Généralités

Exercice 1 Lemme de Borel-Cantelli et loi du zéro-un de Borel

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$ et $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

1. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ converge.

a. Montrer que $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

b. En déduire que $\mathbb{P}(A) = 0$.

2. On suppose que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

a. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{A_k}\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(A_k)\right)$$

b. En déduire que $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 2 D'après ESCP 2006

Des joueurs $J_1, \dots, J_n$ jouent successivement l'un après l'autre à un jeu indéterminé jusqu'à ce que l'un des joueurs gagnent (si aucun des joueurs n'a gagné lors du premier tour, on recommence un tour et ainsi de suite). On considère qu'à chaque fois que le joueur J_k joue, il a une probabilité $p_k > 0$ de gagner. On pose également $q_k = 1 - p_k$. On note G_k l'événement «le joueur J_k gagne».

1. Exprimer la probabilité de G_k en fonction de $q_1, \dots, q_n$ et p_k.

2. Montrer que le jeu se finit presque sûrement i.e. avec une probabilité 1.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le jeu soit équitable i.e. que chaque joueur ait une probabilité $1/n$ de gagner.

4. Déterminer le nombre moyen de coups joués lors d'une partie.

Exercice 3 ★★

Deux archers A_1 et A_2 sont en compétition : ils tirent alternativement (A_1 aux rangs impairs, A_2 aux rangs pairs), touchant la cible avec probabilité p_i ($i = 1, 2$), et la partie s'arrête dès que l'un des deux a atteint la cible.

1. Quelle est la probabilité que A_1 l'emporte au tour $2n+1$?

2. Quelle est la probabilité que A_2 l'emporte au tour $2n+2$?

3. En déduire les probabilités que A_1 (resp A_2) l'emporte, et celle que le jeu dure indéfiniment.

4. A quelle condition le jeu est-il équitable ? Est-ce le cas si $p_1 > 1/2$?

Probabilités conditionnelles

Exercice 4

On dispose initialement d'une fleur F_0 qui meurt à l'instant 1 en ayant deux descendances avec probabilité p, ou aucune. Chaque nouvelle fleur suit le même destin, les unes indépendamment des autres. On note D_n : «la lignée de F_0 est éteinte à l'instant n (ou avant)» et p_n sa probabilité.

1. Calculer p_0 et p_1.

2. Justifier que la suite (p_n) converge.

3. Prouver que $p_{n+1} = pp_n^2 + 1 - p$.

4. Déterminer la limite de (p_n).

Exercice 5

On lance une pièce de monnaie et on gagne un point si pile apparaît (avec probabilité p), deux points si c'est face (avec probabilité $q = 1 - p$). Le jeu s'arrête dès qu'on a atteint ou dépassé n, et l'on s'intéresse à la probabilité g_n qu'on ait marqué n points exactement. Prouver la relation $g_{n+2} = pg_{n+1} + qg_n$ et en déduire g_n en fonction de n.

Exercice 6 **Probabilité d'obtenir deux piles consécutifs**

On lance une infinité de fois une pièce donnant pile avec probabilité $p > 0$ et face avec probabilité $1-p$. Quelle est la probabilité d'obtenir deux piles consécutifs au cours de ces lancers ?

Variables aléatoires

Exercice 7 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $\mathbb{P}(X = k) = r\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^r \, dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que cette relation définit bien la loi d'une variable aléatoire.
2. Donner une condition sur r pour que l'espérance soit définie et la calculer.

Exercice 8 ★★★ **BECEAS MP 2019**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires réelles définies sur cet espace.
Montrer que $A = \left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0\right\}$ est un événement.

Exercice 9 **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

On dispose d'une urne contenant trois jetons indiscernables numérotés de 1 à 3. On effectue une série de tirages indépendants avec remise d'un jeton. On note :

- Y la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages nécessaires pour avoir deux nombres différents ;
- Z la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages nécessaires pour avoir les trois numéros.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Déterminer la loi de $Y - 1$.
3. En déduire $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
4. Déterminer la loi du couple (Y, Z).

Exercice 10

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \ \mathbb{P}(X = j, Y = k) = \frac{a(j+k)}{2^{j+k}}$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Lois usuelles

Exercice 11 ★★ **CCINP (ou CCP) PC 2017**

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de lois géométriques de paramètres p_1 et p_2. Déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 12 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soient X, Y, Z des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$. En déduire $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$.
2. Déterminer la loi de $X + Y$.
3. Calculer $\mathbb{P}(Z > n)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(Z > X + Y)$.

Exercice 13 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Une urne contient initialement une boule blanche. On effectue un ou plusieurs lancers indépendants d'une pièce équilibrée :

- si on obtient pile, on ajoute une boule noire et on lance à nouveau la pièce ;
- si on obtient face, on tire une boule de l'urne et l'expérience s'arrête.

On note X le numéro du lancer auquel on arrête l'expérience.

