# Devoir surveillé n°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1

**1** L'application $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mapsto \operatorname{tr}(u)$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. $\mathcal{T}$ est donc un hyperplan de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ en tant que noyau de cette forme linéaire non nulle.

**2** $\Phi$ est bilinéaire par bilinéarité de la composition des endomorphismes. De plus, pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$, $\Phi(v, u) = -\Phi(u, v)$ donc $\Phi$ est antisymétrique.

**3** On sait que $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Ainsi pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $u\mathrm{P}(u) - \mathrm{P}(u)u = 0$ de sorte que $\mathbb{K}[u] \subset \operatorname{Ker} \Phi_u$. A fortiori,

$$\operatorname{vect}(\mathrm{Id}, u, \dots, u^{n-1}) \subset \mathbb{K}[u] \subset \operatorname{Ker} \Phi_u$$

Puisque $u$ n'est pas une homothétie, la famille $(\mathrm{Id}, u)$ est libre. Ainsi

$$\dim \operatorname{Ker} \Phi_u \geq \operatorname{rg}(\mathrm{Id}, u, \dots, u^{n-1}) \geq \operatorname{rg}(\mathrm{Id}, u) = 2$$

**4** Soit $v \in \operatorname{Ker} \Phi_u$. Alors $v$ commute avec $u$. D'après le cours, tout sous-espace propre de $u$ est alors stable par $v$.

**5** Pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$,

$$\operatorname{tr}(\Phi(u, v)) = \operatorname{tr}(uv) - \operatorname{tr}(vu) = 0$$

par propriété de la trace. Ainsi $\operatorname{Im} \Phi \subset \mathcal{T}$.
Puisque $\operatorname{tr}(\mathrm{Id}) = n \neq 0$, $\mathrm{Id} \notin \mathcal{T}$. A fortiori, $\mathrm{Id} \notin \operatorname{Im} \Phi$ i.e. il n'existe pas de couple $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$ tel que $[u, v] = \mathrm{Id}$.
D'après le théorème du rang et la question **3**,

$$\dim \operatorname{Im} \Phi_u = \dim \mathcal{L}(\mathrm{E}) - \dim \operatorname{Ker} \Phi_u \leq n^2 - 2$$

Or $\mathcal{T}$ est un hyperplan de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ d'après la question **1** donc $\dim \mathcal{T} = n^2 - 1$. On ne peut donc pas avoir $\operatorname{Im} \Phi_u = \mathcal{T}$.

**6** **6.a** Supposons que $u$ soit une homothétie. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \mathrm{Id}$. Alors, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $(x, u(x)) = (x, \lambda x)$ est évidemment liée.
Supposons que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $(x, u(x))$ soit liée. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i + e_j) = \lambda(e_i + e_j)$. Mais on a également $u(e_i + e_j) = u(e_i) + u(e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$ d'où $\lambda_i = \lambda_j = \lambda$ par liberté de $(e_i, e_j)$. Finalement, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i) = \lambda e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $u = \lambda \mathrm{Id}$ et $u$ est une homothétie.

**6.b** Supposons que $u$ soit une homothétie. Alors il est clair que pour tout $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $u \circ v = v \circ u = \lambda v$ en notant $\lambda$ le rapport de l'homothétie $u$. Ainsi $\operatorname{Ker} \Phi_u = \mathcal{L}(\mathrm{E})$.
Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker} \Phi_u = \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Soit $x \in \mathrm{E}$. Notons $p$ un projecteur sur $\operatorname{vect}(x)$. Alors $u(x) = u \circ p(x) = p \circ u(x) \in \operatorname{vect}(x)$ donc $(x, u(x))$ est liée. D'après la question précédente, $u$ est une homothétie.

