Devoir surveillé n°2 : corrigé

Solution 1.

On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} x+y+az=1 & \\ (a-1)y+(1-a)z=0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (1-a)y+(1-a^2)z=1-a & L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x+y+az=1 & \\ (a-1)y+(1-a)z=0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (2-a-a^2)z=1-a & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x+y+az=1 \\ (a-1)y+(1-a)z=0 \\ (2+a)(1-a)z=1-a \end{cases}$$

- Si $a=1$, alors
$$(\mathcal{S}) \iff x+y+z=1$$
Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\{(1-y-z,y,z),(y,z)\in\mathbb{R}^2\}$.

- Si $a=-2$, alors
$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} x+y-2z=1 \\ -3y+3z=0 \\ 0=4 \end{cases}$$
L'ensemble des solutions est vide.

- Si $a\neq-2$ et $a\neq1$, alors
$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} x+y+az=1 \\ y-z=0 \\ (2+a)z=1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=\dfrac{1}{2+a} \\ y=\dfrac{1}{2+a} \\ z=\dfrac{1}{2+a} \end{cases}$$
Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\left\{\left(\frac{1}{2+a},\frac{1}{2+a},\frac{1}{2+a}\right)\right\}$.

Solution 2.

Ces égalités ont un sens dès lors que $\tan\frac{\theta}{2}$ est défini, c'est-à-dire pour les réels θ tels que $\frac{\theta}{2}\not\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ ou encore $\theta\not\equiv\pi[2\pi]$.

$$\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1-\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$
$$= \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cos\left(2\times\frac{\theta}{2}\right) = \cos\theta$$

$$\begin{aligned}\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} &= \frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}\\ &= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}} = \sin\left(2\times\frac{\theta}{2}\right) = \sin\theta\end{aligned}$$

Solution 3.

1. On trouve

$$\begin{array}{lllll} a_0 = 1 & a_1 = 1 & a_2 = 2 & a_3 = 5 & a_4 = 14 \\ S_0 = 1 & S_1 = 2 & S_2 = 5 & S_3 = 14 & S_4 = 42 \end{array}$$

On remarque que $S_n = a_{n+1}$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue le changement d'indice $l = n - k$ de sorte que

$$T_n = \sum_{l=0}^{n}(n-l)a_{n-l}a_l = \sum_{k=0}^{n}(n-k)a_k a_{n-k}$$

Ainsi

$$2T_n = \sum_{k=0}^{n} ka_k a_{n-k} + \sum_{k=0}^{n}(n-k)a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(k+n-k)a_k a_n - k = nS_n$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(n+2)a_{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n!^2} = \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!^2} = 2(2n+1)a_n$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} + T_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k a_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} ka_k a_{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}(k+1)a_k a_{n+1-k} \\ &= a_0 a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1}(k+1)a_k a_{n+1-k} \\ &= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n}(k+2)a_{k+1}a_{a_n-k} \end{aligned}$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+2)a_{k+1} = 2(2k+1)a_k$ d'après la question **3** donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} + T_{n+1} &= a_{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n}(2k+1)a_k a_{n-k} \\ &= a_{n+1} + 4\sum_{k=0}^{n} ka_k a_{n-k} + 2\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \\ &= a_{n+1} + 4T_n + 2S_n \end{aligned}$$

Or on a vu à la question **2** que $2T_n = nS_n$ donc

$$S_{n+1} + T_{n+1} = a_{n+1} + 2nS_n + 2S_n = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

D'après la question **2**, $2T_{n+1} = (n+1)S_{n+1}$ donc

$$S_{n+1} + T_{n+1} = S_{n+1} + \frac{n+1}{2}S_{n+1} = \frac{n+3}{2}S_{n+1}$$

On en déduit que

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

5. D'après la question **1**, $S_0 = a_1 = 1$.
Supposons maintenant que $S_n = a_{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$. Or on a supposé que $S_n = a_{n+1}$ donc

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} = (2n+3)a_{n+1}$$

Or d'après la question **3**, $(n+3)a_{n+2} = 2(2n+3)a_{n+1}$ donc

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = \frac{n+3}{2}a_{n+2}$$

puis $S_{n+1} = a_{n+2}$ puisque $\frac{n+3}{2} \neq 0$.
Par récurrence, $S_n = a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Tout d'abord $a_0 = 1$ est un entier naturel. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tels que $a_0, a_1, \dots, a_n$ soient des entiers naturels. Alors S_n est également un entier naturel en tant que somme de produits de ces derniers entiers naturels. Puisque $a_{n+1} = S_n$, $an + 1$ est également un entier naturel. Par récurrence forte, a_n est donc un entier naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 4.

1.

