

CORRIGÉ TD : DÉRIVABILITÉ

SOLUTION 1.

En dehors de l'origine, la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 par théorèmes généraux ; en 0, elle est dérivable, de dérivée nulle, puisque son taux d'accroissement est $x \sin \frac{1}{x}$, qui tend vers 0 quand x tend vers 0. Cependant, elle n'est pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , puisque sa dérivée, donnée sur \mathbb{R}^* par

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

ne tend pas vers $f'(0) = 0$ (en fait, elle n'a pas de limite).

SOLUTION 2.

Convenons de dire qu'une fonction est *dérivable* (sans plus de précision) pour signifier qu'elle est dérivable sur son ensemble de définition.

1. La fonction \ln (la deuxième) est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et (la première) strictement positive sur $]1, +\infty[$, donc $\ln \circ \ln$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x > 1, \quad (\ln \circ \ln)'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}.$$

2. La fonction \arctan est dérivable sur \mathbb{R} et \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , donc $\arctan \circ \ln$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x > 0, \quad (\arctan \circ \ln)'(x) = \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))}.$$

3. La fonction \sin^2 est périodique, de période π . La fonction $\sqrt{\cdot}$ est dérivable et strictement positive sur \mathbb{R}_+^* , donc la fonction f est (définie et) dérivable au point x si, et seulement si, $1 - 2\sin^2 x > 0$, c'est-à-dire si x est strictement compris entre $-\pi/4$ et $\pi/4$ (modulo π). Pour de tels x ,

$$f'(x) = \frac{-2\sin(x)\cos(x)}{1 - 2\sin^2(x)} = -\tan(2x).$$

On peut faciliter le calcul de la dérivée en remarquant que

$$\ln \sqrt{1 - 2\sin^2(x)} = \frac{1}{2} \ln |\cos(2x)|$$

pour tout $x \neq \pi/4 \pmod{\pi/2}$.

4. La fonction f est définie et dérivable en tout point x tel que $\sin(x) \neq x \cos(x)$. Cette équation possède une infinité de solutions, une dans chaque intervalle de la forme $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ (avec $k \in \mathbb{Z}$). En tout point de son ensemble de définition,

$$f'(x) = \frac{-x}{(\sin(x) - x \cos(x))^2}.$$

5. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin^2(2x) + (1 + \cos(2x)) \cos(2x) + 3 \cos(2x) \\ &= \cos(4x) + 4 \cos(2x). \end{aligned}$$

6. Un tableau de signes montre que $(1-x)/(1+x)$ est strictement positif si, et seulement si, $-1 < x < 1$. Par conséquent, la fonction f est dérivable sur $] -1, 1[$ et pour tout x dans cet intervalle,

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

SOLUTION 3.

1. Soit n le degré de P et $a_1 < a_1 < \dots < a_n$ les racines de P . Pour tout $k = 1, \dots, n-1$ il existe, d'après le théorème de Rolle, un $b_k \in [a_k, a_{k+1}]$ tel que $P'(b_k) = 0$. Comme les racines de P sont simples, P' ne s'anule pas sur les a_k donc en fait b_k est dans l'intervalle ouvert $]a_k, a_{k+1}[$. Ainsi b_1, \dots, b_{n-1} sont $n-1$ racines distinctes de P' et pour raison de degré ce sont toutes.
2. Soit c une racine de $Q = P^2 + \alpha$. Il faut montrer que $Q'(c) \neq 0$. On a certainement $c \notin \mathbb{R}$ car

$$Q(x) = P(x)^2 + \alpha > 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier P et P' ne s'anulent pas en c . Ainsi

$$Q'(c) = 2P(c)P'(c) \neq 0,$$

ce qui montre que la racine c de Q est simple.

SOLUTION 4.

Quitte à changer f en $f - \ell$, on peut supposer que $\ell = 0$. Si f est nulle, le résultat est banal. Dans le cas contraire, quitte à changer f en $-f$, on peut supposer qu'elle prend une valeur $\beta > 0$ en α . Puisque

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0,$$

et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend la valeur $\beta/2$ sur les intervalles $]\alpha, +\infty[$ et $]-\infty, \alpha[$. Ainsi, d'après le lemme de Rolle, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

REMARQUE. On peut éviter le recours au lemme de Rolle en prouvant que f admet un extremum local, ce qui n'est d'ailleurs pas plus long à rédiger.

SOLUTION 5.

Par récurrence sur n ; si $n = 1$, c'est le théorème de Rolle de base. Supposons que pour un certain n , le résultat soit vrai pour toute fonction f et prouvons qu'il est alors vrai pour $n+1$; soient

$$a_0 = a < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} = b$$

et supposons que

$$f(a_0) = f(a_1) = \dots = f(a_n) = f(a_{n+1}).$$

L'application du théorème de Rolle ordinaire nous donne l'existence de points $c_0 < c_1 < \dots < c_n$ tels que,

$$f'(c_0) = f'(c_1) = \dots = f'(c_n) = 0.$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à la fonction f' , sur l'intervalle $[c_0, c_n]$, aux points $c_0 < c_1 < \dots < c_n$, nous donne donc l'existence d'un réel $c \in]c_0, c_n[\subset]a, b[$, tel que $(f')^{(n)}(c) = 0$, i.e. $f^{(n+1)}(c) = 0$; la récurrence est établie.

SOLUTION 6.

Notons a et b les abscisses respectives de A et B . Pour simplifier, nous supposerons $a < b$. Le fait que B soit sur la tangente à \mathcal{C} en A se traduit par :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) \text{ ou encore } \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(a)$$

De même, on cherche donc un point M d'abscisse c vérifiant :

$$f(a) = f(c) + f'(c)(a-c)$$

Définissons une fonction g sur I par $\begin{cases} g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{pour } x \in I \setminus \{a\} \\ g(a) = f'(a) \end{cases}$. g est continue sur $]a, b]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Comme f est dérivable en a , g est continue en a . g est donc continue sur $[a, b]$. De plus, g est dérivable sur $]a, b[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Enfin, $g(b) = g(a) = f'(a)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or pour $x \in]a, b[$, $g'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - f(x) + f(a)}{(x-a)^2}$. On a donc

$$f'(c)(c-a) - f(c) + f(a) = 0$$

ce qui est bien l'égalité annoncée plus haut.

SOLUTION 7.

1. La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est dérivable sur \mathbb{R} et a pour dérivée la fonction $t \mapsto \cos(t)$, dont la valeur absolue est majorée par 1 ; l'application de l'inégalité des accroissements finis entre 0 et x , à la fonction $t \mapsto \sin(t)$, conduit donc à l'inégalité,

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$$

2. La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ a pour dérivée la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$, qui est encadrée entre 0 et 1 sur \mathbb{R}_+ , d'où l'encadrement,

$$\forall x \geq 0, 0 \leq \ln(1+x) \leq x.$$

SOLUTION 8.