**7** **7.a** Notons

$$\mathcal{P}_k : \Phi_u^k(v) = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} u^{k-p} v u^p$$

**Initialisation.** $\Phi_u^0(v) = v$ et $\sum_{p=0}^{0}(-1)^0\binom{0}{p}u^{0-p}vu^p = \binom{0}{0}v = v$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
**Hérédité.** Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\Phi_u^{k+1}(v) &= \Phi_u\left(\Phi_u^k(v)\right)\\
&= u\left(\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}u^{k-p}vu^p\right) - \left(\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}u^{k-p}vu^p\right)u\\
&= \sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}u^{k+1-p}vu^p + \sum_{p=0}^{k}(-1)^{p+1}\binom{k}{p}u^{k-p}vu^{p+1}\\
&= \sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}u^{k+1-p}vu^p - \sum_{p=1}^{k+1}(-1)^p\binom{k}{p-1}u^{k+1-p}vu^p && \text{par changement d'indice}\\
&= \sum_{p=0}^{k+1}(-1)^p\binom{k}{p}u^{k+1-p}vu^p - \sum_{p=0}^{k+1}(-1)^p\binom{k}{p-1}u^{k+1-p}vu^p && \text{car } \binom{k}{k+1} = \binom{k}{-1} = 0\\
&= \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^p\left(\binom{k}{p} + \binom{k}{p-1}\right)u^{k+1-p}vu^p\\
&= \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^p\binom{k+1}{p}u^{k+1-p}vu^p && \text{d'après la relation du triangle de Pascal}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
**Conclusion.** Par récurrence, $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

**7.b** Supposons $u$ nilpotent et notons $q$ son indice de nilpotence. Alors, pour tout $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$,

$$\Phi_u^{2q-1}(v) = \sum_{p=0}^{q-1}(-1)^p\binom{2q-1}{p}u^{2q-1-p}vu^p + \sum_{p=q}^{2q-1}(-1)^p\binom{2q-1}{p}u^{2q-1-p}vu^p$$

Si $p \in [\![0, q-1]\!]$, $2q-1-p \geq q$ et $u^{2q-1-p} = 0$ tandis que si $p \in [\![q, 2q-1]\!]$, $u^p = 0$. On en déduit que

$$\forall v \in \mathcal{L}(\mathrm{E}),\ \Phi_u^{2q-1}(v) = 0$$

i.e. $\Phi_u^{2q-1} = 0$ et $\Phi_u$ est nilpotent.

$\boxed{8}$ Supposons que $u$ soit une homothétie de rapport $\lambda$. Alors $\mathrm{tr}(u) = \lambda\,\mathrm{tr}(\mathrm{Id}) = n\lambda$. Puisque $\mathrm{tr}(u) = 0$, $\lambda = 0$, puis $u = \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0$. Or on a supposé $u \neq 0$ donc $u$ ne peut être une homothétie.

$\boxed{9}$ Il suffit d'appliquer **6.a**.

$\boxed{10}$ On pose $e_2 = u(e_1)$. Comme la famille $(e_1, e_2)$ est libre, on peut la compléter en une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E. La matrice de $u$ dans cette base est bien de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{X}^\mathsf{T} \\ \mathrm{Y} & \mathrm{A}_1 \end{pmatrix}$ avec $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})^2$ et $\mathrm{A}_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. On peut même préciser que $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{11}$ **11.a** Le spectre de U étant fini, on peut choisir $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}(\mathrm{U})$. Alors $\mathrm{Ker}(\mathrm{U} - \alpha\mathrm{I}_{n-1}) = \{0\}$ et $\mathrm{U} - \alpha\mathrm{I}_{n-1}$ est inversible.

**11.b** Un calcul par blocs donne

$$\mathrm{U'V'} - \mathrm{V'U'} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\mathrm{R}^\mathsf{T} \\ \mathrm{US} & \mathrm{UV} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{R}^\mathsf{T}\mathrm{U} \\ \alpha\mathrm{S} & \mathrm{VU} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\mathrm{R}^\mathsf{T} - \mathrm{R}^\mathsf{T}\mathrm{U} \\ \mathrm{US} - \alpha\mathrm{S} & \mathrm{UV} - \mathrm{VU} \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{A} = \mathrm{U'V'} - \mathrm{V'U'} \iff \begin{cases} \mathrm{X}^\mathsf{T} = \alpha\mathrm{R}^\mathsf{T} - \mathrm{R}^\mathsf{T}\mathrm{U} \\ \mathrm{Y} = \mathrm{US} - \alpha\mathrm{S} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{X}^\mathsf{T} = -\mathrm{R}^\mathsf{T}(\mathrm{U} - \alpha\mathrm{I}_{n-1}) \\ \mathrm{Y} = (\mathrm{U} - \alpha\mathrm{I}_{n-1})\mathrm{S} \end{cases}$$

