Devoir à la maison n°2

Problème 1 —

On note $\mathbb{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ et $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
On appelle *homographie* toute fonction h de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $cz + d \neq 0$ associe $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c, d sont des complexes tels que $ad - bc \neq 0$.

Partie I – Un exemple

1. Soit h l'homographie définie par $h(z) = i\dfrac{1+z}{1-z}$.

- **a.** Montrer que $\forall z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, $h(z) \in \mathbb{R}$.
- **b.** Montrer que $\forall z \in \mathbb{D}$, $h(z) \in \mathbb{P}$.
- **c.** Déterminer les points fixes de h, c'est-à-dire les complexes z tels que $h(z) = z$.
- **d.** Pour quels $Z \in \mathbb{C}$, l'équation $h(z) = Z$ d'inconnue z admet-elle une solution ?

2. Soit g l'homographie définie par $g(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$.

- **a.** Montrer que $\forall z \in \mathbb{R}$, $g(z) \in \mathbb{U}$.
- **b.** Montrer que $\forall z \in \mathbb{P}$, $g(z) \in \mathbb{D}$.

Partie II – Homographies conservant $\mathbb{U}$

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie définie par $h(z) = \dfrac{e^{i\theta}}{z}$. Montrer que $\forall z \in \mathbb{U}$, $h(z) \in \mathbb{U}$.

2. Soient $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et l'homographie h définie par $h(z) = e^{i\theta}\dfrac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1}$.

- **a.** Montrer que h est bien une homographie et que h est définie sur $\mathbb{U}$.
- **b.** Montrer que $\forall z \in \mathbb{U}$, $h(z) \in \mathbb{U}$.

3. Inversement, on souhaite montrer que les seules homographies conservant $\mathbb{U}$ sont celles des questions **II.1** et **II.2**. Soit donc h une homographie définie par $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c, d sont des complexes tels que $ad - bc \neq 0$ et vérifiant : $\forall z \in \mathbb{U}$, $h(z) \in \mathbb{U}$.

- **a.** Montrer que $\begin{cases} \overline{a}b = \overline{c}d \\ |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 \end{cases}$.
- **b.** Montrer que si $a = 0$, alors h est du type présenté dans la question **II.1**.
- **c.** On suppose maintenant $a \neq 0$.
  - **i.** Montrer que $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$.
  - **ii.** Montrer que $|a| \neq |c|$.
  - **iii.** En déduire que h est du type présenté dans la question **II.2**.