Interrogation écrite n°8

NOM : Prénom : Note :

---

1. Donner la définition d'un groupe.

2. On pose $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$. Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un anneau. Est-ce un corps ?

3. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{2018} par 7.

4. Soit $(a, b, q, r) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $a = bq + r$. Montrer que $a \wedge b = b \wedge r$.

5. On admet que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times)$ est un anneau. Cet anneau est-il intègre ?

6. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. Montrer qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = c$ *si et seulement si* $a \wedge b$ divise c.