

1 Cours

Suites de fonctions

Modes de convergence Convergence simple. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Théorèmes d'interversion

- Théorème de la double limite : si (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur un intervalle I , et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en $a \in \bar{I}$, alors (ℓ_n) admet une limite, f admet une limite en a et $\lim_a f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n$.
- Continuité : si (f_n) est une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f sur tout segment d'un intervalle I , alors f est continue sur I .
- Primitivisation : si (f_n) est une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f sur tout segment d'un intervalle I , alors, pour tout $a \in I$, $\left(x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ sur tout segment de I .
- Intégration : si (f_n) est une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f sur le segment $[a, b]$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$.
- Dérivation : si (f_n) est une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 convergeant simplement vers une fonction f sur un intervalle I et si (f'_n) converge uniformément vers une fonction g sur tout segment de I , alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $f' = g$. Adaptation aux fonctions de classe \mathcal{C}^k .

2 Méthodes à maîtriser

- Montrer qu'une suite de fonctions (f_n) converge simplement : étude de la suite numérique $(f_n(x))$ à x fixé (éventuellement une suite récurrente suivant la définition de la suite de fonctions).
- Montrer qu'une suite de fonctions (f_n) converge uniformément :
 1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f .
 2. Montrer que $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$: pour cela, on peut
 - étudier $f_n - f$ pour déterminer explicitement $\sup |f_n - f|$;
 - majorer $|f_n(x) - f(x)|$ par une quantité indépendante de x tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- Pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément, on peut au choix :
 - Calculer explicitement $\|f_n - f\|_\infty$, où f est la limite simple de (f_n) , et montrer que cette quantité ne tend pas vers 0.
 - Déterminer une suite (x_n) telle que $f_n(x_n) - f(x_n)$ ne tend pas vers 0.
 - Mettre en défaut l'un des théorèmes d'«interversion» : par exemple, les f_n sont continues mais f ne l'est pas.

3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 9, 10, 11, 12