

DEVOIR SURVEILLÉ N°07

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

EXERCICE 1.

Soit p un nombre premier. On veut prouver le résultat suivant.

Il existe une infinité de nombres premiers de la forme $kp + 1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

On note ϕ l'application suivante.

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto \sum_{k=0}^{p-1} x^k \end{cases}$$

1. Soit q un nombre premier distinct de p . On *suppose* dans cette question qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $\phi(x) \equiv 0[q]$. On note alors

$$A = \{n \in \mathbb{N}^*, x^n \equiv 1[q]\}$$

- a. Montrer que $p \in A$.
 - b. En exhibant une relation de Bézout entre x et q , montrer que x est premier avec q puis que $q - 1 \in A$.
 - c. Justifier que A contient un plus petit élément que l'on notera m .
 - d. Soit $a \in A$. En effectuant la division euclidienne de a par m , montrer que m divise a .
 - e. Montrer que $m \neq 1$.
 - f. En déduire que $m = p$.
 - g. En déduire que $q \equiv 1[p]$.
2. On suppose qu'il existe seulement un nombre fini de nombres premiers q tels que l'équation diophantienne $\phi(x) \equiv 0[q]$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$ possède au moins une solution. On note q_1, q_2, \dots, q_r ces nombres premiers.
- a. Montrer qu'il existe $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $\phi(q_1 q_2 \dots q_r) \equiv 0[q_i]$.
 - b. Aboutir à une contradiction.
3. Conclure.

EXERCICE 2.

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites réelles.

1. On note F l'ensemble des suites réelles 4-périodiques. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. On note G l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_n = 0$$

et H l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_n = 0$$

Montrer que G et H sont inclus dans F .

3. Montrer que G et H sont des sous-espaces vectoriels de F et donner pour chacun d'eux une famille génératrice.
4. Montrer que $F = G \oplus H$.
5. En déduire une famille génératrice de F .

EXERCICE 3.

On note $E = \mathbb{R}^3$ et on définit les ensembles

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = x - y - z = 0\}$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
3. Déterminer les projetés du vecteur $(1, 2, 3)$ sur F parallèlement à G et sur G parallèlement à F .

EXERCICE 4.

Soit $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} . On considère l'ensemble F des solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}): y'' = (1 + x^2)y$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soient f et g les applications définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2/2} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Montrer que f et g appartiennent à F .

3. Montrer que si v et w appartiennent à F , alors la fonction $v'w - vw'$ est constante sur \mathbb{R} .
4. Soit h un élément de F . Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h = \alpha f + \beta g$. On pourra calculer la dérivée de la fonction $\frac{h}{f}$.
5. Montrer que $F = \text{vect}(f, g)$.
6. En déduire la dimension de F .