Semaine du 09/10 au 13/10

1 Cours

Applications

Définitions Ensembles d'arrivée et de départ, graphe, image.

Composition Définition, associativité, application identité.

Injectivité Définition. Composition et injectivité.

Surjectivité Définition. Composition et surjectivité.

Bijectivité Définition. Bijection réciproque. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
$f : E \to F$ est bijective **si et seulement si** il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et dans ce cas, $f^{-1} = g$.

Image directe et réciproque Définitions. Image directe et réciproque d'une union, d'une intersection.

Restriction et prolongement Définitions. Bijection induite.

2 Méthodes à maîtriser

- Savoir prouver l'injectivité en pratique : «Soit (x, x') tel que $f(x) = f(x')$» puis montrer que $x = x'$.
- Savoir prouver la surjectivité en pratique : recherche d'un antécédent (résolution d'une équation).
- Savoir prouver la bijectivité en pratique :
  - Existence et unicité d'une solution de l'équation $y = f(x)$ où y est fixé et x est l'inconnue.
  - Déterminer g telle que $g \circ f = \mathrm{Id}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}$.
  - Montrer que f est injective et surjective.
- Automatismes :
  - $y \in f(A) \iff \exists x \in A,\ y = f(x)$
  - $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$

3 Questions de cours

- Soit $f : E \to F$. Montrer que pour $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ et que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Donner un contre-exemple montrant que l'inclusion réciproque est fausse en général.
- Soit $f : E \to F$. Montrer que pour $(A, B) \in \mathcal{P}(F)^2$, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
- Soit $(f, g) \in F^E \times G^F$. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective et que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Soit $(f, g) \in F^E \times G^F$. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective et que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
- Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.