

Rudiments

Exercice 1

Reconnaître les endomorphismes de \mathbb{R}^3 dans la liste suivante,

1. $f_1 : (x, y, z) \mapsto (x, xy, x - z)$;
2. $f_2 : (x, y, z) \mapsto (x + y, 2x + 5z, 0)$;
3. $f_3 : (x, y, z) \mapsto (x - 3y, x + y, z + 2)$.

Exercice 2

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. $id_E : E \rightarrow E, u \mapsto u$, où E est un \mathbb{K} -ev.
2. $F : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}), f \mapsto \exp \circ f$.
3. $G : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}), f \mapsto f \times \cos$.
4. $H : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}), f \mapsto f'' - f$.
5. $j : F \rightarrow E, u \mapsto u$, où F est un sev d'un \mathbb{K} -ev E .
6. $T : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto (u_0, \dots, u_n)$.
7. $S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$.

Exercice 3 ★

Composées

Soient f et g les endomorphismes de \mathbb{R}^2 définis par

$$g : (x, y) \mapsto (y, x) \text{ et } f : (x, y) \mapsto (x + y, 2x).$$

1. Montrer que f et g sont des isomorphismes de \mathbb{R}^2 . Déterminer f^{-1} et g^{-1} .
2. On note $h = f \circ g - g \circ f$. Justifier que $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
3. A-t-on $f \circ g = g \circ f$? h est-elle injective ?
4. L'application h est-elle surjective ?

Exercice 4 ★

Crochet de Lie

Soient E un \mathbb{R} -ev, u et v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que

$$u \circ v - v \circ u = u.$$

Etablir que, pour tout k dans \mathbb{N}^* :

$$u^k \circ v - v \circ u^k = ku^k.$$

Isomorphismes

Exercice 5 ★

Soit f , un endomorphisme de E . Pour tout entier $k \geq 2$, on note

$$f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

On suppose qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que f^n soit l'application identiquement nulle.

1. Soit $x \in \text{Ker}(I - f)$. Démontrer que $f^k(x) = x$ pour tout entier $k \geq 1$. En déduire que $I - f$ est injectif.
2. Simplifier les expressions

$$(I - f) \circ (I + f + f^2 + \dots + f^{n-1})$$

et $(I + f + f^2 + \dots + f^{n-1}) \circ (I - f)$

en utilisant les règles de calcul dans $\mathcal{L}(E)$ et en déduire que $I - f$ est un automorphisme.

3. Démontrer que, pour tout entier $k \geq 1$, l'endomorphisme $I - f^k$ est inversible. On précisera l'expression de son inverse.

Exercice 6 ★★★**Sev stables par permutation des composantes**

Soit \mathbb{K} un corps. Pour $\sigma \in S_n$, on pose :

$$\begin{aligned} f_\sigma : \quad \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

On munit \mathbb{K}^n de la structure d'algèbre pour les opérations composante par composante.

1. Montrer que f_σ est un automorphisme d'algèbre.
2. Soit ϕ un automorphisme d'algèbre de \mathbb{K}^n . Montrer qu'il existe $\sigma \in S_n$ tel que $\phi = f_\sigma$.
3. Trouver les sous-espaces de \mathbb{K}^n stables par tous les endomorphismes f_σ avec $\sigma \in S_n$.

Exercice 7 ★**Un exemple d'isomorphisme**

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par

$$(x, y, z) \longmapsto (2x - y, -x + y, x - z).$$

Prouver que f est un isomorphisme de \mathbb{R}^3 et expliciter son isomorphisme réciproque f^{-1} .

Exercice 8 ★**L'opérateur de dérivation**

Soient f_k les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par

$$\forall k \in \{0, 1, 2\}, \quad f_k : x \longmapsto x^k e^{2x}.$$

On note E le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par ces trois vecteurs.

1. Quelles est la dimension de E ? En donner une base.
2. On note D l'opérateur de dérivation défini par

$$D : f \in E \longmapsto f'.$$

Prouver que $D \in \mathcal{L}(E)$.

3. Montrer que $D \in GL(E)$.

Noyau et image d'une application linéaire**Exercice 9 ★**

Soit Φ l'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^4 définie par

$$(x, y, z) \longmapsto (x + z, y - z, x + y + z, x - y - z).$$

1. Montrer que Φ est linéaire.
2. Φ est-elle injective?
3. Etudier la surjectivité de Φ . Donner une base de $\text{Im}(\Phi)$.