Notons f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$x \mapsto xe^{1/x}.$$

Cette fonction est de classe \mathcal{C}^∞ et d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x > 0$, il existe $u_x \in]x, x+1[$ tel que

$$f(x+1) - f(x) = f'(u_x) = e^{1/u_x} - \frac{e^{1/u_x}}{u_x},$$

puisque $u_x > x$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_x = +\infty,$$

et d'après les croissances comparées et la continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = 1.$$

SOLUTION 9.

1. Soit φ la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$x \mapsto (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)) - (f(x) - g(a))(g(b) - g(a)).$$

Cette fonction vérifie les mêmes hypothèses que f et l'on a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, ainsi d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, c'est-à-dire

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

2. D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \neq x_0$, il existe $x' \neq x_0$ tel que

$$g(x) - g(x_0) = (x - x_0)g'(x') \neq 0$$

car g' ne s'annule pas sur I . Ainsi le quotient de l'énoncé est-il défini pour tout $x \neq x_0$. Soit $x \neq x_0$. D'après le résultat de la question 1., il existe c_x appartenant à $]x_0, x[$ ou $]x, x_0[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Comme $x_0 < c_x < x$ ou $x < c_x < x_0$, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c_x = x_0,$$

puis par composition des limites,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \ell.$$

3. En appliquant le résultat à $f = \sin$ et $g = \text{id}_{\mathbb{R}}$ sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$ et en 0, puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1,$$

on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

c'est-à-dire,

$$\sin(x) = x + o(x).$$

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

par application de la règle de l'Hospital, on a aussi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2/2} = -1,$$

donc

$$\cos(x) = 1 - x^2/2 + o(x^2).$$

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2/2} = -1,$$

par application de la règle de l'Hospital, on a aussi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3/6} = -1,$$

donc

$$\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^3).$$

SOLUTION 10.

1. D'après le théorème des accroissements finis, $\forall 0 < x < 1, \exists 0 < \theta < x$,

$$\begin{aligned} \frac{\arcsin(x)}{x} &= \frac{\arcsin(x) - \arcsin(0)}{x - 0} = \arcsin'(\theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \theta^2}} \end{aligned}$$

Comme $0 < \theta < x < 1$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \theta^2}} < \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

et donc

$$\forall 0 < x < 1, \quad \arcsin(x) < \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2. De façon analogue, d'après le théorème des accroissements finis, $\forall x > 0 \exists 0 < \theta < x$,

$$\begin{aligned}\frac{\arctan(x)}{x} &= \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = \arctan'(\theta) \\ &= \frac{1}{1 + \theta^2}\end{aligned}$$

Comme $0 < \theta < x$, on a

$$\frac{1}{1 + x^2} < \frac{1}{1 + \theta^2},$$

On en déduit que

$$\forall x > 0, \quad \arctan(x) > \frac{x}{1 + x^2}.$$

SOLUTION 11.

1. Comme quotient de fonctions continues, la fonction ϕ est continue sur l'intervalle $]a, b]$. Comme f est dérivable en a ,

$$\phi(a) = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \phi(x),$$

donc ϕ est aussi continue en $x = a$.

On justifie de manière analogue la continuité de ψ sur le segment $[a, b]$.

2. Les fonctions ϕ et ψ sont continues sur le segment $[a, b]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, ϕ prend toutes les valeurs comprises entre $\phi(a) = f'(a)$ et $\phi(b)$ et ψ prend toutes les valeurs comprises entre $\psi(a)$ et $\psi(b) = f'(b)$. Or $\psi(a) = \phi(b)$!

Voici les différents cas possibles, selon la valeur du réel $\gamma = \psi(a) = \phi(b)$:

- si $\gamma < 0 < f'(b)$, alors il existe $x \in]a, b[$ tel que $\psi(x) = 0$;
- si $f'(a) < 0 < \gamma$, alors il existe $x \in]a, b[$ tel que $\phi(x) = 0$;
- si $\gamma = 0$, alors $\psi(a) = \phi(b) = 0$.

Mais d'après le théorème des accroissements finis,

$$\forall x \in]a, b], \exists c \in]a, b[, \quad \phi(x) = f'(c)$$

et

$$\forall x \in [a, b[, \exists c \in]a, b[, \quad \psi(x) = f'(c).$$

Ainsi, qu'elle soit ou non continue, l'application f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (théorème attribué à Darboux).

SOLUTION 12.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = nx^{n-1} + p \quad \text{et} \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2}.$$

Supposons que n soit pair. Alors f' est strictement croissante sur \mathbb{R} , tend vers $-\infty$ au voisinage de $-\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$, donc f' réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . Par conséquent, f est strictement décroissante sur un intervalle de la forme $] -\infty, \alpha]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$: la fonction f peut s'annuler au plus deux fois (une fois sur chacun de ces deux intervalles).

REMARQUE. On peut préciser que $\alpha = -\sqrt[n-1]{-p/n}$, mais ça n'a aucun intérêt.

Supposons que n soit impair. Si p est positif, alors f est strictement croissante sur \mathbb{R} , tend vers $-\infty$ au voisinage de $-\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$. D'après le théorème d'inversion, f s'annule une seule fois. Si p est strictement négatif, alors f est strictement croissante sur les intervalles $] -\infty, -\sqrt[n-1]{-p/n}]$ et $[\sqrt[n-1]{-p/n}, +\infty[$ et strictement décroissante sur

le segment $[-\sqrt[n-1]{-p/n}, \sqrt[n-1]{-p/n}]$. D'après le théorème d'inversion, la fonction f s'annule au plus une fois sur chacun de ces trois intervalles.

SOLUTION 13.

1. g est dérivable donc continue. Elle admet donc un minimum sur le segment $[a, b]$.
2. Si le minimum était atteint en a , on aurait $g(x) \geq g(a)$ pour tout $x \in]a, b]$. Par conséquent $g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \geq 0$. Or $g'(a) = f'(a) - y < 0$.
On démontre de même que le minimum ne peut être atteint en b .
3. Le minimum de g est donc un minimum local : il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$ i.e. $f'(c) = y$.
4. On peut considérer le maximum de g sur $[a, b]$. Ou bien, on applique ce qui précède à la fonction $-f$. On a bien $(-f)'(a) < -y < (-f)'(b)$. Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $(-f)'(c) = -y$ i.e. $f'(c) = y$.

SOLUTION 14.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. En dérivant la relation de l'énoncé par rapport à x , on obtient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, yf'(xy) = f'(x)$$

Fixons ensuite $x = 1$ dans cette dernière relation, on a donc $f'(y) = \frac{a}{y}$ pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$ en posant $a = f'(1)$. Ceci signifie qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) = a \ln y + C$ pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$. Or $f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$ donc $f(1) = 0$ et $C = 0$.

Réciproquement toute fonction du type $x \mapsto a \ln x$ avec $a \in \mathbb{R}$ vérifie bien les conditions de l'énoncé. Ce sont donc exactement les fonctions recherchées.

SOLUTION 15.

