

# DEVOIR À LA MAISON N°02

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1

### Partie I –

**I.1**  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^*$ .

De plus,  $\arctan t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$  donc  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} = 1 = f(0)$  donc  $f$  est continue en 0. Ainsi  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .  
Enfin,  $\arctan$  étant impaire,  $f$  est paire.

**I.2** On sait que  $\frac{1}{1+t^2} = 1 + o(t)$ . Par intégration,  $\arctan t = \arctan 0 + t + o(t^2)$ . On en déduit que  $f(t) = 1 + o(t)$ .  
Ainsi  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ .

**I.3**  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  comme quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}^*$  dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,  $f$  est dérivable en 0 d'après la question précédente. Ainsi  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
De plus, pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$ ,

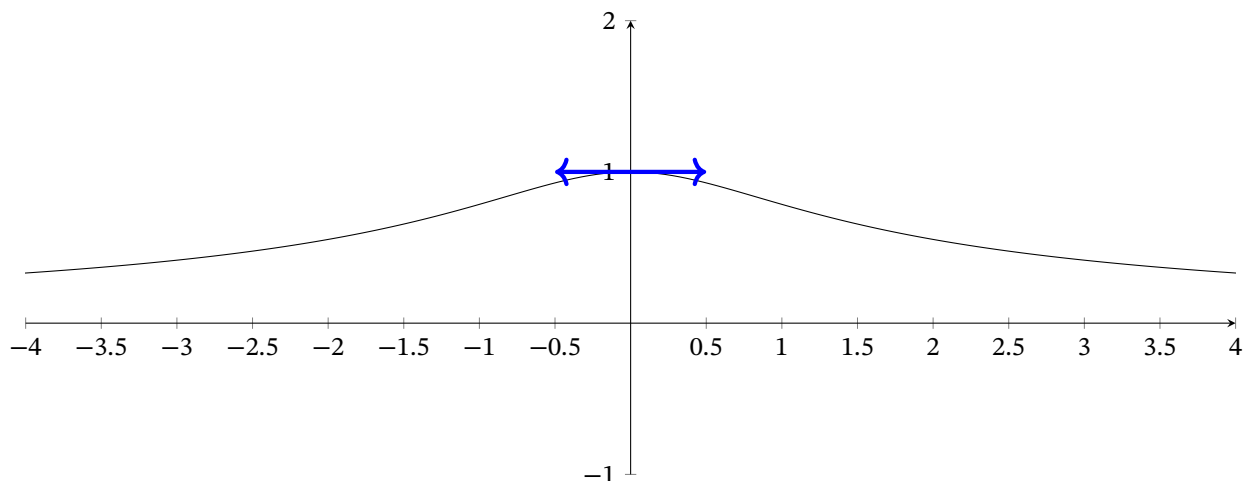
$$f'(t) = \frac{1}{t(1+t^2)} - \frac{\arctan t}{t^2}$$

**I.4**  $u \mapsto u$  et  $u \mapsto -\frac{1}{2(1+u^2)}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  de dérivées respectives  $u \mapsto 1$  et  $u \mapsto \frac{u}{(1+u^2)^2}$ . Soit  $t \in \mathbb{R}^*$ .  
Par intégration par parties

$$\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du = \left[ -\frac{u}{2(1+u^2)} \right]_0^t + \int_0^t \frac{du}{2(1+u^2)} = -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{\arctan t}{2} = -\frac{1}{2} t^2 f'(t)$$

Si  $t > 0$ ,  $\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du > 0$  comme intégrale d'une fonction continue positive non constamment nulle et donc  $f'(t) < 0$ . Ainsi  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Comme  $f$  est paire,  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_-$ .

**I.5** Puisque  $\lim_{+\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$ ,  $\lim_{+\infty} f = 0$ . Par parité,  $\lim_{-\infty} f = 0$ . Ainsi la courbe représentative de  $f$  admet l'axe des abscisses pour asymptote.



