

# ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

## 1 Projection orthogonale

### 1.1 Définition et premières propriétés

#### Proposition 1.1

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien  $E$ . Si  $F$  est de **dimension finie**, alors  $E = F \oplus F^\perp$ .



**ATTENTION !** Le résultat n'est plus forcément vrai si  $F$  n'est pas de dimension finie. On conserve néanmoins le fait que  $F$  et  $F^\perp$  sont en somme directe.

#### Exemple 1.1

On munit  $\mathbb{R}[X]$  du produit scalaire défini par

$$\left\langle \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n \right\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

et on considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = 0\}$$

Soit  $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in F^\perp$ . Alors  $F$  est orthogonal aux polynômes  $X^n - 1$ , ce qui signifie que  $a_n = a_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Mais comme la suite  $(a_n)$  est presque nulle, elle est nulle. Ainsi  $P = 0$ . Par conséquent,  $F^\perp = \{0\}$  et  $F \oplus F^\perp = F \neq \mathbb{R}[X]$ .

#### Exercice 1.1 Orthogonal et topologie

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel  $E$ .

1. Montrer que  $F^\perp$  est fermé.
2. Montrer que  $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$ .

#### Définition 1.1 Projecteur orthogonal

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien  $E$ . Si  $E = F \oplus F^\perp$ , on appelle **projecteur orthogonal** sur  $F$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

**REMARQUE.** La projection orthogonale sur  $F$  est notamment définie lorsque  $F$  est de dimension finie.

**Proposition 1.2 Expression de la projection orthogonale dans une base orthonormale**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de **dimension finie** d'un espace préhilbertien  $E$ . On se donne une base orthonormale  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $F$ . Soient  $p$  le projecteur orthogonal sur  $F$  et  $x \in E$ . Alors

$$p(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k$$

**REMARQUE.** En particulier la projection d'un vecteur  $x$  sur une droite vectorielle  $\text{vect}(u)$  est  $\frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$ . Si  $u$  est normé, alors cette projection est simplement  $\langle x, u \rangle u$ .

**Proposition 1.3 Inégalité de Bessel**

Soient  $I$  est un ensemble **fini ou dénombrable** et  $(e_i)_{i \in I}$  une famille **orthonormale** de vecteurs d'un espace préhilbertien  $E$ . Soit également  $x \in E$ .

Alors la famille  $(\langle x, e_i \rangle^2)_{i \in I}$  est **sommable** et

$$\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

**1.2 Convergence****Définition 1.2 Suite totale**

On dit qu'une suite de vecteurs  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'un espace vectoriel normé  $E$  est **totale** si  $\text{vect}(u_n, n \in \mathbb{N})$  est **dense** dans  $E$ .

**Exemple 1.2**

Posons  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ . D'après le théorème de Weierstrass la suite  $(x \mapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite totale de  $E$  muni de la norme infinie.

**Proposition 1.4**

Soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite **orthonormale totale** d'un espace préhilbertien  $E$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $p_n$  le projecteur orthogonal sur  $\text{vect}(e_0, \dots, e_n)$ .

Alors pour tout  $x \in E$ , la suite  $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$ .

**REMARQUE.**  $E$  est muni de la norme associée produit scalaire  $E$ .

**2 Endomorphismes symétriques****2.1 Définition****Définition 2.1 Endomorphisme symétrique**

On dit qu'un endomorphisme  $u$  d'un espace préhilbertien  $E$  est **symétrique** si

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

**Proposition 2.1 Interprétation matricielle**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ . Alors  $u$  est **symétrique** si et seulement si sa matrice dans une **base orthonormale** de  $E$  est **symétrique**.

**Proposition 2.2**

Un **projecteur** d'un espace préhilbertien  $E$  est **symétrique** si et seulement si il est **orthogonal**.  
 Une **symétrie** d'un espace préhilbertien  $E$  est **symétrique** si et seulement si elle est **orthogonale**.

