

RÉDUCTION ALGÈBRIQUE

1 Polynômes d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

1.1 Structure d'algèbre

Définition 1.1

Soient \mathbb{K} un corps et E un ensemble muni de deux lois internes $+$ et \times ainsi que d'une loi externe . i.e. d'une application :

$$\begin{cases} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow E \\ (\lambda, x) & \longmapsto \lambda.x \end{cases}$$

On dit que $(E, +, \times, .)$ est une \mathbb{K} -**algèbre** si

- (i) $(E, +, .)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel ;
- (ii) $(E, +, \times)$ est un anneau ;
- (iii) $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2, \lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y).$

REMARQUE. Si la loi \times est commutative, on dit que E est une algèbre commutative.

Exemple 1.1

- Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel, $(\mathcal{L}(E), +, \circ, .)$ est une \mathbb{K} -algèbre. Elle est non commutative dès que $\dim E \geq 2$.
- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$ est une \mathbb{K} -algèbre. Elle est non commutative dès que $n \geq 2$.
- $\mathbb{K}[X]$ est une \mathbb{K} -algèbre commutative.
- Si X est un ensemble, $(\mathbb{K}^X, +, \times, .)$ est une \mathbb{K} -algèbre commutative.

Définition 1.2 Sous-algèbre

Soit $(E, +, \times, .)$ une \mathbb{K} -algèbre et F un ensemble. On dit que F est une **sous-algèbre** de E si

- (i) $F \subset E$;
- (ii) F est un sous-espace vectoriel de E ;
- (iii) F est un sous-anneau de E .

Proposition 1.1

Une sous-algèbre d'une \mathbb{K} -algèbre est une \mathbb{K} -algèbre.

Proposition 1.2 Caractérisation des sous-algèbres

Soit $(E, +, \times, .)$ une \mathbb{K} -algèbre et F un ensmble. On dit que F est une **sous-algèbre** de E si et seulement si

- (i) $F \subset E$;
- (ii) $1_E \in F$;
- (iii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2, \lambda.x + \mu.y \in F$;
- (iv) $\forall (x, y) \in F^2, x \times y \in F$.

Exemple 1.2

- Soit E un espace vectoriel. Alors l'ensemble $\mathbb{K} \text{Id}_E$ des homothéties de E est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.
- L'ensemble $\mathbb{K}I_n$ des matrices scalaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si I est un intervalle de \mathbb{R} , pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $(\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K}), +, \times, .)$ est une sous-algèbre de \mathbb{K}^I .
- Soit I est un intervalle de \mathbb{R} et $(k, p) \in (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})^2$. Si $k \geq p$, alors $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$.

Définition 1.3 Morphisme d'algèbres

Soient $(E, +, \times, .)$ et $(F, +, \times, .)$ deux \mathbb{K} -algèbres. On appelle **morphisme de \mathbb{K} -algèbres** de E dans F toute application $f : E \rightarrow F$ telle que :

- (i) $f(1_E) = 1_F$,
- (ii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2, f(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.f(x) + \mu.f(y)$,
- (iii) $\forall (x, y) \in E^2, f(x \times y) = f(x) \times f(y)$,

REMARQUE. Une application est donc un morphisme d'algèbres si et seulement si elle est à la fois un morphisme d'espaces vectoriels i.e. une application linéaire et un morphisme d'anneaux.

REMARQUE. On peut également définir des notions d'**endomorphisme**, d'**isomorphisme** et d'**automorphisme** d'algèbres.

Proposition 1.3 Images directe et réciproque d'une sous-algèbre par un morphisme d'algèbres

Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme de \mathbb{K} -algèbres.

- (i) Si G est une sous-algèbre de E , alors $f(G)$ est une sous-algèbre de F .
- (ii) Si H est une sous-algèbre de F , alors $f^{-1}(H)$ est une sous-algèbre de E .

Proposition 1.4

Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme de \mathbb{K} -algèbres. Alors $\text{Im } f$ est une sous-algèbre de F .



