Espaces préhilbertiens réels

Solution 1.

1. Prouvons que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définit un produit scalaire.

- $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bilinéaire par bilinéarité du produit sur $\mathbb{R}$ et par linéarité de l'évaluation.
- $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est symétrique par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$.
- Soit $P \in E$. On a $\langle P|P\rangle = P^2(-1) + P^2(0) + P^2(1) \geqslant 0$, la forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est donc positive.
- Soit $P \in E$. Puisqu'une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous les termes sont nuls , on a

$$\langle P|P\rangle = P^2(-1) + P^2(0) + P^2(1) = 0$$

  si et seulement si $0, 1, -1$ sont racines de P. Puisque P est de degré inférieur à deux , cette condition est équivalente à $P = 0$. La forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est donc définie.

2. Prouvons que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définit un produit scalaire.

- $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bilinéaire par bilinéarité du produit sur $\mathbb{R}$ et par linéarité de l'évaluation.
- $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est symétrique par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$.
- Soit $P \in E$. On a

$$\langle P|P\rangle = P^2(x_0) + \ldots + P^2(x_n) \geqslant 0,$$

  la forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est donc positive.
- Soit $P \in E$. Puisqu'une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous les termes sont nuls , on a

$$\langle P|P\rangle = P^2(x_0) + \cdots + P^2(x_n) = 0$$

  si et seulement si $x_0, \ldots, x_n$ sont racines de P. Puisque P est de degré inférieur à n et que les x_k sont deux à deux distincts , cette condition est équivalente à $P = 0$. La forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est donc définie.

3. Prouvons que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définit un produit scalaire.

- $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bilinéaire par bilinéarité du produit sur $\mathbb{R}$, par linéarité de la dérivation des polynômes et par linéarité de l'évaluation.
- $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est symétrique par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$.
- Soit $P \in E$. On a

$$\langle P|P\rangle = P^2(a_0) + \ldots + (P^{(n)})^2(a_n) \geqslant 0,$$

  la forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est donc positive.
- Soit $P \in E$ tel que

$$\langle P|P\rangle = P^2(a_0) + \ldots + (P^{(n)})^2(a_n) = 0.$$

  Puisqu'une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous les réels sont nuls, on a $(P^{(n)})^2(a_n) = 0$. Puisque P est de degré inférieur à n, $P^{(n)}$ est une constante , qui est donc nulle d'après l'égalité précédente. P est donc de degré inférieur à $n-1$, et puisque

$$(P^{(n-1)})^2(a_{n-1}) = 0,$$

  on en déduit que la constante $P^{(n-1)}$ est nulle et donc que P est de degré inférieur à $n-2$. Par une récurrence descendante immédiate, on prouve que $P = 0$. La forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est donc définie.

4. Prouvons que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

- L'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est bilinéaire par linéarité du produit sur $\mathbb{R}$, de l'évaluation et de l'intégrale.
- La forme bilinéaire $\langle \cdot \mid \cdot, \rangle$ est symétrique car le produit sur $\mathbb{R}$ est commutatif.
- Soit $P \in E$. Par positivité de l'intégrale , on a

$$\langle P|P\rangle = \int_0^1 P(t)^2 dt \geqslant 0.$$

  La forme bilinéaire $\langle \cdot \mid \cdot)$ est donc positive.

- Reprenons les notations précédentes. Puisque qu'une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous les termes sont nuls, l'égalité $\langle P|P\rangle = 0$ est équivalente à
$$\int_0^1 P^2(t)dt = 0.$$
La fonction P^2 étant continue et positive , la condition est équivalente à $P = 0$. La forme bilinéaire $\langle|\rangle$ est donc définie.

5. Prouvons que $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.

- L'application $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ est bilinéaire par linéarité du produit sur $\mathbb{R}$, de l'évaluation et de l'intégrale.
- La forme bilinéaire $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ est symétrique car le produit sur $\mathbb{R}$ est commutatif.
- Soit $f \in E$. Par positivité de l'intégrale , on a
$$\langle f|f\rangle = \int_0^1 f(t)^2 dt \geqslant 0.$$
La forme bilinéaire $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ est donc positive.
- Reprenons les notations précédentes. Puisque qu'une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous les termes sont nuls, l'égalité $\langle f|f\rangle = 0$ est équivalente à
$$\int_0^1 f^2(t)dt = 0.$$
La fonction f^2 étant continue et positive la condition est équivalente à $f = 0$. La forme bilinéaire $\langle,\rangle$ est donc définie.

6. Prouvons que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur E.

- Soient $A, B, C \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned}\langle A|\lambda B + C\rangle &= \mathrm{tr}({}^t A(\lambda B + C)) = \mathrm{tr}(\lambda {}^t AB + {}^t AC)\\ &\qquad \text{(par linéarité de la transposition)}\\ &= \lambda\,\mathrm{tr}({}^t AB) + \mathrm{tr}({}^t AC)\\ &\qquad \text{(par linéarité de la trace)}\\ &= \lambda\langle A|B\rangle + \langle A|C\rangle\end{aligned}$$
L'application $(\cdot|\cdot)$ est donc linéaire à droite.
- Soient $A, B \in E$. On a
$$\langle B|A\rangle = \mathrm{tr}({}^t BA) = \mathrm{tr}({}^t({}^t AB)) = \mathrm{tr}({}^t AB) = \langle A|B\rangle$$
L'application $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est symétrique donc linéaire à gauche puisqu'elle est linéaire à droite.
- Pour tout $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et tout indice $1 \leqslant i \leqslant n$,
$$({}^t AA)_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2.$$
On a donc
$$\langle A|A\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 \geqslant 0.$$
La forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est donc positive.
- Puisque sur $\mathbb{R}$, une somme de carrés est nulle *si et seulement si* tous les carrés sont nuls, on a, d'après le calcul précédent, $\langle A|A\rangle = 0$ *si et seulement si* $\forall 1 \leqslant k, i \leqslant n$, $a_{k,i} = 0$, ie $A = 0$. La forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est donc définie.

7. Prouvons que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.

- L'application $(\cdot|\cdot)$ est bilinéaire par linéarité du produit sur $\mathbb{R}$, de la dérivation et de l'intégrale.
- La forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est symétrique car le produit sur $\mathbb{R}$ est commutatif.

- Soit $f \in E$. Par positivité de l'intégrale , on a

$$(f|f) = f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \geqslant 0.$$

La forme bilinéaire $\langle \, | \, \rangle$ est donc positive.

- Reprenons les notations précédentes. Puisque qu'une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous les termes sont nuls, l'égalité $\langle f|f \rangle = 0$ *implique*

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f'^2(t) dt = 0.$$

La fonction f'^2 étant continue et positive, la deuxième condition est équivalente à $f' = 0$, la fonction f est donc constante et finalement nulle puisque $f(1) = 0$. La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc définie.

8. Prouvons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.

- *Symétrie* : pour tous f et g dans E, on a

$$\begin{aligned}
\langle f|g \rangle &= \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt \\
&= \int_0^1 (g(t)f(t) + g'(t)f'(t)) dt \\
&= \langle g|f \rangle
\end{aligned}$$

par commutativité du produit sur le corps $(\mathbb{R}, +, \times)$.

- *Linéarité* : pour tous f, g et h dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle f + \lambda g|h \rangle &= \int_0^1 ((f + \lambda g)(t)h(t) + (f + \lambda g)'(t)h'(t)) dt \\
&= \int_0^1 (f(t)h(t) + \lambda g(t)h(t) + f'(t)h'(t) \\
&\qquad + \lambda g'(t)h'(t)) \\
&= \int_0^1 (f(t)h(t) + f'(t)h'(t)) dt \\
&\qquad + \lambda \int_0^1 (g(t)h(t) + g'(t)h'(t)) dt \\
&= \langle f|h \rangle + \lambda \langle g|h \rangle
\end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation, de l'évaluation et de l'intégrale. Ainsi, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est linéaire à gauche donc bilinéaire sur E par symétrie.

- *Positivité* : pour tout f dans E, on a

$$\langle f|f \rangle = \int_0^1 (f^2(t) + (f')^2(t)) dt \geqslant 0$$

par positivité de l'intégrale puisque $f^2 + (f')^2 \geqslant 0$.

- *Caractère défini* : pour tout f dans E, on a

$$\langle f|f \rangle = \int_0^1 (f^2(t) + (f')^2(t)) dt = 0$$

si et seulement si $f^2 + (f')^2 = 0$ car l'intégrale sur un segment d'une fonction continue et positive est nulle *si et seulement si* cette fonction est nulle. Ceci équivaut à

$$f^2 = (f')^2 = 0,$$

ie $f = 0$.

Solution 2.

1. Prouvons que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.

   - L'application $(\cdot|\cdot)$ est bilinéaire par linéarité du produit sur $\mathbb{R}$, de la dérivation et de l'intégrale.
   - La forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est symétrique car le produit sur $\mathbb{R}$ est commutatif.
   - Soit $f \in E$. Par positivité de l'intégrale , on a

     $$(f|f) = f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \geqslant 0.$$

     La forme bilinéaire $\langle\,|\,\rangle$ est donc positive.
   - Reprenons les notations précédentes. Puisque qu'une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous les termes sont nuls, l'égalité $\langle f|f\rangle = 0$ *implique*

     $$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f'^2(t)dt = 0.$$

     La fonction f'^2 étant continue et positive, la deuxième condition est équivalente à $f' = 0$, la fonction f est donc constante et finalement nulle puisque $f(1) = 0$. La forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est donc définie.

2. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions de E définies par

   $$f \in E,\ \ g : t \in [0,1] \longmapsto t.$$

   Puisque

   $$\langle f|g\rangle = f(1) + \int_0^1 f'(t)dt,$$

   puis

   $$\|f\|^2 = f^2(1) + \int_0^1 f^2(t)dt$$

   et finalement

   $$\|g\|^2 = 1 + 1 = 2,$$

   l'inégalité s'écrit

   $$\left(f(1) + \int_0^1 f'(t)dt\right)^2 \leqslant 2\left(f^2(1) + \int_0^1 f'^2(t)dt\right).$$

Solution 3.

1. Prouvons que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définit un produit scalaire.

   - $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bilinéaire par bilinéarité du produit sur $\mathbb{R}$ et par linéarité de l'évaluation.
   - $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est symétrique par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$.
   - Soit $P \in E$. On a $\langle P|P\rangle = P^2(-1) + P^2(0) + P^2(1) \geqslant 0$, la forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est donc positive.
   - Soit $P \in E$. Puisqu'une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous les termes sont nuls , on a

     $$\langle P|P\rangle = P^2(-1) + P^2(0) + P^2(1) = 0$$

     si et seulement si $0, 1, -1$ sont racines de P. Puisque P est de degré inférieur à deux , cette condition est équivalente à $P = 0$. La forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est donc définie.

