) ,(S_{6n+5}) convergent toutes vers cette limite donc (S_n) également.

En conclusion, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge et sa somme est $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln 2$.