

# CALCUL DIFFÉRENTIEL

Dans tout ce chapitre,

- $E, F, G, H$  désignent des  **$\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimensions finies** ;
- $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  désignent des **ouverts** respectifs de  $E$  et  $F$ .

## 1 Différentiabilité

### 1.1 Dérivabilité selon un vecteur

#### Définition 1.1 Dérivée selon un vecteur

Soient  $f : \mathcal{U} \rightarrow F, a \in \mathcal{U}$  et  $v \in E$ . On dit que  $f$  est **dérivable en  $a$  selon le vecteur  $v$**  si l'application  $\varphi_{a,v} : t \mapsto f(a+tv)$  est dérivable en 0. Dans ce cas, on appelle **dérivée de  $f$  en  $a$  selon le vecteur  $v$**  le vecteur  $\varphi'_{a,v}(0)$ , que l'on note  $D_v f(a)$ .

**ff f**

**REMARQUE.** Si on note  $(f_1, \dots, f_n)$  les coordonnées de  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  dans une base  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  de  $F$  (i.e.  $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ g$ ), alors  $f$  est dérivable en  $a$  selon le vecteur  $v$  si et seulement si les  $f_i$  le sont. De plus,

$$D_v f(a) = \sum_{i=1}^n D_v f_i(a) \mathbf{f}_i$$

#### Exemple 1.1

L'application  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, 2xy)$  est dérivable en tout point  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  selon tout vecteur  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  et

$$D_{(u,v)} f(a, b) = 2(au + bv, av + bu)$$

#### Définition 1.2 Dérivées partielles dans une base

Soient  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  une base de  $E$ ,  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  et  $a \in \mathcal{U}$ . On appelle **dérivées partielles** de  $f$  dans la base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  les applications  $D_{\mathbf{e}_j} f$  **si elles sont définies**. On les note  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  ou  $\partial_j f$ .

**REMARQUE.** Si  $E = \mathbb{R}^p$  et qu'on ne précise pas la base dans laquelle on considère les dérivées partielles, c'est qu'on considère implicitement la **base canonique** de  $\mathbb{R}^p$ .

**REMARQUE.** Si on note  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  une base de  $E$  et  $(f_1, \dots, f_n)$  les coordonnées de  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  dans une base  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  de  $F$  (i.e.  $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ g$ ), alors  $g$  admet des dérivées partielles en  $a$  dans la base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  si et seulement si c'est également le cas pour les  $f_i$ . De plus,

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \partial_j f(a) = \sum_{i=1}^n \partial_j f_i(a) \mathbf{f}_i$$

**REMARQUE.** Si  $E = \mathbb{R}^2$ , les variables d'une application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow F$  sont notées plus volontiers  $x$  et  $y$  que  $x_1$  et  $x_2$ . Les dérivées partielles dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  seront alors notées  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  plutôt que  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  et  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  ou  $\partial_1 f$  et  $\partial_2 f$ .

De même, si  $E = \mathbb{R}^3$ , les dérivées partielles dans la base canonique seront plutôt notées  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  et  $\frac{\partial f}{\partial z}$ .

**Méthode** Calculer des dérivées partielles

Lorsque  $E = \mathbb{R}^p$  et  $F = \mathbb{R}^n$ , il est très aisé de calculer des dérivées partielles dans la base canonique. Il suffit de dériver chaque composante de la fonction par rapport à une variable les autres étant fixées.

Autrement dit,  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  est la dérivée de l'application  $x_j \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ .

**Exemple 1.2**

L'application  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, 2xy)$  admet des dérivées partielles dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  en tout point  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 2(a, b) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 2(b, a)$$

**Exemple 1.3**

On pose  $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y^2 > 0\}$ . L'application  $f : (x, y, z) \in \mathcal{U} \mapsto (\ln(x + y^2), e^{xz})$  admet des dérivées partielles sur  $\mathcal{U}$  et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \left( \frac{1}{x + y^2}, ze^{xz} \right) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \left( \frac{2y}{x + y^2}, 0 \right) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (0, xe^{xz})$$

**Exemple 1.4**

Les applications  $\pi_i : (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mapsto x_i$  admettent des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^p$  et

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_p) = \delta_{i,j}$$



**ATTENTION !** Une fonction peut admettre des dérivées partielles sans être continue.

**Exemple 1.5**

Considérons la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2$  mais n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

- Par opérations,  $f$  admet clairement des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0 \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}^*, \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$$

donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  existent et  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

- Par contre,  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$  puisque, par exemple,

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, f(t, t) = \frac{1}{2}$$

Ainsi  $(t, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0)$  mais  $f(t, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$ .



**ATTENTION!** Une fonction peut même admettre des dérivées directionnelles selon tout vecteur sans être continue.

### Exemple 1.6

Considérons la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors  $f$  admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur en tout point de  $\mathbb{R}^2$  mais n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

- Par opérations,  $f$  admet clairement des dérivées directionnelles selon tout vecteur en tout point de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Soit  $u = (h, k)$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^2$ . Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \frac{f(tu) - f(0, 0)}{t} = \frac{hk^2}{h^2 + t^2k^4} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{k^2}{h} & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Donc  $f$  admet bien une dérivée directionnelle selon le vecteur  $u$  en  $(0, 0)$ .

- Par contre,  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$  puisque, par exemple,

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, f(t^2, t) = \frac{1}{2}$$

Ainsi  $(t^2, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0)$  mais  $f(t^2, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$ .

## 1.2 Différentiabilité

### Notation 1.1 Négligeabilité

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ . On suppose que  $0_E \in \mathcal{U}$ . Ecrire que  $f(h) = o(h)$  signifie que  $\lim_{h \rightarrow 0_E} \frac{f(h)}{\|h\|} = 0_F$ .

**REMARQUE.** Les normes que l'on choisit sur  $E$  et  $F$  n'importent pas car toutes les normes sur un espace de dimension finie sont équivalentes.

### Définition 1.3 Développement limité à l'ordre 1

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ . Une écriture du type

$$f(a + h) = c + L(h) + o(h)$$

avec  $c \in F$  et  $L \in \mathcal{L}(E, F)$  s'appelle un **développement limité** de  $f$  à l'ordre 1 en  $a$ . Si un tel développement limité existe, il est unique i.e. le vecteur  $c$  et l'application linéaire  $L$  sont uniques.

