

NOMBRES RÉELS, RELATIONS BINAIRES

SOLUTION 1.

Posons $n = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$. Alors $n \leq \sqrt{x} < n+1$. Donc $n^2 \leq x < (n+1)^2$. D'une part, n^2 est entier et $n^2 \leq x$ donc $n^2 \leq \lfloor x \rfloor$. D'autre part, $\lfloor x \rfloor \leq x < (n+1)^2$. Finalement $n^2 \leq \lfloor x \rfloor < (n+1)^2$ puis, par stricte croissance de la racine carrée, $n \leq \sqrt{\lfloor x \rfloor} < n+1$. Comme n est un entier, ceci signifie que $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = n = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

SOLUTION 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par concavité de la fonction racine carrée,

$$\frac{1}{2}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) \leq \sqrt{\frac{1}{2}(n + (n+1))}$$

ce qui équivaut à

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leq \sqrt{4n+2}$$

Par croissance de la partie entière

$$\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$$

Posons alors $p = \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor$. Alors

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < p+1$$

Les deux termes étant positifs, on obtient par passage au carré

$$2n+1 + 2\sqrt{n^2+n} < (p+1)^2$$

ou encore

$$2\sqrt{n^2+n} < (p+1)^2 - (2n+1)$$

A nouveau par passage au carré

$$4n^2 + 4n < ((p+1)^2 - (2n+1))^2$$

Les deux membres étant entiers, on peut alors affirmer que

$$4n^2 + 4n + 1 \leq ((p+1)^2 - (2n+1))^2$$

c'est-à-dire

$$(2n+1)^2 \leq ((p+1)^2 - (2n+1))^2$$

On remarque alors que $2n+1$ et $(p+1)^2 - (2n+1)$ sont positifs (en effet, $(p+1)^2 - (2n+1) > 2\sqrt{n^2+n} \geq 0$) donc

$$2n+1 \leq (p+1)^2 - (2n+1)$$

ou encore

$$4n+2 \leq (p+1)^2$$

Or un carré d'entier ne peut être congru à 2 modulo 4 donc

$$4n+2 < (p+1)^2$$

puis

$$\sqrt{4n+2} < p+1$$

Puisque $p+1$ est entier,

$$\lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor \leq p = \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor$$

Or on a vu précédemment que

$$\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$$

Finalement,

$$\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$$

SOLUTION 3.

Posons, pour tout réel x ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - [nx].$$

► La fonction f est $1/n$ -périodique car, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f(x+1/n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{1}{n} + \frac{k}{n} \right\rfloor - [n(x+1/n)] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k+1}{n} \right\rfloor - [nx+1] \\ &= \sum_{k=1}^n \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - [nx] - 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor + \lfloor x+1 \rfloor - [nx] - 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor + 1 - [nx] - 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - [nx] \\ &= f(x) \end{aligned}$$

◇ Soit alors $x \in [0, 1/n[$. On a $[nx] = 0$ et

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, \quad 0 \leq x + \frac{k}{n} < \frac{n-1+1}{n} = 1$$

d'où

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, \quad \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = 0,$$

et finalement $f(x) = 0$.

► La fonction f est $1/n$ -périodique et nulle sur $[0, 1/n[$, elle est donc nulle sur \mathbb{R} .

SOLUTION 4.

1. Soit $n \geq 1$. L'inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

est équivalente à

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2 \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

i.e.

$$2\sqrt{n} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < 2\sqrt{n+1}.$$

Comme

$$\sqrt{n} < \sqrt{n+1},$$

cette dernière inégalité est vraie, d'où l'inégalité initiale.

2. D'après le 1., pour tout $1 \leq k \leq 9999$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

En additionnant ces 9999 inégalités, on aboutit après telescoping à :

$$\alpha - 1 < 2(\sqrt{10000} - \sqrt{1}) < \alpha - \frac{1}{100},$$

d'où

$$198 + \frac{1}{100} < \alpha < 199$$

ainsi

$$[\alpha] = 198.$$

SOLUTION 5.

Posons, pour tout réel x ,

$$f(x) = \left\lfloor \frac{[nx]}{n} \right\rfloor - [x].$$

► La fonction f est 1-périodique car, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \left\lfloor \frac{[nx+n]}{n} \right\rfloor - [x+1] = \left\lfloor \frac{[nx]+n}{n} \right\rfloor - [x+1] \\ &= \left\lfloor \frac{[nx]}{n} + 1 \right\rfloor - [x+1] = \left\lfloor \frac{[nx]}{n} \right\rfloor + 1 - [x] - 1 = \left\lfloor \frac{[nx]}{n} \right\rfloor - [x] \\ &= f(x) \end{aligned}$$

► Soit alors $x \in [0, 1[$. On a $[x] = 0$ et $nx \in [0, n[$ d'où $\frac{[nx]}{n} \in [0, 1[$ et donc

$$\left\lfloor \frac{[nx]}{n} \right\rfloor = 0$$

et finalement $f(x) = 0$.

► La fonction f est 1-périodique et nulle sur $[0, 1[$, elle est donc nulle sur \mathbb{R} .

SOLUTION 6.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - [x].$$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x+1) &= \left\lfloor \frac{x+1+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - [x+1] \\ &= \left\lfloor \frac{x}{2} + 1 \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - [x] - 1 \\ &= \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - [x] - 1 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver que g est nulle sur $[0, 1[$. Soit alors $0 \leq x < 1$. On a

$$\frac{x}{2}, \frac{x+1}{2} \in [0, 1[,$$

d'où $g(x) = 0 + 0 - 0 = 0$.

SOLUTION 7.

1. On a clairement

$$\{54, 465\} = 0,465 \quad \text{et} \quad \{-36, 456\} = 0,544.$$

2. Si $x \in \mathbb{Z}$,

$$\{-x\} = \{x\}.$$

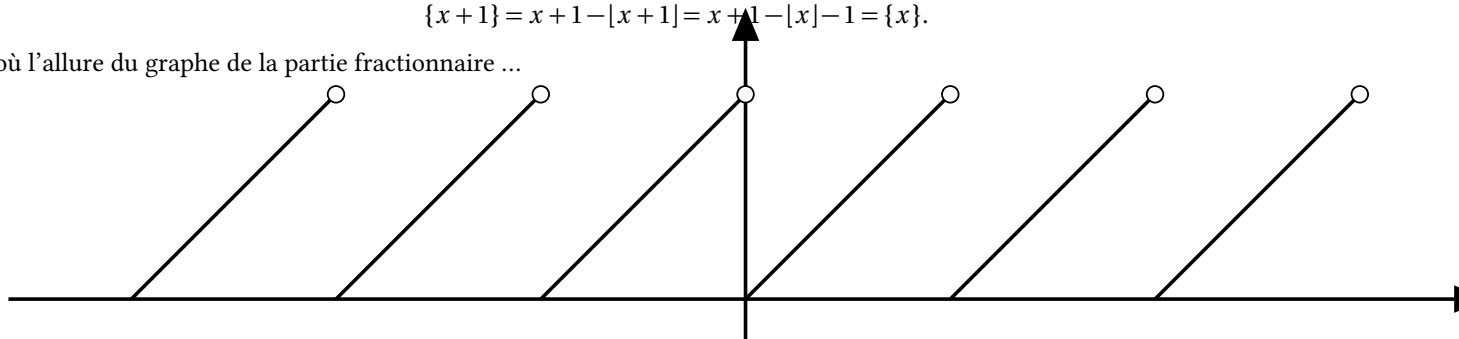
Si $x \notin \mathbb{Z}$, on a $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$ donc

$$\{-x\} = 1 - \{x\}.$$

3. on a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\{x+1\} = x+1 - \lfloor x+1 \rfloor = x+1 - \lfloor x \rfloor - 1 = \{x\}.$$

D'où l'allure du graphe de la partie fractionnaire ...



