Espaces préhilbertiens réels

Produits scalaires

Exercice 1.

Prouver que les applications suivantes sont des produits scalaires sur E :

1. sur $E = \mathbb{R}_2[X]$,
$$(P, Q) \mapsto \langle P|Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1) ;$$
2. pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, pour $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts,
$$\Psi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k) ;$$
3. pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, pour $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,
$$(P, Q) \mapsto \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k) ;$$
4. pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$,
$$(P, Q) \mapsto \langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt ;$$
5. sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$,
$$(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt ;$$
6. pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = M_n(\mathbb{R})$,
$$\langle A|B \rangle = \text{tr}({}^tAB) ;$$
7. sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$,
$$(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt ;$$
8. sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$,
$$(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt.$$

Exercice 2.★

On définit sur l'espace vectoriel réel E des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$,
$$\langle f|g \rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Etablir que $\forall f \in E$,
$$\left(f(1) + \int_0^1 f'(t)dt\right)^2 \leqslant 2\left(f^2(1) + \int_0^1 f'^2(t)dt\right)$$

Bases orthonormales

Exercice 3.★

Sur l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}_2[X]$, on définit
$$\langle P|Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Trouver une base orthonormée de E par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt appliqué à la base canonique de E.
3. Trouver une *autre* base orthonormée de E en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange.

Exercice 4.

Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 1$.

1. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E. Montrer que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.
2. En déduire que $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.
3. Soient $x_1, \dots, x_{n-1}$ $n - 1$ vecteurs de E. Montrer que l'application $x \in E \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$ est une forme linéaire sur E.
4. En déduire qu'il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \langle u, x \rangle$. On appelle u le produit vectoriel des vecteur $x_1, \dots, x_{n-1}$ et on note $u = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$.
5. Montrer que l'application $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in E^{n-1} \mapsto x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$ est une application $n - 1$-linéaire alternée.

EXERCICE 5.

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $\langle .,. \rangle$ de $\mathbb{R}_n[X]^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2,\ \langle P,Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner sans calcul une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

EXERCICE 6.

Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs non nuls de E tels que
$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$$

1. Montrer que
$$\forall (x,y) \in E^2,\ \ \langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i \rangle \langle y|e_i \rangle.$$
2. En déduire que
$$\forall x \in E,\ \ x = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i \rangle e_i.$$
3. Etablir que $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormée de E.

Sous-espaces orthongonaux

EXERCICE 7.☆

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $(f,g) \in E^2$, on pose
$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

1. Prouver $\langle \cdot|\cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On pose
$$F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}.$$
   a. Soit $f \in F^\perp$. Montrer que $f^2 \in F^\perp$.
   b. Prouver que $F^\perp = \{0\}$.
3. E est-il de dimension finie ?

EXERCICE 8.

Montrer que $s : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tM \end{cases}$ est une symétrie orthogonale pour le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire défini par $\langle A,B \rangle = \operatorname{tr}({}^tAB)$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 9.

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

1. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^\perp$.

EXERCICE 10.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E.

1. Montrer que $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$ et que, si F et G sont de dimension finie, $G^\perp \subset F^\perp \implies F \subset G$.
2. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
3. Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ et que, si E est de dimension finie, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Projecteurs orthogonaux

EXERCICE 11.
Soit u un vecteur unitaire d'un espace euclidien E. On note U le vecteur colonne représentant u dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\operatorname{vect}(u)$ dans $\mathcal{B}$.

EXERCICE 12.✯✯
Soient E un espace euclidien et p une projection de E. Etablir l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1. p est orthogonale ;
2. $\forall x, y \in \mathrm{E},\ \langle p(x)|y\rangle = \langle x|p(y)\rangle$;
3. $\forall x \in \mathrm{E},\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

EXERCICE 13.✯
On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire usuel. Donner la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel F d'équations,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Optimisation

EXERCICE 14.✯
Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ muni de sa structure euclidienne canonique (ie la base canonique est orthonormée). On note F le sous-espace vectoriel de E des polynômes s'annulant en 1.

1. Déterminer une base de F.
2. Calculer $\delta = \inf_{\mathrm{P}\in\mathrm{F}} \|\mathrm{X} - \mathrm{P}\|$.

EXERCICE 15.
Calculer le minimum de $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & \displaystyle\int_0^\pi (\sin x - ax^2 - bx)^2 \, dx \end{array}$.

EXERCICE 16.
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) du produit scalaire $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto {}^t\mathrm{XY}$. On se donne $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^m$. On pose $\mathrm{E} = \left\{\|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|^2, \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n\right\}$ et $\mathrm{K} = \inf \mathrm{E}$.

