Devoir surveillé n°06 : corrigé

Problème 1 — D'après Petites Mines 2006

Partie I – Etude d'une fonction

1. Puisque $\sin x \underset{x\to0}{\sim} x$, $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$. Puisque cos est continue en 0, $\lim_{x\to0}\cos x=\cos 0=1$.
   Par opérations, $\lim_0 g=1$.

2. On sait que $\sin x \underset{x\to0}{=} x+o(x^2)$ donc $\frac{\sin x}{x}=1+o(x)$. Par ailleurs $\cos x \underset{x\to0}{=} 1+o(x)$ donc $2-\cos x=1+o(x)$.
   On en déduit que $g(x)\underset{x\to0}{=}1+o(x)$.

3. Finalement,
$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\underset{x\to0}{=}o(1)$$
   Ainsi, $\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$ donc g est dérivable en 0 et $g'(0)=0$.

4. On calcule la dérivée d'un quotient. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,
$$g'(x)=\frac{x\cos x(2-\cos x)-\sin x(2-\cos x+x\sin x)}{x^2(2-\cos x)^2}=\frac{\varphi(x)}{x^2(2-\cos x)^2}$$

5. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$\varphi'(x)=-2x\sin x-1+\cos^2x-\sin^2x=\cos(2x)-1-2x\sin x$$
   Or $x\mapsto\cos(2x)-1$ est clairement négative sur $[0,\pi]$ et ne s'annule qu'en 0 et π sur cet intervalle. De même, $x\mapsto-2x\sin x$ est clairement négative sur $[0,\pi]$ et ne s'annule également qu'en 0 et π sur cet intervalle. Par conséquent, φ est négative sur $[0,\pi]$ et ne s'annule qu'en 0 et π sur cet intervalle.
   On en déduit que φ est strictement décroissante sur $[0,\pi]$.
   Puisque $\varphi(0)=0$, φ est négative sur $[0,\pi]$ et ne s'annule qu'en 0 sur cet intervalle.

6. On rappelle que $g'(x)=\frac{\varphi(x)}{x^2(2-\cos(x))^2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$. D'après ce qui précède, g' est négative sur $[0,\pi]$ et ne s'annule qu'en 0 sur cet intervalle.
   On en déduit que g est strictement décroissante sur $[0,\pi]$.

7. g est clairement continue sur $]0,\pi]$ et continue en 0 par définition. Ainsi elle est continue sur $[0,\pi]$. Comme g est par ailleurs strictement décroissante sur $[0,\pi]$, le théorème de la bijection permet d'affirmer que g induit une bijection de $[0,\pi]$ sur $\mathrm{I}=[g(\pi),g(0)]=[0,1]$.

Partie II – Etude d'une suite

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n\colon x\mapsto\frac{\sin(x)}{2-\cos(x)}-\frac{x}{n}$.

8. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On rappelle que g induit une bijection de $[0,\pi]$ sur $[0,1]$. Puisque $\frac1n\in[0,1]$, $\frac1n$ admet un unique antécédent par g dans $[0,1]$.
   Autrement dit, l'équation $g(x)=\frac1n$ admet une unique solution sur $[0,\pi]$.

9. Remarquons que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $x_n=h(1/n)$. Comme g est strictement décroissante sur $[0,\pi]$, h est également strictement décroissante sur $[0,1]$. Par ailleurs, la suite de terme général $1/n$ est strictement décroissante et à valeurs dans $[0,1]$.
   Il s'ensuit que la suite (x_n) est strictement croissante.

10. Puisque g est continue sur $[0,\pi]$, h est également continue sur $[0,1]$. Notamment, h est continue en 0. Puisque $\lim_{n\to+\infty} 1/n = 0$ et $x_n = h(1/n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = h(0)$$

Or $g(\pi)=0$ donc $h(0)=\pi$.
Ainsi (x_n) converge vers π.