SOLUTION 8.

Puisque

$$x + y - 1 < \lfloor x + y \rfloor \leq x + y,$$

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

et

$$y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y,$$

on a

$$-1 < \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor < 2,$$

ainsi

$$\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}.$$

Les deux valeurs sont bien prises par l'expression car, par exemple,

$$\lfloor 0 + 0 \rfloor - \lfloor 0 \rfloor - \lfloor 0 \rfloor = 0$$

et

$$\lfloor 1.5 + 1.5 \rfloor - \lfloor 1.5 \rfloor - \lfloor 1.5 \rfloor = 1.$$

SOLUTION 9.

1. On a $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = m$ si et seulement si

$$m \leq \sqrt{k} < m+1,$$

c'est-à-dire

$$m^2 \leq k < (m+1)^2.$$

2. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{m=1}^n \sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor = \sum_{m=1}^n \sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} m \\ &= \sum_{m=1}^n m(2m+1) = 2 \sum_{m=1}^n m^2 - \sum_{m=1}^n m \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{3} - \frac{m(m+1)}{2} \\ &= \frac{m(m+1)(4m-1)}{6} \end{aligned}$$

SOLUTION 10.

1. Soit x tel que $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor$. On a alors,

$$2x-2 < \lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor \leq x+1$$

et donc $2x-2 < x+1$, ie $x < 3$. De même,

$$x < \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor 2x-1 \rfloor \leq 2x-1$$

et donc $x < 2x-1$, ie $1 < x$. Ainsi, toute solution de l'équation appartient à $]1, 3[$.

Réciproquement ...

- Si $1 < x < \frac{3}{2}$, on a $\lfloor 2x-1 \rfloor = 1$ et $\lfloor x+1 \rfloor = 2$, x n'est donc pas solution.
- Si $\frac{3}{2} \leq x < 2$, on a $\lfloor 2x-1 \rfloor = 2$ et $\lfloor x+1 \rfloor = 2$, x est donc solution.
- Si $2 \leq x < \frac{5}{2}$, on a $\lfloor 2x-1 \rfloor = 3$ et $\lfloor x+1 \rfloor = 3$, x est donc solution.
- Si $\frac{5}{2} \leq x < 3$, on a $\lfloor 2x-1 \rfloor = 4$ et $\lfloor x+1 \rfloor = 4$, x n'est donc pas solution.

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right[.$$

2. Soit x tel que $\lfloor x+3 \rfloor = \lfloor x-1 \rfloor$. On a alors,

$$x+2 < \lfloor x+3 \rfloor = \lfloor x-1 \rfloor \leq x-1$$

et donc $x+2 < x-1$, ie $2 < -1$, ce qui est absurde. Il n'y a donc aucune solution.

SOLUTION 11.

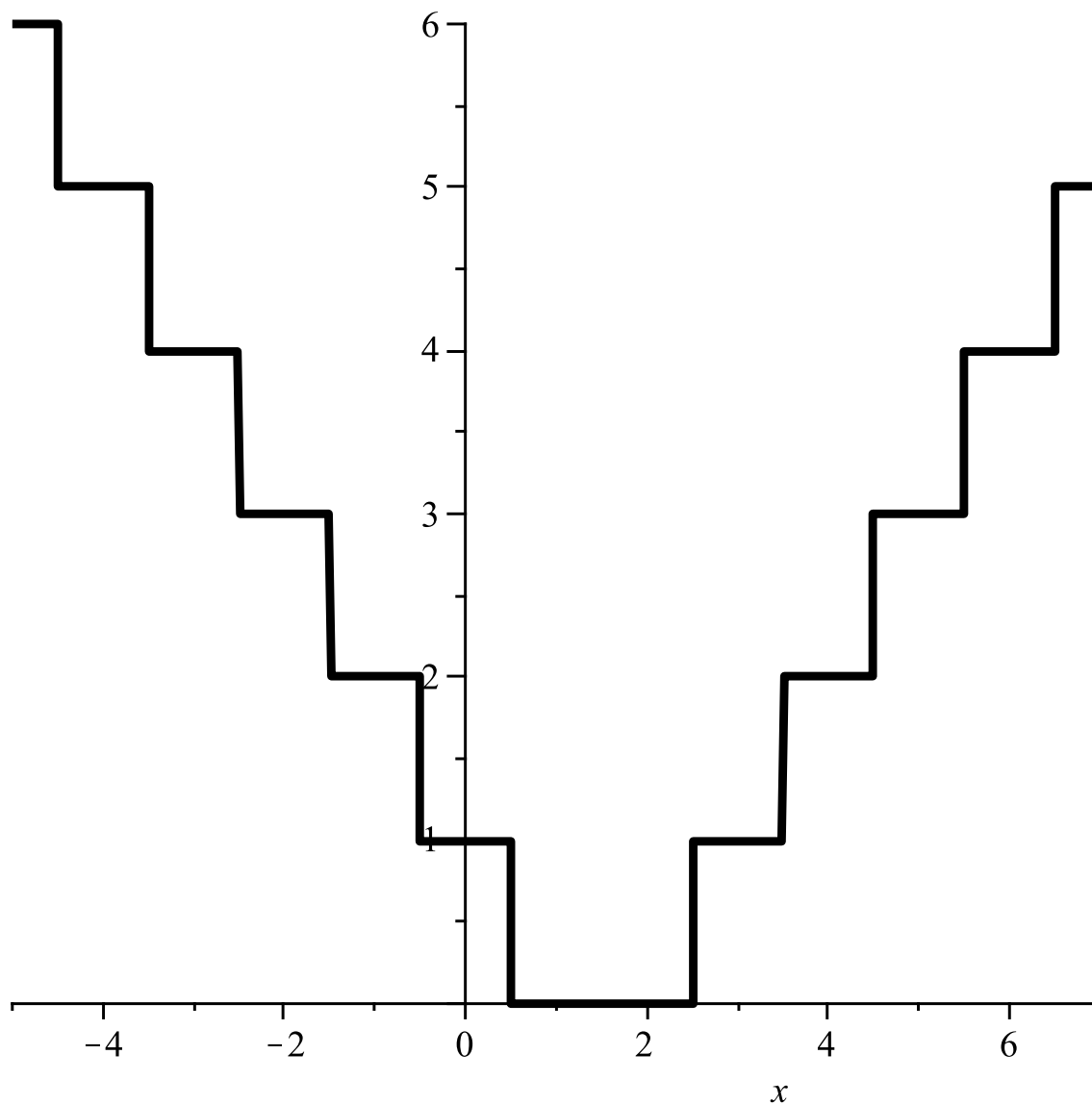
On a $\forall x \geq 3/2$,

$$\lfloor 3/2 - x \rfloor = \lfloor x - 3/2 \rfloor = -1 + \lfloor x - 1/2 \rfloor.$$

De même, $\forall x \leq 3/2$,

$$\lfloor 3/2 - x \rfloor = \lfloor -x + 3/2 \rfloor = 1 + \lfloor -x + 1/2 \rfloor.$$

D'où l'allure du graphe de f sur \mathbb{R}



SOLUTION 12.

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor.$$

Comme

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x),$$

il suffit d'établir l'inégalité sur $[0, 1]$. Or, sur cet intervalle,

$$\lfloor x \rfloor = 0$$

d'où

$$f(x) = \lfloor nx \rfloor \geq 0.$$

De plus, comme $nx < n$, on a

$$f(x) = \lfloor nx \rfloor \leq n - 1.$$

SOLUTION 13.