1. Justifier l'existence de K.
2. On considère le système linéaire $(\mathcal{S})\ :\ \mathrm{AX} = \mathrm{B}$. On appelle *pseudo-solution* de $\mathcal{S}$ tout élément Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|\mathrm{AY} - \mathrm{B}\|^2 = \mathrm{K}$. Montrer que si $(\mathcal{S})$ admet une solution, les pseudo-solutions de $(\mathcal{S})$ sont les solutions de $(\mathcal{S})$.
3. On associe à $(\mathcal{S})$ le système $(\mathcal{S}')\ :\ {}^t\mathrm{AAX} = {}^t\mathrm{AB}$. Montrer qu'un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$ *si et seulement si* il est solution de $(\mathcal{S}')$.
4. Montrer que $\operatorname{rg} {}^t\mathrm{AA} = \operatorname{rg} \mathrm{A}$.
5. Montrer que si $\operatorname{rg} \mathrm{A} = n$, $(\mathcal{S})$ admet une unique pseudo-solution.

EXERCICE 17.
Soient E un espace euclidien et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E. Pour $x \in \mathrm{E}$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^p \|x - x_i\|^2$. Montrer que f atteint son minimum en un unique point que l'on précisera.

EXERCICE 18.
Soient E un espace euclidien et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E. Pour $x \in \mathrm{E}$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^p \|x - x_i\|^2$. Montrer que f atteint son minimum en $m = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^p x_i$.

Automorphismes orthogonaux

EXERCICE 19.✯
Soient E un plan vectoriel euclidien orienté, r une rotation de E et s une réflexion. Calculer $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$.

EXERCICE 20.
Soient E un espace euclidien orienté de dimension trois muni d'une base orthonormée directe

$$\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

On note f la rotation d'axe $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Calculer la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

EXERCICE 21.

Déterminer la nature et les caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique vaut

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 22.

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Prouver l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1. $\langle x|y\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle u(x)|u(y)\rangle = 0$;
2. $\exists k \geqslant 0,\ \ \forall x \in \mathrm{E},\ \ \|u(x)\| = k\|x\|$;
3. u est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

EXERCICE 23.

Soient H et K deux hyperplans d'un espace euclidien E. On note s_{H} et s_{K} les symétries orthogonales par rapport à H et K. Montrer que s_{H} et s_{K} commutent *si et seulement si* $\mathrm{H} = \mathrm{K}$ ou $\mathrm{H}^{\perp} \subset \mathrm{K}$.

EXERCICE 24.

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

1. Trouver les $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que

$$\forall u, v \in \mathrm{E},\ f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$$

2. Trouver les $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que

$$\forall u, v \in \mathrm{E},\ f(u \wedge v) = -f(u) \wedge f(v)$$

EXERCICE 25.

Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x+2y-3z = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 26.

Soit E un espace euclidien de dimension 2.

1. On sait que la matrice d'une réflexion de E dans une base orthonormée est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Quelle est l'interprétation géométrique de θ ?
2. Déterminer une condition portant sur l'angle entre leurs axes pour que la *somme* de deux réflexions soit encore une réflexion.

EXERCICE 27.

Soit u un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E. On pose $v = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - u$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont orthogonaux et supplémentaires.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, u^k est un automorphisme orthogonal.

EXERCICE 28.

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ engendré par la famille (e_1, e_2, e_3) où

$$e_1 : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad e_2 : t \mapsto \cos(2\pi t) \qquad e_3 : t \mapsto \sin(2\pi t)$$

1. Montrer que $\Phi : (f, g) \mapsto 2\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E.
3. Pour tout réel x, on définit l'application τ_x qui à tout élément f de E associe g tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(x - t)$$

   a. Montrer que τ_x est un endomorphisme de E. Donner sa matrice relativement à $\mathcal{B}$.
   b. Montrer que τ_x est un automorphisme orthogonal de E.
   c. Caractériser géométriquement τ_x.

EXERCICE 29.

Soit E un espace euclidien et f une application de E dans E (non supposée linéaire) telle que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

Montrer que f est la composée d'une translation et d'un automorphisme orthogonal.

EXERCICE 30.

Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On note A la matrice de f dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E. Montrer que f est une symétrie orthogonale *si et seulement si* A est une matrice orthogonale symétrique.

Matrices orthogonales

EXERCICE 31.

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

EXERCICE 32.

