

CORRIGÉ TD : PRIMITIVES ET INTÉGRALES

SOLUTION 1.

1. $t \mapsto -\frac{1}{6}e^{-3t^2}$

2. $t \mapsto -\frac{1}{3(\ln t)^3}$

3. $t \mapsto \ln |\operatorname{sh} t|$

4. $t \mapsto \frac{1}{3} \ln(1+t^3)$

5. $t \mapsto \ln(1+\sin^2 t)$

6. $t \mapsto \tan t - t$

7. $t \mapsto 2\sqrt{\tan t}$

8. $t \mapsto \ln(\ln t) \ln t - \ln t$

9. $t \mapsto e^{e^t}$

10. $t \mapsto \arctan(\ln t)$

11. $t \mapsto \operatorname{th} t$

SOLUTION 2.

1. Si $m = n = 0$, $I_{m,n} = 2\pi$.

Si $m = n \neq 0$,

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos^2(mt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2mt)) dt = \pi$$

Enfin si $m \neq n$, on obtient en linéarisant

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m+n)t dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m-n)t dt = 0$$

2. Si $m = n = 0$, $J_{m,n} = 0$.

Si $m = n \neq 0$,

$$J_{m,n} = \int_0^{2\pi} \sin^2(mt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2mt)) dt = \pi$$

Enfin si $m \neq n$, on obtient en linéarisant

$$J_{m,n} = \int_0^{2\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m-n)t dt - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m+n)t dt = 0$$

3. Si $m = n = 0$, $K_{m,n} = 0$.

Si $m = n \neq 0$,

$$K_{m,n} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2mt) dt = 0$$

Enfin si $m \neq n$, on obtient en linéarisant

$$K_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \sin(nt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(m+n)t dt - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(m-n)t dt = 0$$

SOLUTION 3.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx = [-x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1. \\
 J &= \int_0^1 e^{x/2} \, dx = 2 [e^{x/2}]_0^1 = 2(\sqrt{e} - 1), \\
 K &= \frac{2}{\ln 2} \int_0^2 \frac{(\ln 2) 2^x \, dx}{2\sqrt{2+2^x}} = \frac{2}{\ln 2} [\sqrt{2+2^x}]_0^2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\ln \sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

SOLUTION 4.

On reconnaît la dérivée de l'arcussinus.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}} \, dx \\
 &= \left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$

Première méthode pour B :

$$\begin{aligned}
 B &= \int_0^\pi \sin x (\sin x)^2 \, dx = \int_0^\pi \sin x (1 - (\cos x)^2) \, dx \\
 &= \int_0^\pi (\sin x - \sin x (\cos x)^2) \, dx \\
 &= \left[-\cos x + \frac{1}{3} (\cos x)^3 \right]_0^\pi = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

Deuxième méthode pour B : avec l'exponentielle complexe.

$$\begin{aligned}
 B &= \int_0^\pi (\sin x)^3 \, dx = \int_0^\pi \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \, dx \\
 &= \int_0^\pi \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} \, dx \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^\pi (-\sin(3x) + 3 \sin x) \, dx \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} \cos(3x) - 3 \cos x \right]_0^\pi = \frac{1}{4} \left(-\frac{2}{3} + 6 \right) = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

Première méthode pour C : changement de variables $x = \sin t$, donc $dx = \cos t \, dt$.

$$\begin{aligned}
 C &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-(\sin t)^2} \cos t \, dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} \cos t \cos t \, dt = [\sin t \cos t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (\sin t)^2 \, dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} (1 - (\cos t)^2) \, dt = \frac{\pi}{2} - C \implies C = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que le cosinus est positif sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc $\cos t = \sqrt{1-(\sin t)^2}$ dans la première ligne ci-dessus.

