Séries entières

1 Généralités

1.1 Définition d'une série entière et rayon de convergence

Définition 1.1 Série entière

On appelle **série entière** toute série de fonctions de la variable complexe ou réelle de la forme $\sum a_n z^n$ où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Remarque. On s'autorise un abus de notation en confondant z^n et la fonction $z \mapsto z^n$.

Lemme 1.1 Lemme d'Abel

Soient $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ **converge absolument**.

Définition 1.2 Rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle **rayon de convergence** de cette série entière la borne supérieure

$$\sup\{r \in \mathbb{R}_+, \ (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Exemple 1.1

Considérons la série entière $\sum \cos(n) z^n$. Notons R son rayon de convergence.

- La suite de terme général $\cos(n)$ est bornée donc $\mathrm{R} \geq 1$.
- Si $r > 1$, la suite $(\cos(n) r^n)$ n'est pas bornée. Donc $\mathrm{R} = 1$.

Proposition 1.1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si $|z| < \mathrm{R}$, alors $\sum a_n z^n$ **converge absolument**.
- Si $|z| > \mathrm{R}$, alors $\sum a_n z^n$ **diverge grossièrement**.

Remarque. Si $|z| = \mathrm{R}$, on ne peut rien dire.

Rappel **Règle de d'Alembert**

Soit (u_n) une suite réelle **strictement positive** telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
- Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Remarque. Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Attention ! La suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ peut ne pas avoir de limite.

Proposition 1.2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R telle que (a_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors $\mathrm{R} = \frac{1}{\ell}$.

Remarque. $\mathrm{R} = 0$ si $\ell = +\infty$ et $\mathrm{R} = +\infty$ si $\ell = 0$.

Exemple 1.2

- La série entière $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1 et pour somme $\frac{1}{1-z}$.
- La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini et a pour somme e^z.

Exercice 1.1

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \binom{2n}{n} z^n$.

Attention ! On ne peut pas toujours utiliser la règle de d'Alembert pour calculer le raon de convergence d'une série de cette manière. Par exemple, la suite $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ peut ne pas avoir de limite ou la suite (a_n) peut s'annuler une infinité de fois.

Exemple 1.3

Considérons la série entière $\sum a_n z^n$ avec $a_n = 2^n$ si n est pair et $a_n = 3^n$ si n est impair. On note R son rayon de convergence.
La suite de terme général $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'admet pas de limite puisqu'elle prend alternativement les valeurs $\frac{3}{2}$ et $\frac{2}{3}$.
Néanmoins la suite de terme général $u_n = \frac{a_n}{9^n}$ est bornée puisque $u_{2n} = \frac{4^n}{9^n} \leq 1$ et $u_{2n+1} = 3$. Ainsi $\mathrm{R} \geq \frac{1}{9}$. Mais si $r > \frac{1}{9}$, la suite de terme général $v_n = a_n r^n$ n'est pas bornée puisque la suite extraite de terme général $v_{2n+1} = 3 \cdot (9r)^n$ diverge vers $+\infty$. Ainsi le rayon de convergence vaut $\frac{1}{9}$.

Exemple 1.4 Série lacunaire

Considérons par exemple la série entière $\sum z^{n^2}$. C'est bien une série entière dans le sens où sa somme en cas de convergence est la même que celle de $\sum a_n z^n$ avec $a_n = 1$ si n est un carré d'entier et $a_n = 0$ sinon. On ne peut pas calculer le rayon de convergence en étudiant la limite de la suite (a_{n+1}/a_n) puisque (a_n) s'annule une infinité de fois. On peut néanmoins appliquer la règle de d'Alembert directement.

$$\frac{|z^{(n+1)^2}|}{|z^{n^2}|} = |z|^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$$

Ainsi le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

Définition 1.3 Disque ouvert/intervalle ouvert de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

- On appelle **disque ouvert de convergence** le disque $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < \mathrm{R}\}$.
- On appelle **intervalle ouvert de convergence** l'intervalle $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

Remarque. Si $\mathrm{R} = +\infty$, le disque ouvert de convergence est $\mathbb{C}$ tandis que l'intervalle ouvert de convergence est $\mathbb{R}$.

