Groupes

Exercice 1.

Soient E un ensemble et $x \in \mathrm{E}$. On pose

$$\mathrm{S}(x) = \{\sigma \in \mathrm{S}(\mathrm{E}), \sigma(x) = x\}$$

Montrer que $\mathrm{S}(x)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{S}(\mathrm{E}), \circ)$.

Exercice 2.

Soit $\mathrm{G} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On pose pour tous éléments (x, y) et (x', y') de G :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Vérifier que $*$ est une loi interne associative sur G.
2. Vérifier que $(\mathrm{G}, *)$ est un groupe. Est-il commutatif ?
3. Donner une expression de $(x, y)^{*n}$.

Exercice 3.

Soit $\mathrm{G} =]-1, 1[$. On pose pour tous éléments x et y de G :

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

1. Vérifier que $*$ est une loi interne associative sur G.
2. Vérifier que $(\mathrm{G}, *)$ est un groupe. Est-il commutatif ?
3. Donner une expression de x^{*n}.

Exercice 4.

Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G.

1. Montrer que $\mathrm{H} \cap \mathrm{K}$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que $\mathrm{H} \cup \mathrm{K}$ est un sous-groupe de G *si et seulement si* $\mathrm{H} \subset \mathrm{K}$ ou $\mathrm{K} \subset \mathrm{H}$.

Exercice 5.

Soit G un groupe d'élément neutre e tel que $\forall x \in \mathrm{G}$, $x^2 = e$. Montrer que G est commutatif.

Exercice 6.

Soit $(\mathrm{G}, .)$ un groupe. On définit le centre de G par

$$\mathrm{Z}(\mathrm{G}) = \{a \in \mathrm{G} \mid \forall x \in \mathrm{G}, ax = xa\}$$

i.e. l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G. Montrer que Z(G) est un sous-groupe de G.

Exercice 7.

On munit $\mathbb{R}$ de la loi interne $*$ définie par : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a * b = a + b + ab$. $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ?

Exercice 8.

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On suppose G non trivial i.e. $\mathrm{G} \neq \{0\}$.

1. Question préliminaire : soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n\alpha \leqslant \beta < (n+1)\alpha$.
2. Justifier que $\mathrm{G} \cap \mathbb{R}_+^*$ possède une borne inférieure que l'on notera a.
3. On suppose que $a > 0$.
   - **a.** On suppose que $a \notin \mathrm{G}$. Justifier l'existence de deux éléments distincts x et y de G appartenant à l'intervalle $]a, 2a[$.
   - **b.** Aboutir à une contradiction et en déduire que $a \in \mathrm{G}$.
   - **c.** En déduire que $a\mathbb{Z} \subset \mathrm{G}$.
   - **d.** Soit $z \in \mathrm{G}$. En utilisant la question **1**, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $z = na$.
   - **e.** En déduire que $\mathrm{G} = a\mathbb{Z}$.
4. On suppose que $a = 0$.
   - **a.** Soient $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. En utilisant la question **1**, montrer qu'il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $|g - t| < \varepsilon$.
   - **b.** En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9.

Soit G un groupe abélien fini d'ordre impair. Calculer le produit des éléments de G.

EXERCICE 10.

Soient $(G,*)$ un groupe et H un ensemble. On suppose qu'il existe une bijection f de G sur H. On définit la loi . sur H de la manière suivante :

$$\forall(x,y)\in H^2,\ x.y = f\left(f^{-1}(x)*f^{-1}(y)\right)$$

Montrer que $(H,.)$ est un groupe.

EXERCICE 11.

Soient $(G,*)$ un groupe et $(H,.)$ un ensemble muni d'une loi interne. On suppose qu'il existe une surjection de G sur H vérifiant

$$\forall(x,y)\in G^2,\ f(x*y) = f(x).f(y)$$

Montrer que $(H,.)$ est un groupe. Que peut-on dire de f ?

EXERCICE 12.

Soit G un groupe. On définit une relation binaire $\sim$ sur G par

$$\forall(x,y)\in G^2,\ x\sim y \iff \exists g\in G,\ y = g^{-1}xg$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

EXERCICE 13.

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. On définit une relation binaire $\sim$ sur G par

$$\forall(x,y)\in G^2,\ x\sim y \iff \exists h\in H,\ y = xh$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

EXERCICE 14.

Dans cette exercice, on pourra identifier le plan à $\mathbb{C}$ via un repère orthonormé. On pourra en particulier identifier une transformation du plan à une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1. On note G l'ensemble des translations et des similitudes directes du plan. Montrer que G muni de la loi de composition est un groupe.
2. On note H l'ensemble des translations et des rotations du plan. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Morphismes de groupes

EXERCICE 15.

Soit G un groupe. Notre but est de montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de S(G).

1. Pour cela considérons pour tout $g\in G$ l'application *translation à gauche par g*

$$\varphi_g : G\to G,\ h\mapsto gh.$$

   Montrer que $\varphi_g\in S(G)$.

