DEVOIR À LA MAISON N°17 : CORRIGÉ

Problème 1 — D'après HEC BL 2000

Partie I – Étude de la variable aléatoire X_n

1. **a.** I_n suit évidemment la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

b. Il est clair que $P(X_n = 1|I_n = 1) = 1$.

c. Soit $j \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![2, n]\!]$.
Lorsque la première boule tirée est la numéro k, il reste les boules numérotées de 1 à $k-1$ dans l'urne. La probabilité de tirer la boule numéro 1 au bout de j tirages dans une urne U_n sachant que la première boule tirée est la numéro k est donc la probabilité de tirer la boule numéro 1 au bout de $j-1$ tirages dans une urne U_{k-1}.
Autrement dit $P(X_n = j|I_n = k) = P(X_{k-1} = j-1)$.

2. **a.** X_1 ne peut prendre que la valeur 1 et $P(X_1 = 1) = 1$.

b. L'événement $X_2 = 1$ consiste à tirer la boule numéro 1 dans une urne contenant deux boules numérotées 1 et 2.
On a $P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(X_2 = 2) = \frac{1}{2}$.
On en déduit $E(X_2) = \frac{3}{2}$ et $V(X_2) = \frac{1}{4}$.

c. Remarquons d'abord que X_3 est à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$.
On a $P(X_3 = 1) = \frac{1}{3}$. De plus, d'après la formule des probabilités totales

$$P(X_3 = 2) = P(X_3 = 2|I_3 = 1)P(I_3 = 1) + P(X_3 = 2|I_3 = 2)P(I_3 = 2) + P(X_3 = 2|I_3 = 3)P(I_3 = 3)$$

On a clairement $P(X_3 = 2|I_3 = 1) = 0$ et en utilisant la question **I.1.c**

$$P(X_3 = 2) = \frac{1}{3}P(X_1 = 1) + \frac{1}{3}P(X_2 = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Enfin, $P(X_3 = 3) = 1 - P(X_3 = 1) - P(X_3 = 2) = \frac{1}{6}$.
On en déduit $E(X_3) = \frac{11}{6}$ et $V(X_3) = \frac{17}{36}$.

3. **a.** X_n est clairement supérieure ou égale à 1. De plus, dans le pire des cas, on ne peut effectuer plus de tirages qu'il n'y a de boules dans l'urne U_n donc X_n est inférieure ou égale à n.

b. L'événement $X_n = 1$ consiste à tirer la boule numéro 1 dans l'urne U_n donc $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$.
L'événement $X_n = n$ consiste à tirer successivement les boules numéros $n, n-1, \dots, 1$. On en déduit que

$$P(X_n = n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n!}$$

On peut prouver ce résultat de manière plus rigoureuse. Supposons $n \geq 2$. Puisque $(I_n = k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
P(X_n = n) &= \sum_{k=1}^{n} P(X_n = n|I_n = k)P(I_n = k) = P(X_n = n|I_n = 1)P(I_n = 1) + \sum_{k=2}^{n} P(X_n = n|I_n = k)P(I_n = k) \\
&= \sum_{k=2}^{n} P(X_n = n|I_n = k)P(I_n = k)
\end{aligned}$$

car $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = n|\mathrm{I}_n = 1) = 0$ puisque $n \geq 2$. En utilisant la question **I.1.c**

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = n) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n}\mathrm{P}(\mathrm{X}_{k-1} = n-1)$$

Or X_{k-1} est à valeurs dans $[\![1, k-1]\!]$ donc $\mathrm{P}(\mathrm{X}_{k-1} = n-1) = 0$ pour $k < n$. Finalement, $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = n) = \frac{1}{n}\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = n-1)$.

Puisque $\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = 1) = 1$, une récurrence immédiate montre que $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = n) = \frac{1}{n!}$.

c. Soit j un entier supérieur ou égal à 2. Puisque $(\mathrm{I}_n = k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = j) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = j|\mathrm{I}_n = k)\mathrm{P}(\mathrm{I}_n = k)$$

A nouveau $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = j|\mathrm{I}_n = 1) = 0$ car $j \geq 2$ donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = j) = \sum_{k=2}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = j|\mathrm{I}_n = k)\mathrm{P}(\mathrm{I}_n = k)$$

En utilisant la question **I.1.c**

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = j) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}_{k-1} = j-1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{P}(\mathrm{X}_k = j-1)$$

d. Soit j un entier supérieur ou égal à 2. Supposons tout d'abord $n \geq 3$. D'après la question précédente,

$$n\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = j) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{P}(\mathrm{X}_k = j-1)$$

et

$$(n-1)\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = j) = \sum_{k=1}^{n-2} \mathrm{P}(\mathrm{X}_k = j-1)$$

En soustrayant membre à membre ces deux inégalités, on en déduit que

$$n\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = j) - (n-1)\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = j) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = j-1)$$

Cette dernière égalité est encore vraie pour $n = 2$. En effet, si $n = 2$ et $j > 2$, les deux membres sont nuls et si $n = 2$ et $j = 2$, les deux membres sont égaux à 1 d'après les questions **I.2.a** et **I.2.b**.

