

DEVOIR SURVEILLÉ N°05 : CORRIGÉ

Problème 1 – D'après Petites Mines 2009

Partie I – Etude d'une fonction

1. Puisque \mathbb{R}^* est symétrique par rapport à 0 et que sh est impaire, f est paire.
2. a. On sait que $\text{sh } X \underset{X \rightarrow 0}{\sim} X$. On en déduit que $\text{sh } \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ puis que $\lim_{\pm\infty} f = 1$.
 b. Puisque pour tout $X \in \mathbb{R}$, $\text{sh } X = \frac{e^X + e^{-X}}{2}$, $\text{sh } X \underset{X \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^X}{2}$. Ainsi $\frac{\text{sh } X}{X} \underset{X \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^X}{2X}$. Par croissances comparées, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\text{sh } X}{X} = +\infty$. Via le changement de variables $X = \frac{1}{x}$, on obtient donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.
 Par parité de f, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.
3. Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* et sh est dérivable sur \mathbb{R} , $x \mapsto \text{sh } \frac{1}{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* par composition. Ainsi f est également dérivable sur \mathbb{R}^* .
 Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \text{sh } \frac{1}{x} - x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \text{ch } \frac{1}{x} = \left(\text{th } \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) \text{ch } \frac{1}{x}$$

4. Soit $g : X \mapsto \text{th } X - X$. g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $X \in \mathbb{R}$, $g'(X) = \text{th}^2 X$. Ainsi g' est positive sur \mathbb{R} et ne s'annule qu'en 0 : g est donc strictement croissante sur \mathbb{R} . Puisque $g(0) = 0$, $g(X) > 0$ i.e. $\text{th } X < X$ pour tout $X \in \mathbb{R}^*$.
5. On sait que ch est strictement positive sur \mathbb{R} et la question précédente nous apprend que $\text{th } \frac{1}{x} < \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. f' est donc strictement négative sur \mathbb{R}_+^* . Ainsi f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* . Par parité de f, on obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
f	1	$+\infty$	1

6. On sait que

$$\text{sh } X \underset{X \rightarrow 0}{=} X + \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{120} + o(X^5)$$

On en déduit

$$\frac{\text{sh } X}{X} \underset{X \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{X^2}{6} + \frac{X^4}{120} + o(X^4)$$

7. En effectuant le changement de variable $x = \frac{1}{X}$, on obtient

$$f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Autrement dit

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{1}{6}$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = \frac{1}{120}$$

8. D'après la question précédente,

$$g(x) = 1 + o(x)_{x \rightarrow 0}$$

On en déduit que $\lim_0 g = 1$. Ainsi g est prolongeable par continuité en 0. Comme g est déjà continue sur \mathbb{R}^* , son prolongement G est continu sur \mathbb{R} .

Par ailleurs $G(0) = 1$. Or, pour $x \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = \frac{g(x) - 1}{x} = o(1)_{x \rightarrow 0}$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = 0$ de sorte que G est dérivable en 0 (et $G'(0) = 0$). Comme g est clairement dérivable sur \mathbb{R}^* , G l'est également. Finalement, G est dérivable sur \mathbb{R} .

Partie II – Une équation différentielle

9. Sur \mathbb{R}_+^* , l'équation différentielle (E) équivaut à

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\text{ch } x}{x}$$

L'équation différentielle homogène associée est

$$y' + \frac{1}{x}y = 0$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

On recherche une solution particulière de l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\text{ch } x}{x}$$

sous la forme $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$ avec λ dérivable sur \mathbb{R}_+^* . La fonction $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$ est solution si et seulement si $\lambda' = \text{ch}$. Il suffit donc de choisir $\lambda = \text{sh}$. Une solution particulière de

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\text{ch } x}{x}$$

est donc $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\text{sh } x}{x}$.

