Devoir à la maison n°12 : corrigé

Problème 1 — ENSI 1979

Partie I – Etude de cas particuliers

1. On trouve

$$P_1 = X \qquad P_2 = 2X \qquad P_3 = 3X - X^3 \qquad P_4 = 4X - 4X^3$$
$$Q_1 = 1 \qquad Q_2 = 1 - X^2 \qquad Q_3 = 1 - 3X^2 \qquad Q_4 = 1 - 6X^2 + X^4$$

2. Les décompositions en facteurs irréductibles de P_2, Q_2, P_3, Q_3 ne posent pas de problèmes.

$$P_2 = 2X \qquad Q_2 = (1-X)(1+X) \qquad P_3 = X(\sqrt{3}-X)(\sqrt{3}+X) \qquad Q_3 = (1-X\sqrt{3})(1+X\sqrt{3})$$

La factorisation de P_4 est évidente. Les racines de $1-6X+X^2$ sont $3-2\sqrt{2}$ et $3+2\sqrt{2}$. Les racines de Q_4 sont donc les racines carrées de ces derniers réels. Puisque $3-2\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^2$ et $3+2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2$, les racines de Q_4 sont $1-\sqrt{2}$, $-1+\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$, $-1-\sqrt{2}$. Finalement,

$$P_4 = 4X(1-X)(1+X) \qquad Q_4 = (X+1+\sqrt{2})(X-1+\sqrt{2})(X+1-\sqrt{2})(X-1-\sqrt{2})$$

3. La décomposition en éléments simples de R_2 est directe :

$$R_2 = \frac{2X}{(1-X)(1+X)} = \frac{(X+1)-(1-X)}{(1-X)(1+X)} = \frac{1}{1-X} - \frac{1}{1+X}$$

Une division euclidienne montre que la partie entière de R_3 est $\frac{1}{3}X$. La méthode usuelle montre que

$$R_3 = \frac{1}{3}X - \frac{4}{9\left(X-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} - \frac{4}{9\left(X+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

La décomposition en éléments simples de R_4 est de la forme

$$R_4 = \frac{\alpha}{X-1-\sqrt{2}} + \frac{\beta}{X-1+\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{X+1-\sqrt{2}} + \frac{\delta}{X+1+\sqrt{2}}$$

avec

$$\alpha = \frac{P_4(1+\sqrt{2})}{Q_4'(1+\sqrt{2})} \qquad \beta = \frac{P_4(1-\sqrt{2})}{Q_4'(1-\sqrt{2})} \qquad \gamma = \frac{P_4(-1+\sqrt{2})}{Q_4'(-1+\sqrt{2})} \qquad \delta = \frac{P_4(-1-\sqrt{2})}{Q_4'(-1-\sqrt{2})}$$

On remarquera pour simplifier les calculs que $\frac{P_4}{Q_4'} = \frac{1-X^2}{X^2-3}$ et on tirera profit du fait que R_4 est impaire. On trouve alors

$$R_4 = \frac{-1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{X-1-\sqrt{2}} + \frac{-1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{X-1+\sqrt{2}} + \frac{-1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{X+1-\sqrt{2}} + \frac{-1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{X+1+\sqrt{2}}$$

Partie II – Etude du cas général

1. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_{n+1} = Q_{n+1} + iP_{n+1} = -XP_n + Q_n + iP_n + iXQ_n = (1+iX)(Q_n + iP_n) = (1+iX)Z_n$$

Puisque $Z_0 = 1$, on montre alors aisément que $Z_{n+1} = (1+iX)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Tout d'abord, $1 + i\tan\alpha = \frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}$ donc $(1+i\tan\alpha)^n = \frac{e^{in\alpha}}{\cos^n\alpha}$. Puisque P_n et Q_n sont à coefficients réels, il s'ensuit que

$$P_n(\tan\alpha) = \operatorname{Im}((1+i\tan\alpha)^n) = \frac{\sin n\alpha}{\cos^n\alpha} \qquad Q_n(\tan\alpha) = \operatorname{Re}((1+i\tan\alpha)^n) = \frac{\cos n\alpha}{\cos^n\alpha}$$

3. D'après la formule du binôme,

$$Z_n = (1+iX)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k X^k = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k}(-1)^k X^{2k} + i \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1}(-1)^k X^{2k+1}$$

donc

$$P_n = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1}(-1)^k X^{2k+1} \qquad Q_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k}(-1)^k X^{2k}$$

4. D'après la question **II.3**, P_n est impair et Q_n est pair.

Remarque. On peut également déterminer la parité de P_n et Q_n sans leurs formes développées. D'une part,

$$\overline{Z}_n = (1-iX)^n = Z_n(-X) = Q_n(-X) + iP_n(-X)$$

D'autre part, puisque P_n et Q_n sont à coefficients réels,

$$\overline{Z}_n = Q_n - iP_n$$

Puisque P_n, Q_n, $P_n(-X)$, $Q_n(-X)$ sont à coefficients réels, $P_n(-X) = -P_n(X)$ et $Q_n(-X) = Q_n(X)$. Autrement dit, P_n est impair et Q_n est pair. ■

