

## Calculs élémentaires

### EXERCICE 1.

Calculez

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 2+2i \\ 4 & 1 & -2i \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2-i \\ 2 & -i \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

### EXERCICE 2.

Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Etablir que

$$M^2 - (a+d)M + (ad-bc)\mathbb{I}_2 = \mathbb{O}_2.$$

### EXERCICE 3.

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U = (1)_{1 \leq i,j \leq n}$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note  $\sigma(A)$  la somme des coefficients de  $A$ . Exprimer  $UAU$  en fonction de  $\sigma(A)$  et de  $U$ .

### EXERCICE 4.

Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que

$$AB = \mathbb{I}_n + A + A^2.$$

Montrer que  $AB = BA$ .

### EXERCICE 5.

On considère dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  les matrices  $A$  et  $B$  définies par  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ ,  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  et

$$a_{i,j} = i+j, \quad b_{i,j} = i-j.$$

Calculer le terme général des matrices  $C = A - B$  et  $D = AB$ .

### EXERCICE 6.

Montrer que l'ensemble  $G$  des matrices  $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$  où  $x \in \mathbb{R}$  est un sous-groupe

de  $GL_3(\mathbb{R})$  isomorphe à  $(\mathbb{R}, +)$ .

### EXERCICE 7.

On dit qu'une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  est *stochastique* si elle est à coefficients positifs et si la somme des éléments de chaque colonne vaut 1. Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$  deux matrices stochastiques. Montrer que  $AB$  est stochastique.

## Puissances

### EXERCICE 8.★

Calculer les puissances des matrices  $A, B, C$  et  $D$  suivantes :

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3. \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix};$$

$$2. \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix};$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

### EXERCICE 9.★

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les trois suites de nombres réels définies par  $u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \geq 0$ ,

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

Déterminer les expressions des termes généraux de  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  en fonction de  $n, u_0, v_0$  et  $w_0$ .

### EXERCICE 10.

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  telle que

$$A^3 - A^2 - 4A + 4\mathbb{I}_p = 0_p.$$

Etablir que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $A^n$  appartient à  $\text{vect}(\mathbb{I}_p, A, A^2)$  et exprimer  $A^n$  en fonction de  $\mathbb{I}_p, A$  et  $A^2$ .

### EXERCICE 11.

On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $A^2, B^2$  et  $B^3$ . En déduire  $A^n$  et  $B^n$  pour tout entier  $n \geq 1$ .

2. Calculer  $AB, AB^2, BA$  et  $B^2A$ .

**EXERCICE 12.★**

Soient  $a$  et  $b$ , deux nombres complexes. Calculer les puissances de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}.$$

**EXERCICE 13.**

Soit  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que  $A + A^{-1} = I_n$ . Déterminer  $A^k + A^{-k}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**EXERCICE 14.**

Soit  $E$  l'ensemble des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

1.
  - a. Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Donner sa dimension ainsi qu'une base.
  - b. Montrer que  $E$  est un anneau. Est-il commutatif ?
  - c. On note  $G$  l'ensemble des matrices de  $E$  telles que  $a > 0$  et  $b > 0$ . Montrer que  $G$  est un groupe.
2. Soit  $A \in E$ . Calculer  $A^p$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . On pourra distinguer les cas  $a \neq b$  et  $a = b$ .
3. On pose  $B_n = \sum_{p=0}^n \frac{A^p}{p!}$ . Montrer que la suite  $(B_n)$  et préciser sa limite  $B$ . (On dit qu'une suite de matrices converge si les suites des coefficients convergent ; dans ce cas, la limite est la matrice constituée des limites des coefficients).
4. On note  $f$  l'application de  $E$  dans  $E$  qui à la matrice  $A$  associe la matrice  $B$  définie dans la question précédente.  $f$  est-elle linéaire ? injective ? surjective ? Préciser son image.

**EXERCICE 15.**

Soient  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer de deux façons  $M^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Inverses****EXERCICE 16.★★**

Soient  $n \geq 1$  et  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que  $A$  est inversible.

**EXERCICE 17.★**

Soit  $\mathcal{U}_n$  le sous-ensemble de  $T_n^+(\mathbb{K})$  constitué des matrices dont tous les coefficients diagonaux valent 1. Prouver que  $\mathcal{U}_n$  est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{K})$ .

