Problème 1 – D'après Petites Mines 2002

Partie I –

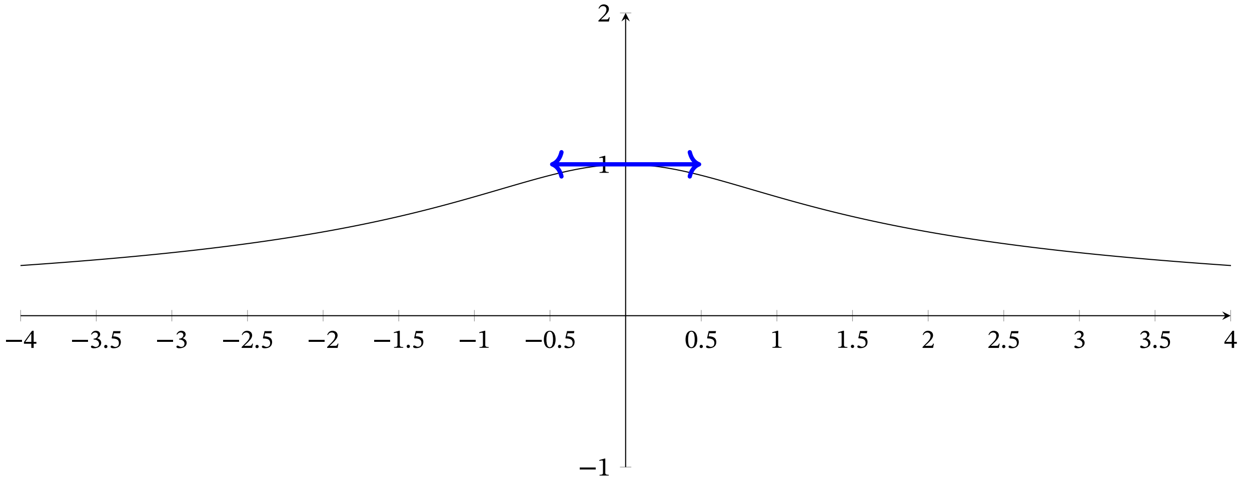
1. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.
De plus, $\arctan t \underset{t\to 0}{\sim} t$ donc $\lim_{t\to 0} \frac{\arctan t}{t} = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$.
Enfin, arctan étant impaire, f est paire.

2. On sait que $\frac{1}{1+t^2} \underset{t\to 0}{=} 1 + o(t)$. Par intégration, $\arctan t \underset{t\to 0}{=} \arctan 0 + t + o(t^2)$. On en déduit que $f(t) \underset{t\to 0}{=} 1 + o(t)$.
Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comment quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, f est dérivable en 0 d'après la question précédente. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,
$$f'(t) = \frac{1}{t(1+t^2)} - \frac{\arctan t}{t^2}$$

4. $u \mapsto u$ et $u \mapsto -\frac{1}{2(1+u^2)}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivées respectives $u \mapsto 1$ et $u \mapsto \frac{u}{(1+u^2)^2}$. Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Par intégration par parties
$$\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2}\,du = \left[-\frac{u}{2(1+u^2)}\right]_0^t + \int_0^t \frac{du}{2(1+u^2)} = -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{\arctan t}{2} = -\frac{1}{2}t^2 f'(t)$$
Si $t > 0$, $\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2}\,du > 0$ comme intégrale d'une fonction continue positive non constamment nulle et donc $f'(t) < 0$. Ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme f est paire, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$.

5. Puisque $\lim_{+\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{+\infty} f = 0$. Par parité, $\lim_{-\infty} f = 0$. Ainsi la courbe représentative de f admet l'axe des abscisses pour asymptote.



Partie II –

1. Posons $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$. Ainsi $\phi(x) = \frac{F(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. F est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de f.
Ainsi ϕ est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
De plus, F est dérivable en 0 donc $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(0)$ i.e. $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = f(0)$. Ainsi ϕ est continue en 0.
Finalement, ϕ est continue sur $\mathbb{R}$.
Posons $u(x) = F(x) + F(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = F'(x) - F'(-x) = f(x) - f(-x) = 0$. Ainsi u est constante sur $\mathbb{R}$ égale à $u(0) = 2F(0) = 0$. On en déduit que F est impaire. Il s'ensuite que ϕ est paire.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est décroissante sur $[0,x]$ d'après la question **I.4**, pour tout $t \in [0,x]$, $f(x) \leq f(t) \leq f(0)$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^x f(x)\ \mathrm{d}t \leq \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_0^x dt$$

et par suite

$$xf(x) \leq x\phi(x) \leq x$$

Puisque $x > 0$,

$$f(x) \leq \phi(x) \leq 1$$

L'inégalité est encore valable si $x \in \mathbb{R}_-^*$ puisque f et ϕ sont paires. Enfin, l'égalité est valable si $x = 0$ puisque $f(0) = \phi(0) = 1$.
Finalement, $f(x) \leq \phi(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de f. ϕ est alors dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comment quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\phi'(x) = \frac{\mathrm{F}'(x)}{x} - \frac{\mathrm{F}(x)}{x^2} = \frac{1}{x}(f(x) - \phi(x))$$

On sait d'après la question **I.2** que $f(x) \underset{x\to0}{=} 1 + o(x)$. Comme F est une primitive de f, $\mathrm{F}(x) \underset{x\to0}{=} \mathrm{F}(0) + x + o\left(x^2\right)$. Or $\mathrm{F}(0) = 0$ donc $\mathrm{F}(x) \underset{x\to0}{=} x + o\left(x^2\right)$. Par suite, $\phi(x) \underset{x\to0}{=} 1 + o(x)$. Ainsi ϕ est dérivable en 0 et $\phi'(0) = 0$.
Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \leq \phi(x)$ et que $\phi'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - \phi(x))$, ϕ' est négative sur $\mathbb{R}_+^*$ et ϕ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque ϕ est paire, ϕ est croissante sur $\mathbb{R}_-$.

