Espaces vectoriels

1 Définition et exemples fondamentaux

1.1 Définition

Définition 1.1 Espace vectoriel

Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un ensemble muni d'une loi interne $+$ et d'une loi externe $.$ i.e. d'une application :

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x\end{array}\right.$$

On dit que $(E,+,.)$ est un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** ou un **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ si :

(i) $(E,+)$ est un groupe commutatif (dont l'élément neutre 0_E ou 0 est appelé le **vecteur nul**) ;

(ii) Distributivité de $.$ sur $+$ à gauche : $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall x\in E, (\lambda+\mu).x = \lambda.x+\mu.x$;

(iii) Distributivité de $.$ sur $+$ à droite : $\forall\lambda\in\mathbb{K}, \forall(x,y)\in E^2, \lambda.(x+y) = \lambda.x+\lambda.y$;

(iv) $\forall x\in E, 1_{\mathbb{K}}.x = x$;

(v) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall x\in E, \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**. Le corps $\mathbb{K}$ est appelé le **corps de base** de l'espace vectoriel E.

Remarque. Dans la distributivité de $+$ sur $.$, il s'agit de la loi $+$ du corps $\mathbb{K}$. Dans la distributivité de $.$ sur $+$, il s'agit de la loi $+$ du groupe E.

Remarque. Le $.$ de la loi externe est très souvent omis : si $\lambda\in\mathbb{K}$ et $x\in E$, on note souvent λx au lieu de $\lambda.x$.

Remarque. On ne met pas de flèches sur les vecteurs des espaces vectoriels à moins que l'on fasse de la géométrie dans le plan ou dans l'espace.

Remarque. On parle souvent d'espace vectoriel sans préciser les lois $+$ et $.$. On dit souvent « E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel » alors qu'en toute rigueur, on devrait dire « $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel » ».

Remarque. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et si $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$, alors E est aussi un $\mathbb{L}$-espace vectoriel en considérant la restriction de la loi $.$ à $\mathbb{L}\times E$.

Proposition 1.1 Règles de calcul

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. $\forall(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times E, \lambda.x = 0_E \iff (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ OU } x = 0_E)$.
2. $\forall(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times E, -(\lambda.x) = (-\lambda).x = \lambda.(-x)$;

1.2 Exemples

Les espaces vectoriels sont partout.

Exemple 1.1 Géométrie

Le plan vectoriel et l'espace vectoriel (ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace) sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Remarque. Historiquement, le plan et l'espace ont été les prototypes d'espaces vectoriels. D'ailleurs, il nous sera très utile en pratique de représenter les vecteurs d'espaces vectoriels abstraits comme des vecteurs du plan et de l'espace.

Exemple 1.2 Suites

Pour $((u_n),(v_n)) \in \left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right)^2$, on pose $(u_n)+(v_n) = (u_n+v_n)$.
Pour $(\lambda,(u_n)) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on pose $\lambda.(u_n) = (\lambda u_n)$.
Alors $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,.)$ est alors un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 1.3 Fonctions

Soit X un ensemble.
Pour $(f,g) \in \left(\mathbb{K}^{X}\right)^2$, on pose $f+g : x\in X \mapsto f(x)+g(x)$.
Pour $(\lambda,f) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}^{X}$, on pose $\lambda.f : x \in X \mapsto \lambda f(x)$.
Alors $(\mathbb{K}^{X},+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. $\mathbb{C}^{X}$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 1.4 Polynômes

Pour $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on pose $P+Q = \sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n)X^n$.
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on pose $\lambda.P = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda a_n X^n$.
Alors $(\mathbb{K}[X],+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. $\mathbb{C}[X]$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 1.5

Pour $((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) \in (\mathbb{K}^n)^2$, on pose $(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$.
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose $\lambda.(x_1,\dots,x_n) = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$.
Alors $(\mathbb{K}^n,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. En particulier, pour $n=1$, $\mathbb{K}$ est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Il suffit de considérer la loi interne $\times$ du corps $\mathbb{K}$ comme une loi externe ..

Remarque. $\mathbb{C}^n$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 1.6

$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition et exemples

Définition 2.1 Sous-espace vectoriel

Soient $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si

(i) F est un sous-groupe de $(E,+)$;

(ii) F est stable par multiplication par un scalaire i.e. $\forall(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times F, \lambda.x \in F$;

Proposition 2.1

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. Si F est un sous-espace vectoriel de E et G un sous-espace vectoriel de F, alors G est un sous-espace vectoriel de E.
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E et $F \subset G$, alors F est un sous-espace vectoriel de G.