Les solutions de cette équation différentielle et donc de (E) sur \mathbb{R}_+^* sont donc les fonctions $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\text{sh } x + \lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

10. Les solutions de (E) sur \mathbb{R}_-^* sont les fonctions $x \in \mathbb{R}_-^* \mapsto \frac{\text{sh } x + \mu}{x}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

11. Soit y une fonction solution de (E) sur \mathbb{R} . D'après les deux questions précédentes, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = \frac{\text{sh } x + \lambda}{x}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, y(x) = \frac{\text{sh } x + \mu}{x}$$

y doit être dérivable sur \mathbb{R} donc, a fortiori, continue sur \mathbb{R} et en particulier en 0. Ceci impose que les limites à gauche et à droite de y en 0 doivent être finies. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh } x}{x} = 1$, ceci impose $\lambda = \mu = 0$ et donc $y = G$.

Réciproquement G est bien solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* . De plus, d'après la question I.8, $G(0) = 1$ et $G'(0) = 0$ donc G est solution de (E) sur \mathbb{R} .

REMARQUE. On aurait également pu montrer que G était de classe \mathcal{C}^1 par le théorème de prolongement \mathcal{C}^1 . Ainsi l'identité $xG'(x) + G(x) = \text{ch}(x)$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ aurait pu être étendue à tout $x \in \mathbb{R}$ par continuité de $x \mapsto xG'(x) + G(x)$ et $\text{ch } x$ en 0. ■

Partie III – Une fonction définie par une intégrale

12. Fixons $x \in \mathbb{R}^*$. En effectuant le changement de variable $t \mapsto -t$, on obtient via la parité de f

$$J(x) = - \int_{-\frac{x}{2}}^{-x} f(-t) dt = - \int_{-\frac{x}{2}}^{-x} f(t) dt = -J(-x)$$

Ainsi J est impaire.

13. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x = 2 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x$$

14. f est continue sur \mathbb{R}_+^* donc admet une primitive F sur \mathbb{R}_+^* . On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $J(x) = F(x) - F\left(\frac{x}{2}\right)$. F est dérivable en tant que primitive et $x \mapsto F\left(\frac{x}{2}\right)$ est dérivable car $x \mapsto \frac{x}{2}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Ainsi J est dérivable comme différence de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} J'(x) &= F'(x) - \frac{1}{2} F'\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= f(x) - \frac{x}{4} \operatorname{sh} \frac{2}{x} \\ &= f(x) - \frac{x}{2} \operatorname{sh} \frac{1}{x} \operatorname{ch} \frac{1}{x} \quad \text{d'après la question III.13} \\ &= f(x) \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

15. f est strictement positive sur \mathbb{R}_+^* car sh l'est.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{1}{x} = 0 &\iff \operatorname{ch} \frac{1}{x} = 2 \\ &\iff e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}} = 4 \\ &\iff X + \frac{1}{X} = 4 \quad \text{en posant } X = e^{\frac{1}{x}} \\ &\iff X^2 - 4X + 1 = 0 \\ &\iff X = 2 + \sqrt{3} \text{ ou } X = 2 - \sqrt{3} \\ &\iff x = \frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})} \text{ ou } x = \frac{1}{\ln(2 - \sqrt{3})} \end{aligned}$$

Or $2 - \sqrt{3} < 1$ donc $\frac{1}{\ln(2 - \sqrt{3})} < 0$. On en déduit que $\varphi : x \mapsto 1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{1}{x}$ ne s'annule sur \mathbb{R}_+^* qu'en $\alpha = \frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et la fonction ch est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* donc la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* . Il vient ensuite que φ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Ainsi φ est strictement négative sur $]0, \alpha[$, nulle en α et strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$.

Puisque $J' = f\varphi$, J' est également strictement négative sur $]0, \alpha[$, nulle en α et strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$.

16. a. Posons pour $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\psi(t) = \operatorname{sh} t - t - \frac{t^3}{6}$$

ψ est clairement de classe \mathcal{C}^∞ et pour $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \operatorname{ch} t - 1 - \frac{t^2}{2} \\ \psi''(t) &= \operatorname{sh} t - t \psi'''(t) = \operatorname{ch} t - 1 \end{aligned}$$

Les variations de ch nous enseignent que ψ''' est positive sur \mathbb{R}_+ . Ainsi ψ'' est croissante sur \mathbb{R}_+ . Comme $\psi''(0) = 0$, ψ'' est positive sur \mathbb{R}_+ . A nouveau, ψ' est croissante sur \mathbb{R}_+ est nulle en 0 donc positive sur \mathbb{R}_+ . Enfin, on peut affirmer que ψ est croissante sur \mathbb{R}_+ est nulle en 0 donc positive sur \mathbb{R}_+ .

