

# DEVOIR SURVEILLÉ N°4

- ▶ La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- ▶ On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- ▶ Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1 —

### Partie I – Résolution de deux équations différentielles simples

On considère les équations différentielles

$$z'' + 4z = 0 \quad (E_1)$$

$$z'' - 4z = 0 \quad (E_2)$$

1. Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle  $(E_1)$ .
2. Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle  $(E_2)$ .
3. Montrer que l'ensemble des solutions de  $(E_2)$  peut en fait s'écrire

$$\left\{ t \mapsto \lambda \operatorname{ch}(2t) + \mu \operatorname{sh}(2t), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

### Partie II – Résolution d'une seconde équation différentielle par changement de variable

On considère l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0 \quad (F)$$

4. Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $] -1, 1[$ . On pose  $g = f \circ \cos$ . Montrer que  $g$  est deux fois dérivable sur l'intervalle  $]0, \pi[$ .
5. Montrer que  $f$  est solution de  $(F)$  si et seulement si  $g$  est solution sur  $]0, \pi[$  d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants à déterminer.
6. En déduire que les solutions de  $(F)$  sur  $] -1, 1[$  sont les fonctions

$$x \in ] -1, 1[ \mapsto \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x \sqrt{1 - x^2}$$

avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

### Partie III – La fonction argument cosinus hyperbolique

7. Montrer que la fonction  $\operatorname{ch}$  induit une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur  $]1, +\infty[$ . On notera  $\operatorname{argch}$  la bijection réciproque de cette bijection induite.
8. Montrer que pour tout  $x \in [1, +\infty[$ ,  $\operatorname{sh} \circ \operatorname{argch}(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ .
9. Justifier que la fonction  $\operatorname{argch}$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et déterminer une expression de sa dérivée.
10. Montrer que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{ch}(2\theta) = 2\operatorname{ch}^2(\theta) - 1$  et  $\operatorname{sh}(2\theta) = 2\operatorname{ch}(\theta)\operatorname{sh}(\theta)$ .
11. En déduire pour  $x \in \mathbb{R}$  des expressions de  $\operatorname{ch}(2\operatorname{argch}(x))$  et  $\operatorname{sh}(2\operatorname{argch}(x))$  ne faisant pas intervenir la fonction  $\operatorname{argch}$ .

#### Partie IV – Un problème de raccord

12. En considérant cette fois-ci une fonction  $f$  deux fois dérivable sur  $]1, +\infty[$  et en posant  $g = f \circ \operatorname{ch}$ , montrer que les solutions de l'équation différentielle (F) sur  $]1, +\infty[$  sont les fonctions

$$x \in ]1, +\infty[ \mapsto \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x \sqrt{x^2 - 1}$$

avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

13. En déduire les solutions de l'équation différentielle (F) sur  $] -\infty, -1[$ .
14. Déterminer les solutions de (F) sur  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 1.**

On considère sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :

$$(E) : (1 + x^2)y' - 3xy = 1$$

1. Résoudre l'équation homogène  $(E_H)$  associée à  $(E)$ .
2. Rechercher une solution particulière de  $(E)$  sous la forme d'une fonction polynomiale de degré 3.
3. En déduire l'ensemble des solutions de  $(E)$ .
4. Montrer que  $(1 + x^2)^{\frac{3}{2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x^3 + \frac{3}{2}x + o(1)$ .
5. On pose  $g : x \mapsto \frac{2}{3}x^3 + x - \frac{2}{3}(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}$ . Vérifier que  $g$  est l'unique solution de  $(E)$  admettant une limite finie en  $+\infty$ .
6. Déterminer les variations de  $g$ . On précisera ses limites en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

**EXERCICE 2.**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$  et  $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^n t \, dt$ .

1. Calculer  $I_0, J_0, I_1, J_1$ .
2. Montrer que  $I_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Montrer que  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
4.
  - a. Montrer que pour  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \sin t$ .
  - b. En déduire que  $0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+2})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - c. Montrer que la suite de terme général  $\frac{J_n}{I_n}$  converge vers 0.
5.
  - a. Montrer que  $I_{n+2} = \frac{1}{2}((n+1)(n+2)J_n - (n+2)^2 J_{n+2})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - b. En déduire que  $\frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{2}{(n+2)^2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
6. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ . Montrer que la suite de terme général  $S_n$  converge vers  $\frac{\pi^2}{6}$ .