Remarque. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

La définition étant peu maniable en pratique, on utilise plutôt le théorème suivant.

Théorème 2.1 Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors F est un sous-espace vectoriel de E **si et seulement si**

1. $F \subset E$;
2. $0_E \in F$;
3. F est stable par combinaison linéaire i.e. $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(x, y) \in F^2, \lambda x + \mu y \in F$.

Méthode **Prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel**

Il est souvent plus facile de montrer qu'un ensemble muni de lois interne et externe est un espace vectoriel en montrant qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu plutôt qu'en démontrant directement que c'est un espace vectoriel.

Exemple 2.1 Géométrie

Une droite vectorielle du plan vectoriel est un sous-espace vectoriel du plan vectoriel.
Une droite vectorielle ou un plan vectoriel de l'espace vectoriel sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel.

Exemple 2.2 Fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$. Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leqslant p$, $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$. $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ (fonctions dérivables) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$. $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ (fonctions bornées) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.

Exemple 2.3 Polynômes

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 2.4 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

Toute partie de $\mathbb{K}^n$ définie par un système **linéaire** et **homogène** d'équations cartésiennes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
Par exemple, $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = z + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
On verra que la réciproque est vraie : tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ peut être défini par un système d'équation cartésiennes linéaire et homogène.

Exemple 2.5 Équations différentielles

L'ensemble des solutions sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ d'une équation différentielle **linéaire** et **homogène** est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.

Exemple 2.6 Récurrences linéaires

L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant une relation de récurrence **linéaire** et **homogène** est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\cap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

ATTENTION ! La **réunion** de deux espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel en général.

Exemple 2.7

Dans l'espace, l'intersection de deux droites vectorielles est le sous-espace nul. L'intersection d'un plan vectoriel et d'une droite vectorielle non incluse dans ce plan est le sous-espace nul. L'intersection de deux plans vectoriels distincts est une droite vectorielle.

Exercice 2.1 ★★ **Réunions de sev**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E **si et seulement si** $F \subset G$ ou $G \subset F$.
2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante (pour la relation d'ordre d'inclusion) de sous-espaces vectoriels de E. Montrer que
$$U = \bigcup_{n\geqslant 0} X_n$$
est un sous-espace vectoriel de E.

2.3 Combinaisons linéaires

Définition 2.2 Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. On appelle **combinaison linéaire** de la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ tout vecteur de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

ATTENTION ! Si un vecteur x est combinaison linéaire des u_i, il n'y a pas forcément unicité des scalaires λ_i.

Exemple 2.8

Posons $u_1 = (1, 2, -3)$, $u_2 = (1, -2, 3)$ et $u_3 = (-1, 2, 3)$. (u_1, u_2, u_3) est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. $u = (0, 4, 12)$ est une combinaison linéaire de la famille (u_1, u_2, u_3) car $u = u_1 + 2u_2 + 3u_3$.

Définition 2.3 Famille presque nulle de scalaires

Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$. On dit que la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est **presque nulle** si $\{i \in I, \lambda_i \neq 0\}$ est fini.
L'ensemble des familles presque nulles de $\mathbb{K}^I$ se note $\mathbb{K}^{(\mathbb{I})}$.

Définition 2.4 Combinaison linéaire d'une famille quelconque de vecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_i)_{i\in I} \in E^I$. On appelle **combinaison linéaire** de la famille $(u_i)_{i\in I}$ tout vecteur de la forme $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille **presque nulle** de $\mathbb{K}^I$.

Remarque. Une combinaison linéaire d'une famille éventuellement infinie de vecteurs est donc une combinaison linéaire d'une sous-famille finie de vecteurs de cette famille.

Exemple 2.9

Pour $q \in \mathbb{C}$, notons u_q la suite de terme général q^n. Alors $(u_q)_{q\in\mathbb{C}}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$. La suite u de terme général $1+2^{n+1}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+3}$ est une combinaison linéaire de la famille $(u_q)_{q\in\mathbb{C}}$ car $u = u_1+2u_2+\frac{1}{27}u_{\frac{1}{3}}$.

Proposition 2.3 Stabilité par combinaison linéaire

Soient F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $(f_i)_{i\in I} \in F^I$. Alors toute combinaison linéaire de $(f_i)_{i\in I}$ appartient à F.

