INTERROGATION ÉCRITE N°04

NOM : Prénom : Note :

---

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La matrice $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Justifier.

   On trouve $\chi_A = (X-\lambda)^2$ *donc* $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$. *Si* A *était diagonalisable, elle serait semblable à* λI_2 *et donc égale à* λI_2, *ce qu'elle n'est pas. Ainsi* A *n'est pas diagonalisable.* ∎

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

   On calcule successivement :

   - $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$;
   - $E_2(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$;
   - $E_3(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

   Ainsi en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, *on a bien* $A = PDP^{-1}$ *et* P *inversible puisque* $\det(P) = 1 \neq 0$. ∎

3. Justifier que l'endomorphisme $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M^T \end{array} \right.$ est diagonalisable. Calculer sa trace et son déterminant.

   On vérifie que $u^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ *donc* u *est une symétrie. Par conséquent,* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})})$. *Ainsi* u *est diagonalisable et* $\mathrm{Sp}(u) = \{-1, 1\}$. *De plus,* $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ *donc* $\dim E_1(u) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *et* $\dim E_{-1}(u) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. *On en déduit que*

   $$\mathrm{tr}(u) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n \qquad \textit{et} \qquad \det(u) = 1^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

   ∎

4. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Justifier.

   Tout d'abord,

   $$\begin{aligned}
   \chi_A = \begin{vmatrix} X & 0 & -4 \\ -1 & X & 8 \\ 0 & -1 & X-5 \end{vmatrix} &\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & X-1 & X-1 \\ -1 & X & 8 \\ 0 & -1 & X-5 \end{vmatrix} \\
   &= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & X & 8 \\ 0 & -1 & X-5 \end{vmatrix} \\
   &\underset{L_2 \leftarrow L_1 + L_2}{=} (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & X+1 & 9 \\ 0 & -1 & X-5 \end{vmatrix} \\
   &= (X-1)\left[(X+1)(X-5) + 9\right] \\
   &= (X-1)(X-2)^2
   \end{aligned}$$

   De plus,

   $$\mathrm{rg}(A - 2I_3) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \geq 2$$

   car les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes. Ainsi, d'après le théorème du rang, $\dim E_2(A) \leq 1 < 2 = m_2(A)$ *donc* A *n'est pas diagonalisable.* ∎

5. Montrer que la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On précisera une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$.

   On cherche deux matrices colonnes telles que $\mathrm{AC}_1 = \mathrm{C}_1$ *et* $\mathrm{AC}_2 = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2$. *Choisissons* C_2 *en dehors de* $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_2)$, *par exemple* $\mathrm{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Posons ensuite* $\mathrm{C}_1 = \mathrm{AC}_2 - \mathrm{C}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. *On vérifie alors qu'on a bien* $\mathrm{AC}_1 = \mathrm{C}_1$. *La famille* $(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)$ *est clairement libre donc la matrice* $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *est inversible et vérifie* $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$. ∎

6. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que u est nilpotent si et seulement si $\chi_u = \mathrm{X}^n$.

   u *nilpotent*
   si et seulement si u *est trigonalisable et* 0 *est son unique valeur propre*
   si et seulement si χ_u *est scindé et* 0 *est son unique racine*
   si et seulement si $\chi_u = \mathrm{X}^n$ ∎