Devoir surveillé n°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

Partie I –

1. **a.** Puisque $\sum u_n$ converge, la suite (R_n) converge vers 0. Par opérations, la suite de terme général $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}_{n-1}}+\sqrt{\mathrm{R}_n}}$ diverge vers $+\infty$.
De plus, $\mathrm{R}_{n-1} - \mathrm{R}_n = u_n \geq 0$ donc (R_n) est décroissante. Par croissance de la racine carrée, la suite de terme général $\sqrt{\mathrm{R}_{n-1}} + \sqrt{\mathrm{R}_n}$ est également décroissante et α est donc croissante.
Enfin,

$$\alpha_n u_n = \frac{u_n}{\sqrt{\mathrm{R}_{n-1}} + \sqrt{\mathrm{R}_n}} = \frac{u_n(\sqrt{\mathrm{R}_{n-1}} - \sqrt{\mathrm{R}_n})}{\mathrm{R}_{n-1} - \mathrm{R}_n} = \sqrt{\mathrm{R}_{n-1}} - \sqrt{\mathrm{R}_n}$$

La série $\sum \alpha_n u_n$ est donc une série télescopique convergente puisque la suite de terme général $\sqrt{\mathrm{R}_n}$ converge vers 0.

b. On pose cette fois-ci $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{S}_n}+\sqrt{\mathrm{S}_{n-1}}}$. Puisque $\sum u_n$ est une série à termes positifs divergente, la suite (S_n) diverge vers $+\infty$. Par opérations, la suite α converge vers 0.
De plus, $\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1} = u_n \geq 0$ donc (S_n) est croissante. Par croissance de la racine carrée, la suite de terme général $\sqrt{\mathrm{S}_{n-1}} + \sqrt{\mathrm{S}_n}$ est également croissante et α est donc décroissante.
Enfin,

$$\alpha_n u_n = \frac{u_n}{\sqrt{\mathrm{S}_n} + \sqrt{\mathrm{S}_{n-1}}} = \frac{u_n(\sqrt{\mathrm{S}_n} - \sqrt{\mathrm{S}_{n-1}})}{\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}} = \sqrt{\mathrm{S}_n} - \sqrt{\mathrm{S}_{n-1}}$$

La série $\sum \alpha_n u_n$ est donc une série télescopique convergente puisque la suite de terme général $\sqrt{\mathrm{S}_n}$ converge vers 0.

2. **a.**

b. Comme α est majorée, $\alpha_k|u_k| \underset{k\to+\infty}{=} \mathcal{O}(|u_k|)$. Comme $u \in \mathrm{S}_{\mathrm{AC}}$, $\sum |u_n|$ est une série à termes positifs convergente. Par conséquent, $\sum \alpha_n|u_n|$ converge (absolument) et $\mathrm{N}_\alpha(u)$ est bien définie.
Comme α est positive, N_α est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Soient $u \in \mathrm{S}_{\mathrm{AC}}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\mathrm{N}_\alpha(\lambda u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n|\lambda u_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n|u_n| = |\lambda|\mathrm{N}_\alpha(u)$$

Soit $(u, v) \in \mathrm{S}_{\mathrm{AC}}^2$. Par inégalité triangulaire, $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme α est positive, $\alpha_n|u_n + v_n| \leq \alpha_n|u_n| + \alpha_n|v_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent

$$\mathrm{N}_\alpha(u + v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n|u_n + v_n| \leq \sum_{n=0} \alpha_n|u_n| + \alpha_n|v_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n|u_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n|v_n| = \mathrm{N}_\alpha(u) + \mathrm{N}_\alpha(v)$$

Enfin, soit $u \in \mathrm{S}_{\mathrm{AC}}$ tel que $\mathrm{N}_\alpha(u) = 0$. On a donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n|u_n| = 0$. Comme tous les termes sont positifs, $\alpha_n|u_n| = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or α est strictement positive donc ne s'annule pas. Ainsi $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ i.e. $u = 0$.
Tout ce qui précède montre que N_α est bien une norme sur S_{AC}.

c. On a clairement $N_\alpha(\delta^p) = \alpha_p$.