2. Orthonormalisons la base canonique de E par le procédé de Gram-Schmidt.

- *Première étape.* On pose
$$\Gamma_1 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
- *Deuxième étape.* Notons p_1 la projection orthogonale sur $\text{vect}(\Gamma_1)$. Posons $n_1 = X - p_1(X)$. On a
$$n_1 = X - \langle X|\Gamma_1\rangle\Gamma_1 = X - 0\Gamma_1 = X$$
Puisque $\|n_1\| = \sqrt{2}$, on complète (Γ_1) par
$$\Gamma_2 = \frac{n_1}{\|n_1\|} = \frac{X}{\sqrt{2}}.$$
- *Troisième étape.* Notons p_2 la projection orthogonale sur $\text{vect}(\Gamma_1, \Gamma_2)$. Posons $n_2 = X^2 - p_2(X^2)$. On a
$$\begin{aligned} n_2 &= X^2 - \langle X^2|\Gamma_1\rangle \cdot \Gamma_1 - \langle X^2|\Gamma_2\rangle \cdot \Gamma_2 \\ &= X^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \Gamma_1 - 0 \cdot \Gamma_2 \\ &= X^2 - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$
Puisque $\|n_2\| = \sqrt{2/3}$, on complète (Γ_1, Γ_2) par
$$\Gamma_3 = \frac{n_2}{\|n_2\|} = \sqrt{3/2}(X^2 - 2/3).$$

La famille $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ est une base orthonormée de E.

3. Posons
$$L_{-1} = \frac{X(X-1)}{2}\ ,\ \ L_1 = \frac{X(X+1)}{2} \quad \text{et} \quad L_0 = 1 - X^2.$$
Il s'agit des polynômes de Lagrange associés aux réels ± 1 et 0. Cette famille est clairement orthonormée pour le produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$, elle est donc libre dans E qui est de dimension trois : il s'agit d'une base orthonormée de E.

Remarque. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est lourd en calculs au-delà de trois vecteurs...Il faut parfois avoir un peu de culture – voire du flair ! – mais surtout suivre les indications de l'énoncé pour trouver des bases orthonormées. ■

Solution 4.

1. Soit u l'endomorphisme de E tel que $u(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$. u transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée directe donc u est une isométrie vectorielle directe donc $\det(u) = 1$. Or $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

2. On a $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}}$. Donc $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}}$.

   Remarque. On en déduit que le déterminant dans une base orthonormée directe ne dépend pas du choix de cette base. Le déterminant de n vecteurs $u_1, \dots, u_n$ dans une base orthonormée quelconque s'appelle le *produit mixte* de ces vecteurs et est noté $[x_1, \dots, x_n]$. ■

3. Cette application est linéaire car le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses variables et notamment par rapport à la dernière. De plus, elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est donc une forme linéaire.

4. C'est tout simplement le théorème de Riesz.

5. Démontrons simplement la linéarité par rapport à la première variable. Soient $x_1, \dots, x_{n-1} \in E$, $x_1' \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in E$,
$$\det_{\mathcal{B}}(\lambda x_1 + \mu x_1', x_2, \dots, x_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \mu \det_{\mathcal{B}}(x_1', x_2, \dots, x_n)$$
Notons $u = (\lambda x_1 + \mu x_1') \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$, $v = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$ et $w = x_1' \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$. Ainsi pour tout $x \in E$, $\langle u, x\rangle = \lambda\langle v, x\rangle + \mu\langle w, x\rangle$ i.e. $\langle u - (\lambda v + \mu w), x\rangle = 0$. Donc $u - (\lambda v + \mu w) \in E^{\perp} = \{0\}$. On a donc $u = \lambda v + \mu w$, ce qui prouve bien la linéarité par rapport à la première variable. La linéarité par rapport aux autres variables se traite de la même manière.
Soient $x_1, \dots, x_{n-1} \in E$ tels que deux vecteurs parmi ceux-ci soient égaux. On a donc $\det(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = 0$ pour tout $x \in E$ puisque le déterminant est une forme multilinéaire alternée. Ceci signifie que $\langle x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}, x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$. Ainsi $x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} = 0$. L'application de l'énoncé est bien alternée.

Solution 5.

1. L'application $\langle .,. \rangle$ est clairement symétrique. Elle est bilinéaire puisque la dérivation et l'évaluation en a sont linéaires. Elle est évidemment positive. Soit enfin $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. On a donc $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(n)}(a) = 0$. Ainsi a est une racine d'ordre au moins $n+1$ de P et $\deg P \leqslant n$ donc $P = 0$.

2. La famille $\left((X-a)^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est clairement orthonormée. Puisqu'elle contient $n+1$ éléments et que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, c'est une base.

Solution 6.

1. En développant $\|x+y\|^2$, on prouve sans peine que

$$\langle x|y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2},$$

et l'on en déduit que

$$\forall (x,y) \in E^2, \ \ \langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i \rangle \langle y|e_i \rangle.$$

2. Soit $x \in E$. Posons

$$z = x - \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i \rangle e_i.$$

On a

$$\begin{aligned}\|z\|^2 &= \sum_{k=1}^{n} \langle z|e_k \rangle^2 = \sum_{k=1}^{n} \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i \rangle e_i \middle| e_k \right\rangle^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\langle x|e_k \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i \rangle \langle e_k|e_i \rangle \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\langle x|e_k \rangle - \langle x|e_k \rangle \right)^2 = 0\end{aligned}$$

Ainsi $z = 0$, cqfd.

3. D'après la question précédente, la famille $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est génératrice de E. Comme $n = \dim(E)$, cette famille est une base de E. Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$e_k = \sum_{i=1}^{n} \langle e_k|e_i \rangle e_i.$$

Ainsi, par identification des coordonées dans la base $(e_1, \dots, e_n)$,

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \ \ \langle e_k|e_i \rangle = \delta_{k,i}.$$

Comme cela est valable pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on en déduit que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une bon de E.

Solution 7.

1. Prouvons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

   - L'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire par linéarité du produit sur $\mathbb{R}$, de l'évaluation et de l'intégrale.
   - La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique car le produit sur $\mathbb{R}$ est commutatif.

- Soit $f \in E$. Par positivité de l'intégrale , on a
$$\langle f|f\rangle = \int_0^1 f(t)^2 dt \geqslant 0.$$
La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc positive.
- Reprenons les notations précédentes. Puisque qu'une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous les termes sont nuls, l'égalité $\langle f|f\rangle = 0$ est équivalente à
$$\int_0^1 f^2(t)dt = 0.$$
La fonction f^2 étant continue et positive la condition est équivalente à $f = 0$. La forme bilinéaire $\langle , \rangle$ est donc définie.

2. *Calcul de* $F^\perp$.

a. Soit $f \in F^\perp$. On a alors
$$\forall g \in F, \ \ \langle f|g\rangle = 0.$$
Comme $\forall g \in F$, on a $fg \in F$ (car $(fg)(0) = 0$), on en déduit que :
$$\forall g \in F, \ \ \langle f|fg\rangle = 0.$$
Puisque $\forall g \in F$,
$$\begin{aligned} 0 = \langle f|fg\rangle &= \int_0^1 f(t)f(t)g(t)dt = \int_0^1 f^2(t)g(t)dt \\ &= \langle f^2|g\rangle \end{aligned}$$
on a $f^2 \in F^\perp$.

b. Notons $g_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g_0(t) = t$. On a clairement $g_0 \in F$. Ainsi, pour $f \in F^\perp$, on déduit de la question précédente que $\langle f^2, g_0\rangle = 0$, i.e.
$$\int_0^1 tf^2(t)dt = 0.$$
Comme $f^2 g_0$ est continue et positive, on en déduit que $f^2 g_0 = 0$ et donc que :
$$\forall t \in [0,1], \ \ tf^2(t) = 0.$$
En particulier, $f(t) = 0$ pour tout $0 < t \leqslant 1$. On en déduit que $f(0) = 0$ par continuité de f en 0. Ainsi $f = 0$, ce qui achève de prouver que $F^\perp = \{0\}$.

3. Non, car en dimension finie, on a $F^\perp = \{0\}$ *si et seulement si* $F = E$, ce qui n'est manifestement pas le cas.

Solution 8.

s est clairement linéaire et $s^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc s est une symétrie. Soit $S \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ et $A \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Ainsi ${}^tS = S$ et ${}^tA = -A$. Par conséquent $\langle S, A\rangle = \mathrm{tr}({}^tSA) = \mathrm{tr}(SA)$ et $\langle A, S\rangle = \mathrm{tr}({}^tAS) = -\mathrm{tr}(AS) = -\mathrm{tr}(SA)$. Donc $\langle S, A\rangle = 0$. Ceci signifie que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ sont orthogonaux l'un à l'autre : s est une symétrie orthogonale.

Solution 9.

1. Posons $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^n \langle f(e_j), e_i\rangle e_i$. On en déduit que pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$,
$$a_{ij} = \langle f(e_j), e_i\rangle = \langle e_j, f(e_i)\rangle = \langle f(e_i), e_j\rangle = a_{ji}$$
Ainsi A est symétrique.

2. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$ et $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe donc $z \in E$ tel que $y = f(z)$. Ainsi

$$\langle x, y\rangle = \langle x, f(z)\rangle = \langle f(x), z\rangle = \langle 0_E, z\rangle 0$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f \subset (\operatorname{Im} f)^\perp$. De plus, $\dim(\operatorname{Im} f)^\perp = n - \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f$ d'après le théorème du rang. Ainsi $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^\perp$.

Solution 10.

1. Supposons $F \subset G$. Soit $x \in G^\perp$. Alors x est orthogonal à tout vecteur de G et a fortiori de F donc $x \in F^\perp$. Ainsi $G^\perp \subset F^\perp$.
Supposons F et G de dimension finie et $G^\perp \subset F^\perp$. D'après ce qui précède, $(F^\perp)^\perp \subset (G^\perp)^\perp$. Mais F et G étant de dimension finie, $(F^\perp)^\perp = F$ et $(G^\perp)^\perp = G$.

2. On sait que $F \subset F + G$ donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp$ d'après la question précédente. De même, $G \subset F + G$ donc $(F+G)^\perp \subset G^\perp$. Ainsi $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Soit $y \in F + G$. Il existe donc $(u, v) \in F \times G$ tel que $y = u + v$. Alors $\langle x, y\rangle = \langle x, u\rangle + \langle x, v\rangle$. Or $x \in F^\perp$ et $u \in F$ donc $\langle x, u\rangle = 0$. De même, $x \in G^\perp$ et $v \in G$ donc $\langle x, v\rangle = 0$. Ainsi $\langle x, y\rangle = 0$. Ceci étant vrai pour tout $y \in F + G$, $x \in (F+G)^\perp$.
D'où $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$.
Par double inclusion, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

3. $F \cap G \subset F$ donc $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ d'après la première question. De même, $F \cap G \subset G$ donc $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. On en déduit que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
Supposons E de dimension finie. Alors

$$\dim(F^\perp + G^\perp) = \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F^\perp \cap G^\perp)$$

Or d'après la question précédente, $F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$ donc

$$\begin{aligned}
\dim(F^\perp + G^\perp) &= \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F+G)^\perp \\
&= (\dim E - \dim F) + (\dim E - \dim G) - (\dim E - \dim(F+G)) \\
&= \dim E - (\dim F + \dim G - \dim(F+G)) \\
&= \dim E - \dim(F \cap G) = \dim(F \cap G)^\perp
\end{aligned}$$

Puisqu'on a précédemment montré que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$, on peut conclure que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Solution 11.

