

DEVOIR SURVEILLÉ N°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

Partie I – Etude de la suite (v_n)

1. La suite (v_n) vérifie la relation : $v_0 > 0$, $v_1 > 0$ et $\forall n \geq 0$, $\sqrt{v_n} \sqrt{v_{n+1}} v_{n+2} = 1$.

Si elle converge vers une limite l finie ou infinie, alors $l \geq 0$ et par continuité de $x \mapsto \sqrt{x}$, on a $l^2 = 1$.

La seule limite possible de (v_n) est 1.

2. a. La suite (w_n) vérifie la relation de récurrence $w_{n+2} = -\frac{w_{n+1} + w_n}{2}$.

- b. L'espace vectoriel F est de dimension 2. On le vérifie en montrant que $(w_n) \mapsto (w_0, w_1)$ est un isomorphisme de F dans \mathbb{R}^2 .

On cherche des éléments de F de la forme (r^n) avec $r \neq 0$, en reportant dans la relation de récurrence, on obtient $r^2 = -\frac{r+1}{2}$, soit $r = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$.

Donc $\left(\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{4} \right)^n, \left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{4} \right)^n \right)$ est une base de F .

- c. $\left| \frac{-1+i\sqrt{7}}{4} \right| = \left| \frac{-1-i\sqrt{7}}{4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{4} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{4} \right)^n = 0$.

On en déduit que si $(x_n) \in F$, alors $x_n = \mathcal{O} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

3. $(w_n) \in F$ donc, d'après la question I.2.c, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$, or $v_n = e^{w_n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$ et $\sum v_n$ diverge.

De plus $v_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n$ et $\sum \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n$ converge absolument donc

$\sum (v_n - 1)$ converge absolument.

Partie II – Norme subordonnée

1. Remarquons que l'application $f_A : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \mapsto AX$ est linéaire et donc continue puisque $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est de dimension finie. De plus, $\mathcal{B} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \|X\| \leq 1\}$ est compact toujours car $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est de dimension finie. Ainsi f_A est bornée sur \mathcal{B} . En notant N_∞ la norme uniforme sur les applications bornées sur \mathcal{B} , on a donc $\|A\| = N_\infty(f_A)$. On vérifie alors aisément que $\| \cdot \|$ est une norme sachant que N_∞ en est une.

Homogénéité Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il est clair que $f_{\lambda A} = \lambda f_A$ donc

$$\|\lambda A\| = N_\infty(f_{\lambda A}) = N_\infty(\lambda f_A) = |\lambda| N_\infty(f_A) = |\lambda| \|A\|$$

Inégalité triangulaire Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Il est clair que $f_{A+B} = f_A + f_B$. Alors

$$\|A + B\| = N_\infty(f_{A+B}) = N_\infty(f_A + f_B) \leq N_\infty(f_A) + N_\infty(f_B) = \|A\| + \|B\|$$

Séparation Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|A\| = 0$. Alors $N_\infty(f_A) = 0$ donc f_A est nulle sur \mathcal{B} . Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Si $X = 0$ alors $f_A(X) = 0$. Sinon $X/\|X\| \in \mathcal{B}$ donc $f_A(X/\|X\|) = 0$ puis $f_A(X) = 0$. Ainsi f_A est nulle sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ i.e. $A = 0$.

2. Si $B = 0$, alors $AB = 0$ et donc $\|AB\| = \|A\| \|B\| = 0$. Supposons $B \neq 0$ de sorte que $\|B\| \neq 0$. Soit $X \in \mathcal{B}$. Alors $\|BX\| \leq \|B\|$ ou encore $BX/\|B\| \in \mathcal{B}$ donc $\|ABX/\|B\|\| \leq \|A\|$ i.e. $\|ABX\| \leq \|A\| \|B\|$. Ceci étant vrai pour tout $X \in \mathcal{B}$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Partie III – Etude de normes matricielles

1. a. $DZ = \begin{pmatrix} m_{1,1}z_1 \\ m_{2,2}z_2 \\ \vdots \\ m_{n,n}z_n \end{pmatrix}$ donc $\|DZ\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |m_{i,i}z_i| \leq m \max_{1 \leq i \leq n} |z_i| = m\|Z\|_\infty$.

$$\boxed{\|DZ\|_\infty \leq m\|Z\|_\infty}.$$

- b. Si $\|Z\|_\infty \leq 1$, alors on a $\|DZ\|_\infty \leq m$ d'où $\|D\|_\infty = \sup_{X \in \mathbb{C}^n, \|X\|_\infty \leq 1} \|DX\|_\infty \leq m$.