d. D'après la question précédente, $N_\alpha(\delta^p) = \frac{1}{2^p}$ et $N_\beta(\delta^p) = \frac{1}{p!}$. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} \frac{N_\alpha(\delta_p)}{N_\beta(\delta_p)} = +\infty$ par comparaison de suites usuelles. Les normes N_α et N_β ne sont donc pas équivalentes.

e. On va montrer que N_α et N_β sont équivalentes si et seulement si il existe deux réels strictement positifs m et M tels que $m\alpha_n \leq \beta_n \leq M\alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que N_α et N_β soient équivalentes. Alors il existe des réels strictement positifs m et M tels que $mN_\alpha \leq N_\beta \leq MN_\alpha$. Notamment, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $mN_\alpha(\delta^p) \leq N_\beta(\delta^p) \leq MN_\alpha(\delta^p)$ i.e. $m\alpha_p \leq \beta_p \leq M\alpha_p$.
Réciproquement, supposons qu'il existe des réels strictement positifs m et M tels que $m\alpha_n \leq \beta_n \leq M\alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $u \in S_{AC}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ m\alpha_n|u_n| \leq \beta_n|u_n| \leq M\alpha_n|u_n|$$

Puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty} m\alpha_n|u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n|u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} M\alpha_n|u_n|$$

ou encore $mN_\alpha(u) \leq N_\beta(u) \leq MN_\alpha(u)$. Ceci étant vrai pour tout $u \in S_{AC}$, $mN_\alpha \leq N_\beta \leq MN_\alpha$. Les normes N_α et N_β sont donc équivalentes.

Partie II –

1. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = q^{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{q}{1-q}\cdot q^n$$

b. La suite (R_n) est également géométrique de raison q avec $|q| < 1$. La série $\sum R_n$ est donc convergente.
De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \frac{q}{1-q}\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{q}{(1-q)^2}$$

2. **a.**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} &= (n-1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha} \\
&= n^{1-\alpha}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - 1\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} n^{1-\alpha}\cdot\frac{\alpha-1}{n} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} (\alpha-1)n^{-\alpha} = \frac{\alpha-1}{n^\alpha}
\end{aligned}$$

b. Comme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série à termes positifs convergente, on obtient par sommation de la relation d'équivalence précédente :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1} \frac{\alpha-1}{k^\alpha} = (\alpha-1)R_n$$

Le membre de gauche est le reste d'une série télescopique et $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 0$ donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Finalement,

$$R_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\alpha-1}{n^{\alpha-1}}$$

c. Comme $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ est une série à termes positifs, les séries $\sum R_n$ et $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ sont de même nature. Connaissant les résultats sur les séries de Riemann, $\sum R_n$ converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ i.e. $\alpha > 2$.

d. Supposons donc $\alpha > 2$. Tout d'abord, les $v_{k,n}$ sont positifs. Comme $R_n = \sum_{k=1}^{+\infty} v_{k,n}$ et que $\sum R_n$ converge, on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} v_{k,n} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} v_{k,n} == \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

3. **a.** On reconnaît une série exponentielle. Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = e^a$.

b. On va utiliser le théorème de Fubini. Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. Alors la série $\sum_{\in\mathbb{N}} |v_{n,k}|$ converge puisque $v_{k,n} = 0$ dès que $n \geq k$. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |v_{k,n}| = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{|a|^k}{k!} = k\frac{|a|^k}{k!} = \frac{|a|^k}{(k-1)!}$$

On reconnaît à nouveau le terme général d'une série exponentielle donc $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{|a|^k}{(k-1)!}$ converge. D'après le théorème de Fubini, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} v_{k,n}\right)$ converge i.e. la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} R_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} v_{k,n} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} v_{k,n} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k-1} \frac{a^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^k}{(k-1)!} = a\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = ae^a$$

