Dénombrement

Exercice 1 ★★★ — Mines-Télécom MP 2017

Quel est le cardinal de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$?

Exercice 2 ★★

Soient n et k deux entiers naturels non nuls.

1. Déterminer le nombre de k-uplets $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ d'entiers tels que $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

2. Déterminer le nombre de k-uplets $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ d'entiers tels que $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$.

Exercice 3 ★

Soit E un ensemble à n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$). On va dénombrer des parties de E, (X, Y, Z) sur lesquelles on posera certaines contraintes.

1. Déterminer le nombre de couples (X, Y) tels que $X \cap Y = \emptyset$.

2. Déterminer le nombre de couples (X, Y) tels que $X \cup Y = E$.

3. Déterminer le nombre de couples (X, Y) tels que (X, Y) forment une partition de E.

4. Déterminer le nombre de triplets (X, Y, Z) tels que $X \cup Y = Z$.

Exercice 4 ★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant une preuve combinatoire, montrer que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. On pourra utiliser une partition d'un ensemble à $2n$ éléments en deux parties de n éléments.

Exercice 5 ★

Quel est le nombre de relations d'ordre total sur un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$?

Exercice 6 ★★ — Identité de Vandermonde

Soient r, m, n des entiers naturels. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$$

Exercice 7 ★★

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant les réels $\delta_k = kx - \lfloor kx \rfloor$ pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer qu'il existe un couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $q \leq n$ et $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

a. Montrer qu'il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$.

b. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $p \in \mathbb{Z}$ tels qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$.

3. On admet l'irrationalité de π. En particulier, $\sin n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pose alors $u_n = \frac{1}{n \sin n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la suite (u_n) admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

a. Montrer que $l = 0$.

b. Aboutir à une contradiction en appliquant le résultat de la question **2.b** à π.

Exercice 8 ★★

Une classe comporte 30 élèves. De combien de façons peut-on constituer répartir les élèves en trinômes ?

Exercice 9 ★

Combien existe-t-il d'anagrammes des mots suivants : «MATHS», «MOTO», «DODO», «ANAGRAMME», «ANTICONSTITUTIONNELLEMENT» ?

Exercice 10 ★ **Apprendre à compter**

Dénombrer le nombre

1. d'applications d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à n éléments ;
2. de bijections entre deux ensembles à n éléments ;
3. d'injections d'un ensemble à $n-1$ éléments dans un ensemble à n éléments ;
4. de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à $n-1$ éléments.

Exercice 11 ★★

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E de cardinal n. On suppose qu'il existe k classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$ et on note p le cardinal de

$$G = \{(x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y\}$$

Montrer que $n^2 \leq kp$.

Exercice 12 ★★

On dispose de 9 jetons numérotés de 1 à 9. On considère une matrice carrée de taille 3 composée de ces 9 jetons. On cherche à déterminer la probabilité p pour que le déterminant de la matrice soit impair.

1. Question préliminaire.
   Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 2$.
   Montrer que le déterminant de A est congru modulo 2 au déterminant de la matrice dont les coefficients sont les restes $r_{i,j}$ de la division euclidienne des $a_{i,j}$ par 2.
2. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 composées des 9 jetons.
   Déterminer card($\mathcal{M}$).
3. On définit $\Omega = \{M \in \mathcal{M}, \det(M) \text{ impair}\}$ et Δ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 dont cinq coefficients sont égaux à 1, quatre coefficients sont nuls et de déterminant impair.
   Donner une relation entre card(Ω) et card(Δ).
4. Détermination de card(Δ).
   a. On considère une matrice de Δ dont une colonne possède trois coefficients égaux à 1.
      Déterminer le nombre K_1 de ces matrices.
   b. On considère une matrice de Δ dont 2 colonnes possèdent exactement un coefficient nul. Déterminer le nombre K_2 de ces matrices.
   c. Calculer card(Δ).
   d. En déduire card(Ω).
5. Déterminer la probabilité p.

Exercice 13 ★★ **CCP PSI 2015**

On dispose d'un alphabet de n lettres ($n \geq 1$). Montrer que le nombre M_n de mots comportant au plus une fois chaque lettre est $\lfloor n!e \rfloor$.

