

# DEVOIR SURVEILLÉ N°6 : CORRIGÉ

## Problème 1 — Produit de convolution de suites

### Partie I – Structure d’anneau de $(E, +, \star)$

1. L’élément neutre pour la loi  $+$  est évidemment la suite constamment nulle.
2. Soit  $(u, v) \in E^2$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
 (u \star v)_n &= \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \\
 &= \sum_{j=0}^n u_{n-j} v_j \quad \text{via le changement d'indice } j = n - k \\
 &= \sum_{j=0}^n v_j u_{n-j} \\
 &= (v \star u)_n
 \end{aligned}$$

Ainsi  $u \star v = v \star u$ . La loi  $\star$  est donc bien commutative.

3. Soit  $(u, v, w) \in E^3$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
 ((u \star v) \star w)_n &= \sum_{k=0}^n (u \star v)_k w_{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \left( \sum_{i=0}^k u_i v_{k-i} \right) w_{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k u_i v_{k-i} w_{n-k} \\
 &= \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} u_i v_{k-i} w_{n-k} \\
 (u \star (v \star w))_n &= \sum_{k=0}^n u_k (v \star w)_{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n u_k \left( \sum_{i=0}^{n-k} v_i w_{n-k-i} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{n-k} u_k v_i w_{n-k-i} \\
 &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n u_k v_{j-k} w_{n-j} \quad \text{via le changement d'indice } j = i + k \\
 &= \sum_{0 \leq k \leq j \leq n} u_k v_{j-k} w_{n-j} \\
 &= \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} u_i v_{k-i} w_{n-k} \quad \text{car les indices sont muets} \\
 &= ((u \star v) \star w)_n
 \end{aligned}$$

Ainsi  $(u \star v) \star w = u \star (v \star w)$ . La loi  $\star$  est donc bien associative.

4. Soit  $u \in E$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(\varepsilon \star u)_n = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k u_{n-k} = \varepsilon_0 u_n = u_n$$

car  $\varepsilon_0 = 1$  et  $\varepsilon_k = 0$  si  $k \neq 0$ . Ainsi  $\varepsilon \star u = u$  et, comme  $\star$  est commutative,  $u \star \varepsilon = \varepsilon \star u = u$ . La suite  $\varepsilon$  est donc bien neutre pour la loi  $\star$ .

5. Soit  $(u, v, w) \in E^3$ . Alors

$$\begin{aligned} ((u+v) \star w)_n &= \sum_{k=0}^n (u+v)_k w_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n (u_k + v_k) w_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n (u_k w_{n-k} + v_k w_{n-k}) \\ &= \sum_{k=0}^n u_k w_{n-k} + \sum_{k=0}^n v_k w_{n-k} \\ &= (u \star w)_n + (v \star w)_n \\ &= (u \star w + v \star w)_n \end{aligned}$$

Ainsi  $(u+v) \star w = (u \star w) + (v \star w)$ . Comme  $\star$  est commutative, on a également  $w \star (u+v) = (w \star u) + (w \star v)$ . La loi  $\star$  est donc bien distributive sur la loi  $+$ .

6. Soit un entier  $n \geq N_1 + N_2$ . Alors

$$(u \star v)_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

Soit  $k \in \llbracket 0, N_1 + N_2 \rrbracket$ . Si  $k \geq N_1$ , alors  $u_k = 0$  et si  $k < N_1$ , alors  $n - k > n - N_1 \geq N_2$  donc  $v_{n-k} = 0$ . Tous les termes de la somme précédente sont donc nuls. Ainsi  $(u \star v)_n = 0$  de sorte que la suite  $u \star v$  est nulle à partir du rang  $N_1 + N_2$ .

7. La suite  $\varepsilon$  nulle à partir du rang 1 donc  $\varepsilon \in F$ .

Soit  $(u, v) \in F^2$ . Les suites  $u$  et  $v$  sont donc nulles respectivement à partir d'un rang  $N_1 \in \mathbb{N}$  et  $N_2 \in \mathbb{N}$ . On vérifie alors sans peine que  $u - v$  est nulle à partir du rang  $\max(N_1, N_2)$ . Ainsi  $u - v \in F$ .

