

DEVOIR À LA MAISON N°06

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1

Partie I – Etude dans un cas particulier

- I.1** **I.1.a** On calcule le polynôme caractéristique de $A : \chi_A = (X + 2)(X - 1)^2$. Par conséquent le spectre de A est $\{-2; 1\}$.
- I.1.b** On vérifie aisément que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ en calculant son déterminant dans la base canonique. De plus, $Au_1 = u_1$, $Au_2 = u_2$ et $Au_3 = -2u_3$ donc u_1, u_2 et u_3 sont des vecteurs propres de A .
- I.1.c** On vient de trouver une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A donc A est diagonalisable.
- I.1.d** $Bu_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à u_1 et de même pour u_2 et u_3 donc aucun élément de \mathcal{F} n'est vecteur propre de B donc a fortiori commun à A et B .
- I.2** **I.2.a** $\chi_B = (X - 2)^3$ (on développe par rapport à la deuxième ligne) donc le spectre de B est $\{2\}$.
- I.2.b** $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Les trois colonnes de cette matrice sont colinéaires à u_4 donc $\text{Im}_2(B) \subset \text{vect}(u_4)$ et u_4 est la première colonne donc $\text{vect}(u_4) \subset \text{Im}_2(B)$. Par conséquent $\text{Im}_2(B) = \text{vect}(u_4)$. Le théorème du rang nous dit alors que $\dim E_2(B) = 2$.
- I.2.c** La somme des dimensions des sous espaces propres de B est égale à $2 < 3$ donc B n'est pas diagonalisable.
- I.3** **I.3.a** $Bu_5 = 2u_5$ et $Au_5 = u_5$ donc $\text{vect}(u_5) \subset E_1(A) \cap E_2(B)$.
 $E_1(A)$ et $E_2(B)$ sont de dimension 2 donc cette intersection est de dimension 1 ou 2 (on a déjà un vecteur non nul dans l'intersection). Si elle est de dimension 2, alors $E_1(A) = E_2(B)$ ce qui est absurde car u_1 est dans $E_1(A)$ mais pas dans $E_2(B)$. Par conséquent l'intersection est de dimension 1 et $E_1(A) \cap E_2(B) = \text{vect}(u_5)$.
- I.3.b** Comme u_3 n'est pas vecteur propre de B et qu'il engendre $E_{-2}(A)$, il n'y a pas de vecteur propre commun à A et B dans $E_{-2}(A)$. De plus, 2 est la seule valeur propre de B donc les vecteurs propres communs à A et B sont dans $E_1(A) \cap E_2(B)$.
D'après la question précédente, les vecteurs propres communs à A et B sont les vecteurs de la forme $\lambda u_5, \lambda \in \mathbb{R}^*$.
- I.4** **I.4.a** $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ donc $[A, B] = C$.

- I.4.b** On calcule le polynôme caractéristique de C . Pour $\lambda \in \mathbb{R}, \chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 5 & -3 & 1 \\ 2 & \lambda - 6 & -2 \\ 5 & -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$. On remplace L_1 par $L_1 - L_3$:

$$\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ 2 & \lambda - 6 & -2 \\ 5 & -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix}.$$

On utilise la linéarité par rapport à la première ligne puis on remplace C_1

$$\text{par } C_1 + C_3 : \chi_C(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 6 & -2 \\ \lambda + 6 & -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix}.$$

Enfin, on développe par rapport à la première ligne :

$$\chi_C(\lambda) = \lambda(\lambda - 6)(6 + \lambda).$$

χ_C est scindé à racines simples donc C est diagonalisable. De plus les valeurs propres de C sont $-6, 0$ et 6 donc C est semblable à D .

Le rangs de C et de D sont alors égaux et $\text{rg}(C) = 2$.

Partie II – Condition nécessaire et conditions suffisantes

II.1 II.1.a Soient λ et μ tels que $Ae = \lambda e$ et $Be = \mu e$. Alors $ABe = \mu Ae = \lambda \mu e$ et de même pour BAe donc $e \in \text{Ker}([A, B])$.

II.1.b e est non nul (car vecteur propre) donc $[A, B]$ n'est pas injectif et comme il s'agit d'une matrice carrée (endomorphisme en dimension finie), cela prouve que $[A, B]$ n'est pas inversible et $\text{rg}([A, B]) < n$.

II.2 On suppose $[A, B] = 0$. Comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A a au moins une valeur propre : soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. $[A, B] = 0$ donc $\text{Ker}([A, B]) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $E_\lambda(A) \subset \text{Ker}([A, B])$: A et B vérifient la propriété \mathcal{H} .

