Révisions d'intégration

Exercice 1 ★

Calculer

1. $\int x \arctan^2(x)\ \mathrm{d}x$
2. $\int e^x \sin^2(x)\ \mathrm{d}x$
3. $\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x$ en posant $u = \ln x$
4. $\int \frac{x\ \mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}}$ en posant $u = \sqrt{1+x}$.
5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x}$

Exercice 2 ★★

On pose $\mathrm{S} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\ \mathrm{d}t$ et $\mathrm{C} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\ \mathrm{d}t$.

1. Justifier que S et C sont bien définies.
2. Montrer que $\mathrm{S} = \mathrm{C}$ par changement de variable.
3. Que vaut $\mathrm{S} + \mathrm{C}$? En déduire S et C.
4. En déduire $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t + \sqrt{1-t^2}}$.

Exercice 3 ★★ **Règles de Bioche**

Calculer

1. $\int_0^{\pi} \frac{\sin t\ \mathrm{d}t}{4 - \cos^2 t}$ en posant $u = \cos t$;
2. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$ pour $x \in]0, \pi[$ en posant $u = \cos t$;
3. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t}$ en posant $u = \sin t$;
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t + \cos t}$ en posant $u = \tan \frac{t}{2}$.

Exercice 4 ★★★ **Indice d'un lacet**

Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas sur $[0,1]$ et tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

1. On pose $\mathrm{F} : x \in [0,1] \mapsto \exp\left(\int_0^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\ \mathrm{d}t\right)$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
2. Justifier qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{F} = \lambda\gamma$.
3. En déduire que $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\ \mathrm{d}t \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 5 ★★ **Intégrales de Wallis**

On pose pour tout $n \geq 0$,

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1.

2. En intégrant par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

3. En déduire une expression de I_{2n} et I_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de factorielles.

4. Vérifier que $(\mathrm{I}_n)_{n\geq 0}$ est décroissante. En déduire que $\dfrac{n+1}{n+2}\mathrm{I}_n \leq \mathrm{I}_{n+1} \leq \mathrm{I}_n$.

5. Démontrer que $\mathrm{I}_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{I}_n$.

6. Établir que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ (n+1)\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n = \dfrac{\pi}{2}$.

7. En déduire que

$$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 6

On pose pour $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^n}$.

1. Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.

2. A l'aide d'une intégration par parties, donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 7 ★★

On considère la suite de terme général $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$.

1. Déterminer la limite de (I_n).

2. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

3. On pose $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer S_n en fonction de I_n.

4. En déduire la convergence et la limite de (S_n).

Exercice 8

Calculer les intégrales suivantes.

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} x\sin(x)\ \mathrm{d}x \qquad \mathrm{J} = \int_1^2 x^2\ln(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{K} = \int_0^{\pi} e^{2x}\sin(3x)\ \mathrm{d}x \qquad \mathrm{L} = \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x\ \mathrm{d}x$$

Exercice 9

Calculer les primitives suivantes.

1. $\displaystyle\int x^2e^{3x}\ \mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int \arctan(x)\ \mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int e^{2x}\sin x\ \mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int \arcsin(x)\ \mathrm{d}x$

Convergences

Exercice 10 ★★

On pose $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $u_n = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+(x+n\pi)^4\sin^2 x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Encadrer les termes de la suite (u_n) à l'aide des termes de la suite (v_n) où

$$v_n = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+(n\pi)^4\sin^2 x}$$

3. Calculer explicitement v_n et en déduire un équivalent de u_n.

4. En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}$.

Exercice 11 ★★★★ Mines MP 2016

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré supérieur ou égal à 2.

1. Déterminer la nature de l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \cos(\mathrm{P}(x))\,\mathrm{d}x$.

2. Déterminer la nature de l'intégrale $\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} |\cos(\mathrm{P}(x))|\,\mathrm{d}x$.

3. Déterminer le signe de I lorsque $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2$.

Exercice 12 ★★

Les intégrales suivantes convergent-elles ?

1. $\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$

2. $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

3. $\int_0^{+\infty} x\sin(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$

4. $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$

5. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$

6. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

7. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 13 ★★ Intégrales de Bertrand

1. Pour quelles valeurs des réels α et β l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ converge-t-elle ?

2. Même question pour l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$.

Exercice 14 ★★★ Centrale-Supélec MP 2021

On considère $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer l'existence de I.

2. Montrer $\mathrm{I} < 0$.

Exercice 15 ★★★

1. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge.

2. Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 16 ★★★

Pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ?

Exercice 17 ★★★ **X-ESPCI PC 2013**

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $(f')^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Montrer qu'il en est de même pour $g : t \mapsto \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2$.

Exercice 18 ★★ **Non convergence absolue de l'intégrale de Dirichlet**

Montrer que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 19 ★★ **E3A PSI 2020**

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel λ, on pose $\mathrm{I}(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, lorsque cela existe.