De plus, la question précédente montre que  $u \star v$  est nulle à partir du rang  $N_1 + N_2$ . Ainsi  $u \star v \in F$ .

On peut alors en déduire que  $F$  est un sous-anneau de  $E$ .

## Partie II – Suites géométriques et calculs de puissances

8. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$([q] \star [r])_n = \sum_{k=0}^n [q]_k [r]_{n-k} = \sum_{k=0}^n q^k r^{n-k}$$

Or

$$q^{n+1} - r^{n+1} = (q - r) \sum_{k=0}^n q^k r^{n-k}$$

et  $q \neq r$  donc

$$([q] \star [r])_n = \sum_{k=0}^n q^k r^{n-k} = \frac{q^{n+1} - r^{n+1}}{q - r}$$

9. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$([q]^2)_n = \sum_{k=0}^n [q]_k [q]_{n-k} = \sum_{k=0}^n q^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n q^n = (n+1)q^n$$

10. Puisque  $a = [1]$ , la question précédente montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(a^2)_n = (n+1)1^n = (n+1)$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(a^3)_n = (a^2 \star a)_n = \sum_{k=0}^n (a^2)_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^n k+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

11. On raisonne par récurrence sur  $p$ .

$$\text{HR}(p) : \forall n \in \mathbb{N}, (a^p)_n = \binom{n+p-1}{p-1}$$

$\text{HR}(1)$  est vraie puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = 1 = \binom{n}{0}$ .

Supposons que  $\text{HR}(p)$  soit vraie pour un certain  $p \in \mathbb{N}^*$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} (a^{p+1})_n &= (a^p \star a)_n = \sum_{k=0}^n (a^p)_k a_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{k+p-1}{p-1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{k+p}{p} - \binom{k+p-1}{p} \\ &= \binom{n+p}{p} - \binom{p-1}{p} \\ &= \binom{n+p}{p} \end{aligned}$$

Donc  $\text{HR}(p+1)$  est vraie.

**REMARQUE.** On a utilisé la convention usuelle stipulant que si  $k$  et  $n$  sont deux entiers naturels tels que  $k > n$ ,  $\binom{n}{k} = 0$ . On vérifie alors que la relation  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$  est encore valable lorsque  $k = n$ . ■

Par récurrence,  $\text{HR}(p)$  est vraie pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ .

12. On remarque que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$(a^p)_n = \frac{\prod_{k=1}^{p-1} (n+k)}{(p-1)!}$$

Or pour tout  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ ,  $n+k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$  donc

$$(a^p)_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$$

### Partie III – Inversibles de l'anneau $(E, +, \star)$

13. Supposons que  $u \in E$  soit inversible. Il existe donc  $v \in E$  telle que  $u \star v = \varepsilon$ . En particulier,

$$u_0 v_0 = (u \star v)_0 = \varepsilon_0 = 1$$

donc  $u_0 \neq 0$ .

Réciproquement supposons que  $u_0 \neq 0$ . On peut alors définir une suite  $v \in E$  par récurrence en posant  $v_0 = \frac{1}{u_0}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = -\frac{1}{u_0} \sum_{k=0}^{n-1} v_k u_{n-k}$$

On a alors  $v_0 u_0 = 1$  et donc  $(v \star u)_0 = \varepsilon_0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^n v_k u_{n-k} = u_0 v_n + \sum_{k=0}^{n-1} v_k u_{n-k} = 0 = \varepsilon_n$$

Ainsi  $v \star u = \varepsilon$ , ce qui prouve que  $u$  est inversible.

