Devoir à la maison n°08

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $B = P^{-1}AP$.
Par propriété de la trace, $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(APP^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$.
Par propriété du déterminant,

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(P)^{-1}\det(A)\det(P) = \det(A)$$

Deux matrices semblables sont a fortiori équivalentes et ont donc même rang : $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(A)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$B - \lambda I_n = P^{-1}AP - \lambda I_n = P^{-1}(A - \lambda I_n)P$$

Donc $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$ sont semblables donc ont même déterminant d'après ce qui précède. Ainsi

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n) = \chi_A(\lambda)$$

Ainsi $\chi_B = \chi_A$.

2 Il est clair que $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) = 5$. Comme A et B sont triangulaires à coefficients diagonaux non nuls, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B) = 3$. Comme A et B sont triangulaires, $\det(A) = \det(B) = 4$ et $\chi_A = \chi_B = (X-1)(X-2)^2$.
On a donc $\operatorname{Sp}(A) = \operatorname{Sp}(B) = \{1, 2\}$.
Posons $P = (X-1)(X-2)$. On vérifie que $P(A) = 0$. Comme $\operatorname{Sp}(A) = \{1, 2\}$, on a donc $\mu_A = P$. Comme μ_A est simplement scindé, A est diagonalisable.
Comme $\operatorname{Sp}(B) = \{1, 2\}$, si B était diagonalisable, on aurait de même $\mu_B = P$. Or $P(B) \neq 0$ donc $\mu_B \neq 0$.
Comme A et B n'ont pas le même polynôme minimal, A et B ne sont pas semblables.

3
- Comme la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est A, on a $u(e_1) = e_2 + 2e_3$, $u(e_2) = e_1 + e_3$ et $u(e_3) = e_1$. La matrice de u dans la base (e_2, e_1, e_3) est donc B. On en déduit que A et B sont semblables.
- Un calcul donne $\chi_A = \chi_B = X^3 - 3X - 1$ (en utilisant la règle de Sarrus par exemple). Posons $P = X^3 - 3X - 1$. Alors $P' = 3X^2 - 3 = 3(X-1)(X+1)$. Ainsi P est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$, strictement décroissante sur $[-1, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Or $\lim\limits_{-\infty} P = -\infty$, $P(-1) = 1 > 0$, $P(1) = -3 < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} P = +\infty$. Comme P est continu sur $\mathbb{R}$, P s'annule exactement trois fois sur $\mathbb{R}$ en vertu du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Comme $\deg P = 3$, P possède exactement trois racines toutes réelles. On les note α, β et γ. Comme $\chi_A = \chi_B = P$ est simplement scindé, A et B sont toutes deux diagonalisables et semblables à la même matrice diagonale de coefficients diagonaux α, β et γ. Comme la similitude est une relation d'équivalence, A et B sont semblables.

4 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A. D'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} u = n-1$. Choisissons un supplémentaire S de $\operatorname{Ker} u$. Dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = S \oplus \operatorname{Ker} u$, la matrice de u est de la forme de U. Ainsi A est semblable à U.

5 On trouve $U^2 = a_n U$. Or $U^2 \neq 0$ donc $a_n \neq 0$. Ainsi $X^2 - a_n X = X(X - a_n)$ est un polynôme annulateur de U (et donc de u) simplement scindé. u est donc diagonalisable.

6 Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{C})$. Alors $\chi_A = X^2$. Notamment $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle et donc nulle, ce qui n'est pas. A n'est donc pas diagonalisable.

$\boxed{7}$ Les deux dernières colonnes de A sont les mêmes que les deux premières. Supposons que ces deux colonnes soient liées. Il existerait alors $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\beta = \lambda\alpha$ et $\alpha = \lambda\beta$ et donc $\alpha = \lambda^2\alpha$. Comme $\alpha \neq 0$, on aurait donc $\lambda^2 = 1$ i.e. $\lambda = \pm 1$ puis $\alpha = \pm\beta$, ce qui est exclu. Ainsi les deux premières colonnes de A sont linéairements indépendantes de sorte que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2$. Notamment $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) < 4$, A n'est donc pas inversible : $0 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.

En posant $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{AU} = 2(\alpha+\beta)\mathrm{U}$ donc $2(\alpha+\beta) \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$. En posant $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{AV} = 2(\alpha-\beta)\mathrm{V}$ donc $2(\alpha-\beta) \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.

D'après le théorème du rang $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{A}) = 2$. On voit facilement que $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$.
Ainsi $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est une base de vecteurs propres de A.