1. $A \neq \emptyset$ car $0 \in A$. En effet, $f(0) \in [0, 1]$ donc $f(0) \geq 0$. A est clairement majorée par 1.
2. $0 \in A$ donc $0 \leq c$. De plus, 1 est un majorant de A . Comme c est le plus petit majorant de A , $c \leq 1$. Par conséquent, $c \in [0, 1]$.
3. Soit $x \in A$. On a $x \leq c$. Comme f est croissante, on a $f(x) \leq f(c)$. Comme $x \in A$, $x \leq f(x) \leq f(c)$. Ceci étant valable pour tout $x \in A$, on obtient après passage à la borne supérieure $c \leq f(c)$.
4. On a montré à la question précédente que $c \leq f(c)$. Par croissance de f , on a donc $f(c) \leq f(f(c))$. Donc $f(c) \in A$. Comme $c = \sup A$, on en déduit que $f(c) \leq c$. Finalement $f(c) = c$ et c est un point fixe de f .

SOLUTION 14.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n . On a donc $n \geq 10^{k-1}$ i.e. $k \leq \log_{10} n + 1$ et $s_n \leq 9k$ puisque tout chiffre est inférieur ou égal à 9. Finalement, on obtient bien $s_n \leq 9(\log_{10} n + 1)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons p le nombre de chiffres 9 par lequel se termine l'écriture décimale de n . Lorsque l'on ajoute 1 à n , on transforme les p derniers chiffres 9 en des 0 et on ajoute 1 au chiffre précédent les p derniers chiffres 9. Ainsi $s_{n+1} = s_n - 9p + 1 \leq s_n + 1$. On a donc $\frac{s_{n+1}}{s_n} \leq 1 + \frac{1}{s_n} \leq 2$ puisque $s_n \geq 1$. Bien évidemment, on a également $\frac{s_{n+1}}{s_n} \geq 0$. Ainsi $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)$ est bien bornée. Puisque $\frac{s_2}{s_1} = 2$, la borne supérieure de $\left\{\frac{s_{n+1}}{s_n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est 2 et elle est atteinte (c'est donc un maximum). De plus $\frac{s_{10k}}{s_{10k-1}} = \frac{1}{9k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ donc 0 est la borne inférieure de $\left\{\frac{s_{n+1}}{s_n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Cette borne n'est pas atteinte puisque $\frac{s_{n+1}}{s_n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

SOLUTION 15.

Posons $g(x) = \inf_{y \in B} f(x, y)$ pour tout $x \in A$ et $h(y) = \sup_{x \in A} f(x, y)$ pour tout $y \in B$. Soit $(x, y) \in A \times B$. Alors $g(x) \leq f(x, y) \leq h(y)$. Ceci étant vrai quelque soit le choix de $x \in A$, $h(y)$ est un majorant de g sur A . Ainsi $\sup_{x \in A} g(x) \leq h(y)$. Cette dernière inégalité est vraie quelque soit le choix de $y \in B$ donc $\sup_{x \in A} g(x)$ est un minorant de h sur B . Ainsi $\sup_{x \in A} g(x) \leq \inf_{y \in B} h(y)$. Cette dernière inégalité est celle demandée par l'énoncé.

SOLUTION 16.

Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \inf f([x, +\infty[)$ et $h(x) = \sup f([x, +\infty[)$. Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1 \leq x_2$. Puisque $x_1 \leq x_2$, $[x_2, +\infty[\subset [x_1, +\infty[$ puis $f([x_2, +\infty[) \subset f([x_1, +\infty[)$. Il s'ensuit que $\inf f([x_1, +\infty[) \leq \inf f([x_2, +\infty[)$ i.e. $g(x_1) \leq g(x_2)$ et $\sup f([x_2, +\infty[) \leq \sup f([x_1, +\infty[)$ i.e. $h(x_2) \leq h(x_1)$. Ainsi g est croissante et h est décroissante.

SOLUTION 17.

1. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 - \frac{1}{n} \geq 1$ et que $1 = 2 - \frac{1}{1} \in \mathcal{A}$, $1 = \min \mathcal{A}$. A fortiori, $1 = \inf \mathcal{A}$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 - \frac{1}{n} \geq 1$ et la suite $(2 - \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de \mathcal{A} convergeant vers 2 donc $2 = \sup \mathcal{A}$.
2. Pour tout $(m, n) \in (\mathbb{Z}^*)^2$, $-1 \leq 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq 3$, $-1 = 1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} \in \mathcal{B}$ et $3 = 1 - \frac{1}{-1} - \frac{1}{-1} \in \mathcal{B}$ donc $-1 = \min \mathcal{B}$ et $3 = \max \mathcal{B}$. A fortiori, $-1 = \inf \mathcal{B}$ et $3 = \sup \mathcal{B}$.
3. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $m \neq n$, $0 \leq 1 - \frac{1}{n-m} \leq 2$, $0 = 1 - \frac{1}{1-0} \in \mathcal{C}$ et $2 = 1 - \frac{1}{0-1} \in \mathcal{C}$ donc $0 = \min \mathcal{C}$ et $2 = \max \mathcal{C}$. A fortiori, $0 = \inf \mathcal{C}$ et $2 = \sup \mathcal{C}$.
4. Pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(p-q)^2 \geq 0$ donc $p^2 + q^2 \geq 2pq$ puis $\frac{pq}{p^2+q^2} \leq \frac{1}{2}$. De plus, $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{1^2+1^2} \in \mathcal{D}$ donc $\frac{1}{2} = \max \mathcal{D}$. A fortiori, $\frac{1}{2} = \sup \mathcal{D}$.
Pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\frac{pq}{p^2+q^2} \geq 0$ et la suite $(\frac{n}{n^2+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de \mathcal{D} convergeant vers 0 donc $0 = \inf \mathcal{D}$.
5. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $\frac{2^n}{2^m+3^{n+m}} \geq 0$ et la suite $(\frac{1}{2^m+3^m})_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{E} convergeant vers 0 donc $0 = \inf \mathcal{E}$.
Posons $u_{m,n} = \frac{2^n}{2^m+3^{n+m}}$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Soit $m \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} u_{m,n+1} - u_{m,n} &= \frac{2^{n+1}}{2^m + 3^{m+n+1}} - \frac{2^n}{2^m + 3^{m+n}} = \frac{2^{m+n+1} + 2 \cdot 3^m 6^n - 2^{m+n} - 3 \cdot 3^m 6^n}{(2^m + 3^{m+n})(2^m + 3^{m+n+1})} \\ &= \frac{2^{m+n} - 3^m 6^n}{(2^m + 3^{m+n})(2^m + 3^{m+n+1})} \leq 0 \end{aligned}$$

car $6 \geq 2$ et $3 \geq 2$. La suite $(u_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{m,n} \leq u_{m,0} = \frac{1}{2^m+3^m} \leq \frac{1}{2}$ puis que $\frac{1}{2}$ est un majorant de \mathcal{E} . De plus, $\frac{1}{2} = \frac{2^0}{2^0+3^{0+0}} \in \mathcal{E}$ donc $\frac{1}{2} = \max \mathcal{E}$. A fortiori, $\frac{1}{2} = \sup \mathcal{E}$.

6. Pour tout $(n, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1} = 2 + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{q+1}$$

de sorte que

$$0 \leq \frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1} \leq 3$$

La suite $(\frac{n+2}{n+1} - 1)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{F} convergeant vers 0 donc $0 = \inf \mathcal{F}$.

La suite $(2 + \frac{q-1}{q+1})_{q \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{F} convergeant vers 3 donc $3 = \sup \mathcal{F}$.

7. Pour tout $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $m^2 + mn + n^2 = (m-n)^2 + 3mn \geq 3mn$ donc $\frac{mn}{m^2+mn+n^2} \leq \frac{1}{3}$. De plus, $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{1^2+1 \times 1+1^2} \in \mathcal{G}$ donc $\frac{1}{3} = \max \mathcal{G}$. A fortiori, $\frac{1}{3} = \sup \mathcal{G}$.
Pour tout $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\frac{mn}{m^2+mn+n^2} \geq 0$ et la suite $(\frac{n}{n^2+n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de \mathcal{G} convergeant vers 0 donc $0 = \inf \mathcal{G}$.

