Devoir à la maison n°15 : corrigé

Problème 1 — Intégrales de Wallis et formule de Stirling

Partie I – Intégrales de Wallis

1. Le calcul ne pose aucune difficulté, on trouve $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

2. On intègre par parties

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= [-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^n(t)dt \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)dt \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^n(t)-\sin^{n+2}(t))dt \\ &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \end{aligned}$$

D'où la relation de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

3. D'après la relation de récurrence établie précédemment :

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 3\times 1}{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2} I_0 \\ &= \frac{(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times(2n-3)\times\cdots\times 4\times 3\times 2\times 1}{[(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2]^2} I_0 \\ &= \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2} I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times 5\times 3} I_1 \\ &= \frac{[(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2]^2}{(2n+1)\times(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times\cdots\times 5\times 4\times 3\times 2} I_1 \\ &= \frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!} I_1 = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

4. Puisque $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$$

Ainsi après intégration sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, $I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. On a donc en particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

Soit encore, d'après la relation de récurrence obtenue ci-dessus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

5. Par une récurrence sans difficulté, on prouve à l'aide de l'inégalité précédente que pour tout n positif, $\mathrm{I}_n > 0$. D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_n} \leqslant 1$$

De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

d'où , en appliquant le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_n} = 1$$

et donc $\mathrm{I}_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{I}_n$.

6. On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)\mathrm{I}_{n+2}\mathrm{I}_{n+1} = (n+1)\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n+1}$$

La suite $((n+1)\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante égale à $\frac{\pi}{2}$ car $\mathrm{I}_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\mathrm{I}_1 = 1$.

7. On a $(n+1)\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\mathrm{I}_n^2$ d'après ce qui précède. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} n\mathrm{I}_n^2 = \frac{\pi}{2}$$

Puisque la fonction racine carrée est continue en $\frac{\pi}{2}$ et que I_n est positive,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\mathrm{I}_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Ainsi $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Partie II – Formule de Stirling

1. On a $v_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$. Or

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. Comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathcal{O}(1/n^2)$ et que la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge. Par télescopage, cela signifie que la suite $(\ln(u_n))_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite $\lambda \in \mathbb{R}$. Par continuité de l'exponentielle, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ell = e^\lambda > 0$.

3. On déduit de la question précédente que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{\ell}$.
En utilisant l'expression factorielle de I_{2n} trouvée en **I.3**, on obtient $\mathrm{I}_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi\ell}{\sqrt{2n}}$. Or d'après la question **I.7**, on a $\mathrm{I}_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$. On en déduit $\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Ainsi $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}n^n e^{-n}\sqrt{n}$.

Problème 2 — Puissances de matrices

Partie I –

1. Posons $\mathrm{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{E}_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On a clairement $\mathscr{A} = \mathrm{vect}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3)$ donc $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. De plus, la famille $(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3)$ est libre donc c'est une base de $\mathscr{A}$. Ainsi $\dim \mathscr{A} = 3$.

2. Comme $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, c'est a fortiori un sous-groupe de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. De plus, $\mathrm{I}_3 \in \mathscr{A}$ (choisir $a = b = 1$ et $c = 0$). Enfin, pour $(a, b, c, a', b', c') \in \mathbb{R}^6$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & -c' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 & 0 \\ 0 & bb' - cc' & bc' + cb' \\ 0 & -(bc' + cb') & bb' - cc' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & -c' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$$

Ceci montre que $\mathscr{A}$ est stable par produit et commutatif. Ainsi $\mathscr{A}$ est bien un sous-anneau commutatif de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et donc un anneau commutatif.

3. On calcule $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Tout d'abord, on a bien $\mathrm{I}_3, \mathrm{M}, \mathrm{M}^2 \in \mathscr{A}$. Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda \mathrm{I}_3 + \mu \mathrm{M} + \nu \mathrm{M}^2 = 0$. Ceci équivaut à $\begin{cases} \lambda - 2\mu + 4\nu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \\ -\mu - 2\nu = 0 \end{cases}$. On voit facilement que l'unique solution de ce système est le triplet nul. La famille $(\mathrm{I}_3, \mathrm{M}, \mathrm{M}^2)$ est donc libre. Puisque $\dim \mathscr{A} = 3$, cette famille est une base de $\mathscr{A}$.

