Devoir surveillé n°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}): \quad (1+x^2)y' - 3xy = 1$$

1. Résoudre l'équation homogène $(\mathrm{E_H})$ associée à (E).
2. Rechercher une solution particulière de (E) sous la forme d'une fonction polynomiale de degré 3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
3. Montrer que $(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \underset{x\to+\infty}{=} x^3 + \frac{3}{2}x + o(1)$.
4. On pose $g : x \mapsto \frac{2}{3}x^3 + x - \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$. Vérifier que g est l'unique solution de (E) admettant une limite finie en $+\infty$.
5. Déterminer les variations de g. On précisera ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 2.

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$.
On se propose de démontrer l'existence de trois réels a, b, c tels que :

$$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{=} a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. Calculer I_0, I_1.
2. Étudier le sens de variation de la suite (I_n).
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n.
4. Majorer la fonction $g : x \mapsto e^{-2x}$ sur $[0,1]$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

   Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2\mathrm{I}_{n+1} = 1 - (n+1)\mathrm{I}_n$$

6. En déduire la limite de la suite $(n\mathrm{I}_n)$.

7. Déterminer la limite de la suite $(n(n\mathrm{I}_n-1))$.

8. Donner alors l'existence et la valeur de a, b, c. On justifiera sa réponse.

Exercice 3.

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0)=1$ et $f(t)=\dfrac{\arctan t}{t}$ pour tout $t\in\mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

2. Donner le développement limité de f à l'ordre 1 en 0. En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}^*$.

4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}t^2f'(t)$$

En déduire le sens de variation de f.

5. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On précisera les éventuelles asymptotes.

Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(0)=1$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\phi(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

6. Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

7. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\leqslant\phi(x)\leqslant 1$. On pourra commencer par supposer $x>0$.

8. Montrer que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\phi'(x)=\dfrac{1}{x}\big(f(x)-\phi(x)\big)$.
Montrer que ϕ est dérivable en 0 avec $\phi'(0)=0$. Donner les variations de ϕ.

9. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=0$.

On considère l'équation différentielle (E): $x^2y'+xy=\arctan(x)$.

10. Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

11. Montrer que ϕ est l'unique solution de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$.