La question **II.3** montre également que

- si n est pair, $\deg P_n = n-1$, $\deg Q_n = n$, le coefficient dominant de P_n est $-(-1)^{\frac{n}{2}} n$ et le coefficient dominant de Q_n est $(-1)^{\frac{n}{2}}$;
- si n est impair, $\deg P_n = n$, $\deg Q_n = n-1$, le coefficient dominant de P_n est $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ et le coefficient dominant de Q_n est $(-1)^{\frac{n-1}{2}} n$.

5.
- Supposons n pair.
La question **II.2** montre que les réels $\tan\frac{k\pi}{n}$ pour $k \in \llbracket -\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1 \rrbracket$ sont racines de P_n. La fonction tan étant strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ces $n-1$ réels sont distincts. Puisque $\deg P_n = n-1$, ce sont exactement les racines de P_n et elles sont simples.
La question **II.2** montre que les réels $\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k \in \llbracket -\frac{n}{2}, \frac{n}{2}-1 \rrbracket$ sont racines de Q_n. La fonction tan étant strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ces n réels sont distincts. Puisque $\deg Q_n = n$, ce sont exactement les racines de P_n et elles sont simples.
- Supposons n impair.
La question **II.2** montre que les réels $\tan\frac{k\pi}{n}$ pour $k \in \llbracket -\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2} \rrbracket$ sont racines de P_n. La fonction tan étant strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ces n réels sont distincts. Puisque $\deg P_n = n$, ce sont exactement les racines de P_n et elles sont simples.
La question **II.2** montre que les réels $\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k \in \llbracket -\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}-1 \rrbracket$ sont racines de Q_n. La fonction tan étant strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ces $n-1$ réels sont distincts. Puisque $\deg Q_n = n-1$, ce sont exactement les racines de P_n et elles sont simples.

6. Les questions précédentes montrent que si n est pair

$$\begin{aligned}
P_n &= -(-1)^{\frac{n}{2}} n \prod_{k=-\frac{n}{2}+1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X - \tan\frac{k\pi}{n}\right) \\
&= -(-1)^{\frac{n}{2}} nX \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X - \tan\frac{k\pi}{n}\right)\left(X + \tan\frac{k\pi}{n}\right) \\
Q_n &= (-1)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}-1} \left(X - \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \\
&= (-1)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(X - \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\left(X + \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)
\end{aligned}$$

et que si n est impair

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_n &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \left(\mathrm{X} - \tan\frac{k\pi}{n}\right) \\
&= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{X} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\mathrm{X} - \tan\frac{k\pi}{n}\right)\left(\mathrm{X} + \tan\frac{k\pi}{n}\right) \\
\mathrm{Q}_n &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \prod_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}-1} \left(\mathrm{X} - \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \\
&= (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \left(\mathrm{X} - \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\left(\mathrm{X} + \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)
\end{aligned}$$

7. Lorsque n est pair, $\deg \mathrm{P}_n < \deg \mathrm{Q}_n$ donc la partie entière de R_n est nulle.
Lorsque n est impair, $\deg \mathrm{P}_n = \deg \mathrm{Q}_n + 1$ donc la partie entière de R_n est de degré 1. Puisque P_n et Q_n sont respectivement impair et pair, R_n est impaire. L'unicité de la décomposition en éléments simples nous apprend donc que la partie entière de R_n est également impaire. Elle est donc de la forme $a\mathrm{X}$ où a est le quotient du coefficient de P_n par le coefficient dominant de Q_n. Ainsi $a = \frac{1}{n}$. La partie entière de la fraction rationnelle R_n est donc $\frac{1}{n}\mathrm{X}$.

8. D'une part,

$$\mathrm{Z}_n' = ni(1+i\mathrm{X})^{n-1} = ni\mathrm{Z}_{n-1} = -n\mathrm{P}_{n-1} + ni\mathrm{Q}_{n-1}$$

D'autre part,

$$\mathrm{Z}_n' = \mathrm{Q}_n' + i\mathrm{P}_n'$$

Puisque P_{n-1}, Q_{n-1}, P_n', Q_n' sont à coefficients réels, on en déduit que $\mathrm{Q}_n' = -n\mathrm{P}_{n-1}$ et $\mathrm{P}_n' = n\mathrm{Q}_{n-1}$.

