Semaine du 20/02 au 24/02

1 Cours

Espaces vectoriels de dimension finie

Famille de vecteurs Familles génératrices. Familles libres/liées. Bases. Base adaptée à une décomposition en somme directe. Cas particulier des familles de $\mathbb{K}^n$ (pivot de Gauss).

Dimension d'un espace vectoriel Théorème de la base incomplète/extraite. Existence de bases. Définition de la dimension. Dans un espace de dimension n une famille génératrice/libre possède au moins/au plus n éléments. Si $\mathcal{B}$ est une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n, alors $\mathcal{B}$ est une base ssi $\mathcal{B}$ est libre ssi $\mathcal{B}$ est génératrice.

Dimension et sous-espaces vectoriels Si F sous-espace vectoriel de E, alors $\dim F \leqslant \dim E$ avec égalité **si et seulement si** $F = E$. Hyperplans. Dimension d'une somme directe. Existence de supplémentaire en dimension finie. Formule de Grassmann. Caractérisation de la supplémentarité par la dimension. Une somme est directe **si et seulement si** la somme des dimensions est égale à la dimension de la somme

Rang d'une famille de vecteurs Définition. Si $\mathcal{F}$ est une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n, alors $\mathcal{F}$ est libre **si et seulement si** $\operatorname{rg} \mathcal{F} = p$ et $\mathcal{F}$ est génératrice **si et seulement si** $\operatorname{rg} \mathcal{F} = n$. Le rang est invariant par opérations de pivot de Gauss.

2 Méthodes à maîtriser

- Montrer qu'une famille est libre.
- Montrer qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre, liée ou génératrice par pivot de Gauss.
- Déterminer la dimension d'un espace vectoriel en exhibant une base.
- Utiliser la dimension pour montrer qu'une famille libre/génératrice est une base.
- Utiliser la dimension pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont égaux.
- Utiliser la dimension pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.
- Calculer le rang d'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ par pivot de Gauss.
- Utiliser le rang pour montrer qu'une famille est libre ou génératrice.

3 Questions de cours

- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E en somme directe. Montrer que si $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de F et $(g_1, \dots, g_p)$ est une base de G, alors $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ est une base de $F \oplus G$.
- Démontrer la formule de Grassmann (on admettra que la dimension d'une somme directe est la somme des dimensions).
- Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts d'un espace vectoriel E de dimension n. Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$.
- Montrer que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors F possède un supplémentaire dans E.
- On se donne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et on pose $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$. On suppose que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre. Montrer que $(y + x_1, \dots, y + x_n)$ est libre **si et seulement si** $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -1$.