**REMARQUE.** Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien de dimension  $n$  et  $A$  sa matrice dans une **base orthonormale**. Alors

- $u$  est un **projecteur orthogonal** si et seulement si  $A^2 = A$  et  $A^\top = A$  ;
- $u$  est une **symétrie orthogonale** si et seulement si  $A^2 = I_n$  et  $A^\top = A$ .

**Adjoint**

Si  $E$  est un espace euclidien, on peut montrer que pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ , il existe un unique  $u^* \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

Cet endomorphisme  $u^*$  s'appelle l'**adjoint** de  $u$ . Ainsi  $u$  est symétrique si et seulement si  $u = u^*$ . C'est pour cela qu'on qualifie les endomorphismes symétriques d'endomorphismes auto-adjoints.

**2.2 Réduction des endomorphismes symétriques****Proposition 2.3 Stabilité de l'orthogonal**

Soit  $u$  un endomorphisme symétrique d'un espace préhilbertien  $E$ . Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est également stable par  $u$ .

**Exercice 2.1**

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 2.2**

Soit  $f$  un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien  $E$ . On pose  $\varphi : x \in E \setminus \{0_E\} \mapsto \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2}$ .

1. Justifier que  $\varphi$  admet un maximum sur la sphère unité de  $E$  et en déduire que  $\varphi$  admet un maximum sur l'ouvert  $E \setminus \{0_E\}$ .
2. On note  $u$  un vecteur où  $\varphi$  admet son maximum. En considérant le gradient de  $\varphi$ , montrer que  $u$  est un vecteur propre de  $f$ .

**Théorème 2.1 Théorème spectral**

Soit  $u$  un endomorphisme **symétrique** d'un espace euclidien  $E$ . Alors on a les propositions équivalentes suivantes.

- (i)  $E$  est la **somme directe orthogonale des sous-espaces propres** de  $u$ .
- (ii) Il existe une **base orthonormale** de  $E$  formée de **vecteurs propres** de  $u$ .

**REMARQUE.** Notamment, tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est diagonalisable.

**Corollaire 2.1 Réduction des matrices symétriques**

Soit  $A$  une matrice symétrique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors il existe  $P \in O(n)$  et une matrice diagonale  $D$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que  $A = PDP^T$ .

**REMARQUE.** Notamment, toute matrice symétrique **réelle** est diagonalisable.



**ATTENTION!** Une matrice symétrique complexe n'est pas nécessairement diagonalisable. Par exemple,  $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$  n'est pas diagonalisable. En effet,  $A$  est nilpotente ( $A^2 = 0$ ) non nulle.

**Endomorphismes symétriques positifs**

Soit  $u$  un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien  $E$ . On dit que  $u$  est **positif** si

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0$$

Il est classique de montrer que  $u$  est positif si et seulement si  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ .

- Supposons  $u$  positif et donnons-nous  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  et  $x$  un vecteur propre associé. Alors  $\langle u(x), x \rangle \geq 0$  et  $\langle u(x), x \rangle = \lambda \|x\|^2$ . Comme  $x \neq 0_E$ ,  $\|x\|^2 > 0$  et donc  $\lambda \geq 0$ . Ainsi  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ .
- Supposons  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ . D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_n)$  de vecteurs propres de  $u$ . Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres (positives) associées à ces vecteurs propres. Un calcul simple montre que

$$\langle u(x), x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, e_i \rangle^2 \geq 0$$

On dira que  $u$  est **défini positif** si

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \langle u(x), x \rangle > 0$$

On montre aisément que  $u$  est défini positif si et seulement si  $u$  est inversible et positif i.e. si et seulement si  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ .

### Matrices symétriques positives

Soit  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . On dit que  $M$  est **positive** si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T M X \geq 0$$

Il est classique de montrer que  $M$  est positive si et seulement si  $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$ .

