Dénombrement

Exercice 1.

Montrer que sur toute planète de l'univers contenant au moins deux pays, il existe toujours deux pays ayant le même nombre de voisins.

Exercice 2.

Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ on note $S(n, m)$ le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, m]\!]$.

1. Que vaut $S(n, n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$? Que vaut $S(n, m)$ si $n < m$?
2. Que vaut $S(0, 0)$? Et $S(n, 0)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?
3. Montrer que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $S(n+1, m) = m(S(n, m)+S(n, m-1))$.

Exercice 3.

1. On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique ?
   On tire simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique ? Donner le résultat en fraction irréductible.
2. Un digicode est une série de quatre caractères : une lettre A ou B suivie de trois chiffres. Combien existe-t-il de digicodes ? Combien existe-t-il de digicodes où tous les caractères sont distincts ? Combien existe-t-il de digicodes n'ayant pas deux caractères consécutifs identiques ?

Exercice 4.

Un digicode est composé de quatre caractères pris parmi dix chiffres et deux lettres. Combien peut-on former de

1. digicodes ?
2. digicodes à caractères distincts ?
3. digicodes contenant exactement un 7? à caractères distincts et contenant un 7?
4. digicodes contenant au moins un chiffre ? à caractères distincts et contenant au moins un chiffre ?
5. digicodes à caractères distincts contenant au moins une lettre ?

Exercice 5.

On pioche 8 cartes (une « main») dans un jeu de 32 cartes. Combien peut-on former de

1. mains ?
2. mains contenant trois piques exactement ?
3. mains contenant au moins trois piques ?
4. mains contenant au moins un roi et au moins un pique ?

Exercice 6.

Soient n et k deux entiers naturels non nuls.

1. Déterminer le nombre de k-uplets $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ d'entiers tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$.
2. Déterminer le nombre de k-uplets $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ d'entiers tels que $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_k \leqslant n$.

Exercice 7.

Soient p et n deux entiers strictement positifs. On note $\mathcal{C}_{p,n}$ l'ensemble des applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ et $\mathcal{S}_{p,n}$ l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{S}_{p,n}$?
2. Pour $f \in \mathcal{C}_{p,n}$, on définit l'application g sur $[\![1, p]\!]$ par :
   $$\forall x \in [\![1, p]\!], \ g(x) = f(x) + x - 1$$
   Montrer que $g \in \mathcal{S}_{p,n+p-1}$.
3. En déduire que $\operatorname{card} \mathcal{C}_{p,n} = \operatorname{card} \mathcal{S}_{p,n+p-1}$.
4. Application : déduire des résultats précédents le nombre de p-uplets $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de $\mathbb{N}^p$ tels que :
   a. $u_1 + u_2 + \dots + u_p \leqslant n$;
   b. $u_1 + u_2 + \dots + u_p = m$;

EXERCICE 8.

Soit E un ensemble à n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$). On va dénombrer des parties de E, (X, Y, Z) sur lesquelles on posera certaines contraintes.

1. Déterminer le nombre de couples (X, Y) tels que $X \cap Y = \varnothing$.
2. Déterminer le nombre de couples (X, Y) tels que $X \cup Y = E$.
3. Déterminer le nombre de couples (X, Y) tels que (X, Y) forment une partition de E.
4. Déterminer le nombre de triplets (X, Y, Z) tels que $X \cup Y = Z$.

EXERCICE 9.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant une preuve combinatoire, montrer que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

On pourra utiliser une partition d'un ensemble à $2n$ éléments en deux parties de n éléments.

EXERCICE 10.

On trace les cordes d'un cercle $\mathcal{C}$ joignant deux à deux n points distincts $A_1, \dots, A_n$ de $\mathcal{C}$. On suppose que trois de ces cordes ne sont jamais concourantes. En combien de points intérieurs au cercle se coupent-elles ?

EXERCICE 11.

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geqslant p^2 + 1$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$. Montrer que l'une au moins des propositions suivantes est vraie :

- au moins $p + 1$ des nombres $x_1, \dots, x_n$ sont égaux ;
- au moins $p + 1$ des nombres $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts.

EXERCICE 12.

Dans cet exercice, le mot *entier* désignera un entier naturel supérieur ou égal à 1 et le mot *ensemble* désignera un ensemble de tels entiers. Pour un ensemble A et un entier n, on définit :

- le nombre $\nu_n(A)$ d'éléments de A compris entre 1 et n i.e. $\nu_n(A) = \operatorname{card}(A \cap [\![1, n]\!])$;
- la proportion $\delta_n(A)$ d'entiers de A parmi ceux compris entre 1 et n i.e. $\delta_n(A) = \dfrac{\nu_n(A)}{n}$.