Cette même égalité est enfin vraie pour $j = 1$ puisque d'une part, $\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = 0) = 0$ et d'autre part, $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 1) = \frac{1}{n}$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = 1) = \frac{1}{n-1}$.

On en déduit finalement que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = j) = \frac{n-1}{n}\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = j) + \frac{1}{n}\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = j-1)$$

4. a. D'après la question **I.3.d**,

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \sum_{j=1}^{n} j\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = j) = \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n} j\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = j) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = j-1)$$

Or $\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = n) = 0$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = 0) = 0$ donc

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} j\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = j) + \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n} j\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = j-1)$$

On reconnaît dans la première somme l'espérance de X_{n-1} et, par un changement d'indice,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) &= \frac{n-1}{n}\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}(j+1)\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = j-1)\\ &= \frac{n-1}{n}\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} j\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = j-1) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = j)\end{aligned}$$

On reconnaît à nouveau l'espérance de X_{n-1} dans la première somme et la seconde somme vaut 1 puisque $(\mathrm{X}_{n-1} = j)_{1\leq j\leq n-1}$ est un système complet d'événements. Il en résulte que

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}) + \frac{1}{n}$$

b. Puisque $E(X_1) = 1$, une récurrence immédiate montre que $E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Par comparaison à une intégrale, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{dt}{t}$$

ou encore

$$\ln(n+1) \leq E(X_n) \leq 1 + \ln(n)$$

On en déduit aisément que $E(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

5. **a.** D'après la question **I.3.d**,

$$E(X_n^2) = \sum_{j=1}^{n} j^2 P(X_n = j) = \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 P(X_{n-1} = j-1)$$

Or $P(X_{n-1} = n) = 0$ et $P(X_{n-1} = 0) = 0$ donc

$$E(X_n^2) = \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} j^2 P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n} j^2 P(X_{n-1} = j-1)$$

On reconnaît dans la première somme l'espérance de X_{n-1}^2 et, par un changement d'indice,

$$\begin{aligned}E(X_n^2) &= \frac{n-1}{n}E(X_{n-1}^2) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}(j+1)^2 P(X_{n-1} = j-1)\\ &= \frac{n-1}{n}E(X_{n-1}^2) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} j^2 P(X_{n-1} = j-1) + \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n-1} jP(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} P(X_{n-1} = j)\end{aligned}$$

On reconnaît l'espérance de X_{n-1}^2 dans la première somme, celle de X_{n-1} dans la seconde somme et la troisième somme vaut 1 puisque $(X_{n-1} = j)_{1\leq j\leq n-1}$ est un système complet d'événements. Il en résulte que

$$E(X_n^2) = E(X_{n-1}^2) + \frac{2}{n}E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$$

b. Par définition, $V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$. En utilisant la question précédente et la question **I.4.a**,

$$\begin{aligned}V(X_n) &= E(X_{n-1})^2 + \frac{2}{n}E(X_{n-1}) + \frac{1}{n} - \left(E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}\right)^2\\ &= V(X_{n-1}) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

Puisque $V(X_1) = 0$, une récurrence immédiate montre que $V(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c. On a montré à la question **I.4.b** que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. De plus, la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge en tant que suite des sommes partielles de la série de Riemann convergente $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$.
Il en résulte que $V(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

6. **a.** La question **I.2.a** montre que X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre 1. Autrement dit, X_1 et T_1 suivent la même loi.

b. Soit j un entier supérieur ou égal à 1. Puisque les événements $T_n = 0$ et $T_n = 1$ forment un système complet d'événements

$$P(S_n = j) = P([S_n = j] \cap [T_n = 0]) + P([S_n = j] \cap [T_n = 1])$$

Les événements $[S_n = j] \cap [T_n = 0]$ et $[S_{n-1} = j] \cap [T_n = 0]$ sont égaux de même que les événements $[S_n = j] \cap [T_n = 1]$ et $[S_{n-1} = j-1] \cap [T_n = 1]$. Ainsi

$$P(S_n = j) = P([S_{n-1} = j] \cap [T_n = 0]) + P([S_{n-1} = j-1] \cap [T_n = 1])$$

Puisque $T_1, \dots, T_n$ sont mutuellement indépendantes, S_{n-1} et T_n sont indépendantes. Finalement

$$P(S_n = j) = P(S_{n-1} = j)P(T_n = 0) + P(S_{n-1} = j-1)P(T_n = 1) = \frac{n-1}{n}P(S_{n-1} = j) + \frac{1}{n}P(S_{n-1} = j-1)$$