**12** On a déjà montré à la question **5** que $\operatorname{Im}\Phi \subset \mathcal{T}$. On va montrer l'inclusion réciproque par récurrence sur $n = \dim \mathrm{E}$.
**Initialisation.** Supposons que $\dim \mathrm{E} = 1$. Soit $u \in \mathcal{T}$. Comme $\dim \mathcal{L}(\mathrm{E}) = (\dim \mathrm{E})^2 = 1$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \operatorname{Id}$. Mais $\operatorname{tr}(u) = \lambda = 0$ donc $u = 0$. On peut apr exemple affirmer que $u = 0 = \Phi(0,0) \in \operatorname{Im}\Phi$ d'où l'inclusion $\operatorname{Im}\Phi \subset \mathcal{T}$.
**Hérédité.** Supposons avoir prouvé l'inclusion souhaitée lorsque E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n-1 \in \mathbb{N}^*$ et considérons maintenant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n$. Soit à nouveau $u \in \mathcal{T}$. Si $u$ est une homothétie, on peut encore affirmer que $u = 0 = \Phi(0,0) \in \operatorname{Im}\Phi$. Sinon, la question **10** permet d'affirmer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de $u$ est $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{X}^\mathsf{T} \\ \mathrm{Y} & \mathrm{A}_1 \end{pmatrix}$. Quitte à raisonner en termes d'endomorphismes canoniquement associés, l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer l'existence de $(\mathrm{U},\mathrm{V}) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})^2$ tel que $\mathrm{A}_1 = \mathrm{UV} - \mathrm{VU}$. On choisit alors $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{U} - \alpha \mathrm{I}_{n-1}$ soit inversible (cf. question **11.a**) et on pose $\mathrm{R} = -((\mathrm{U} - \alpha\mathrm{I}_{n-1})^{-1})^\mathsf{T}\mathrm{X}$, $\mathrm{S} = (\mathrm{U} - \alpha\mathrm{I}_{n-1})^{-1}\mathrm{Y}$, $\mathrm{U}' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \mathrm{U} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{V}' = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{R}^\mathsf{T} \\ \mathrm{S} & \mathrm{V} \end{pmatrix}$. On vérifie alors que $\mathrm{X}^\mathsf{T} = -\mathrm{R}^\mathsf{T}(\mathrm{U} - \alpha\mathrm{I}_{n-1})$ et $\mathrm{Y} = (\mathrm{U} - \alpha\mathrm{I}_{n-1})\mathrm{S}$. La question **11.b** montre alors que $\mathrm{A} = \mathrm{U}'\mathrm{V}' - \mathrm{V}'\mathrm{U}'$. En notant $u'$ et $v'$ les endomorphismes de E dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ sont $\mathrm{U}'$ et $\mathrm{V}'$, on a donc $u = u'v' - v'u' = \Phi(u',v') \in \operatorname{Im}\Phi$. D'où $\mathcal{T} \subset \operatorname{Im}\Phi$.
**Conclusion.** On a prouvé par récurrence que $\mathcal{T} \subset \operatorname{Im}\Phi$ quelle que soit la dimension $n \in \mathbb{N}^*$ de E.
Par double inclusion, $\operatorname{Im}\Phi = \mathcal{T}$.

**13** La famille $(u_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ est l'image réciproque de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par l'isomorphisme

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{cases}$$

On en déduit que $(u_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ est une base de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

**14** Soit $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$.

$$\forall m \in [\![1,n]\!],\ u_{i,j}u_{k,l}(e_m) = u_{i,j}(\delta_{l,m}e_k) = \delta_{l,m}\delta_{j,k}e_i = \delta_{j,k}u_{i,l}(e_m)$$

On en déduit que

$$u_{i,j}u_{k,l} = \delta_{j,k}u_{i,l}$$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Puisque $u = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l}u_{k,l}$,

$$\begin{aligned}
\Phi_u(u_{i,j}) &= uu_{i,j} - u_{i,j}u \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l}u_{k,l}u_{i,j} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l}u_{i,j}u_{k,l} \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l}\delta_{l,i}u_{k,j} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l}\delta_{j,k}u_{i,l} \\
&= \sum_{k=1}^n a_{k,i}u_{k,j} - \sum_{l=1}^n a_{j,l}u_{i,l} \\
&= \sum_{k=1}^n a_{k,i}u_{k,j} - \sum_{k=1}^n a_{j,k}u_{i,k}
\end{aligned}$$