Exercice 14 ★★ **D'après HEC éco 1993**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E_n = [\![1, n]\!]$ et on note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de E_n. On appelle foint fixe de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tout élément a de E_n tel que $\sigma(a) = a$.
Pour $p \in [\![0, n]\!]$, on note $S_{n,p}$ le nombre de permutations de E_n ayant exactement p points fixes.

1. **a.** Montrer que $S_{n,n} = 1$ et que $S_{n,n-1} = 0$.

   b. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} S_{n,k} = n!$.

2. On pose $\omega_n = S_{n,0}$. On convient que $\omega_0 = 1$.

   a. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $S_{n,k} = \binom{n}{k}\omega_{n-k}$.

   b. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!} = 1$.

   c. En raisonnant par récurrence, montrer que $\frac{\omega_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

   d. En déduire $\lim_{n \to +\infty} \frac{\omega_n}{n!}$.

Exercice 15 ★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer le nombre de k-cycles de S_n.

Généralités

Exercice 16

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 8 boules rouges. Quelle est la probabilité de la suite «blanc, blanc, rouge» si on tire successivement trois boules sans remise ?

Exercice 17 **Indice de Gini**

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle positive sur l'univers Ω. L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{x_i, i \in [\![1, n]\!]\}$ où $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. On pose $p_k = P(X = x_k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On suppose de plus que l'espérance de X est non nulle.
On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note M_k le point de coordonnées (u_k, v_k)

$$u_k = \sum_{j=1}^{k} p_j \qquad v_k = \frac{1}{E(X)} \sum_{j=1}^{k} x_j p_j$$

On posera également $u_0 = v_0 = 0$. On appelle *courbe de Lorenz* de X la ligne polygonale joignant les points $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$.

1. Quelles sont les coordonnées du point M_n ? Montrer que la courbe de Lorenz est situé au-dessous de la première bissectrice.

2. On appelle *coefficient de Gini*, noté I(X), le double de l'aire de la portion de plan comprise entre la première bissectrice et la courbe de Lorenz.

   a. Montrer que $I(X) \in [0, 1]$.

   b. Calculer I(X) en fonction de $v_1, \dots, v_n$ et $p_1, \dots, p_n$.

3. **a.** On suppose que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p. Calculer I(X).

   b. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Calculer I(X).

4. Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Montrer que $I(X) = \frac{E(|X_1 - X_2|)}{2E(X)}$.

Exercice 18

On lance deux dés équilibrés et on note les deux faces visibles. On note E l'évènement « la somme des faces visibles est impaire », F l'évènement « au moins l'une des faces est 1 » et G « la somme des faces est 5 ».

1. Déterminer $E \cap F$, $F \cap G$, $\overline{E \cup F}$.

2. Calculer $P(E), P(F), P(G), P(E \cap F), P(F \cap G), P(E \cup F)$.

3. En déduire $P(F \cup G), P(\overline{E} \cup \overline{F}), P(\overline{F} \cap \overline{G})$.

Exercice 19

On jette trois dés identiques. Calculez :

1. la probabilité d'avoir exactement un 6.
2. la probabilité d'obtenir au moins un 6.
3. la probabilité d'obtenir au moins deux faces identiques.

Exercice 20 **Dates d'anniversaires**

On considère une classe de n élèves. Pour chaque élève, on suppose que chaque jour de l'année a la même probabilité d'être le jour de son anniversaire et on ne prend pas en compte les années bissextiles.
Calculer la probabilité p_n que deux élèves au moins de cette classe aient leur anniversaire le même jour.
à partir de combien d'élèves cette probabilité devient supérieure à 0.5 ? Combien vaut-elle si $n = 50$?

Exercice 21

Une urne contient 5 boules blanches et 10 boules noires.

1. On tire au hasard 2 fois une boule de l'urne en remettant la boule après le tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir 1 boule blanche et 1 boule noire,
   a. dans cet ordre ?
   b. dans un ordre quelconque ?
2. On tire simultanément 5 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 3 boules noires ?

Indépendance

Exercice 22

Une famille à n enfants ($n \geq 2$). On note

- A l'événement «la famille a des enfants des deux sexes» ;
- B l'événement «la famille a au plus une fille».

Montrer que A et B sont des événements indépendants si et seulement si $n = 3$.

