

INTÉGRALES IMPROPRES

On a défini en première année l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Il s'agit maintenant de donner un sens si possible à l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle autre qu'un segment. On parle alors d'intégrales impropres ou généralisées.

Exemple 0.1

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale impropre puisque $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$ mais $[1, +\infty[$ n'est pas un segment.

Exemple 0.2

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$ est une intégrale impropre car \tan est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ mais $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ n'est pas un segment.

Dans la suite \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1 Convergence d'intégrales

1.1 Continuité par morceaux

On a vu en première année la définition d'une fonction continue par morceaux sur un **segment**. On peut étendre cette notion à un intervalle quelconque.

Définition 1.1 Fonction continue par morceaux sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} . On dit que f est continue par morceaux si la restriction de f à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.

Exemple 1.1

- $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} .
- $x \mapsto \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur \mathbb{R} .

1.2 Intégrales impropres

Définition 1.2 Intégrale convergente sur un intervalle semi-ouvert

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs dans \mathbb{K} . On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ **converge** si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite en b^- . Cette limite est alors notée $\int_a^b f(t) dt$. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale **diverge**.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$ à valeurs dans \mathbb{K} . On dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ **converge** si $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ admet une limite en a^+ . Cette limite est alors notée $\int_a^b f(t) dt$. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale **diverge**.

REMARQUE.

- Si f est continue par morceaux sur $[a, b[$ alors pour tout $c \in [a, b[$, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ sont de même nature.
- Si f est continue par morceaux sur $]a, b]$ alors pour tout $c \in]a, b]$, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^c f(t) dt$ sont de même nature.

Analogie avec les séries

Par analogie avec les séries, on peut définir le concept d'«intégrale partielle» et de «reste».

- Dans le cas d'une intégrale sur $[a, b[$, l'«intégrale partielle» sera $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ pour $x \in [a, b[$. On peut alors dire que l'intégrale converge si l'«intégrale partielle» admet une limite finie en b^- . Dans ce cas, le «reste» sera $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ et il est de limite nulle en b^- .
- Dans le cas d'une intégrale sur $]a, b]$, l'«intégrale partielle» sera $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ pour $x \in]a, b]$. On peut alors dire que l'intégrale converge si l'«intégrale partielle» admet une limite finie en a^+ . Dans ce cas, le «reste» sera $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ et il est de limite nulle en a^+ .



ATTENTION! Contrairement aux séries, une intégrale du type $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ peut converger sans que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f = 0$. Pire, f peut même ne pas être bornée.

Exemple 1.2

- Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^a \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Exemple 1.3

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge si et seulement si $a > 0$.

Définition 1.3 Intégrale sur un intervalle ouvert

Soient $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $a \leq b$ et f continue par morceaux sur $]a, b[$ à valeurs dans \mathbb{K} . Les convergences des intégrales de f sur $[c, b[$ et sur $]a, c]$ ne dépendent pas de $c \in]a, b[$. Dans le cas où ces deux intégrales convergent, on dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ converge et on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Cette quantité ne dépend pas de $c \in]a, b[$.

Exemple 1.4

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge.

REMARQUE. Si $I =]a, b[$ est un intervalle **borné** et si f est continue par morceaux sur I et admet des limites finies en a^+ et b^- , alors l'intégrale de f sur I converge.

En particulier, si une fonction f continue sur $I =]a, b[$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[a, b]$, alors l'intégrale de f sur I converge.

Une telle intégrale est appelée **faussement impropre**.

1.3 Propriétés**Proposition 1.1**

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} . On pose $a = \inf I$ et $b = \sup I$.

Linéarité Si les intégrales de f et g sur I convergent, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, l'intégrale de $\lambda f + \mu g$ sur I converge et

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

Autrement dit, l'ensemble des fonctions dont l'intégrale sur I converge est un \mathbb{K} -espace vectoriel et l'application qui à une telle fonction associe son intégrale sur I est une forme linéaire.

Positivité Si f est positive sur I et si l'intégrale de f sur I converge, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Stricte positivité On suppose $a < b$. Si f est positive et continue sur I et si $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors f est nulle sur I .

Relation de Chasles Si l'intégrale de f sur I converge, alors pour tout $c \in]a, b[$,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$



ATTENTION ! Prendre garde à l'ordre des bornes pour la positivité.

Proposition 1.2 Fonctions à valeurs complexes

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{C} . On pose $a = \inf I$ et $b = \sup I$.