II.3 II.3.a Soit $X \in E_\lambda(A)$. Par hypothèse $(AB - BA)X = 0$ soit $ABX = BAX$. Or $AX = \lambda X$ donc $A(BX) = \lambda BX$ ce qui signifie que $BX \in E_\lambda(A)$: $\psi : X \mapsto BX$ est une application de $E_\lambda(A)$ dans lui-même. De plus, par propriété du produit matriciel, ψ est linéaire donc ψ est un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.

II.3.b λ est valeur propre de A donc $E_\lambda(A)$ est de dimension non nulle et comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ψ a au moins une valeur propre : il existe $\mu \in \mathbb{C}$ et $X \in E_\lambda(A)$ non nul tels que $\psi(X) = \mu X$. On a donc $BX = \mu X$, $AX = \lambda X$ et X non nul : X est un vecteur propre commun à A et B .

II.4 En dimension 1, tous les vecteurs non nuls sont des vecteurs propres donc \mathcal{P}_1 est vérifiée.

II.5 II.5.a A et B ne vérifient pas \mathcal{H} donc $E_\lambda(A)$ n'est pas inclus dans $\text{Ker}(C)$: il existe $u \in E_\lambda(A)$ tel que $u \notin \text{Ker}(C)$: u est donc un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui vérifie $Au = \lambda u$ et $Cu \neq 0$.

II.5.b Par hypothèse $\text{Im } C$ est de dimension 1 et $v = Cu$ est un vecteur non nul de cette image donc $\text{Im } C = \text{vect}(v)$.

II.5.c $v = Cu$ donc $v = ABu - BAu = ABu - \lambda Bu$ soit $v = (A - \lambda I)(Bu)$: $v \in \text{Im}_\lambda(A)$. La question précédente permet alors de dire que $\text{Im } C \subset \text{Im}_\lambda(A)$.

II.5.d $\text{Im } C$ est de dimension 1 donc $1 \leq \dim(\text{Im}_\lambda(A))$.

λ est valeur propre de A donc $E_\lambda(A)$ a une dimension non nulle et, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}_\lambda(A)) \leq n - 1$.

Finalement

$$1 \leq \dim(\text{Im}_\lambda(A)) \leq n - 1$$

.

II.5.e A et $A - \lambda I_n$ commutent donc $[A, A - \lambda I_n] = 0$.

Par définition $[B, A - \lambda I_n] = B(A - \lambda I_n) - (A - \lambda I_n)B = BA - AB = -[A, B]$ d'où $[B, A - \lambda I_n] = -C$. φ et ψ sont des applications linéaires par propriétés du produit matriciel.

Soit $X \in \text{Im}_\lambda(A)$: $X = (A - \lambda I_n)Y$ où $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Comme $[A, A - \lambda I_n] = 0$, $AX = (A - \lambda I_n)(AY)$ donc $AX \in \text{Im}_\lambda(A)$. Par conséquent φ est un endomorphisme de $\text{Im}_\lambda(A)$.

De même $BX = (A - \lambda I_n)(BY) - CY$. $CY \in \text{Im } C$ et $\text{Im } C \subset \text{Im}_\lambda(A)$ donc $CY \in \text{Im}_\lambda(A)$; on a aussi $(A - \lambda I_n)(BY) \in \text{Im}_\lambda(A)$ donc $BX \in \text{Im}_\lambda(A)$. On en conclut que ψ est un endomorphisme de $\text{Im}_\lambda(A)$.

II.5.f $\text{Im}([\varphi, \psi]) \subset \text{Im}(C)$ donc $\text{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à φ et ψ , endomorphismes de $\text{Im}_\lambda(A)$ qui est de dimension non nulle et strictement inférieure à n : φ et ψ ont un vecteur propre commun. A fortiori A et B ont un vecteur propre commun.

II.6 \mathcal{R}_1 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On suppose que \mathcal{R}_k est vérifiée pour tout entier $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Soit E de dimension n .

Soit φ et ψ deux d'endomorphismes de E tels que $\text{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$.

On considère A et B les matrices associées respectivement à φ et ψ dans une base de E , $C = AB - BA$.

Si $\text{rg}(C) = 1$ et si A et B ne vérifient pas \mathcal{H} , alors, d'après la question **II.5**, A et B ont un vecteur propre commun :

φ et ψ ont un vecteur propre commun ($K = \mathbb{C}$) donc A a au moins une valeur propre.

Si $\text{rg}(C) = 1$ et A, B vérifient \mathcal{H} , alors d'après **II.3**, φ et ψ ont un vecteur propre commun.

