Devoir à la maison n°07 : corrigé

Problème 1 — Moyenne arithmético-géométrique

Partie I – Etude du cas général

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_n - u_n = \frac{\left(\sqrt{v_{n-1}} - \sqrt{u_{n-1}}\right)^2}{2} \geqslant 0$$

donc $u_n \leqslant v_n$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \geqslant 0 \qquad\qquad v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0$$

Ceci prouve que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont respectivement croissante et décroissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_{n+1} - u_{n+1} - \frac{v_n - u_n}{2} = u_n - \sqrt{u_n v_n} = \sqrt{u_n}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}) \leqslant 0$$

donc

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2}$$

4. Tout d'abord, $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $v_n - u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ensuite $v_1 - u_1 \leqslant \frac{v_1 - u_1}{2^{1-1}}$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_n - u_n \leqslant \frac{v_1-u_1}{2^{n-1}}$. Alors

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2} \leqslant \frac{|a-b|}{2^{n+1}}$$

Par récurrence, $v_n - u_n \leqslant \frac{v_1-u_1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Le théorème des gendarmes garantit que $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. Puisque (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante à partir du rang 1, elles sont adjacentes à partir du rang 1 et convergent vers une limite commune $M(a,b)$.

Partie II – Propriétés de la moyenne arithmético-géométrique

On reprend les deux suites (u_n) et (v_n) de la partie I.

1. Notons (u'_n) et (v'_n) les suites de premiers termes respectifs $u'_0 = b$ et $v'_0 = a$ et vérifiant les mêmes relations de récurrence que les suites (u_n) et (v_n). La partie I montre que (u'_n) et (v'_n) convergent toutes deux vers $M(b,a)$. Par ailleurs, on vérifie sans peine que $u_1 = u'_1$ et $v_1 = v'_1$. Les suites (u_n) et (u'_n) d'une part et les suites (v_n) et (v'_n) d'autre part sont égales à partir du rang 1. Ceci montre que les suites (u'_n) et (v'_n) convergent également vers $M(a,b)$. Par unicité de la limite, $M(a,b) = M(b,a)$.

2. On vérifie sans peine que les suites (λu_n) et (λv_n) vérifient les mêmes relation de récurrence que les suites (u_n) et (v_n). En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\lambda u_{n+1} &= \lambda\sqrt{u_n v_n} \\
&= \sqrt{\lambda^2 u_n v_n} \quad \text{car } \lambda \text{ est } \textit{positif} \\
&= \sqrt{(\lambda u_n)(\lambda v_n)} \\
\lambda v_{n+1} &= \lambda \frac{u_n + v_n}{2} \\
&= \frac{\lambda u_n + \lambda v_n}{2}
\end{aligned}$$

La partie I montre alors que les suites (λu_n) et (λv_n) convergent vers la même limite $M(\lambda a, \lambda b)$.
Mais comme les suites (u_n) et (v_n) convergent toutes deux vers $M(a,b)$, les suites (λu_n) et (λv_n) convergent également vers $\lambda M(a,b)$. Par unicité de la limite, on obtient $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$.

3. Puisque (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante à partir du rang 1 et convergent vers $M(a, b)$, $u_n \leqslant M(a, b) \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, $u_1 \leqslant M(a, b) \leqslant v_1$, ce qui donne le résultat escompté.

4. Les suites (u_{n+1}) et (v_{n+1}) sont de premier terme $\sqrt{ab}$ et $\frac{a+b}{2}$ et suivent les mêmes relations de récurrence que (u_n) et (v_n) donc convergent vers $M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$. Par ailleurs, ce sont des suites extraites de (u_n) et (v_n) donc elles convergent vers $M(a, b)$. On en déduit que $M(a, b) = M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$.

Partie III – Étude d'une fonction

1. En reprenant les deux suites (u_n) et (v_n) de la partie I avec $a = 1$ et $b = 0$, on prouve sans peine que la suite (u_n) est constamment nulle à partir du rang 1. On en déduit que $F(0) = 0$.
La question **II.3** montre que $1 \leqslant M(1, 1) \leqslant 1$ i.e. $F(1) = 1$.

2. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Les suites (u_n) et (v_n) définies dans la partie I sont positives donc leur limite commune l'est également i.e. $M(a, b) \geqslant 0$.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = M(1, x) \geqslant 0$.

