

NOM :

Prénom :

Note :

1. On pose  $a_n = \frac{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ . Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum a_n z^n$ .

On sait que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $[x] \leq x < [x] + 1$  donc  $(a_n)$  est à valeurs dans  $[0, 1[$ . Notamment  $(a_n)$  est bornée et  $R \geq 1$ . De plus,  $a_{3n+1} = \frac{1}{3}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  donc  $(a_n)$  ne converge pas vers 0 de sorte que  $R \leq 1$ . Finalement,  $R = 1$ . ■

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum \binom{2n}{n} z^{2n}$ .

On applique la règle de d'Alembert. Pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,

$$\frac{\left| \binom{2(n+1)}{n+1} z^{2(n+1)} \right|}{\left| \binom{2n}{n} z^{2n} \right|} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} |z|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4|z|^2$$

Si  $|z| < \frac{1}{2}$ , alors  $4|z|^2 < 1$  et  $\sum \binom{2n}{n} z^{2n}$  converge. Si  $|z| > \frac{1}{2}$ , alors  $4|z|^2 > 1$  et  $\sum \binom{2n}{n} z^{2n}$  diverge. Le rayon de convergence recherché est donc  $\frac{1}{2}$ . ■

3. Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ .

Le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x^{2n}$  vaut 1 et

$$\forall x \in ]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right)$$

Par primitivisation, le rayon de convergence de la série entière vaut également 1 et

$$\forall x \in ]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x))$$

En effet, la constante d'intégration est nulle puisque les deux membres sont nuls en 0. ■

4. Montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$ .

La série entière  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$  admet pour rayon de convergence 1 et pour somme  $\ln(1+x)$ . De plus,  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  converge en vertu du critère spécial des séries alternées. On en déduit via le théorème de convergence radiale d'Abel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \ln(2)$$

5. Montrer que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$  où  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

On sait que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\begin{aligned} -\ln(1-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \end{aligned}$$

Par produit de Cauchy, on peut affirmer que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$-\frac{\ln(1-x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \times 1 \right) x^n = \sum_{k=1}^n H_n x^n$$

6. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 x^n$ .

Le rayon de convergence de  $\sum n^2 x^n$  est le même que celui de  $\sum x^n$ , c'est-à-dire 1. On obtient par dérivations successives

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} &= \frac{2}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) + n) x^n = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}$$