De plus, il existe un entier $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $m = |m_{j,j}|$. En prenant $z_j = 1$ et pour $k \neq j$, $z_k = 0$ et

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \text{ on a } \|DZ\|_\infty = m \text{ et } \|Z\|_\infty = 1 \text{ d'où } \|D\|_\infty \geq m.$$

$$\text{Finalement } \boxed{\|D\|_\infty = m}.$$

2. a. $N_P(X) = \|PX\|_\infty$.

Si P n'est pas inversible, en prenant $X \in \ker P$ non nul, on a $N_P(X) = 0$ et $X \neq 0$ donc N_P n'est pas une norme.

Si P est inversible, alors

- N_P est une application de \mathbb{C}^n dans \mathbb{R}^+
- $\forall X \in \mathbb{C}^n, \forall \lambda \in \mathbb{C}, N_P(\lambda X) = \|\lambda PX\|_\infty = |\lambda| \|PX\|_\infty = |\lambda| N_P(X)$.
- $\forall (X, Y) \in (\mathbb{C}^n)^2, N_P(X + Y) = \|P(X + Y)\|_\infty = \|PX + PY\|_\infty \leq \|PX\|_\infty + \|PY\|_\infty = N_P(X) + N_P(Y)$.
- $\forall X \in \mathbb{C}^n, N_P(X) = 0 \implies \|PX\|_\infty = 0 \implies PX = 0 \implies X = 0$ (car $\|\cdot\|_\infty$ est une norme et P est inversible).

donc N_P est une norme.

Finalement, $\boxed{N_P \text{ est une norme si et seulement si } P \text{ est une matrice inversible}}.$

b. $\|A\|_P = \sup_{X \in \mathbb{C}^n, \|X\|_P \leq 1} \|AX\|_P = \sup_{X \in \mathbb{C}^n, \|PX\|_\infty \leq 1} \|PAX\|_\infty = \sup_{X \in \mathbb{C}^n, \|PX\|_\infty \leq 1} \|PAP^{-1}PX\|_\infty$

Or P est inversible, donc $X \mapsto PX$ est une bijection de \mathbb{C}^n sur \mathbb{C}^n donc

$$\sup_{X \in \mathbb{C}^n, \|PX\|_\infty \leq 1} \|PAP^{-1}PX\|_\infty = \sup_{X \in \mathbb{C}^n, \|X\|_\infty \leq 1} \|PAP^{-1}X\|_\infty = \|PAP^{-1}\|_\infty,$$

$$\text{On a donc bien } \boxed{\|A\|_P = \|PAP^{-1}\|_\infty}.$$

3. a. On sait que λ est une valeur propre de A associée au vecteur X si et seulement si λ est une valeur propre de PAP^{-1} associée au vecteur PX .

A et PAP^{-1} ont donc le même spectre et donc $\boxed{\rho(A) = \rho(PAP^{-1})}$.

- b. Il existe une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$. Soit X un vecteur propre unitaire associé à λ . $\rho(A) = |\lambda| = \|\lambda X\|_\infty = \|AX\|_\infty \leq \|A\|_\infty$.

En utilisant **III.2.b**, on en déduit : $\rho(A) = \rho(PAP^{-1}) \leq \|PAP^{-1}\|_\infty = \|A\|_P$, et donc $\boxed{\rho(A) \leq \|A\|_P}$.

- c. On suppose A diagonalisable. Il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = PAP^{-1}$. D'après **III.2.b**, $\|A\|_P = \|PAP^{-1}\|_\infty = \|D\|_\infty$, d'après **III.1.b**, $\|D\|_\infty = \rho(D)$ et comme A et D sont semblables, $\rho(D) = \rho(A)$.

$$\boxed{\text{Il existe donc } P \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ tel que } \|A\|_P = \rho(A)}.$$

d. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

$P_A(X) = 1 - X^3$, les valeurs propres de A sont $1, j$ et j^2 donc $\rho(A) = 1$.

