Semaine du 17/05 au 21/05

1 Cours

Matrices

Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ Définition d'une matrice à n lignes et p colonnes. Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Produit matriciel : bilinéarité et associativité. Transposition : linéarité, involutivité , transposée d'un produit. Matrices définies par blocs et produit de telles matrices.

Matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$ Structure d'anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Élément neutre I_n. Matrices inversibles. Groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Inverse d'un produit de matrices inversibles. Inverse d'une transposée de matrice inversible. Trace : linéarité, trace d'une transposée, trace d'un produit.

Matrices particulières de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ Matrices diagonales, triangulaires supérieures et inférieures. Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$. Matrices symétriques et antisymétriques. Structure de sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Représentation des vecteurs Matrice colonne d'un vecteur dans une base. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. L'application qui à un vecteur associe sa matrice dans une base est un isomorphisme.

Opérations sur les lignes et colonnes d'une colonne Interprétation matricielle des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes d'une matrice. Calcul de l'inverse par pivot de Gauss. Calcul du rang par pivot de Gauss.

Représentation des applications linéaires Matrice d'une application linéaire dans des bases. L'application qui à une application linéaire associe sa matrice dans des bases est un isomorphisme. Interprétation matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire. La matrice d'une composée est le produit des matrices. Une application linéaire est bijective si et seulement si sa matrice est inversible et la matrice de la bijection réciproque est l'inverse de la matrice.

Représentation des endomorphismes Matrice d'un endomorphisme dans une base. L'application qui à un endomorphisme associe sa matrice dans une base est un isomorphisme d'algèbres. $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles et inverses l'une de l'autre si et seulement si $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$ **ou** $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$.

Noyau, image et rang de matrices Noyau, image et rang d'une matrice. Critère d'inversibilité d'une matrice carrée : noyau nul. Invariance du rang par multiplication par une matrice inversible. Invariance du rang par transposition. Caractérisation de l'inversibilité par le rang.

Changement de base Matrice de passage d'une base vers une autre base. Formule de changement de bases pour les vecteurs, les applications linéaires et les endomorphismes. Matrices équivalentes. Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang. Matrices semblables. Deux matrices semblables ont même trace. Trace d'un endomorphisme.

Systèmes linéaires Interprétation matricielle d'un système linéaire. Structure de l'ensemble des solutions d'un système. Système de Cramer : définition et unicité de la solution.

2 Méthodes à maîtriser

- Calculer une puissance de matrice grâce à un polynôme annulateur ou à la formule du binôme de Newton.
- Calculer l'inverse d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur ou à l'aide du pivot de Gauss.
- Écrire la matrice d'une application linéaire dans des bases ou d'un endomorphisme dans une base.
- Déterminer noyau, image et rang d'une matrice par pivot de Gauss.
- Traduire matriciellement des informations sur des applications linéaires ou des endomorphismes et inversement.

3 Questions de cours

BCCP 60 Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(\mathrm{M}) = \mathrm{AM}$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

BCCP 71 Soit p le projecteur sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$ parallèlement à la droite D d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{P} \oplus \mathrm{D}$.
2. Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Trace et similitude Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{tr}(\mathrm{BA})$. En déduire que deux matrices semblables ont même trace.

Matrices stochastiques On dit qu'une matrice à coefficients réels est **stochastique** si ses coefficients sont positifs et la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.

Matrices symplectiques Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathrm{J} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_n \\ \hline -\mathrm{I}_n & 0 \end{array}\right)$. On dit qu'une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ est **symplectique** si $\mathrm{M}^\top \mathrm{J} \mathrm{M} = \mathrm{J}$.

Montrer que l'ensemble des matrices symplectiques de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{K})$.