# Équations différentielles

## Solution 1.

Puisque

$$\int \operatorname{th}(t)\,dt = \ln(\operatorname{ch}(t)) = A(t),$$

la fonction

$$y_0 : t \longmapsto e^{-A(t)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$$

est une solution non nulle de l'équation homogène. Appliquons la méthode de la variation de la constante : les solutions sont de la forme $\lambda y_0$ avec $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{\lambda'(t)}{\operatorname{ch}(t)} = \operatorname{sh}(t),$$

ie

$$\lambda(t) = \int \operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}(t)\,dt = \int \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2t)\,dt = \frac{1}{4}\operatorname{ch}(2t) + k$$

où $k \in \mathbb{R}$. les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$t \longmapsto \frac{\operatorname{ch}(2t)}{4\operatorname{ch}(t)} + \frac{k}{\operatorname{ch}(t)}$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

## Solution 2.

Appliquons la méthode la variation de la constante sur I. Puisque

$$-\int -\tan(x)dx = -\ln(\cos(x)),$$

les solutions de $(\mathbf{E_H})$ sont les fonctions de la forme

$$t \longmapsto \frac{\lambda}{\cos(t)},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de $(\mathbf{E})$ sont de la forme $t \longmapsto \frac{\lambda(t)}{\cos(t)}$ avec $\lambda : I \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\forall t \in I,\ \frac{\lambda'(t)}{\cos(t)} = \frac{1}{1+\cos(t)},$$

c'est-à-dire

$$\lambda'(t) = \frac{\cos(t)}{1+\cos(t)} = 1 - \frac{1}{2\cos^2(t/2)}.$$

Les solutions de $(\mathbf{E})$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$ sont donc les fonctions de la forme

$$t \longmapsto \frac{t - \tan(t/2) + \lambda}{\cos(t)}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

## Solution 3.

L'équation s'écrit :

$$y - \frac{2-x}{(1-x)^2}y = 0.$$

Comme

$$\forall x < 1, \quad \frac{2-x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x},$$

on a :

$$\int \frac{2-x}{(1-x)^2}\,dx = \frac{1}{1-x} - \ln(1-x)$$

et les solutions le l'équation sont de la forme :

$$x < 1 \mapsto \frac{k}{1-x}e^{1/(1-x)}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

## Solution 4.

► Comme

$$\int \operatorname{th}(t)\,dt = \ln(\operatorname{ch}(t)),$$

les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{k}{\operatorname{ch}(t)}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

► Appliquons la méthode de la variation des constantes : les solutions de l'équation de l'énoncé sont de la forme :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{k(t)}{\operatorname{ch}(t)}$$

avec $k : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{k'(t)}{\operatorname{ch}(t)} = t\operatorname{th}(t)$$

i.e.

$$k(t) = \int t\operatorname{sh}(t)\,dt.$$

Après une simple intégration par parties (justifiée puisque toutes les fonctions en jeu sont dérivables), on obtient :

$$k(t) = t\operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t) + k_1, \quad \text{avec } k_1 \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto t - \operatorname{th}(t) + \frac{k_1}{\operatorname{ch}(t)}, \quad \text{avec } k_1 \in \mathbb{R}.$$

Une telle fonction $z_1$ vérifie la condition initiale $z_1(0) = 1$ *si et seulement si* $k_1 = 1$, d'où

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z_1(t) = t - \operatorname{th}(t) + \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}.$$

## Solution 5.

**1.** Comme

$$\int \frac{\sin(x)}{2-\cos(x)}\,dx = \ln(2-\cos(x)),$$

les solutions de $(E_H)$ sont de la forme :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{k}{2-\cos(x)}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

2. On vérifie sans peine que
$$x \in \mathbb{R} \mapsto 2 - \cos(x)$$
est une solution particulière de $(E)$.

3. D'après les deux questions précédentes, les solutions de $(E)$ sont les fonctions de la forme :
$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{k}{2-\cos(x)} + 2 - \cos(x), \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$
Une telle fonction $h$ vérifie la condition initiale $h(0) = 1$ *si et seulement si* $k = 0$, d'où :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = 2 - \cos(x).$$

## SOLUTION 6.

► Puisque sur I le sinus est strictement positif,
$$\int \cot\mathrm{an}(t)\,dt = \ln(|\sin(t)|) = \ln(\sin(t))$$
et les solutions sur cet intervalle de l'équation homogène $(\mathbf{E_H})$ sont donc les fonctions de la forme,
$$t \in I \longmapsto \frac{\lambda}{\sin(t)}, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$
► Appliquons la méthode de la variation de la constante pour résoudre $(\mathbf{E})$ sur I. D'après le point précédent, les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $t \in I \longmapsto \frac{\lambda(t)}{\sin(t)}$ où $\lambda$ est une fonction définie et dérivable sur I vérifiant
$$\forall t \in I, \quad \frac{\lambda'(t)}{\sin(t)} = \cos^2(t),$$
c'est-à-dire
$$\lambda(t) = \int \sin(t)\cos^2(t)\,dt = -\frac{1}{3}\cos^3(t) + C, \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$
Les solutions sont donc les fonctions de la forme
$$t \in I \longmapsto -\frac{\cos^3(t)}{3\sin(t)} + \frac{C}{\sin(t)}, \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

## SOLUTION 7.

1. Appliquons la méthode de la variation de la constante. L'équation homogène $(\mathbf{E_H})$ admettant pour solutions les fonctions de la forme
$$x \longmapsto \lambda e^x, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$
les solutions de $(\mathbf{E})$ sont de la forme
$$x \longmapsto \lambda(x)e^x$$
avec $\lambda : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x)e^x = -\arctan(e^x).$$
On conclut le calcul par une intégration par parties,
$$\int -e^{-x}\arctan(e^x)\,dx = e^{-x}\arctan(e^x) - \int \frac{dx}{1+e^{2x}}$$
or,
$$\int \frac{dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{1+e^{2x}-e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{2} \times \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$$

d'où

$$\int \frac{dx}{1+e^{2x}} = x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1),$$

et les solutions sont de la forme

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \arctan(e^x) - xe^x + \frac{e^x}{2}\ln(e^{2x}+1) + \lambda e^x \ (\lambda \in \mathbb{R}).$$

**2.** Appliquons la méthode de la variation de la constante. L'équation homogène $(\mathbf{E_H})$ admettant pour solutions les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

les solutions de $(\mathbf{E})$ sont de la forme

$$x \longmapsto \lambda(x)e^{-x}$$

avec $\lambda : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x)e^{-x} = -\arctan(e^x).$$

On conclut donc par un calcul de primitive par une intégration par partie :

$$\int -e^x \arctan(e^x)dx = -e^x\arctan(e^x) + \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx.$$

Les solutions de $(\mathbf{E})$ sont donc de la forme

$$x \longmapsto -\arctan(e^x) + \frac{e^{-x}}{2}\ln(e^{2x}+1) + \lambda e^{-x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

## Solution 8.

**1.** Puisque $2-1 \neq 0$, l'équation admet une solution de la forme $f(t) = (at+b)e^{-t}$. On a

$$\begin{aligned} f'(t) + 2f(t) &= (2at + 2b + a - at - b)e^{-t} \\ &= (at + a + b)e^{-t} \end{aligned}$$

La fonction $f$ est donc solution *si et seulement si* $a = 1$ et $a + b = 0$. Ainsi $f(t) = (t-1)e^{-t}$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$t \longmapsto (t-1)e^{-t} + ke^{-2t}$$

où $k \in \mathbb{R}$.

**2.** Puisque $2-2 = 0$, l'équation admet une solution de la forme $f(t) = ate^{-2t}$. On a $f'(t) + 2f(t) = ae^{-2t}$ ;la fonction $f$ est donc solution *si et seulement si* $a = 1$. Ainsi $f(t) = te^{-2t}$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme $t \longmapsto te^{-2t} + ke^{-2t}$, où $k \in \mathbb{R}$.

