Dénombrement

1 Ensembles finis et cardinaux

1.1 Cardinal d'un ensemble fini

Définition 1.1

On dit qu'un ensemble non vide E est fini s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E. Dans ce cas, l'entier n est unique et est appelé **cardinal** de E : on le note $\operatorname{card} \mathrm{E}$, $|\mathrm{E}|$ ou encore $\#\mathrm{E}$.
Par convention, $\varnothing$ est fini et $\operatorname{card} \varnothing = 0$.

Remarque. Plus prosaïquement, le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble.

Proposition 1.1

Deux ensembles finis ont même cardinal **si et seulement si** il existe une bijection de l'un sur l'autre.

Méthode **Déterminer le cardinal d'un ensemble**

Pour déterminer le cardinal d'un ensemble, il suffit de le mettre en bijection avec un ensemble de cardinal connu.

Proposition 1.2

Soit E un ensemble fini et A une partie de E. Alors A est fini et $\operatorname{card} \mathrm{A} \leq \operatorname{card} \mathrm{E}$. Il y a égalité **si et seulement si** $\mathrm{A} = \mathrm{E}$.

1.2 Opération sur les ensembles finis

Proposition 1.3

Soient E et F deux ensembles finis. Alors $\mathrm{E} \cup \mathrm{F}$ et $\mathrm{E} \cap \mathrm{F}$ sont finis et

$$\operatorname{card}(\mathrm{E} \cup \mathrm{F}) = \operatorname{card} \mathrm{E} + \operatorname{card} \mathrm{F} - \operatorname{card}(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})$$

Exercice 1.1 **Principe d'inclusion-exclusion**

Soient $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ n ensembles finis. Montrer que

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \operatorname{card}\left(\bigcap_{l=1}^{k} \mathrm{A}_{i_l}\right)$$

Définition 1.2 Partition

Soit E un ensemble (pas nécessairement fini) et $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de parties de E. On dit que $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une partition de E si

- les A_i sont non vides ;
- les A_i sont disjoints deux à deux ;
- $\mathrm{E} = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i$.

On note alors $\mathrm{E} = \bigsqcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i$.

Remarque. Il arrive de parler de partition même si les parties en question ne sont pas toutes vides.

Proposition 1.4

Soit E un ensemble fini et $(\mathrm{A}_i)_{1\leq i\leq n}$ une partition de E. Alors $\operatorname{card}\mathrm{E} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}\mathrm{A}_i$.

Remarque. La relation est vraie même si les parties ne sont pas toutes vides.

Méthode **Déterminer le cardinal d'un ensemble**

Pour déterminer le cardinal d'un ensemble, il suffit de le partitionner en parties de cardinaux connus.

Proposition 1.5

Soient E et F deux ensembles finis. Alors $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ et F^{E} est fini. De plus, $\operatorname{card}(\mathrm{E}\times\mathrm{F}) = \operatorname{card}\mathrm{E}\times\operatorname{card}\mathrm{F}$.

On en déduit le résultat suivant par récurrence.

Corollaire 1.1

Soient $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_p$ des ensenmbles finis. Alors

$$\operatorname{card}\left(\prod_{i=1}^{p} \mathrm{E}_i\right) = \prod_{i=1}^{p} \operatorname{card}(\mathrm{E}_i)$$

Proposition 1.6

Soient E et F deux ensembles finis. Alors F^{E} est fini. De plus, $\operatorname{card}(\mathrm{F}^{\mathrm{E}}) = (\operatorname{card}\mathrm{F})^{\operatorname{card}\mathrm{E}}$.

L'application de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ dans $\{0,1\}^{\mathrm{E}}$ qui à une partie de E associe sa fonction indicatrice est clairement bijective. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 1.7

Soit E un ensemble fini. Alors l'ensemble des parties de E noté $\mathcal{P}(E)$ est également fini et $\operatorname{card}\mathcal{P}(E) = 2^{\operatorname{card} E}$.

1.3 Applications entre ensembles finis

Proposition 1.8

Soit $f : E \to F$.

(i) Si f est injective et F fini, alors E est fini et $\operatorname{card} E \leq \operatorname{card} F$.

