Révisions de probabilités

Dénombrement

Solution 1

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. En particulier, chaque vecteur colonne doit être unitaire. Comme on recherche des matrices à coefficients entiers, chacune des colonnes possède un seul coefficient non nul égal à ± 1. Notons $\sigma(i)$ la position du seul coefficient non nul de la $i^{\text{ème}}$ colonne. Comme les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux, $i \neq j \Rightarrow \sigma(i) \neq \sigma(j)$. Autrement dit, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Il y a donc $n!$ façons de placer les coefficients non nuls dans la matrice. Comme chacun de ces coefficients peut être égal à± 1, on en déduit que le cardinal de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est $2^n n!$.

Solution 2

1. Notons E l'ensemble des k-uplets vérifiant la condition demandée et $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1,n]\!]$. Soit $\phi : \left\{\begin{array}{ccc}[\![1,n]\!]^k & \longrightarrow & \mathcal{P}([\![1,n]\!]) \\ (i_1,\dots,i_k) & \longmapsto & \{i_1,\dots,i_k\}\end{array}\right.$. ϕ induit une bijection de E sur $\mathcal{P}_k$. On a donc $\operatorname{card} \mathrm{E} = \binom{n}{k}$ si $k \geq n$ et $\operatorname{card} \mathrm{E} = 0$ sinon.
2. Soit $p \in [\![1,k]\!]$. On note F l'ensemble des k-uplets vérifiant la condition demandée et F_p l'ensemble des k-uplets $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ de F tels que $\operatorname{card}\left(\phi((i_1,\dots,i_k))\right) = p$. Pour un tel k-uplet, dans la sérié d'inégalités $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$, $k-p$ inégalités parmi les $k-1$ seront en fait des égalités. Pour définir un élément de F_p, il suffit donc de se donner un élément de $\mathcal{P}_p$ et la place des égalités parmi les inégalités. On en déduit donc que $\operatorname{card} \mathrm{F}_p = \binom{n}{p}\binom{k-1}{k-p}$. Les F_p pour $p \in [\![1,k]\!]$ forment une partition de F. Ainsi $\operatorname{card} \mathrm{F} = \sum_{p=1}^{k} \binom{n}{p}\binom{k-1}{k-p}$.
   Soit X un ensemble à $n+k-1$ éléments et A une partie à n éléments de X. Notons $\mathcal{X}_k$ l'ensemble des parties à k éléments de X et $\mathcal{X}_{k,p}$ l'ensemble des parties à k éléments de X qui comportent p éléments dans A. Remarquons que $\mathcal{X}_{k,0} = \varnothing$. Les $\mathcal{X}_{k,p}$ pour $p \in [\![1,k]\!]$ forment donc une partition de $\mathcal{X}_k$. On a évidemment $\operatorname{card} \mathcal{X}_k = \binom{n+k-1}{k}$. De plus, $\operatorname{card} \mathcal{X}_{k,p} = \binom{n}{p}\binom{k-1}{k-p}$ (on choisit p éléments dans A et $k-p$ éléments dans $\mathrm{X} \setminus \mathrm{A}$). On a donc $\sum_{p=1}^{k} \binom{n}{p}\binom{k-1}{k-p} = \binom{n+k-1}{k}$.
   Ainsi $\operatorname{card} \mathrm{F} = \binom{n+k-1}{k}$.

Solution 3

1. Notons E_1 l'ensemble des couples (X,Y) tels que $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \varnothing$. Le choix d'un tel couple (X,Y) revient au choix de k éléments de X parmi les n éléments de E et au choix de l éléments de Y parmi les $n-k$ éléments restants. Ainsi
$$\begin{aligned}\operatorname{card} \mathrm{E}_1 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n\end{aligned}$$
2. Notons E_2 l'ensemble des couples (X,Y) tels que $\mathrm{X} \cup \mathrm{Y} = \mathrm{E}$. Comme $\mathrm{X} \cup \mathrm{Y} = \mathrm{E}$ équivaut à $\overline{\mathrm{X}} \cap \overline{\mathrm{Y}} = \varnothing$ et que $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \mapsto (\overline{\mathrm{X}},\overline{\mathrm{Y}})$ est une bijection de $\mathcal{P}(\mathrm{E})^2$ dans lui-même, $\operatorname{card} \mathrm{E}_1 = \operatorname{card} \mathrm{E}_2 = 3^n$.
3. Notons E_3 l'ensemble des couples (X,Y) formant une partition de E. Le choix d'un tel couple (X,Y) revient au choix de k éléments de X parmi les n éléments de E et des $n-k$ éléments restants pour Y. Ainsi
$$\operatorname{card} \mathrm{E}_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$
4. Notons E_4 l'ensemble des triplets $(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})$ tels que $\mathrm{X} \cup \mathrm{Y} = \mathrm{Z}$. Le choix d'un triplet $(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})$ de E_4 revient au choix de i éléments de Z parmi les n éléments de E puis au choix d'un couple (X,Y) tel que $\mathrm{X} \cup \mathrm{Y} = \mathrm{Z}$. On a vu qu'il existe 3^i choix possibles pour un tel couple (X,Y). Ainsi
$$\operatorname{card} \mathrm{E}_4 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 3^i = (1+3)^n = 4^n$$

On peut même faire plus simple : le choix d'un triplet (X, Y, Z) tel que $X \cup Y = Z$ revient au choix d'un couple (X, Y) puisqu'une fois que celui-ci est choisi Z est déterminé de manière unique. Ainsi

$$\operatorname{card} E_4 = (\operatorname{card} \mathcal{P}(E))^2 = (2^n)^2 = 2^{2n}$$

Solution 4

Soit E un ensemble à $2n$ éléments et (E_1, E_2) une partition de E avec $\operatorname{card} E_1 = \operatorname{card} E_2 = n$. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties de E à n éléments et, pour $0 \leq k \leq n$, $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des parties de E à n élémnents possédant eaxctement k éléments dans $\mathcal{E}_1$. Il est clair que $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ est une partition de $\mathcal{E}$. Se donner un élément de $\mathcal{E}_k$ revient à se donner une partie à k éléments de E_1 et une partie à $n-k$ éléments de E_2. On en déduit que $\operatorname{card} \mathcal{E}_k = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ par symétrie des coefficients binomiaux. On sait que $\operatorname{card} \mathcal{E} = \binom{2n}{n}$. Comme $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ est une partition de $\mathcal{E}$, on en déduit que $\operatorname{card} \mathcal{E} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{card} \mathcal{E}_k$ puis la formule demandée.

Solution 5

Le nombre recherché est le nombre de façons d'ordonner les n éléments de l'ensemble autrement dit le nombre de permutations de cet ensemble, à savoir $n!$.

Solution 6

Soient E un ensemble de cardinal $n+m$, F et G deux parties de cardinaux respectifs n et m formant une partition de m.
Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de E à r éléments. Pour $k \in [\![0, r]\!]$, on note $\mathcal{A}_k$ l'ensemble des parties de E possédant k éléments dans F et donc $r-k$ éléments dans G. Les $\mathcal{A}_k$ pour $k \in [\![0, r$ forment clairement une partition de $\mathcal{A}$ de sorte que $\operatorname{card} \mathcal{A} = \sum_{k=0}^{r} \operatorname{card} \mathcal{A}_k$.
D'une part, $\operatorname{card} \mathcal{A} = \binom{n+m}{r}$. D'autre part, choisir un élément de $\mathcal{A}_k$ revient à choisir une partie de F à k éléments et une partie de G à $n-k$ éléments. Il s'ensuit que $\operatorname{card} \mathcal{A}_k = \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$. On obtient bien la formule demandée.

Solution 7

---

1. On introduit les intervalles $I_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. Puisque $I_0, \dots, I_{n-1}$ forment une partition de $[0, 1[$ et que les réels $\delta_0, \dots, \delta_n$ sont tous dans $[0, 1[$, chacun des $n+1$ réels $\delta_0, \dots, \delta_n$ appartient à un des n intervalles $I_0, \dots, I_{n-1}$. D'après le principe des tiroirs, deux de ces réels appartiennent au même intervalle. Autrement dit il existe deux entiers k et l de $[\![0, n]\!]$ tels que $k < l$ et un entier $m \in [\![0, n-1]\!]$ tel que δ_k et δ_l appartiennent à I_m. Ainsi, $\frac{m}{n} \leq \delta_k < \frac{m+1}{n}$ et $\frac{m}{n} \leq \delta_l < \frac{m+1}{n}$ puis $-\frac{1}{n} < \delta_l - \delta_k < \frac{1}{n}$ i.e. $|\delta_l - \delta_k| < \frac{1}{n}$. On a alors le résultat voulu en posant $q = l - k$ et $p = \lfloor lx \rfloor - \lfloor kx \rfloor$.

2. **a.** Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$. $\mathcal{D}$ est non vide puisqu'il contient le couple, $(\lfloor x \rfloor, 1)$. Supposons que $\mathcal{D}$ soit fini. Notons $m = \min_{(p,q)\in\mathcal{D}} \left|x - \frac{p}{q}\right|$. m est bien défini car $\mathcal{D}$ est non vide et fini. De plus, $m > 0$ car x est irrationnel. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \leq m$. D'après la question précédente, il existe un couple $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $s \leq n$ et $\left|x - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{ns}$. Puisque $s \geq 1$,

$$\left|x - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{ns} \leq \frac{1}{n} \leq m$$

donc $(r, s) \notin \mathcal{D}$.
De plus, $s \leq n$ donc

$$\left|x - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{ns} \leq \frac{1}{s^2}$$

donc $(r, s) \in \mathcal{D}$ d'où une contradiction.

b. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des entiers $p \in \mathbb{Z}$ tels qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$. Pour $p \in \mathcal{E}$, notons $\mathcal{D}_p$ l'ensemble des entiers $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$. On a $\mathcal{D} = \bigcup_{p\in\mathcal{E}} \{p\} \times \mathcal{D}_p$. Supposons que $\mathcal{E}$ soit fini. Puisque $\mathcal{D}$ est infini, il existe un entier $p \in \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{D}_p$ soit infini. En particulier, on peut construire une suite strictement croissante (q_n) d'éléments de $\mathcal{D}_p$. Puisque (q_n) est à valeurs entières, (q_n) diverge vers $+\infty$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|x - \frac{p}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$ donc, par passage à la limite, $|x| \leq 0$ i.e. $x = 0$, ce qui est absurde car x est irrationnel.
Ainsi $\mathcal{E}$ est infini.

3. **a.** Supposons $l > 0$. Alors (u_n) est minorée par un réel $m > 0$ à partir d'un certain rang. Il existe donc $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n \sin n} \geq m$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$. Ainsi $0 \leq \sin n \leq \frac{1}{nm}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc la suite $(\sin n)$ converge vers 0 ce qui est classiquement faux.
En considérant la suite $(-u_n)$, on montre de même qu'on ne peut avoir $l < 0$.
On en conclut que $l = 0$.

b. Comme l'ensemble $\mathcal{E}$ est infini, on peut trouver une suite strictement croissante (p_n) à valeurs dans $\mathcal{E}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $q_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left|\pi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$ i.e. $|q_n\pi - p_n| < \frac{1}{q_n}$. Remarquons en particulier que $q_n\pi > p_n - \frac{1}{q_n} \leq p_n - 1$. Ainsi (q_n) diverge également vers $+\infty$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = \pi$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|\sin(p_n)| = |\sin(q_n\pi - p_n)| \leq |q_n\pi - p_n| < \frac{1}{q_n}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{p_n}| > \frac{q_n}{p_n}$. Comme (u_{p_n}) est une suite extraite de (u_n), on obtient $0 \leq \pi$ par passage à la limite d'où la contradiction.
Par conséquent, la suite (u_n) n'admet pas de limite.

Solution 8

Première solution
Numérotons dans un premier temps les 10 trinômes. Il y a $\binom{30}{3}$ façons de choisir les élèves du trinôme 1, puis $\binom{27}{3}$ façons de choisir les élèves du trinôme 2, …et enfin $\binom{3}{3}$ façons de choisir les élèves du trinôme 10. Le nombre de façons de répartir les élèves dans les trinômes 1 à 10 est donc

$$\prod_{k=1}^{10} \binom{3}{3k} = \prod_{k=1}^{10} \frac{3k!}{3!(3(k-1))!} = \frac{30!}{(3!)^{10}}$$

Mais l'énoncé ne fait pas mention d'un ordre ou d'une numérotation des trinômes : on divise donc le nombre trouvé par 10!. Le nombre recherché est donc $\frac{30!}{(3!)^{10}10!}$.

Seconde solution
On peut répartir les élèves en trinômes en se donnant une liste des élèves dans un ordre quelconque puis en groupant les trois premiers, puis les trois suivants, …Il existe 30! liste de 30 élèves. Mais une liste étant donnée, une permutation des 3 élèves d'un même groupe ou une permutation des 10 groupes donne une liste qui fournit la même répartition en trinômes. Il existe donc $(3!)^{10}10!$ listes fournissant la même répartition en trinômes. Le nombre recherché est donc à nouveau $\frac{30!}{(3!)^{10}10!}$.

Solution 9

Il existe évidemment 5! anagrammes du mot «MATHS».

Pour former une anagramme du mot «MOTO», il faut déjà placer le «M» et le «T» : il y a 4×3 façons de le faire. Les deux dernières lettres à placer sont forcément des «O» : il n'y a donc pas de choix à effectuer. Il existe donc 12 anagrammes du mot «MOTO».

Pour former une anagramme du mot «DODO», il faut déjà placer les deux «D» : il suffit de choisir deux places parmi les quatre possibles autrement dit $\binom{4}{2}$ possibilités. Les deux dernières lettres à placer sont forcément des «O» : il n'y a donc pas de choix à effectuer. Il existe donc 6 anagrammes du mot «DODO».

Pour former une anagramme du mot «ANAGRAMME», il faut déjà placer les trois «A» : il suffit de choisir trois places parmi les neuf possibles autrement dit $\binom{9}{3}$ possibilités. On place ensuite les deux «M» : il suffit de choisir deux places parmi les six restantes autrement dit $\binom{6}{2}$ possibilités. On place ensuite les quatre lettres «N», «G», «R», «E» aux quatres places restantes : il y a 4! façons de le faire. Il existe en tout $\binom{9}{3}\binom{6}{2}4! = \frac{9!}{3!2!} = 30240$ anagrammes du mot «ANAGRAMME».

Le mot «ANTICONSTITUTIONNELLEMENT» comporte 25 lettres dont 5 «N», 5 «T», 3 «I», 2 «O», 3 «E», 2 «L», toutes les autres lettres n'apparaissant qu'une fois. Le nombre d'anagrammes du mot «ANTICONSTITUTIONNELLEMENT» est donc $\frac{25!}{(5!)^2(3!)^2(2!)^2} = 7480328917501440000$.

Solution 10

---

1. n^m

2. $n!$

3. C'est le nombre de $n-1$-arrangements autrement dit $n!$

4. Soit A un ensemble à n éléments et B un ensemble à $n-1$ éléments. Remarquons que si f est une surjection de A sur B, un élément de B aura deux antécédents dans A et les autres un seul.
Se donner une surjection de A sur B, c'est donc se donner la paire d'éléments de A ayant la même image ($\binom{n}{2}$ possibilité) puis se donner l'image de cette paire et les images des $n-2$ éléments restants ($(n-1)!$ possibilités). Le nombre de surjection de A sur B est donc $\binom{n}{2}(n-1)! = \frac{n!(n-1)}{2}$.

Solution 11

Notons $C_1, \dots, C_k$ les classes d'équivalences et $n_1, \dots, n_k$ leurs cardinaux respectifs. Puisque les classes d'équivalence forment une partition de E, $n = \sum_{j=1}^k n_j$. De plus, $G = \bigcup_{j=1}^k C_j^2$, l'union étant disjointe. Ainsi $p = \sum_{j=1}^k n_j^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$n^2 = \left(\sum_{j=1}^k 1 \times n_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^k 1^2\right)\left(\sum_{j=1}^k n_j^2\right) = kp$$

Solution 12

---

1. Notons R la matrice $(r_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} \equiv r_{i,j}[2]$. Par compatibilité de la relation de congruence avec la somme et le produit,

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i} \equiv \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n r_{\sigma(i),i}[2]$$

Autrement dit $\det A \equiv \det B[2]$.

2. Clairement, $\operatorname{card}(\mathcal{M}) = 9!$.

3. D'après la première question, l'application qui à $M \in \Omega$ associe la matrice constituée des restes des divisions euclidiennes des coefficients de A par 2 a pour image Δ. De plus, chaque élément de Δ a $5!\cdot 4!$ antécédents par cette application (5! façons de placer les chiffres impairs et 4! façons de placer les chiffres pairs). D'après le lemme des bergers, $\operatorname{card}(\Omega) = 5!\cdot 4!\operatorname{card}(\Delta)$.

