

INTERROGATION ÉCRITE N°13

NOM :

Prénom :

Note :

1. Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$.

Pour tout entier $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$ converge comme combinaison linéaire de deux séries convergentes et sa somme est

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

2. Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{n+1} 3^{n-2}$.

Cette série est une série géométrique de raison $\frac{2}{3}$. Or $\frac{2}{3} \in]-1, 1[$ donc cette série converge et sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n+1} 3^{n-2} = \frac{2}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

3. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right)$.

On rappelle que

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \mathcal{O}(x^3) \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \mathcal{O}(x^2)$$

Ainsi

$$n \tan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par conséquent

$$n \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right)$ converge (absolument).

4. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

On sait que

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x) \quad \text{et} \quad \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(x)$$

On en déduit que

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

puis que

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et enfin que

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Puisque $\sum \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs divergente, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

5. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 4A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} puis calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On trouve $A^2 - 4A = -3I_2$. Ainsi $A \left(\frac{4}{3}I_2 - A \right) = \left(\frac{4}{3}I_2 - A \right) A = I_2$. Par conséquent, A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{4}{3}I_2 - A = \begin{pmatrix} -2/3 & -1 \\ -1 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Remarquons que $P = X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3)$ est un polynôme annulateur de A . Notons R_n le reste de la division euclidienne de X^n par P . Il existe donc $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R_n = a_n X + b_n$. En évaluant la division euclidienne en 1 et 3, on trouve

$$a_n + b_n = 1 \quad \text{et} \quad 3a_n + b_n = 3^n$$

Par conséquent,

$$a_n = \frac{3^n - 1}{2} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{3 - 3^n}{2}$$

Finalement,

$$A^n = R_n(A) = \frac{3^n - 1}{2}A + \frac{3 - 3^n}{2}I_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$$

6. On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Justifier que $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et préciser sa dimension.

L'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \text{tr}(M)$ est une forme linéaire non nulle. Par conséquent, $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $n^2 - 1$.

7. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ les ensembles des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'application $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^\top$ est linéaire et involutive : c'est donc une symétrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par conséquent,

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})})$$

Mais

$$\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M^\top = M\} = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$$

$$\text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M^\top = -M\} = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

Ainsi $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.