Devoir à la maison n°11

Exercice 1.

On note E l'ensemble des suites complexes, c'est-à-dire $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On admet que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note F_p l'ensemble des suites complexes périodiques de période p.
On pose enfin $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que F_p est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, on note u^k la suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv k[p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer que $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est une base de F_p. En déduire la dimension de F_p.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = 1 \qquad v_n = j^n \qquad w_n = \bar{j}^n$$

   Montrer que les suites u, v et w appartiennent à F_3.
4. Montrer que (u, v, w) est une base de F_3.
5. Soit $t \in E$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, t_n est le reste de la division euclidienne de n par 3. Montrer que $t \in F_3$.
6. Déterminer les coordonnées de t dans la base (u, v, w).
7. Montrer que $F_3 \subset F_6$.
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$x_n = (-1)^n \qquad y_n = (-j)^n \qquad z_n = (-\bar{j})^n$$

   et $G = \operatorname{vect}(x, y, z)$. Montrer que $G \subset F_6$.
9. Montrer que la famille (x, y, z) est libre. En déduire la dimension de G.
10. Montrer que $F_6 = F_3 \oplus G$.
11. Montrer que (u, x) est une base de F_2.
12. On pose $H = \operatorname{vect}(v, w, y, z)$. Montrer que $F_6 = F_2 \oplus H$.

Exercice 2.

On considère les équations différentielles suivantes

$$(\mathcal{E}):\ y''' - y = 0 \qquad (\mathcal{F}):\ y' - y = 0 \qquad (\mathcal{G}):\ y'' + y' + y = 0$$

Remarque. y'' et y''' désignent les dérivées seconde et troisième de y. ■

On note :

- E l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ à valeurs réelles ;
- F l'ensemble des solutions de $(\mathcal{F})$ à valeurs réelles ;
- G l'ensemble des solutions de $(\mathcal{G})$ à valeurs réelles.

On admettra que les solutions de $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{G})$ sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre les équations différentielles $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{G})$. On donnera les solutions à valeurs *réelles*.
2. Montrer que $F \subset E$ et $G \subset E$.
3. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
4. Soit $y \in E$. On pose $y_1 = y'' + y' + y$ et $y_2 = 2y - y' - y''$. Montrer que $y_1 \in F$ et $y_2 \in G$.
5. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
6. Donner des bases de F et G. En déduire les dimensions de F et G.
7. Donner la dimension de E ainsi qu'une base de E.
8. Résoudre $(\mathcal{E})$.

> On s'intéresse maintenant à l'équation différentielle
>
> $$(\mathcal{E}'):\ y''' - y = xe^x$$
>
> dont on recherche à nouveau les solutions à valeurs *réelles*.

9. Déterminer une solution de $(\mathcal{E}')$ de la forme $x \mapsto P(x)e^x$ où P est une fonction polynomiale.
10. En déduire toutes les solutions de $(\mathcal{E}')$.