Devoir à la maison n° 11 : corrigé

Solution 1.

1. Il suffit de vérifier les différents axiomes :
   - $\times$ est une loi interne sur $\mathbb{U}_n$. En effet, si $z_1, z_2 \in \mathbb{U}_n$, alors $(z_1z_2)^n = z_1^n z_2^n = 1$ donc $z_1z_2 \in \mathbb{U}_n$.
   - $\times$ étant associative sur $\mathbb{C}$, elle l'est encore sur $\mathbb{U}_n$.
   - 1 est l'élément neutre de $(\mathbb{U}_n, \times)$.
   - Si $z \in \mathbb{U}_n$, $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$ donc tout élément de $\mathbb{U}_n$ possède un inverse dans $\mathbb{U}_n$.

   Remarque. On peut également montrer que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

2. **a.** Soit $z \in \mathbb{U}_{m\wedge n}$. On a donc $z^{m\wedge n} = 1$. Puisque m et n sont des multiples de $m\wedge n$, on a également $z^m = 1$ et $z^n = 1$. Donc $z \in \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$.
   Soit $z \in \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$. On a donc $z^m = 1$ et $z^m = 1$. D'après le théorème de Bezout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $mu + nv = m\wedge n$. Ainsi $z^{m\wedge n} = (z^m)^u(z^n)^v = 1$ et $z \in \mathbb{U}_{m\wedge n}$.
   Par double inclusion, on a donc $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_{m\wedge n}$.

   b. Soit $z \in \mathbb{U}_m\mathbb{U}_n$. Il existe donc $z_1 \in \mathbb{U}_m$ et $z_2 \in \mathbb{U}_n$ tels que $z = z_1z_2$. Dans ce cas, $z^{m\vee n} = z_1^{m\vee n} z_2^{m\vee n}$. Mais comme $m\vee n$ est un multiple de m, $z_1^{m\vee n} = 1$. De même, $m\vee n$ étant un multiple de n, $z_2^{m\vee n} = 1$. Ainsi $z^{m\vee n} = 1$ et $z \in \mathbb{U}_{m\vee n}$.
   Soit $z \in \mathbb{U}_{m\vee n}$. Par le théorème de Bezout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $um + vn = 1$. Posons $z_1 = z^{vn}$ et $z_2 = z^{um}$. On a bien $z = z_1z_2$. De plus, $z_1^m = z^{vmn} = 1$ car vmn est un multiple de $m\vee n$. De même, $z_2^n = z^{umn} = 1$. Ainsi $z = z_1z_2$ avec $z_1 \in \mathbb{U}_m$ et $z_2 \in \mathbb{U}_n$. Donc $z \in \mathbb{U}_m\mathbb{U}_n$.

3. **a.** $\times$ étant une loi interne associative sur $\mathbb{U}_m$ et $\mathbb{U}_n$, $*$ est une loi interne associative sur $\mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n$.

   b. La structure de groupe commutatif de $(\mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n, *)$ découle de la structure de groupe commutatif de $(\mathbb{U}_m, \times)$ et $(\mathbb{U}_n, \times)$. Son élément neutre est $(1, 1)$.

   Remarque. $\mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n$ est appelé le *produit cartésien* de $\mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}_n$.

4. **a.** Pour $z \in \mathbb{U}_{mn}$, $z^{mn} = 1$. Ainsi $(z^n)^m = 1$ et $(z^m)^n = 1$. Ceci prouve que $z^n \in \mathbb{U}_n$ et $z^m \in \mathbb{U}_n$. Ainsi f est bien définie.

   b. Pour $(z, z') \in \mathbb{U}_{mn}^2$,
   $$f(zz') = ((zz')^n, (zz')^m) = (z^n z'^n, z^m, z'^m) = (z^n, z^m) * (z'^n, z'^m) = f(z) * f(z')$$
   Donc f est bien un morphisme de groupes.

   c. On a la série d'équivalences suivantes :
   $$z \in \operatorname{Ker} f \iff (z^n, z^m) = (1, 1) \iff (z^n = 1 \text{ ET } z^m = 1) \iff z \in \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$$
   Ainsi $\operatorname{Ker} f = \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_{m\wedge n}$ d'après une question précédente.

   d. f est injectif $\iff \operatorname{Ker} f = \{1\} \iff \mathbb{U}_{m\wedge n} = \{1\} \iff m\wedge n = 1$.

   e. Comme $|\mathbb{U}_{mn}| = |\mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n| = mn$, f est bijectif *si et seulement si* f est injectif. Donc f est un isomorphisme *si et seulement si* $m\wedge n = 1$.