Alors $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si $\int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$ convergent et dans ce cas,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$$

Exercice 1.1

Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-at} \sin(t) dt$

Proposition 1.3 Dérivation

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ à valeurs dans \mathbb{K} . Si l'intégrale de f sur $[a, b[$ **converge**, alors $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ est dérivable sur $[a, b[$, de dérivée $-f$.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue sur $]a, b]$ à valeurs dans \mathbb{K} . Si l'intégrale de f sur $]a, b]$ **converge**, alors $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $]a, b]$ de dérivée f .

2 Intégrabilité

2.1 Définition

Définition 2.1 Intégrabilité

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I . On dit que f est **intégrable** sur I ou que l'intégrale de f sur I **converge absolument** si l'intégrale de $|f|$ sur I converge.

REMARQUE. On remarquera l'analogie avec l'absolue convergence pour les séries.

REMARQUE. Pour une fonction **de signe constant**, l'intégrabilité équivaut à la convergence de l'intégrale.

REMARQUE. Si $I =]a, b[$ est un intervalle **borné** et si f est continue par morceaux sur I et admet des limites finies en a^+ et b^- , f est intégrable sur I .

Proposition 2.1 Intégrales de Riemann

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
- $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]0, a[$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ est intégrable sur $]a, b]$ si et seulement si $\alpha < 1$.
- $x \mapsto \frac{1}{|x-b|^\alpha}$ est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Proposition 2.2 Exponentielles

Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ si et seulement si $a > 0$.

Notation 2.1 Espace $L^1(I, \mathbb{K})$

On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} .

2.2 Intégrabilité par comparaison**Proposition 2.3**

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b[$ à **valeurs positives**. L'intégrale de f sur $[a, b[$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée sur $[a, b[$.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $]a, b]$ à **valeurs positives**. L'intégrale de f sur $]a, b]$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ est majorée sur $]a, b]$.

REMARQUE. Dans le cas où f est **positive** et $\int_a^b f(t) dt$ diverge, on pourra noter $\int_a^b f(t) dt = +\infty$.

Proposition 2.4 Majoration

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I telles que $0 \leq f \leq g$ sur I . Si l'intégrale de g sur I converge, alors l'intégrale de f sur I converge également.

Proposition 2.5 Majoration

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I , f à valeurs dans \mathbb{K} et g à **valeurs positives**. Si $|f| \leq g$ sur I et si g est intégrable sur I , alors f est intégrable sur I .

Exemple 2.1

$f: t \mapsto \frac{\sin t}{t^2 + 1}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ puisque pour tout $t \in [1, +\infty[$, $|f(t)| \leq \frac{1}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Proposition 2.6 Inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} . Si f est intégrable sur I , alors l'intégrale de f sur I converge. De plus,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

où $a = \inf I$ et $b = \sup I$.

REMARQUE. Ce résultat est à mettre en parallèle avec le fait que la convergence absolue implique la convergence pour les séries.



ATTENTION! L'intégrale d'une fonction peut très bien converger sans que la fonction soit intégrable. On parle alors d'intégrale **semi-convergente**.

Exemple 2.2

L'intégrale de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ sur $]0, +\infty[$ converge mais cette fonction n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$. Autrement dit, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge mais pas absolument.

Proposition 2.7 Structure d'espace vectoriel

L'ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Exercice 2.1

On note $L^2(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions f continues par morceaux sur \mathbb{K} telles que f^2 est intégrable sur I . Montrer que $L^2(I, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Proposition 2.8 Domination

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$. Si $f = \mathcal{O}_{b^-}(g)$ et si g est intégrable sur $[a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$. Si $f = \mathcal{O}_{a^+}(g)$ et si g est intégrable sur $]a, b]$, alors f est intégrable sur $]a, b]$.

Exemple 2.3

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Si f est continue par morceaux et bornées sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

Proposition 2.9 Négligeabilité

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$. Si $f = o(g)$ et si g est intégrable sur $[a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$. Si $f = o(g)$ et si g est intégrable sur $]a, b]$, alors f est intégrable sur $]a, b]$.

Exemple 2.4

On souhaite déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^t)}{t^2 + 1} dt$. Remarquons que $\frac{\sin(e^t)}{t^2 + 1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $t \mapsto \frac{\sin(e^t)}{t^2 + 1}$ également. A fortiori, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(e^t)}{t^2 + 1} dt$ converge. Comme $t \mapsto \frac{\sin(e^t)}{t^2 + 1}$ est continue sur $[0, +\infty[$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^t)}{t^2 + 1} dt$ converge.

Exemple 2.5

On souhaite déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$. Remarquons que $\frac{1}{\sqrt{t}} = o\left(\frac{\ln t}{\sqrt{t}}\right)$. Si l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$ convergeait, alors la $t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ serait intégrable sur $[1, +\infty[$, puisqu'elle y est positive. Par conséquent, $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ serait également intégrable sur $[1, +\infty[$, ce qui n'est pas puisque $\frac{1}{2} \leq 1$. On en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$ diverge.

