Devoir surveillé n°10

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 La fonction tan est π-périodique.

2 La fonction tan est strictement croissante, impaire et $\lim_{\frac{\pi}{2}^-} \tan = +\infty$.

3 Il suffit de poser $T_0 = X$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un polynôme T_n tel que

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n)}(x) = T_n(\tan x)$$

Alors

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n+1)}(x) = (1+\tan^2(x))T_n'(\tan x) = T_{n+1}(\tan x)$$

avec $T_{n+1} = (1+X^2)T_n'$. L'existence de la suite (T_n) est donc prouvée par récurrence.

4 On obtient $T_1 = X^2+1$, $T_2 = 2X^3+2X$ et $T_2 = 6X^4+8X^2+2$.

5 $T_0 = X$ est bien à coefficients dans $\mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que T_n est à coefficients dans $\mathbb{N}$. Alors T_n' est également à coefficients dans $\mathbb{N}$ donc $T_{n+1} = (X^2+1)T_n'$ l'est également. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est à coefficients entiers.
$\deg T_0 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\deg T_n = n+1$. Alors $\deg T_{n+1} = \deg(X^2+1)+\deg(T_n') = n+2$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg T_n = n+1$.

6 On utilise la formule de Taylor avec reste intégral.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I. Alors pour tout $(a,b) \in I^2$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Comme tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, la formule de Taylor avec reste intégral donne

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan(x) = \sum_{j=0}^{2n+1} \frac{\tan^{(j)}(0)}{j!}x^j + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\tan^{(2n+2)}(t)\,dt$$

Or la fonction tan est impaire donc on prouve aisément que $\tan^{(j)}$ a une parité opposée à celle de j. Notamment, si j est pair, $\tan^{(j)}$ est impaire et $\tan^{(j)}(0) = 0$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\tan^{(2j+1)}(0)}{(2j+1)!}x^{2j+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}T_{2n+2}(\tan t)\,dt$$

Il suffit donc de poser $t_j = \tan^{(2j+1)}(0)$.

7 Comme les fonctions $f^{(n)}$ et $t \mapsto -\frac{(x-t)^n}{n}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$ et de dérivées respectives $f^{(n+1)}$ et $t \mapsto (x-t)^{n-1}$, on obtient par intégrattion par parties :

$$R_n(x) = -\frac{1}{n!}\left[f^{(n)}(t)(x-t)^n\right]_0^x + \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$\boxed{8}$ **8.a** D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{R}_n(b) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}b^n + \mathrm{R}_{n+1}(b) \geq \mathrm{R}_{n+1}(b)$$

car $b \geq 0$ et $f^{(n)}(0) \geq 0$ par hypothèse. La suite $(\mathrm{R}_n(b))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.
Par ailleurs, $f^{(n)}$ est positive sur $[0, b]$ par hypothèse de même que $t \mapsto (b-t)^{n-1}$. On en déduit que $\mathrm{R}_n(b) \geq 0$.
La suite $(\mathrm{R}_n(b))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et majorée : elle converge.

8.b **8.b.i** On effectue le changement de variable linéaire $t = ux$. Alors

$$\mathrm{R}_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(u)(x-ux)^{n-1}x\ \mathrm{d}u = \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(u)(1-u)^{n-1}\ \mathrm{d}u$$

8.b.ii Par hypothèse, $f^{(n-1)}$ est positive sur $\mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$ donc $f^{(n)}$ est croissante sur $\mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$. Notamment, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$0 \leq f^{(n)}(0) \leq f^{(n)}(tx) \leq f^{(n)}(tb)$$

puis

$$0 \leq f^{(n)}(tx)(1-t)^{n-1} \leq f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1}$$

et enfin, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \mathrm{R}_n(x) \leq \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1}\ \mathrm{d}t$$

8.b.iii D'après la question précédente,

$$\mathrm{R}_n(x) \leq \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1}\ \mathrm{d}t = \left(\frac{x}{b}\right)^n \cdot \frac{b^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1}\ \mathrm{d}t = \left(\frac{x}{b}\right)^n \mathrm{R}_n(b)$$

8.c Soit $x \in [0, b[$. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{R}_n(x) = 0$. Mais, d'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \mathrm{R}_{n+1}(x)$$

