Semaine du 27/01 au 31/01

1 Cours

Matrices

Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ Définition d'une matrice à n lignes et p colonnes. Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Produit matriciel : bilinéarité et associativité. Transposition : linéarité, involutivité , transposée d'un produit. Matrices définies par blocs et produit de telles matrices.

Matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$ Structure d'anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Élément neutre I_n. Matrices inversibles. Groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Inverse d'un produit de matrices inversibles. Inverse d'une transposée de matrice inversible. Trace : linéarité, trace d'une transposée, trace d'un produit.

Matrices particulières de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ Matrices diagonales, triangulaires supérieures et inférieures. Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$. Matrices symétriques et antisymétriques. Structure de sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Représentation des vecteurs Matrice colonne d'un vecteur dans une base. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. L'application qui à un vecteur associe sa matrice dans une base est un isomorphisme.

Opérations sur les lignes et colonnes d'une colonne Interprétation matricielle des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes d'une matrice. Calcul de l'inverse par pivot de Gauss. Calcul du rang par pivot de Gauss.

Représentation des applications linéaires Matrice d'une application linéaire dans des bases. L'application qui à une application linéaire associe sa matrice dans des bases est un isomorphisme. Interprétation matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire. La matrice d'une composée est le produit des matrices. Une application linéaire est bijective **si et seulement si** sa matrice est inversible et la matrice de la bijection réciproque est l'inverse de la matrice.

Représentation des endomorphismes Matrice d'un endomorphisme dans une base. L'application qui à un endomorphisme associe sa matrice dans une base est un isomorphisme d'algèbres. $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles et inverses l'une de l'autre **si et seulement si** $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$ **ou** $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$.

Noyau, image et rang de matrices Noyau, image et rang d'une matrice. Critère d'inversibilité d'une matrice carrée : noyau nul. Invariance du rang par multiplication par une matrice inversible. Invariance du rang par transposition. Caractérisation de l'inversibilité par le rang.

Changement de base Matrice de passage d'une base vers une autre base. Formule de changement de bases pour les vecteurs, les applications linéaires et les endomorphismes. Matrices équivalentes. Deux matrices sont équivalentes **si et seulement si** elles ont même rang. Matrices semblables. Deux matrices semblables ont même trace. Trace d'un endomorphisme.

Systèmes linéaires Interprétation matricielle d'un système linéaire. Structure de l'ensemble des solutions d'un système. Système de Cramer : définition et unicité de la solution.

Déterminants

Groupe symétrique Permutation. Structure de groupe de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$. Transposition et cycle. Décomposition d'une permutation en produits de transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Signature.

Applications multilinéaires Définition et exemples. Application multilinéaire symétrique, antisymétrique, alternée. Une application multilinéaire est antisymétrique **si et seulement si** elle est alternée.

Déterminant d'une famille de vecteurs Le déterminant $\det_{\mathcal{B}}$ dans une base $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel E de dimension n est l'unique forme n-linéaire alternée sur E valant 1 en $\mathcal{B}$. Toute forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$. Formule de changement de base. Une famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs de E est une base **si et seulement si** $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

Déterminant d'un endomorphisme Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ est indépendant de $\mathcal{B}$. C'est le déterminant de f noté $\det(f)$. Propriétés : $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$; $f \in \mathrm{GL(E)} \iff \det(f) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$; $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$ où $n = \dim \mathrm{E}$.

Déterminant d'une matrice carrée Définition comme déterminant des vecteurs colonnes dans la base canonique. Le déterminant d'un endomorphisme est égal au déterminant de sa matrice dans une base. Le déterminant dans une base d'un famille de vecteurs est le déterminant de cette famille de vecteurs dans cette base. Propriétés : $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})$; $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(\mathrm{A}) = 0$ et dans ce cas, $\det(\mathrm{A}^{-1} = \det(\mathrm{A})^{-1}$; si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\mathrm{A}) = \lambda^n \det(\mathrm{A})$.

Calcul de déterminants Effet sur le déterminant des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes. Déterminant d'une transposée. Déterminant d'une matrice triangulaire. Développement par rapport à une ligne ou une colonne.

2 Méthodes à maîtriser

- Calculer une puissance de matrice grâce à un polynôme annulateur ou à la formule du binôme de Newton.
- Calculer l'inverse d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur ou à l'aide du pivot de Gauss.
- Écrire la matrice d'une application linéaire dans des bases ou d'un endomorphisme dans une base.
- Déterminer noyau, image et rang d'une matrice par pivot de Gauss.
- Traduire matriciellement des informations sur des applications linéaires ou des endomorphismes et inversement.
- Décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints.
- Calculer la signature d'une permutation.
- Caractériser le fait qu'une famille de vecteurs est une base via le déterminant.
- Caractériser qu'un endomorphisme est un automorphisme via le déterminant.
- Calculer un déterminant par la méthode du pivot de Gauss.
- Développer un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- Établir des relations de récurrence pour calculer un déterminant.

3 Questions de cours

- **Banque CCP 63** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

  On note D_n le déterminant de A_n.

  1. Démontrer que $\mathrm{D}_{n+2} = 2\mathrm{D}_{n+1} - \mathrm{D}_n$.
  2. Déterminer D_n en fonction de n.

- Soit $p_1, \dots, p_n$ des projecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$. Montrer que $\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\, p_i$.
- Soit p un projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$.
- Calculer la signature de la permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ telle que $\sigma(k) = n+1-k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On distinguera deux cas suivant la parité de n.
- Montrer qu'une matrice antisymétrique de taille impaire n'est pas inversible.