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \cos(2\theta + \theta)\\
&= \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta\\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta\\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

2. D'après l'énoncé, on a $z = e^{i\theta}$. De plus,

$$\begin{aligned}
|z^3 - z + 2|^2 &= \left(z^3 - z + 2\right)\overline{(z^3 - z + 2)}\\
&= |z|^6 + |z|^2 + 4 - 2(z + \bar{z}) - |z|^2(z^2 + \bar{z}^2) + 2(z^3 + \bar{z}^3)\\
&= 6 - 4\cos\theta - 2\cos(2\theta) + 4\cos(3\theta) \qquad \text{car } |z| = 1 \text{ et en vertu d'une relation d'Euler}\\
&= 6 - 4\cos\theta - 2(2\cos^2\theta - 1) + 4(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)\\
&= 8 - 16\cos\theta - 4\cos^2\theta + 16\cos^3\theta\\
&= 4f(\cos\theta)
\end{aligned}$$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 12x^2 - 2x - 4 = 2(2x+1)(3x-2)$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\frac{2}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Puisque $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$, on a en vertu de la première question

$$\max_{z\in\mathbb{U}} \varphi(z) = \max_{\theta\in\mathbb{R}} 2\sqrt{f(\cos\theta)}$$

Mais puisque $\operatorname{Im}\cos = [-1, 1]$,

$$\max_{z\in\mathbb{U}} \varphi(z) = \max_{x\in[-1,1]} 2\sqrt{f(x)}$$

La question précédente nous renseigne sur les variations de f sur $[-1, 1]$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\frac{2}{27}$	$\nearrow$	1

On peut en déduire que

$$\max_{z\in\mathbb{U}} \varphi(z) = 2\sqrt{\frac{13}{4}} = \sqrt{13}$$

Ce maximum est atteint en un élément de $\mathbb{U}$ dont l'argument θ est tel que $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ i.e. tel que $\theta \equiv \pm\frac{2\pi}{3}[2\pi]$. On en déduit donc que le maximum de φ est atteint en j et j^2.

Solution 5.

1. Si $z_0 \in \mathbb{R}_+$, alors on vérifie par récurrence que $z_n = z_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci est évident lorsque $n = 0$. Supposons-le vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_0 + |z_0|)$. Mais comme $z_0 \in \mathbb{R}_+$, $|z_0| = z_0$ et donc $z_{n+1} = z_0$. Par récurrence $z_n = z_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Si $z_0 \in \mathbb{R}_-$, alors $|z_0| = -z_0$ de sorte que $z_1 = 0$. Une récurrence évidente montre alors que $z_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Il s'agit encore d'une récurrence. Par hypothèse, $z_0 \notin \mathbb{R}_-$. Supposons que $z_n \notin \mathbb{R}_-$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On raisonne par l'absurde en supposant que $z_{n+1} \in \mathbb{R}_-$. Alors $z_n = 2z_{n+1} - |z_n| \in \mathbb{R}_-$ car $|s_n| \in \mathbb{R}_+$. Ceci contredit le fait que $z_n \notin \mathbb{R}_-$. Par conséquent $z_{n+1} \notin \mathbb{R}_-$. Finalement, $z_n \in \mathbb{R}_-$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \notin \mathbb{R}_-$ par récurrence.

3. Si un complexe n'appartient pas à $\mathbb{R}_-$, son argument principal ne peut être égal à π : il appartient donc à $]-\pi, \pi[$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $z_n \notin \mathbb{R}_-$, $z_n \neq 0$ donc cela a un sens de parler de son argument principal. La question précédente montre également que $\theta_n \in]-\pi, \pi[$. Par ailleurs, par la méthode de l'arc-moitié

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(r_n e^{i\theta_n} + r_n\right) = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{\frac{i\theta_n}{2}}$$

   Puisque $\theta_n \in]-\pi, \pi[$, $\frac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) > 0$. Ainsi

$$r_{n+1} = \left|r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{\frac{i\theta_n}{2}}\right| = r_n \left|\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\right| = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$$

   car $r_n \geqslant 0$ et $\left|e^{\frac{i\theta_n}{2}}\right| = 1$. On en déduit également que $\frac{\theta_n}{2}$ est un argument de z_{n+1} et puisque $\frac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\subset]-\pi, \pi]$, c'est son argument principal i.e. $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.

5. (θ_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La limite de la suite (θ_n) est nulle.

6. Il s'agit à nouveau d'une récurrence. L'égalité à montrer est vraie pour $n = 0$ puisqu'un produit indexé sur l'ensemble vide vaut 1. Supposons-la vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = r_0 \left[\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)\right] \cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n+1}}\right) = r_0 \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$$

Par récurrence, l'égalité à démontrer est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. On sait que pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ et donc $\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2\sin(x)}$ pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$.

8. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\theta_0}{2^n} \in \left]-\frac{\pi}{2^n}, \frac{\pi}{2^n}\right[\subset]-\pi, \pi[$. De plus, $z_0 \notin \mathbb{R}_+$ donc $\theta_0 \neq 0$ et donc $\frac{\theta_0}{2^n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $\frac{\theta_0}{2^n} \notin \pi\mathbb{Z}$.
D'après les deux questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$r_n = r_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{\theta_0}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)} = \frac{r_0}{2^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{\theta_0}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)} = \frac{r_0 \sin(\theta_0)}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}$$

car on remarque un produit télescopique.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = \theta_0 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}{\frac{\theta_0}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta_0$$

car $\lim_{n\to+\infty} \frac{\theta_0}{2^n} = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Puisque $\theta_0 \neq 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{r_0 \sin(\theta_0)}{\theta_0}$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \theta_n = 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \frac{r_0 \sin(\theta_0)}{\theta_0}$$