Devoir surveillé n° 2

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv \pi[2\pi]$. Montrer que

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

Exercice 2.

1. Déterminer les racines carrées complexes de $1+i$ sous forme exponentielle.
2. Déterminer les racines carrées complexes de $1+i$ sous forme algébrique.
3. En déduire que $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.
4. Montrer que $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$.
5. Déterminer les valeurs de

$$\cos\frac{3\pi}{8} \quad \sin\frac{3\pi}{8} \quad \tan\frac{3\pi}{8} \quad \cos\frac{5\pi}{8} \quad \sin\frac{5\pi}{8} \quad \tan\frac{5\pi}{8} \quad \cos\frac{7\pi}{8} \quad \sin\frac{7\pi}{8} \quad \tan\frac{7\pi}{8}$$

Exercice 3.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$(E) \quad (1+iz)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$$

1. Montrer que si z est solution de (E), alors $|1+iz| = |1-iz|$. En déduire que $z \in \mathbb{R}$.
2. Exprimer $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.
3. Soit $z \in \mathbb{R}$. On pose $z = \tan\phi$ avec $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$. Ecrire une équation d'inconnue ϕ équivalente à (E) et la résoudre.
4. Résoudre alors l'équation (E).

Exercice 4.

Soit n un entier naturel non nul. On pose $\omega = e^{\frac{i\pi}{n}}$.

1. Justifier que $\omega \neq 1$.
2. On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$. Montrer que $A_n = \frac{2}{1-\omega}$.

3. On pose $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos \dfrac{k\pi}{n}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin \dfrac{k\pi}{n}$. Montrer que $C_n = 1$ et $S_n = \dfrac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$.

4. Calculer $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega^{2k} - 1|$.

Exercice 5.

Soit z un nombre complexe. On note A, B, C, D les points d'affixes respectifs $1, z, z^2, z^3$ dans un repère orthonormé du plan.

1. Pour quelles valeurs de z les points A, B, C, D sont-il deux à deux distincts ? On suppose cette cette condition remplie dans la suite de l'énoncé.
2. Déterminer les valeurs de z tels que $ABCD$ soit un parallélogramme. Préciser la nature de ce parallélogramme.
3. Déterminer les valeurs de z tels que le triangle ABC soit rectangle isocèle en A.
4. Déterminer les valeurs de z tels que ABD soit rectangle isocèle en A.

Exercice 6.

Soient $n \geqslant 1$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{km}$. On distinguera suivant que m est ou non multiple de n.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose
$$S(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(z + \omega^k\right)^n$$
Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $S(z) = n\,(z^n + 1)$.
3. Calculer $S\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)$. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = 0$$