2.4 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition 2.5 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par A l'intersection des sous-espaces vectoriels contenant A. C'est le plus petit sous-espace vectoriel (pour l'inclusion) contenant A. On le note $\mathrm{vect}(A)$.

Remarque. En particulier, $\mathrm{vect}(\varnothing) = \{0_E\}$.

Proposition 2.4

Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. $\mathrm{vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(a)_{a\in A}$.

Définition 2.6 Sous-espace vectoriel engendré par une famille

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x_i)_{i\in I}$ le sous-espace vectoriel engendré par la partie $\{x_i, i \in I\}$. Dans ce cas, on note ce sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(x_i)_{i\in I}$ plutôt que $\mathrm{vect}(\{x_i, i \in I\})$.
Cet ensemble est alors l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Attention ! Une partie et une famille sont des objets de natures différentes.

Exemple 2.10

On pose $F = \{(a-b, a+b, b), (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Alors

$$F = \{a(1,1,0) + b(-1,1,1), (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{vect}((1,1,0),(-1,1,1))$$

Attention ! Ne pas confondre un sous-espace vectoriel et la famille qui l'engendre. $\{x_i\}_{i \in I}$ et $\mathrm{vect}(x_i)_{i\in I}$ sont des objets de natures différentes.
En particulier, si I est fini (ce qui est souvent le cas), la famille $(x_i)_{i\in I}$ comporte un nombre fini d'éléments. Par contre, le sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(x_i)_{i_i n I}$ comporte généralement une infinité d'éléments : en effet, si $\mathbb{K}$ est infini, il existe généralement une infinité de combinaisons linéaires d'un nombre même fini de vecteurs.

Remarque. Il peut y avoir ambiguïté sur le corps de base puisqu'un ensemble peut éventuellement être muni d'une structure d'espace vectoriel pour plusieurs corps de base.
Pour être plus explicite, on peut noter $\mathrm{vect}_{\mathbb{K}}(A)$ le sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel engendrée par une partie A. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(a)_{a\in A}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.
De même, on peut noter $\mathrm{vect}_{\mathbb{K}}(x_i)_{i\in I}$ le sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par une famille $(x_i)_{i\in I}$. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_i)_{i\in I}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemple 2.11

L'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle $y' = y$ est $\mathrm{vect}_{\mathbb{C}}(x \mapsto e^x)$ ou encore $\mathrm{vect}_{\mathbb{R}}(x \mapsto e^x, x \mapsto ie^x)$.

Proposition 2.5

Soient A et B deux parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si $A \subset B$, alors $\mathrm{vect}(A) \subset \mathrm{vect}(B)$.

Exercice 2.2

Soit F une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E **si et seulement si** $\mathrm{vect}(F) = F$.

Méthode **Mettre sous forme d'un** vect

Les parties de $\mathbb{K}^n$ définies par un système d'équations linéaires peuvent être mises sous forme d'un vect. C'est une manière efficace de montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels.

Exemple 2.12

$$\begin{aligned}\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\} &= \{(x,y,x+y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,0,1) + y(0,1,1), (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{vect}((1,0,1),(0,1,1))\end{aligned}$$

Exemple 2.13

Puisque $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-\frac{1}{2}z \\ y=\frac{3}{2}z \end{cases}$,

$$\begin{aligned}\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-z=x-y+2z=0\} &= \left\{\left(-\frac{1}{2}z,\frac{3}{2}z,z\right), z\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{z\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},1\right), z\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \operatorname{vect}\left(\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},1\right)\right)\end{aligned}$$

Exemple 2.14 Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1

Soit (E) l'équation différentielle $y'+ay=0$ où $a\in\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors $\mathcal{S}=\operatorname{vect}(e^{-A})$ où A est une primitive de a sur I.