Si $\text{rg}(C) = 0$, alors $[A, B] = 0$ et, d'après les questions **II.2** et **II.3**, φ et ψ ont un vecteur propre commun.

On en déduit que \mathcal{R}_n est vérifiée.

Par récurrence, on peut conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{R}_n est vraie.

Partie III – Etude d'un autre cas particulier

III.1 $g(P) = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^{2n-k}$. On pose $l = 2n - k$ pour obtenir $g(P) = \sum_{l=0}^{2n} a_{2n-l} X^l$.

III.2 Pour tout polynôme P , $\deg P' \leq \deg P$ et la dérivation des polynômes est linéaire donc f est un endomorphisme de E .

La question précédente prouve que g est une application de E dans E .

Si $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} g(P + \lambda Q) &= X^{2n}(P + \lambda Q) \left(\frac{1}{X} \right) \\ &= X^{2n}P \left(\frac{1}{X} \right) + X^{2n}Q \left(\frac{1}{X} \right) \\ &= g(P) + \lambda g(Q) \end{aligned}$$

donc g est linéaire. g est donc un endomorphisme de E .

III.3 **III.3.a** Soit P un vecteur propre de g et λ la valeur propre associée. $g(P) = \lambda P$.

La question **III.1** prouve que g est injective donc λ ne peut pas être nul. Par conséquent P et $g(P)$ ont le même degré que l'on appelle d . (P n'est pas nul car vecteur propre).

On reprend les notations de la question **III.1**. $a_d \neq 0$ donc si $k = 2n - d$, $a_{2n-k} \neq 0$ et donc $\deg(g(P)) \geq 2n - d$. Par conséquent $d \geq 2n - d$ et donc $\deg(P) \geq n$.

III.3.b $g(X^n) = X^n$ et X^n n'est pas le polynôme nul donc X^n est un vecteur propre de g .

III.4 **III.4.a** $f^i(P) = P^{(i)}$. P' est nul si et seulement si P est un polynôme constant c'est-à-dire un polynôme de degré ≤ 0 .

On suppose que $\ker f^i = \mathbb{C}_{i-1}[X]$ pour un entier i entre 1 et $2n - 1$.

$P \in \ker f^{i+1}$ si et seulement si $P' \in \ker f^i$ donc si et seulement si $P' \in \mathbb{C}_{i-1}[X]$ donc $\ker f^{i+1} = \mathbb{C}_i[X]$.

Par récurrence, pour tout i entre 1 et $2n$, $\ker f^i = \mathbb{C}_{i-1}[X]$.

III.4.b Si P est non nul de degré $i - 1$, alors $f^i(P) = 0P$ donc $0 \in \text{Sp}(f^i)$.

$(f^i)^{2n+1} = (f^{2n+1})^i$ et si $P \in E$, sa dérivée d'ordre $2n + 1$ est nul donc X^{2n+1} est un polynôme annulateur de f^i . 0 est sa seule racine donc 0 est la seule valeur propre possible de f^i .

Finalement $\text{Sp}(f^i) = \{0\}$.

III.5 Si $i \geq n + 1$, $f^i(X^n) = 0X^n$ donc X^n est vecteur propre de f^i . Avec la question **III.3.b**, on peut en déduire que X^n est un vecteur propre commun à f et g .

On suppose réciproquement que i est tel que f et g ont un vecteur propre commun.

Soit P un vecteur propre commun. D'après la question **III.3.a**, $\deg(P) \geq n$ et d'après la question **III.4.b**, $P \in \ker f^i$ donc d'après la question **III.4.a**, $\deg(P) \leq i - 1$. Ainsi, $n \leq i - 1$ soit $i \geq n + 1$.

Finalement f et g ont un vecteur propre commun si et seulement si $i \geq n + 1$.

III.6 $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2n+1}$ où pour i entre 2 et $2n$, $a_{i, i-1} = i - 1$ et tous les autres coefficients nuls :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Pour k entre 0 et $2n$, $g(X^k) = X^{2n-k}$ donc $B_n = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2n+1}$ où pour tout i entre 1 et $2n+1$, $b_{i, 2n+2-i} = 1$, tous les autres coefficients étant nuls.

III.7 III.7.a En prenant $n = 1$ dans la question précédente, on obtient bien $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par produit matriciel, $(A_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(A_1)^3$ est la matrice nulle.

III.7.b On trouve $[A_1, B_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2.

$[(A_1)^2, B_1] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui est aussi de rang 2.

III.7.c Quand $i = 2$, $i \geq 1 + 1$ donc $(A_1)^2$ et B_1 ont un vecteur propre commun alors que la condition de la question **II.6** n'est pas vérifiée; celle-ci n'est donc pas nécessaire.