Deuxième méthode pour C : intégration par parties.

$$\begin{aligned}
 C &= \int_0^1 1 \cdot \sqrt{1-x^2} \, dx \\
 &= [x\sqrt{1-x^2}]_0^1 - \int_0^1 x \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
 &= - \int_0^1 \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
 &= - \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \, dx \\
 &= -C + [x \arcsin x]_0^1 = -C + \frac{\pi}{2} \implies C = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Troisième méthode pour C : on remarque que la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ décrit un arc de cercle. En effet, on l'obtient en isolant y dans l'équation $x^2 + y^2 = 1$. Ainsi l'intégrale C représente un quart de l'aire du disque unité, d'où $C = \frac{\pi}{4}$.

SOLUTION 5.

D'abord on linéarise :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} \right)^3 \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} \\
 &= \frac{(e^{i6x} - e^{-i6x} - 3e^{i2x} + 3e^{-i2x})(e^{i3x} + e^{-i3x})}{-16i} \\
 &= \frac{e^{i9x} - e^{-i9x} - 3(e^{i5x} - e^{-i5x}) + e^{i3x} - e^{-i3x} + 3(e^{ix} - e^{-ix})}{-16i} \\
 &= -\frac{1}{8} \sin(9x) + \frac{3}{8} \sin(5x) - \frac{3}{8} \sin(x) + \frac{1}{8} \sin(3x).
 \end{aligned}$$

Donc une primitive de f est la fonction donnée par

$$F(x) = \frac{1}{72} \cos(9x) - \frac{3}{40} \cos(5x) + \frac{3}{8} \cos(x) + \frac{1}{24} \cos(3x).$$

SOLUTION 6.

L'intégrale est nulle, puisqu'on intègre une fonction impaire sur un intervalle centré en 0.

Pour ceux qui ne l'ont pas vu, voici les calculs qu'ils auraient pu faire.

$$\sin(2x)^3 = \left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} \right)^3 = \frac{e^{i6x} - e^{-i6x} - 3(e^{i2x} - 3e^{-i2x})}{-4 \times 2i} = -\frac{1}{4} \sin(6x) + \frac{3}{4} \sin(2x).$$

Donc

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(2x)^3 \, dx = \left[\frac{1}{24} \cos(6x) - \frac{3}{8} \cos(2x) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0.$$

SOLUTION 7.

► Si $x \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (x-t)dt + \int_x^1 (t-x)dt \\ &= x^2/2 + (1-x)^2/2 = x^2 - x + 1/2 \end{aligned}$$

► Si $x \leq 0$,

$$f(x) = \int_0^1 (t-x)dt = -x + 1/2$$

► Si $x \geq 1$,

$$f(x) = \int_0^1 (x-t)dt = x - 1/2$$

SOLUTION 8.

1. Effectuons le changement de variable $u = \tan(t)$. On obtient :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1+u^2}}{1+u^2} du = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} \\ &= \operatorname{argsh}(1) = \ln(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

2. Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{x}$. On obtient :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} du = \int_0^1 \frac{2udu}{u+1} \\ &= 2 \left(\int_0^1 du - \int_0^1 \frac{du}{u+1} \right) \\ &= 2(1 - \ln(2)) \end{aligned}$$

3. Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{e^x - 1}$. On obtient :

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1} = \int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^2} du \\ &= 2 \left(\int_0^1 du - \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} \right) = 2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

4. Effectuons le changement de variable $x = \sqrt{u^2 + u + 1} - u$. On obtient :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2 + u + 1}} = 2 \int_{\sqrt{3}-1}^1 \frac{dt}{2t-1} \\ &= -\ln(2\sqrt{3}-3) \end{aligned}$$

5. Effectuons le changement de variable $u = \sin(x)$. On obtient :

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos(x)} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right) = \ln(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

6. Effectuons le changement de variable $u = \cos(x)$. On obtient :

$$\begin{aligned} N &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin(x)} = \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right) - \frac{1}{2} \ln(3) \\ &= \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(\sqrt{3}) \end{aligned}$$