Soit f une fonction vérifiant la condition de l'énoncé. Fixons $y \in \mathbb{R}$. Puisque \exp et f sont dérivables en 0, $x \mapsto e^x f(y) + e^y f(x)$ est également dérivable en 0. Ainsi $x \mapsto f(x + y)$ est dérivable en 0 i.e. f est dérivable en y . Puisque le choix de y est arbitraire, f est dérivable sur \mathbb{R} .

Dérivons maintenant la condition de l'énoncé par rapport à la variable y . On obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f'(x + y) = e^x f'(y) + e^y f'(x)$$

Fixons maintenant $y = 0$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f'(0)e^x + f(x)$. Posons $a = f'(0)$. La fonction f est donc solution de l'équation différentielle $y' - y = ae^x$. Les solutions de l'équation homogène $y' - y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. La méthode de variation de la constante fournit une solution particulière de l'équation différentielle $y' - y = ae^x$, à savoir $x \mapsto axe^x$. On en déduit que f est de la forme $x \mapsto axe^x + \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Enfin $f(0 + 0) = e^0 f(0) + e^0 f(0)$ et donc $f(0) = 0$, ce qui impose $\lambda = 0$. f est donc de la forme $x \mapsto axe^x$.

Réciproquement soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto axe^x$. Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x + y) = a(x + y)e^{x+y} = axe^x e^y + aye^x e^y = e^y f(x) + e^x f(y)$$

Ainsi f vérifie bien la condition de l'énoncé.

Les fonctions recherchées sont donc exactement les fonctions de la forme $x \mapsto axe^x$ avec $a \in \mathbb{R}$.

SOLUTION 16.

► Soit f une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle de l'énoncé.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on montre facilement par récurrence que pour tout n dans \mathbb{N} ,

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} f(x).$$

On traduit alors l'hypothèse f est dérivable en zéro : il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} = \ell.$$

Ainsi, d'après le critère séquentiel pour les limites, pour tout $x \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x/2^n)}{x/2^n} = \ell.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{f(x/2^n)}{x/2^n} = \frac{f(x)}{x},$$

on a donc par passage à la limite, pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \ell x$. On remarque que cette relation est encore valable lorsque x est nul puisque

$$f(0) = 2f(0) \implies f(0) = 0.$$

► *Réciproquement*, les applications linéaires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} répondent bien à la question, la vérification est immédiate.

► On a donc montré que *les seules solutions* dérivables en 0 de l'équation proposée sont les fonctions de la forme

$$f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_a(x) = ax.$$

SOLUTION 17.

Posons $g(x) = e^{-x}f(x)$. La fonction g est positive et nulle en $x = 0$. En outre, elle est dérivable sur \mathbb{R}_+ et

$$\forall x \geq 0, \quad g'(x) = (f'(x) - f(x))e^{-x} \leq 0,$$

donc g est décroissante sur \mathbb{R}_+ . Par conséquent, elle est identiquement nulle sur \mathbb{R}_+ , ainsi que f bien sûr !

SOLUTION 18.

1. Il suffit de considérer la fonction f définie par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}.$$

Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et on a clairement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

En revanche, pour tout $x > 0$, on a :

$$f'(x) = -\frac{\sin(x^2)}{x^2} + 2\cos(x)$$

et puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} = 0$$

et $2\cos(x)$ n'admet aucune limite en $+\infty$ (résultat classique qui se démontre en utilisant le critère séquentiel), f' n'admet aucune limite en $+\infty$.

2. Puisque f' tend vers $+\infty$ avec x , il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x \geq A, \quad f'(x) \geq 1.$$

Mais alors, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \geq A$, il existe $c \in [A, x]$ tel que

$$f(x) - f(A) = f'(c)(x - A).$$

Comme $f'(c) \geq 1$, on en déduit que $\forall x \geq A$,

$$f(x) \geq f(A) + (x - A).$$

Et donc, puisque le membre de droite tend vers $+\infty$ avec x , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Raisonnons par l'absurde en supposant que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) = \ell \neq 0.$$

Quitte à considérer $-f$ au lieu de f , on peut toujours supposer $\ell > 0$. Il existe alors $A > 0$ tel que

$$\forall t \geq A, \quad f^{(n)}(t) \geq \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}.$$

On déduit alors de l'inégalité (généralisée !) des accroissements finis que $\forall x \geq A$:

$$f^{(n-1)}(x) \geq f^{(n-1)}(A) + \frac{\ell(x-A)}{2}$$

puis, par les mêmes arguments, on aboutit à $\forall x \geq A$:

$$f^{(n-2)}(x) \geq f^{(n-2)}(A) + f^{(n-1)}(A)(x-A) + \frac{\ell(x-A)^2}{2 \times 2}.$$

Par une récurrence descendante sans difficulté, on prouve que $\forall 0 \leq k \leq n$ et $\forall x \geq A$:

$$f^{(n-k)}(x) \geq \sum_{i=1}^k f^{(n-i)}(A) \frac{(x-A)^{k-i}}{(k-i)!} + \frac{\ell(x-A)^k}{2 \times k!}.$$

En particulier, on a $\forall x \geq A$:

$$f^{(n-k)}(x) \geq \sum_{i=1}^n f^{(n-i)}(A) \frac{(x-A)^{n-i}}{(n-i)!} + \frac{\ell(x-A)^n}{2 \times n!}.$$

Comme $\ell > 0$, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers $+\infty$ avec x . Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

ce qui est absurde et ainsi $\ell = 0$.

SOLUTION 19.

- 1.** La fonction g_n est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$ d'après le théorème sur les produits. En appliquant la formule de Leibniz, on trouve que la dérivée $n+1$ -ième de

$$f_{n+1} : x \mapsto x f_n(x)$$

est égale à

$$x \mapsto x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x)$$

ainsi, pour tout $n \geq 1$ et tout x strictement positif,

$$g_{n+1} = x g_n'(x) + (n+1) g_n(x).$$

- 2.** Prouvons la formule par récurrence sur $n \geq 1$.

► La formule est banale pour $n = 1$.

- Supposons la formule vraie pour $n \geq 1$. On a alors que g_n est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout x positif ,

$$g'_n(x) = (-1)^n \left[\frac{-(n+1)}{x^{n+2}} - \frac{1}{x^{n+3}} \right] e^{1/x}$$

On a donc , d'après la formule démontrée à la première question ,

$$g_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{1/x}.$$

La formule est prouvée au rang $n+1$.

- La formule est vraie pour tout $n \geq 1$ d'après le principe de récurrence.

SOLUTION 20.

Notons u et v les fonctions définies sur \mathbb{R} par,

$$u(x) = x^2 + 1 \quad , \quad v(x) = e^x.$$

ces deux fonctions sont de classe \mathcal{C}^∞ , la fonction $f = uv$ est donc aussi de classe \mathcal{C}^∞ et d'après la formule de Leibniz, $\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) e^x = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} u^{(k)}(x) e^x \\ &= (x^2 + 2nx + n(n-1) + 1) e^x \end{aligned}$$

SOLUTION 21.

