Devoir surveillé n°08 : corrigé

Problème 1 — Petites Mines 2003

Partie I –

1. Le noyau de D est le sous-espace vectoriel des applications de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$, c'est à-dire les applications constantes sur $\mathbb{R}$. Toute application de classe $\mathcal{C}^\infty$ admettant une primitive de classe $\mathcal{C}^\infty$, D est surjective et donc l'image de D est E.

2.
- En prenant $t=0$, on obtient (1) : $a+c=0$.
- En prenant $t=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, on obtient (2) : $ae^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}+be^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}=0$.
- En prenant $t=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, on obtient (3) : $ae^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}-ce^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}=0$.

D'après (1) et (2), $a\left(e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}+e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}\right)=0$, puis $a=0$ puisque la somme d'exponentielles est strictement positive donc non nulle. D'après (1), on a alors $c=0$ et d'après (2), on a également $b=0$ puisque qu'une exponentielle est non nulle.

3. On a $e^t \underset{t\to0}{=} 1+t+\frac{1}{2}t^2+o(t^2)$.
On a également d'une part

$$e^{-\frac{t}{2}} \underset{t\to0}{=} 1-\frac{t}{2}+o(t)$$

et d'autre part :

$$\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{t\sqrt{3}}{2}+o(t^2)\underset{t\to0}{=} t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+o(t)\right)$$

d'où

$$e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\underset{t\to0}{=} t\left(1-\frac{t}{2}+o(t)\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+o(t)\right)\underset{t\to0}{=}\frac{t\sqrt{3}}{2}-\frac{t^2\sqrt{3}}{4}+o(t^2)$$

Enfin, on a d'une part :

$$e^{-\frac{t}{2}}\underset{t\to0}{=}1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{8}+o(t^2)$$

et d'autre part :

$$\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\underset{t\to0}{=}1-\frac{3t^2}{8}+o(t^2)$$

On en déduit

$$e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\underset{t\to0}{=}\left(1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{8}+o(t^2)\right)\left(1-\frac{3t^2}{8}+o(t^2)\right)\underset{t\to0}{=}1-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{4}+o(t^2)$$

Par conséquent,

$$af_1(t)+bf_2(t)=+cf_3(t)\underset{t\to0}{=}a+c+\left(a+\frac{b\sqrt{3}}{2}-\frac{c}{2}\right)t+\left(\frac{a}{2}-\frac{b\sqrt{3}}{4}-\frac{c}{4}\right)t^2+o(t^2)$$

Par unicité du développement limité, on a :

$$\begin{cases} a+c=0\\ a+\frac{b\sqrt{3}}{2}-\frac{c}{2}=0\\ \frac{a}{2}-\frac{b\sqrt{3}}{4}-\frac{c}{4}=0\end{cases}$$

On en déduit à nouveau $a=b=c=0$.

4. Supposons $a \neq 0$. Alors $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} ae^t$. D'où $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, ce qui est impossible puisque $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit $a = 0$.
Par conséquent, $b \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + c \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En choisissant $t = 0$, on obtient $c = 0$. Et enfin, $b = 0$ en prenant pour t une valeur n'annulant pas $\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$.

5. On a $D(f_1) = f_1$, $D(f_2) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$ et $D(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3$. Ainsi $D(f_1)$, $D(f_2)$ et $D(f_3)$ sont des vecteurs de G. Comme la famille (f_1, f_2, f_3) engendre G, on a $D(G) \subset G$.

6. Comme $D(f_1) = f_1$, il est clair que $D^3(f_1) = f_1$.
De plus,

$$D(f_2) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$$

donc

$$D^2(f_2) = -\frac{1}{2}D(f_2) + \frac{\sqrt{3}}{2}D(f_3) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3\right) = -\frac{1}{2}f_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$$

puis

$$D^3(f_2) = -\frac{1}{2}D(f_2) - \frac{\sqrt{3}}{2}D(f_3) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3\right) = f_2$$

De même,

$$D(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3$$

donc

$$D^2(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}D(f_2) - \frac{1}{2}D(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3$$

puis

$$D^3(f_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}D(f_2) - \frac{1}{2}D(f_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3\right) = f_3$$

Ainsi les endomorphismes $\widehat{D}^3$ et Id_G coïncident sur une base de G, d'où $\widehat{D}^3 = \mathrm{Id}_G$.

7. Comme $\widehat{D} \circ \widehat{D}^2 = \widehat{D}^2 \circ \widehat{D} = \mathrm{Id}_G$, $\widehat{D}$ est inversible d'inverse $\widehat{D}^{-1} = \widehat{D}^2$.

Partie II –

8. On sait que f est trois fois dérivable. Soit $n \geqslant 3$ et supposons f n fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $f''' = f$, f''' est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est $n+3$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$. A fortiori, elle est $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On conclut par récurrence que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

9. On a vu précédemment que $\widehat{D}^3 = \mathrm{Id}_G$ ce qui signifie que la restriction de T à G est nulle i.e. $G \subset \operatorname{Ker} T$.

