Devoir à la maison n°09

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1

$$\chi_M = \det(XI_n - M) = \det((XI_n - M)^\top) = \det(XI_n - M^\top) = \chi_{M^\top}$$

Comme le spectre d'une matrice est l'ensemble des racines du polynôme caractéristique, $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(M^\top)$.

2 Supposons que M est diagonalisable. Alors il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $M = PDP^{-1}$. Ainsi

$$M^\top = (P^{-1})^\top D^\top P^\top = (P^\top)^{-1} D P^\top$$

Ainsi $M^\top$ est diagonalisable. Par involuitivité de la transposition, la réciproque est également vraie.
Par conséquent, M est diagonalisable si et seulement si $M^\top$ est diagonalisable.

3 On note $L_0, \dots, L_{n-1}$ les lignes des déterminants suivants.

$$\begin{aligned}
\chi_{C_Q} &= \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & Q(X) \\ -1 & X & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} && L_0 \leftarrow L_0 + \sum_{k=1}^{n-1} X^k L_k \\
&= (-1)^{n+1} Q(X) \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} && \text{en développant par rapport à la première ligne} \\
&= (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} Q(X) = Q(X) && \text{car le déterminant est triangulaire}
\end{aligned}$$

4 Soit $X = (x_0, \dots, x_{n-1})^\top \in \mathrm{Ker}(C_Q^\top - \lambda I_n)$. Les coordonnées de X vérifient $x_{k+1} = \lambda x_k$ pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$. On en déduit que $x_k = \lambda^k x_0$ pour tout $k \in [\![0, n-1$. En posant $V_\lambda = (1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})^\top$, on a donc $X \in \mathrm{vect}(V_\lambda)$. Ainsi $E_\lambda(C_Q^\top) \subset \mathrm{vect}(V_\lambda)$. Comme λ est valeur propre de $C_Q^\top$, $\dim E_\lambda(C_Q^\top) \geq 1$, $E_\lambda(C_Q^\top) = \mathrm{vect}(V_\lambda)$. Ainsi V_λ est un vecteur directeur de $E_\lambda(C_Q^\top)$.

5 Supposons que f est cyclique. Il existe donc $x_0 \in E$ tel que $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Notamment, il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^n(x_0) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k-1}(x_0)$. Dans la base $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$, la matrice de f est C_Q.

Réciproquement, supposons que la matrice de f est de la forme C_Q dans une base $(e_0,\dots,e_{n-1})$ de E. On a donc $f(e_k)=e_{k+1}$ pour tout $k\in[\![0,n-2]\!]$. On en déduit que $e_k=f^k(e_0)$ pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$. Ainsi $(e_0,f(e_0),\dots,f^{n-1}(e_0))$ est une base de E. On en déduit que f est cyclique.

6 Supposons que f est diagonalisable. On sait que sa matrice est de la forme C_Q dans une base adaptée. Il suffit donc de montrer que $\chi_f=\chi_{C_Q}=\chi_{C_Q^\top}$ est scindé à racines simples. Comme f est diagonalisable, C_Q l'est aussi et donc $C_{Q^\top}$ l'est également d'après la question **2**. Soit donc λ une racine de $C_{Q^\top}$ i.e. $\lambda\in\mathrm{Sp}(Q^\top)$. D'après la question **4**, $\dim E_\lambda(C_Q^\top)=1$. Mais comme $C_Q^\top$ est diagonaliable, $m_\lambda(C_Q^\top)=\dim E_\lambda(C_Q^\top)=1$. Ainsi $\chi_{C_Q^\top}=\chi_f$ est scindé à racines simples.
Réciproquement, si χ_f est scindé à racines simples, f est diagonalisable.