**REMARQUE.** Ceci signifie que

$$\lim_{h \rightarrow 0_E} \frac{f(a + h) - c - L(h)}{\|h\|} = 0_F$$

**Définition 1.4 Différentiabilité en un point**

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est **différentiable** en  $a \in \mathcal{U}$  si  $f$  admet un développement limité à l'ordre 1 en  $a$ . Dans ce cas, il existe une unique application linéaire  $L \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} f(a) + L(h) + o(h)$$

Cette application linéaire s'appelle la **différentielle** de  $f$  en  $a$  et se note  $df(a)$ .

**REMARQUE.** La différentielle de  $f$  en  $a$  est également appelée l'**application linéaire tangente** à  $f$  en  $a$ .

**REMARQUE.** Par souci de lisibilité, l'image d'un vecteur  $v$  par la différentielle de  $f$  en  $a$  se notera  $df(a) \cdot v$  plutôt que  $df(a)(v)$ .

**REMARQUE.** Si on note  $(f_1, \dots, f_n)$  les coordonnées de  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  dans une base  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  de  $F$  (i.e.  $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ g$ ), alors  $f$  différentiable en  $a$  si et seulement si les  $f_i$  le sont. De plus,

$$\forall v \in E, df(a) \cdot v = \sum_{i=1}^n (df_i(a) \cdot v) \mathbf{f}_i$$

**Exemple 1.7**

Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, 2xy)$  Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, f((a, b) + (h, k)) = f(a, b) + 2(ah + bk, bh + ak) + (h^2 + k^2, 2hk)$$

L'application

$$L : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (h, k) & \longmapsto 2(ah + bk, bh + ak) \end{cases}$$

est bien linéaire et

$$(h^2 + k^2, 2hk) \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{=} o((h, k))$$

En effet, si l'on munit  $\mathbb{R}^2$  de la norme définie par  $\|(u, v)\| = |u| + |v|$

$$\|(h^2 + k^2, 2hk)\| = (|h| + |k|)^2 = \|(h, k)\|^2$$

de sorte que

$$\frac{\|(h^2 + k^2, 2hk)\|}{\|(h, k)\|} = \|(h, k)\| \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que  $f$  est différentiable en  $(a, b)$  et que  $df(a, b)$  est l'endomorphisme  $(h, k) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 2(ah + bk, bh + ak)$ .

**Exemple 1.8 Différentielle de l'inversion matricielle**

On considère l'application  $f : M \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1}$ . On va montrer que  $f$  est différentiable sur  $GL_n(\mathbb{R})$  et calculer sa différentielle.

Soit  $M \in GL_n(\mathbb{R})$ . Comme  $GL_n(\mathbb{R})$  est ouvert, il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de 0 tel que  $M + H$  est inversible pour tout  $H \in \mathcal{V}$ . Remarquons maintenant que

$$(M + H)^{-1} = (M(I_n + M^{-1}H))^{-1} = (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1}$$

Posons pour simplifier  $K = M^{-1}H$ . On sait que

$$(I_n + K)(I_n - K) = I_n - K^2$$

On en déduit que

$$(I_n + K)^{-1} - (I_n - K) = (I_n + K)^{-1}K^2$$

puis

$$(I_n + K)^{-1}M^{-1} - (I_n - K)M^{-1} = (I_n + K)^{-1}K^2M^{-1}$$

ou encore

$$(M + H)^{-1} - M^{-1} + M^{-1}HM^{-1} = (I_n + M^{-1}H)^{-1}(M^{-1}H)^2M^{-1}$$

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  d'une norme d'algèbre  $\|\cdot\|$  de sorte que

$$\|(M + H)^{-1} - M^{-1} + M^{-1}HM^{-1}\| \leq \|(I_n + M^{-1}H)^{-1}\| \|M^{-1}\|^3 \|H\|^2$$

ou encore

$$\|f(M + H) - f(M) + M^{-1}HM^{-1}\| \leq \|f(I_n + M^{-1}H)\| \|M^{-1}\| \|H\|^2$$

$f$  est continue<sup>a</sup> et l'application  $H \mapsto M^{-1}H$  est également continue en tant qu'endomorphisme d'un espace de dimension finie. Par composition,  $H \mapsto f(I_n + M^{-1}H)$  est continue sur  $\mathcal{V}$ . Quitte à supposer  $\mathcal{V}$  borné<sup>b</sup>, on peut alors affirmer que  $H \mapsto f(I_n + M^{-1}H)$  est bornée sur  $\mathcal{V}$ . Il existe donc une constante positive  $C$  telle que

$$\forall H \in \mathcal{V}, \|f(M + H) - f(M) - M^{-1}HM^{-1}\| \leq C\|H\|^2$$

On en déduit que

$$f(M + H) \underset{H \rightarrow 0}{=} f(M) - M^{-1}HM^{-1} + o(H)$$

L'application  $H \mapsto M^{-1}HM$  est clairement linéaire :  $f$  est donc différentiable en  $M$  et  $df(M)$  est l'application  $H \mapsto M^{-1}HM$ .

<sup>a</sup>Classique : utiliser la formule de la comatrice.

<sup>b</sup>Si on y réfléchit bien,  $\mathcal{V}$  est nécessairement borné...

**Proposition 1.1**

Si  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  est **différentiable** en  $a \in \mathcal{U}$ , alors

- $f$  est **continue** en  $a$ ;
- $f$  admet des dérivées en  $a$  selon tout vecteur  $v \in E$ ;
- $\forall v \in E, df(a) \cdot v = D_v f(a)$ .

**Définition 1.5 Différentiabilité sur un ouvert**

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est **différentiable** sur  $\mathcal{U}$  si  $f$  est différentiable en tout point de  $\mathcal{U}$ . L'application

$$df : \begin{cases} \mathcal{U} & \longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a & \longmapsto df(a) \end{cases}$$

s'appelle la **différentielle** de  $f$  sur  $\mathcal{U}$ .

**Proposition 1.2 Cas particuliers**

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ .

- Si  $f$  est **constante** sur  $\mathcal{U}$ , alors  $f$  est différentiable sur  $\mathcal{U}$  et  $df$  est **nulle** sur  $\mathcal{U}$ .
- Si  $f$  est la restriction à  $\mathcal{U}$  d'une **application linéaire** de  $E$  dans  $F$ , alors  $f$  est différentiable sur  $\mathcal{U}$  et  $df = f$ .
- Si  $\mathcal{U}$  est un intervalle ouvert de  $E = \mathbb{R}$ , alors  $f$  est différentiable en  $a \in \mathcal{U}$  si et seulement si  $f$  est dérivable en  $a$  et, dans ce cas,  $f'(a) = df(a) \cdot 1$ .

**Exemple 1.9**

Les applications  $\pi_i : (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mapsto x_i$  sont différentiables sur  $\mathbb{R}^p$  et  $d\pi_i = \pi_i$ .

**1.3 Lien avec les dérivées partielles****Proposition 1.3 Lien entre différentielle et dérivées partielles**

Soient  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ . Si  $f$  est **différentiable** en  $a$ , alors  $f$  admet des **dérivées partielles** en  $a$  dans la base  $(e_1, \dots, e_p)$  et

$$\forall v \in E, df(a) \cdot v = \sum_{j=1}^p \partial_j f(a) e_j^*(v)$$

ou plus simplement

$$df(a) = \sum_{j=1}^p \partial_j f(a) e_j^*$$

**REMARQUE.** On en déduit un lien entre les dérivées directionnelles et les dérivées partielles si la fonction est **différentiable**. En effet

$$\forall v \in E, D_v f(a) = df(a) \cdot v = \sum_{j=1}^p \partial_j f(a) e_j^*(v)$$

**Exemple 1.10**

Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, 2xy)$  Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On a vu que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 2(a, b) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 2(b, a)$$

Comme  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ ,

$$df(a, b) \cdot (h, k) = 2h(a, b) + 2k(b, a) = 2(ah + bk, bh + ak)$$



**ATTENTION!** Une fonction peut-être continue et admettre des dérivées selon tout vecteur sans pour autant être différentiable.

### Exemple 1.11

Considérons la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2$  mais n'est pas différentiable en  $(0, 0)$ .

- Par opérations,  $f$  est clairement continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Par ailleurs, on a classiquement  $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, |f(x, y)| \leq \frac{1}{2}|y|$$

On en déduit que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

donc  $f$  est continue en  $(0, 0)$ .

- Par opérations,  $f$  admet clairement des dérivées directionnelles selon tout vecteur en tout point de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Soit  $u = (h, k)$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^2$ . Alors

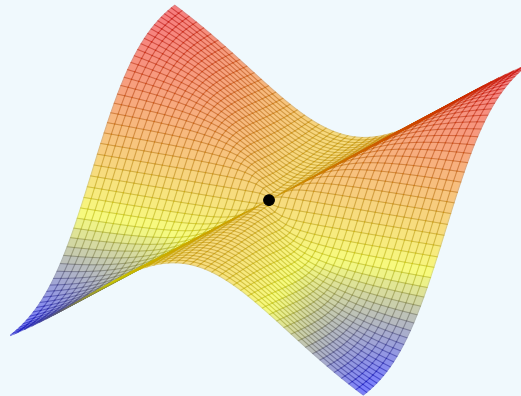
$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \frac{f(tu) - f(0, 0)}{t} = f(h, k) = f(u)$$

Ainsi  $f$  admet une dérivée en  $(0, 0)$  selon le vecteur  $u$  et  $D_u f(0, 0) = f(u)$ .

- Si  $f$  était différentiable en  $(0, 0)$ , alors on aurait

$$\forall u = (h, k) \in \mathbb{R}^2, D_u f(0, 0) = h \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = h D_{(1, 0)} f(0, 0) + k D_{(0, 1)} f(0, 0) = 0$$

Mais, par exemple,  $D_{(1, 1)} f(0, 0) = \frac{1}{2} \neq (0, 0)$ .



### Proposition 1.4 Matrice d'une différentielle dans un couple de bases

Soient  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  une base de  $F$  et  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ . Notons  $(f_1, \dots, f_n)$  les coordonnées de  $f$  dans la base  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  (i.e.  $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ g$ ).

Si  $f$  est différentiable en  $a \in \mathcal{U}$ , alors la matrice de  $df(a)$  dans les bases  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  est  $(\partial_j f_i(a))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ .

**Définition 1.6 Matrice jacobienne**

Supposons  $E = \mathbb{R}^n$  et  $F = \mathbb{R}^p$ . Si  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est différentiable en  $a$ , la matrice de  $df(a)$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^n$  s'appelle la **matrice jacobienne** de  $f$  en  $a$ .

**Exemple 1.12**

L'application  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, xy)$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ . Sa matrice jacobienne en un point  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  est  $\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix}$ .

**Exemple 1.13**

On pose  $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y^2 > 0\}$ . L'application  $f : (x, y, z) \in \mathcal{U} \mapsto (\ln(x + y^2), e^{xz})$  est différentiable sur  $\mathcal{U}$ . Sa matrice jacobienne en un point  $(x, y, z) \in \mathcal{U}$  est  $\begin{pmatrix} \frac{1}{x+y^2} & \frac{2y}{x+y^2} & 0 \\ ze^{xz} & 0 & xe^{xz} \end{pmatrix}$ .

## 2 Opérations sur les fonction différentiables

**Proposition 2.1 Combinaison linéaire**

Soient  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  et  $g : \mathcal{U} \rightarrow F$ . Si  $f$  et  $g$  sont différentiables en  $a \in \mathcal{U}$ , alors pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda f + \mu g$  est différentiable en  $a$  et  $d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a)$ .

**Proposition 2.2**

Soient  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ ,  $g : \mathcal{U} \rightarrow G$  et  $B : F \times G \rightarrow H$  une application **bilinéaire**. Si  $f$  et  $g$  sont différentiables en  $a \in \mathcal{U}$ , alors  $B(f, g)$  est différentiable en  $a$  et  $d(B(f, g))(a) = B(df(a), g) + B(f, dg(a))$ .

**Proposition 2.3 Composition**

Soient  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  et  $g : \mathcal{V} \rightarrow G$  telles que  $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ . Si  $f$  est différentiable en  $a \in \mathcal{U}$  et  $g$  est différentiable en  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  est différentiable en  $a$  et  $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$ .

**REMARQUE.** Soient  $\mathcal{E}$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{F}$  une base de  $F$  et  $\mathcal{G}$  une base de  $G$ . Si  $A$  est la matrice de  $df(a)$  dans les bases de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  et  $B$  est la matrice de  $dg(f(a))$  dans les bases  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ , alors  $BA$  est la matrice de  $d(g \circ f)(a)$  dans les bases  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{G}$ .

**Corollaire 2.1 Dérivée le long d'un arc**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\gamma : I \rightarrow E$  et  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  telles que  $\gamma(I) \subset \mathcal{U}$ . Si  $\gamma$  est dérivable en  $t \in I$  et  $f$  est différentiable en  $\gamma(t)$ , alors  $f \circ \gamma$  est dérivable en  $t$  et  $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ .

