

# ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

## Produits scalaires

### Solution 1

1. Prouvons que  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  définit un produit scalaire.

- $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est bilinéaire par bilinéarité du produit sur  $\mathbb{R}$  et par linéarité de l'évaluation.
- $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est symétrique par commutativité du produit sur  $\mathbb{R}$ .
- Soit  $P \in E$ . On a

$$\langle P | P \rangle = P^2(x_0) + \dots + P^2(x_n) \geq 0,$$

la forme bilinéaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est donc positive.

- Soit  $P \in E$ . Puisqu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, on a

$$\langle P | P \rangle = P^2(x_0) + \dots + P^2(x_n) = 0$$

si et seulement si  $x_0, \dots, x_n$  sont racines de  $P$ . Puisque  $P$  est de degré inférieur à  $n$  et que les  $x_k$  sont deux à deux distincts, cette condition est équivalente à  $P = 0$ . La forme bilinéaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est donc définie.

2. Prouvons que  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  définit un produit scalaire.

- $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est bilinéaire par bilinéarité du produit sur  $\mathbb{R}$ , par linéarité de la dérivation des polynômes et par linéarité de l'évaluation.
- $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est symétrique par commutativité du produit sur  $\mathbb{R}$ .
- Soit  $P \in E$ . On a

$$\langle P | P \rangle = P^2(a_0) + \dots + (P^{(n)})^2(a_n) \geq 0,$$

la forme bilinéaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est donc positive.

- Soit  $P \in E$  tel que

$$\langle P | P \rangle = P^2(a_0) + \dots + (P^{(n)})^2(a_n) = 0.$$

Puisqu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les réels sont nuls, on a  $(P^{(n)})^2(a_n) = 0$ . Puisque  $P$  est de degré inférieur à  $n$ ,  $P^{(n)}$  est une constante, qui est donc nulle d'après l'égalité précédente.  $P$  est donc de degré inférieur à  $n - 1$ , et puisque

$$(P^{(n-1)})^2(a_{n-1}) = 0,$$

on en déduit que la constante  $P^{(n-1)}$  est nulle et donc que  $P$  est de degré inférieur à  $n - 2$ . Par une récurrence descendante immédiate, on prouve que  $P = 0$ . La forme bilinéaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est donc définie.

3. Prouvons que  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $E$ .

- L'application  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est bilinéaire par linéarité du produit sur  $\mathbb{R}$ , de l'évaluation et de l'intégrale.
- La forme bilinéaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est symétrique car le produit sur  $\mathbb{R}$  est commutatif.
- Soit  $P \in E$ . Par positivité de l'intégrale, on a

$$\langle P | P \rangle = \int_0^1 P(t)^2 dt \geq 0.$$

La forme bilinéaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est donc positive.

- Reprenons les notations précédentes. Puisque qu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, l'égalité  $\langle P | P \rangle = 0$  est équivalente à

$$\int_0^1 P^2(t) dt = 0.$$

La fonction  $P^2$  étant continue et positive, la condition est équivalente à  $P = 0$ . La forme bilinéaire  $\langle | \rangle$  est donc définie.

4. Prouvons que  $(\cdot | \cdot)$  définit un produit scalaire sur  $E$ .

- Soient  $A, B, C \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned}\langle A | \lambda B + C \rangle &= \text{tr}(A^\top (\lambda B + C)) = \text{tr}(\lambda A^\top B + A^\top C) \\ &\quad (\text{par linéarité de la transposition}) \\ &= \lambda \text{tr}(A^\top B) + \text{tr}(A^\top C) \\ &\quad (\text{par linéarité de la trace}) \\ &= \lambda \langle A | B \rangle + \langle A | C \rangle\end{aligned}$$

L'application  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est donc linéaire à droite.

- Soient  $A, B \in E$ . On a

$$\langle B | A \rangle = \text{tr}(B^\top A) = \text{tr}((A^\top B)^\top) = \text{tr}(A^\top B) = \langle A | B \rangle$$

L'application  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est symétrique donc linéaire à gauche puisqu'elle est linéaire à droite.

- Pour tout  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  et tout indice  $1 \leq i \leq n$ ,

$$(A^\top A)_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2.$$

On a donc

$$\langle A | A \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 \geq 0.$$

La forme bilinéaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est donc positive.

- Puisque sur  $\mathbb{R}$ , une somme de carrés est nulle si et seulement si tous les carrés sont nuls, on a, d'après le calcul précédent,  $\langle A | A \rangle = 0$  si et seulement si  $\forall 1 \leq k, i \leq n, a_{k,i} = 0$ , ie  $A = 0$ . La forme bilinéaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est donc définie.