(ii) Si f est surjective et E fini, alors F est fini et $\operatorname{card} E \geq \operatorname{card} F$.

Corollaire 1.2

Soit $f : E \to F$. Si E est fini, alors $\operatorname{Im} f$ est fini et $\operatorname{card}(\operatorname{Im} f) \leq \operatorname{card} E$.

Principe des tiroirs de Dirichlet

Supposons que l'on veuille ranger n paires de chaussettes dans p tiroirs. Si $n > p$, il est évident qu'un des tiroirs comportera plus d'une paire de chaussettes. On peut formaliser cette remarque de la manière suivante. Si on note E l'ensemble des paires de chaussettes, F l'ensemble des tiroirs et f l'application qui à une paire de chaussettes associe le tiroir dans laquelle elle se trouve, alors la remarque précédente signifie que f n'est pas injective.

Exercice 1.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $n+1$ réels de l'intervalle $[0, 1[$. Montrer que deux d'entre eux sont à une distance strictement inférieure à $\frac{1}{n}$ l'un de l'autre.

Proposition 1.9

Soit $f : E \to F$ où E et F sont des ensembles finis de **même** cardinal. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est bijective ;

(ii) f est surjective ;

(iii) f est injective.

Proposition 1.10 Lemme des bergers

Soit $f : E \to F$ où E et F sont des ensembles finis. On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{card}\left(f^{-1}(y)\right) = r$ pour tout $y \in F$. Alors $\operatorname{card} E = r \operatorname{card} F$.

2 Listes, arrangements et combinaisons

2.1 Listes

Définition 2.1 Liste

Soient E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$. On appelle ***p*-liste** d'éléments de E tout p-uplet d'éléments de E.

Remarque. Une p-liste est également une application de $[\![1, p]\!]$ dans E.

Remarque. On remarquera que l'**ordre** des éléments compte dans une liste. (a, b, c) et (c, b, a) ne désignent pas la même liste.

Exemple 2.1

- Le résultat d'un lancer de 3 dés à 6 faces forme une 3-liste de $[\![1, 6]\!]$.
- Le tirage successif et **avec remise** de 4 cartes dans un paquets de 52 cartes forme une 4-liste de l'ensemble des 52 cartes.

Proposition 2.1 Nombre de listes

Soient p et n des entiers naturels. Le nombre de p-listes d'un ensemble de cardinal n est n^p.

Exemple 2.2

Le nombre de digicodes formés de 4 chiffres suivis de deux lettres est $10^4 \times 26^2 = 6760000$.

2.2 Arrangements

Définition 2.2 Arrangement

Soient E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$. On appelle ***p*-arrangement** d'éléments de E tout p-uplet d'éléments de E **deux à deux distincts**.

Remarque. Un p-arrangement est également une injection de $[\![1, p]\!]$ dans E.

Remarque. On remarquera que l'**ordre** des éléments compte dans un arrangement. (a, b, c) et (c, b, a) ne désignent pas le même arrangement.

Exemple 2.3

- Un tiercé d'une course de 15 chevaux forme un 3-arrangement de l'ensemble des 15 chevaux.
- Un tirage **sans remise** de 4 cartes dans un jeu de 32 cartes pour lequel **l'ordre compte** forme un 4-arrangement de l'ensemble des 32 cartes.

Proposition 2.2 Nombre d'injections

Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs p et n. Le nombre d'injections de E dans F est $\frac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leq n$ et 0 sinon.

Corollaire 2.1 Nombre d'arrangements

Soient p et n des entiers naturels. Le nombre de p-arrangements d'un ensemble de cardinal n est $\frac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leq n$ et 0 sinon.

Exemple 2.4

Le nombre de tiercés possibles dans une course de 15 chevaux est $\frac{15!}{(15-3)!} = 15 \times 14 \times 13 = 2730$.

Rappel Permutation

On appelle **permutation** d'un ensemble E toute bijection de E sur lui-même.

Corollaire 2.2 Nombre de permutations

Le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n est $n!$.

2.3 Combinaisons

Définition 2.3 Combinaison

Soient E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$. On appelle **p-combinaison** d'éléments de E toute partie de E de cardinal p.