**Exemple 2.1 Dérivée le long d'une droite**

Si  $\gamma(t) = x + th$ , alors  $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot h = D_h f(\gamma(t))$ .



**Exemple 2.2**

Si  $E = \mathbb{R}^p$  et  $\gamma = (x_1, \dots, x_p)$ , alors

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{j=1}^p x'_j(t) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))$$

**Corollaire 2.2 Dérivées partielles d'une composée**

Soient  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  et  $g : \mathcal{V} \rightarrow G$  telles que  $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ . On note  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  les dérivées partielles de  $f$  dans une base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  de  $E$  et  $\frac{\partial g}{\partial y_i}$  les dérivées partielles de  $g$  dans une base  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  de  $F$ . Si  $f$  est différentiable en  $a \in \mathcal{U}$  et si  $g$  est différentiable en  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  admet des dérivées partielles en  $a$  dans la base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  et

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \partial_j(g \circ f)(a) = \sum_{i=1}^n \partial_i g(f(a)) \partial_j f_i(a)$$

où  $(f_1, \dots, f_n)$  désignent les coordonnées de  $f$  dans la base  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  (i.e.  $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ f$ ).

**Méthode Règle de la chaîne**

Soient  $x_1, \dots, x_n$  sont des fonctions différentiables sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^m$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $f$  est une fonction différentiable sur un ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose de plus que  $(x_1, \dots, x_n)(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ . Alors

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial u_j}(u_1, \dots, u_m) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m)) \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(u_1, \dots, u_m)$$

où on considère les dérivées partielles dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$ .

Par abus de notation, on pourra tout simplement écrire

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$$

à condition de bien comprendre ce que l'on manipule.

**Exemple 2.3 Coordonnées polaires**

Soit  $f$  différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ . On pose

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2, g(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$$

avec

$$x(r, \theta) = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y(r, \theta) = r \sin \theta$$

D'après la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) \\ &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta) \\ &= -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \end{aligned}$$

Inversement, pour  $r \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \end{aligned}$$

### 3 Cas des applications numériques

On suppose dans ce paragraphe que  $F = \mathbb{R}$ .

#### 3.1 Gradient

**Théorème 3.1 Théorème de représentation de Riesz**

Soit  $E$  un espace euclidien. Pour toute forme linéaire  $\varphi$  sur  $E$ , il existe un unique vecteur  $a \in E$  tel que

$$\forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle$$

De manière plus condensée, l'application

$$\begin{cases} E & \longrightarrow & E^* \\ a & \longmapsto & (x \in E \mapsto \langle a, x \rangle) \end{cases}$$

est un isomorphisme.

**Définition 3.1 Gradient**

On suppose que  $E$  est un espace euclidien. Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  est différentiable en  $a \in \mathcal{U}$ , on appelle **gradient** de  $f$  en  $a$ , l'unique vecteur  $\nabla f(a)$  de  $E$  tel que

$$\forall v \in E, df(a) \cdot v = \langle \nabla f(a), v \rangle$$

**REMARQUE.** On peut toujours munir un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie d'une structure d'espace euclidien. En effet, si

$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  est une base de  $E$ , l'application

$$(x, y) \in E^2 \mapsto \sum_{k=1}^p \mathbf{e}_k^*(x) \mathbf{e}_k^*(y)$$

est un produit scalaire. De plus,  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  est alors une base orthonormale pour ce produit scalaire.

### Exemple 3.1 Gradient du carré de la norme

Soit  $E$  un espace euclidien. Posons  $f : x \in E \mapsto \|x\|^2$ . Fixons  $a \in E$ .

$$\forall h \in E, f(a+h) = f(a) + 2\langle a, h \rangle + \|h\|^2$$

donc

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} f(a) + 2\langle a, h \rangle + o(h)$$

Ainsi  $f$  est différentiable en  $a$  et  $\nabla f(a) = 2a$ .

### Proposition 3.1 Coordonnées du gradient dans une base orthonormale

On suppose que  $E$  est un espace euclidien. Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable en  $a \in \mathcal{U}$ . Les coordonnées de  $\nabla f(a)$  dans une base orthonormale  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  de  $E$  sont les dérivées partielles de  $f$  dans cette base :

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^p \partial_j f(a) \mathbf{e}_j$$

**REMARQUE.** Si  $E = \mathbb{R}^p$  est muni de son produit scalaire usuel, la base canonique est orthonormale. Par conséquent, si  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable en  $a \in \mathcal{U}$ , alors

$$\nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \leq j \leq n}$$

### Interprétation géométrique du gradient

Si  $\nabla f(a) \neq 0_E$ ,  $\nabla f(a)$  est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de  $f$  en  $a$  est maximale. Il suffit en effet de remarquer que pour tout vecteur  $v$  unitaire

$$D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle \leq \|\nabla f(a)\| \|v\| = \|\nabla f(a)\|$$

avec égalité si et seulement si  $v$  et  $\nabla f(a)$  sont colinéaires et de même sens (inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité).

### Exemple 3.2

Considérons l'application  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$ .  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2$  car polynomiale. On munit  $\mathbb{R}^2$  de son produit scalaire usuel de sorte que la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  est orthonormale. Alors

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (2x, 2y)$$

On peut retrouver la différentielle de  $f$ .

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, df(x, y) \cdot (h, k) = \langle \nabla f(x, y), (h, k) \rangle = 2(xh + yk)$$

### Exemple 3.3 Gradient et différentielle du déterminant

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de son produit scalaire usuel  $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$  et on considère l'application  $\det : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(M)$ . Cette application est différentiable sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  car polynomiale en les coefficients de la matrice.