Quand $i = 1$, $\text{rg}([A_1, B_1]) < 3$ mais A_1 et B_1 n'ont pas de vecteur propre commun donc la condition de la question **II.1.b** n'est pas suffisante.

Partie IV – Forme normale pour un vecteur propre

IV.1 $\dim E_\lambda(A) \geq 2$ donc on peut considérer deux vecteurs propres X et X' formant une famille libre associés à la valeur propre λ : $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$.

Si $x_1 = 0$ alors $X \in \mathcal{N}$.

Si $x_1 \neq 0$, on pose $X'' = x'_1 X - x_1 X'$. Alors $X'' \in \mathcal{N}$ (la première composante de X'' est nulle), X'' n'est pas nul (car (X, X') est libre) et est dans $E_\lambda(A)$ donc X'' est un vecteur propre de A .

Dans tous les cas, A admet un vecteur propre sous forme normale associé à la valeur propre λ .

IV.2 IV.2.a Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ tel que $a_{12} = 1$, $a_{21} = -1$, tous les autres coefficients nuls (ceci est possible car $n \geq 2$). A n'est pas la matrice nulle et est antisymétrique donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \neq \{0\}$.

IV.2.b Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Pour tous i et j , $m_{ij} = -m_{ji}$ donc en particulier les coefficients diagonaux m_{ii} sont nuls; comme il y en a un par colonne, on en déduit que les colonnes de M sont des éléments de \mathcal{N} .

IV.2.c Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$. La transposition est linéaire et $(AB)^T = B^T A^T$ donc

$$\begin{aligned} \varphi(M)^T &= (AM)^T + (MA^T)^T \\ &= M^T A^T + (A^T)^T M^T \\ &= -MA^T + AM^T \\ &= -\varphi(M) \end{aligned}$$

donc $\varphi(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

De même

$$\begin{aligned} \psi(M)^T &= (AMA^T)^T \\ &= AM^T A^T \\ &= -\psi(M) \end{aligned}$$

φ et ψ sont donc des applications de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même. De plus, elles sont linéaires par propriétés du produit matriciel donc φ et ψ sont des endomorphismes de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

IV.2.d Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi(M) &= \varphi(AMA^T) \\ &= A(AMA^T) + (AMA^T)A^T \\ &= A^2 M A^T + AM(A^T)^2 \end{aligned}$$

et par ailleurs

$$\begin{aligned}\psi \circ \varphi(M) &= \psi(AM + MA^\top) \\ &= A(AM + MA^\top)A^\top \\ &= A^2MA^\top + AM(A^\top)^2\end{aligned}$$

par conséquent, pour tout $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, $\varphi \circ \psi(M) = \psi \circ \varphi(M)$ donc $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

IV.3 IV.3.a • $X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $X_2^\top \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ donc $X_1X_2^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De même $X_2X_1^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De plus

$$\begin{aligned}B^\top &= (X_1X_2^\top)^\top - (X_2X_1^\top)^\top \\ &= X_2X_1^\top - X_1X_2^\top\end{aligned}$$

donc $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

• On suppose $B = 0$. Alors $X_1X_2^\top = X_2X_1^\top$. On multiplie à droite par $\overline{X_2}$ pour obtenir $X_1(X_2^\top \overline{X_2}) = X_2(X_1^\top \overline{X_2})$.

Or $X_2^\top \overline{X_2}$ et $X_1^\top \overline{X_2}$ sont des scalaires et (X_1, X_2) est libre (vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes) donc $X_2^\top \overline{X_2} = X_1^\top \overline{X_2} = 0$. En posant $X_2 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, cela nous donne $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 0$ et donc $X_2 = 0$ ce qui contredit le fait que X_2 soit un vecteur propre de A .

Par conséquent $B \neq 0$.

• Pour $i = 1$ ou $i = 2$, $AX_i = \lambda_i X_i$ donc $X_i^\top A^\top = \lambda_i X_i^\top$.

$$\begin{aligned}AB + BA^\top &= AX_1X_2^\top - AX_2X_1^\top + X_1X_2^\top A^\top - X_2X_1^\top A^\top \\ &= \lambda_1 X_1X_2^\top - \lambda_2 X_2X_1^\top + \lambda_2 X_1X_2^\top - \lambda_1 X_2X_1^\top \\ &= \lambda_1 B + \lambda_2 B\end{aligned}$$

d'où $AB + BA^\top = (\lambda_1 + \lambda_2)B$.

