Devoir surveillé n° 6 : corrigé

Solution 1.

1. On trouve

$$\begin{aligned} d_0 &= 123 & \varepsilon_0 &= 0,456 \\ d_1 &= 4 & \varepsilon_1 &= 0,56 \\ d_2 &= 5 & \varepsilon_2 &= 0,6 \\ d_3 &= 6 & \varepsilon_3 &= 0 \end{aligned}$$

On montre alors par récurrence que $d_n = \varepsilon_n = 0$ pour tout $n \geqslant 4$. En effet, $d_4 = \lfloor 10\varepsilon_3 \rfloor = 0$ et $\varepsilon_4 = 10\varepsilon_3 - d_4 = 0$ puisque $\varepsilon_3 = 0$. Supposons que $d_n = 0$ pour un certain $n \geqslant 4$. Alors $d_{n+1} = \lfloor 10\varepsilon_n \rfloor = 0$ et $\varepsilon_{n+1} = 10\varepsilon_n - d_{n+1} = 0$. Par récurrence, $d_n = 0$ pour tout $n \geqslant 4$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, $\varepsilon_0 = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$ puisque $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. Sinon $\varepsilon_n = 10\varepsilon_{n-1} - \lfloor 10\varepsilon_{n-1} \rfloor \in [0, 1[$ car $\lfloor 10\varepsilon_{n-1} \rfloor \leqslant 10\varepsilon_{n-1} < \lfloor 10\varepsilon_{n-1} \rfloor + 1$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\varepsilon_{n-1} \in [0, 1[$ d'après la question **2.a** et donc $10\varepsilon_{n-1} \in [0, 10[$. On en déduit que $d_n = \lfloor 10\varepsilon_{n-1} \rfloor \in [\![0, 9]\!]$.

c. On raisonne à nouveau par récurrence.
Tout d'abord, $x = \lfloor x \rfloor + x - \lfloor x \rfloor = d_0 + \varepsilon_0 = S_0 + \frac{\varepsilon_0}{10^0}$. Supposons que $x = S_n + \frac{\varepsilon_n}{10^n}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que $S_{n+1} = S_n + \frac{d_{n+1}}{10^{n+1}}$ et que $10\varepsilon_n = d_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$:

$$x = S_{n+1} - \frac{d_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{d_{n+1} + \varepsilon_{n+1}}{10^{n+1}} = S_{n+1} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{10^{n+1}}$$

Par récurrence, $x = S_n + \frac{\varepsilon_n}{10^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. Puisque $\varepsilon_n \in [0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x - \frac{1}{10^n} < S_n \leqslant x$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{10^n} = 0$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} S_n = x$ d'après le théorème des gendarmes.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} = 10^{N+T} S_{n+N+T+1} - 10^N S_{N+n+1} &= 10^{N+T}\left(S_{n+N+T} + \frac{d_{n+N+T+1}}{10^{n+N+T+1}}\right) - 10^N\left(S_{n+N} + \frac{d_{n+N+1}}{10^{n+N+1}}\right) \\ &= u_n + \frac{d_{n+N+T+1} - d_{n+N+1}}{10^{n+1}} = u_n \end{aligned}$$

car (d_n) est T-périodique à partir du rang N. On en déduit que (u_n) est constante.

b. Comme (u_n) est constante, $u_n = u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$u_0 = 10^{N+T} S_{N+T} - 10^N S_N = \sum_{k=0}^{N+T} d_k 10^{N+T-k} - \sum_{k=0}^{N} d_k 10^{N-k}$$

Pour $k \in [\![0, N+T]\!]$, $10^{N+T-k} \in \mathbb{Z}$ et $d_k \in \mathbb{Z}$.
De même, pour $k \in [\![0, N]\!]$, $10^{N-k} \in \mathbb{Z}$ et $d_k \in \mathbb{Z}$.
On en déduit que $u_0 \in \mathbb{Z}$. En posant $p = u_0$, on a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$10^{N+T} S_{n+N+T} - 10^N S_{n+N} = p$$

c. Puisque (S_{n+N}) et (S_{n+N+T}) convergent toutes deux vers x (en tant que suites extraites de (S_n)), on obtient par unicité de la limite $10^{N+T}x - 10^N x = p$ et donc $x = \frac{p}{10^N(10^T - 1)}$ puisque $10^T \geqslant 10 > 1$. Ceci prouve que x est rationnel.

