

**EXERCICE 1.★★**

On appelle *nombre parfait* tout entier  $n$  dont la somme des diviseurs vaut  $2n$  ou de manière équivalente tout entier  $n$  dont la somme des diviseurs *stricts* (i.e.  $n$  non compris) vaut  $n$ .

1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on notera  $S(n)$  la somme des diviseurs de  $S$ . Montrer que la fonction  $S$  est multiplicative i.e. si  $m \wedge n = 1$  alors  $S(mn) = S(m)S(n)$ .
2. Soit  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $2^p - 1$  soit premier.
  - a. Montrer que  $p$  est premier.
  - b. Montrer que  $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$  est parfait (i.e.  $S(n) = 2n$ ).
3. Montrer que tout nombre parfait pair est de la forme  $2^{p-1}(2^p - 1)$  où  $p$  est premier.

**EXERCICE 2.**

1. Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $2^m + 1$  soit premier. Montrer que  $m = 2^n$  où  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Notons  $F_n = 2^{2^n} + 1$ . Montrer que si  $n \neq m$ ,  $F_n$  et  $F_m$  sont premiers entre eux.

**EXERCICE 3.**

Soit  $p$  un nombre premier.

1. Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ ,  $\binom{p}{k}$  est divisible par  $p$ .
2. En déduire que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n^p - n$  est divisible par  $p$  (i.e.  $n^p \equiv n[p]$ ).

**EXERCICE 4.**

Soient  $a$  et  $r$  deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On suppose que  $a^r - 1$  est premier.

1. Montrer que  $a$  vaut 2 puis que  $r$  est premier.
2. La réciproque est-elle vraie ?

**EXERCICE 5.**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on appelle  $n^{\text{ème}}$  nombre de Mersenne l'entier  $M_n = 2^n - 1$ .

1.
  - a. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{N}^*$  un diviseur positif de  $n$ . Montrer que  $2^a - 1$  divise  $M_n$ .
  - b. En déduire que si  $M_n$  est un nombre premier, alors  $n$  est un nombre premier.
2. Soient  $p, q$  des nombres premiers avec  $p$  impair. On suppose que  $q$  divise  $M_p$ .
  - a. Montrer que  $q$  est impair. En déduire que  $2^{q-1} \equiv 1[q]$  en utilisant le petit théorème de Fermat.
  - b. Soit  $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 2^n \equiv 1[q]\}$ . Montrer que  $A$  admet un minimum que l'on notera  $m$ .
  - c. En effectuant la division euclidienne de  $p$  par  $m$ , montrer que  $m$  divise  $p$  puis que  $m = p$ .
  - d. En effectuant la division euclidienne de  $q - 1$  par  $p$ , montrer que  $q \equiv 1[p]$ .
  - e. Montrer que  $q \equiv 1[2p]$ .
3. Soient  $p$  un nombre premier impair et  $n \in \mathbb{N}^*$  divisant  $M_p$ . En utilisant la décomposition en facteurs premiers de  $n$  et la question précédente, montrer que  $n \equiv 1[2p]$ .

**EXERCICE 6.**

Montrer que la somme de deux nombres premiers consécutifs ne peut pas être égal au produit de deux nombres premiers.

**EXERCICE 7.**

Soient  $a$  et  $b$  des entiers naturels non nuls premiers entre eux tels que  $ab$  soit une puissance  $n^{\text{ème}}$  d'entier ( $n \in \mathbb{N}$ ). Montrer que  $a$  et  $b$  sont des puissances  $n^{\text{èmes}}$  d'entiers.

**EXERCICE 8.**

Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$  et tout entier  $a$  impair

$$a^{2^n-1} \equiv 1[2^n]$$

**EXERCICE 9.**

Résoudre le système d'inconnue  $x \in \mathbb{Z} : \begin{cases} x \equiv 2[10] \\ x \equiv 5[13] \end{cases}$ .

**EXERCICE 10.**

1. Le système  $\begin{cases} x \equiv 3[10] \\ x \equiv 4[8] \end{cases}$  d'inconnue  $x \in \mathbb{Z}$  admet-il des solutions ?
2. Soit  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ . A quelle condition le système  $\begin{cases} x \equiv a[10] \\ x \equiv b[8] \end{cases}$  admet-il des solutions ?
3. Déterminer les solutions du système  $\begin{cases} x \equiv 4[10] \\ x \equiv 2[8] \end{cases}$ .

**EXERCICE 11.**

1. Soit  $n$  un entier impair. Montrer que  $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ .
2. Soit  $p > 3$  un nombre premier. Montrer que  $p^2 - 1$  est multiple de 24.

**EXERCICE 12.**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 9$  et par la relation de récurrence  $u_{n+1} = 3u_n^4 + 4u_n^3$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que l'écriture décimale de  $u_{11}$  comporte plus de 2010 chiffres 9.