Exercice 23

On lance un dé blanc et un dé rouge. On note b et r les numéros obtenus. On considère les évènements «b+r=7», «b=4» et «$|b - r|$ est pair». Ces évènements sont-ils deux à deux indépendants ?

Exercice 24

Votre voisin a deux enfants dont vous ignorez les sexes. On considère les trois événements suivants :

- A : «Les deux enfants sont de sexes différents» ;
- B : «L'aîné est une fille» ;
- C : « Le cadet est un garçon».

Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 25

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un univers probabilisé, et A, B et C trois évènements mutuellement indépendants, de probabilités différentes de 0 et 1.

1. Montrer que A et $\mathrm{B} \cup \mathrm{C}$ sont indépendants.
2. Montrez que $\mathrm{P}(\mathrm{B} \cup \mathrm{C})$ est strictement inférieure à 1.

Probabilités conditionnelles

Exercice 26

On considère une urne A contenant deux boules rouges et trois boules vertes et une urne B contenant trois boules rouges et deux boules vertes. On tire au hasard une boule dans l'urne A que l'on place dans l'urne B. On tire ensuite successivement et sans remise deux boules dans l'urne B. Quelle est la probabilité que la boulé tirée dans l'urne A soit verte sachant que les deux boules tirées dans l'urne B sont rouges ?

Exercice 27

On considère trois cartes :

- une avec les deux faces rouges ;
- une autre avec les deux faces blanches ;
- la dernière avec une face rouge et une face blanche.

On tire une carte au hasard et on expose une face au hasard : elle est rouge. Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?

Exercice 28 ★

Dans une usine, deux chaînes A et B fabriquent le même composant de manière indépendante. Les composants issus de la chaîne A (resp. B) sont défectueux avec un probabilité de 2% (resp. 4%). La chaîne A (resp. B) produit 30 (resp. 20) composants par jour. On choisit au hasard un composant produit dans la journée.

1. Avec quelle probabilité ce composant est-il défectueux ?

2. S'il est défectueux, quelle est la probabilité qu'il ait été produit par la chaîne B ?

Exercice 29 **Une chaîne de Markov**

Un buveur impénitent décide d'essayer de ne plus boire. S'il ne boit pas un jour donné, la probabilité qu'il ne boive pas le lendemain est de $0,4$. S'il succombe à la tentation un jour, alors le remords fait que la probabilité qu'il ne boive pas le lendemain monte à $0,8$.

1. Quelle est la probabilité que ce buveur ne boive pas le $n^{\text{ème}}$ jour ?

2. Que se passe-t-il lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 30

Un examen comporte quinze questions. Chaque question admet trois réponses possibles. Les étudiants répondent à chaque question indépendamment. On suppose que les étudiants ayant préparé l'examen sont ne proportion 70% et répondent correctement à une question avec une probabilité de $0,8$. Les 30% d'étudiants restants choisissent les réponses au hasard. Il faut au moins 8 bonnes réponses pour réussir l'examen.

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard réussisse l'examen ?

2. Si un étudiant échoue, quelle est la probabilité qu'il ait préparé l'examen ?

Exercice 31

Le génotype d'un individu est un ensemble de 2 gènes parmi a et A. Trois génotypes sont possibles : 1 (aa), 2 (aA) et 3 (AA). L'ordre ne compte pas dans le sens que aA et Aa représente le même génotype.
On s'intéresse à l'évolution d'une population de grande taille (génération 0) dont la proportion du génotype i est notée u_i pour $i \in \{1,2,3\}$.
On suppose les mariages aléatoires et on rappelle que le génotype d'un enfant est formé d'un gène issu de celui de chaque parent, les deux gènes d'un parent ayant la même probabilité d'être transmis.
Soit E le génotype d'un enfant de la première génération.

1. **a.** On note F et M les génotypes respectifs du père et de la mère. Exprimer les probabilités conditionnelles $\mathrm{P}(\mathrm{E}=1|(\mathrm{F},\mathrm{M})=(i,j))$ pour $(i,j)\in\{1,2,3\}^2$.

   b. En déduire que
   $$\mathrm{P}(\mathrm{E}=1)=\left(u_1+\frac{u_2}{2}\right)^2$$
   puis la valeur de $\mathrm{P}(\mathrm{E}=3)$.

   c. On pose $\theta = u_1+\frac{u_2}{2}$. Déterminer en fonctions de θ les proportions des divers génotypes à la première génération : q_1, q_2, q_3.

   d. Calculer les proportions des divers génotypes à la deuxième génération et en déduire qu'elles sont inchangées au cours du temps.

