

DEVOIR À LA MAISON N°16

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Exercice 1 ★

Soient p et q deux entiers naturels non nuls. Soient

$$P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$$

$$Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$$

deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. Le résultant des polynômes P et Q est le nombre complexe noté $\text{Res}(P, Q)$ défini par le déterminant suivant :

$$\text{Res}(P, Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & b_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_p & & a_1 & b_q & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & a_p & & & b_q \end{vmatrix}$$

C'est un déterminant de taille $(q + p)$ dont les q premières colonnes représentent les coefficients de P et p dernières colonnes représentent les coefficients de Q , les positions non remplies étant des zéros.

Par exemple, si $P = 1 + 2X + 3X^2$ et $Q = 4 + 5X + 6X^2 + 7X^3$,

$$\text{Res}(P, Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

La matrice servant à définir $\text{Res}(P, Q)$ pourra être notée $M_{P,Q}$ i.e. $\text{Res}(P, Q) = \det M_{P,Q}$.

On note $E = \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$. Soit u l'application de E vers F définie par $u(A, B) = PA + QB$.

1.
 - a. Vérifier que u est bien à valeurs dans F et démontrer que u est une application linéaire.
 - b. Si on suppose que u est bijective, démontrer que P et Q sont premiers entre eux.
 - c. Si on suppose que P et Q sont premiers entre eux, déterminer $\text{Ker } u$ et en déduire que u est bijective.
2. On note $\mathcal{B} = ((1, 0), (X, 0), \dots, (X^{q-1}, 0), (0, 1), (0, X), \dots, (0, X^{p-1}))$ une base de E et $(1, X, \dots, X^{p+q-1})$ la base canonique de F .

- a. Déterminer la matrice de u par rapport aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .
 - b. Démontrer que $\text{Res}(P, Q) \neq 0$ si et seulement si P et Q sont premiers entre eux (donc $\text{Res}(P, Q) = 0$ si et seulement si P et Q ont une racine complexe commune).
- 3.
- a. Démontrer que $P \in \mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple dans \mathbb{C} si et seulement si $\text{Res}(P, P') = 0$.
 - b. Application : déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $X^3 + aX + b$ admette une racine multiple.