1. Appliquons la formule de Leibniz au produit de fonctions polynômes (qui sont donc de classe \mathcal{C}^∞) définissant P_n .
 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P_n^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{n!}{k!} \dots (x-a)^{n-k} (x-b)^k \\ &= n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (x-a)^{n-k} (x-b)^k \end{aligned}$$

2. Lorsque $a = b$, on a bien-sûr

$$P_{(n)}^n(x) = \frac{(2n)!}{n!} (x-a)^n.$$

3. Lorsque $a = b$, on a donc, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{(2n)!}{n!} (x-a)^n = \left[n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \right] (x-a)^n,$$

ainsi

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

SOLUTION 22.

1. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que f est de classe \mathcal{C}^n et qu'il existe un polynôme réel P_n tel que $\forall x \in I$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

► L'hypothèse est banale au rang 0 puisque f est continue sur I et que $P_0 = 1$ convient.

► Supposons la propriété vérifiée au rang n . D'après le théorème de dérivation des quotients, $g = f^{(n)}$ est dérivable et pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{P'_n(x)(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}} + (2n+1)xP_n(x)(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{2n+1}} \\ &= \frac{P'_n(x)(1-x^2) + (2n+1)xP_n(x)}{(1-x^2)^{n+1+\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

En posant pour tout x réel

$$P_{n+1}(x) = P'_n(x)(1-x^2) + (2n+1)xP_n(x),$$

on a bien le résultat au rang $n+1$ puisque P_{n+1} est une fonction polynôme et que $f^{(n+1)}$ est clairement continue donc $f^{(n+1)}$ de classe \mathcal{C}^{n+1} .

► La propriété est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

2. Prouvons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

► Le résultat est banal au rang 0 puisque $P_0 = 1$.

► Supposons le résultat vrai au rang n . Puisque pour tout x réel,

$$P_{n+1}(x) = P'_n(x)(1-x^2) + (2n+1)xP_n(x)$$

et que $P'_n(x)$ est un polynôme de degré $n-1$ (avec la convention degré de 0=-1) dont le monôme de plus haut degré a pour coefficient $nn!$, $P'_n(x)(1-x^2)$ est un polynôme de degré $n+1$ dont le monôme de plus haut degré a pour coefficient $-nn!$. De plus, $(2n+1)xP_n(x)$ est un polynôme de degré $n+1$ dont le monôme de plus haut degré a pour coefficient $(2n+1)n!$, donc P_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ dont le monôme de plus haut degré a pour coefficient $(2n+1-n)n! = (n+1)!$. D'où le résultat au rang $n+1$.

► La propriété est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

3. On a $\forall x \in I$,

$$f'(x) = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

donc $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 0$.

4. D'après la formule de Leibniz, la dérivée n -ième de $x \mapsto xf(x)$ est

$$x \mapsto xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x).$$

De même, la dérivée n -ième de $x \mapsto (1-x^2)f'(x)$ est donnée par l'expression :

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x) - 2x(n+1)f^{(n)}(x) - 2\frac{n(n-1)}{2}f^{(n-1)}(x).$$

Ces deux fonctions étant égale d'après la question précédente, on a pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} \frac{xP_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{nP_{n-1}(x)}{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}} &= \\ \frac{P_{n+1}(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} - 2nx\frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} - n(n-1)\frac{P_{n-1}(x)}{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

soit en multipliant cette égalité par $(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned} xP_n(x) + n(1-x^2)P_n &= P_{n+1} - 2nxP_n(x) \\ -n(n-1)(1-x^2)P_{n-1}(x), \end{aligned}$$

donc

$$P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) + n^2(1-x^2)P_{n-1}(x).$$

5. D'après la question précédente, $\forall n \geq 1$,

$$P_{n+1}(0) = n^2 P_{n-1}(0).$$

On prouve donc par une récurrence sans difficulté que, $\forall n \geq 0$,

$$P_{2n+1}(0) = 0$$

et

$$P_{2n}(0) = ((2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 1)^2 = \left(\frac{(2n)!}{2^n n!} \right)^2.$$

6. Puisque $\forall n \geq 1$ et tout $x \in I$,

$$P_{n+1}(x) = P'_n(x)(1-x^2) + (2n+1)xP_n(x),$$

mais aussi

$$P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) + n^2(1-x^2)P_{n-1}(x),$$

d'où, après simplification par $1-x^2 \neq 0$,

$$P'_n(x) = n^2 P_{n-1}(x).$$

7. D'après ce qui précède, on peut calculer les polynômes P_n par intégrations successives en utilisant le calcul de $P_n(0)$ entrepris à la question 5. On obtient successivement,

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = 2x^2 + 1, \quad P_3(x) = 6x^3 + 9x,$$

$$P_4(x) = 24x^4 + 72x^2 + 9,$$

$$\text{et } P_5(x) = 120x^5 + 600x^3 + 225x.$$

SOLUTION 23.

1. Soit $HR(n)$ l'hypothèse de récurrence :

$$\ll \text{ Il existe un polynôme } P_{n-1} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}. \gg$$

$HR(1)$ est vraie : il suffit de prendre $P_0 = 1$.

Supposons $HR(n)$ pour un certain $n \geq 1$. Alors pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P'_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n} - \frac{2nxP_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{(1+x^2)P'_{n-1}(x) - 2nxP_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Il suffit donc de prendre $P_n = (1+X^2)P'_{n-1} - 2nXP_{n-1}$.

Par récurrence, $HR(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Si P_{n-1} et Q_{n-1} sont deux polynômes vérifiant la condition de l'énoncé, alors ils coïncident sur \mathbb{R} . Ils sont donc égaux. D'où l'unicité.

2. Commençons par la parité. Soit $HR(n)$ l'hypothèse de récurrence :

$$\ll P_n \text{ a la parité de } n. \gg$$

$HR(0)$ est vraie puisque $P_0 = 0$ est pair. Supposons $HR(n-1)$ pour un certain $n \geq 1$.

- Si n est pair, $n-1$ est impair donc P_{n-1} est impair d'après $HR(n-1)$. Mais alors P'_{n-1} et XP_{n-1} sont pairs. Or $P_n = (1+X^2)P'_{n-1} - 2nXP_{n-1}$ donc P_n est pair.
- Si n est impair, $n-1$ est pair donc P_{n-1} est pair d'après $HR(n-1)$. Mais alors P'_{n-1} et XP_{n-1} sont impairs. Or $P_n = (1+X^2)P'_{n-1} - 2nXP_{n-1}$ donc P_n est impair.

Donc $HR(n)$ est vraie. Par récurrence, $HR(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Occupons-nous maintenant du degré et du coefficient dominant. Soit $HR(n)$ l'hypothèse de récurrence :

$$\ll \deg P_n = n \text{ et le coefficient dominant de } P_n \text{ est } (n+1)! \text{ si } n \text{ est pair, } -(n+1)! \text{ si } n \text{ est impair.} \gg$$

$HR(0)$ est vraie puisque $P_0 = 1$. Supposons $HR(n-1)$ pour un certain $n \geq 1$. On a donc $\deg P_{n-1} = n-1$.