2. On dispose d'un échantillon de n individus de cette population stabilisée. On note X_i le génotype du $i^{\text{ème}}$ individu de sorte que $\mathrm{P}(\mathrm{X}_i=j)=q_j$. Les variables $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n$ sont supposées mutuellement indépendantes. Pour $j\in\{1,2,3\}$, on note N_j le nombre d'individus de l'échantillon possédant le génotype j.

   a. Pour $j\in\{1,2,3\}$, déterminer la loi de N_j, son espérance et sa variance.

   b. Calculer $\mathrm{Cov}(\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2)$ en fonction de n, q_1, q_2.

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\theta_n=\frac{\mathrm{N}_1}{n}+\frac{\mathrm{N}_2}{2n}$ (N_1 et N_2 dépendent elles-mêmes de n).

   a. Calculer l'espérance de θ_n.

   b. Montrer que la variance de θ_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 32

On dispose d'un dé à 6 faces et d'une pièce de monnaie. Après avoir lancé n fois le dé, on lance la pièce autant de fois qu'on a obtenu le 6 avec le dé. On note S le nombre de 6 obtenus avec le dé et F le nombre de faces obtenues avec la pièce.

1. Quelle est la loi de S ?
2. Soit $s\in[\![0,n]\!]$. Déterminer la loi de F conditionnée par l'événement $\mathrm{S}=s$.
3. Montrer que F suit la loi $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{12}\right)$.

Exercice 33

Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne. Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

Exercice 34

On considère une urne contenant 3 boules vertes et 3 boules rouges. On lance un dé et on tire simultanément dans l'urne autant de boules que le chiffre obtenu. On note X le nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de X.

Exercice 35

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On choisit au hasard un entier X entre 1 et n puis on choisit au hasard un entier Y entre 1 et X.

1. Déterminer la loi de Y. On donnera les probabilités sous forme de sommes.
2. Déterminer un expression simple de l'espérance de Y.
3. Donner un équivalent de l'espérance de Y lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 36 **Boules et urnes**

Une urne contient quatre boules rouges et deux boules noires.

1. On effectue au hasard un tirage simultané et sans remise de deux boules de l'urne. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules noires obtenues. Déterminer la loi de X.

2. Après ce premier tirage, il reste donc quatre boules dans l'urne. On effectue à nouveau au hasard un tirage simultané et sans remise de deux boules de l'urne. On note Y le nombre de boules noires obtenues au second tirage.
Déterminer la loi de Y.

3. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire au premier tirage sachant que l'on a tiré une seule boule noire au second tirage ?

4. Déterminer la probabilité de l'événement suivant :
«Il a fallu exactement deux tirages pour extraire les deux boules noires de l'urne».

Exercice 37

On considère n sacs $S_1, \dots, S_n$. Le sac S_k contient k jetons blancs et $n+1-k$ jetons noirs. On choisit un sac aléatoirement, de sorte que le sac S_k est choisi avec la probabilité αk pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, pour un certain réel α fixé. On tire ensuite un jeton au hasard dans le sac choisi.

1. Quelle doit être la valeur de α ?

2. Le jeton tiré est noir. Quelle est la probabilité qu'il provienne du sac S_k ?

Exercice 38

Une urne U_1 contient 1 boule noire et 5 boules blanches. Une autre urne U_2 contient 4 boules noires et 2 blanches. On effectue dans ces urnes une suite de tirages d'une boule de la façon suivante :

- le 1^{er} tirage se fait au hasard dans l'une ou l'autre des deux urnes ;
- si le n-ième tirage ($n \in \mathbb{N}^*$) donne une boule blanche, le $(n+1)$-ième tirage s'effectue dans la même urne que le n-ième tirage ;
- si le n-ième tirage donne une boule noire, on change d'urne pour effectuer le $(n+1)$-ième tirage ;
- chaque boule tirée est aussitôt remise dans l'urne d'où elle provient.