Exemple 2.15 Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants

Soient $(a,b)\in\mathbb{K}^2$ et (E) l'équation différentielle $y''+ay'+by=0$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et l'équation caractéristique possède deux racines réelles r_1 et r_2, alors

$$\mathcal{S}=\operatorname{vect}(x\mapsto e^{r_1x}, x\mapsto e^{r_2x})$$

- Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et l'équation caractéristique possède une unique racine réelle r, alors

$$\mathcal{S}=\operatorname{vect}(x\mapsto e^{rx}, x\mapsto xe^{rx})$$

- Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r+i\omega$ et $r-i\omega$, alors

$$\mathcal{S}=\operatorname{vect}(x\mapsto \cos(\omega x)e^{rx}, x\mapsto \sin(\omega x)e^{rx})$$

- Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et l'équation caractéristique possède deux racines complexes r_1 et r_2, alors

$$\mathcal{S}=\operatorname{vect}(x\mapsto e^{r_1x}, x\mapsto e^{r_2x})$$

- Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et l'équation caractéristique possède une unique racine complexe r, alors

$$\mathcal{S}=\operatorname{vect}(x\mapsto e^{rx}, x\mapsto xe^{rx})$$

Remarque. Dans les cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, les «vect» sont des ensembles de combinaisons linéaires à coefficients **réels** tandis que dans les cas où $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, les «vect» sont des ensembles de combinaisons linéaires à coefficients **complexes**.

Exemple 2.16 Récurrences linéaires homogènes

Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et l'équation caractéristique possède deux racines réelles r_1 et r_2, alors

$$\mathcal{S} = \operatorname{vect}((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et l'équation caractéristique possède une unique racine réelle r, alors

$$\mathcal{S} = \operatorname{vect}((r^n)_{n\in\mathbb{N}}, (nr^n)_{n\in\mathbb{N}})$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$, alors

$$\mathcal{S} = \operatorname{vect}((r^n \cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}, (r^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}})$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et l'équation caractéristique possède deux racines complexes r_1 et r_2, alors

$$\mathcal{S} = \operatorname{vect}((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et l'équation caractéristique possède une unique racine complexe r, alors

$$\mathcal{S} = \operatorname{vect}((r^n)_{n\in\mathbb{N}}, (nr^n)_{n\in\mathbb{N}})$$

Remarque. Dans les cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les «vect» sont des ensembles de combinaisons linéaires à coefficients **réels** tandis que dans les cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les «vect» sont des ensembles de combinaisons linéaires à coefficients **complexes**.

Exercice 2.3

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer que

$$\operatorname{vect}(x \mapsto \cos(kx))_{k\in\mathbb{N}} = \operatorname{vect}(x \mapsto \cos^k x)_{k\in\mathbb{N}}$$

3 Somme de sous-espaces vectoriels

3.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 3.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle **somme** de F et G le sous-espace vectoriel $\mathsf{F} + \mathsf{G} = \{x + y \mid x \in \mathsf{F}, y \in \mathsf{G}\}$.

Remarque. On a $\mathsf{F} + \mathsf{G} = \operatorname{vect}(\mathsf{F} \cup \mathsf{G})$. $\mathsf{F} + \mathsf{G}$ est donc le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G.

Remarque. La somme de sous-espaces vectoriels est commutative : si F et G sont deux sous-espaces vectoriels, $\mathsf{F} + \mathsf{G} = \mathsf{G} + \mathsf{F}$.

Exemple 3.1

Dans l'espace, la somme de deux droites vectorielles distinctes est un plan vectoriel. La somme d'un plan vectoriel et d'une droite vectorielle non incluse dans ce plan est l'espace tout entier. La somme de deux plans vectoriels distincts est l'espace tout entier.

Attention ! Il ne faut pas confondre $F+G$ qui est un sous-espace vectoriel et $F \cup G$ qui n'est pas un sous-espace vectoriel en général. Prendre par exemple F et G deux droites vectorielles distinctes de l'espace.

Proposition 3.1

Soient A, B deux parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors $\operatorname{vect}(A \cup B) = \operatorname{vect}(A) + \operatorname{vect}(B)$.

Attention ! Par contre, on n'a pas $\operatorname{vect}(A) \cap \operatorname{vect}(B) = \operatorname{vect}(A \cap B)$ en général. Prendre par exemple deux vecteurs distincts et colinéaires $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On pose $A = \{\vec{a}\}$ et $B = \{\vec{b}\}$. On a $\operatorname{vect}(A) = \operatorname{vect}(B) = \operatorname{vect}(\vec{a}) = \operatorname{vect}(\vec{b})$ mais $A \cap B = \varnothing$ donc $\operatorname{vect}(A \cap B) = \{\vec{0}\}$.

Remarque. En particulier, si $F = \operatorname{vect}(f_1, \dots, f_n)$ et $G = \operatorname{vect}(g_1, \dots, g_p)$, alors $F + G = \operatorname{vect}(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$.