- Supposons  $M$  positif et donnons-nous  $\lambda \in \text{Sp}(M)$  et  $X$  un vecteur propre associé. Alors  $X^T M X \geq 0$  et  $X^T M X = \lambda X^T X$ . Comme  $X \neq 0$ ,  $X^T X > 0$  et donc  $\lambda \geq 0$ . Ainsi  $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$ .
- Supposons  $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$ . D'après le théorème spectral, il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  et  $D$  diagonale telle que  $M = P D P^T$ . Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les coefficients diagonaux de  $D$ . Un calcul simple montre que

$$X^T M X = (P^T X)^T D (P^T X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (P^T X)_i^2 \geq 0$$

On dira que  $M$  est **définie positive** si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T M X > 0$$

On montre aisément que  $M$  est définie positive si et seulement si  $M$  est inversible et positive i.e. si et seulement si  $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$ .

**REMARQUE.** On peut déduire les résultats sur les matrices symétriques positives à partir des résultats sur les endomorphismes symétriques positifs (et inversement) en considérant la matrice d'un tel endomorphisme dans une base orthonormale.

#### Notation 2.1

L'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives) est traditionnellement noté  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ).

#### Exercice 2.3

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A^T A \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$ . A quelle condition est-elle définie positive ?

#### Exercice 2.4 Réduction simultanée

Soient  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \mapsto X^T A X$  est un produit scalaire.
2. En déduire qu'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonale telles que

$$P^T A P = I_n \quad \text{et} \quad P^T B P = D$$

#### Exercice 2.5 Décomposition polaire

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe une unique matrice  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  telle que  $A^T A = S^2$ .
2. Soit  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe un unique couple  $(Q, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  tel que  $A = QS$ .

## 3 Isométries vectorielles

### 3.1 Définition

**Définition 3.1 Isométrie vectorielle**

On appelle **isométrie vectorielle** d'un espace préhilbertien  $E$  tout endomorphisme de  $E$  **conservant la norme**, c'est-à-dire toute application  $u \in \mathcal{L}(E)$  telle que

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$$

**Proposition 3.1**

Toute isométrie vectorielle  $u$  d'un espace préhilbertien  $E$  est linéaire et conserve le produit scalaire i.e.

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

**REMARQUE.** Réciproquement, toute application conservant le produit scalaire est évidemment une isométrie vectorielle.

**Proposition 3.2**

Si  $E$  est un espace euclidien, toute isométrie vectorielle de  $E$  est un automorphisme. Dans ce cas, une isométrie vectorielle est également appelée un **automorphisme orthogonal**.

**REMARQUE.** Si  $u$  est un automorphisme orthogonal, alors  $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$ .

**Proposition 3.3 Interprétation matricielle**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ . Alors  $u$  est une isométrie vectorielle si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale de  $E$  est orthogonale.

**Rappel Isométrie vectorielle directe ou indirecte**

Une isométrie vectorielle d'un espace euclidien est dite **directe** si son déterminant est positif et **indirecte** dans le cas contraire.

On parle également d'automorphisme orthogonal **positif** ou **négatif**.

**REMARQUE.** Le déterminant d'une isométrie vectorielle ne peut valoir que  $-1$  ou  $1$ .

**Rappel Matrice orthogonale positive ou négative**

Une matrice orthogonale est dite **positive** si son déterminant est positif et **négative** dans le cas contraire.

**REMARQUE.** Le déterminant d'une matrice orthogonale ne peut valoir que  $-1$  ou  $1$ .

**Proposition 3.4**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ . Alors  $u$  est une isométrie vectorielle directe (resp. indirecte) si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale de  $E$  est orthogonale positive (resp. négative).

### 3.2 Réduction des isométries vectorielles

#### Proposition 3.5 Stabilité de l'orthogonal

Soit  $u$  une isométrie vectorielle d'un espace préhilbertien  $E$ . Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  **stable** par  $u$ , alors  $F^\perp$  est également **stable** par  $u$ .