1. Déterminer la loi de X.

2. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Exercice 14 ★★★★ **Centrale-Supélec MP 2021**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $\mathrm{U} = \min(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et $\mathrm{V} = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$.

1. Écrire explicitement les lois suivies par X et Y.

2. **a.** Déterminer la loi conjointe du couple (U, V) puis les lois de U et de V.

b. Montrer que U et V sont deux variables aléatoires indépendantes.

3. Réciproquement, on suppose que X et Y sont indépendantes de même loi, et que U et V sont indépendantes telles que

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(\{\mathrm{U} = n\} \cap \{\mathrm{V} = m\}) \neq 0$$

Montrer que X et Y suivent une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Exercice 15 **CCINP (ou CCP) MP 2018**

On a n pièces de puzzle réparties dans des boîtes de biscuits. La répartition est équiprobable. On achète une boîte par semaine. On note Y_1 le nombre d'achats à effectuer avant d'obtenir la première pièce du puzzle.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note Y_k le nombre d'achats à effectuer, sachant qu'on a eu une $(k-1)^{\text{ème}}$ pièce différente, avant d'avoir une $k^{\text{ème}}$ pièce qu'on n'a pas déjà eue.

a. Les variables aléatoires Y_k sont-elles mutuellement indépendantes ? Justifier que Y_1 peut s'écrire comme une constante simple.

b. Donner la loi de Y_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$. Donner l'espérance, puis la variance de Y_k.

2. On note X le nombre d'achats à effectuer avant d'avoir le puzzle complet. Exprimer X en fonction des Y_k. Donner l'espérance de X.

3. Pour $k \in [\![2, +\infty[\![$, justifier l'encadrement $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, et en déduire un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$. Donner un équivalent quand $n \to +\infty$ de l'espérance de X.

Exercice 16

Soient X et Y deux variables aléatoires suivant des lois de Poisson telles que $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ suit une loi de Poisson.

1. Montrer que $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$.

2. X et Y sont-elles nécessairement indépendantes ?

Exercice 17 **C.C.E. Mines MP 2015**

On considère un péage composé de m guichets. On note N la variable aléatoire égale au nombre de voitures utilisant le péage en 1h. N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le choix du guichet se fait de manière aléatoire et indépendamment des autres voitures. On note X la variable aléatoire égale au nombre de voitures ayant pris le guichet n°1.

1. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k \mid \mathrm{N} = n)$ pour $0 \leq k \leq n$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \frac{1}{n!}$.
3. Donner la loi de X.
4. Espérance et variance de X ?

Exercice 18 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2019**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
3. On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $\mathrm{Y} = \mathrm{I}_\mathrm{X}$. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$.

Espérance et variance

Exercice 19 ★★★ **Formule d'antirépartition**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum \mathbb{P}(\mathrm{X} > n)$ converge et que, dans ce cas, $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} > n)$.

Exercice 20 ★★★★ **Centrale MP 2015**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{E}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^\mathbb{N}$ une suite d'événements quelconques. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathrm{E}_n)$ converge.

Pour X un ensemble, on note $\mathbb{1}_\mathrm{X}$ la fonction indicatrice de X.

1. Soit $\mathrm{Z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathrm{E}_n}$ (on convient que $\mathrm{Z} = \infty$ si la série diverge). Montrer que Z est une variable aléatoire. Prouver que Z est une variable aléatoire.
2. Soit
$$\mathrm{F} = \{\omega \in \Omega,\ \omega \text{ appartient à un nombre fini de } \mathrm{E}_n\}$$
Prouver que F est un événement et que $\mathbb{P}(\mathrm{F}) = 1$.
3. Prouver que Z admet une espérance.

Fonctions génératrices

Exercice 21

Soient $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Déterminer la loi de $\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$.

Exercice 22 ★ **Somme de variables binomiales indépendantes**

Soient $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que $\mathrm{X}_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Déterminer la loi de $\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$.

PROBABILITÉS

Exercice 23 ★★★ **Formule de Wald**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. On considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ suivant la même loi que X.
On se donne une autre variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ indépendante des variables aléatoires précédentes.
On pose $\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_k$, c'est-à-dire

$$\forall \omega \in \Omega, \mathrm{S}(\omega) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}(\omega)} \mathrm{X}_k(\omega)$$

1. Justifier que S est bien un variable aléatoire.
2. On note G_X, G_N et G_S les fonctions génératrices respectives de X, N et S. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $\mathrm{G}_\mathrm{S}(t) = \mathrm{G}_\mathrm{N} \circ \mathrm{G}_\mathrm{X}(t)$.
3. On suppose que les variables aléatoires X et N admettent des espérances finies. Montrer qu'il en est de même pour S et exprimer l'espérance de S en fonction de celles de N et X.
4. On suppose que les variables aléatoires X et N admettent des moments d'ordre deux. Montrer qu'il en est de même pour S et exprimer la variance de S en fonction des espérances et des variances de N et X.

Inégalités

Exercice 24 **Inégalité de Hoeffding**

On considère une variable aléatoire discrète X *centrée* et à valeurs dans $[-1, 1]$.

1. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in [-1,1],\ e^{tx} \leq \frac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)e^{t}$$
2. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$
3. En déduire que
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}(e^{t\mathrm{X}}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

On considère une variable aléatoire réelle discrète Y.

4. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(\mathrm{Y} \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon}\mathbb{E}(e^{t\mathrm{Y}})$$

On considère maintenant des variables aléatoires discrètes réelles centrées $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ indépendantes telles que $|\mathrm{X}_k| \leq c_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ ($c_k > 0$). On pose $\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$.

5. Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\mathbb{P}(|\mathrm{S}| \geq \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\sum_{k=1}^n c_k^2}\right)$$

Exercice 25 **Centrale MP 2016**

1. Pour $(x,t) \in [-1,1] \times \mathbb{R}$, montrer que
$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}$$

2. Soit X une variable aléatoire discrète centrée telle que $|\mathrm{X}| \leq 1$. Montrer que $e^{t\mathrm{X}}$ admet une espérance et que
$$\mathrm{E}(e^{t\mathrm{X}}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

3. Soient $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes centrées et $a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que
$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ |\mathrm{X}_i| \leq a_i$$
et on pose $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^n \mathrm{X}_i$. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(e^{t\mathrm{S}_n}\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2\right)$$

4. On pose $s = \sum_{i=1}^n a_i^2$. Montrer que
$$\forall a \in \mathbb{R}_+,\ \mathbb{P}(|\mathrm{S}_n| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2s}}$$

Temps d'arrêt

Exercice 26 **ENS Ulm MPI 2019**

On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que le nombre de «piles» soit égal au double du nombre de «faces». Quelle est la probabilité qu'on ne s'arrête jamais ?

Exercice 27 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

On considère une suite $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire
$$\mathrm{T}_r = \min\left(\left\{n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{i=1}^n \mathrm{X}_i = r\right\} \bigcup \{+\infty\}\right)$$

1. Pour $r = 1$, reconnaître la loi de T_r.

2. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{T}_r = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que l'évènement $(\mathrm{T}_r = +\infty)$ est négligeable.

Exercice 28 **Obtention de deux piles consécutifs**

On lance une infinité de fois une pièce donnant «pile» avec probabilité $\frac{2}{3}$ et «face» avec probabilité $\frac{1}{3}$. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois deux piles consécutifs. On pose alors $p_n = \mathbb{P}(\mathrm{X} = n)$.

1. Calculer p_2 et p_3.

2. Justifier que $p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$ pour tout entier $n \geq 2$.

3. Quelle valeur de p_1 doit-on choisir pour que la relation de récurrence précédente reste valide lorsque $n = 1$?

4. Calculer p_n pour tout entier $n \geq 1$.

5. Calculer l'espérance de X.

Exercice 29 ★★★ **Marche aléatoire**

On considère un point se déplaçant sur un axe. Au temps $n = 0$, il se trouve à l'origine. Il se déplace ensuite successivement d'une unité vers la droite avec une probabilité p et d'une unité vers la gauche avec une probabilité $1 - p$. On note S_n sa position après n déplacements.

1. Déterminer la loi de S_0, S_1 et S_2.
2. Déterminer de manière générale la loi de S_n.
3. Calculer la probabilité p_n de l'événement $\{S_n = 0\}$.
4. Justifier que $P \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$ est définie sur $]-1, 1[$ et calculer $P(t)$ pour $t \in]-1, 1[$.
5. On note T l'instant où le point retourne pour la première fois à l'origine (on covient que $T = +\infty$ si le point ne retourne jamais à l'origine) et on pose $q_n = \mathbb{P}(T = n)$. Justifier que $Q \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} q_n t^n$ est définie et continue sur $[-1, 1]$.
6. Montrer que $P(t) = 1 + P(t)Q(t)$ pour tout $t \in]-1, 1[$.
7. En déduire la valeur de q_n.
8. Calculer la probabilité que le point retourne à l'origine.
9. T est-elle d'espérance finie ?

Exercice 30 ★★★ **CCINP (ou CCP) MP 2018**

1. Une urne contient n boules blanches et n boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément n boules de l'urne.
   - **a.** Quel est le nombre de tirages possibles ?
   - **b.** Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
2. Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une unité. Elle peut aller à tout instant, soit à droite, soit à gauche, avec équiprobabilité. On note C_n l'événement : «la puce est en O après n sauts». On donne : $P(C_0) = 1$.
   - **a.** Déterminer $P(C_{2n+1})$ et $P(C_{2n})$.
   - **b.** Calculer $\lim_{n\to+\infty} P(C_{2n})$ à l'aide de la formule de Stirling.
3. La puce peut à présent se déplacer suivant deux directions (droite, gauche, haut, bas) avec équiprobabilité.
   - **a.** Montrer que $P(C_{2n}) = \binom{2n}{n}^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$.
   - **b.** Calculer $\lim_{n\to+\infty} P(C_{2n})$.