Semaine du 11/01 au 15/01

1 Cours

Suites numériques

Généralités Définition d'une suite. Modes de définition : explicite ou par récurrence. Vocabulaire : suites constantes, stationnaires, majorées, minorées bornées, croissantes, décroissantes, monotones. Suites classiques : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2.

Limite d'une suite Définition. Unicité. Vocabulaire : convergence et divergence. Toute suite convergente est bornée. Toute suite de limite strictement positive est strictement positive à partir d'un certain rang.

Théorèmes d'existence de limites Opérations sur les limites. Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration. Théorème de convergence monotone. Suites adjacentes : définition et convergence.

Comparaison asymptotique Comparaison des suites de référence : logarithme, puissance, exponentielle, factorielle. Formule de Stirling. Deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang. Comportement asymptotique de suites définies implicitement.

Suites récurrentes d'ordre un Méthode d'étude de telles suites récurrentes.

Suites extraites Définition. Si une suite admet une limite, alors toute suite extraite admet la même limite. Si les suites des termes de rangs pairs et de rangs impairs admettent la même limite, alors la suite admet également cette limite. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Suites complexes Suite bornée. Limite d'une suite complexe. Une suite complexe converge si et seulement si ses parties réelle et imaginaire convergent. Convergence d'une suite géométrique.

2 Méthodes à maîtriser

- On ne parle de la limite d'une suite qu'**après** avoir justifié son **existence**.
  - Certains théorèmes donnent l'**existence** <u>et</u> la **valeur** de la limite : opérations, encadrement, minoration, majoration.
  - D'autres ne donnent que l'**existence** de la limite : théorème de convergence monotone ou théorème sur les suites adjacentes qui en est une conséquence quasi directe.
- On ne passe pas à la limite «par morceaux» : quand on «passe à la limite» une expression dépendant d'un entier n, **tous** les n tendent vers l'infini **en même temps**.
- La limite d'une suite ne peut pas dépendre de l'indice de la suite !
- Déterminer le sens de variation d'une suite :
  - signe de $u_{n+1} - u_n$ (adapté aux sommes) ;
  - position de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1 (adapté aux produits) si les u_n sont **tous strictement positifs** (mais on peut évidemment adapter si on a compris comment fonctionne ce critère).
- Déterminer le terme général d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 via l'équation caractéristique.
- Montrer qu'une suite monotone converge ou diverge (raisonnement par l'absurde éventuel pour le cas de divergence).
- Montrer que deux suites sont adjacentes.
- Obtenir successivement les termes d'un développement asymptotique d'une suite définie implicitement.
- Étudier une suite récurrente d'ordre un.

3 Questions de cours

Fonction β

Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $\mathrm{I}_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^p \,\mathrm{d}t$. Montrer que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{n,p} = \dfrac{n}{p+1}\mathrm{I}_{n-1,p+1}$. En déduire une expression de $\mathrm{I}_{n,p}$ à l'aide de factorielles.

Suites adjacentes

Donner la définition de l'adjacence de deux suites. Montrer que deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Homographie

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que

(a) $\dfrac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U} \iff z \in i\mathbb{R}$

(b) $\dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} \iff z \in \mathbb{U}$

Injectivité

Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est également.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f l'est également.

Surjectivité

Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est également.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g l'est également.

BCCP 01

1. On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
   Montrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini de $u_n = \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

BCCP 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\arctan x)$.