7 Supposons f cyclique. Il existe donc $x_0\in E$ tel que $(x_0,f(x_0),\dots,f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Soit $(\lambda_0,\dots,\lambda_{n-1})\in\mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^n\lambda_kf^k=0$. En évaluant en x_0 et en utilisant la liberté de $(x_0,f(x_0),\dots,f^{n-1}(x_0))$, on obtient $\lambda_k=0$ pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$. Ainsi $(\mathrm{Id}_E,f,\dots,f^{n-1})$ est libre.
Notons $d=\deg\pi_f$. On sait déjà que $d\le n$ car π_f divise χ_f. De plus, π_f annule f donc la famille $(\mathrm{Id}_E,f,\dots,f^d)$ est liée. On ne peut avoir $d<n$ sinon cette famille serait une sous-famille de la famille libre $(\mathrm{Id}_E,f,\dots,f^{n-1})$ et serait donc libre. Ainsi $\deg\pi_f=d=n$.

8 On vérifie que $\{P\in\mathbb{K}[X],\ P(f)(x)=0_E\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Comme tous les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont principaux, cet idéal est engendré par un polynôme unitaire $\pi_{f,x}$. Notons $p=\deg\pi_{f,x}$. Par minimalité du degré de $\pi_{f,x}$, la famille $(x,f(x),\dots,f^{p-1}(x))$ est libre. De plus, en posant $\pi_{f,x}=X^p+\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_kX^k$, on a bien $f^p(x)+\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_kf^k(x)=0_E$.

9 Posons $F=\mathrm{vect}(x,f(x),\dots,f^{p-1}(x))$. Il est clair que $f(f^k(x))=f^{k+1}(x)\in F$ pour tout $k\in[\![0,p-2]\!]$ et d'après la question précédente, on a également $f(f^{p-1}(x))=f^p(x)=-\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_kf^k(x)\in F$. Ainsi, par linéarité de f,

$$f(F)=f\left(\mathrm{vect}(x,f(x),\dots,f^{p-1}(x))\right)=\mathrm{vect}\left(f(x),f^2(x),\dots,f^p(x)\right)\subset F$$

10 Notons f_F l'endomorphisme de F induit par f. La matrice de f_F dans la base $\mathrm{vect}(x,f(x),\dots,f^{p-1}(x))$ est $C_{\pi_{f,x}}$. On en déduit que $\chi_{f_F}=\pi_{f,x}$ d'après la question **3**. Or on sait que χ_{f_F} divise χ_f. Donc $\pi_{f,x}=X^p+\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_kX^k$ divise χ_f.

11 D'après la question précédente, il existe $Q\in\mathbb{K}[X]$ tel que $\chi_f=Q\pi_{f,x}$. Ainsi $\chi_f(f)(x)=Q(f)\circ\pi_{f,x}(f)(x)=Q(f)(0_E)=0_E$. Ceci est valable pour tout vecteur x non nul de E et aussi pour $x=0_E$ donc $\chi_f(f)=0$.

12 Remarquons déjà que $\pi_f=X^r$.
Supposons que f est cyclique. D'après la question **7**, $r=\deg\pi_f=n$.
Supposons que $r=n$. Par définition de l'indice de nilpotence, il existe $x\in E$ non nul tel que $f^{n-1}(x)\neq0_E$. Montrons que la famille $(x,f(x),\dots,f^{n-1}(x))$ est une base de E. Comme $\dim E=n$, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit donc $(\lambda_0,\dots,\lambda_{n-1})\in\mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_kf^k(x)=0_E$. Supposons que les λ_k ne soient pas tous nuls et notons $j=\min\{k\in[\![0,n-1]\!],\ \lambda_k\neq0\}$. Alors $\sum_{k=j}^{n-1}\lambda_kf^k(x)=0_E$ et en appliquant f^{n-1-j}, on trouve $\lambda_jf^{n-1}(x)=0_E$ et donc $\lambda_j=0$, ce qui est contradictoire. Les λ_k sont donc tous nuls. La famille $(x,f(x),\dots,f^{n-1}(x))$ est donc une base de E et f est cyclique.
La matrice de f dans cette base est alors C_{X^n}.

