

## Produits scalaires

### Exercice 1 ★★

Prouver que les applications suivantes sont des produits scalaires sur E :

1. pour  $n \in \mathbb{N}$ , sur  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , pour  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  deux à deux distincts,

$$\Psi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k) ;$$

2. pour  $n \in \mathbb{N}$ , sur  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , pour  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,

$$(P, Q) \mapsto \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k) ;$$

3. pour  $n \in \mathbb{N}$ , sur  $E = \mathbb{R}_n[X]$ ,

$$(P, Q) \mapsto \langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt ;$$

4. pour  $n \in \mathbb{N}$ , sur  $E = M_n(\mathbb{R})$ ,

$$\langle A|B \rangle = \text{tr}(A^T B) ;$$

5. sur  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ ,

$$(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt ;$$

6. sur  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ ,

$$(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt.$$

## Inégalités

### Exercice 2 ★

### Un espace fonctionnel

On définit sur l'espace vectoriel réel E des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\langle f|g \rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

- Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
- Etablir que  $\forall f \in E$ ,

$$\left(f(1) + \int_0^1 f'(t)dt\right)^2 \leq 2\left(f^2(1) + \int_0^1 f'^2(t)dt\right)$$

### Exercice 3 ★★

### Inégalité de Ptolémée

Soit E un espace euclidien. On pose  $f : E \setminus \{0\} \rightarrow \frac{E \setminus \{0\}}{\|x\|^2}$ .

- Montrer que pour  $x, y \in E \setminus \{0\}$ ,  $\|f(x) - f(y)\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|}$ .
- Soient  $a, b, c, d \in E$ . Montrer que

$$\|a - c\|\|b - d\| \leq \|a - b\|\|c - d\| + \|b - c\|\|a - d\|.$$

### Exercice 4 ★★★

### Inégalité d'Hadamard

Soit E un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et de base orthonormée  $\mathcal{B}$ . Soient  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de E. Montrer que

$$|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|$$

### Exercice 5 ★

Soit  $n \geq 1$ . Prouver que

$$\left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right]^2 \leq n \left[1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right].$$

**Exercice 6 ★****Immédiat**

Soient  $n \geq 1$  et  $x_1, \dots, x_n > 0$ . Prouver que

$$\left[ \sum_{k=1}^n x_k \right] \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right] \geq n^2.$$

**Exercice 7 ★★****Technique**

Soit  $n \geq 2$ . Prouver que

$$\frac{2}{n(n-1)} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2}.$$

**Exercice 8**

On considère l'ensemble  $E$  des fonctions continues et strictement positives sur  $[a, b]$ . Montrer que :

$$\inf_{f \in E} \left( \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \right)$$

existe et est atteint.

**Exercice 9**

Soit  $f$  une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On suppose  $f(a) = 0$ . Montrer que

$$\int_a^b f^2(u) du \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u) du.$$

**Bases orthonormales****Exercice 10 ★★****Produit mixte et produit vectoriel**

Soit  $E$  un espace euclidien orienté de dimension  $n \geq 1$ .

1. Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases orthonormées directes de  $E$ . Montrer que  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$ .
2. En déduire que  $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$ .
3. Soient  $x_1, \dots, x_{n-1}$   $n-1$  vecteurs de  $E$ . Montrer que l'application

$$x \in E \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$$

est une forme linéaire sur  $E$ .

4. En déduire qu'il existe un unique vecteur  $u \in E$  tel que

$$\forall x \in E, \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \langle u, x \rangle$$

On appelle  $u$  le produit vectoriel des vecteurs  $x_1, \dots, x_{n-1}$  et on note

$$u = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$$

5. Montrer que l'application

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \in E^{n-1} \mapsto x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$$

est une application  $n-1$ -linéaire alternée.

**Exercice 11 ★★★**

1. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Montrer que l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{R}_n[X]^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$

est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2. Donner sans calcul une base orthonormale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Exercice 12 ★★★**

Soient  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $e_1, \dots, e_n$  des vecteurs non nuls de  $E$  tels que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2$$

1. Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle \langle y | e_i \rangle.$$

2. En déduire que

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle e_i.$$

3. Etablir que  $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$  est une base orthonormée de  $E$ .

**Exercice 13 ★****Retour aux polynômes**

Sur l'espace vectoriel réel  $E = \mathbb{R}_2[X]$ , on définit

$$\langle P | Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Trouver une base orthonormée de  $E$  par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt appliqué à la base canonique de  $E$ .
3. Trouver une *autre* base orthonormée de  $E$  en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange.