**15** D'après la question précédente, les coefficients diagonaux de la matrice de $\Phi_u$ dans la base $(u_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ sont les $a_{i,i} - a_{j,j}$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Ainsi

$$\operatorname{tr}(\Phi_u) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,i} - a_{j,j} = n\sum_{i=1}^n a_{i,i} - n\sum_{j=1}^n a_{j,j} = 0$$

**16** **16.a** Remarquons qu'avec les notations précédentes, $a_{i,j} = \delta_{i,j}\mu_i$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. D'après la question **14**, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\Phi_u(u_{i,j}) = \sum_{k=1}^n a_{k,i}u_{k,j} - \sum_{k=1}^n a_{j,k}u_{i,k} = \sum_{k=1}^n \delta_{k,i}\mu_k u_{k,j} - \sum_{k=1}^n \delta_{j,k}\mu_j u_{i,k} = \mu_i u_{i,j} - \mu_j u_{i,j} = (\mu_i - \mu_j)u_{i,j}$$

**16.b** D'après la question précédente et la question **13**, la famille $(u_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ est une base de vecteurs propres de $\Phi_u$. On en déduit que $\Phi_u$ est diagonalisable et que

$$\operatorname{Sp}(\Phi_u) = \left\{\mu_i - \mu_j,\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\right\} = \left\{\lambda - \mu,\ (\lambda,\mu) \in \operatorname{Sp}(u)^2\right\}$$

**17** Soit $v \in \operatorname{Ker} \Phi_u$. Alors d'après la question **4**,

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ v(\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)) \subset \mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$$

Réciproquement, soit $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $v(\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)) \subset \mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Fixons $i \in [\![1, n]\!]$ et $x \in \mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$. D'une part, $vu(x) = v(\lambda_i x) = \lambda_i v(x)$ car $x \in \mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$ et d'autre part, $uv(x) = \lambda_i(x)$ car $v(x) \in \mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$. Ainsi $vu(x) = uv(x)$. Comme $u$ est diagonalisable, $\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$ de sorte que $uv = vu$ i.e. $v \in \operatorname{Ker} \Phi_u$.

**18** Si $v \in \operatorname{Ker} \Phi_u$, $v$ laisse stable les sous-espaces propres $\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$ d'après la question précédente et induit donc des endomorphismes $v_{\mathrm{E}_{\lambda_i(u)}}$ de ces sous-espaces propres. On peut donc définir l'application

$$\Psi : \begin{cases} \operatorname{Ker} \Phi_u & \longrightarrow & \prod_{i=1}^{p} \mathcal{L}\left(\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)\right) \\ v & \longmapsto & \left(v_{\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)}\right)_{1 \leq i \leq p} \end{cases}$$

Cette application est clairement linéaire. Comme $u$ est diagonalisable, $\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{\lambda_i(u)}$ et un théorème du cours affirme alors que pour tout $(v_1, \dots, v_p) \in \prod_{i=1}^{p} \mathcal{L}\left(\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)\right)$, il existe un unique $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $v_{\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)} = v_i$. De plus, d'après la question précédente, cet unique endomorphisme $v$ appartient à $\operatorname{Ker} \Phi_u$. L'application $\Psi$ est donc bijective ; c'est un isomorphisme.
On en déduit que

$$\dim \operatorname{Ker} \Phi_u = \dim\left(\prod_{i=1}^{p} \mathcal{L}\left(\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)\right)\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim \mathcal{L}\left(\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)\right) = \sum_{i=1}^{p} m_i^2$$

D'après le théorème du rang

$$\operatorname{rg} \Phi_u = \dim \mathcal{L}(\mathrm{E}) - \dim \operatorname{Ker} \Phi_u = n^2 - \sum_{i=1}^{p} m_i^2$$