On en déduit que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Si n est pair, $f^{(n)}$ est impaire car f est impaire et alors $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0 = -\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}(-x)^n$. Si n est impair, on a encore $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = -\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}(-x)^n$. Ainsi

$$f(-x) = -f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(-x)^n$$

Finalement,

$$\forall x \in]-b, b[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$\boxed{9}$ La fonction tan est impaire. De plus, tan est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et T_n est positif sur $\mathbb{R}_+$ puisque ses coefficients sont dans $\mathbb{N}$. Ainsi $\tan^{(n)} = \mathrm{T}_n \circ \tan$ est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. D'après les questions précédentes, on peut alors affirmer que

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$\boxed{10}$ D'après la question précédente, le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{t_n}{(2n+1)!}z^n$ est supérieur ou égal à $\dfrac{\pi}{2}$. S'il était strictement supérieur à $\dfrac{\pi}{2}$, $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t_n}{(2n+1)!}$ serait continue en $\dfrac{\pi}{2}$. Notamment, tan admettrait une limite finie en $\dfrac{\pi}{2}$, ce qui n'est pas. Le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{t_n}{(2n+1)!}z^n$ vaut donc $\dfrac{\pi}{2}$.

11 On trouve sans difficulté $\psi_n(X^i) = \dfrac{1}{i+1}\left((X+1)^{i+1} - X^{i+1}\right)$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

12 En développant l'expression de $\psi_n(X^i)$ obtenue à la question précédente grâce à la formule du binôme de Newton, on trouve que $\deg \psi_n(X^i) = i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. Notamment, $\psi_n(X^i) \in \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. L'application ψ_n est linéaire et $(X^i)_{0\leq i\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\psi_n(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$. Finalement, ψ_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

13 Notons $A = (A_{i,j})_{0\leq i,j\leq n}$ la matrice de ψ_n dans la base $(1, X, \dots, X^n)$. Puisque

$$\forall j \in [\![0, n]\!],\ \psi_n(X^j) = \frac{1}{j+1}\left((X+1)^{j+1} - X^{j+1}\right) = \frac{1}{j+1}\sum_{i=0}^{j}\binom{j+1}{i}X^i$$

on obtient,

$$\forall (i,j) \in [\![0, n]\!]^2,\ A_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{j+1}\dbinom{j+1}{i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

14 La matrice A de la question précédente est triangulaire supérieure et

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ A_{i,i} = \frac{1}{i+1}\binom{i+1}{i} = 1 \neq 0$$

donc A est inversible et ψ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

15 A est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux valent 1. Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. Si A était diagonalisable, A serait semblable à la matrice identité I_{n+1} et donc égale à I_{n+1}. Ceci n'est pas le cas puisque $A_{0,1} = \dfrac{1}{2} \neq 0$ par exemple.

16 D'une part, le théorème fondamental de l'analyse permet d'affirmer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi_n(P)'(x) = P(x+1) - P(x)$$

D'autre part, comme P est une primitive de P′,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi_n(P')(x) = \int_x^{x+1} P'(t)\, dt = P(x+1) - P(x)$$

Ainsi, les polynômes $\psi_n(P)'$ et $\psi_n(P')$ coïncident sur l'ensemble infini $\mathbb{R}$: ils sont donc égaux.

17 Supposons qu'il existe deux suites (S_m) et (U_m) vérifiant les conditions de l'énoncé. On va prouver par récurrence que ces deux suites sont égales. Tout d'abord $S_0 = U_0 = 1$. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $S_k = T_k$. Alors $S'_{k+1} = (k+1)S_k = (k+1)U_k = U'_{k+1}$. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $S_{k+1} = U_{k+1} + c$. Mais alors

$$c = \int_0^1 (S_{k+1}(t) - U_{k+1})(t)\, dt = \int_0^1 S_{k+1}(t)\, dt - \int_0^1 U_{k+1}(t)\, dt = 0$$

de sorte que $S_{k+1} = U_{k+1}$. Par récurrence, les deux suites (S_m) et (U_m) sont égales.
On prouve également l'existence de la suite (S_m) par récurrence. En effet, si $S_0, \dots, S_k$ ont déjà été construits, en notant Q_{k+1} l'unique primitive de $(k+1)S_k$ s'annulant en 0, il suffit alors de poser $S_{k+1} = Q_{k+1} - \displaystyle\int_0^1 Q_{k+1}(t)\, dt$ pour avoir $S'_{k+1} = (k+1)S_k$ et $\displaystyle\int_0^1 S_{k+1}(t)\, dt = 0$.