5. **a.** Si $z_1 \in \mathbb{U}_m$ et $z_2 \in \mathbb{U}_n$, alors $(z_1z_2)^{mn} = (z_1^m)^n(z_2^n)^m = 1$. Donc $z_1z_2 \in \mathbb{U}_{mn}$. Ainsi g est bien définie.

   b. Pour $((z_1, z_2), (z_1', z_2')) \in (\mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n)^2$
   $$g((z_1, z_2) * (z_1', z_2')) = g(z_1z_1', z_2z_2') = z_1z_1'z_2z_2' = (z_1z_2)(z_1'z_2') = g(z_1, z_2)g(z_1', z_2')$$
   Donc g est bien un morphisme de groupes.

   c. $\operatorname{Im} g = \mathbb{U}_m\mathbb{U}_n = \mathbb{U}_{m\vee n}$ d'après une question précédente.

   d. g est surjectif $\iff \operatorname{Im} g = \mathbb{U}_{mn} \iff \mathbb{U}_{m\vee n} = \mathbb{U}_{mn} \iff m\vee n = mn \iff m\wedge n = 1$.

   e. Comme $|\mathbb{U}_{mn}| = |\mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n| = mn$, g est bijectif *si et seulement si* g est surjectif. Donc g est un isomorphisme *si et seulement si* $m\wedge n = 1$.

> **Remarque.** On a donc prouvé de deux manières différentes que les groupes $\mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}_{mn}$ étaient isomorphes *si et seulement si* $m \wedge n = 1$. Vous retrouverez ce résultat l'année prochaine sous une autre forme connue sous le nom de *lemme chinois*.

Solution 2.

1. On trouve

$$\begin{aligned} d_0 &= 123 & \varepsilon_0 &= 0,456 \\ d_1 &= 4 & \varepsilon_1 &= 0,56 \\ d_2 &= 5 & \varepsilon_2 &= 0,6 \\ d_3 &= 6 & \varepsilon_3 &= 0 \end{aligned}$$

On montre alors par récurrence que $d_n = \varepsilon_n = 0$ pour tout $n \geqslant 4$. En effet, $d_4 = \lfloor 10\varepsilon_3 \rfloor = 0$ et $\varepsilon_4 = 10\varepsilon_3 - d_4 = 0$ puisque $\varepsilon_3 = 0$. Supposons que $d_n = 0$ pour un certain $n \geqslant 4$. Alors $d_{n+1} = \lfloor 10\varepsilon_n \rfloor = 0$ et $\varepsilon_{n+1} = 10\varepsilon_n - d_{n+1} = 0$. Par récurrence, $d_n = 0$ pour tout $n \geqslant 4$.

2. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, $\varepsilon_0 = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$ puisque $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. Sinon $\varepsilon_n = 10\varepsilon_{n-1} - \lfloor 10\varepsilon_{n-1} \rfloor \in [0, 1[$ car $\lfloor 10\varepsilon_{n-1} \rfloor \leqslant 10\varepsilon_{n-1} < \lfloor 10\varepsilon_{n-1} \rfloor + 1$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\varepsilon_{n-1} \in [0, 1[$ d'après la question **2.a** et donc $10\varepsilon_{n-1} \in [0, 10[$. On en déduit que $d_n = \lfloor 10\varepsilon_{n-1} \rfloor \in [\![0, 9]\!]$.

c. On raisonne à nouveau par récurrence.
Tout d'abord, $x = \lfloor x \rfloor + x - \lfloor x \rfloor = d_0 + \varepsilon_0 = S_0 + \frac{\varepsilon_0}{10^0}$. Supposons que $x = S_n + \frac{\varepsilon_n}{10^n}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que $S_{n+1} = S_n + \frac{d_{n+1}}{10^{n+1}}$ et que $10\varepsilon_n = d_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$:

$$x = S_{n+1} - \frac{d_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{d_{n+1} + \varepsilon_{n+1}}{10^{n+1}} = S_{n+1} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{10^{n+1}}$$

Par récurrence, $x = S_n + \frac{\varepsilon_n}{10^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. Puisque $\varepsilon_n \in [0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x - \frac{1}{10^n} < S_n \leqslant x$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{10^n} = 0$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} S_n = x$ d'après le théorème des gendarmes.

3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} = 10^{N+T} S_{n+N+T+1} - 10^N S_{N+n+1} &= 10^{N+T}\left(S_{n+N+T} + \frac{d_{n+N+T+1}}{10^{n+N+T+1}}\right) - 10^N \left(S_{n+N} + \frac{d_{n+N+1}}{10^{n+N+1}}\right) \\ &= u_n + \frac{d_{n+N+T+1} - d_{n+N+1}}{10^{n+1}} = u_n \end{aligned}$$

car (d_n) est T-périodique à partir du rang N. On en déduit que (u_n) est constante.

b. Comme (u_n) est constante, $u_n = u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$u_0 = 10^{N+T} S_{N+T} - 10^N S_N = \sum_{k=0}^{N+T} d_k 10^{N+T-k} - \sum_{k=0}^{N} d_k 10^{N-k}$$