**19** Si $u$ à $n$ valeurs propres distinctes, alors $p = n$ et $m_i = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On en déduit que $\dim \operatorname{Ker} \Phi_u = n$.
Comme $u$ est diagonalisable, le polynôme minimial $\pi_u$ de $u$ est scindé à racines simples i.e. $\pi_u = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - \lambda_i)$.
Comme $\deg \pi_u = n$, on sait alors que $(\mathrm{Id}, u, \dots, u^{n-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$. Notamment, $\mathbb{K}[u] = \operatorname{vect}(\mathrm{Id}, u, \dots, u^{n-1})$ est de dimension $n$. Or on a vu à la question **3** que $\operatorname{vect}(\mathrm{Id}, u, \dots, u^{n-1}) \subset \operatorname{Ker} \Phi_u$. Comme $\operatorname{rg}(\mathrm{Id}, u, \dots, u^{n-1}) = \dim \operatorname{Ker} \Phi_u = n$, $\operatorname{Ker} \Phi_u = \operatorname{vect}(\mathrm{Id}, u, \dots, u^{n-1})$.

**20** Comme $u$ n'est pas une homothétie, la question **6.a** donne l'existence de $e \in \mathrm{E}$ tel que $(e, u(e))$ est libre. Or $\dim \mathrm{E} = 2$ donc $(e, u(e))$ est une base de E.
Soit $v \in \operatorname{Ker} \Phi_u$. Comme $(e, u(e))$ est une base de E, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $v(e) = \alpha e + \beta u(e) = (\alpha \mathrm{Id} + \beta u)(e)$. Mais comme $u$ et $v$ commutent, $v(u(e)) = u(v(e)) = \alpha u(e) + \beta u^2(e) = (\alpha \mathrm{Id} + \beta u)(u(e))$. Ainsi les endomorphismes $v$ et $\alpha \mathrm{Id} + \beta u$ coïncident sur la base $(e, u(e))$ de E : ils sont égaux. On en déduit que $\operatorname{Ker} \Phi_u \subset \operatorname{vect}(\mathrm{Id}, u)$. L'inclusion précédente ayant déjà été montrée, $\operatorname{Ker} \Phi_u = \operatorname{vect}(\mathrm{Id}, u)$.

**21** Comme $u$ n'est pas une homothétie, la famille $(\mathrm{Id}, u)$ est libre. Ainsi, d'après la question précédente, $\dim \operatorname{Ker} \Phi_u = \operatorname{rg}(\mathrm{Id}, u) = 2$. 0 est donc une valeur propre de $u$ de multiplicité au moins égale à 2. On en déduit que le polynôme caractéristique de $\Phi_u$ est de la forme $\mathrm{X}^2(\mathrm{X}^2 + \alpha \mathrm{X} + \beta)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Mais $\alpha = -\operatorname{tr}(\Phi_u) = 0$ d'après la question **15** donc le polynôme caractéristique de $\Phi_u$ est $\mathrm{X}^2(\mathrm{X}^2 + \beta)$.

**22** Si $\beta = 0$, la multiplicité de la valeur propre 0 vaut 4 tandis que la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 i.e. $\operatorname{Ker} \Phi_u$ vaut 2. $\Phi_u$ n'est pas diagonalisable.

**23** Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Puisque $\beta \neq 0$, $-\beta$ admet deux racines carrées complexes distinctes et opposés $\lambda$ et $-\lambda$. Ainsi $\chi_{\Phi_u} = \mathrm{X}^2(\mathrm{X} - \lambda)(\mathrm{X} + \lambda)$. Alors $\operatorname{Sp}(\Phi_u) = \{0, \lambda, -\lambda\}$. On a vu que $\dim \mathrm{E}_0(\Phi_u) = \dim \operatorname{Ker} \Phi_u = 2$ et $\dim \mathrm{E}_\lambda(\Phi_u) = \dim \mathrm{E}_{-\lambda}(\Phi_u) = 1$ puisque $\lambda$ et $-\lambda$ sont des racines simples du polynôme caractéristique de $\Phi_u$. Finalement les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres associées : $\Phi_u$ est diagonalisable.
Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si $\beta > 0$, $\chi_{\Phi_u}$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ de sorte que $\Phi_u$ n'est pas diagonalisable. Si $\beta < 0$, on peut répéter le même raisonnement que dans le cas complexe : $\Phi_u$ est diagonalisable.