Notons p la projection orthogonale sur $\operatorname{vect}(u)$ et P sa matrice dans $\mathcal{B}$. Comme (u) est une base orthonormale de $\operatorname{vect}(u)$, on a, pour $x \in E$, $p(x) = \langle x, u\rangle u$. Notons X le vecteur colonne associé à un vecteur x de E. On a $PX = ({}^t UX)U = U({}^t UX) = U{}^t UX$. La matrice de P dans $\mathcal{B}$ est donc UU^t.

Solution 12.

► Prouvons que **1.** ⇒ **2.**

Lorsque p est une projection orthogonale de E, on a $\operatorname{Im}(\mathrm{id}_E - p) = \operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Im}(p)^\perp$ donc, pour tout x et y dans E, $p(x) \perp y - p(y)$ ie

$$\langle p(x) | y\rangle = \langle p(x) | p(y)\rangle.$$

Cette expression étant symétrique en (x, y), on a

$$\begin{aligned}
\langle p(x) | y\rangle = \langle p(x) | p(y)\rangle = \langle p(y) | p(x)\rangle = \langle p(y) | x\rangle \\
= \langle x | p(y)\rangle
\end{aligned}$$

► Prouvons que **2.** $\Rightarrow$ **3.**

Soit x dans E. Appliquons le **2.** à x et $y = p(x)$. On a

$$\|p(x)\|^2 = \langle p(x)|p(x)\rangle = \langle x|p(x)\rangle.$$

ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|p(x)\|^2 \leqslant \|x\| \cdot \|p(x)\|.$$

Si $p(x) = 0$, l'inégalité **3.** est banalement vérifiée. Si $p(x) \neq 0$, $\|p(x)\| > 0$ et en divisant membre à membre l'inégalité précédente, on aboutit à

$$\|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

► Prouvons que **3.** $\Rightarrow$ **1.**

Soient $x \in \operatorname{Im} p$, $y \in \operatorname{Ker} p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $y = 0$, alors $x \perp y$.
Supposons maintenant $y \neq 0$. D'une part,

$$\|p(x + \lambda y)\|^2 = \|x\|^2$$

et d'autre part,

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x|y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$$

D'après **2.**, $2\lambda\langle x|y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geqslant 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Le discriminant de ce trinôme du second degré en λ est donc négatif, ce qui impose $\langle x|y\rangle^2 \leqslant 0$ et donc $\langle x|y\rangle = 0$. On a donc $x \perp y$. On en déduit que $\operatorname{Im} p \perp \operatorname{Ker} p$ et donc que p est une projection orthogonale.

Solution 13.

Commençons par établir un plan de bataille...Il nous faut calculer une base orthonormée de F afin de calculer la projection orthogonale p sur F. On commence donc par déterminer une base de F qu'il faudra ensuite orthonormaliser par le procédé de Schmidt.

► *Détermination d'une base de* F. Il est clair que le système d'équations définissant F est équivalent à

$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4 = 0.$$

Un vecteur X appartient donc à F *si et seulement si* il est de la forme

$$X = x_1(1, 0, -1, 0) + x_2(0, 1, 0, -1)$$

où $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Posons

$$u = (1, 0, -1, 0) \quad \text{et} \quad v = (0, 1, 0, -1).$$

La famille (u, v) est clairement libre et génératrice de F , il s'agit d'une base de ce sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

► *Détermination d'une base orthonormée de* F. La base (u, v) est clairement orthogonale. Puisque l'on a $\|u\| = \|v\| = \sqrt{2}$, la famille formée par

$$u' = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}, 0) \ \text{ et } \ v' = (0, 1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}).$$

est une base orthonormée de F.

► *Calcul de* p. Pour tout vecteur x de E, on a

$$p(x) = (x|u')u' + (x|v')v'.$$

Ainsi , en notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de E, on a

$$p(e_1) = (1/2, 0, -1/2, 0) \ , \ p(e_2) = (0, 1/2, 0, -1/2),$$

puis

$$p(e_3) = (-1/2, 0, 1/2, 0) \quad \text{et} \quad p(e_4) = (0, -1/2, 0, 1/2).$$

Ainsi

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 14.

1. Pout tout $P \in E$, la formule de Taylor s'écrit

$$P = P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{P''(1)}{2}(X-1)^2.$$

Un polynôme P de F est donc combinaison linéaire des vecteurs

$$P_1 = X-1, \ \ P_2 = (X-1)^2.$$

Puisque ces deux polynômes appartiennent à F et ne sont pas proportionnels, la famille (P_1, P_2) est une base de F.

2. D'après le cours, la quantité $\|X - P\|^2$ est minimale lorsque $P = \pi_F(X)$, où π_F désigne la projection orthogonale sur F. Orthonormalisons la famille $(P_1 P_2)$ par le procédé de Gram-Schmidt. Posons

$$Q_1 = \frac{X-1}{\|P_1\|} = \frac{X-1}{\sqrt{2}}.$$

Notons π_1 la projection orthogonale sur $\text{vect}(P_1)$. Posons

$$\begin{aligned} n &= (X-1)^2 - \pi_1((X-1)^2) \\ &= (X-1)^2 - \langle (X-1)^2 | Q_1 \rangle Q_1 \\ &= (X-1)^2 + \frac{3}{2}(X-1) \\ &= X^2 - X/2 - 1/2 \end{aligned}$$

Notons ensuite

$$Q_2 = \frac{n}{\|n\|} = \sqrt{2/3}n.$$

On a

$$\begin{aligned} \pi_F(X) &= \langle X|Q_1 \rangle Q_1 + \langle X|Q_2 \rangle Q_2 \\ &= \frac{X-1}{2} - \frac{1}{3}(X^2 - X/2 - 1/2) \\ &= -X^2/3 + 2/3X - 1/3 \end{aligned}$$

Ainsi

$$X - \pi_F(X) = (X^2 + X + 1)/3$$

et

$$\delta = \|X - \pi_F(X)\| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Remarque. On pouvait aussi remarquer que l'orthogonal de F est la droite vectorielle engendrée par $X^2 + X + 1$, ce qui est plus facile à voir lorsque l'on choisit $(X - 1, X(X - 1))$ comme base de F. Le calcul de la projection et de la distance de X à F s'en trouve simplifié. ■

Solution 15.

Soit $E = \mathcal{C}([0;\pi], \mathbb{R})$. On munit E du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^\pi f(x)g(x)dx$.On pose $f_{a,b} : \begin{array}{ccc} [0;\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx \end{array}$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $F = \{f_{a,b} | (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. F est un sous-espace vectoriel de E et $\phi(a, b) = \|\sin - f_{a,b}\|^2$. Le minimum de ϕ est donc atteint quand $f_{a,b}$ est la projection orthogonale de sin sur F.
Déterminons une base orthogonale de F. On pose $f_1 : x \to x$ et on cherche α tel que $f_2 : x \to x^2 + \alpha x$ soit orthogonale à f_1.

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^\pi (x^3 + \alpha x^2) dx = \frac{\pi^4}{4} + \alpha \frac{\pi^3}{3}$$

Il faut donc prendre $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$. On pose alors $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$ et $e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|}$. Par conséquent, la projection orthogonale de sin sur F est :

$$p_F(\sin) = \langle \sin, e_1\rangle e_1 + \langle \sin, e_2\rangle e_2.$$

Par le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
\|\sin - p_F(\sin)\|^2 &= \|\sin\|^2 - \|p_F(\sin)\|^2 \\
&= \|\sin\|^2 - \langle \sin, e_1\rangle^2 - \langle \sin, e_2\rangle^2 \\
&= \int_0^\pi \sin^2 x \, dx - \frac{1}{\|f_1\|^2}\left(\int_0^\pi x\sin x \, dx\right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{\|f_2\|^2}\left(\int_0^\pi \left(x^2 - \frac{3\pi}{4}x\right)\sin x \, dx\right)^2
\end{aligned}$$

Un rapide calcul nous donne $\|f_1\|^2 = \frac{\pi^3}{3}$ et $\|f_2\|^2 = \frac{\pi^5}{80}$. Par intégration par parties, on trouve :

$$\int_0^\pi x\sin x \, dx = \pi \text{ et } \int_0^\pi x^2 \sin x \, dx = \pi^2 - 4.$$

Enfin, $\int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}$. Finalement, on trouve

$$\min \phi = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5}.$$

Solution 16.

1. E est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0. Elle admet une borne inférieure.

2. Si $(\mathcal{S})$ admet une solution, alors $K = 0$. Les pseudo-solutions de $(\mathcal{S})$ sont donc les éléments X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\|AX - B\|^2 = 0$ i.e. tels que $AX - B = 0$. Ce sont donc les solutions de $(\mathcal{S})$.

3. **Première méthode**
   Puisque $\{AX, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\} = \operatorname{Im} A$, on peut affirmer que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$ *si et seulement si* AX est la projection de B sur $\operatorname{Im} A$. Or AX est la projection de B sur $\operatorname{Im} A$ *si et seulement si* $AX - B$ est orthogonal à $\operatorname{Im} A$. Or $AX - B$ est orthogonal à $\operatorname{Im} A$ *si et seulement si* il est orthogonal à chaque colonne de A puisque les colonnes de A engendrent $\operatorname{Im} A$. Ainsi $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$ *si et seulement si* ${}^tA(AX - B) = 0$ i.e. *si et seulement si* X est solution de $(\mathcal{S}')$.
   Seconde méthode
   Supposons que X soit solution de $(\mathcal{S}')$ i.e. ${}^tA(AX - B) = 0$. Alors pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\|AY - B\|^2 &= \|A(Y - X) + AX - B\|^2 \\
&= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 + 2\langle A(Y - X), AX - B\rangle \\
&= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 + 2{}^t(Y - X){}^tA(AX - B) \\
&= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 \geqslant \|AX - B\|^2
\end{aligned}$$

   Ainsi X est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$.
   Supposons que X soit pseudo-solution de $(\mathcal{S})$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|A(X + \lambda Y) - B\|^2 \geqslant \|AX - B\|^2$$

   ou encore

$$\|(AX - B) + \lambda AY\|^2 \geqslant \|AX - B\|^2$$

   ce qui donne via une identité remarquable

$$2\lambda\langle AY, AX - B\rangle + \lambda^2\|AY\|^2 \geqslant 0$$

   Si on fixe Y, la dernière inégalité étant vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a nécessairement $\langle AY, AX - B\rangle = 0$. Ainsi pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle AY, AX - B\rangle = 0$ ou encore $\langle Y, {}^tA(AX - B) = 0$, ce qui prouve que ${}^tA(AX - B) = 0$ et que X est solution de $(\mathcal{S}')$.