Soit $\mathrm{O} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right)$ une matrice orthogonale réelle de taille n où A et D sont deux blocs carrés de tailles respectives p et q. Montrer que $(\det \mathrm{A})^2 = (\det \mathrm{D})^2$.

EXERCICE 33.

Soient A et B les matrices, dans deux bases orthonormales, d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Montrer que $\mathrm{tr}({}^t\mathrm{AA}) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{BB})$.

EXERCICE 34.

1. Soit X une matrice colonne réelle de taille n. Montrer que ${}^t\mathrm{XX} \in \mathbb{R}_+$ et que ${}^t\mathrm{XX} = 0$ implique $\mathrm{X} = 0$.

2. Soit M une matrice antisymétrique réelle de taille n. Montrer que $\mathrm{I}_n + \mathrm{M}$ est inversible.

3. On pose $\mathrm{A} = (\mathrm{I}_n - \mathrm{M})(\mathrm{I}_n + \mathrm{M})^{-1}$. Montrer que A est orthogonale.

EXERCICE 35.

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{com}(\mathrm{A})$ *si et seulement si* $\mathrm{A} = 0$ ou $\mathrm{A} \in \mathrm{SO}(n)$.

Familles de vecteurs

EXERCICE 36.

Soit E un espace euclidien. A une famille $(x_1, \dots, x_p)$ de p vecteurs de E, on associe la matrice $\mathrm{G}_p(x_1, \dots, x_p) = ((x_i|x_j))_{1 \leq i,j \leq p}$.

1. Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est liée *si et seulement si* $\det \mathrm{G}_p(x_1, \dots, x_p) = 0$.

2. On suppose maintenant que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre et on note $\mathrm{F} = \mathrm{vect}(x_1, \dots, x_p)$.

   a. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F et $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$. Montrer que $\mathrm{G}_p(x_1, \dots, x_p) = {}^t\mathrm{AA}$.

   b. En déduire que $\det \mathrm{G}_p(x_1, \dots, x_p) > 0$.

3. Soit $x \in \mathrm{E}$. On note π la projection orthogonale sur F.

   a. Montrer que $\det \mathrm{G}_{p+1}(x, x_1, \dots, x_p) = \det \mathrm{G}_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p)$.

   b. Montrer que
   $$d(x, \mathrm{F})^2 = \frac{\det \mathrm{G}_{p+1}(x, x_1, \dots, x_p)}{\det \mathrm{G}_p(x_1, \dots, x_p)}$$

EXERCICE 37.

Soient E un espace euclidien, p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E tels que

$$\forall i, j \in [\![1, p]\!],\ i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle < 0$$

1. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i x_i = 0$. On pose $\mathrm{I} = \{i \in [\![1, p-1]\!] \mid \alpha_i > 0\}$ et $\mathrm{J} = \left\{j \in [\![1, p-1]\!] \mid \alpha_j < 0\right\}$. En considérant $u = \sum_{i \in \mathrm{I}} \alpha_i x_i$ et $v = \sum_{j \in \mathrm{J}} \alpha_j x_j$, montrer que l'un des ensembles I ou J est vide (on convient qu'une somme indexée sur l'ensemble vide est nulle).

2. Montrer que I et J sont vides.

3. En déduire que la famille $(x_1, \dots, x_{p-1})$ est libre.

EXERCICE 38.

Soit E un espace euclidien. A toute famille $(x_1, \dots, x_p)$ de p vecteurs de E, on associe la matrice $G(x_1, \dots, x_p) = \left(\langle x_i, x_j\rangle\right)_{1\le i,j\le p}$.

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $F = \text{vect}(x_1, \dots, x_p)$. On note $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$. Montrer que $G(x_1, \dots, x_p) = {}^tAA$.
2. En déduire que $\det G(x_1, \dots, x_p) \geq 0$ et que $(x_1, \dots, x_p)$ est liée *si et seulement si* $\det G(x_1, \dots, x_p) = 0$.
3. On se donne $x \in E$. Montrer que
$$\det G(x_1, \dots, x_p, x) = d(x, F)^2 \det G(x_1, \dots, x_p)$$

EXERCICE 39.

On pose $Q_n = (1 - X^2)^n = (1 + X)^n(1 - X)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On notera $\varphi(P, Q) = \langle P, Q\rangle$ par la suite.
2. Soit n et k deux entiers tels que $0 \leq k < n$. Montrer que $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$.
3. On pose $P_n = Q_n^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_k)_{0\le k\le n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Endomorphismes remarquables

EXERCICE 40.