11. Posons $u_n = x_n - \pi$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\frac{1}{n} = g(x_n) = g(u_n+\pi) = -\frac{\sin u_n}{(\pi+u_n)(2+\cos u_n)}$$

Puisque (u_n) converge vers 0,

$$\sin u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad \pi+u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi \qquad 2+\cos u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3$$

Finalement, $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n}{3\pi}$. Ainsi

$$x_n - \pi = u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3\pi}{n}$$

Partie III – Développement asymptotique

1. Tout d'abord

$$g(\pi+u) = -\frac{\sin u}{(\pi+u)(2+\cos u)}$$

Or $\sin u \underset{u\to0}{=} u(1+o(u))$ et $2+\cos u = 3+o(u)$ donc

$$\begin{aligned}
g(\pi+u) &\underset{u\to0}{=} -u\cdot\frac{1+o(u)}{(\pi+u)(3+o(u))}\\
&\underset{u\to0}{=} -u\cdot\frac{1+o(u)}{3\pi+3u+o(u)}\\
&\underset{u\to0}{=} -u\cdot\frac{1+o(u)}{3\pi(1+u/\pi+o(u))}\\
&\underset{u\to0}{=} -\frac{u}{3\pi}(1+o(u))\left(1-\frac{u}{\pi}+o(u)\right)\\
&\underset{u\to0}{=} -\frac{u}{3\pi}\left(1-\frac{u}{\pi}+o(u)\right)\\
&\underset{u\to0}{=} -\frac{u}{3\pi}+\frac{u^2}{3\pi^2}+o(u^2)
\end{aligned}$$

2. On admet que h admet un développement limité à l'ordre 2 en 0. Il existe donc $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$h(t) \underset{t\to0}{=} a+bt+ct^2+o(t^2)$$

Posons $t = g(\pi+u)$, alors $t \underset{u\to0}{\longrightarrow} 0$ et la question précédente montre que

$$t \underset{u\to0}{=} -\frac{u}{3\pi}+\frac{u^2}{3\pi^2}+o(u^2) \qquad t^2 \underset{u\to0}{=} \frac{u^2}{9\pi^2}+o(u^2)$$

Or, pour $u\in[-\pi,0]$, $h\circ g(\pi+u) = \pi+u$. Ainsi

$$\pi+u \underset{u\to0}{=} a-\frac{b}{3\pi}u+\frac{3b+c}{9\pi^2}u^2+o(u^2)$$

Par unicité du développement limité,

$$a=\pi \qquad -\frac{b}{3\pi}=1 \qquad \frac{3b+c}{9\pi^2}=0$$

On en déduit que

$$a=\pi \qquad b=-3\pi \qquad c=9\pi^2$$

Finalement,

$$h(t) \underset{t\to0}{=} \pi-3\pi t+9\pi^2t^2+o(t^2)$$

3. Puisque $\lim_{n\to+\infty} 1/n = 0$,

$$x_n = h(1/n) \underset{n\to+\infty}{=} \pi - \frac{3\pi}{n} + \frac{9\pi^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Solution 1.

1. Clairement $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}$.
$1 = 1 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^2$. Il existe donc $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = c + d\sqrt{2}$.
Alors $x - y = (a - c) + (b - d)\sqrt{2}$ et $(a - c, b - d) \in \mathbb{Z}^2$ donc $x - y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
Également, $xy = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$ et $(ac + 2bd, ad + bc) \in \mathbb{Z}^2$ donc $xy \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
Ainsi $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est donc un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

2. **a.** Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. L'existence d'un couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$ découle simplement de la définition de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Soit maintenant $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$x = a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$$

On a donc $(a - c) = (d - b)\sqrt{2}$. Si $d \neq b$, $\sqrt{2}$ serait rationnel. Ainsi $b = d$ et par suite $a = c$. D'où l'unicité du couple (a, b).

b. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Il existe donc $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = c + d\sqrt{2}$. Alors

$$\overline{x \cdot y} = \overline{(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})} = \overline{ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2}} = ac + 2bd - (ad + bc)\sqrt{2}$$
$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{a + b\sqrt{2}}\,\overline{c + d\sqrt{2}} = (a - b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2}) = ac + 2bc - (ad + bc)\sqrt{2}$$

On a donc bien $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

3. **a.** Soient $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$. Alors $\mathrm{N}(x) = a^2 - 2b^2 \in \mathbb{Z}$.

b. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^2$. Alors, en utilisant la question précédente

$$\mathrm{N}(xy) = xy\overline{x \cdot y} = xy\overline{x} \cdot \overline{y} = x\overline{x}y\overline{y} = \mathrm{N}(x)\mathrm{N}(y)$$

c. Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
Supposons x inversible. Il existe donc $y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ tel que $xy = 1$. Ainsi $\mathrm{N}(xy) = \mathrm{N}(1) = 1$. D'après la question précédente, $\mathrm{N}(xy) = \mathrm{N}(x)\mathrm{N}(y)$ d'où $\mathrm{N}(x)\mathrm{N}(y) = 1$. Puisque $\mathrm{N}(x)$ et $\mathrm{N}(y)$ sont entiers, on a donc $\mathrm{N}(x) = \pm 1$ i.e. $|\mathrm{N}(x)| = 1$.
Réciproquement soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ tel que $|\mathrm{N}(x)| = 1$. Si $\mathrm{N}(x) = 1$, alors $x\overline{x} = 1$ donc x est inversible (d'inverse $\overline{x}$). Si $\mathrm{N}(x) = -1$, alors $x(-\overline{x}) = 1$ donc x est inversible (d'inverse $-\overline{x}$).

4. **a.** Supposons $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$. On ne peut avoir $(a, b) = (0, 0)$ car $0 \notin \mathrm{H}$. Un des deux entiers naturels a et b est donc non nul. Ainsi $a \geqslant 1$ ou $b \geqslant 1$ et, dans les deux cas, $x \geqslant 1$.

b. Supposons $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$. On ne peut avoir $(a, b) = (0, 0)$ car $0 \notin \mathrm{H}$. Un des deux entiers a et b est donc non nul. Ainsi $a \leqslant -1$ ou $b \leqslant -1$ et, dans les deux cas, $x \leqslant -1$.

c. Supposons $ab \leqslant 0$. Alors $a(-b) \geqslant 0$. Les deux questions précédentes montrent que $|\overline{x}| \geqslant 1$. Puisque $|\mathrm{N}(x)| = |x||\overline{x}| = 1$, $|x| \leqslant 1$.

5. **a.** Puisque $x > 1$, la question précédente montre qu'on ne peut avoir $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$ ni $ab \leqslant 0$. C'est donc que nécessairement $a > 0$ et $b > 0$.

b. $u \in \mathrm{H}^+$ car $u > 1$ et $\mathrm{N}(u) = -1$.
Soient $x \in \mathrm{H}^+$ et $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$. D'après la question précédente, $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$ donc $x \geqslant u$.
Ainsi u est un minorant de H^+.
u est donc le minimum de H^+.

6. **a.** Il suffit de poser $n = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln u} \right\rfloor$. On a alors

$$n \leqslant \frac{\ln x}{\ln u} < n + 1$$

ou encore

$$n\ln(u) \leqslant \ln(x) < (n + 1)\ln u$$

car $\ln u > 0$. Puis par stricte croissance de l'exponentielle

$$u^n \leqslant x < u^{n+1}$$

b. Supposons $x \neq u^n$. Alors
$$u^n < x < u^{n+1}$$
puis
$$1 < \frac{x}{u^n} < u$$
car $u > 0$. Or H et $u \in \mathrm{H}$ donc $u^n \in \mathrm{H}$. On sait également que $x \in \mathrm{H}$ donc $\frac{x}{u^n} \in \mathrm{H}$ car H est un groupe. Or $\frac{x}{u^n} > 1$ donc $\frac{x}{u^n} \in \mathrm{H}^+$. Or $\frac{x}{u^n} < u$, ce qui contredit la minimalité de u.
On a donc prouvé que $x = u^n$.

7. On sait que $u \in \mathrm{H}$ donc $u^n \in \mathrm{H}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ car H est un groupe. Puisque $-1 \in \mathrm{H}$, on a également $-u^n \in \mathrm{H}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi
$$\{u^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{-u^n, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathrm{H}$$
Soit maintenant $x \in \mathrm{H}$. On sait que $0 \notin \mathrm{H}$ donc $x \neq 0$.