Les vecteurs propres associés à $1, j$ et j^2 sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}.$

Si $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$, alors $D = PAP^{-1}$ et d'après **III.3.c** $\|A\|_p = \rho(A)$.

e. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$

A est de rang 1 et E_0 a pour équation $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$.

Une base de E_0 est : $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$

D'autre part, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\frac{n(n+1)}{2}$.

A est donc diagonalisable (la somme des dimensions des sous-espaces propres est n)

Si $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix},$

alors $D = PAP^{-1}$ et d'après **III.3.c** $\|A\|_p = \rho(A)$.

4. a. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$

$$\|AZ\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max(|az_1 + bz_2|, |cz_1 + dz_2|)$$

$$\leq \max(|az_1| + |bz_2|, |cz_1| + |dz_2|) \leq \max(|a| + |b|, |c| + |d|) \max(|z_1|, |z_2|) = m\|Z\|_\infty.$$

On a donc $\|AZ\|_\infty \leq m\|Z\|_\infty$.

On en déduit $\|A\|_\infty \leq m$.

Si on suppose que $m = |a| + |b|$, alors on choisit z_1 et z_2 de module 1 tels que $|a| = az_1$ et $|b| = bz_2$. On a alors $\|AZ\|_\infty = \max(|az_1 + bz_2|, |cz_1 + dz_2|) = \max(m, |cz_1 + dz_2|) = m$ et $\|Z\|_\infty = 1$.

De même si $m = |c| + |d|$.

On en déduit $\|A\|_\infty \geq m$.

On a donc $\|A\|_\infty = m$.

b. i. $A \in M_2(\mathbb{C})$, non diagonalisable.

On travaille dans \mathbb{C} , donc $\text{Sp}(A) \neq \emptyset$.

Si $\text{Sp}(A)$ possédait deux éléments, alors le polynôme caractéristique de A serait scindé à racines simples et A serait diagonalisable, donc $\boxed{\text{Sp}(A) \text{ ne contient qu'un élément}}.$

- ii. On choisit une base $e = (e_1, e_2)$ de E , avec e_1 un vecteur propre de f associé à la valeur propre α . La matrice dans la base e de f est alors triangulaire supérieure, avec les valeurs propres sur la diagonale.

Elle est donc de la forme $\boxed{\text{mat}_e(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}}.$

- iii. β est non nul car A n'est pas diagonalisable.

Posons $e'_1 = \frac{\beta}{\epsilon} e_1$ et $e'_2 = e_2$.

$e' = (e'_1, e'_2)$ est une base de \mathbb{C}^2 , $f(e'_1) = e'_1$, $f(e'_2) = f(e_2) = \beta e_1 + \alpha e_2 = \epsilon e'_1 + \alpha e'_2$.

On a donc $\text{mat}_{e'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \epsilon \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$

$\boxed{\text{Il existe donc une base } e' \text{ de } \mathbb{C}^2 \text{ telle que } \text{mat}_{e'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ où } |\beta'| \leq \epsilon}.$

- iv. Notons $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Il existe une matrice $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $T = PAP^{-1}$.

On a alors $\|A\|_P = \|PAP^{-1}\|_\infty = \|T\|_\infty = |\alpha| + |\beta'| \leq |\alpha| + \epsilon = \rho(A) + \epsilon$.

$\boxed{\text{Il existe donc une matrice } P \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) \text{ telle que } \|A\|_P \leq \rho(A) + \epsilon}.$

- c. D'après **III.4.b.iv**, $\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) \quad \|A\|_P \leq \rho(A) + \epsilon$.

On a donc $\inf_{P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})} \|A\|_P \leq \rho(A)$.

D'après **III.3.b**, si $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ alors $\|A\|_P \geq \rho(A)$.

On a donc $\inf_{P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})} \|A\|_P \geq \rho(A)$.

Finalement $\boxed{\inf_{P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})} \|A\|_P = \rho(A)}.$

d. $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$

$$\|A\|_\infty = \max(|-3| + |8|, |-2| + |5|) = 11.$$

$P_A(X) = (X-1)^2$ et $\dim(E_1) = 1$ donc A est non diagonalisable et $\text{Sp}(A) = \{1\}$.