4. **a.** Il y a trois façons de placer la colonne de 1. Une fois cette colonne placée, les deux 1 restants ne peuvent appartenir à la même colonne sinon on aurait une colonne de 0 et donc un déterminant nul (non impair). Les deux 1 restants ne peuvent être situés sur la même ligne sinon les deux colonnes où ils figurent seraient égales et donc le déterminant serait nul. Il y a donc $3\times 2 = 6$ façons de placer les deux 1 restants. Les matrices obtenues sont bien de déterminants impairs puisque par échange de lignes et de colonnes, leurs déterminants sont égaux au signe près à $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. On en déduit que $\operatorname{card}(K_1) = 3\times 6 = 18$.

b. Il y a $\binom{3}{2} = 3$ façons de choisir les deux colonnes possédant un unique 0. Dans ces deux colonnes, les zéros ne peuvent figurer sur la même ligne sinon les deux colonnes sont égales et le déterminant est nul. Il y a donc $3\times 2 = 6$ façons de placer les 0 dans ces deux colonnes. Il y a enfin 3 façons de placer le 1 restant dans la colonne restante. Les matrices ainsi obtenues sont bien de déterminants impairs puisque par échange de lignes et de colonnes, leurs déterminants sont égaux au signe près à $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.
On en déduit que $\operatorname{card}(K_2) = 3\times 6\times 3 = 18 = 54$.

c. Les deux ensembles dénombrés dans les deux questions précédentes sont disjoints puisqu'une matrice de Δ possédant une colonne avec trois coefficients égaux à 1 a forcément une colonne avec plus deux deux coefficients égaux à 0. Ces deux ensembles sont également de réunion Δ puisqu'une matrice de Δ qui ne contient aucune colonne avec trois coeffiients égaux à 1 a forcément deux colonnes avec exactement un coefficient égal à 0. Ces deux ensembles forment donc une partition de Δ de sorte que $\operatorname{card}(\Delta) = K_1 + K_2 = 72$.

d. Finalement, $\operatorname{card}(\Omega) = 72\cdot 5!\cdot 4!$.

5. Implicitement, on suppose que la probabilité est uniforme sur $\mathcal{M}$.

$$p = \frac{\operatorname{card}(\Omega)}{\operatorname{card}(\mathcal{M})} = \frac{72\cdot 5!\cdot 4!}{9!} = \frac{4}{7}$$

Solution 13

Remarquons qu'un mot ne comportant pas deux fois la même lettre possède au plus n lettres. De plus, il y a $\frac{n!}{(n-k)!}$ mots de k lettres ne comportant pas deux fois la même lettre. Ainsi

$$\mathrm{M}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

De plus,

$$n!e = n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer que

$$0 \leq n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < 1$$

L'inégalité de gauche est évidente. Posons

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Remarquons que

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1+k)!}$$

et que pour tout entier $k \geq 1$,

$$\frac{1}{(n+1+k)!} < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(n+1)^k}$$

Comme la série géométrique $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)^k}$ converge (en effet, $0 \leq \frac{1}{n+1} < 1$), on peut écrire

$$\mathrm{R}_n < \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n \cdot n!}$$

Ainsi

$$n!\mathrm{R}_n < \frac{1}{n} \leq 1$$

ce qui permet de conclure.

Solution 14

1. **a.** Une permutation de E_n à n points fixes est l'identité donc $\mathrm{S}_{n,n} = 1$.
   Si une permutation a $n-1$ points fixes, le dernier point de E_n est nécessairement un point fixe. Une permutation ne peut donc avoir exactement $n-1$ points fixes $\mathrm{S}_{n,0} = 0$.

   b. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, notons $\mathfrak{S}_{n,k}$ la partie de $\mathfrak{S}_n$ formée des permutations ayant exactement k points fixes. La famille $\left(\mathfrak{S}_{n,k}\right)_{0\leq k\leq n}$ est une partition de $\mathfrak{S}_n$. Puisque $\operatorname{card} \mathfrak{S}_{n,k} = \mathrm{S}_{n,k}$ et que $\operatorname{card} \mathfrak{S}_n = n!$, on en déduit la formule demandée.

   a. Se donner un élément de $\mathfrak{S}_{n,k}$, c'est se donner k points fixes dans E_n, autrement dit une partie à k éléments de E_n, et une permutation sans point fixe des $n-k$ éléments restants. Comme il y a $\binom{n}{k}$ parties à k éléments de E_n et qu'il y a ω_{n-k} permutations sans point fixe d'un ensemble à $n-k$ éléments, on en déduit $\mathrm{S}_{n,k} = \binom{n}{k}\omega_{n-k}$.

   b. En utilisant les deux questions précédentes :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n-k}\binom{n}{k}}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}_{n,k} = 1$$

c. Notons HR(n) l'égalité à démontrer. HR(0) est clairement vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons HR(k) vraie pour $0 \leq k \leq n-1$. En utilisant la question précédente

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a alors :

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{p=0}^{n-k} \frac{(-1)^p}{p!}$$

On effectue le changement d'indice $q = p + k$ dans la deuxième somme :

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=k}^{n} \frac{(-1)^{q-k}}{k!(q-k)!}$$

On intervertit les deux sommes :

$$\begin{aligned}\frac{\omega_n}{n!} &= 1 - \sum_{q=1}^{n} \sum_{k=1}^{q} \frac{(-1)^q(-1)^k}{k!(q-k)!} \\ &= 1 - \sum_{q=1}^{n} \frac{(-1)^q}{q!} \sum_{k=1}^{q} (-1)^k \binom{q}{k}\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{q} (-1)^k \binom{q}{k} = \left(\sum_{k=0}^{q} (-1)^k \binom{q}{k}\right) - 1 = (1-1)^q - 1 = -1$ car $q \geq 1$. On a donc

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 + \sum_{q=1}^{n} \frac{(-1)^q}{q!} = \sum_{q=0}^{n} \frac{(-1)^q}{q!}$$

Ainsi HR(n) est vraie. Par récurrence forte, HR(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle sur $[-1, 0]$, on obtient :

$$\left| e^{-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{[-1,0]} \exp = \frac{1}{(n+1)!}$$

En passant à la limite, on a donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\omega_n}{n!} = \frac{1}{e}$.

Solution 15

Choisir un k-cycle de $\mathfrak{S}_n$ consiste à :

- choisir le support du k-cycle, c'est-à-dire k éléments parmi n ;
- ordonner ces k éléments : $k!$ possibilités ;
- tenir compte qu'un cycle est invariant par permutation circulaire des éléments de son support : k possibilités.

On en déduit que le nombre de k cycles de $\mathfrak{S}_n$ est

$$\frac{\binom{n}{k} k!}{k} = (k-1)! \binom{n}{k} = \frac{n!}{k(n-k)!}$$

Généralités

Solution 16

La probabilité recherchée est $\frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{8}{10} = \frac{4}{55}$.

Solution 17

1. Les coordonnées du point M_n sont $(1,1)$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Puisque $x_1 \leq x_2 \leq x_k$

$$v_k = \frac{1}{\mathrm{E}(\mathrm{X})}\sum_{j=1}^{k} p_j x_j \leq \frac{1}{\mathrm{E}(\mathrm{X})}\sum_{j=1}^{k} p_j x_k = \frac{u_k x_k}{\mathrm{E}(\mathrm{X})}$$

Puisque $x_k \leq x_{k+1} \leq n$

$$1 - v_k = \frac{1}{\mathrm{E}(\mathrm{X})}\sum_{j=k+1} p_j x_j \geq \frac{1}{\mathrm{E}(\mathrm{X})}\sum_{j=k+1} p_j x_k = \frac{(1-u_k)x_k}{\mathrm{E}(\mathrm{X})}$$

On en déduit que

$$(1-u_k)v_k \leq \frac{(1-u_k)u_k x_k}{\mathrm{E}(\mathrm{X})} \leq u_k(1-v_k)$$

et donc que $v_k \leq u_k$, ce qui signifie que M_k est au-dessous de la première bissectrice.

2. **a.** La courbe de Lorenz est incluse dans le triangle de sommets les points de coordonnées $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. L'aire de la portion de plan comprise entre la courbe de Lorenz et la première bissectrice est donc inférieure à l'aire de ce triangle qui vaut $\frac{1}{2}$. On en déduit que $\mathrm{I}(\mathrm{X}) \in [0,1]$.

b. Puisque la courbe de Lorenz est située sous la première bissectrice, I(X) est le double de la différence entre

- d'une part, l'aire de la portion de plan comprise entre la première bissectrice, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x=1$
- et d'autre part, l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe de Lorenz, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x=1$.

Cette seconde aire est la somme d'aire de trapèzes. On trouve donc

$$\mathrm{I}(\mathrm{X}) = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k(v_{k-1} + v_k)$$

3. **a.** Dans ce cas, $n=2$. On a également $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $p_1 = 1-p$, $p_2 = 1$. Ainsi $v_0 = 0$, $v_1 = 0$ et $v_2 = 1$. La formule de la question précédente donne $\mathrm{I}(\mathrm{X}) = 1-p$.

b. Dans ce cas $x_j = j$ et $p_j = \frac{1}{n}$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. On a donc $u_k = \frac{k}{n}$ et $v_k = \frac{k(k+1)}{n(n+1)}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. La formule de la question précédente donne

$$\mathrm{I}(\mathrm{X}) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{(k-1)k}{n(n+1)} + \frac{k(k+1)}{n(n+1)}\right) = 1 - \frac{2}{n^2(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 - \frac{2n+1}{3n} = \frac{n-1}{3n}$$

4. D'après la formule de transfert

$$\mathrm{E}(|\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_2| = \sum_{1\leq i,j\leq n} |x_i - x_j|\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = x_i \cap \mathrm{X}_2 = x_j) = \sum_{1\leq i,j\leq n} |x_i - x_j|\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = x_i)\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = x_j)$$

car X_1 et X_2 sont indépendantes. De plus, $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ donc

$$\begin{aligned}
E(|X_1 - X_2|) &= 2\sum_{1\leq i\leq j\leq n}(x_j - x_i)p_ip_j \\
&= 2\sum_{1\leq i\leq j\leq n} x_jp_ip_j - 2\sum_{1\leq i\leq j\leq n} x_ip_ip_j \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=i}^{n} x_jp_j - 2\sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=1}^{j} x_ip_i \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} p_i(E(X) - \sum_{j=1}^{i-1} x_jp_j) - 2\sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=1}^{j} x_ip_i \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} p_i(E(X) - E(X)v_{i-1}) - 2\sum_{j=1}^{n} p_jE(X)v_j \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} p_kE(X) - 2\sum_{k=1}^{n} E(X)p_kv_{k-1} - 2\sum_{k=1}^{n} E(X)p_kv_k \\
&= 2E(X)\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k(v_{k-1} + v_k)\right) = 2E(X)I(X)
\end{aligned}$$

Par conséquent, $I(X) = \dfrac{E(|X_1 - X_2|)}{2E(X)}$.

Solution 18

1. Pas de difficultés.
2. $P(E) = 18/36$, $P(F) = 11/36$, $P(G) = 4/36$, $P(E \cap F) = 6/36$, $P(F \cap G) = 2/36$, $P(E \cup F) = 1 - P(\overline{E \cup F}) = 1 - 13/36 = 23/36$.
3. $P(F \cup G) = 13/36$, $P(\overline{E} \cup \overline{F}) = 1 - 6/36 = 30/36$, $P(\overline{F} \cap \overline{G}) = 1 - 13/36 = 23/36$.

Solution 19

1. On vérifie facilement que la probabilité d'avoir exactement un 6 vaut $\dfrac{5}{72} + \dfrac{10}{36} = \dfrac{25}{72}$.
2. La probabilité de n'avoir aucun 6 vaut $\left(\dfrac{5}{6}\right)^3$, donc celle d'obtenir au moins un 6 vaut $1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^3 = \dfrac{91}{216}$.
3. Pour tout $1 \leq i \leq 6$, notons A_i l'évènement « on obtient au moins deux fois le numéro i». Ces évènements étant disjoints et équiprobables, la probabilité cherchée est clairement : $p = \sum_{i=1}^{6} P(A_i) = 6P(A_6)$. Or d'après les questions précédentes, on déduit que $P(A_6) = \dfrac{91}{216} - \dfrac{25}{72} = \dfrac{91-75}{216} = \dfrac{16}{216} = \dfrac{2}{27}$. On en conclut que la probabilité d'obtenir au moins deux faces identiques vaut :
$$p = 6 \times \frac{2}{27} = \frac{4}{9}\ .$$

Solution 20

On obtient facilement que la probabilité que tous les élèves de la classe soient nés à des dates différentes est $\prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - \dfrac{i}{365}\right)$. Il s'ensuit que la probabilité cherchée est :

$$p_n = 1 - \prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{365}\right).$$

Application numérique : on trouve $p_{22} \simeq 0.476$, $p_{23} \simeq 0.507$. La probabilité dépasse 0.5 à partir de 23 élèves. Par ailleurs on trouve $p_{50} \simeq 0.970$.

Solution 21

1. **a.** $\dfrac{2}{9}$.

   b. $\dfrac{4}{9}$.

2. $\dfrac{\binom{5}{2}\binom{10}{3}}{\binom{15}{5}} = \dfrac{10 \times 120}{3003} = \simeq 0.4$.

Indépendance

Solution 22

L'événement A est l'événement contraire de l'événement «la famille n'a que des enfants de même sexe», ce dernier événement étant l'union disjointe des événements «la famille a n garçons» et «la famille a n filles». On en déduit que

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1 - 2 \times \frac{1}{2^n} = 1 - 2^{1-n}$$

L'événement B est la réunion disjointe des événements «la famille n'a aucune fille» et «la famille a exactement une fille». On en déduit que

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{2^n} + \binom{n}{1}\frac{1}{2^n} = (n+1)2^{-n}$$

L'événement $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ est l'événement «la famille a une unique fille». Ainsi

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \binom{n}{1}\frac{1}{2^n} = n2^{-n}$$

Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})$ autrement dit si et seulement si

$$(1 - 2^{1-n})(n+1)2^{-n} = n2^{-n}$$

ou encore, après simplification,

$$2^n - 2n - 2 = 0$$

Soit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto 2^t - 2t - 2$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f' : t \mapsto 2^t \ln 2 - 2$. f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f'(2) = 4\ln 2 - 2 > 0$. Ainsi f' est strictement positive sur $[2, +\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$. Puisque $f(3) = 0$, f s'annule uniquement en 3 sur $[2, +\infty[$, ce qui prouve que A et B sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

Solution 23

On note A =«b+r=7», B = «b=4» et C = «$|b - r|$ est pair». On vérifie facilement que A et B sont indépendants, B et C aussi, mais pas A et C car $\mathrm{A} \cap \mathrm{C} = \varnothing$ donc $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = 0 \neq \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{C})$.

Solution 24

On vérifie sans problème que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{C}) = \dfrac{1}{2}$ et que $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \dfrac{1}{4}$, donc A, B et C sont deux à deux indépendants.

En revanche, $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \dfrac{1}{4} \neq \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{C})$, donc A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Solution 25

1. $\mathrm{P}\big(\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})\big) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\Big(\mathrm{P}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{C}) - \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{C})\Big) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B} \cup \mathrm{C})$.

2. $1 - \mathrm{P}(\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{C}}) > 0$.

Probabilités conditionnelles

Solution 26

On définit les événement suivants.

AR La boule tirée dans l'urne A est rouge.

AV La boule tirée dans l'urne A est verte.

X Les deux boules tirées dans l'urne B sont rouges.

La probabilité recherchée est $P(AV|X)$. D'après la formule de Bayes

$$P(AV|X) = \frac{P(X|AV)P(AV)}{P(X|AV)P(AV) + P(X|AR)P(AR)}$$

Il est clair que $P(AV) = \frac{3}{5}$ et $P(AR) = \frac{2}{5}$.
Par ailleurs, $P(X|AV)$ est la probabilité de tirer successivement et sans remise deux boules rouges dans une urne contenant trois boules rouges et trois boules vertes. Autrement dit, $P(X|AV) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.
De même, $P(X|AR)$ est la probabilité de tirer successivement et sans remise deux boules rouges dans une urne contenant quatre boules rouges et deux boules vertes. Autrement dit, $P(X|AR) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.
Après calcul, on trouve $P(AV|X) = \frac{3}{7}$.