## Solution 9.

Puisque $\forall t \in \mathbb{R},\ t\cos(t) = \mathrm{Re}(te^{it})$, on commence par déterminer une solution particulière de $y' + y = te^{it}$. Comme $i \neq -1$, il existe une solution particulière de la forme

$$f(t) = (\alpha t + \beta)e^{it}.$$

Puisque

$$f'(t) = (i\alpha t + i\beta + \alpha)e^{it},$$

la fonction $f$ est solution de $(\mathbf{E})$ *si et seulement si*

$$(i\alpha t + i\beta + \alpha + \alpha t + \beta)e^{it} = te^{it},$$

c'est-à-dire $\forall t \in \mathbb{R},\ \alpha(i+1)t + (i+1)\beta + \alpha = t$. Après identification des coefficients, on aboutit à $\alpha(1+i) = 1$ et $(1+i)\beta + \alpha = 0$, système dont les solutions sont $\alpha = 1/(1+i) = \frac{1-i}{2}$ et $\beta = \frac{i}{2}$. Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \left[\frac{1-i}{2}t + \frac{i}{2}\right]e^{it}.$$

La partie réelle de $f$,

$$t \longmapsto \frac{t\cos(t)}{2} + \frac{t-1}{2}\sin(t),$$

est une solution particulière de l'équation initiale (**E**). Puisque la solution de générale de $(E_H)$ est $t \longmapsto \lambda e^{-t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, les solutions de (**E**) sont les fonctions de la forme

$$t \longmapsto \frac{t\cos(t)}{2} + \frac{t-1}{2}\sin(t) + \lambda e^{-t}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

## Solution 10.

Recherchons une solution particulière : d'après le théorème de superposition, il suffit de trouver des solutions particulières aux équations $y' - y = e^t$ et $y' - y = e^{2t}$ et de les ajouter. En appliquant la méthode précédente, on trouve facilement les solutions $t \longmapsto te^t$ et $t \longmapsto e^{2t}$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$t \longmapsto te^t + e^{2t} + ke^t$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

## Solution 11.

1. On trouve sans peine
$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int \frac{dx}{x} = x(\ln(x) - 1).$$
L'intégration par parties étant légitime car toutes les fonctions en jeu sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. D'après la question précédente, les solutions de $(\mathbf{E_H})$ sont les fonctions de la forme
$$x \mapsto Ke^{x(\ln(x)-1)} = Kx^xe^{-x}, \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$
Appliquons alors la méthode de la variation de la constante : les solutions de (**E**) sont de la forme $x \mapsto K(x)x^xe^{-x}$ avec $K : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$ dérivable. En remplaçant dans (**E**), on aboutit à
$$K'(x)x^xe^{-x} = x^x,$$
ce qui équivaut à $K'(x) = e^x$, ie $K(x) = e^x + C$, avvec $C \in \mathbb{R}$. Les solutions de (**E**) sont donc les fonctions de la forme
$$x \mapsto x^x + Cx^xe^{-x}, \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

## Solution 12.

1. L'équation homogène $(\mathbf{E_{1H}})$ admet les solutions $x \mapsto Ce^{-3x}$, avec $C \in \mathbb{R}$. Passons sur $\mathbb{C}$ et résolvons $\mathbf{E_{1\mathbb{C}}}\ :\ y' + 3y = e^{ix}$. D'après le cours, il existe une solution particulière de la forme $x \mapsto ae^{ix}$. Après tout calcul, on trouve $a = \frac{3-i}{10}$. On en déduit que
$$x \mapsto \operatorname{Im}\left(\frac{3-i}{10}e^{ix}\right) = \frac{3\sin(x) - \cos(x)}{10}$$
est une solution particulière de $(\mathbf{E_1})$. Les solutions de $(\mathbf{E_1})$ sont donc les fonctions de la forme
$$x \mapsto \frac{3\sin(x) - \cos(x)}{10} + Ce^{-3x},\quad C \in \mathbb{R}.$$

**2.** L'équation homogène $(\mathbf{E_{2H}})$ admet les solutions $x \mapsto Ce^{3x}$, avec $C \in \mathbb{R}$. D'après le cours, il existe une solution particulière de la forme $x \mapsto (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{-x}$ avec $a, b, c$ et $d$ réels. Après tout calcul, on trouve

$$(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{3}{32}, -\frac{29}{128}\right).$$

Les solutions de $(\mathbf{E_1})$ sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \left(\frac{x^3}{4} + \frac{3x^3}{16} + \frac{3x}{32} - \frac{29}{128}\right)e^{-x} + Ce^{3x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**3.** Posons $z = y''$. La fonction $y$ est solution de $(\mathbf{E_3})$ *si et seulement si* $z$ est solution de $(\mathbf{E_3'})\ :\ z' - z = x$. Comme $(\mathbf{E_{3H}'})$ admet pour solutions

$$x \mapsto Ce^x, \quad C \in \mathbb{R}$$

et que $x \mapsto -x - 1$ est une solution évidente de $(\mathbf{E_3'})$, les solutions de $\mathbf{E_3'})$ sont de la forme

$$x \mapsto -x - 1 + Ce^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que les solutions de $(\mathbf{E_3})$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto -\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + A_1 e^x + A_2 x + A_3,$$

avec $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{R}$.

## Solution 13.

Pour tout polynôme $p$ non nul, $p' + xp$ est un polynôme de degré $\deg(p) + 1$ : une solution particulière polynomiale de $(\mathbf{E})$ est donc nécessairement de degré un. On vérifie alors sans peine que $x \mapsto x$ est une solution particulière. Comme $\int x dx = \frac{x^2}{2}$, les solutions de $(\mathbf{E_H})$ sont de la forme $x \mapsto Ce^{-x^2/2}$ et celles de $(\mathbf{E})$ sont de la forme

$$x \mapsto x + Ce^{-x^2/2}, \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

## Solution 14.

La solution générale de $(\mathbf{H})$ (qui est la même équation pour tous les numéros de cet exercice) est

$$x \longmapsto \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**1.** Le second membre est du type polynôme-exponentielle, on recherche une solution particulière de la forme

$$x \longmapsto ax + b.$$

On aboutit à $a = 1, a + b = 0$, et ainsi $a = 1$ et $b = -1$. Les solutions de $(\mathbf{E})$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto x - 1 + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**2.** Le second membre est du type polynôme-exponentielle, on recherche une solution particulière de la forme

$$x \longmapsto axe^{-x}.$$

On aboutit à $a = 1$. Les solutions de $(\mathbf{E})$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto xe^{-x} + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**3.** Le second membre est du type polynôme-exponentielle, on recherche une solution particulière de la forme

$$x \longmapsto (ax^2 + bx)e^{-x}.$$

On aboutit à $a = 1/2$ et $b = 0$. Les solutions de $(\mathbf{E})$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \frac{x^2}{2}e^{-x} + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**4.** Le second membre est du type polynôme-exponentielle, on recherche une solution particulière de la forme

$$x \longmapsto (ax^3 + bx^2 + cx)e^{-x}.$$

On aboutit à $a = 1/3$ et $b = c = 0$. Les solutions de $(\mathbf{E})$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \frac{x^3}{3}e^{-x} + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**5.** Le second membre est du type polynôme-exponentielle, on recherche une solution particulière de la forme

$$x \longmapsto ae^{2x}.$$

On aboutit à $a = 1/3$. Les solutions de $(\mathbf{E})$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \frac{1}{3}e^{2x} + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**6.** D'après le principe de superposition et les calculs menées en **2.** et **5.**, la fonction suivante est une solution particulière de $(\mathbf{E})$

$$x \longmapsto \frac{1}{3}e^{2x} + xe^{-x}.$$

Les solutions de $(\mathbf{E})$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \frac{1}{3}e^{2x} + xe^{-x} + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**7.** Le second membre est du type polynôme-sinus, on passe sur $\mathbb{C}$ et recherche une solution particulière de l'équation

$$y' + y = e^{ix}$$

de la forme

$$x \longmapsto ae^{ix}.$$

On aboutit à $a = (1 - i)/2$. Puisque la partie imaginaire de

$$\frac{1-i}{2}e^{ix}$$

est solution de $(\mathbf{E})$ et vaut

$$\frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x),$$

les solutions de $(\mathbf{E})$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x) + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**8.** Le second membre est du type polynôme-cosinus, on passe sur $\mathbb{C}$ et recherche une solution particulière de l'équation

$$y' + y = e^{(i+1)x}$$

de la forme

$$x \longmapsto ae^{(1+i)x}.$$

On aboutit à $a = (2 - i)/5$. Puisque la partie réelle de

$$\frac{2-i}{5}e^{(1+i)x}$$

est solution de $(\mathbf{E})$ et vaut

$$\frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x),$$

les solutions de $(\mathbf{E})$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x) + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

### Solution 15.

1. Appliquons la méthode de la variation de la constante : puisque

$$-\int 2x\,dx = -x^2,$$

les solutions de (**H**) sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \lambda e^{-x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (**E**) sont de la forme

$$x\lambda(x)e^{-x}$$

avec $\lambda : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x)e^{-x^2} = e^{x-x^2},$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x) = e^x,$$

Les solutions sont donc de (**E**) de la forme

$$x \longmapsto e^{x-x^2} + \lambda e^{-x^2}.$$

L'unique solution valant $0$ en $0$ est donc

$$x \longmapsto e^{x-x^2} - e^{-x^2}.$$

2. Puisque

$$-\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x},$$

les solutions de (**H**) sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \lambda e^{1/x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

L'unique solution valant $1$ en $1$ est donc

$$x \longmapsto \frac{1}{e}e^{1/x}.$$

> **Remarque.** Puisque le problème de Cauchy est une condition initiale en $1$, rien ne sert de résoudre (**H**) sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$...

