Semaine du 20/03 au 24/03

1 Cours

Polynômes

Polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ Définitions : polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, ensemble $\mathbb{K}[X]$. Deux polynômes sont égaux **si et seulement si** leurs coefficients sont égaux. Polynômes pairs, impairs. $(\mathsf{K}[X], +, \times)$ est un anneau intègre commutatif. $(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Degré d'un polynôme. Degré d'une combinaison linéaire, d'un produit. Définition de $\mathbb{K}_n[X]$. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Famille de polynômes à degrés échelonnés. Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine d'un polynôme. Cas des polynômes pairs/impairs et des polynômes à coefficients réels. Polynôme dérivé. La dérivation est linéaire. Formule de Leibniz. Formule de Taylor.

Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ Relation de divisibilité. Division euclidienne. Algorithme de division euclidienne. Un polynôme P admet a pour racine **si et seulement si** il est divisible par $X-a$. Existence et unicité d'un PGCD unitaire ou nul. Algorithme d'Euclide pour les polynômes. Théorème de Bézout. Polynômes premiers entre eux. Lemme de Gauss. Un polynôme de degré n admet au plus n racines. Polynômes interpolateurs de Lagrange. Existence et unicité d'un PPCM unitaire ou nul.

Racines multiples Définition. Un polynôme de degré n admet au plus n racines comptées avec multiplicité. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les dérivées successives.

Factorisation Polynômes irréductibles. Définition et décomposition en facteurs irréductibles. Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$. Polynôme scindé. Un polynôme est scindé **si et seulement si** il possède autant de racines comptées avec multiplicité que son degré. Lien coefficients/racines.

Fractions rationnelles

Corps des fractions rationnelles Définition. Opérations. Degré. Dérivation. $\mathbb{K}(X)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et un corps.

Fonctions rationnelles, zéros et pôles Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle. Zéros et pôles d'une fraction rationnelle. Multiplicité d'un zéro ou d'un pôle.

Décomposition en éléments simples Partie entière. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$. Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ où P est scindé.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour résoudre des équations d'inconnue polynomiale, chercher dans un premier temps à déterminer le degré du polynôme inconnu.
- Déterminer le reste d'une division euclidienne (utiliser les racines du diviseur).
- Montrer qu'un polynôme est nul en montrant qu'il admet une infinité de racines.
- Caractériser la multiplicité d'une racine via les dérivées successives.
- Passer de la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$ à celle sur $\mathbb{R}[X]$.
- Utiliser la parité et le fait qu'un polynôme est à coefficients réels pour obtenir des racines à partir d'une racine donnée.
- Résoudre des systèmes polynomiaux symétriques en les inconnues.
- Exprimer une somme et un produit de racines à l'aide des coefficients du polynôme.
- Déterminer une partie polaire d'une fraction rationnelle relative à un pôle simple ou double.
- Accélérer la décomposition en éléments simples en utilisant :
  - le fait que des pôles soient conjugués ;
  - la parité éventuelle de la fraction rationnelle ;
  - la limite de $xF(x)$ quand x tend vers $+\infty$;
  - des valeurs particulières.

3 Questions de cours

- Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts deux à deux. Montrer que pour tout $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines de $P_n = (X+i)^n - (X-i)^n$. En déduire les valeurs de $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{n}$ et $B_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{n}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

- Soit $P = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - a_k)^{r_k} \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Montrer que $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{X - a_k}$.