Devoir à la maison n°16

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Isométries vectorielles

On considère un espace euclidien orienté E de dimension $n \geq 1$.

Partie I – Les réflexions engendrent $\mathrm{O(E)}$

I.1 Soient x et y deux vecteurs de E distincts et de même norme. On note H l'orthogonal de $\mathrm{vect}(y-x)$.

I.1.a Montrer que H est un hyperplan.

I.1.b Soit s la réflexion par rapport à l'hyperplan H. Montrer que $s(x) = y$.

I.2 Soit $u \in \mathrm{OE}$. On définit $\mathrm{I}_u = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par u et on pose $n_u = \dim \mathrm{I}_u$.

I.2.a Que dire de u si $n_u = n$?

I.2.b On suppose maintenant $n_u < n$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $u(x_0) \neq x_0$.

I.2.c Justifier l'existence d'une réflexion s tel que $s(x_0) = u(x_0)$.

I.2.d Montrer que $\mathrm{I}_u \subset \mathrm{I}_s$.

I.2.e En déduire que $n_{s\circ u} \geq n_u + 1$.

I.3 Montrer par récurrence que tout $u \in \mathrm{O(E)}$ peut s'écrire comme la composée d'*au plus* $n - n_u$ réflexions (on convient que le produit de 0 réflexion est l'identité de E).

Partie II – Automorphimes orthogonaux en dimension 3

On suppose $n = 3$ et on se donne $u \in \mathrm{O(E)}$.

II.1 On suppose $n_u = 1$. Montrer que u est la composée de deux réflexions distinctes. En déduire que u est une rotation d'angle non nul.

II.2 On suppose $n_u = 2$. Montrer que u est une réflexion.

II.3 On suppose $n_u = 0$.

II.3.a Montrer que u est la composée de trois réflexions.

II.3.b Montrer que $-u$ est une rotation.

II.3.c En déduire qu'il existe une base orthonormale directe de E telle que la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

II.3.d Montrer que u est la composée commutative d'une rotation et d'une réflexion, c'est-à-dire qu'il existe une rotation r et une réflexion s telles que $u = r \circ s = s \circ r$.
On dit alors que u est une antirotation.

II.4 Soit s une réflexion par rapport à un plan P et r une rotation d'axe D (distincte de l'identité). Montrer que s et r commutent si et seulement si $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{\perp}$.