Devoir à la maison n°17

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Soit (T_n) la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Partie I – Étude de la suite (T_n)

1. Déterminer les polynômes T_2 et T_3.

2. Déterminer le degré, la parité et le coefficient dominant de T_n pour $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(T_0, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\cos x) = \cos nx$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les racines de T_n sont exactement les réels $\cos(x_k)$ avec $x_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Partie II – Étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

On associe à tout couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ l'intégrale suivante :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos x)Q(\cos x)\, dx$$

On confondra polynôme et fonction polynomiale associée.

1. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ définit une produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
Dans toute la suite, $\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$.

2. Montrer que la famille $(T_0, \dots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Justifier que T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Partie III – Calcul exact d'une intégrale

On associe à tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ l'intégale et la somme suivantes :

$$\mathrm{I}(\mathrm{P}) = \int_0^\pi \mathrm{P}(\cos x)\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \mathrm{S}_n(\mathrm{P}) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n \mathrm{P}(\cos x_k)$$

1. **a.** Montrer que $\mathrm{I}(\mathrm{T}_p) = \mathrm{S}_n(\mathrm{T}_p)$ pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$.
   b. En déduire que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\mathrm{I}(\mathrm{P}) = \mathrm{S}_n(\mathrm{P})$.

2. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On note respectivement Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par T_n.

   a. Montrer que $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   b. En déduire que $\mathrm{I}(\mathrm{P}) = \mathrm{I}(\mathrm{R})$.
   c. En déduire que $\mathrm{I}(\mathrm{P}) = \mathrm{S}_n(\mathrm{P})$.

3. A-t-on toujours $\mathrm{I}(\mathrm{P}) = \mathrm{S}_n(\mathrm{P})$ lorsque $\deg \mathrm{P} \geq 2n$?

Partie IV – Calcul approché d'une intégrale

A toute fonction f continue sur $[-1, 1]$, on associe l'intégrale et la somme suivantes :

$$\mathrm{I}(f) = \int_0^\pi f(\cos x)\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \mathrm{S}_n(f) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n f(\cos x_k)$$

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n(f) = \mathrm{I}(f)$. On pourra remarquer (après l'avoir justifié) que

$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{\pi}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n} f\left(\cos\frac{k\pi}{2n}\right) - \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On définit une application f par $f(t) = \ln(a^2 - 2at + 1)$.

   a. Montrer que f est continue sur $[-1, 1]$.
   b. Écrire la décomposition en facteurs irréductibles de $X^{2n} + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ à l'aide des réels $x_1, \dots, x_n$.
   c. En déduire que $\mathrm{S}_n(f) = \dfrac{\pi}{n}\ln\left(a^{2n} + 1\right)$.
   d. En déduire la valeur de $\mathrm{I}(f)$ suivant les valeurs de a.
   e. Donner un équivalent de $\mathrm{S}_n(f) - \mathrm{I}(f)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On distinguera deux cas suivant les valeurs de a.