On a donc $\rho(A) = 1$ et d'après **III.4.b.iii**, A est semblable à une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec

$$|\beta'| \leq 1.$$

Il existe donc $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $T = PAP^{-1}$.

$$\|A\|_P = \|PAP^{-1}\|_\infty = \|T\|_\infty = 1 + |\beta'| \leq 2.$$

$\boxed{\text{Il existe donc une matrice } P \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) \text{ telle que } \|A\|_P \leq 2}.$

- e. On utilise la question **III.4.b.iv** avec $\epsilon = \frac{1-\rho(A)}{2} > 0$.

On a alors $\|A\|_P \leq \rho(A) + \epsilon = \frac{1+\rho(A)}{2} < 1$.

On sait que la norme subordonnée est une norme d'algèbre, donc $\|A^n\|_P \leq \|A\|_P^n$ et donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|_P = 0}.$

Partie IV – Etude de la suite (u_n)

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (0, -\frac{2}{(x+y)^2})$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (1, -\frac{2}{(x+y)^2})$.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, donc $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } (\mathbb{R}_+^*)^2}.$

2. $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ est un point fixe de f si et seulement si $(a, b) = (b, \frac{2}{a+b})$.

$\boxed{\text{Le seul point fixe de } f \text{ dans } (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ est } (1, 1)}.$

3. $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = (0, -\frac{1}{2})$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = (1, -\frac{1}{2})$ donc $J_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4. Le polynôme caractéristique de $J_{(1,1)}$ est $P_{J_{(1,1)}}(X) = X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$. Ses valeurs propres sont $\frac{-1+i\sqrt{7}}{4}$ et $\frac{-1-i\sqrt{7}}{4}$ de module $\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\rho(J_{(1,1)}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$J_{(1,1)}$ est donc diagonalisable (2 valeurs propres distinctes) et d'après la question **III.3.c**,

$$\text{il existe } P \in GL_2(\mathbb{C}) \text{ tel que } \|J_{(1,1)}\|_P = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. a. $J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$ et $(x,y) \mapsto \frac{1}{(x+y)^2}$ est continue sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

$(x,y) \mapsto J_{(x,y)}$ est donc continue sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. On est en dimension finie, donc la continuité ne dépend pas du choix des normes.

Soit $\epsilon = \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$. (car $\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$)

Ecrivons la continuité de J en $(1,1)$ pour la norme $\|\cdot\|_P$ au départ et la norme $\|\cdot\|_P$ à l'arrivée :

$$\exists \eta > 0 \quad \forall (x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad (\|(1,1) - (x_0, y_0)\|_P \leq \eta \implies \|J_{(x_0, y_0)} - J_{(1,1)}\|_P \leq \epsilon).$$

De l'inégalité triangulaire on déduit :

$$\|J_{(x_0, y_0)} - J_{(1,1)}\|_P \leq \epsilon \implies \|J_{(x_0, y_0)}\|_P \leq \|J_{(1,1)}\|_P + \epsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} + \epsilon = \alpha.$$

$$\text{D'où finalement, } \boxed{\exists \eta > 0 \quad \forall (x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad (\|(1,1) - (x_0, y_0)\|_P \leq \eta \implies \|J_{(x_0, y_0)}\|_P \leq \alpha)}.$$

b. Posons $\psi(t) = (1,1) + t[(x_0, y_0) - (1,1)]$.

f est C^1 sur D et ψ est C^1 de $[0,1]$ dans D , par composition, $\boxed{\varphi \text{ est } C^1 \text{ sur } [0,1]}$.

Par composition, pour tout $t \in [0,1]$

$$\varphi'(t) = df_{\psi(t)}(\psi'(t)) = df_{\psi(t)}((x_0, y_0) - (1,1))$$

ou, quitte à confondre \mathbb{R}^2 et $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$$\varphi'(t) = J_{\psi(t)}((x_0, y_0) - (1,1))$$

Majorons $\|\varphi'(t)\|_P$ pour appliquer l'inégalité des accroissements finis.

$$\|\varphi'(t)\|_P \leq \|J_{\psi(t)}\|_P \|(x_0, y_0) - (1,1)\|_P$$

Or $\|(1,1) - \psi(t)\|_P = t\|(x_0, y_0) - (1,1)\|_P \leq \eta$

donc d'après **IV.5.a**, $\|J_{\psi(t)}\|_P \leq \alpha$ et $\|\varphi'(t)\|_P \leq \alpha\|(x_0, y_0) - (1,1)\|_P$