7. Effectuons le changement de variable $u = \cos(x)$. On obtient :

$$\begin{aligned} O &= \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \sin^3(x) dx = \int_0^1 u^2(1-u^2) du \\ &= 1/3 - 1/5 = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

8. Effectuons le changement de variable $u = \cos(2x)$. On obtient :

$$\begin{aligned} O &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)} dx = \int_0^1 \frac{du}{3+u} \\ &= \ln(4/3) \end{aligned}$$

9. Effectuons le changement de variable $x = \cos(2u)$. On obtient :

$$\begin{aligned} O &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = 4 \int_0^{\pi/4} \sin^2(u) du \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} (1 - \cos(2u)) du = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

10. Effectuons le changement de variable $u = x^{1/4}$. On obtient :

$$\begin{aligned} O &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x} + x^{1/4}}{\sqrt{x} + 1} dx = 4 \int_0^1 \frac{u^5 + u^4}{u^2 + 1} du \\ &= 4 \int_0^1 (u^3 + u^2 - u - 1) du + 2 \int_0^1 \frac{2u du}{u^2 + 1} + 4 \int_0^1 \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= 4(1/4 + 1/3 - 1/2 - 1) + 2 \ln(2) + \pi \\ &= -\frac{11}{3} + 2 \ln(2) + \pi \end{aligned}$$

SOLUTION 9.

1. On pose $z = \alpha + i$. Ainsi

$$H(x) = \operatorname{Re}(e^{ix}\bar{z}) + 2 = |z| \cos(x - \varphi) + 2 = \sqrt{\alpha^2 + 1} \cos(x - \varphi) + 2$$

où φ est un argument de z . H ne peut s'annuler que si $-\frac{2}{\sqrt{\alpha^2+1}}$ appartient à $[-1, 1]$. Or

$$-1 \leq -\frac{2}{\sqrt{\alpha^2+1}} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{4}{\alpha^2+1} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha| \geq \sqrt{3}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que H ne s'annule pas est $|\alpha| < \sqrt{3}$.

2. La fonction $\frac{1}{H}$ est continue comme inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas. Ainsi l'intégrale définissant $F(x)$ est bien définie. De plus, F est une primitive de $\frac{1}{H}$ donc F est continue (et même de classe \mathcal{C}^1).

Soit $x \in]-\pi, \pi[$. On a $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\alpha \cos t + \sin t + 2}$. On peut effectuer le changement de variables $u = \tan \frac{t}{2}$ puisque $t \mapsto \tan \frac{t}{2}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$). On utilise alors le paramétrage rationnel du cercle trigonométrique pour exprimer $\cos t$ et $\sin t$ en fonction de u

$$F(x) = \int_0^{\tan \frac{x}{2}} \frac{2du}{(1+u^2)(\alpha \frac{1-u^2}{1+u^2} + \frac{2u}{1+u^2} + 2)} = \int_0^{\tan \frac{x}{2}} \frac{2du}{(2-\alpha)u^2 + 2u + 2+\alpha}$$

On ne peut avoir $\alpha = 2$ puisque $|\alpha| < \sqrt{3}$.

$$F(x) = \frac{2}{2-\alpha} \int_0^{\tan \frac{x}{2}} \frac{du}{u^2 + \frac{2}{2-\alpha}u + \frac{2+\alpha}{2-\alpha}} = \frac{2}{2-\alpha} \int_0^{\tan \frac{x}{2}} \frac{du}{\left(u + \frac{1}{2-\alpha}\right)^2 + \frac{3-\alpha^2}{(2-\alpha)^2}}$$

Or $|\alpha| < \sqrt{3}$ donc $3 - \alpha^2 > 0$. Posons $\beta = \frac{\sqrt{3-\alpha^2}}{2-\alpha}$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2}{2-\alpha} \int_0^{\tan \frac{x}{2}} \frac{du}{\left(u + \frac{1}{2-\alpha}\right)^2 + \beta^2} = \frac{2}{2-\alpha} \frac{1}{\beta} \left(\arctan \left(\frac{1}{\beta} \left(\tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2-\alpha} \right) \right) - \arctan \left(\frac{1}{\beta} \frac{1}{2-\alpha} \right) \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3-\alpha^2}} \left(\arctan \left(\frac{2-\alpha}{\sqrt{3-\alpha^2}} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3-\alpha^2}} \right) - \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3-\alpha^2}} \right) \right) \end{aligned}$$