## Partie II –

**II.1** Posons  $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ . Ainsi  $\phi(x) = \frac{F(x)}{x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ .  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que primitive de  $f$ . Ainsi  $\phi$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,  $F$  est dérivable en 0 donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0)$  i.e.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = f(0)$ . Ainsi  $\phi$  est continue en 0. Finalement,  $\phi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Posons  $u(x) = F(x) + F(-x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u'(x) = F'(x) - F'(-x) = f(x) - f(-x) = 0$ . Ainsi  $u$  est constante sur  $\mathbb{R}$  égale à  $u(0) = 2F(0) = 0$ . On en déduit que  $F$  est impaire. Il s'ensuit que  $\phi$  est paire.

**II.2** Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Comme  $f$  est décroissante sur  $[0, x]$  d'après la question **I.4**, pour tout  $t \in [0, x]$ ,  $f(x) \leq f(t) \leq f(0)$ . Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^x f(x) dt \leq \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x dt$$

et par suite

$$xf(x) \leq x\phi(x) \leq x$$

Puisque  $x > 0$ ,

$$f(x) \leq \phi(x) \leq 1$$

L'inégalité est encore valable si  $x \in \mathbb{R}_-^*$  puisque  $f$  et  $\phi$  sont paires. Enfin, l'égalité est valable si  $x = 0$  puisque  $f(0) = \phi(0) = 1$ .

Finalement,  $f(x) \leq \phi(x) \leq 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**II.3**  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que primitive de  $f$ .  $\phi$  est alors dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  comme quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}^*$  dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\phi'(x) = \frac{F'(x)}{x} - \frac{F(x)}{x^2} = \frac{1}{x} (f(x) - \phi(x))$$

On sait d'après la question **I.2** que  $f(x) = 1 + o(x)$ . Comme  $F$  est une primitive de  $f$ ,  $F(x) = F(0) + x + o(x^2)$ . Or  $F(0) = 0$  donc  $F(x) = x + o(x^2)$ . Par suite,  $\phi(x) = 1 + o(x)$ . Ainsi  $\phi$  est dérivable en 0 et  $\phi'(0) = 0$ .

Puisque pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) \leq \phi(x)$  et que  $\phi'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - \phi(x))$ ,  $\phi'$  est négative sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\phi$  est donc décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Puisque  $\phi$  est paire,  $\phi$  est croissante sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

**II.4** Soit  $x \in [1, +\infty[$ . Pour tout  $t \in [1, x]$ ,  $0 \leq \arctan t \leq \frac{\pi}{2}$  donc  $0 \leq f(t) \leq \frac{\pi}{2t}$ . Par croissance de l'intégrale

$$\int_1^x 0 dt \leq \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^x \frac{\pi}{2t} dt$$

ou encore

$$0 \leq \int_1^x f(t) dt \leq \frac{\pi}{2} \ln x$$

puis

$$0 \leq \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \leq \frac{\pi}{2} \frac{\ln x}{x}$$

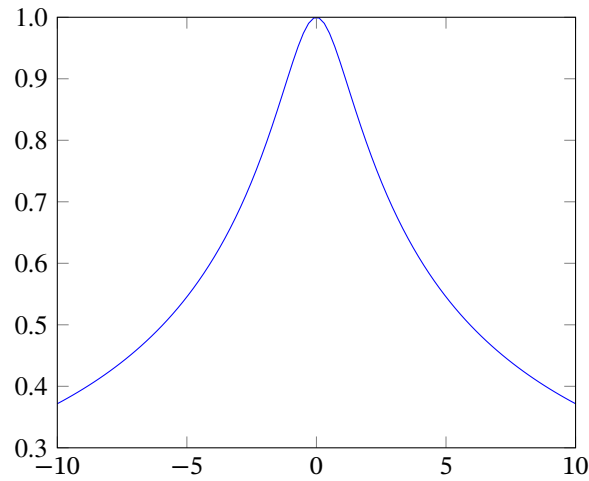
Par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$  via le théorème des gendarmes.

Enfin, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$

$$\phi(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt$$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$ .

