

SEMAINE DU 10/12 AU 14/12

1 Cours

Nombres réels

Approximations d'un réel Ensembles de nombres : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Partie entière. Approximations décimales. Densité dans \mathbb{R} . Caractérisation séquentielle de la densité. \mathbb{D} , \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R} .

Relation d'ordre sur \mathbb{R} Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure d'une partie de \mathbb{R} . Théorème de la borne supérieure. Caractérisation séquentielle de la borne inférieure et de la borne supérieure. Droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$. Borne supérieure et inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$. Applications à valeurs dans \mathbb{R} : majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure.

Intervalles de \mathbb{R} Définition : une partie I de \mathbb{R} est un intervalle si $\forall (x, y, t) \in I^2 \times \mathbb{R}, x \leq t \leq y \implies t \in I$. Les intervalles de \mathbb{R} sont les parties de la forme $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b]$, $]-\infty, b[$, $]-\infty, +\infty[$.

Relations binaires

Généralités Réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité. Exemples.

Relation d'ordre Définition. Ordre total, partiel. Majorant/minorant, maximum/minimum, borne supérieure/inférieure. Unicité du maximum/minimum, de la borne supérieure/inférieure sous réserve d'existence. Un maximum/minimum est une borne supérieure/inférieure.

Relation d'équivalence Définition. Classes d'équivalence. Les classes d'équivalence forment une partition.

2 Méthodes à maîtriser

► Déterminer le maximum/minimum M d'une partie \mathcal{A} :

- ◊ M est un majorant/minorant de \mathcal{A} ;
- ◊ $M \in \mathcal{A}$.

► Déterminer la borne supérieure/inférieure M d'une partie \mathcal{A} :

- ◊ M est un majorant/minorant de \mathcal{A} ;
- ◊ puis au choix :
 - si $M \in \mathcal{A}$, M est un maximum/minimum donc a fortiori une borne supérieure/inférieure ;
 - tout majorant/minorant de \mathcal{A} est minoré/majoré par M ;
 - il existe une suite d'éléments de \mathcal{A} convergeant vers M (si \mathcal{A} est une partie de \mathbb{R} muni de la relation d'ordre usuelle).

► Caractérisation de la partie entière :

$$n = \lfloor x \rfloor \iff x - 1 < n \leq x \iff n \leq x < n + 1$$

► Montrer qu'une relation binaire est une relation d'équivalence ou une relation d'ordre.

3 Questions de cours

► **Classe d'équivalence** Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E . Rappeler la définition d'une classe d'équivalence. Montrer que deux classes d'équivalence sont soit disjointes soit confondues.

► **Conjugaison** Soit E un ensemble. On définit une relation binaire \sim sur E^E de la manière suivante : pour tout couple $(f, g) \in (E^E)^2$, $f \sim g$ si et seulement si il existe une bijection $\varphi : E \rightarrow E$ telle que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$. Montrer que \sim est une relation d'équivalence.

► **Borne supérieure/borne inférieure** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Déterminer le sens de variation des applications

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \inf_{y \geq x} f(y) \end{cases} \qquad h: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sup_{y \geq x} f(y) \end{cases}$$

► **Retour sur le DS n°5** Tracer les graphes des fonctions $f = \arcsin \circ \cos$ et $g = \arccos \circ \sin$ et justifier les tracés.