# Semaine du 02/11 au 06/11

## 1 Cours

### Applications

**Définitions** Ensembles d'arrivée et de départ, graphe, image.

**Composition** Définition, associativité, application identité.

**Injectivité** Définition. Composition et injectivité.

**Surjectivité** Définition. Composition et surjectivité.

**Bijectivité** Définition. Bijection réciproque. Si $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g: \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est bijective si et seulement si il existe $g: \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_\mathrm{F}$ et dans ce cas, $f^{-1} = g$.

**Image directe et réciproque** Définitions. Image directe et réciproque d'une union, d'une intersection.

**Restriction et prolongement** Définitions. Bijection induite.

**Fonction indicatrice** Définition. Fonction indicatrice de l'union, de l'intersection, du complémentaire.

### Fonctions d'une variable réelle

**Généralités** Ensemble de définition. Représentation graphique. Parité, périodicité. Monotonie. Fonctions majorées, minorées, bornées. Minimum et maximum d'une fonction.

**Continuité** Continuité et opérations (continuité d'une composée). Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire pour les fonctions strictement monotones. Théorème de la bijection.

**Dérivabilité** Dérivabilité et opérations (dérivabilité et dérivée d'une composée). Dérivabilité et dérivée d'une bijection réciproque.

## 2 Méthodes à maîtriser

- Savoir prouver l'injectivité en pratique : «Soit $(x, x')$ tel que $f(x) = f(x')$» puis montrer que $x = x'$.
- Savoir prouver la surjectivité en pratique : recherche d'un antécédent (résolution d'une équation).
- Savoir prouver la bijectivité en pratique :
  - Existence et unicité d'une solution de l'équation $y = f(x)$ où $y$ est fixé et $x$ est l'inconnue.
  - Déterminer $g$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}$.
  - Montrer que $f$ est injective et surjective.
- Automatismes :
  - $y \in f(\mathrm{A}) \iff \exists x \in \mathrm{A},\ y = f(x)$
  - $x \in f^{-1}(\mathrm{B}) \iff f(x) \in \mathrm{B}$
- Majorer, minorer, borner (majorer en valeur absolue) une fonction.
- Savoir déterminer le minimum ou le maximum éventuel d'une fonction par une étude de cette fonction.
- Justifier le sens de variation, la continuité ou la dérivabilité d'une composée.
- Déterminer le nombre de solutions d'une équation par étude de fonctions.
- Savoir prouver une inégalité par étude de fonction.

# 3 Questions de cours

**Retour sur le DS n°03**

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} \qquad \mathrm{T}_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1}$$

Justifier que $\mathrm{S}_n + i\mathrm{T}_n = (1+i)^{2n}$ et en déduire des expressions de $\mathrm{S}_n$ et $\mathrm{T}_n$ faisant intervenir les fonctions cos et sin.

**Retour sur le DS n°03**

Résoudre de deux manières l'équation $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$ et en déduire les valeurs de $\tan \frac{\pi}{5}$ et $\tan \frac{2\pi}{5}$. On admettra que la fonction tan est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

**Retour sur l'interro n°03**

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^z \end{cases}$. Déterminer $f^{-1}(i\mathbb{R})$.

**Retour sur le DS n°03**

1. Déterminer les racines cubiques de $\alpha = \dfrac{-1+i}{4}$ et calculer leurs puissances quatrièmes.
2. Déterminer des complexes $\lambda$, $\mu$ et $\beta$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z^4 + \lambda z^3 + \mu z^2 - (1-i)z - \frac{1}{4} = (z+\beta)^4$$