18 Avec les notations de la question précédente, $Q_1 = X$ puis

$$S_1 = Q_1 - \int_0^1 Q_1(t)\, dt = X - \frac{1}{2}$$

Ensuite, $Q_2 = X^2 - X$ puis

$$S_2 = Q_2 - \int_0^1 Q_2(t)\, dt = X^2 - X + \frac{1}{6}$$

Enfin, $Q_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$ puis

$$S_3 = Q_3 - \int_0^1 Q_3(t)\, dt = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$$

19 S_0 est un polynôme unitaire de degré 0. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que S_k soit un polynôme unitaire de degré k. Alors le monôme dominant de $S'_{k+1} = (k+1)S_k$ est $(k+1)X^k$ donc, en primitivant, S_{k+1} est bien un polynôme unitaire de degré $k+1$. Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, S_k est un polynôme unitaire de degré k.

20 Soit un entier $k \geq 2$. Alors $k-1 \geq 1$ donc

$$S_k(1) - S_k(0) = \int_0^1 S'_k(t)\, dt = k \int_0^1 S_{k-1}(t)\, dt = 0$$

21 Posons $U_m(X) = (-1)^m S_m(1-X)$. Alors

- $U_0 = S_0 = 1$;
- $\forall k \in \mathbb{N},\ U'_{k+1} = (-1)^{k+2} S'_{k+1}(1-X) = (-1)^k (k+1) S_k(1-X) = (k+1)U_k$;
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par le changement de variable $u = 1-t$,

$$\int_0^1 U_k(t)\, dt = (-1)^k \int_0^1 S_k(1-t)\, dt = (-1)^k \int_0^1 S_k(u)\, du = 0$$

Par unicité de la suite vérifiant ces trois conditions, les suites (S_m) et (U_m) sont égales i.e.

$$\forall m \in \mathbb{N},\ S_m(1-X) = (-1)^m S_m(X)$$

22 Tout d'abord, $\deg S_k = k$ donc $S_k \in \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. L'injectivité de ψ_n garantit alors l'unicité demandée. On raisonne ensuite par récurrence. Tout d'abord, $\psi_n(S_0) = \psi_n(1) = 1 = X^0$. Supposons que $\psi_n(S_k) = X^k$ pour un certain $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors, d'après la question **16**

$$\psi_n(S_{k+1})' = \psi_n(S'_{k+1}) = \psi_n((k+1)S_k) = (k+1)\psi_n(S_k) = (k+1)X^k$$

Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $\psi_n(S_{k+1}) = X^{k+1} + c$. Mais, comme $k+1 \geq 1$,

$$c = \psi_n(S_{k+1})(0) = \int_0^1 S_{k+1}(t)\, dt = 0$$

Ainsi $\psi_n(S_{k+1}) = X^{k+1}$. Par récurrence finie, $\psi_n(S_k) = X^k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

23 On trouve avec la question **18**

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2} \qquad \sigma_2 = \frac{1}{6} \qquad \sigma_3 = 0$$

24 Soit k un entier naturel impair tel que $k \geq 3$. D'après la question **20**, $S_k(0) = S_k(1)$. Mais d'après la question **21**, $S_k(1) = S_k(1-0) = (-1)^k S_k(0) = -S_k(0)$ car k est impair. On en déduit donc que $\sigma_k = S_k(0) = 0$.

25 C'est parti pour une autre récurrence. Tout d'abord $S_0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} X^{0-k}$. Supposons que $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma_k X^{n-k}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$S'_{n+1} = (n+1)S_n = \sum_{k=0}^{n} (n+1)\binom{n}{k} \sigma_k X^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (n+1-k) \sigma_k X^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \sigma_k X^{n+1-k} \right)'$$

Comme $S_{n+1}(0) = \sigma_{n+1}$,

$$S_{n+1} = \sigma_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \sigma_k X^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \sigma_k X^{n+1-k}$$

ce qui conclut la récurrence.