3. Puisque

$$-\int \frac{-2}{x^3}dx = -\frac{1}{x^2},$$

les solutions de (**H**) sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \lambda e^{-1/x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

L'unique solution valant $1$ en $1$ est donc

$$x \longmapsto e^{1-1/x^2}.$$

### Solution 16.

► *Résolution sur* $]0, +\infty[$ : l'équation (**E**) s'écrit

$$y' + \frac{x-1}{x}y = x.$$

Appliquons la méthode la variation de la constante. Puisque

$$-\int \frac{x-1}{x}dx = \ln(x) - x,$$

les solutions de (**H**) sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \lambda x e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (**E**) sont de la forme

$$x \longmapsto \lambda(x) x e^{-x}$$

avec $\lambda : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\forall x > 0, \quad \lambda'(x) x e^{-x} = x,$$

c'est-à-dire

$$\forall x > 0, \quad \lambda'(x) = e^x.$$

Les solutions de (**E**) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions de la forme

$$x \longmapsto x + \lambda x e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

► *Résolution sur* $]-\infty, 0[$ : l'équation (**E**) s'écrit

$$y' + \frac{1-x}{x} y = -x.$$

Appliquons la méthode la variation de la constante. Puisque

$$-\int \frac{1-x}{x} dx = x - \ln(-x),$$

les solutions de (**H**) sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \lambda \frac{e^x}{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (**E**) sont de la forme

$$x \longmapsto \lambda(x) \frac{e^x}{x}$$

avec $\lambda : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\forall x > 0, \quad \lambda'(x) \frac{e^x}{x} = x,$$

c'est-à-dire

$$\forall x > 0, \quad \lambda'(x) = x^2 e^{-x}.$$

Recherchons une primitive sous la forme

$$x \longmapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}.$$

On aboutit à $a = -1, b = -2$ et $c = -2$. Les solutions de (**E**) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont donc les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \frac{x^2 + 2x + 2}{x} + \lambda \frac{e^x}{x},$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

## Solution 17.

► *Résolution sur* $I = ]1, +\infty[$ *ou* $]-\infty, 0[$ : l'équation (**E**) s'écrit

$$y' - \frac{1}{x(x-1)} y = \frac{x}{x-1}.$$

Appliquons la méthode la variation de la constante. Puisque

$$-\int -\frac{1}{x(x-1)} dx = -\ln|x| + \ln|1-x|,$$

les solutions de (**H**) sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \lambda \frac{x-1}{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (**E**) sont de la forme

$$x \longmapsto \lambda(x)\frac{x-1}{x}$$

avec $\lambda : I \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\forall x \in I, \quad \lambda'(x)\frac{x-1}{x} = \frac{x}{x-1},$$

c'est-à-dire

$$\lambda'(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2x-2}{x^2-2x+1} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

Les solutions de (**E**) sur I sont donc les fonctions de la forme

$$x \longmapsto x - 1 + \frac{2(x-1)\ln|1-x|}{x} - \frac{1}{x} + \lambda\frac{1-x}{x},$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Résolution sur* $I = ]0,1[$ : l'équation (**E**) s'écrit

$$y' + \frac{1}{x(x-1)}y = \frac{x}{1-x}.$$

Appliquons la méthode la variation de la constante. Puisque

$$-\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \ln(x) - \ln(1-x),$$

les solutions de (**H**) sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \lambda\frac{x}{1-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (**E**) sont de la forme

$$x \longmapsto \lambda(x)\frac{x}{1-x}$$

avec $\lambda : I \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\forall x \in I, \quad \lambda'(x)\frac{x}{1-x} = \frac{x}{1-x},$$

c'est-à-dire

$$\lambda'(x) = 1.$$

Les solutions de (**E**) sur ]I sont donc les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \frac{x^2 + \lambda x}{1-x},$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

## Solution 18.

Résolvons d'abord l'équation homogène associée :

$$(1+t^2)x' - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x' - \frac{1}{1+t^2}x = 0$$

Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est $t \mapsto \arctan t$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $t \mapsto Ce^{\arctan t}$ où $C \in \mathbb{R}$. Ici, pas besoin de la méthode de la variation de la constante, on voit tout de suite que la fonction constante égale à $-1$ est une solution particulière. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions $t \mapsto -1 + Ce^{\arctan t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

## Solution 19.

Posons $g(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $g$ est dérivable puisque $f$ l'est et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -f'(-x)$. Comme $f$ est solution de $y' + ay = b$, $f'(-x) + a(-x)f(-x) = b(-x)$ i.e. $-g'(x) - a(x)g(x) = -b(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ en utilisant le fait que $a$ et $b$ sont impaires. $g$ vérifie donc la même équation différentielle que $f$. De plus $g(0) = f(0)$ donc $g$ vérifie également la même condition initiale en $0$. Comme il y a unicité de la solution avec condition initiale, c'est donc que $f = g$ i.e. $f$ est paire.

## Solution 20.

Remarquons que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ puisque $a$ et $b$ y sont continues.
Si $f$ est $T$-périodique, on a évidemment $f(0) = f(T)$.
Si $f(0) = f(T)$, posons $g(t) = f(t+T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $f$ est solution de $(E)$, $f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $f'(t+T) + a(t+T)f(t+T) = b(t+T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $a$ et $b$ sont $T$-périodiques, $f'(t+T) + a(t)f(t+T) = b(t)$ ou encore $g'(t) + a(t)g(t) = b(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. $g$ est donc également solution de $(E)$.
Enfin, $f(0) = g(0)$ donc $f$ et $g$ vérifient la même condition initiale en $0$. Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, $f = g$ i.e. $f$ est $T$-périodique.

## Solution 21.

Notons $(\mathbf{E})$ l'équation différentielle de l'énoncé et $(\mathbf{H})$ son équation homogène associée.
Sur chacun des trois intervalles, l'équation $(\mathbf{E})$ équivaut à

$$y' - \frac{x}{1-x^2}y = \frac{1}{1-x^2}$$

Puisque

$$-\int -\frac{x}{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(|1-x^2|)$$

les solutions de $(\mathbf{H})$ sur chacun des trois intervalles sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \frac{\lambda}{\sqrt{|1-x^2|}}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Résolution sur* $I = ]1, +\infty[$ : appliquons la méthode la variation de la constante. Les solutions de $(\mathbf{E})$ sont de la forme

  $$x \longmapsto \frac{\lambda(x)}{\sqrt{|1-x^2|}}$$

  avec $\lambda : I \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que

  $$\forall x \in I, \quad \frac{\lambda'(x)}{\sqrt{|1-x^2|}} = \frac{1}{1-x^2}$$

  c'est-à-dire

  $$\lambda'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

  Les solutions de $(\mathbf{E})$ sur $I$ sont donc les fonctions de la forme

  $$x \longmapsto \frac{-\operatorname{argch}(x) + \lambda}{\sqrt{x^2-1}}$$

  avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- *Résolution sur* $I = ]-\infty, -1[$ : on raisonne de même et seul le calcul final de la primitive est différent : les solutions de $(\mathbf{E})$ sur $I$ sont donc les fonctions de la forme

  $$x \longmapsto \frac{\operatorname{argch}(-x) + \lambda}{\sqrt{x^2-1}}$$

  avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

▶ *Résolution sur* $I = ]-1,1[$ : on raisonne de même et seule la fin du calcul est différent :

$$\lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Les solutions de $(\mathbf{E})$ sur I sont donc les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \frac{\arcsin(x)+\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

## Solution 22.

1. $y = x - 2$ est solution.
2. Posons $I_1 = ]-\infty,-1[$ et $I_2 ]-1,+\infty[$. Sur $I_1$ et $I_2$, $x \mapsto x+1$ ne s'annule pas, et une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$ est $x \mapsto x - \ln|x+1|$. Sur $I_k$ la solution générale est $y_k = x - 2 + \lambda_k |x+1| e^{-x}$.
   On peut recoller les solutions sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lambda_1 = -\lambda_2$. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est donc $\mathcal{S} = \{x - 2 + \lambda(x+1)e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
3. Avec la condition $y(1) = 1$, on obtient $\lambda = e$.

## Solution 23.

C'est la routine : on calcule les racines de l'équation caractéristique, la solution générale de l'équation homogène puis on recherche une solution particulière quitte à appliquer le théorème de superposition voire à passer sur $\mathbb{C}$.

1. $-(2t^2+1)e^t/8 + Ae^{-t} + Be^{3t}$ ;
2. $-te^{-2t} + Ae^{-t} + Be^{-3t}$ ;
3. $\dfrac{1}{30}(2\sin 3t - \cos 3t) + Ae^{-t} + Be^{-3t}$ ;
4. $\dfrac{1}{10}(\sin t - 3\cos t) + Ae^{-t} + Be^{-2t}$ ;
5. $e^{-t}/9 + (A+Bt)e^{2t}$ ;
6. $\dfrac{-1}{25}(3\cos(2t) + 4\sin(2t)) + (A+Bt)e^t$ ;
7. $\dfrac{1}{18}(3t^2 - 2t)e^{-t} + Ae^{-t} + Be^{-4t}$ ;
8. $\dfrac{1}{2}t\sin(t) + A\sin(t) + B\cos(t)$ ;
9. $\dfrac{1}{108}(3t+4)e^{-3t} + (A+Bt)e^{3t}$ ;
10. $\dfrac{1}{8}(\cos(t) - \sin(t))e^{-t} + (A\cos(t) + B\sin(t))e^t$.