13 $(f-\lambda_k\,\mathrm{Id}_E)^{m_k}\in\mathbb{C}[f]$. Or $\mathbb{C}[f]$ est une algèbre commutative donc f et $(f-\lambda_k\,\mathrm{Id}_E)^{m_k}$ commutent. En particulier, $F_k=\mathrm{Ker}(f-\lambda_k\,\mathrm{Id}_E)^{m_k}$ est stable par f.
De plus, les λ_k sont distincts deux à deux donc les polynômes $P_k=(X-\lambda_k\,\mathrm{Id}_E)^{m_k}$ sont premiers entre eux deux à deux. D'après le lemme des noyaux,

$$\mathrm{Ker}\,\chi_f(f)=\bigoplus_{k=1}^p\mathrm{Ker}(f-\lambda_k\,\mathrm{Id}_E)^{m_k}$$

Or $\chi_f(f)=0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton donc

$$E=\bigoplus_{k=1}^pF_k$$

14 Comme $F_k=\mathrm{Ker}(f-\lambda_k\,\mathrm{Id}_E)^{m_k}$, $\varphi_k^{m_k}(x)=(f-\lambda_k\,\mathrm{Id}_E)^{m_k}(x)=0$ pour tout $x\in F_k$. Ainsi $\varphi_k^{m_k}=0$ et φ_k est nilpotent.

15 D'après le cours, l'indice de nilpotence de φ_k est inférieur ou égal à la dimension de F_k i.e. $\nu_k\le\dim(F_k)$.

16 Puisque $(\mathrm{Id}_E,f,\dots,f^{n-1})$ est libre, $\deg\pi_f=n$. Posons $P=\prod_{k=1}^p(X-\lambda_k)^{\nu_k}$ ainsi que $Q_k=\prod_{j\neq k}(X-\lambda_j)^{\nu_j}$ pour $k\in[\![1,p]\!]$. Soit $k\in[\![1,p]\!]$.

$$\forall x\in F_k,\ P(f)(x)=Q_k(f)\circ(f-\lambda_k\,\mathrm{Id}_E)^{\nu_k}(x)=Q_k(f)\circ\varphi_k^{\nu_k}(x)=Q_k(f)(0_E)=0_E$$

Comme $\mathrm{E} = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k$, $\mathrm{P}(f) = 0$. Par conséquent, π_f divise p et donc $\deg \pi_f \leq \deg \mathrm{P}$ i.e. $\sum_{k=1}^{n} \nu_k \geq n$. De plus, $\sum_{k=1}^{n} m_k = \deg \chi_f = n$ donc $\sum_{k=1}^{p} m_k - \nu_k = 0$. Enfin, $\varphi^{m_k} = 0$ donc, par définition de l'indice de nilpotence $\nu_k \leq m_k$. Les termes de la dernière somme sont positifs et donc nuls puisque cette somme est nulle. Ainsi $\nu_k = m_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

17 On a également $\sum_{k=1}^{p} \dim \mathrm{F}_k = n$ puisque $\mathrm{E} = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k$. A nouveau, $\sum_{k=1}^{p} \dim(\mathrm{F}_k) - \nu_k = 0$ et les termes de cette somme sont positifs. Ainsi $\dim(\mathrm{F}_k) = \nu_k = m_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$. D'après la question **12**, les φ_k sont cycliques et il existe une base $\mathcal{B}_k$ de F_k dans laquelle la matrice de φ_k est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. L'endomorphisme f_k de F_k induit par f est $\lambda_k \operatorname{Id}_{\mathrm{E}} + \varphi_k$ et sa matrice dans la base $\mathcal{B}_k$ est donc $\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_k & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation des base $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ est bien de la forme voulue.

18 Posons $e_k = u_{1+\sum_{i=1}^{k-1} m_i}$ de sorte que $x_0 = \sum_{k=1}^{p} e_k$. On vérifie que $e_k \in \mathrm{F}_k$ par définition de la base $\mathcal{B}$. Faisons alors quelques remarques préliminaires.

