

# DEVOIR À LA MAISON N°10 : CORRIGÉ

## Problème 1 — Parties de $\mathbb{C}$ stable par produit et somme de carrés (d'après Concours Général 2017)

### Partie I – Quelques exemples simples

1.
  - a. Puisque  $|0| = 0 \leq 1$ ,  $b(\{0\}) = 1$ .
  - b. Clairement  $b(\mathbb{C}) = \infty$  (puisque  $\mathbb{U}$  est infini par exemple).
  - c. Les seuls éléments de  $\mathbb{N}$  de module inférieur ou égal à 1 sont 0 et 1 donc  $b(\mathbb{N}) = 2$ .
  - d. Le seul élément de  $\mathbb{N}^*$  de module inférieur ou égal à 1 est 1 donc  $b(\mathbb{N}) = 1$ .
2.
  - a. On peut par exemple choisir  $\mathcal{A} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . En effet, soit  $(z_1, z_2) \in \mathcal{A}^2$ . Alors  $z_1 z_2$  et  $z_1^2 + z_2^2$  sont clairement des entiers. De plus,  $z_1 \geq 2$  et  $z_2 \geq 2$  donc  $z_1 z_2 \geq 4$  et  $z_1^2 + z_2^2 \geq 8$ . Par conséquent,  $z_1 z_2 \in \mathcal{A}$  et  $z_1^2 + z_2^2 \in \mathcal{A}$ .
  - b. On peut par exemple prendre  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$ . Clairement si  $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ , alors  $z_1 z_2 \in \mathbb{Z}$  et  $z_1^2 + z_2^2 \in \mathbb{Z}$ . Ainsi  $\mathcal{A}$  est bien de type S. Par ailleurs, les seuls éléments de  $\mathbb{Z}$  de module inférieur ou égal à 1 sont  $-1, 0$  et  $1$  donc  $b(\mathbb{Z}) = 3$ .
3. Supposons que  $\mathcal{A}$  est un sous-anneau de  $\mathbb{C}$ . Alors  $\mathcal{A}$  est non vide. De plus, si on se donne  $(z_1, z_2) \in \mathcal{A}^2$ ,  $z_1 z_2 \in \mathcal{A}$  par stabilité de  $\mathcal{A}$  par produit. De plus,  $z_1^2 \in \mathcal{A}$  et  $z_2^2 \in \mathcal{A}$  toujours par stabilité par produit puis  $z_1^2 + z_2^2 \in \mathcal{A}$  par stabilité par somme. Ainsi  $\mathcal{A}$  est bien de type S.

### Partie II – Des exemples plus sophistiqués

1. Tout d'abord,  $1 = 1 + 0j \in \mathbb{Z}[j]$ .  
Soit ensuite  $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}[j]^2$ . Il existe donc  $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{Z}^4$  tel que  $z_1 = a_1 + b_1 j$  et  $z_2 = a_2 + b_2 j$ .

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 j) - (a_2 + b_2 j) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)j$$

Or  $(a_1 - a_2, b_1 - b_2) \in \mathbb{Z}^2$  donc  $z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}[j]$ .

En utilisant le fait que  $j^2 = -j - 1$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 j)(a_2 + b_2 j) = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)j + b_1 b_2 j^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 - b_1 b_2)j \end{aligned}$$

Or  $(a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1 - b_1 b_2) \in \mathbb{Z}^2$  donc  $z_1 z_2 \in \mathbb{Z}[j]$ .

De la même manière, Finalement,  $\mathbb{Z}[j]$  est bien un sous-anneau de  $\mathbb{C}$  donc une partie de type S.

2. Soit  $z \in \mathbb{Z}[j] \cap \mathcal{U}$ . Il existe  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $z = a + bj$ . Alors

$$|z|^2 = (a + bj)(a + \bar{b}j) = a^2 + b^2 + ab(j + \bar{j}) = a^2 + b^2 - ab$$

Puisque  $a$  et  $b$  sont entiers et a fortiori réels,  $(a+b)^2 \geq 0$  et  $(a-b)^2 \geq 0$ . En développant, on obtient  $a^2 + b^2 \geq -2ab$  et  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ . Or  $|z|^2 \leq 1$  i.e.  $a^2 + b^2 - ab \leq 1$  donc  $ab \leq 1$  et  $-3ab \leq 1$ , autrement dit  $-\frac{1}{3} \leq ab \leq 1$ . Or  $ab$  est entier donc  $ab = 0$  ou  $ab = 1$ .