4. Soit $X \in \operatorname{Ker} A$. On a donc $AX = 0$ puis ${}^tAAX = 0$ donc $X \in \operatorname{Ker} {}^tAA$. Ainsi $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} {}^tAA$.
Soit maintenant $X \in \operatorname{Ker} {}^tAA$. On a donc ${}^tAAX = 0$ puis ${}^tX{}^tAAX = 0$. Notons $Y = AX$. Ainsi ${}^tYY = 0$ i.e. $\|Y\|^2 = 0$ donc $Y = 0$ i.e. $AX = 0$. D'où $X \in \operatorname{Ker} A$. Ainsi $\operatorname{Ker} {}^tAA \subset \operatorname{Ker} A$.
Finalement, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} {}^tAA$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tAA$ via le théorème du rang.

5. Si $\operatorname{rg}(A) = n$, alors $\operatorname{rg}({}^tAA) = n$. La matrice ${}^tAA$ est une matrice carrée de taille n et de rang n le système $(\mathcal{S}')$ est donc de Cramer : il admet une unique solution i.e. $(\mathcal{S})$ admet une unique pseudo-solution.

Solution 17.

Comme E est ouvert, un minimum de f est forcément un minimum local et donc un point critique. Pour $x \in E$, $\nabla f(x) = 2\sum_{i=1}^{p}(x - x_i)$.
L'unique point critique de f sur E est donc $m = \dfrac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_i$. Il suffit donc de vérifier que m est bien un minimum : il sera nécessairement unique. Pour $x \in E$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=1}^{p} \|x - m + m - x_i\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\|x - m\|^2 + 2\langle x - m, m - x_i\rangle + \|m - x_i\|^2\right) \\
&= p\|x - m\|^2 + f(m) + \left\langle x - m, \sum_{i=1}^{p} m - x_i \right\rangle \\
&= p\|x - m\|^2 + f(m) \geqslant f(m)
\end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^{p} m - x_i = 0$. Ceci prouve que f atteint bien son minimum en m.

Solution 18.

Pour $x \in E$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=1}^{p} \|x - m + m - x_i\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\|x - m\|^2 + 2\langle x - m, m - x_i\rangle + \|m - x_i\|^2\right) \\
&= p\|x - m\|^2 + f(m) + \left\langle x - m, \sum_{i=1}^{p} m - x_i \right\rangle \\
&= p\|x - m\|^2 + f(m) \geqslant f(m)
\end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^{p} m - x_i = 0$. Ceci prouve que f atteint bien son minimum en m.

Solution 19.

Puisque $O(E)$ est un groupe, $r \circ s$ est un endomorphisme orthogonal de E. Comme

$$\det(r \circ s) = 1 \times -1 = -1,$$

$r \circ s$ est indirect : il s'agit d'une symétrie. On a donc

$$(r \circ s)^2 = r \circ s \circ r \circ s = \mathrm{id}_E,$$

d'où $s \circ r \circ s = r^{-1}$ et $r \circ s \circ r = s^{-1} = s$.

Solution 20.

Notons

$$\vec{a} = \frac{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}}{\sqrt{3}}$$

un vecteur normé dirigeant l'axe de la rotation. D'après le cours, pour tout vecteur $\vec{x} \in E$,

$$f(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{a} \rangle \vec{a} + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)(\vec{x} - \langle \vec{x} | \vec{a} \rangle \vec{a}) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\vec{a} \wedge \vec{x}$$

ie

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\langle \vec{x} | \vec{a} \rangle \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a} \wedge \vec{x}.$$

On a donc

$$f(\vec{u}) = \vec{v}$$

puis

$$f(\vec{v}) = \vec{w}$$

et

$$f(\vec{w}) = \vec{u},$$

d'où

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque. L'esquisse d'un petit tétraèdre trirectangle permet de retrouver *empiriquement* le résultat démontré ci-dessus, à moins de se fendre d'une petite démonstration... ■

Solution 21.

Les colonnes de la matrice M étant normées et deux à deux orthogonales, la matrice étudié est orthogonale. Une simple application de la règle de Sarrus permet de conclure que le déterminant de f vaut 1 : f est donc une rotation ; notons θ son angle. Déterminons son axe en résolvant le système $\mathcal{S}$ suivant, $MX = X$...

$$\mathcal{S} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & -1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}.$$

Effectuons $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 - \sqrt{6}L_1$

$$\mathcal{S} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix},$$

les solutions sont donc les vecteurs colinéaires au vecteur unitaire

$$\vec{a} = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}.$$

Le vecteur e_3 est unitaire et orthogonal à $\vec{a}$ donc

$$\langle f(e_3)|e_3\rangle = \frac{1}{2} = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \text{Det}(a, u, f(u)) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(\theta),$$

f est donc la rotation d'axe orienté par $\vec{a}$ et d'angle $\pi/3$.

Solution 22.

- Prouvons **1)** $\Rightarrow$ **2)** Soient x et y deux vecteurs non nuls de E. Comme

$$\left(\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right) \perp \left(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right),$$

on a :

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \middle| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = 0$$

i.e.

$$\frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\|u(y)\|^2}{\|y\|^2},$$

d'où, par positivité de la norme :

$$\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|u(y)\|}{\|y\|}.$$

La quantité

$$\frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

est donc indépendante du vecteur $x \neq 0$. Notons-la k. On a

$$\forall x \neq 0, \quad \|u(x)\| = k\|x\|.$$

Comme $u(x) = 0$, cette égalité est prolongeable à E :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = k\|x\|.$$

- Prouvons **2)** $\Rightarrow$ **3)** Supposons que

$$\exists k \geqslant 0, \quad \forall x \in E, \quad \|u(x)\| = k\|x\|.$$

Si $k = 0$, u est la composée de n'importe quelle rotation avec l'homothétie de rapport nul. Si $k \neq 0$, alors $k > 0$, notons h_k l'homothétie de rapport k. On a, pour tout vecteur x de E,

$$\|((h_k)^{-1} \circ u)(x)\| = \frac{\|u(x)\|}{k} = \|x\|.$$

Ainsi l'endomorphisme $(h_k)^{-1} \circ u$ de E est une isométrie i de E et $u = h_k \circ i$.

- Prouvons **3)** $\Rightarrow$ **1)** Si $u = h_k \circ i$ avec h_k homothétie de rapport $k \geqslant 0$ et i isométrie de E, alors, pour tous vecteurs x et y de E, on a

$$\langle u(x)|u(y)\rangle = k\langle x|y\rangle$$

et donc,

$$\langle x|y\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle u(x)|u(y)\rangle = 0.$$

Solution 23.

- Si $H = K$ alors $s_H = s_K$ et s_H et s_K commutent évidemment.
- Si $H^\perp \subset K$, alors on a également $K^\perp \subset H$. Soient $a, b \in E$ tels que $H = \text{vect}(a)^\perp$ et $K = \text{vect}(b)^\perp$. On a donc $a \in K$ et $b \in H$. De plus, a et b sont orthogonaux. Enfin, $(H \cap K)^\perp = H^\perp + K^\perp = \text{vect}(a) \oplus \text{vect}(b)$. Soit $x \in E$. Il existe donc $u \in H \cap K$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $x = u + \lambda a + \mu b$. On a alors :

$$\begin{aligned} s_H \circ s_K(x) &= s_H(u + \lambda a - \mu b) = u - \lambda a - \mu b \\ s_K \circ s_H(x) &= s_K(u - \lambda a + \mu b) = u - \lambda a - \mu b \end{aligned}$$

  On a bien prouvé que s_H et s_K sommutent.

  Remarque. On a même prouvé que $s_H \circ s_K = s_K \circ s_H = s_{H \cap K}$. ■

- Réciproquement, si s_H et s_K commutent, soit à nouvau a tel que $H = \text{vect}(a)^\perp$. On a donc $s_H(a) = -a$. Par conséquent, $s_H \circ s_K(a) = s_K \circ s_H(a) = -s_K(a)$. Ceci implique que $s_K(a) \in H^\perp = \text{vect}(a)$. Comme s_K est une isométrie, on a $s_K(a) = a$ ou $s_K(a) = -a$. Si $s_K(a) = a$ alors $a \in K$ et donc $H^\perp \subset K$. Si $s_K(a) = -a$ alors $a \in K^\perp$, c'est-à-dire que $K = \text{vect}(a)^\perp = H$.

Solution 24.

1. Soit (i, j, k) une base orthonormée directe de E et f vérifiant la condition de l'énoncé. Alors

$$f(i) = f(j) \wedge f(k) \qquad f(j) = f(k) \wedge f(i) \qquad f(k) = f(i) \wedge f(j)$$

   La famille $(f(i), f(j), f(k))$ est donc orthogonale. Par conséquent

$$\begin{aligned} \|f(i)\| &= \|f(j)\|\|f(k)\| \\ \|f(j)\| &= \|f(k)\|\|f(i)\| \\ \|f(k)\| &= \|f(i)\|\|f(j)\| \end{aligned}$$

   Si l'un des vecteurs $f(i)$, $f(j)$, $f(k)$ est nul alors ces 3 vecteurs sont nuls et donc $f = 0$. Si les 3 vecteurs sont non nuls, on tire des 3 dernières relations que :

$$\|f(i)\| = \|f(j)\| = \|f(k)\| = 1$$

   Comme de plus $f(i) = f(j) \wedge f(k)$, la famille $(f(i), f(j), f(k))$ est une base orthonormée directe. On a donc $f \in SO(E)$. Réciproquement, si $f = 0$ ou $f \in SO(E)$, alors f vérifie bien la condition de l'énoncé puisque les applications $(u, v) \mapsto f(u \wedge v)$ et $(u, v) \mapsto f(u) \wedge f(v)$ sont bilinéaires et que ces deux applications coïncident sur une base orthonormée directe. L'ensemble des endomorphismes recherché est donc $SO(E) \cup \{0\}$.

2. Tout le raisonnement précédent reste valable à l'exception près que $f(i) = -f(j) \wedge f(k)$ et la famille $(f(i), f(j), f(k))$ est donc une base orthonormée indirecte. f est donc soit l'endomorphisme nul soit une isométrie indirecte. L'ensemble recherché est donc $(O(E) \setminus SO(E)) \cup \{0\}$.

Solution 25.

Notons P le plan d'équation $x+2y-3z = 0$. On a $P = \{(3z-2y, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}((-2, 1, 0), (3, 0, 1))$. Notons $u_1 = (-2, 1, 0)$ et $u_2 = (3, 0, 1)$. Notons s la symétrie de l'énoncé. On va déterminer les images des vecteurs de la base canonique par s. Un vecteur normal à P est $n = u_1 \wedge u_2 = (1, 2, -3)$. Le projeté orthogonal d'un vecteur u sur $P^\perp = \text{vect}(n)$ est donc $p(u) = \dfrac{\langle u, n\rangle}{\|n\|^2} n$. On a alors $s(u) = u - 2p(u) = u - 2\dfrac{\langle u, n\rangle}{\|n\|^2} n$. Il suffit alors d'appliquer à $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. On trouve

$$s(e_1) = \frac{1}{7}(6, -2, 3) \qquad s(e_2) = \frac{1}{7}(-2, 3, 6) \qquad s(e_3) = \frac{1}{7}(3, 6, -2)$$

La matrice de s dans la base canonique est donc $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Solution 26.