Solution 27

On note ER l'événement «la face exposée est rouge» et CB l'événement «la face cachée est blanche». On note RR l'événement «la carte tirée est celle aux deux faces rouges», BB l'événement «la carte tirée est celle aux deux faces blanches» et RB l'événement «la carte tirée est celle aux faces rouge et blanche».
On cherche à calculer $P(CB|ER)$. Par définition, $P(CB|ER) = \frac{P(CB \cap ER)}{P(ER)}$.
Tout d'abord

$$P(ER) = P(ER|RR)P(RR) + P(ER|BB)P(BB) + P(ER|RB)P(ER) = 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

De même

$$P(CB \cap ER) = P(CB \cap ER|RR)P(RR) + P(CB \cap ER|BB)P(BB) + P(CB \cap ER|RB)P(ER) = 0 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Ainsi la probabilité recherchée est

$$P(CB|ER) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Solution 28

On notera :

- A l'événement le «composant provient de la chaîne A» ;
- B l'événement le «composant provient de la chaîne B» ;
- D l'événement le «composant est défectueux».

1. On cherche $P(D)$. D'après la formule des probabilités totales

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) = \frac{2}{100} \times \frac{30}{50} + \frac{4}{100} \times \frac{20}{50} = \frac{7}{250} = 0,028$$

Autrement dit le composant est défectueux avec un probabilité de $2,8\%$.

2. On cherche P(B|D). D'après la formule de Bayes

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{D}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{D}|\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{D})} = \frac{\frac{4}{100} \times \frac{20}{50}}{\frac{7}{250}} = \frac{4}{7}$$

Autrement dit, si le composant est défectueux, il y 4 chances sur 7 qu'il provienne de la chaîne B.

Solution 29

On notera A_n l'événement «le buveur ne boit pas le $n^{\text{ème}}$ jour. L'énoncé signifie que $\mathrm{P}(\mathrm{A}_{n+1}|\mathrm{A}_n) = 0,4$ et $\mathrm{P}(\mathrm{A}_{n+1}|\overline{\mathrm{A}_n}) = 0,8$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose de plus que le buveur ne boit pas le premier jour, autrement dit $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1) = 1$.

1. Pour simplifier, posons $p_n = \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_{n+1} = \mathrm{P}(\mathrm{A}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_{n+1}|\mathrm{A}_n)\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_{n+1}|\overline{\mathrm{A}_n})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_n}) = 0,4p_n + 0,8(1-p_n) = 0,8 - 0,4p_n$$

2. La suite (p_n) est arithmético-géométrique. On introduit l'unique solution p de l'équation $x = 0,8 - 0,4x$ autrement dit $p = \frac{4}{7}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_{n+1} - p = (0,8 - 0,4p_n) - (0,8 - 0,4p) = -0,4(p_n - p)$$

Une récurrence évidente montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_n - p = (-0,4)^{n-1}(p_1 - p)$$

Autrement dit

$$p_n = \frac{2}{7} + \left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\frac{5}{7}$$

3. Puisque $\left|-\frac{2}{5}\right| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{7}$.

Solution 30

On note E l'événement «l'étudiant a préparé l'examen», X le nombre de bonnes réponses obtenues par l'étudiant et R l'événement «l'étudiant a réussi l'examen».

1. La variable X conditionnée par l'événement E suit une loi binomiale de paramètre 0, 8. Ainsi

$$\mathrm{P}(\mathrm{R}|\mathrm{E}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 8|\mathrm{E}) = \sum_{k=8}^{15}\binom{15}{k}(0,8)^k(0,2)^{15-k} = \frac{30388191232}{30517578125} \approx 0,996$$

La variable X conditionnée par l'événement $\overline{\mathrm{E}}$ suit une loi binomiale de paramètre $\frac{1}{3}$. Ainsi

$$\mathrm{P}(\mathrm{R}|\overline{\mathrm{E}}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 8|\overline{\mathrm{E}}) = \sum_{k=8}^{15}\binom{15}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{15-k} = \frac{422009}{4782969} \approx 0,088$$

D'après la formule des probabilités totales

$$\mathrm{P}(\mathrm{R}) = \mathrm{P}(\mathrm{R}|\mathrm{E})\mathrm{P}(\mathrm{E}) + \mathrm{P}(\mathrm{R}|\overline{\mathrm{E}})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{E}}) = \frac{30388191232}{30517578125} \times \frac{7}{10} + \frac{422009}{4782969} \times \frac{3}{10} = \frac{352018838093984677}{486548767089843750} \approx 0,724$$

2. Par définition

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}|\overline{\mathrm{R}}) = \frac{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{R}}|\mathrm{E})\mathrm{P}(\mathrm{E})}{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{R}})} = \frac{(1-\mathrm{P}(\mathrm{R}|\mathrm{E}))\,\mathrm{P}(\mathrm{E})}{1-\mathrm{P}(\mathrm{R})} = \frac{1443991495859073}{134529928995859073} \approx 0,011$$

A bon entendeur, salut !

Solution 31

1. **a.** Le père et la mère jouent des rôles symétriques.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=1,\mathrm{M}=1) &= 1\\
\mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=2,\mathrm{M}=2) &= \frac{1}{4}\\
\mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=3,\mathrm{M}=3) &= 0\\
\mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=1,\mathrm{M}=2) = \mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=2,\mathrm{M}=1) &= \frac{1}{2}\\
\mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=1,\mathrm{M}=3) = \mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=3,\mathrm{M}=1) &= 0\\
\mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=2,\mathrm{M}=3) = \mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=3,\mathrm{M}=2) &= 0
\end{aligned}$$

b. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}=1) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=i,\mathrm{M}=j)\mathrm{P}(\mathrm{F}=i,\mathrm{M}=j)$$

Les mariages étant supposés aléatoires, $\mathrm{P}(\mathrm{F}=i,\mathrm{M}=j) = \mathrm{P}(\mathrm{F}=i)\mathrm{P}(\mathrm{M}=j) = u_iu_j$. Ainsi

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}=1) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \mathrm{P}(\mathrm{E}=1|\mathrm{F}=i,\mathrm{M}=j)u_iu_j$$

A l'aide de la question précédente, on trouve

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}=1) = u_1^2 + \frac{1}{4}u_2^2 + \frac{1}{2}u_1u_2 = \left(u_1 + \frac{u_2}{2}\right)^2$$

En échangeant les rôles des gènes a et A, on obtient

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}=3) = \left(u_3 + \frac{u_2}{2}\right)^2$$

c. On a évidemment $q_1 = \theta^2$.
Puisque $u_1 + u_2 + u_3 = 1$,

$$q_3 = \left(u_3 + \frac{u_2}{2}\right)^2 = \left(1 - u_1 - \frac{u_2}{2}\right)^2 = (1-\theta)^2$$

Enfin

$$q_2 = 1 - q_1 - q_3 = 1 - \theta^2 - (1-\theta)^2 = 2\theta(1-\theta)$$

d. A la seconde génération, la nouvelle valeur du paramètre θ est $q_1 + \frac{q_2}{2} = \theta^2 + \theta(1-\theta) = \theta$. Autrement dit, θ reste inchangé au cours des générations. Les proportions des divers génotypes restent donc constantes au cours des générations.

2. **a.** Pour $j \in \{1,2,3\}$, la loi de N_j est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, q_j)$. On a donc $\mathrm{E}(\mathrm{N}_j) = nq_j$ et $\mathrm{V}(\mathrm{N}_j) = nq_j(1-q_j)$.

b.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{V}(\mathrm{N}_1+\mathrm{N}_2) - \mathrm{V}(\mathrm{N}_1) - \mathrm{V}(\mathrm{N}_3)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{V}(n-\mathrm{N}_3) - \mathrm{V}(\mathrm{N}_1) - \mathrm{V}(\mathrm{N}_2)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{V}(\mathrm{N}_3) - \mathrm{V}(\mathrm{N}_1) - \mathrm{V}(\mathrm{N}_2)\right)\\
&= \frac{n}{2}\left(q_3(1-q_3) - q_1(1-q_1) - q_2(1-q_2)\right)
\end{aligned}$$

Or on sait que $q_3 = 1 - q_1 - q_2$ ce qui permet d'obtenir

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2) = -nq_1q_2$$

c. Par linéarité

$$\mathrm{E}(\theta_n) = \frac{1}{n}\mathrm{E}(\mathrm{N}_1) + \frac{1}{2n}\mathrm{E}(\mathrm{N}_2) = q_1 + \frac{q_2}{2} = \theta^2 + \theta(1-\theta) = \theta$$

d.

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\theta_n) &= \frac{1}{n^2}\left(\mathrm{V}(\mathrm{N}_1) + \frac{1}{4}\mathrm{V}(\mathrm{N}_2) + \mathrm{Cov}(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(q_1(1-q_1) + \frac{1}{4}q_2(1-q_2) - q_1q_2\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\theta^2(1-\theta^2) + \frac{1}{2}\theta(1-\theta)(1-2\theta(1-\theta)) - 2\theta^3(1-\theta)\right) \\
&= \frac{\theta(1-\theta)}{2n}
\end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{V}(\theta_n) = 0$.

Solution 32

---

1. S suit évidemment la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$.

2. La loi de F conditionnée par l'événement $\mathrm{S} = s$ est la loi $\mathcal{B}\left(s, \frac{1}{2}\right)$.

3. F est clairement à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Soit donc $k \in [\![0, n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathrm{P}(\mathrm{F} = k) = \sum_{s=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{F} = k | \mathrm{S} = s)\mathrm{P}(\mathrm{S} = s)$$

Il est clair que $\mathrm{P}(\mathrm{F} = k|\mathrm{S} = s) = 0$ pour $s < k$ donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{F} = k) &= \sum_{s=k}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{F} = k|\mathrm{S} = s)\mathrm{P}(\mathrm{S} = s) \\
&= \sum_{s=k}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^s \binom{s}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^s \left(\frac{5}{6}\right)^{n-s} \binom{n}{s} \\
&= \sum_{s=k}^{n} \frac{5^{n-s}}{2^s 6^n} \binom{s}{k}\binom{n}{s} \\
&= \sum_{s=k}^{n} \frac{5^{n-s}}{2^s 6^n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k} \\
&= \binom{n}{k} \sum_{s=0}^{n-k} \frac{5^{n-s-k}}{2^{s+k} 6^n} \binom{n-k}{s} \\
&= \binom{n}{k} \frac{5^n}{10^k 6^n} \sum_{s=0}^{n-k} \frac{1}{10^s} \binom{n-k}{s}
\end{aligned}$$

En appliquant la formule du binôme

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{F} = k) &= \binom{n}{k} \frac{5^n}{10^k 6^n} \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} \frac{5^n 11^{n-k}}{10^n 6^n} \\
&= \binom{n}{k} \frac{11^{n-k}}{12^n} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{12}\right)^k \left(\frac{11}{12}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que F suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{12}\right)$.

Solution 33

Notons N_k l'événement «tirer une boule noire au $k^{\text{ème}}$ tirage. D'après la formule des probabilités totales

$$P(N_3) = P(N_3|N_1 \cap N_2)P(N_1 \cap N_2) + P(N_3|\overline{N_1} \cap N_2)P(\overline{N_1} \cap N_2) + P(N_3|N_1 \cap \overline{N_2})P(N_1 \cap \overline{N_2}) + P(N_3|\overline{N_1} \cap \overline{N_2})P(\overline{N_1} \cap \overline{N_2})$$

Or

$$\begin{aligned}
P(N_3|N_1 \cap N_2) &= 0 & P(N_1 \cap N_2) &= P(N_2|N_1)P(N_1) = \frac{1}{9} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{45} \\
P(N_3|\overline{N_1} \cap N_2) &= \frac{1}{8} & P(\overline{N_1} \cap N_2) &= P(N_2|\overline{N_1})P(\overline{N_1}) = \frac{2}{9} \times \frac{8}{10} = \frac{8}{45} \\
P(N_3|N_1 \cap \overline{N_2}) &= \frac{1}{8} & P(N_1 \cap \overline{N_2}) &= P(\overline{N_2}|N_1)P(N_1) = \frac{8}{9} \times \frac{2}{10} = \frac{8}{45} \\
P(N_3|\overline{N_1} \cap \overline{N_2}) &= \frac{2}{8} = \frac{1}{4} & P(\overline{N_1} \cap \overline{N_2}) &= P(\overline{N_2}|\overline{N_1})P(\overline{N_1}) = \frac{7}{9} \times \frac{8}{10} = \frac{28}{45}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$P(N_3) = 0 \times \frac{1}{45} + \frac{1}{8} \times \frac{8}{45} + \frac{1}{8} \times \frac{8}{45} + \frac{1}{4} \times \frac{28}{45} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$$

Solution 34

Notons D la variable aléatoire correspondant au chiffre obtenu avec le dé. On utilise à plusieurs reprises la formule des probabilités totales.

Remarquons que $P(X = 0|D = k) = 0$ dès que $k > 3$. Ainsi

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= P(X = 0|D = 1)P(D = 1) + P(X = 0|D = 2)P(D = 2) + P(X = 0|D = 3)P(D = 3) \\
&= \frac{\binom{3}{1}}{\binom{6}{1}} \times \frac{1}{6} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{\binom{6}{3}} \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{120} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Remarquons que $P(X = 1|D = k) = 0$ dès que $k > 4$. Ainsi

$$\begin{aligned}
P(X = 1) &= P(X = 1|D = 1)P(D = 1) + P(X = 1|D = 2)P(D = 2) + P(X = 1|D = 3)P(D = 3) + P(X = 1|D = 4)P(D = 4) \\
&= \frac{\binom{3}{1}}{\binom{6}{1}} \times \frac{1}{6} + \frac{\binom{3}{1}^2}{\binom{6}{2}} \times \frac{1}{6} + \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{2}}{\binom{6}{3}} \times \frac{1}{6} + \frac{\binom{3}{1}}{\binom{6}{4}} \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{3}{40} + \frac{1}{30} = \frac{7}{24}
\end{aligned}$$

Remarquons que $P(X = 2|D = k) = 0$ dès que $k > 5$ ou $k < 2$. Ainsi

$$\begin{aligned}
P(X = 2) &= P(X = 2|D = 2)P(D = 2) + P(X = 2|D = 3)P(D = 3) + P(X = 2|D = 4)P(D = 4) + P(X = 2|D = 5)P(D = 5) \\
&= \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} \times \frac{1}{6} + \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{6}{3}} \times \frac{1}{6} + \frac{\binom{3}{2}^2}{\binom{6}{4}} \times \frac{1}{6} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{5}} \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{30} + \frac{3}{40} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{7}{24}
\end{aligned}$$

Remarquons que $P(X = 3|D = k) = 0$ dès que $k < 3$. Ainsi

$$\begin{aligned}
P(X = 3) &= P(X = 3|D = 3)P(D = 3) + P(X = 3|D = 4)P(D = 4) + P(X = 3|D = 5)P(D = 5) + P(X = 3|D = 6)P(D = 6) \\
&= \frac{1}{\binom{6}{3}} \times \frac{1}{6} + \frac{\binom{3}{1}}{\binom{6}{4}} \times \frac{1}{6} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{5}} \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{120} + \frac{1}{30} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{7}{24}
\end{aligned}$$

Remarque. On aurait bien entendu pu utiliser le fait que $\sum_{k=0}^{3} P(X = k) = 1$ pour calculer $P(X = 3)$ après avoir calculé $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.