φ est de classe C^1 de $[0,1]$ dans \mathbb{R}^2 , $\forall t \in [0,1]$, $\|\varphi'(t)\|_P \leq \alpha\|(x_0, y_0) - (1,1)\|_P$, d'après l'inégalité des accroissements finis, $\|\varphi(0) - \varphi(1)\|_P \leq \alpha\|(x_0, y_0) - (1,1)\|_P$ ou encore $\boxed{\|(1,1) - f(x_0, y_0)\|_P \leq \alpha\|(1,1) - (x_0, y_0)\|_P}$.

c. Montrons par récurrence sur n que $\forall n \geq n_0$, $(u_n, u_{n+1}) \in D$.

Par hypothèse, pour $n = n_0$, $(u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in D$.

Supposons que pour un entier $n \geq n_0$ donné, $(u_n, u_{n+1}) \in D$.

On a alors : $\|(1,1) - (u_{n+1}, u_{n+2})\|_P = \|(1,1) - f(u_n, u_{n+1})\|_P$ et d'après la question précédente,

$$(u_n, u_{n+1}) \in D \implies \|(1,1) - f(u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha\|(1,1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \|(1,1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \eta.$$

Donc $\|(1,1) - (u_{n+1}, u_{n+2})\|_P \leq \eta$ et $(u_{n+1}, u_{n+2}) \in D$.

Finalement, la propriété est vraie au rang n_0 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

$$\boxed{\forall n \geq n_0, (u_n, u_{n+1}) \in D}.$$

d. Montrons par récurrence sur n que :

$$\forall n \geq n_0, \|(1,1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha^{n-n_0}\|(1,1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P.$$

Pour $n = n_0$, la relation est évidente.

Supposons que pour un entier $n \geq n_0$ donné,

$$\|(1,1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha^{n-n_0}\|(1,1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P.$$

Alors, $\|(1, 1) - (u_{n+1}, u_{n+2})\|_P = \|(1, 1) - f(u_n, u_{n+1})\|_P$

et comme $(u_n, u_{n+1}) \in D$, d'après la question **IV.5.b**,

$$\|(1, 1) - f(u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha \|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_P$$

On a donc $\|(1, 1) - (u_{n+1}, u_{n+2})\|_P \leq \alpha^{n+1-n_0} \|(1, 1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P$.

Finalement, la propriété est vraie au rang n_0 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

$$\forall n \geq n_0, \quad \|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha^{n-n_0} \|(1, 1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P.$$

- e. Les normes $\|\cdot\|_P$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes (dimension finie), il existe donc un réel $c > 0$ tel que $\|\cdot\|_\infty \leq c\|\cdot\|_P$.
On a alors, $\forall n \geq n_0$, $|1 - u_n| \leq \|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_\infty \leq c\|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq c\alpha^{n-n_0} \|(1, 1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P$, et donc $u_n = 1 + O(\alpha^n)$.
- f. $u_n = 1 + O(\alpha^n)$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$.
Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$, $\sum u_n$ diverge et $\sum (u_n - 1)$ converge absolument.

