

## 1 Cours

### Convexité

**Parties convexes** Barycentre. Segment. Une partie d'un espace vectoriel normé est dite convexe si tout segment d'extrémités dans cette partie est inclus dans cette partie. Une partie d'un espace est convexe si et seulement si elle est stable par barycentration positive.

**Fonctions convexes** Définition et interprétation géométrique (position du graphe par rapport aux cordes). Epigraphe. Une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe. Inégalité des pentes.

**Lien avec la dérivabilité** Une fonction dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante. Une fonction deux fois dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée seconde est positive. Position du graphe par rapport aux tangentes.

**Convexité généralisée**  $f$  est convexe sur un intervalle  $I$  si et seulement si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \implies f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

**Concavité** Définition et adaptation des résultats précédents.

### Espaces vectoriels normés

**Normes** Définition. Rappel sur les normes euclidiennes. Normes usuelles sur  $\mathbb{K}^n$  :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des applications bornées sur un ensemble  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Normes usuelles sur  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$  :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, dt \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, dt} \qquad \|f\|_\infty = \max_{[a, b]} |f|$$

## 2 Méthodes à maîtriser

- Inégalités classiques de convexité :

$$\forall x \in ]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x \qquad \forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$$

- Savoir choisir la bonne caractérisation de la convexité suivant les exercices.
- Montrer qu'une application est une norme : positivité, homogénéité, inégalité triangulaire, séparation.

## 3 Questions de cours

**Inégalité arithmético-géométrique** Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ . On définit

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \qquad G_n = \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

En utilisant la concavité de  $\ln$ , montrer que  $G_n \leq A_n$ .

**Normes usuelles sur  $\mathbb{K}^n$**  Justifier que  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont des normes sur  $\mathbb{K}^n$ .

**Normes usuelles sur  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$**  Justifier que  $\|\cdot\|_1$  est une norme sur  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ .

**Norme de la convergence uniforme** Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$  l'ensemble des applications bornées sur  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On pose  $\|f\|_\infty = \sup_X |f|$ . Montrer que  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme sur  $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ .

**Banque CCP** Exercices 76, 79.