Pour $k \in [\![0, N+T]\!]$, $10^{N+T-k} \in \mathbb{Z}$ et $d_k \in \mathbb{Z}$.
De même, pour $k \in [\![0, N]\!]$, $10^{N-k} \in \mathbb{Z}$ et $d_k \in \mathbb{Z}$.
On en déduit que $u_0 \in \mathbb{Z}$. En posant $p = u_0$, on a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$10^{N+T} S_{n+N+T} - 10^N S_{n+N} = p$$

c. Puisque (S_{n+N}) et (S_{n+N+T}) convergent toutes deux vers x (en tant que suites extraites de (S_n)), on obtient par unicité de la limite $10^{N+T}x - 10^N x = p$ et donc $x = \frac{p}{10^N(10^T - 1)}$ puisque $10^T \geqslant 10 > 1$. Ceci prouve que x est rationnel.

4. On remarque que $10^6 x - 10^3 x = 123333$. Ainsi $x = \frac{123333}{999000} = \frac{41111}{333000}$.

5. **a.** La suite (r_n) est à valeurs dans l'ensmble *fini* $[\![0, q-1]\!]$. Elle ne peut donc être injective. Ainsi il existe des entiers N et M distincts tels que $r_N = r_M$.

b. Pour simplifier, supposons $N < M$ et posons $T = M - N$. On va montrer par récurrence que (r_n) est T-périodique à partir du rang N.
On a bien $r_{N+T} = r_N$.
Supposons que $r_{n+T} = r_n$ pour un certain entier $n \geqslant N$. On sait que r_{n+1} et r_{n+1+T} sont les restes respectifs des divisions euclidiennes de $10r_n$ et $10r_{n+T}$ par b. Mais puisque $10r_n = 10r_{n+T}$, on a $r_{n+1} = r_{n+1+T}$ par unicité du reste dans la division euclidienne.
Par récurrence, $r_{n+T} = r_n$ pour tout $n \geqslant N$. Ainsi (r_n) est T-périodique à partir du rang N.

c. Soit $n \geqslant N+1$. On sait que q_n et q_{n+T} sont les quotients respectifs de $10r_{n-1}$ et $10r_{n-1+T}$ par b. Puisque $n-1 \geqslant N$ et que (r_n) est T-périodique à partir du rang N, $r_{n-1} = r_{n-1+T}$ et donc $10r_{n-1} = 10r_{n-1+T}$. Par unicité du quotient dans la division euclidienne, $q_n = q_{n+T}$.
On a donc prouvé que (q_n) était T-périodique à partir du rang $N+1$.

d. Tout d'abord, $a = bq_0 + r_0$ avec $0 \leqslant r_0 < b$. On en déduit que

$$x - 1 = \frac{a}{b} - 1 < q_0 \leqslant \frac{a}{b} = x$$

et donc que $q_0 = \lfloor x \rfloor = d_0$. Par ailleurs,

$$r_0 = a - bq_0 = b\left(\frac{a}{b} - q_0\right) = b(x - \lfloor x \rfloor) = b\varepsilon_0$$

Supposons que $q_n = d_n$ et $r_n = b\varepsilon_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Par définition,

$$10\varepsilon_n = d_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$$

et donc

$$10b\varepsilon_n = bd_{n+1} + b\varepsilon_{n+1}$$

ou encore

$$10r_n = bd_{n+1} + b\varepsilon_{n+1}$$

On sait que $d_{n+1} \in \mathbb{Z}$ d'après la question **2.b**. De plus, $b\varepsilon_{n+1} = 10r_n - bd_{n+1} \in \mathbb{Z}$. Enfin, $\varepsilon_{n+1} \in [0, 1[$ d'après la question **2.a** donc $0 \leqslant b\varepsilon_{n+1} < b$. On en déduit que d_{n+1} et $q\varepsilon_{n+1}$ sont le quotient et le reste de la division euclidienne de $10r_n$ par b. Par unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne, $q_{n+1} = d_{n+1}$ et $r_{n+1} = b\varepsilon_{n+1}$.
Par récurrence, $q_n = d_n$ et $r_n = b\varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. On trouve successivement

$$\begin{array}{ll}
q_0 = 0 & r_0 = 13 \\
q_1 = 3 & r_1 = 25 \\
q_2 = 7 & r_2 = 5 \\
q_3 = 1 & r_3 = 15 \\
q_4 = 4 & r_4 = 10 \\
q_5 = 2 & r_5 = 30 \\
q_6 = 8 & r_6 = 20 \\
q_7 = 5 & r_7 = 25
\end{array}$$

On a $r_1 = r_7$ donc (r_n) est 6-périodique à partir du rang 1 d'après la question **5.b**. Toujours d'après la question **5.b**, (q_n) est 6-périodique à partir du rang 2. Mais puisque les suites (d_n) et (q_n) sont identiques, (d_n) est également 6-périodique à partir du rang 2.