3. Par 2π -périodicité de H , $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{H(t)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{H(t)}$. Ainsi $F(2\pi) = F(\pi) - F(-\pi)$. Comme F est continue, $F(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} F(x)$ et $F(-\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} F(x)$. En utilisant l'expression précédente valable pour $x \in]-\pi, \pi[$, on trouve :

$$F(2\pi) = F(\pi) - F(-\pi) = \frac{2\pi}{\sqrt{3-\alpha^2}}$$

SOLUTION 10.

1. f est continue sur \mathbb{R} comme inverse d'une fonction continue sur \mathbb{R} ne s'annulant pas sur \mathbb{R} . Elle admet donc des primitives sur \mathbb{R} .

2. On a $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Or pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\alpha + \beta \cos^2 t} \geq \frac{1}{\alpha}$. Ainsi pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$F(x) \geq \int_0^x \frac{dt}{\alpha} = \frac{x}{\alpha}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\alpha} = +\infty$, on a également $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

3. Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Comme \tan est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$), on peut effectuer le changement de variable $u = \tan t$ dans l'intégrale définissant f . Remarquons de plus que $\cos^2 t = \frac{1}{1+\tan^2 t}$. Ainsi :

$$F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{(1+t^2)(\alpha + \frac{\beta}{1+t^2})} = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{\alpha t^2 + \alpha + \beta} = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}} \arctan \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}} \tan x \right)$$

4. $49 - 45 \sin^2 x = 4 + 45 \cos^2 x$. Il suffit donc de poser $\alpha = 4$ et $\beta = 45$ pour se ramener au cas précédent. Comme f est π -périodique et paire,

$$I = 2 \int_0^{\pi} f(t) dt = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = 4F\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

F est une primitive de f sur \mathbb{R} donc elle est continue sur \mathbb{R} et notamment en $\frac{\pi}{2}$. En utilisant l'expression déterminée à la question précédente, on trouve :

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}} \tan x\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}}$$

Finalement, $I = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{4(4 + 45)}} = \frac{\pi}{7}$.

SOLUTION 11.

Pour simplifier, on supposera $a^2 \leq b^2$. On effectue le changement de variable $x = \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} \sin \theta$. Ainsi

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} \sin \theta \right) \sqrt{\left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right)^2 (1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} \frac{b^2 - a^2}{2} \cos \theta d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} \sin \theta \right) \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right)^2 \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \quad \text{car } \frac{b^2 - a^2}{2} \geq 0 \\ &= \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right)^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} \sin \theta \right) \cos^2 \theta d\theta \quad \text{car } \cos \theta \geq 0 \text{ pour } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ &= \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right)^2 \left[\frac{a^2 + b^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta + \frac{b^2 - a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \right] \\ &= \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right)^2 \frac{a^2 + b^2}{2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{16} (b^2 - a^2)^2 (a^2 + b^2) \pi \end{aligned}$$

Si $a^2 \geq b^2$, on trouve pour I l'opposé de cette valeur.

SOLUTION 12.

