DEVOIR À LA MAISON N°14 : CORRIGÉ

Problème 1 — Division selon les puissances croissantes et applications

Partie I – Division selon les puissances croissantes

1. Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $B(0) \neq 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $Q_1, R_1, Q_2, R_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$A = BQ_1 + X^{p+1}R_1 = BQ_2 + X^{p+1}R_2 \qquad \deg Q_1 \leqslant p \qquad \deg Q_2 \leqslant p$$

On a donc $B(Q_1 - Q_2) = X^{p+1}(R_2 - R_1)$. Puisque 0 n'est pas racine de B, X n'est pas un facteur irréductible de B. Puisque le seul facteur irréductible de X^{p+1} est X, B et X^{p+1} n'ont aucun facteur irréductible commun : ils sont donc premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, X^{p+1} divise $Q_1 - Q_2$. Or $\deg(Q_1 - Q_2) \leqslant p$ donc $Q_1 - Q_2 = 0$ i.e. $Q_1 = Q_2$. Ensuite, $X^{p+1}(R_2 - R_1) = 0$ puis $R_1 = R_2$ par intégrité.

2. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $B(0) \neq 0$. On fait l'hypothèse de récurrence suivante :

$\mathrm{HR}(p)$: il existe $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + X^{p+1}R$ et $\deg Q \leqslant p$.

Initialisation : Posons $Q = \frac{A(0)}{B(0)}$. Alors $A - BQ$ admet 0 pour racine : on peut donc le factoriser par X. Il existe alors $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A - BQ = XR$ i.e. $A = BQ + XR$. On a bien $\deg Q \leqslant 0$.
Hérédité : Supposons $\mathrm{HR}(p)$ vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}$. Il existe donc $(\tilde{Q}, \tilde{R}) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = B\tilde{Q} + X^{p+1}\tilde{R}$ et $\deg \tilde{Q} \leqslant p$. Mais en raisonnant comme dans l'initialisation, on montre qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\tilde{R} = \lambda B + XR$. On a alors $A = BQ + X^{p+2}R$ en posant $Q = \tilde{Q} + \lambda X^{p+1}$. Comme $\deg \tilde{Q} \leqslant p$, $\deg Q \leqslant p + 1$.
Conclusion : Par récurrence, $\mathrm{HR}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

3.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & 2 & - & X & + & X^2 & - & X^3 & & & 1-2X+X^2 \\ \cline{11-11}
\ominus & 2 & - & 4X & + & 2X^2 & & & & & 2+3X+5X^2 \\ \cline{2-8}
 & & & 3X & - & X^2 & - & X^3 & & & \\
\ominus & & & 3X & - & 6X^2 & + & 3X^3 & & & \\ \cline{4-8}
 & & & & & 5X^2 & - & 4X^3 & & & \\
\ominus & & & & & 5X^2 & - & 10X^3 & + & 5X^4 & \\ \cline{6-10}
 & & & & & & & 6X^3 & - & 5X^4 &
\end{array}$$

Le quotient est donc $2 + 3X + 5X^2$ et le reste est $6 - 5X$.

Partie II – Application aux développements limités

1. Si on note R le reste de la division selon les puissances croissantes de A par B à l'ordre p, on a $A - BQ = X^{p+1}R$. Comme R est continue en 0, elle est bornée au voisinage de 0 et donc $A(x) - B(x)Q(x) \underset{x \to 0}{=} \mathcal{O}(x^{p+1})$ et a fortiori $A(x) - B(x)Q(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^p)$. Comme B est continue et non nulle en 0, $\dfrac{1}{B}$ est continue et donc bornée au voisinage de 0. On en déduit que $\dfrac{A(x) - B(x)Q(x)}{B(x)} \underset{x \to 0}{=} o(x^p)$ i.e. $\dfrac{A(x)}{B(x)} \underset{x \to 0}{=} Q(x) + o(x^p)$.