#### Rappel Isométries d'un plan euclidien

Les isométries d'un plan euclidien sont :

- les rotations dont la matrice dans toute base orthonormale est de la forme  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ;
- les réflexions dont la matrice dans une base orthonormale adaptée est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

#### Proposition 3.6 Réduction des isométries vectorielles

Soit  $u$  une isométrie vectorielle d'un espace euclidien  $E$ . Alors il existe une base orthonormale de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme  $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  ( $\theta \in ]0, \pi[$ ).

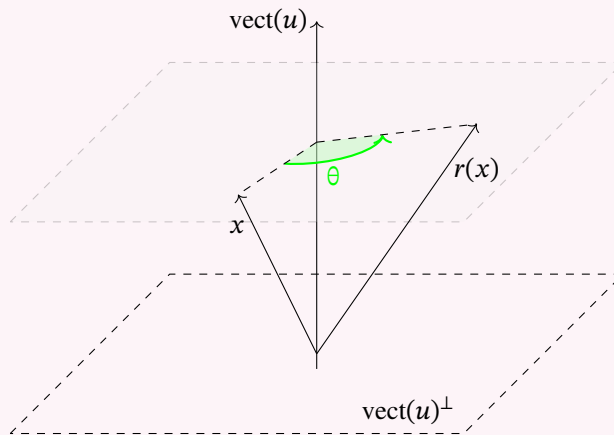
#### Corollaire 3.1 Réduction des matrices orthogonales

Soit  $A \in O(n)$ . Alors il existe une matrice  $P \in O(n)$  et une matrice  $D$  diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme  $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  ( $\theta \in ]0, \pi[$ ), telles que  $A = PDP^T$ .

### 3.3 Cas d'un espace euclidien de dimension 3

#### Rappel Orientation induite

Soit  $E$  un espace euclidien orienté de dimension 3. On peut orienter un plan  $P$  de  $E$  en se donnant un vecteur  $u$  non nul normal à  $P$  : on décide qu'une base  $(v, w)$  de  $P$  est directe (resp. indirecte) si  $(u, v, w)$  est directe (resp. indirecte). On vérifie sans peine qu'on a alors bien orienté  $P$  : on parle alors de l'orientation de  $P$  induite par  $u$ .

**Définition 3.2 Rotation**

Soient  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $u$  un vecteur non nul de  $E$ . On appelle **rotation** (vectorielle) d'angle  $\theta$  et d'axe orienté par  $u$  l'endomorphisme laissant les vecteurs de  $\text{vect}(u)$  invariants et induisant une rotation d'angle  $\theta$  dans le plan  $\text{vect}(u)^\perp$  dont l'orientation est induite par celle de  $\text{vect}(u)$ .

**REMARQUE.** Si  $u$  et  $u'$  sont deux vecteurs non nuls, colinéaires et de même sens, les rotations d'axes orientés par  $u$  et  $u'$  et de même angle  $\theta$  sont identiques.

Si  $u$  et  $u'$  sont deux vecteurs non nuls, colinéaires et de sens contraire, la rotation d'axe orienté par  $u$  et d'angle  $\theta$  et la rotation d'axe orienté par  $u'$  et d'angle  $-\theta$  sont identiques.

**REMARQUE.** Si on change l'orientation de  $E$ , les angles de rotation sont changés en leurs opposés.

**Proposition 3.7 Matrice d'une rotation**

La matrice de la rotation d'angle  $\theta$  et d'axe orienté par  $u$  dans une base orthonormale directe de premier vecteur colinéaire

et de même sens que  $u$  est  $R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

**Proposition 3.8**

Les isométries vectorielles directes d'un espace euclidien de dimension 3 sont les rotations.

**Méthode** Déterminer l'image d'un vecteur par une rotation d'axe et d'angle donnés

Soit  $r$  une rotation d'angle  $\theta$  d'axe orienté par  $u$ . On suppose  $u$  unitaire. Soit  $x$  un vecteur de  $E$ . On veut déterminer  $r(x)$ .

