# DEVOIR À LA MAISON N°01

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

## Problème 1 – D'après Petites Mines 2001

Les parties 2 et 3 sont liées mais la partie 1 est indépendante du reste du problème.

### Partie I –

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^2 \neq 0$ et $\mathrm{A}^3 = 0$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{E}(t) = \mathrm{I} + t\mathrm{A} + \dfrac{t^2}{2}\mathrm{A}^2$.

**I.1** Vérifier que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{E}(s+t) = \mathrm{E}(s)\mathrm{E}(t)$.

**I.2** En déduire que $\mathrm{E}(t)^n = \mathrm{E}(nt)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

**I.3** Montrer que $\mathrm{E}(t)$ est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$ et déterminer son inverse.

**I.4** Montrer que la famille $(\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

**I.5** En déduire que l'application $\mathrm{E} : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{E}(t)$ est injective.

**I.6** Dans cette question, $p = 3$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Expliciter la matrice $\mathrm{E}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ sous la forme d'un tableau matriciel.

### Partie II –

On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

**II.1** Montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Préciser un vecteur directeur $u$ de F et un vecteur directeur $v$ de G.

**II.2** Sans calculs, déterminer la matrice de l'endomorphisme $f$ dans la base $\mathcal{B} = (u, v)$.

**II.3** En déduire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. Expliciter P, D et $\mathrm{P}^{-1}$.

**II.4** Expliciter $\mathrm{D}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de $\mathrm{A}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sous forme d'un tableau matriciel.

## Partie III –

On reprend les notations de la partie 2.

**III.1** En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout réel $t$,

$$e^t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$

**III.2** Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{E}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\mathrm{A}^k$. On écrira cette matrice sous la forme $\begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.

Expliciter sous forme de sommes les coefficients $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

**III.3** Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$a(t) = \lim_{n\to+\infty} a_n(t) \qquad b(t) = \lim_{n\to+\infty} b_n(t) \qquad c(t) = \lim_{n\to+\infty} c_n(t) \qquad d(t) = \lim_{n\to+\infty} d_n(t)$$

et $\mathrm{E}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$. Expliciter $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ et $d(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

**III.4** Montrer qu'il existe des matrices Q et R de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{E}(t) = e^{2t}\mathrm{Q} + e^t\mathrm{R}$$

et expliciter Q et R.

**III.5** Calculer les matrices $\mathrm{Q}^2$, $\mathrm{R}^2$, QR et RQ. Que peut-on dire des endomorphismes $q$ et $r$ canoniquement associés à Q et R ? On précisera sa réponse à l'aide des droites F et G de la question **II.1**.

**III.6** En déduire que

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{E}(s+t) = \mathrm{E}(s)\mathrm{E}(t)$$

Que dire de $\mathrm{E}(t)^n$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ ? Que dire de l'inversibilité de $\mathrm{E}(t)$ et de son éventuel inverse pour $t \in \mathbb{R}$ ?

L'application $\mathrm{E} : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{E}(t)$ est-elle injective ?

# Problème 2 – Résolution d'une équation différentielle

## Partie I – Résolution de deux équations différentielles simples

On considère les équations différentielles

$$z'' + 4z = 0 \tag{E$_1$}$$

$$z'' - 4z = 0 \tag{E$_2$}$$

**I.1** Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle ($E_1$).

**I.2** Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle ($E_2$).

**I.3** Montrer que l'ensemble des solutions de ($E_2$) peut en fait s'écrire

$$\left\{t \mapsto \lambda \operatorname{ch}(2t) + \mu \operatorname{sh}(2t),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

## Partie II – Résolution d'une seconde équation différentielle par changement de variable

On considère l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0 \tag{F}$$

**II.4** Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur $]-1,1[$. On pose $g = f \circ \cos$. Montrer que $g$ est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0,\pi[$.

**II.5** Montrer que $f$ est solution de (F) sur $]-1,1[$ si et seulement si $g$ est solution sur $]0,\pi[$ d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants à déterminer.

**II.6** En déduire que les solutions de (F) sur $]-1,1[$ sont les fonctions

$$x \in ]-1,1[ \mapsto \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x\sqrt{1 - x^2}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

## Partie III – La fonction argument cosinus hyperbolique

**III.7** Montrer que la fonction ch induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$. On notera argch la bijection réciproque de cette bijection induite.

**III.8** Montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$, $\operatorname{sh} \circ \operatorname{argch}(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

**III.9** Justifier que la fonction argch est dérivable sur $]1,+\infty[$ et déterminer une expression de sa dérivée.

**III.10** Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(2\theta) = 2\operatorname{ch}^2(\theta) - 1$ et $\operatorname{sh}(2\theta) = 2\operatorname{ch}(\theta)\operatorname{sh}(\theta)$.

**III.11** En déduire pour $x \in [1,+\infty[$ des expressions de $\operatorname{ch}(2\operatorname{argch}(x))$ et $\operatorname{sh}(2\operatorname{argch}(x))$ ne faisant pas intervenir la fonction argch.

## Partie IV – Un problème de raccord

**IV.12** En considérant cette fois-ci une fonction $f$ deux fois dérivable sur $]1,+\infty[$ et en posant $g = f \circ \operatorname{ch}$, montrer que les solutions de l'équation différentielle (F) sur $]1,+\infty[$ sont les fonctions

$$x \in ]1,+\infty[ \mapsto \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x\sqrt{x^2 - 1}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

**IV.13** En déduire les solutions de l'équation différentielle (F) sur $]-\infty,-1[$.

**IV.14** Déterminer les solutions de (F) sur $\mathbb{R}$.