10. On a $g' = f''' + f'' + f' = f + f'' + f' = g$. Ainsi g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.

11. Les solutions de l'équation $y' - y = 0$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^t$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

12. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ est $X^2 + X + 1 = 0$. Ses solutions sont j et $\bar{j}$. On en déduit que l'ensemble des solutions réelles sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \left(A \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + B \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right) e^{-\frac{t}{2}}$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ c'est-à-dire les fonctions du type $Af_2 + Bf_3$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Autrement dit l'ensemble des solutions réelles de $y'' + y' + y = 0$ est $\operatorname{vect}(f_2, f_3)$.
On a vu que (f_1, f_2, f_3) était libre donc (f_2, f_3) est aussi libre. Par conséquent, (f_2, f_3) est une base de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$.

13. Une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$ est $t \mapsto \frac{\lambda}{3}e^t$. Les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$ sont donc les fonctions :

$$\frac{\lambda}{3}f_1 + Af_2 + Bf_3$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. L'ensemble des solutions est donc

$$\frac{\lambda}{3}f_1 + \operatorname{vect}(f_2, f_3)$$

14. Soit $f \in \operatorname{Ker} T$ i.e. f une solution de $(\mathcal{E})$. En posant $g = f'' + f' + f$, on a montré en **II.10** que g vérifiait l'équation différentielle $y' - y = 0$. Ceci prouve qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda f_1$ (cf. **II.11**). f est alors solution de $y'' + y' + y = \lambda f_1$ dont on a vu en **II.13** que les solutions étaient de la forme $\frac{\lambda}{3}f_1 + Af_2 + Bf_3$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Donc $f \in \operatorname{vect}(f_1, f_2, f_3) = G$. On a donc prouvé que $\operatorname{Ker} T \subset G$.
Or $G \subset \operatorname{Ker} T$ d'après **II.9** donc $\operatorname{Ker} T = G$ par double inclusion. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est exactement G.

Problème 2 — Mélanges

Partie I – Préliminaires

1. Le lecteur vérifiera que S est bien linéaire. C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. De plus, il est évident que $S^2 = I$.

2. Comme I est également un endomorphisme, U_p est une combinaison linéaire d'endomorphismes donc un endomorphisme.

3. On montre sans peine que le noyau de $U_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(S + I)$ est $\operatorname{vect}((1, -1))$ et que son image est $\operatorname{vect}((1, 1))$. Des bases respectives de $U_{\frac{1}{2}}$ sont les familles $((1, -1))$ et $((1, 1))$.

Partie II – Un sous-groupe de $GL(\mathbb{R})^2$

4. En tenant compte du fait que $S^2 = I$,

$$U_p \circ U_q = (pS + (1-p)I) \circ (qS + (1-q)I) = (p + q - 2pq)S + (1 - p - q + 2pq)I$$

Ainsi, en posant $r = p + q - 2pq$, on a bien $U_p \circ U_q = U_r$. Comme l'expression de r est invariant par échange de p et q, on a également $U_q \circ U_p = U_r$.

5. Puisque $I = U_0$, la question précédente incite à rechercher q tel que $p + q - 2pq = 0$. En supposant $p \neq \frac{1}{2}$, on peut poser $q = \frac{p}{2p-1}$ de sorte que $p + q - 2pq = 0$. La question précédente montre alors que

$$U_p \circ U_q = U_q \circ U_p = U_0 = I$$

Ainsi $U_p \in GL(\mathbb{R})^2$ et $U_p^{-1} = U_q$.
La question **I.3** montre en particulier que le noyau de $U_{\frac{1}{2}}$ n'est pas nul : $U_{\frac{1}{2}}$ n'est donc pas un automorphisme.
Finalement $U_p \in GL(\mathbb{R}^2)$ *si et seulement si* $p\frac{1}{2}$ et, dans ce cas, $U_p^{-1} = U_q$ avec $q = \frac{p}{2p-1}$.

6. On vérifie les différents axiomes :

- $I = U_0 \in G$;
- la question **II.5** montre que $G \subset GL(\mathbb{R}^2)$ et est stable par inversion ;
- la question **II.4** montre que G est stable par composition.

En ce qui concerne la stabilité par inversion, il convient néanmoins de montrer que si $p \neq \frac{1}{2}$, alors $q = \frac{p}{2p-1} \neq \frac{1}{2}$; on peut par exemple remarquer que $q - \frac{1}{2} = \frac{1}{2(2p-1)} \neq 0$.
De même, en ce qui concerne la stabilité par produit, il convient de noter que si p et q sont deux réels différents de $\frac{1}{2}$, $U_p \circ U_q = U_r$ (avec $r = p + q - 2pq$) et qu'on a bien $r \neq \frac{1}{2}$ puisque U_r est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ en tant que composée d'automorphismes de $\mathbb{R}^2$.
Finalement, on peut affirmer que G est bien un sous-groupe de $GL(\mathbb{R}^2)$.