## Solution 24.

> **Remarque.** Il importe de ne tenir compte de la condition initiale qu'*après* avoir exprimé la solution générale d'une équation différentielle.

1. $(2t-1)e^{-2t} + e^{-3t}$
2. $\dfrac{(3t+2)e^{-t} - 2e^{-4t}}{9}$

## Solution 25.

Passons sur $\mathbb{C}$ et recherchons une solution particulière de l'équation $y'' + 4y' + 5y = e^{(-2+i)x}$. Puisque les solutions de l'équation caratéristique sont $-2 \pm i$, il existe une solution particulière de la forme

$$f : x \mapsto axe^{(-2+i)x}.$$

On a, pour tout nombre réel $x$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((-2+i)ax + a)e^{(-2+i)x} \\ &= ((-2+i)^2ax + 2(-2+i)a)e^{(-2+i)x} \end{aligned}$$

et $f''(x) + 4f'(x) + 5f(x) = 2iae^{(-2+i)x}$. La fonction $f$ est donc solution *si et seulement si* $a = 1/2i = -i/2$. La partie imaginaire de cette solution particulière est une solution de l'équation initiale et vaut

$$f_0 : x \mapsto -\frac{x\cos(x)e^{-2x}}{2}.$$

La solution générale de $(\mathbf{E_H})$ s'écrivant

$$x \mapsto \left[\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)\right]e^{-2x} \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

Les solutions de $(\mathbf{E})$ sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme

$$x \longmapsto -\frac{x\cos(x)e^{-2x}}{2} + \left[\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)\right]e^{-2x}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

## Solution 26.

► L'équation homogène $(\mathbf{E_H})$ est celle d'un oscillateur non amorti de pulsation $\omega_0 = 2$, ses solutions sont donc de la forme,

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda\cos(t) + \mu\sin(t), \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

► L'équation est équivalente à $y''+4y = \frac{1-\cos(2t)}{2}$ et ses cœfficients sont réels. Notons $(\mathbf{E}')$ l'équation suivante : $y''+4y = \frac{1-e^{2it}}{2}$. Puisque le second membre de cette équation est la partie réelle de celui de $(\mathbf{E})$, la partie réelle $\mathrm{Re}(y_0)$ d'une solution particulière $y_0$ de $(\mathbf{E}')$ est une solution particulière de $(\mathbf{E})$.

► Le second membre de $(\mathbf{E}')$ est la somme de $\frac{1}{2}$ et de $-\frac{1}{2}e^{2it}$. Ainsi on utilise la méthode de la "superposition" des solutions de deux équations. Puisque $2i$ est racine simple de l'équation caractéristique et que $0$ n'en est pas racine, $(\mathbf{E}')$ admet une solution particulière de la forme $y_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto a + bte^{2it}$. Comme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_0''(t) + 4y_0(t) = 4a + 4ibe^{2it},$$

il suffit de poser $a = \frac{1}{8}$ et $b = \frac{i}{8}$ pour que $y_0$ soit solution de $(\mathbf{E}')$. On sait alors que la fonction

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{Re}(y_0(t)) = \frac{1}{8} - \frac{t\sin(2t)}{8}$$

est une solution particulière de $(\mathbf{E})$.

► Les solutions de $(\mathbf{E})$ sont donc les fonctions de la forme,

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{Re}(y_0(t)) = \frac{1}{8} - \frac{t\sin(2t)}{8} + \lambda\cos(t) + \mu\sin(t),$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

## Solution 27.

1. Le trinôme caractéristique de l'équation valant

$$P(t) = t^2 + t + 1 = (t - j)(t - j^2),$$

les solutions à valeurs complexes de l'équation sont les fonctions de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = \lambda e^{jt} + \mu e^{j^2 t}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

2. Le trinôme caractéristique de l'équation valant

$$P(t) = t^2 - 2it - 1 = (t - i)^2,$$

les solutions à valeurs complexes de l'équation sont les fonctions de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = (\lambda t + \mu)e^{it}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

3. Le trinôme caractéristique de l'équation valant

$$P(t) = t^2 - it + 2 = (t - 2i)(t + i),$$

les solutions à valeurs complexes de l'équation sont les fonctions de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = \lambda e^{2it} + \mu e^{-it}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

4. Le trinôme caractéristique de l'équation valant

$$P(t) = t^2 + 4t + 4 = (t + 2)^2,$$

les solutions à valeurs complexes de l'équation sont les fonctions de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = (\lambda t + \mu)e^{2t}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

## Solution 28.

1. C'est un piège ! On *sait* qu'il existe une unique solution à un problème de Cauchy. Puisque la fonction nulle est clairement solution du premier problème, il s'agit de *la* solution !
2. On remarque que le trinôme caratéristique admet la racine double 3. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme $x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^{3x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La condition initiale impose $\lambda = 0$ et $\mu = 1$. La solution du deuxième problème de Cauchy est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto xe^{3x}$.
3. Le trinôme caratéristique admet $1$ et $2$ pour solutions. Le second membre est du type polynôme-exponentielle ; $0$ n'étant pas solution du trinôme caratéristique, il existe une solution particulière de la forme

$$x \longmapsto ax + b.$$

On aboutit à $a = 1/2$ et $b = 3/4$. Les solutions de l'équation sont donc de la forme

$$x \longmapsto \frac{2x + 3}{4} + \lambda e^x + \mu e^{2x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Le problème de Cauchy impose $\lambda = 0$ et $\mu = 1/4$ ; son unique solution s'écrit donc

$$x \longmapsto \frac{2x + 3}{4} + \frac{1}{4}e^{2x}.$$

**4.** Le trinôme caractéristique admet les racines $j$ et $j^2$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto \lambda e^{jt} + \mu e^{j^2 t}.$$

Cette fonction est solution du problème de Cauchy $y(0) = 0$ , $y'(0) = 1$ *si et seulement si*

$$\lambda = -\mu \text{ et } \lambda(j - j^2) = i\sqrt{3}\lambda = 1.$$

L'unique solution au problème de Cauchy étudié est donc

$$y(t) = \frac{1}{i\sqrt{3}}(e^{jt} - e^{j^2 t})$$

, et puisque $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (et $j^2 = -1 - j$), on a

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\sqrt{3}\frac{t}{2}\right) e^{-t/2}.$$

**Solution 29.**

Passons sur $\mathbb{C}$ et recherchons une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + 2y = e^{(1+i)x}.$$

Puisque les solutions de l'équation caratéristique sont $1 \pm i$, il existe une solution particulière de la forme

$$x \longmapsto axe^{(1+i)x}.$$

On aboutit à $a = -i/2$. La partie imaginaire de cette solution particulière est une solution de l'équation initiale et vaut

$$x \longmapsto -\frac{x\cos(x)e^x}{2}.$$

La solution générale de (**H**) s'écrivant

$$x \longmapsto (\lambda \cos(x) + \mu \sin(x))e^x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

Les solutions de (**E**) sur I sont donc les fonctions de la forme

$$x \longmapsto -\frac{x\cos(x)e^x}{2} + (\lambda \cos(x) + \mu \sin(x))e^x,$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

**Solution 30.**

Toutes les équations qui suivent admettent le même polynôme caratéristique de solutions 1 et 2. L'équation (**H**) admet donc pour solutions les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

**1.** Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \frac{2x+3}{4} + \lambda e^x + \mu e^{2x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

**2.** Puisque 2 est solution simple de l'équation caractéristique, l'équation admet une solution particulière de la forme

$$x \longmapsto axe^{2x}.$$

On aboutit à $a = 1$. Les solutions de (**E**) sont donc les fonctions de la forme

$$x \longmapsto xe^{2x} + \lambda e^x + \mu e^{2x},$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

**3.** Puisque 1 est solution simple de l'équation caractéristique, l'équation admet une solution particulière de la forme

$$x \longmapsto (ax^2 + bx)e^x.$$

On aboutit à $a = -1/2$ et $b = -1$. Les solutions de $(\mathbf{E})$ sont donc les fonctions de la forme

$$x \longmapsto -(x^2/2 + x)e^x + \lambda e^x + \mu e^{2x}.$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

**4.** L'équation s'écrit

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Le second membre est une superposition de fonctions du type polynôme-exponentielle. Puisque 1 est racine double de l'équation caractéristique alors que $-1$ n'en est pas racine, l'équation admet une solution particulière de la forme

$$x \longmapsto axe^x + be^{-x}.$$

On aboutit à $a = -1/2$ et $b = 1/12$. Les solutions de $(\mathbf{E})$ sont donc les fonctions de la forme

$$x \longmapsto -\frac{1}{2}xe^x + \frac{e^{-x}}{12} + \lambda e^x + \mu e^{2x},$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

## Solution 31.

**1.** On résout l'équation caractéristique $X^2 - (1-i)X - 2(1+i) = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 8 + 6i$. On extraie une racine carrée $\delta$ de $\Delta$ par la méthode algébrique. On trouve $\delta = 3 + i$. On en déduit les racines de l'équation $r_1 = 2$ et $r_2 = -1 - i$. Les solutions de l'équation différentielle $(E)$ sont donc $t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-(1+i)t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

**2.** Posons $f(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-(1+i)t}$. On a donc $f(0) = \lambda + \mu$. De plus, $f'(t) = 2\lambda e^{2t} - (1+i)\mu e^{-(1+i)t}$. On a donc $f'(0) = 2\lambda - (1+i)\mu$. On résout donc le système $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2\lambda - (1+i)\mu = 1 \end{cases}$ et on trouve $\lambda = \frac{7+i}{10}$ et $\mu = \frac{3-i}{10}$. La solution recherchée est donc $f(t) = \dfrac{7+i}{10}e^{2t} + \dfrac{3-i}{10}e^{-(1+i)t}$.

