

# SEMAINE DU 13/01 AU 17/01

## 1 Cours

### Groupes, anneaux, corps

**Notion de loi interne** Définition. Associativité, commutativité. Définition d'un élément neutre, unicité sous réserve d'existence. Inversibilité, unicité de l'inverse si la loi est associative.

**Groupes** Définition. Sous-groupe : définition et caractérisation.

**Anneaux** Définition. Groupe des éléments inversibles. Règles de calcul dans les anneaux. Intégrité. Formule du binôme de Newton et formule de Bernoulli si **commutativité**. Sous-anneaux : définition et caractérisation.

**Corps** Définition. Tout corps est intègre. Sous-corps : définition et caractérisation.

## 2 Méthodes à maîtriser

- ▶ Dans un anneau, on prendra garde à se méfier des habitudes de calcul.
  - La seconde loi n'est pas toujours commutative.
  - Un produit d'éléments d'un anneau non intègre peut-être nul sans qu'aucun des facteurs soit nul.
  - Un élément d'un anneau n'est pas forcément inversible.
- ▶ Pour montrer qu'un ensemble est un groupe/anneau/corps, on peut montrer que c'est un sous-groupe/sous-anneau/sous-corps d'un groupe/anneau/corps déjà connu.
- ▶ Dans un corps, on calcule comme on en a l'habitude.

## 3 Questions de cours

- ▶ Montrer que  $\mathbb{U}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \times)$  puis que  $\mathbb{U}_n$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{U}, \times)$ .
- ▶ Soit  $H$  et  $K$  deux sous-groupes d'un groupe  $G$ . Montrer que si  $H \cup K$  est un sous-groupe de  $G$ , alors  $H \subset K$  ou  $K \subset H$ .
- ▶ Soient  $(A, +, \times)$  un anneau et  $(x, y) \in A^2$ . Montrer que si  $x$  et  $y$  sont nilpotents et commutent, alors  $x + y$  est nilpotent.
- ▶ Soit  $(A, +, \times)$  un anneau. Montrer que si  $x \in A$  est nilpotent, alors  $1_A - x$  est inversible et déterminer son inverse.
- ▶ Montrer que  $\mathbb{Z}[i]$  est un sous-anneau de  $(\mathbb{C}, +, \times)$  et déterminer ses éléments inversibles.