Si  $ab = 0$ , alors  $a = 0$  ou  $b = 0$ . Si  $a = 0$ , alors  $|z| = |b| \leq 1$  donc  $b \in \{-1, 0, 1\}$  car  $b$  est entier. Si  $b = 0$ , alors  $|z| = |a| \leq 1$  donc  $a \in \{-1, 0, 1\}$  car  $a$  est entier.

Si  $ab = 1$ , alors  $a = b = -1$  ou  $a = b = 1$ .

Finalement si  $|z| \leq 1$ ,  $(a, b) \in \{(0, 0), (1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1), (-1, -1), (1, 1)\}$ . Réciproquement, tous les couples  $(a, b)$  cités donnent bien  $|z| \leq 1$ . Enfin, la question ?? montre que tous ces couples  $(a, b)$  donnent bien des complexes  $z = a + bj$  distincts.

Ceci montre que  $b(\mathbb{Z}[j]) = 7$ .

3. a. Il suffit de remarquer que  $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + iz_2)(z_1 - iz_2)$ .  
 b. Supposons  $x + y\sqrt{3} = 0$ . Si  $y \neq 0$ , alors  $\sqrt{3} = -\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ , ce qui contredit l'irrationalité de  $\sqrt{3}$ . Ainsi  $y = 0$  puis  $x = -y\sqrt{3} = 0$ .  
 c. Il existe  $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{Z}^4$  tel que  $z_1 = a_1 + b_1j$  et  $z_2 = a_2 + b_2j$ .  
 Si  $z_1 + iz_2 = 0$  alors en considérant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\begin{cases} a_1 - b_1/2 - b_2\sqrt{3}/2 = 0 \\ b_1\sqrt{3}/2 + a_2 - b_2/2 = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} 2a_1 - b_1 - b_2\sqrt{3} = 0 \\ b_1\sqrt{3} + 2a_2 - b_2 = 0 \end{cases}$$

Puisque  $2a_1 - b_1, -b_2, b_1$  et  $2a_2 - b_2$  sont des entiers, la question précédente montre que

$$2a_1 - b_1 = -b_2 = b_1 = 2a_2 - b_2 = 0$$

On en déduit sans peine que  $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$  i.e.  $z_1 = z_2 = 0$ .

Si  $z_1 - iz_2 = 0$ , on se ramène au cas précédent en remarquant que  $-z_2 \in \mathbb{Z}[j]$ . Ainsi  $z_1 = -z_2 = 0$  i.e.  $z_1 = z_2 = 0$ .

4. Soit  $(z_1, z_2) \in (\mathbb{Z}[j]^*)^2$ . D'après ce qui précède,  $z_1z_2 \in \mathbb{Z}[j]$  mais comme  $z_1 \neq 0$  et  $z_2 \neq 0$ ,  $z_1z_2 \neq 0$ . Ainsi  $z_1z_2 \in \mathbb{Z}[j]^*$ .  
 Par ailleurs, on a également montré que  $z_1^2 + z_2^2 \in \mathbb{Z}[j]$ . Mais comme  $z_1 \neq 0$  et  $z_2 \neq 0$ , la question II.3 montre que  $z_1^2 + z_2^2 \neq 0$ . Ainsi  $z_1^2 + z_2^2 \in \mathbb{Z}[j]^*$ .  
 Ainsi  $\mathbb{Z}[j]^*$  est bien de type S. Puisque  $b(\mathbb{Z}[j]) = 7$  et  $|0| \leq 1$ ,  $b(\mathbb{Z}[j]^*) = 6$ .  
 5. Soit  $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}[j]^2$ . Il existe donc  $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{Z}^4$  tel que  $z_1 = a_1 + b_1j$  et  $z_2 = a_2 + b_2j$ . Alors

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)j \in \mathbb{Z}[j]$$

puisque  $(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in \mathbb{Z}^2$ .