**EXERCICE 13.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ . Montrer qu'il existe  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $i_1, \dots, i_k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  deux à deux distincts tels que  $n$  divise  $\sum_{j=1}^k x_{i_j}$ .

**EXERCICE 14.**

Soit  $b$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.  
Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{cases} \llbracket 0, b-1 \rrbracket^n & \longrightarrow & \llbracket 0, b^n - 1 \rrbracket \\ (a_0, \dots, a_{n-1}) & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n-1} a_k b^k \end{cases}$$

est bien définie et bijective.

**EXERCICE 15.**

Parmi les entiers qui s'écrivent en base 10 sous la forme  $(aabb)_{10}$ , déterminer ceux qui sont des carrés d'entiers.

**EXERCICE 16.**

Déterminer le reste de la division euclidienne de

1.  $2^{2^{10}}$  par 7.
2.  $3^{2^{189}}$  par 25.

**EXERCICE 17.**

Soient  $a, m, n \in \mathbb{N}^*$  avec  $a \geq 2$  et  $d = (a^n - 1) \wedge (a^m - 1)$ .

1. Soit  $n = qm + r$  la division euclidienne de  $n$  par  $m$ . Démontrer que  $a^n \equiv a^r[a^m - 1]$ .
2. En déduire que  $d = (a^r - 1) \wedge (a^m - 1)$ , puis  $d = a^{n \wedge m} - 1$ .
3. A quelle condition  $a^m - 1$  divise-t-il  $a^n - 1$  ?

**EXERCICE 18.**

Soit  $a \in \mathbb{Z}$ . Montrer que le reste de la division euclidienne de  $a^2$  par 8 est 0, 1 ou 4.

**EXERCICE 19.**

Soient  $a, b \in \mathbb{N}^*$ . On note  $q$  le quotient de la division euclidienne de  $a - 1$  par  $b$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer le quotient de la division euclidienne de  $ab^n - 1$  par  $b^{n+1}$ .

**EXERCICE 20.**

Déterminer tous les entiers  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $n + 1$  divise  $n^2 + 1$ .

**EXERCICE 21.**

Quel est le reste de la division euclidienne de  $2^{2009}$  par 7.

**EXERCICE 22.**

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels premiers entre eux avec  $b \geq 2$ . Montrer qu'il existe un unique couple  $(u_0, v_0) \in \mathbb{N}^2$  vérifiant :

$$u_0 a - v_0 b = 1 \qquad u_0 < b \qquad v_0 < a$$

**EXERCICE 23.**

Résoudre les systèmes

1.  $\begin{cases} x \wedge y = 3 \\ x \vee y = 135 \end{cases}$  .
2.  $\begin{cases} x + y = 100 \\ x \wedge y = 10 \end{cases}$  .

**EXERCICE 24.★**

On considère la suite  $(F_n)$  définie par ses premiers termes  $F_0 = 0$  et  $F_1 = 1$  et par la relation de récurrence  $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ . Déduisez-en que  $F_n$  et  $F_{n-1}$  sont premiers entre eux.
2. Montrer que pour tout couple  $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ ,  $F_{n+p} = F_p F_{n+1} + F_{p-1} F_n$ . En déduire que  $F_n \wedge F_p = F_{n+p} \wedge F_p$ .
3. Démontrer que pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,  $F_m \wedge F_n = F_{m \wedge n}$ .

**EXERCICE 25.**

Soient  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  avec  $a \wedge b = 1$ . Montrer que  $a \wedge bc = a \wedge c$ .

**EXERCICE 26.**

Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$ . On note  $d = a \wedge b$  et  $m = a \vee b$ . Que vaut  $(a + b) \wedge m$  ?

**EXERCICE 27.**

Soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels non nuls. Montrer que

$$a \wedge b = a + b - ab + 2 \sum_{k=1}^{b-1} \left\lfloor \frac{ka}{b} \right\rfloor$$

**EXERCICE 28.**

Soient  $x, y$  deux entiers. Montrer que  $x^2 + y^2$  est divisible par 7 si et seulement si  $x$  et  $y$  le sont.

**EXERCICE 29.**

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

1.  $17 \mid 7^{8n+1} + 10(-1)^n$
2.  $11 \mid 9^{5n+2} - 4$
3.  $6 \mid 10^{3n+2} - 4^{n+1}$

**EXERCICE 30.**

On considère la suite  $a_n = \sum_{k=1}^n k!$  pour tout  $n \geq 1$ . Est-ce que, à partir d'un certain rang, tous les  $a_n$  sont divisibles par 9 et non-divisibles par 27 ?

**EXERCICE 31.**

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n^2$  divise  $(n+1)^n - 1$ .

