Problème 1 – Polynômes de Bernoulli et fonction Γ

1. On trouve

$$B_1 = X - \frac{1}{2} \qquad\qquad B_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}$$

On en déduit que

$$b_1 = -\frac{1}{2} \qquad\qquad b_2 = \frac{1}{12}$$

2. Soit un entier $n \geq 2$.

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(t)\,dt = \int_0^1 B_{n-1}(t)\,dt = 0$$

car $n-1 \in \mathbb{N}^*$.

3. Tout d'abord, $A_0 = (-1)^0 B_0(1-X) = 1$.
Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n' = -(-1)^n B_n'(1-X) = (-1)^{n-1} B_{n-1}(1-X) = A_{n-1}$$

Enfin, via le changement de variable $u = 1-t$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 A_n(t)\,dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t)\,dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(u)\,du = 0$$

Ces trois conditions définissant de manière la suite (B_n), on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = A_n = (-1)^n B_n(1-X)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **.3**

$$B_{2n+1}(1) = (-1)^{2n+1} B_{2n+1}(0) = -B_{2n+1}(0)$$

Or $2n+1 \geq 2$ donc d'après la question **.2**, $B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(0)$. On en déduit que

$$B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1) = 0$$

5. La formule de Taylor de Taylor stipule que

$$B_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Par une récurrence évidente, $B_n^{(k)} = B_{n-k}$ lorsque $k \leq n$. En particulier, $B_n^{(n)} = B_0 = 1$ de sorte que $B_n^{(k)} = 0$ lorsque $k > n$. Ainsi

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_{n-k}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!} X^k$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait d'après la question **.5** que

$$B_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{b_{2n+2-k}}{k!} X^k$$

En évaluant cette égalité en 1, on obtient

$$B_{2n+2}(1) = \sum_{k=0}^{2n+2-k} \frac{b_{2n+2-k}}{k!}$$

Or $2n+2 \geq 2$ donc $B_{2n+2}(1) = B_{2n+2}(0) = b_{2n+2}$ d'après la question **.2**. Ainsi

$$b_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{b_{2n+2-k}}{k!}$$

En effectuant le changement d'indice $k \mapsto 2n+2-k$, on en déduit que

$$b_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{b_k}{(2n+2-k)!}$$

Supposons maintenant que $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum_{k=0}^{2n+2} \frac{b_k}{(2n+2-k)!} = b_{2n+2} + b_{2n+1} + \sum_{k=0}^{2n} \frac{b_k}{(2n+2-k)!}$$

Or $b_{2n+1} = \mathrm{B}_{2n+1}(0) = 0$ puisque $n \in \mathbb{N}^*$ d'après la question **.4**. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{b_k}{(2n+2-k)!} = 0$$

On sépare alors les termes d'indices pairs et impairs

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{b_{2k}}{(2n+2-2k)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{2k+1}}{(2n+1-2k)!} = 0$$

A nouveau, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $b_{2k+1} = \mathrm{B}_{2k+1}(0) = 0$ donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{2k+1}}{(2n+1-2k)!} = \frac{b_1}{(2n+1)!} = \frac{1}{2(2n+1)!}$$

Finalement,

$$\frac{1}{2(2n+1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{b_{2k}}{(2n+2-2k)!} = 0$$

En isolant le dernier temre de la somme, on obtient

$$\frac{1}{2(2n+1)!} + \frac{b_{2n}}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{b_{2k}}{(2n+2-2k)!} = 0$$

et donc

$$b_{2n} = \frac{1}{(2n+1)!} - 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{2k}}{(2n+2-2k)!}$$

7. La question **.6** donne pour $n = 2$

$$b_4 = \frac{1}{5!} - 2\left(\frac{b_0}{6!} + \frac{b_2}{4!}\right) = \frac{1}{120} - \frac{1}{360} - \frac{1}{144} = \frac{6}{720} - \frac{2}{720} - \frac{5}{720} = -\frac{1}{720}$$

8. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Par une intégration par parties,

$$\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(0)}{\lambda} - \frac{f(1)\cos\lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t$$

On a clairement

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{f(0)}{\lambda} = 0$$

De plus,

$$\left|\frac{f(1)\cos\lambda}{\lambda}\right| \leq \frac{|f(1)|}{\lambda}$$

et $\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{|f(1)|}{\lambda} = 0$ donc

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{f(1)\cos\lambda}{\lambda} = 0$$

