Devoir à la maison n°15

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles.*
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

L'objet de ce problème est de s'intéresser à résoudre dans certains cas l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)\ dt = g(x) \tag{1}$$

où f est une fonction inconnue supposée continue sur $\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels et g une fonction donnée définie sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que la fonction sh *est définie par* $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ *et la fonction* ch *par* $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Partie I –

Dans cette partie on suppose que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les fonctions f solutions de (1) sont elles aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elles vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - f(x) = g''(x) \tag{2}$$

2. En déduire la solution de l'équation (1) quand :

- **a.** g est la fonction nulle ;
- **b.** g est une fonction constante ;
- **c.** g est une fonction affine.

3. Déduire aussi que l'équation (1) (que g soit de classe $\mathcal{C}^2$ ou pas) a au plus une solution.

4. Montrer que toute fonction f de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x}{2}\left[\int_0^x e^{-t}g''(t)\ dt + k_A\right] - \frac{e^{-x}}{2}\left[\int_0^x e^{t}g''(t)\ dt + k_B\right]$$

où k_A et k_B sont des constantes réelles est solution de (2).

5. Montrer qu'une solution f de (2) vérifiant :

$$f(0) = g(0) \quad \text{et} \quad f'(0) = g'(0)$$

est également solution de (1).

6. Déduire des deux questions précédentes la solution f de (1) quand g est la fonction exponentielle.

Partie II –

Dans cette partie on suppose que la fonction g est seulement continue.

On note E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On définit l'application A qui à une fonction f de E associe la fonction (notée $A(f)$) par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A(f)(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\ dt$$

1. Montrer que pour $f \in E$, $A(f)$ et de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer $A(f)'$ et $A(f)''$ en fonction de f.

2. Montrer que l'application A est un endomorphisme injectif de E.

3. On définit une application U de E dans E par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ U(f)(x) = \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)f(t)\ dt$$

Montrer que $U \circ A = U - A$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A^n la n-ème itérée de l'application A :

$$A^2(f) = A(A(f)),\ \dots,\ A^n(f) = A(A^{n-1}(f))$$

Montrer que pour tout $f \in E$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}f(t)\ dt$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = A + A^2 + \cdots + A^n$.

a. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|\operatorname{sh}(u) - \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!}\right| \leqslant \frac{\operatorname{ch}(u)|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

b. En déduire que pour toute fonction f de E, pour tout réel x et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leqslant \frac{\operatorname{ch}(x)|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\left|\int_0^x |f(t)|\ dt\right|$$

puis que $U(f)(x) - U_n(f)(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

c. En déduire que $A \circ U = U - A$.

6. **a.** On note I l'application identité de E dans E.
Montrer que les applications $I-A$ et $I+U$ sont (pour la composition des applications) des bijections de E dans E réciproques l'une de l'autre.

b. En déduire la fonction f de E solution de l'équation (1).

c. Expliciter f pour la fonction g paire et telle que

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \in [0,1[\\ 2-x & \text{pour } x \in [1,2[\\ 0 & \text{pour } x \geqslant 2 \end{cases}$$