- Si n est pair, $n-1$ est impair et le coefficient dominant de P_{n-1} est $-n!$. On a $\deg P'_{n-1} = n-2$ (éventuellement $-\infty$ si $n=1$) et le coefficient dominant de P'_{n-1} est $-(n-1)n!$ (pas de coefficient dominant si $n=1$). Donc $\deg(1+X^2)P'_{n-1} = n$ (éventuellement $-\infty$ si $n=1$) et le coefficient dominant de $(1+X^2)P'_{n-1}$ est $-(n-1)n!$ (pas de coefficient dominant si $n=1$). De même, $\deg 2nXP_{n-1} = n$ et le coefficient dominant de $2nXP_{n-1}$ est $-2nn!$. Puisque $-(n-1)n! + 2nn! = (n+1)! \neq 0$, on en déduit que $\deg P_n = n$ et que le coefficient dominant de P_n est $(n+1)!$.
- Si n est impair, $n-1$ est pair et le coefficient dominant de P_{n-1} est $n!$. On a $\deg P'_{n-1} = n-2$ (éventuellement $-\infty$ si $n=1$) et le coefficient dominant de P'_{n-1} est $(n-1)n!$ (pas de coefficient dominant si $n=1$). Donc $\deg(1+X^2)P'_{n-1} = n$ (éventuellement $-\infty$ si $n=1$) et le coefficient dominant de $(1+X^2)P'_{n-1}$ est $(n-1)n!$ (pas de coefficient dominant si $n=1$). De même, $\deg 2nXP_{n-1} = n$ et le coefficient dominant de $2nXP_{n-1}$ est $2nn!$. Puisque $(n-1)n! - 2nn! = -(n+1)! \neq 0$, on en déduit que $\deg P_n = n$ et que le coefficient dominant de P_n est $-(n+1)!$.

Ainsi $HR(n)$ est vraie. Par conséquent, $HR(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Comme $\deg P_{n-1} = n-1 < 2n$ pour $n \geq 1$, $P_{n-1}(x) = (1+x^2)^n$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$.
4. Remarquons tout d'abord que les zéros de $f^{(n)}$ sont les zéros de P_{n-1} . Soit $HR(n)$ l'hypothèse de récurrence :
« $f^{(n)}$ s'annule au moins $n-1$ fois. »

$HR(1)$ est évidemment vraie. Supposons $HR(n)$ pour un certain $n \geq 1$. Si $n=1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(2)}(x) = 0$, donc $f^{(2)}$ s'annule au moins une fois sur \mathbb{R} d'après une généralisation classique du théorème de Rolle. Si $n > 1$, $f^{(n)}$ possède au moins $n-1$ zéros que nous noterons $x_1 < \dots < x_{n-1}$. En appliquant le théorème de Rolle à $f^{(n)}$ sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, on montre que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. En appliquant la même généralisation du théorème de Rolle à $f^{(n)}$ sur les intervalles $] -\infty, x_1[$ et $]x_{n-1}, +\infty[$, on montre que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles $] -\infty, x_1[$ et $]x_{n-1}, +\infty[$. On fait le compte : on a monté que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins n fois. Ainsi $HR(n)$ est vraie. Par récurrence $HR(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Comme les zéros de $f^{(n+1)}$ sont les zéros de P_n , on a prouvé que P_n admet au moins n racines réelles distinctes. Comme $\deg P_n = n$, P_n admet au plus n racines comptées avec multiplicité. On en déduit que toutes les racines de P_n sont réelles et simples.

SOLUTION 24.

1. Une primitive de $x \mapsto nx - 1$ étant $\frac{nx^2}{2} - x$, les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto \lambda \exp\left(\frac{nx^2}{2} - x\right)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc $f_n(x) = \exp\left(\frac{nx^2}{2} - x\right)$.
2. On a $f'_n(x) = (nx - 1) \exp\left(\frac{nx^2}{2} - x\right)$. On en déduit que f_n admet un maximum en $\frac{1}{n}$. On a donc $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2n}\right)$. On a donc $u = 0$ et $v = 1$. Comme $-\frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $v_n - v \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.
3. Notons $g_n(x) = nx - 1$. Comme f_n est solution de (E), on a $f'_n = g_n f_n$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dérive cette identité $2p$ fois en utilisant la formule de Leibniz :

$$f^{(2p+1)} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} g_n^{(k)} f_n^{(2p-k)}$$

Or $g_n^{(k)} = 0$ pour $k \geq 2$. La somme précédente se réduit donc à deux termes :

$$f^{(2p+1)}(x) = g_n(x) f_n^{(2p)}(x) + 2p g'_n(x) f_n^{(2p-1)}(x)$$

Or $g_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ et $g'_n = n$. Donc

$$f^{(2p+1)}\left(\frac{1}{n}\right) = 2np f^{(2p-1)}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Soit $HR(p)$ l'hypothèse de récurrence $f^{(2p+1)}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. $HR(0)$ est vraie puisque $f' - n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. De plus, l'égalité précédente montre que $HR(p-1)$ implique $HR(p)$. Par récurrence, $HR(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$ et notamment pour $p = n$, ce qui nous donne le résultat voulu.



ATTENTION ! Si on avait directement dérivé $2n$ fois, on aurait obtenu

$$f^{(2n+1)}\left(\frac{1}{n}\right) = 2n^2 f^{(2n-1)}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et on n'aurait pas pu effectuer de récurrence sur n .

SOLUTION 25.

1. On note $HR(n)$ la propriété à démontrer.

$HR(0)$ est vraie en posant $P_0 = 1$. Supposons $HR(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2n}}$$

En dérivant, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n+1)}(t) = \frac{(t^2 P_n'(t) - 2nt P_n(t) + P_n(t)) e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2(n+1)}}$$

En posant $P_{n+1} = X^2 P_n' - 2n X P_n + P_n$, on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n+1)}(t) = \frac{P_{n+1}(t)e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2(n+1)}}$$

Ainsi $HR(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, $HR(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Notons g la restriction de f à \mathbb{R}^* . g est clairement de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* par opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^∞ . Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow 0^+} g^{(n)}(t) = 0$ et on a évidemment $\lim_{t \rightarrow 0^-} g^{(n)}(t) = 0$ puisque $g^{(n)}$ est nulle sur \mathbb{R}_- . Ainsi $\lim_{t \rightarrow 0} g^{(n)}(t) = 0$. Ceci prouve que g est prolongeable par continuité en 0 en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Mais puisque f est continue en 0 (étudier les limites en 0^+ et 0^-), $f = g$ et donc f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

SOLUTION 26.

