

Devoir à la maison n°2 : corrigé

SOLUTION 1.

1. Si k est un multiple de n , $\omega^r = 1$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk} = n$.

Si k n'est pas un multiple de n , $\omega^r \neq 1$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk} = \frac{1 - \omega^{rn}}{1 - \omega^r} = 0$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\phi(k+n) = \omega^{(k+n)^2} = \omega^{k^2} \omega^{2kn} \omega^{n^2} = \omega^{k^2} = \phi(k)$.

3. On a $G = \sum_{k=0}^{n-1} \phi(k)$. Comme ϕ est n -périodique, la somme reste la même si on somme sur n entiers consécutifs. On a donc

$$G = \sum_{k=j}^{j+n-1} \omega^{k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+j)^2}.$$

4. Puisque $\omega \in \mathbb{U}$, $\overline{\omega} = \frac{1}{\omega}$. On en déduit que $\overline{G} = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-j^2}$.

$$G\overline{G} = G \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-j^2} = \sum_{j=0}^{n-1} G\omega^{-j^2}$$

Mais en utilisant la question précédente

$$\begin{aligned} G\overline{G} &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+j)^2} \omega^{-j^2} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2} \omega^{2kj} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{2kj} \end{aligned}$$

Puisque n est impair, $2k$ est un multiple de n si et seulement si k est lui-même un multiple de n . Or $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ donc $2k$ est un multiple de n si et seulement si $k = 0$. En utilisant la première question, on en déduit que $G\overline{G} = n$ puis $|G| = \sqrt{n}$.

SOLUTION 2.

1. a. Le point A est situé sur le cercle de centre O et de rayon 1 donc $|a| = 1$. On a donc $a\overline{a} = 1$ puis $\overline{a} = \frac{1}{a}$. Comme les points B, C, D sont également sur \mathcal{C} , $\overline{b} = \frac{1}{b}$, $\overline{c} = \frac{1}{c}$, $\overline{d} = \frac{1}{d}$.

b. Posons $Z = \frac{d-a}{c-a} \frac{c-b}{d-b}$. On a donc

$$\begin{aligned}\bar{Z} &= \frac{\bar{d} - \bar{a}}{\bar{c} - \bar{a}} \frac{\bar{c} - \bar{b}}{\bar{d} - \bar{b}} \\ &= \frac{\frac{1}{d} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{a}} \frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{d} - \frac{1}{b}} \\ &= \frac{\frac{a-d}{ad}}{\frac{a-c}{ac}} \frac{\frac{b-c}{bc}}{\frac{b-d}{bd}} \\ &= \frac{a-d}{a-c} \frac{b-c}{b-d} \frac{ac}{ad} \frac{bd}{bc} \\ &= \frac{d-a}{c-a} \frac{c-b}{d-b} = Z\end{aligned}$$

Ainsi Z est réel.

c. Puisque Z est réel, $\arg(Z) \equiv 0[\pi]$. On a donc $\arg\left(\frac{d-a}{c-a} \frac{c-b}{d-b}\right) \equiv 0[\pi]$ puis $\arg \frac{d-a}{c-a} \equiv \arg \frac{d-b}{c-b} [\pi]$ ce qui équivaut à $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) [\pi]$.

2. On reprend la question précédente à l'envers et on montre que Z est réel.

3. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}Z &= \frac{d-a}{c-a} \frac{c-b}{d-b} \\ \Leftrightarrow \frac{d-a}{d-b} &= Z \frac{c-a}{c-b} \\ \Leftrightarrow d-a &= Z \frac{c-a}{c-b} d - Z \frac{c-a}{c-b} b \\ \Leftrightarrow d \left(1 - Z \frac{c-a}{c-b}\right) &= a - Z \frac{c-a}{c-b} b \\ \Leftrightarrow d(c-b - Z(c-a)) &= a(c-b) - Zb(c-a) && \text{en multipliant par } c-b \\ \Leftrightarrow d &= \frac{a(c-b) - Zb(c-a)}{c-b - Z(c-a)}\end{aligned}$$

4. On a encore $\bar{a} = \frac{1}{a}$, $\bar{b} = \frac{1}{b}$, $\bar{c} = \frac{1}{c}$. De plus, comme Z est réel, $\bar{Z} = Z$.

$$\begin{aligned}\bar{d} &= \frac{\bar{a}(\bar{c} - \bar{b}) - \bar{Z}\bar{b}(\bar{c} - \bar{a})}{\bar{c} - \bar{b} - \bar{Z}(\bar{c} - \bar{a})} \\ &= \frac{\frac{1}{a} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) - \frac{Z}{b} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{c} - \frac{1}{b} - Z \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)} \\ &= \frac{b-c - Z(a-c)}{a(b-c) - Zb(a-c)} && \text{en multipliant numérateur et dénominateur par } abc \\ &= \frac{c-b - Z(c-a)}{a(c-b) - Zb(c-a)} \\ &= \frac{1}{d}\end{aligned}$$

On en déduit que $d\bar{d} = 1$ et donc que $|d| = 1$. Ainsi D est sur le cercle \mathcal{C} .

SOLUTION 3.

Via la formule du binôme

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k$$

En séparant les termes d'indices pairs et impairs,

$$(1+i)^n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} i^{2k} + \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} i^{2k+1} = S_n + iT_n$$

D'autre part, $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ donc

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{ni\pi}{4}}$$

En identifiant parties réelle et imaginaire, on en déduit que

$$S_n = 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \qquad T_n = 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$