Devoir à la maison n°11

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n et g_n les fonctions telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \cos(nx) \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = \cos^n(x)$$

En particulier, f_0 et g_0 sont la fonction constante égale à 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n = \operatorname{vect}(f_0, f_1, \dots, f_n) \qquad \text{et} \qquad G_n = \operatorname{vect}(g_0, g_1, \dots, g_n)$$

F_n et G_n sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Partie I – Cas particulier

1. Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, $f_k \in G_2$. En déduire que $F_2 \subset G_2$.
2. Montrer que la famille (f_0, f_1, f_2) est libre. Quelle est la dimension de F_2 ?
3. Montrer que la famille (g_0, g_1, g_2) est libre. Quelle est la dimension de G_2 ?
4. En déduire que $F_2 = G_2$.

Partie II – Une inclusion

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+2} = 2f_{n+1}f_1 - f_n$.
2. Montrer par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in G_n$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \subset G_n$.

Partie III – Utilisation de la dimension

1. Calculer $I_{k,l} = \displaystyle\int_0^{2\pi} f_k(t)f_l(t)\,dt$ pour $(k, l) \in \mathbb{N}^2$. On distinguera plusieurs cas.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.
3. En déduire la dimension de F_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Justifier que $\dim G_n \leqslant n + 1$.
5. Prouver que $F_n = G_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.