4. On remarque que $10^6 x - 10^3 x = 123333$. Ainsi $x = \frac{123333}{999000} = \frac{41111}{333000}$.

5. **a.** La suite (r_n) est à valeurs dans l'ensmble *fini* $[\![0, q-1]\!]$. Elle ne peut donc être injective. Ainsi il existe des entiers N et M distincts tels que $r_N = r_M$.

b. Pour simplifier, supposons $N < M$ et posons $T = M - N$. On va montrer par récurrence que (r_n) est T-périodique à partir du rang N.
On a bien $r_{N+T} = r_N$.
Supposons que $r_{n+T} = r_n$ pour un certain entier $n \geqslant N$. On sait que r_{n+1} et r_{n+1+T} sont les restes respectifs des divisions euclidiennes de $10r_n$ et $10r_{n+T}$ par b. Mais puisque $10r_n = 10r_{n+T}$, on a $r_{n+1} = r_{n+1+T}$ par unicité du reste dans la division euclidienne.
Par récurrence, $r_{n+T} = r_n$ pour tout $n \geqslant N$. Ainsi (r_n) est T-périodique à partir du rang N.

c. Soit $n \geqslant N+1$. On sait que q_n et q_{n+T} sont les quotients respectifs de $10r_{n-1}$ et $10r_{n-1+T}$ par b. Puisque $n-1 \geqslant N$ et que (r_n) est T-périodique à partir du rang N, $r_{n-1} = r_{n-1+T}$ et donc $10r_{n-1} = 10r_{n-1+T}$. Par unicité du quotient dans la division euclidienne, $q_n = q_{n+T}$.
On a donc prouvé que (q_n) était T-périodique à partir du rang $N+1$.

d. Tout d'abord, $a = bq_0 + r_0$ avec $0 \leqslant r_0 < b$. On en déduit que

$$x - 1 = \frac{a}{b} - 1 < q_0 \leqslant \frac{a}{b} = x$$

et donc que $q_0 = \lfloor x \rfloor = d_0$. Par ailleurs,

$$r_0 = a - bq_0 = b\left(\frac{a}{b} - q_0\right) = b\left(x - \lfloor x \rfloor\right) = b\varepsilon_0$$

Supposons que $q_n = d_n$ et $r_n = b\varepsilon_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Par définition,

$$10\varepsilon_n = d_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$$

et donc

$$10b\varepsilon_n = bd_{n+1} + b\varepsilon_{n+1}$$

ou encore

$$10r_n = bd_{n+1} + b\varepsilon_{n+1}$$

On sait que $d_{n+1} \in \mathbb{Z}$ d'après la question **2.b**. De plus, $b\varepsilon_{n+1} = 10r_n - bd_{n+1} \in \mathbb{Z}$. Enfin, $\varepsilon_{n+1} \in [0, 1[$ d'après la question **2.a** donc $0 \leqslant b\varepsilon_{n+1} < b$. On en déduit que d_{n+1} et $q\varepsilon_{n+1}$ sont le quotient et le reste de la division euclidienne de $10r_n$ par b. Par unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne, $q_{n+1} = d_{n+1}$ et $r_{n+1} = b\varepsilon_{n+1}$.
Par récurrence, $q_n = d_n$ et $r_n = b\varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. On trouve successivement

$$\begin{aligned}
q_0 &= 0 & r_0 &= 13\\
q_1 &= 3 & r_1 &= 25\\
q_2 &= 7 & r_2 &= 5\\
q_3 &= 1 & r_3 &= 15\\
q_4 &= 4 & r_4 &= 10\\
q_5 &= 2 & r_5 &= 30\\
q_6 &= 8 & r_6 &= 20\\
q_7 &= 5 & r_7 &= 25
\end{aligned}$$

On a $r_1 = r_7$ donc (r_n) est 6-périodique à partir du rang 1 d'après la question **5.b**. Toujours d'après la question **5.b**, (q_n) est 6-périodique à partir du rang 2. Mais puisque les suites (d_n) et (q_n) sont identiques, (d_n) est également 6-périodique à partir du rang 2.

