Devoir à la maison n°9 : corrigé

Solution 1.

1. Soit $x \in [0,1]$. Alors $\sqrt{x} \in [0,1]$ donc $f(x) = 1-\sqrt{x} \in [0,1]$.
2. On procède par récurrence. Tout d'abord, $u_0 \in [0,1]$. Supposons que $u_n \in [0,1]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$ d'après la question précédente.
3. f est clairement décroissante sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. On en déduit que $f \circ f$ est croissante sur $[0,1]$.
4. Pour $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} & f(x) = x \\ \iff\quad & \sqrt{x} = 1-x \\ \iff\quad & x = (1-x)^2 && \text{car les membres de l'égalité précédente sont positifs} \\ \iff\quad & x^2-3x+1 = 0 \end{aligned}$$

   Les racines du trinôme précédent sont $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. La première racine appartient à l'intervalle $[0,1]$ puisque $1 \leqslant \sqrt{5} \leqslant 3$ mais la seconde racine n'appartient pas à l'intervalle $[0,1]$ car $\sqrt{5} > 1$.
   Finalement, l'unique point fixe de f sur $[0,1]$ est $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
5. Puisque $20 \leqslant 25$, $5 \leqslant \frac{25}{4}$ puis $\sqrt{5} \leqslant \frac{5}{2}$ puis $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \geqslant \frac{1}{4} = u_0$.
6. On procède par récurrence. Tout d'abord, $u_0 \leqslant \alpha$. Supposons $u_{2n} \leqslant \alpha$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors par croissance de $f \circ f$ sur $[0,1]$,

$$f \circ f(u_{2n}) \leqslant f \circ f(\alpha)$$

   c'est-à-dire

$$u_{2n+2} \leqslant \alpha$$

   On en déduit que $u_{2n} \leqslant \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. On a $u_0 = \frac{1}{4}$ puis $u_1 = \frac{1}{2}$ et enfin $u_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Puisque $8 \leqslant 9$, $\frac{1}{2} \leqslant \frac{9}{16}$ puis $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{3}{4}$ et enfin $u_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant \frac{1}{4} = u_0$.
   Supposons maintenant que $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de $f \circ f$, $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) \leqslant f \circ f(u_{2n+2}) = u_{2n+4}$. Par récurrence, on a donc $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi (u_{2n}) est croissante. La suite (u_{2n}) est croissante et majorée par α donc elle converge.
8. Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} & f \circ f(x) = x \\ \iff\quad & 1 - \sqrt{1-\sqrt{x}} = x \\ \iff\quad & 1-x = \sqrt{1-\sqrt{x}} \\ \iff\quad & (1-x)^2 = 1-\sqrt{x} && \text{car les membres de l'égalité précédente sont positifs} \\ \iff\quad & \sqrt{x} = 1-(1-x)^2 \\ \iff\quad & \sqrt{x} = x(2-x) \\ \iff\quad & x = x^2(2-x)^2 && \text{car les membres de l'égalité précédente sont positifs} \\ \iff\quad & x^2(2-x)^2 - x = 0 \\ \iff\quad & x\left(x(2-x)^2-1\right) = 0 \\ \iff\quad & x(x^3-4x^2+4x-1) = 0 \\ \iff\quad & x(x-1)(x^2-3x+1) = 0 \end{aligned}$$

   Or on a vu précédemment que α est la seule racine du trinôme x^2-3x+1 dans l'intervalle $[0,1]$. On en déduit que les points fixes de $f \circ f$ sur $[0,1]$ sont 0, α et 1.

9. f est continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ donc $f \circ f$ est continue sur $[0,1]$. De plus, $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ et $u_{2n} \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite (u_{2n}) converge vers un point fixe de $f \circ f$ sur $[0,1]$, à savoir 0, α ou 1.
Or (u_{2n}) est croissante et majorée par α donc $u_0 \leqslant u_{2n} \leqslant \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sa limite ℓ vérifie donc $u_0 \leqslant \ell \leqslant \alpha$. A fortiori, $0 < \ell \leqslant \alpha$. Puisque ℓ est un point fixe de $f \circ f$, $\ell = \alpha$.
Enfin, $u_{2n+1} = f(u_{2n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f est continue sur $[0,1]$ donc (u_{2n+1}) converge vers $f(\alpha) = \alpha$.
Puisque les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes les deux vers α, la suite (u_n) converge également vers α.

Solution 2.

1. **a.** $H \cap K \subset G$ puisque $H \subset G$ et $K \subset G$.
$e \in H$ et $e \in K$ car H et K sont des sous-groupes de G. Ainsi $e \in H \cap K$.
Soit $(x,y) \in (H \cap K)^2$. Alors $(x,y) \in H^2$ donc $xy^{-1} \in H$ puisque H est un sous-groupe de G. De même, $(x,y) \in K^2$ donc $xy^{-1} \in K$ puisque K est un sous-groupe de G. Ainsi $xy^{-1} \in H \cap K$.
On a donc bien montré que $H \cap K$ était un sous-groupe de G.

b. Soit $(x,h) \in G \times (H \cap K)$. A fortiori, $(x,h) \in G \times H$ donc $x^{-1}hx \in H$ et $xhx^{-1} \in H$ car H est distingué dans G. De même, $(x,h) \in G \times K$ donc $x^{-1}hx \in K$ et $xhx^{-1} \in K$ puisque K est distingué dans G. Ainsi $x^{-1}hx \in H \cap K$ et $xhx^{-1} \in \cap K$. Ceci prouve que $H \cap K$ est distingué dans G.