Partie III – Puissances d'un endomorphisme

7. Il s'agit de calculs simples en utilisant le fait que $S^2 = I$.

8. On montre par récurrence que $(S + I) \circ U_p^n = S + I$ et que $(S - I) \circ U_p^n = (1 - 2p)^n (S - I)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9. En effectuant la différence des deux inégalités précédentes et en factorisant, on obtient

$$U_p^n = \frac{1 - (1 - 2p)^n}{2} S + \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2} I$$

Partie IV – Application

10. Plaçons-nous à la fin de la $n^{\text{ème}}$ opération. Après la première phase de la $(n+1)^{\text{ème}}$ opération, la proportion de grenadine dans le récipient A vaut toujours a_n, tandis que dans le récipient B, elle vaut $\frac{va_n + Vb_n}{v+V}$. A la fin de la $(n+1)^{\text{ème}}$ opération, la proportion de grenadine dans le récipient A vaut $\frac{(V-v)a_n + v\frac{va_n+Vb_n}{v+V}}{V}$ tandis que dans le récipient B, elle vaut toujours $\frac{va_n+Vb_n}{v+V}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{(V-v)a_n + v\frac{va_n+Vb_n}{v+V}}{V} \\
&= \frac{V-v}{V} a_n + \frac{v^2}{V(V+v)} a_n + \frac{v}{V+v} b_n \\
&= \frac{(V-v)(V+v) + v^2}{V(V+v)} a_n + \frac{v}{V+v} b_n \\
&= \frac{V}{V+v} a_n + \frac{v}{V+v} b_n \\
b_{n+1} &= \frac{v}{V+v} a_n + \frac{V}{V+v} b_n
\end{aligned}$$

Ainsi en posant $p = \frac{v}{V+v}$, on a $1 - p = \frac{V}{V+v}$ et donc

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= (1-p)a_n + pb_n \\
b_{n+1} &= pa_n + (1-p)b_n
\end{aligned}$$

ou encore

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = (1-p)(a_n, b_n) + p(b_n, a_n) = pS(a_n, b_n) + (1-p)I(a_n, b_n) = U_p(a_n, b_n)$$

Puisque $0 < v < V$, on a clairement $p \in]0, 1[$.

11. Une récurrence simple montre que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (a_n, b_n) = U_p^n(a_0, b_0) = U_p^n(1, 0)$$

La question **III.9** montre alors que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (a_n, b_n) = \frac{1-(1-2p)^n}{2} S(1,0) + \frac{1+(1-2p)^n}{2} I(1,0) = \left(\frac{1+(1-2p)^n}{2}, \frac{1-(1-2p)^n}{2}\right)$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1+(1-2p)^n}{2} \qquad b_n = \frac{1-(1-2p)^n}{2}$$

Comme $p \in]0,1[$, $1-2p \in]-1,1[$ de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{2}$$

Solution 1.

1. Supposons que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$ et montrons que $\operatorname{Im} g \circ f = \operatorname{Im} g$. Tout d'abord $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$. Soit maintenant $y \in \operatorname{Im} g$. Il existe donc $x \in F$ tel que $y = g(x)$. Or $F = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$ donc il existe $(a,b) \in \operatorname{Im} f \times \operatorname{Ker} g$ tel que $x = a + b$. Ainsi $y = g(x) = g(a) + g(b) = g(a)$. Mais comme $a \in \operatorname{Im} f$, il existe $c \in E$ tel que $a = f(c)$. Finalement, $y = g(b) = g \circ f(c) \in \operatorname{Im} g \circ f$. On a donc montré que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} g \circ f$. Par double inclusion, $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g)$.

   Supposons maintenant que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g)$ et montrons que $F = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$. Tout d'abord, $\operatorname{Im} f \subset F$ et $\operatorname{Ker} g \subset F$ donc $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g \subset F$. Soit maintenant $x \in F$. Alors $g(x) \in \operatorname{Im} g$. Puisque $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} g \circ f$, $g(x) \in \operatorname{Im} g \circ f$. Il existe donc $a \in E$ tel que $g(x) = g \circ f(a)$. Remarquons que $x = f(a) + (x - f(a))$. De plus, $f(a) \in \operatorname{Im} f$ et $g(x - f(a)) = g(x) - g \circ f(a) = 0_E$ donc $x - f(a) \in \operatorname{Ker} g$. Ainsi $x \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$. On a donc $F \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$ et donc $F = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$ par double inclusion.

2. Supposons que $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_F\}$ et montrons que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f)$. On a clairement $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g \circ f$. Soit donc maintenant $x \in \operatorname{Ker} g \circ f$. Alors $g(f(x)) = 0_G$ donc $f(x) \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$. Or $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_F\}$ donc $f(x) = 0_F$ i.e. $x \in \operatorname{Ker} f$. On a donc montré que $\operatorname{Ker} g \circ f \subset \operatorname{Ker} f$ et donc $\operatorname{Ker} g \circ f = \operatorname{Ker} f$ par double inclusion.

   Supposons maintenant que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f)$ et montrons que $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_F\}$. Soit alors $y \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$. On a donc $g(y) = 0_G$ et il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi $g \circ f(x) = 0_G$ et donc $x \in \operatorname{Ker} g \circ f$. Comme $\operatorname{Ker} g \circ f = \operatorname{Ker}(f)$, $x \in \operatorname{Ker} f$ de sorte que $y = f(x) = 0_F$. On a bien montré que $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_F\}$.