## Solution 32.

$f$ est bien évidemment solution de l'équation différentielle $y + y'' = g$ avec $g = f + f''$. Comme $(\cos, \sin)$ est un système fondamental de solutions de l'équation différentielle homogène $y + y'' = g$, la méthode de variation des constantes nous dit qu'une solution particulière de $y + y'' = g$ – et notamment $f$ – s'écrit sous la forme $\lambda\cos + \mu\sin$ où $\lambda$ et $\mu$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifient

$$\begin{cases} \lambda'\cos + \mu'\sin = 0 \\ -\lambda'\sin + \mu'\cos = g \end{cases}$$

On trouve donc $\lambda' = -g\sin$ et $\mu' = g\cos$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f(x) + f(x+\pi) &= \lambda(x)\cos(x) + \mu(x)\sin(x) + \lambda(x+\pi)\cos(x+\pi) + \mu(x+\pi)\sin(x+\pi) \\
&= \cos(x)\,[\lambda(x) - \lambda(x+\pi)] + \sin(x)\,[\mu(x) - \mu(x+\pi)] \\
&= -\cos(x)\int_x^{x+\pi} \lambda'(t)\,dt - \sin(x)\int_x^{x+\pi} \mu'(t)\,dt \\
&= \int_x^{x+\pi} g(t)\,(\sin(t)\cos(x) - \sin(x)\cos(t))\,dt \\
&= \int_x^{x+\pi} g(t)\sin(t-x)\,dt \\
&= \int_0^{\pi} g(x+t)\sin(t)\,dt \geqslant 0 \text{ car } g \geqslant 0 \text{ et } \sin \geqslant 0 \text{ sur } [0,\pi]
\end{aligned}$$

**SOLUTION 33.**

**1.** L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène

$$(\mathbf{E_H}) : y'' - 4y' + 5y = 0$$

est

$$X^2 - 4X + 5 = 0$$

Les racines de cette équation sont $2+i$ et $2-i$. On en déduit que les solutions de $(\mathbf{E_H})$ sont les fonctions

$$x \mapsto (\lambda \cos x + \mu \sin x)\, e^{2x}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

**2.** On passe en complexes, autrement dit on considère l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}_{\mathbb{C}}) : y'' - 4y' + 5y = e^{(2+i)x}$$

On cherche une solution particulière de la forme $x \mapsto P(x)e^{(2+i)x}$ où $P$ est un polynôme à coefficients complexes. Une telle fonction est solution *si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P''(x) + 2iP'(x) = 1$$

Il suffit donc de prendre $P(x) = \frac{1}{2i}x = -\frac{i}{2}x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Une solution particulière de $(\mathbf{E}_{\mathbb{C}})$ est donc

$$x \mapsto -\frac{i}{2}xe^{(2+i)x}$$

Une solution particulière de $(\mathbf{E})$ est donc la partie imaginaire de cette dernière fonction. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$-\frac{i}{2}xe^{(2+i)x} = -\frac{i}{2}xe^{2x}(\cos x + i \sin x) = \frac{1}{2}xe^{2x}\sin x - \frac{i}{2}xe^{2x}\cos x$$

Une solution particulière de $(\mathbf{E})$ est donc

$$x \mapsto -\frac{1}{2}xe^{2x}\cos x$$

**3.** D'après les deux premières questions, les solutions de $(\mathsf{E})$ sont les fonctions

$$x \mapsto -\frac{1}{2}xe^{2x}\cos x + (\lambda \cos x + \mu \sin x)\, e^{2x}$$

ou encore

$$x \mapsto \left(-\frac{1}{2}x\cos x + \lambda \cos x + \mu \sin x\right) e^{2x}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

**4.** Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}x\cos x + \lambda \cos x + \mu \sin x\right) e^{2x}$$

On a ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{2}\cos x - x\cos x + \frac{1}{2}x\sin x - \lambda \sin x + \mu \cos x + 2\lambda \cos x + 2\mu \sin x\right) e^{2x}$$

Le système $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 2 \end{cases}$ équivaut alors à

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ -\frac{1}{2} + \mu + 2\lambda = 2 \end{cases}$$

et donc $\lambda = 1$ et $\mu = \frac{1}{2}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}x\cos x + \cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) e^{2x}$$

## Solution 34.

**1.** A l'aide d'une formule de trigonométrie et de la linéarité de l'intégrale, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$f(x) = \sin(x)\int_0^x \cos(t)g(t)\,dt - \cos(x)\int_0^x \sin(t)g(t)\,dt$$

Les applications $x \mapsto \int_0^x \cos(t)g(t)\,dt$ et $x \mapsto \int_0^x \sin(t)g(t)\,dt$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ comme primitives de fonctions continues. Comme sin et cos sont également de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x)\int_0^x \cos(t)g(t)\,dt + \sin(x)\cos(x)g(x) + \sin(x)\int_0^x \sin(t)g(t)\,dt - \cos(x)\sin(x)g(x) \\ &= \int_0^x (\cos(x)\cos(t)+\sin(x)\sin(t))\,g(t)\,dt = \int_0^x \cos(t-x)g(t)\,dt \end{aligned}$$

**2.** On a montré à la question précédente que pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$f(x) = \cos(x)\int_0^x \cos(t)g(t)\,dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)g(t)\,dt$$

On démontre comme à la première question que $f'$ est de classe $\mathcal{C}^1$ i.e. que f est de classe $\mathcal{C}^2$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin(x)\int_0^x \cos(t)g(t)\,dt + \cos^2(x)g(x) + \cos(x)\int_0^x \sin(t)g(t)\,dt + \sin^2(x)g(x) \\ &= -\int_0^x (\sin(x)\cos(t)-\cos(x)\sin(t))\,g(t)\,dt + g(x) = -f(x)+g(x) \end{aligned}$$

Ceci prouve que f est bien solution de $y''+y=g$.

**3.** La solution générale de l'équation homogène $y''+y=0$ est $x \mapsto \lambda\cos(x)+\mu\sin(x)$ avec $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Comme f est une solution particulière de $y''+y=g$, on en déduit que les solutions de $y''+y=g$ sont $x \mapsto f(x)+\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)$ avec $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.

## Solution 35.

**1.** La fonction $z$ est dérivable par définition de la dérivabilité des fonctions de la variable rélle à valeurs complexes. De plus, le système est équivalent à l'équation

$$z'(t) - iz(t) = -ie^{i\omega t}.$$

**2.** Il faut distinguer deux cas...

- *Premier cas,* $\omega \neq 1$ : l'équation admet une solution particulière de la forme

$$t \longmapsto ae^{i\omega t}.$$

On obtient $a = 1/(1-\omega)$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$t \longmapsto \frac{e^{i\omega t}}{1-\omega} + \lambda e^{it},$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$. Posons $\lambda = \alpha - i\beta$ avec $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Les solutions $x, y$ sont les fonctions de la forme

$$x\ :\ t \longmapsto \frac{\cos(\omega t)}{1-\omega} + \alpha\cos(t) + \beta\sin(t),$$

et

$$y\ :\ t \longmapsto \frac{\cos(\omega t)}{1-\omega} - \beta\cos(t) + \alpha\sin(t),$$

avec $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

- *Second cas,* $\omega = 1$ : l'équation admet une solution particulière de la forme
$$t \longmapsto ate^{it}.$$
On obtient $a = -i$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme
$$t \longmapsto -ite^{i\omega t} + \lambda e^{it},$$
où $\lambda \in \mathbb{C}$. Posons $\lambda = \alpha - i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les solutions $x, y$ sont les fonctions de la forme
$$x : t \longmapsto t\sin(t) + \alpha\cos(t) + \beta\sin(t),$$
et
$$y : t \longmapsto -t\cos(t) - \beta\cos(t) + \alpha\sin(t),$$
avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

## Solution 36.

*Résolution sur* $]0, +\infty[$.