14.  $[q]$  est inversible puisque  $[q]_0 = q^0 = 1 \neq 0$ . Comme  $y = [q]^{-1}$ ,  $[q] \star y = \varepsilon$ .  
 En particulier,  $[q]_0 y_0 = ([q] \star y)_0 = \varepsilon_0 = 1$  donc  $y_0 = 1$  puisque  $[q]_0 = 1$ .  
 Ensuite  $[q]_0 y_1 + [q]_1 y_0 = ([q] \star y)_1 = \varepsilon_1 = 0$ . Ceci signifie que  $y_1 + q = 0$  et donc  $y_1 = -q$ .  
 De la même manière,  $[q]_0 y_2 + [q]_1 y_1 + [q]_2 y_0 = ([q] \star y)_2 = \varepsilon_2 = 0$ . Ceci signifie que  $y_2 - q^2 + q^2 = 0$  et donc  $y_2 = 0$ .  
 Enfin,  $[q]_0 y_3 + [q]_1 y_2 + [q]_2 y_1 + [q]_3 y_0 = (x \star y)_3 = \varepsilon_3 = 0$ . Ceci signifie que  $y_3 - q^3 + 0 + q^3 = 0$ , ce qui donne à nouveau  $y_3 = 0$ .
15. On sait déjà que  $y_0 = 1$  et  $y_1 = -q$  et l'on va montrer que  $y_n = 0$  pour tout entier  $n \geq 2$  par récurrence forte. On a déjà montré que  $y_2 = 0$ . Supposons qu'il existe un entier  $n \geq 2$  tel que  $y_k = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . Alors

$$0 = \varepsilon_{n+1} = (y \star [q])_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} y_k [q]_{n+1-k} = y_{n+1} [q]_0 + \sum_{k=0}^n y_k [q]_{n+1-k} = y_{n+1} [q]_0 + y_0 [q]_{n+1} + y_1 [q]_n$$

puisque  $y_k = 0$  pour  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . On en déduit donc que

$$y_{n+1} + q^{n+1} - q \cdot q^n = 0$$

et donc que  $y_{n+1} = 0$ . Il s'ensuit donc que  $y_n = 0$  pour tout entier  $n \geq 2$  par récurrence forte.

#### Partie IV – Intégrité de l'anneau $(E, +, \star)$

16. Puisque  $u$  et  $v$  sont non nulles, les ensembles  $\{n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0\}$  et  $\{n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0\}$  sont non vides. Puisqu'il s'agit de deux parties de  $\mathbb{N}$ , elles admettent tous deux un minimum.
17. Remarquons que par définition de  $p$  et  $q$ ,  $u_k = 0$  pour tout  $k < p$  et  $v_k = 0$  pour tout  $k < q$ . Alors

$$\begin{aligned} (u \star v)_{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} u_k v_{p+q-k} \\ &= u_p v_q + \sum_{k=0}^{p-1} u_k v_{p+q-k} + \sum_{k=p+1}^{p+q} u_k v_{p+q-k} \\ &= u_p v_q + \sum_{k=0}^{p-1} u_k v_{p+q-k} + \sum_{j=0}^{q-1} u_{p+q-j} v_j \quad \text{via le changement d'indice } j = p+q-k \\ &= u_p v_q \end{aligned}$$

puisque  $u_k = 0$  pour  $k < p$  et  $v_j = 0$  pour  $j < q$ . Par définition de  $p$  et  $q$ ,  $u_p \neq 0$  et  $v_q \neq 0$  donc  $(u \star v)_{p+q} \neq 0$ .

18. La question précédente montre que si  $u$  et  $v$  sont non nulles,  $u \star v$  est non nulle. Par contraposition, si  $u \star v$  est nulle, l'une des deux suites  $u$  et  $v$  est nulle. Ceci prouve l'intégrité de l'anneau  $(E, +, \star)$ .

#### Partie V – Résolution d'une équation dans $E$

On note  $u$  la suite de  $E$  telle que  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = -5$ ,  $u_2 = 6$  et  $u_n = 0$  pour tout entier  $n \geq 3$ .

On note également  $v$  la suite de  $E$  telle que  $v_0 = v_1 = 1$  et  $v_n = 0$  pour tout entier  $n \geq 2$ .

