DÉTERMINANTS

Groupe symétrique

EXERCICE 1.

1. Soit (i,j) une transposition avec $(i<j)$.
Montrer que $(i,j) = (i,i+1,\dots,j-1,j)\circ(j-1,j-2,\dots,i+1,i)$.

2. Montrer que toute permutation appartenant à S_n peut s'écrire comme le produit de transpositions de la forme $(k,k+1)$.

EXERCICE 2.

Montrer que toute permutation de S_n peut s'écrire comme un produit de transpositions de la forme $(1,i)$ avec $i\in[\![2,n]\!]$.

EXERCICE 3.

Déterminer la signature de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 4.

Déterminer le centre de S_n.

EXERCICE 5.

On note S_n le groupe des permutations de $[\![1,n]\!]$ et on pose $f(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} k\sigma(k)$ pour $\sigma\in S_n$.
Déterminer le minimum et le maximum de f sur S_n.

EXERCICE 6.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $\sigma\in S_n$, on note P_σ la matrice $(\delta_{i,\sigma(j)})_{1\le i,j\le n}$.

1. Montrer que l'application $P : \sigma\in S_n \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes de S_n dans $GL_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $\sigma\in S_n$. Que vaut ${}^tP_\sigma$?

3. Montrer que $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ pour tout $\sigma\in S_n$.

Petits déterminants

EXERCICE 7.

Soient a et x dans $\mathbb{K}$. Calculer les déterminants suivants,

1. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

2. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}$

EXERCICE 8.

Soit ω une racine cubique de l'unité. Prouver avec un minimum de calcul que

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0$$

EXERCICE 9.⭑

Soient $a,b,c\in\mathbb{K}$. Calculer les déterminants suivants , (on factorisera les expressions obtenues !)

1. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

Exercice 10.

Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & a' & b & a'b \\ 1 & a & b' & ab' \\ 1 & a' & b' & a'b' \end{vmatrix}$;

2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

4. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Gros déterminants

Exercice 11.☆

Calculer, pour tous x réel et n dans $\mathbb{N}^*$, le déterminant de

$$\begin{pmatrix} x & 2 & \cdots & n & 1 \\ 1 & x & & \vdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & n & \vdots \\ \vdots & \vdots & & x & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels. Calculer le déterminant de

$$(\sin(a_i + a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Exercice 13.☆

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 2$. Calculer pour $k < n-1$:

$$\begin{vmatrix} (x+1)^k & 2^k & 3^k & \cdots & n^k \\ (x+2)^k & 3^k & 4^k & \cdots & (n+1)^k \\ \vdots & & & & \vdots \\ (x+n)^k & \cdots & \cdots & \cdots & (2n-1)^k \end{vmatrix}.$$

Exercice 14.

Calculez le déterminant de la matrice $n \times n$ suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

Exercice 15.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k.$$

Calculer, pour tout $n \geqslant 1$, le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} S_1 & \cdots & \cdots & \cdots & S_1 \\ \vdots & S_2 & \cdots & \cdots & S_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & S_{n-1} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_{n-1} & S_n \end{vmatrix}$$

Exercice 16.

Soient a, b et c, trois nombres complexes. On considère la matrice carrée de taille n

$$A = \begin{pmatrix} c & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & c \end{pmatrix}$$

et on note J, la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. On suppose que $a \neq b$.

- **a.** Par des opérations sur les colonnes, démontrer que $x \mapsto \det(A + xJ)$ est une fonction affine.
- **b.** En donnant à x deux valeurs convenables, calculer $\det(A + xJ)$ pour tout $x \in \mathbb{C}$.

2. Comment calculer $\det(A)$ lorsque $a = b$?

Exercice 17.

Calculer le déterminant

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

Exercice 18.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & \dots & 1 \\ 1 & n & \dots & 2 \\ \vdots & & & \vdots \\ n-1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}.$$

Exercice 19.

Caculer le déterminant de la matrice $\left(\binom{n+i}{j}\right)_{0\le i,j\le p}$ avec $0 \le p \le n$.

Exercice 20.

Calculer le déterminant de taille $n \ge 2$ suivant :

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

Exercice 21.

Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 22.

Calculer le déterminant d'ordre n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

On explicitera les opérations sur les lignes et les colonnes effectuées le cas échéant.

Exercice 23.

Calculer en établissant une relation de récurrence le déterminant d'ordre n suivant.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) \\ 1 & (0) & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 24.

Calculer le déterminant de taille n

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 25.