**1.** *Un changement de variable.*

**a.** On a, d'après le théorème de dérivation d'une fonction composée, que $Y = y \circ \exp$ est dérivable sur I et que $Y'(t) = e^t y'(e^t)$. De même, $Y'$ est dérivable sur I et l'on a
$$Y''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t).$$
On en déduit que
$$y'(e^t) = e^{-t}Y'(t) \quad \text{et} \quad y''(e^t) = e^{-2t}(Y''(t) - Y'(t)).$$

**b.** Soit $x > 0$, posons $t = \ln(x)$, ie $x = e^t$. Comme
$$\begin{aligned} \forall x > 0, \qquad x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) &= e^{2t}y''(e^t) + 3e^t y'(e^t) + y(e^t) \\ &= Y''(t) - Y'(t) + 3Y'(t) + Y(t) \\ &= Y''(t) + 2Y'(t) + Y(t) \end{aligned}$$
Ainsi, $y$ est solution de $(\mathbf{E})$ sur I *si et seulement si* $Y$ est solution sur $\mathbb{R}$ (image de I par la fonction ln) de l'équation $(\mathbf{E}')$ : $Y'' + 2Y' + Y = e^{-2t}$.

**2.** Comme les solutions de $(\mathbf{E}'_\mathbf{H})$ sont de la forme
$$t \mapsto (At + B)e^{-t}, \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R},$$
on sait d'après le cours que $(\mathbf{E}')$ admet une solution particulière de la forme $t \mapsto ae^{-2t}$. Après tout calcul, on trouve $a = 1$. Les solutions de $(\mathbf{E}')$ sont donc les fonctions de la forme
$$t \mapsto e^{-2t} + (At + B)e^{-t}, \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

**3.** Comme $t = \ln(x)$, on en déduit les solutions de $(\mathbf{E})$ sur I :
$$x > 0 \mapsto \frac{1}{x^2} + \frac{A\ln(x) + B}{x}, \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

**4.** C'est immédiat, la condition initiale $(y(1), y'(1)) = (0, 0)$ impose les constantes précédentes $(A, B) = (1, -1)$ et l'on trouve donc
$$x \mapsto y(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x) - 1}{x}.$$

## Solution 37.

Soit $y$ une solution de l'équation sur un intervalle I. Alors la fonction $z = y^2$ est dérivable sur I et sur cet intervalle

$$z' = 2yy',$$

ainsi $z$ est solution sur I de l'équation

$$z' - z = -x^2.$$

Recherchons une solution particulière de cette équation sous la forme

$$x \longmapsto ax^2 + bx + c.$$

On obtient $a = 1$ et $b = c = 2$. Les solutions de l'équation linéaire sont donc les fonctions de la forme

$$x \longmapsto x^2 + 2x + 2 + \alpha e^x.$$

Ainsi, $y$ est sur I de la forme

$$x \longmapsto \pm\sqrt{x^2 + 2x + 2 + \alpha e^x}.$$

*Réciproquement*, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, puisque le trinôme $x^2 + 2x + 2$ est strictement positif, la fonction définie par la formule précédente est définie sur une réunion d'intervalle(s) ouverts sur le(s)quel(s) elle est dérivable et vérifie l'équation initiale.

## Solution 38.

Soit $y$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Posons $z = e^{-y}$. La fonction $z$ est dérivable sur I et sur cet intervalle, $z' = -y'e^{-y}$. La fonction $y$ vérifie l'équation de l'énoncé *si et seulement si* $z$ vérifie

$$z' = -e^x,$$

ie *si et seulement si* il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$e^{-y} = z = -e^x + \alpha,$$

ce qui impose $\alpha > 0, I \subset ]-\infty, \ln(\alpha)[$ et

$$\forall x \in I, \quad y(x) = -\ln(\alpha - e^x).$$

## Solution 39.

1. Recherchons le degré $n$ d'une éventuelle solution polynomiale $p$ de $(\mathbf{E})$ : si on écrit

$$p(x) = p_n x^n + \ldots + p_0,$$

   $(t^2 + 1)p'' - 2p$ est un polynôme de degré au plus $n$ et son monôme en $t^n$ vaut $p_n[n(n-1) - 2]t^n$. Si $p$ est solution de l'équation ce terme est nécessairement nul et, puisque $p_n \neq 0$, $n(n-1) = 2$, c'est-à-dire $n = 2$.
2. On recherche donc une solution de l'équation de la forme $p(t) = t^2 + c$. On obtient sans peine $c = 1$.
3. Puis que $p$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on peut poser $z = y/p$ et $z$ est deux fois dérivable d'après le théorème de dérivation d'un quotient.
4. On reprend les notations précédentes. On a

$$y' = p'z + pz' \quad \text{et} \quad y'' = p''z + 2p'z' + pz''$$

   d'où :

$$\begin{aligned} py'' - 2y &= p(p''z + 2p'z' + pz'') - 2zp \\ &= p(2y + 2p'z' + pz'') - 2zp \\ &= p^2z'' + 2p'pz' \\ &= p[pZ' + 2p'Z] \end{aligned}$$

   Ainsi, comme $p$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $y$ est solution de $(\mathbf{E})$ *si et seulement si* $Z = z'$ est solution de l'équation

$$(\mathbf{E}') \ : \ (1 + t^2)Z' + 4tZ = 0.$$

**5.** Puisque

$$\int \frac{4t}{1+t^2}\,dt = 2\ln(1+t^2),$$

les solution de l'équation homogène associée à $(\mathbf{E}')$ sont de la forme :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{k}{(1+t^2)^2}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

**6.** D'après les questions précdentes, il s'agit de calculer :

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

Commençons par intégrer par parties :

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{1+t^2} &= \frac{t}{1+t^2} + 2\int \frac{t^2 dt}{(t^2+1)^2}\\ &= \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{(t^2+1-1)dt}{(t^2+1)^2}\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}2\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} &= \frac{t}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1}\\ &= \frac{t}{t^2+1} + \arctan(t)\end{aligned}$$

et donc :

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(t).$$

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto k_1\left(\frac{t}{2} + \frac{t^2+1}{2}\arctan(t)\right) + k_2(1+t^2)$$

avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

## Solution 40.

**1.** Soit $y : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable ne s'annulant pas sur I. Alors la fonction $z = \frac{1}{y}$ est dérivable sur I et l'on a,

$$y' = -\frac{z'}{z^2}.$$

La fonction $y$ est donc solution de $(E)$ *si et seulement si*

$$t^2\frac{z'}{z^2} + \frac{t}{z} = \frac{1}{z^2},$$

ie $t^2z' + tz = 1$.

**2.** L'équation homagène associée à $(E')$ est $z' + \frac{1}{t}z = 0$. Puisque $\int \frac{dt}{t} = \ln(t)$ sur I, ses solutions sont exactement les fonctions de la forme

$$t > 1 \longmapsto \frac{\lambda}{t} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Appliquons la méthode de la variation de la constante pour résoudre $(E')$. Les solutions de cette équation sont de la forme

$$t > 1 \longmapsto \frac{\lambda(t)}{t}$$

avec $\lambda : I \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable vérifiant $\frac{\lambda'(t)}{t} = \frac{1}{t^2}$, ie $\lambda'(t) = \frac{1}{t}$. Les solutions de l'équation $(E')$ sont donc les fonctions de la forme,

$$t > 1 \longmapsto \frac{\ln(t) + \lambda}{t}.$$

**3.** Puisque la solution générale de $\mathbf{E}'$,

$$t > 1 \longmapsto \frac{\ln(t)+\lambda}{t},$$

s'annule sur I *si et seulement si* $\lambda < 0$, les solutions de $\mathbf{E}$ sont les fonctions de la forme

$$t > 1 \longmapsto \frac{t}{\ln(t)+\lambda} \quad , \quad \lambda \geqslant 0.$$

## Solution 41.

**1.** **a.** Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = g(\ln x)$.
Ainsi $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ *si et seulement si* $g$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, dans ce cas,

$$\begin{aligned}
& f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2 f''(x) - x f'(x) - 3f(x) = x^4 \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2\left(\frac{g''(\ln x)}{x^2} - \frac{g'(\ln x)}{x^2}\right) - x\frac{g'(\ln x)}{x} - 3g(\ln x) = x^4 \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g''(\ln x) - 2g'(\ln x) - 3g(\ln x) = x^4 \\
\iff & \forall t \in \mathbb{R}\ g''(t) - 2g'(t) - 3g(t) = e^{4t} \\
\iff & g \text{ solution de } (E')
\end{aligned}$$

avec

$$(E') : y'' - 2y' - 3y = e^{4t}$$

**b.** Les solutions de l'équation différentielle homogène associée à $(E')$ sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{3t} + \mu e^{-t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Une solution particulière de $(E')$ est $t \mapsto \frac{1}{5}e^{4t}$. Les solutions de $(E')$ sont donc les fonctions $t \mapsto \frac{1}{5}e^{4t} + \lambda e^{3t} + \mu e^{-t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{1}{5}x^4 + \lambda x^3 + \frac{\mu}{x}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