Fixons  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . La base canonique  $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est orthonormale pour le produit scalaire usuel et

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \partial_{(i,j)} \det(M) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(M + tE_{i,j}) - \det(M)}{t}$$

Notons  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $(c_1, \dots, c_n)$  la famille des colonnes de  $M$ . Alors

$$\det(M) = \det_{\mathcal{B}}(c_1, \dots, c_n)$$

$$\det(M + tE_{i,j}) = \det_{\mathcal{B}}(c_1, \dots, c_{j-1}, c_j + te_i, c_{j+1}, \dots, c_n) = \det_{\mathcal{B}}(c_1, \dots, c_n) + t \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, c_{j-1}, e_i, c_{j+1}, \dots, c_n)$$

Ainsi

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \partial_{(i,j)} \det(M) = \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, c_{j-1}, e_i, c_{j+1}, \dots, c_n)$$

En développant ce déterminant par rapport à sa  $j^{\text{ème}}$  colonne, on obtient donc

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \partial_{(i,j)} \det(M) = \text{com}(M)_{i,j}$$

On en déduit que

$$\nabla \det(M) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \text{com}(M)_{i,j} E_{i,j} = \text{com}(M)$$

On peut également retrouver la différentielle du déterminant :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d \det(M) \cdot H = \langle \nabla \det(M), H \rangle = \text{tr}(\text{com}(M)^T H)$$

### Exemple 3.4 Gradient en coordonnées polaires

Soit  $f$  différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ . On pose

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2, g(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$$

avec

$$x(r, \theta) = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y(r, \theta) = r \sin \theta$$

On a montré précédemment que, pour  $r \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) &= -\sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) + \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \end{aligned}$$

En notant  $R$  la matrice de rotation d'angle  $\theta$ , on a donc

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \end{pmatrix} = R^{-1} \nabla f(x(r, \theta), y(r, \theta))$$

Ainsi en posant

$$\mathbf{u}_{\theta} = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_{\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

les coordonnées de  $\nabla f(x(r, \theta), y(r, \theta))$  dans la base orthonormée  $(\mathbf{u}_{\theta}, \mathbf{v}_{\theta})$  sont

$$\left( \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta), \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \right)$$

## 3.2 Point critique

### Définition 3.2 Point critique

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  est différentiable en  $a \in \mathcal{U}$ , on dit que  $a$  est un **point critique** de  $f$  si  $df(a) = 0_{E^*}$ .

**REMARQUE.**  $a$  est un point critique de  $f$  si et seulement si toutes les dérivées partielles de  $f$  en  $a$  sont nulles.

**REMARQUE.** Si  $E$  est un espace euclidien (on peut toujours le supposer),  $a$  est un point critique de  $f$  si et seulement si  $\nabla f(a) = 0_E$ .

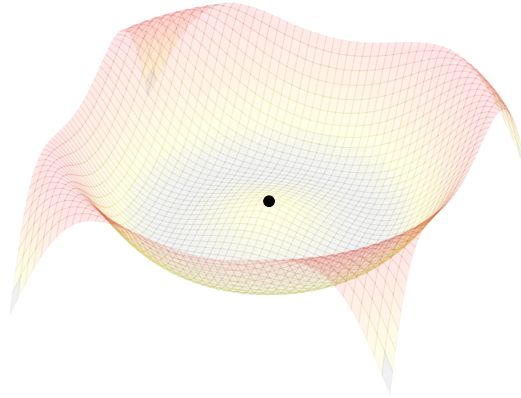
### Exemple 3.5

Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$ . Puisque  $\nabla f(x, y) = 2(x, y)$ , l'unique point critique de  $f$  est  $(0, 0)$ .

**Rappel** Extremum local

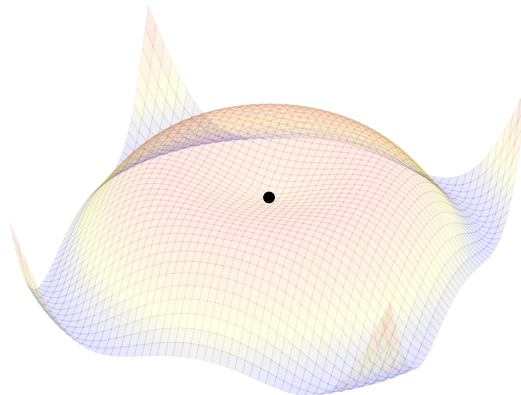
On dit que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  admet un **maximum local** en  $a \in D$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

- $B(a, \varepsilon) \subset D$ ;
- $\forall x \in B(a, \varepsilon), f(x) \leq f(a)$ .



On dit que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  admet un **minimum local** en  $a \in D$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

- $B(a, \varepsilon) \subset D$ ;
- $\forall x \in B(a, \varepsilon), f(x) \geq f(a)$ .



Si  $D$  est **ouvert**, il existe toujours  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(a, \varepsilon) \subset D$ .

**Proposition 3.2 Condition nécessaire d'existence d'un extremum local**

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable en  $a \in \mathcal{U}$ . Si  $f$  est différentiable en  $a$  et admet un **extremum local** en  $a$ , alors  $a$  est un **point critique** de  $f$ .



**ATTENTION !** La réciproque est fausse. Considérons  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$ . Alors  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2$  et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \nabla f(x, y) = 2(x, -y)$$

Ainsi  $(0, 0)$  est bien l'unique point critique de  $f$ . Cependant

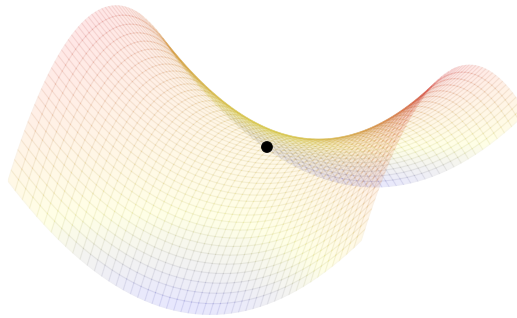
$$\forall \varepsilon > 0, f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > 0 = f(0, 0)$$

donc  $f$  n'admet pas de maximum local en  $(0, 0)$  et

$$\forall \varepsilon > 0, f(0, \varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0 = f(0, 0)$$

donc  $f$  n'admet pas non plus de minimum local en  $(0, 0)$ .

La fonction  $f$  n'admet donc pas d'extrema locaux sur  $\mathbb{R}^2$  (et donc pas non plus d'extrema globaux) comme la représentation graphique suivante permet de s'en convaincre.



### Méthode Recherche d'extrema locaux

1. On recherche les points critiques.
2. Pour chaque point critique  $a$ , on étudie le signe de  $f(x) - f(a)$  pour  $x$  au voisinage de  $a$ . Pour simplifier, on pose généralement  $u = x - a$  et on étudie le signe de  $f(a + u) - f(a)$  pour  $u$  au voisinage de  $0_E$ .

### Exemple 3.6

Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ .  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  est un point critique de  $f$  si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Ce système équivaut à

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système i.e. l'unique point critique de  $f$  est  $(0, 3)$ . Pour  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$f(0 + u, 3 + v) - f(0, 3) = u^2 + uv + v^2 = \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 \geq 0$$

Ainsi  $f$  admet un minimum local (et même global) en  $(0, 3)$ .