- b. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question précédente, pour tout $t \in [\frac{x}{2}, x]$, $f(t) \geq 1 + \frac{1}{6t^2}$. Par positivité de l'intégrale

$$J(x) \geq \int_{\frac{x}{2}}^x \left(1 + \frac{1}{6t^2}\right) dt = \frac{x}{2} + \frac{1}{6x}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2} + \frac{1}{6x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} + \frac{1}{6x} = +\infty$, il vient $\lim_{x \rightarrow 0^+} J(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} J(x) = +\infty$ par théorème de minoration.

17. D'après les questions III.15 et III.16.b, on a le tableau de variations suivant.

x	0	α	$+\infty$
$J'(x)$		- 0 +	
J	$+\infty$	$J(\alpha)$	$+\infty$

18. a. Comme $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $h(x) = \frac{1}{6} + o(1)$. Ainsi $\lim_0 h = \frac{1}{6}$ et h est prolongeable par continuité en 0.

- b. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Remarquons que

$$J(x) - \frac{x}{2} = \int_{\frac{x}{2}}^x (f(t) - 1) dt$$

A l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$,

$$J(x) - \frac{x}{2} = - \int_{\frac{2}{x}}^{\frac{1}{x}} (f(1/u) - 1) \frac{du}{u^2} = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} h(u) du$$

- c. Comme h est continue sur \mathbb{R} , elle admet une primitive H sur \mathbb{R} dont on peut supposer qu'elle s'annule en 0. En «primitivant» le développement limité de h obtenu précédemment, on obtient

$$H(x) = \frac{x}{6} + o(x)$$

Par changement de variable,

$$H(1/x) = \frac{1}{6x} + o(1/x)$$

$$H(2/x) = \frac{1}{3x} + o(1/x)$$

puis

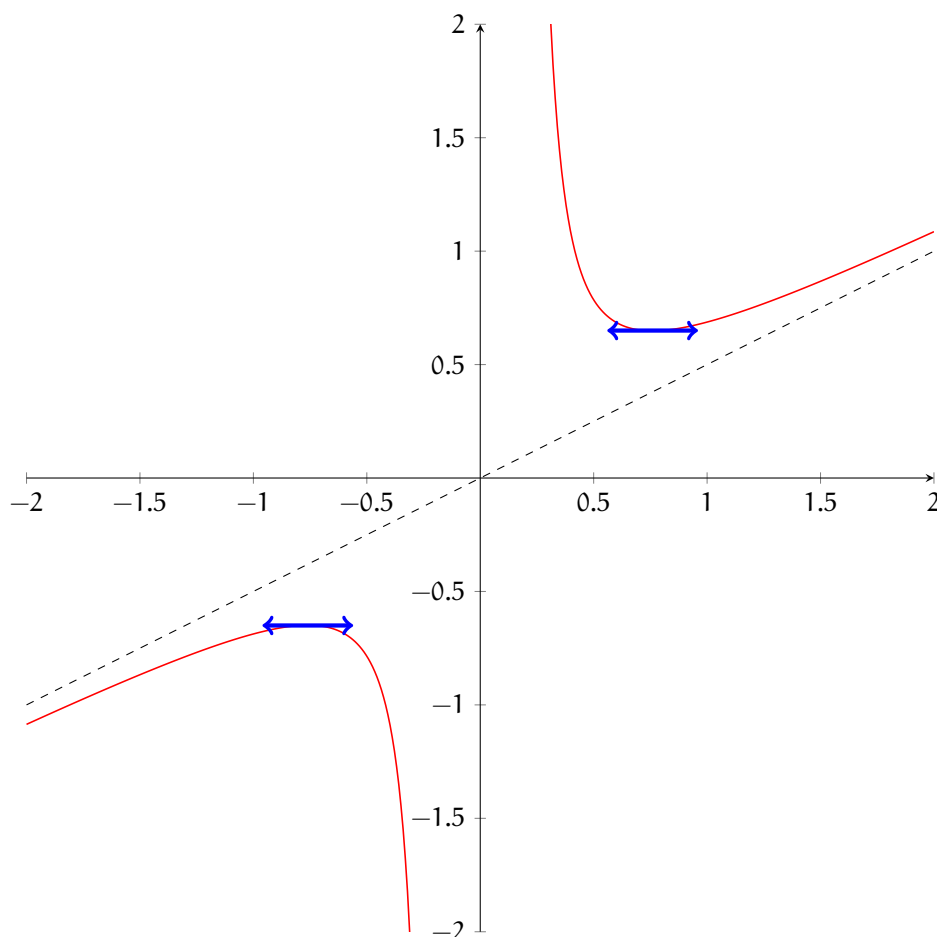
$$J(x) - \frac{x}{2} = H(2/x) - H(1/x) = \frac{1}{6x} + o(1/x)$$