3. Soit $(x, x') \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $x \leqslant x'$. On définit les suites (u_n), (v_n), (u'_n) et (v'_n) telles que $u_0 = 1$, $v_0 = x$, $u'_0 = 1$ et $v'_0 = x'$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad u'_{n+1} = \sqrt{u'_n v'_n} \qquad v'_{n+1} = \frac{u'_n + v'_n}{2}$$

On prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u'_n$ et $v_n \leqslant v'_n$. Par ailleurs, les suites (u_n) et (v_n) convergent vers $F(x)$ tandis que les suites (u'_n) et (v'_n) convergent vers $F(x')$. Par passage à la limite, $F(x) \leqslant F(x')$. Ceci prouve la croissance de F sur $\mathbb{R}_+$.

4. **a.** Il suffit d'appliquer la question **II.3** avec $a = 1$ et $b = x$.

b. On rappelle que $F(1) = 1$. A l'aide de l'inégalité de la question précédente, on a donc pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \leqslant \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \leqslant \frac{1}{2}$$

et pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \leqslant \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

ou encore pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\frac{1}{\sqrt{x} - 1} \leqslant \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \leqslant \frac{1}{2}$$

et pour tout $x \in]0, 1[$

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim_{x \to 1^-} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$ et donc $\lim_{x \to 1} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$. Finalement, F est dérivable en 1 et $F'(1) = \frac{1}{2}$.

5. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
F(x) &= M(1, x) \\
&= M\left(\sqrt{x}, \frac{1 + x}{2}\right) && \text{d'après } \textbf{II.4} \\
&= M\left(\frac{1 + x}{2}, \sqrt{x}\right) && \text{d'après } \textbf{II.1} \\
&= \frac{1 + x}{2} M\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1 + x}\right) && \text{d'après } \textbf{II.2} \\
&= \frac{1 + x}{2} F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1 + x}\right)
\end{aligned}$$

b. Puisque F est croissante et positive, elle admet une limite finie ℓ à droite en 0. Or $\lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{1+x} = 0^+$ donc la question précédente montre que $\ell = \frac{\ell}{2}$ et donc $\ell = 0$. Il s'ensuit que $\lim_{0^+} F = 0 = F(0)$ donc F est continue en 0.
D'après la question **III.4.a**, $F(x) \geqslant \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{F(x)}{x} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Par théorème de minoration, $\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = +\infty$ donc F n'est pas dérivable en 0. On peut même dire que la courbe représentative de F admet une tangente verticale en l'origine.

6. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) \geqslant \sqrt{x}$ donc, par théorème de minoration, $\lim_{+\infty} F = +\infty$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} F(x) &= M(1,x) \\ &= xM\left(\frac{1}{x},1\right) && \text{d'après } \textbf{II.2} \\ &= xM\left(1,\frac{1}{x}\right) && \text{d'après } \textbf{II.1} \\ &= xF\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

c. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{F(x)}{x} = F\left(\frac{1}{x}\right)$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{u\to 0^+} F(u) = 0$$

donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ i.e. $F(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$.

d. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question **III.5.a**

$$F(x) = \frac{1}{2}(1+x)F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

Mais d'après la question **III.6.b**

$$F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$$

On en déduit le résultat voulu.

e. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

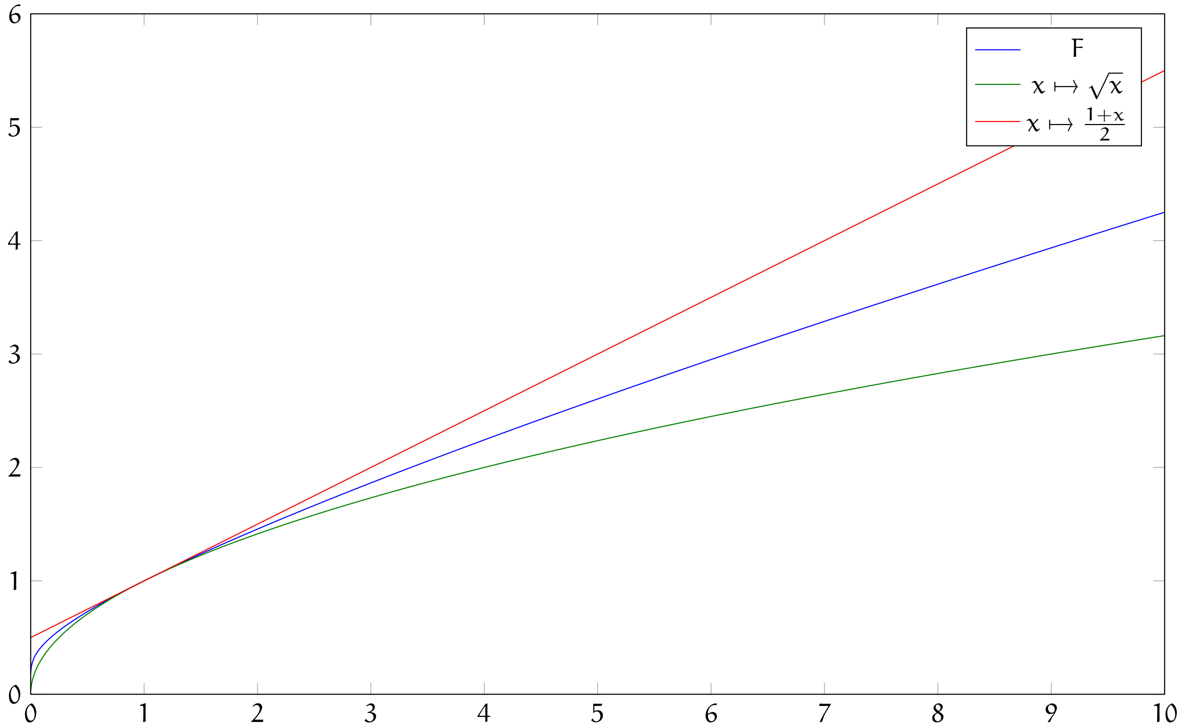
$$\frac{F(x)}{\sqrt{x}} = F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{2\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim_{u\to+\infty} F(u) = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right) = +\infty$. Ceci signifie que $\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{=} o(F(x))$.

