Devoir à la maison n$^{\text{o}}$ 9

Problème 1 —

Partie I – Etude de suites

On note S l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $a_0 \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $a_n \in \mathbb{N}^*$.

Etant donné une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$p_0 = a_0\ ,\ p_1 = a_0a_1 + 1\ ,\ q_0 = 1\ ,\ q_1 = a_1$$

puis, pour $n \geqslant 2$, par :

$$p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{et} \quad q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $q_n \geqslant n$.

2. Relations entre les p_n et les q_n.

a. Pour $n \geqslant 1$, calculer $p_nq_{n-1} - q_np_{n-1}$.

b. Pour $n \geqslant 2$, calculer $p_nq_{n-2} - q_np_{n-2}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

a. Pour $n \geqslant 1$, calculer $x_n - x_{n-1}$ et pour $n \geqslant 2$, calculer $x_n - x_{n-2}$ en fonction des a_k et des q_k.

b. Quel est le sens de variation des suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel α. Préciser la position relative de α, x_n et x_{n+1} suivant la parité de n.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \alpha| < \dfrac{1}{q_n^2}$.

d. Démontrer par l'absurde que α est un nombre irrationnel.

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tels que $q < q_{n+1}$. On souhaite l'inégalité suivante

$$|q\alpha - p| \geqslant |q_n\alpha - p_n| \tag{MA}$$

a. Montrer qu'il existe deux entiers u et v vérifiant

$$\begin{cases} p = up_n + vp_{n+1} \\ q = uq_n + vq_{n+1} \end{cases}$$

b. Montrer que $u \neq 0$.

c. Etablir l'inégalité (MA) dans le cas $v = 0$.

d. On suppose maintenant v non nul. Montrer que u et v sont de signes contraires puis établir l'inégalité MA.

5. Soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{2q^2}$.

a. Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $q_N \leqslant q < q_{N+1}$.

b. Montrer que $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p_N}{q_N}$.

6. Soit $\lambda \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul fixé ; on considère la fonction f définie pour tout t réel par $f(t) = t^2 - \lambda t - 1$.

a. Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-1, \lambda + 1]$.

b. On note r_1 et r_2, avec $r_1 < r_2$, les deux racines de f. Déterminer le signe et la partie entière de chacune des racines.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on prend $a_n = \lambda$ et on considère la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a. Pour $i \in [\![0, 3]\!]$, calculer p_i et q_i.

b. Pour $n \geqslant 1$, exprimer q_n en fonction des p_k pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire une expression de x_n en fonction des q_k pour $k \in \mathbb{N}$.

c. Exprimer q_n en fonction de r_1, r_2 et n.

d. Déduire des questions précédentes une expression de x_n en fonction de r_1, r_2 et n.

e. En déduire la valeur de la limite α de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de r_1 et r_2.

f. On prend $\lambda = 3$. Calculer q_n pour $n \in [\![0, 6]\!]$. En déduire deux nombres rationnels qui encadrent α à 10^{-4} près.

Partie II – Algorithme des fractions continues

Etant donné une suite de nombres réels $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que pour tout $n \geqslant 1$ on ait $b_n > 0$, on définit la suite dont le terme général d'indice n est noté $[b_0, b_1, \dots, b_n]$ par :

$$[b_0] = b_0\ ,\ [b_0, b_1] = b_0 + \frac{1}{b_1}\ ,\ \text{puis pour } n \geqslant 1,\ [b_0, \dots, b_n, b_{n+1}] = \left[b_0, \dots, b_{n-1}, b_n + \frac{1}{b_{n+1}}\right].$$

En particulier $[b_0, b_1, b_2] = \left[b_0, b_1 + \frac{1}{b_2}\right]$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence sur r que

$$[b_0, \dots, b_{n-1}, [b_n, \dots, b_{n+r}]] = [b_0, \dots, b_{n+r}]$$

2. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de S. On lui associe les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies dans I.

a. Ecrire $[a_0, a_1]$ et $[a_0, a_1, a_2]$ sous forme de fractions en fonction des a_i.

b. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout réel x strictement positif :

$$[a_0, \dots, a_n, x] = \frac{p_n x + p_{n-1}}{q_n x + q_{n-1}}$$

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[a_0, \dots, a_n] = x_n$.

3. Dans **I.3**, on a montré que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre irrationnel α. On note F l'application de S dans l'ensemble des nombres irrationnels définie par $F(a) = \alpha$. On admet pour l'instant que F est surjective.
Soient donc α un nombre irrationnel et $a \in S$ une suite telle que $\alpha = F(a)$.

a. Comparer x_0, x_1 et α. En déduire que a_0 est la partie entière de α.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer $[a_0, \dots, a_n] = a_0 + \dfrac{1}{[a_1, \dots, a_n]}$.

c. Pour $k \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} [a_k, \dots, a_n]$. On notera α_k cette limite.

d. Montrer l'égalité $\alpha = \alpha_0 = a_0 + \dfrac{1}{\alpha_1}$. Donner une relation entre α_k, α_{k+1} et a_k.

