# Interrogation écrite n°10

NOM : Prénom : Note :

1. On considère la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = (1,2,1)$, $u_2 = (-1,0,3)$ et $u_3 = (2,2,-2)$. Calculer le rang de $\mathcal{F}$. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$ ? Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$ ?

   On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$\operatorname{rg}(u_1,u_2,u_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2+C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3-2C_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3+C_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

   Ainsi $\operatorname{rg}(u_1,u_2,u_3) = 2 \neq 3$ donc $(u_1,u_2,u_3)$ n'est pas libre, n'engendre pas $\mathbb{R}^3$ et n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

   **Remarque.** On aurait pu directement remarquer que $u_3 = u_1 - u_2$ de sorte que $\operatorname{rg}(u_1,u_2,u_3) = \operatorname{rg}(u_1,u_2) = 2$ car $u_1$ et $u_2$ ne sont clairement pas colinéaires.

2. On note E l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et pour $f \in \mathrm{E}$, on pose $\mathrm{D}(f) = f'$. Montrer que D est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau et son image. D est-il injectif ? surjectif ?

   Soit $f \in \mathrm{E}$. Alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc $f'$ également. Ainsi, $\mathrm{D}(f) = f' \in \mathrm{E}$.
   Soient $(f,g) \in \mathrm{E}^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\mathrm{D}(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' = \lambda \mathrm{D}(f) + \mu \mathrm{D}(f)$$

   donc D est bien linéaire. Il en résulte que $\mathrm{D} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.
   Clairement, $\operatorname{Ker} \mathrm{D}$ est l'ensemble des applications constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Montrons que $\operatorname{Im} \mathrm{D} = \mathrm{E}$. Tout d'abord, $\operatorname{Im} \mathrm{D} \subset \mathrm{E}$ comme vu plus haut. Soit $g \in \mathrm{E}$. Comme $g$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle possède une primitive $f$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi $f' = g$. Mais comme $g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $f'$ l'est également de même que $f$. Ainsi $f \in \mathrm{E}$ et on peut écrire $g = \mathrm{D}(f) \in \operatorname{Im} \mathrm{D}$. Par conséquent, $\mathrm{E} \subset \operatorname{Im} \mathrm{D}$ puis $\mathrm{E} = \operatorname{Im} \mathrm{D}$ par double inclusion.
   Puisque $\operatorname{Ker} \mathrm{D}$ n'est pas nul, D n'est pas injectif. Par contre, $\operatorname{Im} \mathrm{D} = \mathrm{E}$ donc D est surjectif.

3. Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E vérifiant $u^2 - 3u + 2\operatorname{Id}_{\mathrm{E}} = 0$. Justifier que $u$ est un automorphisme de E et déterminer $u^{-1}$.

   On vérifie que

$$u \circ \left(\frac{3}{2}\operatorname{Id}_{\mathrm{E}} - \frac{1}{2}u\right) = \left(\frac{3}{2}\operatorname{Id}_{\mathrm{E}} - \frac{1}{2}u\right) \circ u = \operatorname{Id}_{\mathrm{E}}$$

   Ainsi $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ et $u^{-1} = \frac{3}{2}\operatorname{Id}_{\mathrm{E}} - \frac{1}{2}u$.

4. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ des suites arithmétiques réelles est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Donner une base et la dimension de $\mathcal{A}$. On justifiera sa réponse.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \left\{(a+nr)_{n\in\mathbb{N}},\ (a,r)\in\mathbb{R}^2\right\}\\ &= \left\{a(1)_{n\in\mathbb{N}}+r(n)_{n\in\mathbb{N}},\ (a,r)\in\mathbb{R}^2\right\}\\ &= \operatorname{vect}\left((1)_{n\in\mathbb{N}},(n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathcal{A}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrons que la famille $((1)_{n\in\mathbb{N}},(n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de $\mathcal{A}$. Soit $(a,r)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a(1)_{n\in\mathbb{N}}+r(n)_{n\in\mathbb{N}}=(0)_{n\in\mathbb{N}}$. En évaluant aux rangs 0 et 1, on obtient $a=0$ et $a+r=0$ de sorte que $a=r=0$. La famille $((1)_{n\in\mathbb{N}},(n)_{n\in\mathbb{N}})$ est donc libre et, comme elle engendre $\mathcal{A}$, c'est une base de $\mathcal{A}$. On en déduit que $\dim\mathcal{A}=2$.

5. On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $f((x,y,z))=(2x-3y+4z,-x+y+5z,8x-11y+2z)$. Déterminer des bases respectives du noyau et de l'image de $f$ ainsi que le rang de $f$.

Tout d'abord,

$$\operatorname{Im} f=\{(2x-3y+4z,-x+y+5z,8x-11y+2z)\}=\operatorname{vect}((2,-1,8),(-3,1,-11),(4,5,2))$$

$$\begin{pmatrix}2&-3&4\\-1&1&5\\8&-11&2\end{pmatrix}\underset{\substack{C_2\leftarrow 2C_2+3C_1\\ C_3\leftarrow C_2-2C_1}}{\sim}\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&-1&7\\8&2&-14\end{pmatrix}\underset{C_3\leftarrow C_3+7C_2}{\sim}\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&-1&0\\8&2&0\end{pmatrix}$$

On en déduit que $((2,-1,8),(0,-1,2))$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et donc que $\operatorname{rg} f=2$.
De plus,

$$(x,y,z)\in\operatorname{Ker} f\iff\begin{cases}2x-3y+4z=0\\-x+y+5z=0\\8x-11y+2z=0\end{cases}\underset{\substack{L_2\leftarrow 2L_2+L_1\\ L_3\leftarrow L_3-4L_1}}{\iff}\begin{cases}2x-3y+4z=0\\-y+14z=0\\y-14z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=19z\\y=14z\end{cases}$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f=\operatorname{vect}((19,14,1))$ et $((19,14,1))$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

6. Soient $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g\in\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. Quelles inclusions ou égalités existe-il *toujours* entre les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im}(g\circ f)$, $\operatorname{Ker}(g\circ f)$, $\operatorname{Im} g$, $\operatorname{Ker} g$, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ ? On justifiera ces inclusions.

Montrons que $\operatorname{Ker} f\subset\operatorname{Ker}(g\circ f)$. Soit $x\in\operatorname{Ker} f$. Alors $f(x)=0_{\mathrm{F}}$ donc $g\circ f(x)=g(0_{\mathrm{F}})=0_{\mathrm{G}}$ car $g$ est linéaire. Ainsi $x\in\operatorname{Ker}(g\circ f)$.
Montrons que $\operatorname{Im}(g\circ f)\subset\operatorname{Im} g$. Soit $z\in\operatorname{Im}(g\circ f)$. Alors il existe $x\in\mathrm{E}$ tel que $z=g\circ f(x)$. En posant $y=f(x)\in\mathrm{F}$, alors $z=g(y)$ donc $z\in\operatorname{Im} g$.