**24** **24.a** Il suffit de se reporter à la question précédente.

**24.b** Puisque $\Phi_u(v) = \lambda v$, $uv - vu = \lambda v$. Si $v$ était inversible, on aurait $u - vuv^{-1} = \lambda \operatorname{Id}$ puis $\lambda \operatorname{tr}(\operatorname{Id}) = \operatorname{tr}(u) - \operatorname{tr}(vuv^{-1}) = 0$, ce qui est impossible puisque $\lambda \neq 0$. Ainsi $v$ n'est pas inversible.
De même, $\lambda \operatorname{tr}(v) = \operatorname{tr}(uv) - \operatorname{tr}(vu) = 0$ donc $\operatorname{tr}(v) = 0$ puisque $\lambda \neq 0$. Comme $\dim E = 2$, $\chi_v = X^2 - \operatorname{tr}(v)X + \det(v)$. Or $\operatorname{tr}(v) = 0$ et $\det(v) = 0$ car $v$ n'est pas inversible. Ainsi $\chi_v = X^2$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $v^2 = 0$.

**24.c** Si $(e, v(e))$ est une base de E, alors $v(e) \neq 0$ i.e. $e \notin \operatorname{Ker} v$. Réciproquement soit $e \in E \setminus \operatorname{Ker} v$ (ceci est possible car $v \neq 0$). Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\alpha e + \beta v(e) = 0$. En appliquant $v$, on obtient $\alpha v(e) = 0$ puisque $v^2 = 0$. Ainsi $\alpha = 0$ car $v(e) \neq 0$. On en déduit que $\beta v(e) = 0$ et donc $\beta = 0$ pour la même raison. Ainsi $(e, v(e))$ est libre et est donc une base de E puisque $\dim E = 2$. Finalement, $(e, v(e))$ est une base de E pour tout $e \in E \setminus \operatorname{Ker} v$.
Comme $(e, v(e))$ est une base de E, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $u(e) = \alpha e + \beta v(e)$. De plus,

$$u(v(e)) = uv(e) = vu(e) + \lambda v(e) = \alpha v(e) + \beta v^2(e) + \lambda v(e) = (\alpha + \lambda)v(e)$$

La matrice de $u$ dans la base $(e, v(e))$ est alors $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha + \lambda \end{pmatrix}$, qui est bien triangulaire inférieure. On en déduit que $\chi_u = (X - \alpha)(X - (\alpha + \lambda))$. De plus, $\operatorname{tr}(u) = \alpha + (\alpha + \lambda) = 2\alpha + \lambda$ de sorte que $\alpha = \dfrac{\operatorname{tr}(u) - \lambda}{2}$ puis $\chi_u = \left(X - \dfrac{\operatorname{tr}(u) - \lambda}{2}\right)\left(X - \dfrac{\operatorname{tr}(u) + \lambda}{2}\right)$.
On en déduit que $\operatorname{Sp}(u) = \left\{\dfrac{\operatorname{tr}(u) - \lambda}{2}, \dfrac{\operatorname{tr}(u) + \lambda}{2}\right\}$.

**24.d** Puisque $\lambda \neq 0$, $\chi_u$ est simplement scindé donc $u$ est diagonalisable.

**25** Soit $i \in [\![1, n^2]\!]$. On sait que $\Phi_u(v_i) = \beta_i v_i$ i.e. $uv_i - v_i u = \beta_i v_i$.

$$u(v_i(x)) = \beta_i v_i(x) + v_i(u(x)) = \beta_i v_i(x) + v_i(\lambda x) = (\lambda + \beta_i)v_i(x)$$

**26** L'application $\Psi$ est clairement linéaire (évaluation). Soit $y \in E$. Comme $x \neq 0$, on peut compléter $x$ en une base de E. On sait alors qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v(x) = y$ et prenant des valeurs arbitraires (par exemple nulles) en les autres vecteurs de la base. Ceci prouve que $\Psi$ est surjective.

**27** $\Psi$ est une application linéaire surjective et $(v_i)_{1 \leq i \leq n^2}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ donc $(\Psi(v_i))_{1 \leq i \leq n^2} = (v_i(x))_{1 \leq i \leq n^2}$ est une famille génératrice de E. On peut extraire de cette famille génératrice une base de E. D'après la question **25**, les vecteurs de cette base sont des vecteurs propres de $u$, qui est donc diagonalisable.