**EXERCICE 18.**

Montrer que  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -9 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  est inversible et déterminer son inverse.

**EXERCICE 19.**

Soit  $A_n$  la matrice carrée de taille  $n$  suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que  $A_n$  est inversible *si et seulement si*  $n$  est pair et calculer son inverse dans ce cas.

**EXERCICE 20.**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A_n = (\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$ . Montrer que  $A_n$  est inversible et calculer son inverse.

**EXERCICE 21.**

Dire si les matrices suivantes sont inversibles ou non. Le cas échéant, calculer leur inverse ou sinon, donner une base de leur image et une base de leur noyau.

$$1. A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$2. A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3. A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$4. A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5. A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$6. A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$7. A_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$8. A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**EXERCICE 22.★**

Soit  $n \geq 1$ . Prouver l'inversibilité et calculer l'inverse des matrices suivantes,

$$1. \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

$$2. \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**EXERCICE 23.★**

Soient  $n \geq 1$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $I_n + A$  soit inversible. On pose alors  $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ .

1. Montrer que  $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ .

2. Prouver que  $I_n + B$  est inversible.

**EXERCICE 24.★★**

Soient  $n \geq 1$  et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Prouver l'inversibilité et inverser  $M$  par la méthode du pivot de Gauss.

2. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Calculer les puissances de  $J$ .

b. Exprimer  $M$  en fonction de  $J$ .

c. En déduire que  $M$  est inversible et retrouver l'expression de son inverse.

**EXERCICE 25.**

En utilisant l'algorithme du pivot, vérifier que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leur inverse.

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$3. \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 6 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

**EXERCICE 26.**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $A^3 - A$ .
2. En déduire que  $A$  est inversible puis déterminer  $A^{-1}$ .

**Image et noyau****EXERCICE 27.**

Les applications suivantes sont clairement linéaires. Déterminer leur noyau et leur image et écrire dans chaque cas la matrice  $M$  correspondante rapportée aux bases canoniques.

1.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$ ;
2.  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x - y, x + y, x + 2y)$ ;
3.  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x - 3y + 2z$ ;
4.  $\theta: \mathbb{R}^3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3[X], P \mapsto P'$ .

**EXERCICE 28.**

Soit

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

considérée comme matrice d'un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dans la base canonique. En déterminer l'image et le noyau. Montrer qu'il s'agit d'un projecteur.

**EXERCICE 29.**

Déterminer des bases du noyau et de l'image de  $A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ . Donner

aussi des systèmes d'équations cartésiennes (avec un nombre minimum d'équations) de  $\text{Ker } A$  et  $\text{Im } A$ .

**EXERCICE 30.**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Déterminer *sans calculs* des bases de  $\text{Ker } A$  et  $\text{Im } A$ .

**Rang****EXERCICE 31.★**

Discuter le rang de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

**EXERCICE 32.**

Soit  $M$  une matrice carrée de taille  $n \geq 2$  à coefficients réels de rang 1.

1. Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes  $U$  et  $V$  tels que  $M = UV$ .
2. Exprimer les puissances entières de  $M$  en fonction de  $M$  et de  $\text{tr}(M)$ .
3. A quelle condition une matrice de rang 1 est-elle une matrice de projection?
4. Quelles sont les matrices de rang 1 qui sont nilpotentes?

**EXERCICE 33.**

Soit  $A$  une matrice réelle. Montrer que  $\text{rg } A = \text{rg } {}^tAA = \text{rg } A{}^tA$ .

**EXERCICE 34.**

On considère une application  $f$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ , non constamment égale à 0 ou 1, telle que :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, f(AB) = f(A)f(B)$$

1. Montrer que pour toute matrice inversible  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $f(A)$  est non nul.
2. Soit  $A$  une matrice de rang  $r$ , strictement inférieur à  $n$ .
  - a. Montrer l'existence de  $r + 1$  matrices, notées  $A_1, A_2, \dots, A_{r+1}$ , toutes équivalentes à  $A$  et telles que le produit  $A_1 A_2 \dots A_{r+1}$  soit nul.
  - b. En déduire que  $f(A) = 0$ .
3. Que peut-on en conclure pour l'application  $f$ ?  
Donner un exemple d'une telle application.

**EXERCICE 35.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  non nul tel que  $AU = \lambda U$ . Montrer qu'il existe  $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  non nul tel que  $AV = \lambda V$ .