**EXERCICE 32.**

Montrer que la plus grande puissance de 2 divisant  $5^{2^n} - 1$  est  $2^{n+2}$ .

**EXERCICE 33.**

Démontrer les critères de divisibilité suivants.

1. Un entier est divisible par 3 *si et seulement si* la somme de ses chiffres est divisible par 3.
2. Un entier est divisible par 9 *si et seulement si* la somme de ses chiffres est divisible par 9.
3. Un entier est divisible par 11 *si et seulement si* la somme alternée de ses chiffres de rang pair moins la somme de ses chiffres de rang impair est divisible par 11.

**EXERCICE 34.**

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , 5 divise  $2^{3n+5} + 3^{n+1}$ .
2. Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , 30 divise  $n^5 - n$ .

**EXERCICE 35.**

Montrer que si  $p$  est un entier premier différent de 2 et 5, alors il divise un des entiers de l'ensemble  $\{1, 11, 111, 1111, \dots\}$ .

**EXERCICE 36.**

1. Montrer qu'un entier naturel est divisible par 5 *si et seulement si* son chiffre des unités est 0 ou 5.
2. Montrer qu'un entier naturel est divisible par 4 *si et seulement si* l'entier formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

**EXERCICE 37.**

Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  les équations suivantes :

1.  $221x + 247y = 52$ .
2.  $323x - 391y = 612$ .
3.  $198x + 216y = 36$ .

**EXERCICE 38.**

Résoudre dans  $(\mathbb{N}^*)^3$  l'équation  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ .

**EXERCICE 39.**

Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $5x^2 + 2xy - 3 = 0$ .

**EXERCICE 40.**

Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  l'équation

$$n(n+1)(n+2) = m^2$$

**EXERCICE 41.**

On se propose de résoudre l'équation (E) :  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$  d'inconnue  $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ .

1. Soit  $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$  vérifiant (E). On suppose  $a, b, c$  premiers entre eux dans leur ensemble.
  - a. On pose  $\alpha = a - c$  et  $\beta = b - c$ . Montrer que  $\alpha, \beta, c$  sont premiers entre eux dans leur ensemble puis que  $\alpha$  et  $\beta$  sont premiers entre eux.
  - b. En déduire que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des carrés d'entiers puis qu'il existe  $(u, v) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que  $a = (u + v)u$ ,  $b = (u + v)v$  et  $c = uv$ .
2. Résoudre (E).

**EXERCICE 42.**

Résoudre l'équation  $2^n + 1 = m^3$  d'inconnue  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ .

**EXERCICE 43.**

Soient  $r$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $a_1, \dots, a_r$  des entiers relatifs. Pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on pose  $b_i = \prod_{\substack{1 \leq j \leq r \\ j \neq i}} a_j$ .

Montrer que les  $a_i$  sont premiers entre eux deux à deux *si et seulement si* les  $b_i$  sont premiers entre eux dans leur ensemble.

**EXERCICE 44.**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on considère l'application  $f_n : \begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ p & \longmapsto e^{2i\pi np\alpha} \end{cases}$ .

1. Montrer que  $f_n$  est un morphisme du groupe  $(\mathbb{Z}, +)$  dans le groupe  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .
2. Montrer que  $\text{Im } f_n \subset \mathbb{U}$ .
3. En considérant le noyau de  $f_n$ , montrer que  $f_n$  est injective *si et seulement si*  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ .
4. A partir de maintenant, on suppose que  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . On écrit  $\alpha$  sous forme de fraction irréductible, c'est-à-dire sous la forme  $\alpha = \frac{r}{s}$  avec  $r \in \mathbb{Z}$  et  $s \in \mathbb{N}^*$  tels que  $r \wedge s = 1$ .
  - a. Montrer que  $\text{Im } f_1 \subset \mathbb{U}_s$ .
  - b. En écrivant une relation de Bézout entre  $r$  et  $s$ , montrer que  $e^{\frac{2i\pi}{s}} \in \text{Im } f_1$ .  
En déduire que  $\mathbb{U}_s \subset \text{Im } f_1$ .
  - c. Montrer que  $\text{Ker } f_1 = s\mathbb{Z}$ .
5. On pose  $m = \frac{s}{n \wedge s}$ .
  - a. Justifier que  $m$  est entier.
  - b. Montrer que  $nr \wedge s = n \wedge s$ .
  - c. Montrer que  $\text{Im } f_n \subset \mathbb{U}_m$ .
  - d. En écrivant une relation de Bézout entre  $nr$  et  $s$ , montrer que  $e^{\frac{2i\pi}{m}} \in \text{Im } f_n$ .  
En déduire que  $\mathbb{U}_m \subset \text{Im } f_n$ .
  - e. Montrer que  $\text{Ker } f_n = m\mathbb{Z}$ .