- Pour tout $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{Q}(f)(e_k) \in \mathrm{F}_k$ car F_k est stable par f.
- Par définition de $\mathcal{B}$, $(e_k, \varphi(e_k), \dots, \varphi_k^{m_k-1}(e_k))$ est une base de F_k.

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Q}(f)(x_0) = 0 \\
\iff & \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Q}(f_k)(e_k) = 0_{\mathrm{E}} \\
\iff & \forall k \in [\![1, p]\!],\ \mathrm{Q}(f)(e_k) = 0_{\mathrm{E}} \qquad \text{car les } \mathrm{F}_k \text{ sont en somme directe} \\
\iff & \forall k \in [\![1, p]\!],\ \forall j \in [\![0, m_k - 1]\!],\ \mathrm{Q}(f_k)(\varphi_k^j(e_k)) = 0_{\mathrm{E}} \qquad \text{car } \mathrm{Q}(f_k) \text{ et } \varphi_k = f_k - \lambda_k \operatorname{Id}_{\mathrm{F}_k} \text{ commutent} \\
\iff & \forall k \in [\![1, p]\!],\ \mathrm{Q}(f_k) = 0 \qquad \text{car } (e_k, \varphi(e_k), \dots, \varphi_k^{m_k-1}(e_k)) \text{ est une base de } \mathrm{F}_k \\
\iff & \forall k \in [\![1, p]\!],\ \mathrm{Q}(\varphi_k + \lambda_k \operatorname{Id}_{\mathrm{F}_k}) = 0 \\
\iff & \forall k \in [\![1, p]\!],\ \pi_{\varphi_k} \mid \mathrm{Q}(\mathrm{X} + \lambda_k) \\
\iff & \forall k \in [\![1, p]\!],\ \mathrm{X}^{m_k} \mid \mathrm{Q}(\mathrm{X} + \lambda_k) \\
\iff & \forall k \in [\![1, p]\!],\ (\mathrm{X} - \lambda_k)^{m_k} \mid \mathrm{Q} \\
\iff & \prod_{k=1}^{p} (\mathrm{X} - \lambda_k)^{m_k} \mid \mathrm{Q} \qquad \text{car les } \lambda_k \text{ sont deux à deux distincts} \\
\iff & \chi_f \mid \mathrm{Q}
\end{aligned}
$$

19 Il suffit pour cela de montrer que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E et donc que cette famille est libre. Soit donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$. En posant $\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \mathrm{X}^k$, on a donc $\mathrm{Q}(f)(x_0) = 0$. D'après la question précédente, χ_f divise Q. Or $\deg \chi_f = n$ et $\deg \mathrm{Q} < n$ donc $\mathrm{Q} = 0$ puis $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) = (0, \dots, 0)$. Ainsi $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est bien libre et c'est une base de E. f est bien cyclique.

20 $\mathrm{C}(f)$ est le noyau de l'endomorphisme $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mapsto f \circ g - g \circ f$ donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. $\mathrm{C}(f)$ contient évidemment $\operatorname{Id}_{\mathrm{E}}$ et on montre aisément qu'il est stable par $\circ$. C'est donc une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

21 Question triviale : il suffit de dire que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

22 Posons $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \mathrm{X}^k$. La question précédente montre que $g(x_0) = \mathrm{P}(f)(x_0)$. Comme g commute avec f, on montre par récurrence que g commute avec f^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Notamment, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$g(f^k(x_0)) = f^k(g(x_0)) = f^k \circ \mathrm{P}(f)(x_0) = \mathrm{P}(f) \circ f^k(x_0) = \mathrm{P}(f)(f^k(x_0))$$

Les endomorphismes g est $\mathrm{P}(f)$ coïncident sur la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ de E donc ils sont égaux. Ainsi $g = \mathrm{P}(f) \in \mathbb{K}[f]$.