Pour tout $n \geq 1$, on note A_n l'évènement « le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U_1 » et B_n l'évènement « une boule blanche est obtenue au n-ième tirage ».

1. On pose $p_n = P(A_n)$ pour tout $n \geq 1$.
   a. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n (pour tout $n \geq 1$).
   b. En déduire la valeur de p_n en fonction de n, puis montrer que $(p_n)_{n\geq 1}$ converge et donner sa limite.

2. On pose $q_n = P(B_n)$ pour tout $n \geq 1$.
   a. Exprimer q_n en fonction de p_n.
   b. En déduire que $(q_n)_{n\geq 1}$ converge et donner sa limite.

Variables aléatoires

Exercice 39

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
On pose $Y = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.
   a. Déterminer les lois de Y et Z.
   b. Calculer leurs espérances et leurs variances.
   c. Déterminer des équivalents des espérances et des variances de Y et Z lorsque n tend vers $+\infty$.
   d. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?
2. On se donne maintenant $p \in \mathbb{N}^*$ et on considère p variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \dots, X_p$ suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
On pose $Y = \max(X_1, \dots, X_p)$ et $Z = \min(X_1, \dots, X_p)$.
   a. Déterminer les lois de Y et Z.
   b. Calculer les espérances de Y et Z (sous forme d'une somme) ainsi que leurs limites lorsque p tend vers $+\infty$.
   c. Déterminer des équivalents des espérances de Y et Z lorsque n tend vers $+\infty$, p étant fixé.

Exercice 40 **Les boîtes d'allumettes de Banach**

Un fumeur a dans chacune de ses poches droite et gauche une boîte d'allumettes de contenance N chacune. Lorsqu'il désire une allumette, il choisit au hasard une de ses poches (chacune avec un probabilité 1/2). On considère le moment où, pour la première fois, le fumeur ouvre une boîte vide. A ce moment, l'autre boîte peut contenir un nombre d'allumettes compris entre 0 et N. On note $\mu_{r,N}$ la probabilité qu'elle en contienne r.

1. Calculer $\mu_{r,N}$ pour $r \in [\![0, N]\!]$.
2. Donner un équivalent de $\mu_{0,N}$ lorsque N tend vers $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tour $r \in [\![0, N]\!]$
$$(2N + 2)\mu_{r+1,N+1} = (2N + 1 - r)\mu_{r,N}$$
4. On note E_N le nombre moyen d'allumettes restantes lorsque le fumeur ouvre une boîte vide pour la première fois (quand les deux boîtes contiennent N allumettes au départ). Montrer que
$$E_N = \frac{(2N + 1)}{2^{2N}}\binom{2N}{N} - 1$$
5. Déterminer un équivalent de E_N lorsque N tend vers $+\infty$.
6. Déterminer le nombre moyen F_N d'allumettes utilisées lorsque le fumeur ouvre une boîte vide pour la première fois (quand les deux boîtes contiennent N allumettes au départ).

Exercice 41

On considère dans cette partie des entiers naturels non nuls n, u, d, t, b vérifiant $u+d+t = b$.
Une urne $\mathcal{U}$ contient b boules parmi lesquelles u boules portent le numéro 1, d le numéro 2 et t le numéro 3.
Une expérience consiste en n tirages successifs d'une boule de l'urne $\mathcal{U}$ *avec remise*. Les tirages sont supposés mutuellement indépendants.
A chaque tirage, toutes les boules de l'urne $\mathcal{U}$ ont la même probabilité d'être tirées.
L'univers Ω est l'ensemble $\{1, 2, 3\}^n$ et on note U (resp. D, T) la variable aléatoire définie sur Ω dont la valeur est le nombre de boules numérotées 1 (resp. 2, 3) tirées au cours de l'expérience.

1. Montrer que la variable aléatoire U suit une loi usuelle (à préciser). Donner son espérance et sa variance.
   Donner de même les lois des variables aléatoires D et T.
2. Les variables U et D sont-elles indépendantes ? Justifier.
3. Déterminer sans calcul la loi de la variable aléatoire $\mathrm{U} + \mathrm{D}$, son espérance et sa variance.
4. En déduire que la covariance du couple (U, D) est égale à $-\dfrac{nud}{b^2}$.