4. On obtient $\mathrm{M}^3 = 2\mathrm{M} - 4\mathrm{I}_3$.

Partie II –

1. Comme $\mathscr{A}$ est un anneau, il est stable par produit. On peut donc montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{M}^k \in \mathscr{A}$, d'où l'existence des réels a_k, b_k et c_k.

2. En écrivant $\mathrm{M}^{k+1} = \mathrm{M}\mathrm{M}^k$, on trouve $\begin{cases} a_{k+1} = -2a_k \\ b_{k+1} = b_k - c_k \\ c_{k+1} = b_k + c_k \end{cases}$.

3. On a $z_{k+1} = b_{k+1} + i c_{k+1} = (b_k - c_k) + i(b_k + c_k) = (1+i)z_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite (z_k) est donc géométrique de raison $1+i$ et de premier terme $z_0 = b_0 + i c_0 = 1$: on a alors $z_k = (1+i)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Enfin, puisque b_k et c_k sont réels, $b_k = \mathrm{Re}(z_k) = \mathrm{Re}\big((1+i)^k\big)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4. En utilisant la question **II.2**, on montre que $b_{k+2} = b_{k+1} - c_{k+1} = b_{k+1} - b_k - c_k = 2b_{k+1} - 2b_k$. La suite (b_k) est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont le polynôme caractéristique est $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 2$. Les racines de ce polynômes sont donc $1 \pm i$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que $b_k = \lambda(1+i)^k + \mu(1-i)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or $b_0 = b_1 = 1$ donc $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_k = \frac{(1+i)^k + \overline{(1+i)^k}}{2} = \mathrm{Re}\big((1+i)^k\big)$.

5. Comme u_0, u_1 et u_2 sont entiers et que u_{n+3} s'exprime comme une combinaison linéaire à coefficients entiers de u_n et u_{n+1}, on prouve par récurrence triple ou par récurrence forte que la suite (u_n) est à valeurs entières.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{tr}(\mathrm{M}^{n+3}) = \mathrm{tr}(\mathrm{M}^n \mathrm{M}^3) = \mathrm{tr}(\mathrm{M}^n(2\mathrm{M} - 4\mathrm{I}_3)) = 2\,\mathrm{tr}(\mathrm{M}^{n+1}) - 4\,\mathrm{tr}(\mathrm{M}^n)$ en utilisant la question **I.4** et la linéarité de la trace. De plus, $\mathrm{tr}(\mathrm{M}^0) = \mathrm{tr}(\mathrm{I}_3) = 3$, $\mathrm{tr}(\mathrm{M}^1) = 0$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{M}^2) = 4$: les suites (u_n) et $(\mathrm{tr}(\mathrm{M}^n))$ ont les mêmes trois premiers termes et vérifient la même relation de récurrence d'ordre 3, elles sont donc égales.

7. 2 divise bien $u_2 = 2$: on peut donc supposer p impair. Posons $n = \frac{p-1}{2}$.
Puisque (a_k) est géométrique de raison -2 et de premier terme $a_0 = 1$, on a $a_k = (-2)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$u_p = a_p + 2b_p = (-2)^p + 2\,\mathrm{Re}((1+i)^p) = -2^p + 2\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \mathrm{Re}(i^k)$$

Or pour k impair, $\mathrm{Re}(i^k)=0$ donc

$$u_p = -2^p + \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{2k}(-1)^k = -(2^p-2) + 2\sum_{k=1}^{n} \binom{p}{2k}(-1)^k$$

D'après le petit théorème de Fermat, p divise $2^p - 2$ et puisque pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $2 \leqslant 2k \leqslant p-1$, p divise également $\binom{p}{2k}$ d'après le rappel de l'énoncé. Ainsi p divise u_p.