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $a_1, \dots, a_n$ des complexes et $P = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$. Calculer

$$D(x) = \begin{vmatrix} \frac{P(x)}{x-a_1} & \frac{P(x)}{x-a_2} & \dots & \frac{P(x)}{x-a_n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \text{ pour } x \in \mathbb{C}.$$

EXERCICE 26.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.. Montrer que le polynôme $P = X^n - X + 1$ admet n racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

2. On note $z_1, \dots, z_n$ les racines de P. Calculer le déterminant de la matrice $A = (1 + \delta_{ij} z_i)_{1 \leq i,j \leq n}$.

EXERCICE 27.★★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des complexes tels que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_i + b_j \neq 0$. On pose alors $D_n = \det\left(\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}\right)$.

1. Que peut-on dire de D_n lorsque deux des a_i ou deux des b_j sont égaux ?

2. On suppose maintenant les a_i (resp. les b_j) distincts deux à deux.
Dans le déterminant définissant D_n, on remplace a_n par X et on note $F(X)$ le déterminant obtenu. Montrer que F est une fraction rationnelle d'indéterminée X. Que peut-on dire de son degré ?

3. Justifier que F peut s'écrire sous la forme

$$F(X) = \frac{P(X)}{\prod_{j=1}^{n}(X + b_j)}$$

Que peut-on dire du degré de P ?

4. Déterminer $n - 1$ racines de P. En déduire une expression de D_n en fonction des a_i et des b_j.

EXERCICE 28.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

EXERCICE 29.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice carrée de taille n dont le coefficient en position (i,j) vaut $\begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et on pose $D_n = \det(A_n)$.

1. Ecrire les matrices A_3, A_4 et A_5.

2. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (D_n).

3. En déduire D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminants d'endomorphismes

EXERCICE 30.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ défini par

$$P \mapsto P + P'.$$

Calculer $\det(f)$. Que peut-on déduire ?

EXERCICE 31.

Soient E un espace vectoriel de dimension n et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de F et G. Calculer le déterminant de la projection sur F parallèlement à G et de la symétrie par rapport à F parallèlement à G en fonction des dimensions de F et G.

EXERCICE 32.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Soit p un projecteur de E. Que vaut $\det p$?

2. Soit s une symétrie de E. Que vaut $\det s$?

3. Application : On considère f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui à une matrice associe sa transposée. Que vaut $\det f$?

EXERCICE 33.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $m_A : \begin{cases} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{cases}$.

1. Justifier que m_A est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\det m_A = (\det A)^2$.

3. Généraliser en dimension quelconque.

EXERCICE 34.

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit une application $u_\sigma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n & \longrightarrow & \mathbb{R}_n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \end{array} \right.$.

1. Montrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $u_\sigma \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.
2. Pour $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, que vaut $u_\sigma \circ u_\tau$?
3. En déduire que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, u_σ est un automorphisme et que $\mathrm{U} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \sigma & \longmapsto & u_{\sigma^{-1}} \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes.
4. Calculer $\det(u_\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

EXERCICE 35.

Soit f l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $\tilde{P}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tilde{\mathrm{P}}(x) = \int_x^{x+1} \mathrm{P}(t)\ \mathrm{d}t$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f induit un endomorphisme f_n de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $\det(f_n)$ en fonction de n.

EXERCICE 36.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. On suppose qu'il existe $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $u^2 + \mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0$. Montrer que $\dim \mathrm{E}$ est paire.
2. On suppose qu'il existe $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $u^2 + u + \mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0$. Montrer que $\dim \mathrm{E}$ est paire.

EXERCICE 37.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 de base (e_1, e_2, e_3) et u l'endomorphisme de E défini par

$$\begin{aligned} u(e_1) &= 4e_1 + e_2 + 4e_3 \\ u(e_2) &= -2e_1 + e_2 - 4e_3 \\ u(e_3) &= -e_1 - e_2 + e_3 \end{aligned}$$

1. Écrire la matrice A de u dans la base (e_1, e_2, e_3).
2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{V}(\lambda) = \det(u - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})$. Calculer $\mathrm{V}(\lambda)$ sous forme factorisée pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
   En déduire que V possède trois racines réelles λ_1, λ_2, λ_3 telles que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Préciser λ_1, λ_2, λ_3.
3. Vérifier que pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$, $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda_k\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})$ est de dimension 1 et en donner un vecteur directeur f_k.
4. Justifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de E et donner la matrice D de u dans cette base.
5. Déterminer une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. Expliciter P^{-1}.
6. En déduire la matrice de u^n dans la base (e_1, e_2, e_3) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminants par blocs

EXERCICE 38.

