Devoir surveillé n°09

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 ★★

On dit qu'un nombre complexe z est *combinaison comvexe* de nombres complexes $z_1, \dots, z_n$ s'il existe des *réels positifs* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$$

On cherche à montrer le théorème suivant.

Si $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, toute racine complexe de P' est combinaison convexe des racines complexes de P.

1. On traite d'abord un exemple. Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^4 - 8\mathrm{X}^3 + 18\mathrm{X}^2 - 16\mathrm{X} + 32$.

- **a.** Déterminer les racines complexes de P sachant que 4 est une racine multiple de P.
- **b.** Déterminer les racines complexes de P'.
- **c.** Ecrire chacune des racines de P' comme une combinaison convexe des racines de P.

2. On traite maintenant le cas général. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ dont la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ est la suivante :

$$\mathrm{P} = \prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - \alpha_k)^{r_k}$$

- **a.** Rappeler la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}$ dans $\mathbb{C}(\mathrm{X})$.
- **b.** Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P' qui ne soit pas une racine de P. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} r_k \cdot \frac{z - \alpha_k}{|z - \alpha_k|^2} = 0$$

- **c.** Justifier que z est combinaison convexe de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Exercice 2 ★★

On considère dans cet exercice un entier $p \geq 2$ et un polynôme à coefficients réels de degré p et de coefficient dominant $a_p = 1$:

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{p} a_k \mathrm{X}^k$$

On se propose de localiser dans le plan complexe les racines du polynôme P, afin de savoir dans quelle zone rechercher d'éventuelles racines de ce polynôme P.
On désigne à cet effet par M le nombre réel positif suivant :

$$\mathrm{M} = \max_{0 \leq k \leq p-1} |a_k| = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{p-1}|\}$$

1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall r \in \mathbb{R}_+,\ f(r) = r^{p+1} - (\mathrm{M}+1)r^p + \mathrm{M}$$

a. Déterminer l'unique zéro strictement positif r_0 de la dérivée de f.
Comparer les positions de r_0 et 1 en fonction des positions de M et $\frac{1}{p}$.

b. On suppose $\mathrm{M} \leq \frac{1}{p}$. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
En déduire le signe de $f(r)$ lorsque $r > 1$.

c. On suppose $\mathrm{M} > \frac{1}{p}$. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
En déduire le signe de $f(r)$ lorsque $r \geq \mathrm{M}+1$.

2. Localisation des racines du polynôme P.

a. Démontrer que toute racine complexe z du polynôme P de module différent de 1 vérifie l'inégalité

$$|z|^p \leq \mathrm{M}\frac{|z|^p - 1}{|z| - 1}$$

En supposant $|z| > 1$, montrer que l'on a l'inégalité $f(|z|) \leq 0$.

b. Etablir que si $\mathrm{M} \leq \frac{1}{p}$, alors les racines de P sont de module inférieur ou égal à 1.

c. Etablir que si $\mathrm{M} > \frac{1}{p}$, alors les racines de P sont de module strictement inférieur à $\mathrm{M}+1$.

3. On suppose dans cette question que

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^p - \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{X}^k$$

a. Montrer que les racines complexes de P sont de module inférieur ou égal à 1.

b. Montrer que 1 est un racine simple de P.

4. On suppose dans cette question que

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^p - \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{X}^k$$

a. Montrer que les racines complexes de P sont de module strictement inférieur à 2.

b. Etablir que, si z est racine de P, alors z est racine du polynôme $\mathrm{X}^{p+1} - 2\mathrm{X}^p + 1$.

c. En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(r) = r^{p+1} - 2r^p + 1$, établir que :

- le polynôme P a une racine réelle x_p telle que $\dfrac{2p}{p+1} \leq x_p \leq 2$;
- la suite (x_p) converge vers 2.

5. On pose maintenant $\varepsilon_p = 2 - x_p$ et on étudie ε_p lorsque p tend vers $+\infty$.

- Etablir que $(2 - x_p)x_p^p = 1$ puis que $\varepsilon_p = (2 - \varepsilon_p)^{-p}$. En déduire que la suite de terme général $p\varepsilon_p$ converge vers 0.
- Etablir qu'on a le développement asymptotique suivant

$$x_p \underset{p\to+\infty}{=} 2 - \frac{1}{2^p} + o\left(\frac{1}{2^p}\right)$$

6. Etablir enfin que si z est une racine de P, alors $\dfrac{1}{z}$ est racine de

$$\mathrm{Q} = \mathrm{X}^p + \mathrm{X}^{p-1} + \cdots + \mathrm{X} - 1 = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{X}^k - 1$$

En déduire que toutes les racines de P sont de module strictement compris entre $\dfrac{1}{2}$ et 2.