- On calcule la projection orthogonale  $y$  de  $x$  sur  $\text{vect}(u)$  :  $y = \langle x, u \rangle u$ . On a alors  $z = x - y \in \text{vect}(u)^\perp$ .
- On calcule l'image de  $z$  :  $r(z) = (\cos \theta)z + (\sin \theta)u \wedge z$ .
- On a alors  $r(x) = y + r(z)$ .



**Méthode Déterminer la matrice d'une rotation d'axe et d'angle donnés**

Soit  $r$  une rotation d'angle  $\theta$  orienté par  $u$ . On suppose  $u$  unitaire. On veut déterminer la matrice  $M$  de  $r$  dans la base canonique.

**Méthode n°1** On note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . La méthode précédente nous permet de calculer  $r(e_1)$ ,  $r(e_2)$  et  $r(e_3)$ . On peut aussi remarquer que  $r(e_3) = r(e_1) \wedge r(e_2)$ . Les colonnes de  $M$  sont les vecteurs colonnes représentant  $r(e_1)$ ,  $r(e_2)$  et  $r(e_3)$  dans la base canonique.

**Méthode n°2** On détermine  $v, w$  tels que  $(u, v, w)$  soient une base orthonormale directe : il suffit de choisir  $v$  orthogonal à  $u$  et de poser  $w = u \wedge v$ . La matrice de  $r$  dans la base  $(u, v, w)$  est  $R(\theta)$ . Si on note  $P$  la matrice de la base  $(u, v, w)$  dans la base canonique, alors la matrice recherchée est  $PR(\theta)P^{-1} = PR(\theta)P^T$ .

**Exercice 3.1 Matrice d'une rotation**

Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et d'axe dirigé par  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Méthode Déterminer l'axe et l'angle de la rotation associée à une matrice de  $SO(3)$** 

Soit  $r$  une rotation de matrice  $R$  dans une base orthonormale directe  $\mathcal{B}$ .

**Méthode n°1**

- On cherche d'abord un vecteur directeur  $u$  de l'axe en résolvant  $RX = X$ .
- On détermine un vecteur  $v$  non nul et orthogonal à  $u$ .
- On détermine le vecteur  $r(v)$  grâce à  $R$ .
- On a alors  $\cos \theta = \frac{\langle v, r(v) \rangle}{\|v\|^2}$ .
- On détermine  $\theta$  grâce au signe de  $\sin \theta$  : on remarque que  $[u, v, r(v)] = \|u\|\|v\|^2 \sin \theta$  ou que  $v \wedge r(v) = \|v\|^2(\sin \theta) \frac{u}{\|u\|}$ .

**Méthode n°2**

- On cherche d'abord un vecteur directeur  $u$  de l'axe en résolvant  $RX = X$ .
- $R$  et  $R(\theta)$  sont la matrice de  $r$  dans des bases différentes donc  $\text{tr}(R(\theta)) = \text{tr}(R)$  i.e.  $1 + 2 \cos \theta = \text{tr}(R)$ . On en déduit  $\cos \theta$ .
- On détermine  $\theta$  grâce au signe de  $\sin \theta$ . Le signe de  $\sin \theta$  est le même que celui de  $[u, x, r(x)]$  où  $x$  est un vecteur quelconque de  $E$  : en pratique, on prend un vecteur de la base canonique.

**Exercice 3.2 Matrice rotation**

Soit  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Vérifier que  $A \in SO(3)$ .
2. Déterminer l'axe et l'angle de la rotation associée à  $A$ .

**Exercice 3.3 Anti-rotations**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 3.

Montrer qu'une rotation de  $E$  commute avec une réflexion de  $E$  si et seulement si l'axe de la première est orthogonal au plan de la seconde.

On appelle anti-rotation de  $E$  toute composée commutative d'une rotation et d'une réflexion. Montrer que les isométries vectorielles indirectes de  $E$  sont les anti-rotations.