1. Soient s une réflexion de E, (u, v) une base de E, et $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ la matrice de s dans la base (u, v). Recherchons l'axe de s. Les vecteurs de l'axe sont les vecteurs de matrice colonne X dans la base (u, v) vérifiant $AX = X$. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors

$$
\begin{aligned}
AX = X &\iff \begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta = x \\ x\sin\theta - y\cos\theta = y \end{cases} \iff \begin{cases} x(\cos\theta - 1) + y\sin\theta = 0 \\ x\sin\theta - y(\cos\theta + 1) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2x\sin^2\frac{\theta}{2} + 2y\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 0 \\ 2x\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 2y\cos^2\frac{\theta}{2} = 0 \end{cases} \iff x\sin\frac{\theta}{2} - y\cos\frac{\theta}{2} = 0
\end{aligned}
$$

La dernière équivalence est justifiée par le fait que $\sin\frac{\theta}{2}$ et $\cos\frac{\theta}{2}$ ne peuvent être simultanément nuls. Un vecteur directeur de l'axe est donc $\cos\frac{\theta}{2}u + \sin\frac{\theta}{2}v$. On en déduit que $\frac{\theta}{2}$ est l'angle orienté de droites entre l'axe des abscisses i.e. $\operatorname{vect}(u)$ et l'axe de la réflexion s (modulo π puisqu'il s'agit d'un angle orienté de droites).

2. Soit s_1 et s_2 deux réflexions de E. On peut choisir une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E de telle sorte que la matrice de s_1 dans cette base soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice de s_2 dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. La matrice de $s_1 + s_2$ dans $\mathcal{B}$ est donc $A = \begin{pmatrix} 1+\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -1-\cos\theta \end{pmatrix}$. $s_1 + s_2$ est une réflexion *si et seulement si* la matrice A est orthogonale de déterminant -1. Ceci nous donne donc les conditions

$$
\begin{cases} (1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 1 \\ \sin^2\theta + (-1-\cos\theta)^2 = 1 \\ (1+\cos\theta)(-1-\cos\theta) - \sin^2\theta = -1 \end{cases}
$$

Un rapide calcul montre que chacune des équations de ce système équivaut à $2\cos\theta = -1$ i.e. $\theta \equiv \pm\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$. On a donc $\frac{\theta}{2} \equiv \pm\frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$. Avec notre choix de base, l'axe de s_1 est l'axe des abscisses. A l'aide de la première question, on peut donc conclure que $s_1 + s_2$ est une réflexion *si et seulement si* l'angle non orienté de droites entre l'axe de s_1 et l'axe de s_2 vaut $\frac{\pi}{3}$.

Solution 27.

1. Soient $y \in \operatorname{Im} v$ et $z \in \operatorname{Ker} v$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = v(x)$ i.e. $y = x - u(x)$. On a également $v(z) = 0_E$ i.e. $z = u(z)$.

$$(y|z) = (x - u(x)|z) = (x|z) - (u(x)|z) = (x|z) - (u(x)|u(z)) = 0$$

car u conserve le produit scalaire. On a donc prouvé que $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont orthogonaux.
En particulier, ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe. De plus, d'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} v + \dim \operatorname{Im} v = \dim E$, donc $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont supplémentaires.

2. Une composée d'automorphismes orthogonaux est un automorphisme orthogonal.

Solution 28.

1. L'application Φ est clairement symétrique. Elle est bilinéaire par linéarité de l'intégrale. Elle est positive par positivité de l'intégrale. Enfin, soit $f \in E$ telle que $\Phi(f, f) = 0$. On a donc $\int_0^1 f(t)^2 \, dt = 0$. Comme l'application f^2 est positive et continue sur $[0, 1]$, elle est nulle sur $[0, 1]$. Par conséquent, f est également nulle sur $[0, 1]$. De plus, f est une combinaison linéaire des fonctions 1-périodiques e_1, e_2, e_3. Donc f est aussi 1-périodique. Elle est alors nulle sur $\mathbb{R}$. L'application Φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire.

2. Les calculs sont élémentaires :

$$\begin{aligned}
\|e_1\|^2 &= 2\int_0^1 \frac{1}{2} \, dt = 1 \\
\|e_2\|^2 &= 2\int_0^1 \cos^2(2\pi t) \, dt = \int_0^1 (1 + \cos(4\pi t)) \, dt = 1 \\
\|e_3\|^2 &= 2\int_0^1 \sin^2(2\pi t) \, dt = \int_0^1 (1 - \cos(4\pi t)) \, dt = 1 \\
\langle e_1, e_2 \rangle &= \sqrt{2}\int_0^1 \cos(2\pi t) \, dt = 0 \\
\langle e_1, e_3 \rangle &= \sqrt{2}\int_0^1 \sin(2\pi t) \, dt = 0 \\
\langle e_2, e_3 \rangle &= 2\int_0^1 \sin(2\pi t)\cos(2\pi t) \, dt = \int_0^1 \sin(4\pi t) \, dt = 0
\end{aligned}$$

La base (e_1, e_2, e_3) est donc orthonormée.

3. **a.** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f_1, f_2 \in E$. $\tau_x(\lambda f_1 + \mu f_2)$ est l'application $t \mapsto (\lambda f_1 + \mu f_2)(x - t)$, c'est-à-dire l'application $t \mapsto \lambda f_1(x - t) + \mu f_2(x - t)$ i.e. l'application $\lambda\tau_x(f_1) + \mu\tau_x(f_2)$. Ainsi τ_x est linéaire.
De plus, $\tau_x(e_1) = e_1$. De plus, pour $x, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi(x - t)) &= \cos(2\pi x)\cos(2\pi t) + \sin(2\pi x)\sin(2\pi t) \\
\sin(2\pi(x - t)) &= \sin(2\pi x)\cos(2\pi t) - \cos(2\pi x)\sin(2\pi t)
\end{aligned}$$

Autrement dit, $\tau_x(e_2) = \cos(2\pi x)e_2 + \sin(2\pi x)e_3$ et $\tau_x(e_3) = \sin(2\pi x)e_2 - \cos(2\pi x)e_3$. Donc $\tau_x(e_1)$, $\tau_x(e_2)$ et $\tau_x(e_3)$ appartiennent à $\text{vect}(e_1, e_2, e_3) = E$. Comme (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de E, on en déduit que $\tau_x(f) \in E$ pour tout $f \in E$. Ainsi f est bien un endomorphisme de E.

b. Les calculs précédents montrent que la matrice de τ_x dans la base (e_1, e_2, e_3) est $M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi x) & \sin(2\pi x) \\ 0 & \sin(2\pi x) & -\cos(2\pi x) \end{pmatrix}$.

c. On vérifie sans peine que M_x est orthogonale. Comme M_x est la matrice de τ_x dans une base orthonormale, on en déduit que τ_x est un automorphisme orthogonal.

d. On a $\det M = -1$ donc τ_x est une isométrie vectorielle indirecte. Comme $\dim E = 3$, τ_x est une réflexion ou une anti-rotation.

Cherchons les vecteurs invariants par τ_x. On résout le système $MX = X$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
MX = X &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2\cos(2\pi x) + x_3\sin(2\pi x) = x_2 \\ x_2\sin(2\pi x) - x_3\cos(2\pi x) = x_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_2(\cos(2\pi x) - 1) + x_3\sin(2\pi x) = 0 \\ x_2\sin(2\pi x) - x_3(1 + \cos(2\pi x)) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_2\sin^2(\pi x) + 2x_3\sin(\pi x)\cos(\pi x) = 0 \\ 2x_2\sin(\pi x)\cos(\pi x) - 2x_3\cos^2(\pi x) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x_2\sin(\pi x) - x_3\cos(\pi x) = 0
\end{aligned}
$$

Le sous-espace des vecteurs invariants par τ_x est donc le plan P_x d'équation $x_2\sin(\pi x) - x_3\cos(\pi x) = 0$ dans la base (e_1, e_2, e_3). τ_x est donc une réflexion. On peut également définir P_x par $P_x = \operatorname{vect}(e_1, \cos(\pi x)e_2 + \sin(\pi x)e_3)$.

Solution 29.

Posons $g(x) = f(x) - f(0_E)$ pour tout $x \in E$. En particulier, $g(0_E) = 0 - E$.
Montrons que g conserve la norme. Soit $x \in E$. Alors, d'après l'énoncé,

$$\|g(x)\| = \|f(x) - f(0_E)\| = \|x - 0_E\| = \|x\|$$

Montrons que g conserve le produit scalaire. Soit $(x, y) \in E^2$. Alors

$$
\begin{aligned}
\langle g(x), g(y)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|g(x)\|^2 + \|g(y)\|^2 - \|g(x) - g(y)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|f(x) - f(y)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2\right) \\
&= \langle x, y\rangle
\end{aligned}
$$

Montrons que g est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in E^2$.

$$
\begin{aligned}
\|g(\lambda x + \mu y) - \lambda g(x) - \mu g(y)\|^2 &= \|g(\lambda x + \mu y)\|^2 + \lambda^2\|g(x)\|^2 + \mu^2\|g(y)\|^2 \\
&\quad - 2\lambda\langle g(\lambda x + \mu y), g(x)\rangle - 2\mu\langle g(\lambda x + \mu y), g(y)\rangle + 2\lambda\mu\langle g(x), g(y)\rangle \\
&= \|\lambda x + \mu y\|^2 + \lambda^2\|x\|^2 + \mu^2\|y\|^2 \\
&\quad - 2\lambda\langle \lambda x + \mu y, x\rangle - 2\mu\langle \lambda x + \mu y, y\rangle + 2\lambda\mu\langle x, y\rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

D'où $g(\lambda x + \mu y) = \lambda x + \mu y$. g est donc linéaire.
g est linéaire et conserve le produit scalaire : c'est un automorphisme orthogonal. Comme $f = g + f(0_E)$, f est la composée de g par la translation de vecteur $f(0_E)$.

Solution 30.

Supposons que f est une symétrie orthogonale. Alors f est un automorphisme orthogonal et donc A est orthogonale i.e. ${}^tAA = I_n$. De plus, f est une symétrie donc $A^2 = I_n$. On en déduit que ${}^tA = A$ et donc A est symétrique. Réciproquement, supposons A orthogonale et symétrique. Alors f est un automorphisme orthogonal. Or ${}^tAA = I_n$ et ${}^tA = A$ donc $A^2 = I_n$ et f est une symétrie. Il est alors classique de montrer que f est une symétrie orthogonale.

Solution 31.

Notons $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de la matrice $|A| = (\,|a_{i,j}|\,)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et U le vecteur colonne de taille n dont tous les coefficients valent 1. On a

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| = \sum_{i=1}^{n} \langle C_i | U \rangle \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|C_i\| \cdot \|U\| = \sum_{i=1}^{n} 1 \times \sqrt{n} = n\sqrt{n},$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et puisque les vecteurs $C_1, \dots, C_n$ sont unitaires (car A est orthogonale).

Solution 32.