Exercice 10 ★**Avec paramètre**

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f_α l'application linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 définie par

$$(x, y, z, t) \longmapsto (x + y + \alpha z + t, x + z + t, y + z).$$

Déterminer en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ des bases des espaces vectoriels $\text{Ker}(f_\alpha)$ et $\text{Im}(f_\alpha)$.

Exercice 11 ★**Posé à HEC!**

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par

$$f((x, y, z)) = (x, 0, y).$$

On note $(e_k)_{1 \leq k \leq 3}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. Déterminer des bases de $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$.
2. On note $E = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels $f(E)$ et $f^{-1}(E)$.

Exercice 12 ★**Excursion en dimension infinie**

Soient E l'ensemble des applications continues de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} et ψ l'application de E dans E qui à f associe l'application g de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} définie par

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) = \int_0^x 2tf(t)dt.$$

1. Justifier que E est un espace vectoriel réel pour les opérations usuelles sur les fonctions.
2. Quelle est la dimension de E ?
3. Montrer que ψ est un endomorphisme de E .
4. Étudier l'injectivité puis la surjectivité de ψ . Formuler en termes de contre-exemple les résultats précédents.
5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(\psi - \lambda \text{id}_E)$.

Exercice 13 ★**Attention aux scalaires !**

On considère \mathbb{C} comme un \mathbb{R} -espace vectoriel. On définit l'application u par

$$u : z \mapsto iz - i\bar{z}.$$

1. Prouver que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$.
2. Déterminer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.
3. Calculer u^2 .
4. En déduire que l'endomorphisme $\text{Id}_{\mathbb{C}} + 2u$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 14 ★★

Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $X^2 + aX + b$ un polynôme à coefficients complexes.

1. On note r_1 et r_2 les deux racines (éventuellement confondues) de $X^2 + aX + b$. Montrer que

$$u^2 + au + b \text{Id}_E = (u - r_1 \text{Id}_E) \circ (u - r_2 \text{Id}_E) = (u - r_2 \text{Id}_E) \circ (u - r_1 \text{Id}_E)$$

2. On pose $F = \text{Ker}(u^2 + au + b \text{Id}_E)$, $F_1 = \text{Ker}(u - r_1 \text{Id}_E)$ et $F_2 = \text{Ker}(u - r_2 \text{Id}_E)$. Montrer que $F_1 \subset F$ et $F_2 \subset F$.
3. À partir de maintenant, on suppose que les deux racines r_1 et r_2 sont *distinctes*. Montrer que $F = F_1 \oplus F_2$.
4. **Application :** Dans cette question, on suppose que E est le \mathbb{C} -espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} de classe \mathcal{C}^∞ et que u est l'endomorphisme de E qui à f associe f' . On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}) \quad y'' + ay' + by = 0$ dont on cherche les solutions à valeurs complexes.

- a. Montrer que toute solution de (\mathcal{E}) est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
- b. Montrer que l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}) est F .
- c. Déterminer F_1 et F_2 .
- d. En déduire le résultat du cours déjà connu : les solutions de (\mathcal{E}) sont les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} du type $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ avec λ et μ décrivant \mathbb{C} .

Exercice 15 ★★★

Pour $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $x \in [0, 1]$, on pose $\Phi(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t)f(t) dt$.

1. Prouver que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.
2. En utilisant la relation de Chasles, trouver une autre expression de $\Phi(f)(x)$. En déduire que $\Phi(f)$ est de classe \mathcal{C}^2 et exprimer $\Phi(f)''$ en fonction de f .
3. En déduire $\text{Ker } \Phi$ et $\text{Im } \Phi$.

Exercice 16 ★

On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (\sin, \cos, \text{sh}, \text{ch})$.

1. Montrer que \mathcal{B} est une base de F .
2. On note D l'opérateur de dérivation. Montrer que F est stable par D . On notera d l'endomorphisme de F induit par D .
3. On note M la matrice de d dans la base \mathcal{B} . Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que d est un automorphisme de F . Écrire la matrice de d^{-1} dans la base \mathcal{B} .
5. On note $f = d - \text{Id}$. Déterminer l'image et le noyau de f .
6. On note $g = d + \text{Id}$. Déterminer l'image et le noyau de $g \circ f$.