**Sous-espaces orthogonaux****Exercice 14 ★****Posé à Centrale**

Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . Pour tout  $(f, g) \in E^2$ , on pose

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

1. Prouver  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .
2. On pose

$$F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}.$$

- a. Soit  $f \in F^\perp$ . Montrer que  $f^2 \in F^\perp$ .
- b. Prouver que  $F^\perp = \{0\}$ .

3.  $E$  est-il de dimension finie ?

**Exercice 15 ★★**

Montrer que  $s : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^\top \end{cases}$  est une symétrie orthogonale pour le produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  pour le produit scalaire défini par  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$  pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 16 ★★**

Soit  $E$  un espace euclidien et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$ .

1. Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormale de  $E$ . Montrer que la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est symétrique.
2. Montrer que  $\text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp$ .

**Exercice 17 ★★**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel  $E$ .

1. Montrer que  $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$  et que, si  $F$  et  $G$  sont de dimension finie,  $G^\perp \subset F^\perp \implies F \subset G$ .
2. Montrer que  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ .
3. Montrer que  $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$  et que, si  $E$  est de dimension finie,  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ .

## Projecteurs orthogonaux

### Exercice 18 ★★

Soit  $u$  un vecteur unitaire d'un espace euclidien  $E$ . On note  $U$  le vecteur colonne représentant  $u$  dans une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur  $\text{vect}(u)$  dans  $\mathcal{B}$ .

### Exercice 19 ★★

#### Caractérisations des projections orthogonales

Soient  $E$  un espace euclidien et  $p$  une projection de  $E$ . Etablir l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1.  $p$  est orthogonale ;
2.  $\forall x, y \in E, \langle p(x)|y \rangle = \langle x|p(y) \rangle$  ;
3.  $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ .

### Exercice 20 ★

#### Calcul d'une projection orthogonale

On munit  $\mathbb{R}^4$  de son produit scalaire usuel. Donner la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel  $F$  d'équations,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

## Optimisation

### Exercice 21 ★

#### Un calcul de distance

Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$  muni de sa structure euclidienne canonique (ie la base canonique est orthonormée). On note  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  des polynômes s'annulant en 1.

1. Déterminer une base de  $F$ .
2. Calculer  $\delta = \inf_{P \in F} \|X - P\|$ .

### Exercice 22 ★★★

Calculer le minimum de  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$(a, b) \mapsto \int_0^\pi (\sin x - ax^2 - bx)^2 dx$$

### Exercice 23 ★★★

Soient  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . On munit  $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ) du produit scalaire  $(X, Y) \mapsto X^\top Y$ . On se donne  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ . On pose  $E = \{\|AX - B\|^2, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$  et  $K = \inf E$ .

1. Justifier l'existence de  $K$ .
2. On considère le système linéaire  $(\mathcal{S}) : AX = B$ . On appelle *pseudo-solution* de  $\mathcal{S}$  tout élément  $Y$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que  $\|AY - B\|^2 = K$ . Montrer que si  $(\mathcal{S})$  admet une solution, les pseudo-solutions de  $(\mathcal{S})$  sont les solutions de  $(\mathcal{S})$ .
3. On associe à  $(\mathcal{S})$  le système  $(\mathcal{S}')$  :  $A^\top AX = A^\top B$ . Montrer qu'un élément  $X$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est pseudo-solution de  $(\mathcal{S})$  si et seulement si il est solution de  $(\mathcal{S}')$ .
4. Montrer que  $\text{rg } A^\top A = \text{rg } A$ .
5. Montrer que si  $\text{rg } A = n$ ,  $(\mathcal{S})$  admet une unique pseudo-solution.

