Semaine du 06/12 au 10/12

1 Cours

Suites de fonctions

Modes de convergence Convergence simple. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Théorèmes d'interversion

- Théorème de la double limite : si (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur un intervalle I, et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en $a \in \bar{\mathrm{I}}$, alors f admet une limite en a et $\lim_a f = \lim_{n\to+\infty} \ell_n$.
- Continuité : si (f_n) est une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f sur tout segment d'un intervalle I, alors f est continue sur I.
- Primitivisation : si (f_n) est une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f sur tout segment d'un intervalle I, alors, pour tout $a \in \mathrm{I}$, $\left(x \mapsto \int_a^x f_n(t)\, \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x \mapsto \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$ sur tout segment de I.
- Intégration : si (f_n) est une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f sur le segment $[a, b]$, alors $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$.
- Dérivation : si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ convergeant simplement vers une fonction f sur un intervalle I et si (f_n') converge uniformément vers une fonction g sur tout segment de I, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$. Adaptation aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

2 Méthodes à maîtriser

- Montrer qu'une suite de fonctions (f_n) converge simplement : étude de la suite numérique $(f_n(x))$ à x fixé (éventuellement une suite récurrente suivant la définition de la suite de fonctions).
- Montrer qu'une suite de fonctions (f_n) converge uniformément :
  1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f.
  2. Montrer que $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$: pour cela, on peut
     - étudier $f_n - f$ pour déterminer explicitement $\sup |f_n - f|$;
     - majorer $|f_n(x) - f(x)|$ par une quantité indépendante de x tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- Pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément, on peut au choix :
  - Calculer explicitement $\|f_n - f\|_\infty$ et montrer que cette quantité ne tend pas vers 0.
  - Déterminer une suite (x_n) telle que $f_n(x_n) - f(x_n)$ ne tend pas vers 0.
  - Mettre en défaut l'un des théorèmes d'«interversion» : par exemple, les f_n sont continues mais f ne l'est pas.

3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 9, 10, 11, 12