Solution 2.

1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_4 &= \{1, i, -1, -i\}\\
\mathbb{U}_6 &= \left\{1, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}, -1, e^{\frac{4i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{3}}\right\}\\
\mathbb{U}_4 \cap \mathbb{U}_6 &= \{-1, 1\} = \mathbb{U}_2\\
G &= \left\{1, e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{i\pi}{3}}, i, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}, -1, e^{\frac{7i\pi}{6}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}, -i, e^{\frac{5i\pi}{3}}, e^{\frac{11i\pi}{6}}\right\} = \mathbb{U}_{12}
\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{card} \mathbb{U}_4 = 4$, $\operatorname{card} \mathbb{U}_6 = 6$, $\operatorname{card} \mathbb{U}_4 \cap \mathbb{U}_6 = 2$ et $\operatorname{card} G = 12$.

2. Soit $z \in \mathbb{U}_{m \wedge n}$. On a donc $z^{m \wedge n} = 1$. Puisque m et n sont des multiples de $m \wedge n$, on a également $z^m = 1$ et $z^n = 1$. Donc $z \in \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$. Ainsi $\mathbb{U}_{m \wedge n} \subset \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$.

3. Soit $z \in \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$. On a donc $z^m = 1$ et $z^m = 1$. D'après le théorème de Bezout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $mu + nv = m \wedge n$. Ainsi $z^{m \wedge n} = (z^m)^u (z^n)^v = 1$ et $z \in \mathbb{U}_{m \wedge n}$. Ainsi $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_{m \wedge n}$.

4. Soit $z \in G$. Il existe donc $z_1 \in \mathbb{U}_m$ et $z_2 \in \mathbb{U}_n$ tels que $z = z_1 z_2$. Dans ce cas, $z^{m \vee n} = z_1^{m \vee n} z_2^{m \vee n}$. Mais comme $m \vee n$ est un multiple de m, $z_1^{m \vee n} = 1$. De même, $m \vee n$ étant un multiple de n, $z_2^{m \vee n} = 1$. Ainsi $z^{m \vee n} = 1$ et $z \in \mathbb{U}_{m \vee n}$. Ainsi $G \subset \mathbb{U}_{m \vee n}$.

5. Soit $z \in \mathbb{U}_{m \vee n}$. Par le théorème de Bezout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $um + vn = m \wedge n$. Posons $m' = \frac{m}{m \wedge n}$ et $n' = \frac{n}{m \wedge n}$. Remarquons que m' et n' sont entiers. On peut alors poser $z_1 = z^{vn'}$ et $z_2 = z^{um'}$. On a bien $z = z_1 z_2$ puisque $um' + vn' = 1$. De plus, $\frac{mn}{m \wedge n} = m \vee n$ donc $z_1^m = z^{v(m \vee n)} = 1$ et $z_2^n = z^{u(p \vee n)} = 1$. Ainsi $z = z_1 z_2$ avec $z_1 \in \mathbb{U}_m$ et $z_2 \in \mathbb{U}_n$. Donc $z \in G$. Ainsi $\mathbb{U}_{m \vee n} \subset G$.

Solution 3.

1. **a.** On a évidemment $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b. On procède par récurrence. Tout d'abord, $F_3 = 2 > \varphi$. En effet, $5 < 9$ donc $\sqrt{5} < 3$ puis $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$. Ensuite, $F_4 = 3 > \varphi^2$. En effet, $\varphi^2 = \varphi + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et il suffit alors de remarquer que $\sqrt{5} < 3$.
Supposons $F_{n+2} > \varphi^n$ et $F_{n+3} > \varphi^{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$F_{n+4} = F_{n+2} + F_{n+3} > \varphi^n + \varphi^{n+1} = \varphi^n(1 + \varphi) = \varphi^{n+2}$$

puisque $\varphi^2 = 1 + \varphi$.
Par récurrence double, $F_{n+2} > \varphi^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Posons $d_1 = a \wedge b$ et $d_2 = b \wedge r$. Puisque d_1 divise a et b, il divise également b et $a - bq = r$ donc il divise d_2.
Puisque d_2 divise b et r, il divise également $bq + r = a$ et b donc il divise d_1.
Puisque d_1 et d_2 sont positifs, $d_1 = d_2$.
On en déduit notamment que si r est le reste de la division euclidienne de a par b, alors $a \wedge b = b \wedge r$.