19. Puisque $J(x) - \frac{x}{2} \sim \frac{1}{6x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} J(x) - \frac{x}{2} = 0$. Ainsi la courbe de J admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{x}{2}$ en $+\infty$.
De plus, on a vu à la question III.16.b que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, J(x) \geq \frac{x}{2} + \frac{1}{6x} > \frac{x}{2}$$

Ainsi la courbe de J est-elle au-dessus de son asymptote dans le demi-plan d'équation $x > 0$. Comme J est impaire, la courbe de J admet cette même asymptote en $-\infty$ mais la courbe de J est au-dessous de cette asymptote dans le demi-plan d'équation $x < 0$.

- 20.

**SOLUTION 1.**

1. On a notamment

$$f(0+0) + f(0-0) = 2f(0)f(0)$$

donc $f(0) = f(0)^2$ de sorte que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

2. Si $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2f(x) = f(x+0) + f(x-0) = 2f(x)f(0) = 0$$

donc f est la fonction nulle.

3. Il suffit de dériver par rapport à y la relation (E) pour obtenir

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y)$$

En choisissant $x = y = 0$, on obtient $f'(0) - f'(0) = 2f(0)f'(0)$ et donc $f'(0) = 0$ car $f(0) = 1 \neq 0$.

4. En dérivant par rapport à y la relation de la question précédente, on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$$

En choisissant $y = 0$, on obtient alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f(x)f''(0) = rf(x)$$

Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y'' - ry = 0$.

- Si $r = 0$, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x + \mu$$

Or $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ donc $\mu = 1$ et $\lambda = 0$. Ainsi f est-elle constante égale à 1.

- Si $r > 0$, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^{x\sqrt{r}} + \mu e^{-x\sqrt{r}}$$

Or $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ donc $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$. Ainsi f est-elle la fonction $x \mapsto \text{ch}(x\sqrt{r})$.

- Si $r < 0$, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda \cos(x\sqrt{-r}) + \mu \sin(x\sqrt{-r})$$

Or $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ donc $\lambda = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi f est-elle la fonction $x \mapsto \cos(x\sqrt{-r})$.

5. Il suffit de montrer que la fonction nulle, les fonctions $x \mapsto \text{ch}(rx)$ et $x \mapsto \cos(rx)$ pour $r \in \mathbb{R}$ sont bien de classe \mathcal{C}^2 et vérifient bien la relation (E). On laisse le soin au lecteur de le vérifier.

Les fonctions recherchées sont donc la fonction nulle, les fonctions $x \mapsto \text{ch}(rx)$ et $x \mapsto \cos(rx)$ pour $r \in \mathbb{R}$.

SOLUTION 2.

1. Faux. \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R} .
2. Faux. $]0, 1[\cap \mathbb{Q} = \emptyset$.
3. Vrai. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Comme \mathcal{A} est dense dans \mathbb{R} , $]a, b[\cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Mais $]a, b[\cap \mathcal{A} \subset]a, b[\cap \mathcal{B}$ donc $]a, b[\cap \mathcal{B} \neq \emptyset$.
4. Faux. Supposons qu'il existe une partie \mathcal{A} de \mathbb{R} bornée et dense dans \mathbb{R} . Notons M un majorant de \mathcal{A} (il en existe un car \mathcal{A} est majorée). Alors $]M, M+1[\cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Il existe donc $x \in \mathcal{A}$ tel que $x > M$, ce qui contredit le fait que M est un majorant de \mathcal{A} .