SOLUTION 18.

Soit $x \in A \cup B$. Alors, puisque $x \in A$ ou $x \in B$,

$$x \leq \max[\sup(A), \sup(B)],$$

$A \cup B$ est donc majoré et $\sup(A \cup B)$ étant le plus petit majorant de $A \cup B$,

$$\sup(A \cup B) \leq \max[\sup(A), \sup(B)].$$

De plus, puisque A et B sont inclus dans $A \cup B$,

$$\sup(A) \leq \sup(A \cup B) \text{ et } \sup(B) \leq \sup(A \cup B),$$

et ainsi

$$\sup(A \cup B) \geq \max[\sup(A), \sup(B)],$$

et finalement

$$\sup(A \cup B) = \max[\sup(A), \sup(B)].$$

On prouve sans peine selon le même schéma la formule

$$\inf(A \cup B) = \min[\inf(A), \inf(B)].$$

SOLUTION 19.

L'ensemble, que nous noterons A , est non vide et borné car $\forall n \geq 1$,

$$-1 \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq 1.$$

A admet donc une borne supérieure et une borne inférieure. Puisque $\forall n \geq 3$,

$$-1 < \frac{(-1)^n}{n} < \frac{1}{2},$$

et $1/2, -1 \in A$, $\sup(A) = 1/2$ et il s'agit d'un plus grand élément. De même $\inf(A) = -1$ qui est aussi un plus petit élément.

SOLUTION 20.

Si A et B sont bornées non vides, on a pour tous $a \in A$ et $b \in B$,

$$\inf A \leq a \leq \sup A \quad \text{et} \quad \inf B \leq b \leq \sup B,$$

d'où en sommant

$$\forall a \in A, b \in B : \inf A + \inf B \leq a + b \leq \sup A + \sup B.$$

Cela montre que $A+B$ est bornée et possède donc une borne supérieure et une borne inférieure. En plus, ça exhibe $\inf A + \inf B$ en tant que minorant de $A+B$. Or $\inf(A+B)$ est le minorant le plus grand de $A+B$, d'où

$$\inf A + \inf B \leq \inf(A+B).$$

Et de même

$$\sup A + \sup B \geq \sup(A+B).$$

Il nous reste à voir que ces deux inégalités sont des égalités; les deux cas étant analogues, nous traiterons uniquement le cas de la borne supérieure. Supposons donc par l'absurde que l'on ait

$$\sup A + \sup B > \sup(A+B).$$

Notons

$$\epsilon := \sup A + \sup B - \sup(A+B) > 0.$$

Par définition d'une borne supérieure, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que

$$\sup A - \frac{\epsilon}{2} < a \leq \sup A$$

et

$$\sup B - \frac{\epsilon}{2} < b \leq \sup B.$$

Par addition des parties gauches de ces encadrements

$$\sup A + \sup B - \epsilon < a + b.$$

Par définition de ϵ , cela équivaut à la contradiction

$$\sup(A+B) < a + b.$$

SOLUTION 21.

1. On a clairement dans le premier cas

$$d(1, A) = 0,$$

dans le deuxième

$$d(2, A) = 1,$$

et dans le troisième

$$d(1/2, A) = 0.$$

2. L'ensemble

$$\Omega = \{ |x - a| \mid a \in A \}$$

est une partie non vide (puisque A est non vide) de \mathbb{R} , Ω est de plus minorée par 0, Ω admet donc une borne inférieure.

3. La borne inférieure $d(x, A)$ n'est pas nécessairement un plus petit élément :

► si $A =]0, 1]$ et $x = 0$, on a $\Omega =]0, 1]$ et $d(x, A) = 0$ et $0 \notin A$, la borne inférieure n'est donc pas un plus petit élément.

► si $A = [0, 1]$ et $x = 0$, on a $\Omega = [0, 1]$ et $d(x, A) = 0$ et $0 \in A$, la borne inférieure est donc un plus petit élément.

4. Soit $\varepsilon > 0$, puisque \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} ,

$$\mathbb{Q} \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\neq \emptyset,$$

ainsi $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel que

$$|x - r| < \varepsilon$$

et donc $d(x, \mathbb{Q}) \leq \varepsilon$. Par définition de la borne inférieure de Ω , $d(x, \mathbb{Q}) \leq \varepsilon$. Puisque $d(x, \mathbb{Q}) \geq 0$ et

$$\forall \varepsilon > 0, \quad d(x, \mathbb{Q}) \leq \varepsilon$$

on peut conclure que $d(x, \mathbb{Q}) = 0$. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ étant dense dans \mathbb{R} , on adapte sans peine ce qui précède pour montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad d(x, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0.$$

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$|x - a| \leq |x - y| + |y - a|,$$

or $\forall a \in A$,

$$d(x, A) \leq |x - a|,$$

ainsi $\forall a \in A$

$$d(x, A) - |x - y| \leq |y - a|.$$

Le nombre $d(x, A) - |x - y|$ est donc un minorant de l'ensemble

$$\{ |y - a|, a \in A \},$$

d'où

$$d(x, A) - |x - y| \leq d(y, A)$$

soit

$$d(x, A) - d(y, A) \leq |x - y|,$$

et puisque x et y jouent des rôles symétriques, on a aussi

$$d(y, A) - d(x, A) \leq |x - y|,$$

ainsi

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|.$$

SOLUTION 22.

Soit r un rationnel. Il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$. Posons $u_n = \sqrt{q^2 n^2 + 2pn} - \sqrt{q^2 n^2}$ pour n suffisamment grand. La suite (u_n) est une suite d'éléments de A et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = qn \left(\sqrt{1 + \frac{2p}{q^2 n}} - 1 \right)$$

Comme $\sqrt{1 + \frac{2p}{q^2 n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p}{q^2 n}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{p}{q} = r$.

On en déduit que $\mathbb{Q} \subset \bar{A}$. Comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , $\mathbb{R} = \bar{\mathbb{Q}} \subset \bar{\bar{A}} = \bar{A}$. Ainsi A est dense dans \mathbb{R} .

SOLUTION 23.

1. $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ d'où $f(0) = 0$.
2. Récurrence évidente.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(-x) = f(x-x) = f(0) = 0$ de sorte que f est impaire. On en déduit le résultat demandé via la question précédente.
4. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$ i.e. $p = qr$. Alors $f(p) = ap$ d'après la question précédente. Par ailleurs, $f(p) = f(qr) = qf(r)$ (via une récurrence éventuelle). On en déduit que $qf(r) = ap$ i.e. $f(r) = ar$.
5. a. Par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des rationnels α_n et β_n tels que

$$x - \frac{1}{n} < \alpha_n < x < \beta_n < x + \frac{1}{n}$$

On en déduit le résultat demandé.

- b. Soit $x \in \mathbb{R}$. On construit deux suites de rationnels (α_n) et (β_n) comme dans la question précédente. Puisque $\alpha_n < x < \beta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient par croissance de f , $f(\alpha_n) \leq f(x) \leq f(\beta_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ou encore $a\alpha_n \leq f(x) \leq a\beta_n$ en utilisant une question précédente. On obtient alors $f(x) = ax$ par passage à la limite.
6. Si f est une application croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

alors en posant $a = f(1)$, les questions précédentes montrent que $f = a \text{Id}_{\mathbb{R}}$. De plus, $a = f(1) \geq f(0)$.

Réciproquement, si $f = a \text{Id}_{\mathbb{R}}$ avec $a \in \mathbb{R}_+$, f est bien une application croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Finalement les applications vérifiant les conditions demandées sont les applications $f = a \text{Id}_{\mathbb{R}}$ avec $a \in \mathbb{R}_+$.

SOLUTION 24.