6. Remarquons que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \in \mathcal{R} \iff z^2 \in \mathbb{Z}[j]$ .  
 a. Soit  $(z_1, z_2) \in \mathcal{R}^2$ . Alors  $(z_1^2, z_2^2) \in \mathbb{Z}[j]^2$ . Puisque  $\mathbb{Z}[j]$  est de type S,  $z_1^2z_2^2 \in \mathbb{Z}[j]$  i.e.  $(z_1z_2)^2 \in \mathbb{Z}[j]$ . Ceci signifie que  $z_1z_2 \in \mathcal{R}$ .  
 A nouveau, puisque  $\mathbb{Z}[j]$  est de type S,  $(z_1^2)^2 + (z_2^2)^2 = z_1^4 + z_2^4 = 4 \in \mathbb{Z}[j]$ . On a vu que  $z_1^2z_2^2 \in \mathbb{Z}[j]$  et, puisque  $\mathbb{Z}[j]$  est stable par addition,  $z_1^4 + z_2^4 + 2z_1^2z_2^2 \in \mathbb{Z}[j]$ , ce qui peut encore s'écrire  $(z_1^2 + z_2^2)^2 \in \mathbb{Z}[j]$ . Ainsi  $z_1^2 + z_2^2 \in \mathcal{R}$ .  
 Donc  $\mathcal{R}$  est bien de type S.  
 b. Puisque pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| \leq 1 \iff |z^2| \leq 1$ , les éléments de  $\mathcal{R}$  de module inférieur ou égal à 1 sont les racines carrées des éléments de  $\mathbb{Z}[j]$  de module inférieur ou égal à 1. Ces éléments ont tous deux racines carrées hormis 0 qui n'en possède qu'une. Puisque  $b(\mathbb{Z}[j]) = 7$ ,  $b(\mathcal{R}) = 13$ .

7. Il suffit de choisir

$$\mathcal{A} = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

On vérifie sans peine que  $\mathbb{Z}[i]$  est un sous-anneau de  $\mathbb{C}$  donc une partie de type S. Donnons-nous ensuite  $z \in \mathbb{Z}[i]$  et  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $z = a + bi$ . Alors  $|z| \leq 1$  si et seulement si  $a^2 + b^2 \leq 1$ . Puisque  $a$  et  $b$  sont entiers, les seuls couples  $(a, b)$  adéquats sont  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ . On a donc bien  $b(\mathbb{Z}[i]) = 5$ .

8. Il suffit de prendre  $\mathcal{A} = \mathcal{R}(\mathbb{Z}[i])$ . Le même raisonnement qu'à la question II.6 montre que  $\mathcal{A}$  est bien de type S et que  $b(\mathcal{A}) = 9$ .

### Partie III – Sous-groupes de $\mathbb{U}_n$

1. Il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n = md$ . Soit alors  $z \in H$ . Alors  $z^n = (z^d)^m = 1$  donc  $z \in \mathbb{U}_d$ . Ainsi  $H \subset \mathbb{U}_n$ . Puisque  $H$  est déjà un sous-groupe de  $\mathbb{C}^*$ , c'est un sous-groupe de  $\mathbb{U}_n$ .

2. a. Considérons l'ensemble  $A = \{k \in \mathbb{N}^*, \omega^k \in H\}$ . Cet ensemble est non vide : en effet,  $1 \in H$  car  $H$  est un sous-groupe de  $\mathbb{U}_n$  de sorte que  $n \in A$ . Or  $A$  est une partie de  $\mathbb{N}^*$  donc il admet un plus petit élément  $m \in \mathbb{N}^*$ . Puisque  $n \in A$ , on a donc  $m \leq n$ .
- b. On sait que  $\omega^m \in H$  et que  $H$  est un sous-groupe de  $\mathbb{U}_n$ ,  $(\omega^m)^k \in H$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Ainsi

$$\{\omega^{mk}, k \in \mathbb{Z}\} \subset H$$

Réciproquement, soit  $z \in H$ . Puisque  $H \subset \mathbb{U}_n$ , il existe  $p \in \mathbb{Z}$  tel que  $z = \omega^p$ . On note  $q$  et  $r$  le quotient et le reste de la division euclidienne de  $p$  par  $m$ . Alors  $z = \omega^{qm+r}$  puis  $\omega^r = z\omega^{-qm}$ . Puisque  $z$  et  $\omega^{-qm}$  appartiennent à  $H$ ,  $\omega^r$  également. Par définition de la division euclidienne,  $0 \leq r \leq m-1$ . On ne peut avoir  $r \geq 1$ , car cela contredirait la minimalité de  $m$ . Ainsi  $r = 0$  puis  $z = \omega^{mq}$ . On en déduit que

$$H \subset \{\omega^{mk}, k \in \mathbb{Z}\}$$

Par double inclusion,  $H = \{\omega^{mk}, k \in \mathbb{Z}\}$ .

- c. Notons  $d$  et  $r$  le quotient et le reste de la division euclidienne de  $n$  par  $m$ . Alors  $1 = \omega^n = \omega^{md}\omega^r$  i.e.  $\omega^r = \omega^{-md}$ . D'après la question précédente,  $\omega^r \in H$ . Or  $0 \leq r \leq m-1$  et on ne peut avoir  $r \geq 1$  par minimalité de  $m$ . Ainsi  $r = 0$  puis  $n = md$ . Puisque  $m \leq n$ , on a donc  $d \geq 1$  i.e.  $d \in \mathbb{N}^*$ .
- d. On procède par double inclusion. Soit  $z \in H$ . D'après la question III.2.b, il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $z = \omega^{mk}$ . Alors  $z^d = \omega^{kmd} = (\omega^n)^k = 1$  donc  $z \in \mathbb{U}_n$ .