Partie V – Suite de l'étude

- La suite (x_n) ne converge pas vers λ : $\exists \tau > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N |x_n - \lambda| > \tau$.
En utilisant cette relation, on construit une suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{\varphi(n)} - \lambda| > \tau$.
La suite $(x_{\varphi(n)})$ est bornée (extraite de (x_n)), on peut donc en extraire une sous-suite qui converge vers une limite λ' . Nécessairement, $|\lambda' - \lambda| \geq \tau > 0$ donc $\lambda' \neq \lambda$.
Donc la suite (x_n) admet une valeur d'adhérence $\lambda' \neq \lambda$.
 - Toute suite bornée possède au moins une valeur d'adhérence. D'après la question précédente, si une suite est bornée et non convergente, alors elle possède au moins deux valeurs d'adhérences.
Donc toute suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence est convergente.
 - (x_n) est une suite bornée.
Si $\ell_- = \ell_+$, alors (x_n) est bornée et possède une unique valeur d'adhérence, donc d'après la question précédente, elle est convergente.
Si (x_n) est convergente, alors elle possède une unique valeur d'adhérence donc $\ell_- = \ell_+$.
Finalement (x_n) est convergente si et seulement si $\ell_- = \ell_+$.
- Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \leq u_n \leq \frac{1}{\alpha}$ par récurrence double sur n .
Par hypothèse, pour $n = 0$ et $n = 1$, la relation est vraie.
Supposons que pour un entier $n \geq n_0$ donné, $\alpha \leq u_n \leq \frac{1}{\alpha}$ et $\alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{\alpha}$.
Alors, $u_{n+2} = \frac{2}{u_{n+1} + u_n} \leq \frac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}} = \alpha$
et $u_{n+2} = \frac{2}{u_{n+1} + u_n} \geq \frac{2}{\alpha + \alpha} = \frac{1}{\alpha}$
donc $\alpha \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{\alpha}$.
Finalement, la propriété est vraie au rang 0 et 1 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \leq u_n \leq \frac{1}{\alpha}$.
 - ℓ_- est la plus petite valeur d'adhérence de la suite (u_n) . C'est donc la limite d'une suite extraite que l'on notera $u_{\psi(n)}$.
la suite $u_{\psi(n)-2}$ est alors bornée, elle possède une sous-suite $u_{\psi \circ \chi(n)-2}$ qui converge vers une limite a . En posant $\varphi : n \mapsto \psi \circ \chi(n) - 2$, on a alors :
 $u_{\varphi(n)+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_-$ et $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, or $u_{\varphi(n)+1} = \frac{2}{u_{\varphi(n)+2}} - u_{\varphi(n)}$ donc $(u_{\varphi(n)+1})$ converge. On note b sa limite.
Par passage à la limite dans $u_{\varphi(n)+2} = \frac{2}{u_{\varphi(n)+1} + u_{\varphi(n)}}$, on obtient $\ell_- = \frac{2}{a+b}$.
De plus $a \leq \ell_+$ et $b \leq \ell_+$ donc $\ell_- \geq \frac{2}{\ell_+ + \ell_+} = \frac{1}{\ell_+}$. On en déduit $\ell_- \ell_+ \geq 1$.
 - On procède de même en considérant une sous-suite $u_{\psi(n)}$ qui converge vers ℓ_+ et on obtient $\ell_- \ell_+ \leq 1$ d'où $\ell_- \ell_+ = 1$.

d. De même qu'en (b), on construit successivement :

$(u_{\psi(n)})$ qui converge vers ℓ_-

$(u_{\psi \circ \chi(n)-3})$ qui converge vers une limite a .

$(u_{\psi \circ \chi \circ \omega(n)-2})$ qui converge vers une limite b .

En posant $\varphi : n \mapsto \psi \circ \chi \circ \omega(n) - 3$, on a alors :

$$u_{\varphi(n)+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_-, u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \text{ et } u_{\varphi(n)+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b.$$

Or $u_{\varphi(n)+2} = \frac{2}{u_{\varphi(n)+3}} - u_{\varphi(n)+1}$ donc $(u_{\varphi(n)+2})$ converge. On note c sa limite.

Par passage à la limite dans $u_{\varphi(n)+2} = \frac{2}{u_{\varphi(n)+1} + u_{\varphi(n)}}$ et dans $u_{\varphi(n)+3} = \frac{2}{u_{\varphi(n)+2} + u_{\varphi(n)+1}}$

on obtient $c = \frac{2}{a+b}$ et $\ell_- = \frac{2}{b+c}$.

On a donc $b + c = \frac{2}{\ell_-} = 2\ell_+$ et $b \leq \ell_+$ et $c \leq \ell_+$, donc $b = c = \ell_+$.

De même $\ell_+ = c = \frac{2}{a+b}$ donc $a = b = \ell_-$.

On a alors $b = \ell_+$ et $b = \ell_-$ d'où $\ell_+ = \ell_-$.

$\ell_+ = \ell_-$, $\ell_- \ell_+ \geq 1$ et (u_n) est une suite de réels positifs donc $\ell_+ = \ell_- = 1$ et donc La suite (u_n) converge vers 1.

e. La suite $((u_n, u_{n+1}))$ converge vers $(1, 1)$ donc

il existe bien un entier n_0 tel que $((u_{n_0}, u_{n_0+1})) \in D$.