Soit $\mathcal{P}_n$ l'assertion «X_n et S_n suivent la même loi».
La question précédente montre que $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Supposons que $\mathcal{P}_{n-1}$ soit vraie pour un certain entier $n \geq 2$. Alors pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $P(X_{n-1} = j) = P(S_{n-1} = j)$ et $P(X_{n-1} = j-1) = P(S_{n-1} = j-1)$. La relation précédente et la question **I.3.d** montrent alors que $P(X_n = j) = P(S_n = j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, autrement dit $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Puisque X_n et S_n ont même loi, on a par linéarité de l'espérance,

$$E(X_n) = E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(T_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

On a également puisque $T_1, \dots, T_n$ sont indépendantes

$$V(X_n) = V(E_n) = \sum_{i=1}^{n} V(T_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\left(1 - \frac{1}{i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2}$$

7. a. A l'aide des questions **I.2.a** et **I.2.b**, $P_1 = X$ et $P_2 = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2$.

b. D'après la question **I.3.d**

$$P_n = \sum_{j=1}^{n} P(X_n = j)X^j = \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n} P(X_{n-1} = j)X^j + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P(X_{n-1} = j-1)X^j$$

A nouveau $P(X_{n-1} = n) = 0$ et $P(X_{n-1} = 0) = 0$ donc

$$P_n = \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} P(X_{n-1} = j)X^j + \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n} P(X_{n-1} = j-1)X^j$$

A nouveau par changement d'indice

$$P_n = \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} P(X_{n-1} = j)X^j + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} P(X_{n-1} = j)X^{j+1}$$

Finalement

$$P_n = \frac{n-1+X}{n}\sum_{j=1}^{n-1} P(X_{n-1} = j)X^j = \frac{n-1+X}{n}P_{n-1}$$

c. Une récurrence simple montre que

$$P_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X+k)$$

d. $P(X_n = n-1)$ est le coefficient de X^{n-1} dans P_n. L'expression de la question précédente montre que

$$P(X_n = n-1) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1} k = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{(n-2)!} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

e. Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n' = \sum_{k=1}^{n} kP(X_n = k)X^{k-1}$$

donc $P_n'(1) = E(X_n)$.
Ensuite, d'après la question **I.7.b**, pour tout entier $n \geq 2$,

$$P_n = \frac{n-1+X}{n}P_{n-1}$$

donc

$$P_n' = \frac{1}{n}P_{n-1}\frac{n-1+X}{n}P_{n-1}'$$

puis $P_n'(1) = \frac{1}{n}P_{n-1}(1) + P_{n-1}'(1)$. On a clairement $P_{n-1}(1) = 1$ donc $E(X_n) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$ d'après ce qui précède. On retrouve alors la relation de récurrence trouvée à la question **I.4.a**, ce qui permet de retrouver $E(X_n)$.

Partie II – Étude de la variable aléatoire Y_n

1. De manière évidente, $P(Y_1 = 1) = 1$.

2. Y_2 peut prendre les valeurs 1 et 3. Il est clair que $P(Y_2 = 1) = P(I_2 = 1) = \frac{1}{2}$. Par conséquent, $P(Y_2 = 3) = \frac{1}{2}$.

3. **a.** Soit $j \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![2, n]\!]$.
Lorsque la première boule tirée est la numéro k, il reste les boules numérotées de 1 à $k-1$ dans l'urne. La probabilité que la somme des numéros des boules tirées soit égale à j sachant que la première boule tirée est la numéro k est donc la probabilité que la somme des numéros des boules tirées dans une urne U_{k-1} soit égale à $j-k$.
Autrement dit $P(Y_n = j | I_n = k) = P(Y_{k-1} = j-k)$.

b. On reprend le raisonnement de la question **I.3**. Tout d'abord via la formule des probabilités totales, pour tout entier $n \geq 2$ et tout entier $j \geq 2$

$$P(Y_n = j) = \sum_{k=1}^{n} P(Y_n = j | I_n = k) P(I_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} P(Y_{k-1} = j-k)$$

car $P(Y_n = j | I_n = 1) = 0$ puisque $j \geq 2$.
On en déduit que pour tout entier $n \geq 3$ et tout entier $j \geq 2$

