Interrogation écrite n°03

NOM : Prénom : Note :

1. Déterminer les éléments propres (valeurs propres et sous-espaces propres) de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

   Le polynôme caractéristique est $\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 6X + 5 = (X-1)(X-5)$. *Ainsi* $\operatorname{Sp}(A) = \{1, 5\}$.
   De plus,

$$E_1(A) = \operatorname{Ker}(A - I_2) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$E_5(A) = \operatorname{Ker}(A - 5I_2) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

■

2. Déterminer l'ordre de la permutation $\sigma \in S_5$ définie par

$$\sigma(1) = 4 \qquad \sigma(2) = 3 \qquad \sigma(3) = 2 \qquad \sigma(4) = 5 \qquad \sigma(5) = 1$$

   Remarquons que $\sigma = (1,4,5)(2,3)$. *Comme* $(1,4,5)$ *et* $(2,3)$ *sont d'ordres respectifs* 2 *et* 3 *et commutent,* $\sigma^6 = \mathrm{Id}_{S_5}$. *Ainsi l'ordre de* c *divise* 6 *et vaut donc* 1, 2, 3 *ou* 6. *De plus,*

$$\sigma \neq \mathrm{Id}_{S_5} \qquad \sigma^2 = (1,5,4) \neq \mathrm{Id}_{S_5} \qquad \sigma^3 = (2,3) \neq \mathrm{Id}_{S_5}$$

   Donc l'ordre de σ *est* 6.

   Remarque. *De manière générale, si* x *et* y *sont deux éléments qui commutent d'ordres respectifs* p *et* q *et si* $p \wedge q = 1$, xy *est d'ordre* pq.

   Remarque. *On aurait aussi pu calculer* σ^k *pour* $k \in [\![1, 6]\!]$ *mais c'était un peu plus fastidieux.*

■

3. On considère $\overline{9}$ comme un élément du groupe $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$. Déterminer son ordre.

   Il est clair que $4 \cdot \overline{9} = \overline{36} = \overline{0}$ *donc l'ordre de* $\overline{9}$ *divise* 4. *Or* $\overline{9} \neq \overline{0}$ *et* $2 \cdot \overline{9} = \overline{18} = \overline{6} \neq \overline{0}$. *Ainsi l'ordre de* $\overline{9}$ *est* 4.

   Remarque. *A nouveau, on aurait pu calculer les mutiples successifs de* $\overline{4}$ *jusqu'à obtenir* $\overline{0}$.

■

4. On fixe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $\varphi : \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ est un automorphisme de groupe.

   Remarquons que φ *est bien à valeurs dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *car le groupe* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *est stable par produit.*
   Soit $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$. *Alors*
   $$\varphi(\mathrm{M})\varphi(\mathrm{N}) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MPP}^{-1}\mathrm{NP} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MNP} = \varphi(\mathrm{MN})$$
   Enfin, en posant $\psi : \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{PMP}^{-1}$, *on vérifie que* $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}$ *donc* φ *est bijective.*
   On en conclut que φ *est bien un automorphisme du groupe* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. ■

5. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires non nuls d'un espace vectoriel E. On note p le projecteur sur F parallélement à G. Déterminer les éléments propres de p (valeurs propres et sous-espaces propres).

   Soit λ *une éventuelle valeur propre de* p. *Il existe* $x \in \mathrm{E}$ *non nul tel que* $p(x) = \lambda x$. *Alors* $p^2(x) = \lambda^2 x$. *Comme* $p^2 = p$, $\lambda^2 x = \lambda x$ *puis* $\lambda^2 = \lambda$ *car* $x \neq 0_{\mathrm{E}}$. *Ainsi* $\lambda \in \{0, 1\}$. *Ensuite*
   $$\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{G} \qquad\qquad \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{F}$$
   Donc $\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$ *et les sous-espaces propres associés aux valeurs propres* 0 *et* 1 *sont respectivement* G *et* F. ■

6. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires non nuls d'un espace vectoriel E. On note s la symétrie par rapport à F parallélement à G. Déterminer les éléments propres de s (valeurs propres et sous-espaces propres).

   Soit λ *une éventuelle valeur propre de* s. *Il existe* $x \in \mathrm{E}$ *non nul tel que* $s(x) = \lambda x$. *Alors* $s^2(x) = \lambda^2 x$. *Comme* $s^2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$, $\lambda^2 x = x$ *puis* $\lambda^2 = 1$ *car* $x \neq 0_{\mathrm{E}}$. *Ainsi* $\lambda \in \{-1, 1\}$. *Ensuite*
   $$\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{F} \qquad\qquad \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{G}$$
   Donc $\mathrm{Sp}(s) = \{-1, 1\}$ *et les sous-espaces propres associés aux valeurs propres* -1 *et* 1 *sont respectivement* F *et* G. ■