Devoir surveillé n°10 : corrigé

Problème 1 — Un développement asymptotique de la série harmonique (d'après ENS BL 2010)

Partie I –

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\ln$ est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$ de dérivée $t \mapsto \frac{1}{t}$. De plus, pour tout $t \in]k, k+1[$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$. D'après l'inégalité des accoissements finis, on a bien

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

2. **a.** La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs divergente. Ainsi $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **I.1**,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

ce qui donne

$$H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_n - \frac{1}{n}$$

On en déduit l'inégalité demandée.

c. Pour tout $n \geqslant 2$,

$$1 + \frac{1}{n \ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{H_n}{n \ln(n)} = 1$$

ou encore

$$H_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$$

3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \geqslant 0$ d'après la question **I.1**.
La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est donc décroissante.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = H_n - \ln(n) \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0$ d'après la question **I.2.b**. Ainsi $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et minorée : elle converge vers un réel γ.
Puisque $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est minorée par 0, $\gamma \geqslant 0$. De plus, $u_1 = 1$ et $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante donc $\gamma \leqslant 1$.

4. **a.** Il s'agit d'intégrer deux fois par parties. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
J_k &= \frac{1}{2} \left[\left(t - k - \frac{1}{2} \right)^2 f'(t) \right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2} \right) f'(t) \, dt \\
&= \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \left[\left(t - k - \frac{1}{2} \right) f(t) \right]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} f(t) \, dt \\
&= \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t) \, dt
\end{aligned}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant les inégalités précédentes pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} J_k = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n-1}[f'(k+1)-f'(k)] - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}[f(k+1)+f(k)] + \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)\,dt$$

On remarque un télescopage dans la première somme :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f'(k+1)-f'(k) = f'(n)-f'(1)$$

On utilise un changement d'indice dans la seconde somme :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k)+f(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=2}^{n} f(k) = 2\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1) - f(n)$$

Enfin, la relation de Chasles pour les intégrales montre que

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)\,dt = \int_1^n f(t)\,dt$$

On en déduit alors la relation demandée.

5. **a.** Remarquons tout d'abord que f est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(t) = \frac{2}{t^3}$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$-\frac{1}{2} \leqslant t-k-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$$

donc

$$0 \leqslant \left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$$

Puisque f'' est positive sur $[k, k+1]$, pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$0 \leqslant \left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2 f''(t) \leqslant \frac{1}{4}f''(t) = \frac{1}{2t^3}$$

La croissance de l'intégrale montre alors que

$$0 \leqslant J_k \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{4t^3}$$

b. L'intégrale de la question **I.5.a** se calcule aisément de sorte que

$$0 \leqslant J_k \leqslant \frac{1}{8}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \leqslant \frac{1}{8k^2}$$

Puisque la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{8k^2}$ converge, il en est de même de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} J_k$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier supérieur ou égal à n. En reprenant la question **I.5.b**,

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{p} J_k \leqslant \frac{1}{8}\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

puis, par télescopage,

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{p} J_k \leqslant \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(p+1)^2}\right)$$

Par passage à la limite (justifié puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} J_n$ converge)

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leqslant \frac{1}{8n^2}$$

d. D'après la question **I.4.b** appliquée à la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$H_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{8} - \frac{1}{n^2} + \ln(n) + \sum_{k=1}^{n-1} J_k$$

En notant $S = \sum_{k=1}^{+\infty} J_k$ et $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} J_k$, ceci s'écrit également

$$u_n = \frac{5}{8} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} + S - R_n$$

D'après la question **I.3.b**, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \gamma$. De plus, (R_n) converge vers 0 (reste d'une série convergente ou théorème des gendarmes appliqué au résultat de la question **II.1.c**). Un passage à la limite donne donc

$$\gamma = \frac{5}{8} + S$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} - R_n$$

ou encore

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} - R_n$$

La question **II.1.c** montre que $R_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On en déduit le développement asymtotique demandé.

Partie II –

1. **a.** Puisque (u_n) est de limite γ d'après la question **I.3.b**, (x_n) est également de limite γ.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $p \geqslant n+1$, un télescopage donne

$$\sum_{k=n+1}^{p} y_k = x_p - x_n$$

Par passage à la limite lorsque p tend vers $+\infty$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k = \gamma - x_n$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Pour tout entier $k \geqslant n+1$,

$$\begin{aligned}
y_k &= x_k - x_{k-1} \\
&= H_k - \ln(k) - \frac{1}{2k} - H_{k-1} + \ln(k-1) + \frac{1}{2(k-1)} \\
&= \frac{1}{k} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k-1)} + \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)
\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité demandée.

2. Tout d'abord

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k-1} &= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{k}} \\
&\underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\
&\underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)
\end{aligned}$$

Ensuite
$$\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{=} -\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}-\frac{1}{3k^3}+o\left(\frac{1}{k^3}\right)$$
Après calcul, on trouve bien
$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{3k^3}+o\left(\frac{1}{k^3}\right)$$
Autrement dit,
$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3k^3}$$

3. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^3}$ est une série à termes positifs convergente donc d'après le résultat admis et la question ??,
$$\gamma - x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$$
Or par comparaison à une intégrale,
$$\int_{n+1}^{p+1}\frac{dt}{t^3} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k^3} \leqslant \int_{n}^{p}\frac{dt}{t^3}$$
ou encore
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(p+1)^2}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{p^2}\right)$$
puis par passage à la limite
$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2n^2}$$
On en déduit sans peine que
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$
de sorte que
$$\gamma - x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$$
ce qui s'écrit encore
$$\gamma - x_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
Puisque
$$x_n = u_n - \frac{1}{2n} = H_n - \ln(n) - \frac{1}{2n}$$
on en déduit le développement asymptotique demandé.

