Devoir surveillé n°5

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 —

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,dt$.

Partie I – Un développement limité de F

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 de $t \mapsto e^{t^2}$ au voisinage de 0.

2. En déduire le développement limité à l'ordre 5 de $x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ au voisinage de 0.

3. En déduire le développement limité à l'ordre 5 de F au voisinage 0.

4. Représenter l'allure de la courbe représentative de F au voisinage de 0. On placera notamment sa tangente au point d'abscisse 0 et on positionnera la courbe par rapport à cette tangente.

Partie II – Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + 2xy = 1$$

et f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On ne cherchera pas à donner une expression de f.

5. Préciser la valeur de $f'(0)$.

6. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$f^{(n+2)}(x) + 2xf^{(n+1)}(x) + 2(n+1)f^{(n)}(x) = 0$$

8. **a.** En déduire la valeur de $f^{(2n+1)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On donnera une expression à l'aide de factorielles.

b. En déduire également une expression de $f^{(2n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de $f(0)$ et de factorielles.

9. **a.** Vérifier que F est solution de (E).

b. A l'aide de la question précédente, retrouver le développement limité établi à la question **I.3**.

10. Décrire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles à l'aide de la fonction F.

11. Montrer que (E) admet une unique solution impaire.