1. a. On a $W' = u''v - uv'' = (q - p)uv$.
 b. Supposons que v ne s'annule pas sur $[a, b]$. Comme u et v sont continues, elles restent de signe constant respectivement sur $]a, b[$ et $[a, b]$. Quitte à changer u en $-u$ et/ou v en $-v$ (qui sont aussi solution des mêmes équations différentielles que u et v), on peut supposer $u > 0$ sur $]a, b[$ et $v > 0$ sur $[a, b]$. Alors $W' \geq 0$ sur $[a, b]$ et donc W est croissante sur $]a, b[$. De plus, $W(a) = u'(a)v(a)$ et $W(b) = u'(b)v(b)$. On a $u'(a) \geq 0$ et $u'(b) \leq 0$ en considérant la limite du taux de variation de u en a^+ et b^- . Vous verrez en seconde année qu'on ne peut avoir $u'(a) = 0$ ou $u'(b) = 0$ sinon u serait nulle. Par conséquent, $u'(a) > 0$ et $u'(b) < 0$. Ainsi $W(a) > 0$ et $W(b) < 0$ ce qui contredit la décroissance de W . On en déduit que v s'annule sur $[a, b]$.
2. a. Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $u : x \mapsto \sin(M(x - a))$ vérifie $u'' + M^2 u = 0$. De plus, u s'annule en a et $a + \frac{\pi}{M}$ mais ne s'annule pas sur $]a, a + \frac{\pi}{M}[$. On déduit de la question précédente que f s'annule sur $[a, a + \frac{\pi}{M}]$.
 b. Soit $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{M}[$. La fonction $v : x \mapsto \sin(M(x - a + \varepsilon))$ vérifie $v'' + M^2 v = 0$. La question précédente montre que v s'annule sur $[a, b]$. Comme v ne s'annule pas sur $[a, \frac{a}{+} \frac{\pi}{M} - \varepsilon[$, on a $b \geq a + \frac{\pi}{M} - \varepsilon$ i.e. $b - a \geq \frac{\pi}{M} - \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{M}[$, $b - a \geq \frac{\pi}{M}$.

SOLUTION 27.

1. Comme f est nulle sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$, $f^{(n)}(x) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > \frac{1}{2}$. Comme f est \mathcal{C}^∞ , les $f^{(n)}$ sont continues et donc $f^{(n)}(\frac{1}{2}) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange entre $\frac{1}{2}$ et 0 :

$$\left| f(0) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k k!} f^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{2^n n!} \sup_{[0; \frac{1}{2}]} |f^{(n)}|$$

On a vu précédemment que $f^{(k)}(\frac{1}{2}) = 0$. Par ailleurs, $\sup_{[0; \frac{1}{2}]} |f^{(n)}| \leq \sup_{\mathbb{R}_+} |f^{(n)}|$ (on a même égalité). Enfin, $f(0) = 1$

par hypothèse donc on obtient le résultat voulu.

2. Soit $n \geq 1$. Supposons $\sup_{\mathbb{R}_+} |f^{(n)}| = 2^n n!$ et posons

$$g(x) = f(x) - (1 - 2x)^n, \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

On a donc $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - (-1)^n 2^n n!$. Montrons par récurrence finie décroissante sur $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ que $g^{(k)}$ est de signe constant sur $[0; \frac{1}{2}]$. D'après notre hypothèse, c'est clair pour $k = n$. Supposons $g^{(k)}$ de signe constant pour un certain k tel que $1 < k \leq n$. Alors $g^{(k-1)}$ est monotone. Or

$$g^{(k-1)}(x) = f^{(k-1)}(x) - \frac{n!}{(n-k+1)!} (1-2x)^{n-k+1}$$

donc $g^{(k-1)}(\frac{1}{2}) = 0$ (puisque $n-k+1 > 0$). Ainsi $g^{(k-1)}$ est de signe constant sur $[0; \frac{1}{2}]$. Donc, par récurrence, g' est de signe constant sur $[0; \frac{1}{2}]$ et g est monotone sur $[0; \frac{1}{2}]$. Comme $g(0) = g(\frac{1}{2}) = 0$, g est nulle sur $[0; \frac{1}{2}]$. Or $g^{(n)}(\frac{1}{2}) = -(-1)^n 2^n n! \neq 0$. Il y a donc contradiction.

SOLUTION 28.

Soit $x \in]-\frac{1}{\lambda}; \frac{1}{\lambda}[$. L'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et x au rang n donne :

$$|f(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \sup_{[0; x]} |f^{(n)}| \leq |\lambda x|^n < 1.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $f(x) = 0$.

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que f est nulle sur $]-\frac{k}{\lambda}; \frac{k}{\lambda}[$. On a vu que c'était vrai pour $k = 1$. Supposons-le vrai pour un $k \in \mathbb{N}^*$. Considérons les fonctions :

$$\begin{aligned} g_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & \text{et } g_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f\left(x - \frac{k}{\lambda}\right) & x &\mapsto f\left(x + \frac{k}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Comme f est nulle sur $]-\frac{k}{\lambda}; \frac{k}{\lambda}[$ par hypothèse de récurrence et que les $f^{(n)}$ sont continues, on a donc :

$$f^{(n)}\left(-\frac{k}{\lambda}\right) = f^{(n)}\left(\frac{k}{\lambda}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

c'est-à-dire

$$g_1^{(n)}(0) = g_2^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

De plus $\sup_{\mathbb{R}} |g_1^{(n)}| = \sup_{\mathbb{R}} |g_2^{(n)}| = \sup_{\mathbb{R}} |f^{(n)}|$. Donc g_1 et g_2 vérifient les mêmes hypothèses que f : elles sont donc nulles sur $]-\frac{1}{\lambda}; \frac{1}{\lambda}[$. Par conséquent, f est nulle sur $]-\frac{k+1}{\lambda}; \frac{k+1}{\lambda}[$.

Par récurrence, f est donc nulle sur tout intervalle $]-\frac{k}{\lambda}; \frac{k}{\lambda}[$ où $k \in \mathbb{N}^*$: elle est donc nulle sur \mathbb{R} .

SOLUTION 29.

On a clairement $\varphi(b) = 0$. On choisit donc A tel que $\varphi(a) = 0$. Il suffit ainsi de choisir A tel que :

$$A \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k - f(b) \quad (*)$$

Comme f est de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$, φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or, pour $x \in]a, b[$:

$$\varphi'(x) = - \sum_{k=0}^n f^{(k+1)}(x) k! (b-x)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} - A \frac{(b-x)^n}{n!}$$

Par télescopage, on obtient :

$$\varphi'(x) = - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n - A \frac{(b-x)^n}{n!}$$

Comme $\varphi'(c) = 0$, on obtient :

$$A + f^{(n+1)}(c) = 0$$

Il suffit alors d'utiliser la relation (*) pour obtenir l'égalité voulue.

SOLUTION 30.

1. Soit l'hypothèse de récurrence : « $\forall x \in]-1, +\infty[, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ ».

Initialisation : Pour tout $x \in]-1, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^0 0!}{(1+x)^0}$. Donc HR(1) est vraie.