#### 5. Prouvons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $E$ .

- L'application  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est bilinéaire par linéarité du produit sur  $\mathbb{R}$ , de la dérivation et de l'intégrale.
- La forme bilinéaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est symétrique car le produit sur  $\mathbb{R}$  est commutatif.
- Soit  $f \in E$ . Par positivité de l'intégrale, on a

$$(f|f) = f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \geq 0.$$

La forme bilinéaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est donc positive.

- Reprenons les notations précédentes. Puisque qu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, l'égalité  $\langle f | f \rangle = 0$  implique

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f'^2(t) dt = 0.$$

La fonction  $f'^2$  étant continue et positive, la deuxième condition est équivalente à  $f' = 0$ , la fonction  $f$  est donc constante et finalement nulle puisque  $f(1) = 0$ . La forme bilinéaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est donc définie.

#### 6. Prouvons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $E$ .

- *Symétrie* : pour tous  $f$  et  $g$  dans  $E$ , on a

$$\begin{aligned}\langle f | g \rangle &= \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt \\ &= \int_0^1 (g(t)f(t) + g'(t)f'(t)) dt \\ &= \langle g | f \rangle\end{aligned}$$

par commutativité du produit sur le corps  $(\mathbb{R}, +, \times)$ .

- *Linéarité* : pour tous  $f, g$  et  $h$  dans  $E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned}
 \langle f + \lambda g | h \rangle &= \int_0^1 ((f + \lambda g)(t)h(t) + (f + \lambda g)'(t)h'(t))dt \\
 &= \int_0^1 (f(t)h(t) + \lambda g(t)h(t) + f'(t)h'(t) \\
 &\quad + \lambda g'(t)h'(t)) \\
 &= \int_0^1 (f(t)h(t) + f'(t)h'(t))dt \\
 &\quad + \lambda \int_0^1 (g(t)h(t) + g'(t)h'(t))dt \\
 &= \langle f | h \rangle + \lambda \langle g | h \rangle
 \end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation, de l'évaluation et de l'intégrale. Ainsi,  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est linéaire à gauche donc bilinéaire sur  $E$  par symétrie.

- *Positivité* : pour tout  $f$  dans  $E$ , on a

$$\langle f | f \rangle = \int_0^1 (f^2(t) + (f')^2(t))dt \geq 0$$

par positivité de l'intégrale puisque  $f^2 + (f')^2 \geq 0$ .

- *Caractère défini* : pour tout  $f$  dans  $E$ , on a

$$\langle f | f \rangle = \int_0^1 (f^2(t) + (f')^2(t))dt = 0$$

si et seulement si  $f^2 + (f')^2 = 0$  car l'intégrale sur un segment d'une fonction continue et positive est nulle si et seulement si cette fonction est nulle. Ceci équivaut à

$$f^2 = (f')^2 = 0,$$

ie  $f = 0$ .

## Inégalités

### Solution 2

1. Prouvons que  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $E$ .

- L'application  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est bilinéaire par linéarité du produit sur  $\mathbb{R}$ , de la dérivation et de l'intégrale.
- La forme bilinéaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est symétrique car le produit sur  $\mathbb{R}$  est commutatif.
- Soit  $f \in E$ . Par positivité de l'intégrale, on a

$$(f | f) = f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \geq 0.$$

La forme bilinéaire  $\langle | \rangle$  est donc positive.

- Reprenons les notations précédentes. Puisque qu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, l'égalité  $\langle f | f \rangle = 0$  implique

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f'^2(t) dt = 0.$$

La fonction  $f'^2$  étant continue et positive, la deuxième condition est équivalente à  $f' = 0$ , la fonction  $f$  est donc constante et finalement nulle puisque  $f(1) = 0$ . La forme bilinéaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est donc définie.

2. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions de  $E$  définies par

$$f \in E, g : t \in [0, 1] \mapsto t.$$

Puisque

$$\langle f | g \rangle = f(1) + \int_0^1 f'(t) dt,$$

puis

$$\|f\|^2 = f^2(1) + \int_0^1 f'^2(t) dt$$

et finalement

$$\|g\|^2 = 1 + 1 = 2,$$

l'inégalité s'écrit

$$\left(f(1) + \int_0^1 f'(t) dt\right)^2 \leq 2\left(f^2(1) + \int_0^1 f'^2(t) dt\right).$$

### Solution 3

1. D'une part, on a :

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|^2 &= \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y) \rangle \\ &= \|f(x)\|^2 - 2\langle f(x), f(y) \rangle + \|f(y)\|^2 \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} - 2\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} + \frac{1}{\|y\|^2}. \end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|}\right)^2 &= \frac{\|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2}{\|x\|^2\|y\|^2} \\ &= \frac{1}{\|y\|^2} - 2\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} + \frac{1}{\|x\|^2}. \end{aligned}$$

D'où la conclusion.

