

INTÉGRALES À PARAMÈTRES

\mathbb{K} désigne les corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1 Passage à la limite

Théorème 1.1 Convergence dominée

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} . On suppose que

- (H1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I ;
- (H2) (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f ;
- (H3) f est continue par morceaux sur I ;
- (H4) il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi$$

Alors f est intégrable sur I et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$$

REMARQUE. L'intégrabilité des f_n sur I est garantie par la condition de domination.

Exemple 1.1

On pose $f_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{1}{t^n + e^t}$ et $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ pour $n \in \mathbb{N}$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers la fonction

$$f : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} e^{-t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{1+e} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Alors f est bien continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ . De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, |f_n(t)| \leq e^{-t}$$

et la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 e^{-t} dt = 1 - \frac{1}{e}$$

Théorème 1.2 Convergence dominée

Soient $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ où I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} et $a \in \bar{J}$ (éventuellement $a = \pm\infty$). On suppose que :

- (H1) pour tout $x \in J$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (H2) pour tout $t \in I$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x, t) = g(t)$ où g est continue par morceaux sur I ;
- (H3) il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors g est intégrable sur I et

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_I f(x, t) dt = \int_I g(t) dt$$

Théorème 1.3 Intégration terme à terme

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} . On suppose que

- (H1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I ;
- (H2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **intégrable** sur I ;
- (H3) $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction f ;
- (H4) f est continue par morceaux sur I ;
- (H5) la série $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge.

Alors f est intégrable sur I et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$$

Exemple 1.2

On souhaite montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Par développement en série entière

$$\forall t \in]0, 1[, \frac{\ln(t)}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \ln(t)$$

Posons $f_n : t \in]0, 1[\mapsto (-1)^n t^n \ln(t)$. Alors

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue (par morceaux) sur $]0, 1[$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]0, 1[$ puisque $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_n = 0$ si $n > 0$, $f_0(t) = o(1/\sqrt{t})$ et $\lim_{t \rightarrow 1} f_n = 0$;
- $\sum f_n$ converge simplement vers $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t}$ sur $]0, 1[$;
- f est continue (par morceaux) sur $]0, 1[$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_n(t)| dt = -\int_0^1 t^n \ln(t) dt = \frac{1}{(n+1)^2}$ par intégration par parties et $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge.

Par intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0, 1[$ (ce qu'on aurait pu montrer directement) et

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

2 Continuité

Théorème 2.1

Soient $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ où I est un intervalle de \mathbb{R} et A une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose que :

- (H1) pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (H2) pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A ;
- (H3) il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors $F : x \in A \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est continue sur A .

REMARQUE. La dernière condition est une condition dite de **domination**.

REMARQUE. La continuité étant une notion locale, on peut remplacer la condition de domination sur A par la domination au voisinage de tout point de A . En particulier, il suffit de montrer la domination sur tout compact de A .

Si A est un intervalle de \mathbb{R} , il suffit de montrer la domination sur tout segment de A .

Exercice 2.1

Montrer que l'application $B : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ est continue sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Exercice 2.2

Montrer que l'application $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ est continue sur $P = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

3 Dérivabilité

Théorème 3.1

Soient $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ où I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} . On suppose que :

(H1) pour tout $x \in J$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I et intégrable sur I ;

(H2) pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur J ;

(H3) pour tout $x \in J$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;

(H4) il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors $F : x \in J \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur J et

$$\forall x \in J, F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

REMARQUE. La dérivabilité étant une notion locale, on peut remplacer la domination sur J par la domination sur tout segment de J .

Exercice 3.1

Montrer que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée. En déduire $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Corollaire 3.1

Soient $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ où I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} . On suppose que :

(H1) pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^k sur J ;

(H2) pour tout $x \in J$ et pour tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ est continue par morceaux sur I et intégrable sur I ;

(H3) il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors $F : x \in J \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^k sur J et

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \forall x \in J, F^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt$$

REMARQUE. A nouveau, la domination sur tout segment de J suffit.

Corollaire 3.2

Soient $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ où I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} . On suppose que :

(H1) pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur J ;

(H2) pour tout $x \in J$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;

(H3) pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une fonction positive φ_k **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_k(t)$$

Alors $F : x \in J \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur J et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in J, F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$$

REMARQUE. A nouveau, la domination sur tout segment de J suffit.

Exercice 3.2

Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .