Devoir à la maison n°14

Problème 1 —

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Partie I – Division selon les puissances croissantes

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant.

Division selon les puissances croissantes

Soient $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $B(0) \neq 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + X^{p+1}R$ et $\deg Q \leqslant p$. On appelle Q et R le quotient et le reste de la division de A par B selon les puissances croissantes à l'ordre p.

1. Montrer l'unicité du couple (Q, R).
2. En raisonnant par récurrence sur p, montrer l'existence du couple (Q, R).
3. On donne ci-dessous un exemple de calcul effectif d'une division selon les puissances croissantes. Avec les notations précédentes, $A = 3 + 4X - X^3$, $B = 1 - 2X + X^3$ et $p = 2$.
   On a donc $A = B \times (3 + 10X + 20X^2) + 36X^3 - 10X^4 - 20X^5$. Ainsi le quotient est $Q = (3 + 10X + 20X^2)$ et le reste est $R = 36 - 10X - 20X^2$.

$$
\begin{array}{cccccccccccc|l}
 & 3 & + & 4X & & & - & X^3 & & & & & 1-2X+X^3 \\ \cline{13-13}
\ominus & 3 & - & 6X & & & + & 3X^3 & & & & & 3+10X+20X^2 \\ \cline{2-8}
 & & & 10X & & & - & 4X^3 & & & & & \\
\ominus & & & 10X & - & 20X^2 & & & + & 10X^4 & & & \\ \cline{4-10}
 & & & & & 20X^2 & - & 4X^3 & - & 10X^4 & & & \\
\ominus & & & & & 20X^2 & - & 40X^3 & & & + & 20X^5 & \\ \cline{6-12}
 & & & & & & & 36X^3 & - & 10X^4 & - & 20X^5 &
\end{array}
$$

   Effectuer la division selon les puissances croissantes de $A = 2 - X + X^2 - X^3$ par $B = 1 - 2X + X^2$ à l'ordre 2. On présentera les calculs comme dans l'exemple et on donnera le quotient et le reste de cette division.

Partie II – Application aux développements limités

1. Soit $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $B(0) \neq 0$. On note Q le quotient de la division selon les puissances croissantes de A par B à l'ordre p. Justifier le développement limité suivant

$$\frac{A(x)}{B(x)} \underset{x \to 0}{=} Q(x) + o(x^p)$$

2. Soient f et g deux fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies au voisinage de 0. On suppose qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}_p[X]^2$ tel que $B(0) \neq 0$, $f(x) \underset{x\to 0}{=} A(x) + o(x^p)$ et $g(x) \underset{x\to 0}{=} B(x) + o(x^p)$. On note Q le quotient de la division selon les puissances croissantes de A par B à l'ordre p. Montrer avec soin que
$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^p)$$
3. A l'aide de la question précédente, déterminer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{\cos x}{\exp x}$.

Partie III – Décomposition en éléments simples

1. Ecrire la division selon les puissances croissantes de $X^3 - 1$ par $X + 1$ à l'ordre 3. En déduire la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^3 - 1}{X^4(X+1)}$.
2. Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^2+1}{(X-1)^4(X+1)^3}$ à l'aide de la division selon les puissances croissantes.

Problème 2 —

On définit deux suites de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$P_{n+1} = P_n + XQ_n$$
$$Q_{n+1} = -XP_n + Q_n$$
Il est évident que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de polynômes à coefficients *réels*, ce que l'on ne demande pas de montrer. On pose enfin $R_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$ et $Z_n = Q_n + iP_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans une première partie, on étudiera certains cas particuliers puis on étudiera le cas général dans la partie suivante.

Il est *fortement conseillé* de vérifier si les résultats obtenus dans le cas général sont cohérents avec ceux obtenus dans les cas particuliers.

Partie I – Etude de cas particuliers

1. Calculer P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3, P_4, Q_4.
2. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de P_2, Q_2, P_3, Q_3, P_4, Q_4 dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Donner la décomposition en éléments simples de R_2, R_3, R_4 dans $\mathbb{R}(X)$.

Partie II – Etude du cas général

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = (1 + iX)^n$.
2. Soit $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$$P_n(\tan\alpha) = \frac{\sin(n\alpha)}{\cos^n(\alpha)} \qquad Q_n(\tan\alpha) = \frac{\cos(n\alpha)}{\cos^n(\alpha)}$$

A partir de maintenant, on suppose n non nul.
On sera amené dans plusieurs questions à distinguer des cas selon la *parité* de n.

3. Donner une expression *développée* de Z_n à l'aide de la formule du binôme de Newton et en déduire des expressions de P_n et Q_n.

4. Déterminer la parité, le degré et le coefficient dominant des polynômes P_n et Q_n.

5. A l'aide de la question **II.2**, déterminer les racines de P_n et Q_n. Montrer en particulier que toutes les racines de P_n et Q_n sont réelles et simples.

6. Factoriser P_n et Q_n sous forme de produits de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

7. Calculer la partie entière de la fraction rationnelle R_n.

8. Calculer P_n' et Q_n' en fonction de P_{n-1} et Q_{n-1}.

9. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle R_n.

10. Calculer les produits suivants

$$A_n = \prod_{0<2k<n} \tan \frac{k\pi}{n} \qquad\qquad B_n = \prod_{0<2k+1<n} \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$