Proposition 2.10 Equivalence

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$. Si $f \sim g$, alors f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si g l'est.
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$. Si $f \sim g$, alors f est intégrable sur $]a, b]$ si et seulement si g l'est.

Exemple 2.6

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. Si f admet une limite non nulle en $+\infty$, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

Exemple 2.7

On souhaite déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/t}}{t^2 + t} dt$. Remarquons que $\frac{e^{1/t}}{t^2 + t} \sim \frac{1}{t^2}$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, $t \mapsto \frac{e^{1/t}}{t^2 + t}$ l'est également. Notamment, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/t}}{t^2 + t} dt$ converge.

Exemple 2.8

On souhaite déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2 + t^3} dt$. Remarquons que $\frac{\sin t}{t^2 + t^3} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$, $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2 + t^3}$ ne l'est pas non plus. Comme cette fonction est positive sur $]0, 1]$, $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2 + t^3} dt$ diverge.

Exemple 2.9 Fonction Γ d'Euler

La fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est définie sur \mathbb{R}_+^* .

- Tout d'abord, la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- De plus, $t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et la fonction positive $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable au voisinage de 0^+ si et seulement si $x > 0$.
- Enfin, $t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o(1/t^2)$ et la fonction positive $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Ainsi $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si $x > 0$. Comme cette fonction est positive, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

Exemple 2.10 Fonction B d'Euler

La fonction $B : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

- Tout d'abord, la fonction $t \mapsto t^{x-1} (1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0, 1[$.
- De plus, $t^{x-1} (1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et la fonction positive $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable au voisinage de 0^+ si et seulement si $x > 0$.
- Enfin, $t^{x-1} (1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} (1-t)^{y-1}$ et la fonction positive $t \mapsto (1-t)^{y-1}$ est intégrable au voisinage de 1^- si et seulement si $y > 0$.

Ainsi $t \mapsto t^{x-1} (1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$. Comme cette fonction est positive, l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

3 Calcul d'intégrales

3.1 Changement de variables

Proposition 3.1 Changement de variables

Soient $(a, b, \alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}}^4$ tel que $a \leq b$ et $\alpha \leq \beta$, f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$ à valeurs dans \mathbb{K} et φ une bijection strictement croissante de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$ de classe \mathcal{C}^1 . Alors les intégrales

$$\int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

sont de même nature et, en cas de convergence, sont égales.

REMARQUE. Si φ est décroissante, on a

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u) du = \int_b^a f(t) dt$$

Méthode Changement de variable

On dit qu'on effectue le changement de variable $t = \varphi(u)$. Comment alors se souvenir de la formule ?

- On remplace t par $\varphi(u)$ dans la fonction à intégrer.
- $\frac{dt}{du} = \varphi'(u)$ donc $dt = \varphi'(u) du$ et on remplace dans l'intégrale.
- t doit varier entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ lorsque u varie entre a et b , ce qui nous donne les bornes de l'intégrale en u .

Exemple 3.1

Montrons que l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$ converge et déterminons sa valeur. On va effectuer le changement de variable $u = \sqrt{1+t^2}$ i.e. $t = \sqrt{u^2-1}$. L'application $u \mapsto \sqrt{u^2-1}$ est une bijection croissante de classe \mathcal{C}^1 de $[\sqrt{2}, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. On en déduit que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$ et $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{du}{u^2-1}$ sont de même nature puisque $dt = \frac{u du}{\sqrt{u^2-1}}$. Une décomposition en éléments simples montre alors que

$$\forall u \in [\sqrt{2}, +\infty[, \frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right)$$

On en déduit que

$$I = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{u-1}{u+1} \right) \right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right) = \ln(\sqrt{2}+1)$$

Exemple 3.2 Symétrie de la fonction B

On rappelle que $B: (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. A l'aide du changement de variable affine $t \mapsto 1-t$, on montre que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, B(x, y) = B(y, x)$$

Exercice 3.1 Expressions alternatives de la fonction B

On rappelle que $B : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

1. A l'aide du changement de variable $t = \sin^2 \theta$, montrer que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta) \cos^{2y-1}(\theta) d\theta$$

2. A l'aide du changement de variable $t = \frac{u}{1+u}$, montrer que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$$

3.2 Intégration par parties**Proposition 3.2 Intégration par parties**

Soit f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle $]a, b[$ à valeurs dans \mathbb{K} . Si fg admet des limites finies en a^+ et b^- , alors les intégrales de $f'g$ et fg' sur $]a, b[$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt$$

où $[fg]_a^b = \lim_{t \rightarrow b^-} f(t)g(t) - \lim_{t \rightarrow a^+} f(t)g(t)$.

