

DEVOIR À LA MAISON N°19

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 – CCP PSI 2018

Notations et définitions

- \mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels et \mathbb{R} celui des nombres réels.
- Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, on note $\mathbb{E}(X)$ cette espérance.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $[-1, 1]$. On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi que X* . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

Objectif

Montrer que si la variable aléatoire X est centrée, ($\mathbb{E}(X) = 0$), alors la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

- 1** On ne suppose pas X centrée dans cette question. Montrer que X admet une espérance.

On suppose désormais que X est *centrée*.

- 2** Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire finie Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que ce résultat est encore vrai lorsque Y est une variable aléatoire discrète non nécessairement finie.

- 3** En déduire que, pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\alpha}.$$

- 4** Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq \frac{(\mathbb{E}(e^{tX}))^n}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Majoration de $\mathbb{E}(e^{tX})$

- 5 Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_a(x) = \frac{1-a}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur \mathbb{R} et que la fonction g'_a est décroissante sur \mathbb{R} . En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geq 0$.

- 6 En déduire que

$$\forall t > 0, \forall x \in [-1, 1], e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t.$$

- 7 En déduire que

$$\forall t > 0, \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \cosh t.$$

- 8 Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que

$$\forall t > 0, \mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}.$$

Majoration de $\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

- 9 Montrer que la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ atteint un minimum en un point que l'on précisera.

- 10 En déduire que $\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}$, puis que

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Conclusion

- 11 Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge.
- 12 On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m \geq n} \{\omega \in \Omega ; |S_m(\omega)| > \varepsilon\}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$, $B_n(\varepsilon)$ est un événement et que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0$.

- 13 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\Omega_k = \left\{ \omega \in \Omega ; \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall m \geq n, |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Ω_k est un événement.

Écrire l'ensemble $A = \left\{ \omega \in \Omega ; \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = 0 \right\}$ à l'aide des événements Ω_k , $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que A est un événement.

- 14 Déduire des questions précédentes que $\mathbb{P}(A) = 1$.