Devoir à la maison n°11

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles.*
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

On désigne dans la suite par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes a coefficients réels et par Δ l'opérateur de différences finies, qui est défini sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

Pour tout entier naturel k, on pose $\Delta^k = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$ si $k = 0$ et $\Delta^k = \Delta \circ \Delta \circ \cdots \circ \Delta$ (k fois) si $k \geqslant 1$.
Ce problème propose l'étude de cet endomorphisme Δ et de certaines de ses applications.

Partie I – Etude de l'endomorphisme Δ

On définit la famille de polynômes réels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$ et par les relations suivantes :

$$\forall n \geqslant 1,\ P_n(X) = \frac{1}{n!}X(X-1)\dots(X-n+1) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$$

1. Une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

- **a.** Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- **b.** Etablir, pour tous entiers naturels k et m, que $P_k(m)$ et $P_k(-m)$ sont des entiers.
- **c.** En déduire, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, que les coordonnées de P dans la base $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ sont des nombres entiers si et seulement si on a : $\forall m \in \mathbb{Z},\ P(m) \in \mathbb{Z}$.

2. Etude de l'endomorphisme Δ.

- **a.** Etablir que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- **b.** Calculer $\Delta(P_0)$, puis montrer que $\Delta(P_{n+1}) = P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **c.** On considère un polynome non nul P de degré d.
  Préciser le degré du polynome $\Delta(P)$ et donner $\Delta^{d+1}(P)$.
- **d.** Préciser le noyau de Δ, puis étudier si Δ est injectif et surjectif.

3. Expression d'un polynôme dans la base $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

- **a.** Calculer $\Delta^k(P_j)$ et en déduire que $\Delta^k(P_j)(0)$ vaut 1 si $j = k$ et 0 sinon.
- **b.** En déduire, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, la formule suivante :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0)P_k$$

Partie II – Approximation de dérivées $n^{\text{èmes}}$ par différences finies

1. Puissances de l'endomorphisme Δ.
Etablir la formule suivante pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Delta^n(P) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(X+j)$$

2. Application au calcul de différentes sommes.

a. Préciser le coefficient de P_n dans la décomposition du polynôme X^n dans la base $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.
En déduire la valeur de $\Delta^n(X^n)$, puis établir la formule suivante :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^n = n!$$

b. Démontrer la formule suivante pour $0 \leqslant k < n$:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^k = 0$$

3. Approximation d'une dérivée $n^{\text{ème}}$ par différences finies.
On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^m$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puis un point $a \in \mathbb{R}$ et un entier naturel n compris entre 1 et m ($1 \leqslant n \leqslant m$), et on pose alors :

$$\forall h \in \mathbb{R}^*,\ A_n(h) = \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} f(a+jh)$$

a. Exprimer $f(a+h)$ à l'aide de la formule de Taylor-Young appliquée a l'ordre n lorsque h tend vers 0.
Quelles formules en déduit-on pour $f(a+jh)$, où $0 \leqslant j \leqslant n$, en changeant h en jh ?

b. En déduire que l'expression $h^n A_n(h)$ admet un développement limité a l'ordre n quand h tend vers 0, et préciser les coefficients de h^j ($0 \leqslant j < n$) et de h^n dans celui-ci.
Quelle est la limite de $A_n(h)$ quand h tend vers 0 ?

Partie III – Calcul de la somme des puissances des n premiers entiers

1. Etude de séries télescopiques.

a. Etablir la formule suivante pour $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R = \Delta(Q)$:

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{p} R(k) = Q(p+1) - Q(0)$$

b. Exprimer les polynômes X, X^2 et X^3 dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3) de $\mathbb{R}_3[X]$.
En déduire des polynômes Q_1, Q_2, Q_3 tels qu'on ait $\Delta(Q_1) = X$, $\Delta(Q_2) = X^2$, $\Delta(Q_3) = X^3$.

c. Donner alors l'expression *factorisée* des sommes $\sum_{k=0}^{p} k$, $\sum_{k=0}^{p} k^2$ et $\sum_{k=0}^{p} k^3$.

2. Recherche d'une suite de polynômes (B_n) telle que $\Delta(B_{n+1}) = X^n$.
Afin de généraliser le calcul précédent, on recherche une suite de polynômes $(B_n)_{n\geqslant 1}$ telle qu'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation $\Delta(B_{n+1}) = X^n$.

a. Montrer, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, la formule $(\Delta(P))' = \Delta(P')$.

b. Etablir, si une telle suite de polynômes (B_n) existe, qu'on a :

- $\forall n \geqslant 1,\ B'_{n+1} - nB_n \in \operatorname{Ker} \Delta$;
- $\forall n \geqslant 1,\ B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$;
- le polynôme B_1 est unitaire et de degré 1.

c. Inversement, établir par récurrence qu'une suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ satisfaisant ces trois conditions vérifie $\Delta(B_{n+1}) = X^n$ pour tout $n \geqslant 1$, et qu'on a alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} k^n = B_{n+1}(p+1) - B_{n+1}(0)$ pour tout entier naturel p.

On recherche en particulier une suite de polynômes (B_n) vérifiant les conditions suivantes :

(A) $\forall n \geqslant 1,\ B'_{n+1} = nB_n$;
(B) $\forall n \geqslant 1,\ B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$;
(C) le polynôme B_1 est unitaire et de degré 1.

3. Existence, unicité et construction de la suite (B_n).

a. Vérifier que les conditions (A), (B), (C) sont équivalentes aux conditions suivantes :

(A') $\forall n \geqslant 1,\ B'_{n+1} = nB_n$;
(B') $\forall n \geqslant 1,\ \displaystyle\int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$;
(C') le polynôme B_1 est unitaire et de degré 1.

b. Déterminer les polynômes B_1, B_2, B_3, B_4 et retrouver ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} k^3$.

c. Etablir alors l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(B_n)_{n\geqslant 1}$ qui vérifie les trois conditions (A'), (B'), (C') définies ci-dessus, et montrer qu'on a : $\forall n \geqslant 1,\ B_n \in \mathbb{Q}[X]$.

d. En déduire un algorithme d'obtention des polynômes B_k pour $1 \leqslant k \leqslant n$, où n est donné. On pourra représenter un polynôme par la liste de ses coefficients.