

DEVOIR À LA MAISON N°03

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) - \lambda F(x+a) = f(x) \quad (\star)$$

Partie I – Questions préliminaires

1. Soit φ constante sur \mathbb{R} . Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|\varphi(x) - \varphi(y)| = 0 \leq K|x - y|$ quelque soit $K \in \mathbb{R}_+$. Ainsi $\varphi \in \mathcal{L}$.
2. \cos et \sin sont dérivables à dérivées bornées donc lipschitziennes.
3. Par définition, $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$. La fonction nulle est constante donc lipschitzienne.
Soient $(\varphi, \psi) \in \mathcal{L}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Il existe $(K, L) \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K|x - y| \quad \text{et} \quad |\psi(x) - \psi(y)| \leq L|x - y|$$

Par inégalité triangulaire, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|(\lambda\varphi + \mu\psi)(x) - (\lambda\varphi + \mu\psi)(y)| = |\lambda(\varphi(x) - \varphi(y)) + \mu(\psi(x) - \psi(y))| \leq |\lambda||\varphi(x) - \varphi(y)| + |\mu||\psi(x) - \psi(y)| \leq (|\lambda|K + |\mu|L)|x - y|$$

On a donc bien $\lambda\varphi + \mu\psi \in \mathcal{L}$.

\mathcal{L} est donc bien un sous-espace vectoriel de \mathcal{F} .

4. Puisque $\varphi \in \mathcal{L}$, il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K|x - y|$$

En particulier,

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\varphi(t) - \varphi(0)| \leq K|t|$$

Par inégalité triangulaire,

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\varphi(t)| \leq K|t| + |\varphi(0)|$$

Il suffit alors de poser $A = K$ et $B = |\varphi(0)|$.

5. a. C'est du cours.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

- b. Par croissance comparées, $q^n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ donc $nq^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Puisque $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente à termes positifs, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} nq^n$ converge.

6. a. Puisque $|\lambda e^{ia}| = |\lambda| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n e^{ina}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n e^{ina} = \frac{1}{1 - \lambda e^{ia}}$. Par conséquent, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n e^{i(x+na)}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n e^{i(x+na)} = \frac{e^{ix}}{1 - \lambda e^{ia}}$.

- b. Les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n \cos(x + na)$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n \sin(x + na)$ sont les parties réelle et imaginaire de la série convergente $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n e^{i(x+na)}$ donc ce sont des séries convergentes. De plus, leurs sommes sont respectivement les parties réelle et imaginaire de $\frac{e^{ix}}{1-\lambda e^{ia}}$. Or

$$\frac{e^{ix}}{1-\lambda e^{ia}} = \frac{e^{ix}(1-\lambda e^{-ia})}{(1-\lambda e^{ia})(1-\lambda e^{-ia})} = \frac{e^{ix} - \lambda e^{i(x-a)}}{1-2\lambda \cos a + \lambda^2}$$

On en déduit les résultats demandés.

Partie II – Etude de (★) lorsque f est nulle et $|\lambda| \neq 1$

On suppose dans cette partie que f est nulle sur \mathbb{R} et $|\lambda| \neq 1$.

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Puisque F vérifie (★) et que f est nulle, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\lambda^k F(x + ka) - \lambda^{k+1} F(x + (k+1)a) = 0$$

Puis, via un télescopage

$$F(x) - \lambda^n F(x + na) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k F(x + ka) - \lambda^{k+1} F(x + (k+1)a) = 0$$

De la même manière pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\lambda^{-k} f(x - ka) = \lambda^{-k} k F(x - ka) - \lambda^{-(k-1)} F(x - (k-1)a)$$

Puis, via un télescopage

$$\lambda^{-n} F(x - na) - F(x) = \sum_{k=1}^n \lambda^{-k} k F(x - ka) - \lambda^{-(k-1)} F(x - (k-1)a) = 0$$

On en déduit les égalités demandées.

2. D'après la question 4, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |F(t)| \leq A|t| + B$$

Fixons alors $x \in \mathbb{R}$.

Supposons $|\lambda| < 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|F(x)| = |\lambda|^n |F(x + na)| \leq |\lambda|^n (A|x + na| + B) \leq A|a|n|\lambda|^n + (A|x| + B)|\lambda|^n$$

Puisque $|\lambda| < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\lambda|^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n|\lambda|^n = 0$$

de sorte que $F(x) = 0$.

Supposons $|\lambda| > 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|F(x)| = |\lambda|^{-n} |F(x - na)| \leq |\lambda|^{-n} (A|x - na| + B) \leq A|a|n|\lambda|^{-n} + (A|x| + B)|\lambda|^{-n}$$

Puisque $|\lambda| > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\lambda|^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n|\lambda|^{-n} = 0$$

de sorte que $F(x) = 0$.

Finalement, F est bien nulle sur \mathbb{R} .

Partie III – Etude de (★) lorsque $|\lambda| \neq 1$

1. Soit $(F, G) \in \mathcal{L}^2$ un couple éventuel de solutions de (\star) . D'après la question 3, $H = F - G \in \mathcal{L}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H(x) - \lambda H(x + a) = 0$$

La question 2 permet alors d'affirmer que $H = 0$ i.e. $F = G$.

2. a. D'après la question 4, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)| \leq A|t| + B$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\lambda^n f(x + na)| = |\lambda|^n |f(x + na)| \leq |\lambda|^n (A|x + na| + B) \leq A|a|n|\lambda|^n + (A|x| + B)|\lambda|^n$$

Puisque $|\lambda| < 1$, les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda|^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} n|\lambda|^n$ convergent donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda^n f(x + na)|$ converge i.e. la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n f(x + na)$ converge absolument.

- b. Puisque $f \in \mathcal{L}$, il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} |F_0(x) - F_0(y)| &= \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n (f(x + na) - f(y + na)) \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^n |f(x + na) - f(y + na)| \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^n K |(x + na) - (y + na)| = \frac{K|x - y|}{1 - |\lambda|} \end{aligned}$$

Ainsi $F_0 \in \mathcal{L}$.

- c. Par définition de F_0 , pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_0(x) - \lambda F_0(x + a) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na) - \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} f(x + (n+1)a) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na) - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n f(x + na) = f(x) \end{aligned}$$

Donc F_0 est bien solution de (\star) et c'est l'unique solution de (\star) appartenant à \mathcal{L} d'après la question 1.

- d. Dans ce cas, l'unique solution de (\star) appartenant à \mathcal{L} est la fonction F_0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n = \frac{1}{1 - \lambda}$$

- e. Dans le cas où $f = \cos$, l'unique solution de (\star) appartenant à \mathcal{L} est la fonction F_0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos(x + na) = \frac{\cos x - \lambda \cos(x - a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2}$$

Dans le cas où $f = \sin$, l'unique solution de (\star) appartenant à \mathcal{L} est la fonction F_0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \sin(x + na) = \frac{\sin x - \lambda \sin(x - a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2}$$

3. a. Il suffit d'appliquer la question 2.a en remplaçant λ par $\frac{1}{\lambda}$ et a par $-a$, ce qui est légitime car $\left|\frac{1}{\lambda}\right| < 1$.
b. On prouve à nouveau que $F_0 \in \mathcal{L}$ comme dans 2.b. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_0(x) - \lambda F_0(x + a) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-(n-1)} f(x - (n-1)a) - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na) - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na) = f(x) \end{aligned}$$

Ainsi F_0 est bien solution de (\star) et c'est la seule appartenant à \mathcal{L} d'après la question 1.