Devoir à la maison n°01

A rendre le mercredi 23/09

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1 ★★ **D'après Concours Général 1991**

On considère une suite (x_n) de réels telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2$$

1. Montrer que x_0 ne peut prendre que deux valeurs que l'on précisera.

2. Que peut valoir x_1 ? On distinguera les cas suivant les deux valeurs possibles de x_0.

3. On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelles sont les valeurs possibles de S_0 ? S_1 ?

4. Montrer que, de manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{S}_n = \dfrac{m(m+1)}{2}$.

Exercice 2 ★★★ **D'après Concours Général 1994**

On considère une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ f(m^2+n^2) = f(m)^2 + f(n)^2$$

et $f(1) \neq 0$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

2. En déduire successivement $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(8)$.

3. Calculer $f(3)$, $f(9)$, $f(6)$ et $f(10)$.

4. Calculer $f(50)$ et en déduire $f(7)$.

5. En décomposant 125 de deux façons comme somme de deux carrés, calculer $f(11)$. De même, calculer $f(12)$ en considérant 145.

6. Que peut-on raisonnablement conjecturer sur la valeur de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque ? Prouvez votre conjecture.
On pourra remarquer que

$$(2n+1)^2 + (n-2)^2 = (2n-1)^2 + (n+2)^2$$
$$(2n+2)^2 + (n-4)^2 = (2n-2)^2 + (n+4)^2$$

Exercice 3 ★★

Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Dans la deuxième question de cet exercice, la notation $\sum_{0\leq 2k\leq n}$ signifie que la somme porte sur les indices k tels que $0 \leq 2k \leq n$.
De même, $\sum_{0\leq 2k+1\leq n}$ signifie que la somme porte sur les indices k tels que $0 \leq 2k+1 \leq n$.
Cela permet notamment de séparer élégamment les termes d'indices pairs et impairs d'une somme sans avoir à considérer la parité de n :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{0\leq 2k\leq n} a_{2k} + \sum_{0\leq 2k+1\leq n} a_{2k+1}$$

1. On définit la fonction f_n telle que $f_n(x) = (x+1)^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- **a.** Donner une expression développée de $f_n(x)$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
- **b.** En calculant $f_n'(1)$ de deux manières, simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
- **c.** En calculant $f_n''(1)$ de deux manières, simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.
- **d.** Déduire des questions précédentes une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

2. On définit la fonction g_n telle que $g_n(x) = f_n(x) + f_n(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- **a.** Montrer que $g_n(x) = 2\sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}x^{2k}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- **b.** En calculant $g_n'(1)$ de deux manières, montrer que $\sum_{0\leq 2k\leq n} k\binom{n}{2k} = 2^{n-3}n$.
- **c.** En calculant $g_n''(1)$ de deux manières, montrer que $\sum_{0\leq 2k\leq n} k^2\binom{n}{2k} = 2^{n-5}n(n+1)$.