Interrogation écrite n°02

NOM : Prénom : Note :

1. Ecrire sous forme algébrique et exponentielle le complexe $z = \dfrac{2+2i}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

   D'une part,
$$z = \frac{(2+2i)(\sqrt{6}-i\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+i\sqrt{2})(\sqrt{6}-i\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}+i(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})}{8} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
   D'autre part,
$$z = \frac{2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{\frac{i\pi}{6}}} = e^{\frac{i\pi}{12}}$$
   On en déduit que
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

2. Résoudre l'équation $z^2 = 2\overline{z}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On donnera les solutions sous forme algébrique *et* exponentielle.

   Tout d'abord, 0 est solution de l'équation. Supposons maintenant $z \neq 0$. Alors
$$\begin{aligned} z^2 = 2\overline{z} &\iff \begin{cases} |z^2| = |2\overline{z}| \\ \arg(z^2) \equiv \arg(2\overline{z})[2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} |z|^2 = 2|z| \\ 2\arg(z) \equiv -\arg(z)[2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} |z| = 2 \qquad \text{car } |z| \neq 0 \\ \arg(z) \equiv 0[2\pi/3] \end{cases} \end{aligned}$$
   Les solutions de l'équation sont donc 0, 2, $2e^{\frac{2i\pi}{3}} = -1+i\sqrt{3}$ et $2e^{\frac{4i\pi}{3}} = -1-i\sqrt{3}$.

3. Résoudre l'équation $\sin(x) = \cos(4x)$.
$$\begin{aligned} \sin(x) = \cos(4x) &\iff \sin(x) = \sin(\pi/2 - 4x) \\ &\iff x \equiv \pi/2 - 4x[2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - (\pi/2 - 4x)[2\pi] \\ &\iff x \equiv \pi/10[2\pi/5] \text{ ou } x \equiv -\pi/6[2\pi/3] \end{aligned}$$
   L'ensemble des solutions est donc $\left(\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi}{5}\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}\mathbb{Z}\right)$.

4. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i + j$. On donnera une expression *factorisée*.
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i + j \\ &= \sum_{j=1}^{n} j \cdot \frac{j+1+2j}{2} \qquad \text{(série arithmétique)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{3}{2}j^2 + \frac{1}{2}j \\ &= \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{4}(2n+1+1) \\ &= \frac{n(n+1)^2}{2} \end{aligned}$$

5. Résoudre le système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x-3y+4z=3 \end{cases}$

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} x+y+z=1 & \\ y+2z=1 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ -5y+2z=1 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=1 & \\ y+2z=1 & \\ 12z=6 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + 5\mathrm{L}_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$