Convergence au bord du disque ouvert de convergence

On ne peut rien dire quant à la convergence d'une série entière au bord du disque ouvert de convergence. Par exemple, la série $\sum \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1 (critère de d'Alembert). La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge tandis que la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge. On peut en fait montrer que si $|z| = 1$, la série $\sum \frac{z^n}{n}$ converge si et seulement si $z \neq 1$.

1.2 Comparaison de séries entières

Proposition 1.3

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

- Si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(b_n)$, alors $\mathrm{R}_a \geq \mathrm{R}_b$.
- Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$.

Remarque. A fortiori, si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$, alors $\mathrm{R}_a \geq \mathrm{R}_b$.

Proposition 1.4 Série entière dérivée

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

1.3 Opérations sur les séries entières

Proposition 1.5 Somme de deux séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $\mathrm{R} \geq \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$.
De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Exercice 1.2

Montrer que si $\mathrm{R}_a \neq \mathrm{R}_b$, alors $\mathrm{R} = \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$ et donner un exemple où $\mathrm{R} > \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$ dans le cas où $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$.

Définition 1.4 Produit de Cauchy de deux séries entières

On appelle **produit de Cauchy** de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum c_n z^n$ où

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

Proposition 1.6 Produit de Cauchy

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Alors le rayon de convergence R du produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ de ces deux séries entières vérifie $\mathrm{R} \geq \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$.
De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Exercice 1.3

Donner un exemple où $\mathrm{R} > \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$ et $\mathrm{R}_a \neq \mathrm{R}_b$.

2 Régularité de la somme

Proposition 2.1 Convergence normale

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors pour tout réel $r < \mathrm{R}$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement le disque fermé de centre 0 et de rayon r.

Attention ! On ne peut pas affirmer qu'une série entière converge sur le disque ouvert de convergence.

Corollaire 2.1 Continuité de la somme

La somme d'une série entière est continue sur son disque ouvert de convergence.

A partir de maintenant, on s'intéreresse à la régularité de la somme d'une série entière d'une variable **réelle**.

Proposition 2.2 Primitive d'une série entière

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, R son rayon de convergence et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme.
Soit F une primtive de f sur son intervalle ouvert de convergence. Alors

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[, \;\; \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Exemple 2.1

La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n x^n$ a pour rayon de convergence 1 et pour somme $\frac{1}{1+x}$. Puisque $x \mapsto \ln(1+x)$ est l'unique primitive nulle en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

Proposition 2.3 Dérivation terme à terme

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, R son rayon de convergence et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme.
Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence.
De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ s'obtient en dérivant terme à terme. Plus précisément,

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[,\ f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}$$

Exemple 2.2

On sait que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

En dérivant, on obtient

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

Exercice 2.1

Montrer que

$$\forall q \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{(1-x)^{q+1}} = \sum_{n=q}^{+\infty} \binom{n}{q} x^{n-q}$$

Corollaire 2.2 Expression des coefficients à l'aide des dérivées successives

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence non nul, et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme.
Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Corollaire 2.3 Unicité des coefficients

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières. Si les sommes de ces deux séries entières coïncident sur un voisinage de 0, alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 Fonctions développables en série entière et développements usuels

Proposition 3.1 Série géométrique

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 \implies \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

Proposition 3.2 Série exponentielle

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Définition 3.1 Fonction développable en série entière

Soient f une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes et $r > 0$. On dit que f est **développable en série entière** sur $]-r, r[$ s'il existe une suite (a_n) telle que

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque. Notamment une fonction développable en série entière sur $]-r, r[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$.

Définition 3.2 Série de Taylor

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. On appelle **série de Taylor** la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Proposition 3.3 Série de Taylor

Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r, r[$. Alors

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Remarque. Autrement dit, toute fonction développable en série entière est égale à la somme de sa série de Taylor sur un voisinage de 0.

Attention ! Une fonction n'est pas toujours égale à la somme de sa série de Taylor sur un voisinage de 0. Par exemple, la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si x=0} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. f ne peut être égale à sa somme de sa série de Taylor sur aucun voisinage de 0 puisqu'elle n'est jamais constamment nulle sur un tel voisinage.

Proposition 3.4 Exemples de fonctions développables en série entière

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall x \in]-1,1[,\ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad \forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$