Semaine du 01/06 au 05/06

1 Cours

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire et norme Définition d'un produit scalaire. Orthogonalité. Espace préhilbertien réel, espace euclidien. Norme associée à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Inégalité triangulaire. Identités de polarisation.

Familles orthogonales Définition des familles orthogonales et orthonormales. Une famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. Théorème de Pythagore. Bases orthonormales : coordonnées, expression du produit scalaire et de la norme. Procédé de Gram-Schmidt. Existence de bases orthonormales. Toute famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complété en une base orthonormale.

Orthogonalité Orthogonal d'une partie. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, $F^\perp$ est l'unique supplémentaire orthogonal de F. Dimension de l'orthogonal en dimension finie. Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales. Expression du projeté orthogonal à l'aide d'une base orthonormale. Distance à un sous-espace vectoriel. Hyperplans affines : équations, distance à un hyperplan affine.

2 Méthodes à maîtriser

- Montrer qu'une application est un produit scalaire. Dans l'ordre : symétrie, linéarité par rapport à l'**une** des deux variables (la linéarité par rapport à la seconde variable s'obtient par symétrie), positivité, définition.
- Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas des produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
- Orthonormaliser une famille libre à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.
- Déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel.
- Calculer un projeté orthogonal.
- Calculer la distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie.

3 Questions de cours

- Montrer que l'application $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2 \mapsto \langle A \mid B\rangle = \operatorname{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire.
- **BCCP 76** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot \mid \cdot)$. On pose $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ pour $x \in E$.
  1. (a) Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
     (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
  2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall x \in [a,b],\ f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble $\left\{\int_a^b f(t)\,dt \times \int_a^b \frac{dt}{f(t)},\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.
- **BCCP 77** Soit E un espace euclidien.
  1. Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.
  2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
     (a) Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
     (b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
- **BCCP 79** Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
  1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $\int_a^b h(x)\,dx = 0 \implies h = 0$.
  2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose pour $(f,g) \in E^2$, $(f \mid g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
  3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\,dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- **BCCP 80** Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2(x)$.

- **BCCP 81** On admet que $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^{\perp}$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^{\perp}$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

- **BCCP 82** Pour $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(\mathrm{A} \mid \mathrm{A}') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires.