Devoir à la maison n°10

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles.*
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1.✯

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est *stable* par un endomorphisme f de E si $f(F) \subset F$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq \mathbf{0}$ et $f^n = \mathbf{0}$ où $\mathbf{0}$ désigne l'endomorphisme nul de E.

- **a.** Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.
- **b.** Montrer que, pour un tel vecteur x, la famille $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$ est une base de E.

Dans toute la suite de l'exercice, f *est un endomorphisme de* E *tel que* $f^{n-1} \neq \mathbf{0}$ *et* $f^n = \mathbf{0}$ *et* x *un vecteur de* E *tel que* $f^{n-1}(x) \neq 0$.

2. Pour k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose $F_k = \operatorname{vect}\left((f^{n-i}(x))_{1\leqslant i\leqslant k}\right)$.

- **a.** Déterminer la dimension de F_k.
- **b.** Montrer que $F_k = \operatorname{Ker}(f^k) = \operatorname{Im}(f^{n-k})$.
- **c.** Montrer que F_k est stable par f.

3. Soit F un sous-espace vectoriel stable par f. On suppose que F est de dimension k avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$. On note $\tilde{f}$ l'endomorphisme de F défini par : $\forall y \in F$, $\tilde{f}(y) = f(y)$.

- **a.** Montrer qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $\tilde{f}^{p-1} \neq \tilde{\mathbf{0}}$ et $\tilde{f}^p = \tilde{\mathbf{0}}$ où $\tilde{\mathbf{0}}$ désigne l'endomorphisme nul de F.
- **b.** Soit $y \in F$ tel que $\tilde{f}^{p-1}(y) \neq 0$. Que peut-on dire de la famille $(y, \tilde{f}(y), \dots, \tilde{f}^{p-1}(y))$? En déduire que $\tilde{f}^k = \tilde{\mathbf{0}}$.
- **c.** Montrer que $F = \operatorname{Ker} f^k$.
- **d.** Déterminer tous les sous-espaces vectoriels stables par f.

4. On veut déterminer tous les endomorphismes g de E qui commutent avec f, c'est-à-dire tels que $f \circ g = g \circ f$.

- **a.** Soit g un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un unique n-uplet de nombres réels $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ tel que :
$$g(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x)$$
- **b.** En déduire que si g commute avec f alors,
$$g = \alpha_0 \operatorname{Id}_E + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$$
où $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sont les réels définis à la question précédente.
- **c.** Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et préciser sa dimension.

Problème 1 —

On donne $e \approx 2,72$, $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,61$, $\sqrt{2} \approx 1,41$ et $\ln(3) \approx 1,10$.

Partie I – Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3xe^{-x^2} - 1$$

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition. Donner le tableau de variations de f. Préciser les branches infinies de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f ainsi qu'une symétrie de celle-ci.
2. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. Etudier la position de la courbe de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente.
3. Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$. On fera également figurer les asymptotes et la tangente des questions précédentes.
4. **a.** Justifier que f admet un développement limité en 0 à tout ordre.
   b. Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 5.

Partie II – Étude d'une équation différentielle

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E_n l'équation différentielle $xy' - (n - 2x^2)y = n - 2x^2$.
On note H_n l'équation différentielle homogène associée à E_n.

1. Résoudre H_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. En déduire les solutions de E_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. Donner toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ solutions de E_n sur $\mathbb{R}$. On distinguera les cas $n = 1$ et $n \geqslant 2$.

Partie III – Étude de deux suites

On suppose désormais dans cette partie que $n \geqslant 2$. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1$$

1. Quel est le signe de $f_n(0)$ et de $f_n(1)$?
2. Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$. Donner la limite de f_n en $+\infty$. En déduire que f_n s'annule exactement deux fois sur $\mathbb{R}_+$ en deux réels notés u_n et v_n vérifiant $u_n < 1 < v_n$.
3. Quelle est la limite de $(v_n)_{n\geqslant 2}$?
4. **a.** Exprimer $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n.
   b. En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
   c. Déduire de ce qui précède la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 2}$.
   d. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente. On note l sa limite.
5. Soit g_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g_n(x) = \ln(3) + n\ln(x) - x^2$$

a. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $g_n(t) = 0$ *si et seulement si* $f_n(t) = 0$.

b. On suppose $l \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Conclusion ?

c. Soit la suite $(w_n)_{n \geqslant 2}$ définie par

$$\forall n \geqslant 2,\ w_n = u_n - 1$$

Trouver en utilisant un développement limité de $g_n(1 + w_n) = g_n(u_n)$ un équivalent simple de w_n.