4. **a.** Pour la culture, il s'agit du principe de sommation d'Abel.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} ku_k &= \sum_{k=1}^{n} k(R_{k-1} - R_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} kR_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} kR_k\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)R_k - \sum_{k=1}^{n} kR_k\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)R_k - \sum_{k=1}^{n} kR_k\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} R_k - nR_n\end{aligned}$$

b. Comme u est positive, (nR_n) également. Ainsi, d'après l'égalité précédente,

$$\sum_{k=1}^{n} ku_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} R_k$$

Or $\sum R_n$ est une série à termes positifs convergente donc

$$\sum_{k=1}^{n} ku_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} R_k$$

La suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} ku_k$ est donc croissante (puisque les u_k sont positifs) et majorée : elle converge. Par conséquent, la série $\sum nu_n$ converge.
On constate maintenant que

$$0 \leq nR_n = n\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} ku_k$$

Or le membre de droite est le reste de rang n de la série convergente $\sum nu_n$: il converge donc vers 0. D'après le théorème des gendarmes, la suite (nR_n) converge vers 0.

Partie III –

1. **a.** Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Alors

$$\left|(AB)_{i,j}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |A_{i,k}||B_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^{n} N(A)N(B) = nN(A)N(B)$$

Par conséquent, $N(AB) \leq nN(A)N(B)$.

b. Récurrence évidente. Faites la quand même.

c. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq \mathrm{N}\left(\frac{\mathrm{A}^p}{p!}\right) = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{A}^p)}{p!} \leq \frac{n^{p-1}\mathrm{N}(\mathrm{A})^p}{p!} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(n\mathrm{N}(\mathrm{A}))^p}{p!}$$

Or $\sum \frac{(n\mathrm{N}(\mathrm{A}))^p}{p!}$ est une série convergente (série exponentielle ou règle de d'Alembert) donc $\sum \mathrm{N}\left(\frac{\mathrm{A}^p}{p!}\right)$ converge également. Autrement dit $\sum \frac{\mathrm{A}^p}{p!}$ converge absolument. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, $\sum \frac{\mathrm{A}^p}{p!}$ converge.

2. **a.** Un calcul montre que $\mathrm{A}^2 = 4\mathrm{A} - 3\mathrm{I}$.

b. $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 3$ est un polynôme annulateur de A. On effectue alors la division euclidienne de X^p par P : il existe deux polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que

$$\mathrm{X}^p = \mathrm{PQ} + \mathrm{R} \qquad \text{et} \qquad \deg(\mathrm{R}) < \deg(\mathrm{P}) = 2$$

En évaluant cette égalité en les racines de P, à savoir 1 et 3, on obtient $\mathrm{R}(1) = 1$ et $\mathrm{R}(3) = 3^p$. Comme $\deg \mathrm{R} < 2$, il existe $(\alpha_p, \beta_p) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{R} = \alpha_p \mathrm{X} + \beta_p$. On trouve $\alpha_p = \frac{3^p-1}{2}$ et $\beta_p = \frac{3-3^p}{2}$. Par conséquent,

$$\mathrm{A}^p = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{Q}(\mathrm{A}) + \mathrm{R}(\mathrm{A}) = \mathrm{R}(\mathrm{A}) = \alpha_p \mathrm{A} + \beta_p \mathrm{I}$$

c.

$$\exp(\mathrm{A}) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^p}{p!} = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\alpha_p}{p!}\right)\mathrm{A} + \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\beta_p}{p!}\right)\mathrm{I} = \frac{e^3 - e}{2}\mathrm{A} + \frac{3e - e^3}{2}\mathrm{I}$$

d. Notons $a_p = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{\alpha_p}{p!}$ et $b_p = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{\beta_p}{p!}$. D'après la question **II.3.b**, les séries $\sum a_p$ et $\sum b_p$ converge et

$$\sum_{p=0}^{+\infty} a_p = \frac{3e^3 - e}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} b_p \qquad = \frac{3e - 3e^3}{2}$$

Comme $\mathrm{R}_p = a_p \mathrm{A} + b_p \mathrm{I}$, la série $\sum \mathrm{R}_p$ converge et

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{R}_p = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p\right)\mathrm{A} + \left(\sum_{p=0}^{+\infty} b_p\right)\mathrm{I} = \frac{3e^3 - e}{2}\mathrm{A} + \frac{3e - 3e^3}{2}\mathrm{I}$$