CONVEXITÉ

Parties convexes

Exercice 1 ★★

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{C}$ une partie de E. Montrer que $\mathcal{C}$ est convexe si et seulement si tout barycentre de points de $\mathcal{C}$ à coefficients positifs est dans $\mathcal{C}$.

Exercice 2 ★★★★ **ENS MP 2010**

Déterminer les matrices $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que A et A^{-1} appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 3 ★★ **Epigraphe**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle épigraphe de f l'ensemble

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y \geq f(x)\}$$

Montrer que f est convexe si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 ★★★ **Enveloppe convexe et théorème de Carathéodory**

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{A}$ une partie de E. On note $\mathcal{C}$ l'*enveloppe convexe* de $\mathcal{A}$ autrement dit la plus petite partie convexe de E (au sens de l'inclusion) contenant $\mathcal{A}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de $\mathcal{A}$.
2. On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de $n+1$ points de $\mathcal{A}$.

Exercice 5 ★ **Un carré est convexe**

Soit $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. Montrer que C est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 ★ **Somme de deux convexes**

Soient C_1 et C_2 deux convexes. Montrer que l'ensemble

$$C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2, (x_1, x_2) \in C_1 \times C_2\}$$

est également convexe.

Inégalités

Exercice 7 ★

Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

Exercice 8 ★

1. Montrer que $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x \ln x$ est convexe.
2. En déduire que pour tout $x \in]0,1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 9 ★★★ **Inégalité de Jensen**

Soit f continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que $\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln(f(t))\ dt \leq \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt\right)$.
2. Application : calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_1^n \left(1+\frac{1}{t}\right)^t\ dt$.

Exercice 10 ★★★★ **ENS PC 2010**

Soient $n \geq 3$ et Γ un cercle. Parmi les polygones convexes à n côtés inscrits dans Γ, montrer que ce sont les polygones réguliers qui maximisent l'aire.

Exercice 11 ★★★ **Inégalité de Jensen**

Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et φ une fonction continue et convexe sur $f([a,b])$. Montrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi \circ f(t)\ dt$$

Exercice 12 ★★★ **X MP**

Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ continue et concave telle que $f(0)=1$. Montrer que

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

Exercice 13 ★★★

Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. On pose

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k \qquad \mathrm{G}_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \qquad \mathrm{H}_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}$$

Montrer que $\mathrm{H}_n \leq \mathrm{G}_n \leq \mathrm{A}_n$.

Exercice 14 ★★

1. Etudier la convexité de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \ln(1+e^x)$.
2. Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que
$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right)^{\frac{1}{n}}$$
3. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels strictement positifs. Montrer que
$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n a_k + b_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 15 ★★★ **Inégalités de Hölder et Minkowski**

Soient p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Prouver l'inégalité de Young,
$$\forall (u;v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{u^q}{q}$$
2. Soient $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité de Hölder,
$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
3. Soient $p > 1$, $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité de Minkowski,
$$\left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Exercice 16 ★★★ **Entropie**

Soient $p_1, \dots, p_n$ des réels strictement positifs et de somme 1. On pose $\mathrm{H}(p) = -\sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i)$.

1. Montrer que $0 \leq \mathrm{H}(p) \leq \ln(n)$.
2. Soient $q_1, \dots, q_n$ des réels strictement positifs et de somme 1. Montrer que
$$\mathrm{H}(p) \leq -\sum_{i=1}^n p_i \ln(q_i)$$

Théorie

Exercice 17 ★★★★ **X MP**

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$, $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est convexe.

Exercice 18 ★★★

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $\mathrm{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(x) \geq (y-x)f(x)$$

1. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que F est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19 ★★★ **Convexité entière**

Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) \geq \frac{f(n+1)+f(n-1)}{2}$$

On suppose de plus que f est minorée. Montrer que f est constante.

Exercice 20 ★★★★ **ENS MP 2010**

Soit f une fonction positive sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction g convexe sur $\mathbb{R}$ telle que pour toute fonction h convexe sur $\mathbb{R}$ telle que $h \geq f$, on ait $h \leq g$.

Exercice 21 ★★★★ **ENS Ulm/Lyon/Cachan MP 2001**

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, on note

$$\mathrm{E}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > f(x)\}$$

l'épigraphe de f.
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.

1. Montrer qu'il existe une unique application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $\mathrm{E}_h = \mathrm{E}_f + \mathrm{E}_g$.
2. On suppose f et g convexes. Montrer que h est convexe.
3. Montrer que f et g peuvent être de classe $\mathcal{C}^\infty$ sans que h le soit.

Exercice 22 ★★★ **X-ENS 2017 PC**

Que peut-on dire d'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et impaire ?

Exercice 23 ★★★ **Fonctions convexes majorées**

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. Prouver que f est constante.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. A-t-on la même conclusion qu'à la question précédente ?

Exercice 24 ★★

Soit I un intervallle et $f :$ I convexe. Montrer que si f admet un minimum local en $a \in \mathrm{I}$, alors f admet un minimum global en a.

Divers

Exercice 25 ★★

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$. On suppose que $f \geq 0$ sur $[a,b]$ et on souhaite montrer qu'il n'existe qu'une solution non nulle de l'équation différentielle $y'' - fy = g$ s'annulant en a et b.
Soient donc φ_1 et φ_2 deux solutions de l'équation différentielle $y'' - fy = g$ s'annulant en a et b.

1. Montrer que $(\varphi_1 - \varphi_2)^2$ est convexe.
2. En déduire que $\varphi_1 = \varphi_2$.

Exercice 26 ★★

Soient f une application convexe sur un intervalle I, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ une série à termes positifs convergente de somme 1 et (x_n) une suite d'éléments de I. Montrer que si les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n f(x_n)$ convergent, alors

$$f\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(x_n)$$

Exercice 27 ★★ **TPE**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ convexe sur $[0, 2\pi]$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$