

DEVOIR À LA MAISON N°15

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 –

L'objet de ce problème est de s'intéresser à résoudre dans certains cas l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x (x-t)f(t) dt = g(x) \quad (1)$$

où f est une fonction inconnue supposée continue sur \mathbb{R} ensemble des nombres réels et g une fonction donnée définie sur \mathbb{R} .

On rappelle que la fonction sh est définie par $\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et la fonction ch par $\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Partie I –

Dans cette partie on suppose que la fonction g est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

1. Montrer que les fonctions f solutions de (1) sont elles aussi de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et qu'elles vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - f(x) = g''(x) \quad (2)$$

2. En déduire la solution de l'équation (1) quand :

- a. g est la fonction nulle ;
- b. g est une fonction constante ;
- c. g est une fonction affine.

3. Déduire aussi que l'équation (1) (que g soit de classe \mathcal{C}^2 ou pas) a au plus une solution.

4. Montrer que toute fonction f de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{2} \left[\int_0^x e^{-t} g''(t) dt + k_A \right] - \frac{e^{-x}}{2} \left[\int_0^x e^t g''(t) dt + k_B \right]$$

où k_A et k_B sont des constantes réelles est solution de (2).

5. Montrer qu'une solution f de (2) vérifiant :

$$f(0) = g(0) \quad \text{et} \quad f'(0) = g'(0)$$

est également solution de (1).

6. Déduire des deux questions précédentes la solution f de (1) quand g est la fonction exponentielle.

Partie II –

Dans cette partie on suppose que la fonction g est seulement continue.

On note E l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On définit l'application A qui à une fonction f de E associe la fonction (notée $A(f)$) par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, A(f)(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$$

1. Montrer que pour $f \in E$, $A(f)$ est de classe \mathcal{C}^2 et calculer $A(f)'$ et $A(f)''$ en fonction de f .
2. Montrer que l'application A est un endomorphisme injectif de E .
3. On définit une application U de E dans E par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)f(t) dt$$

Montrer que $U \circ A = U - A$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A^n la n -ème itérée de l'application A :

$$A^2(f) = A(A(f)), \dots, A^n(f) = A(A^{n-1}(f))$$

Montrer que pour tout $f \in E$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(t) dt$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = A + A^2 + \dots + A^n$.

- a. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left| \operatorname{sh}(u) - \sum_{k=1}^n \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!} \right| \leq \frac{\operatorname{ch}(u)|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- b. En déduire que pour toute fonction f de E , pour tout réel x et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leq \frac{\operatorname{ch}(x)|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \int_0^x |f(t)| dt \right|$$

puis que $U(f)(x) - U_n(f)(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

- c. En déduire que $A \circ U = U - A$.

6. a. On note I l'application identité de E dans E .
Montrer que les applications $I-A$ et $I+U$ sont (pour la composition des applications) des bijections de E dans E réciproques l'une de l'autre.
- b. En déduire la fonction f de E solution de l'équation (1).
- c. Expliciter f pour la fonction g paire et telle que

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \in [0, 1[\\ 2-x & \text{pour } x \in [1, 2[\\ 0 & \text{pour } x \geq 2 \end{cases}$$