e. Décrire un algorithme qui donne la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire que F est bijective. On justifiera en particulier la surjectivité de F.

f. On prend $\alpha = \sqrt{3}$ et on note $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$ la suite vérifiant $F(a) = \sqrt{3}$. Calculer a_0, a_1, a_2, a_3 et exprimer α_1, α_2 et α_3 en fonction de $\sqrt{3}$. Déterminer la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie III – Nombres algébriques quadratiques

On dira qu'un réel α est *quadratique* s'il est solution d'une équation polynomiale de degré 2 à coefficients entiers, autrement dit, s'il existe $A, B, C \in \mathbb{Z}$ avec $A \neq 0$ tels que $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$.
On se donne dans cette partie α un nombre irrationnel et $a = F^{-1}(\alpha)$ la suite de S qui lui est associée.

1. On suppose a périodique de période m.

a. On suppose $m = 1$. Montrer que α est quadratique.

b. On suppose maintenant $m \geqslant 2$. Montrer que $\alpha = [a_0, \dots, a_{m-1}, \alpha]$ et en déduire que α est quadratique.

2. a. Soient θ un réel quadratique et $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ des entiers tels que $\kappa\nu - \lambda\mu \neq 0$ et μ, ν non simultanément nuls. Montrer que $\varphi = \dfrac{\kappa\theta + \lambda}{\mu\theta + \nu}$ est également quadratique.

b. On suppose maintenant a périodique de période m à partir du rang r. Montrer que α est quadratique.

3. On suppose α quadratique. Soient donc $A, B, C \in \mathbb{Z}$ avec $A \neq 0$ tels que $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$.

a. Pour $n \geqslant 2$, on pose

$$\begin{aligned}
A_n &= Ap_{n-1}^2 + Bp_{n-1}q_{n-1} + Cq_{n-1}^2 \\
B_n &= 2Ap_{n-1}p_{n-2} + B\left(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}\right) + 2Cq_{n-1}q_{n-2} \\
C_n &= Ap_{n-2}^2 + Bp_{n-2}q_{n-2} + Cq_{n-2}^2
\end{aligned}$$

Vérifier que $A_n\alpha_n^2 + B_n\alpha_n + C_n = 0$.

b. Calculer $A_n - q_{n-1}^2(A\alpha^2 + B\alpha + C)$. En déduire que la suite $(A_n)_{n\geqslant 2}$ est bornée puis que la suite $(C_n)_{n\geqslant 2}$ est également bornée.

c. On pose $\Delta = B^2 - 4AC$ et $\Delta_n = B_n^2 - 4A_nC_n$ pour $n \geqslant 2$. Vérifier que $\Delta_n = \Delta$. En déduire que $(B_n)_{n\geqslant 2}$ est également bornée.

d. Montrer que l'ensemble des racines des trinômes $A_nX^2 + B_nX + C_n$ pour $n \geqslant 2$ est fini.

e. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha_r = \alpha_{r+m}$.

f. En déduire que a est périodique à partir d'un certain rang.

4. On suppose à nouveau α quadratique. Il existe donc un polynôme P à cofficients entiers de degré 2 annulant α. On note α' la seconde racine de P.

a. Montrer que α' ne dépend pas du choix du polynôme P. On appellera α' le conjugué de α.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, α_n est quadratique. Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera α'_n le conjugué de α_n.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha'_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha'_n - a_n}$.

d. On suppose $\alpha > 1$ et $-1 < \alpha' < 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < \alpha'_n < 0$. En déduire que a_n est la partie entière de $-\dfrac{1}{\alpha'_{n+1}}$.

e. En déduire que a est périodique (à partir du rang 0).

Partie IV – Equation de Pell-Fermat

Soit d un entier naturel qui ne soit pas un carré d'entier. On se propose de résoudre l'équation de Pell-Fermat

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{PF}$$

d'inconnues $x, y \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\sqrt{d}$ est irrationnel.

2. On pose $\alpha = \sqrt{d}$ et $a = F^{-1}(\alpha)$. Montrer que a est périodique à partir du rang 1 en utilisant la question **III.4**. On notera m la plus petite période de $(a_n)_{n \geqslant 1}$.

3. On reprend les notations de la partie I.
Soit (x, y) un couple de solutions de (PF) avec $y \neq 0$.

- **a.** A l'aide de la question **I.5**, montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x = p_N$ et $y = p_N$.
- **b.** Montrer que $\dfrac{p_N}{q_N} > \sqrt{d}$ et en déduire que N est impair. On pourra utiliser la question **I.3.b**.
- **c.** Justifier que $\sqrt{d} = \dfrac{p_N \alpha_{N+1} + p_{N-1}}{q_N \alpha_{N+1} q_{N-1}}$.
- **d.** En déduire qu'il existe un entier b tel que $\alpha_{N+1} = \sqrt{d} + b$.
- **e.** Montrer que $N \equiv -1[m]$.

4. Réciproquement, soit $N \in \mathbb{N}$ impair tel que $N \equiv -1[m]$. Montrer que (p_N, q_N) est un couple de solutions de (PF).