Exercice 42 **Marche aléatoire**

Un mobile évolue de façon aléatoire le long d'un axe gradué, d'origine O. A l'instant $t = 0$, il est en O. A chaque instant entier $t = k$, son abscisse varie de $+1$ avec la probabilité p et de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$, où p est un nombre fixé dans $]0, 1[$. On note X_n son abscisse au temps $t = n$.

1. Quelles sont les valeurs possibles de X_1, X_2 et X_3 ?
2. Plus généralement, montrer que les valeurs possibles de X_n sont les entiers relatifs $2k - n$ avec $0 \leq k \leq n$.
3. Déterminer la loi de X_n.
4. On pose $\mathrm{Y}_n = \dfrac{\mathrm{X}_n + n}{2}$.
   a. Reconnaître la loi de Y_n, et donner sans calculs $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n)$ et $\mathrm{V}(\mathrm{Y}_n)$.
   b. En déduire $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X}_n)$.
   c. Quelles sont les limites de $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X}_n)$ quand $n \to +\infty$?

Exercice 43

Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues.

1. On tire au hasard 4 boules successivement sans remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de X, puis calculer l'espérance de X.
2. On tire maintenant au hasard 4 boules successivement *avec* remise. Reprendre la question précédente avec la variable aléatoire Y égale au nombre de boules rouges obtenues.

Exercice 44

Soient trois boîtes de gélules de couleurs blanches ou rouges. La proportion du nombre de gélules rouges est variable d'une boîte à l'autre et vaut 1/2 pour la boîte B1, 1/3 pour la boîte B2 et 1/4 pour la boîte B3.
On tire une gélule dans chacune des trois boîtes. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X définissant le nombre de gélules rouges obtenues ?

Exercice 45

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Un joueur tire une boule au hasard et gagne une somme X égale au numéro de la boule tirée. Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{X})$, $\mathrm{V}(\mathrm{X})$ et $\sigma(\mathrm{X})$.

Lois de variables aléatoires

Exercice 46 **ESCP 2013**

On note E_n l'ensemble des applications de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même. On choisit au hasard de manière équiprobable une de ces applications et on définit la variable aléatoire X_n égale au nombre de points fixes de cette application.

1. Déterminer la loi de X_n.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k)$.

Exercice 47 **ESCP 2013**

Dans tout l'exercice, N désigne un entier naturel non nul.
Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$. On note T_n et Z_n les variables aléatoires définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$T_n = \sup(U_1, \dots, U_n) \qquad \text{et} \qquad Z_n = \inf(U_1, \dots, U_n)$$

On pose $S_n = T_n + Z_n - 1$.
On pose enfin pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n(N) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } N \geq 2 \\ 0 & \text{si } N = 1 \end{cases}$$

1. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,N]\!]$. Établir la relation suivante.

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} P(Y > k)$$

2. **a.** Calculer $P(T_n \leq k)$ pour tout $k \in [\![1,N]\!]$.
b. En déduire la loi de T_n.
c. Calculer $E(T_n)$ en fonction de N et $a_n(N)$.

3. **a.** Calculer $P(Z_n > k)$ pour tout $k \in [\![0,N-1]\!]$.
b. En déduire $E(Z_n)$ en fonction de $a_n(N)$.

4. **a.** Déterminer $\lim_{n\to+\infty} E(T_n)$.
b. Déterminer $E(S_n)$.

Exercice 48

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $(A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ tel que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\mathbb{1}_A + 2\mathbb{1}_B$.

Exercice 49

On considère une urne contenant r boules rouges et $N - r$ boules blanches ($1 \leq r \leq N$). On tire successivement et sans remise toutes les boules. On note X_n le rang d'apparition de la $n^{\text{ème}}$ boule rouge ($1 \leq n \leq r$). Déterminer la loi de X_n.

Exercice 50

On lance simultanément 4 dés indiscernables et on note X le nombre de numéros différents sortis. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 51

Soient n et N des entiers naturels tels que $1 \leq n \leq N$.
On dispose d'une urne contenant N boules : N_1 blanches et N_2 noires.