Hérédité : On suppose HR(n) vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc pour tout $x \in]-1, +\infty[, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. En dérivant, on obtient

$$\forall x \in]-1, +\infty[, f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Conclusion : HR(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Comme f est de classe \mathcal{C}^∞ , on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1 à un ordre $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Pour $t \in [0, 1]$, $|f^{(n+1)}(t)| \leq n!$ donc

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (1-0)^k \right| \leq n! \frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

On en déduit que

$$|\ln 2 - u_n| \leq \frac{1}{n+1}$$

3. Il est immédiat que (u_n) converge vers $\ln(2)$.

REMARQUE. On peut alors noter $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

SOLUTION 31.

1. Si $M_0 = 0$, alors f est constamment nulle donc $M_0 = M_1 = M_2 = 0$ et l'inégalité est vérifiée.
Si $M_2 = 0$, alors f est affine. Mais comme f est bornée, f est constante. On a donc $M_1 = 0$ et l'inégalité est encore vérifiée.
2. Comme f est de classe \mathcal{C}^2 , on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre x et $x+h$, ce qui donne le résultat voulu.
3. Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |f'(x)h| &\leq |f'(x)h + f(x) - f(x+h)| + |f(x+h) - f(x)| \\ &\leq \frac{M_2 h^2}{2} + |f(x+h)| + |f(x)| \\ &\leq \frac{M_2 h^2}{2} + 2M_0 \end{aligned}$$

Puisque $h > 0$,

$$|f'(x)| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{2M_0}{h}$$

4. g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(t) = b - \frac{a}{t^2}$. On a donc $g'(t) \leq 0$ pour $0 < t \leq \sqrt{\frac{a}{b}}$ et $g'(t) \geq 0$ pour $t \geq \sqrt{\frac{a}{b}}$. On en déduit que g admet un minimum en $\sqrt{\frac{a}{b}}$ et que celui-ci vaut $g(\sqrt{\frac{a}{b}}) = 2\sqrt{ab}$.
5. L'inégalité

$$|f'(x)| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{2M_0}{h}$$

étant valable pour tout $h > 0$, elle est notamment valable pour h minimisant le membre de droite. Il suffit alors d'appliquer la question précédente avec $a = 2M_0$ et $b = \frac{M_2}{2}$. On en déduit que

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{2M_0 \times \frac{M_2}{2}} = 2\sqrt{M_0 M_2}$$

Cette dernière inégalité étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a par passage à la borne supérieure :

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$$

SOLUTION 32.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de Taylor avec reste intégral assure que $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$. En effectuant le changement de variable $t = xu$, on obtient

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du$$

Comme l'intégrale est positive,

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du$$

De même,

$$R_n(r) = \frac{r^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ru) du$$

Mais f^{n+1} est croissante sur I puisque $f^{(n+2)}$ est positive sur I . Ainsi puisque $x \leq r$, $f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(ru)$ pour tout $u \in [0, 1]$ puis

$$\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du \leq \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ru) du$$

On en déduit l'inégalité demandée.

2. Soit $x \in I$. Il existe $r \in]0, R[$ tel que $|x| < r$. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}} R_n(r)$$

D'une part, l'expression intégrale de $R_n(r)$ montre que $R_n(r) \geq 0$. D'autre part, $f(r) = S_n(r) + R_n(r)$ et $S_n(r) \geq 0$ en tant que somme de termes positifs. Ainsi $R_n(r) \leq f(r)$. La suite $(R_n(r))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée. Puisque $|x| < r$, $\frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}} R_n(r) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit que $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ i.e. $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

SOLUTION 33.

1. Supposons f dérivable en a . On a alors

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$$

et

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + o(h),$$

ainsi

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{2hf'(a) + o(h)}{2h} = f'(a) + o(1)$$

et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

2. La fonction *valeur absolue* n'est pas dérivable en 0 mais admet une dérivée symétrique en 0 car

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = 0.$$

SOLUTION 34.

Ecrivons la formule de Taylor-Young à l'ordre deux en x_0 ,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + o(h^2).$$

On a donc aussi

$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + o(h^2).$$

D'où, en notant $\tau(h)$ le quotient

$$\frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2},$$

on a,

$$\tau(h) = f''(x_0) + o(1),$$

ainsi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = f''(x_0).$$

SOLUTION 35.

considérons la fonction exponentielle au voisinage de 0. L'inégalité de Taylor-Lagrange s'écrit, pour $x \geq 0$

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{\sup_{c \in]0;x[} e^c}{(n+1)!},$$

et donc $\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{e^x}{(n+1)!}$. Fixons x et faisons tendre n vers $+\infty$. On constate que le majorant tend vers 0. Ainsi, lorsque n tend vers $+\infty$, le polynôme de Taylor *calculé à l'origine* tend vers e^x pour toute valeur de x , soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Le développement de Taylor, pourtant de nature locale, permet donc dans ce cas de reconstruire toute la fonction (on vérifiera qu'il en est de même lorsque $x < 0$), ce qui est très remarquable.

SOLUTION 36.

D'après la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'exponentielle (qui est de classe \mathcal{C}^∞), on pour tout $n \geq 0$,

$$e^x - \left(1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Lorsque n est impair, cette expression est positive pour $x \leq 0$ (intégration d'une fonction négative pour des bornes dans le sens décroissant) alors qu'elle est négative lorsque n est pair. On en déduit en particulier que

$$\forall x \leq 0, \quad 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

SOLUTION 37.

► *Définition de la suite* : Introduisons la fonction

$$f : [0, 2[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{2-x}.$$

Cette fonction laisse stable l'intervalle $[0, 2]$ donc la suite est bien définie pour tout $u_0 \in [0, 2]$. Son seul point fixe est clairement 1.

► *Convergence de la suite* : notons $I = [0, \sqrt{2}]$. Cet intervalle est stable par f et pour tout $u_0 \in [0, 2]$, on a $u_1 \in I$. la fonction f est dérivable sur I , de dérivée

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}.$$

On a

$$\sup_{x \in I} \frac{1}{2\sqrt{2-x}} = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} < 1.$$

Appliquons l'inégalité des accroissements finis sur I

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} |x - y|.$$

Donc, $\forall n \geq 1$, puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(1) = 1$,

$$\forall n \geq 1, \quad |u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2\sqrt{12}} |u_n - 1|,$$

et par une récurrence immédiate,

$$\forall n \geq 1, \quad |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)^{n-1} |u_1 - 1|.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

SOLUTION 38.

► *Définition de la suite* : le terme u_1 est défini si et seulement si

$$u_0 \geq -\frac{4}{3},$$

et dans ce cas $u_1 \geq 0$. Notons $I = \mathbb{R}_+$ et f l'application de I dans \mathbb{R} définie par

$$x \mapsto \sqrt{4+3x}.$$

La suite est bien définie dès que $u_0 \geq -\frac{4}{3}$ puisque l'on a $f(I) \subset I$.

