

## INTERROGATION ÉCRITE N°14

NOM :

Prénom :

Note :

---

1. Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

2. Écrire la matrice  $A$  de l'endomorphisme  $u : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto XP' - X^2P(1) \end{cases}$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Donner des bases du noyau et de l'image de  $A$  et en déduire des bases du noyau et de l'image de  $u$ .

3. On note  $E$  l'ensemble des matrices de trace nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et donner sa dimension.

4. Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $M^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

5. Prouver la convergence et calculer la somme de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 + 2n}$ .