### Méthode Recherche d'extrema globaux

Soit  $D$  une partie de  $E$  (non nécessairement ouverte). Les extrema globaux d'une fonction  $f$  à valeurs réelles sur un domaine  $D$  sont

- soit atteints sur  $D \setminus \mathring{D}$ ;
- soit atteints sur  $\mathring{D}$ , auquel cas ce sont des extrema locaux et donc **nécessairement** atteints en des points critiques de  $f$ .

**Exemple 3.7**

On recherche les extrema globaux de  $f \mapsto xy(1 - x - y)$  sur

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

- Tout d'abord,  $D$  est compact et  $f$  est continue donc  $f$  admet bien un minimum global et un maximum global sur  $D$ .
- On remarque d'abord que  $f$  est nulle sur la frontière de  $D$  (puisque alors  $x = 0, y = 0$  ou  $x + y = 1$ ). De plus,  $f$  est clairement positive sur  $D$  donc  $\min_D f = 0$  et ce minimum est atteint en tout point de  $D$ .
- Recherchons les points critiques de  $f$  sur  $\overset{\circ}{D}$ . On résout le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

qui équivaut à

$$\begin{cases} y(1 - 2x - y) = 0 \\ x(1 - x - 2y) = 0 \end{cases}$$

Puisque l'on se situe sur la frontière de  $D$ ,  $x > 0$  et  $y > 0$  donc le système équivaut à

$$\begin{cases} 1 - 2x - y = 0 \\ 1 - x - 2y = 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est  $(1/3, 1/3)$  qui appartient bien à  $D$ . Comme  $f(1/3, 1/3) > 0$ , le maximum de  $f$  ne peut être atteint sur la frontière de  $D$ . Ce maximum global est donc un maximum local qui ne peut être atteint qu'en l'unique point critique  $(1/3, 1/3)$  de  $f$  sur  $\overset{\circ}{D}$ . On en déduit que  $\max_D f = f(1/3, 1/3) = 1/27$ .

## 4 Tangence et orthogonalité

### 4.1 Vecteurs tangents

#### Définition 4.1 Vecteur tangent à une partie

Soient  $X$  une partie de  $E$  et  $x \in X$ . On dit que  $v \in E$  est **tangent** à  $X$  en  $x$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  et un arc  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow X$  dérivable en 0 tel que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma'(0) = v$ .

**REMARQUE.** Si  $x \in \overset{\circ}{X}$ , alors tout vecteur est tangent à  $X$  en  $x$ . Soit  $v \in E$ . Comme  $x \in X$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset X$ . Posons  $\varepsilon = \frac{r}{\|v\|+1}$ . Alors  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \mapsto x + tv$  est bien à valeurs dans  $B(x, r) \subset X$ ,  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma'(0) = v$ .



**Exemple 4.1 Vecteurs tangents à la sphère unité**

On suppose que  $E$  est un espace euclidien. Soit  $S = \{x \in E, \|x\| = 1\}$ . Soit  $x \in S$  et  $v$  un vecteur orthogonal à  $x$ .

- Posons  $\varepsilon = \frac{\|x\|}{\|v\|+1}$ . Alors,

$$\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[, \|x + tv\| \geq \|x\| - |t|\|v\| > \|x\| - \varepsilon\|v\| = \frac{\|x\|}{\|v\|+1} \geq 0$$

donc  $\gamma : t \mapsto \frac{x+tv}{\|x+tv\|}$  est bien défini sur  $]-\varepsilon, \varepsilon[$  à valeurs dans  $S$ .

- Comme  $\|x\| = 1$ ,  $\gamma(0) = x$ .
- Comme  $\|x\| = 1$  et  $\langle x, v \rangle = 0$ ,  $\|x + tv\| = \sqrt{1 + t^2\|v\|^2}$ . L'application  $\varphi : t \mapsto x + tv$  est dérivable en 0 et  $\varphi'(0) = v$  et l'application  $\psi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2\|v\|^2}}$  est également dérivable en 0 et  $\psi'(0) = 0$ . Par opérations,  $\gamma$  est dérivable en 0 et

$$\gamma'(0) = \varphi(0)\psi'(0) + \varphi'(0)\psi(0) = v$$

Ainsi  $v$  est bien tangent à  $S$  en  $x$ .

**Proposition 4.1 Cas du graphe d'une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$** 

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable sur  $\Omega$ . Notons  $X$  le graphe de  $f$ , c'est-à-dire

$$X = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^3$$

Alors pour tout  $a \in \Omega$ , les vecteurs tangents à  $X$  en  $a$  sont les vecteurs  $(v, df(a) \cdot v) = (v, D_v f(a))$  où  $v \in E$ .

**REMARQUE.** Notamment,  $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a)\right)$  et  $\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$  sont des vecteurs tangents à  $X$  en  $a$ .

**Plan tangent**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable sur  $\Omega$ . L'ensemble des vecteurs tangents en  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  (avec  $(x_0, y_0) \in \Omega$ ) au graphe de  $f$  est le plan vectoriel

$$P = \text{vect} \left( \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right), \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \right)$$

On appelle **plan affine tangent** en  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  au graphe de  $f$  le plan affine  $\mathcal{P} = (x_0, y_0, z_0) + P$ . On obtient une équation cartésienne de  $\mathcal{P}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \mathcal{P} &\iff (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \in \text{vect} \left( \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right), \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \right) \\ &\iff \begin{vmatrix} x - x_0 & 1 & 0 \\ y - y_0 & 0 & 1 \\ z - f(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff z = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

**REMARQUE.** On notera l'extrême similitude de cette équation avec l'équation de la tangente au graphe d'une fonction dérivable  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en un point  $(x_0, f(x_0))$ , à savoir

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

**Exemple 4.2**

Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Le plan affine tangent au graphe de  $f$  en  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  admet pour équation

$$z = x_0^2 + y_0^2 + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$$

**4.2 Lignes de niveau****Définition 4.2 Ligne de niveau**

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ . On appelle ligne de niveau  $k \in \mathbb{R}$  de  $f$  l'ensemble

$$E_k = \{x \in \mathcal{U}, f(x) = k\}$$

**Proposition 4.2 Gradient et ligne de niveau**

On suppose  $E$  euclidien. Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $X$  est une ligne de niveau de  $f$ , alors les vecteurs tangents à  $X$  en  $x \in X$  sont orthogonaux à  $\nabla f(x)$ .