REMARQUE. Le résultat reste valable si $b \leq a$.

Exemple 3.3

Montrons la convergence et calculons l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$. Posons $f(t) = t$ et $g(t) = -e^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ de

sorte que $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt = \int_0^{+\infty} f(t)g'(t) dt$. Puisque fg admet des limites finies en 0 et $+\infty$, les intégrales $\int_0^{+\infty} te^{-t}$

et $\int_0^{+\infty} f'(t)g(t) dt = -\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ sont de même nature.

Puisque $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge, il en est donc de même pour $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$, ce que l'on aurait pu prouver directement. De plus,

$$\int_0^{+\infty} te^{-t} dt = \lim_{+\infty} fg - \lim_0 fg + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

Exemple 3.4 Relation fonctionnelle de la fonction Γ

On rappelle que $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est définie sur \mathbb{R}_+^* . Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto t^x$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* de dérivée $t \mapsto xt^{x-1}$. La fonction $t \mapsto -e^{-t}$ est également de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* de dérivée $t \mapsto e^{-t}$. Par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1} e^{-t} dt$$

L'égalité est assurée par la convergence des deux intégrales. De plus, comme $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^x e^{-t} = 0$$

et, par croissances comparées,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^x e^{-t} = 0$$

On en déduit que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$

Exercice 3.2

Calculer $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3.5 Relation fonctionnelle de la fonction B

On rappelle que $B : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrons que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$$

Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto (1-t)^y$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$ de dérivées respectives $t \mapsto xt^{x-1}$ et $t \mapsto -y(1-t)^{y-1}$. Par intégrations par parties,

$$\int_0^1 yt^x(1-t)^{y-1} dt = -[t^x(1-t)^y]_0^1 + \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y dt$$

L'égalité est assurée par la convergence des deux intégrales. Puisque $x > 0$ et $y > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^x(1-t)^y = \lim_{t \rightarrow 1^-} t^x(1-t)^y = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} yB(x+1, y) &= \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y dt \\ &= x \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t) dt \\ &= x \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt - x \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt \quad \text{car ces deux intégrales convergent} \\ &= xB(x, y) - xB(x+1, y) \end{aligned}$$

ou encore

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$$

Exercice 3.3

Calculer $B(n+1, p+1) = \int_0^1 t^n(1-t)^p dt$ pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 3.4 Intégrale de Dirichlet

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge. Cette intégrale converge-t-elle absolument ?

4 Intégration des relations de comparaison

REMARQUE. Soit f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$.

- Si f est positive et $\int_a^b f(t) dt$ diverge, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = +\infty$.
- Si $\int_a^b f(t) dt$ converge, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^b f(t) dt = 0$.

Proposition 4.1

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$. On suppose de plus que g est **de signe constant** au voisinage de b^- .

Domination On suppose que $f \underset{b^-}{=} \mathcal{O}(g)$.

- Si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} \mathcal{O}\left(\int_x^b g(t) dt\right)$.
- Si $\int_a^b g(t) dt$ diverge, alors $\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} \mathcal{O}\left(\int_a^x g(t) dt\right)$.

Négligeabilité On suppose que $f \underset{b^-}{=} o(g)$.

- Si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} o\left(\int_x^b g(t) dt\right)$.
- Si $\int_a^b g(t) dt$ diverge, alors $\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{=} o\left(\int_a^x g(t) dt\right)$.

Equivalence On suppose que $f \underset{b^-}{\sim} g$.

- Si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{\sim} \int_x^b g(t) dt$.
- Si $\int_a^b g(t) dt$ diverge, alors $\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b^-}{\sim} \int_a^x g(t) dt$.

REMARQUE. On a des résultats analogues pour des fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$ quitte à utiliser des relations de comparaison en a^+ et non b^- .

REMARQUE. Ces résultats sont l'exact pendant des résultats sur les sommations de relations de comparaison dans le cadre des séries. Il vaut voir $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ comme un «reste» et $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ comme une «somme partielle».

Exemple 4.1

- On sait que $\frac{1}{t + \sqrt{t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$, que $t \mapsto \frac{1}{t}$ est positive au voisinage de $+\infty$ et que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + \sqrt{t}}$ diverge et $\int_1^x \frac{dt}{t + \sqrt{t}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$.
- On sait que $\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, que $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est positive au voisinage de 0^+ et que $\int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge donc $\int_0^\pi \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ converge et $\int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}\left(\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt\right)$ ou encore $\int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}(\sqrt{x})$.



ATTENTION ! Il est essentiel que la fonction de référence soit de signe constant au voisinage du point considéré.