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Une application $u : E \to E$ est dite *antisymétrique* si
$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, u(y)\rangle + \langle y, u(x)\rangle = 0$$
On note A(E) l'ensemble des applications antisymétriques de E.

REMARQUE. Rien à voir avec les applications *multilinéaires* antisymétriques !

1. Soit $u \in A(E)$. Montrer que u est linéaire.
2. Soit $u : E \to E$. Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
   (i) u est linéaire et $\forall x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$;
   (ii) u est antisymétrique ;
   (iii) u est linéaire et sa matrice dans une base orthonormée est antisymétrique.
3. Montrer que A(E) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.
4. Soit $u \in A(E)$. Montrer que $\text{Im}\, u$ est l'orthogonal de $\text{Ker}\, u$.
5. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u alors $F^\perp$ est également stable par u.

EXERCICE 41.

Soient E un espace euclidien, p une projection orthogonale et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Montrer que la matrice A de p dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique.

EXERCICE 42.

Montrer que le rang d'une matrice antisymétrique réelle est pair.

EXERCICE 43.

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que
$$\forall x \in E,\ \langle u(x)|x\rangle = 0.$$
Montrer que
$$(\text{Ker}(u))^\perp = \text{Im}(u).$$

EXERCICE 44.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit (a, b) une famille libre de E. Soit f l'application

$$x \longmapsto \langle a|x\rangle b + \langle b|x\rangle a.$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \ \ \langle f(x)|y\rangle = \langle x|f(y)\rangle.$$

2. Déterminer le noyau et le rang de f.

3. On pose $\mathrm{F} = \mathrm{Im}(f)$.

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E stable par f et en donner une base.

b. Déterminer la matrice de l'endomorphisme g induit par f sur F dans cette base.

EXERCICE 45.

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{E}, \ \ \|u(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Etablir que

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u - id_\mathrm{E}) \oplus \mathrm{Im}(u - id_\mathrm{E}).$$

Divers

EXERCICE 46.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On travaille dans l'espace des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \mathrm{tr}({}^t\mathrm{AB})$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $|\,\mathrm{tr}(\mathrm{A})| \leq \sqrt{n}\|\mathrm{A}\|$.

3. **a.** Quel est l'orthogonal de l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques ?

b. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer la distance de A à $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients de A ?

4. Soit $\mathrm{U} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|\mathrm{UA}\| = \|\mathrm{AU}\| = \|\mathrm{A}\|$.

5. Montrer que pour $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|\mathrm{AB}\| \leq \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$.

EXERCICE 47.

Soit E un espace euclidien de dimension n et $u_1, \dots, u_{n+1}$ des vecteurs non nuls de E faisant un angle constant α_n (non nul) deux à deux. Que vaut α_n ?

EXERCICE 48.

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}({}^t\mathrm{AA}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,\mathrm{A}$.

EXERCICE 49.

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ en posant

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

pour $\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n$ et $\mathrm{Q} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \mathrm{X}^n$.

2. On pose $\mathrm{F} = \mathrm{vect}(1 + \mathrm{X}^n, n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

3. Montrer que $\mathrm{F}^\perp = \{0\}$. Conclusion ?

Inégalités

EXERCICE 50.

Soit E un espace euclidien. On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} \setminus \{0\} & \to & \mathrm{E} \setminus \{0\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{\|x\|^2} \end{array}$.

1. Montrer que pour $x, y \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$, $\|f(x) - f(y)\| = \dfrac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|}$.

2. Soient $a, b, c, d \in \mathrm{E}$. Montrer que

$$\|a - c\|\|b - d\| \leq \|a - b\|\|c - d\| + \|b - c\|\|a - d\|.$$

EXERCICE 51.

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et de base orthonormée $\mathcal{B}$. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Montrer que

$$|\det_\mathcal{B}(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|$$

Exercice 52.

Soit $n \geqslant 1$. Prouver que

$$\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right]^2 \leqslant n\left[1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right].$$

Exercice 53.✯

Soient $n \geqslant 1$ et $x_1, \dots, x_n > 0$. Prouver que

$$\left[\sum_{k=1}^{n} x_k\right]\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right] \geqslant n^2.$$

Exercice 54.✯✯

Soit $n \geqslant 2$. Prouver que

$$\frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2}.$$

Exercice 55.

On considère l'ensemble E des fonctions continues et strictement positives sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\inf_{f\in \mathrm{E}}\left(\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right)$$

existe et est atteint.

Exercice 56.

Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose $f(a) = 0$. Montrer que

$$\int_a^b f^2(u)du \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(u)du.$$