Géométrie affine

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Préliminaires

Identification des points et des vecteurs

- Jusqu'à maintenant, les éléments de E étaient considérés comme des vecteurs. Dans ce chapitre, on les considérera également comme des points.
- Les éléments de E considérés comme des points seront notés avec des lettres majuscules.
- Les éléments de E considérés comme des vecteurs seront notés surmontés d'une flèche.
- Si A et B sont deux points de E, on notera $\overrightarrow{AB} = B - A$.
- Si A est un point de E et $\vec{u}$ un vecteur de E, $A + \vec{u}$ est l'unique point B de E tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Proposition 1.1 Relation de Chasles

Soit A, B, C trois points de E. Alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

2 Sous-espace affines

2.1 Définition

Définition 2.1 Sous-espace affine

On appelle **sous-espace affine** de E toute partie $\mathcal{F}$ de E de la forme $\Omega + F$ où Ω est un point de E et F un sous-espace vectoriel de E. Dans ce cas,

1. le sous-espace vectoriel F associé à $\mathcal{F}$ est unique ; on l'appelle la **direction** de $\mathcal{F}$;
2. pour tout point $A \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = A + F$.

Notation 2.1

La direction d'un sous-espace affine $\mathcal{F}$ est souvent notée $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.

Définition 2.2 Translation

Soit $\vec{u}$ un vecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application qui à un point M de E associe le point $M + \vec{u}$.

Attention ! Une translation n'est pas une application linéaire.

Définition 2.3 Dimension d'un sous-espace affine

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E de direction F. Si F est de dimension finie, on dit que $\mathcal{F}$ est de dimension $\dim F$.

Exemple 2.1

- Les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ sont les singletons et les droites et $\mathbb{R}^2$.
- Les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$ sont les singletons, les droites, les plans et $\mathbb{R}^3$.

Définition 2.4

On appelle **hyperplan affine** d'un espace vectoriel E tout sous-espace affine de E dont la direction est un hyperplan vectoriel.

2.2 Intersection de sous-espaces affines

Proposition 2.1 Intersection de sous-espaces affines

Soient $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines d'un espace vectoriel E. Pour tout $i \in I$, on note F_i la direction de $\mathcal{F}_i$.

- Soit $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ est vide ;
- soit $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ est un sous-espace affine de direction $\bigcap_{i\in I} F_i$.

Exercice 2.1

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E de direction respectives F et G.

1. Montrer que si $E = F + G$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$.
2. Montrer que si $E = F \oplus G$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un singleton.

3 Lien avec les applications linéaires

Proposition 3.1

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = b$ d'inconnue $x \in E$ est

- soit vide ;
- soit un sous-espace affine de direction $\operatorname{Ker} f$.

Remarque. Plus précisément, l'ensemble des solutions de $f(x) = b$, s'il est non vide, est $x_0 + \operatorname{Ker} f$ où x_0 est une solution particulière. Les solutions de $f(x) = b$ sont donc les sommes d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène $f(x) = 0_F$.

Exemple 3.1

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions d'un système linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n inconnues dans $\mathbb{K}$ et avec second membre est soit vide soit un sous-espace affine de $\mathbb{K}^n$. Dans le second cas, si $\mathrm{X} = (x_1, \dots, x_n)$ est une solution particulière et si S est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé, $\mathcal{S} = \mathrm{X} + \mathrm{S}$.

Exemple 3.2

Soit $(a, b) \in \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{K})^2$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur I de l'équation différentielle $y' + ay = b$ est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^{\mathrm{I}}$ de dimension 1. Plus précisément si y_0 est une solution particulière (son existence est garantie) et si S est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, alors $\mathcal{S} = y_0 + \mathrm{S}$.

Exemple 3.3

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ avec $a \neq 0$ et $d \in \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur I de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d$ est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^{\mathrm{I}}$ de dimension 2. Plus précisément si y_0 est une solution particulière (son existence est garantie) et si S est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, alors $\mathcal{S} = y_0 + \mathrm{S}$.

Exemple 3.4 Polynômes interpolateurs

Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts et $(y_0, \dots, y_n)$. L'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes P tels que $\mathrm{P}(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![0,]\!]$ est un sous-espace affine de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Plus précisément si P est un polynôme vérifiant la condition précédente (son existence est garantie), alors $\mathcal{P} = \mathrm{P} + \mathrm{A}\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ où $\mathrm{A} = \displaystyle\prod_{i=0}^{n} \mathrm{X} - x_i$.

4 Repères affines

Définition 4.1

On appelle **repère affine** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tout couple $(\mathrm{O}, \mathcal{B})$ où O est un point de E et $\mathcal{B}$ est une base de E.

Définition 4.2 Coordonnées dans un repère affine

Soit $(\mathrm{O}, \mathcal{B})$ un repère affine d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle **coordonnées** du point $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ dans ce repère affine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ dans la base $\mathcal{B}$.