Réciproquement, soit  $z \in \mathbb{U}_d$ . Il existe donc  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $z = e^{\frac{2ik\pi}{d}}$ . Alors

$$z = e^{\frac{2ikm\pi}{md}} = e^{\frac{2ikm\pi}{n}} = \omega^{mk} \in H$$

Par double inclusion,  $H = \mathbb{U}_d$ .

#### Partie IV – Valeurs possibles de $b(\mathcal{A})$

1. a. On raisonne par récurrence. Tout d'abord,  $a = a^1 \in \mathcal{A}$ . Supposons que  $a^n \in \mathcal{A}$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $a^{n+1} = a^n \times a \in \mathcal{A}$  car  $\mathcal{A}$  est stable par produit. Finalement,  $a^n \in \mathcal{A}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- b. La suite de terme général  $|a|^n = |a^n|$  est strictement décroissante donc injective. Il en est de même de la suite  $a^n$ . Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a^n \in \mathcal{A}$  et  $|a^n| = |a|^n < 1$ ,  $b(\mathcal{A}) = \infty$ .
- c. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question IV.1.a,  $a^n$  et  $a^{2n}$  appartiennent à  $\mathcal{A}$ . Puisque  $\mathcal{A}$  est de type S,  $(a^n)^2 + (a^{2n})^2 = a^{2n} + a^{4n} \in \mathcal{A}$ .
2. a. Remarquons déjà que  $a = e^{i\theta}$  puisque  $a \in \mathbb{U}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On utilise la méthode de l'arc moitié :

$$a^{2n} + a^{4n} = e^{2ni\theta} + e^{4ni\theta} = e^{3ni\theta}(e^{-in\theta} + e^{in\theta}) = 2\cos(n\theta)e^{3ni\theta}$$

Puisque  $e^{3ni\theta}$  est de module 1,

$$|a^{2n} + a^{4n}| = 2|\cos(n\theta)|$$

- b. Comme  $\cos$  est paire, on peut supposer  $\theta$  positif i.e.  $\theta \in [0, \pi]$ . De plus,

$$|\cos(n(\pi - \theta))| = |\cos(n\pi - n\theta)| = |\cos(n\theta)|$$

donc on peut même supposer  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

- c. Il suffit de prendre  $n = 1$ . En effet,  $\theta \in ]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$  donc  $0 < \cos(\theta) < \frac{1}{2}$  et donc  $0 < |a^2 + a^4| < 1$ .
- d. Il suffit cette fois-ci de prendre  $n = 2$ . En effet,  $2\theta \in ]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[ \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$  donc  $0 < \cos(2\theta) < \frac{1}{2}$  et donc  $0 < |a^4 + a^8| < 1$ .
- e. Par définition de  $n$ ,  $(n-1)\theta \leq \frac{\pi}{3}$  donc

$$\frac{\pi}{3} < n\theta \leq \frac{\pi}{3} + \theta < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi  $0 < \cos(n\theta) < \frac{1}{2}$  et donc  $0 < |a^{2n} + a^{4n}| < 1$ .

- f. Quelque soit la valeur de  $\theta$ , il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $0 < |a^{2n} + a^{4n}| < 1$ . Or d'après la question IV.1.c,  $a^{2n} + a^{4n} \in \mathcal{A}$ . La question IV.1.b montre alors que  $b(\mathcal{A}) = \infty$ .

3. Supposons  $\mathcal{A} \cap \mathbb{U} = \mathbb{U}_3$ . Alors 1 et  $j$  appartiennent à  $\mathcal{A} \cap \mathbb{U}$ . Or  $\mathcal{A}$  est de type S donc  $1^2 + j^2 = e^{\frac{i\pi}{3}} \in \mathcal{A}$ . Puisque  $e^{\frac{i\pi}{3}} \in \mathbb{U}$ , on aurait  $e^{\frac{i\pi}{3}} \in \mathbb{U}_3$ , ce qui est faux. Ainsi  $\mathcal{A} \cap \mathbb{U} \neq \mathbb{U}_3$ .
4. a. Puisque  $b(\mathcal{A}) \geq 2$ ,  $\mathcal{A}$  contient au moins deux éléments de module inférieur ou égal à 1. Mais puisque  $b(\mathcal{A})$  est fini, ces deux éléments ne peuvent être que de module 0 ou 1 d'après la question **IV.1.b**. Puisqu'il n'existe qu'un seul complexe de module nul (à savoir 0),  $\mathcal{A}$  contient forcément un élément de module 1.
- b. Soit  $\alpha \in \mathcal{A} \cap \mathbb{U}$ . Puisque  $b(\mathcal{A})$  est fini, la question **IV.2** montre que son argument principal  $\theta$  est un multiple de  $\frac{\pi}{4}$  ou de  $\frac{\pi}{6}$ . Ainsi