1. Notons $F(x) = \int x \arctan^2(x) dx$ et intégrons par parties,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^2}{2} \arctan^2(x) - \int \frac{x^2}{x^2 + 1} \arctan(x) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan(x) + \int \frac{\arctan(x)}{x^2 + 1} dx - \int \arctan(x) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan^2(x) + \frac{1}{2} \arctan^2(x) - \int \arctan(x) dx \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \int \arctan(x) dx &= x \arctan(x) - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx \\ &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \end{aligned}$$

D'où

$$\int x \arctan^2(x) dx = \frac{x^2 + 1}{2} \arctan^2(x) - x \arctan(x) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

2. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$,

$$\int e^x \sin^2(x) dx = \int \frac{e^x}{2} dx - \int \frac{e^x \cos(2x)}{2} dx$$

Puisque $e^x \cos(2x) = \operatorname{Re}(e^{(1+2i)x})$, on calcule

$$\int e^{(1+2i)x} dx = \frac{e^x e^{2ix}}{1+2i} = \frac{1-2i}{5} e^x e^{2ix}$$

dont la partie réelle vaut

$$\int e^x \cos(2x) dx = \frac{e^x}{5} (\cos(2x) + 2 \sin(2x))$$

On a donc

$$\int e^x \sin^2(x) dx = \frac{e^x}{2} - \frac{e^x}{10} (\cos(2x) + 2 \sin(2x))$$

3. En posant $u = \ln x$,

$$\int \cos(\ln x) dx = \int e^u \cos u du$$

Via un passage en complexes ou une intégration par parties

$$\int e^u \cos u du = \frac{1}{2} e^u (\cos u + \sin u)$$

On en déduit

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{1}{2} x (\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$$

4. En posant $u = \sqrt{1+x}$,

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x}} = 2 \int (u^2 - 1) du = \frac{2}{3} u^3 - 2u = \frac{2}{3} (\sqrt{1+x})^3 - 2\sqrt{1+x} = \frac{2}{3} \sqrt{1+x} (x-2)$$

5. En posant $u = e^x$, on a

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan u = \arctan(e^x)$$

SOLUTION 13.

1. Il faut montrer que $t \mapsto \sin t + \cos t$ ne s'annule pas sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin t > 0$ et $\cos t \geq 0$ donc $\sin t + \cos t > 0$. De plus, $\sin 0 + \cos 0 = 1 > 0$.

Ainsi $t \mapsto \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}$ et $t \mapsto \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}$ sont continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et S et C sont bien définies.

2. Il suffit d'effectuer le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$.

3. On a clairement $S + C = \frac{\pi}{2}$. On en déduit $S = C = \frac{\pi}{4}$.

4. On effectue le changement de variable $t = \sin u$. On en déduit

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin u + |\cos u|} du$$

Mais pour $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos u \geq 0$ donc

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin u + \cos u} du = C = \frac{\pi}{4}$$

SOLUTION 14.

1. Notons I l'intégrale à calculer. Le changement de variable $u = \cos t$ donne

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \frac{du}{4-u^2} \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2+u} + \frac{1}{2-u} \right) du \\ &= [\ln(2+u)]_{-1}^1 - [\ln(2-u)]_{-1}^1 = 2 \ln 3 \end{aligned}$$

2. Notons J l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin t \, dt}{1 - \cos^2 t}$$

Le changement de variable $u = \cos t$ donne

$$\begin{aligned} J &= - \int_0^{\cos x} \frac{du}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\cos x} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \frac{1}{2} ([\ln(1-u)]_0^{\cos x} - [\ln(u+1)]_0^{\cos x}) \\ &= \frac{1}{2} (\ln(1-\cos x) - \ln(1+\cos x)) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\tan^2 \frac{x}{2} \right) = \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

car pour $x \in]0, \pi[$, $\tan \frac{x}{2} > 0$.

3. Notons K l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$K = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t \, dt}{(1 - \sin^2 t)^2}$$

Le changement de variable $u = \sin t$ fournit donc

$$K = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{(1-u^2)^2}$$

Une décomposition en éléments simples donne ensuite

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(u-1)^2} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u+1)^2} + \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \frac{1}{4} \left(\left[\frac{1}{u-1} \right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - [\ln(1-u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\frac{1}{u+1} \right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + [\ln(1+u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \\ &= \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} \end{aligned}$$

4. Notons L l'intégrale à calculer. Le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$ allié à la paramétrisation rationnelle du cercle donne

$$L = 2 \int_0^1 \frac{du}{1-u^2+2u}$$

Une décomposition en éléments simples donne alors

$$\begin{aligned} K &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{u+\sqrt{2}-1} - \frac{1}{u-1-\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} ([\ln(u+\sqrt{2}-1)]_0^1 - [\ln(1+\sqrt{2}-u)]_0^1) \\ &= \sqrt{2} \ln(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

SOLUTION 15.