Exercice 17 ★★**CCP MP**

Pour $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, on note S_p l'ensemble des suites réelles u vérifiant :

$$\exists P \in \mathbb{R}_p[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \alpha u_n + P(n)$$

1. Montrer que si $u \in S_p$, P est unique. On notera P_u ce polynôme.
2. Montrer que S_p est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
3. Montrer que l'application $\phi : \begin{cases} S_p & \longrightarrow \mathbb{R}_p[X] \\ u & \longmapsto P_u \end{cases}$ est linéaire et donner une base de son noyau.
4. Quelle est l'image de ϕ ? Donner une base de S_p . On pourra utiliser les polynômes $R_k = (X+1)^p - \alpha X^k$ avec $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$.
5. Application : déterminer le terme général de la suite u définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7$.

Exercice 18 ★

Montrer que $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X+2)P(X) - XP(X+1)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Quel est son noyau ?

Exercice 19 ★**Noyaux et images**

Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires définies par :

1. $f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z)$;
2. $f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$;
3. $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y - z, x + 2y + 2z)$;
4. $f(x, y, z) = (x + 2y - z, x + 2y - z, 2x + 4y - 2z)$.

Exercice 20 ★

Soient

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x, y, 0), \\ g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x - y, x + y, x + 2y) \end{aligned}$$

et

$$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x - 3y + 2z.$$

1. Montrer que f , g et h sont linéaires.
2. Déterminer noyau et image dans chaque cas.

Exercice 21 ★**Posé aux CCP**

Soient E un \mathbb{R} -ev de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$. Etablir que

$$\text{Im}(f) + \text{Ker}(g) = E \iff \text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g).$$

Exercice 22 ★**Posé à Centrale en PC**

Soient E et F deux \mathbb{R} -ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que

$$f \circ g \circ f = f \text{ et } g \circ f \circ g = g.$$

Etablir que

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g) \text{ et } F = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(f).$$

Exercice 23

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires. Que pensez vous des propositions suivantes ?

1. $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$;
2. $\text{Ker}(g \circ f) \subset \text{Ker}(f)$;
3. $\text{Ker}(g \circ f) \subset \text{Ker}(f)$;
4. $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ si et seulement si $g \circ f = 0$.

Exercice 24 ★★**L'incroyable**

Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{K} et f appartenant à $\mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante

$$\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f) \text{ si et seulement si } \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}.$$

Exercice 25 ★★

Soient E un \mathbb{K} -ev, f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = id_E$.

1. Etablir que f est surjective et g injective.
2. Montrer que $p = g \circ f$ est un projecteur de E .
3. Etablir que $\text{Im}(p) = \text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(f)$.
4. Montrer que

$$\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g) = E.$$

Exercice 26 ★

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = f(\text{Ker}(f \circ f)).$$

Exercice 27 ★★**Noyaux et images itérés**

Soit u un endomorphisme de E , pour tout entier naturel p , on notera $I_p = \text{Im } u^p$ et $K_p = \text{Ker } u^p$.

1. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.
2. On suppose que E est de dimension finie et u injectif. Déterminer I_p et K_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
3. On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leq n$ tel que : $K_r = K_{r+1}$.
 - b. Montrer qu'alors : $I_r = I_{r+1}$ et que : $\forall p \in \mathbb{N}, K_r = K_{r+p}$ et $I_r = I_{r+p}$.
 - c. Montrer que : $E = K_r \oplus I_r$.
4. Lorsque E n'est pas de dimension finie, existe-t-il un plus petit entier naturel r tel que $K_r = K_{r+1}$?

Exercice 28 ★★

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E .

1. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
2. Montrer que si g est surjective et $E = \text{Im } f + \text{Ker } g$, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Formuler des énoncés similaires pour l'injectivité.

Exercice 29 ★

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E qui commutent.

1. Montrer que $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont stables par v .
2. On suppose que $E = \text{Ker } u \oplus \text{Ker } v$. Montrer que $\text{Im } u \subset \text{Ker } v$ et que $\text{Im } v \subset \text{Ker } u$.
3. Montrer que les inclusions précédentes sont des égalités si E est de dimension finie.

Exercice 30 ★

ENSEA

Soient E et F deux espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, G et H deux sous-espaces vectoriels de E .

1. Montrer que $f(G + H) = f(G) + f(H)$.
2. Montrer que si G et H sont en somme directe et que f est injective, alors $f(G \oplus H) = f(G) \oplus f(H)$.

Exercice 31 ★★

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$$

Exercice 32 ★★

Soient E un espace vectoriel et f, g deux projecteurs de E .

1. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$ si et seulement si $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.