2. Remarquons tout d'abord que l'inégalité est évidente si deux des vecteurs  $a, b, c, d$  sont égaux. On les suppose maintenant deux à deux distincts. Soient  $x, y, z \in E \setminus \{0\}$ . L'inégalité triangulaire donne

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\|$$

qui devient en utilisant la première question :

$$\frac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|} \leq \frac{\|x - z\|}{\|x\|\|z\|} + \frac{\|z - y\|}{\|z\|\|y\|}.$$

En multipliant par  $\|x\|\|y\|\|z\|$ , on obtient :

$$\|z\|\|x - y\| \leq \|y\|\|x - z\| + \|x\|\|z - y\|.$$

En posant  $x = b - a$ ,  $y = d - a$  et  $z = c - a$ , on obtient le résultat voulu.

### Solution 4

Si la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est liée, alors  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$  et l'inégalité est trivialement vérifiée.

Sinon, on peut orthonormaliser la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  en une base orthonormale  $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ . Notons  $M$  la matrice de  $(x_1, \dots, x_n)$  dans la base  $\mathcal{B}$ ,  $Q$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{B}'$  et  $R$  la matrice de  $(x_1, \dots, x_n)$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . On a donc  $M = QR$  puis  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(M) = \det(Q)\det(R)$ . Puisque  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont des bases orthonormales,  $Q$  est orthogonale et donc  $\det(Q) = \pm 1$ . De plus,

par procédé de Gram-Schmidt, la matrice  $R$  est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont  $\langle x_1, e_1 \rangle, \dots, \langle x_n, e_n \rangle$ . On en déduit que

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \langle x_i, e_i \rangle$$

puis par inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\| \|e_i\| = \prod_{i=1}^n \|x_i\|$$

### Solution 5

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux

$$a_k = 1, \quad b_k = \frac{1}{k},$$

on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n 1^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}},$$

d'où, en élevant au carré,

$$\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

### Solution 6

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux

$$a_k = \sqrt{x_k}, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}},$$

on aboutit à

$$\sum_{k=1}^n 1 \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}},$$

d'où, en élevant au carré,

$$n^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right).$$

### Solution 7

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux réels

$$a_k = \sqrt{k}, \quad b_k = \frac{\sqrt{k}}{n-k}, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

on aboutit à

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} k} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2}},$$

d'où, en élevant au carré,

$$\left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} \right)^2 \leq \frac{n(n-1)}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2}$$

d'où le résultat.

### Solution 8

D'après-Cauchy-Schwarz,

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq \left( \int_a^b \sqrt{f(x)} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx \right)^2 = (b-a)^2$$

Donc la borne inférieure de l'énoncé existe. Elle est atteinte si  $\sqrt{f}$  et  $\frac{1}{\sqrt{f}}$  sont colinéaires : il suffit par exemple de prendre  $f = 1$  sur  $[a, b]$ .

**Solution 9**

On a

$$\forall t \in [a, b], f(t) = \int_a^t f'(u) du.$$

Appliquons alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On obtient

$$f^2(t) \leq \left( \int_a^t du \right) \left( \int_a^t f'^2(u) du \right),$$

soit

$$f^2(t) \leq (t - a) \int_a^t f'^2(u) du.$$

Comme  $f'^2 \geq 0$  et  $a \leq t \leq b$ , on a

$$\int_a^t f'^2(u) du \leq \int_a^b f'^2(u) du$$

d'où

$$\forall t \in [a, b], f^2(t) \leq (t - a) \int_a^b f'^2(u) du,$$

puis, par positivité de l'intégrale,

$$\int_a^b f^2(t) dt \leq \left( \int_a^b (t - a) dt \right) \int_a^b f'^2(u) du$$

et donc

$$\int_a^b f^2(u) du \leq \frac{(b - a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u) du.$$

**Bases orthonormales****Solution 10**

1. Soit  $u$  l'endomorphisme de  $E$  tel que  $u(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$ .  $u$  transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée directe donc  $u$  est une isométrie vectorielle directe donc  $\det(u) = 1$ . Or  $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ .

2. On a  $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}}$ . Donc  $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}}$ .

**REMARQUE.** On en déduit que le déterminant dans une base orthonormée directe ne dépend pas du choix de cette base. Le déterminant de  $n$  vecteurs  $u_1, \dots, u_n$  dans une base orthonormée quelconque s'appelle le *produit mixte* de ces vecteurs et est noté  $[x_1, \dots, x_n]$ .

3. Cette application est linéaire car le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses variables et notamment par rapport à la dernière. De plus, elle est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . C'est donc une forme linéaire.