1. Par une intégration par parties

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^{n+1}} \right]_0^x + (n+1) \int_0^x \frac{2t^2 dt}{(1+t^2)^{n+2}} \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} + (n+1) (2I_n(x) - 2I_{n+1}(x)) \end{aligned}$$

Ainsi

$$2(n+1)I_{n+1}(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} + (2n+1)I_n(x)$$

2. Le résultat de la question précédente alliée à une récurrence simple garantit l'existence de $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si on pose $l_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $l_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} l_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\frac{l_n}{l_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

Puisque $l_0 = \frac{\pi}{2}$, $l_n = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

SOLUTION 16.

1. Pour $x \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \leq \frac{(1-x)^n}{n!} e$. On en déduit que :

$$0 \leq I_n \leq e \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} dx = e \left[\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^1 = \frac{e}{(n+1)!}$$

D'après le théorème de gendarmes, la suite (I_n) converge vers 0.

2. On effectue une intégration par parties :

$$I_{n+1} = \left[\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$$

3. On utilise du télescopage. Pour $n \geq 1$

$$I_0 - I_n = \sum_{k=0}^{n-1} I_k - I_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

Or $I_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1$ donc

$$e - I_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Il suffit alors de passer à la limite.

SOLUTION 17.

1. Pour $t \geq 0$, $\frac{1}{1+t} \leq 1$ donc $0 \leq I_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$. On en déduit que (I_n) converge vers 0.
2. $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^n + t^{n+1}}{1+t} dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$.
3. En utilisant la question précédente, $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (I_k + I_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} I_k - \sum_{k=1}^n (-1)^k I_{k-1}$. On reconnaît là une somme télescopique donc $S_n = (-1)^{n+1} I_n - (-1)^1 I_0 = I_0 + (-1)^{n+1} I_n$. Le calcul de I_0 donne $I_0 = \ln 2$.
4. Comme (I_n) converge vers 0, Q_n converge vers $\ln 2$.

SOLUTION 18.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Effectuons une intégration par parties (toutes les fonctions en jeu sont de classe \mathcal{C}^1),

$$\begin{aligned} I_{n,p} &= \int_0^1 t^n (1-t)^p dt = \left[-t^n \frac{(1-t)^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{nt^{n-1} (1-t)^{p+1}}{p+1} dt \\ &= \frac{n}{p+1} I_{n-1,p+1} \end{aligned}$$

2. On montre par récurrence sur n que

$$I_{n,p} = \frac{n!}{(p+1) \cdots (p+n)} I_{0,p+n} = \frac{n!p!}{(p+n)!} I_{0,p+n}$$

$$\text{Or } I_{0,n+p} = \int_0^1 t^{n+p} dt = \frac{1}{n+p+1}. \text{ Ainsi,}$$

$$I_{n,p} = \frac{n!p!}{(n+p+1)!}$$

SOLUTION 19.

1. Soit $n \geq 1$. Intégrons par parties...

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\frac{2}{3} (1-t)^{\frac{3}{2}} t^n \right]_0^1 + \frac{2n}{3} \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \frac{2n}{3} \int_0^1 t^{n-1} (1-t) \sqrt{1-t} dt = \frac{2n}{3} [I_{n-1} - I_n] \end{aligned}$$

D'où,

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}.$$

REMARQUE. Les intégrations par parties sont légitimes car les fonctions en jeu sont toutes de classe \mathcal{C}^1 . ■