23 Soit $g \in \mathrm{C}(f)$. En reprenant la question précédente, il existe bien $\mathrm{R} \in \mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que $g = \mathrm{R}(f)$. Réciproquement, s'il existe $\mathrm{R} \in \mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que $g = \mathrm{R}(f)$, f commute avec g car l'algèbre $\mathbb{K}[f]$ est commutative.

24 On raisonne par l'absurde. Supposons qu'aucun des F_i ne contienne tous les autres. Alors pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, il existe $x_i \in \mathrm{F}_i$ tel que $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathrm{F}_j$.

25 On vérifie que pour tout $x \in \mathrm{E}$, I_x est bien un idéal de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Il est donc engendré par un unique polynôme unitaire $\pi_{f,x}$. De plus, en notant $\mathrm{I} = \pi_f \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ l'idéal annulateur de f, on a clairement $\mathrm{I} \subset \mathrm{I}_x$ et donc $\pi_{f,x}$ divise π_f. Remarquons que l'ensemble des diviseurs unitaires de π_f est fini. Il existe donc $x_1, \dots, x_r$ dans E tel que $\left\{\pi_{f,x},\ x \in \mathrm{E}\right\} = \{\pi_{f,x_1}, \dots, \pi_{f,x_r}\}$. De manière évidente, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $x \in \operatorname{Ker} \pi_{f,x}(f)$. Alors

$$\mathrm{E} = \bigsqcup_{x \in \mathrm{E}} \operatorname{Ker} \pi_{f,x}(f) = \bigsqcup_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} \pi_{f,x_i}(f)$$

D'après la question précédente, E est égal à l'un des noyaux. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} \pi_{f,x_1}(f)$. Ainsi π_{f,x_1} est un polynôme annulateur de f de sorte que π_f divise π_{f,x_1}. Mais on a déjà vu que π_{f,x_1} divisait π_f donc $\pi_f = \pi_{f,x_1}$. Notamment $\deg \pi_{f,x_1} = d$. Soit alors $(\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}) \in \mathbb{K}^d$ tel que $\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k f^k(x_1) = 0_{\mathrm{E}}$. Alors $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k \mathrm{X}^k \in \mathrm{I}_{x_1}$ donc π_{f,x_1} divise P. Mais $\deg \pi_{f,x_1} = d$ et $\deg \mathrm{P} < d$ donc $\mathrm{P} = 0$ puis $(\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}) = (0, \dots, 0)$. La famille $(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1))$ est bien libre.

26 Pour tout $k \in [\![1, d-1]\!]$, $f(e_k) = e_{k+1} \in \mathrm{E}_1$. De plus, comme $\deg \pi_f = d$, $f^d \in \operatorname{vect}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}, f, \dots, f^{d-1})$ et donc $f(e_d) = f^d(x_1) \in \operatorname{vect}(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1)) = \mathrm{E}_1$. On en déduit que E_1 est stable par f.
Comme $\deg \pi_f = d$, $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}_{d-1}[f]$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\{\mathrm{P}(f)(x_1),\ \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]\} &= \{u(x_1),\ u \in \mathbb{K}[f]\} \\
&= \{u(x_1),\ u \in \mathbb{K}_{d-1}[f]\} \\
&= \{\mathrm{P}(f)(x_1),\ \mathrm{P} \in \mathbb{K}_{d-1}[\mathrm{X}]\} \\
&= \operatorname{vect}(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1)) = \mathrm{E}_1
\end{aligned}$$

27 Une base de E_1 est $(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1)) = (x_1, \psi_1(x_1), \dots, \psi_1^{d-1}(x_1))$ donc ψ_1 est cyclique.