4. C'est tout simplement le théorème de Riesz.

5. Démontrons simplement la linéarité par rapport à la première variable. Soient  $x_1, \dots, x_{n-1} \in E$ ,  $x'_1 \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in E$ ,

$$\det_{\mathcal{B}}(\lambda x_1 + \mu x'_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \mu \det_{\mathcal{B}}(x'_1, x_2, \dots, x_n)$$

Notons  $u = (\lambda x_1 + \mu x'_1) \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$ ,  $v = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$  et  $w = x'_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$ . Ainsi pour tout  $x \in E$ ,  $\langle u, x \rangle = \lambda \langle v, x \rangle + \mu \langle w, x \rangle$  i.e.  $\langle u - (\lambda v + \mu w), x \rangle = 0$ . Donc  $u - (\lambda v + \mu w) \in E^\perp = \{0\}$ . On a donc  $u = \lambda v + \mu w$ , ce qui prouve bien la linéarité par rapport à la première variable. La linéarité par rapport aux autres variables se traite de la même manière.

Soient  $x_1, \dots, x_{n-1} \in E$  tels que deux vecteurs parmi ceux-ci soient égaux. On a donc  $\det(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = 0$  pour tout  $x \in E$  puisque le déterminant est une forme multilinéaire alternée. Ceci signifie que  $\langle x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}, x \rangle = 0$  pour tout  $x \in E$ . Ainsi  $x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} = 0$ . L'application de l'énoncé est bien alternée.

**Solution 11**

1. L'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est clairement symétrique. Elle est bilinéaire puisque la dérivation et l'évaluation en  $a$  sont linéaires. Elle est évidemment positive. Soit enfin  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\langle P, P \rangle = 0$ . On a donc  $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(n)}(a) = 0$ . Ainsi  $a$  est une racine d'ordre au moins  $n + 1$  de  $P$  et  $\deg P \leq n$  donc  $P = 0$ .
2. La famille  $((X - a)^k)_{0 \leq k \leq n}$  est clairement orthonormée. Puisqu'elle contient  $n + 1$  éléments et que  $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$ , c'est une base.

**Solution 12**

1. En développant  $\|x + y\|^2$ , on prouve sans peine que

$$\langle x|y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2},$$

et l'on en déduit que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x|e_i \rangle \langle y|e_i \rangle.$$

2. Soit  $x \in E$ . Posons

$$z = x - \sum_{i=1}^n \langle x|e_i \rangle e_i.$$

On a

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= \sum_{k=1}^n \langle z|e_k \rangle^2 = \sum_{k=1}^n \left\langle x - \sum_{i=1}^n \langle x|e_i \rangle e_i \middle| e_k \right\rangle^2 = \sum_{k=1}^n \left( \langle x|e_k \rangle - \sum_{i=1}^n \langle x|e_i \rangle \langle e_k|e_i \rangle \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (\langle x|e_k \rangle - \langle x|e_k \rangle)^2 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi  $z = 0$ , cqfd.

3. D'après la question précédente, la famille  $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$  est génératrice de  $E$ . Comme  $n = \dim(E)$ , cette famille est une base de  $E$ . Pour tout  $1 \leq k \leq n$ , on a

$$e_k = \sum_{i=1}^n \langle e_k|e_i \rangle e_i.$$

Ainsi, par identification des coordonnées dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ ,

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \langle e_k|e_i \rangle = \delta_{k,i}.$$

Comme cela est valable pour tout  $1 \leq k \leq n$ , on en déduit que la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ .

**Solution 13**

1. Prouvons que  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  définit un produit scalaire.

- $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est bilinéaire par bilinéarité du produit sur  $\mathbb{R}$  et par linéarité de l'évaluation.
- $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est symétrique par commutativité du produit sur  $\mathbb{R}$ .
- Soit  $P \in E$ . On a  $\langle P|P \rangle = P^2(-1) + P^2(0) + P^2(1) \geq 0$ , la forme bilinéaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est donc positive.
- Soit  $P \in E$ . Puisqu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, on a

$$\langle P|P \rangle = P^2(-1) + P^2(0) + P^2(1) = 0$$

si et seulement si  $0, 1, -1$  sont racines de  $P$ . Puisque  $P$  est de degré inférieur à deux, cette condition est équivalente à  $P = 0$ . La forme bilinéaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est donc définie.

## 2. Orthonormalisons la base canonique de E par le procédé de Gram-Schmidt.

- *Première étape.* On pose

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- *Deuxième étape.* Notons  $p_1$  la projection orthogonale sur  $\text{vect}(\Gamma_1)$ . Posons  $n_1 = X - p_1(X)$ . On a

$$n_1 = X - \langle X | \Gamma_1 \rangle \Gamma_1 = X - 0 \Gamma_1 = X$$

Puisque  $\|n_1\| = \sqrt{2}$ , on complète  $(\Gamma_1)$  par

$$\Gamma_2 = \frac{n_1}{\|n_1\|} = \frac{X}{\sqrt{2}}.$$

- *Troisième étape.* Notons  $p_2$  la projection orthogonale sur  $\text{vect}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ . Posons  $n_2 = X^2 - p_2(X^2)$ . On a

$$\begin{aligned} n_2 &= X^2 - \langle X^2 | \Gamma_1 \rangle \cdot \Gamma_1 - \langle X^2 | \Gamma_2 \rangle \cdot \Gamma_2 \\ &= X^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \Gamma_1 - 0 \cdot \Gamma_2 \\ &= X^2 - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Puisque  $\|n_2\| = \sqrt{2/3}$ , on complète  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  par

$$\Gamma_3 = \frac{n_2}{\|n_2\|} = \sqrt{3/2}(X^2 - 2/3).$$

La famille  $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$  est une base orthonormée de E.

