SOMMES, PRODUITS, SYSTÈMES, TRIGONOMÉTRIE

Sommes de termes d'une suite arithmétique ou géométrique

Exercice 1 ★

Calculer les sommes suivantes.

1. $S_n = \sum_{k=2}^{n-1} 3k-2$
2. $T_n = \sum_{k=-1}^{n+1} 2k-1$
3. $U_n = \sum_{k=n-2}^{n+5} 2-k$
4. $V_n = \sum_{k=n}^{2n} k-1$

Exercice 2 ★

Calculer les sommes suivantes.

1. $S_n = \sum_{k=2}^{n-1} 3^{k-2}$
2. $T_n = \sum_{k=-1}^{n+1} 2^{k-1}$
3. $U_n = \sum_{k=n-2}^{n+5} \frac{4}{2^k}$
4. $V_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{2^{k-1}}{3^{k+2}}$

Techniques de calcul

Exercice 3 ★

Calculer, pour tout entier non nul n,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+1/k)$$

au moyen d'un telescopage.

Exercice 4

Simplifier les sommes suivantes,

1. $\sum_{k=p}^{q}(u_{k+1}-u_k)$;
2. $\sum_{k=p-3}^{q-1}(u_{k+1}-u_{k-1})$.

Exercice 5 ★

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
2. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
3. $\sum_{k=1}^{n} k\,.\,k!$
4. $\sum_{k=0}^{n} (k+2)\,2^k$
5. $\sum_{k=1}^{n} \ln(1+1/k)$
6. $\sum_{k=0}^{n} 2\,\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(k\,x)$

Exercice 6 ★ **Sommation par paquets**

Simplifier la somme

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k$$

en sommant par paquets.

Exercice 7 ★ **Un changement d'indice**

Calculer la somme $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right)$.

Exercice 8 ★

Vérifier que

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leq n} 2^k$$

et calculer une expression simple de cette somme en permutant l'ordre des sommations dans la somme double.

Exercice 9 ★★

Simplifier la somme

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right).$$

Exercice 10 ★

On utilise une décomposition de la fraction en éléments simples.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t>1,\quad \frac{1}{t^2-1}=\frac{\alpha}{t-1}+\frac{\beta}{t+1}.$$

2. En déduire une simplification de la somme

$$v_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}.$$

Exercice 11 ★★ **Sommation d'Abel**

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On définit deux suites $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \mathrm{A}_n=\sum_{k=0}^{n}a_k,\ b_n=\mathrm{B}_{n+1}-\mathrm{B}_n$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k\mathrm{B}_k=\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n-\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{A}_kb_k$.

2. Application : calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^kk$.

Exercice 12 ★★

Soit $x\in\mathbb{R}$. On pose $\mathrm{S}_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kx^k$. On cherche à calculer $\mathrm{S}_n(x)$ de deux manières :

1. en introduisant $\mathrm{T}_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k$;

2. en calculant dans un premier temps $(x-1)\mathrm{S}_n(x)$.

Formule du binôme

Exercice 13 ★

Simplifier, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la somme

$$\mathrm{S}_n=\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}3^{n-k+1}\binom{n}{k}.$$

Exercice 14 ★★

Pour tous n et p dans $\mathbb{N}$, établir que l'on a

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}.$$

Exercice 15 ★★

Calculer les sommes suivantes

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$.

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{2n}{2k}$.

Exercice 16 ★★★

Soit n un entier naturel non nul.

1. Calculer $S_1 = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}(-1)^k$.
2. En déduire $T_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ et $T_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$.
3. Calculer $U_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k}$ et $U_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k+1}$. On pourra, si on le souhaite, s'inspirer des questions précédentes.
4. A l'aide des changements d'indices $\ell = n-k$ et $\ell = n-1-k$, calculer $V_1 = \sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{2k}$ et $V_2 = \sum_{k=0}^{n-1} k\binom{2n}{2k+1}$.
5. Calculer enfin $W_1 = \sum_{k=0}^{n-1} k\binom{2n-1}{2k}$ et $W_2 = \sum_{k=0}^{n-1} k\binom{2n-1}{2k+1}$.

Sommes doubles

Exercice 17 ★★

Calculer les sommes suivantes :

1. $U_n = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$.
2. $V_n = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$.
3. $W_n = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} |i-j|$.
4. $X_n = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i$.
5. $Y_n = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$

Exercice 18 ★★

En permutant l'ordre des sommations, démontrer l'égalité

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Exercice 19 ★

Sommes doubles.

1. Calculer la somme double
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j).$$
2. Calculer la somme double
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij.$$

Exercice 20 ★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}.$$

Exercice 21 ★

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} S_k.$$

Établir que

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = (n+1)S_n - n.$$

Exercice 22

Vérifier que

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leq n} 2^k$$

et calculer une expression simple de cette somme en permutant l'ordre des sommations dans la somme double.