Comme O est orthogonale, ${}^tOO = I_n$. On en déduit en particulier,

$$\begin{aligned} {}^tAA + {}^tCC &= I_p & \qquad {}^tAB + {}^tCD &= 0 \\ {}^tBB + {}^tDD &= I_q & \qquad {}^tBA + {}^tDC &= 0 \end{aligned}$$

- Si $\det A = \det D = 0$, alors on a bien l'inégalité demandée.
- Si $\det D \neq 0$, posons $M = \left(\begin{array}{c|c} {}^tA & {}^tC \\ \hline 0 & {}^tD \end{array}\right)$ et $N = MO = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline {}^tDC & {}^tDD \end{array}\right)$. Les matrices M et N étant triangulaires par blocs, on a $\det M = \det({}^tA)\det({}^tD) = \det A \det D$ et $\det N = \det I_p \det({}^tDD) = (\det D)^2$. De plus, $\det N = \det(MO) = \det M \det O$. On en déduit que $(\det D)^2 = \det A \det D \det O$. Puisque $\det D \neq 0$, $\det D = \det A \det O$ et donc $(\det D)^2 = (\det A)^2 (\det O)^2$. Or O est orthogonale donc $\det O = \pm 1$ et $(\det O)^2 = 1$. On a bien l'égalité demandée.
- Si $\det A \neq 0$, posons $M = \left(\begin{array}{c|c} {}^tA & 0 \\ \hline {}^tB & {}^tD \end{array}\right)$ et $N = MO = \left(\begin{array}{c|c} {}^tAA & {}^tAB \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right)$. Les matrices M et N étant triangulaires par blocs, on a $\det M = \det({}^tA)\det({}^tD) = \det A \det D$ et $\det N = \det({}^tAA)\det I_q = (\det A)^2$. De plus, $\det N = \det(MO) = \det M \det O$. On en déduit que $(\det A)^2 = \det A \det D \det O$. Puisque $\det A \neq 0$, $\det A = \det D \det O$ et donc $(\det A)^2 = (\det D)^2 (\det O)^2$. On conclut comme précédemment en remarquant que $(\det O)^2 = 1$.

Solution 33.

On a $B = P^{-1}AP$ où P est une matrice de passage entre deux bases orthonormales. P est donc une matrice orthogonale. On a donc $P^{-1} = {}^tP$ puis $B = {}^tPAP$. Ainsi

$$\operatorname{tr}({}^tBB) = \operatorname{tr}({}^tP{}^tAP{}^tPAP = \operatorname{tr}({}^tP{}^tAAP) = \operatorname{tr}(({}^tP{}^tAA)P) = \operatorname{tr}(P({}^tP{}^tAA)) = \operatorname{tr}({}^tAA)$$

Solution 34.

1. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Alors ${}^tXX$ est une matrice carrée réelle de taille 1 i.e. un réel et ${}^tXX = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. Ainsi ${}^tXX \geqslant 0$ puisque les x_k sont des réels et ${}^tXX = 0$ implique $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = 0$ i.e. $X = 0$.

2. Soit $X \in \operatorname{Ker}(I_n + M)$. On a donc $(I_n + M)X = 0$ i.e. $MX = -X$. Ainsi ${}^tXMX = -{}^tXX$. Mais en transposant l'égalité $MX = -X$, on obtient ${}^tX{}^tM = -{}^tX$ et donc ${}^tXM = {}^tX$ puisque ${}^tM = -M$. Ainsi ${}^tXMX = {}^tXX$. Par conséquent, ${}^tXX = -{}^tXX$ et donc ${}^tXX = 0$. D'après la question précédente, $X = 0$. D'où $\operatorname{Ker}(I_n + M) = \{0\}$ et $I_n + M$ est inversible.

3. On a ${}^tAA = {}^t\left((I_n + M)^{-1}\right){}^t(I_n - M)(I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Or

$$ {}^t\left((I_n + M)^{-1}\right) = \left({}^t(I_n + M)\right)^{-1} = (I_n - M)^{-1} \quad \text{et} \quad {}^t(I_n - M) = I_n + M $$

Ainsi ${}^tAA = (I_n - M)^{-1}(I_n + M)(I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Or $I_n - M$ et $I_n + M$ commutent donc

$$ {}^tAA = (I_n - M)^{-1}(I_n - M)(I_n + M)(I_n + M)^{-1} = I_n $$

Ainsi A est orthogonale.

Solution 35.

Supposons $A = 0$. Alors il est clair que $A = \operatorname{com}(A) = 0$.
Supposons $A \in SO(n)$. On sait que $\operatorname{com}(A){}^tA = \det(A)I_n$. Puisque $A \in SO(n)$, $\det(A) = 1$ et ${}^tA = A^{-1}$. Il s'ensuit que $\operatorname{com}(A) = A$.
Supposons maintenant $A = \operatorname{com}(A)$. Puisque ${}^t\operatorname{com}(A)A = \det(A)I_n$, ${}^tAA = \det(A)I_n$.

- Si $\det(A) = 0$, ${}^tAA = 0$ et, a fortiori, $\operatorname{tr}({}^tAA) = 0$ et donc $A = 0$ puisque $(M, N) \mapsto \operatorname{tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si $\det(A) \neq 0$, alors $\operatorname{tr}({}^tAA) = \operatorname{tr}(\det(A)I_n) = n \det A$. En particulier, $\det(A) > 0$ à nouveau car $(M, N) \mapsto \operatorname{tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par ailleurs, $\det({}^tAA) = \det(\det(A)I_n)$ ou encore $\det(A)^2 = \det(A)^n$. Puisque $n \neq 2$ et $\det(A) > 0$, $\det(A) = 1$. Ainsi ${}^tAA = I_n$ et $A \in SO(n)$.

Solution 36.

1. La bilinéarité vient de la linéarité de la trace. De plus, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}({}^tM) = \operatorname{tr}(M)$. Par conséquent, $\operatorname{tr}({}^tAB) = \operatorname{tr}({}^tBA)$, d'où la symétrie. De plus,

$$ \operatorname{tr}({}^tAB) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}b_{ij} $$

et en particulier

$$ \operatorname{tr}({}^tAA) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2 \geqslant 0 $$

Cette dernière somme ne s'annulant que si tous les a_{ij} sont nuls i.e. $A = 0$. L'application est donc définie positive.
On vérifie sans difficulté que la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée.

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$ |\operatorname{tr}(A)| = |\operatorname{tr}(I_nA)| \leqslant \|I_n\|\|A\| $$

On vérifie facilement que $\|I_n\| = \sqrt{n}$.

3. **a.** Soient $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$$ (A|S) = \operatorname{tr}({}^tAS) = -\operatorname{tr}(AS) $$
$$ (S|A) = \operatorname{tr}({}^tSA) = \operatorname{tr}(SA) $$

Or $\operatorname{tr}(SA) = \operatorname{tr}(AS)$ donc $(A|S) = 0$. Les sous-espaces vectoriels $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont donc orthogonaux. On sait également que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On en déduit donc que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est l'orthogonal de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

b. $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$ où p désigne la projection orthogonale sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On trouve facilement que $p(A) = \frac{{}^tA+A}{2}$. Ainsi

$$\|A - p(A)\| = \frac{1}{2}\|A - {}^tA\| = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_{ij} - a_{ji})^2}$$

en utilisant la formule donnant le carré de la norme vue à la première question.

4. Comme $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, ${}^tUU = U^tU = I_n$.

$$\|UA\|^2 = \operatorname{tr}({}^t(UA)UA) = \operatorname{tr}({}^tA^tUUA) = \operatorname{tr}({}^tAA) = \|A\|^2$$
$$\|AU\|^2 = \operatorname{tr}({}^t(AU)AU) = \operatorname{tr}({}^tU^tAAU) = \operatorname{tr}({}^tAAU^tU) = \operatorname{tr}({}^tAA) = \|A\|^2$$

5. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\|AB\|^2 &= \operatorname{tr}({}^tB^tAAB) = \operatorname{tr}({}^tAAB^tB) = \operatorname{tr}({}^t({}^tAA)B^tB)\\ &= ({}^tAA|B^tB) \leqslant \|{}^tAA\|\|B^tB\| = \|{}^tAA\|\|{}^tBB\|\end{aligned}$$

car $\|B^tB\|^2 = \operatorname{tr}(B^tBB^tB) = \operatorname{tr}({}^tBB^tBB) = \|{}^tBB\|^2$. En utilisant la formule donnant le carré de la norme vue à la première question, on a :

$$\|{}^tAA\|^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}\right)^2$$

Or pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a d'après Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$,

$$\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} \leqslant \sqrt{S_i}\sqrt{S_j}$$

avec $S_i = \sum_{k=1}^n a_{ki}^2$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Ainsi

$$\|{}^tAA\|^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} S_iS_j = \left(\sum_{i=1}^n S_i\right)\left(\sum_{j=1}^n S_j\right) = \left(\sum_{l=1}^n S_l\right)^2$$

Par conséquent,

$$\|{}^tAA\| \leqslant \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{kl}^2 = \|A\|^2$$

On a donc également $\|{}^tBB\| \leqslant \|B\|^2$, ce qui nous donne finalement l'inégalité demandée.

Solution 37.

Pour simplifier, on peut supposer $u_1, \dots, u_{n+1}$ unitaires de sorte que pour $i, j \in [\![1, n+1]\!]$ distincts, $(u_i|u_j) = \cos\alpha_n$. Notons $u_1', \dots, u_n'$ les projections orthogonales de $u_1, \dots, u_n$ sur $\operatorname{vect}(u_{n+1})^\perp$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$ $u_i' = u_i - (\cos\alpha_n)u_{n+1}$ et par le théorème de Pythagore, $\|u_i'\|^2 = \|u_i\|^2 - (\cos^2\alpha_n)\|u_{n+1}\|^2 = 1 - \cos^2\alpha_n$. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ distincts

$$(u_i'|u_j') = (u_i|u_j) - \cos\alpha_n\left((u_i|u_{n+1}) + (u_j|u_{n+1})\right) + \cos^2\alpha_n\|u_{n+1}\|^2 = \cos\alpha_n - \cos^2\alpha_n$$

Par conséquent,

$$\frac{(u_i'|u_j')}{\|u_i'\|\,\|u_j'\|} = \frac{\cos\alpha_n - \cos\alpha_n^2}{1 - \cos\alpha_n^2} = \frac{\cos\alpha_n}{1 + \cos\alpha_n}$$

Les vecteurs $u_1', \dots, u_n'$ font donc un angle constant α_{n-1} deux à deux. De plus, $\cos\alpha_{n-1} = \frac{\cos\alpha_n}{1+\cos\alpha_n}$ i.e. $\cos\alpha_n = \frac{\cos\alpha_{n-1}}{1-\cos\alpha_{n-1}}$. L'énoncé n'a de sens que pour $n \geqslant 2$. On trouve aisément $\alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$. Posons $z_n = \frac{1}{\cos\alpha_n}$. La suite (z_n) vérifie la relation de récurrence $z_n = z_{n-1} - 1$. Puisque $z_2 = -2$, on trouve $z_n = -n$ pour tout $n \geqslant 2$. Ainsi $\alpha_n = \arccos\left(-\frac{1}{n}\right)$.

Solution 38.