19. Puisque  $u_0 = 1 \neq 0$ ,  $u$  est inversible. Alors  $u \star x = v \iff x = u^{-1} \star v$ , ce qui prouve l'existence et l'unicité de  $x$ .
20. Tout d'abord  $u_0 x_0 = (u \star x)_0 = v_0 = 1$  donc  $x_0 = 1$  puisque  $u_0 = v_0 = 1$ .  
 Ensuite,  $u_0 x_1 + u_1 x_0 = (u \star x)_1 = v_1 = 1$  donc  $x_1 = 6$  puisque  $u_0 = 1$  et  $u_1 = -5$ .
21. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'une part

$$(u \star x)_{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} u_k x_{n+2-k} = u_0 x_{n+2} + u_1 x_{n+1} + u_2 x_n = x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n$$

D'autre part

$$(u \star x)_{n+2} = v_{n+2} = 0$$

Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$$

22. Le polynôme caractéristique associée à la relation de récurrence précédente est  $X^2 - 5X + 6$ . Ses racines sont 2 et 3. Il existe donc  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 2^n \lambda + 3^n \mu$$

Or  $x_0 = 1$  et  $x_1 = 6$  donc  $\lambda + \mu = 1$  et  $2\lambda + 3\mu = 6$ , ce qui donne  $\lambda = -3$  et  $\mu = 4$ . On en déduit donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 4 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n$$

23.  $\{a\}$  est inversible puisque  $\{a\}_0 = 1 \neq 0$ . De plus, la question III.15 montre que  $[a]^{-1} = \{a\}$  et donc  $\{a\}^{-1} = a$ .
24. **Analyse :** Soient  $a$  et  $b$  deux réels. On suppose que  $u = \{a\} \star \{b\}$ . Notamment  $\{a\}_0 \{b\}_1 + \{a\}_1 \{b\}_0 = u_1$ , ce qui donne  $a + b = 5$ . De plus,  $\{a\}_0 \{b\}_2 + \{a\}_1 \{b\}_1 + \{a\}_2 \{b\}_0 = u_2$ , ce qui donne  $ab = 6$ . On en déduit que  $a$  et  $b$  sont les racines du polynôme  $X^2 - 5X + 6$ , à savoir 2 et 3.

**Synthèse :** On pose  $a = 2$  et  $b = 3$ . On vérifie sans peine que  $(\{a\} \star \{b\})_0 = 1 = u_0$ . Les calculs précédents montrent en fait que  $(\{a\} \star \{b\})_1 = -a - b = -5 = u_1$  et que  $(\{a\} \star \{b\})_2 = ab = 6 = u_2$ . Donnons-nous maintenant un entier  $n \geq 3$ .

$$(\{a\} \star \{b\})_n = \sum_{k=0}^n \{a\}_k \{b\}_{n-k}$$

Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Si  $k \geq 2$ , alors  $\{a\}_k = 0$  et si  $k \leq 1$ , alors  $n - k \geq n - 1 \geq 2$  donc  $\{b\}_{n-k} = 0$ . On a donc bien  $(\{a\} \star \{b\})_n = 0 = u_n$ .

Finalement  $u = \{2\} \star \{3\}$ .

25. On rappelle que  $x = u^{-1} \star v$ . Or  $u = \{2\} \star \{3\}$  donc  $u^{-1} = \{3\}^{-1} \star \{2\}^{-1} = [3] \star [2]$ . D'après la question II.8, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(u^{-1})_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3 - 2} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

Alors  $x_0 = (u^{-1} \star v)_0 = (u^{-1})_0 v_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} x_n &= (u^{-1} \star v)_n \\ &= (v \star u^{-1})_n \\ &= \sum_{k=0}^n v_k (u^{-1})_{n-k} \\ &= v_0 (u^{-1})_n + v_1 (u^{-1})_{n-1} \quad \text{car } v_k = 0 \text{ pour } k \geq 2 \\ &= 3^{n+1} - 2^{n+1} + 3^n - 2^n \\ &= 3 \cdot 3^n + 3^n - 2 \cdot 2^n - 2^n \\ &= 4 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n \end{aligned}$$

L'égalité est en fait encore valable pour  $n = 0$ .

## Partie VI – Un peu de Python

26. On peut être extrêmement concis en utilisant des *listes en compréhension*.

```
def convol(U, V) :
    N = min(len(U), len(V)) - 1
    return [sum([U[k] * V[n - k] for k in range(n + 1)]) for n in range(N + 1)]
```

Mais on peut évidemment utiliser des boucles "standard" si on préfère.

```
def convol(U, V) :
    N = min(len(U), len(V)) - 1
    L = []
    for n in range(N + 1) :
        sum = 0
        for k in range(n + 1) :
            sum += U[k] * V[n - k]
        L.append(sum)
    return L
```