Remarque. Soient F et G deux sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors $F+G$ est le plus petit sous-espce vectoriel contenant F et G.

Attention ! On n'a pas distributivité de $\cap$ sur $+$: en général, $F \cap (G+H) \supsetneq (F \cap G) + (F \cap H)$. Prendre par exemple trois droites vectorielles distinctes deux à deux mais coplanaires.

Définition 3.2 Somme directe

On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont en **somme directe** si tout vecteur de $F+G$ se décompose de manière **unique** comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G i.e.

$$\forall x \in F+G,\ \exists!(y,z) \in F \times G,\ x = y+z$$

La somme de F et G est alors notée $F \oplus G$.

Remarque. C'est l'**unicité** qui importe puisqu'un vecteur de $F+G$ se décompose toujours comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G par définition de $F+G$.

Proposition 3.2

Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont en somme directe **si et seulement si** $F \cap G = \{0_E\}$.

Méthode **Prouver que deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe**

Pour prouver que deux sous-espaces vectoriels F et G sont en somme directe, on utilise généralement la première caractérisation : on se donne $z \in F \cap G$ et on montre que $z = 0_E$.
Ceci montre que $F \cap G \subset \{0_E\}$. Il n'est pas nécessaire de montrer l'inclusion réciproque car, $F \cap G$ étant un sous-espace vectoriel de E, il contient toujours 0_E.

Exemple 3.2

Dans l'espace, deux droites vectorielles distinctes sont en somme directe. Un plan vectoriel et une droite vectorielle non incluse dans ce plan sont en somme directe. Deux plans vectoriels ne sont jamais en somme directe.

Définition 3.3 Sous-espaces supplémentaires

On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont **supplémentaires** (dans E) si l'une des propositions équivalentes suivantes est vérifiée

(i) $\mathsf{F}+\mathsf{G}=\mathsf{E}$ ET $\mathsf{F}\cap\mathsf{G}=\{0_\mathsf{E}\}$

(ii) tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G i.e.

$$\forall x\in\mathsf{E},\ \exists!(y,z)\in\mathsf{F}\times\mathsf{G},\ x=y+z$$

Dans ce cas, on note $\mathsf{F}\oplus\mathsf{G}=\mathsf{E}$. On dit aussi que F est **un** supplémentaire de G dans E et que G est **un** supplémentaire de F dans E.
Avec les notations précédentes, on appelle y (resp. z) le **projeté** de x sur F (resp. G) parallèlement à G (resp. F).

Attention ! Il n'y a pas unicité du supplémentaire.

Exemple 3.3

Soit $\vec{\mathsf{P}}$ un plan vectoriel de l'espace vectoriel $\vec{\mathsf{E}}$. Alors toute droite vectorielle $\vec{\mathsf{D}}$ non incluse dans $\vec{\mathsf{E}}$ est un supplémentaire de $\vec{\mathsf{P}}$ dans $\vec{\mathsf{E}}$. Il n'y a clairement pas unicité du supplémentaire.

Attention ! Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire. Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel est unique mais ce n'est **jamais** un sous-espace vectoriel (il ne contient pas le vecteur nul).

Exercice 3.1

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\mathsf{F}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+y+z=0\}$, $\mathsf{G}=\operatorname{vect}((1,1,1))$ et $\mathsf{H}=\operatorname{vect}((1,-1,1))$. Montrer que G et H sont deux supplémentaires de F dans $\mathbb{R}^3$.

Méthode **Prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires (première version)**

Pour prouver que deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E, on procède très souvent par **analyse/synthèse**. On veut prouver que tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. On procède alors comme suit.

- On se donne donc un vecteur x de E : « Soit $x\in\mathsf{E}$ ».
- On **suppose** que x s'écrit sous la forme $y+z$ avec $y\in\mathsf{F}$ et $z\in\mathsf{G}$.
- **Analyse :** On en déduit en raisonnant par condition nécessaire la forme de y et z en fonction de x. On trouve en particulier que y et z sont déterminés de manière unique.
- On vérifie que le y et le z trouvés conviennent.

Méthode **Prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires (deuxième version)**

Pour prouver que deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E, on peut également prouver séparément que $F \cap G = \{0_E\}$ et que $F + G = E$.