Exercice 33 ★★

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$;
- (ii) $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$;
- (iii) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$;
- (iv) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

Exercice 34 ★

Petites Mines

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

- (i) il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$;
- (ii) $\dim E$ est paire.

Exercice 35

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g \circ f$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$.
3. Montrer que $g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

Exercice 36 ★★

Soient E, F et G trois espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $F = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Ker}(g)$ si et seulement si $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g)$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_F\}$ si et seulement si $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f)$.

Exercice 37 ★★

On considère deux endomorphismes f et g d'un espace vectoriel E vérifiant

$$f \circ g \circ f = g \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = f$$

1. Montrer que

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(g) = \operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(f \circ g)$$

et

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f \circ g)$$

2. Démontrer que

$$E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(g) \oplus \operatorname{Im}(g)$$

Endomorphismes nilpotents

Exercice 38 ★**D'après Centrale PC**

Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie et f un endomorphisme de E . On souhaite prouver l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(*) Il existe un projecteur p de E tel que $f = p \circ f - f \circ p$

(**) $f^2 = 0$

- Supposons (*) vérifiée. Prouver que $p \circ f \circ p = 0$, puis que $f = p \circ f$. En déduire que (**) est vérifiée.
- Supposons (**) vérifiée. Soit S un supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans E et p le projecteur sur $\text{Ker}(f)$ parallèlement à S . Prouver la propriété (*).

Exercice 39 ★★**Endomorphismes nilpotents**

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie n . Un endomorphisme u de E est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$.

- Donner des exemples d'endomorphismes nilpotents de \mathbb{R}^2 puis de \mathbb{R}^3 .
- Montrer qu'un endomorphisme nilpotent n'est jamais un isomorphisme.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E, \exists p_x \in \mathbb{N}, u^{p_x}(x) = 0.$$

Montrer que u est nilpotent.

- Montrer que si u est un endomorphisme nilpotent alors $\text{id}_E - u \in \text{GL}(E)$.

Exercice 40 ★

Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension 3 et f appartenant à $\mathcal{L}(E)$.

- On suppose dans cette question que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Calculer le rang de f .
- On suppose dans cette question que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Calculer le rang de f .

Exercice 41 ★★**Equation $u^2 = 0$**

Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{K} et u un endomorphisme de E .

- On suppose dans cette question l'existence d'un *projecteur* p de E tel que

$$u = p \circ u - u \circ p.$$

- Démontrer que $p \circ u \circ p = 0$. On précisera de quel 0 il s'agit.
- Prouver que $u \circ p = 0$.
- En déduire que $u^2 = 0$.

- On suppose dans cette question que $u^2 = 0$.

- Démontrer que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$.
- Soient H et S deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E tels que

$$\text{Im}(u) \subset H \subset \text{Ker}(u).$$

En notant q la projection sur H parallèlement à S , reconnaître l'application linéaire $q \circ u - u \circ q$.

- Donner une condition *nécessaire et suffisante* pour qu'il existe un projecteur p de E tel que

$$u = p \circ u - u \circ p.$$

Exercice 42 ★**Endomorphismes de carré nul**

Soient E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

- $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
- $f^2 = 0$, $n = 2 \text{rg}(f)$.

Exercice 43 ★★★**Mines P' 1995**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E nilpotent d'indice n . On pose

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ g &\longmapsto f \circ g - g \circ f\end{aligned}$$

1. Montrer que $\Phi^p(g) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} f^{p-k} \circ g \circ f^k$. En déduire que Φ est nilpotent.
2. Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $b \in \mathcal{L}(E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$. En déduire l'indice de nilpotence de Φ .

Projecteurs, symétries et homothéties**Exercice 44 ★**

On note $E = \mathbb{R}^4$,

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid z = y + t = 0\}$$

et $G = \{(x, y, z, t) \mid x = y + z = 0\}$.

1. Prouver que F et G sont des plans vectoriels de E .
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
3. Donner les expressions analytiques de p et s , respectivement projecteur sur F parallèlement à G et symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Exercice 45 ★**En dimension infinie**

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, \mathcal{A} le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions affines et on pose

$$\mathcal{N} = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}.$$

1. Montrer que les sous-espaces vectoriels \mathcal{A} et \mathcal{N} sont supplémentaires dans E .
2. Expliciter le projecteur sur \mathcal{A} parallèlement à \mathcal{N} .
3. Expliciter la symétrie par rapport à \mathcal{A} parallèlement à \mathcal{N} .

Exercice 46 ★**Somme de deux projecteurs**

Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{K} , p et q deux projecteurs de E .