## 3. Posons

$$L_{-1} = \frac{X(X-1)}{2}, \quad L_1 = \frac{X(X+1)}{2} \quad \text{et} \quad L_0 = 1 - X^2.$$

Il s'agit des polynômes de Lagrange associés aux réels  $\pm 1$  et 0. Cette famille est clairement orthonormée pour le produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ , elle est donc libre dans E qui est de dimension trois : il s'agit d'une base orthonormée de E.

**REMARQUE.** Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est lourd en calculs au-delà de trois vecteurs... Il faut parfois avoir un peu de culture – voire du flair ! – mais surtout suivre les indications de l'énoncé pour trouver des bases orthonormées.

## Sous-espaces orthogonaux

### Solution 14

#### 1. Prouvons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

- L'application  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est bilinéaire par linéarité du produit sur  $\mathbb{R}$ , de l'évaluation et de l'intégrale.
- La forme bilinéaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est symétrique car le produit sur  $\mathbb{R}$  est commutatif.
- Soit  $f \in E$ . Par positivité de l'intégrale, on a

$$\langle f | f \rangle = \int_0^1 f(t)^2 dt \geq 0.$$

La forme bilinéaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est donc positive.

- Reprenons les notations précédentes. Puisque qu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, l'égalité  $\langle f | f \rangle = 0$  est équivalente à

$$\int_0^1 f^2(t) dt = 0.$$

La fonction  $f^2$  étant continue et positive la condition est équivalente à  $f = 0$ . La forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est donc définie.



## 2. Calcul de $F^\perp$ .

a. Soit  $f \in F^\perp$ . On a alors

$$\forall g \in F, \langle f|g \rangle = 0.$$

Comme  $\forall g \in F$ , on a  $fg \in F$  (car  $(fg)(0) = 0$ ), on en déduit que :

$$\forall g \in F, \langle f|fg \rangle = 0.$$

Puisque  $\forall g \in F$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f|fg \rangle = \int_0^1 f(t)f(t)g(t)dt = \int_0^1 f^2(t)g(t)dt \\ &= \langle f^2|g \rangle \end{aligned}$$

on a  $f^2 \in F^\perp$ .

b. Notons  $g_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g_0(t) = t$ . On a clairement  $g_0 \in F$ . Ainsi, pour  $f \in F^\perp$ , on déduit de la question précédente que  $\langle f^2, g_0 \rangle = 0$ , i.e.

$$\int_0^1 t f^2(t) dt = 0.$$

Comme  $f^2 g_0$  est continue et positive, on en déduit que  $f^2 g_0 = 0$  et donc que :

$$\forall t \in [0, 1], t f^2(t) = 0.$$

En particulier,  $f(t) = 0$  pour tout  $0 < t \leq 1$ . On en déduit que  $f(0) = 0$  par continuité de  $f$  en 0. Ainsi  $f = 0$ , ce qui achève de prouver que  $F^\perp = \{0\}$ .

3. Non, car en dimension finie, on a  $F^\perp = \{0\}$  si et seulement si  $F = E$ , ce qui n'est manifestement pas le cas.

### Solution 15

$s$  est clairement linéaire et  $s^2 = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$  donc  $s$  est une symétrie. Soit  $S \in \text{Ker}(s - \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$  et  $A \in \text{Ker}(s + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ . Ainsi  $S^\top = S$  et  $A^\top = -A$ . Par conséquent  $\langle S, A \rangle = \text{tr}(S^\top A) = \text{tr}(SA)$  et  $\langle A, S \rangle = \text{tr}(A^\top S) = -\text{tr}(AS) = -\text{tr}(SA)$ . Donc  $\langle S, A \rangle = 0$ . Ceci signifie que  $\text{Ker}(s - \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$  et  $\text{Ker}(s + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$  sont orthogonaux l'un à l'autre :  $s$  est une symétrie orthogonale.

### Solution 16

1. Posons  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . Comme  $\mathcal{B}$  est une base orthonormale, pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f(e_j) = \sum_{i=1}^n \langle f(e_j), e_i \rangle e_i$ . On en déduit que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,

$$a_{ij} = \langle f(e_j), e_i \rangle = \langle e_j, f(e_i) \rangle = \langle f(e_i), e_j \rangle = a_{ji}$$

Ainsi  $A$  est symétrique.