**EXERCICE 36.**

Montrer qu'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est de rang  $r$  si et seulement si il existe deux familles libres  $(X_1, \dots, X_r)$  et  $(Y_1, \dots, Y_r)$  de vecteurs colonnes de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  telles que  $M = X_1 Y_1 + \dots + X_r Y_r$ .

**Matrices définies par blocs****EXERCICE 37.★**

Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  et  $M \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{C})$  définie par

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A + B \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de  $M$  en fonction de ceux de  $A$  et  $B$ .
2. En cas d'inversibilité, exprimer l'inverse de  $M$  en fonction de  $A$  et  $B$ .

**EXERCICE 38.**

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On pose  $M = \left( \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$ .

Montrer que  $M$  est inversible si et seulement si  $A$  et  $B$  le sont et que, dans ce cas, il existe  $C' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  telle que  $M^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} A^{-1} & C' \\ \hline 0 & B^{-1} \end{array} \right)$ .

**EXERCICE 39.**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  un groupe pour la multiplication matricielle. On suppose  $\mathcal{G} \neq \{0\}$ .

**REMARQUE.** L'inversibilité et l'élément neutre pour le groupe  $\mathcal{G}$  n'ont a priori rien à voir avec l'inversibilité et l'élément neutre pour le groupe  $GL_n(\mathbb{K})$ . ■

On souhaite montrer qu'il existe  $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\mathcal{G}$  soit isomorphe à un sous-groupe de  $GL_r(\mathbb{K})$ .

On note  $E$  l'élément neutre de  $\mathcal{G}$ .

1. On suppose que  $E = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$  avec  $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrer que les éléments de  $\mathcal{G}$  sont de

la forme  $\left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$  avec  $A \in GL_r(\mathbb{K})$ . Conclure dans ce cas.

2. On revient au cas général. Montrer que  $E$  est semblable à  $\left( \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ . Conclure.

**EXERCICE 40.**

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On pose  $M = \left( \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$ .

On suppose  $A$  inversible. Montrer que  $\text{rg } M = \text{rg } A + \text{rg } B$ . Le résultat reste-t-il valable si  $A$  n'est pas inversible ?

**EXERCICE 41.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ . On pose  $M = \left( \begin{array}{c|c} A & 0_{n,r} \\ \hline 0_{q,p} & B \end{array} \right)$ . Montrer que  $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$ .

## Changement de base

### EXERCICE 42.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ . On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $A$ .

1. Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  de  $E$  telle que la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{C}$  soit  $D$ .
2. Déterminer une matrice  $P$  de  $GL_3(\mathbb{K})$  telle que  $A = PDP^{-1}$ . Calculer  $P^{-1}$ .
3. Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
4. En déduire le terme général des suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

### EXERCICE 43.

Soient  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $u = (1, 1)$ ,  $v = (1, -1)$  et  $\mathcal{B} = (u, v)$ .

1. Justifier que  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ .
2. Donner les matrices de passage entre  $\mathcal{B}$  et la base canonique  $\mathcal{B}_0$  de  $E$ .

### EXERCICE 44.

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$(x, y, z) \mapsto (2x - y, y - z, -z + 2x).$$

1. Calculer la matrice  $M$  de  $f$  dans la base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Prouver que la famille  $\mathcal{B}'$  définie par

$$f_1 = e_2 - e_3, \quad f_2 = -e_1 + e_3, \quad f_3 = e_1 + e_2$$

est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

3. Calculer la matrice  $P = \text{mat}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$  et son inverse.
4. Calculer la matrice  $M'$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^3$ .
5. Quel est le lien entre  $M, M'$  et  $P$ ?

### EXERCICE 45.

On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  dont la matrice dans la base canonique vaut

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer  $\text{Im}(f)$ ,  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$ .
2. Soit la famille  $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^4$  définie par

$$f_1 = (1, 0, 0, 0), \quad f_2 = (1, 1, -1, 1), \quad f_3 = (3, 2, 0, -1)$$

et  $f_4 = (7, 4, -4, 5)$ . Vérifier que  $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .

3. Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{F}$ .