1. Faux. \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R} .
2. Faux. $]0, 1[\cap \mathbb{Q} = \emptyset$.
3. Vrai. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Comme \mathcal{A} est dense dans \mathbb{R} , $]a, b[\cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Mais $]a, b[\cap \mathcal{A} \subset]a, b[\cap \mathcal{B}$ donc $]a, b[\cap \mathcal{B} \neq \emptyset$.
4. Faux. Supposons qu'il existe une partie \mathcal{A} de \mathbb{R} bornée et dense dans \mathbb{R} . Notons M un majorant de \mathcal{A} (il en existe un car \mathcal{A} est majorée). Alors $]M, M+1[\cap \mathcal{A} = \emptyset$. Il existe donc $x \in \mathcal{A}$ tel que $x > M$, ce qui contredit le fait que M est un majorant de \mathcal{A} .

SOLUTION 25.

Soient $x < y$. On a donc, par stricte croissance sur \mathbb{R} de $x \mapsto \sqrt[3]{x}$,

$$\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}.$$

Comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que

$$\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{y},$$

d'où

$$x < r^3 < y.$$

Ainsi E est dense dans \mathbb{R}

SOLUTION 26.

1. g est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$,

$$g'(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = -e^{-x} \frac{x^n}{n!}$$

Par conséquent, $g'(x) < 0$ pour $x \in]0, 1[$. g est donc strictement croissante sur $[0, 1]$.

2. On a en particulier $g(1) < g(0)$. Or $g(0) = 1$ et $g(1) = e^{-1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ d'où l'inégalité voulue.

3. h est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in]0, 1[$,

$$h'(x) = g'(x) + e^{-x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - e^{-x} \frac{x^n}{n!} = e^{-x} \frac{x^{n-1}}{n!} (n-2x)$$

Comme $n \geq 2$, $h'(x) < 0$ pour $x \in [0, 1[$. Donc h est strictement croissante sur $[0, 1]$.

4. On a en particulier $h(0) < h(1)$. Or $h(0) = 1$ et $h(1) = e^{-1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \right)$ d'où l'inégalité voulue.

5. D'après ce qui précède, on a $a_n < n!e < a_n + 1$ avec $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$. a_n est un entier puisque $k!$ divise $n!$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Supposons $q \leq n$. Alors q divise $n!$ et $n!e$ est donc un entier compris strictement entre les deux entiers consécutifs a_n et $a_n + 1$, ce qui est impossible.

6. Comme ce qui a été fait est valable pour tout $n \geq 2$. On a $q > n$ pour tout entier $n \geq 2$, ce qui est clairement impossible.

SOLUTION 27.

- On a $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$. Or $\alpha > \alpha-1 > 0$ donc $\beta > 1$. On a également $\alpha = \frac{\beta}{\beta-1}$ donc, si β était rationnel, α le serait aussi.
- On a $p\alpha - 1 < k \leq p\alpha$. L'inégalité large ne peut être une égalité car α est irrationnel. On obtient les premières inégalités en divisant par $\alpha > 0$. On procède de même pour les secondes inégalités. En additionnant les deux séries d'inégalités et en tenant compte du fait que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, on obtient $p+q-1 < k < p+q$, ce qui est absurde puisque $p+q-1$ et $p+q$ sont deux entiers consécutifs.
 - Si $A \cap B \neq \emptyset$, il existe $k \in A \cap B$ i.e. il existe $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $k = \lfloor p\alpha \rfloor = \lfloor q\beta \rfloor$, ce qui est impossible d'après ce qui précède.
- Notons $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \lfloor n\alpha \rfloor < k\}$. E est non vide puisque $0 \in E$. De plus, pour tout $n \in E$, $n = \frac{n\alpha}{\alpha} < \frac{\lfloor n\alpha \rfloor + 1}{\alpha} < \frac{k+1}{\alpha}$ donc E est majorée. Enfin, E est une partie de \mathbb{N} donc elle admet un plus grand élément que l'on note p . Comme $p+1 \notin E$, $\lfloor (p+1)\alpha \rfloor \geq k$. Enfin $k \notin A$, donc $k \neq \lfloor (p+1)\alpha \rfloor$. Ainsi $\lfloor p\alpha \rfloor < k < \lfloor (p+1)\alpha \rfloor$.
On montre de la même manière l'existence de q .

- b. Les inégalités strictes entre entiers $\lfloor p\alpha \rfloor < k < \lfloor (p+1)\alpha \rfloor$ équivalent à $\lfloor p\alpha \rfloor + 1 \leq k \leq \lfloor (p+1)\alpha \rfloor - 1$. Or $\lfloor p\alpha \rfloor > p\alpha - 1$ et $\lfloor (p+1)\alpha \rfloor - 1 \leq (p+1)\alpha - 1$. Cette dernière inégalité ne peut être une égalité car α est irrationnel. Ainsi $p\alpha < k < (p+1)\alpha - 1$. Il suffit alors de diviser par $\alpha > 0$ pour obtenir les premières inégalités. On procède de même pour les secondes inégalités. En additionnant les deux séries d'inégalités et en tenant compte du fait que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, on obtient $p+q < k < p+q+1$, ce qui est absurde puisque $p+q$ et $p+q+1$ sont deux entiers consécutifs.
- c. Si $A \cup B \neq \mathbb{N}^*$, il existe k qui n'est ni dans A ni dans B , ce qui est impossible d'après ce qui précède.

SOLUTION 28.

1. On a $\cos(k+1)\varphi + \cos(k-1)\varphi = 2\cos\varphi \cos k\varphi$ ou encore

$$\frac{A_{k+1}}{(\sqrt{n})^{k+1}} + \frac{A_{k-1}}{(\sqrt{n})^{k-1}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \frac{A_k}{(\sqrt{n})^k}$$

ce qui équivaut à

$$A_{k+1} + nA_{k-1} = 2A_k$$

2. Puisque $A_0 = A_1 = 1$, on montre par récurrence double que les A_k sont des entiers.
3. On raisonne par récurrence. $A_0 = 1$ n'est pas divisible par n car $n \geq 3$. Supposons A_k non divisible par n pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Si A_{k+1} était divisible par n , alors $2A_k$ le serait également d'après la relation de récurrence de la question précédente. Comme n est impair, 2 est premier avec n et n divise donc A_k d'après le théorème de Gauss, ce qui n'est pas. Ainsi A_{k+1} n'est pas divisible par n . Par récurrence, aucun des A_k n'est divisible par n .
4. Supposons $\frac{\varphi}{\pi}$ rationnel : il existe donc $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{\varphi}{\pi} = \frac{p}{q}$. On en déduit que $2q\varphi = 2p\pi$, puis que $\cos 2q\varphi = 1$ i.e. $A_{2q} = (\sqrt{n})^{2q} = n^q$. Ainsi $A_{2q} = n^q$. Puisque $q \geq 1$, n divise A_{2q} , ce qui est impossible d'après la question précédente. Notre hypothèse de départ, à savoir que $\frac{\varphi}{\pi} \in \mathbb{Q}$, est donc fautive.

SOLUTION 29.

Raisonnons par l'absurde en supposant $\ln(2)/\ln(3)$ rationnel. Il existe donc deux entiers naturels p et $q \neq 0$ tels que $\ln(2)/\ln(3) = p/q$, i.e. $q \ln(2) = p \ln(3)$, i.e. $\ln(2^q) = \ln(3^p)$ d'où $2^q = 3^p$. Puisque $q \geq 1$, 2^q est un nombre pair, ce qui est absurde car 3^p est toujours impair.

SOLUTION 30.

Supposons par l'absurde que

$$r = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}.$$

Si ce nombre était rationnel, son carré le serait aussi. Mais alors, $3 = (r - \sqrt{2})^2 = r^2 - 2\sqrt{2}r + 2$ et donc, puisque $r \neq 0$,

$$\sqrt{2} = \frac{r^2 - 1}{2r} \in \mathbb{Q},$$

ce qui est absurde.

