Dérivation et intégration

Opérations et dérivation

$$(u+v)'=u'+v' \qquad (uv)'=u'v+uv' \qquad (\lambda u)'=\lambda u' \qquad (u\circ v)'=(u'\circ v)v'$$

$$\left(u^{-1}\right)'=\frac{1}{u'\circ u^{-1}} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \qquad \left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2} \qquad (u^\alpha)'=\alpha u'u^{\alpha-1}$$

Formule de Leibniz : $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$

Dérivées usuelles

$$\ln x\longmapsto\frac{1}{x} \qquad e^{ax}\longmapsto ae^{ax} \qquad x^\alpha\longmapsto\alpha x^{\alpha-1}$$

$$\sin x\longmapsto\cos x \qquad \cos x\longmapsto-\sin x \qquad \tan x\longmapsto 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\arcsin x\longmapsto\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos x\longmapsto-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arctan x\longmapsto\frac{1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{sh} x\longmapsto\operatorname{ch} x \qquad \operatorname{ch} x\longmapsto\operatorname{sh} x \qquad \operatorname{th} x\longmapsto 1-\operatorname{th}^2 x=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

Primitives usuelles

$$\ln x\longmapsto x\ln x-x \qquad e^{ax}\longmapsto\frac{e^{ax}}{a}\ (a\neq 0) \qquad x^\alpha\longmapsto\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha\neq-1\\ \ln|x| & \text{si } \alpha=-1\end{cases}$$

$$\sin x\longmapsto-\cos x \qquad \cos x\longmapsto\sin x \qquad \tan x\longmapsto-\ln|\cos x|$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\longmapsto\arcsin x \qquad -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\longmapsto\arccos x \text{ ou } -\arcsin x \qquad \frac{1}{1+x^2}\longmapsto\arctan x$$

$$\operatorname{sh} x\longmapsto\operatorname{ch} x \qquad \operatorname{ch} x\longmapsto\operatorname{sh} x \qquad \operatorname{th} x\longmapsto\ln(\operatorname{ch} x)$$

Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral : Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, alors

$$\forall(a,b)\in I^2, f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Inégalité de Taylor-Lagrange : Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et si $|f^{(n+1)}|\leqslant M$ sur I, alors

$$\forall(a,b)\in I^2, \left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right|\leqslant M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Formule de Taylor-Young : Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et $a\in I$, alors

$$\forall x\in I, f(x)\underset{x\to a}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o\left((x-a)^n\right)$$