1. Justifier qu'il existe au plus réel λ tel que $\mathrm{I}(\lambda)$ converge.

2. Pour tout réel x, on pose $\mathrm{H}_\lambda(x) = \int_a^x (\lambda - f(t))\,\mathrm{d}t$.

   Démontrer que, si H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $\mathrm{I}(\lambda)$ existe et $\mathrm{I}(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

3. On suppose désormais que f est continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique.

   a. Montrer que pour tout réel x :
   $$\mathrm{H}_\lambda(x+\mathrm{T}) - \mathrm{H}_\lambda(x) = \lambda\mathrm{T} - \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   b. Montrer qu'il existe une unique valeur λ_0 du réel λ pour la quelle la suite $(\mathrm{H}_\lambda(a+n\mathrm{T}))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

   c. Prouver que, dans ce cas, la fonction H_λ est périodique et bornée sur $\mathbb{R}$.

   d. Déterminer alors toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles $\mathrm{I}(\lambda)$ converge.

   e. Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose
   $$\mathrm{A}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(nt)|}{t}\,\mathrm{d}t$$

   a. Justifier que A_n et B_n sont bien définies.

   b. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$.

   c. Démontrer que la suite $(\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

   d. A l'aide d'un changement de variable et de la question **3**, déterminer un équivalent de B_n lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de A_n lorsque n tend vers l'infini.

Théorie

Exercice 20 ★★★★

1. Soit f une application continue par morceaux de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite ℓ en $+\infty$ et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\ell = 0$.
2. Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

Exercice 21 ★★★★

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Exercice 22 ★★★★

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' soit de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f' est également de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)$$

Exercice 23 ★★★ **Banque Mines-Ponts PSI 2021**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1. Prouver que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la suite $n \mapsto \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que dans ces conditions :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Que se passe-t-il si on enlève l'hypothèse $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

Calculs

Exercice 24 ★★★

Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2-\frac{b^2}{t^2}}\,\mathrm{d}t$ où $a, b > 0$. On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 25 ★★★

n désigne un entier naturel et α un réel strictement supérieur à -1. On pose

$$\mathrm{I}_n(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}}$$

1. Justifier que cette intégrale est bien définie.
2. Calculer $\mathrm{I}_0(0)$. Posant $t = \sqrt{\frac{1+\alpha x}{1-x}}$, calculer $\mathrm{I}_0(\alpha)$. Montrer que la fonction $\alpha \mapsto \mathrm{I}_0(\alpha)$ est continue en 0.
3. En dérivant $x^n\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}$ trouver une relation de récurrence entre $\mathrm{I}_{n-1}(\alpha)$, $\mathrm{I}_n(\alpha)$ et $\mathrm{I}_{n+1}(\alpha)$. En déduire les valeurs de $\mathrm{I}_n(0)$ et $\mathrm{I}_n(1)$.

Exercice 26 ★★

Convergence et calcul de
$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$$

Exercice 27 ★★★ **X MP 2010**

Déterminer
$$\sup_{x>0} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2 + t^2} \mathrm{d}t$$

Exercice 28 ★★★

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\mathrm{I}(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)}$ converge-t-elle ?
2. On pose $\mathrm{J}(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)}$. Montrer que $\mathrm{I}(a) = \mathrm{J}(a) + \mathrm{J}(-a)$.
3. En déduire la valeur de $\mathrm{I}(a)$.

Exercice 29 ★★ **CCP MP**

1. Déterminer le domaine de définition $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2 + t^2} \mathrm{d}t$.
2. Calculer $\mathrm{F}(1)$.
3. Calculer $\mathrm{F}(x)$ pour tout x dans le domaine de définition de f.

Exercice 30 ★★★ **Intégrale de Dirichlet**

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ converge.
2. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)} \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t} \mathrm{d}t$$
Justifier que u_n et v_n sont bien définies.
3. En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite (u_n) est constante et préciser sa valeur.
4. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$. Par une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b h(t)\sin(\lambda t) \mathrm{d}t = 0$.
5. Montrer que la fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{\cos t}{\sin t}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
6. Calculer la limite de la suite $(u_n - v_n)$ puis celle de (v_n).
7. En déduire la valeur de I.

Exercice 31 ★★★ **TPE-EIVP PSI 2017**

Soit $a > 1$, Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$ admettant une limite finie ℓ en $+\infty$.

1. Montrer que pour tout x dans $[1, +\infty[$:
$$\int_1^x \frac{f(at) - f(t)}{t} \mathrm{d}t = \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t - \int_1^a \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$$
2. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(at) - f(t)}{t} \mathrm{d}t$ converge et la calculer en fonction de $\displaystyle\int_1^a \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$ et de ℓ.

Exercice 32 ★★

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt$.

1. Justifier que l'intégrale définissant I converge.

2. Montrer que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\, dt$.

3. Montrer que $2I = \int_0^{\pi} \ln(\sin t)\, dt$.

4. En déduire la valeur de I.

Exercice 33 ★★★

Soient a et b deux réels strictement positifs. Convergence et calcul de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt$$

Exercice 34 ★★

Existence et calcul de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$$

Exercice 35 ★★ **Trigonométrie**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier la convergence et calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-at}\, dt \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-at}\, dt$$

Exercice 36 ★

Déterminer la nature des intégrales suivantes et calculer leurs valeurs le cas échéant.