Exercice 23 ★★

On pose pour $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, $S_p(n)=\sum_{k=0}^{n}k^p$.

$$\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}S_j(n)=(n+1)^{p+1}$$

Produits

Exercice 24

Simplifier le produit suivant :

$$P=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

Exercice 25 ★★

Soient

$$V=\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}ij\quad,\quad W=\prod_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}ij\,,\quad X=\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}ij$$
$$Y=\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}ij\,,\quad Z=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}ij.$$

Calculer V. En déduire W. Exprimer W en fonction de X et Y. Montrer, sans calcul, que X = Y. En déduire X puis Z.

Exercice 26 ★

Simplifier le produit

$$\prod_{k=1}^{n}2^{1/k(k+1)}.$$

Exercice 27 ★ **Calcul d'un produit infini**

Pour tout $n\geqslant 2$, on pose

$$u_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}.$$

1. Déterminer une suite d'entiers relatifs $(v_k)_{k\geqslant1}$ telle que

$$\forall k\geqslant 2,\ \frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{k-1}{k+1}\times\frac{v_k}{v_{k-1}}.$$

2. En déduire une simplification de u_n.

3. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 28 ★★★

Soit $\alpha\in]0,\pi[$. Simplifier le produit $P_n=\prod_{k=0}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}$. En déduire la limite de P_n.

Systèmes linéaires

Exercice 29

Résoudre

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0\\ x - 2y + z - t = 1\\ x + y + 2z + t = -1\end{cases}$$

Exercice 30 ★

Résoudre

$$\begin{cases} -3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 4\\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0\\ 8x_1 - 24x_2 + 4x_3 - 12x_4 - 4x_5 = -8\\ -x_1 + 3x_2 - 2x_4 + 7x_5 = 10\end{cases}$$

Exercice 31 ★

Résoudre selon les valeurs des paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & a \\ -2x & - & 3y & + & 3z & = & b \\ x & + & y & - & 2z & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 32 ★★

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on note E_a l'ensemble de solutions du système suivant.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ ax & + & 3y & - & z & = & 3 \\ 5x & - & 8y & + & z & = & -9 \end{array}\right.$$

Pour quels $a \in \mathbb{R}$ est-ce que E_a est vide ? contient un unique élément ? contient une infinité d'éléments ?

Exercice 33 ★

Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 2 \\ 2x & + & 2y & - & z & = & -2 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

Exercice 34

Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 2 \\ 2x & + & 2y & - & z & = & -2 \\ -x & - & y & + & \frac{1}{2}z & = & 4 \end{array}\right.$$

Exercice 35 ★★

Déterminer les valeurs de a pour lesqelles le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & az & = & 2 \\ 2x & + & ay & + & 2z & = & 3. \end{array}\right.$$

1. possède une seule solution,
2. ne possède pas de solution,
3. possède une infinité de solutions.

Exercice 36 ★

Résoudre les systèmes

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 4z & = & -4 \\ 3x & + & 2y & - & 3z & = & 17 \\ 5x & - & 3y & + & 8z & = & -10 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & 3z & = & 2 \\ -x & + & 6y & - & 11z & = & -3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & - & z & = & -2 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ -2x & + & 4y & - & 5z & = & -10. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 5z & = & 3 \\ 3x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & 7z & = & 2 \\ 2x & - & 3y & + & 8z & = & 5. \end{array}\right.$$

Trigonométrie

Exercice 37 ★

Simplifier le produit $p = \sin\left(\frac{\pi}{14}\right)\sin\left(\frac{3}{14}\pi\right)\sin\left(\frac{5}{14}\pi\right)$ en le multipliant par $\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$.

Exercice 38 ★

On cherche à calculer $\cos(\pi/5)$ et $\sin(\pi/5)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(3x) = \sin(2x)$.
2. En déduire les valeurs de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ pour $x = \pi/5$.

Exercice 39 ★

Calculer

$$\alpha = \frac{1}{\sin(\pi/18)} - \frac{\sqrt{3}}{\cos(\pi/18)}.$$

Exercice 40 ★★

On pose

$$p = \cos(\pi/7)\cos(2\pi/7)\cos(4\pi/7),$$

et

$$s = \cos(2\pi/7) + \cos(4\pi/7) + \cos(6\pi/7).$$

1. Simplifier $p\sin(\pi/7)$. En déduire la valeur de p.
2. Calculer s à l'aide de la première question.

Exercice 41 ★

Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

1. $\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \tan(x/2)$;
2. $\sin(x - 2\pi/3) + \sin(x) + \sin(x + 2\pi/3) = 0$;
3. $\tan(\pi/4 + x) + \tan(\pi/4 - x) = \dfrac{2}{\cos(2x)}$;
4. $\dfrac{1}{\tan(x)} - \tan(x) = \dfrac{2}{\tan(2x)}$.

Exercice 42 ★

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin(x) + \sin(5x) = \sqrt{3}\cos(2x)$;
2. $\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x)$;
3. $2\sin^2(x) + \sin^2(2x) = 2$;
4. $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$;
5. $\sin(2x) + \sin(x) = 0$;
6. $12\cos^2(x) - 8\sin^2(x) = 2$.

Exercice 43 ★★

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sin 5x \leq \sin x$.