La limite de la suite $(\delta_n(A))$, si elle existe, est appelée *densité* de A dans B et est notée $\delta(A)$.
Déterminer, si elles existent les densités de

1. $\mathbb{N}^*$;
2. d'un ensemble fini E;
3. de l'ensemble $2\mathbb{N}$ des entiers pairs ;
4. de l'ensemble C des carrés d'entiers ;
5. de $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}}]\!]2^{2k}, 2^{2k+1}]\!]$;
6. de l'ensemble D des entiers dont l'écriture décimale ne comporte pas de 0.

EXERCICE 13.

Soit E un ensemble fini. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on note $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice de A.

1. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Justifier que $\operatorname{card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$.
2. Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(E)$. On pose $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Justifier que $\prod_{i=1}^{n} (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_i}) = 0$.
3. En déduire que $\operatorname{card}(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \operatorname{card}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)$.

EXERCICE 14.

Quel est le nombre de relations d'ordre total sur un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$?

Exercice 15.

Soient r, m, n des entiers naturels. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}=\binom{n+m}{r}$$

Exercice 16.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne n entiers relatifs. Montrer que l'on peut former un multiple de n en additionnant certains de ces n entiers.

Exercice 17.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant les réels $\delta_k = kx - \lfloor kx \rfloor$ pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer qu'il existe un couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $q \leqslant n$ et $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   a. Montrer qu'il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.
   b. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $p \in \mathbb{Z}$ tels qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.
3. On admet l'irrationalité de π. En particulier, $\sin n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pose alors $u_n = \frac{1}{n \sin n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la suite (u_n) admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
   a. Montrer que $l = 0$.
   b. Aboutir à une contradiction en appliquant le résultat de la question **2.b** à π.

Exercice 18.

Une classe comporte 30 élèves. De combien de façons peut-on constituer répartir les élèves en trinômes ?

Exercice 19.

Combien existe-t-il d'anagrammes des mots suivants : «MATHS», «MOTO», «DODO», «ANAGRAMME», «ANTICONSTITUTIONNELLEMENT» ?

Exercice 20.

Dénombrer le nombre

1. d'applications d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à n éléments ;
2. de bijections entre deux ensembles à n éléments ;
3. d'injections d'un ensemble à $n-1$ éléments dans un ensemble à n éléments ;
4. de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à $n-1$ éléments.

Exercice 21.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E de cardinal n. On suppose qu'il existe k classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$ et on note p le cardinal de

$$G = \{(x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y\}$$

Montrer que $n^2 \leqslant kp$.

Exercice 22.

On dispose de 9 jetons numérotés de 1 à 9. On considère une matrice carrée de taille 3 composée de ces 9 jetons. On cherche à déterminer la probabilité p pour que le déterminant de la matrice soit impair.

1. Question préliminaire.
   Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $n \geqslant 2$.
   Montrer que le déterminant de A est congru modulo 2 au déterminant de la matrice dont les coefficients sont les restes $r_{i,j}$ de la division euclidienne des $a_{i,j}$ par 2.
2. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 composées des 9 jetons.
   Déterminer $\operatorname{card}(\mathcal{M})$.
3. On définit $\Omega = \{M \in \mathcal{M}, \det(M) \text{ impair}\}$ et Δ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 dont cinq coefficients sont égaux à 1, quatre coefficients sont nuls et de déterminant impair.
   Donner une relation entre $\operatorname{card}(\Omega)$ et $\operatorname{card}(\Delta)$.
4. Détermination de $\operatorname{card}(\Delta)$.
   a. On considère une matrice de Δ dont une colonne possède trois coefficients égaux à 1.
   Déterminer le nombre K_1 de ces matrices.
   b. On considère une matrice de Δ dont 2 colonnes possèdent exactement un coefficient nul. Déterminer le nombre K_2 de ces matrices.
   c. Calculer $\operatorname{card}(\Delta)$.
   d. En déduire $\operatorname{card}(\Omega)$.
5. Déterminer la probabilité p.

Exercice 23.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E_n = [\![1, n]\!]$ et on note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de E_n.
On appelle foint fixe de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tout élément a de E_n tel que $\sigma(a) = a$.
Pour $p \in [\![0, n]\!]$, on note $S_{n,p}$ le nombre de permutations de E_n ayant exactement p points fixes.

1. **a.** Montrer que $S_{n,n} = 1$ et que $S_{n,n-1} = 0$.
   b. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_{n,k} = n!$.
2. On pose $\omega_n = S_{n,0}$. On convient que $\omega_0 = 1$.
   a. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $S_{n,k} = \dbinom{n}{k}\omega_{n-k}$.
   b. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!} = 1$.
   c. En raisonnant par récurrence, montrer que $\dfrac{\omega_n}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
   d. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\omega_n}{n!}$.

Exercice 24.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer le nombre de k-cycles de $\mathfrak{S}_n$.