$$nP(Y_n = j) = \sum_{k=2}^{n} P(Y_{k-1} = j-k)$$

et

$$(n-1)P(Y_{n-1} = j) = \sum_{k=2}^{n-1} P(Y_{k-1} = j-k)$$

et donc que

$$nP(Y_n = j) - (n-1)P(Y_{n-1} = j) = P(Y_{n-1} = j-n)$$

On constate que l'égalité est encore valable pour $n = 2$ en utilisant les questions **II.1** et **II.2** puis qu'elle est également valable pour $j = 1$ puisque $P(Y_n = 1) = \frac{1}{n}$, $P(Y_{n-1} = 1) = \frac{1}{n-1}$ et $P(Y_{n-1} = 1-n) = 0$.
Finalement on peut affirmer que pour tout entier $n \geq 2$ et tout entier $j \geq 1$

$$P(Y_n = j) = \frac{n-1}{n} P(Y_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(Y_{n-1} = j-n)$$

c. On peut affirmer que

$$E(Y_n) = \sum_{j=1}^{+\infty} jP(Y_n = j)$$

puisque $P(Y_n = j) = 0$ pour n assez grand (pour $j > \frac{n(n+1)}{2}$ en fait). Ainsi

$$\begin{aligned}
E(Y_n) &= \sum_{j=1}^{+\infty} jP(Y_n = j) \\
&= \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{+\infty} jP(Y_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{+\infty} jP(Y_{n-1} = j-n) \\
&= \frac{n-1}{n} E(Y_{n-1}) + \frac{1}{n} \sum_{j=1-n}^{+\infty} (j+n) P(Y_{n-1} = j) \\
&= \frac{n-1}{n} E(Y_{n-1}) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{+\infty} (j+n) P(Y_{n-1} = j) \qquad \text{car } P(Y_{n-1} = j) = 0 \text{ pour } j \leq 0 \\
&= \frac{n-1}{n} E(Y_{n-1}) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{+\infty} jP(Y_{n-1} = j) + \sum_{j=1}^{+\infty} P(Y_{n-1} = j) \\
&= \frac{n-1}{n} E(Y_{n-1}) + \frac{1}{n} E(Y_{n-1}) + 1 = E(Y_{n-1}) + 1
\end{aligned}$$

Puisque $E(Y_1) = 1$, une récurrence évidente montre que $E(Y_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III –

1. La seule possibilité d'obtenir la boule numéro n est de l'obtenir au premier coup. On en déduit que la loi de $Z_n^{(n)}$ est la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$.
La variable $Z_1^{(n)}$ est constante égale à 1.

2. **a.** Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. On utilise à nouveau la formule des probabilités totales

$$P(Z_i^{(n)} = 1) = \sum_{k=1}^{n} P(Z_i^{(n)} = 1 | I_n = k)P(I_n = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(Z_i^{(n)} = 1 | I_n = k)$$

On a clairement $P(Z_i^{(n)} = 1 | I_n = i) = 1$ et $P(Z_i^{(n)} = 1 | I_n = k) = 0$ pour $k < i$ puisque si $I_n = k$, toutes les boules numérotées de k à n sont retirées de l'urne. Ainsi

$$P(Z_i^{(n)} = 1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=i+1}^{n} P(Z_i^{(n)} = 1 | I_n = k)$$

Enfin si $I_n = k$, l'urne contient après le premier tirages les boules numérotées de 1 à $k-1$ donc $P(Z_i^{(n)} = 1 | I_n = k) = P(Z_i^{(k-1)} = 1)$ d'où

$$P(Z_i^{(n)} = 1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=i+1}^{n} P(Z_i^{(k-1)} = 1)$$

b. Notons $\mathcal{P}_n$ l'assertion «pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $Z_i^{(n)}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$».
$\mathcal{P}_1$ est vraie d'après la question **III.1**.
Supposons $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_{n-1}$ vraies pour un certain entier $n \geq 2$. D'après la question, **III.1**, $Z_n^{(n)}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$. Soit maintenant $i \in [\![1, n-1]\!]$. D'après la question **III.2.a**

$$P(Z_i^{(n)} = 1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=i+1}^{n} P(Z_i^{(k-1)} = 1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=i}^{n-1} nP(Z_i^{(k)} = 1)$$

Puisqu'on a supposé $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{n-1}$ vraies, $P(Z_i^{(k)} = 1) = \frac{1}{i}$ pour tout $k \in [\![i, n-1]\!]$. On en déduit que

$$P(Z_i^{(n)} = 1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\frac{n-i}{i} = \frac{1}{i}$$

Puisque par définition, $Z_i^{(n)}$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$, on peut affirmer que $Z_i^{(n)}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$. Autrement dit, $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Par récurrence forte, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Il est clair que $\sum_{i=1}^{n} Z_i^{(n)} = X_n$. Par linéarité de l'espérance

$$E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(Z_i^{(n)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

d. Il est également clair que $\sum_{i=1}^{n} iZ_i^{(n)} = Y_n$. Toujours par linéarité de l'espérance

$$E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} iE(Z_i^{(n)}) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$