DEVOIR SURVEILLÉ N°01

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 ★

Soit $x \in [-1, +\infty[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 2 ★

On définit une suite (u_n) par ses deux premiers termes $u_0 = u_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq u_n \leq n^2$$

Exercice 3 ★

On définit une suite (u_n) par $u_0 = u_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (n+1)(u_n + u_{n+1})$$

Montrer que $u_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
REMARQUE. On rappelle que $0! = 1$ et que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $n!$ désigne le produit de tous les entiers compris entre 1 et n.

Exercice 4 ★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

Exercice 5 ★

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$

1. Déterminer $f(0)$.

2. En déduire que $f(x) = x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Etudier la réciproque.

Exercice 6 ★

Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on pose

$$d_1(x, y) = |x - y|$$

et

$$d_2(x, y) = \left|\frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1}\right|$$

1. Prouver que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 ,\ d_2(x, y) = 0 \iff x = y$$

2. Justifier que

$$\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \ \ d_2(x, z) \leq d_2(x, y) + d_2(y, z)$$

3. Prouver que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 ,\ d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$$

4. Existe-t-il un réel λ tel que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 ,\ d_1(x, y) \leq \lambda d_2(x, y)$$

Exercice 7 ★★

Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. Montrer que

$$(1 - \lambda)\sqrt{x} + \lambda\sqrt{y} \leq \sqrt{(1 - \lambda)x + \lambda y}$$

Exercice 8 ★

Soit E un ensemble. On rappelle que pour toute partie X de E, on note $\overline{\mathrm{X}}$ son complémentaire dans E. On rappelle également que si X et Y sont deux parties de E, on définit la différence ensembliste de X et Y par $\mathrm{X} \setminus \mathrm{Y} = \mathrm{X} \cap \overline{\mathrm{Y}}$.

On considère trois parties A, B et C de E.

1. Montrer que $\mathrm{A} \setminus (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \setminus \mathrm{C})$.

2. Montrer que $\mathrm{A} \setminus (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \setminus \mathrm{C})$.

3. Montrer que $\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \setminus \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \setminus (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$.

4. A-t-on toujours $\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \setminus \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \setminus (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$? Le prouver ou donner un contre-exemple.