• De même

$$\begin{aligned}ABA^\top &= (AX_1)(X_2^\top A^\top) - (AX_2)(X_1^\top A^\top) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 X_1X_2^\top - \lambda_2 \lambda_1 X_2X_1^\top\end{aligned}$$

d'où $ABA^\top = (\lambda_1 \lambda_2)B$.

IV.3.b A et I_n commutent donc $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = A^2B - (\lambda_1 + \lambda_2)AB + \lambda_1 \lambda_2 B$. On multiplie la relation $AB + BA^\top = (\lambda_1 + \lambda_2)B$ par A à gauche : $A^2B + ABA^\top = (\lambda_1 + \lambda_2)AB$ donc $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = -ABA^\top + \lambda_1 \lambda_2 B$. Comme $ABA^\top = (\lambda_1 \lambda_2)B$, on conclut $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = 0$.

IV.3.c $B \neq 0$ donc l'une au moins des colonnes de B est non nulle ; soit C une colonne de B non nulle. $(A - \lambda_2 I_n)B = 0$ donc $(A - \lambda_2 I_n)C = 0_{n,1}$ soit $AC = \lambda_2 C$. C n'est pas nulle donc C est un vecteur propre de A .

De plus $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ donc $C \in \mathcal{N}$. C , une des colonnes de B , est donc un vecteur propre de A sous forme normale.

IV.3.d $(A - \lambda_2 I_n)B \neq 0$ donc il existe X une colonne de $(A - \lambda_2 I_n)B$ non nulle. Il existe alors U une des colonnes de B telle que $X = (A - \lambda_2 I_n)U$. D'après la question b., X est un vecteur propre de A (associé à la valeur propre λ_1 et λ_2 est une valeur propre de A , $U \in \mathcal{N}$). Finalement X est donc un vecteur propre de A sous forme normale.

IV.4 IV.4.a φ et ψ sont deux endomorphismes de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ tels que $\text{rg}([\varphi, \psi]) = 0 \leq 1$ donc, d'après la partie II, φ et ψ ont un vecteur propre commun : il existe $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ non nulle vecteur propre de φ et de ψ ; il existe donc $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi(B) = \alpha B$ soit $AB + BA^\top = \alpha B$ et il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $ABA^\top = \beta B$.

IV.4.b On multiplie la relation $AB + BA^\top = (\lambda_1 + \lambda_2)B$ par A à gauche : $A^2B + ABA^\top = \alpha AB$ mais $ABA^\top = \beta B$ donc $A^2B + \beta B = \alpha AB$. En factorisant par B , on obtient $(A^2 - \alpha A + \beta I_n)B = 0$.

IV.4.c Le polynôme $X^2 - \alpha X + \beta$ à coefficients complexes a deux racines (éventuellement confondues) donc il existe $(\gamma, \delta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $X^2 - \alpha X + \beta = (X - \gamma)(X - \delta)$. Alors $A^2 - \alpha A + \beta I_n = (A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)$ et la relation de la question précédente devient : $(A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)B = 0$.

IV.4.d On suppose $(A - \delta I_n)B = 0$ donc, si $A - \delta I_n$ est inversible, alors $B = 0$ ce qui est exclu donc $A - \delta I_n$ n'est pas inversible et $\delta \in \text{Sp}(A)$. Une colonne non nulle de B est alors un vecteur propre de A sous forme normale.

IV.4.e Si $\delta = \lambda$ et $(A - \delta I_n)B \neq 0$.

Soit X une colonne non nulle de $(A - \delta I_n)B$ et U la colonne de B telle que $X = (A - \delta I_n)U$. $U \in \mathcal{N}$, $\delta \in Sp(A)$ et $(A - \gamma I_n)X = 0_{n,1}$ (d'après la question **IV.4.c**) donc X est un vecteur propre de A sous forme normale.

IV.4.f A n'a qu'une valeur propre λ et $\delta \neq \lambda$ donc δ n'est pas valeur propre de A et $(A - \delta I_n)$ est inversible. $A - \gamma I_n$ et $A - \delta I_n$ commutent donc si on multiplie à gauche la relation de la question **IV.4.c** par $(A - \delta I_n)^{-1}$, on obtient $(A - \gamma I_n)B = 0$.

IV.4.g On est alors revenu à la situation de la question **IV.4.d** et donc A possède un vecteur propre sous forme normale.

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque.

A a au moins une valeur propre.

Si A a une seule valeur propre, d'après les questions précédentes, A possède un vecteur propre sous forme normale.

Si A a au moins deux valeurs propres distinctes, alors d'après **IV.3**, A possède un vecteur propre sous forme normale.

On en conclut que, dans tous les cas, une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède un vecteur propre sous forme normale.