$$\alpha \in \left\{ e^{\frac{ik\pi}{4}}, k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{U}_8$$

ou

$$\alpha \in \left\{ e^{\frac{ik\pi}{6}}, k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{U}_{12}$$

Par conséquent,  $\mathcal{A} \cap \mathbb{U} \subset \mathbb{U}_8 \cup \mathbb{U}_{12}$ .

- c. On a clairement  $\mathcal{A} \cap \mathbb{U} \subset \mathbb{U}$ . Puisque  $\mathcal{A}$  contient un élément de module 1,  $\mathcal{A} \cap \mathbb{U}$  est non vide.  $\mathcal{A}$  et  $\mathbb{U}$  sont tous deux stables par produit donc  $\mathcal{A} \cap \mathbb{U}$  également. Soit alors  $\alpha \in \mathcal{A} \cap \mathbb{U}$ . Alors  $\alpha \in \mathbb{U}_8$  ou  $\alpha \in \mathbb{U}_{12}$  donc  $\alpha^{-1} = \alpha^7$  ou  $\alpha^{-1} = \alpha^{11}$ . Comme  $\mathcal{A} \cap \mathbb{U}$  est stable par produit,  $\alpha^7$  et  $\alpha^{11}$  appartiennent tous deux à  $\mathcal{A} \cap \mathbb{U}$  donc  $\alpha^{-1}$  également. Ceci prouve que  $\mathcal{A} \cap \mathbb{U}$  est bien un sous-groupe de  $\mathbb{U}$ .
- d. D'après la question **III.1**,  $\mathbb{U}_8 \cup \mathbb{U}_{12} \subset \mathbb{U}_{24}$  car 8 et 12 divisent 24. Ainsi  $\mathcal{A} \cap \mathbb{U}$  est un sous-groupe de  $\mathbb{U}$  inclus dans  $\mathbb{U}_{24}$  donc un sous-groupe de  $\mathbb{U}_{24}$ . La question **III.2** montre qu'il existe un diviseur  $m$  de 24 tel que  $\mathcal{A} \cap \mathbb{U} = \mathbb{U}_m$ . On ne peut avoir  $m = 24$  puisque  $\mathbb{U}_{24}$  n'est pas inclus dans  $\mathbb{U}_8 \cup \mathbb{U}_{12}$  (par exemple,  $e^{\frac{i\pi}{12}}$  n'appartient ni à  $\mathbb{U}_8$  ni à  $\mathbb{U}_{12}$ ). On a vu également qu'on ne peut avoir  $m = 3$  à la question **IV.3**. On a donc

$$m \in \{1, 2, 4, 6, 8, 12\}$$

- e. Si  $m \in \{4, 8, 12\}$ , alors 1 et  $i$  appartiennent à  $\mathcal{A}$ . Par conséquent  $1^2 + i^2 = 0$  appartient aussi à  $\mathcal{A}$ .

5. Supposons  $b(\mathcal{A}) \geq 2$  et  $b(\mathcal{A})$  fini. Il existe donc  $m \in \{1, 2, 4, 6, 8, 12\}$  tel que  $\mathcal{A} \cap \mathbb{U} = \mathbb{U}_m$ . D'après la question **IV.1.b**, on a  $\mathcal{A} \cap \mathbb{U} = \mathcal{A} \cap \mathbb{U}$  ou  $\mathcal{A} \cap \mathbb{U} = (\mathcal{A} \cap \mathbb{U}) \cup \{0\}$  donc  $b(\mathcal{A}) = m$  ou  $b(\mathcal{A}) = m + 1$ . De plus, si  $m = 4$ ,  $m = 8$  ou  $m = 12$ , on a vu que 0 appartenait nécessairement à  $\mathcal{A}$  donc  $b(\mathcal{A}) = m + 1$  dans ces trois cas. Finalement, l'ensemble des valeurs potentiellement prises par  $b(\mathcal{A})$  est

$$\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 13, \infty\}$$

Or on a vu dans les exemples des deux premières parties que ces valeurs étaient effectivement prises par  $b(\mathcal{A})$ .