**28** **28.a** Puisque $v \in E_\lambda(\Phi_u)$, $uv - vu = \lambda v$. Soit $x \in \mathbb{K}$.

$$v(x \operatorname{Id} - u) = xv - vu = xv + \lambda v - uv = ((x + \lambda) \operatorname{Id} - u)v$$

**28.b** D'après la question précédente,

$$\det(v) \det(x \operatorname{Id} - u) = \det((x + \lambda) \operatorname{Id} - u) \det v$$

Ainsi si $\det(v) \neq 0$,

$$\det(x \operatorname{Id} - u) = \det((x + \lambda) \operatorname{Id} - u)$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{K},\ P_u(x) = P_u(x + \lambda)$$

**28.c** On en déduit notamment que $P_u(k\lambda) = P_u(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k\lambda$ est une racine du polynôme $Q = P_u - P_u(0)$. Comme $\lambda \neq 0$, Q possède une infinité de racines. Par conséquent, $Q = 0$ puis $P_u$ est constant. C'est absurde puisque $\deg P_u = n > 0$. On adonc montré par l'absurde que $\det(v) = 0$ i.e. $v$ n'est pas inversible.

**29** Tout d'abord, $\Phi_u(v) = \lambda v$. Supposons que $\Phi_u(v^k) = k\lambda v^k$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\Phi(v^{k+1}) = uv^{k+1} - v^{k+1}u = (uv^k - v^k u)v + v^k(uv - vu) = \Phi_u(v^k)v + v^k\Phi_u(v) = k\lambda v^k + \lambda v^{k+1} = (k+1)\lambda v^{k+1}$$

On a donc montré par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_u(v^k) = \lambda k v^k$.
Si $v^p \neq 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, $v^p$ est un vecteur propre de $\Phi_u$ associé à la valeur propre $p\lambda$.

**30** Si $v^p \neq 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, alors $p\lambda$ est valeur propre de $\Phi_u$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Comme $\lambda \neq 0$, $\Phi_u$ posséderait une infinité de valeurs propres, ce qui est exclu. On en déduit qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $v^p = 0$ i.e. $v$ est nilpotent. On sait alors que l'indice de nilpotence de $v$ est majoré par $n = \dim E$ donc $v^n = 0$.

**31** Comme $\mathcal{B}$ possède $n = \dim \mathrm{E}$ éléments, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre pour affirmer que c'est une base de E. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k v^k(e)$. Supposons qu'il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\alpha_k = 0$. On peut alors définir $p = \min\{k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \alpha_k \neq 0\}$. Alors

$$\sum_{k=p}^{n-1} \alpha_k v^k(e) = 0$$

En appliquant $v^{n-1-p}$ à cette égalité, on obtient

$$\sum_{k=p}^{n-1} \alpha_k v^{n-1-p+k}(e) = 0$$

Pour $k \geq p+1$, $n-1-p+k \geq n$ donc $v^{n-1-p-k} = 0$ de sorte que l'égalité précédente donne $\alpha_p v^{n-1}(e) = 0$. Or $v^{n-1}(e) \neq 0$ donc $\alpha_p = 0$, ce qui est contredit la définition de $p$. On a donc montré par l'absurde que $\alpha_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ainsi $\mathcal{B}$ est libre et est donc une base de E.

La matrice de $v$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\mathrm{V} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline & & & 0 \\ & \mathrm{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{array}\right)$.

**32** **32.a** Pour allgéger les notations, posons $e_k = v^k(e)$. Ainsi $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_{n-1})$, $v(e_k) = e_{k+1}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ en convenant que $e_n = 0$. Par définition, $w_0(e_k) = k\lambda e_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ et également pour $k = n$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$(w_0 v - v w_0)(e_k) = w_0(v(e_k)) - v(w_0(e_k)) = w_0(e_{k+1}) - k\lambda v(e_k) = (k+1)\lambda e_{k+1} - k\lambda e_{k+1} = \lambda e_{k+1} = \lambda v(e_k)$$

Les endomorphismes $w_0 v - v w_0$ et $\lambda v$ coïncident sur la base $\mathcal{B}$ : ils sont égaux. Ainsi $w_0 \in \mathcal{A}$.