2. Soit  $x \in \text{Ker } f$  et  $y \in \text{Im } f$ . Il existe donc  $z \in E$  tel que  $y = f(z)$ . Ainsi

$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(z) \rangle = \langle f(x), z \rangle = \langle 0_E, z \rangle = 0$$

Ainsi  $\text{Ker } f \subset (\text{Im } f)^\perp$ . De plus,  $\dim(\text{Im } f)^\perp = n - \dim \text{Im } f = \dim \text{Ker } f$  d'après le théorème du rang. Ainsi  $\text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp$ .

### Solution 17

1. Supposons  $F \subset G$ . Soit  $x \in G^\perp$ . Alors  $x$  est orthogonal à tout vecteur de  $G$  et a fortiori de  $F$  donc  $x \in F^\perp$ . Ainsi  $G^\perp \subset F^\perp$ . Supposons  $F$  et  $G$  de dimension finie et  $G^\perp \subset F^\perp$ . D'après ce qui précède,  $(F^\perp)^\perp \subset (G^\perp)^\perp$ . Mais  $F$  et  $G$  étant de dimension finie,  $(F^\perp)^\perp = F$  et  $(G^\perp)^\perp = G$ .

2. On sait que  $F \subset F + G$  donc  $(F + G)^\perp \subset F^\perp$  d'après la question précédente. De même,  $G \subset F + G$  donc  $(F + G)^\perp \subset G^\perp$ . Ainsi  $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$ .

Soit  $x \in F^\perp \cap G^\perp$ . Soit  $y \in F + G$ . Il existe donc  $(u, v) \in F \times G$  tel que  $y = u + v$ . Alors  $\langle x, y \rangle = \langle x, u \rangle + \langle x, v \rangle$ . Or  $x \in F^\perp$  et  $u \in F$  donc  $\langle x, u \rangle = 0$ . De même,  $x \in G^\perp$  et  $v \in G$  donc  $\langle x, v \rangle = 0$ . Ainsi  $\langle x, y \rangle = 0$ . Ceci étant vrai pour tout  $y \in F + G$ ,  $x \in (F + G)^\perp$ . D'où  $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$ .

Par double inclusion,  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ .

3.  $F \cap G \subset F$  donc  $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$  d'après la première question. De même,  $F \cap G \subset G$  donc  $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ . On en déduit que  $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ .

Supposons  $E$  de dimension finie. Alors

$$\dim(F^\perp + G^\perp) = \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F^\perp \cap G^\perp)$$

Or d'après la question précédente,  $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$  donc

$$\begin{aligned} \dim(F^\perp + G^\perp) &= \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F + G)^\perp \\ &= (\dim E - \dim F) + (\dim E - \dim G) - (\dim E - \dim(F + G)) \\ &= \dim E - (\dim F + \dim G - \dim(F + G)) \\ &= \dim E - \dim(F \cap G) = \dim(F \cap G)^\perp \end{aligned}$$

Puisqu'on a précédemment montré que  $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ , on peut conclure que  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ .

## Projecteurs orthogonaux

### Solution 18

Notons  $p$  la projection orthogonale sur  $\text{vect}(u)$  et  $P$  sa matrice dans  $\mathcal{B}$ . Comme  $(u)$  est une base orthonormale de  $\text{vect}(u)$ , on a, pour  $x \in E$ ,  $p(x) = \langle x, u \rangle u$ . Notons  $X$  le vecteur colonne associé à un vecteur  $x$  de  $E$ . On a  $PX = (U^T X)U = U(U^T X) = UU^T X$ . La matrice de  $P$  dans  $\mathcal{B}$  est donc  $UU^t$ .

### Solution 19

- Prouvons que **1.**  $\Rightarrow$  **2.**

Lorsque  $p$  est une projection orthogonale de  $E$ , on a  $\text{Im}(id_E - p) = \text{Ker}(p) = \text{Im}(p)^\perp$  donc, pour tout  $x$  et  $y$  dans  $E$ ,  $p(x) \perp y - p(y)$  ie

$$\langle p(x) | y \rangle = \langle p(x) | p(y) \rangle.$$

Cette expression étant symétrique en  $(x, y)$ , on a

$$\begin{aligned} \langle p(x) | y \rangle &= \langle p(x) | p(y) \rangle = \langle p(y) | p(x) \rangle = \langle p(y) | x \rangle \\ &= \langle x | p(y) \rangle \end{aligned}$$

- Prouvons que **2.**  $\Rightarrow$  **3.**

Soit  $x$  dans  $E$ . Appliquons le **2.** à  $x$  et  $y = p(x)$ . On a

$$\|p(x)\|^2 = \langle p(x) | p(x) \rangle = \langle x | p(x) \rangle.$$

ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|p(x)\|^2 \leq \|x\| \cdot \|p(x)\|.$$

Si  $p(x) = 0$ , l'inégalité **3.** est banalement vérifiée. Si  $p(x) \neq 0$ ,  $\|p(x)\| > 0$  et en divisant membre à membre l'inégalité précédente, on aboutit à

$$\|p(x)\| \leq \|x\|.$$

- Prouvons que **3.**  $\Rightarrow$  **1.**

Soient  $x \in \text{Im } p$ ,  $y \in \text{Ker } p$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si  $y = 0$ , alors  $x \perp y$ .