28 Soit $x \in \mathrm{F}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\Phi(f^i(f(x))) = \Phi(f^{i+1}(x)) = 0$ donc $f(x) \in \mathrm{F}$. Ainsi F est stable par f.
Soit $x \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{F}$. Comme $x \in \mathrm{E}_1$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{K}^d$ tel que $x = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k e_k$. Comme $x \in \mathrm{F}$, $\lambda_d = 0$. Puis en appliquant successivement f, f^2, …, f^{d-1} à l'égalité précédente, on obtient $\lambda_{d-1} = 0$, $\lambda_{d-2} = 0$, …, $\lambda_1 = 0$ (rédiger une récurrence). Ainsi $x = 0_{\mathrm{E}}$ puis $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{F} = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

29 On va montrer que $\operatorname{Ker} \Psi = \mathrm{F}$. L'inclusion $\mathrm{F} \subset \operatorname{Ker} \Psi$ est évidente. Comme $\deg \pi_f = d$, $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}_{d-1}[f]$. On en déduit que $\operatorname{Ker} \Psi \subset \mathrm{F}$. Ainsi E_1 est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} \Psi$ dans E. On en déduit que Ψ induit un isomorphisme de E_1 sur $\operatorname{Im} \Psi$. Mais comme $\dim \mathrm{E}_1 = \dim \mathbb{K}^d = d$, $\operatorname{Im} \Psi = \mathbb{K}^d$. Finalement, Ψ induit un isomorphisme de E_1 sur $\mathbb{K}^d$.

30 D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{F} = \dim \operatorname{Ker} \Psi = \dim \mathrm{E} - \operatorname{rg} \Psi = n - d$. Ainsi $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{E}_1 = n$. Comme $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{F} = \{0_{\mathrm{E}}\}$, $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{F}$.

31

32 Notons $f_1, \dots, f_r$ les endomorphismes de $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_r$ induits par f. L'application qui à $(g_1, \dots, g_r) \in \prod_{i=1}^{r} \mathrm{C}(f_i)$ associe l'unique $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $g_{|\mathrm{E}_i} = g_i$ est bien définie, linéaire, injective et à valeurs dans $\mathrm{C}(f)$.
Ainsi $\dim \mathrm{C}(f) \geq \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{C}(f_i)$. Mais comme les f_i sont cycliques, $\dim \mathrm{C}(f_i) = \dim \mathrm{E}_i$. Finalement, $\dim \mathrm{C}(f) \geq \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{E}_i = \dim \mathrm{E} = n$.

33 Si on note $d = \deg \pi_f$. Alors $d = \dim \mathbb{K}[f] = \dim \mathrm{C}(f) \geq n$. Mais $d \leq n$ donc $d = n$. Notamment, $(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}, f, \dots, f^{n-1})$ est libre. On en déduit d'après la partie II.B que f est cyclique.

34 Posons $\mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
D'après le théorème de réduction des isométries vectorielles, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, avec pour blocs diagonaux I_p, $-\mathrm{I}_q$ et r blocs diagonaux $\mathrm{R}(\theta_i)$ ($\theta_i \in]0, \pi[$). On a alors $\chi_f = (\mathrm{X}-1)^p(\mathrm{X}+1)^q \prod_{i=1}^{r}(\mathrm{X} - 2\mathrm{X}\cos\theta_i + 1)$.
De la même manière, il existe une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, avec pour blocs diagonaux $\mathrm{I}_{p'}$, $-\mathrm{I}_{q'}$ et r' blocs diagonaux $\mathrm{R}(\theta'_i)$ ($\theta'_i \in]0, \pi[$). On a alors $\chi_f = (\mathrm{X}-1)^{p'}(\mathrm{X}+1)^{q'} \prod_{i=1}^{r'}(\mathrm{X} - 2\mathrm{X}\cos\theta'_i + 1)$. Comme $\chi_f = \chi_{f'}$, l'unicité de la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ nous apprend que $p = p'$, $q = q'$, $r = r'$ et, quitte à réordonner les θ'_i (i.e. réordonner les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$), $\cos\theta_i = \cos\theta'_i$ i.e. $\theta_i = \theta'_i$ (puisque $\theta_i, \theta'_i \in]0, \pi[$). Ainsi f et f' ont la même matrice dans les bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

