Interrogation écrite n°04

NOM : Prénom : Note :

1. Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.

   Soit p l'indice de nilpotence de u. Alors $u^{p-1} \neq 0$ et $u^p = 0$. En particulier, il existe un vecteur x tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. En posant $y = u^{p-1}(x)$, on a $u(y) = 0_E$ et donc $0 \in \mathrm{Sp}(u)$.
   Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et x un vecteur propre associé. Alors $u^n(x) = \lambda^n x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = 0$ donc $\lambda^n x = 0_E$. Comme $x \neq 0_E$, $\lambda^n = 0$ puis $\lambda = 0$. Ainsi $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$. ■

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La matrice $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Justifier.

   On trouve $\chi_A = (X - \lambda)^2$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à λI_2 et donc égale à λI_2, ce qu'elle n'est pas. Ainsi A n'est pas diagonalisable. ■

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

   On calcule successivement :

   - $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$;
   - $E_2(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$;
   - $E_3(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

   Ainsi en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, on a bien $A = PDP^{-1}$ et P inversible puisque $\det(P) = 1 \neq 0$. ■

4. Calculer $\varphi(360)$.

   Puisque $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$,

   $$\varphi(360) = 360\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 96$$

   ■

5. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 10[15] \\ x \equiv 5[20] \end{cases}$.

   Remarquons que 25 est solution particulière. Ainsi

   $$\begin{cases} x \equiv 10[15] \\ x \equiv 5[20] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 25[15] \\ x \equiv 25[20] \end{cases} \iff \begin{cases} 15 \mid x - 25 \\ 20 \mid x - 25 \end{cases} \iff 15 \vee 20 \mid x - 25 \iff 60 \mid x - 25 \iff x \equiv 25[60]$$

   L'ensemble des solutions est donc $25 + 60\mathbb{Z}$. ■

6. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $8x + 12y = 20$.

   L'équation équivaut à $2x + 3y = 5$. On remarque que $(1, 1)$ est solution particulière. Ainsi l'équation équivaut à $2(x-1) = 3(1-y)$. Comme $2 \wedge 3 = 1$, le lemme de Gauss montre que cette équation équivaut à l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(x-1, 1-y) = (3k, 2k)$ i.e. $(x, y) = (1 + 3k, 1 - 2k)$. L'ensemble des solutions est donc $(1, 1) + (3, -2)\mathbb{Z}$. ■

7. Donner la liste des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

   On cherche donc les éléments de $[\![0, 14]\!]$ premiers avec 15. Ainsi

   $$(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\}$$

   ■

8. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de $X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

   Les racines complexes de $X^4 + 1$ sont les racines quatrièmes de -1. Ainsi

   $$X^4 + 1 = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$

   ■