Semaine du 14/03 au 18/03

1 Cours

Intégrales à paramètres

Passage à la limite Théorème de convergence dominée : cas discret et cas continu. Théorème d'intégration terme à terme.

Continuité Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

Dérivabilité Classe $\mathcal{C}^1$ d'une intégrale à paramètre, extension pour la classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) ou $\mathcal{C}^\infty$.

Espaces préhilbertiens réels

Révisions de première année Tout le programme de première année sur les espaces préhilbertiens réels.

Projection orthogonale Si $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$ (ce n'est pas toujours le cas si E est de dimension infinie), définition du projecteur orthogonal sur F. Si F est de dimension finie, on a bien $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$. Expression du projeté orthogonal sur un espace vectoriel de dimension finie à l'aide d'une base **orthonormale** de ce sous-espace vectoriel. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E et p_F le projecteur orthogonal sur F, alors pour tout $x \in \mathrm{E}$, $y = p(x)$ est l'unique vecteur vérifiant $d(x, \mathrm{F}) = \|x - y\|$. Inégalité de Bessel. Suite totale. Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale totale d'un espace préhilbertien E et p_n est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{vect}(e_0, \dots, e_n)$, alors pour tout $x \in \mathrm{E}$, la suite $(p_n(x))$ converge vers x pour la norme euclidienne.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour les théorèmes de continuité ou de dérivabilité d'une intégrale à paramètre, il suffit d'avoir la domination sur tout segment.
- Montrer qu'une application est un produit scalaire. Dans l'ordre : symétrie, linéarité par rapport à l'**une** des deux variables (la linéarité par rapport à la seconde variable s'obtient par symétrie), positivité, définition.
  En ce qui concerne l'aspect défini, on revient presque toujours à l'un des deux arguments suivants :
  - une somme de termes positifs ne peut être nulle que si chacun des termes est nul ;
  - l'intégrale d'une fonction **continue** et positive sur un intervalle ne peut être nulle que si cette fonction est nulle sur cet intervalle.
- Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas des produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
- Orthonormaliser une famille libre à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.
- Déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel. On peut par exemple déterminer les vecteurs orthonaux à tout vecteur d'une base du sous-espace vectoriel dont on recherche l'orthogonal.
- Calculer un projeté orthogonal, au choix :
  - utiliser l'expression du projeté à l'aide une base **orthonormale** du sous-espace vectoriel sur lequel on projette ;
  - si on connaît une base $(f_1, \dots, f_n)$ quelconque de F, on peut caractériser le projeté $p(x)$ d'un vecteur x sur F par $x \in \mathrm{vect}(f_1, \dots, f_n)$ et $x - p(x) \perp f_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
- Calculer la distance euclidienne à un sous-espace vectoriel de dimension finie : utiliser l'expression de la distance en fonction du projeté orthogonal.
- Montrer qu'un endomorphisme est un automorphisme orthogonal, au choix :
  - montrer qu'il conserve le produit scalaire ;
  - montrer qu'il conserve la norme ;
  - montrer que sa matrice dans une base **orthonormale** est orthogonale.

3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 29, 30, 76, 77, 78, 80, 81, 82, 92