Pour $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})^2$, on note $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ la matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ définie par blocs de la manière suivante : $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}\mathrm{B} & a_{12}\mathrm{B} \\ \hline a_{21}\mathrm{B} & a_{22}\mathrm{B} \end{array}\right)$.

1. Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})^4$. Montrer que $(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}).(\mathrm{C} \otimes \mathrm{D}) = (\mathrm{AC}) \otimes (\mathrm{BD})$.
2. Calculer $\det(\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{B})$, $\det(\mathrm{A} \otimes \mathrm{I}_2)$ et $\det(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})$ en fonction de $\det \mathrm{A}$ et $\det \mathrm{B}$.
3. A quelle condition nécessaire et suffisante $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ est-elle inversible ? Quel est alors son inverse ?

EXERCICE 39.

Soit $\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right)$ où $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$. On pose $\mathrm{S} = \mathrm{D} - \mathrm{CA}^{-1}\mathrm{B}$. Montrer que $\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{A}) \det(\mathrm{S})$.

EXERCICE 40.★★

Soient $n \geqslant 1$, $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ et D quatre matrices réelles de taille n. Soit M la matrice réelle de taille $2n$ définie par :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$$

On suppose que C et D commutent. Prouver que

$$\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{AD} - \mathrm{CB}).$$

Inégalités

EXERCICE 41.

Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique réelle est toujours positif.

EXERCICE 42.

On pose, pour $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\mathrm{A}^t\mathrm{A}$.

2. On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Prouver que

$$|\det(\mathrm{A})| \leqslant 1.$$

Comatrice

EXERCICE 43.

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, $n > 1$. Montrer que $\mathrm{com}(\mathrm{com}(\mathrm{A})) = \det(\mathrm{A})^{n-2}\mathrm{A}$.

EXERCICE 44.

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que $\det \mathrm{A}, \det \mathrm{B} \in \mathbb{Z}$.

2. On suppose que $\det \mathrm{A}$ et $\det \mathrm{B}$ sont premiers entre eux. Montrer qu'il existe deux matrices $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\mathrm{AU} + \mathrm{BV} = \mathrm{I}_n$.

EXERCICE 45.

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Donner le rang de $\mathrm{com}(\mathrm{A})$ en fonction de celui de A. On pourra distinguer les cas $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = n$, $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} < n - 1$ et $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = n - 1$.

Divers

EXERCICE 46.

Pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on pose $\mathrm{M}(a, b) = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ et $\mathscr{H} = \{\mathrm{M}(a, b),\ (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$.

1. A quelle condition un élément de $\mathscr{H}$ est-il inversible ?

2. Montrer que $\mathscr{H} \ \{0\}$ muni de la multiplication est un groupe.

EXERCICE 47.

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On se donne une base $\mathscr{B}$ de E. Pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E}^n$, on pose

$$f(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathscr{B}}(u(x_1), x_2, \dots, x_n) + \cdots + \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, u(x_n))$$

Montrer que $f = \mathrm{tr}(u) \det_{\mathscr{B}}$.

EXERCICE 48.

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ inversibles et dont l'inverse est également dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.
Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})^2$. On suppose que $\mathrm{A} + k\mathrm{B} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$. Que vaut $\det(\mathrm{B})$?

EXERCICE 49.

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 50.

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

2. A partir de maintenant, on suppose f non nul.

   a. Justifier l'existence d'un vecteur non nul u de $\operatorname{Im} f$.

   b. Montrer que $f^2(u) = -u$.

   c. Montrer que la famille $(u, f(u))$ est libre. Que peut-on en déduire sur $\operatorname{rg} f$?

3. On suppose que $\operatorname{rg} f = 3$.

   a. Montrer que $f^2 = -\operatorname{Id}$. Aboutir à une contradiction en considérant le déterminant de f^2.

   b. Que peut-on en conclure sur les dimensions de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$?

4. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 51.

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$. Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients sont donnés par $a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. On note K la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Exprimer K^n en fonction de K.

2. En déduire deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = u_n A + v_n I_p$.

3. On note X le vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont toutes les composantes sont égales à 1. Déterminer la limite de $A^n X$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

5. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I_p)$. Montrer que χ admet deux zéros distincts λ_1 et λ_2. Que vaut $(A - \lambda_1 I_p)(A - \lambda_2 I_p)$?