Problème 2 — Puissances de matrices

Partie I –

1. Posons $E_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $E_2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$. On a clairement $\mathcal{A} = \text{vect}(E_1, E_2, E_3)$ donc $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. De plus, la famille (E_1, E_2, E_3) est libre donc c'est une base de $\mathcal{A}$. Ainsi $\dim\mathcal{A} = 3$.

2. Comme $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, c'est a fortiori un sous-groupe de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. De plus, $I_3 \in \mathcal{A}$ (choisir $a = b = 1$ et $c = 0$). Enfin, pour $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & -c' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 & 0 \\ 0 & bb'-cc' & bc'+cb' \\ 0 & -bc'-cb' & bb'-cc' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & -c' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$$

Ceci montre que $\mathcal{A}$ est stable par produit et commutatif.

3. On calcule $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Tout d'abord, on a bien $I_3, M, M^2 \in \mathcal{A}$. Soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda I_3 + \mu M + \nu M^2 = 0$. Ceci équivaut à $\begin{cases} \lambda - 2\mu + 4\nu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \\ -\mu - 2\nu = 0 \end{cases}$. On voit facilement que l'unique solution de ce système est le triplet nul. La famille (I_3, M, M^2) est donc libre. Puisque $\dim \mathcal{A} = 3$, cette famille est une base de $\mathcal{A}$.

4. On obtient $M^3 = 2M - 4I_3$.

Partie II –

1. Comme $\mathcal{A}$ est un anneau, il est stable par produit. On peut donc montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \in \mathcal{A}$, d'où l'existence des réels a_k, b_k et c_k.

2. En écrivant $M^{k+1} = MM^k$, on trouve $\begin{cases} a_{k+1} = -2a_k \\ b_{k+1} = b_k - c_k \\ c_{k+1} = b_k + c_k \end{cases}$.

3. On a $z_{k+1} = b_{k+1} + ic_{k+1} = (b_k - c_k) + i(b_k + c_k) = (1+i)z_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite (z_k) est donc géométrique de raison $1 + i$ et de premier terme $z_0 = b_0 + ic_0 = 1$: on a alors $z_k = (1+i)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Enfin $b_k = \operatorname{Re}(z_k) = \operatorname{Re}\left((1+i)^k\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4. En utilisant la question **II.2**, on montre que $b_{k+2} = b_{k+1} - c_{k+1} = b_{k+1} - b_k - c_k = 2b_{k+1} - 2b_k$. La suite (b_k) est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 2$. Les racines de ce polynômes sont donc $1 \pm i$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $b_k = \lambda(1+i)^k + \mu(1-i)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or $b_0 = b_1 = 1$ donc $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_k = \frac{(1+i)^k + \overline{(1+i)^k}}{2} = \operatorname{Re}\left((1+i)^k\right)$.

5. Comme u_0, u_1 et u_2 sont entiers et que u_{n+3} s'exprime comme une combinaison linéaire à coefficients entiers de u_n et u_{n+1}, on prouve par récurrence triple ou par récurrence forte que la suite (u_n) est à valeurs entières.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{tr}(M^{n+3}) = \operatorname{tr}(M^n M^3) = \operatorname{tr}(M^n(2M - 4I_3)) = 2\operatorname{tr}(M^{n+1}) - 4\operatorname{tr}(M^n)$ en utilisant la question **I.4** et la linéarité de la trace. De plus, $\operatorname{tr}(M^0) = \operatorname{tr}(I_3) = 3$, $\operatorname{tr}(M^1) = 0$ et $\operatorname{tr}(M^2) = 4$: les suites (u_n) et $(\operatorname{tr}(M^n))$ ont les mêmes trois premiers termes et vérifient la même relation de récurrence d'ordre 3, elles sont donc égales.

7. 2 divise bien $u_2 = 2$: on peut donc supposer p impair. Posons $n = \frac{p-1}{2}$.
Puisque (a_k) est géométrique de raison -2 et de premier terme $a_0 = 1$, on a $a_k = (-2)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$u_p = a_p + 2b_p = (-2)^p + 2\operatorname{Re}((1+i)^p) = -2^p + 2\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \operatorname{Re}(i^k)$$

Or pour k impair, $\operatorname{Re}(i^k) = 0$ donc

$$u_p = -2^p + \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{2k} (-1)^k = -(2^p - 2) + 2\sum_{k=1}^{n} \binom{p}{2k} (-1)^k$$

D'après le petit théorème de Fermat, p divise $2^p - 2$ et puisque pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $2 \leqslant 2k \leqslant p - 1$, p divise également $\binom{p}{2k}$ d'après le rappel de l'énoncé. Ainsi p divise u_p.