Devoir à la maison n° 2 : corrigé

Solution 1.

1. **a.** On a d'une part

$$\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{l!(k-l)!} = \frac{n!}{(n-k)!l!(k-l)!}$$

et d'autre part

$$\binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l} = \frac{n!}{l!(n-l)!}\frac{(n-l)!}{(k-l)!(n-k)!} = \frac{n!}{l!(k-l)!(n-k)!}$$

On en déduit bien l'égalité demandée.

b.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=l}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{l} &= \sum_{k=l}^{n}(-1)^k\binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l} && \text{d'après la question précédente}\\
&= \binom{n}{l}\sum_{k=l}^{n}(-1)^k\binom{n-l}{k-l}\\
&= \binom{n}{l}\sum_{j=0}^{n-l}(-1)^{j+l}\binom{n-l}{j} && \text{en effectuant le changement d'indice } j=k-l\\
&= (-1)^l\binom{n}{l}\sum_{j=0}^{n-l}(-1)^j\binom{n-l}{j}\\
&= (-1)^l\binom{n}{l}(1-1)^{n-l} && \text{d'après la formule du binôme}\\
&= 0 && \text{car } n-l>0
\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}b_k &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}a_l\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{l}a_l\\
&= \sum_{0\leqslant l\leqslant k\leqslant n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{l}a_l\\
&= \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=l}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{l}\\
&= \sum_{l=0}^{n}a_l\sum_{k=l}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{l}
\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $\sum_{k=l}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{l} = 0$ quand $l<n$. On en déduit que

$$(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}b_k = (-1)^n a_n\sum_{k=n}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{n} = (-1)^n a_n(-1)^n\binom{n}{n}\binom{n}{n} = a_n$$

Solution 2.

1. Il s'agit essentiellement d'une permutation de sommes :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} S_k = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k} x_i &= \sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n-1} x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1} x_i = \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i = \sum_{i=1}^{n}(n-i)x_i \\ &= n\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} i x_i = -S\end{aligned}$$

2. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comme $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, on a $S_k = \sum_{i=1}^{k} x_i = -\sum_{i=k+1}^{n} x_i$. Par inégalité triangulaire :

$$|S_k| \leqslant \sum_{i=k+1}^{n} |x_i| \leqslant (n-k)$$

car pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|x_i| \leqslant 1$.

3. D'après la première question et l'inégalité triangulaire :

$$|S| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |S_k| = \sum_{k=1}^{p} |S_k| + \sum_{k=p+1}^{n-1} |S_k|$$

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on majore $|S_k|$ de la manière suivante :

$$|S_k| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |x_i| \leqslant k$$

et pour $k \in [\![p+1, n-1]\!]$, on utilise la majoration de la question précédente, de sorte que

$$|S| \leqslant \sum_{k=1}^{p} k + \sum_{k=p+1}^{n-1} n-k$$

On effectue alors le changement d'indice $l = n - k$ dans la deuxième somme :

$$|S| \leqslant \sum_{k=1}^{p} k + \sum_{l=1}^{n-p-1} l$$

On peut alors changer l'indice muet l en k.

4. On sait que la somme des n premiers entiers vaut $\frac{n(n+1)}{2}$. On obtient donc

$$|S| \leqslant \frac{p(p+1)}{2} + \frac{(n-p-1)(n-p)}{2} = p(p+1) + \frac{n(n-2p-1)}{2}$$

- Si n est pair, alors $n = 2p$. Ainsi $|S| \leqslant p^2$. Or $\frac{n^2}{4} = p^2$ est un entier donc $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = p^2$.
- Si n est impair, alors $n = 2p+1$. Ainsi $|S| \leqslant p(p+1)$. Or $\frac{n^2}{4} = p(p+1) + \frac{1}{4}$. Comme $p(p+1)$ est entier et que $0 \leqslant \frac{1}{4} < 1$, $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = p(p+1)$.

Solution 3.

1. Si k est un multiple de n, $\omega^r = 1$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk} = n$.

   Si k n'est pas un multiple de n, $\omega^r \neq 1$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk} = \frac{1-\omega^{rn}}{1-\omega^r} = 0$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\phi(k+n) = \omega^{(k+n)^2} = \omega^{k^2}\omega^{2kn}\omega^{n^2} = \omega^{k^2} = \phi(k)$.

3. On a $G = \sum_{k=0}^{n-1} \phi(k)$. Comme ϕ est n-périodique, la somme reste la même si on somme sur n entiers consécutifs. On a donc $G = \sum_{k=j}^{j+n-1} \omega^{k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+j)^2}$.

4. Puisque $\omega \in \mathbb{U}$, $\overline{\omega} = \frac{1}{\omega}$. On en déduit que $\overline{G} = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-j^2}$.

$$G\overline{G} = G\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-j^2} = \sum_{j=0}^{n-1} G\omega^{-j^2}$$

Mais en utilisant la question précédente

$$\begin{aligned}
G\overline{G} &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+j)^2}\omega^{-j^2} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}\omega^{2kj} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{2kj}
\end{aligned}$$

Puisque n est impair, $2k$ est un multiple de n *si et seulement si* k est lui-même un multiple de n. Or $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc $2k$ est un multiple de n *si et seulement si* $k = 0$. En utilisant la première question, on en déduit que $G\overline{G} = n$ puis $|G| = \sqrt{n}$.