3. **a.**

$$\begin{aligned} 154 &= 48 \times 3 + 10 \\ 48 &= 10 \times 4 + 8 \\ 10 &= 8 \times 1 + 2 \\ 8 &= 2 \times 4 + 0 \end{aligned}$$

Ainsi $N = 4$.

b. D'après la question **2**, $r_k \wedge r_{k+1} = r_{k+1} \wedge r_{k+2}$ pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$. En particulier,

$$a \wedge b = r_0 \wedge r_1 = r_N \wedge r_{N+1} = r_N \wedge 0 = r_N$$

c. Soit $k \in [\![0, N-1]\!]$. Notons q_k le quotient de la division euclidienne de r_k par r_k+1. Alors $r_k = q_k r_{k+1} + r_{k+2}$. Par définition de l'algorithme d'Euclide $r_{k+2} < r_{k+1} < r_k$ et, puisque $k \leqslant N-1$, $r_{k+1} > 0$. Donc $q_k = \frac{r_k - r_{k+2}}{r_{k+1}} > 0$. Puisque q_k est entier, $q_k \geqslant 1$. Finalement $r_k = q_k r_{k+1} + r_{k+2} \geqslant r_{k+1} + r_{k+2}$ car $q_k \geqslant 1$ et $r_{k+1} \geqslant 0$.

d. On procède par récurrence double descendante finie. On note $HR(k)$ la proposition $r_k \geqslant F_{N+2-k}$.
Initialisation. On sait que $r_N > 0$ donc $r_N \geqslant 1 = F_2$. De plus, $r_{N-1} > r_n \geqslant 1$ donc $r_{N-1} \geqslant 2 = F_3$. Ainsi $HR(N)$ et $HR(N-1)$ sont vraies.
Hérédité. Supposons $HR(k+1)$ et $HR(k+2)$ vraies pour un certain $k \in [\![0, N-2]\!]$ et montrons que $HR(K)$ est vraie. On a alors $r_{k+1} \geqslant F_{N-k}$ et $r_{k+2} \geqslant F_{N-k-1}$. D'après la question précédente,

$$r_k \geqslant r_{k+1} + r_{k+2} \geqslant F_{N-k} + F_{N-k-1} = F_{N-k+1}$$

de sorte que $HR(k)$ est vraie.
Conclusion. Par récurrence descendante double finie, $HR(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![0, N]\!]$.

e. On a en particulier, $b = r_1 \geqslant F_{N+1}$. Puisque $N \geqslant 2$, on peut utiliser la question **1.b** pour affirmer que $F_{N+1} > \varphi^{N-1}$. On a donc $b > \varphi^{N-1}$ puis le résultat voulu par stricte croissance du logarithme.

f. Supposons d'abord $N \geqslant 2$. Puisque b s'écrit avec au plus k chiffres en base 10, $b < 10^k$. La question précédente, montre alors que

$$b < k\frac{\ln 10}{\ln \varphi} + 1$$

On utilise alors l'indication de l'énoncé pour affirmer que $b < 5k+1$. Mais puisque b et $5k+1$ sont des entiers, ceci donne $b \leqslant 5k$.
Remarquons maintenant que $k \geqslant 1$ de sorte que, si $N \leqslant 2$, on a encore $N \leqslant 5 \leqslant 5k$.

4. **a.**

```
def pgcd(a,b):
    while b!=0:
        a,b=b,a%b
    return a
```

b.

```
def nb_pgcd(a,b):
    n=0
    while b!=0:
        a,b=b,a%b
        n+=1
    return n
```