1. Prouver que

$$p \circ q + q \circ p = 0 \text{ si et seulement si } p \circ q = q \circ p = 0.$$

2. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si

$$p \circ q = q \circ p = 0.$$

3. On suppose que $p + q$ est un projecteur de E . Montrer que

$$\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$$

et

$$\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q).$$

Exercice 47 ★**Composée de deux projecteurs**

Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{K} , p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$.

1. Prouver que $\psi = p \circ q$ est un projecteur de E .
2. Montrer que $\text{Im}(\psi) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$.
3. Etablir que $\text{Ker}(\psi) = \text{Ker}(p) + \text{Ker}(q)$.

Exercice 48 ★★

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et A une partie finie de $\text{GL}(E)$ stable par composition. On pose $p = \frac{1}{|A|} \sum_{f \in A} f$. Montrer que p est un projecteur.

Exercice 49 ★

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et p un projecteur de E . Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{K}$, $\text{Id} + \lambda p$ est-il un automorphisme ?

Exercice 50 ★★

Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E qui commutent.

1. Montrer que $p + q - p \circ q$ et $p \circ q$ sont des projecteurs.
2. Montrer que $\text{Ker}(p \circ q) = \text{Ker } p + \text{Ker } q$ et que $\text{Im}(p \circ q) = \text{Im } p \cap \text{Im } q$.
3. Montrer que $\text{Ker}(p+q-p \circ q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$ et que $\text{Im}(p+q-p \circ q) = \text{Im } p + \text{Im } q$.

Exercice 51 ★★★**Centrale MP**

Soient H_1 et H_2 deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (f, g) \in H_1 \times H_2, f \circ g + g \circ f = 0$$

1. Justifier qu'il existe $(p_1, p_2) \in H_1 \times H_2$ tel que $p_1 + p_2 = \text{Id}$.
2. Montrer que p_1 et p_2 sont des projecteurs.
3. Montrer que $\dim H_1 \leq (n - \text{rg } p_2)^2$ et $\dim H_2 \leq (n - \text{rg } p_1)^2$.
4. Quel est le nombre de choix possibles pour le couple (H_1, H_2) ?

Exercice 52 ★★

Soient p_1, \dots, p_n des projecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que $p_1 + \dots + p_n = \text{Id}_E$.

Montrer que $\text{Im } p_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } p_n = E$.

Exercice 53 ★★★

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E . Montrer qu'il existe un projecteur p de E et un automorphisme φ de E tels que $u = p \circ \varphi$.

Exercice 54 ★★

Soient f et g deux projecteurs d'un espace vectoriel E .

1. a. Montrer que $\text{Im } f = \text{Im } g$ si et seulement si $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$.
b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\text{Ker } f = \text{Ker } g$.
2. On suppose que $f \circ g = g \circ f$.
a. Montrer que

$$E = (\text{Im } f \cap \text{Im } g) \oplus (\text{Im } f \cap \text{Ker } g) \oplus (\text{Ker } f \cap \text{Im } g) \oplus (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g)$$

- b. Que peut-on dire de $f \circ g$?

Exercice 55 ★

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 - 3u + 2\text{Id}_E = 0$.

1. Montrer que $u \in \text{GL}(E)$ et exprimer u^{-1} en fonction de u .
2. On pose $f = u - \text{Id}_E$ et $g = 2\text{Id}_E - u$. Montrer que $f \circ g = g \circ f = 0$.
3. Vérifier que f et g sont des projecteurs.
4. Montrer que $\text{Im } f = \text{Ker } g$ et $\text{Im } g = \text{Ker } f$.
5. Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } g$ et $E = \text{Im } f \oplus \text{Im } g$.

Exercice 56 ★★★

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$ qui commute avec tous les endomorphismes de E , c'est-à-dire

$$\forall g \in \mathcal{L}(E), \quad f \circ g = g \circ f$$

1. Soit u un vecteur non nul de E . Justifier l'existence d'un supplémentaire H_u de $\text{vect}(u)$ dans E . Quelle est la dimension de H_u ?
2. En considérant le projecteur p_u sur $\text{vect}(u)$ parallèlement à H_u , montrer qu'il existe $\lambda_u \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda_u u$.
3. Soit $v \in E$ non colinéaire à u . On montre de même qu'il existe $\lambda_v \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda_v v$. Montrer que $\lambda_u = \lambda_v$. On pourra considérer le vecteur $u + v$.
4. Reprendre la question précédente lorsque v est non nul et colinéaire à u .
5. En déduire que les endomorphismes de E commutant avec tous les endomorphismes sont les homothéties.