## Représentation des applications linéaires

### EXERCICE 46.

Soient  $E = \mathbb{R}_2[X]$  et  $A = a + bX + cX^2$  un élément de  $E$ . On définit l'application  $f$  par :

$$\forall P \in E, f(P) = (AP)''$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Donner la matrice  $M$  de  $f$  dans la base canonique de  $E$ .
3. Déterminer une condition sur  $A$  pour que  $f$  soit bijective.
4. On pose  $A = X^2 + 1$ . Déterminer  $M^{-1}$  et  $M^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  dans ce cas.

### EXERCICE 47.

Soit  $f : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$ .

1. Montrer que  $P$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
2. Déterminer la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ . En déduire  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$ .

3. Déterminer une base de  $\mathbb{R}_3[X]$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

### EXERCICE 48.

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto X + \text{tr}(AX)B \end{cases}$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur  $A$  et  $B$  pour que  $f$  soit une symétrie.
3. Déterminer la base et la direction de  $f$  dans ce cas.

### EXERCICE 49.

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $\text{Im } f = \text{Ker } f$  si et seulement si  $n$  est pair et il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est

$$\left( \begin{array}{c|c} 0_p & I_p \\ \hline 0_p & 0_p \end{array} \right) \text{ avec } n = 2p.$$

### EXERCICE 50.★

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n = \mathbb{R}_n[X]$  et  $T_n$  l'application définie sur  $E_n$  par

$$T_n(P) = (nX + 1)P + (1 - X^2)P'.$$

1. Prouver que  $T_n \in \mathcal{L}(E_n)$ .
2. Ecrire la matrice  $M_n = \text{mat}_{\mathcal{B}_n}(T_n)$  de  $T_n$  dans la base canonique de  $E_n$ .
3. Dans le cas où  $n = 3$ , déterminer des bases de  $\text{Ker}(T_n)$  et de  $\text{Im}(T_n)$ .

### EXERCICE 51.★

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et  $\varphi_A$  l'application de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  définie par

$$\varphi_A : M \mapsto AM - MA.$$

1. Prouver que  $\varphi_A$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer le noyau et l'image de  $\varphi_A$ .
3. En déduire que le commutant de  $A$ , ie l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $A$ , est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dont on donnera une base.

### EXERCICE 52.

Soient  $E = \mathbb{R}_2[X]$  et  $f$  l'application définie sur l'espace  $E$  par  $f(P) = P + P'$ .

1. Prouver que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. On note  $\mathcal{B}_0$  la base canonique de  $E$ . Déterminer la matrice  $M = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$ .
3. Etablir que  $f$  est un automorphisme de  $E$  et calculer  $M^{-1}$ .
4. En déduire la solution  $P$  de  $P + P' = X^2 + X + 1$ .

**EXERCICE 53.**

Soit  $f$ , un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ , admettant pour matrice relative à la base canonique la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau et de l'image de  $f$ .
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de  $f^2$ .
3. Vérifier que  $\text{Ker}(f^2)$  et  $\text{Im}(f^2)$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .

**EXERCICE 54.**

Soit  $\mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient  $f$ ,  $g$  et  $h$  les applications de  $\mathbb{R}[X]$  dans lui-même définies par :

$$f(P(X)) = XP(X), \quad g(P(X)) = P'(X) \quad \text{et} \quad h(P(X)) = (P(X))^2.$$

1. Montrer que les applications  $f$  et  $g$  sont linéaires, mais que  $h$  ne l'est pas.
2. Les applications  $f$  et  $g$  sont-elles injectives ? Surjectives ? Déterminer la dimension de leurs noyaux respectifs. Déterminer l'image de  $f$ .
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On désigne par  $f_n$  et  $g_n$  les restrictions de  $f$  et de  $g$  à  $\mathbb{R}_n[X]$ . Montrer que l'image de  $g_n$  est incluse dans  $\mathbb{R}_n[X]$  et celle de  $f_n$  est incluse dans  $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ .
4. Déterminer la matrice de  $g_n$  dans la base  $(1, X, \dots, X^n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Déterminer la matrice de  $f_n$  relativement aux bases

$$\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{n+1} = (1, X, \dots, X^{n+1}).$$