- Si $x > 1$, alors $x \in \mathrm{H}^+$ et il existe donc $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = u^n$ d'après la question précédente.
- Si $x = 1$, alors $x = u^0$.
- Si $0 < x < 1$, alors $\frac{1}{x} \in \mathrm{H}^+$ donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{1}{x} = u^n$ i.e. $x = u^{-n}$.
- Si $x < 0$, alors $-x \in \mathrm{H}$ et $-x > 0$, et les cas précédents montrent l'existence d'un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $-x = u^n$ i.e. $x = -u^n$.

On a donc prouvé que
$$\mathrm{H} \subset \{u^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{-u^n, n \in \mathbb{Z}\}$$
Par double inclusion
$$\mathrm{H} = \{u^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{-u^n, n \in \mathbb{Z}\}$$

Solution 2.

1. Dans ce cas, on a $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Une récurrence évidente montre que (u_n) est constamment nulle.

b. Puisque $\lambda \neq 0$, $u_1 = \frac{3}{4}\lambda^2 > 0$.
Supposons que $u_n > 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 > 0$.
Par récurrence, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc
$$w_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\frac{3}{4} + 2\ln(u_n) = 2w_n + \ln\frac{3}{4}$$
La suite (w_n) est donc arithmético-géométrique. On a tout simplement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$w_{n+1} + \ln\frac{3}{4} = 2\left(w_n + \ln\frac{3}{4}\right)$$
La suite $\left(w_n + \ln\frac{3}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc géométrique de raison 2. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$w_n + \ln\frac{3}{4} = 2^n\left(w_1 + \ln\frac{3}{4}\right)$$
ou encore
$$w_n = 2^{n-1}\left(w_1 + \ln\frac{3}{4}\right) - \ln\frac{3}{4}$$
Puisque $w_1 = \ln(u_1) = \ln\left(\frac{3}{4}\lambda^2\right)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$w_n = 2^{n-1}\ln\left(\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2\right) - \ln\frac{3}{4}$$

ATTENTION! On ne peut pas écrire $\ln\left(\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2\right) = 2\ln\left(\frac{3}{4}\lambda\right)$ car λ est éventuellement négatif.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = e^{w_n} = \frac{4}{3}\exp\left(w_1 + \ln\frac{3}{4}\right)^{2^{n-1}} = \frac{4}{3}u_1^{2^{n-1}}\left(\frac{3}{4}\right)^{2^{n-1}}$$

Or $u_1 = \frac{3}{4}\lambda^2$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \frac{4}{3}\lambda^{2^n}\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n} = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^{2^n}$$

REMARQUE. Cette expression est encore valable lorsque $n = 0$ ou $\lambda = 0$. ■

e. Si $|\lambda| < \frac{4}{3}$, alors $\left|\frac{3}{4}\lambda\right| < 1$ et donc (u_n) converge vers 0.
Si $|\lambda| > \frac{4}{3}$, alors $\left|\frac{3}{4}\lambda\right| > 1$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{4}{3}\left|\frac{3}{4}\lambda\right|^{2^n}$$

car 2^n est pair. On en déduit que (u_n) diverge vers $+\infty$.
Si $|\lambda| = \frac{4}{3}$, alors la dernière expression montre que la suite (u_n) est constante égale à $\frac{4}{3}$ à partir du rang 1. Elle converge donc vers $\frac{4}{3}$.

REMARQUE. On pouvait également utiliser la suite (w_n) dans le cas où $\lambda \neq 0$. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = 2^{n-1}\ln\left(\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2\right) - \ln\frac{3}{4}$$

Si $|\lambda| < \frac{4}{3}$, alors $0 < \left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2 < 1$ puis $\ln\left(\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2\right) < 0$ donc (w_n) diverge vers $-\infty$. Puisque $u_n = e^{w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (u_n) converge vers 0.
Si $|\lambda| > \frac{4}{3}$, alors $\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2 > 1$ puis $\ln\left(\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2\right) > 0$ donc (w_n) diverge vers $+\infty$. Puisque $u_n = e^{w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (u_n) converge vers $+\infty$.
Si $|\lambda| = \frac{4}{3}$, alors $\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2 = 1$ puis $\ln\left(\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2\right) = 0$ donc (w_n) est constante égale à $-\ln\frac{3}{4}$ et converge donc vers $-\ln\frac{3}{4}$. Puisque $u_n = e^{w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (u_n) converge vers $\frac{4}{3}$. ■