Solution 35

1. X et Y sont à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. On utilise la formule des probabilités totales. Pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)=\sum_{l=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k|\mathrm{X}=l)\mathrm{P}(\mathrm{X}=l)=\sum_{l=k}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k|\mathrm{X}=l)\mathrm{P}(\mathrm{X}=l)=\sum_{l=k}^{n}\frac{1}{ln}=\frac{1}{n}\sum_{l=k}^{n}\frac{1}{l}$$

2. Il s'agit de procéder à une interversion de sommation.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathrm{Y}) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=k}^{n}\frac{k}{l}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{1\le k\le l\le n}\frac{k}{l}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\frac{k}{l}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{l+1}{2}\\ &= \frac{n+3}{4}\end{aligned}$$

3. On a clairement $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{4}$.

Solution 36

1. Il existe $\binom{6}{2}$ issues possibles à ce tirage. La variable aléatoire X est à valeurs dans $\{0,1,2\}$.
   - L'événement $\mathrm{X}=0$ correspond à tirer les deux boules parmi les quatre rouges. On en déduit que

   $$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}=\frac{2}{5}$$

   - L'événement $\mathrm{X}=1$ correspond à tirer une boule parmi les deux noires et une boule parmi les quatre rouges. On en déduit que

   $$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}}=\frac{8}{15}$$

   - L'événement $\mathrm{X}=2$ correspond à tirer les deux boules parmi les deux noires. On en déduit que

   $$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}}=\frac{1}{15}$$

2. La variable aléatoire Y est encore à valeurs dans $\{0,1,2\}$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{Y}=0) &= \mathrm{P}(\mathrm{Y}=0|\mathrm{X}=0)\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)+\mathrm{P}(\mathrm{Y}=0|\mathrm{X}=1)\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)+\mathrm{P}(\mathrm{Y}=0|\mathrm{X}=2)\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)\\
&= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}\times\frac{2}{5}+\frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}}\times\frac{8}{15}+1\times\frac{1}{15}\\
&= \frac{2}{5}\\
\mathrm{P}(\mathrm{Y}=1) &= \mathrm{P}(\mathrm{Y}=1|\mathrm{X}=0)\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)+\mathrm{P}(\mathrm{Y}=1|\mathrm{X}=1)\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)+\mathrm{P}(\mathrm{Y}=1|\mathrm{X}=2)\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)\\
&= \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}}\times\frac{2}{5}+\frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}}\times\frac{8}{15}+0\times\frac{1}{15}\\
&= \frac{8}{15}\\
\mathrm{P}(\mathrm{Y}=2) &= \mathrm{P}(\mathrm{Y}=2|\mathrm{X}=0)\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)+\mathrm{P}(\mathrm{Y}=2|\mathrm{X}=1)\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)+\mathrm{P}(\mathrm{Y}=2|\mathrm{X}=2)\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)\\
&= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}\times\frac{2}{5}+0\times\frac{8}{15}+0\times\frac{1}{15}\\
&= \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

3. On utilise la formule de Bayes

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1|\mathrm{Y}=1)=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{Y}=1|\mathrm{X}=1)\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)}{\mathrm{P}(\mathrm{Y}=1)}$$

Or $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=1)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)$ et on a vu à la question précédente que

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=1|\mathrm{X}=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}}=\frac{1}{2}$$

Ainsi la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire au premier tirage sachant que l'on a tiré une seule boule noire au second tirage est $\frac{1}{5}$.

4. La probabilité recherchée est :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1,\mathrm{Y}=1)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=0,\mathrm{Y}=2)=\mathrm{P}(\mathrm{Y}=1|\mathrm{X}=1)\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)+\mathrm{P}(\mathrm{Y}=2|\mathrm{X}=0)\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=\frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}}\times\frac{8}{15}+\frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{3}$$

Solution 37

1. $\alpha=\dfrac{2}{n(n+1)}$.
2. $\dfrac{6k(n+1-k)}{n(n+1)(n+2)}$

Solution 38

1. **a.** Soit $n\geq 1$. On calcule $p_{n+1}=\mathrm{P}(\mathrm{A}_{n+1})$ par la formule des probabilités totales avec le système complet $(\mathrm{A}_n,\overline{\mathrm{A}_n})$:

$$p_{n+1} \quad = \quad \mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1})\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)+\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_n}}(\mathrm{A}_{n+1})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_n})=\mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1})p_n+\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}_n}}(\mathrm{A}_{n+1})(1-p_n)\;.$$

D'après les hypothèses, $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$ est la probabilité pour, qu'ayant effectué le n-ième tirage dans l'urne U_1, celui-ci donne une boule blanche, c'est-à-dire $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B}_n)$. Puisque la proportion de boules blanches dans l'urne U_1 est $\frac{5}{6}$, on a $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B}_n)=\frac{5}{6}$, d'où $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1})=\frac{5}{6}$.

De même, $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$ est la probabilité pour, qu'ayant effectué le n-ième tirage dans l'urne U_2, celui-ci donne une boule noire, c'est-à-dire $P_{\overline{A_n}}(\overline{B_n})$. La proportion de boules noires dans l'urne U_2 est de $\frac{4}{6}$, donc $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{4}{6}$.
Finalement on obtient la formule de récurrence suivante :

$$\forall n \geq 1, \quad p_{n+1} = \frac{5}{6}p_n + \frac{4}{6}(1-p_n) = \frac{1}{6}p_n + \frac{4}{6}\ . \tag{1}$$

b. La relation (1) prouve que $(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmético-géométrique. La fonction associée $x \mapsto \frac{1}{6}x + \frac{4}{6}$ admet l'unique point fixe $\ell = \frac{4}{5}$. On sait alors que $(p_n - \ell)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $\frac{1}{6}$, d'où l'on tire $p_n - \ell = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}(p_1 - \ell)$ pour tout $n \geq 1$. Comme on choisit au hasard l'urne dans laquelle s'effectue le premier tirage, on a $p_1 = \frac{1}{2}$, et on obtient finalement : $\forall n \geq 1, \quad p_n = \frac{4}{5} - \frac{3}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$.

c. Puisque $\left|\frac{1}{6}\right| < 1$, on en déduit que $(p_n)_{n\geq 1}$ est convergente de limite $\ell = \frac{4}{5}$.

2. a. Soit $n \geq 1$. On calcule $q_n = P(B_n)$ en appliquant à nouveau la formule des probabilités totales avec le système complet $(A_n, \overline{A_n})$:

$$\begin{aligned} q_n &= P(B_n) = P_{A_n}(B_n)P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(B_n)P(\overline{A_n}) \\ &= \frac{5}{6}p_n + \frac{2}{6}(1-p_n) = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}\ . \end{aligned}$$

(on a déjà vu que $P_{A_n}(B_n) = \frac{5}{6}$, et $P_{\overline{A_n}}(B_n) = 1 - P_{\overline{A_n}}(\overline{B_n}) = \frac{2}{6}$).

b. Puisque $(p_n)_{n\geq 1}$ est convergente de limite $\frac{4}{5}$, on en déduit que $(q_n)_{n\geq 1}$ est convergente de limite $\ell' = \frac{1}{2}\frac{4}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$.

Variables aléatoires

Solution 39

1. a. Y et Z sont clairement à valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Soit $k \in]\!]1, n]\!]$.

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P\left(X_1 \in [\![1, k-1]\!], X_2 = k\right) + P\left(X_1 = k, X_2 \in [\![1, k-1]\!]\right) + P(X_1 = k, X_2 = k) \\ &= P(X_1 \in [\![1, k-1]\!])P(X_2 = k) + P(X_1 = k)P(X_2 \in [\![1, k-1]\!]) + P(X_1 = k)P(X_2 = k) \qquad \text{par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\ &= \frac{k-1}{n} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \times \frac{k-1}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2} \\ P(Z = k) &= P\left(X_1 \in [\![k+1, n]\!], X_2 = k\right) + P\left(X_1 = k, X_2 \in [\![k+1, n]\!]\right) + P(X_1 = k, X_2 = k) \\ &= P(X_1 \in [\![k+1, n]\!])P(X_2 = k) + P(X_1 = k)P(X_2 \in [\![k+1, n]\!]) + P(X_1 = k)P(X_2 = k) \qquad \text{par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\ &= \frac{n-k}{n} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \times \frac{n-k}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{2n-2k+1}{n^2} \end{aligned}$$

b. Calculons d'abord les espérances.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{n} kP(Y = k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 2k^2 - k = \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n} \\ E(Z) &= \sum_{k=1}^{n} kP(Z = k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 2nk - 2k^2 + k = \frac{1}{n^2}\left(n^2(n+1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \end{aligned}$$

Remarque. On peut aussi déterminer E(Z) plus simplement en remarquant que $Y + Z = X_1 + X_2$ et donc, par linéarité de l'espérance, $E(Y) + E(Z) = E(X_1) + E(X_2)$. Or on a évidemment $E(X_1) = E(X_2) = \frac{n+1}{2}$.

Calculons maintenant les variances. Tout d'abord

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2P(Y = k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 2k^3 - k^2 = \frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n} \\ E(Z^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2P(Z = k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 2nk^2 - 2k^3 + k^2 = \frac{(n+1)(n^2+n+1)}{6n} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathrm{V(Y)} = \mathrm{E(Y^2)} - \mathrm{E(Y)}^2 = \frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n} - \left(\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}\right)^2 = \frac{(n-1)(n+1)(2n^2+1)}{36n^2}$$
$$\mathrm{V(Z)} = \mathrm{E(Z^2)} - \mathrm{E(Z)}^2 = \frac{(n+1)(n^2+n+1)}{6n} - \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\right)^2 = \frac{(n-1)(n+1)(2n^2+1)}{36n^2}$$

c. On a facilement

$$\mathrm{E(Y)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{3} \qquad \mathrm{E(Z)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}$$
$$\mathrm{V(Y)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{18} \qquad \mathrm{V(Z)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{18}$$

d. Dans le cas particulier $n = 1$, Y et Z sont indépendantes puisque $\mathrm{P(Y = 1, Z = 1)} = 1 = \mathrm{P(Y = 1)P(Z = 1)}$.
Supposons maintenant $n \geq 2$. Soit $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $k < l$. Alors $\mathrm{P}(\mathrm{Y} = k, \mathrm{Z} = l) = 0$ puisque $\mathrm{Y} \geq \mathrm{Z}$. Mais $\mathrm{P}(\mathrm{Y} = k)\mathrm{P}(\mathrm{Z} = l) \neq 0$ d'après la question **1.a**. On en déduit que Y et Z ne sont pas indépendantes.

Remarque. On peut aussi remarquer que $\mathrm{V(Y+Z)} \neq \mathrm{V(Y)+V(Z)}$ en remarquant que $\mathrm{V(Y+Z)} = \mathrm{V(X_1+X_2)} = \mathrm{V(X_1)+V(X_2)}$. Or on a facilement $\mathrm{V(X_1)} = \mathrm{V(X_2)} = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$.

2. **a.** A nouveau, Y et Z sont bien à valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Par indépendance mutuelle de $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_p$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y} \leq k) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 \leq k, \dots, \mathrm{X}_p \leq k) = \prod_{j=1}^{p} \mathrm{P}(\mathrm{X}_j \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} \geq k) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 \geq k, \dots, \mathrm{X}_p \geq k) = \prod_{j=1}^{p} \mathrm{P}(\mathrm{X}_j \geq k) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^p$$

On a alors

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y} = k) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} \leq k) - \mathrm{P}(\mathrm{Y} \leq k-1) = \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} = k) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} \geq k) - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \geq k+1) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^p - \left(\frac{n-k}{n}\right)^p$$

b.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{Y}) &= \sum_{k=1}^{n} k\left[\left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{k}{n}\right)^p - \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{k-1}{n}\right)^p \\
&= n + \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{k}{n}\right)^p - \sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{k-1}{n}\right)^p \\
&= n + \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{k}{n}\right)^p - \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\left(\frac{k}{n}\right)^p \\
&= n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p \\
\mathrm{E}(\mathrm{Z}) &= \sum_{k=1}^{n} k\left[\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^p - \left(\frac{n-k}{n}\right)^p\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^p - \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{n-k}{n}\right)^p \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^p - \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{n-k}{n}\right)^p \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\left(\frac{n-k}{n}\right)^p - \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{n-k}{n}\right)^p \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^p \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p
\end{aligned}$$

Remarque. Pour le calcul de E(Z), on aurait aussi pu remarquer via le changement d'indice $l = n - k + 1$ que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{Z}) &= \sum_{k=1}^{n} k\left[\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^p - \left(\frac{n-k}{n}\right)^p\right] \\
&= \sum_{l=1}^{n} (n+1-l)\left[\left(\frac{l}{n}\right)^p - \left(\frac{l-1}{n}\right)^p\right] \\
&= (n+1)\sum_{l=1}^{n} \left[\left(\frac{l}{n}\right)^p - \left(\frac{l-1}{n}\right)^p\right] - \sum_{l=1}^{n} l\left[\left(\frac{l}{n}\right)^p - \left(\frac{l-1}{n}\right)^p\right] \\
&= n + 1 - \mathrm{E}(\mathrm{Y}) \qquad \text{par télescopage dans la première somme} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p
\end{aligned}$$

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $0 < \frac{k}{n} < 1$ donc $\lim_{p\to+\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^p = 0$.
Par opération sur les limites, il vient

$$\lim_{p\to+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{Y}) = n \qquad\qquad \lim_{p\to+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{Y}) = 1$$

Ceci est bien cohérent avec l'intuition.

c. Posons $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$. D'après le théorème sur les sommes de Riemann

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathrm{S}_n = \int_0^1 t^p \,\mathrm{d}t = \frac{1}{p+1}$$

ou encore $S_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{p+1} + o(n)$. On en déduit

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{np}{p+1} + o(n) \qquad \mathrm{E}(\mathrm{Z}) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{p+1} + o(n)$$

ou encore

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{np}{p+1} \qquad \mathrm{E}(\mathrm{Z}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{p+1}$$

Remarque. On est passé par des petits o pour pouvoir effectuer des additions.

Solution 40

---

1. La probabilité d'ouvrir la boîte gauche vide et qu'il reste r allumettes dans la boîte droite, est la probabilité d'avoir choisi N fois la boîte gauche et $\mathrm{N}-r$ fois la boîte droite pendant les $2\mathrm{N}-r$ premiers choix et d'avoir choisi la dernière fois la boîte gauche c'est-à-dire

$$\binom{2\mathrm{N}-r}{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{N}-r} \times \frac{1}{2} = \frac{\binom{2\mathrm{N}-r}{\mathrm{N}}}{2^{2\mathrm{N}-r+1}}$$

Puisque les boîtes gauche et droite jouent des rôles symétriques, la probabilité d'ouvrir la boîte droite vide et qu'il reste r allumettes dans la boîte gauche est la même. Finalement

$$\mu_{r,\mathrm{N}} = 2\frac{\binom{2\mathrm{N}-r}{\mathrm{N}}}{2^{2\mathrm{N}-r+1}} = \frac{\binom{2\mathrm{N}-r}{\mathrm{N}}}{2^{2\mathrm{N}-r}}$$

2. On a $\mu_{0,\mathrm{N}} = \frac{\binom{2\mathrm{N}}{\mathrm{N}}}{2^{2\mathrm{N}}}$. En utilisant la formule de Stirling, on obtient $\mu_{0,\mathrm{N}} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}\pi}}$.

3. Soient $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0, \mathrm{N}]\!]$.

$$\begin{aligned}
(2\mathrm{N}+2)\mu_{r+1,\mathrm{N}+1} &= 2(\mathrm{N}+1)\frac{\binom{2(\mathrm{N}+1)-(r+1)}{\mathrm{N}+1}}{2^{2(\mathrm{N}+1)-(r+1)}} \\
&= \frac{(\mathrm{N}+1)\binom{2\mathrm{N}+1-r}{\mathrm{N}+1}}{2^{2\mathrm{N}-r}} \\
&= \frac{(2\mathrm{N}+1-r)\binom{2\mathrm{N}-r}{\mathrm{N}}}{2^{2\mathrm{N}-r}} \\
&= (2\mathrm{N}+1-r)\mu_{r,\mathrm{N}}
\end{aligned}$$

4. Si on note X_N la variable aléatoire correspondant au nombre d'allumettes restantes, E_N est l'espérance de X_N, c'est-à-dire que

$$\mathrm{E}_\mathrm{N} = \sum_{r=0}^{\mathrm{N}} r\mu_{r,\mathrm{N}}$$

Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, pour tout $r \in [\![0, \mathrm{N}]\!]$

$$r\mu_{r,\mathrm{N}} = (2\mathrm{N}+1)\mu_{r,\mathrm{N}} - (2\mathrm{N}+2)\mu_{r+1,\mathrm{N}+1}$$

donc

$$\sum_{r=0}^{\mathrm{N}} r\mu_{r,\mathrm{N}} = (2\mathrm{N}+1)\sum_{r=0}^{\mathrm{N}} \mu_{r,\mathrm{N}} - 2(\mathrm{N}+1)\sum_{r=0}^{\mathrm{N}} \mu_{r+1,\mathrm{N}+1}$$

ou encore en changeant d'indice dans la dernière somme

$$\mathrm{E}_\mathrm{N} = (2\mathrm{N}+1)\sum_{r=0}^{\mathrm{N}} \mu_{r,\mathrm{N}} - 2(\mathrm{N}+1)\sum_{r=1}^{\mathrm{N}+1} \mu_{r,\mathrm{N}+1}$$

Mais le nombre d'allumettes restantes est un entier compris entre 0 et N (dans le cas où il y a N allumettes dans chaque boîte au départ) donc $\sum_{r=0}^{N} \mu_{r,N} = 1$. Pour la même raison, $\sum_{r=0}^{N+1} \mu_{r,N+1} = 1$. On en déduit

$$E_N = (2N+1) - 2(N+1)(1-\mu_{0,N+1})$$

Or $\mu_{0,N+1} = \frac{\binom{2N+2}{N+1}}{2^{2N+2}}$ donc

$$\begin{aligned}
E_N &= \frac{(N+1)\binom{2N+2}{N+1}}{2^{2N+1}} - 1 \\
&= \frac{(2N+2)\binom{2N+1}{N}}{2^{2N+1}} - 1 \\
&= \frac{(N+1)\binom{2N+1}{N}}{2^{2N}} - 1 \\
&= \frac{(N+1)\binom{2N+1}{2N+1-N}}{2^{2N}} - 1 \\
&= \frac{(N+1)\binom{2N+1}{N+1}}{2^{2N}} - 1 \\
&= \frac{(2N+1)\binom{2N}{N}}{2^{2N}} - 1
\end{aligned}$$

5. En utilisant à nouveau la formule de Stirling, on obtient $E_N \underset{N\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{N}{\pi}}$.