ATTENTION ! De manière générale, $\text{Ker } f$ n'est pas une sous-algèbre de E . En effet, $1_E \notin \text{Ker } f$ à moins que F soit l'algèbre nulle (i.e. $0_F = 1_F$).

1.2 Définition d'un polynôme d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

Définition 1.4

- (i) Soient u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel et $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$. On pose $P(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$.
- (ii) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$. On pose $P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n A^n$.

Exemple 1.3

Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E et $P = X^2 + X + 1$, alors $P(u) = u^2 + u + \text{Id}_E$ (et non $u^2 + u + 1$, ce qui n'aurait aucun sens).

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = X^2 + X + 1$, alors $P(A) = A^2 + A + I_n$ (et non $A^2 + A + 1$, ce qui n'aurait aucun sens).

Exercice 1.1

Soient u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $\text{Ker } P(u)$ et $\text{Im } P(u)$ sont des sous-espaces vectoriels stables par u .

Lemme 1.1

- (i) Soient u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, $u(x) = \lambda x \implies P(u)(x) = P(\lambda)x$.
- (ii) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors pour tout $(\lambda, X) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = \lambda X \implies P(A)X = P(\lambda)X$.

Définition 1.5 Sous-algèbre engendrée par un endomorphisme ou une matrice carrée

- (i) Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . L'application $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(u) \in \mathcal{L}(E)$ est un morphisme de \mathbb{K} -algèbres. L'image de ce morphisme, notée $\mathbb{K}[u]$, est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.
- (ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un morphisme de \mathbb{K} -algèbres. L'image de ce morphisme, notée $\mathbb{K}[A]$, est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2 Application à la réduction

2.1 Polynômes annulateurs

Définition 2.1 Polynôme annulateur

- (i) Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle **polynôme annulateur** de u tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$.
- (ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme annulateur** de A tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$.

Proposition 2.1 Polynôme annulateur et valeur propre

- (i) Soient u un endomorphisme d'un espace vectoriel et P un polynôme annulateur de u . Alors toute valeur propre de u est racine de P .
- (ii) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P un polynôme annulateur de A . Alors toute valeur propre de A est racine de P .



ATTENTION ! La réciproque est fausse. Une racine d'un polynôme annulateur n'est pas forcément une valeur propre.

Théorème 2.1 Lemme des noyaux

Soient P_1, \dots, P_r des polynômes premiers entre eux deux à deux et $P = \prod_{i=1}^r P_i$.

- (i) Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel. Alors

$$\text{Ker } P(u) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker } P_i(u)$$

- (ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\text{Ker } P(A) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker } P_i(A)$$

Corollaire 2.1 Polynôme annulateur et diagonalisabilité

- (i) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors u est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.
- (ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples.

Corollaire 2.2 Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Soient u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel stable par F . Alors $u|_F$ est diagonalisable.

De plus, $\text{Sp}(u|_F) \subset \text{Sp}(u)$ et pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u|_F)$, $E_\lambda(u|_F) \subset E_\lambda(u)$.

REMARQUE. En fait, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u|_F)$, $E_\lambda(u|_F) = E_\lambda(u) \cap F$.

Exercice 2.1

Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables d'un même espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que si u et v commutent, alors il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux diagonales.

Proposition 2.2 Polynôme annulateur et trigonalisabilité

- (i) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors u est trigonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de u scindé.
- (ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est trigonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines.

Exercice 2.2

Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables d'un même espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que si u et v commutent, alors il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux triangulaires supérieures.

On peut affiner ce résultat.

Proposition 2.3

- (i) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie annulé par un polynôme scindé. Alors il existe des sous-espaces vectoriels E_1, \dots, E_r de E stables par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$ et tels que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, l'endomorphisme induit par u sur E_i soit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.
- (ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ annulée par un polynôme scindé. Alors A est semblable à une matrice diagonale par blocs où chaque bloc diagonal est la somme d'une matrice scalaire et d'une matrice triangulaire supérieure stricte.