SOLUTION 31.

1. On a $x+y$ et xy dans \mathbb{Q} .

2. Il peut tout se passer... Par exemple

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

mais $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$. De même, $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$ mais

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}!$$

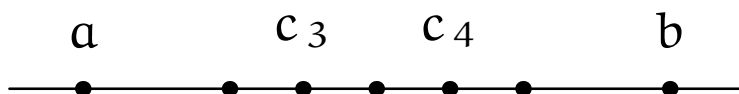
3. On a $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si $x = 0$, $xy = 0 \in \mathbb{Q}$ mais par contre lorsque $x \neq 0$, $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4. C'est la même situation qu'au 3.

SOLUTION 32.

Si n est un carré parfait, \sqrt{n} est un entier donc c'est un rationnel. Inversement, par contraposition, si n n'est pas un carré parfait, alors l'un au moins de ses diviseurs premiers, que nous noterons p , apparaît avec une puissance impaire dans la décomposition en facteurs premiers de n . Si donc \sqrt{n} est rationnel, il s'écrit a/b avec a et b entiers d'où $nb^2 = a^2$, ce qui contredit à nouveau l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, le nombre p étant nécessairement affecté d'une puissance impaire dans le membre de gauche et d'une puissance paire dans celui de droite.

SOLUTION 33.



On a clairement

c_1

$$c_1 = a + \frac{b-a}{4} = \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b,$$

$$c_2 = a + 3\frac{b-a}{4} = \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b,$$

$$c_3 = a + 3\frac{b-a}{8} = \frac{5}{8}a + \frac{3}{8}b,$$

et

$$c_4 = a + 5\frac{b-a}{8} = \frac{3}{8}a + \frac{5}{8}b.$$

SOLUTION 34.

Raisonnons par double inclusion.

► Soit $n = 1$. On a alors

$$\left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[=]1, 2[.$$

Soit $n \geq 2$. On a alors

$$\left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[\subset]0, 1[.$$

Ainsi

$$\bigcup_{n \geq 1} \left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[\subset]0, 1[\cup]1, 2[.$$

► Il est équivalent de prouver que

$$]0, 1[\subset \bigcup_{n \geq 2} \left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[.$$

Remarquons alors que $\forall n \geq 2$,

$$\frac{1}{n} < \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

Soit $x \in]0, 1[$. il existe un unique entier n tel que

$$n < \frac{2}{x} \leq n+1,$$

et puisque $2/x > 2$, $n \geq 2$. On a alors

$$x \in \left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[$$

et ainsi

$$x \in \bigcup_{n \geq 2} \left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[.$$

SOLUTION 35.

1. On doit vérifier trois propriétés.

Reflexivité : trivial.

Transitivité : soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq_\varphi b \leq_\varphi c$. Cela signifie que

$$\varphi(b) - \varphi(a) \geq |b - a| \quad \text{et} \quad \varphi(c) - \varphi(b) \geq |c - b|.$$

En ajoutant ces deux inégalités et en utilisant l'inégalité triangulaire on a

$$\begin{aligned} \varphi(c) - \varphi(a) &\geq |c - b| + |b - a| \\ &\geq |c - b + b - a| = |c - a|. \end{aligned}$$

Ainsi $a \leq_\varphi c$.

Antisymétrie : soient a, b des réels tels que $a \leq_\varphi b$ et $b \leq_\varphi a$. Ainsi

$$\varphi(b) - \varphi(a) \geq |b - a| \quad \text{et} \quad \varphi(a) - \varphi(b) \geq |a - b|.$$

En ajoutant ces deux inégalités on obtient

$$0 \geq 2|b - a| \geq 0,$$

donc $a = b$.

2. Nous présentons une preuve par chaîne d'équivalences.

$$\begin{aligned} &\iff \begin{array}{ll} \forall a, b \in \mathbb{R}, & a \text{ comparable à } b \\ \forall a, b \in \mathbb{R}, & a \leq_\varphi b \quad \text{ou} \quad b \leq_\varphi a \end{array} \\ &\iff \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \varphi(b) - \varphi(a) \geq |b - a| \\ \text{ou} \\ -(\varphi(b) - \varphi(a)) \geq |b - a| \end{cases} \\ &\iff \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |\varphi(b) - \varphi(a)| \geq |b - a| \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que la valeur absolue $|x|$ est supérieure à y si et seulement x ou son opposé $-x$ est supérieur à y .

3. L'ordre $\leq_{Id_{\mathbb{R}}}$ est l'ordre habituel \leq .

SOLUTION 36.

1. Non, car E n'est pas une partie totalement ordonnée de $\mathcal{P}(X)$. En effet si x, y sont deux éléments distincts de X alors $\{x\}$ et $\{y\}$ sont dans E , mais ne sont pas comparables.
2. Oui, X est une borne supérieure de E . Vérification : $X \in \mathcal{P}(X)$ et pour tout $A \in E$ on a $A \subset X$, donc X est un majorant de E . Supposons que $Y' \in \mathcal{P}(X)$ soit aussi un majorant de E avec $Y \subset X$. Ainsi pour tout $x \in X$ on a $\{x\} \subset Y$, d'où $X \subset Y$. Par conséquent $X = Y$, c'est-à-dire X est le plus petit majorant de E .

SOLUTION 37.

1. Il faut vérifier que la relation \preccurlyeq est réflexive, antisymétrique et transitive.

◇ *La relation \preccurlyeq est clairement réflexive.*

◇ *La relation est antisymétrique.*

Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ tels que

$$x \preccurlyeq y \quad \text{et} \quad y \preccurlyeq x.$$

On a donc $x_1 \leq y_1$ et $y_1 \leq x_1$. Ainsi $x_1 = y_1$. On a alors $x_2 \leq y_2$ et $y_2 \leq x_2$. Ainsi $x_2 = y_2$. d'où

$$x = y.$$

◇ *La relation est transitive.*

Soient

$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

et $z = (z_1, z_2)$ tels que

$$x \preccurlyeq y \quad \text{et} \quad y \preccurlyeq z.$$

Si $x_1 < y_1$, puisque $y_1 \leq z_1$, on a $x_1 < z_1$ et donc $x \preccurlyeq z$. Si $x_1 = y_1$ et $y_1 < z_1$, alors $x_1 < z_1$ et donc $x \preccurlyeq z$. Si $x_1 = y_1$ et $y_1 = z_1$, alors $x_1 = z_1$, $x_2 \leq y_2$, $y_2 \leq z_2$ donc $x_2 \leq z_2$. Ainsi $x \preccurlyeq z$.

2. *L'ordre est total.*

Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$. Si $x_1 \neq y_1$ alors $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$. Si $x_1 = y_1$, puisque soit $x_2 \leq y_2$, soit $y_2 \leq x_2$, on a $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$.

3. La partie A n'est pas majorée au contraire de B . Cette dernière admet une borne supérieure.

◇ La partie A n'est pas majorée. En effet, soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. Il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > x$ donc (x, y) ne peut majorer A .

◇ La partie B est majorée par $(3, 0)$. Déterminons l'ensemble \mathcal{M} des majorants de B ; $(x, y) \in \mathcal{M}$ si et seulement si

$$\forall p \in \mathbb{N}, (2, 10^p) \preccurlyeq (x, y),$$

ie $2 < x$ car on ne peut avoir $\forall p \in \mathbb{N}, y \geq 10^p$. Ainsi

$$\mathcal{M} = \{(3, y), y \in \mathbb{N}\}.$$

L'ensemble \mathcal{M} admet clairement un plus petit élément : $(3, 0)$. Ainsi B admet une borne supérieure valant $(3, 0)$ mais pas de plus grand élément puisque $(3, 0) \notin B$.