1. On tire successivement n boules dans l'urne avec remise et on note X le nombre de boules blanches obtenues. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

2. On tire successivement n boules dans l'urne sans remise et on note Y le nombre de boules blanches obtenues. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

3. On tire simultanément n boules dans l'urne et on note Z le nombre de boules blanches obtenues. Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance.

Exercice 52 ★★

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. On note M la matrice aléatoire $\left(X_iX_j\right)_{1\leq i,j\leq n}$.

1. Déterminer la loi de rg M.

2. Déterminer la loi de tr(M).

Exercice 53 **Centrale MP**

Peut-on piper deux dés de manière à ce qu'il y ait équiprobabilité sur l'ensemble des sommes possibles obtenues en les lançant simultanément ?

Exercice 54

Soit $n \in \mathbb{N}$. Existe-t-il deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ dont la somme suit une loi uniforme sur $[\![0, 2n]\!]$?

Exercice 55

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = \mathrm{Z})$.

Exercice 56

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{U}\left([\![0, n]\!]^2\right)$.

1. Déterminer les lois de X, Y et X + Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 57

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y})$.

Exercice 58

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$. On pose $\mu_r = \mathbb{E}((\mathrm{X} - np)^r)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\mu_r x^r}{r!}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 59 **Mines-Ponts MP 2019**

Soit un entier $k \geq 2$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{k}}$.

1. Soit $j \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{\ell=0}^{k-1} \omega^{\ell j}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. Soit X_n la variable aléatoire comptant le nombre de piles.
   Montrer que la probabilité que X_n soit divisible par k converge quand n tend vers l'infini et calculer sa limite.

Chaînes de Markov

Exercice 60

Une boîte A contient deux jetons portant le numéro 0 et une boîte B contient deux jetons portant le numéro 1.
Un échange consiste à tirer un jeton dans chaque boîte et à les échanger. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la somme des numéros des jetons contenus dans la boîte A après n échanges.
On pose $p_n = \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 0)$, $q_n = \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 1)$ et $r_n = \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 2)$.

1. Calculer p_0, q_0, r_0 et p_1, q_1, r_1.
2. Exprimer $p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}$ en fonction de p_n, q_n, r_n.
3. Déterminer une relation entre q_n, q_{n+1}, q_{n+2}.
4. Exprimer p_n, q_n et r_n en fonction de n.
5. Déterminer les limites des suites (p_n), (q_n), (r_n).

Exercice 61

Alphonse, Bérénice et Clothilde jouent à la balle.

- Lorsqu'Alphonse a la balle, il la passe à Bérénice avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et à Clothilde avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.
- Lorsque Bérénice a la balle, elle la passe à Alphonse avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et à Clothilde avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.
- Lorsque Clothilde a la balle, elle l'envoie toujours à Bérénice.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

- A_n l'événement «Alphonse possède la balle à l'issue du $n^{\text{ème}}$ lancer» ;
- B_n l'événement «Bérénice possède la balle à l'issue du $n^{\text{ème}}$ lancer» ;
- C_n l'événement «Clothilde possède la balle à l'issue du $n^{\text{ème}}$ lancer».

On pose $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.
Au départ la balle est lancée à l'un des trois joueurs. C'est par convention le lancer numéro 0.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice M telle que $X_{n+1} = MX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Diagonaliser la matrice M.
4. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis a_n, b_n, c_n en fonction de a_0, b_0, c_0 et n.
5. Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n), (c_n) en fonction de a_0, b_0, c_0.

Couples de variables aléatoires

Exercice 62

Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue n tirages sans remise dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi du couple (X, Z).
2. En déduire la loi de Z.

Exercice 63

Soient n et N des entiers naturels tels que $2 \leq n \leq N$.
On effectue un tirage simultané de n boules dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On note X et Y respectivement le plus grand et le plus petit numéro obtenu.

1. Question préliminaire : soient a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$. Montrer que
$$\sum_{k=a}^{b} \binom{k}{a} = \binom{b+1}{a+1}$$
2. Déterminer les lois de X et Y.
3. Déterminer la loi du couple (X, Y). En déduire la loi de $X - Y$.
4. Déterminer les espérances de X et Y.
5. Déterminer les variances de X et Y.
6. Déterminer la variance de $X - Y$. En déduire la covariance du couple (X, Y).

