Semaine du 03/12 au 07/12

1 Cours

Développements limités

Définitions et propriétés Définition du développement limité d'une fonction. Unicité du développement limité. Une fonction est équivalente au monôme non nul de plus bas degré d'un DL (s'il existe). Lien avec la continuité (existence d'un DL d'ordre 0) et la dérivabilité (existence d'un DL d'ordre 1). DL et parité : le DL en 0 d'une fonction paire (resp. impaire) ne comporte que des puissances paires (resp.impaires).

Intégration et dérivation des DL, formule de Taylor-Young

- Intégration : si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors toute primitive F de f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ et le DL de F s'obtient en intégrant terme à terme celui de f.
- Dérivation : si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ et $\underline{\text{si } f' \text{ admet un } \mathrm{DL}_{n-1}(a)}$, alors le DL de f' s'obtient en dérivant terme à terme celui de f.
- Taylor-Young : Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un voisinage de a, alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par la formule de Taylor-Young. J'insiste : en plus de la formule, ce théorème donne aussi l'**existence** d'un DL !

Développements limités usuels $\dfrac{1}{1 \pm x}$, e^x, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ en 0.

Calculs sur les DL Somme, produit, composition, inverse, quotient.

Application à l'étude de courbes Tangentes, asymptotes et positions locales relatives.

Nombres réels

Approximations d'un réel Ensembles de nombres : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Partie entière. Approximations décimales. Densité dans $\mathbb{R}$. Caractérisation séquentielle de la densité. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

2 Méthodes à maîtriser

- Caractérisation de la partie entière :

$$n = \lfloor x \rfloor \iff x - 1 < n \leqslant x \iff n \leqslant x < n+1$$

- Mettre les développements limités sous forme normalisée («factoriser par l'équivalent») pour calculer des produits de DL.
- N'additionner que des développements limités de même ordre.
- Déterminer les ordres auxquels il faut développer les différentes composantes d'une expression pour obtenir un DL d'ordre donné de cette expression.
- Se ramener en 0 par changement de variable.

3 Questions de cours

- Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. On pourra utiliser la caractérisation séquentielle de la densité.
- Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

- **Révision :** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.
- **Révision :** Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$.