SOLUTION 38.

1. Il faut vérifier que la relation \preccurlyeq est réflexive, antisymétrique et transitive.

◇ La relation est clairement réflexive.

◇ La relation est antisymétrique d'après le principe de double inclusion.

◇ La relation est transitive.

Soient A , B et C trois parties de E telles que $A \subset B$ et $B \subset C$. On a alors $A \subset C$.

2. L'ordre n'est pas total dès que E contient au moins deux éléments distincts a et b puisqu'alors les ensembles $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables par inclusion.

3. Il faut revenir aux définitions du cours.

◇ Déterminons l'ensemble \mathcal{M} des majorants de $U = \{A, B\}$; $F \in \mathcal{M}$ si et seulement si

$$A \subset F \text{ et } B \subset F,$$

ie $A \cup B \subset F$ et ainsi \mathcal{M} est l'ensemble des parties de E contenant $A \cup B$; cet ensemble \mathcal{M} admet donc clairement un plus petit élément qui vaut $A \cup B$. Ainsi U admet une borne supérieure valant $A \cup B$.

◇ Déterminons l'ensemble m des minorants de l'ensemble $U = \{A, B\}$; $F \in m$ si et seulement si

$$F \subset A \text{ et } F \subset B,$$

ie $F \subset A \cap B$ et ainsi m est l'ensemble des parties de E contenues dans $A \cap B$; cet ensemble m admet donc clairement un plus grand élément qui vaut $A \cap B$. Ainsi U admet une borne inférieure valant $A \cap B$.

4. En reprenant pas à pas les raisonnements menés ci-dessus, on prouve que toute partie non vide \mathcal{F} de $\mathcal{P}(E)$ admet une borne inférieure et une borne supérieure valant

$$\sup(\mathcal{F}) = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$$

et

$$\inf(\mathcal{F}) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A.$$

SOLUTION 39.

Tout d'abord, toute classe d'équivalence est non vide puisque pour tout $x \in E$, $x \mathcal{R} x$ (réflexivité) et donc $x \in C(x)$.

On en déduit également que tout élément x de E appartient à une classe d'équivalence (la sienne).

Enfin, soient $x, y \in E$ tels que $C(x) \cap C(y) = \emptyset$. Il existe donc $z \in C(x) \cap C(y)$. Soit $u \in C(x)$. Alors $x \mathcal{R} u$ et $x \mathcal{R} z$. Par symétrie, on a également $z \mathcal{R} x$ puis $z \mathcal{R} u$ par transitivité. Mais on a également $y \mathcal{R} z$ donc $y \mathcal{R} u$ par transitivité. On en déduit que $u \in C(y)$. Ainsi $C(x) \subset C(y)$. En échangeant les rôles de x et y , on a également $C(y) \subset C(x)$. Par conséquent $C(x) = C(y)$. Deux classes d'équivalences sont donc disjointes ou confondues.

Ceci prouve que les classes d'équivalence forment une partition de E .

SOLUTION 40.

1. On pose $f(t) = \frac{t}{e^t}$ pour $t \in \mathbb{R}$ et on remarque que $x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$. Il est alors évident que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
2. Une étude rapide donne le tableau de variations suivant pour f .

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	—
$f(x)$	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$	0

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $f(x) \in]0, \frac{1}{e}[$ et le théorème des valeurs intermédiaires garantit que l'équation $f(y) = f(x)$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}$ possède exactement deux solutions (dont l'une est évidemment x). Autrement dit, la classe d'équivalence de x possède deux éléments.
- Si $x = 1$, la classe d'équivalence de x ne possède qu'un élément (x lui-même) car les variations de f montrent que f ne prend qu'une seule fois la valeur $f(1) = \frac{1}{e}$.
- Si $x \leq 0$, $f(x) \leq 0$ et le théorème des valeurs intermédiaires garantit que l'équation $f(y) = f(x)$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}$ possède une seule solution (x lui-même). Autrement dit, la classe d'équivalence de x possède un unique élément.

SOLUTION 41.

Le fait que \mathcal{R} est une relation d'équivalence est quasi évident (il suffit d'écrire les trois axiomes).
Les classes d'équivalence sont des cercles (quitte à identifier les complexes à leurs images dans le plan complexe).

SOLUTION 42.

On remarque que pour $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $x \mathcal{R} y$ si et seulement si x et y ont la même parité. Le fait que \mathcal{R} est une relation d'équivalence est alors quasi évident.
La classe de 0 est évidemment $2\mathbb{Z}$ et la classe de 1 et $2\mathbb{Z} + 1$. De plus, $2\mathbb{Z} \cup (2\mathbb{Z} + 1) = \mathbb{Z}$ donc ce sont les deux seules classes d'équivalence.

SOLUTION 43.

En remarquant que $x \mathcal{R} y \iff x^2 - x = y^2 - y$, il est quasi évident que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
 x \mathcal{R} y &\iff (x - y)(x + y) = x - y \\
 &\iff (x - y)(x + y - 1) = 0 && \iff y = x \text{ ou } y = 1 - x
 \end{aligned}$$

La classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$ est donc formée des réels x et $1 - x$.

- Si $x = \frac{1}{2}$, alors $x = 1 - x$ et la classe d'équivalence de x est de cardinal 1.
- Si $x \neq \frac{1}{2}$, alors $x \neq 1 - x$ et la classe d'équivalence de x est de cardinal 2.

SOLUTION 44.

1. a. **Réflexivité** : Soit $f \in E^E$. Id_E est une bijection de E dans E et $f = \text{Id}_E^{-1} \circ f \circ \text{Id}_E$. Ainsi $f \sim f$.

Symétrie Soit $(f, g) \in (E^E)^2$ tel que $f \mathcal{R} g$. Il existe donc une bijection φ de E dans E telle que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$. Mais alors

$$g = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1} = (\varphi^{-1})^{-1} \circ f \circ \varphi^{-1}$$

Comme φ^{-1} est également une bijection de E dans E , $g \sim f$.

Transitivité Soit $(f, g, h) \in (E^E)^3$ tel que $f \mathcal{R} g$ et $g \mathcal{R} h$. Il existe donc deux bijections φ et ψ de E dans E telles que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$ et $g = \psi^{-1} \circ h \circ \psi$. Mais alors

$$f = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1} \circ h \circ \psi \circ \varphi = (\psi \circ \varphi)^{-1} \circ h \circ (\psi \circ \varphi)$$

Comme $\psi \circ \varphi$ est une bijection de E dans E , $f \sim h$.

- b. Soit f conjuguée à Id_E . Alors il existe une bijection φ de E dans E telle que $f = \varphi^{-1} \circ \text{Id}_E \circ \varphi$, d'où $f = \text{Id}_E$. La classe d'équivalence de Id_E est $\{\text{Id}_E\}$.

- c. Soit $f \in E^E$ une application constante. Il existe donc $a \in E$ tel que $f(x) = a$ pour tout $x \in E$.

Soit maintenant g une application conjuguée à f . Il existe donc une bijection φ de E dans E telle que $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$. Ainsi pour tout $x \in E$, $g(x) = \varphi^{-1}(f(\varphi(x))) = \varphi^{-1}(a)$. Ainsi g est constante.

Réciproquement, soit $g \in E^E$ une application constante. Il existe donc $b \in E$ tel que $g(x) = b$ pour tout $x \in E$. Posons $\varphi(x) = \begin{cases} b & \text{si } x = a \\ a & \text{si } x = b \\ x & \text{sinon} \end{cases}$. Remarquons que cette définition est valide même si $a = b$. On vérifie que $\varphi \circ \varphi = \text{Id}_E$ donc φ est bijective en

tant qu'involution. On vérifie également que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$ donc g est conjuguée à f .

Ainsi la classe d'équivalence de f est formée de toutes les applications constantes. Autrement dit, les applications constantes forment une classe d'équivalence.