Exercice 64

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi sur un espace probabilisé fini (Ω, P). On note $E = X_1(\Omega) = X_2(\Omega)$ et on se donne une application $f : E^2 \to F$ telle que $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$ pour tout $(x_1, x_2) \in E^2$.
On pose $Y_1 = f(X_1, X_2)$ et $Y_2 = f(X_2, X_1)$. Montrer que Y_1 et Y_2 ont même loi.

Espérance et variance

Exercice 65 **Fonction génératrice d'une variable aléatoire finie**

Soit un espace probabilisé fini (Ω, P).
Pour toute variable aléatoire X sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit le polynôme G_X par

$$\mathrm{G}_\mathrm{X} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}=n)\mathrm{X}^n$$

1. Soit X une variable aléatoire sur Ω.
   a. Que vaut $\mathrm{G}_\mathrm{X}(1)$?
   b. Montrer que $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}'_\mathrm{X}(1)$.
   c. Montrer que $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}''_\mathrm{X}(1) + \mathrm{G}'_\mathrm{X}(1) - \mathrm{G}'_\mathrm{X}(1)^2$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur Ω.
   Montrer que $\mathrm{G}_{\mathrm{X}+\mathrm{Y}} = \mathrm{G}_\mathrm{X}\mathrm{G}_\mathrm{Y}$.
3. Déterminer une expression factorisée G_X lorsque X suit une loi binomiale de paramètres n et p. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 66 **ESCP 2007**

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.
On pose $\mathrm{Z} = |\mathrm{X}-\mathrm{Y}|$ et $\mathrm{T} = \inf(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

1. Déterminer l'espérance de Z.
2. En déduire l'espérance de T.
3. Calculer l'espérance de Z^2 en fonction de la variance de X.

Exercice 67

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Déterminer l'espérance de $\dfrac{1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)}$.

Exercice 68

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. En utilisant la formule de transfert, déterminer l'espérance de $\mathrm{Z} = \dfrac{1}{\mathrm{X}+\mathrm{Y}+1}$.

Exercice 69

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. En utilisant la formule de transfert, déterminer l'espérance de $\mathrm{Z} = \dfrac{1}{\mathrm{X}+\mathrm{Y}+1}$.

Exercice 70

On considère une urne contenant n boules numérotées. On procède à un tirage successif de n boules avec remise. On note X le nombre de numéros qui sont sortis au moins une fois pendant le tirage. Calculer l'espérance de X ainsi qu'un équivalent de celle-ci lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 71

Soit un entier $n \geq 2$. On munit le groupe symétrique S_n de la probabilité uniforme. On note X la variable aléatoire qui à une permutation associe son nombre de points fixes. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Inégalités

Exercice 72

Soient X une variable aléatoire réelle et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ \mathrm{P}(|\mathrm{X}| \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(g(|\mathrm{X}|)}{g(a)}$$

Exercice 73

On lance n fois une pièce de monnaie bien équilibrée. En utilisant l'inégalité de Tchebychev, déterminer n pour que la fréquence d'apparition de «face» soit comprise entre $0,45$ et $0,55$ avec une probabilité au moins égale à $0,9$.

Exercice 74 **Inégalité de Kosmanek**

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini.

1. Soit C un événement. Montrer que $\mathrm{V}(\mathbb{1}_{\mathrm{C}}) \leq \frac{1}{4}$.
2. Soient A et B deux événements. Montrer que $|\operatorname{Cov}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}}, \mathbb{1}_{\mathrm{B}})| \leq \frac{1}{4}$.
3. En déduire que
$$|\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})| \leq \frac{1}{4}$$
Quand a-t-on égalité ?

Exercice 75

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{A}^2$, on pose $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \setminus (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ et $d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}\Delta\mathrm{B})$.

1. Montrer que d est une distance, c'est-à-dire que pour $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathcal{A}^3$, $d(\mathrm{A}, \mathrm{C}) \leq d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) + d(\mathrm{B}, \mathrm{C})$.
2. En déduire que $|\mathbb{P}(\mathrm{A}) - \mathbb{P}(\mathrm{B})| \leq \mathbb{P}(\mathrm{A}\Delta\mathrm{B})$.