**2.** **a.** Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f(x) = g(\ln(-x))$.
Ainsi $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ *si et seulement si* $g$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, dans ce cas,

$$\begin{aligned}
& f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_-^* \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ x^2 f''(x) - x f'(x) - 3f(x) = x^4 \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ x^2\left(\frac{g''(\ln(-x))}{x^2} - \frac{g'(\ln(-x))}{x^2}\right) - x\frac{g'(\ln(-x))}{x} - 3g(\ln(-x)) = x^4 \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ g''(\ln(-x)) - 2g'(\ln(-x)) - 3g(\ln(-x)) = x^4 \\
\iff & \forall t \in \mathbb{R}\ g''(t) - 2g'(t) - 3g(t) = e^{4t} \\
\iff & g \text{ solution de } (E')
\end{aligned}$$

avec

$$(E') : y'' - 2y' - 3y = e^{4t}$$

**b.** Les solutions de l'équation différentielle homogène associée à $(E')$ sont les fonctions $t \mapsto \alpha e^{3t} + \beta e^{-t}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Une solution particulière de $(E')$ est $t \mapsto \frac{1}{5}e^{4t}$. Les solutions de $(E')$ sont donc les fonctions $t \mapsto \frac{1}{5}e^{4t} + \alpha e^{3t} + \beta e^{-t}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
Les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}_-^*$ sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{1}{5}x^4 + \alpha x^3 + \frac{\beta}{x}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

**3.** Soit $f$ une éventuelle solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $(\lambda, \mu, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{5}x^4 + \lambda x^3 + \frac{\mu}{x}$
- $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $f(x) = \frac{1}{5}x^4 + \alpha x^3 + \frac{\beta}{x}$

f doit être continue en $0$ et en particulier doit avoir une limite finie en $0$, ce qui impose $\mu = \beta = 0$. On a donc alors $f(0) = 0$.
Réciproquement, toute fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x^4 + \lambda x^3 & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{5}x^4 + \alpha x^3 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

avec $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ est bien solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
De plus f est bien deux fois dérivable en $0$ car

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} f''(x) = \lim_{x \to 0^-} f''(x) = 0$$

et on a donc $f'(0) = f''(0) = 0$.
Enfin

$$0^2 f''(0) - 0f'(0) - 3f(0) = 0^4$$

ce qui prouve que f est bien solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.
En conclusion, les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions f définies par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x^4 + \lambda x^3 & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{5}x^4 + \alpha x^3 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

avec $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$.

## Solution 42.

1. Soit $f \in S_\alpha$. La fonction $g : x \mapsto f(\alpha - x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Comme $f' = -g$, $f'$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc f est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Soit $f \in S_\alpha$. En dérivant l'identité $f'(x) = -f(\alpha - x)$ – ce qui est licite car f est de classe $\mathcal{C}^2$ – on obtient $f''(x) = f'(\alpha - x) = -f(\alpha - (\alpha - x)) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Toute fonction de $S_\alpha$ est donc du type $x \mapsto \lambda \cos(x + \varphi)$ où $\lambda, \varphi \in \mathbb{R}$. Soit $\lambda, \varphi \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \lambda \cos(x + \varphi)$. Alors $f \in S_\alpha$ *si et seulement si* pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(\alpha - x)$ i.e. $-\lambda \sin(x + \varphi) = -\lambda \cos(\alpha - x + \varphi)$.
   Si $\lambda = 0$, cette condition est évidemment vérifiée et f est la fonction nulle.
   Supposons $\lambda \neq 0$. Alors $f \in S_\alpha$ *si et seulement si* $\sin(x + \varphi) - \cos(\alpha - x + \varphi) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or

   $$\sin(x+\varphi) - \cos(\alpha - x + \varphi) = \sin(x + \varphi) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x - \alpha - \varphi\right) = 2\sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

   Comme $\cos\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ prend des valeurs non nulles lorsque $x$ décrit $\mathbb{R}$, $f \in S_\alpha$ *si et seulement si* $\sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ i.e. $\varphi \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \pmod{\pi}$.
   Les éléments de $S_\alpha$ sont donc les fonctions du type $x \mapsto \lambda\cos\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + k\pi\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ (ceci inclut le cas de la fonction nulle). Or $\cos(\theta + k\pi) = (-1)^k \cos\theta$, on peut donc faire disparaître le $k\pi$ en faisant rentrer le $(-1)^k$ dans la constante multiplicative $\lambda$ : les éléments de $S_\alpha$ sont plus simplement les fonctions du type $x \mapsto \lambda\cos\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

## Solution 43.

Soit f une fonction dérivable vérifiant la relation de l'énoncé. Alors $f'$ est également dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f'(-x) = -f(x)$$

Ainsi $f$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = \lambda \cos + \mu \sin$.
Réciproquement, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et posons $f = \lambda \cos + \mu \sin$. $f$ est bien dérivable. De plus, $f$ vérifie la relation de l'énoncé *si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = \lambda \cos(-x) + \mu \sin(-x)$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\mu - \lambda) \sin(x) + (\mu - \lambda) \cos(x) = 0$$

La condition $\lambda = \mu$ est clairement suffisante mais on voit qu'elle est également nécessaire en prenant $x = 0$ dans la dernière relation.
On peut conclure que les fonctions recherchées sont les fonctions $\lambda(\cos + \sin)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

## Solution 44.

Soit $f$ une fonction dérivable vérifiant la relation de l'énoncé. Alors $f'$ est également dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f'(-x) = -f(x)$$

Ainsi $f$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = \lambda \cos + \mu \sin$.
Réciproquement, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et posons $f = \lambda \cos + \mu \sin$. $f$ est bien dérivable. De plus, $f$ vérifie la relation de l'énoncé *si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = -\lambda \cos(-x) - \mu \sin(-x)$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\mu + \lambda) \cos(x) - (\mu + \lambda) \sin(x) = 0$$

La condition $\mu = -\lambda$ est clairement suffisante mais on voit qu'elle est également nécessaire en prenant $x = 0$ dans la dernière relation.
On peut conclure que les fonctions recherchées sont les fonctions $\lambda(\cos - \sin)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

## Solution 45.

Remarquons que toute solution $f$ de l'équation est au moins de classe $\mathcal{C}^2$ puisqu'alors $f'$ est la somme de deux fontions de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= f'(-x) + (1-x)e^{-x} \\ &= (1-x)e^{-x} - xe^{x} \end{aligned}$$

Toute solution $f$ est donc solution de l'équation

$$y'' + y = (1-x)e^{-x} - xe^{x},$$

Cette dernière a un second membre qui est la superposition de fonctions du type polynôme-exponentielle, elle admet une solution particulière de la forme

$$x \longmapsto (ax+b)e^{-x} + (cx+d)e^{x}.$$

On obtient $a = -/2, b = 0$ et $c = -1/2, d = 1/2$. La fonction $f$ est donc de la forme

$$x \longmapsto -\frac{x}{2}e^{-x} - \frac{x-1}{2}e^{x} + \lambda \cos(x) + \mu \sin(x),$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Réciproquement*, une telle fonction est solution de l'équation initiale *si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad (\lambda + \mu) \cos(x) = (\lambda + \mu) \sin(x),$$

ainsi,*nécessairement*, en testant la valeur $x = 0$ ci-dessus, $\lambda = -\mu = 0$. Cette condition étant clairement suffisante, l'équation admet une infinité de solutions, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \longmapsto -\frac{x}{2}e^{-x} - \frac{x-1}{2}e^{x} + \lambda(\cos(x) - \sin(x))$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

## Solution 46.

Soit $f$ une solution de l'équation. Posons $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt \\ &= f(x) + x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt \end{aligned}$$

La fonction

$$x \mapsto \int_0^x tf(t)dt$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto xf(x)$. De même

$$x \mapsto \int_0^x f(t)dt$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto f(x)$. Ainsi $g$ est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) + xf(x) + \int_0^x f(t)dt - xf(x) \\ &= f'(x) + \int_0^x f(t)dt \end{aligned}$$

La fonction $g'$ est à son tour dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x$ réel,

$$g''(x) = f''(x) + f(x).$$

Si $f$ est solution de l'équation, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(x) = 0$$

puisque dans ce cas la fonction $g$ est constante égale à $1$. Il existe alors deux réels $a, b$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a\cos(x) + b\sin(x).$$

*Réciproquement* , soit $f_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f_{a,b}(x) = a\cos(x) + b\sin(x).$$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g_{a,b}(x) = f_{a,b}(x) + \int_0^x (x-t)f_{a,b}(t)dt.$$

La fonction $g_{a,b}$ est dérivable d'après le même argument que précédemment et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'_{a,b}(x) &= f'_{a,b}(x) + \int_0^x f_{a,b}(t)dt \\ &= b - b\cos(x) + a\sin(x) + b\cos(x) - a\sin(x) \\ &= b \end{aligned}$$

La fonction $f_{a,b}$ est donc solution *si et seulement si* $b = 0$ et $f_{a,b}(0) = 1$, c'est-à-dire $b = 0$ et $a = 1$. L'unique solution de l'équation étudiée est donc la fonction cosinus.

