

# DEVOIR À LA MAISON N°03

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1 – CCP MP Maths1 2011 – Autour de la transformation de Laplace

Dans tout ce problème, on note :

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  l'ensemble des applications de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  ;
- $E$  l'ensemble des applications  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continues, telles que, pour tout  $x > 0$ , l'application  $t \mapsto f(t)e^{-xt}$  soit intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  ;
- $F$  l'ensemble des applications continues et bornées sur  $\mathbb{R}_+$ .

Pour tout  $f \in E$ , on appelle *transformée de Laplace* de  $f$  et on note  $\mathcal{L}(f)$  l'application définie pour tout réel  $x > 0$  par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$$

- 1 Question préliminaire.** Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux. Pour tout  $x \in [a, +\infty[$ , on pose

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

On considère les propositions suivantes :

- (i)  $f$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$  ;
- (ii)  $F$  admet une limite finie en  $+\infty$ .

Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre (i) et (ii) lorsque :

- 1.a**  $f$  est positive sur  $[a, +\infty[$  ;
- 1.b**  $f$  n'est pas positive sur  $[a, +\infty[$ .

## I Exemples et propriétés

- 2**
  - 2.a** Démontrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ .
  - 2.b** Démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
  - 2.c** Justifier que  $\mathcal{L}$  est une application linéaire de  $E$  dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ , espace vectoriel des applications de  $]0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ .
- 3**
  - 3.a** On considère la fonction  $U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $U(t) = 1$ . Déterminer  $\mathcal{L}(U)$ .
  - 3.b** Soit un réel  $\lambda \geq 0$ . On considère la fonction  $h_\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $h_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$ . Démontrer que  $h_\lambda \in E$  et déterminer  $\mathcal{L}(h_\lambda)$ .

- 4 Soient  $f \in E$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On considère  $g_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^n f(t)$ . Montrer que  $g_n \in E$ .
- 5 **Transformée de Laplace d'une dérivée.** Soit  $f \in E$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , croissante et bornée sur  $\mathbb{R}_+$ . Démontrer que  $f' \in E$  et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$$

- 6 **Régularité d'une transformée de Laplace.**

- 6.a Démontrer que pour tout  $f \in E$ , la fonction  $\mathcal{L}(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que l'on a  $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$  où  $g_1$  a été définie à la question 4.
- 6.b Démontrer que pour tout  $f \in E$ , la fonction  $\mathcal{L}(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour  $x > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer  $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$  à l'aide d'une transformée de Laplace.

## II Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

Dans toute cette partie,  $f$  est un élément de  $E$ .

- 7 On suppose dans cette question que  $f \in F$ .
- 7.a Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $\mathcal{L}(f)$ .
- 7.b **Théorème de la valeur initiale.** On suppose de plus que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , avec  $f'$  bornée sur  $\mathbb{R}_+$ .  
Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$ .
- 8 **Théorème de la valeur finale.** On suppose dans cette question que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{R}$ . Soit  $(a_n)$  une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.
- 8.a Démontrer que  $f \in F$ .
- 8.b Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrer que  $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} h_n(x) dx$  où  $h_n$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  

$$h_n(x) = e^{-x} f\left(\frac{x}{a_n}\right).$$
- 8.c En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée, que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$ .
- 8.d Lorsque  $\ell \neq 0$ , déterminer un équivalent de  $\mathcal{L}(f)(x)$  quand  $x$  tend vers 0.
- 9 Dans cette question, on suppose que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et on pose  $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ .
- 9.a Démontrer que  $R$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et déterminer  $R'$ .  
En déduire que pour tout réel  $x > 0$ ,  $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$ .
- 9.b On fixe  $\varepsilon > 0$ . Justifier l'existence d'un réel positif  $A$  tel que pour tout  $t \geq 1$ , on ait  $|R(t)| \leq \varepsilon$ .  
En déduire que, pour tout  $x > 0$ , on a :
- $$|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq x \int_0^A |R(t)| dt + \varepsilon$$
- 9.c Démontrer que  $\mathcal{L}(f)$  se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

### III Application : calcul de l'intégrale de Dirichlet

Dans cette partie,  $f$  est la fonction définie par  $f(0) = 1$  et  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$  pour tout réel  $t > 0$ .

**10** Démontrer que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  admet une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ .

**11** En considérant la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  où  $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)| dt$ , démontrer que  $f$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

**12** Soit  $x > 0$ . Démontrer, en détaillant les calculs, que pour tout  $X > 0$ ,

$$\int_0^X \sin(t)e^{-xt} dt = -\frac{1}{1+x^2} (e^{-xX}(x \sin X + \cos X) - 1)$$

Démontrer que la fonction  $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

Déterminer alors  $\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt} dt$ .

**13** Déterminer, pour  $x > 0$ , une expression simple de  $\mathcal{L}(f)(x)$  et en déduire  $\ell$ .  
Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant (la démarche de la preuve étant identique à celle de la question 9) :

Lorsque  $f \in E$  vérifie  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \ell \in \mathbb{R}$ , alors  $\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$ .

On notera que, par rapport à la question 9, on a remplacé l'hypothèse « $f$  intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ » par l'hypothèse

« $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \ell \in \mathbb{R}$ ».