1. $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{4+t^2}\, dt$

2. $J = \int_0^{2} \frac{1}{4-t^2}\, dt$

3. $K = \int_0^{+\infty} \sin(t)\, dt$

4. $L = \int_0^{1} \ln(t)\, dt$

5. $M = \int_0^{+\infty} e^{-at}\, dt$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$

6. $N = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{1-9t^2}}\, dt$

7. $O = \int_3^{+\infty} \frac{dt}{t^2-3t+2}$

8. $P = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln t}$

Exercice 37 ★★ **E3A MP Maths1 2015**

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge. On admer alors que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

2. Dans la suite de l'énoncé, α désigne un réel strictement positif et x un réel.

   a. Montrer que l'application $t \mapsto \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{-itx}$ est prolongeable par continuité en 0.

   b. Montrer que l'application $t \mapsto \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{-itx}$ ainsi prolongée est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3. On pose

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{-itx}\,dt$$

   a. Montrer que I est réelle.

   b. Soient $\mathrm{A} > 0$ et $\mathrm{B} > 0$. On admet l'existence de l'intégrale $\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\,dx$. Montrer que

$$\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\,dx = \frac{\cos(\mathrm{AB})}{\mathrm{A}} - \mathrm{B}\int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

   c. En déduire le calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}$ pour $\mathrm{B} > 0$ puis pour B quelconque.

   d. En déduire la valeur de I.

Comportements asymptotiques

Exercice 38 ★★★ **Centrale PSI**

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(x) = f(x) + \int_0^x f(t)\,dt$$

On suppose que φ admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f admet pour limite 0 en $+\infty$.

Exercice 39 ★★★★ **Mines-Ponts MP 2016**

1. Soient $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(a) > 0$ et f de classe $\mathcal{C}_1$ sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f' + af = 0$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.
2. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f'' + f' + f = 0$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.
3. Généraliser.

Exercice 40 ★★★ **Centrale MP 2018**

Soit $f: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ continue de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $g: x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

1. Déterminer la limite de g en 0.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. Montrer que g est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 41 ★★★

Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{F}: x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 42 ★★★

1. Montrer que $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer un équivalent de $g : x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 43 ★★★

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) + f'(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 44 ★★★ **Banque Mines-Ponts PSI 2021**

Soit $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable sur I et déterminer f'.
3. Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$ est définie et la calculer.

Exercice 45 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2017**

On pose pour tout x non nul,

$$\mathrm{F}(x) = \int_x^{7x} \frac{1 - e^{-t}}{t^2} \, dt$$

Déterminer $\lim_{x\to0^+} \mathrm{F}(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x)$.

Exercice 46 ★

Déterminer des équivalents de

1. $\int_1^x \frac{\arctan t}{t} \, dt$ lorsque x tend vers $+\infty$;
2. $\int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{t^2} \, dt$ lorsque x tend vers $+\infty$;
3. $\int_x^1 \frac{e^t}{t^3} \, dt$ lorsque x tend vers 0^+ ;
4. $\int_0^x \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} \, dt$ lorsque x tend vers 0^+.

Suites d'intégrales

Exercice 47 ★★★ **CCP MP 2018**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et π-périodique vérifiant

$$\int_0^\pi f(t) \, dt = 0$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_0^\pi f(t)e^{-t/n} \, dt \qquad v_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t/n} \, dt$$

1. Justifier que u_n et v_n sont bien définis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Justifier qu'il existe une suite (a_n), que l'on précisera, telle que $v_n = a_n u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\pi}$.
4. Montrer que (u_n) converge vers 0. Montrer que (v_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 48 ★★

Soit $f_n : t \mapsto \cos(2nt)\ln(\sin t)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier que f_n est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. On pose alors $\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{J}_n = 2n\mathrm{I}_n$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{J}_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \sin(2nt)\,\mathrm{d}t$$

3. Calculer $\mathrm{J}_{n+1} - \mathrm{J}_n$ et en déduire la valeur de J_n puis celle de I_n.

Exercice 49 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^1 (t\ln(t))^n\,\mathrm{d}t$. Montrer que cette intégrale converge. Donner sa valeur.

Exercice 50 ★

On pose $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \ln^n(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que I_n converge.

2. Déterminer une relation de récurence suivie par la suite (I_n).

3. En déduire la valeur de I_n.

Fonctions définies par des intégrales

Exercice 51 ★★ **Fonction Γ**

On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de Γ.

2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

3. Déterminer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 52 ★★ **Fonction B d'Euler**

Onpose $\mathrm{B} : (x,y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}$.

1. Montrer que B est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

2. Montrer que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$$

3. Montrer que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \mathrm{B}(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x,y)$$

4. Calculer $\mathrm{B}(n+1,p+1)$ pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.