Exercice 57 ★

On pose $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer que l'application s qui à une fonction $f \in E$ associe l'application $x \mapsto f(-x)$ est une symétrie dont on précisera les éléments caractéristiques.

Rang d'une application linéaire**Exercice 58 ★★**

Soient E un espace vectoriel réel de dimension n , f et g deux endomorphismes tels que

$$f + g = id_E \quad \text{et} \quad \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq n.$$

1. Montrer que

$$E = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g).$$

2. Après avoir justifié l'égalité $f \circ g = g \circ f$, prouver que f et g sont des projecteurs de E .

Exercice 59 ★★

Soient E un \mathbb{K} -ev de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E .

1. Etablir que $\dim(\text{Ker}(f \circ g)) \leq \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g))$.
2. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si $\text{Ker}(f) \subset \text{Im}(g)$.

Exercice 60 ★★★

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer le rang de l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ $\Phi : f \mapsto v \circ f \circ u$.

Exercice 61 ★★**Inégalité de Frobenius**

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $h \in \mathcal{L}(G, H)$ où E, F, G, H sont des espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que

$$\text{rg}(g \circ f) + \text{rg}(h \circ g) \leq \text{rg}(h \circ g \circ f) + \text{rg}(g)$$

Exercice 62 ★**Inégalités de Sylvester**

Soient E et F deux espaces vectoriels, f et g deux applications linéaires de rang fini de E dans F .

1. Montrer que $|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$
2. Prouver que $\text{rg}(f + g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ si et seulement si

$$\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0_F\} \quad \text{et} \quad \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = E$$

Formes linéaires et hyperplans

Exercice 63 ★★**Endomorphismes de rang au plus 1**

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et f un endomorphisme de E dont l'image est une droite vectorielle $\text{vect}(u)$ avec $u \neq 0_E$. On pose alors :

$$\forall x \in E, f(x) = \varphi(x)u$$

Montrer que φ est une forme linéaire sur E et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

Exercice 64 ★★**Transvections**

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n , avec $n \geq 2$. On rappelle que E^* est l'ensemble des formes linéaires sur E .

1. Soient φ et ψ deux éléments non nuls de E^* tels que $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$. Montrer qu'il existe un réel non nul λ tel que $\psi = \lambda\varphi$.
2. Soit H un hyperplan de E . Montrer que l'ensemble $D(H)$ des éléments de E^* dont le noyau contient H est un sous-espace vectoriel de E^* dont on précisera la dimension.
3. On appelle *transvection* de E tout endomorphisme f de E possédant les deux propriétés suivantes :
 - $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ est un hyperplan de E ;
 - $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.

On appelle $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ la base de f et $\text{Im}(f - \text{Id}_E)$ la direction de f .

- a. Soit φ un élément non nul de E^* et u un vecteur non nul de $\text{Ker}(\varphi)$. Pour tout vecteur x de E , on pose $f(x) = x + \varphi(x)u$. Justifier l'existence de u et montrer que f est une transvection dont on précisera la base et la direction.
- b. Réciproquement, soit f une transvection de E . Montrer qu'il existe un élément non nul φ de E^* et un vecteur u non nul de $\text{Ker}(\varphi)$ tels que $f(x) = x + \varphi(x)u$ pour tout $x \in E$.

Exercice 65 ★★

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E . On suppose qu'il existe $x \in E$ non nul tel que

$$\forall i \in [1, n], \varphi_i(x) = 0$$

Montrer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée.

Exercice 66 ★★★**Rang d'une famille de formes linéaires**

On considère un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E . On note

$$G = \{\varphi \in E^*, \forall x \in F, \varphi(x) = 0\}$$

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E^* et que $\dim F + \dim G = \dim E$.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E^* . On note

$$G = \{x \in E, \forall \varphi \in F, \varphi(x) = 0\}$$

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et que $\dim F + \dim G = \dim E$.

3. On se donne des éléments $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ de E^* . Montrer que

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^m \text{Ker } \varphi_i \right) + \text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = \dim E$$

Exercice 67 ★**Equations d'un hyperplan**

Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{K} , f et g deux formes linéaires sur E non nulles.

1. Prouver que

$$\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$$

si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $g = \lambda f$.

2. En déduire une *condition nécessaire et suffisante* pour que f et g définissent le même hyperplan H . En déduire toutes les équations de H .