

DEVOIR À LA MAISON N°04

- ▶ Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- ▶ Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- ▶ Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

EXERCICE 1.

On pose pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$.

1. Pour quels nombres complexes z , $f(z)$ est-il défini ?
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$.
3. Montrer que
$$\begin{cases} |\operatorname{Im}(z)| < \frac{\pi}{2} \\ |f(z)| < 1 \end{cases} \iff |\operatorname{Im}(z)| < \frac{\pi}{4}.$$
4. On pose $\Delta = \left\{ z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im}(z)| < \frac{\pi}{4} \right\}$ et $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. Vérifier que $f(\Delta) \subset \mathcal{D}$.
5. Soit $Z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Montrer que l'équation $e^z = Z$ d'inconnue z admet une unique solution telle que $\operatorname{Im}(z) \in]-\pi, \pi[$.
6. Soit $u \in \mathcal{D}$. Montrer que $\frac{1+u}{1-u} \notin \mathbb{R}_-$.
7. Montrer que l'application f induit une bijection de Δ sur \mathcal{D} .

Problème 1 –

1. On considère la fonction f définie sur $I = [0, \pi]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5 - 4 \cos x}}$.
 - a. Montrer que f est bien définie sur I .
 - b. Étudier le signe de $f(x) - \sin x$ pour $x \in I$.
 - c. Montrer que pour $x \in]0, \pi]$, $\sin x < x$. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = x$ sur I .
2. Étudier les variations de f sur I et tracer son graphe (on tracera notamment les tangentes en 0 et π).
3. On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = \arccos\left(\frac{4 - 5 \cos x}{5 - 4 \cos x}\right)$.
 - a. Étudier les variations de $\phi : \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \frac{4 - 5t}{5 - 4t} \end{cases}$. Quelle est l'image de $[-1, 1]$ par ϕ ?
 - b. Justifier que g est bien définie sur I .
 - c. Donner les variations de g sans calculer la dérivée de g . Quelle est l'image de I par g ?
4. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.
 - a. Montrer qu'il existe un unique $z \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ tel que $f(z) = f(x)$.
 - b. Calculer $\cos(g(x))$ et $\sin(g(x))$.
 - c. Calculer $f(g(x))$ et en déduire que $z = g(x)$.
5.
 - a. Montrer que pour $\theta \in [0, \pi]$, $\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$ et $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$.
 - b. En déduire que $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right) = f(x)$ et $\cos\left(\frac{z-x}{2}\right) = 2f(x)$.
6.
 - a. Prouver que f induit une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ sur un intervalle à préciser. On note h sa bijection réciproque.
 - b. Déterminer la fonction h à l'aide de la question précédente.