2. Dans ce cas, on a donc $u_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3u_n^2 - 8u_n + 12\right)$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}\left(3u_n^2 - 12u_n + 12\right) = \frac{3}{4}(u_n - 2)^2 \geqslant 0$$

La suite (u_n) est donc croissante.

b. Supposons que (u_n) converge vers une limite l. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{4}(u_n-2)^2 = \frac{3}{4}(l-2)^2$. Par unicité de la limite, $\frac{3}{4}(l-2)^2 = 0$ et donc $l = 2$.

c. Comme (u_n) est croissante, $u_n \geqslant \lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si (u_n) convergeait vers une certaine limite l, on aurait $l \geqslant \lambda > 2$ par passage à la limite. Ceci est impossible d'après la question **2.b**. Comme (u_n) est croissante, elle converge ou diverge vers $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. Puisqu'elle ne peut converger, elle diverge vers $+\infty$.

d. Il s'agit de résoudre une équation du second degré.

$$\begin{aligned}
&u_1 = 2\\
\iff &\frac{1}{4}\left(3\lambda^2 - 8\lambda + 12\right) = 2\\
\iff &3\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0\\
\iff &(3\lambda - 2)(\lambda - 2) = 0\\
\iff &\lambda \in \left\{\frac{2}{3}, 2\right\}
\end{aligned}$$

Les réels recherchés sont donc $\lambda_1 = \frac{2}{3}$ et $\lambda_2 = 2$.

e. Puisque (u_n) est croissante, on a clairement $u_n \geqslant \lambda \geqslant \lambda_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On montre alors par récurrence que $u_n \leqslant \lambda_2 = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
L'initialisation est claire.
Supposons $u_n \leqslant \lambda_2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'après notre remarque préliminaire, on a même $\lambda_1 \leqslant u_n \leqslant \lambda_2$.
Alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3u_n^2 - 8u_n + 12\right) = \frac{1}{4}((3u_n - 2)(u_n - 2) + 8) = \frac{3}{4}(u_n - \lambda_1)(u_n - \lambda_2) + 2 \leqslant 2$$

car $u_n - \lambda_1 \geqslant 0$ et $u_n - \lambda_2 \leqslant 0$.
Par récurrence, $u_n \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La suite (u_n) étant croissante et majorée, elle converge. D'après la question **2.b**, (u_n) converge vers 2.

f. On remarque que

$$u_1 = \frac{3}{4}(3\lambda^2 - 8\lambda + 12) = \frac{3}{4}(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) + 2 > 2$$

Il suffit alors de reprendre la preuve de la question **2.c**. Puisque (u_n) est croissante, $u_n \geqslant u_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si (u_n) convergeait vers une limite l, on aurait $l \geqslant u_1 > 2$ ce qui est impossible d'après la question **2.b**. La suite (u_n) ne converge donc pas donc, étant croissante, elle diverge vers $+\infty$.

3. **a.** On remarque que $\mathrm{P}(a) = (a-2)(a-b) > 0$, $\mathrm{P}(b) = (b-2)(b-a) < 0$ et $\mathrm{P}(2) = (2-a)(2-b) > 0$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}\mathrm{P}(u_n) + u_n$$

Comme P est continue en L, on obtient par passage à la limite

$$\mathrm{L} = \frac{1}{4}\mathrm{P}(\mathrm{L}) + \mathrm{L}$$

et donc $\mathrm{P}(\mathrm{L}) = 0$. Ainsi L est une des deux racines de P.
Le signe de $\mathrm{P}(a)$, $\mathrm{P}(b)$ et $\mathrm{P}(2)$ et la continuité de P montre que P s'annule sur $]a, b[$ et $]b, 2[$ via le théorème des valeurs intermédiaires. Puisque P possède au plus deux racines, c'est qu'il en possède exactement deux et qu'elles sont situés dans les intervalles $]a, b[$ et $]b, 2[$.
On en déduit que $a < \mathrm{L} < b$ ou $b < \mathrm{L} < 2$.