**32.b** Soit $w \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors $w \in \mathcal{A} \iff \Phi_v(w - w_0) = 0$. Ainsi $\mathcal{A} = w_0 + \operatorname{Ker} \Phi_v$ est bien un sous-espace affine de direction $\operatorname{Ker} \Phi_v$.

**32.c** Montrons que $(\mathrm{Id}, v, \dots, v^{n-1})$ est une base de $\operatorname{Ker} \Phi_v$.
Tout d'abord, on a déjà vu que $\operatorname{vect}(\mathrm{Id}, v, \dots, v^{n-1}) \subset \operatorname{Ker} \Phi_v$. Comme $v$ est nilpotent d'indice $n$, son polynôme minimal est $\mathrm{X}^n$ de sorte que $(\mathrm{Id}, v, \dots, v^{n-1})$ est libre. Il reste donc seulement à montrer que $\operatorname{Ker} \Phi_v \subset \operatorname{vect}(\mathrm{Id}, v, \dots, v^{n-1})$.
Soit $w \in \operatorname{Ker} \Phi_v$. Comme $(e, v(e), \dots, v^{n-1}(e))$ est une base de E, il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $w(e) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k v^k(e)$.
Comme $w \in \operatorname{Ker} \Phi_v$, $u$ commute avec $v$ et donc avec toutes les puissances de $v$. Notamment, pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$,

$$w(v^j(e)) = v^j(w(e)) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k v^{k+j}(e) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k v^k\right)(v^j(e))$$

Les endomorphismes $w$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k v^k$ coïncident sur la base $\mathcal{B}$ : ils sont donc égaux. On en déduit que $\operatorname{Ker} \Phi_v \subset \operatorname{vect}(\mathrm{Id}, v, \dots, v^{n-1})$.
On en conclut donc bien que $(\mathrm{Id}, v, \dots, v^{n-1})$ est une base de $\operatorname{Ker} \Phi_v$. Notamment, $\dim \operatorname{Ker} \Phi_v = n$.

**33** Comme $u \in \mathcal{A} = w_0 + \operatorname{Ker} \Phi_v$, il existe $w \in \operatorname{Ker} \Phi_v$ tel que $u = w_0 + w$. D'après la question précédente, la matrice de W dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\mathrm{W} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \mathrm{V}^k = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix}$$

Comme la matrice de $w_0$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\operatorname{diag}(0, \lambda, 2\lambda, \dots, (n-1)\lambda)$, la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\mathrm{U} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \mathrm{V}^k = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 + \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 + (n-1)\lambda \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{34}}$ Notons $\mathcal{B}' = (e_0, \dots, e_{n-1})$. Alors $u(e_k) = (\alpha + k\lambda)e_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Soit $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Dans ce qui suit, on convient que $e_n = 0$ et que $\mathrm{E}_{\alpha+n\lambda}(u) = \{0\}$. Alors

$$\begin{aligned}
v \in \mathrm{E}_\lambda(\Phi_u) &\iff uv - vu = \lambda v \\
&\iff \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ uv(e_k) - vu(e_k) = \lambda v(e_k) \\
&\iff \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ uv(e_k) = (\alpha + (k+1)\lambda)v(e_k) \\
&\iff \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ v(e_k) \in \mathrm{E}_{\alpha+(k+1)\lambda}(u) \\
&\iff \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ v(e_k) \in \mathrm{vect}(e_{k+1})
\end{aligned}$$

Ceci équivaut à $v(e_{n-1}) = 0$ et à l'existence pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, d'un scalaire $c_k \in \mathbb{K}$ tel que $v(e_k) = c_k e_{k+1}$. Les éléments de $\mathrm{E}_{\Phi_u}(\lambda)$ sont donc les endomorphismes de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c_0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & c_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-2} & 0 \end{pmatrix}$.

Le sous-espace propre $\mathrm{E}_{\Phi_u}(\lambda)$ est donc de dimension $n-1$ puisque l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{n-1} & \longrightarrow & \mathrm{E}_{\Phi_u}(\lambda) \\ (c_0, \dots, c_{n-2}) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c_0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & c_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

est un isomorphisme.