Enfin, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale,

$$\left|\frac{1}{\lambda}\int_0^1 f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{\lambda}\int_0^1 |f(t)\cos(\lambda t)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\lambda}\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Or $\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ donc

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\int_0^1 f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$$

On en déduit finalement que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^1 f(t)\sin(\lambda t) = 0$$

9. Tout d'abord $t \mapsto t(1-t)$ et $t \mapsto \sin(\pi t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et la seconde fonction ne s'annule pas sur $]0,1[$. Ainsi φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$. Par ailleurs, $t(1-t) \underset{t\to0}{\sim} t$ et $\sin(\pi t) \underset{t\to0}{\sim} \pi t$ donc $\varphi \underset{0}{\sim} \frac{1}{\pi}$ puis $\lim_0 \varphi = \frac{1}{\pi}$.
Ensuite, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\varphi'(t) = \frac{(1-2t)\sin(\pi t) - t(1-t)\pi\cos(\pi t)}{\sin^2(\pi t)}$$

Or

$$\begin{aligned}(1-2t)\sin(\pi t) &\underset{t\to0}{=} (1-2t)(\pi t + o(t^2)) \underset{t\to0}{=} \pi t(1-2t+o(t))\\ t(1-t)\pi\cos(\pi t) &\underset{t\to0}{=} \pi t(1-t)(1+o(t)) = \pi t(1-t+o(t))\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}(1-2t)\sin(\pi t) - t(1-t)\pi\cos(\pi t) &\underset{t\to0}{=} -\pi t^2 + o(t^2)\\ &\underset{t\to0}{\sim} -\pi t^2\end{aligned}$$

De plus, $\sin^2(\pi t) \underset{t\to0}{\sim} \pi^2 t^2$ donc $\varphi' \underset{0}{\sim} -\frac{1}{\pi}$ i.e. $\lim_0 \varphi' = -\frac{1}{\pi}$.
On remarque ensuite que pour $t \in]0,1[$, $\varphi(1-t) = \varphi(t)$ et donc que $\varphi'(1-t) = -\varphi'(t)$. On en déduit que $\lim_1 \varphi = \lim_0 \varphi = \frac{1}{\pi}$ et que $\lim_1 \varphi' = -\lim_0 \varphi' = \frac{1}{\pi}$.
Puisque φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et que φ et φ' admettent des limites finies en 0 et 1, φ peut se prolonger en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

10. Soit $t \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}\sin(\pi t)\sum_{k=1}^p \cos(2k\pi t) &= \sum_{k=1}^p \sin(\pi t)\cos(2k\pi t)\\ &= \sum_{k=1}^p \frac{1}{2}(\sin(2k\pi t+\pi t) - \sin(2k\pi t - \pi t))\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^p \sin((2k+1)\pi t) - \sin((2k-1)\pi t)\\ &= \frac{1}{2}(\sin((2p+1)\pi t) - \sin(\pi t))\end{aligned}$$

Comme $\sin(\pi t) \neq 0$,

$$\sum_{k=1}^p \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2p+1)\pi t)}{2\sin(\pi t)} - \frac{1}{2}$$

11. Puisque $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1) = 0$, les polynômes X et $1-\mathrm{X}$ divisent P. Etant premiers entre eux, leur produit $\mathrm{X}(1-\mathrm{X})$ divise également P. Il existe donc $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P} = \mathrm{X}(1-\mathrm{X})\mathrm{Q}$.
Remarquons également que pour tout $t \in]0,1[$

$$t(1-t)\sum_{k=1}^p \cos(2k\pi t) = t(1-t)\left(\frac{\sin((2p+1)\pi t)}{2\sin(\pi t)} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\varphi(t)\sin((2p+1)t) - \frac{1}{2}t(1-t)$$

Mais comme les fonctions $t \mapsto t(1-t)\sum_{k=1}^p \cos(2k\pi t)$ et $t \mapsto \frac{1}{2}\varphi(t)\sin((2p+1)t) - \frac{1}{2}t(1-t)$ sont continues sur $[0,1]$, l'égalité est en fait valide pour tout $t \in [0,1]$.

