PRIMITIVES ET INTÉGRALES

EXERCICE 1.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto t e^{-3t^2}$
2. $t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^4}$
3. $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{th} t}$
4. $t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^3}$
5. $t \mapsto \dfrac{\sin(2t)}{1+\sin^2 t}$
6. $t \mapsto \tan^2 t$
7. $t \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 t\sqrt{\tan t}}$
8. $t \mapsto \dfrac{1}{t+\sqrt{t}}$
9. $t \mapsto \dfrac{\ln(\ln t)}{t}$
10. $t \mapsto e^{e^t+t}$
11. $t \mapsto \dfrac{1}{t+t(\ln t)^2}$
12. $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$

EXERCICE 2.

Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^2$. Calculer

1. $\mathrm{I}_{m,n} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$
2. $\mathrm{J}_{m,n} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(mt)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$
3. $\mathrm{K}_{m,n} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(mt)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$

EXERCICE 3.

Calculer les intégrales suivantes.

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} x\sin x\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{J} = \int_0^1 \sqrt{e^x}\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{K} = \int_0^2 \frac{2^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2+2^x}}.$$

EXERCICE 4.

Calculer les intégrales suivantes

$$\mathrm{A} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{B} = \int_0^{\pi} (\sin x)^3\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{C} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

EXERCICE 5.

Déterminer une primitive de la fonction $f(x) = (\sin(2x))^3\cos(3x)$.

EXERCICE 6.

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(2x)^3\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 7. ✮

Calculer, en fonction du nombre réel x, l'intégrale suivante

$$f(x) = \int_0^1 |x-t|\,\mathrm{d}t.$$

EXERCICE 8.

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et H la fonction définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{H}(x) = \alpha\cos x + \sin x + 2$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que H ne s'annule pas.
2. On suppose la condtion précédente satisfaite et on pose pour $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{H}(t)}$.
   Justifier que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour $x\in]-\pi,\pi[$.
3. Calculer l'intégrale $\mathrm{F}(2\pi)$.

EXERCICE 9.

Soient α et β deux réels strictement positifs. On définit une fonction f par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\alpha+\beta\cos^2 x}$$

1. Justifier que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On note F celle qui s'annule en 0.
2. Montrer que $\mathrm{F}(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Déterminer une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.
4. Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{49-45\sin^2 t}$.

EXERCICE 10.

Calculer $\mathrm{I} = \int_{a^2}^{b^2} x\sqrt{(x-a^2)(b^2-x)}\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 11.

Calculer

1. $\int x\arctan^2(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int e^x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$ en posant $u=\ln x$
4. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}}$ en posant $u=\sqrt{1+x}$.
5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x}$

EXERCICE 12.

On pose $\mathrm{S} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{C} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que S et C sont bien définies.
2. Montrer que $\mathrm{S}=\mathrm{C}$ par changement de variable.
3. Que vaut $\mathrm{S}+\mathrm{C}$? En déduire S et C.
4. En déduire $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}$.

EXERCICE 13.

Calculer

1. $\int_0^{\pi} \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{4-\cos^2 t}$ en posant $u=\cos t$;
2. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$ pour $x\in]0,\pi[$ en posant $u=\cos t$;
3. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t}$ en posant $u=\sin t$;
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}$ en posant $u=\tan\frac{t}{2}$.

EXERCICE 14.

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose

$$\mathrm{I}_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}$$

1. Déterminer une relation entre $\mathrm{I}_{n+1}(x)$ et $\mathrm{I}_n(x)$.
2. En déduire l'existence et une expression simple de $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{I}_n(x)$.

EXERCICE 15.✮

Calculer :

1. $\mathrm{I} = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2(t)}\,dt$ en posant $u=\tan(t)$;
2. $\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$ en posant $u=\sqrt{x}$;
3. $\mathrm{K} = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1}\,dx$ en posant $u=\sqrt{e^x-1}$;
4. $\mathrm{L} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+u+1}}$ en posant $x=\sqrt{u^2+u+1}-u$;
5. $\mathrm{M} = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos(x)}$ en posant $u=\sin(x)$;
6. $\mathrm{N} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin(x)}$ en posant $u=\cos(x)$;
7. $\mathrm{O} = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^3(x)\,dx$ en posant $u=\cos(x)$;
8. $\mathrm{P} = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)\,dx}{1+\cos^2(x)}$ en posant $u=\cos(2x)$;
9. $\mathrm{Q} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ en posant $x=\cos(2u)$;
10. $\mathrm{R} = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}+x^{1/4}}{\sqrt{x}+1}\,dx$ en posant $u=x^{1/4}$.

EXERCICE 16.

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \, \mathrm{d}x$.

1. Montrer que (I_n) converge vers 0.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
3. En déduire que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

EXERCICE 17.

On considère la suite de terme général $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

1. Déterminer la limite de (I_n).
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
3. On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer S_n en fonction de I_n.
4. En déduire la convergence et la limite de (S_n).

EXERCICE 18.

Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$\mathrm{I}_{n,p} = \int_0^1 t^n (1-t)^p \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{I}_{n,p} = \frac{n}{p+1} \mathrm{I}_{n-1,p+1}$$

2. En déduire un expression de $\mathrm{I}_{n,p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 19.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathrm{sh}(\alpha) = 1$.
2. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \int_0^\alpha \mathrm{sh}(t)^n \, \mathrm{d}t$. Déterminer le sens de variation de la suite (I_n).
3. Justifier que (I_n) converge. On ne cherchera pas à calculer sa limite pour l'instant.
4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (n+2)\mathrm{I}_{n+2} = \mathrm{ch}(\alpha) - (n+1)\mathrm{I}_n$$

5. En déduire la limite de la suite (I_n).

EXERCICE 20.★★

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t} \, dt.$$

1. Trouver une relation de récurrence entre I_{n-1} et I_n.
2. Calculer I_0 puis I_n pour tout $n \geqslant 0$.
3. Calculer I_n d'une autre manière et montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+3} \binom{n}{k} = 2^{2n+2} \frac{n!(n+2)!}{(2n+4)!}.$$

EXERCICE 21.

Calculer une primitive des fonctions suivantes.

1. $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^2}$
2. $t \mapsto \frac{2-5t}{1+t^2}$
3. $t \mapsto \frac{3t+2}{2t^2-4t+3}$

EXERCICE 22.★

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Etablir la dérivabilité puis calculer la dérivée de la fonction ψ définie par

$$x \longmapsto \int_0^1 f(t+x) \, dt.$$

EXERCICE 23.

Justifier que $f : x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} \frac{t}{1+e^t}\, \mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

EXERCICE 24.

Calculer les limites suivantes. On ne cherchera pas à calculer les intégrales.

1. $\lim_{x \to 0} \int_{-x}^{x} \sin(t^2)\, \mathrm{d}t$.
2. $\lim_{x \to +\infty} \int_{x}^{2x} \frac{dt}{\ln t}$.
3. $\lim_{x \to +\infty} \int_{x}^{2x} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$.