Devoir à la maison n°19

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 Il suffit de constater que X est bornée.

2 Voir le cours.

3 Il suffit d'appliquer l'inégalité de Markov à $|X|$ qui est bien une valeur aléatoire positive.

4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(t, \varepsilon) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Par stricte croissance de l'exponentielle, $\{S_n \geq \varepsilon\} = \{e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}$. Puisque e^{tnS_n} est une variable aléatoire positive, l'inégalité de Markov donne

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq \frac{\mathbb{E}\left(e^{tnS_n}\right)}{e^{tn\varepsilon}}$$

Or

$$\mathbb{E}\left(e^{ntS_n}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^n (e^{tX_i})$$

car les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et les variables aléatoires $e^{tX_1}, \dots, e^{tX_n}$ le sont donc aussi. De plus, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ suivent la même loi que X donc $\mathbb{E}(E^{tX_i}) = \mathbb{E}(e^{tX})$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On en déduit bien que

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq \frac{\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)^n}{e^{tn\varepsilon}}$$

5 La fonction $x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g_a l'est également. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_a'(x) = \frac{a - a^{-1}}{2} - \ln(a) e^{x \ln a}$$

Comme $a > 1$, $\ln(a) > 0$ de sorte que g_a' est décroissante sur $\mathbb{R}$. La fonction g_a est donc concave sur $\mathbb{R}$. On en déduit que, sur $[-1, 1]$, le graphe de g_a est au-dessus de sa corde reliant les points d'abscisses -1 et 1. Comme $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, g_a est positive sur $[-1, 1]$.

6 Soit $t > 0$. En posant $a = e^t > 1$ dans la question précédente,

$$\forall x \in [-1, 1],\ \frac{1-x}{2} e^{-t} + \frac{1+x}{2} e^t - e^{tx} \geq 0$$

Remarque. On aurait pu se passer de la question précédente. En effet, $\frac{1-x}{2}$ et $\frac{1+x}{2}$ sont deux réels positifs et de somme 1 donc, par convexité de l'exponentielle,

$$\exp\left(\frac{1-x}{2}(-t) + \frac{1+x}{2} e^t\right) \leq \frac{1-x}{2} e^{-t} + \frac{1+x}{2} e^t$$

ou encore

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2} e^{-t} + \frac{1+x}{2} e^t$$

7 Comme X est à valeurs dans $[-1,1]$, on peut appliquer la question précédente pour affirmer que

$$e^{tX} \leq \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^{t}$$

Par croissance et linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left(e^{tX}\right) \leq \frac{e^{-t}}{2}(1-\mathbb{E}(X)) + \frac{e^{t}}{2}(1+\mathbb{E}(X))$$

Comme X est centrée, $\mathbb{E}(X) = 0$ de sorte que $\mathbb{E}\left(e^{tX}\right) \leq \operatorname{ch}(t)$.

8 Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n} 2k} = \prod_{k=1}^{n}(2k-1) \geq 1$$

Autrement dit

$$\frac{1}{(2k)!} \leq \frac{1}{2^k k!}$$

Comme $t^{2k} \geq 0$,

$$\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{t^{2k}}{2^k k!} = \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k$$

On en déduit que

$$\operatorname{ch}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k = e^{t^2}2$$

D'après la question précédente,

$$\forall t > 0, \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \operatorname{ch}(t) \leq e^{t^2/2}$$

9 Remarquons que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ -nt\varepsilon + nt^2/2 = \frac{n}{2}\left(t^2 - 2t\varepsilon\right) = \frac{n}{2}\left[(t-\varepsilon)^2 - \varepsilon^2\right]$$

On en déduit que, par croissance de l'exponentielle, $t \mapsto \exp(-nt\varepsilon + nt^2/2)$ admet un minimum en ε et que ce minimum vaut $e^{-n\varepsilon^2}2$.

10 On rappelle que

$$\forall t > 0,\ \mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})^n}{e^{tn\varepsilon}}$$

Or $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2}2$ pour tout $t > 0$. On en déduit que

$$\forall t > 0,\ \mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$$

D'après la question précédente, en prenant $t = \varepsilon > 0$, on obtient

$$\P(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}$$

Remarquons que $\{|S_n| \geq \varepsilon\} = \{S_n \geq \varepsilon\} \sqcup \{-S_n \geq \varepsilon\}$. Comme la variable aléatoire $-X$ est également centrée et à valeurs dans $[-1,1]$, on obtient de même que

$$\mathbb{P}(-S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(-S_n \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}$$

11 D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}$$

Or $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-n\varepsilon^2}$ est une série géométrique de raison $e^{-\varepsilon^2/2} \in]0,1[$ donc elle converge. Par majoration, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon)$ converge.

12 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$. On peut également écrire, $B_n = \bigcup_{m \geq n} \{|S_m| > \varepsilon\}$. Comme les S_m sont des variables aléatoires, les ensembles $\{|S_m| > \varepsilon\}$ sont des événements. Ainsi $B_n(\varepsilon)$ est un événement comme réunion dénombrable d'événements. La suite (B_n) est décroissante pour l'inclusion donc, par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n(\varepsilon))$$

Mais, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\{|S_m| > \varepsilon\} \subset \{|S_m| \geq \varepsilon\}$ donc,

$$0 \leq \mathbb{P}(B_n(\varepsilon)) \leq \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbb{P}(|S_m| > \varepsilon) \leq \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbb{P}(|S_m| \geq \varepsilon)$$

En tant que reste d'une série convergente, $\lim_{n \to +\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbb{P}(|S_m| \geq \varepsilon) = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n(\varepsilon)) = 0$ par encadrement. Finalement,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0$$

13 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire

$$\Omega_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{m \geq n} \{|S_m| \leq 1/k\}$$

Ainsi

$$\overline{\Omega_k} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{m \geq n} \{|S_m| > 1/k\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(1/k)$$

On en déduit que $\overline{\Omega_k}$ est un événement comme intersection dénombrable d'événements, puis que Ω_k est également un événement comme complémentaire d'un événement. On sait également que $\mathbb{P}(\overline{\Omega_k}) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ d'après la question précédente. Ainsi $\mathbb{P}(\Omega_k) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit, les Ω_k sont des événements presque sûrs.
Remarquons qu'une suite (u_n) converge vers 0 si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geq n,\ |u_m| \leq \frac{1}{k}$$

Par conséquent,

$$A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{m \geq n} \{|S_m| \geq 1/k\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k$$

On en déduit que A est un événement presque sûr comme intersection dénombrable d'événements presque sûrs. Finalement, $\mathbb{P}(A) = 1$.