

DEVOIR À LA MAISON N°02

A rendre le mercredi 07/10

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Solution 1

1. On formule l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\mathcal{P}_n : \forall (m, p) \in \mathbb{N}^2, \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

Initialisation : Soit $(m, p) \in \mathbb{N}^2$.

$$\sum_{k=0}^p \binom{0}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{0}{0} \binom{m}{p} = \binom{m}{p}$$

car $\binom{0}{k} = 0$ lorsque $k > 0$ avec les conventions adoptées. Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Supposons \mathcal{P}_n vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit $(m, p) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \binom{n+1}{k} \binom{m}{p-k} &= \sum_{k=0}^p \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \binom{m}{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} + \sum_{k=0}^p \binom{n}{k-1} \binom{m}{p-k} \\ &= \binom{m+n}{p} + \sum_{k=1}^p \binom{n}{k-1} \binom{m}{p-k} \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n \text{ et car } \binom{n}{-1} = 0 \text{ par convention} \\ &= \binom{m+n}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \binom{m}{p-1-k} \quad \text{par changement d'indice} \\ &= \binom{m+n}{p} + \binom{m+n}{p-1} \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n \\ &= \binom{m+n+1}{p} \end{aligned}$$

Conclusion : \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Lorsque $p = m = n$, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Par symétrie des coefficients binomiaux, on obtient le résultat voulu.

3. En effectuant le changement d'indice $\ell = n - k$, on obtient

$$S_n = \sum_{\ell=0}^n (n-\ell) \binom{n}{n-\ell}^2 = n \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell}^2 - \sum_{\ell=0}^n \ell \binom{n}{\ell}^2 = n \binom{2n}{n} - S_n$$

$$\text{Ainsi } S_n = \frac{1}{2} n \binom{2n}{n}.$$

4. Supposons n impair. La question précédente montre $2S_n = n\binom{2n}{n}$. Comme n est impair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$. Ainsi $2S_n = (2p + 1)\binom{2n}{n}$ ou encore $\binom{2n}{n} = 2(S_n - p\binom{2n}{n})$. Comme S_n et $\binom{2n}{n}$ sont entiers, $\binom{2n}{n}$ est pair.

Solution 2

$$\begin{aligned}
 P_n &= \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \\
 &= \frac{\prod_{k=1}^n 2k}{\prod_{k=1}^n (2k-1)} \\
 &= \frac{(\prod_{k=1}^n 2k)^2}{(\prod_{k=1}^n 2k)(\prod_{k=1}^n (2k-1))} \\
 &= \frac{(2^n \prod_{k=1}^n k)^2}{\prod_{k=1}^{2n} k} \\
 &= \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \\
 &= \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!}
 \end{aligned}$$

Solution 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \sin(3x) &= \sin(x + 2x) \\
 &= \sin(x) \cos(2x) + \sin(2x) \cos(x) \\
 &= \sin(x)(1 - 2\sin^2(x)) + 2\sin(x) \cos^2(x) \\
 &= \sin(x)(1 - 2\sin^2(x)) + 2\sin(x)(1 - \sin^2(x)) \\
 &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x)
 \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente,

$$u_n = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^n 3^{k+1} \sin\left(\frac{x}{3^k}\right) - 3^k \sin\left(\frac{x}{3^{k-1}}\right)$$

Après télescopage

$$u_n = \frac{1}{4} \left(3^{n+1} \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) - \sin(3x) \right)$$

3. On sait que $\sin\left(\frac{x}{3^n}\right) = \frac{x}{3^n} + o\left(\frac{1}{3^n}\right)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{n+1} \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) = 3x$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3x - \sin(3x)}{4}$$