2. On a

$$I_0 = \left[-\frac{2}{3} (1-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Par une récurrence immédiate, on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{(2n) \cdots (2)}{(2n+3) \cdots (5)} I_0 = \frac{(2n) \cdots (2)}{(2n+3) \cdots (5)} \frac{2}{3} \\ &= \frac{2^{n+1} n!}{\frac{(2n+4)!}{2^{n+2} (n+2)!}} = 2^{2n+3} \frac{n!(n+2)!}{(2n+4)!} \end{aligned}$$

3. Effectuons le changement de variable bijectif de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$ et de classe \mathcal{C}^1 défini par $t = 1 - u^2$. On a $dt = -2u du$ d'où

$$\begin{aligned} I_n &= 2 \int_0^1 u^2 (1 - u^2)^n du \\ &= 2 \int_0^1 u^2 \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k u^{2k} \right) du \\ &= 2 \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k u^{2k+2} \right) du \\ &= 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 u^{2k+2} du \\ &= 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{2k+3} \end{aligned}$$

Or,

$$I_n = 2^{2n+3} \frac{n!(n+2)!}{(2n+4)!}$$

donc

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{2k+3} = 2^{2n+2} \frac{n!(n+2)!}{(2n+4)!}.$$

SOLUTION 20.

1. $t \mapsto 2/3 \sqrt{3} \arctan(1/3 (2t+1) \sqrt{3})$
2. $t \mapsto -5/2 \ln(t^2+1) + 2 \arctan(t)$
3. $t \mapsto 3/4 \ln(2t^2-4t+3) + 5/2 \sqrt{2} \arctan((t-1) \sqrt{2})$

SOLUTION 21.

Effectuons le changement de variable de classe \mathcal{C}^1

$$t = u - x.$$

On obtient alors,

$$\psi(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

La fonction f étant continue sur \mathbb{R} , ψ est dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle,

$$\psi'(x) = f(x+1) - f(x).$$

SOLUTION 22.

$g : t \mapsto \frac{t}{1+e^t}$ est continue sur \mathbb{R} et admet donc une primitive G sur \mathbb{R} . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = G(x^3) - G(x^2)$. Comme F est dérivable sur \mathbb{R} , f l'est également et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2 G'(x^3) - 2x G'(x^2) = 3x^2 g(x^3) - 2x g(x^2) = \frac{3x^5}{1+e^{x^3}} - \frac{2x^3}{1+e^{x^2}}$$

SOLUTION 23.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par inégalité triangulaire

$$\left| \int_{-x}^x \sin(t^2) dt \right| \leq \int_{-x}^x |\sin(t^2)| dt \leq \int_{-x}^x 1 dt = 2x$$

Puisque $x \mapsto \int_{-x}^x \sin(t^2) dt$ est clairement impaire, on a également pour tout $x \in \mathbb{R}_-$

$$\left| \int_{-x}^x \sin(t^2) dt \right| \leq -2x$$

Finalement pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \int_{-x}^x \sin(t^2) dt \right| \leq 2|x|$$

Il s'ensuit que $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{-x}^x \sin(t^2) dt = 0$.

2. Soit $x \in]1, +\infty[$. Pour tout $t \in [x, 2x]$, $0 < \ln t \leq \ln(2x)$ et donc $\frac{1}{\ln t} \geq \frac{1}{\ln(2x)}$. On en déduit que

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t} \geq \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(2x)} = \frac{x}{\ln(2x)}$$

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(2x)} = +\infty$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t} = +\infty$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Effectuons d'abord une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt &= - \left[\frac{\cos t}{t} \right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2} dt \\ &= \frac{\cos x}{x} - \frac{\cos 2x}{2x} - \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2} dt \end{aligned}$$

Puisque \cos est bornée, on a facilement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos 2x}{2x} = 0$.

Supposons $x \in \mathbb{R}_+$. Par inégalité triangulaire

$$\left| \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2} dt \right| \leq \int_x^{2x} \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{2x}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2} dt = 0$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt = 0$.