2. **a.** Clairement $Z(G) \subset G$.
Pour tout $x \in G$, $ex = xe = x$ donc $e \in Z(G)$.
Soit $(a,b) \in Z(G)^2$. Alors pour tout $x \in G$

$$\begin{aligned} abx &= axb && \text{car } b \in Z(G) \\ &= xab && \text{car } a \in Z(G) \end{aligned}$$

Ainsi $ab \in Z(G)$.
Soit $a \in Z(G)$. Alors pour tout $x \in G$, $ax = xa$ et donc $xa^{-1} = a^{-1}x$ en multipliant chaque membre de l'inégalité précédente à gauche et à droite par a^{-1}. Ainsi $a^{-1} \in Z(G)$.
On a bien prouvé que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

b. Soit $(x,a) \in G \times Z(G)$. Alors, puisque $a \in Z(G)$, $x^{-1}ax = x^{-1}xa = a \in Z(G)$ et $xax^{-1} = axx^{-1} = a \in Z(G)$. $Z(G)$ est donc bien distingué dans G.

3. **a.** Pour tout $h \in H$, $e^{-1}he = ehe^{-1} = h \in H$ donc $e \in N_H$.
Soient $(x,y) \in N_H^2$ et $h \in H$. Tout d'abord, $x^{-1}hx \in H$ car $x \in N_H$ et donc $y^{-1}x^{-1}hxy \in H$ puisque $y \in N_H$. Ainsi $(xy)^{-1}hxy \in H$. De même, $yhy^{-1} \in H$ car $y \in N_H$ et donc $xyhy^{-1}x^{-1} \in H$ puisque $x \in N_H$. Ainsi $xyh(xy)^{-1} \in N_H$. On en déduit que $xy \in N_H$.
Soient $x \in N_H$ et $h \in H$. Alors $x^{-1}h(x^{-1})^{-1} = x^{-1}hx \in H$ et $(x^{-1})^{-1}hx^{-1} = xhx^{-1} \in H$ car $x \in N_H$. Ainsi $x^{-1} \in N_H$.
On a donc bien prouvé que N_H est un sous-groupe de G.

b. Puisque H est distingué dans G, alors pour tout $x \in G$ et tout $h \in H$, $x^{-1}hx \in H$ et $(x^{-1})^{-1}hx^{-1} = xhx^{-1} \in H$ donc $x \in N_H$. Ainsi $G \subset N_H$. Puisqu'on a clairement $N_H \subset G$, $N_H = G$.

c. Soit $x \in H$. Alors pour tout $h \in H$, $x^{-1}hx \in H$ et $(x^{-1})^{-1}hx^{-1} = xhx^{-1} \in H$ car H est un sous-groupe de G. Ainsi $x \in N_H$. Ceci prouve que $H \subset N_H$.

d. Soit $(x,h) \in N_H \times H$. Par définition de N_H, $x^{-1}hx \in H$. Ceci prouve que H est distingué dans N_H.

4. **a.** Soient $((x,y),(x',y')) \in G^2$. Comme $(x,x') \in (\mathbb{C}^*)^2$, $xx' \in \mathbb{C}^*$ et il est évident que $xy' + y \in \mathbb{C}$. Donc $(x,y) * (x',y') \in G$.
Soit $((x,y),(x',y'),(x'',y'')) \in G^3$. On voit facilement que :

$$\begin{aligned} ((x,y)*(x',y'))*(x'',y'') &= (x,y)*((x',y')*(x'',y'')) \\ &= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y) \end{aligned}$$

On vient donc de prouver que $*$ est une loi interne associative sur G.
Pour tout $(x,y) \in G$, $(1,0)*(x,y) = (x,y)*(1,0) = (x,y)$ donc $(1,0)$ est élément neutre.
Pour tout $(x,y) \in G$,

$$(x,y) * \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right) * (x,y) = (1,0)$$

donc (x,y) est inversible.
En conclusion, $(G,*)$ est bien un groupe.

b. Soit $(x, y) \in Z(G)$.
En particulier, $(x, y) * (1, 1) = (1, 1) * (x, y)$ i.e. $(x, x + y) = (x, y + 1)$ d'où $x + y = y + 1$ puis $x = 1$. De même, $(x, y) * (2, 0) = (2, 0) * (x, y)$ i.e. $(2x, y) = (2x, 2y)$ d'où $y = 2y$ puis $y = 0$. Ainsi $(x, y) = (1, 0)$.
Réciproquement, $(1, 0) \in Z(G)$ puisque $(1, 0)$ est l'élément neutre de G et que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
Finalement, $Z(G) = \{(1, 0)\}$.

c. Vérifions d'abord que $\mathbb{U} \times \mathbb{C}$ est un sous-groupe de G.
Tout d'abord $H \subset G$ puisque $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$.
Ensuite, $(1, 0) \in H$ puisque $1 \in \mathbb{U}$.
Soit $((x, y), (x', y')) \in G^2$. Alors $(x, x') \in \mathbb{U}^2$ puis $xx' \in \mathbb{U}$ puisque $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$. De plus,

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

donc $(x, y) * (x', y') \in H$.
Soit $(x, y) \in G$. Alors $x \in \mathbb{U}$ puis $\frac{1}{x} \in \mathbb{U}$ puisque $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$. De plus, on a vu précédemment que

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)$$

Ainsi $(x, y)^{-1} \in H$.
On a donc bien prouvé que H est un sous-groupe de G.

d. Soit $(x, y) \in G$ et $(h, k) \in H$. Alors la première composante de $(x, y)^{-1} * (h, k) * (x, y)$ sera $\frac{1}{x}.h.x = h$ (la seconde composante ne nous intéresse pas). Puisque $(h, k) \in H$, $h \in \mathbb{U}$ de sorte que $(x, y)^{-1} * (h, k) * (x, y) \in H$. On a donc bien prouvé que H est distingué dans G.