$\boxed{8}$ Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. En notant (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a donc

$$u(e_1) = \lambda e_1 \qquad\qquad u(e_2) = \lambda e_2 + b e_1$$

Posons $f_1 = \frac{a}{b} e_1$ et $f_2 = e_2$. Comme $\frac{a}{b} \neq 0$, (f_1, f_2) est encore une base de $\mathbb{R}^2$. De plus,

$$u(f_1) = \frac{a}{b} u(e_1) = \lambda \cdot \frac{a}{b} e_1 = \lambda f_1 \qquad\qquad u(f_2) = u(e_2) = \lambda e_2 + b e_1 = \lambda e_2 + b \cdot \frac{a}{b} e_1 = \lambda f_2 + b f_1$$

La matrice de u dans la base (f_1, f_2) est donc $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. On en déduit que les matrices $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.

$\boxed{9}$ On a $\mathrm{PB} = \mathrm{AP}$ i.e. $(\mathrm{R} + i\mathrm{S})\mathrm{B} = \mathrm{A}(\mathrm{R} + i\mathrm{S})$ ou encore $\mathrm{RB} + i\mathrm{SB} = \mathrm{AR} + i\mathrm{AS}$. Comme les matrices RB, SB, AR et AS sont à coefficients réels, on obtient $\mathrm{RB} = \mathrm{AR}$ et $\mathrm{SB} = \mathrm{AS}$ en identifiant parties réelle et imaginaire.

$\boxed{10}$ On sait que si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det \mathrm{A} = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{A}_{\sigma(i),i}$. Comme chaque coefficient de $\det(\mathrm{R} + x\mathrm{S})$ est une fonction affine de x, la formule précédente permet d'affirmer que $\varphi : x \mapsto \det(\mathrm{R} + x\mathrm{S})$ est une fonction polynomiale en tant que combinaison linéaire de produits de fonctions affines.
De plus, $\varphi(i) = \det(\mathrm{P}) \neq 0$ car P est inversible. Ainsi φ n'est pas identiquement nulle (sur $\mathbb{C}$). Si φ était nulle sur $\mathbb{R}$, elle admettrait une infinité de racines : tous ses coefficients seraient nuls donc elle serait nulle sur $\mathbb{C}$. Il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{R} + x\mathrm{S}$ est inversible.

$\boxed{11}$ Comme $\mathrm{RB} = \mathrm{AR}$ et $\mathrm{SB} = \mathrm{AS}$, $(\mathrm{R} + x\mathrm{S})\mathrm{B} = \mathrm{A}(\mathrm{R} + x\mathrm{S})$. Puisque $\mathrm{Q} = \mathrm{R} + x\mathrm{S} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ}$ et A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{12}$ $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X} - i)(\mathrm{X} + i)$ est simplement scindé dans $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable et semblable à $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Un calcul évident montre que $\chi_\mathrm{B} = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}$. Pour les mêmes raisons que précédemment, B est également semblable à D dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On en déduit que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Comme A et B sont à coefficients réels, elles sont également semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'après la question précédente.

$\boxed{13}$ Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ telle que $\chi_\mathrm{A} = \chi_\mathrm{B}$ et $\mu_\mathrm{A} = \mu_\mathrm{B}$.

- Si $\chi_\mathrm{A} = \chi_\mathrm{B}$ est simplement scindé dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors A et B sont toutes deux semblables à une même matrice diagonale dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Elles sont donc semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Dans le deuxième cas, puisque A et B sont à coefficients réels, le résultat de la partie précédente sont encore semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Sinon, $\chi_\mathrm{A} = \chi_\mathrm{B} = (\mathrm{X} - \lambda)^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique, on a donc $\mu_\mathrm{A} = \mu_\mathrm{B} = (\mathrm{X} - \lambda)$ ou $\mu_\mathrm{A} = \mu_\mathrm{B} = (\mathrm{X} - \lambda)^2$.
  - Si $\mu_\mathrm{A} = \mu_\mathrm{B} = (\mathrm{X} - \lambda)$, alors A et B sont toutes deux égales à $\lambda\mathrm{I}_2$. A fortiori, elles sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

– Si $\mu_A = \mu_B = (X - \lambda)^2$, alors A et B ne sont pas diagonalisables puisque leur polynôme minimal n'est pas simplement scindé mais elles sont quand même trigonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisque leur polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$. Les matrices A et B sont donc respectivement semblables à des matrices $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec a et b non nuls (sinon A et B seraient diagonalisables). Le résultat de la question **8** permet alors d'affirmer que A et B sont encore semblables.

14 Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il est clair que $\chi_A = \chi_B = X^4$. De plus, A et B sont nilpotentes d'indice 2 donc $\mu_A = \mu_B = X^2$. Pourtant, A et B ne sont manifestement pas semblables puisque $\mathrm{rg}(A) = 1$ et $\mathrm{rg}(B) = 2$ de sorte que $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(B)$.