Soit $X \in \operatorname{Ker} A$. On a donc $AX = 0$ puis ${}^tAAX = 0$ donc $X \in \operatorname{Ker} {}^tAA$. Ainsi $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} {}^tAA$.
Soit maintenant $X \in \operatorname{Ker} {}^tAA$. On a donc ${}^tAAX = 0$ puis ${}^tX{}^tAAX = 0$. Notons $Y = AX$. Ainsi ${}^tYY = 0$. Or ${}^tYY$ est la somme des carrés des composantes de Y donc $Y = 0$ i.e. $AX = 0$. D'où $X \in \operatorname{Ker} A$. Ainsi $\operatorname{Ker} {}^tAA \subset \operatorname{Ker} A$.
Finalement, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} {}^tAA$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tAA$ via le théorème du rang. En changeant A en ${}^tA$, on a également $\operatorname{rg} {}^tA = \operatorname{rg} A{}^tA$. Or $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tA$. Ainsi $\operatorname{rg} {}^tAA = \operatorname{rg} A{}^tA = \operatorname{rg} A$.

Solution 39.

1. Évident.
2. On va montrer que F admet pour supplémentaire la droite vectorielle $\mathbb{R}_0[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
Soit $P \in \mathbb{R}_0[X] \cap F$. Alors il existe $(\lambda_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N}^*)}$ tel que $P = \sum_{n=1}^{+infty} \lambda_n(1 + X^n)$. On a donc
$$P = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n X^n$$
Mais comme $\deg P \leqslant 0$, $\lambda_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $P = 0$. Ainsi F et $\mathbb{R}_0[X]$ sont en somme directe.
3. Soit $P \in F^\perp$. Posons $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ avec $(a_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Puisque $\langle P, 1 + X^n\rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_0 + a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Mais comme la suite (a_n) est nulle à partir d'un certain rang, on en déduit que $a_0 = 0$ puis que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $P = 0$ puis $F^\perp = \{0\}$.
En particulier, $F \oplus F^\perp = F \neq \mathbb{R}[X]$ puisque F est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.

Solution 40.

1.
   - Supposons que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ soit liée. Il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^p \lambda_i x_i = 0_E$. On a alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:
   $$\sum_{j=1}^p \lambda_j (x_i|x_j) = 0$$
   Si on note $(C_1, \dots, C_p)$ les colonnes de la matrice $G_p(x_1, \dots, x_p)$, on a donc $\sum_{j=1}^p \lambda_j C_j = 0$. Les colonnes de la matrice $G_p(x_1, \dots, x_p)$ sont liées donc $\det G_p(x_1, \dots, x_p) = 0$.
   - Réciproquement, supposons que $\det G = 0$. Alors les colonnes $C_1, \dots, C_p$ de G sont liées. Il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^p \lambda_j C_j = 0$. On en déduit comme précédemment que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:
   $$\sum_{j=1}^p \lambda_j (x_i|x_j) = 0$$
   Posons $z = \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j$. L'égalité précédente signifie que $(z|x_i) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. Par linéarité, on a donc $(z|\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i) = 0$ i.e. $\|z\|^2 = 0$. Donc $z = 0$, ce qui signifie que $(x_1, \dots, x_p)$ est liée.
2.
   a. Pour $1 \leqslant j \leqslant p$, $x_j = \sum_{i=1}^n (x_j|e_i)e_i$ puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée. Donc $A = ((x_j|e_i))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$. De plus,
   $$(x_i|x_j) = \sum_{k=1}^n (x_i|e_k)(x_j|e_k)$$
   Ceci signifie que $G_p(x_1, \dots, x_p) = {}^tAA$.

   b. On a $\det G_p(x_1, \dots, x_p) = \det({}^tA)\det(A) = (\det A)^2$. Comme $x_1, \dots, x_p$ est libre, c'est une base de F et donc $\det A \neq 0$. Ainsi $\det G_p(x_1, \dots, x_p) > 0$.

3. **a.**
- Si $x \in F$, les deux déterminants sont nuls.
- Si $x \notin F$, notons $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\operatorname{vect}(x, x_1, \dots, x_p)$ et posons comme précédemment $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(x, x_1, \dots, x_p)$. On a alors également $G_{p+1}(x, x_1, \dots, x_p) = {}^tAA$. Notons également $A' = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p)$ de sorte que $G_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p) = {}^tA'A'$.
Comme $\pi(x) \in F$ et que $(x_1, \dots, x_p)$ est une base de F, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tel que $\pi(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$. Notons $C, C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A : la matrice A' s'obtient à partir de A en effectuant l'opération de pivot $C \leftarrow C - \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i$. On en déduit que $\det(A') = \det(A)$ puis que $\det G_{p+1}(x, x_1, \dots, x_p) = \det G_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p)$.

b. Comme $x - \pi(x) \in F^\perp$, on a $x - \pi(x) \perp x_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. On en déduit que

$$G_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p) = \left(\begin{array}{c|c} \|x - \pi(x)\|^2 & 0 \ \dots \ 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & G_p(x_1, \dots, x_p) \\ 0 & \end{array}\right)$$

On a donc $\det G_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p) = \|x - \pi(x)\|^2 \det G_p(x_1, \dots, x_p)$. On conlut en remarquant que $d(x, F)^2 = \|x - \pi(x)\|^2$.

Solution 41.

1. On a $u + v = 0$. Donc $\|u\|^2 = -\langle u, v\rangle = -\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} \alpha_i\alpha_j\langle x_i, x_j\rangle$. Or pour $(i, j) \in I \times J$, $\alpha_i\alpha_j\langle x_i, x_j\rangle > 0$. Ainsi si I et J sont non vides, $\|u\|^2 < 0$, ce qui est absurde.
2. Supposons que I soit non vide. Alors J est vide. On a donc $v = 0$ puis $u = 0$. Donc $\langle u, x_p\rangle = 0$. Or $\langle u, x_p\rangle = \displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i\langle x_i, x_p\rangle$. Mais pour $i \in J$, $\alpha_i\langle x_i, x_p\rangle < 0$. Comme I est non vide, $\langle u, x_p\rangle < 0$. Il y a donc contradiction. Ainsi I est vide. On démontre de même que J est vide.
3. Comme I et J sont vides, $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$. Ceci signifie que la famille $(x_1, \dots, x_{p-1})$ est libre.

Solution 42.

1. On a $A = (\langle x_j, e_i\rangle)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$. De plus, comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$:
$$\langle x_i, x_j\rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_i, e_k\rangle\langle x_j, e_k\rangle$$
Ceci signifie que $G(x_1, \dots, x_p) = {}^tAA$.
2. Si $(x_1, \dots, x_p)$ est liée, alors $\operatorname{rg} A < p$. Par conséquent, $\operatorname{rg} G(x_1, \dots, x_p) = \operatorname{rg}({}^tAA) \leqslant \operatorname{rg} A < p$. Ceci signifie que $G(x_1, \dots, x_p)$ est non inversible. Donc $\det G(x_1, \dots, x_p) = 0$.
Si $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, alors A est une matrice carrée inversible. Donc $\det(A) \neq 0$. Par conséquent, $\det G(x_1, \dots, x_p) = \det({}^tAA) = \det(A)^2 > 0$.
3. On pose $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$. On a alors :
$$\det G(x_1, \dots, x_p, x) = \det G(x_1, \dots, x_p, y) + \det G(x_1, \dots, x_p, z)$$
Comme $y \in F$, la famille $(x_1, \dots, x_p, y)$ est liée et $\det G(x_1, \dots, x_p, y) = 0$. De plus, $\det G(x_1, \dots, x_p, z) = \|z\|^2 \det G(x_1, \dots, x_p)$, le déterminant étant diagonal par blocs. On conclut en remarquant que $d(x, F)^2 = \|z\|^2$.

Solution 43.

1. Soient $x, y, z \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\langle z, u(\lambda x + \mu y)\rangle &= -\langle u(z), \lambda x + \mu y\rangle && \text{par antisymétrie} \\
&= -\lambda \langle u(z), x\rangle - \mu \langle u(z), y\rangle && \text{par bilinéarité du produit scalaire} \\
&= \lambda \langle z, u(x)\rangle + \mu \langle z, u(y)\rangle && \text{par antisymétrie}
\end{aligned}$$

On a donc $\langle z, u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu(y)\rangle = 0$ pour tout $z \in E$. Comme $E^\perp = \{0_E\}$, $u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu(y) = 0_E$. D'où la linéarité de u.

2. $(i) \Rightarrow (ii)$ Soient $x, y \in E$. Alors $\langle u(x+y), x+y\rangle = 0$. Or, par linéarité de u et bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle u(x+y), x+y\rangle = \langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle = \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle$$

D'où l'antisymétrie de u.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ On a vu dans la question précédente que u était linéaire. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans cette base. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_j), e_i\rangle e_i$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$. On en déduit que $a_{ij} = \langle u(e_j), e_i\rangle$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Or, par antisymétrie de u, $\langle u(e_j), e_i\rangle = -\langle u(e_i), e_j\rangle$ i.e. $a_{ij} = -a_{ji}$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$. On en déduit que A est antisymétrique.

$(iii) \Rightarrow (i)$ u est bien linéaire par hypothèse. Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et A la matrice de u dans $\mathcal{B}$. Soit $x \in E$ et X la matrice colonne de x dans $\mathcal{B}$. Alors

$$\langle u(x), x\rangle = {}^t(MX)X = -{}^tXMX = -\langle x, u(x)\rangle$$

On en déduit que $\langle u(x), x\rangle = 0$.

3. Fixons une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et considérons Φ l'isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à un endomorphisme de E associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. D'après la question précédente, $\Phi(A(E)) = A_n(\mathbb{R})$ où $A_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques. On a donc également $A(E) = \Phi^{-1}(A_n(\mathbb{R}))$ donc $A(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ comme image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire et $\dim A(E) = \dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ car Φ est un isomorphisme.

4. Soient $x \in \operatorname{Ker} u$ et $y \in \operatorname{Im} u$. Il existe $z \in E$ tel que $y = u(z)$.

$$\langle x, y\rangle = \langle x, u(z)\rangle = -\langle z, u(x)\rangle = -\langle z, 0_E\rangle = 0$$

Ainsi $\operatorname{Im} u \subset (\operatorname{Ker} u)^\perp$. D'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Im} u = n - \dim \operatorname{Ker} u = \dim(\operatorname{Ker} u)^\perp$. Ainsi $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.

5. Soit F un sous-espace vectoriel stable par u. Soient $x \in F^\perp$. Alors, pour tout $y \in F$, $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle = 0$ car $u(y) \in F$. Ainsi $u(x) \in F^\perp$, ce qui prouve que $u(F^\perp) \subset F^\perp$.

Solution 44.

Soit $\mathcal{B}'$ une base orthonormale adaptée à la décomposition en somme directe $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$. La matrice A' de p dans la base $\mathcal{B}'$ est diagonale (les éléments diagonaux valent 1 ou 0). Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. On a $A = PA'P^{-1}$. Or P est orthogonale donc $P^{-1} = {}^tP$. Ainsi $A = PA'{}^tP$ est symétrique.