### Exercice 24 ★★★

ENS MP 2010

Soient  $E$  un espace euclidien et  $x_1, \dots, x_p$  des vecteurs de  $E$ . Pour  $x \in E$ , on pose  $f(x) = \sum_{i=1}^p \|x - x_i\|^2$ . Montrer que  $f$  atteint son minimum en un unique point que l'on précisera.

### Exercice 25 ★★★

Soient  $E$  un espace euclidien et  $x_1, \dots, x_p$  des vecteurs de  $E$ . Pour  $x \in E$ , on pose  $f(x) = \sum_{i=1}^p \|x - x_i\|^2$ . Montrer que  $f$  atteint son minimum en  $m = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i$ .

## Automorphismes orthogonaux

### Exercice 26 ★

### Un premier exemple

Soient  $E$  un espace euclidien orienté de dimension trois muni d'une base orthonormée directe

$$\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

On note  $f$  la rotation d'axe  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ . Calculer la matrice de  $f$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .

### Exercice 27 ★

### Calculs dans $O_3(\mathbb{R})$

Soient  $E$  un plan vectoriel euclidien orienté,  $r$  une rotation de  $E$  et  $s$  une réflexion. Calculer  $s \circ r \circ s$  et  $r \circ s \circ r$ .

### Exercice 28 ★

Déterminer la nature et les caractéristiques de l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique vaut

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 29 ★★★

Soient  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Prouver l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1.  $\langle x|y \rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x)|u(y) \rangle = 0$ ;
2.  $\exists k \geq 0, \forall x \in E, \|u(x)\| = k\|x\|$ ;
3.  $u$  est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

### Exercice 30 ★★★

Soient  $H$  et  $K$  deux hyperplans d'un espace euclidien  $E$ . On note  $s_H$  et  $s_K$  les symétries orthogonales par rapport à  $H$  et  $K$ . Montrer que  $s_H$  et  $s_K$  commutent si et seulement si  $H = K$  ou  $H^\perp \subset K$ .

### Exercice 31 ★★

Soit  $E$  un espace euclidien orienté de dimension 3.

1. Trouver les  $f \in \mathcal{L}(E)$  tels que

$$\forall u, v \in E, f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$$

2. Trouver les  $f \in \mathcal{L}(E)$  tels que

$$\forall u, v \in E, f(u \wedge v) = -f(u) \wedge f(v)$$

### Exercice 32 ★★

Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation  $x + 2y - 3z = 0$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

### Exercice 33 ★★★

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 2.

1. On sait que la matrice d'une réflexion de  $E$  dans une base orthonormée est de la forme  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ . Quelle est l'interprétation géométrique de  $\theta$  ?
2. Déterminer une condition portant sur l'angle entre leurs axes pour que la somme de deux réflexions soit encore une réflexion.

### Exercice 34 ★★

### Petites Mines 2009

Soit  $u$  un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien  $E$ . On pose  $v = \text{Id}_E - u$ .

1. Montrer que  $\text{Im } v$  et  $\text{Ker } v$  sont orthogonaux et supplémentaires.
2. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u^k$  est un automorphisme orthogonal.

**Exercice 35 ★★**

Soit  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  engendré par la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  où

$$e_1 : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \quad e_2 : t \mapsto \cos(2\pi t) \quad e_3 : t \mapsto \sin(2\pi t)$$

1. Montrer que  $\Phi : (f, g) \mapsto 2 \int_0^1 f(t)g(t) dt$  est un produit scalaire sur  $E$ .
2. Montrer que  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base orthonormée de  $E$ .
3. Pour tout réel  $x$ , on définit l'application  $\tau_x$  qui à tout élément  $f$  de  $E$  associe  $g$  tel que
 
$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = f(x - t)$$
  - a. Montrer que  $\tau_x$  est un endomorphisme de  $E$ . Donner sa matrice relativement à  $\mathcal{B}$ .
  - b. Montrer que  $\tau_x$  est un automorphisme orthogonal de  $E$ .
  - c. Caractériser géométriquement  $\tau_x$ .

**Exercice 36 ★★★**

Soit  $E$  un espace euclidien et  $f$  une application de  $E$  dans  $E$  (non supposée linéaire) telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

Montrer que  $f$  est la composée d'une translation et d'un automorphisme orthogonal.