26 Soit un entier $n \geq 2$. En évaluant la relation de la question précédente en 1 et en utilisant la question **20**,

$$\sigma_n = S_n(0) = S_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma_k$$

et comme $\binom{n}{n} = 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \sigma_k = 0$$

27 D'après la question précédente,

$$\forall n \geq 2,\ \sigma_{n-1} = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}\sigma_k$$

ou encore

$$\forall n \geq 1,\ \sigma_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}\sigma_k$$

```python
def sigma(N):
    l=[1]
    for n in range(1,N+1):
        binomial=1
        somme=0
        for k in range(n):
            somme+=binomial*l[k]
            binomial*=(n-k+1)/(k+1)
        l.append(-somme/(n+1))
    return l[-1]
```

```
>>> sigma(50)
7.500866746077044e+24
```

28 Le rayon de convergence de la série exponentielle est infini. Par produit de Cauchy,

$$\begin{aligned}\forall z \in \mathrm{D},\ e^z\mathrm{S}(z) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sigma_n}{n!}z^n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\cdot\frac{\sigma_k}{k!}\right)z^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sigma_k\right)\frac{z^n}{n!}\end{aligned}$$

D'après la question **26**, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sigma_k = \begin{cases}\sigma_n & \text{si } n \geq 2\\ \sigma_0 & \text{si } n = 0\\ \sigma_0 + \sigma_1 & \text{si } n = 1\end{cases}$$

de sorte que

$$\forall z \in \mathrm{D},\ e^z\mathrm{S}(z) = \sigma_0 z + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sigma_n}{n!}z^n = z + \mathrm{S}(z)$$

29 Posons $\rho = \min\left\{\frac{\mathrm{R}}{2}, \pi\right\}$. Soit $z \in \mathrm{D}(0,\rho)$. Alors $|2iz| = 2|z| < \mathrm{R}$ donc, d'après la question précédente, $(e^{2iz} - 1)\mathrm{S}(2iz) = 2iz$.
De plus, pour $z \in \mathrm{D}(0,\rho) \setminus \{0\}$, $2z$ n'est pas un multiple entier de 2π donc $e^{2iz} - 1 \neq 0$ de sorte que $\mathrm{S}(2iz) = \dfrac{2iz}{e^{2iz} - 1}$ puis

$$2i\mathrm{T}(z) = (e^{2iz+1})\mathrm{S}(2iz) = e^{2iz}\mathrm{S}(2iz) + \mathrm{S}(2iz) = 2iz + 2\mathrm{S}(2iz)$$

ou encore

$$\mathrm{T}(z) = z - i\mathrm{S}(2iz)$$

Cette égalité est encore valable pour $z = 0$ puisque $\mathrm{T}(0) = -i$ et $\mathrm{S}(0) = \sigma_0 = 1$. Finalement,

$$\forall z \in \mathrm{D}(0,\rho),\ \mathrm{T}(z) = z - i\mathrm{S}(2iz) = z - i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sigma_n}{n!}(2iz)^n$$

Puisque $\sigma_1 = -\frac{1}{2}$ et $\sigma_n = 0$ pour tout $n \geq 3$ impair, tous les termes d'indices impairs de ce dernier développement en série entière sont nuls. On peut donc écrire :

$$\forall z \in \mathrm{D}(0, \rho),\ \mathrm{T}(z) = -i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n(-1)^n \sigma_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

30 Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$. Alors $2x$ et $4x$ ne sont pas des multiples de 2π de sorte que $e^{4ix} \neq 1$ et $e^{2ix} \neq 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{2(e^{4ix}+1)}{e^{4ix}-1} - \frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1} &= \frac{2(e^{2ix}+e^{-2ix})}{e^{2ix}-e^{-2ix}} - \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}} \\
&= \frac{2\cos(2x)}{i\sin(2x)} - \frac{\cos(x)}{i\sin(x)} \\
&= \frac{\cos(2x)}{i\sin(x)\cos(x)} - \frac{\cos(x)}{i\sin(x)} \\
&= \frac{\cos(2x)-\cos^2(x)}{i\sin(x)\cos(x)} \\
&= -\frac{\sin^2(x)}{i\sin(x)\cos(x)} \\
&= i\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = i\tan(x)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\tan(x) = \frac{1}{ix}\left(\mathrm{T}(2x) - \mathrm{T}(x)\right)$$

et donc, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= -\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n(-1)^n\sigma_{2n}}{(2n)!}(2x)^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n(-1)^n\sigma_{2n}}{(2n)!}x^{2n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n(-1)^n\sigma_{2n}(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{n+1}(-1)^{n+1}\sigma_{2n+2}(1-4^{n+1})}{(2n+2)!}x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{n+1}(-1)^{n}\sigma_{2n+2}(4^{n+1}-1)}{(2n+2)!}x^{2n+1}
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{t_n}{(2n+1)!} = \frac{4^{n+1}(-1)^n\sigma_{2n+2}(4^{n+1}-1)}{(2n+2)!}$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \frac{4^{n+1}(-1)^n\sigma_{2n+2}(4^{n+1}-1)}{2n+2}$$