2. On note à nouveau R le reste de la division selon les puissances croissantes de A par B à l'ordre p. Pour x au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} f(x)-g(x)Q(x) &= A(x)-B(x)Q(x)+(f(x)-A(x))-(g(x)-B(x))Q(x) \\ &= x^{p+1}R(x)+(f(x)-A(x))-(g(x)-B(x))Q(x) \end{aligned}$$

On prouve comme à la question précédente que $x^{p+1}R(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$. De plus, $f(x)-A(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$. Enfin, $g(x)-B(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$ et comme Q est continue et donc bornée au voisinage de 0, $(g(x)-B(x))Q(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$. On a donc $f(x)-g(x)Q(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$. Puisque $g(x) \underset{x\to 0}{=} B(x)+o(x^p)$, g admet $B(0)\neq 0$ pour limite en 0, de sorte que $\dfrac{1}{g}$ est bornée au voisinage de 0. Par conséquent, $\dfrac{f(x)-g(x)Q(x)}{g(x)} \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$ i.e. $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to 0}{=} Q(x)+o(x^p)$.

3. On a $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$ et $\exp(x) \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$. On effectue donc la division selon les puissances croissantes de $1-\frac{X^2}{2}+\frac{X^4}{24}$ par $1+X+\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{6}+\frac{X^4}{24}$ à l'ordre 4.

$$\begin{array}{c|cccccccccc|l}
 & 1 & & & - & \frac{X^2}{2} & & & + & \frac{X^4}{24} & & 1+X+\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{6}+\frac{X^4}{24} \\ \cline{12-12}
\ominus & 1 & + & X & + & \frac{X^2}{2} & + & \frac{X^3}{6} & + & \frac{X^4}{24} & & 1-X+\frac{X^3}{3}-\frac{X^4}{6} \\ \cline{2-10}
 & & - & X & - & X^2 & - & \frac{X^3}{6} & + & & & \\
\ominus & & - & X & - & X^2 & - & \frac{X^3}{2} & - & \frac{X^4}{6} & & \\ \cline{3-10}
 & & & & & & & \frac{X^3}{3} & + & \frac{X^4}{6} & & \\
\ominus & & & & & & & \frac{X^3}{3} & + & \frac{X^4}{3} & & \\ \cline{8-10}
 & & & & & & & & - & \frac{X^4}{6} & &
\end{array}$$

On a volontairement omis les puissances strictement supérieures à 5 dans les restes car elles n'interviennent pas dans le calcul du quotient qui est de degré au plus 4. D'après la question précédente, on a donc

$$\frac{\cos x}{\exp x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+o(x^4)$$

Partie III – Décomposition en éléments simples

1. On effectue la division selon les puissances croissantes de X^3-1 par $X+1$.

$$\begin{array}{c|cccccccccc|l}
 & - & 1 & & & & & + & X^3 & & & 1+X \\ \cline{12-12}
\ominus & - & 1 & - & X & & & & & & & -1+X-X^2+2X^3 \\ \cline{2-9}
 & & & & X & & & + & X^3 & & & \\
\ominus & & & & X & + & X^2 & & & & & \\ \cline{5-9}
 & & & & & - & X^2 & + & X^3 & & & \\
\ominus & & & & & - & X^2 & - & X^3 & & & \\ \cline{6-9}
 & & & & & & & & 2X^3 & & & \\
\ominus & & & & & & & & 2X^3 & + & 2X^4 & \\ \cline{9-11}
 & & & & & & & & & - & 2X^4 &
\end{array}$$

Ainsi $X^3-1=(X+1)(2X^3-X^2+X-1)-2X^4$. On en déduit que

$$\frac{X^3-1}{X^4(X+1)}=\frac{2}{X}-\frac{1}{X^2}+\frac{1}{X^3}-\frac{1}{X^4}-\frac{2}{X+1}$$

ce qui est bien la décomposition en éléments simples de $\frac{X^3-1}{X^4(X+1)}$.