2. a. Posons $\varphi(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque $a \neq 0$, φ est bijective et $\varphi^{-1}(x) = \frac{x}{a}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On vérifie que $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$. Ainsi f et g sont conjuguées.

- b. Supposons que \sin et \cos soient conjuguées. Il existe donc une bijection φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $\cos = \varphi^{-1} \circ \sin \circ \varphi$ ou encore $\varphi \circ \cos = \sin \circ \varphi$. En particulier, $\varphi(\cos(1)) = \sin(\varphi(1))$ et $\varphi(\cos(-1)) = \sin(\varphi(-1))$. Puisque \cos est paire, $\sin(\varphi(1)) = \sin(\varphi(-1))$. Mais on a encore $\varphi(1) = \varphi(\cos(0)) = \sin(\varphi(0)) \in [-1, 1]$ et $\varphi(-1) = \varphi(\cos(\pi)) = \sin(\varphi(\pi)) \in [-1, 1]$. Or \sin est injective sur $[-1, 1]$ et $\sin(\varphi(1)) = \sin(\varphi(-1))$ donc $\varphi(1) = \varphi(-1)$, ce qui contredit la bijectivité de φ (l'injectivité en fait).

SOLUTION 45.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $|x - x| \leq y - y$ donc $(x, y) \mathcal{R} (x, y)$. La relation \mathcal{R} est donc réflexive.

Soit $(x, y, x', y', x'', y'') \in \mathbb{R}^6$ tel que $(x, y) \mathcal{R} (x', y')$ et $(x', y') \mathcal{R} (x'', y'')$. On a donc $|x' - x| \leq y' - y$ et $|x'' - x'| \leq y'' - y'$. Par inégalité triangulaire,

$$|x'' - x| = |(x'' - x') + (x' - x)| \leq |x'' - x'| + |x' - x| \leq (y'' - y') + (y' - y) = y'' - y$$

On a donc $(x, y) \mathcal{R} (x'', y'')$, ce qui prouve que \mathcal{R} est transitive.

Enfin, soit $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$ tel que $(x, y) \mathcal{R} (x', y')$ et $(x', y') \mathcal{R} (x, y)$. On a donc $|x' - x| \leq y' - y$ et $|x - x'| \leq y - y'$. En sommant ces deux inégalités, $2|x' - x| \leq 0$ et donc $|x' - x| = 0$ puisqu'une valeur absolue est positive. On en déduit que $x = x'$ puis que $0 \leq y' - y$ et $0 \leq y - y'$. Ceci signifie que $y \leq y'$ et $y' \leq y$ de sorte que $y = y'$. Finalement, $(x, y) = (x', y')$, ce qui montre que \mathcal{R} est antisymétrique.

La relation \mathcal{R} est donc bien une relation d'ordre. Par contre, les couples $(0, 0)$ et $(1, 0)$ ne sont pas comparables puisque $|1 - 0| = |0 - 1| = 1 > 0 = 0 - 0$. L'ordre n'est donc pas total.

2. Montrons d'abord que $(0, \sqrt{2})$ est un majorant de A . Soit $(x, y) \in A$. Tout d'abord, $(x - y)^2 \geq 0$ donc $2xy \leq x^2 + y^2$. On en déduit que

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \leq 2(x^2 + y^2) \leq 2$$

En particulier, $x + y \leq \sqrt{2}$.

De même, $(x + y)^2 \geq 0$ donc $-2xy \leq x^2 + y^2$. On en déduit que

$$(y - x)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \leq 2(x^2 + y^2) \leq 2$$

En particulier, $y - x \leq \sqrt{2}$. Finalement, $y - \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} - y$ ou encore $|x| \leq \sqrt{2} - y$ donc $(x, y) \mathcal{R}(0, \sqrt{2})$.

Montrons maintenant que $(0, \sqrt{2})$ est le plus petit majorant de A. Soit (α, β) un majorant de A. Puisque $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ appartient à A, on a en particulier,

$$\left| \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \leq \beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \left| \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \leq \beta - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ces inégalités peuvent également s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta &\leq \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta &\leq \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \sqrt{2} - \beta &\leq \alpha \leq \beta \\ -\beta &\leq \alpha \leq \beta - \sqrt{2} \end{aligned}$$

En particulier, $\sqrt{2} - \beta \leq \alpha \leq \beta - \sqrt{2}$, ce qui équivaut à $|\alpha| \leq \beta - \sqrt{2}$ ou encore $(0, \sqrt{2}) \mathcal{R}(\alpha, \beta)$.

On peut alors affirmer que $\sup A = (0, \sqrt{2})$.

SOLUTION 46.

L'interprétation géométrique de la relation est claire : ' $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}'$ ' signifie que le cercle ' \mathcal{C} ' est à l'intérieur de ' \mathcal{C}' '. Notons que cela implique nécessairement $R' \geq R$.

- La réflexivité est évidente.
- Si ' $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}'$ ' et ' $\mathcal{C}' \leq \mathcal{C}$ ', alors $OO' \leq R' - R$ et $O'O \leq R - R'$. Cela implique $R' \geq R$ et $R \geq R'$, donc $R = R'$, et donc $OO' = 0$, d'où $O = O'$. Ainsi les deux cercles ' \mathcal{C} ' et ' \mathcal{C}' ' ont même centre et même rayon, donc sont égaux. La relation est donc antisymétrique.
- Soient trois cercles ' \mathcal{C} ', ' \mathcal{C}' ', ' \mathcal{C}'' ' tels que ' $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}'$ ' et ' $\mathcal{C}' \leq \mathcal{C}''$ '. On a $OO' \leq R' - R$ et $O'O'' \leq R'' - R'$. D'après l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$OO'' \leq OO' + O'O'' \leq (R' - R) + (R'' - R') = R'' - R,$$

ce qui prouve bien que ' $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}''$ '.

La relation est donc transitive.

SOLUTION 47.

1. • La réflexivité est claire : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $p \mathcal{R} p$ puisque $p = p^1$.
- Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $p \mathcal{R} q$ et $q \mathcal{R} p$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $q = p^n$ et $p = q^m$. Cela implique que $p^{nm} = p$. Puisque $p \neq 0$,

$$p^{nm} = p \iff p^{nm-1} = 1 \iff p = 1 \text{ ou } nm = 1$$

Si $p = 1$, on a $q = 1^n = 1 = p$, et si $nm = 1$, on a $n = m = 1$ d'où $q = p^1 = p$.

La relation est donc antisymétrique.

- Soient $(p, q, r) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $p \mathcal{R} q$ et $q \mathcal{R} r$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $q = p^n$ et $r = q^m$, ce qui implique $r = p^{nm}$, donc $p \mathcal{R} r$.

La relation est donc transitive.

L'ordre n'est pas total puisque par exemple aucune des relations $2 \mathcal{R} 3$ ni $3 \mathcal{R} 2$ n'est vraie.

2. Supposons que $\{2, 3\}$ admette un majorant p . On a alors $2 \mathcal{R} p$ et $3 \mathcal{R} p$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $p = 2^n$ et $p = 3^m$. Ainsi p est à la fois pair et impair, ce qui est absurde.

Ce raisonnement par l'absurde prouve que $\{2, 3\}$ n'est pas majorée.

SOLUTION 48.

- La réflexivité est évidente.
- Si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$, alors $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(x)$. On en déduit par antisymétrie de \leq sur F que $f(x) = f(y)$, ce qui implique que $x = y$ puisque f est injective.
La relation \mathcal{R} est donc antisymétrique.
- Soient $(x, y, z) \in E^3$ tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$. On a alors $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(z)$, d'où $f(x) \leq f(z)$ par transitivité de \leq sur F , et donc $x \mathcal{R} z$.
La relation \mathcal{R} est donc transitive.