5. Calculer les dimensions respectives des images de  $f_n$  et de  $g_n$ .

**EXERCICE 55.**

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , définie en posant, pour tout  $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ ,

$$f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

1. Montrer que  $f$  est linéaire et que son image est incluse dans  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Dans le cas où  $n = 3$ , donner la matrice de  $f$  dans la base  $(1, X, X^2, X^3)$ . Déterminer ensuite, pour une valeur de  $n$  quelconque, la matrice de  $f$  dans la base  $(1, X, \dots, X^n)$ .
3. Déterminer le noyau et l'image de  $f$  pour  $n \geq 3$ . Calculer leurs dimensions respectives.
4. Soit  $Q$  un élément de l'image de  $f$ . Montrer (en utilisant en particulier les résultats de la deuxième question) qu'il existe un unique  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que

$$f(P) = Q \quad \text{et} \quad P(0) = P'(0) = 0.$$

**EXERCICE 56.**

Soit  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie par

$$L(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z).$$

1. Ecrire la matrice associée à  $L$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Trouver une base et déterminer la dimension de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

$$\text{Ker}(L), \quad \text{Im}(L), \quad \text{Ker}(L) \cap \text{Im}(L).$$

3. Déterminer  $L \circ L = L^2$  et  $L \circ L \circ L = L^3$  en calculant leurs matrices dans la base canonique. Quelle est la matrice de  $L^{16}$  dans la base canonique ?

**EXERCICE 57.★**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . On considère l'application  $\phi$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  définie par  $\phi(M) = AM$ .

1. Vérifier que  $\phi$  est linéaire.
2. Montrer que  $\phi$  est un isomorphisme. Donner une expression simple de l'isomorphisme réciproque.
3. Déterminer la matrice de  $\phi$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .



**EXERCICE 58.**

On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}_3[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto P(X+1) + P(X) \end{aligned}$$

1. Montrer que  $\phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
2. On note  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ . Déterminer la matrice de  $\phi$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On notera  $M$  cette matrice.
3.
  - a. Montrer que  $M$  est inversible et calculer  $M^{-1}$ .
  - b. En déduire que  $\phi$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$ , et donner la matrice de  $\phi^{-1}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
4. En déduire que l'équation  $P(X+1) + P(X) = 4X^3 - 2X^2 + X - 1$  admet une unique solution  $P \in \mathbb{R}_3[X]$ , et donner cette solution.

**EXERCICE 59.**

On considère l'espace vectoriel  $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , et les fonctions  $g_1, g_2, g_3$  et  $g_4$  définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_1(x) = xe^x, \quad g_2(x) = xe^{-x}, \quad g_3(x) = e^x, \quad g_4(x) = e^{-x}.$$

On note  $F = \text{vect}(g_1, g_2, g_3, g_4)$ .

1.
  - a. Si  $a, b, c$  et  $d$  sont quatre réels tels que  $\forall x \in \mathbb{R}, axe^x + bxe^{-x} + ce^x + de^{-x} = 0$ , montrer qu'alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + c)e^x = 0$ , puis que  $a = c = 0$ .
  - b. Montrer que  $(g_1, g_2, g_3, g_4)$  est une base de  $F$ , qu'on notera  $\mathcal{B}_1$  par la suite. Quelle est la dimension de  $F$ ?
2.
  - a. Vérifier que  $g'_1$  et  $g'_2$  appartiennent à  $F$ .
  - b. Montrer que  $(g_1, g_2, g'_1, g'_2)$  est aussi une base de  $F$ , qu'on notera  $\mathcal{B}_2$ . Donner la matrice de passage de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}_2$ .
3. Soit  $\phi$  l'application définie sur  $F$  par  $\phi(f) = f'$ .
  - a. Montrer que  $\phi$  est un endomorphisme de  $F$ .
  - b. Déterminer la matrice  $M$  de  $\phi$  dans la base  $\mathcal{B}_1$ .
  - c. En déduire que  $\phi$  est un automorphisme de  $F$ .
  - d. Déterminer la matrice  $N$  de  $\phi$  dans la base  $\mathcal{B}_2$ . Cette matrice est-elle inversible?

**EXERCICE 60.**

Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux sous-espaces supplémentaires de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (f, g) \in H_1 \times H_2, \quad f \circ g + g \circ f = 0$$

1. Justifier qu'il existe  $(p_1, p_2) \in H_1 \times H_2$  tel que  $p_1 + p_2 = \text{Id}$ .
2. Montrer que  $p_1$  et  $p_2$  sont des projecteurs.
3. Montrer que  $\dim H_1 \leq (n - \text{rg } p_2)^2$  et  $\dim H_2 \leq (n - \text{rg } p_1)^2$ .
4. Quel est le nombre de choix possibles pour le couple  $(H_1, H_2)$ ?