6. Notons Y_N la variable correspondant au nombre d'allumettes utilisées. On a évidemment $X_N + Y_N = 2N$. F_N est l'espérance de Y_N, c'est-à-dire

$$F_N = E(Y_N) = E(2N - X_N) = 2N - E_N = 2N + 1 - \frac{2N+1}{2^{2N}}\binom{2N}{N} = (2N+1)\left(1 - \frac{\binom{2N}{N}}{2^{2N}}\right)$$

Solution 41

---

1. U suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{u}{b}\right)$. Son espérance est $\frac{nu}{b}$ et sa variance est $\frac{nu}{b}\left(1 - \frac{u}{b}\right)$.
De même, D et T suivent respectivement les lois binomiales $\mathcal{B}\left(n, \frac{d}{b}\right)$ et $\mathcal{B}\left(n, \frac{t}{b}\right)$.

2. On peut par exemple remarquer que $P(U = n) \neq 0$ et $P(D = n) \neq 0$ tandis que $P(U = n, D = n) = 0$. Ainsi $P(U = n, D = n) \neq P(U = n)P(D = n)$, ce qui prouve que U et D ne sont pas indépendantes.

3. Puisque $U + D + T = n$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P(U + D = k) = P(T = n - k)$$

On en déduit aisément que $U + D$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, 1 - \frac{t}{b}\right)$.
De plus,

$$E(U + D) = E(n - T) = n - E(T) = n - \frac{nt}{b} = \frac{n(b-t)}{b}$$

Enfin,

$$V(U + D) = V(n - T) = V(T) = \frac{nt}{b}\left(1 - \frac{t}{b}\right)$$

4. On sait que

$$\text{Cov}(U, D) = \frac{1}{2}\left(V(U + D) - V(U) - V(D)\right)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\mathrm{U},\mathrm{D}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{nt}{b}\left(1-\frac{t}{b}\right)-\frac{nu}{b}\left(1-\frac{u}{b}\right)-\frac{nd}{b}\left(1-\frac{d}{b}\right)\right)\\
&= \frac{n}{2b^2}\left(t(b-t)-u(b-u)-d(b-d)\right)\\
&= \frac{n}{2b^2}\left((b-u-d)(u+d)-u(b-u)-d(b-d)\right)\\
&= -\frac{-nud}{b^2}
\end{aligned}$$

Solution 42

---

1. On vérifie aisément que $\mathrm{X}_1(\Omega)=\{-1,1\}$, $\mathrm{X}_2(\Omega)=\{-2,0,2\}$, et $\mathrm{X}_3(\Omega)=\{-3,-1,1,3\}$.

2. Soit $n\geq 1$. Notons D_n le nombre de déplacements vers la droite du mobile entre les instants 0 et $n-1$. D_n peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 (cas où le mobile se déplace les n fois à gauche) et n (cas où le mobile se déplace les n fois à droite). Or si $\mathrm{D}_n=k$, on a $\mathrm{X}_n=k-(n-k)=2k-n$, d'où le résultat :

$$\mathrm{X}_n(\Omega)=\{2k-n, 0\leq k\leq n\}=\{-n,-n+2,\dots,n-2,n\}.$$

3. Fixons $k\in\{0,\dots,n\}$. Avec les notations qui précèdent, l'évènement $\{\mathrm{X}_n=2k-n\}$ est égal à $\{\mathrm{D}_n=k\}$. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les k déplacements vers la droite parmi les n, et, ce choix effectué, la probabilité qu'il y ait eu ces k déplacements vers la droite et $n-k$ déplacements vers la gauche aux instants restants est p^kq^{n-k}. On en déduit que $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n=2k-n)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$.

4. **a.** On a en fait $\mathrm{Y}_n=\mathrm{D}_n$ avec les notations précédentes, puisque $\mathrm{Y}_n=k\iff \mathrm{X}_n=2k-n\iff \mathrm{D}_n=k$. Ainsi $\mathrm{Y}_n(\Omega)=\mathrm{D}_n(\Omega)=\{0,\dots,n\}$ et

$$\forall 0\leq k\leq n,\quad \mathrm{P}(\mathrm{Y}_n=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}.$$

La loi de Y_n est donc la loi binomiale de paramètres n et p. On sait alors que $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n)=np$ et $\mathrm{V}(\mathrm{Y}_n)=npq$.

b. Puisque $\mathrm{X}_n=2\mathrm{Y}_n-n$, on en déduit que $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)=2\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n)-n=n(2p-1)$ et que $\mathrm{V}(\mathrm{X}_n)=2^2\mathrm{V}(\mathrm{Y}_n)=4npq$.

c. La limite de $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)$ dépend du signe de $2p-1$:

$$\begin{cases}
\text{si}\quad 0<p<\frac{1}{2}, & \lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)=-\infty\\
\text{si}\quad p=\frac{1}{2}, & \lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)=0\\
\text{si}\quad \frac{1}{2}<p<1, & \lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)=+\infty
\end{cases}$$

Notons que dans le cas $p=\frac{1}{2}$, la variable X_n est centrée pour tout n : la position moyenne du mobile reste toujours 0, ce qui n'est pas étonnant puisqu'à chaque déplacement il a autant de chances d'aller à droite qu'à gauche.
Puisque $0<p<1$, on a $pq=p(1-p)>0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{V}(\mathrm{X}_n)=+\infty$.
Ainsi pour toute valeur de $p\in]0,1[$, la dispersion de X_n par rapport à sa moyenne tend vers l'infini, ce qui traduit le fait que plus n est grand plus il est difficile de prédire la position qu'aura le mobile au bout de n déplacements.

Solution 43

---

1. Numérotons les boules rouges de 1 à 5, les blanches de 6 à 10 et les bleues de 11 à 16. L'ensemble Ω des tirages possibles est alors l'ensemble des 4-listes d'éléments distincts de $\{1,\cdots,16\}$:

$$\Omega=\left\{(n_1,n_2,n_3,n_4)\in\mathbb{N}_{16}^4 \ /\ n_i \text{ distincts 2 à 2}\right\}.$$

(n_i correspondant au numéro de la i-ème boule tirée).
Le cardinal de Ω est par définition $\mathrm{A}_{16}^4=16.15.14.13=43680$. Comme le tirage s'effectue au hasard, la probabilité est uniforme sur Ω : chaque 4-liste a la même probabilité $\frac{1}{43680}$.
La variable aléatoire X peut prendre les valeurs $0,1,2,3$ ou 4. Pour chaque $k\in\{0,\dots,4\}$, on dénombre les cas favorables à l'évènement $\{\mathrm{X}=k\}$:

- les tirages favorables appartenant à $\{X = 0\}$ sont les 4-listes d'éléments distincts de $\{6, \dots, 16\}$ (tirages de boules blanches ou bleues uniquement), il y en a donc $A_{11}^4 = 11.10.9.8 = 7920$. Ainsi :

$$P(X = 0) = \frac{A_{11}^4}{43680} = \frac{7920}{43680} = \frac{33}{182}.$$

- pour qu'un tirage appartienne à $\{X = 1\}$, il y a $\binom{5}{1} = 5$ façcons de choisir le numéro de la boule rouge tirée, puis 4 façons de choisir le rang d'apparition de cette boule rouge, et $A_{11}^3 = 11.10.9$ façons de compléter le tirage avec 3 boules blanches ou bleues. Ainsi :

$$P(X = 1) = \frac{\binom{5}{1}.4.A_{11}^3}{43680} = \frac{19800}{43680} = \frac{165}{364}.$$

- pour qu'un tirage appartienne à $\{X = 2\}$, il y a $\binom{5}{2}$ façons de choisir les numéros des deux boules rouges tirées, puis A_4^2 façons de choisir les rangs d'apparition de ces boules rouges, et $A_{11}^2 = 11.10$ façons de compléter le tirage avec 2 boules blanches ou bleues. Ainsi

$$P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}.A_4^2.A_{11}^2}{43680} = \frac{13200}{43680} = \frac{55}{182}.$$

- par le même raisonnement on obtient aisément :

$$\begin{cases} P(X = 3) &= \dfrac{\binom{5}{3}.A_4^3.A_{11}^1}{43680} = \dfrac{2640}{43680} = \dfrac{11}{182} \\ P(X = 4) &= \dfrac{\binom{5}{4}.A_4^4}{43680} = \dfrac{120}{43680} = \dfrac{1}{364} \end{cases}$$

Remarque : La formule générale pour $P(X = k)$ est donc :

$$\forall\, 0 \le k \le 4, \quad P(X = k) = \frac{\binom{5}{k}.A_4^k.A_{11}^{4-k}}{43680}.$$

On peut aussi exprimer ce résultat avec des coefficients binômiaux ; en effet $43680 = A_{16}^4 = 4! \times \binom{16}{4}$ et

$$A_4^k.A_{11}^{4-k} = \frac{4!}{(4-k)!} \times \frac{11!}{(11-4+k)!} = 4! \times \binom{11}{4-k},$$

d'où finalement, en simplifiant en haut et en bas par 4! :

$$\forall\, 0 \le k \le 4, \quad P(X = k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{11}{4-k}}{\binom{16}{4}}.$$

On aurait pu trouver directement cette formule si on avait considéré le résultat d'un tirage comme une partie de 4 éléments parmi 16 (sans attribuer de numéros aux boules, ni tenir compte de l'ordre des tirages).

Connaissant les $P(X = k)$ pour $0 \le k \le 4$ (penser à vérifier qu'on a bien qu'on a bien $\sum_{k=0}^{4} P(X = k) = 1$), on en déduit l'espérance :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{4} kP(X = k) = 1 \cdot \frac{165}{364} + 2 \cdot \frac{55}{182} + 3.\frac{11}{182} + 4.\frac{1}{364} \\ &= \frac{455}{364} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

2. On a toujours $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
Dénombrons les cas favorables à $\{Y = k\}$ pour $0 \le k \le 4$ fixé :
d'abord il y a $\binom{4}{k}$ façons de fixer les k tirages où on obtient une boule rouge parmi les 4 tirages en tout. Ensuite, puisqu'à chaque tirage on a la même probabilité $\frac{5}{16}$ (resp. $\frac{11}{16}$) de tirer une boule rouge (resp. blanche ou bleue), la probabilité de tirer une boule rouge (resp. blanche ou bleue) à chacun des k (resp. $4 - k$) tirages fixés précédemment vaut $\left(\frac{5}{16}\right)^k$ (resp. $\left(\frac{11}{16}\right)^{4-k}$).
On en conclut que :

$$\forall\, 0 \le k \le 4, \quad P(Y = k) = \binom{4}{k}.\left(\frac{5}{16}\right)^k.\left(\frac{11}{16}\right)^{4-k}.$$

On en déduit alors l'espérance de Y en écrivant que $k\binom{4}{k} = 4\binom{3}{k-1}$ pour tout $1 \le k \le 4$, puis en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\mathrm{Y}) &= \sum_{k=1}^{4} k\binom{4}{k}.\left(\frac{5}{16}\right)^k.\left(\frac{11}{16}\right)^{4-k} \\ &= 4.\frac{5}{16}\sum_{k=1}^{4}\binom{3}{k-1}\left(\frac{5}{16}\right)^{k-1}\left(\frac{11}{16}\right)^{3-(k-1)} \\ &= 4.\frac{5}{16}\sum_{j=0}^{3}\binom{3}{j}\left(\frac{5}{16}\right)^{j}\left(\frac{11}{16}\right)^{3-j} = \frac{5}{4}\left(\frac{5}{16}+\frac{11}{16}\right)^3 = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Solution 44

Les trois tirages étant indépendants on trouve

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{4} = \frac{11}{24},$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=3) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4} = \frac{1}{24}, \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}=2) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

Bien sûr, on peut aussi calculer la dernière probabilité par

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \neq 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{11}{24} - \frac{1}{24} = \frac{1}{6}.$$

Solution 45

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\times k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \mathrm{E}(\mathrm{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}$$

$$\sigma(\mathrm{X}) = \frac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}}$$

Lois de variables aléatoires

Solution 46

1. X_n est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Soit donc $k \in [\![0, n]\!]$.
Se donner une application de E_n à k points fixes revient à

   - choisir les k points fixes parmi les n éléments de $[\![1, n]\!]$ soit $\binom{n}{k}$ possibilités ;
   - choisir pour chacun des $n-k$ éléments restants une image autre que lui-même soit $(n-1)^{n-k}$ possibilités.

   On en déduit qu'il existe $\binom{n}{k}(n-1)^{n-k}$ applications de E_n ayant exactement k points fixes. Puisque $\operatorname{card} \mathrm{E}_n = n^n$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = \binom{n}{k}\frac{(n-1)^{n-k}}{n^n}$$

2. D'après la question précédente pour $n \ge k$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{(n-1)^{n-k}}{n^n}$$

ou encore

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k k!}\frac{(n-1)^{n-k}}{n^{n-k}}$$

On a clairement $n(n-1)\dots(n-k+1) \sim n^k$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k k!} = \frac{1}{k!}$$

De plus,

$$\frac{(n-1)^{n-k}}{n^{n-k}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} = \exp\left((n-k)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$$

Or $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$ donc $\lim_{n\to+\infty}(n-k)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -1$ puis

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)^{n-k}}{n^{n-k}} = e^{-1}$$

Finalement

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}$$

Solution 47

1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{Y}) &= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k) \\
&= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\left(\mathrm{P}(\mathrm{Y}>k-1) - \mathrm{P}(\mathrm{Y}>k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\mathrm{P}(\mathrm{Y}>k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}(\mathrm{Y}>k) \\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} (k+1)\mathrm{P}(\mathrm{Y}>k) - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\mathrm{P}(\mathrm{Y}>k) \qquad \text{par changement d'indice} \\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} (k+1)\mathrm{P}(\mathrm{Y}>k) - \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} k\mathrm{P}(\mathrm{Y}>k) \\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{P}(\mathrm{Y}>k) - \mathrm{N}\mathrm{P}(\mathrm{Y}>\mathrm{N}) \\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{P}(\mathrm{Y}>k) \qquad \text{car } \mathrm{P}(\mathrm{Y}>n) = 0
\end{aligned}$$

2. **a.** Soit $k \in [\![1, \mathrm{N}]\!]$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{T}_n \leq k) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 \leq k, \mathrm{X}_2 \leq k, \dots, \mathrm{X}_n \leq k) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 \leq k)\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 \leq k)\dots\mathrm{P}(\mathrm{X}_n \leq k)$$

car les variables $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes. Mais comme chacune de ces variables suit la loi uniforme sur $[\![1, \mathrm{N}]\!]$

$$\mathrm{P}(\mathrm{T}_n \leq k) = \left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n$$

b. Pour tout $k \in [\![, \mathrm{N}]\!]$

$$\mathrm{P}(\mathrm{T}_n = k) = \mathrm{P}(\mathrm{T}_n \leq k) - \mathrm{P}(\mathrm{T}_n \leq k-1) = \left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n - \left(\frac{k-1}{\mathrm{N}}\right)^n$$

c.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{T}_n) &= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\left(\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n - \left(\frac{k-1}{\mathrm{N}}\right)^n\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\left(\frac{k-1}{\mathrm{N}}\right)^n \\
&= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n - \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} (k+1)\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} k\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n - \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} (k+1)\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n \\
&= \mathrm{N} - a_n(\mathrm{N})
\end{aligned}
$$

3. a. Soit $k \in [\![0, \mathrm{N}-1]\!]$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}_n > k) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 > k, \mathrm{X}_2 > k, \dots, \mathrm{X}_n > k) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 > k)\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 > k) \dots \mathrm{P}(\mathrm{X}_n > k)$$

car les variables $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes. Mais comme chacune de ces variables suit la loi uniforme sur $[\![1, \mathrm{N}]\!]$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}_n > k) = \left(\frac{\mathrm{N}-k}{\mathrm{N}}\right)^n$$

b. En utilisant la première question

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}_n) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \left(\frac{\mathrm{N}-k}{\mathrm{N}}\right)^n = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n$$

via un changement d'indice. Autrement dit, $\mathrm{E}(\mathrm{Z}_n) = 1 + a_n(\mathrm{N})$.