REMARQUE. Plus précisément, si $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$ annule u , alors en posant $E_i = \text{Ker}(u - \lambda_i)^{m_i}$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, les E_i sont stables par u et $u|_{E_i} = \lambda_i \text{Id}_{E_i} + n_i$ avec $n_i = u|_{E_i} - \lambda_i \text{Id}_{E_i}$ nilpotent.

De même, si $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$ annule A , alors A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & (*) \\ & \ddots \\ (0) & \lambda_1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & (*) \\ & \ddots \\ (0) & \lambda_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_n & (*) \\ & \ddots \\ (0) & \lambda_n \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Décomposition de Dunford

Il en résulte qu'il existe des endomorphismes d et n de E tels que

- $u = d + n$;
- les restrictions de d aux sous-espaces vectoriels E_1, \dots, E_r sont des homothéties ;
- n est nilpotent ;
- d et n **commutent**.

On peut alors montrer que ces endomorphismes d et n sont uniques. L'écriture $u = d + n$ s'appelle la **décomposition de Dunford** de l'endomorphisme u .

De même, il existe des matrices D et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

- $A = D + N$;
- D est diagonalisable ;
- N est nilpotente ;
- D et N **commutent**.

A nouveau, ces matrices D et N sont uniques. L'écriture $A = D + N$ s'appelle la **décomposition de Dunford** de la matrice A .

Théorème 2.2 Cayley-Hamilton

- (i) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**. Alors $\chi_u(u) = 0$.
- (ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $d = \deg \pi_A$. Alors $\chi_A(A) = 0$.

2.2 Idéal annulateur

Définition 2.2 Idéal annulateur d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

- (i) Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Le noyau du morphisme d'algèbres $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(u) \in \mathcal{L}(E)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé **idéal annulateur** de u .
- (ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le noyau du morphisme d'algèbres $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé **idéal annulateur** de A .

Proposition 2.4 Polynôme minimal

- (i) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**. L'idéal annulateur de u admet un unique générateur unitaire appelé **polynôme minimal** de u , noté π_u .
- (ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'idéal annulateur de A admet un unique générateur unitaire appelé **polynôme minimal** de A , noté π_A .

REMARQUE. En clair, ceci signifie que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(u) = 0 \iff \pi_u | P \quad \text{et} \quad P(A) = 0 \iff \pi_A | P$$

En particulier, le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique en vertu du théorème de Cayley-Hamilton.



ATTENTION! Une erreur classique consiste à croire qu'il suffit d'«enlever» les puissances du polynôme caractéristique pour obtenir le polynôme minimal.

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A = (X-1)^2(X-2)^2$ et on vérifie que $(X-1)(X-2)$ n'annule pas A . On a en fait $\pi_A = (X-1)(X-2)^2$.



ATTENTION! L'idéal annulateur d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension infinie peut être réduit à $\{0\}$, auquel cas il n'existe pas de polynôme minimal.

Par exemple, l'idéal annulateur de l'endomorphisme $D : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P'$ est nul.

Exemple 2.1

Le polynôme minimal d'un projecteur sur un sous-espace vectoriel non trivial est $X(X-1)$.

Le polynôme minimal d'une symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel non trivial est $(X-1)(X+1)$.

Exemple 2.2

- (i) Si u est un endomorphisme nilpotent d'indice p d'un espace vectoriel de dimension n , alors son polynôme minimal est X^p . Puisque son polynôme caractéristique est X^n et que π_u divise χ_u , on en déduit $p \leq n$.
- (ii) Si A est une matrice nilpotente d'indice p de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors son polynôme minimal est X^p . Puisque son polynôme caractéristique est X^n et que π_A divise χ_A , on en déduit $p \leq n$.

Exercice 2.3 Matrice compagnon

Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Montrer que $\chi_A = \pi_A = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Proposition 2.5 Spectre et polynôme minimal

- (i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\text{Sp}(A)$ est l'ensemble des racines de π_A .
- (ii) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de E de **dimension finie**. Alors $\text{Sp}(u)$ est l'ensemble des racines de π_u .