4. Soit $x \in [1,+\infty[$. Pour tout $t \in [1,x[$, $0 \leq \arctan t \leq \frac{\pi}{2}$ donc $0 \leq f(t) \leq \frac{\pi}{2t}$. Par croissance de l'intégrale

$$\int_1^x 0\ \mathrm{d}t \leq \int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_1^x \frac{\pi}{2t}\ \mathrm{d}t$$

ou encore

$$0 \leq \int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2}\ln x$$

puis

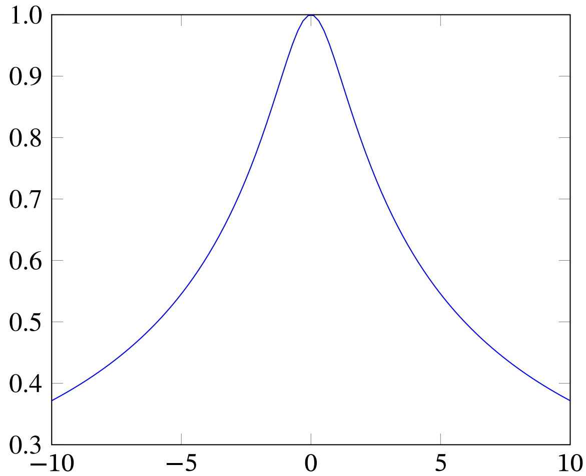
$$0 \leq \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x}$$

Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t = 0$ via le théorème des gendarmes.
Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$\phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$.

5. Par parité de ϕ, on a également $\lim_{x\to-\infty} \phi(x) = 0$. Ainsi la courbe représentative de ϕ admet pour asymptote l'axe des abscisses.



Partie III –

1. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Puisque $t \geq 0$ et $1+t^2 > 0$, $\frac{t}{1+t^2} \geq 0$.
Alors $(1-t)^2 \geq 0$ i.e. $1+t^2 \geq 2t$. Puisque $1+t^2>0$, $\frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$.
Finalement, $0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question **II.3**, $\phi'(x) = \frac{1}{x}(f(x)-\phi(x))$. Mais d'après la question **II.2**, $f(x) \leq \phi(x) \leq 1$. On en déduit que
$$|\phi'(x)| = \frac{1}{x}(\phi(x)-f(x)) \leq \frac{1}{x}(1-f(x))$$
De plus,
$$\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = x - \arctan x$$
Ainsi
$$\frac{1}{x}(1-f(x)) = \frac{1}{x^2}(x-\arctan x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
D'après la question **III.1**
$$\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} \leq \int_0^x \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{4}$$
Par conséquent, $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$.
Comme ϕ est paire, ϕ' est impaire et l'inégalité précédente est encore valable si $x \in \mathbb{R}_-^*$. Enfin, cette égalité est encore valable lorsque $x=0$ puisque $\phi'(0)=0$.

3. Posons $\upsilon(x) = \phi(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. υ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\upsilon'(x) = 1-\phi'(x)$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$ donc, a fortiori, $\phi'(x) < 1$ et $\upsilon'(x) < 0$. Ainsi υ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Puisque $\lim_{+\infty}\phi = \lim_{-\infty}\phi = 0$, $\lim_{+\infty}\upsilon = -\infty$ et $\lim_{-\infty}\upsilon = +\infty$. Enfin, υ est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, υ s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$ i.e. l'équation $\phi(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
Enfin, $\upsilon(0) = \phi(0) = 1 > 0$ et $\varphi(1) = \phi(1) - 1 < 0$ car ϕ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $\phi(1) < \phi(0) = 1$. On peut donc assurer que $\alpha \in]0,1]$.

4. Puisque $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ϕ est $\frac{1}{4}$-lipschitzienne. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\phi(u_n)-\phi(\alpha)| \leq |u_n-\alpha|$ i.e. $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$.
Remarque. On peut aussi remarquer que
$$|u_{n+1}-\alpha| = |\phi(u_n)-\phi(\alpha)| = \left|\int_\alpha^{u_n} \phi'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_\alpha^{u_n} |\phi'(x)|\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_\alpha^{u_n} \frac{1}{4}\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$$
On montre alors par récurrence que $|u_n-\alpha| \leq \frac{1}{4^n}|u_0-\alpha|$. Puisque $0 \leq \frac{1}{4} < 1$, $\lim_{n\to+\infty}|u_n-\alpha| = 0$ i.e. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Partie IV –

1. L'équation différentielle équivaut à $xy'+xy = f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ ou encore à $(xy)' = f(x)$. On en déduit que les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $x \mapsto \phi(x) + \frac{\lambda}{x}$ où λ décrit $\mathbb{R}$.

2. Soit y une éventuelle solution de $x^2y'+xy = \arctan x$ sur $\mathbb{R}$. La question **IV.1** montre qu'il existe $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y(x) = \begin{cases} \phi(x)+\frac{\lambda_1}{x} & \text{si } x<0 \\ \phi(x)+\frac{\lambda_2}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$. La continuité de y en 0 impose $\lambda_1=\lambda_2=0$. Ainsi ϕ et y coïncident sur $\mathbb{R}^*$.
Puisque ces deux fonctions sont continues, elles coïncident également en 0 et sont donc égales.
Réciproquement, ϕ vérifie bien l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$. C'est donc l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2y'+xy = \arctan x$.