9. Supposons n pair. Puisque R_n est impaire, la décomposition en éléments simples de R_n est de la forme

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\lambda_k}{\mathrm{X} - \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}} + \frac{\lambda_k}{\mathrm{X} + \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

avec

$$\lambda_k = \frac{\mathrm{P}_n\left(\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{\mathrm{Q}_n'\left(\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{\mathrm{P}_n\left(\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{\mathrm{P}_{n-1}\left(\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$$

D'après la question **II.2**, on obtient après simplification

$$\lambda_k = -\frac{1}{n\cos^2\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

Supposons n impair. Puisque R_n est impaire, la décomposition en éléments simples de R_n est de la forme

$$\mathrm{R}_n = \frac{1}{n}\mathrm{X} + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{\lambda_k}{\mathrm{X} - \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}} + \frac{\lambda_k}{\mathrm{X} + \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

avec

$$\lambda_k = -\frac{1}{n\cos^2\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

10. ► Supposons n pair.
Les racines non nulles de P_n autrement dit de $\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{X}}$ sont les $\tan\frac{k\pi}{n}$ et les $-\tan\frac{k\pi}{n}$ pour $k \in [\![1, \frac{n}{2}-1]\!]$. Le produit de ces racines vaut donc

$$(-1)^{\frac{n}{2}-1} \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \tan^2\frac{k\pi}{n} = (-1)^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{A}_n^2$$

Par ailleurs,

$$\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{X}} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{2k+1}(-1)^k \mathrm{X}^{2k}$$

donc le produit des racines de $\frac{P_n}{X}$ est aussi

$$(-1)^{n-2}\frac{\binom{n}{1}(-1)^0}{\binom{n}{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}-1}} = (-1)^{\frac{n}{2}-1}$$

Ainsi $A_n^2 = 1$. Puisque $\tan\frac{k\pi}{n} > 0$ pour $k \in \llbracket 1, \frac{n}{2}-1 \rrbracket$, on a donc $A_n > 0$ de sorte que $A_n = 1$.
Les racines de Q_n sont les $\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ et les $-\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k \in \llbracket 0, \frac{n}{2}-1 \rrbracket$. Le produit de ces racines vaut donc

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\tan^2\frac{(2k+1)\pi}{2n} = (-1)^{\frac{n}{2}}B_n^2$$

Par ailleurs,

$$Q_n = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n}{2k}(-1)^k X^{2k}$$

donc le produit des racines de Q_n est aussi

$$(-1)^n\frac{\binom{n}{0}(-1)^0}{\binom{n}{n}(-1)^{\frac{n}{2}}} = (-1)^{\frac{n}{2}}$$

Ainsi $B_n^2 = 1$. Puisque $\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n} > 0$ pour $k \in \llbracket 0, \frac{n}{2}-1 \rrbracket$, on a donc $B_n > 0$ de sorte que $B_n = 1$.
Remarque. On peut aussi remarquer que les tangentes intervenant dans chacun des produits A_n et B_n sont inverses l'une de l'autre deux à deux en vertu de la relation trigonométrique $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)}$. ■

- Supposons n impair.
Les racines non nulles de P_n autrement dit de $\frac{P_n}{X}$ sont les $\tan\frac{k\pi}{n}$ et les $-\tan\frac{k\pi}{n}$ pour $k \in \llbracket 1, \frac{n-1}{2} \rrbracket$. Le produit de ces racines vaut donc

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\tan^2\frac{k\pi}{n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}A_n^2$$

Par ailleurs,

$$\frac{P_n}{X} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1}(-1)^k X^{2k}$$

donc le produit des racines de $\frac{P_n}{X}$ est aussi

$$(-1)^{n-1}\frac{\binom{n}{1}(-1)^0}{\binom{n}{n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}n$$

Ainsi $A_n^2 = n$. Puisque $\tan\frac{k\pi}{n} > 0$ pour $k \in \llbracket 1, \frac{n-1}{2} \rrbracket$, on a donc $A_n > 0$ de sorte que $A_n = \sqrt{n}$.
Les racines de Q_n sont les $\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ et les $-\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k \in \llbracket 0, \frac{n-1}{2}-1 \rrbracket$. Le produit de ces racines vaut donc

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1}\tan^2\frac{(2k+1)\pi}{2n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}B_n^2$$

Par ailleurs,

$$Q_n = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k}(-1)^k X^{2k}$$

donc le produit des racines de Q_n est aussi

$$(-1)^{n-1}\frac{\binom{n}{0}(-1)^0}{\binom{n}{n-1}(-1)^{\frac{n-1}{2}}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n}$$

Ainsi $B_n^2 = \frac{1}{n}$. Puisque $\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n} > 0$ pour $k \in \llbracket 0, \frac{n-1}{2}-1 \rrbracket$, on a donc $B_n > 0$ de sorte que $B_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
Remarque. A nouveau, en utilisant la relation trigonométrique $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)}$, on peut montrer que $B_n = \frac{1}{A_n}$. ■