**Exercice 37 ★**

Soient  $E$  un espace euclidien et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On note  $A$  la matrice de  $f$  dans une base orthonormale  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Montrer que  $f$  est une symétrie orthogonale si et seulement si  $A$  est une matrice orthogonale symétrique.

**Matrices orthogonales****Exercice 38 ★★**

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}.$$

**Exercice 39 ★★★**

Soit  $O = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$  une matrice orthogonale réelle de taille  $n$  où  $A$  et  $D$  sont deux blocs carrés de tailles respectives  $p$  et  $q$ . Montrer que  $(\det A)^2 = (\det D)^2$ .

**Exercice 40 ★**

Soient  $A$  et  $B$  les matrices, dans deux bases orthonormales, d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Montrer que  $\text{tr}(A^T A) = \text{tr}(B^T B)$ .

**Exercice 41 ★★**

1. Soit  $X$  une matrice colonne réelle de taille  $n$ . Montrer que  $X^T X \in \mathbb{R}_+$  et que  $X^T X = 0$  implique  $X = 0$ .
2. Soit  $M$  une matrice antisymétrique réelle de taille  $n$ . Montrer que  $I_n + M$  est inversible.
3. On pose  $A = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$ . Montrer que  $A$  est orthogonale.

**Exercice 42 ★★★**

Soient  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A = \text{com}(A)$  si et seulement si  $A = 0$  ou  $A \in \text{SO}(n)$ .

**Familles de vecteurs**

### Exercice 43 ★★★

### Déterminants de Gram

Soit  $E$  un espace euclidien. À une famille  $(x_1, \dots, x_p)$  de  $p$  vecteurs de  $E$ , on associe la matrice  $G_p(x_1, \dots, x_p) = ((x_i | x_j))_{1 \leq i, j \leq p}$ .

1. Montrer que la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est liée si et seulement si  $\det G_p(x_1, \dots, x_p) = 0$ .
2. On suppose maintenant que la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est libre et on note  $F = \text{vect}(x_1, \dots, x_p)$ .
  - a. Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base orthonormée de  $F$  et  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$ . Montrer que  $G_p(x_1, \dots, x_p) = A^T A$ .
  - b. En déduire que  $\det G_p(x_1, \dots, x_p) > 0$ .
3. Soit  $x \in E$ . On note  $\pi$  la projection orthogonale sur  $F$ .
  - a. Montrer que  $\det G_{p+1}(x, x_1, \dots, x_p) = \det G_p(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p)$ .
  - b. Montrer que

$$d(x, F)^2 = \frac{\det G_{p+1}(x, x_1, \dots, x_p)}{\det G_p(x_1, \dots, x_p)}$$

### Exercice 44 ★★★

Soient  $E$  un espace euclidien,  $p$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $x_1, \dots, x_p$  des vecteurs de  $E$  tels que

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle < 0$$

1. Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$  des réels tels que  $\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i x_i = 0$ . On pose  $I = \{i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \mid \alpha_i > 0\}$  et  $J = \{j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \mid \alpha_j < 0\}$ . En considérant  $u = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$  et  $v = \sum_{j \in J} \alpha_j x_j$ , montrer que l'un des ensembles  $I$  ou  $J$  est vide (on convient qu'une somme indexée sur l'ensemble vide est nulle).
2. Montrer que  $I$  et  $J$  sont vides.
3. En déduire que la famille  $(x_1, \dots, x_{p-1})$  est libre.

### Exercice 45 ★★★

### Déterminants de Gram

Soit  $E$  un espace euclidien. À toute famille  $(x_1, \dots, x_p)$  de  $p$  vecteurs de  $E$ , on associe la matrice  $G(x_1, \dots, x_p) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p}$ .

1. Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $F = \text{vect}(x_1, \dots, x_p)$ . On note  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$ . Montrer que  $G(x_1, \dots, x_p) = A^T A$ .
2. En déduire que  $\det G(x_1, \dots, x_p) \geq 0$  et que  $(x_1, \dots, x_p)$  est liée si et seulement si  $\det G(x_1, \dots, x_p) = 0$ .
3. On se donne  $x \in E$ . Montrer que

$$\det G(x_1, \dots, x_p, x) = d(x, F)^2 \det G(x_1, \dots, x_p)$$

### Exercice 46 ★★★

On pose  $Q_n = (1 - X^2)^n = (1 + X)^n (1 - X)^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ . On notera  $\varphi(P, Q) = \langle P, Q \rangle$  par la suite.
2. Soit  $n$  et  $k$  deux entiers tels que  $0 \leq k < n$ . Montrer que  $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$ .
3. On pose  $P_n = Q_n^{(n)}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

## Endomorphismes remarquables

### Exercice 47 ★★

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 2$ . Une application  $u : E \rightarrow E$  est dite *antisymétrique* si

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, u(y) \rangle + \langle y, u(x) \rangle = 0$$

On note  $A(E)$  l'ensemble des applications antisymétriques de  $E$ .

**REMARQUE.** Rien à voir avec les applications *multilinéaires* antisymétriques !

1. Soit  $u \in A(E)$ . Montrer que  $u$  est linéaire.
2. Soit  $u : E \rightarrow E$ . Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
  - (i)  $u$  est linéaire et  $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$ ;
  - (ii)  $u$  est antisymétrique ;
  - (iii)  $u$  est linéaire et sa matrice dans une base orthonormée est antisymétrique.
3. Montrer que  $A(E)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et déterminer sa dimension.
4. Soit  $u \in A(E)$ . Montrer que  $\text{Im } u$  est l'orthogonal de  $\text{Ker } u$ .
5. Montrer que si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$  alors  $F^\perp$  est également stable par  $u$ .

### Exercice 48 ★★

Soient  $E$  un espace euclidien,  $p$  une projection orthogonale et  $\mathcal{B}$  une base orthonormale de  $E$ . Montrer que la matrice  $A$  de  $p$  dans la base  $\mathcal{B}$  est symétrique.

### Exercice 49 ★★★

Montrer que le rang d'une matrice antisymétrique réelle est pair.

### Exercice 50 ★★

Soient  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$\forall x \in E, \langle u(x)|x \rangle = 0.$$

Montrer que

$$(\text{Ker}(u))^\perp = \text{Im}(u).$$

### Exercice 51 ★★

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$ ,  $n$  étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit  $(a, b)$  une famille libre de  $E$ . Soit  $f$  l'application

$$x \mapsto \langle a|x \rangle b + \langle b|x \rangle a.$$

1. Montrer que  $f \in \mathcal{L}(E)$  et que

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x)|y \rangle = \langle x|f(y) \rangle.$$

2. Déterminer le noyau et le rang de  $f$ .

3. On pose  $F = \text{Im}(f)$ .

- a. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $f$  et en donner une base.
- b. Déterminer la matrice de l'endomorphisme  $g$  induit par  $f$  sur  $F$  dans cette base.

### Exercice 52 ★★★

### Endomorphismes 1-lipschitziens

Soient  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Etablir que

$$E = \text{Ker}(u - id_E) \oplus \text{Im}(u - id_E).$$

## Divers



### Exercice 53 ★★★

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On travaille dans l'espace des matrices  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que l'application  $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Que peut-on dire de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a  $|\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|$ .
3.
  - a. Quel est l'orthogonal de l'espace  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  des matrices symétriques ?
  - b. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Exprimer la distance de  $A$  à  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  en fonction des coefficients de  $A$  ?
4. Soit  $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|UA\| = \|AU\| = \|A\|$ .
5. Montrer que pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

### Exercice 54 ★★★

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $u_1, \dots, u_{n+1}$  des vecteurs non nuls de  $E$  faisant un angle constant  $\alpha_n$  (non nul) deux à deux. Que vaut  $\alpha_n$  ?

### Exercice 55 ★★★

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\text{rg}(A^T A) = \text{rg}(AA^T) = \text{rg } A$ .

### Exercice 56 ★★★

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$  en posant

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

$$\text{pour } P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \text{ et } Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n.$$

2. On pose  $F = \text{vect}(1 + X^n, n \in \mathbb{N}^*)$ . Montrer que  $F$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}[X]$ .
3. Montrer que  $F^\perp = \{0\}$ . Conclusion ?