Solution 45.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Si A est nulle, $\operatorname{rg} A = 0$ et donc le rang de A est pair.
Sinon, notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à A. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et on se donne

une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^n = S \oplus \operatorname{Ker} u$ où S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$. La matrice de u dans cette base $\mathcal{B}$ est de la forme $A' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ avec B carrée de taille $p = \dim S$. Si on note P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, P est orthogonale et $A' = P^{-1}BP = {}^tPAP$. On en déduit que A' est également antisymétrique et donc B est antisymétrique et C est nulle. On a donc $A' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} B$ mais comme S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$, $\operatorname{rg} A' = \dim S = p$, ce qui prouve que B est inversible. Or $\det({}^tB) = \det(-B) = (-1)^p \det B$ donc p est pair sinon on aurait $\det B = 0$ et B non inversible.

Solution 46.

D'après le cours sur les espaces euclidiens et le théorème du rang :

$$\dim(\operatorname{Ker}(u)^\perp) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(u)) = \dim(\operatorname{Im}(u)),$$

il suffit donc de prouver que

$$\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)^\perp.$$

Soit $y \in \operatorname{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Soit $x' \in \operatorname{Ker}(u)$. On a :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u(x+x')|x+x'\rangle = \langle u(x)|x'\rangle + \langle x|u(x')\rangle \\ &= \langle u(x)|x'\rangle + 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\langle y|x'\rangle = 0.$$

On a donc prouvé que $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)^\perp$.

Solution 47.

1. L'application f est clairement un endomorphisme par linéarité à droite du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient x et y dans E. On a

$$\begin{aligned} \langle f(x), y\rangle &= \langle \langle a, x\rangle b + \langle b, x\rangle a, y\rangle \\ &= \langle a, x\rangle\langle b, y\rangle + \langle b, x\rangle\langle a, y\rangle \end{aligned}$$

Comme cette expression est symétrique en (x, y), on a

$$\langle f(x), y\rangle = \langle f(y), x\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$

par symétrie du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2. Pour tout $x \in E$, on a $x \in \operatorname{Ker}(f)$ *si et seulement si*

$$\langle a, x\rangle b + \langle b, x\rangle a = 0.$$

Comme (a, b) est libre, cela équivaut à

$$\langle a, x\rangle = \langle b, x\rangle = 0,$$

ie $x \in \operatorname{vect}(a, b)^\perp$. Ainsi

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{vect}(a, b)^\perp$$

et, d'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(f) &= n - \dim(\operatorname{Ker}(f)) = n - \dim(\operatorname{vect}(a, b)^\perp) \\ &= n - (n - \dim(\operatorname{vect}(a, b))) = \dim(\operatorname{vect}(a, b)) \\ &= 2 \end{aligned}$$

car (a, b) est libre.

3. On pose $F = \text{Im}(f)$.

a. F est un sev de E en tant que noyau d'un endomorphisme de E.

- F *est stable par* f : soit $y \in \text{Im}(f)$; on a alors $f(y) \in \text{Im}(f) = F$. Ainsi F est stable par f.
- *Base de* F : on a clairement
$$F = \text{Im}(f) \subset \text{vect}(a, b).$$
Comme $\dim(F) = 2$ (d'après la question **2.**), on a nécessairement
$$F = \text{Im}(f) = \text{vect}(a, b).$$
Ainsi (a, b) est une base de F car cette famille est libre.

b. Notons $\mathcal{B} = (a, b)$ et $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Comme
$$\begin{cases} f(a) &= \|a\|^2 b + \langle a, b\rangle a \\ f(b) &= \|b\|^2 a + \langle a, b\rangle b \end{cases},$$
on a
$$M = \begin{pmatrix} \langle a, b\rangle & \|b\|^2 \\ \|a\|^2 & \langle a, b\rangle \end{pmatrix}.$$

Solution 48.

- Soit
$$x \in \text{Ker}(u - \text{id}_E) \cap \text{Im}(u - \text{id}_E).$$
On a alors $u(x) = x$ et il existe $y \in E$ tel que $x = u(y) - y$. Par une récurrence sans difficulté, on établit que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ nx = u^n(y) - y.$$
Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ x = \frac{u^n(y) - y}{n}$$
et donc, d'après l'inégalité triangulaire,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \|x\| \leqslant \frac{\|u^n(y)\| + \|y\|}{n}.$$
Par une récurrence immédiate, on a
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \|u^n(y)\| \leqslant \|y\|$$
et ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ 0 \leqslant \|x\| \leqslant \frac{2\|y\|}{n}.$$
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient par le théorème d'encadrement, $\|x\| = 0$, ie $x = 0$. Ainsi
$$\text{Ker}(u - \text{id}_E) \cap \text{Im}(u - \text{id}_E) = \{0\}.$$
- Comme $\text{Ker}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{id}_E)$, on déduit du théorème du rang que
$$\dim(\text{Ker}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{id}_E)) = \dim(E)$$
et donc que
$$E = \text{Ker}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{id}_E)$$
car $\text{Ker}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{id}_E) \subset E$.

Solution 49.

1. La symétrie de φ est évidente. La bilinéarité de φ provient de la linéarité de l'intégrale. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt \geqslant 0$ donc φ est positive. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt = 0$. Comme P^2 est continue positive qur $[-1,1]$, on en déduit que P^2 est nulle sur $[-1,1]$. Le polynôme P^2 admet donc une infinité de racines : il est donc nul. Par conséquent, P est également nul. Ceci prouve que φ est définie.
φ est donc un produit scalaire.

2. 1 et -1 sont des racines de multiplicité n de Q_n. On en déduit que $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$ pour $k < n$.

3. Soit $k, l \in [\![0,n]\!]$ avec $k \neq l$. On peut supposer $k < l$.
Supposons $l \geqslant 1$ pour se donner une idée de la marche à suivre. On utilise une intégration par parties :
$$\langle P_k, P_l\rangle = \int_{-1}^{1} Q_k^{(k)}(t)Q_l^{(l)}(t)\,dt = \left[Q_k^{(k)}(t)Q_l^{(l-1)}(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q_k^{(k+1)}(t)Q_l^{(l-1)}(t)\,dt$$
Or $l-1 < l$ donc $Q_l^{(l-1)}(-1) = Q_l^{(l-1)}(1) = 0$ d'après la question précédente. Ainsi $\langle Q_k^{(k)}, Q_l^{(l)}\rangle = -\langle Q_k^{(k+1)}, Q_l^{(l-1)}\rangle$.
On peut donc prouver à l'aide d'une récurrence finie que $\langle Q_k^{(k)}, Q_l^{(l)}\rangle = (-1)^l\langle Q_k^{(k+l)}, Q_l\rangle$. Or $k < l$ donc $k+l > 2k$. Puisque $\deg Q_k = 2k$, $Q_k^{(k+l)} = 0$. On a donc $\langle P_k, P_l\rangle = 0$.
Les P_k sont donc orthogonaux deux à deux. La famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est donc orthogonale. De plus, $\deg Q_k = 2k$ donc $\deg P_k = \deg Q_k^{(k)} = k$. La famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille de polynômes à degrés étagés : elle est donc libre. Comme elle comporte $n+1$ éléments et que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution 50.

1. D'une part, on a :
$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\|^2 &= \langle f(x)-f(y), f(x)-f(y)\rangle \\ &= \|f(x)\|^2 - 2\langle f(x), f(y)\rangle + \|f(y)\|^2 \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} - 2\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} + \frac{1}{\|y\|2}.\end{aligned}$$
D'autre part on a :
$$\begin{aligned}\left(\frac{\|x-y\|}{\|x\|\|y\|}\right)^2 &= \frac{\|x^2\| - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2}{\|x\|^2\|y\|^2} \\ &= \frac{1}{\|y\|^2} - 2\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} + \frac{1}{\|x\|2}.\end{aligned}$$
D'où la conclusion.

2. Remarquons tout d'abord que l'inégalité est évidente si deux des vecteurs a, b, c, d sont égaux. On les suppose maintenant deux à deux distincts. Soient $x, y, z \in E \setminus \{0\}$. L'inégalité triangulaire donne
$$\|f(x)-f(y)\| \leqslant \|f(x)-f(z)\| + \|f(z)-f(y)\|$$
qui devient en utilisant la première question :
$$\frac{\|x-y\|}{\|x\|\|y\|} \leqslant \frac{\|x-z\|}{\|x\|\|z\|} + \frac{\|z-y\|}{\|z\|\|y\|}.$$
En multipliant par $\|x\|\|y\|\|z\|$, on obtient :
$$\|z\|\|x-y\| \leqslant \|y\|\|x-z\| + \|x\|\|z-y\|.$$
En posant $x = b-a$, $y = d-a$ et $z = c-a$, on obtient le résultat voulu.

Solution 51.

Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, alors $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$ et l'inégalité est trivialement vérifiée.
Sinon, on peut orthonormaliser la famille $(x_1, \dots, x_n)$ en une base orthonormale $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Notons M la matrice de $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ et R la matrice de $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}'$. On a donc $M = QR$ puis $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(M) = \det(Q)\det(R)$. Puisque $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases orthonormales, Q est orthogonale et donc $\det(Q) = \pm 1$. De plus, par procédé de Gram-Schmidt, la matrice R est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $\langle x_1, e_1 \rangle$, ..., $\langle x_n, e_n \rangle$. On en déduit que

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \langle x_i, e_i \rangle$$

puis par inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|x_i\| \|e_i\| = \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

Solution 52.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux

$$a_k = 1 \quad , \quad b_k = \frac{1}{k},$$

on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}},$$

d'où, en élevant au carré,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Solution 53.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux

$$a_k = \sqrt{x_k} \quad , \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}},$$

on aboutit à

$$\sum_{k=1}^{n} 1 \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}},$$

d'où, en élevant au carré,

$$n^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \right).$$

Solution 54.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux réels

$$a_k = \sqrt{k} \quad , \quad b_k = \frac{\sqrt{k}}{n-k} \; , \; 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

on aboutit à
$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n-k}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}k}\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{(n-k)^2}},$$
d'où, en élevant au carré,
$$\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n-k}\right)^2\leqslant\frac{n(n-1)}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{(n-k)^2}$$
d'où le résultat.

Solution 55.

D'après-Cauchy-Schwarz,
$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\geqslant\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2=(b-a)^2$$
Donc la borne inférieure de l'énoncé existe. Elle est atteint si $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ sont colinéaires : il suffit par exemple de prendre $f=1$ sur $[a,b]$.

Solution 56.

On a
$$\forall t\in[a,b],\quad f(t)=\int_a^t f'(u)du.$$
Appliquons alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On obtient
$$f^2(t)\leqslant\left(\int_a^t du\right)\left(\int_a^t f'^2(u)du\right),$$
soit
$$f^2(t)\leqslant(t-a)\int_a^t f'^2(u)du.$$
Comme $f'^2\geqslant 0$ et $a\leqslant t\leqslant b$, on a
$$\int_a^t f'^2(u)du\leqslant\int_a^b f'^2(u)du$$
d'où
$$\forall t\in[a,b],\quad f^2(t)\leqslant(t-a)\int_a^b f'^2(u)du,$$
puis, par positivité de l'intégrale,
$$\int_a^b f^2(t)dt\leqslant\left(\int_a^b(t-a)dt\right)\int_a^b f'^2(u)du$$
et donc
$$\int_a^b f^2(u)du\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(u)du.$$