Semaine du 11/02 au 15/02

1 Cours

Espaces vectoriels de dimension finie

Famille de vecteurs Familles génératrices. Familles libres/liées. Bases. Base adaptée à une décomposition en somme directe. Cas particulier des familles de $\mathbb{K}^n$ (pivot de Gauss).

Dimension d'un espace vectoriel Théorème de la base incomplète/extraite. Existence de bases. Définition de la dimension. Dans un espace de dimension n une famille génératrice/libre possède au moins/au plus n éléments. Si $\mathcal{B}$ est une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n, alors $\mathcal{B}$ est une base ssi $\mathcal{B}$ est libre ssi $\mathcal{B}$ est génératrice.

Dimension et sous-espaces vectoriels Si F sous-espace vectoriel de E, alors $\dim F \leqslant \dim E$ avec égalité **si et seulement si** $F = E$. Hyperplans. Dimension d'une somme directe. Existence de supplémentaire en dimension finie. Formule de Grassmann. Caractérisation de la supplémentarité par la dimension. Une somme est directe **si et seulement si** la somme des dimensions est égale à la dimension de la somme

Rang d'une famille de vecteurs Définition. Si $\mathcal{F}$ est une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n, alors $\mathcal{F}$ est libre **si et seulement si** $\operatorname{rg} \mathcal{F} = p$ et $\mathcal{F}$ est génératrice **si et seulement si** $\operatorname{rg} \mathcal{F} = n$. Le rang est invariant par opérations de pivot de Gauss.

Applications linéaires

Définition et premières propriétés Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'une forme linéaire. Exemples dans les espaces de fonctions, dans les espaces de suites et dans les $\mathbb{K}^n$. Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$. Structure d'anneau de $\mathcal{L}(E)$.

Isomorphismes Définition d'un isomorphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme. Définition d'un automorphisme et groupe linéaire $GL(E)$.

Images directe et réciproque par une application linéaire L'image directe ou réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel. Noyau et image d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le noyau et l'image.

2 Méthodes à maîtriser

- Montrer qu'une famille est libre.
- Montrer qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre, liée ou génératrice par pivot de Gauss.
- Déterminer la dimension d'un espace vectoriel en exhibant une base.
- Utiliser la dimension pour montrer qu'une famille libre/génératrice est une base.
- Utiliser la dimension pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont égaux.
- Utiliser la dimension pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.
- Calculer le rang d'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ par pivot de Gauss.
- Utiliser le rang pour montrer qu'une famille est libre ou génératrice.
- Montrer qu'une application est linéaire.
- Calculer avec des endomorphismes comme dans tout anneau **non commutatif** et **non intègre**.
- Utiliser le noyau ou l'image d'une application linéaire pour prouver son injectivité ou sa surjectivité.
- Les équivalences $x \in \operatorname{Ker} f \iff f(x) = 0$ et $y \in \operatorname{Im} f \iff \exists x,\ y = f(x)$ doivent être automatiques.

3 Questions de cours

- **Liberté, génération et rang**
  Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n. Montrer que $(f_1, \dots, f_p)$ est libre **si et seulement si** $\operatorname{rg}(f_1, \dots, f_p) = p$ et que $(f_1, \dots, f_p)$ engendre E **si et seulement si** $\operatorname{rg}(f_1, \dots, f_p) = n$.
- **Une famille libre infinie**
  On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \colon x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(nx)$. Montrer que la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est libre.

- **Image directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire**
  Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ainsi que G et H des sous-espaces vectoriels respectifs de E et F. Montrer que $f(G)$ et $f^{-1}(H)$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de F et E.

- **Noyau, image, supplémentaires**
  Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, E)$ tel que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$ et et $F = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

- **Nilpotence et inversibilité**
  Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Montrer que $\mathrm{Id}_E - f \in GL(E)$ et déterminer son inverse.

- **Retour sur le DS n°6**
  Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel strictement positif x_n tel que $x_n + \ln(x_n) = n$. Déterminer le sens de variation et la limite de (x_n) et montrer que $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n$.