**EXERCICE 61.**

Soient  $p_1, \dots, p_n$  des projecteurs d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie tels que  $p_1 + \dots + p_n = \text{Id}_E$ .  
Montrer que  $\text{Im } p_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } p_n = E$ .

**EXERCICE 62.**

Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer le rang de l'endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$   $\Phi : f \mapsto v \circ f \circ u$ .

**EXERCICE 63.**

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto iz + (1-i)\bar{z} \end{cases}.$$

1. Montrer que  $f$  est un automorphisme du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ .
2. Montrer qu'il existe une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
3. Construire le point d'affixe  $f(z)$  à partir du point d'affixe  $z$ .

**EXERCICE 64.**

On considère le sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  engendré par la famille  $\mathcal{B} = (\sin, \cos, \text{sh}, \text{ch})$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $F$ .
2. On note  $D$  l'opérateur de dérivation. Montrer que  $F$  est stable par  $D$ . On notera  $d$  l'endomorphisme de  $F$  induit par  $D$ .
3. On note  $M$  la matrice de  $d$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Calculer  $M^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Montrer que  $d$  est un automorphisme de  $F$ . Écrire la matrice de  $d^{-1}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
5. On note  $f = d - \text{Id}$ . Déterminer l'image et le noyau de  $f$ .
6. On note  $g = d + \text{Id}$ . Déterminer l'image et le noyau de  $g \circ f$ .

**Matrices remarquables****EXERCICE 65.★**

Soient  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  le sous-ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre  $n$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  le sous-ensemble des matrices carrées antisymétriques d'ordre  $n$ .

1. Justifier que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Préciser leurs dimensions.
2. Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**EXERCICE 66.★**

Soit  $E$  le sous ensemble de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  défini par

$$E = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  stable pour la multiplication des matrices. Calculer  $\dim(E)$ .
2. Soit  $M(a, b, c)$  un élément de  $E$ . Déterminer, suivant les valeurs des paramètres  $a, b$  et  $c \in \mathbb{R}$  son rang.
3. Calculer (lorsque cela est possible) l'inverse  $M(a, b, c)^{-1}$  de  $M(a, b, c)$ .
4. Donner une base de  $E$  formée de matrices inversibles et une autre formée de matrices de rang 1.

**EXERCICE 67.**

Montrer que

$$F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Déterminer une base de  $F$  et la compléter en une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**EXERCICE 68.**

On dit qu'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est magique si les sommes des coefficients de  $M$  par ligne et par colonne sont constantes. On note  $\mathcal{M}$  l'ensemble des matrices magiques et, pour  $M \in \mathcal{M}$ ,  $s(M)$  la valeur commune des sommes.

1. Montrer que  $\mathcal{M}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et que  $s : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{K}$  est un morphisme d'algèbres.

**REMARQUE.** Il s'agit de montrer que  $\mathcal{M}$  est un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et que  $s$  est un morphisme d'anneau et une forme linéaire. ■

2. Montrer que si  $M \in \mathcal{M}$  est inversible, alors  $M^{-1} \in \mathcal{M}$ .
3. Montrer que  $\mathcal{M}$  est la somme directe du sous-espace vectoriel  $\mathcal{M}_s$  des matrices magiques symétriques et du sous-espace vectoriel  $\mathcal{M}_a$  des matrices magiques antisymétriques.
4. On note  $\phi_M$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé à  $M$  et on pose

$$\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, x_1 + \dots + x_n = 0\} \text{ et } \mathcal{K} = \{(x, \dots, x), x \in \mathbb{K}\}.$$

Montrer que  $M \in \mathcal{M}$  si et seulement si  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$  sont stables par  $\phi_M$ .

5. En déduire la dimension de  $\mathcal{M}$ .

**EXERCICE 69.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note  $\Delta_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M + {}^tM = \text{tr}(M)A\}$ . On note respectivement  $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  les ensembles des matrices symétriques et des matrices antisymétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

1. Montrer que  $\Delta_A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  contenant  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ .
2. Si  $\text{tr}(A) \neq 2$ , montrer que  $\Delta_A = \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ .
3. Déterminer  $\Delta_A$  dans le cas où  $A \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ .
4. Déterminer  $\Delta_A$  dans le cas où  $\text{tr}(A) = 2$  et  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ . On pourra remarquer que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est la somme directe de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ .

**EXERCICE 70.**

Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on pose  $M(z) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z) & -\operatorname{Im}(z) \\ \operatorname{Im}(z) & \operatorname{Re}(z) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{E} = \{M(z), z \in \mathbb{C}\}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{E}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que l'application  $M : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathcal{E} \\ z & \mapsto M(z) \end{cases}$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.
3. Montrer que  $\mathcal{E}$  est un anneau commutatif et que  $M$  est un isomorphisme d'anneaux.
4. Montrer que  $\mathcal{E}$  est un corps.
5. Résoudre l'équation  $A^4 = I_2$  d'inconnue  $A \in \mathcal{E}$ .
6. Pour  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ , on pose  $N(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  et  $\mathcal{F} = \{N(a, b), (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ . Montrer que  $\mathcal{F}$  est un anneau commutatif. Quels sont ses éléments inversibles ?

**EXERCICE 71.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $\mathcal{N}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$ .

Pour  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ , on pose  $[A, B] = AB - BA$ . On note  $\mathcal{L}_n = \{[A, B], (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2\}$ .

1. a. Montrer que  $\mathcal{N}_n$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et déterminer sa dimension.  
b. Montrer que  $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{N}_n$ .
2. a. Montrer que toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  semblable à une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de diagonale nulle appartient à  $\mathcal{N}_n$ .  
b. Montrer que toute matrice de  $\mathcal{N}_n$  est semblable à une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de diagonale nulle.  
c. En déduire que  $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{L}_n$ .

**EXERCICE 72.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $J = \left( \begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array} \right)$ . On dit qu'une matrice  $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$  est *symplectique*

si  $MJM = J$ . Montrer que l'ensemble des matrices symplectiques de  $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$  est un sous-groupe de  $\operatorname{GL}_{2n}(\mathbb{K})$ .

**EXERCICE 73.**

Soit  $f$  une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $f(AB) = f(BA)$  pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ . Montrer que  $f$  est proportionnelle à la trace.

**Equations d'inconnue matricielle****EXERCICE 74.**

Soient  $A$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX).$$

Montrer que  $A = B$ .

**EXERCICE 75.**

On considère l'équation

$$X^2 + X = A \tag{E}$$

d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

1. Déterminer une base de  $\operatorname{Im} A$  et  $\operatorname{Ker} A$ .
2. Montrer que  $A$  n'est pas inversible.
3. Soit  $X$  vérifiant (E). Montrer que  $X$  ou  $X + I_2$  n'est pas inversible.
4. On suppose  $X$  non inversible.
  - a. Montrer que  $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} X$  et  $\operatorname{Ker} X \subset \operatorname{Ker} A$ .
  - b. Montrer que  $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} X$  et  $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} X$ .
  - c. En déduire qu'il existe  $x \in \mathbb{R}^*$  tel que  $X = xA$ . Quelles sont les seules valeurs possibles de  $x$ ? Quelles sont les matrices  $X$  correspondantes ?
5. On suppose  $X + I_2$  non inversible. En posant  $Y = -(X + I_2)$ , se ramener au cas précédent.
6. En déduire toutes les solutions de (E).

**EXERCICE 76.**

On veut résoudre le système d'équations d'inconnues dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  :

$$\begin{cases} XY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

1. On suppose que le système admet un couple de solutions  $(X, Y)$ . Montrer que  $\text{rg } X = \text{rg } Y = 1$ .
2. Que peut-on en déduire sur la forme de  $X$  et  $Y$  ?
3. Résoudre le système.

**EXERCICE 77.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Résoudre l'équation  $X + \text{tr}(X)A = 0$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Systèmes linéaires****EXERCICE 78.**

Résoudre selon les valeurs des paramètres  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

**EXERCICE 79.**

Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = -4 \\ 3x + 2y - 3z = 17 \\ 5x - 3y + 8z = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - 3z = 2 \\ -x + 6y - 11z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - z = -2 \\ x + y + z = 2 \\ -2x + 4y - 5z = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - 5z = 3 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \\ x + y - 7z = 2 \\ 2x - 3y + 8z = 5 \end{cases}$$

**EXERCICE 80.**

Résoudre le système  $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$  d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et où  $m$  est un paramètre réel.