

## 1 Cours

### Applications linéaires

**Définition et premières propriétés** Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'une forme linéaire. Exemples en géométrie, dans les espaces de fonctions, dans les espaces de suites et dans les  $\mathbb{K}^n$ . Structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E, F)$ . Structure d'anneau de  $\mathcal{L}(E)$ .

**Isomorphismes** Définition d'un isomorphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme. Définition d'un automorphisme et groupe linéaire  $GL(E)$ .

**Images directe et réciproque par une application linéaire** L'image directe ou réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel. Noyau et image d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le noyau et l'image. Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base. Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et si  $E = S \oplus \text{Ker } f$ , alors  $f$  induit un isomorphisme de  $S$  sur  $\text{Im } f$ .

**Image d'une famille de vecteurs** L'image d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image. Une application linéaire est injective/surjective/bijective **si et seulement si** l'image d'une base est une famille libre/une famille génératrice/une base.

**Applications linéaires en dimension finie** En dimension finie, deux espaces sont de même dimension **si et seulement si** ils sont isomorphes. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le rang. Si  $f$  est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de **même dimension finie**, alors  $f$  bijective  $\iff f$  injective  $\iff f$  surjective. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme. Si  $E$  et  $F$  sont de même dimension finie,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est bijective **si et seulement si** il existe  $g \in \mathcal{L}(F, E)$  telle que  $f \circ g = \text{Id}_F$  ou  $g \circ f = \text{Id}_E$ .

**Formes linéaires et hyperplans** Formes coordonnées. Définition d'un hyperplan comme noyau de forme linéaire non nulle. Lien entre hyperplans et droites vectorielles. Intersections d'hyperplans.

## 2 Méthodes à maîtriser

- Calculer avec des endomorphismes comme dans tout anneau **non commutatif** et **non intègre**.
- Utiliser le noyau ou l'image d'une application linéaire pour prouver son injectivité ou sa surjectivité.
- Les équivalences  $x \in \text{Ker } f \iff f(x) = 0$  et  $y \in \text{Im } f \iff \exists x, y = f(x)$  doivent être automatiques.
- Utiliser la dimension pour faciliter la preuve de la bijectivité (injectivité + espaces d'arrivée et de départ de même dimension)
- Utiliser le théorème du rang pour passer de résultats sur le noyau à des résultats sur l'image et vice-versa.

## 3 Questions de cours

- **BCCP 62.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 - f - 2\text{Id}_E = 0$ .
  1. Prouver que  $f$  est bijectif et exprimer  $f^{-1}$  en fonction de  $f$ .
  2. Prouver que  $E = \text{Ker}(f + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ .
  3. Dans cette question, on suppose que  $E$  est de dimension finie. Prouver que  $\text{Im}(f + \text{Id}_E) = \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ .
- **BCCP 64.** Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ .
  1. Démontrer que :  $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \implies \text{Im } f = \text{Im } f^2$ .
  2. (a) Démontrer que :  $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ .  
 (b) Démontrer que :  $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \implies E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$ .
- **Inégalités et rang.** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels ainsi que  $f$  et  $g$  deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$  de rangs finis. Montrer que
 
$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$
- **Base duale.** Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Montrer que  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $E^*$ .
- **Hyperplan et droite supplémentaires.** Soient  $H$  un hyperplan d'un espace vectoriel  $E$  (pas nécessairement de dimension finie) et  $D$  une droite vectorielle non incluse dans  $E$ . Montrer que  $E = H \oplus D$ .
- **Lemme des noyaux «light».** Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ . On note  $r_1$  et  $r_2$  les deux racines du polynôme  $X^2 + aX + b$ . Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Montrer que

$$u^2 + au + b \operatorname{Id}_E = (u - r_1 \operatorname{Id}_E) \circ (u - r_2 \operatorname{Id}_E) = (u - r_2 \operatorname{Id}_E) \circ (u - r_1 \operatorname{Id}_E)$$

2. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(u - r_1 \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u^2 + au + b \operatorname{Id}_E) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker}(u - r_2 \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u^2 + au + b \operatorname{Id}_E)$$

3. On suppose  $r_1 \neq r_2$ . Montrer que

$$\operatorname{Ker}(u^2 + au + b \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(u - r_1 \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - r_2 \operatorname{Id}_E)$$