# Devoir à la maison n°01

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

## Problème 1

### Partie I – Définition d'une application

Soit $n$ un entier naturel non nul.
Soit $\mathrm{T}(\mathrm{X})$ un polynôme de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ de degré $n$.
Soit $f$ l'application définie sur $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ qui à tout $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ associe $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) + \mathrm{X}\mathrm{R}(\mathrm{X})$ où $\mathrm{Q}(\mathrm{X})$ et $\mathrm{R}(\mathrm{X})$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2)$ par $\mathrm{T}(\mathrm{X})$.
On a donc $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{Q}(\mathrm{X})\mathrm{T}(\mathrm{X}) + \mathrm{R}(\mathrm{X})$ avec $\deg(\mathrm{R}(\mathrm{X})) < \deg(\mathrm{T}(\mathrm{X}))$.
On notera $f_n$ la restriction de $f$ à $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.

**1.** Montrer que $f$ est une application linéaire.

**2.** Montrer que $f_n$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $(\mathbb{C}_n[\mathrm{X}], +, .)$.

**3.** Dans cette question uniquement $n = 2$ et $\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2$.

- **a.** Donner la matrice A de $f_2$ sur la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$.
- **b.** Calculer $\mathrm{A}^2$. En déduire que $f_2$ est bijective et donner son application réciproque. En déduire la nature de $f_2$.

### Partie II – Etude d'un cas particulier

Soit $a$ un complexe fixé. Dans cette partie uniquement, $n = 3$ et $\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 + a$.

**1.** Montrer que $f_3$ a pour matrice sur la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^3)$ de $\mathbb{C}_3[\mathrm{X}]$ :

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

**2.** Calculer le déterminant de $f_3$.

**3.** Donner les valeurs de $a$ pour lesquelles $f_3$ n'est pas bijective.

**4.** Dans cette question $a = -1$.

- **a.** Donner une base de $\operatorname{Ker} f_3$, le noyau de $f_3$ ainsi qu'une base de $\operatorname{Im} f_3$, l'image de $f_3$.

**b.** Le noyau et l'image de $f_3$ sont-ils supplémentaires ?

## Partie III – Etude du noyau

1. Soit $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ un polynôme non nul de degré $p$ tel que : $2p < n$. Montrer que $f(\mathrm{P}(\mathrm{X}))$ est non nul.

2. Soit $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ un polynôme. Montrer qu'il appartient au noyau de $f$ si et seulement si il existe un polynôme $\mathrm{R}(\mathrm{X})$ de degré strictement inférieur a $n$ tel que : $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{R}(\mathrm{X})(1 - \mathrm{XT}(\mathrm{X}))$.

3. En déduire que si $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ est un élément du noyau de $f$, alors il appartient à $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.

4. Déduire de la question **2** que pour tout élément P du noyau de $f$ et que pour tout $k$ de $\mathbb{N}$ tel que $\deg(\mathrm{P}(\mathrm{X})) + k \leq n$, le polynôme $\mathrm{X}^k\mathrm{P}(\mathrm{X})$ appartient au noyau de $f$.

5. On suppose dans cette question que le noyau de $f$ n'est pas réduit au polynôme nul. Soit I l'ensemble des entiers naturels $k$ tels qu'il existe un polynôme du noyau de $f$ qui a pour degré $k$.

   **a.** Montrer que I possède un plus petit élément $d$.

   **b.** Soit $\mathrm{P}_0(\mathrm{X})$ un polynôme du noyau ayant pour degré $d$. Soit $\mathrm{P}_1(\mathrm{X})$ un autre polynôme du noyau ayant pour degré $d$. Montrer qu'il existe un complexe $c$ tel que $\mathrm{P}_1(\mathrm{X}) = c\mathrm{P}_0(\mathrm{X})$.

   **c.** Montrer qu'un polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ appartient au noyau de $f$ si et seulement s'il existe un polynôme $\mathrm{S}(\mathrm{X})$ de degré inférieur ou égal à $n - d$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{S}(\mathrm{X})\mathrm{P}_0(\mathrm{X})$.

6. On suppose dans cette question que $\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 - 1$. Donner le noyau de $f$.

## Partie IV – Etude d'un produit scalaire

Dans cette partie on prendra $\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2$ et on considérera $g$ la restriction de $f_2$ à $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

1. Montrer que $g$ est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel *réel* $(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}], +, .)$. Donner sa matrice A sur la base canonique de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

2. Soit $\langle ., . \rangle$ définie sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

   $$\forall (\mathrm{U}(\mathrm{X}), \mathrm{V}(\mathrm{X})) \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]^2, \langle \mathrm{U}(\mathrm{X}), \mathrm{V}(\mathrm{X}) \rangle = \mathrm{U}(1)\mathrm{V}(1) + \mathrm{U}'(1)\mathrm{V}'(1) + \mathrm{U}''(1)\mathrm{V}''(1)$$

   Montrer que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}], +, .)$.

3. Montrer que la matrice A de $g$ sur la base canonique est une matrice orthogonale.

4. **a.** La base canonique de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ est-elle orthonormale pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$ ?

   **b.** L'application $g$ est-elle une isométrie vectorielle pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$ ?