2. Posons $\mathrm{F} = \dfrac{X^2+1}{(X-1)^4(X+1)^3}$ et

$$\mathrm{G} = \mathrm{F}(X+1) = \frac{X^2+2X+2}{X^4(X+2)^3} = \frac{X^2+2X+2}{X^4(X^3+6X^2+12X+8)}$$

On effectue la division selon les puissances croissantes de X^2+2X+2 par X^3+2X^2+4X+8 à l'ordre 3.

$$\begin{array}{c|ccccccc|l}
 & 2 & +\;2X & +\;X^2 & & & & & 8+12X+6X^2+X^3 \\ \cline{9-9}
\ominus & 2 & +\;3X & +\;\frac{3}{2}X^2 & +\;\frac{1}{4}X^3 & & & & \frac{1}{4}-\frac{1}{8}X+\frac{1}{8}X^2-\frac{1}{8}X^3 \\ \cline{2-5}
 & & -\;X & -\;\frac{1}{2}X^2 & -\;\frac{1}{4}X^3 & & & & \\
\ominus & & -\;X & -\;\frac{3}{2}X^2 & -\;\frac{3}{4}X^3 & -\;\frac{1}{8}X^4 & & & \\ \cline{3-6}
 & & & X^2 & +\;\frac{1}{2}X^3 & +\;\frac{1}{8}X^4 & & & \\
\ominus & & & X^2 & +\;\frac{3}{2}X^3 & +\;\frac{3}{4}X^4 & +\;\frac{1}{8}X^5 & & \\ \cline{4-7}
 & & & & -\;X^3 & -\;\frac{5}{8}X^4 & -\;\frac{1}{8}X^5 & & \\
\ominus & & & & -\;X^3 & -\;\frac{3}{2}X^4 & -\;\frac{3}{4}X^5 & -\;\frac{1}{8}X^6 & \\ \cline{5-8}
 & & & & & \frac{7}{8}X^4 & +\;\frac{5}{8}X^5 & +\;\frac{1}{8}X^6 &
\end{array}$$

Ainsi

$$X^2+2X+2 = (X^3+2X^2+4X+8)\left(-\frac{1}{8}X^3+\frac{1}{8}X^2-\frac{1}{8}X+\frac{1}{4}\right) + X^4\left(\frac{1}{8}X^2+\frac{5}{8}X+\frac{7}{8}\right)$$

d'où

$$\mathrm{G} = -\frac{1}{8X}+\frac{1}{8X^2}-\frac{1}{8X^3}+\frac{1}{4X^4}+\frac{X^2+5X+7}{8(X+2)^3}$$

On en déduit

$$\mathrm{F} = \mathrm{G}(X-1) = -\frac{1}{8(X-1)}+\frac{1}{8(X-1)^2}-\frac{1}{8(X-1)^3}+\frac{1}{4(X-1)^4}+\frac{X^2+3X+3}{8(X+1)^3}$$

Posons $\tilde{\mathrm{F}} = \dfrac{X^2+3X+3}{8(X+1)^3}$ et $\tilde{\mathrm{G}} = \tilde{\mathrm{F}}(X-1)$. Ainsi

$$\tilde{\mathrm{G}} = \frac{X^2+X+1}{8X^3} = \frac{1}{8X}+\frac{1}{8X^2}+\frac{1}{8X^3}$$

On en déduit

$$\tilde{\mathrm{F}} = \tilde{\mathrm{G}}(X+1) = \frac{1}{8(X+1)}+\frac{1}{8(X+1)^2}+\frac{1}{8(X+1)^3}$$

puis

$$\mathrm{F} = -\frac{1}{8(X-1)}+\frac{1}{8(X-1)^2}-\frac{1}{8(X-1)^3}+\frac{1}{4(X-1)^4}+\frac{1}{8(X+1)}+\frac{1}{8(X+1)^2}+\frac{1}{8(X+1)^3}$$