Devoir à la maison n°2 : corrigé

Solution 1.

1. Si k est un multiple de n, $\omega^r = 1$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk} = n$.

   Si k n'est pas un multiple de n, $\omega^r \neq 1$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk} = \dfrac{1-\omega^{rn}}{1-\omega^r} = 0$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\phi(k+n) = \omega^{(k+n)^2} = \omega^{k^2}\omega^{2kn}\omega^{n^2} = \omega^{k^2} = \phi(k)$.

3. On a $G = \sum_{k=0}^{n-1} \phi(k)$. Comme ϕ est n-périodique, la somme reste la même si on somme sur n entiers consécutifs. On a donc $G = \sum_{k=j}^{j+n-1} \omega^{k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+j)^2}$.

4. Puisque $\omega \in \mathbb{U}$, $\overline{\omega} = \dfrac{1}{\omega}$. On en déduit que $\overline{G} = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-j^2}$.

$$G\overline{G} = G\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-j^2} = \sum_{j=0}^{n-1} G\omega^{-j^2}$$

   Mais en utilisant la question précédente

$$\begin{aligned} G\overline{G} &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+j)^2}\omega^{-j^2} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}\omega^{2kj} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{2kj} \end{aligned}$$

   Puisque n est impair, $2k$ est un multiple de n *si et seulement si* k est lui-même un multiple de n. Or $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc $2k$ est un multiple de n *si et seulement si* $k = 0$. En utilisant la première question, on en déduit que $G\overline{G} = n$ puis $|G| = \sqrt{n}$.

Solution 2.

1. a. Le point A est situé sur le cercle de centre O et de rayon 1 donc $|a| = 1$. On a donc $a\overline{a} = 1$ puis $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$. Comme les points B, C, D sont également sur $\mathcal{C}$, $\overline{b} = \dfrac{1}{b}$, $\overline{c} = \dfrac{1}{c}$, $\overline{d} = \dfrac{1}{d}$.

b. Posons $Z = \frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\overline{Z} &= \frac{\overline{d}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{a}}\frac{\overline{c}-\overline{b}}{\overline{d}-\overline{b}} \\
&= \frac{\frac{1}{d}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{d}-\frac{1}{b}} \\
&= \frac{\frac{a-d}{ad}}{\frac{a-c}{ac}}\frac{\frac{b-c}{bc}}{\frac{b-d}{bd}} \\
&= \frac{a-d}{a-c}\frac{b-c}{b-d}\frac{ac}{ad}\frac{bd}{bc} \\
&= \frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b} = Z
\end{aligned}$$

Ainsi Z est réel.

c. Puisque Z est réel, $\arg(Z) \equiv 0[\pi]$. On a donc $\arg\left(\frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b}\right) \equiv 0[\pi]$ puis $\arg\frac{d-a}{c-a} \equiv \arg\frac{d-b}{c-b}[\pi]$ ce qui équivaut à $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})[\pi]$.

2. On reprend la question précédente à l'envers et on montre que Z est réel.

3. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
& & Z &= \frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b} \\
&\iff & \frac{d-a}{d-b} &= Z\frac{c-a}{c-b} \\
&\iff & d-a &= Z\frac{c-a}{c-b}d - Z\frac{c-a}{c-b}b \\
&\iff & d\left(1-Z\frac{c-a}{c-b}\right) &= a - Z\frac{c-a}{c-b}b \\
&\iff & d\left(c-b-Z(c-a)\right) &= a(c-b)-Zb(c-a) && \text{en multipliant par } c-b \\
&\iff & d &= \frac{a(c-b)-Zb(c-a)}{c-b-Z(c-a)}
\end{aligned}$$

4. On a encore $\overline{a} = \frac{1}{a}$, $\overline{b} = \frac{1}{b}$, $\overline{c} = \frac{1}{c}$. De plus, comme Z est réel, $\overline{Z} = Z$.

$$\begin{aligned}
\overline{d} &= \frac{\overline{a}(\overline{c}-\overline{b}) - \overline{Z}\overline{b}(\overline{c}-\overline{a})}{\overline{c}-\overline{b}-\overline{Z}(\overline{c}-\overline{a})} \\
&= \frac{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right) - \frac{Z}{b}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}-Z\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)} \\
&= \frac{b-c-Z(a-c)}{a(b-c)-Zb(a-c)} && \text{en multipliant numérateur et dénominateur par } abc \\
&= \frac{c-b-Z(c-a)}{a(c-b)-Zb(c-a)} \\
&= \frac{1}{d}
\end{aligned}$$

On en déduit que $d\overline{d} = 1$ et donc que $|d| = 1$. Ainsi D est sur le cercle $\mathcal{C}$.

Solution 3.

Via la formule du binôme

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k$$

En séparant les termes d'indices pairs et impairs,

$$(1+i)^n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} i^{2k} + \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} i^{2k+1} = S_n + iT_n$$

D'autre part, $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ donc

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{ni\pi}{4}}$$

En identifiant parties réelle et imaginaire, on en déduit que

$$S_n = 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \qquad T_n = 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$