35 Supposons que f est orthocyclique. Il existe donc une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q. Mais comme $f \in \mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{B}$ est orthonormale, C_Q est orthogonale. Posons $Q = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. La dernière colonne de C_Q est orthogonale aux précédentes, ce qui donne $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$. La dernière colonne de C_Q est unitaire, ce qui donne $\sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 = 1$ i.e. $a_0^2 = 1$ i.e. $a_0 = \pm 1$. On en déduit que $\chi_f = Q = X^n + a_0 = X^n \pm 1$. Réciproquement supposons que $\chi_f = X^n \pm 1$. Soit $\mathcal{B}_0$ une base orthonormale de E. Soit $f' \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans cette base est C_Q avec $Q = X^n \pm 1$. On vérifie que C_Q est bien orthogonale : la famille des colonnes de C_Q est bien orthonormale. Comme $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormale, $f' \in O(E)$. Par ailleurs, $\chi_{f'} = X^n \pm 1 = \chi_f$. D'après la question précédente, il existe des bases orthonormales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E dans lesquelles f et f' ont même matrice. Notons $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(f') = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthormées, la formule de changement de base donne l'existence de $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^\top C_Q P$. Par conséquent, $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = P^\top C_Q P$. En notant $\mathcal{B}_1$ la famille de vecteurs de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $P^\top$. Comme $P^\top$ est orthogonale, $\mathcal{B}_1$ est une base orthonormale et, par formule de changement de base, $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = C_Q$. Ceci prouve que f est orthocyclique.

36 Comme f est nilpotent, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E dans laquelle f est triangulaire supérieure stricte. En notant $F_i = \operatorname{vect}(e_1, \dots, e_i)$, on a donc $f(F_i) \subset F_{i-1}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (on peut convenir que $F_0 = \{0\}$). On applique l'algorithme de Gram-Schmidt à cette base $(e_1, \dots, e_n)$ et on obtient une base orthonormale $(u_1, \dots, u_n)$ de E telle que $\operatorname{vect}(u_1, \dots, u_i) = \operatorname{vect}(e_1, \dots, e_i) = F_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi $f(u_i) \in f(F_i) \subset F_{i-1} = \operatorname{vect}(u_1, \dots, u_{i-1})$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. La matrice de f dans la base $(u_n, \dots, u_1)$ est donc encore triangulaire inférieure stricte.

37 Supposons que f est orthocyclique. Il existe donc une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q. Comme f est nilpotent, $\chi_f = X^n = Q$. La dernièr colonne de C_Q est donc nulle de sorte que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} C_Q = n - 1$. Par ailleurs, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}(e_n)$ et comme $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormale, $(\operatorname{Ker} f)^\perp = \operatorname{vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$. Ainsi $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base orthonormée de f. Soit $(x, y) \in ((\operatorname{Ker} f)^\perp)^2$. Alors

$$x = \sum_{i=1}^{n-1} \langle x, e_i \rangle e_i \qquad\qquad y = \sum_{i=1}^{n-1} \langle y, e_i \rangle e_i$$

puis

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle x, e_i \rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle x, e_i \rangle e_{i+1} \qquad\qquad f(y) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle y, e_i \rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle y, e_i \rangle e_{i+1}$$

Comme $(e_1, \dots, e_{n-1})$ et $(e_2, \dots, e_n)$ sont toutes deux orthonormées

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle$$

Inversement, supposons que f est de rang $n-1$ et que $\forall (x, y) \in ((\operatorname{Ker} f)^\perp)^2,\ \langle x, y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle$. D'après la question précédente, il existe une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire inférieure stricte. On a notamment $f(e_n) = 0_E$ et comme $\operatorname{rg}(f) = n - 1$, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}(e_n)$ en vertu du théorème du rang. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormale, $(\operatorname{Ker} f)^\perp = \operatorname{vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$.