Remarque. On remarquera que l'ordre des éléments ne compte pas dans une combinaison. $\{a, b, c\}$ et $\{c, b, a\}$ désignent la même combinaison.

Exemple 2.5

- Une main de 5 cartes d'un jeu de 52 cartes forme une 5-combinaison de l'ensemble des 52 cartes.
- Un trinôme d'une classe forme une 3-combinaison de l'ensemble des élèves de la classe.

Notation 2.1 Coefficient binomial

Soit $(p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. On note $\binom{n}{p}$ le nombre de p-combinaisons (ou de parties à p éléments) d'un ensemble de cardinal n.

Si on note $\mathrm{A}_{p,n}$ l'ensemble des p-arrangements et $\mathrm{C}_{p,n}$ l'ensemble des p-combinaisons d'un même ensemble de cardinal n, le lemme des bergers appliqué à l'application $\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{A}_{p,n} & \longrightarrow & \mathrm{C}_{p,n} \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & \{x_1, \dots, x_p\} \end{array}\right.$ fournit le résultat suivant.

Proposition 2.3 Nombre de combinaisons

Soit $(p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Alors

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 2.6

Le nombre de mains de 5 cartes prises dans un jeu de 52 cartes est $\binom{52}{5} = \frac{52\times51\times50\times49\times48}{5\times4\times3\times2\times1} = 2598960$.

2.4 Preuves combinatoires de relations entre coefficients binomiaux

Si E est un ensemble de cardinal n et $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_k(\mathrm{E})$ l'ensemble des parties de E de cardinal n.

Symétrie des coefficients binomiaux

Soient E un ensemble de cardinal n et $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathrm{E}) \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \overline{\mathrm{X}} \end{array}\right.$ est une involution induisant une bijection de $\mathcal{P}_k(\mathrm{E})$ sur $\mathcal{P}_{n-k}(\mathrm{E})$. On en déduit que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Relation du triangle de Pascal

Soient E un ensemble de cardinal $n+1$, x un élément fixé de E et $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de E de cardinal $k+1$ contenant x et $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties de E de cardinal $k+1$ ne contenant pas x. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ forment clairement une partition de $\mathcal{P}_{k+1}(\mathrm{E})$ de sorte que

$$\binom{n+1}{k+1} = \operatorname{card} \mathcal{A} + \operatorname{card} \mathcal{B}$$

Raisonnement élémentaire
Choisir un élément de $\mathcal{A}$ consiste à choisir une partie de $\mathrm{E} \setminus \{x\}$ de cardinal k et à lui ajouter x. Comme $\operatorname{card}(\mathrm{E} \setminus \{x\}) = n$, il y a $\binom{n}{k}$ façons de le faire. Ainsi $\operatorname{card} \mathcal{A} = \binom{n}{k}$.
Choisir un élément de $\mathcal{B}$ consiste à choisir une partie de $\mathrm{E} \setminus \{x\}$ de cardinal $k+1$. Comme $\operatorname{card}(\mathrm{E} \setminus \{x\}) = n$, il y a $\binom{n}{k+1}$ façons de le faire. Ainsi $\operatorname{card} \mathcal{B} = \binom{n}{k+1}$.
On en déduit que $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.
Raisonnement rigoureux
L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_k(\mathrm{E} \setminus \{x\}) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ \mathrm{F} & \longmapsto & \mathrm{F} \cup \{x\} \end{array}\right.$ est bijective de sorte que

$$\operatorname{card} \mathcal{P}_k(\mathrm{E} \setminus \{x\}) = \operatorname{card} \mathcal{A}$$

ou encore $\operatorname{card} \mathcal{A} = \binom{n}{k}$. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{k+1}(\mathrm{E} \setminus \{x\}) & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ \mathrm{F} & \longmapsto & \mathrm{F} \end{array}\right.$ est bijective de sorte que

$$\operatorname{card} \mathcal{P}_{k+1}(\mathrm{E} \setminus \{x\}) = \operatorname{card} \mathrm{B}$$

ou encore $\operatorname{card} \mathcal{B} = \binom{n}{k+1}$.
Finalement, $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini

Soit E un ensemble de cardinal n. Les $\mathcal{P}_k(\mathrm{E})$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ forment une partition de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$. On en déduit que

$$\operatorname{card} \mathcal{P}(\mathrm{E}) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card} \mathcal{P}_k(\mathrm{E})$$

Autrement dit

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

C'est la formule du binôme de Newton appliqué à $(1+1)^n$.