7.
```python
from matplotlib.pyplot import plot
from math import sqrt
from numpy import logspace

def F(x,eps) :
    u=1
    v=x
    while abs(u-v)>eps :
        u,v=sqrt(u*v),(u+v)/2
    return (u+v)/2
```

```
x=logspace(-3,1,1000)
y=[F(t,1e-3) for t in x]
plot(x,y)
y=[sqrt(t) for t in x]
plot(x,y)
y=[(1+t)/2 for t in x]
plot(x,y)
```



SOLUTION 1.

1. Posons $f : x \mapsto x + \tan x$. f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ f(x) = 2 + \tan^2 x > 0$$

   f est donc strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   Par ailleurs, f est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   Enfin, f admet$-\infty$ pour limite en $-\frac{\pi}{2}$ et $+\infty$ pour limite en $+\infty$[.
   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de u_n,

$$\tan u_n = n - u_n$$

   Or $u_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $u_n = \arctan(\tan u_n)$. Il s'ensuit que $u_n = \arctan(n - u_n)$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \frac{\pi}{2}$ donc $n - u_n > n - \frac{\pi}{2}$. Par théorème de minoration, $\lim_{n\to+\infty} n - u_n = +\infty$. Puisque arctan admet pour limite $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$.

3. Posons $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

   Ainsi g est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $g(1) = \frac{\pi}{2}$, g est constante égale à $\frac{\pi}{2}$ sur cet intervalle. On en déduit le résultat demandé.

4. Puisque $u_n < \frac{\pi}{2} \leqslant 2$, $n - u_n > 0$ pour tout entier $n \geqslant 2$. D'après la question précédente,

$$u_n = \arctan(n - u_n) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n - u_n}\right)$$

Par opérations sur les limites, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-u_n} = 0$. Or $\arctan x \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\arctan\left(\frac{1}{n-u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n-u_n}$. Puisque (u_n) est bornée, $n - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc $\frac{1}{n-u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Ainsi

$$\arctan\left(\frac{1}{n - u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

ou encore

$$\arctan\left(\frac{1}{n - u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Il s'ensuit que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

5. Tout d'abord

$$\frac{1}{n - u_n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{u_n}{n}}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 0$,

$$\frac{1}{1 - \frac{u_n}{n}} = 1 + \frac{u_n}{n} + \frac{u_n^2}{n^2} + o\left(\frac{u_n^2}{n^2}\right)$$

D'après la question précédente,

$$\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

puis

$$\frac{u_n^2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit que

$$\frac{1}{1 - \frac{u_n}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi^2 - 4}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Finalement,

$$\frac{1}{n - u_n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{u_n}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{\pi}{2n^2} + \frac{\pi^2 - 4}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

6. On sait que $\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + o(x^2)$. Puisque arctan est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ qui s'annule en 0, $\arctan x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

7. On sait que $\arctan x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. On en déduit via la question précédente que

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{1}{n - u_n}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{\pi}{2n^2} + \frac{\pi^2 - 4}{4n^3} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{\pi}{2n^2} + \frac{3\pi^2 - 16}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

Finalement

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2n^2} - \frac{3\pi^2 - 16}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$