4. a. Pour $k \in [\![1, \mathrm{N}-1]\!]$, $0 \leq \frac{k}{\mathrm{N}} < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n = 0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} a_n(\mathrm{N}) = 0$. Or $\mathrm{E}(\mathrm{T}_n) = \mathrm{N} - a_n(\mathrm{N})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{T}_n) = \mathrm{N}$.

b. Par linéarité, $\mathrm{E}(\mathrm{S}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{T}_n) + \mathrm{E}(\mathrm{Z}_n) - 1 = \mathrm{N}$ en utilisant les questions précédentes.

Solution 48

Posons $\mathrm{X} = \mathbb{1}_\mathrm{A} + 2\mathbb{1}_\mathrm{B}$. Alors $\mathrm{X}(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. On a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) &= \mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}) - \mathrm{P}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{5}{12} \\
\mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) &= \mathrm{P}(\mathbb{1}_\mathrm{A} = 0, \mathbb{1}_\mathrm{B} = 1) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{4} \\
\mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) &= \mathrm{P}(\mathbb{1}_\mathrm{A} = 0, \mathbb{1}_\mathrm{B} = 1) = \mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{12} \\
\mathrm{P}(\mathrm{X} = 3) &= \mathrm{P}(\mathbb{1}_\mathrm{A} = 1, \mathbb{1}_\mathrm{B} = 1) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Remarque. On vérifie que $\sum_{k=0}^{3} \mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = 1$.

On en déduit

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= \sum_{k=0}^{3} k\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \frac{7}{6} \\
\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \mathrm{E}(\mathrm{X})^2 &= \sum_{k=0}^{3} k^2\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{53}{36}
\end{aligned}
$$

Solution 49

Puisque le rang d'apparition des boules rouges ne dépend que du placement des boules rouges, on peut prendre comme univers l'ensemble

des combinaisons des r places parmi N.
Fixons $n \in [\![1, r]\!]$. Remarquons que X_n est à valeurs dans $[\![n, N - r + n]\!]$ puisqu'il y a $n - 1$ boules rouges avant la $n^{\text{ème}}$ et $r - n$ après.
Fixons donc $k \in [\![n, N - r + n]\!]$ et dénombrons les combinaisons faisant apparaître la $n^{\text{ème}}$ boule en $k^{\text{ème}}$ position. Choisir une telle combinaison revient à placer $n - 1$ boules parmi les $k - 1$ places précédant la $k^{\text{ème}}$ et $r - n$ parmi les $N - k$ places lui succédant. Il existe donc $\binom{k-1}{n-1}\binom{N-k}{r-n}$ combinaisons faisant apparaître la $n^{\text{ème}}$ boule en $k^{\text{ème}}$ position.
Puisqu'il existe $\binom{N}{r}$ combinaisons de r places parmi N et que tous les tirages sont implicitement équiprobables

$$P(X_n = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}\binom{N-k}{r-n}}{\binom{N}{r}}$$

Solution 50

Remarquons tout d'abord que X est à valeurs dans $\{1, 2, 3, 4\}$.

On a clairement $\text{card}(X = 1) = 6$.

Se donner une issue de l'événement $X = 2$ consiste à :

1. choisir deux numéros : $\binom{6}{2}$ possibilités ;
2. choisir combien de fois chacun des numéros apparaîtra autrement dit à écrire 4 comme somme de deux entiers naturels non nuls (4=1+3=2+2=3+1) : 3 possibilités.

Ainsi $\text{card}(X = 2) = 3\binom{6}{2} = 45$.

De même, se donner une issue de l'événement $X = 3$ consiste à :

1. choisir deux numéros : $\binom{6}{3}$ possibilités ;
2. choisir combien de fois chacun des numéros apparaîtra autrement dit à écrire 4 comme somme de trois entiers naturels non nuls (4=1+1+2=1+2+1=2+1+1) : 3 possibilités.

Ainsi $\text{card}(X = 3) = 3\binom{6}{3} = 60$.

Enfin, on a clairement $\text{card}(X = 4) = \binom{6}{4} = 15$.

Puisque $(X = k)_{1 \leq k \leq 4}$ est un système complet d'événements, $\text{card}(\Omega) = \sum_{k=1}^{4} \text{card}(X = k) = 126$ puis

$$P(X = 1) = \frac{\text{card}(X = 1)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{21} \qquad P(X = 2) = \frac{\text{card}(X = 2)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{5}{14} \qquad P(X = 3) = \frac{\text{card}(X = 3)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{10}{21} \qquad P(X = 4) = \frac{\text{card}(X = 4)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{5}{42}$$

Il vient alors

$$E(X) = \sum_{k=1}^{4} kP(X = k) = 1 \times \frac{1}{21} + 2 \times \frac{5}{14} + 3 \times \frac{10}{21} + 4 \times \frac{5}{42} = \frac{8}{3}$$

et enfin

$$V(X) = \sum_{k=1}^{4} k^2 P(X = k) - E(X)^2 = 1 \times \frac{1}{21} + 4 \times \frac{5}{14} + 9 \times \frac{10}{21} + 16 \times \frac{5}{42} - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{23}{3} - \frac{64}{9} = \frac{5}{9}$$

Solution 51

---

1. X suit évidemment la loi binomiale de paramètres n et $\frac{N_1}{N}$. Classiquement, $E(X) = \frac{nN_1}{N}$ et $V(X) = \frac{nN_1N_2}{N^2}$.
2. L'univers Ω de l'expérience aléatoire est formé des n-arrangements de N boules. Ainsi $\text{card}(\Omega) = \frac{N!}{(N-n)!}$.
   Y est à valeurs dans $[\![\max(0, n - N_2), \min(n, N_1)]\!]$. Soit k dans cet ensemble. Se donner une issue de l'événement $Y = k$ consiste à choisir les emplacements des k boules blanches ($\binom{n}{k}$ possibilités) puis à se donner un k-arrangement des N_1 boules blanches et un $(n - k)$-arrangement des N_2 boules blanches. Ainsi

   $$\text{card}(Y = k) = \binom{n}{k} \frac{N_1!}{(N_1 - k)!} \frac{N_2!}{(N_2 - n + k)!} = n! \binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n - k}$$

   puis

   $$P(Y = k) = \frac{\text{card}(Y = k)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{n!\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\frac{N!}{(N-n)!}} = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

On peut calculer l'espérance et la variance de Y à l'aide de formules sur les coefficients binomiaux mais les calculs s'avèrent fastidieux et longs. On va adopter une méthode plus astucieuse.
Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des boules blanches et pour $b \in \mathcal{B}$, Y_b la variable aléatoire valant 1 si la boule b a été tirée au cours des n tirages et 0 sinon. Il est clair que $Y = \sum_{b\in\mathcal{B}} Y_b$. Ainsi $E(Y) = \sum_{b\in\mathcal{B}} E(Y_b)$. Or pour tout $b \in \mathcal{B}$, Y_b est une variable de Bernoulli dont le paramètre p est la probabilité $P(Y = 1)$ dans le cas où N_1 vaut 1. Autrement dit $p = \frac{n}{N}$. Ainsi

$$E(Y) = \sum_{b\in\mathcal{B}} \frac{n}{N} = \frac{nN_1}{N}$$

Si $N = 1$, on a évidemment $V(Y) = 0$. Supposons donc $n \geq 2$.
Soit $b \in \mathcal{B}$. Y_b étant une variable de Bernoulli, $V(Y_b) = p(1-p) = \frac{n(N-n)}{N^2}$.
Soit $(b_1, b_2) \in \mathcal{B}^2$ tel que $b_1 \neq b_2$. Alors $\text{Cov}(Y_{b_1}, Y_{b_2}) = E(Y_{b_1}Y_{b_2}) - E(Y_{b_1})E(Y_{b_2})$. Mais $Y_{b_1}Y_{b_2}$ est à nouveau une variable de Bernoulli dont le paramètre est la probabilité $P(Y = 2)$ lorsque N_1 vaut 2. On en déduit

$$\text{Cov}(Y_{b_1}, Y_{b_2}) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} - \left(\frac{n}{N}\right)^2 = -\frac{n(N-n)}{N^2(N-1)}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
V(Y) &= V(\sum_{b\in\mathcal{B}} Y_b) \\
&= \sum_{b\in\mathcal{B}} V(Y_b) + \sum_{(b_1,b_2)\in\mathcal{B}^2, b_1\neq b_2} \text{Cov}(Y_{b_1}, Y_{b_2}) \\
&= \frac{N_1 n(N-n)}{N^2} - \frac{N_1(N_1-1)n(N-n)}{N^2(N-1)} \\
&= \frac{N_1 n(N-n)(N-1) - N1(N_1-1)n(N-n)}{N^2(N-1)} \\
&= \frac{N_1 n(N-n)(N-N_1)}{N^2(N-1)} \\
&= \frac{N_1}{N}\frac{N_2}{N}\frac{N-n}{N-1}
\end{aligned}$$

3. L'univers Ω de l'expérience aléatoire est formé des n-combinaisons de N boules. Ainsi $\text{card}(\Omega) = \binom{N}{n}$.
Z est encore à valeurs dans $[\![\max(0, n - N_2), \min(n, N_1)]\!]$. Soit k dans cet ensemble. Se donner une issue de l'événement $Z = k$ correspond à choisir k boules parmi les N_1 boules blanches et $n - k$ boules parmi les N_2 boules noires. Ainsi

$$\text{card}(Z = k) = \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$$

puis

$$P(Z = k) = \frac{\text{card}(Z = k)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Z suit donc la même loi que Y et a donc même espérance et même variance.

Remarque. La loi de Y et Z s'appelle la *loi hypergéométrique de paramètres n, N et $\frac{N_1}{N}$*.

Solution 52

1. Posons $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$. Alors $M = XX^\top$. La matrice M est donc de rang au plus 1 (toutes ses colonnes sont coliénaires à X). Ainsi M suit une loi de Bernoulli. De plus, par indépendance des X_i,

$$\mathbb{P}(\text{rg}\, M = 0) = \mathbb{P}(M = 0) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n X_i = 0\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = 0) = (1-p)^n$$

Ainsi rg M suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1-p)^n$.

2. Remarquons que $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i^2$. Mais comme les X_i sont à valeurs dans $\{0,1\}$, $\mathrm{X}_i^2 = \mathrm{X}_i$. Finalement, $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ suit une loi binomiale de paramètres n et p car les X_i sont indépendantes.

Solution 53

Pour $1 \leq i \leq 6$, notons p_i (resp. q_i) la probabilité d'obtenir i en lançant le premier (resp. le deuxième) dé. De même, pour $2 \leq i \leq 12$, notons r_i la probabilité d'obtenir i en lançant deux dés. On a la relation suivante : $r_k = \sum_{i+j=k} p_i q_j$.

Notons $\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{6} p_i \mathrm{X}^{i-1}$, $\mathrm{Q} = \sum_{i=1}^{6} q_i \mathrm{X}^{i-1}$ et $\mathrm{R} = \sum_{i=2}^{12} q_i \mathrm{X}^{i-2}$. La relation précédente signifie que $\mathrm{R} = \mathrm{PQ}$. S'il y avait équiprobabilité sur les sommes, on aurait $r_i = \frac{1}{11}$ pour $2 \leq i \leq 12$ i.e. $\mathrm{R} = \frac{1}{11} \sum_{i=0}^{10} \mathrm{X}^i$.

Les racines de R sont les racines $11^{\text{èmes}}$ de l'unité privées de 1. Aucune de ces racines n'est réelle. De plus, $\deg \mathrm{P} \leq 5$ et $\deg \mathrm{Q} \leq 5$. Puisque $\deg \mathrm{R} = \deg \mathrm{PQ} = 10$, $\deg \mathrm{P} = \deg \mathrm{Q} = 5$. Puisque 5 est impair, les polynômes P et Q admettent chacun au moins une racine réelle en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, d'où une contradiction.
Il est donc impossible de piper deux dés de manière à avoir équiprobabilité sur les sommes.

Solution 54

Si $n = 0$, la réponse est évidemment affirmative. Supposons maintenant $n \geq 1$.
Supposons qu'il existe deux variables aléatoires indépendantes A et B à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ dont la somme $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$ suive la loi uniforme sur $[\![0, 2n]\!]$. Posons $a_k = \mathrm{P}(\mathrm{A} = k)$ et $b_k = \mathrm{P}(\mathrm{B} = k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$. De même, posons $c_k = \mathrm{P}(\mathrm{C} = k)$ pour $k \in [\![0, 2n]\!]$. On a alors pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

Mais puisque $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$ suit une loi uniforme sur $[\![0, 2n]\!]$, $c_k = \frac{1}{2n+1}$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$. On a donc en particulier $a_0 b_0 = a_n b_n = \frac{1}{2n+1}$. Puisque $n \geq 1$

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j \geq a_0 b_n + a_n b_0$$

(la somme comporte au moins ces deux termes). Ainsi

$$\frac{1}{2n+1} \geq a_0 b_n + a_n b_0$$

En vertu des égalités $a_0 b_0 = a_n b_n = \frac{1}{2n+1}$, les réels a_0, a_n, b_0, b_n sont non nuls et même strictement positifs puisqu'il s'agit de probabilités. On peut donc affirmer que $a_0 b_n + a_n b_0$ est strictement supérieur à $a_0 b_n$ et $a_n b_0$. On a donc $0 \leq a_0 b_n < \frac{1}{2n+1}$ et $0 \leq a_n b_0 < \frac{1}{2n+1}$. Il s'ensuit que

$$(a_0 b_n)(a_n b_0) < \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Or $(a_0 b_n)(a_n b_0) = (a_0 b_0)(a_n b_n) = \frac{1}{(2n+1)^2}$ d'où une contradiction.
Il n'existe donc pas deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ dont la somme suit une loi uniforme sur $[\![0, 2n]\!]$.

Solution 55

Remarquons tout d'abord que $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ est à valeurs dans $[\![2, n]\!]$ tandis que Z est à valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Puisque $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ et Z sont indépendantes,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = \mathrm{Z}) = \sum_{k=2}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k, \mathrm{Z} = k) = \sum_{k=2}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k)\mathrm{P}(\mathrm{Z} = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k)$$

De plus, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k) = \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{P}(\mathrm{X} = j, \mathrm{Y} = k - j) = \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{P}(\mathrm{X} = j)\mathrm{P}(\mathrm{Y} = k - j) = \frac{k-1}{n^2}$$

Ainsi

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = \mathrm{Z}) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=2}^{n} k - 1 = \frac{n-1}{2n^2}$$

Solution 56

1. X est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \sum_{l=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Y} = l) = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi X suit la loi $\mathcal{U}([\![0, n]\!])$.
On démontre de même que Y suit la loi $\mathcal{U}([\![0, n]\!])$.
X + Y est à valeurs dans $[\![0, 2n]\!]$. Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k) = \sum_{l=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X} = l, \mathrm{Y} = k - l)$$

Si $k \leq n$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k) = \sum_{l=0}^{k} \mathrm{P}(\mathrm{X} = l, \mathrm{Y} = k - l) = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{k+1}{(n+1)^2}$$

Si $k \geq n$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k) = \sum_{l=k-n}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X} = l, \mathrm{Y} = k - l) = \sum_{l=k-n}^{n} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n-k+1}{(n+1)^2}$$

De manière générale, pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = k) = \frac{(n+1) - |k-n|}{(n+1)^2}$$

2. Les variables X et Y sont indépendantes puisque pour tout $(k, l) \in [\![0, n]\!]^2$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Y} = l) = \frac{1}{(n+1)^2} = \mathrm{P}(\mathrm{X} = k)\mathrm{P}(\mathrm{Y} = l)$$

Solution 57

On calcule dans un premier temps $\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{Y})$. L'événement $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$ est la réunion disjointes des événements $(\mathrm{X} = k) \cap (\mathrm{Y} = k)$ pour k décrivant $[\![1, n]\!]$. On en déduit que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{Y}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}([\mathrm{X} = k] \cap [\mathrm{Y} = k])$$

Or les variables aléatoires X et Y sont indépendantes donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{Y}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X} = k)\mathrm{P}(\mathrm{Y} = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

On en déduit que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{Y}) = 1 - \frac{1}{n}$$

Solution 58

Via la formule de transfert,

$$\mu_r = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X} = k)(k - np)^r$$

Puisque pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la série $\sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{(k-np)^r x^r}{r!}$ converge (série exponentielle), il en est de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mu_r x^r}{r!}$ et, de plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\mu_r x^r}{r!} &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(k-np)^r x^r}{r!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) e^{(k-np)x} \\
&= e^{-npx} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k e^{kx} (1-p)^{n-k} \\
&= e^{-npx} (pe^x + 1 - p)^n = \left[pe^{(1-p)x} + (1-p)e^{-px}\right]^n
\end{aligned}$$

Solution 59

---

1. Notons $S_{j,k}$ la somme de l'énoncé. Si $\omega^j = 1$, autrement dit si k divise j, $S_{j,k} = k$. Sinon, $S_{j,k} = \frac{\omega^k - 1}{\omega - 1} = 0$.