**II.5** Par parité de  $\phi$ , on a également  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = 0$ . Ainsi la courbe représentative de  $\phi$  admet pour asymptote l'axe des abscisses.



### Partie III –

**III.1** Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ . Puisque  $t \geq 0$  et  $1 + t^2 > 0$ ,  $\frac{t}{1+t^2} \geq 0$ .

Alors  $(1-t)^2 \geq 0$  i.e.  $1+t^2 \geq 2t$ . Puisque  $1+t^2 > 0$ ,  $\frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$ .

Finalement,  $0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$ .

**III.2** Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . D'après la question **II.3**,  $\phi'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - \phi(x))$ . Mais d'après la question **II.2**,  $f(x) \leq \phi(x) \leq 1$ . On en déduit que

$$|\phi'(x)| = \frac{1}{x}(\phi(x) - f(x)) \leq \frac{1}{x}(1 - f(x))$$

De plus,

$$\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = x - \arctan x$$

Ainsi

$$\frac{1}{x}(1 - f(x)) = \frac{1}{x^2}(x - \arctan x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

D'après la question **III.1**

$$\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt \leq \int_0^x \frac{t}{2} dt = \frac{x^2}{4}$$

Par conséquent,  $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$ .

Comme  $\phi$  est paire,  $\phi'$  est impaire et l'inégalité précédente est encore valable si  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Enfin, cette égalité est encore valable lorsque  $x = 0$  puisque  $\phi'(0) = 0$ .

**III.3** Posons  $v(x) = \phi(x) - x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  $v$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $v'(x) = 1 - \phi'(x)$ . Or pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$  donc, a fortiori,  $\phi'(x) < 1$  et  $v'(x) < 0$ . Ainsi  $v$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi = \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} v = +\infty$ . Enfin,  $v$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,  $v$  s'annule une unique fois sur  $\mathbb{R}$  i.e. l'équation  $\phi(x) = x$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ .

Enfin,  $v(0) = \phi(0) = 1 > 0$  et  $v(1) = \phi(1) - 1 < 0$  car  $\phi$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  donc  $\phi(1) < \phi(0) = 1$ . On peut donc assurer que  $\alpha \in ]0, 1]$ .

**III.4** Puisque  $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\phi$  est  $\frac{1}{4}$ -lipschitzienne. Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|\phi(u_n) - \phi(\alpha)| \leq |u_n - \alpha|$  i.e.  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ .

**REMARQUE.** On peut aussi remarquer que

$$|u_{n+1} - \alpha| = |\phi(u_n) - \phi(\alpha)| = \left| \int_{\alpha}^{u_n} \phi'(x) dx \right| \leq \left| \int_{\alpha}^{u_n} |\phi'(x)| dx \right| \leq \left| \int_{\alpha}^{u_n} \frac{1}{4} dx \right| = \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$

On montre alors par récurrence que  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n} |u_0 - \alpha|$ . Puisque  $0 \leq \frac{1}{4} < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$  i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ .

### Partie IV –

**IV.1** L'équation différentielle équivaut à  $xy' + xy = f(x)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$  ou encore à  $(xy)' = f(x)$ . On en déduit que les solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$  sont les fonctions  $x \mapsto \phi(x) + \frac{\lambda}{x}$  où  $\lambda$  décrit  $\mathbb{R}$ .

**IV.2** Soit  $y$  une éventuelle solution de  $x^2y' + xy = \arctan x$  sur  $\mathbb{R}$ . La question **IV.1** montre qu'il existe  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

tel que  $y(x) = \begin{cases} \phi(x) + \frac{\lambda_1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \phi(x) + \frac{\lambda_2}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ . La continuité de  $y$  en 0 impose  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Ainsi  $\phi$  et  $y$  coïncident sur

$\mathbb{R}^*$ . Puisque ces deux fonctions sont continues, elles coïncident également en 0 et sont donc égales.

Réciproquement,  $\phi$  vérifie bien l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$ . C'est donc l'unique solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $x^2y' + xy = \arctan x$ .