# Devoir à la maison n° 11

## Exercice 1.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Dans toute cette partie, $m$ et $n$ désignent des entiers strictement positifs.

**1.** Montrer que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe commutatif.

**2.** **a.** Montrer que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_{m \wedge n}$.

**b.** On note $\mathbb{U}_m\mathbb{U}_n = \{z_1z_2 \mid z_1 \in \mathbb{U}_m, z_2 \in \mathbb{U}_n\}$. Montrer que $\mathbb{U}_m\mathbb{U}_n = \mathbb{U}_{m \vee n}$.

**3.** Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n$ et $(z_1', z_2') \in \mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n$ :

$$(z_1, z_2) * (z_1', z_2') = (z_1z_1', z_2z_2')$$

**a.** Vérifier que $*$ est une loi interne associative sur $\mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n$.

**b.** Montrer que $(\mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n, *)$ est un groupe commutatif dont on précisera l'élément neutre.

**4.** On définit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{U}_{mn} & \longrightarrow & \mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n \\ z & \longmapsto & (z^n, z^m) \end{array} \right.$.

**a.** Vérifier que $f$ est bien définie i.e. que pour tout $z \in \mathbb{U}_{mn}$, $(z^n, z^m) \in \mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n$.

**b.** Vérifier que $f$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{U}_{mn}, \times)$ dans $(\mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n, *)$.

**c.** Quel est le noyau de $f$ ?

**d.** Démontrer que $f$ est injectif *si et seulement si* $m$ et $n$ sont premiers entre eux.

**e.** En déduire que $f$ est un isomorphisme *si et seulement si* $m$ et $n$ sont premiers entre eux.

**5.** On définit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n & \longrightarrow & \mathbb{U}_{mn} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & z_1z_2 \end{array} \right.$.

**a.** Vérifier que $g$ est bien définie i.e. que pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n$, $z_1z_2 \in \mathbb{U}_{mn}$.

**b.** Vérifier que $g$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n, *)$ dans $(\mathbb{U}_{mn}, \times)$.

**c.** Quelle est l'image de $g$ ?

**d.** Démontrer que $g$ est surjectif *si et seulement si* $m$ et $n$ sont premiers entre eux.

**e.** En déduire que $g$ est un isomorphisme *si et seulement si* $m$ et $n$ sont premiers entre eux.

## Exercice 2.

**Vocabulaire et notations**

- Pour un réel $t$, on notera $\lfloor t \rfloor$ la partie entière de $t$.
- La notation $[\![0, 9]\!]$ désigne l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- On dit qu'une suite $(u_n)$ est périodique à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n+T} = u_n$ pour tout $n \geqslant N$. On dit alors que $(u_n)$ est $T$-périodique à partir du rang $N$.

Soit $x$ un nombre réel. On définit deux suites $(d_n)$ et $(\varepsilon_n)$ de la manière suivante :

- On pose $d_0 = \lfloor x \rfloor$ et $\varepsilon_0 = x - \lfloor x \rfloor$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_{n+1} = \lfloor 10\varepsilon_n \rfloor$ et $\varepsilon_{n+1} = 10\varepsilon_n - \lfloor 10\varepsilon_n \rfloor$.

**1.** *Dans cette question uniquement*, on suppose $x = 123,456$. Calculer $d_0, d_1, d_2, d_3$ et $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Que valent $d_n$ et $\varepsilon_n$ pour $n \geqslant 4$ ?

**2.** On revient au cas général.

**a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n \in [0, 1[$.

**b.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n \in [\![0, 9]\!]$.

**c.** On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x = S_n + \frac{\varepsilon_n}{10^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**d.** En déduire que $(S_n)$ converge vers $x$.

**3.** Soient $T \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}$. On suppose que la suite $(d_n)$ est $T$-périodique à partir du rang $N$.

**a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 10^{N+T} S_{n+N+T} - 10^N S_{n+N}$. Montrer que la suite $(u_n)$ est constante.

**b.** En déduire qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$10^{N+T} S_{n+N+T} - 10^N S_{n+N} = p$$

**c.** En déduire que $x$ est rationnel.

**4.** Soit $\alpha$ le nombre dont l'écriture décimale est $0,123\,456\,456\,456\,456\dots$. Montrer que $\alpha$ est rationnel et l'écrire sous la forme d'une fraction de deux entiers.

**5.** On suppose que $x$ est rationnel. Il existe donc $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{a}{b}$. On définit deux suites $(q_n)$ et $(r_n)$ de la manière suivante.

- $q_0$ et $r_0$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}, q_{n+1}$ et $r_{n+1}$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $10r_n$ par $b$.

**a.** Justifier qu'il existe deux entiers naturels $N$ et $M$ distincts tels que $r_N = r_M$.

**b.** En déduire que $(r_n)$ est périodique à partir d'un certain rang.

**c.** En déduire que $(q_n)$ est également périodique à partir d'un certain rang.

**d.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = b\varepsilon_n$ et $q_n = d_n$.
On a donc prouvé que la suite $(d_n)$ était périodique à partir d'un certain rang.

**6.** On suppose que $x = \frac{13}{35}$. Déterminer $N \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathbb{N}^*$ tels que la suite $(d_n)$ soit $T$-périodique à partir du rang $N$.