Proposition 2.6 Polynôme minimal d'un endomorphisme induit

Soient u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel stable par F . Alors $\pi_{u|_F}$ divise π_u .

Proposition 2.7 Diagonalisabilité et polynôme minimal

- (i) Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Dans ce cas, $\pi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$.
- (ii) Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Dans ce cas, $\pi_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)$.

Proposition 2.8 Trigonalisabilité et polynôme minimal

- (i) Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé.
- (ii) Une matrice carrée est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

Proposition 2.9 Dimension de la sous-algèbre engendrée par un endomorphisme ou une matrice carrée

- (i) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**. Posons $d = \deg \pi_u$. Alors $\dim \mathbb{K}[u] = d$ et $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.
- (ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $d = \deg \pi_A$. Alors $\dim \mathbb{K}[A] = d$ et $(A^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[A]$.

Sous-espaces caractéristiques

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme minimal est scindé i.e.

$$\pi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{\mu_\lambda}$$

On appelle **sous-espace caractéristique** associé à la valeur propre λ le sous-espace vectoriel

$$N_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^{\mu_\lambda}$$

Le lemme des noyaux garantit que

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} N_\lambda(u)$$

Par ailleurs, le polynôme caractéristique de u est alors de la forme

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$$

où $\mu_\lambda \leq m_\lambda$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$. On peut montrer que

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), N_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^{m_\lambda}$$

Si u est diagonalisable, alors $\mu_\lambda = 1$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$. Les sous-espaces caractéristiques sont alors exactement les sous-espaces propres.

Les sous-espaces caractéristiques de u sont stables par u . L'endomorphisme u_λ de $N_\lambda(u)$ induit par u est alors de la forme $\lambda \text{Id}_{N_\lambda(u)} + n_\lambda$ où n_λ est un endomorphisme nilpotent de $N_\lambda(u)$ (cf. Proposition 2.3).

3 Exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice

Définition 3.1 Exponentielle d'un endomorphisme

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de **dimension finie** et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u^n}{n!}$ converge absolument. Sa somme est appelée **exponentielle** de u et est notée e^u ou $\exp(u)$.

REMARQUE. L'exponentielle de l'endomorphisme nul de $\mathcal{L}(E)$ est Id_E .

Définition 3.2 Exponentielle d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ converge absolument. Sa somme est appelée **exponentielle** de A et est notée e^A ou $\exp(A)$.

REMARQUE. L'exponentielle de la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice identité I_n .

REMARQUE. Si N est une matrice **nilpotente** d'indice d . Alors

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{N^k}{k!}$$

Exercice 3.1 Exponentielle d'une matrice diagonale

Montrer que l'exponentielle d'une matrice diagonale D est une matrice diagonale et que les coefficients diagonaux de $\exp(D)$ sont les exponentielles des coefficients diagonaux de D .

Exercice 3.2 Exponentielle d'une matrice triangulaire

Montrer que l'exponentielle d'une matrice triangulaire supérieure / inférieure T est une matrice triangulaire supérieure / inférieure et que les coefficients diagonaux de $\exp(T)$ sont les exponentielles des coefficients diagonaux de T .

Exercice 3.3 Exponentielle et similitude

Soit $(A, B, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \times \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Montrer que $\exp(B) = P^{-1}\exp(A)P$.

Exercice 3.4

Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\exp(M) = P(M)$. On pourra au choix utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange ou montrer que $\mathbb{K}[M]$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Méthode Calcul de l'exponentielle d'une matrice diagonalisable

Pour calculer l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut chercher, **si possible**, à la diagonaliser. En effet, si $A = PDP^{-1}$, alors $\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}$ et l'exponentielle d'une matrice diagonale est facile à calculer.

