Devoir à la maison n°12

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

Partie I –

$\mathbb{R}[X]$ étant l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, on désigne par E le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ ayant pour éléments les polynômes P tels que

$$\int_0^1 P(t)\,dt = 0$$

On appellera D l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ associant à tout polynôme P sa dérivée P' et d la restriction de D à E.

1. **a.** Montrer que d est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$. On désignera par ϕ l'isomorphisme réciproque $\phi = d^{-1}$.

   b. Montrer que pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $P = \phi(Q)$ si et seulement si $P' = Q$ et $P \in E$.

2. Deux questions pour éviter d'écrire des âneries par la suite.

   a. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, a-t-on toujours $\Phi(P)(0) = \Phi(P(0))$?

   b. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, a-t-on toujours $\Phi(P)(1-X) = \Phi(P(1-X))$?

3. On considère la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $B_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = \phi(B_n)$$

   B_{n+1} est donc l'unique polynôme de E tel que $B'_{n+1} = B_n$.

   a. Expliciter B_1 et B_2.

   b. Vérifier que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a $B_n(0) = B_n(1)$.

4. A tout $n \in \mathbb{N}$, on associe le polynôme P_n défini par :

   $$P_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$$

   a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer P'_{n+1} en fonction de P_n.

   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = \phi(P_n)$.

   c. En déduire que $B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Dans cette question, p désigne un entier naturel non nul. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

   $$Q_n = p^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1} B_n\left(\frac{X+k}{p}\right)$$

a. Montrer que $Q_{n+1} = \phi(Q_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. En déduire que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n = p^{n-1} \sum_{k=0}^{p-1} B_n\left(\frac{X+k}{p}\right)$$

6. A tout $n \in \mathbb{N}$, on associe le polynôme R_n défini par :

$$R_n = B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X)$$

a. Démontrer que l'on a $R'_{n+1} = R_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Déterminer $R_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Déterminer le polynôme R_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. En déduire que pour tout couple (m, n) d'entiers strictement positifs, on a :

$$\sum_{k=1}^{m} k^n = n!(B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(1))$$

Partie II –

Les notations étant celles de la première partie, on pose $b_n = B_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que $B'_{n+1} = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. **a.** Démontrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} \dfrac{X^k}{k!}$.

b. En déduire que la suite (b_n) est définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{(k+1)!}, \qquad \text{avec } b_0 = 1$$

c. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $b_{2m+1} = 0$.

2. On souhaite utiliser les résultats de **I.5** pour déterminer diverses valeurs de B_n.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{b_n\left(1 - 2^{n-1}\right)}{2^{n-1}}$$

b. Soit n un entier naturel *pair*. Donner les expressions en fonction de n et b_n de :

$$B_n\left(\frac{1}{3}\right) \qquad B_n\left(\frac{1}{4}\right) \qquad B_n\left(\frac{1}{6}\right)$$

3. On se propose de démontrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, B_{2m} s'annule une unique fois sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ en un réel que l'on appellera θ_m. On illustrera son propos à l'aide de tableaux de variation.

a. Vérifier qu'il existe au moins un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que la fonction $(-1)^m B_{2m-1}$ soit strictement positive sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ (inutile de chercher très loin).

b. Soit m un tel entier. Étudier les variations de la fonction $(-1)^m B_{2m}$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. En déduire que B_{2m} s'annule une unique fois sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

c. De cette étude, déduire que la fonction $(-1)^{m+1}\mathrm{B}_{2m+1}$ est strictement positive sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

d. Justifier alors la proposition énoncée au début de la question.

e. Vérifier que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, θ_m appartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right[$.

4. **a.** Calculer pour tout $m \in \mathbb{N}$ le maximum de $|\mathrm{B}_{2m}|$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

b. En déduire que : $\sup_{t\in[0,1]} |\mathrm{B}_{2m}(t)| = |b_{2m}|$.

Partie III –

Dans cette partie, on s'intéresse au calcul effectif des polynômes B_n à l'aide de Python. Un polynôme sera représenté par la liste de ses coefficients rangés par ordre de degré croissant.
Par exemple, le polynôme $3\mathrm{X}^3 - 4\mathrm{X}^2 + 7\mathrm{X} - 2$ sera représenté par la liste `[-2,7,-4,3]`.

1. Écrire une fonction `integrale` d'argument un polynôme P et renvoyant $\int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Écrire une fonction `primitive` d'argument un polynôme P et renvoyant l'unique polynôme Q tel que $\mathrm{Q}' = \mathrm{P}$ et $\mathrm{Q}(0) = 0$.

3. A l'aide des fonctions des questions **III.1** et **III.2**, écrire une fonction `phi` d'argument un polynôme P et renvoyant $\phi(\mathrm{P})$.

4. Écrire une fonction `B` d'argument un entier naturel n et renvoyant la liste des polynômes $\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_n$.