

DEVOIR SURVEILLÉ N°1

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

EXERCICE 1.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \binom{j}{i}$.

1. Calculer S_0 , S_1 et S_2 .
2. Calculer les sommes $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n 2^k$.
3. En intervertissant l'ordre de sommation, calculer S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2.

1. Soient k, l, n des entiers naturels tels que $l \leq k \leq n$.
 - a. Montrer que $\binom{n}{k} \binom{k}{l} = \binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l}$.
 - b. En déduire que si $l < n$, $\sum_{k=l}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{l} = 0$.
2. Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} b_k$$

EXERCICE 3.

Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Dans la deuxième question de cet exercice, la notation $\sum_{0 \leq 2k \leq n}$ signifie que la somme porte sur les indices k tels que

$$0 \leq 2k \leq n.$$

De même, $\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n}$ signifie que la somme porte sur les indices k tels que $0 \leq 2k+1 \leq n$.

Cela permet notamment de séparer élégamment les termes d'indices pairs et impairs d'une somme sans avoir à considérer la parité de n :

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{0 \leq 2k \leq n} a_{2k} + \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} a_{2k+1}$$

1. On définit la fonction f_n telle que $f_n(x) = (x+1)^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - a. Donner une expression développée de $f_n(x)$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
 - b. En calculant $f'_n(1)$ de deux manières, simplifier la somme $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.
 - c. En calculant $f''_n(1)$ de deux manières, simplifier la somme $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}$.
 - d. Dédire des questions précédentes une expression simple de $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$.
2. On définit la fonction g_n telle que $g_n(x) = f_n(x) + f_n(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - a. Montrer que $g_n(x) = 2 \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} x^{2k}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - b. En calculant $g'_n(1)$ de deux manières, montrer que $\sum_{0 \leq 2k \leq n} k \binom{n}{2k} = 2^{n-3}n$.
 - c. En calculant $g''_n(1)$ de deux manières, montrer que $\sum_{0 \leq 2k \leq n} k^2 \binom{n}{2k} = 2^{n-5}n(n+1)$.

EXERCICE 4.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n}$.
2. En déduire par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{n^{\frac{1}{3}}}$$

EXERCICE 5.

On considère la suite (F_n) définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

1. Calculer F_2 , F_3 , F_4 et F_5 .
2. Montrer que pour tout $n \geq 5$, $F_n \geq n$. Que peut-on en déduire quant à la limite de la suite (F_n) ?
3.
 - a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_{n+1}$.
 - b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1} = F_{2n}$.
 - c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k} = F_{2n-1}$.
4.
 - a. Résoudre l'équation $x^2 = x + 1$. On notera α la solution positive et β la solution négative. Que vaut le produit $\alpha\beta$?
 - b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n)$.
 - c. Soit $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$ tel que $p \geq r$. Montrer que $F_p F_{q+r} - (-1)^r F_{p-r} F_q = F_{p+q} F_r$.