**5 Applications de classe  $\mathcal{C}^k$** **5.1 Applications de classe  $\mathcal{C}^1$** **Définition 5.1 Application de classe  $\mathcal{C}^1$** 

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$  si elle est différentiable sur  $\mathcal{U}$  et si  $df$  est continue sur  $\mathcal{U}$ .

**Théorème 5.1 Classe  $\mathcal{C}^1$  et dérivées partielles**

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ . Alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$  si et seulement si

- $f$  admet des dérivées partielles (dans une certaine base de  $E$ ) en tout point de  $\mathcal{U}$ ;
- ces dérivées partielles sont continues sur  $\mathcal{U}$ .



**ATTENTION !** Une fonction peut-être différentiable sans qu'elle soit de classe  $\mathcal{C}^1$ . Notamment, les dérivées partielles d'une application différentiable ne sont pas nécessairement continues.

**Exemple 5.1**

Considérons la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$  mais ses dérivées partielles n'y sont pas continues.

- Si l'on munit  $\mathbb{R}^2$  de la norme euclidienne,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, f(x, y) = \|(x, y)\|^2 \sin\left(\frac{1}{\|(x, y)\|^2}\right)$$

Comme  $\sin$  est bornée, il est clair que  $f(x, y) \underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{=} o(\|(x, y)\|)$ . Ainsi  $f$  est bien différentiable en  $(0, 0)$  et  $df(0, 0)$  est nulle.

- Tout d'abord, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} &= x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} &= y \sin\left(\frac{1}{y^2}\right) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Pourtant,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ \forall y \in \mathbb{R}^*, \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) &= 2y \sin\left(\frac{1}{y^2}\right) - \frac{2}{y} \cos\left(\frac{1}{y^2}\right) \end{aligned}$$

donc  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)$  et  $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(0, y)$  n'admettent pas de limite en 0 car la fonction  $t \mapsto t \sin(1/t^2)$  admet une limite nulle en 0 mais la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t} \cos(1/t^2)$  n'admet pas de limite en 0. Ainsi  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  n'admettent pas de limite en  $(0, 0)$ . A fortiori, elles n'y sont pas continues.

**Proposition 5.1 Intégrale curviligne**

Soient  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$  et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ . Alors

$$f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

**Corollaire 5.1 Applications constantes**

On suppose  $\mathcal{U}$  connexe par arcs. Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$ . Alors  $f$  est constante sur  $\mathcal{U}$  si et seulement si  $df$  est nulle sur  $\mathcal{U}$ .

## 5.2 Applications de classe $\mathcal{C}^k$ ( $k \geq 1$ )

On peut définir des dérivées partielles de dérivées partielles.

### Définition 5.2 Dérivées partielles d'ordre $k$

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}$ . On appelle **dérivée partielle d'ordre  $k$**  dans une base de  $E$  une dérivée partielle de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \left( \frac{\partial}{\partial x_{j_{k-1}}} \left( \dots \left( \frac{\partial f}{\partial x_{j_1}} \right) \right) \right) = \partial_{j_k} (\partial_{j_{k-1}} (\dots (\partial_{j_1} f)))$$

que l'on notera plus simplement

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \partial x_{j_{k-1}} \dots \partial x_{j_1}} = \partial_{j_k} \partial_{j_{k-1}} \dots \partial_{j_1} f$$

**REMARQUE.** A priori, l'ordre des indices compte. Dans la définition, on dérive d'abord par rapport à la  $j_1^{\text{ème}}$  coordonnée, puis par rapport à la  $j_2^{\text{ème}}$  coordonnée, ..., et enfin par rapport à la  $j_k^{\text{ème}}$  coordonnée.

**REMARQUE.**  $\partial_i(\partial_i f)$  se note plus simplement  $\partial_i^2 f$ . De manière générale,  $\partial_i^k f = \partial_i(\partial_i(\dots(\partial_i f)))$  ( $k$  dérivées partielles).

**REMARQUE.**  $\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$  se note plus simplement  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ . De manière générale,  $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \dots \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right) \right)$  ( $k$  dérivées partielles).

### Exemple 5.2

Soit  $f : (x, y) \mapsto xy^3 \ln(x^2 + y)$  définie sur l'ouvert  $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y > 0\}$ . Alors  $f$  admet des dérivées partielles dans la base canonique en tout point de  $\mathcal{U}$  et

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^3 \ln(x^2 + y) + \frac{2x^2 y^3}{x^2 + y}$$

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3xy^2 \ln(x^2 + y) + \frac{xy^3}{x^2 + y}$$

Ces dérivées partielles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en tout point de  $\mathcal{U}$  et pour tout  $(x, y) \in \mathcal{U}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{6xy^3}{x^2 + y} - \frac{4x^3 y^3}{(x^2 + y)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{6x^2 y^2}{x^2 + y} - \frac{2x^2 y^3}{(x^2 + y)^2} + 3y^2 \ln(x^2 + y) + \frac{y^3}{x^2 + y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{6x^2 y^2}{x^2 + y} - \frac{2x^2 y^3}{(x^2 + y)^2} + 3y^2 \ln(x^2 + y) + \frac{y^3}{x^2 + y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 6xy \ln(x^2 + y) + \frac{6xy^2}{x^2 + y} - \frac{xy^3}{(x^2 + y)^2} \end{aligned}$$

On constate notamment que  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ , ce qui n'est pas évident a priori même si ce n'est pas le fruit du hasard...

### Définition 5.3 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) sur  $\mathcal{U}$  si toutes ses dérivées partielles d'ordre  $k$  existent et sont continues sur  $\mathcal{U}$ .

On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{U}$  si elle est de classe  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

**Exemple 5.3**

Toute application polynomiale sur  $\mathbb{R}^n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 5.2 Schwarz**

Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathcal{U}$ . Alors

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$$



**ATTENTION !** L'hypothèse que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  est primordiale.

**Exemple 5.4**

Soit en effet

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Tout d'abord,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  existe en  $(x, y) \neq (0, 0)$  par opérations et en  $(0, 0)$  (taux d'accroissement). De plus

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0 \end{aligned}$$

Comme  $f(x, y) = -f(y, x)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existe également en tout point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x) = -\frac{x(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= -\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

A l'aide de taux d'accroissement, on montre que  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  existent et que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} = 1 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$$

Le théorème de Schwarz permet en particulier d'affirmer que  $f$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Opérateurs différentiels

Hormis le gradient, on peut définir d'autres opérateurs différentiels.