2. Montrer que $G\longrightarrow S(G),\ g\longmapsto \varphi_g$, est un morphisme injectif. Conclure.

EXERCICE 16.☆

Soit G un groupe. Étant donné un élément a de G on définit l'application :

$$\varphi_a : \begin{cases} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & axa^{-1} \end{cases}$$

1. Soit $a\in G$. Montrer que φ_a est un automorphisme de G.
2. On pose $\mathfrak{I}(G) = \{\varphi_a, a\in G\}$. Montrer que l'ensemble $\mathfrak{I}(G)$ est un sous-groupe de $(Aut(G),\circ)$.
3. Montrer que $\varphi : \begin{cases} G & \longrightarrow & Aut(G) \\ a & \longmapsto & \varphi_a \end{cases}$ est un morphisme de groupes.

EXERCICE 17.

Soit G un groupe. Montrer que $f : \begin{cases} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{cases}$ est un automorphisme de G *si et seulement si* G est commutatif.

EXERCICE 18.

Déterminer les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Z},+)$.

EXERCICE 19.

Montrer que les endomorphismes de groupe de $(\mathbb{R},+)$ continus sont les homothéties i.e. les applications $x\mapsto\lambda x$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

Anneaux et corps

EXERCICE 20.

Montrer que l'ensemble des nombres décimaux

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{k}{10^n} \ : \ (k,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$$

est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Est-ce aussi un sous-corps ?

EXERCICE 21.

Montrer que tout anneau commutatif intègre fini est un corps.

EXERCICE 22.

On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau commutatif.
2. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

EXERCICE 23.

Soit $(\mathrm{A}, +, \times)$ un anneau. Un élément a de A est dit nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0_\mathrm{A}$.

1. Soit $(x,y) \in \mathrm{A}^2$. Montrer que si $x \times y$ est nilpotent, alors $y \times x$ est nilpotent.
2. Soit $(x,y) \in \mathrm{A}^2$. Montrer que si x et y commutent et que l'un des deux est nilpotent, alors $x \times y$ est nilpotent.
3. Soit $(x,y) \in \mathrm{A}^2$. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors $x + y$ est nilpotent.
4. Soit $x \in \mathrm{A}$. Montrer que si x est nilpotent, alors $1_\mathrm{A} - x$ est inversible et calculer son inverse.

EXERCICE 24.

Soit A un anneau tel que $\forall x \in \mathrm{A},\ x^2 = x$ (on dit que les éléments de A sont idempotents).

1. Montrer que $\forall x \in \mathrm{A},\ 2x = 0$.
2. Montrer que A est commutatif.

EXERCICE 25.

Soit E un ensemble non vide. Pour $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$, on définit la différence de A et B par $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B} = (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} \setminus \mathrm{A})$.

1. Montrer que $(\mathscr{P}(\mathrm{E}), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Préciser les éléments neutres pour Δ et $\cap$.
2. Quels sont les éléments de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ inversibles pour $\cap$?
3. L'anneau $(\mathscr{P}(\mathrm{E}), \Delta, \cap)$ est-il intègre ?

EXERCICE 26.

On note $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ l'ensemble des réels de la forme $a + b\sqrt{3}$ avec $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ est un corps.

EXERCICE 27.

Soit A un anneau intègre commutatif fini.

1. Soit a un élément non nul de A. Montrer que l'application $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{A} \\ x & \longmapsto & ax \end{array} \right.$ est bijective.
2. En déduire que A est un corps.

Morphismes d'anneaux

EXERCICE 28.☆☆

Soit f un endomorphisme de corps de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f_{|\mathbb{Q}} = \mathrm{Id}_\mathbb{Q}$.
2. Montrer que f est croissant.
3. Montrer que $f = \mathrm{Id}_\mathbb{R}$.

Exercice 29.

On note $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ l'ensemble des réels de la forme $a+b\sqrt{3}$ avec $a,b\in\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R},+,\times)$.

2. **a.** Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. On pourra raisonner par l'absurde en écrivant $\sqrt{3}$ sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ i.e. avec $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ tel que $p\wedge q=1$.

b. Montrer que $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\sqrt{3}]\\ (a,b) & \longmapsto & a+b\sqrt{3}\end{array}\right.$ est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{Z}^2,+)$ sur le groupe $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}],+)$.

3. Pour tout $x\in\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, il existe donc un unique couple $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $x=a+b\sqrt{3}$.

a. Pour tout réel $x=a+b\sqrt{3}\in\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ avec $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$, on appelle *conjugué* de x, noté $\tilde{x}$, le réel $a-b\sqrt{3}$.
Montrer que $g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{Z}[\sqrt{3}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\sqrt{3}]\\ x & \longmapsto & \tilde{x}\end{array}\right.$ est un automorphisme d'anneau.

b. Pour tout réel $x=a+b\sqrt{3}\in\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ avec $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$, on pose $\mathrm{N}(x)=x\tilde{x}$. Vérifier que pour tout $(x,y)\in\left(\mathbb{Z}[\sqrt{3}]\right)^2$, $\mathrm{N}(xy)=\mathrm{N}(x)\mathrm{N}(y)$.

c. Montrer que $x\in\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ est inversible *si et seulement si* $\mathrm{N}(x)=1$ ou $\mathrm{N}(x)=-1$.
Que vaut alors son inverse ? On distinguera les cas $\mathrm{N}(x)=1$ et $\mathrm{N}(x)=-1$.