Devoir surveillé n°07

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

Des points à prendre. Les questions sont toutes indépendantes.

1. Résoudre l'équation $(E) : 6x + 14y = 4$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
2. Résoudre le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 2[6] \\ x \equiv 4[8] \end{cases}$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^{100} par 8.
4. Monter que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n^5 - n$ est divisible par 15.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les entiers $3n + 2$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 2.

Soit $(a, b, \lambda) \in \mathbb{R}^3$. On se propose d'étudier quelques propriétés de la suite réelle (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \lambda \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{4}\left(3u_n^2 - 2(a+b)u_n + ab + 2(a+b)\right) \end{cases}$$

1. Dans cette question, on suppose $a = b = 0$.

- **a.** Que peut-on dire de la suite (u_n) si $\lambda = 0$?
- **b.** On suppose maintenant $\lambda \neq 0$. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- **c.** On pose alors $w_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer w_n en fonction de n et λ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- **d.** En déduire une expression de u_n en fonction de n et de λ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **e.** Discuter suivant les valeurs de λ la convergence de la suite (u_n) et préciser sa limite le cas échéant.

2. Dans cette question, on suppose $a = b = 2$.

- **a.** Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- **b.** Montrer que si (u_n) converge, sa limite est nécessairement égale à 2.
- **c.** On suppose $\lambda > 2$. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
- **d.** Montrer qu'il existe deux réels λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$ tels que $u_1 = 2$ *si et seulement si* $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$.
- **e.** On suppose $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$. Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
- **f.** On suppose $\lambda < \lambda_1$. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

3. Dans cette question, on suppose $a < b < 2$.

- **a.** On considère l'application polynomiale P définie par

  $$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 3x^2 - 2(2 + a + b)x + ab + 2(a + b)$$

  Factoriser $P(a)$, $P(b)$ et $P(2)$ puis déterminer leurs signes.
- **b.** On suppose que (u_n) converge vers une limite L. Montrer que L vérifie $a < L < b$ ou $b < L < 2$.

Exercice 3.

Vocabulaire et notations

- Pour un réel t, on notera $\lfloor t \rfloor$ la partie entière de t.
- La notation $[\![0, 9]\!]$ désigne l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- On dit qu'une suite (u_n) est périodique à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n+T} = u_n$ pour tout $n \geqslant N$. On dit alors que (u_n) est T-périodique à partir du rang N.

Soit x un nombre réel. On définit deux suites (d_n) et (ε_n) de la manière suivante :

- On pose $d_0 = \lfloor x \rfloor$ et $\varepsilon_0 = x - \lfloor x \rfloor$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_{n+1} = \lfloor 10\varepsilon_n \rfloor$ et $\varepsilon_{n+1} = 10\varepsilon_n - \lfloor 10\varepsilon_n \rfloor$.

1. *Dans cette question uniquement*, on suppose $x = 123,456$. Calculer d_0, d_1, d_2, d_3 et $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Que valent d_n et ε_n pour $n \geqslant 4$?

2. On revient au cas général.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n \in [0, 1[$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n \in [\![0, 9]\!]$.

c. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x = S_n + \frac{\varepsilon_n}{10^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. En déduire que (S_n) converge vers x.

3. Soient $T \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}$. On suppose que la suite (d_n) est T-périodique à partir du rang N.

a. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 10^{N+T} S_{n+N+T} - 10^N S_{n+N}$. Montrer que la suite (u_n) est constante.

b. En déduire qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$10^{N+T} S_{n+N+T} - 10^N S_{n+N} = p$$

c. En déduire que x est rationnel.

4. Soit α le nombre dont l'écriture décimale est $0,123\,456\,456\,456\,456\ldots$. Montrer que α est rationnel et l'écrire sous la forme d'une fraction de deux entiers.

5. On suppose que x est rationnel. Il existe donc $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{a}{b}$. On définit deux suites (q_n) et (r_n) de la manière suivante.

- q_0 et r_0 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,q_{n+1} et r_{n+1} sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $10r_n$ par b.

a. Justifier qu'il existe deux entiers naturels N et M distincts tels que $r_N = r_M$.

b. En déduire que (r_n) est périodique à partir d'un certain rang.

c. En déduire que (q_n) est également périodique à partir d'un certain rang.

d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = b\varepsilon_n$ et $q_n = d_n$.
On a donc prouvé que la suite (d_n) était périodique à partir d'un certain rang.

6. On suppose que $x = \frac{13}{35}$. Déterminer $N \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathbb{N}^*$ tels que la suite (d_n) soit T-périodique à partir du rang N.