Exemple 3.1 Exponentielle d'une matrice diagonalisable

On souhaite calculer l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = (X - 1)(X - 4) + 2 = X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$$

Comme χ_A est scindé à racines simples, χ_A est diagonalisable. De plus, $\text{Sp}(A) = \{2, 3\}$ et les sous-espaces propres sont

$$E_2(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad E_3(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

Ainsi $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. De plus,

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \text{com}(P)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalement

$$\exp(A) = P \exp(D) P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^2 - e^3 & e^2 - e^3 \\ 2e^3 - 2e^2 & 2e^3 - e^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.5

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$. Montrer de deux manières différentes que $\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Proposition 3.1 Exponentielle d'une somme

- Soient a et b deux endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ qui **commutent**. Alors $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$.
- Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui **commutent**. Alors $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$.

REMARQUE. On en déduit notamment que si A et B commutent, $\exp(A)$ et $\exp(B)$ commutent également.



ATTENTION ! L'hypothèse de commutativité est essentielle. Par exemple, si l'on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on

obtient aisément $\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ (A est diagonale) et $\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B est nilpotente). En posant $C = A + B =$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on s'aperçoit facilement que $C^n = C$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $\exp(C) = \begin{pmatrix} 1 & e - 1 \\ 0 & e \end{pmatrix}$. On vérifie alors facilement que $\exp(A + B) \neq \exp(A) \exp(B)$.

Exemple 3.2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $A = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque en particulier que N est **nilpotente**. Comme

I_3 et N commutent, $\exp(A) = \exp(I_3) \exp(N)$. Or $\exp(I_3) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ et $\exp(N) = I_3 + N + \frac{N^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On en

déduit que $\exp(A) = \begin{pmatrix} e & e & e/2 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

Décomposition de Dunford et exponentielle

Un théorème hors-programme affirme que pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable, il existe un endomorphisme diagonalisable d et un endomorphisme nilpotent n qui **commutent** tels que $u = d + n$. Cette écriture s'appelle la **décomposition** de Dunford de u . On a bien évidemment un énoncé similaire pour les matrices.

Si l'on dispose d'une décomposition de Dunford $u = d + n$, alors $\exp(u) = \exp(d) \exp(n)$ et les exponentielles d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent sont simples à calculer.

Exemple 3.3 Exponentielle d'une matrice trigonalisable

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 1 \\ -2 & X-1 & 2 \\ -3 & 1 & X+2 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ 0 & X-1 & 2 \\ X-1 & 1 & X+2 \end{vmatrix} \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ 0 & X-1 & 2 \\ 0 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1)$$

Comme χ_A est scindé, A est trigonalisable. De plus, $\text{Sp}(A) = \{-1, 1\}$ et les sous-espaces propres sont

$$E_{-1}(A) = \text{vect}(C_1) \quad \text{avec} \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad E_1(A) = \text{vect}(C_2) \quad \text{avec} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notamment, A n'est pas diagonalisable. On cherche alors C_3 vérifiant $AC_3 = C_3 + C_2$ et on trouve par exemple $C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $A = PTP^{-1}$ en posant $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que $\exp(A) = P \exp(T) P^{-1}$.

Or, d'une part, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et, d'autre part, $T = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. D et N commutent de sorte que

$$\exp(T) = \exp(D) \exp(N) = \exp(D)(I_3 + N) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

Enfin, on trouve

$$\exp(A) = P \exp(T) P^{-1} = \begin{pmatrix} e - e^{-1} & -e & e^{-1} \\ e - e^{-1} & e & e^{-1} - e \\ e - 2e^{-1} & -e & 2e^{-1} \end{pmatrix}$$

Corollaire 3.1 Exponentielle et inversibilité

- Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\exp(a) \in \text{GL}(E)$ et $\exp(a)^{-1} = \exp(-a)$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\exp(A) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Exercice 3.6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det(\exp(A)) > 0$.
2. On suppose A **antisymétrique**. Montrer que $\exp(A) \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3.7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(A) = e^{\operatorname{tr}(A)}$.