- On prouve d'abord que $F \cap G = \{0_E\}$. C'est souvent très simple.
- On montre par analyse/synthèse que $F + G = E$.
  - On se donne donc un vecteur x de E : « Soit $x \in E$ ».
  - On **suppose** que x s'écrit sous la forme $y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.
  - **Analyse :** On en déduit en raisonnant par condition nécessaire la forme de y et z en fonction de x.
  - **Synthèse :** On vérifie que le y et le z trouvés conviennent.
  - Comme on a prouvé que $F \cap G = \{0_E\}$, on n'a pas besoin de prouver l'unicité du couple (y, z). Autrement dit, l'analyse sera faite au **brouillon** et ne figurera pas sur la **copie**. Evidemment, la synthèse doit figurer sur la **copie**.

Exercice 3.2

Montrer que l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

3.2 Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Définition 3.4 Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle **somme** de $F_1, \dots, F_p$ le sous-espace vectoriel

$$F_1 + \dots + F_p = \sum_{k=1}^{p} F_k = \left\{ x_1 + \dots + x_p \mid (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^{p} F_k \right\}$$

Remarque. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k = \operatorname{vect}\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k$ est donc le plus petit sous-espace vectoriel contenant $F_1, \dots, F_n$.

Remarque. La somme d'espaces vectoriels est associative : si F, G, H sont trois sous-espacs vectoriels,

$$F + G + H = (F + G) + H = F + (G + H)$$

Définition 3.5 Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe si pour tout $x \in \sum_{k=1}^{p} F_k$ il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \displaystyle\prod_{k=1}^{p} F_k$ tel que $x = x_1 + \dots + x_p$.

La somme de $F_1, \dots, F_p$ est alors notée $F_1 \oplus \dots \oplus F_p = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} F_k$.

Proposition 3.3 Caractérisation d'une somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe **si et seulement si**

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^{p} F_k,\ x_1 + \dots + x_p = 0_E \implies x_1 = \dots = x_p = 0_E$$

Remarque. Si des sous-espaces vectoriels sont en somme directe, ils sont deux à deux en somme directe.

Attention ! La réciproque est fausse. Des espaces vectoriels peuvent être deux à deux en somme directe sans que leur somme soit directe. Par exemple, trois droites distinctes coplanaires ont leurs intersections deux à deux nulles sans pour autant qu'elles soient en somme directe.

Remarque. Si F, G, H sont trois sous-espaces vectoriels en somme directe,

$$F \oplus G \oplus H = (F \oplus G) \oplus H = F \oplus (G \oplus H)$$

Ceci signifie en particulier que

- F est en somme directe avec G et $F \oplus G$ est en somme directe avec H ;
- G est en somme directe avec H et $G \oplus H$ est en somme directe avec F.

4 Espace vectoriel produit

Théorème 4.1 Espace vectoriel produit

Soient $E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On munit $\prod_{k=1}^{n} E_k$ d'une loi interne $+$ et d'une loi interne $.$ en posant :

(i) $\forall ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in \left(\prod_{k=1}^{n} E_k\right)^2,\ (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$;

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^{n} E_k,\ \lambda.(x_1, \dots, x_n)) = (\lambda.x_1, \dots, \lambda.x_n)$.

Alors $\left(\prod_{k=1}^{n} E_k, +, .\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\prod_{k=1}^{n} E_k$ s'appelle l'**espace vectoriel produit** des espaces vectoriels $E_1, \dots, E_n$.
Le vecteur nul de $\prod_{k=1}^{n} E_k$ est $(0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.

Attention ! Dans la proposition précédente, $+$ et $.$ désignent suivant les situations les lois interne et externe des différents E_k ou de $\prod_{k=1}^{n} E_k$.

Remarque. On peut remarquer que $\mathbb{K}^n$ muni de la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel vue dans les exemples n'est autre que l'espace vectoriel produit de n fois le même $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$.

5 Espace vectoriel d'applications

Théorème 5.1 Espace vectoriel d'applications

Soit X un ensemble et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On munit l'ensemble F^X des applications de X dans F d'une loi interne et d'une loi externe de la manière suivante.

(i) Pour tout $(f, g) \in \left(F^X\right)^2$, on définit l'application $f + g$ par :

$$\forall x \in X, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

(ii) Pour tout $(\lambda, f) \in \mathbb{K} \times F^X$, on définit l'application $\lambda.f$ par :

$$\forall x \in X, (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$$

Alors $(F^X, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec 0_{F^X} l'application nulle $\left\{\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}\right.$.

Exemple 5.1

On retrouve le fait que $\mathbb{R}^I$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel puisque $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.