► *Convergence de la suite* : un réel x est point fixe de f si et seulement si

$$x \geq 0 \text{ et } x^2 = 4 + 3x,$$

ie $x = 4$. La seule (et éventuelle!) limite de $(u_n)_{n \geq 0}$ est donc 4. La fonction f est dérivable sur I et sur cet intervalle ,

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{4+3x}} \leq \frac{3}{4}.$$

Appliquons l'inégalité des accroissements finis sur I

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4}|x - y|.$$

Donc, pour tout $n \geq 1$, puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(4) = 4$,

$$|u_{n+1} - 4| \leq \frac{3}{4}|u_n - 4|,$$

et par une récurrence immédiate,

$$|u_n - 4| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} |u_1 - 4|.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4.$$

SOLUTION 39.

► *Définition de la suite* : le terme u_1 est défini si et seulement si

$$u_0 \neq 0.$$

Notons

$$I = \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$$

et f l'application de I dans \mathbb{R} définie par

$$x \mapsto 1 + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

La suite est bien définie dès que $u_0 \neq 0$ puisque $f(I) \subset I$.

► *Etude de la convergence* : prouvons que f admet un unique point fixe appartenant à I . La fonction f est dérivable sur I et sur cet intervalle ,

$$|f'(x)| = \frac{1}{4x^2} \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \frac{4}{9}.$$

En notant g la fonction définie sur I par

$$x \in I \mapsto f(x) - x.$$

L'application g est dérivable sur I et sur cet intervalle ,

$$g'(x) = f'(x) - 1 \leq \frac{4}{9} - 1 < 0.$$

g est donc strictement décroissante sur I . Puisque

$$g(3/4) \geq 0, \quad g(5/4) \leq 0,$$

g admet un zéro d'après le théorème des valeurs intermédiaires; ce dernier est unique par stricte croissance de g , notons le ℓ . Appliquons à f l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle I

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{9}|x - y|.$$

Donc, pour tout $n \geq 1$, puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\ell) = \ell$,

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{4}{9}|u_n - \ell|,$$

et par une récurrence immédiate,

$$|u_n - \ell| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |u_1 - \ell|.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

SOLUTION 40.

- On trouve $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$ et $P_3 = \frac{5}{2}X^3 - \frac{3}{2}X$.
- On a $\deg Q_n = n \deg(X^2 - 1) = 2n$. Ainsi $\deg P_n = \deg Q_n - n = n$.
- Comme Q_n est pair, sa dérivée $n^{\text{ème}} P_n$ est paire si n est pair et impaire si n est impair.
Si n est impair, P_n est impair : on a donc $P_n(0) = 0$.
Si n est pair, P_n est pair donc P'_n est impair : on a donc $P'_n(0) = 0$.
- Via la formule du binôme

$$Q_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^{2k}$$

La formule de Taylor en 0 donne également

$$Q_n = \sum_{l=0}^{2n} \frac{Q_n^{(l)}(0)}{l!} X^l$$

Supposons n pair. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. En identifiant les coefficients de X^n dans ces deux expressions, on obtient

$$\frac{Q^{(n)}(0)}{n!} = \binom{2p}{p} (-1)^p$$

puis

$$P_n(0) = \frac{(-1)^p \binom{2p}{p}}{2^{2p}} = \frac{(-1)^p (2p)!}{2^{2p} (p!)^2}$$

Supposons n impair. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$. En identifiant les coefficients de X^{n+1} dans les deux expressions précédentes, on obtient

$$\frac{Q^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = \binom{2p+1}{p+1} (-1)^p$$

puis

$$P'_n(0) = \frac{(2p+2)(-1)^p \binom{2p+1}{p+1}}{2^{2p+1}} = \frac{(-1)^p (2p+1)!}{2^{2p} (p!)^2}$$

- Pour $n \geq 1$, on a $Q'_n = 2nX(X^2 - 1)^{n-1}$ et donc $(X^2 - 1)Q'_n = 2nX(X^2 - 1)^n = 2nXQ_n$. On vérifie que cette égalité est encore valable pour $n = 0$ puisque $Q_0 = 1$.
 - On utilise la formule de Leibniz. Comme les dérivées de $X^2 - 1$ sont nulles à partir de l'ordre 3 et que celles de X sont nulles à partir de l'ordre 2, on a

$$\binom{n+1}{0} (X^2 - 1)Q_n^{(n+2)} + 2\binom{n+1}{1} XQ_n^{(n+1)} + 2\binom{n+1}{2} Q_n^{(n)} = 2n\binom{n+1}{0} XQ_n^{(n+1)} + 2n\binom{n+1}{1} Q_n^{(n)}$$

Autrement dit

$$(X^2 - 1)Q_n^{(n+2)} + 2(n+1)XQ_n^{(n+1)} + n(n+1)Q_n^{(n)} = 2nXQ_n^{(n+1)} + 2n(n+1)Q_n^{(n)}$$

ou encore

$$(X^2 - 1)Q_n^{(n+2)} + 2XQ_n^{(n+1)} = n(n+1)Q_n^{(n)}$$

Par définition de P_n , on a donc

$$(X^2 - 1)P_n'' + 2XP_n' = n(n+1)P_n$$

6. a. $Q_n = (X - 1)^n(X + 1)^n$ ce qui prouve que 1 et -1 sont des racines de Q_n de multiplicité n . On a donc $Q_n^{(k)}(\pm 1) = 0$ pour $0 \leq k \leq n$ et $Q_n^{(n+1)}(\pm 1) \neq 0$. Les dérivées $j^{\text{èmes}}$ de $Q_n^{(k)}$ (i.e. $Q_n^{(k+j)}$) sont donc nulles en ± 1 pour $0 \leq j \leq n - k$ et non nulles en ± 1 pour $j = n - k + 1$. Ceci signifie que 1 et -1 sont des racines de multiplicité $n - k$ de $Q_n^{(k)}$.

- b. On fait l'hypothèse de récurrence HR(k) suivante :

$Q_n^{(k)}$ possède au moins k racines distinctes dans l'intervalle $] -1, 1[$

HR(0) est vraie puisque les seules racines de Q_n sont -1 et 1 (pas de racine du tout si $n = 0$).

Supposons que HR(k) soit vraie pour un certain $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Posons $\alpha_0 = -1$, $\alpha_{k+1} = 1$ et α_i pour $1 \leq i \leq k$ k racines distinctes de $Q_n^{(k)}$ dans l'intervalle $] -1, 1[$ rangées dans l'ordre croissant. D'après la question précédente, $Q_n^{(k)}$ s'annule en α_0 et α_{k+1} . De plus, $Q_n^{(k)}$ s'annule en les α_i pour $1 \leq i \leq k$. Comme Q_n est dérivable et continue sur \mathbb{R} , on peut appliquer le théorème de Rolle entre α_i et α_{i+1} pour $0 \leq i \leq k$. Ceci prouve que la dérivée de $Q_n^{(k)}$, à savoir $Q_n^{(k+1)}$ s'annule $k + 1$ fois.

Par récurrence finie, $Q_n^{(n)}$ et donc P_n possède au moins n racines dans l'intervalle $] -1, 1[$. Comme $\deg P_n = n$, P_n possède au plus n racines réelles. On en déduit que P_n possède exactement n racines réelles toutes situées dans l'intervalle $] -1, 1[$.