

# DEVOIR À LA MAISON N°04

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Exercice 1 ★★

On pose  $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0\}$  et  $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ . On rappelle que  $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ . Les trois questions sont complètement indépendantes.

1. On définit l'application  $f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-i\} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \frac{iz + 1}{z + i} \end{cases}$ .

- a. L'application  $f$  est-elle injective ?
- b. Montrer que  $\operatorname{Im} f = \mathbb{C} \setminus \{i\}$ . L'application  $f$  est-elle surjective ?
- c. Montrer que  $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}$ .
- d. Montrer que  $f$  induit une bijection de  $\mathcal{P}$  sur  $\mathcal{D}$ .
- e. Déterminer  $f^{-1}(\mathbb{U})$ .

2. On définit l'application  $g : \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow \mathcal{P} \\ z & \longmapsto -\frac{1}{z} \end{cases}$ .

- a. Montrer que l'application  $g$  est bien définie, autrement dit que  $g(z) \in \mathcal{P}$  pour tout  $z \in \mathcal{P}$ .
- b. Montrer que  $g$  est bijective.

3. Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , on définit l'application  $A_\theta : \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow \mathcal{P} \\ z & \longmapsto \frac{z \cos \theta - \sin \theta}{z \sin \theta + \cos \theta} \end{cases}$ .

- a. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Vérifier que l'application  $A_\theta$  est bien définie, autrement dit que pour tout  $z \in \mathcal{P}$ ,  $A_\theta(z)$  est bien défini et  $A_\theta(z) \in \mathcal{P}$ .
- b. Que vaut  $A_0$  ?
- c. Soit  $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que  $A_\theta \circ A_\varphi = A_{\theta+\varphi}$ .
- d. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $A_\theta$  est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

## Exercice 2 ★★

On souhaite montrer que

$$\forall z \in \mathbb{U}, \sqrt{3} \leq |1 + z| + |1 - z + z^2| \leq \frac{13}{4}$$

On pose pour  $z \in \mathbb{U}$ ,

$$f(z) = |1 + z| + |1 - z + z^2|$$

1. On se donne  $z \in \mathbb{U}$  et on note  $\theta$  un de ses arguments. Montrer que

$$f(z) = 2 \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| + \left| 4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3 \right|$$

2. On pose pour  $t \in \mathbb{R}$

$$g(t) = 2|t| + |4t^2 - 3|$$

Déterminer le minimum et le maximum de  $f$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .

3. En déduire l'inégalité demandée.