## Solution 47.

On trouve sans difficulté que les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $y$ une solution sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$ tels que $y(x) = \lambda_+ e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$ et $y(x) = \lambda_- e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x < 0$.
$y$ doit être continue en $0$, ce qui impose $\lambda_-$ (sinon $y$ admet une limite infinie en $0^-$. Ceci impose de plus $y(0) = 0$ puisque $\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$.
Réciproquement soit $y$ telle que $y(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$ et $y(x) = \lambda e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

$y$ est bien solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
De plus,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = 0$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \lambda\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{u\to+\infty} \lambda u e^{-u} = 0$$

Ainsi $y$ est dérivable en $0$ et $y'(0)=0$. Enfin, $0^2y'(0)-y(0)=0$ donc $y$ est solution sur $\mathbb{R}$.
En conclusion, les solutions de l'équation différentielle sont exactement les fonctions $x\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x\leqslant 0 \\ \lambda e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } y>0 \end{cases}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

## Solution 48.

Résolvons tout d'abord sur un intervalle $I_k = ]k\pi, (k+1)\pi[$ où $k\in\mathbb{Z}$.
L'équation homogène peut s'écrire $y' - y\cot x = 0$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions du type $x\mapsto \lambda e^{-\ln|\sin x|}$ où encore $x\mapsto\lambda\sin x$ (en faisant « rentrer » la valeur aboslue dans la constante).
On remarque que cos est solution particulière de l'équation avec second membre (on peut également utiliser la variation de la constante si la solution ne saute pas aux yeux).
Les solutions sur $I_k$ sont donc les fonctions $x\mapsto\cos x+\lambda\sin x$.
Soit $y$ une solution sur $\mathbb{R}$. Il existe une famille $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de réels telle que $y(x)=\cos x+\lambda_k\sin x$ pour $x\in I_k$.
$y$ doit être continue en les $k\pi$, ce qui impose $y(k\pi)=\cos(k\pi)=(-1)^k$.
De plus,

$$\lim_{x\to(k\pi)^-} \frac{y(x)-y(k\pi)}{x-k\pi} = (-1)^k\lambda_{k-1}$$

et

$$\lim_{x\to(k\pi)^+} \frac{y(x)-y(k\pi)}{x-k\pi} = (-1)^k\lambda_k$$

Comme $y$ doit être dérivable en $k\pi$, on a donc $\lambda_{k-1}=\lambda_k$. Il existe donc $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $y(x)=\cos x+\lambda\sin x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Réciproquement, les fonctions $x\mapsto\cos x+\lambda\sin x$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ sont bien solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.
En conlcusion, les solutions de l'équation différentielle sont exactement les fonctions $x\mapsto\cos x+\lambda\sin x$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

## Solution 49.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation homogène peut s'écrire $y'-\frac{1}{x}y=0$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $x\mapsto\lambda e^{\ln x}$ ou encore les fonctions $x\mapsto\lambda x$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. La variation de la constante fournit la solution particulière $x\mapsto x\ln x$.
Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle initiale sont donc les fonctions $x\mapsto x\ln x+\lambda x$.
Le même raisonnement prouve que les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $x\mapsto x\ln(-x)+\lambda x$.
Soit $y$ une éventuelle solution sur $\mathbb{R}$. Ce qui précède justifie l'existence de deux constantes réelles $\lambda_+$ et $\lambda_-$ telles que $y(x)=\begin{cases} x\ln x+\lambda_+ x & \text{si } x>0 \\ x\ln(-x)+\lambda_- x & \text{si } x<0 \end{cases}$. $y$ est nécessairement continue en $0$, ce qui impose $y(0)=0$. Mais alors

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = -\infty$$

$y$ n'est donc pas dérivable en $0$.
On en conclut qu'il n'existe pas de solution sur $\mathbb{R}$ à l'équation différentielle de l'énoncé.

## Solution 50.

1. Posons $z(t)=y(x)=y(\sqrt{t})$. $z$ est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $y(x)=z(x^2)$ et donc $y'(x)=2xz'(x^2)$ et $y''(x)=2z'(x^2)+4x^2z''(x^2)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que $y$ est solution de $(E)$ *si et seulement si* $4z''-z=0$.

Comme les solutions de $4z''-z=0$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{\frac{x}{2}}+\mu e^{-\frac{x}{2}}$, les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{\frac{x^2}{2}}+\mu e^{-\frac{x^2}{2}}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

**2.** On remarque que $y$ est solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_-^*$ *si et seulement si* $x \mapsto y(-x)$ est solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc également les fonctions $x \mapsto \lambda e^{\frac{x^2}{2}}+\mu e^{-\frac{x^2}{2}}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

**3.** Soit $y$ une solution sur $\mathbb{R}$. Ce qui précède montre qu'il existe des constantes réelles $\lambda_+, \mu_+, \lambda_-, \mu_-$ telles que $y(x) = \begin{cases} \lambda_+ e^{\frac{x^2}{2}}+\mu_+ e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x>0 \\ \lambda_- e^{\frac{x^2}{2}}+\mu_- e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x<0 \end{cases}$.

La continuité de $y$ en $0$ impose $\lambda_+ + \mu_+ = \lambda_- + \mu_-$.

On a $y'(x) = \begin{cases} x\lambda_+ e^{\frac{x^2}{2}} - x\mu_+ e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x>0 \\ x\lambda_- e^{\frac{x^2}{2}} - x\mu_- e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x<0 \end{cases}$. Ainsi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{y'(x)-y'(0)}{x-0} = \lambda_+ - \mu_+$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{y'(x)-y'(0)}{x-0} = \lambda_- - \mu_-$$

Comme $y'$ est dérivable en $0$, $\lambda_+ - \mu_+ = \lambda_- - \mu_-$.

On en déduit que $\lambda_+ = \lambda_-$ et $\mu_+ = \mu_-$.

Réciproquement, les fonctions $x \mapsto \lambda e^{\frac{x^2}{2}}+\mu e^{-\frac{x^2}{2}}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont bien solutions de $(E)$. Ce sont donc exactement les solutions de $(E)$.

## SOLUTION 51.

Le coefficient de $y'$ pouvant s'annuler, on parle d'équation différentielle *non normalisée*.

On résout donc dans un premier temps sur les plus grands intervalles sur lesquels ce coefficient ne s'annule pas, en l'occurence $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

**Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$**

L'équation $(E)$ équivaut alors à $y' + \left(\frac{1}{t}-1\right) = \frac{e^{2t}}{t}$.

Les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions $t \mapsto \lambda \frac{e^t}{t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

La méthode de variation de la constante fournit $t \mapsto \frac{e^{2t}}{t}$ comme solution particulière.

Les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions $t \mapsto \frac{e^{2t}}{t} + \lambda\frac{e^t}{t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Résolution sur $\mathbb{R}_-^*$** Le même raisonnement montre que les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}_-^*$ sont également les fonctions $t \mapsto \frac{e^{2t}}{t} + \mu\frac{e^t}{t}$ où $\mu \in \mathbb{R}$.

**Résolution sur $\mathbb{R}$**

Soit $y$ une éventuelle solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ : il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ y(t) = \begin{cases} \frac{e^{2t}}{t} + \lambda\frac{e^t}{t} & \text{si } t>0 \\ \frac{e^{2t}}{t} + \mu\frac{e^t}{t} & \text{si } t<0 \end{cases}$$

**Etude de la continuité en $0$**

$y$ doit être continue en $0$. Elle doit donc avoir la même limite finie à gauche et à droite en $0$. Or pour $t>0$

$$y(t) = \frac{e^t(e^t+\lambda)}{t}$$

Pour que $y$ ait une limite finie à droite en $0$, il faut donc que $\lambda = -1$. De même, pour que $y$ ait une limite finie à gauche en $0$, il faut également que $\mu = -1$. Supposons dorénavant ces conditions vérifiées.

On prouve que $\lim_{t\to 0} \frac{e^t(e^t-1)}{t} = 1$ en utilisant par exemple les développements limités. La continuité de $y$ en$0$ implique donc $y(0)=1$.

**Étude de la dérivabilité en $0$**

On a donc $y(t) = \begin{cases} \frac{e^t(e^t-1)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$. On prouve finalement que $\lim_{t\to 0} \frac{y(t)-y(0)}{t-0} = \frac{3}{2}$, ce qui prouve que $y$ est dérivable en $0$.

**Conclusion** $y$ est donc solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. De plus, elle est dérivable en $0$ et $0 \times y'(0) + (1-0) \times y(0) = 1 = e^{2\times 0}$ donc $y$ est bien l'unique solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

## Solution 52.

Cette équation différentielle peut aussi s'écrire $\frac{1}{5}(y^5)' = \arctan'(x)$. Ceci équivaut à l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que $y^5(x) = 5\arctan x + C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les solutions sont donc les fonctions $x \mapsto \sqrt[5]{5\arctan x + C}$ où $C \in \mathbb{R}$.