Semaine du 07/03 au 11/03

1 Cours

Applications linéaires

Définition et premières propriétés Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'une forme linéaire. Exemples en géométrie, dans les espaces de fonctions, dans les espaces de suites et dans les $\mathbb{K}^n$. Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$. Structure d'anneau de $\mathcal{L}(E)$.

Isomorphismes Définition d'un isomorphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme. Définition d'un automorphisme et groupe linéaire $GL(E)$.

Images directe et réciproque par une application linéaire L'image directe ou réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel. Noyau et image d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le noyau et l'image. Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base.

Image d'une famille de vecteurs L'image d'une base est une famille génératrice de l'image. Une application linéaire est injective/surjective/bijective **si et seulement si** l'image d'une base est une famille libre/une famille génératrice/une base.

Formes linéaires et hyperplans Définition d'un hyperplan comme noyau de forme linéaire non nulle. Lien entre hyperplans et droites vectorielles.

Applications linéaires en dimension finie En dimension finie, deux espaces sont de même dimension **si et seulement si** ils sont isomorphes. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le rang. Hyperplans en dimension finie. Si f est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de **même** dimension **finie**, alors f bijective $\iff$ f injective $\iff$ f surjective. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme. Si E et F sont de même dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective **si et seulement si** il existe $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ **ou** $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie.

Homothéties, projecteurs et symétries Définition d'une homothétie. Définition d'un projecteur. Si p est la projection sur F parallèlement à G, alors $F = \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}\, p$. Caractérisation des projecteurs ($p \circ p = p$). Définition d'une symétrie. Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. Caractérisation des symétries ($s \circ s = \mathrm{Id}_E$).

2 Méthodes à maîtriser

- Calculer avec des endomorphismes comme dans tout anneau **non commutatif** et **non intègre**.
- Utiliser le noyau ou l'image d'une application linéaire pour prouver son injectivité ou sa surjectivité.
- Les équivalences $x \in \mathrm{Ker}\, f \iff f(x) = 0$ et $y \in \mathrm{Im}\, f \iff \exists x, y = f(x)$ doivent être automatiques.
- Utiliser la dimension pour faciliter la preuve de la bijectivité (injectivité + espaces d'arrivée et de départ de même dimension)
- Utiliser le théorème du rang pour passer de résultats sur le noyau à des résultats sur l'image et vice-versa.
- Utiliser la caractérisation des projecteurs/symétries $p^2 = p$ ou $s^2 = \mathrm{Id}$).
- Déterminer la forme explicite d'une projection/symétrie étant donné deux sous-espaces supplémentaires (analyse / synthèse).

3 Questions de cours

- Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $p+q$ soient un projecteur. Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$ puis que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$ et $\ker(p+q) = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$.
- Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les endomorphismes de E commutant avec tous les endomorphismes de E sont les homothéties.
- Soient f et g deux applications linéaires de E dans F de rang fini. Montrer que $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
- Soient E un espace vectoriel de dimension n et $H_1, \dots, H_m$ des hyperplans de E. Montrer que $\dim \bigcap_{i=1}^{n} H_i \geqslant n - m$.
- Montrer que tout sous-espace vectoriel de dimension m d'un espace vectoriel de dimension n est l'intersection de $n - m$ hyperplans.