Devoir à la maison n°05 : corrigé

Solution 1.

1. **a.** sh est continue est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{-\infty} \operatorname{sh} = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \operatorname{sh} = +\infty$. Ainsi sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

   b. ch est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\operatorname{ch}(0) = 1$ et $\lim_{+\infty} \operatorname{ch} = +\infty$. Ainsi ch induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

   c. th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{-\infty} \operatorname{th} = -1$ et $\lim_{+\infty} \operatorname{th} = 1$. Ainsi th induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

2. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$ et posons $\theta = f(x)$. Par définition de f, $\operatorname{sh}\theta = x$. Or $\operatorname{ch}^2\theta = \operatorname{sh}^2\theta + 1$. Puisque $\operatorname{ch}\theta \geqslant 1 \geqslant 0$, $\operatorname{ch}\theta = \sqrt{\operatorname{sh}^2\theta + 1} = \sqrt{x^2+1}$.

   b. Soit $x \in [1, +\infty[$ et posons $\theta = g(x)$. Par définition de g, $\operatorname{ch}\theta = x$. Or $\operatorname{sh}^2\theta = \operatorname{sh}^2\theta - 1$. Par définition de g, $\theta \in \mathbb{R}_+$ donc $\operatorname{sh}\theta \geqslant 0$. Ainsi $\operatorname{sh}\theta = \sqrt{\operatorname{ch}^2\theta - 1} = \sqrt{x^2-1}$.

3. **a.** sh est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est dérivable sur $\operatorname{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}'(f(x))} = \frac{1}{\operatorname{ch}(f(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

   b. ch est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée sh ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi g est dérivable sur $\operatorname{ch}(\mathbb{R}_+^*) =]1, +\infty[$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}'(g(x))} = \frac{1}{\operatorname{sh}(g(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

   c. th est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $1 - \operatorname{th}^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ car th est à valeurs dans $]-1, 1[$. Ainsi h est dérivable sur $\operatorname{th}(\mathbb{R}) =]-1, 1[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = \frac{1}{\operatorname{th}'(h(x))} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2(h(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = f(x)$. On a donc $\operatorname{sh}(y) = x$ et $\operatorname{ch}(y) = \sqrt{x^2+1}$ d'après **2.a**. Ainsi

$$e^y = \operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y) = x + \sqrt{x^2+1}$$

   donc

$$f(x) = y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

   b. Soit $x \in [1, +\infty[$. On a donc $\operatorname{ch}(y) = x$ et $\operatorname{sh}(y) = \sqrt{x^2-1}$ d'après **2.b**. Ainsi

$$e^y = \operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y) = x + \sqrt{x^2-1}$$

   donc

$$g(x) = y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

   c. Soit $x \in]-1, 1[$. Posons $y = h(x)$. On a donc $\operatorname{th}(y) = x$ i.e. $\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x$ ou encore $e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$.
   On en déduit que

$$h(x) = y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Remarque. Les fonctions f, g et h s'appellent en fait argsh, argch et argth. ■

Solution 2.

1. Le calcul ne pose aucune difficulté, on trouve $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.
2. Puisque $\sin^n$ est continue, positive et non constamment nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $I_n > 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions $t \mapsto -\cos t$ et $t \mapsto \sin^{n+1} t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et leurs dérivées respectives sont $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto (n+1)\cos t \sin^n t$. Par intégration par parties,
$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin^{n+1}(t)\ dt \\
&= \left[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^n(t)\ dt \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)\ dt \\
&= (n+1)(I_n - I_{n+2})
\end{aligned}$$
Ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$
4. Par télescopage,
$$\begin{aligned}
I_{2n} &= I_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{I_{2k}}{I_{2k-2}} \\
&= \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} 2k-1\right)}{\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \cdot \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$
De la même façon,
$$\begin{aligned}
I_{2n+1} &= I_1 \prod_{k=1}^{n} \frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n} 2k+1} \\
&= \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)^2}{\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)\left(\prod_{k=0}^{n} 2k+1\right)} \\
&= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n} n!^2}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque
$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$$
on a
$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leqslant \sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$$
Ainsi, après intégration sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.
On a donc en particulier,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$
soit encore, d'après la relation de récurrence obtenue ci-dessus,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n+1}{n+2} I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

6.

7. Puisque $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$$
De plus, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$ donc, en appliquant le théorème d'encadrement,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$$

8. Posons $v_n = (n+1)I_{n+1}I_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. On remarque que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_nI_{n+1} = v_n$$
La suite (v_n) est donc constante égale à $\frac{\pi}{2}$ car
$$v_0 = I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que
$$nI_n^2 = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{I_n}{I_{n+1}} \cdot v_n = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{I_n}{I_{n+1}} \cdot \frac{\pi}{2}$$
Or on a vu précédemment que $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$ et il est clair que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ donc
$$\lim_{n\to+\infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}$$
Comme $I_n > 0$, $\sqrt{n}I_n = \sqrt{nI_n^2}$ de sorte que
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Solution 3.

1. A l'aide d'une formule de trigonométrie et de la linéarité de l'intégrale, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x) = \sin(x)\int_0^x \cos(t)g(t)\,dt - \cos(x)\int_0^x \sin(t)g(t)\,dt$$
Les applications $x \mapsto \int_0^x \cos(t)g(t)\,dt$ et $x \mapsto \int_0^x \sin(t)g(t)\,dt$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ comme primitives de fonctions continues. Comme sin et cos sont également de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x)\int_0^x \cos(t)g(t)\,dt + \sin(x)\cos(x)g(x) + \sin(x)\int_0^x \sin(t)g(t)\,dt - \cos(x)\sin(x)g(x) \\ &= \int_0^x (\cos(x)\cos(t) + \sin(x)\sin(t))\,g(t)\,dt = \int_0^x \cos(t-x)g(t)\,dt \end{aligned}$$

2. On a montré à la question précédente que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x) = \cos(x)\int_0^x \cos(t)g(t)\,dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)g(t)\,dt$$
On démontre comme à la première question que f' est de classe $\mathcal{C}^1$ i.e. que f est de classe $\mathcal{C}^2$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin(x)\int_0^x \cos(t)g(t)\,dt + \cos^2(x)g(x) + \cos(x)\int_0^x \sin(t)g(t)\,dt + \sin^2(x)g(x) \\ &= -\int_0^x (\sin(x)\cos(t) - \cos(x)\sin(t))\,g(t)\,dt + g(x) = -f(x) + g(x) \end{aligned}$$
Ceci prouve que f est bien solution de $y'' + y = g$.

3. La solution générale de l'équation homogène $y'' + y = 0$ est $x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme f est une solution particulière de $y'' + y = g$, on en déduit que les solutions de $y'' + y = g$ sont $x \mapsto f(x) + \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.