Preuve de l'identité $k\binom{k}{n} = n\binom{n-1}{k-1}$

Soient E un ensemble de cardinal $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$. On considère l'ensemble $\mathcal{A} = \{(x, \mathrm{F}),\ x \in \mathrm{F}, \mathrm{F} \in \mathcal{P}_k(\mathrm{E})\}$. L'idée consiste à déterminer le cardinal de $\mathcal{A}$ de deux manières différentes.

Raisonnement élémentaire

Choisir un élément (x, F) de $\mathcal{A}$ peut se faire de la manière suivante :

- on choisit un élément x de E (n choix possibles) ;
- puis on choisit partie F' de cardinal $k-1$ de $\mathrm{E} \setminus \{x\}$ ($\binom{n-1}{k-1}$ choix possibles) et on pose $\mathrm{F} = \mathrm{F}' \cup \{x\}$.

Ainsi $\operatorname{card} \mathcal{A} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Mais choisir un élément (x, F) de $\mathcal{A}$ peut également se faire de la manière suivante :

- on choisit une partie F de cardinal k de E ($\binom{n}{k}$ choix possibles) ;
- puis on choisit un élément x de F (k choix possibles).

Ainsi $\operatorname{card} \mathcal{A} = k\binom{n}{k}$.

Raisonnement rigoureux

Pour $x \in \mathrm{E}$, notons $\mathcal{B}_x = \{(x, \mathrm{F}),\ x \in \mathrm{F}, \mathrm{F} \in \mathcal{P}_k(\mathrm{E})\}$. Les $\mathcal{B}_x$ pour $x \in \mathrm{E}$ forment une partition de $\mathcal{A}$. Ainsi

$$\operatorname{card} \mathcal{A} = \sum_{x \in \mathrm{E}} \operatorname{card} \mathcal{B}_x$$

Or pour tout $x \in \mathrm{E}$, l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{k-1}(\mathrm{E} \setminus \{x\}) & \longrightarrow & \mathcal{B}_x \\ \mathrm{F} & \longmapsto & (x, \mathrm{F} \cup \{x\}) \end{array}\right.$ est bijective de sorte que

$$\operatorname{card} \mathcal{P}_{k-1}(\mathrm{E} \setminus \{x\}) = \operatorname{card} \mathcal{B}_x$$

ou encore $\operatorname{card} \mathcal{B}_x = \binom{n-1}{k-1}$. On en déduit que $\operatorname{card} \mathcal{A} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Pour $\mathrm{F} \in \mathcal{P}_k(\mathrm{E})$, posons $\mathcal{C}_\mathrm{F} = \{(x, \mathrm{F}),\ x \in \mathrm{F}\}$. Les $\mathcal{C}_\mathrm{F}$ pour $\mathrm{F} \in \mathcal{P}_k(\mathrm{E})$ forment une partition de $\mathcal{A}$. Ainsi

$$\operatorname{card} \mathcal{A} = \sum_{\mathrm{F} \in \mathcal{P}_k(\mathrm{E})} \operatorname{card} \mathcal{C}_\mathrm{F}$$

Or pour tout $\mathrm{F} \in \mathcal{P}_k(\mathrm{E})$, l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathcal{C}_\mathrm{F} \\ x & \longmapsto & (x, \mathrm{F}) \end{array}\right.$ est bijective de sorte que

$$\operatorname{card} \mathrm{F} = \operatorname{card} \mathcal{C}_\mathrm{F}$$

ou encore $\operatorname{card} \mathcal{C}_\mathrm{F} = k$. On en déduit que $\operatorname{card} \mathcal{A} = k\binom{n}{k}$.

Exercice 2.1

Donner une preuve combinatoire de l'identité $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.