2. X_n suit clairement la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(k \mid X_n) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{S_{j,k}}{k} \mathbb{P}(X = j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{S_{j,k}}{k} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \binom{n}{j} \qquad \text{car } X_n \sim \mathcal{B}(n, 1/2) \\
&= \frac{1}{2^n k} \sum_{j=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{n}{j} \omega^{\ell j} \\
&= \frac{1}{2^n k} \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \omega^{\ell j} \qquad \text{car les deux sommes sont finies} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{1}{2^n} (1 + \omega^\ell)^n
\end{aligned}$$

Lorsque $\ell = 0$, $\frac{1}{2^n}(1 + \omega^\ell)^n = 1$ et lorsque $\ell \in [\![1, k-1]\!]$,

$$\left|1 + \omega^\ell\right| = 2\left|\cos \frac{\pi \ell}{k}\right| < 2$$

Ainsi, dans ce cas, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}(1 + \omega^\ell)^n = 0$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(k \mid X_n) = \frac{1}{k}$$

ce qui est conforme à l'intuition.

Chaînes de Markov

Solution 60

---

1. On a évidemment

$$p_0 = 1 \qquad q_0 = 0 \qquad r_0 = 0 \qquad p_1 = 0 \qquad q_1 = 1 \qquad r_1 = 0$$

2. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1}=0) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1}=0|\mathrm{X}_n=0)\mathrm{P}(\mathrm{X}_n=0) + \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1}=0|\mathrm{X}_n=1)\mathrm{P}(\mathrm{X}_n=1) + \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1}=0|\mathrm{X}_n=2)\mathrm{P}(\mathrm{X}_n=2)\\
&= 0\times p_n + \frac{1}{4}\times q_n + 0\times r_n = \frac{1}{4}q_n\\
q_{n+1} &= \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1}=1) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1}=1|\mathrm{X}_n=0)\mathrm{P}(\mathrm{X}_n=0) + \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1}=1|\mathrm{X}_n=1)\mathrm{P}(\mathrm{X}_n=1) + \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1}=1|\mathrm{X}_n=2)\mathrm{P}(\mathrm{X}_n=2)\\
&= 1\times p_n + \frac{1}{2}\times q_n + 1\times r_n = p_n + \frac{1}{2}q_n + r_n\\
r_{n+1} &= \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1}=2) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1}=2|\mathrm{X}_n=0)\mathrm{P}(\mathrm{X}_n=0) + \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1}=2|\mathrm{X}_n=1)\mathrm{P}(\mathrm{X}_n=1) + \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1}=2|\mathrm{X}_n=2)\mathrm{P}(\mathrm{X}_n=2)\\
&= 0\times p_n + \frac{1}{4}\times q_n + 0\times r_n = \frac{1}{4}q_n
\end{aligned}$$

3. On a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$q_{n+2} = p_{n+1} + \frac{1}{2}q_{n+1} + r_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{4}q_n = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n$$

4. L'équation caractéristique liée à la relation de récurrence linéaire $q_{n+2}-\frac{1}{2}q_{n+1}-\frac{1}{2}q_n=0$ est $\mathrm{X}^2-\frac{1}{2}\mathrm{X}-\frac{1}{2}=0$ dont les racines sont $-\frac{1}{2}$ et 1. Il s'ensuit qu'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $q_n=\lambda+\mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Les conditions initiales $q_0=0$ et $q_1=1$ fournissent $\lambda=\frac{2}{3}$ et $\mu=-\frac{2}{3}$. Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$q_n = \frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$ $p_{n+1}=r_{n+1}=\frac{1}{4}q_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$p_n = r_n = \frac{1}{6}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

De plus, on a vu que $p_0=1$ et que $r_0=0$.

5. Puisque $\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$, $\lim_{n\to+\infty}q_n=\frac{2}{3}$ et $\lim_{n\to+\infty}p_n=\lim_{n\to+\infty}r_n=\frac{1}{6}$.

Solution 61

1. D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \mathbb{P}(\mathrm{A}_{n+1}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}_{n+1}|\mathrm{A}_n)\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) + \mathbb{P}(\mathrm{A}_{n+1}|\mathrm{B}_n)\mathrm{P}(\mathrm{B}_n) + \mathbb{P}(\mathrm{A}_{n+1}|\mathrm{C}_n)\mathrm{P}(\mathrm{C}_n)\\
&= 0\times a_n + \frac{3}{4}\times b_n + 0\times c_n = \frac{3}{4}b_n\\
b_{n+1} &= \mathbb{P}(\mathrm{B}_{n+1}) = \mathbb{P}(\mathrm{B}_{n+1}|\mathrm{A}_n)\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) + \mathbb{P}(\mathrm{B}_{n+1}|\mathrm{B}_n)\mathrm{P}(\mathrm{B}_n) + \mathbb{P}(\mathrm{B}_{n+1}|\mathrm{C}_n)\mathrm{P}(\mathrm{C}_n)\\
&= \frac{3}{4}\times a_n + 0\times b_n + 1\times c_n = \frac{3}{4}a_n + c_n\\
c_{n+1} &= \mathbb{P}(\mathrm{C}_{n+1}) = \mathbb{P}(\mathrm{C}_{n+1}|\mathrm{A}_n)\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) + \mathbb{P}(\mathrm{C}_{n+1}|\mathrm{B}_n)\mathrm{P}(\mathrm{B}_n) + \mathbb{P}(\mathrm{C}_{n+1}|\mathrm{C}_n)\mathrm{P}(\mathrm{C}_n)\\
&= \frac{1}{4}\times a_n + \frac{1}{4}\times b_n + 0\times c_n = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n
\end{aligned}$$

2. Il suffit de choisir $\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0\\ \frac{3}{4} & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}$.

3. On trouve

$$\chi_{\mathrm{M}}(\lambda) = \lambda^3 - \frac{13}{16}\mathrm{X} - \frac{3}{16} = (\lambda - 1)\left(\lambda + \frac{1}{4}\right)\left(\lambda + \frac{3}{4}\right)$$

Notamment M est bien diagonalisable puisque χ_{M} est scindé à racines simples. En déterminant les sous-espaces propres, on obtient $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Une récurrence évidente montre que $\mathrm{M}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par pivot de Gauss, on obtient

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{35} & \frac{1}{35} & \frac{1}{35} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{2}{5} \\ \frac{5}{14} & -\frac{9}{14} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\mathrm{M}^n = \begin{pmatrix} \frac{12}{35} + \frac{3}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{5}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n & \frac{12}{35} + \frac{3}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{9}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n & \frac{12}{35} - \frac{6}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{6}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^n \\ \frac{16}{35} - \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{5}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n & \frac{16}{35} - \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{9}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n & \frac{16}{35} + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{6}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^n \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n & \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n & \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

Puisque $\mathrm{X}_n = \mathrm{M}^n\mathrm{X}_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(\frac{12}{35} + \frac{3}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{5}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right)a_0 + \left(\frac{12}{35} + \frac{3}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{9}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right)b_0 + \left(\frac{12}{35} - \frac{6}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{6}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right)c_0 \\
b_n &= \left(\frac{16}{35} - \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{5}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right)a_0 + \left(\frac{16}{35} - \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{9}{14}\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right)b_0 + \left(\frac{16}{35} + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{6}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right)c_0 \\
c_n &= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)a_0 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)b_0 + \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)c_0
\end{aligned}$$

5. Puisque $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$ et $\left|-\frac{3}{4}\right| < 1$ et que $a_0 + b_0 + c_0 = 1$, les suites (a_n), (b_n), (c_n) convergent respectivement vers $\frac{12}{35}$, $\frac{16}{35}$ et $\frac{1}{5}$.

Couples de variables aléatoires

Solution 62

1. Première méthode :
Soit $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$. Si $k \geq l$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Z} = l) = 0$. Par contre, si $k < l$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Z} = l) &= \underbrace{\frac{n-2}{n}}_{1^{\text{er}}\text{ tirage}} \times \underbrace{\frac{n-3}{n-1}}_{2^{\text{e}}\text{ tirage}} \times \cdots \times \underbrace{\frac{n-k}{n-k+2}}_{(k-1)^{\text{e}}\text{ tirage}} \times \underbrace{\frac{2}{n-k+1}}_{k^{\text{e}}\text{ tirage}} \times \underbrace{\frac{n-k-1}{n-k}}_{(k+1)^{\text{e}}\text{ tirage}} \cdots \times \underbrace{\frac{n-l+1}{n-l+2}}_{(l-1)^{\text{e}}\text{ tirage}} \times \underbrace{\frac{1}{n-l+1}}_{l^{\text{e}}\text{ tirage}} \\
&= \frac{2}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

Seconde méthode :
L'univers Ω est l'ensemble des permutations des n boules de sorte que $\operatorname{card}\Omega = n!$.
Soit $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$. Si $k \geq l$, $[\mathrm{X} = k] \cap [\mathrm{Y} = l]$ est impossible donc $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Z} = l) = 0$. Supposons maintenant $k < l$. Se donner une issue de $[\mathrm{X} = k] \cap [\mathrm{Y} = l]$ revient à se donner une permutation des 2 boules rouges et une permutation des $n - 2$ boules rouges. Ainsicard$([\mathrm{X} = k] \cap [\mathrm{Y} = l]) = 2!(n-2)!$. Finalement

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Z} = l) = \frac{2!(n-2)!}{n!} = \frac{2}{n(n-1)}$$

2. Soit $l \in [\![1, n]\!]$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} = l) = \sum_{k=1}^{l-1} \mathrm{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Z} = l) = \frac{2(l-1)}{n(n-1)}$$

Solution 63

---

1. La relation est évidente si $a = b$. Supposons maintenant $a + 1 \leq b$. On utilise la relation du triangle de Pascal.

$$\begin{aligned}\sum_{k=a}^{b} \binom{k}{a} &= 1 + \sum_{k=a+1}^{n} \binom{k}{a} \\ &= 1 + \sum_{k=a+1}^{b} \binom{k+1}{a+1} - \binom{k}{a+1} \qquad = 1 + \binom{b+1}{a+1} - \binom{a+1}{a+1} = \binom{b+1}{a+1}\end{aligned}$$

2. Si on note Ω l'univers de l'expérience aléatoire, alors $\mathrm{card}(\Omega) = \binom{\mathrm{N}}{n}$.
X est à valeurs dans $[\![n, \mathrm{N}]\!]$. Soit donc $k \in [\![n, \mathrm{N}]\!]$. Choisir n boules dont le plus grand numéro est k revient à choisir $n-1$ boules parmi celles numérotées de 1 à $k-1$. Ainsi $\mathrm{card}(\mathrm{X} = k) = \binom{k-1}{n-1}$ puis $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{\mathrm{N}}{n}}$.
Y est à valeurs dans $[\![1, \mathrm{N} - n + 1]\!]$. Soit donc $k \in [\![1, \mathrm{N} - n + 1]\!]$. Choisir n boules dont le plus petit numéro est k revient à choisir $n-1$ boules parmi celles numérotées de $k+1$ à N. Ainsi $\mathrm{card}(\mathrm{Y} = k) = \binom{\mathrm{N}-k}{n-1}$ puis $\mathrm{P}(\mathrm{Y} = k) = \frac{\binom{\mathrm{N}-k}{n-1}}{\binom{\mathrm{N}}{n}}$.

3. (X, Y) est à valeurs dans $\left\{(i, j) \in [\![1, \mathrm{N}]\!]^2,\ i - j \geq n - 1\right\}$. Soit donc (i, j) dans cet ensemble.
Choisir n boules dont le plus grand numéro est i et le plus petit j revient à choisir $n-2$ boules parmi celles numérotées de $j+1$ à $i-1$. Ainsi $\mathrm{card}([\mathrm{X} = i] \cap [y = j]) = \binom{i-j-1}{n-2}$ puis $\mathrm{P}(\mathrm{X} = i, \mathrm{Y} = j) = \frac{\binom{i-j-1}{n-2}}{\binom{\mathrm{N}}{n}}$.
Remarquons que $\mathrm{X} - \mathrm{Y}$ est à valeurs dans $[\![n-1, \mathrm{N}-1]\!]$. Soit $k \in [\![n-1, \mathrm{N}-1]\!]$. Alors

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} - \mathrm{Y} = k) = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}-k} \mathrm{P}(\mathrm{X} - \mathrm{Y} = k, \mathrm{Y} = j) = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}-k} \mathrm{P}(\mathrm{X} = j + k, \mathrm{Y} = j) = \frac{(\mathrm{N}-k)\binom{k-1}{n-2}}{\binom{\mathrm{N}}{n}}$$

4. Tout d'abord

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} k\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) \\ &= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} k\binom{k-1}{n-1} \\ &= \frac{n}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \binom{k}{n} \\ &= \frac{n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1}}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \\ &= \frac{n(\mathrm{N}+1)}{n+1}\end{aligned}$$

Pour le calcul de l'espérance de Y, on peut remarquer que $P(Y = k) = P(X = N + 1 - k)$ pour tout $k \in [\![1, N - n + 1]\!]$. Ainsi

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=1}^{N-n+1} kP(Y = k) \\
&= \sum_{k=1}^{N-n+1} kP(X = N + 1 - k) \\
&= \sum_{k=n}^{N} (N + 1 - k)P(X = k) \\
&= (N + 1) \sum_{k=n}^{N} P(X = k) - E(X) \\
&= N + 1 - \frac{n(N + 1)}{n + 1} = \frac{N + 1}{n + 1}
\end{aligned}$$

5. Tout d'abord

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=n}^{N} k^2 P(X = k) \\
E(X^2) &= \sum_{k=n}^{N} [k(k + 1) - k]P(X = k) \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} k(k + 1)\binom{k-1}{n-1} - E(X) \\
&= \frac{n(n + 1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} \binom{k+1}{n+1} - \frac{n(N + 1)}{n + 1} \\
&= \frac{n(n + 1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n+1}^{N+1} \binom{k}{n+1} - \frac{n(N + 1)}{n + 1} \\
&= \frac{n(n + 1)}{\binom{N}{n}} \binom{N+2}{n+2} - \frac{n(N + 1)}{n + 1} \\
&= \frac{n(N + 1)(N + 2)}{n + 2} - \frac{n(N + 1)}{n + 1} \\
&= \frac{(Nn + n + N)(N + 1)n}{(n + 1)(n + 2)}
\end{aligned}$$

Enfin

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(Nn + n + N)(N + 1)n}{(n + 1)(n + 2)} - \left(\frac{n(N + 1)}{n + 1}\right)^2 = \frac{n(N + 1)(N - n)}{(n + 2)(n + 1)^2}$$

En remarquant que $P(Y = k) = P(X = N + 1 - k)$ pour tout $k \in [\![1, N - n + 1]\!]$ et que $E(Y) = N + 1 - E(X)$

$$\begin{aligned}
V(Y) &= E(Y - E(Y)^2) \\
&= \sum_{k=1}^{N-n+1} (k - E(Y))^2 P(Y = k) \\
&= \sum_{k=1}^{N-n+1} (k - (N + 1) + E(X))^2 P(X = N + 1 - k) \\
&= \sum_{k=n}^{N} (E(X) - k)^2 P(X = k) \\
&= V(X) = \frac{(Nn + n + N)(N + 1)n}{(n + 1)(n + 2)}
\end{aligned}$$

6. Tout d'abord

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}((\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2) &= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k^2\mathrm{P}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}=k)\\
&= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} \frac{k^2(\mathrm{N}-k)\binom{k-1}{n-2}}{\binom{\mathrm{N}}{n}}\\
&= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}}\left(\mathrm{N}\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k^2\binom{k-1}{n-2} - \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k^3\binom{k-1}{n-2}\right)
\end{aligned}$$

Posons $\mathrm{S}_m = \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k^m\binom{k-1}{n-2}$. On trouve successivement

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_1 &= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k\binom{k-1}{n-2}\\
&= (n-1)\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1}\binom{k}{n-1}\\
&= (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_2 &= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k^2\binom{k-1}{n-2}\\
&= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k(k+1)\binom{k-1}{n-2} - \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k\binom{k-1}{n-2}\\
&= (n-1)n\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1}\binom{k+1}{n} - \mathrm{S}_1\\
&= (n-1)n\sum_{k=n}^{\mathrm{N}}\binom{k}{n} - (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}\\
&= (n-1)n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1} - (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_3 &= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k^3\binom{k-1}{n-2}\\
&= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k(k+1)(k+2)\binom{k-1}{n-2} - 3\mathrm{S}_2 - 2\mathrm{S}_1\\
&= (n-1)n(n+1)\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1}\binom{k+2}{n+1} - 3\left((n-1)n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1} - (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}\right) - 2(n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}\\
&= (n-1)n(n+1)\sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}+1}\binom{k}{n+1} - 3(n-1)n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1} + (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}\\
&= (n-1)n(n+1)\binom{\mathrm{N}+2}{n+2} - 3(n-1)n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1} + (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}
\end{aligned}$$