Soit maintenant $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p}\int_0^1 \mathrm{P}(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1\left(\sum_{k=1}^{p}\cos(2k\pi t)\right)t(1-t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (\varphi(t)\mathrm{Q}(t)\sin((2p+1)t) - t(1-t)\mathrm{Q}(t))\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{Q}(t)\sin((2p+1)t\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or comme $t \mapsto \varphi(t)\mathrm{Q}(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$,

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{Q}(t)\sin((2p+1)t\,\mathrm{d}t = 0$$

d'après la question **.8**.
On en déduit donc que

$$\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}\int_0^1 \mathrm{P}(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$$

12. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{k,1} &= \int_0^1 \mathrm{B}_2(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2k\pi}\left[\mathrm{B}_2(t)\sin(2k\pi t)\right]_0^1 - \frac{1}{2k\pi}\int_0^1 \mathrm{B}_1(t)\sin(2k\pi t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } \mathrm{B}_2' = \mathrm{B}_1\\ &= -\frac{1}{2k\pi}\int_0^1 \mathrm{B}_1(t)\sin(2k\pi t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } \sin(2k\pi) = \sin(0) = 0\\ &= \frac{1}{(2k\pi)^2}\left[\mathrm{B}_1(t)\cos(2k\pi t)\right]_0^1 - \frac{1}{(2k\pi)^2}\int_0^1 \mathrm{B}_0(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } \mathrm{B}_1' = \mathrm{B}_0\\ &= \frac{1}{(2k\pi)^2} - \frac{1}{(2k\pi)^2}\int_0^1 \cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } \mathrm{B}_0 = 1,\ \mathrm{B}_1(1) = 1/2 \text{ et } \mathrm{B}_1(0) = -1/2\\ &= \frac{1}{(2k\pi)^2} - \frac{1}{(2k\pi)^3}\left[\sin(2k\pi t)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{(2k\pi)^2}\end{aligned}$$

13. Soit un entier $n \geq 2$. On procède à des intégrations par parties successives.

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{k,n} &= \int_0^1 \mathrm{B}_{2n}(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2k\pi}\left[\mathrm{B}_{2n}(t)\sin(2k\pi t)\right]_0^1 - \frac{1}{2k\pi}\int_0^1 \mathrm{B}_{2n}'(t)\sin(2k\pi t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{2k\pi}\int_0^1 \mathrm{B}_{2n-1}(t)\sin(2k\pi t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{(2k\pi)^2}\left[\mathrm{B}_{2n-1}(t)\cos(2k\pi t)\right]_0^1 - \frac{1}{(2k\pi)^2}\int_0^1 \mathrm{B}_{2n-1}'(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{(2k\pi)^2}\int_0^1 \mathrm{B}_{2n-2}(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } \mathrm{B}_{2n-1}(0) = \mathrm{B}_{2n-1}(1)\ (2n-1 \geq 2 \text{ car } n \geq 2)\\ &= -\frac{1}{(2k\pi)^2}\mathrm{I}_{k,n-1}\end{aligned}$$

La suite $(\mathrm{I}_{k,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{(2k\pi)^2}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_{k,n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n-2}}\mathrm{I}_{k,1} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^n}$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $n \geq 2$ et $b_{2n} = \mathrm{B}_{2n}(0) = \mathrm{B}_{2n}(1)$ d'après la question **.2**. Le polynôme $\mathrm{B}_{2n} - b_{2n}$ s'annule donc en 0 et 1. La question **.11** montre que

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} \int_0^1 (\mathrm{B}_{2n}(t) - b_{2n}) \cos(2k\pi t)\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2} \int_0^1 (\mathrm{B}_{2n}(t) - b_{2n})\ \mathrm{d}t$$

Or on sait que

$$\int_0^1 \mathrm{B}_{2n}(t) \cos(2k\pi t) = \mathrm{I}_{k,n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}} \qquad \int_0^1 \mathrm{B}_{2n}(t)\ \mathrm{d}t = 0$$

$$\int_0^1 b_{2n} \cos(2k\pi t)\ \mathrm{d}t = \frac{b_{2n}}{2k\pi} [\sin(2k\pi t)]_0^1 = 0 \qquad \int_0^1 b_{2n}\ \mathrm{d}t = b_{2n}$$

On en déduit que

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}} = \frac{b_{2n}}{2}$$

ou encore que

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{b_{2n}}{2}$$

et enfin que

$$\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n} b_{2n}}{2}$$

15. On obtient

$$\zeta(2) = \frac{(2\pi)^2 b_2}{2} = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\zeta(4) = -\frac{(2\pi)^4 b_4}{2} = \frac{\pi^4}{90}$$