

DEVOIR SURVEILLÉ N°01

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – Fonction dilogarithme

Partie I – Définition et étude de la fonction dilogarithme

On pose pour $t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$

$$f(t) = -\frac{\ln(1-t)}{t}$$

1. Justifier que f se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 1[$. Dans la suite, on notera encore f ce prolongement.

On note alors pour $x \in]-\infty, 1[$

$$L(x) = \int_0^x f(t) dt$$

2. Justifier que L peut se prolonger en une fonction continue sur $] -\infty, 1]$. On note encore L ce prolongement.
3. Justifier que L est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 1[$ et donner sa dérivée.
4. Déterminer le sens de variation de L .
5. Déterminer la limite de L en $-\infty$.

Partie II – Relations fonctionnelles et valeurs particulières

6. a. A l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$L(1) = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x - 1}$$

- b. On pose pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$I_k = \int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx$$

Justifier la convergence de cette intégrale et calculer I_k .

- c. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq \frac{x}{e^x - 1} \leq 1$.

- d. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq L(1) - \sum_{k=1}^n I_k \leq \frac{1}{n}$$

e. On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $L(1)$.

7. a. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)$$

b. En déduire la valeur de $L(-1)$.

8. a. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$L(x) + L(1-x) = C - \ln(x) \ln(1-x)$$

puis déterminer la valeur de C .

b. En déduire la valeur de $L\left(\frac{1}{2}\right)$.

Partie III – Une équation différentielle

On considère les équations différentielles

$$\mathcal{E} : xy'' + y' = \frac{1}{1-x}$$

et

$$\mathcal{E}' : xz' + z = \frac{1}{1-x}$$

9. Résoudre \mathcal{E}' sur les intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, 1[$.

10. En déduire les solutions de \mathcal{E} sur les intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, 1[$. On exprimera ces solutions à l'aide de la fonction L .

11. Déterminer les éventuelles solutions de \mathcal{E} sur l'intervalle $] -\infty, 1[$.

Problème 2 – EPITA PT-TSI 2018

Dans ce problème, on étudie la convergence et la valeur d'intégrales de la forme suivante :

$$I(f) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t) - f(2t)}{t} dt$$

où f désigne une fonction continue de $[0, +\infty[$ vers \mathbb{R} que l'on précisera par la suite.

Partie I –

On suppose dans cette partie que f est définie par $f(t) = \frac{P(t)}{t^2 + 1}$ avec P polynomiale.

1. On suppose dans cette question que $P(t) = 1$ i.e. $f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$.
 - a. Justifier la convergence de l'intégrale $I(f)$.
 - b. Calculer la valeur de $I(f)$ à l'aide d'une décomposition en éléments simples.
2. On suppose dans cette question que $P(t) = t$ i.e. $f(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$. Justifier la convergence et déterminer la valeur de $I(f)$.
3. On suppose dans cette question que $P(t) = t^2$ i.e. $f(t) = \frac{t^2}{t^2 + 1}$. Justifier la convergence et déterminer la valeur de $I(f)$.
4. Que peut-on dire de $I(f)$ lorsque $P(t) = t^n$ avec $n \geq 3$?

Partie II –

On suppose dans cette partie que f est définie par $f(t) = e^{-t}$.

5. Justifier la convergence de $I(f)$.
6. Justifier que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u} - 1}{u} du + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{du}{u}$$

7. Justifier que $h : u \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{e^{-u} - 1}{u}$ est prolongeable en une fonction continue sur \mathbb{R} .
8. En déduire la valeur de $I(f)$.
9. Déterminer la convergence et la valeur de

$$J = \int_0^1 \frac{u - 1}{\ln(u)} du$$