Il vient enfin

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}((\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2) &= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}}(\mathrm{NS}_2 - \mathrm{S}_3)\\
&= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}}\left(\mathrm{N}(n-1)n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1} - \mathrm{N}(n-1)\binom{\mathrm{N}}{n} - (n-1)n(n+1)\binom{\mathrm{N}+2}{n+2} + 3(n-1)n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1} - (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}\right)\\
&= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}}\left((n-1)n(\mathrm{N}+3)\binom{\mathrm{N}+1}{n+1} - (n-1)(\mathrm{N}+1)\binom{\mathrm{N}}{n} - (n-1)n(n+1)\binom{\mathrm{N}+2}{n+2}\right)\\
&= \frac{(n-1)n(\mathrm{N}+3)(\mathrm{N}+1)}{n+1} - (n-1)(\mathrm{N}+1) - \frac{(n-1)n(\mathrm{N}+2)(\mathrm{N}+1)}{n+2}\\
&= \frac{(n-1)(\mathrm{N}+1)(n\mathrm{N}+n-2)}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}) &= \mathrm{E}((\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2) - \mathrm{E}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2\\
&= \frac{(n-1)(\mathrm{N}+1)(n\mathrm{N}+n-2)}{(n+1)(n+2)} - (\mathrm{E}(\mathrm{X}) - \mathrm{E}(\mathrm{Y}))^2\\
&= \frac{(n-1)(\mathrm{N}+1)(n\mathrm{N}+n-2)}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{n(\mathrm{N}+1)}{n+1} - \frac{\mathrm{N}+1}{n+1}\right)^2\\
&= \frac{2(n-1)(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}-n)}{(n+1)^2(n+2)}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &= \frac{1}{2}(\mathrm{V}(\mathrm{X}) + \mathrm{V}(\mathrm{Y}) - \mathrm{V}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}))\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2(\mathrm{N}n+n+\mathrm{N})(\mathrm{N}+1)n}{(n+1)(n+2)} - \frac{2(n-1)(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}-n)}{(n+1)^2(n+2)}\right)\\
&= \frac{n(n+1)(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}n+n+\mathrm{N}) - (n-1)(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}-n)}{(n+1)^2(n+2)}\\
&= \frac{(\mathrm{N}+1)(2n^2\mathrm{N} + n^3\mathrm{N} + 2n^2 + n^3 + \mathrm{N} - n)}{(n+1)^2(n+2)}
\end{aligned}$$

Solution 64

Y_1 et Y_2 sont à valeurs dans F. Soit $y \in \mathrm{F}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{Y}_1 = y) &= \mathrm{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{Y}_1=y})\\
&= \sum_{(x_1,x_2)\in\mathrm{E}^2} \delta_{y,f(x_1,x_2)}\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = x_1, \mathrm{X}_2 = x_2) \qquad \text{par formule de transfert}\\
&= \sum_{(x_1,x_2)\in\mathrm{E}^2} \delta_{y,f(x_1,x_2)}\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = x_1)\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = x_2) \qquad \text{par indépendance de } (\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)\\
&= \sum_{(x_1,x_2)\in\mathrm{E}^2} \delta_{y,f(x_2,x_1)}\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = x_1)\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = x_2)\\
&= \sum_{(x_2,x_1)\in\mathrm{E}^2} \delta_{y,f(x_1,x_2)}\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = x_2)\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = x_1) \qquad \text{car } (x_1,x_2) \mapsto (x_2,x_1) \text{ est une involution de } \mathrm{E}^2\\
&= \sum_{(x_2,x_1)\in\mathrm{E}^2} \delta_{y,f(x_1,x_2)}\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = x_1, \mathrm{X}_1 = x_2) \qquad \text{par indépendance de } (\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)\\
&= \mathrm{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{Y}_2=y}) \qquad \text{par formule de transfert}\\
&= \mathrm{P}(\mathrm{Y}_2 = y)
\end{aligned}$$

Ceci prouve que Y_1 et Y_2 ont même loi.

Espérance et variance

Solution 65

1. **a.** Puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $(X = n)_{n\in\mathbb{N}}$ est us système complet d'événements de sorte que

$$G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$$

b.

$$G'_X = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n)X^{n-1}$$

donc

$$G'_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) = E(X)$$

c.

$$G''_X = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X = n)X^{n-2}$$

donc

$$G''_X(1)+G'_X(1)-G'_X(1)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X = n)+\sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n)-E(X)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2P(X = n)-E(X)^2 = E(X^2)-E(X)^2 = V(X)$$

2.

$$\begin{aligned}
G_XG_Y &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X = k)P(Y = n-k)\right)X^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X = k, Y = n-k)\right)X^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X+Y = n, X = k)\right)X^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(X+Y = n, X = k)\right)X^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X+Y = n)X^n \\
&= G_{X+Y}
\end{aligned}$$

3.

$$G_X = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}X^k = (pX+1-p)^n$$

On en déduit

$$G'_X = np(pX+1-p)^{n-1} \qquad G''_X = n(n-1)p^2(pX+1-p)^{n-2}$$

donc

$$E(X) = G'_X(1) = np \qquad V(X) = G''_X(1)+G'_X(1)-G'_X(1)^2 = n(n-1)p^2+np-n^2p^2 = np-np^2 = np(1-p)$$

Solution 66

1. D'après la formule de transfert

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} |i-j|\mathrm{P}(\mathrm{X}=i, \mathrm{Y}=j)$$

Mais les variables X et Y étant indépendantes,

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} |i-j|\mathrm{P}(\mathrm{X}=i)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=j) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} |i-j|$$

On peut alors découper la somme double

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{Z}) &= \frac{1}{(n+1)^2}\left(\sum_{0\le i<j\le n}|i-j| + \sum_{0\le j<i\le n}|i-j| + \sum_{k=0}^{n}|k-k|\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{0\le i<j\le n} j-i\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\sum_{0\le i<j\le n} j - \sum_{0\le i<j\le n} i\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1} j - \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} i\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)i\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\sum_{j=0}^{n} j^2 - \sum_{i=0}^{n}(n-i)i\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(2\sum_{k=0}^{n} k^2 - n\sum_{k=0}^{n} k\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n^2(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{2n}{n+1}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n}{2}\right)\\
&= \frac{n(n+2)}{3(n+1)}
\end{aligned}$$

2. On remarque que

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}-\mathrm{Z})$$

donc par linéarité de l'espérance

$$\mathrm{E}(\mathrm{T}) = \frac{1}{2}(\mathrm{E}(\mathrm{X})+\mathrm{E}(\mathrm{Y})-\mathrm{E}(\mathrm{Z})) = \frac{1}{2}\left(n - \frac{n(n+2)}{3(n+1)}\right) = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)}$$

3. Puisque $\mathrm{Z}^2 = \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - 2\mathrm{XY}$, on obtient par linéarité de l'espérance

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}^2) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) + \mathrm{E}(\mathrm{Y}^2) - 2\mathrm{E}(\mathrm{XY})$$

Mais les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, $\mathrm{E}(\mathrm{XY}) = \mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})$. Puisqu'elles sont de même loi

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}^2) = 2\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - 2\mathrm{E}(\mathrm{X})^2 = 2\mathrm{V}(\mathrm{X})$$

Remarque. On peut montrer que

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \frac{n(n+2)}{12}$$

Solution 67

D'après la formule de transfert,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\\ &= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

Solution 68

D'après la formule de transfert

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \sum_{0\leq k,l\leq n}\frac{1}{k+l+1}\mathrm{P}(\mathrm{X}=k,\mathrm{Y}=l)$$

X et Y étant indépendantes

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \sum_{0\leq k,l\leq n}\frac{1}{k+l+1}\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=l) = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{0\leq k,l\leq n}\frac{1}{k+l+1}\binom{n}{k}\binom{n}{l}$$

Pour $t\in\mathbb{R}$, posons

$$f(t) = \sum_{0\leq k,l\leq n}\frac{1}{k+l+1}\binom{n}{k}\binom{n}{l}t^{k+l+1}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$f'(t) = \sum_{0\leq k,l\leq n}\binom{n}{k}\binom{n}{l}t^{k+l} = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k\right)^2 = (1+t)^{2n}$$

Puisque $f(0)=0$, on a donc pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{2n+1}\left((1+t)^{2n+1}-1\right)$$

On en déduit

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \frac{f(1)}{2^{2n}} = \frac{1}{2n+1}\left(2-\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

Solution 69

D'après la formule de transfert

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \sum_{0\leq k,l\leq n}\frac{1}{k+l+1}\mathrm{P}(\mathrm{X}=k,\mathrm{Y}=l)$$

X et Y étant indépendantes

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \sum_{0\leq k,l\leq n}\frac{1}{k+l+1}\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=l) = \sum_{0\leq k,l\leq n}\frac{1}{k+l+1}\binom{n}{k}\binom{n}{l}p^{k+l}(1-p)^{2n-k-l}$$

Pour $t\in\mathbb{R}$, posons

$$f(t) = \sum_{0\leq k,l\leq n}\frac{1}{k+l+1}\binom{n}{k}\binom{n}{l}p^{k+l}(1-p)^{2n-k-l}t^{k+l+1}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$f'(t) = \sum_{0\leq k,l\leq n}\binom{n}{k}\binom{n}{l}p^{k+l}(1-p)^{2n-k-l}t^{k+l} = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}t^k\right)^2 = (pt+1-p)^{2n}$$

Puisque $f(0) = 0$, on a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{(2n+1)p}\left((pt+1-p)^{2n+1} - (1-p)^{2n+1}\right)$$

On en déduit

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = f(1) = \frac{1}{(2n+1)p}\left(1-(1-p)^{2n+1}\right)$$

Solution 70

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, notons X_k la variable aléatoire valant 1 si la boule numéro k a été tirée lors des n tirages et 0 sinon. Chaque X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$. Puisque $\mathrm{X} = \sum_{k=1}^n \mathrm{X}_k$, on obtient par linéarité de l'espérance

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^n \mathrm{E}(\mathrm{X}_k) = n\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right)$$

On montre classiquement que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$. Ainsi $\mathrm{E}(\mathrm{X}) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

Solution 71

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire qui à une permutation associe 1 si k est un point fixe et 0 sinon. On a donc $\mathrm{X} = \sum_{k=1}^n \mathrm{X}_k$. On détermine ensuite la loi de X_k par dénombrement. Le nombre de permutations fixant k est $(n-1)!$ et comme la probabilité sur S_n est uniforme, $\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Ainsi X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$ de sorte que $\mathbb{E}(\mathrm{X}_k) = \frac{1}{n}$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^n \delta(\mathrm{X}_k) = 1$$

Pour le calcul de la variance, il faut prendre garde au fait que les variables aléatoires X_k ne sont pas indépendantes. Néanmoins

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^n \mathrm{X}_k, \sum_{l=1}^n \mathrm{X}_l\right) = \sum_{1\le k,l\le n} \mathrm{Cov}(\mathrm{X}_k,\mathrm{X}_l) = \sum_{k=1}^n \mathrm{V}(\mathrm{X}_k) + \sum_{1\le k\neq l\le n} \mathrm{Cov}(\mathrm{X}_k,\mathrm{X}_l)$$

Puisque les X_k sont des variables aléatoires de Bernoulli, $\mathbb{V}(\mathrm{X}_k) = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ et pour $k \neq l$,

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_k,\mathrm{X}_l) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_k\mathrm{X}_l) - \mathbb{E}(\mathrm{X}_k)\mathbb{E}(\mathrm{X}_l) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1, \mathrm{X}_l = 1) - \frac{1}{n}^2$$

A nouveau, on calcule $\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1, \mathrm{X}_l = 1)$ par dénombrement. Le nombre de permutations pour lesquelles k et l sont fixes est $(n-2)!$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1, \mathrm{X}_l = 1) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$. Ainsi $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_k,\mathrm{X}_l) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$. Finalement,

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \sum_{1\le k\neq l\le n} \frac{1}{n^2(n-1)} = 1 - \frac{1}{n} + n(n-1)\frac{1}{n^2(n-1)} = 1$$

car $\mathrm{card}\left(\left\{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ k \neq l\right\}\right) = n(n-1)$.

Inégalités

Solution 72

Par stricte croissance de g, les événement $|\mathrm{X}| \geq a$ et $\mathrm{g}(|\mathrm{X}|) \geq g(a)$ sont identiques et ont donc même probabilité. D'après l'inégalité de Markov, $\mathrm{P}\left(\mathrm{g}(|\mathrm{X}| \geq a\right) \leq \frac{\mathrm{E}(\mathrm{g}(|\mathrm{X}|)}{g(a)}$ ce qui permet de conclure.

Solution 73

Notons F la variable aléatoire qui désigne le nombre de «faces» obtenus avec n lancers. Alors $\mathrm{F} \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $p = 1/2$. Donc $\mathrm{E}(\mathrm{F}) = np =$

$n/2$ et $V(F) = np(1-p) = n/4$.
Notons $X = F/n$ la fréquence des «faces» parmi les n lancers.

$$\begin{aligned} E(X) &= E\left(\frac{F}{n}\right) = \frac{E(F)}{n} = \frac{1}{2}, \\ V(X) &= V\left(\frac{F}{n}\right) = \frac{V(F)}{n^2} = \frac{1}{4n}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Dans notre cas,

$$P(|X - 0,5| > \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Par passage au contraire cela s'écrit

$$1 - P(|X - 0,5| \leqslant \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

ou encore

$$P(|X - 0,5| \leqslant \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

En prenant $\varepsilon = 0,05$, on a donc

$$P(0,45 \leq X \leq 0,55) \geq 1 - \frac{100}{n}$$

En prenant $n = 1000$, on a alors bien

$$P(0,45 \leq X \leq 0,55) \geq 0,9$$

Solution 74

---

1. $\mathbb{1}_C$ est une variable aléatoire de Bernoulli donc $V(\mathbb{1}_C) = P(\mathbb{1}_C = 1)(1 - P(\mathbb{1}_C = 1)) = P(C)(1 - P(C))$. La fonction $x \mapsto x(1-x)$ admet pour maximum $\frac{1}{4}$ sur $[0,1]$ (atteint en $\frac{1}{2}$). Ainsi $V(\mathbb{1}_C) \leq \frac{1}{4}$.

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\operatorname{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)| \leq \sqrt{V(\mathbb{1}_A)}\sqrt{V(\mathbb{1}_B)} \leq \frac{1}{4}$$

3. Tout d'abord,

$$\operatorname{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = E(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B) - E(\mathbb{1}_A)E(\mathbb{1}_B) = E(\mathbb{1}_{A \cap B}) - E(\mathbb{1}_A)E(\mathbb{1}_B) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$$

   On en déduit l'inégalité voulue.
   Supposons que l'on ait égalité. Alors $V(\mathbb{1}_A) = V(\mathbb{1}_B) = \frac{1}{4}$ et donc $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Il s'ensuit que $P(A \cap B) = 0$ ou $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$.
   Réciproquement, si $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = 0$ ou $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$, on a bien égalité.

   Remarque. Si le seul événement de probabilité nulle est $\varnothing$, on peut montrer que la condition d'égalité équivaut à $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ et $A = B$ ou $A = \overline{B}$.

Solution 75

---

1. Remarquons que pour $(A, B) \in \mathcal{A}^2$,

$$d(A, B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$$

   Ainsi pour $(A, B, C) \in \mathcal{A}^3$,

$$\begin{aligned} d(A, B) + d(B, C) - d(A, C) &= 2\left(\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap C)\right) \\ &= 2\left[(\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap C)) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \cap C))\right] \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \cap C) &= \mathbb{P}((A \cap B) \cap (B \cap C)) + \mathbb{P}((A \cap B) \cup (B \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(B \cap (A \cup C)) \\ &\leq \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap C)\end{aligned}$$

car $A \cap B \cap C \subset A \cap C$ et $B \cap (A \cup C) \subset B$. On en déduit donc que $d(A, B) + d(B, C) - d(A, C) \geq 0$ puis l'inégalité demandée.

2. Remarquons que pour $A \in \mathcal{A}$, $d(A, \varnothing) = \mathbb{P}(A \Delta \varnothing) = \mathbb{P}(A)$. En prenant $C = \varnothing$ dans l'inégalité de la question précédente, on obtient alors

$$\mathbb{P}(A) \leq d(A, B) + \mathbb{P}(B)$$

En échangeant les rôles de A et B, on a également

$$\mathbb{P}(B) \leq d(A, B) + \mathbb{P}(A)$$

ce qui permet d'obtenir l'inégalité demandée.