- Si  $f = (f_1, \dots, f_n)$  est un **champ de vecteurs** différentiable, autrement dit une application différentiable de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on peut définir sa **divergence** :

$$\mathbf{div} f = \sum_{i=1}^n \partial_i f_i$$

Par exemple, si  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$  est un champ électrique,

$$\mathbf{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

- Si  $f = (f_x, f_y, f_z)$  est un champ de vecteurs différentiable de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ , on peut définir son **rotationnel** :

$$\mathbf{rot} f = \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right)$$

- Si  $f$  une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , on peut définir son **laplacien** :

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f$$

Par exemple, si  $V = (V_x, V_y, V_z)$  est un potentiel,

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

#### Exercice 5.1

1. Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que

$$\mathbf{div}(\nabla f) = \Delta f$$

2. Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que

$$\mathbf{rot}(\nabla f) = 0$$

3. Soit  $f = (f_x, f_y, f_z)$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} f) = \nabla(\mathbf{div} f) - \Delta f_x - \Delta f_y - \Delta f_z$$

### 5.3 Opérations

#### Proposition 5.2 Combinaison linéaire

Soient  $f : \mathcal{U} \rightarrow F$  et  $g : \mathcal{U} \rightarrow F$ . Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathcal{U}$ , alors pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda f + \mu g$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathcal{U}$ .

**Proposition 5.3**

Soient  $f: \mathcal{U} \rightarrow F$ ,  $g: \mathcal{U} \rightarrow G$  et  $B: F \times G \rightarrow H$  une application **bilinéaire**. Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathcal{U}$ , alors  $B(f, g)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathcal{U}$ .

**Proposition 5.4 Composition**

Soient  $f: \mathcal{U} \rightarrow F$  et  $g: \mathcal{V} \rightarrow G$  telles que  $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathcal{U}$  et  $g$  est différentiable sur  $\mathcal{V}$ , alors  $g \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathcal{U}$ .

## 6 Equations aux dérivées partielles

### Equations aux dérivées partielles

On appelle **équation aux dérivées partielles** ou, de manière abrégée, EDP une équation dont l'inconnue est une fonction et qui fait intervenir des dérivées partielles de cette fonction. Citons quelques exemples classiques en physique.

- $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  est une EDP d'inconnue  $y(x, t)$ . On l'appelle l'**équation des ondes** à une dimension ou encore **équation des cordes vibrantes**. La fonction  $y(x, t)$  représente la position verticale du point d'abscisse  $x$  d'une corde vibrante à l'instant  $t$  par rapport à sa position au repos.
- $\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial T}{\partial x}$  est une EDP d'inconnue  $T(x, t)$ . On l'appelle l'**équation de la chaleur**. La fonction  $T(x, t)$  représente la température au point d'abscisse  $x$  à l'instant  $T$  dans un milieu unidimensionnel dans lequel la chaleur se propage par conduction.

Résoudre une EDP sur un ouvert  $\mathcal{U}$  signifie rechercher toutes les fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathcal{U}$  (si l'EDP fait intervenir que des dérivées partielles d'ordre au plus  $k$ ) vérifiant l'équation.

**Exemple 6.1**

Les solutions sur  $\mathbb{R}^2$  de  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  sont les fonctions  $(x, y) \mapsto C(y)$  où  $C$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 6.2**

Les solutions sur  $\mathbb{R}^2$  de  $\frac{\partial f}{\partial y} = xy$  sont les fonctions  $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}xy^2 + C(x)$  où  $C$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 6.3 Changement de variables affine**

Résoudre sur  $\mathbb{R}^2$  l'EDP

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

en procédant au changement de variables

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x + 2y \end{cases}$$

On introduit une fonction  $g$  telle que  $f(x, y) = g(u, v) = g(x + y, x + 2y)$ . Dans ce qui suit, on s'autorise quelques abus de notations. Via la règle de la chaîne

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} + 2 \frac{\partial g}{\partial v}$$

Ainsi l'EDP initiale équivaut à

$$\frac{\partial g}{\partial v} = 0$$

Les solutions de cette équations sont les fonctions

$$(u, v) \mapsto C(v)$$

avec  $C$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que les solutions de l'EDP initiale sont les fonctions

$$(x, y) \mapsto C(x + 2y)$$

avec  $C$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .



**Exemple 6.4 Passage en coordonnées polaires**

Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  l'EDP

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2$$

en passant en coordonnées polaires.

On effectue le changement de variables

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

On introduit une fonction  $g$  telle que

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

D'après la règle de la chaîne,

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

Par conséquent

$$r \frac{\partial g}{\partial r} = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$$

L'EDP initiale équivaut donc à l'EDP

$$r \frac{\partial g}{\partial r} = r^2 \quad \text{ou encore} \quad \frac{\partial g}{\partial r} = r$$

Les solutions de cette EDP sont les fonctions  $(r, \theta) \mapsto \frac{1}{2}r^2 + C(\theta)$  avec  $C$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ . Puisque  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ ,  $\theta = \arctan(y/x)$ . Ainsi les solutions de l'EDP initiale sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  sont les fonctions

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C(\arctan(y/x))$$

avec  $C$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

**Exemple 6.5**

Les solutions sur  $\mathbb{R}^2$  de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$  sont les fonctions  $(x, y) \mapsto C(x) + D(y)$  où  $C$  et  $D$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Résolution de l'équation des ondes à une dimension**

On cherche à résoudre sur  $\mathbb{R}^2$  l'EDP  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  (avec  $c \neq 0$ ). Pour cela, on procède au changement de variable

$\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}$  i.e. on cherche donc  $y$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sous la forme  $y(x, t) = g(u, v) = g(x - ct, x + ct)$ . Les expressions des dérivées partielles premières s'obtiennent par la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial v} = -c \frac{\partial g}{\partial u} + c \frac{\partial g}{\partial v} \end{aligned}$$

On en déduit les dérivées partielles secondes (on utilise le théorème de Schwarz) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -c \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \right) + c \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) = c^2 \left( \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) \end{aligned}$$

L'équation initiale équivaut donc à  $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$ . On a vu précédemment que les solutions de cette EDP étaient les fonctions  $(u, v) \mapsto C(u) + D(v)$  avec  $C, D$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ . Les solutions de l'EDP initiale sont donc les fonctions  $(x, y) \mapsto C(x - ct) + D(x + ct)$  avec  $C, D$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Les deux termes correspondent à des ondes se propageant avec la même célérité mais en sens inverse.