Supposons maintenant  $y \neq 0$ . D'une part,

$$\|p(x + \lambda y)\|^2 = \|x\|^2$$

et d'autre part,

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda \langle x|y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2$$

D'après **2.**,  $2\lambda \langle x|y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2 \geq 0$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Le discriminant de ce trinôme du second degré en  $\lambda$  est donc négatif, ce qui impose  $\langle x|y \rangle^2 \leq 0$  et donc  $\langle x|y \rangle = 0$ . On a donc  $x \perp y$ . On en déduit que  $\text{Im } p \perp \text{Ker } p$  et donc que  $p$  est une projection orthogonale.

### Solution 20

Commençons par établir un plan de bataille... Il nous faut calculer une base orthonormée de  $F$  afin de calculer le projecteur orthogonal  $p$  sur  $F$ . On commence donc par déterminer une base de  $F$  qu'il faudra ensuite orthonormaliser par le procédé de Schmidt.

- *Détermination d'une base de  $F$ .* Il est clair que le système d'équations définissant  $F$  est équivalent à

$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4 = 0.$$

Un vecteur  $X$  appartient donc à  $F$  si et seulement si il est de la forme

$$X = x_1(1, 0, -1, 0) + x_2(0, 1, 0, -1)$$

où  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ . Posons

$$u = (1, 0, -1, 0) \quad \text{et} \quad v = (0, 1, 0, -1).$$

La famille  $(u, v)$  est clairement libre et génératrice de  $F$ , il s'agit d'une base de ce sous-espace de  $\mathbb{R}^4$ .

- *Détermination d'une base orthonormée de  $F$ .* La base  $(u, v)$  est clairement orthogonale. Puisque l'on a  $\|u\| = \|v\| = \sqrt{2}$ , la famille formée par

$$u' = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}, 0) \quad \text{et} \quad v' = (0, 1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}).$$

est une base orthonormée de  $F$ .

- *Calcul de  $p$ .* Pour tout vecteur  $x$  de  $E$ , on a

$$p(x) = (x|u')u' + (x|v')v'.$$

Ainsi, en notant  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $E$ , on a

$$p(e_1) = (1/2, 0, -1/2, 0), \quad p(e_2) = (0, 1/2, 0, -1/2),$$

puis

$$p(e_3) = (-1/2, 0, 1/2, 0) \quad \text{et} \quad p(e_4) = (0, -1/2, 0, 1/2).$$

Ainsi

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Optimisation

### Solution 21

Remarquons déjà que

$$\langle aX^2 + bX + c \mid a'X^2 + b'X + c' \rangle = aa' + bb' + cc'$$

puisque la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  est orthonormale d'après l'énoncé. Pour les mêmes raisons

$$\|aX^2 + bX + c\|^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

1. Pour tout  $P \in E$ , la formule de Taylor s'écrit

$$P = P(1) + P'(1)(X - 1) + \frac{P''(1)}{2}(X - 1)^2$$

Ainsi les polynômes  $P_1 = X - 1$  et  $P_2 = (X - 1)^2$  engendrent  $F$ . La famille  $(P_1, P_2)$  est clairement libre : c'est donc une base de  $F$ .

## 2. Première méthode

D'après le cours, la quantité  $\|X - P\|$  est minimale lorsque  $P = \pi_F(X)$ , où  $\pi_F$  désigne le projecteur orthogonal sur  $F$ . Orthonormalisons la famille  $(P_1, P_2)$  par le procédé de Gram-Schmidt. Posons

$$Q_1 = \frac{P_1}{\|P_1\|} = \frac{X - 1}{\sqrt{2}}$$

Notons  $\pi_1$  la projection orthogonale sur  $\text{vect}(P_1)$ . Posons

$$\begin{aligned} n &= (X - 1)^2 - \pi_1((X - 1)^2) \\ &= (X - 1)^2 - \langle (X - 1)^2 \mid Q_1 \rangle Q_1 \\ &= (X - 1)^2 + \frac{3}{2}(X - 1) \\ &= X^2 - X/2 - 1/2 \end{aligned}$$

Notons ensuite

$$Q_2 = \frac{n}{\|n\|} = \sqrt{2/3}n$$

On a

$$\begin{aligned} \pi_F(X) &= \langle X \mid Q_1 \rangle Q_1 + \langle X \mid Q_2 \rangle Q_2 \\ &= \frac{X - 1}{2} - \frac{1}{3}(X^2 - X/2 - 1/2) \\ &= -X^2/3 + 2/3X - 1/3 \end{aligned}$$

Ainsi

$$X - \pi_F(X) = \frac{X^2 + X + 1}{3}$$

et

$$\delta = \|X - \pi_F(X)\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

## Deuxième méthode

On peut également remarquer que  $\delta = \|\pi_{F^\perp}(X)\|$  où  $\pi_{F^\perp}$  désigne le projecteur orthogonal sur  $F^\perp$ . En effet,  $F^\perp$  est une droite vectorielle et il est donc plus facile de calculer un projeté orthogonal sur  $F^\perp$  plutôt que sur  $F$ . Soit  $Q = aX^2 + bX + c$  un vecteur directeur de  $F^\perp$ .  $Q$  est donc orthogonal à  $X - 1$  et  $(X - 1)^2$  ce qui donne

$$\begin{cases} b - c = 0 \\ a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

et donc  $a = b = c$ . On peut donc prendre  $Q = X^2 + X + 1$ . Ainsi

$$\delta = \left| \frac{\langle Q \mid X \rangle Q}{\|Q\|} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

## Troisième méthode

Notons  $Q = aX^2 + bX + c$  le projeté orthogonal de  $X$  sur  $F^\perp$  de sorte que  $\delta = \|Q\|$ .  $Q$  est orthogonal à  $P_1$  et  $P_2$  de sorte que

$$\begin{cases} b - c = 0 \\ a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

et donc  $a = b = c$ . Par ailleurs,  $X - Q \in F$  donc  $a + b + c = 1$ . On en déduit que  $Q = \frac{X^2 + X + 1}{3}$  puis  $\delta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**Solution 22**

Soit  $E = \mathcal{C}([0; \pi], \mathbb{R})$ . On munit  $E$  du produit scalaire  $(f, g) \mapsto \int_0^\pi f(x)g(x) dx$ . On pose pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{a,b} : \begin{cases} [0, \pi] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto ax^2 + bx \end{cases}$$

et

$$F = \{f_{a,b}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(f_1, f_2)$$

avec  $f_1 = f_{0,1}$  et  $f_2 = f_{1,0}$ .  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $\phi(a, b) = \|\sin - f_{a,b}\|^2$ . Le minimum de  $\phi$  est donc atteint quand  $f_{a,b}$  est la projection orthogonale de  $\sin$  sur  $F$  et vaut alors  $d(x, F)^2 = \|\sin - p_F(\sin)\|^2$  où  $p_F$  est la projection orthogonale sur  $F$ .

**Première méthode**

On utilise le procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour orthonormaliser la famille  $(f_1, f_2)$ . On pose donc  $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$  et  $e_2 = \frac{g}{\|g\|}$  avec  $g = f_2 - \langle f_2, e_1 \rangle e_1$ . Alors  $p_F(\sin) = \langle \sin, e_1 \rangle e_1 + \langle \sin, e_2 \rangle e_2$ . D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \|\sin - p_F(\sin)\|^2 &= \|\sin\|^2 - \|p_F(\sin)\|^2 \\ &= \|\sin\|^2 - \langle \sin, e_1 \rangle^2 - \langle \sin, e_2 \rangle^2 \\ &= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1 \rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{\langle \sin, g \rangle^2}{\|g\|^2} \\ &= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1 \rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{(\langle \sin, f_2 \rangle - \langle f_2, e_1 \rangle \langle \sin, e_1 \rangle)^2}{\|f_2\|^2 - \langle f_2, e_1 \rangle^2} \\ &= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1 \rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{\left( \langle \sin, f_2 \rangle - \frac{\langle f_2, f_1 \rangle \langle \sin, f_1 \rangle}{\|f_1\|^2} \right)^2}{\|f_2\|^2 - \frac{\langle f_2, f_1 \rangle^2}{\|f_1\|^2}} \\ &= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1 \rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{(\|f_1\|^2 \langle \sin, f_2 \rangle - \langle f_2, f_1 \rangle \langle \sin, f_1 \rangle)^2}{\|f_1\|^2 (\|f_1\|^2 \|f_2\|^2 - \langle f_2, f_1 \rangle^2)} \end{aligned}$$

A l'aide éventuellement d'intégrations par parties, on trouve

$$\|\sin\|^2 = \frac{\pi}{2} \quad \|f_1\|^2 = \frac{\pi^3}{3} \quad \|f_2\|^2 = \frac{\pi^5}{5} \quad \langle f_1, f_2 \rangle = \frac{\pi^4}{4} \quad \langle \sin, f_1 \rangle = \pi \quad \langle \sin, f_2 \rangle = \pi^2 - 4$$

On trouve finalement

$$\min_{\mathbb{R}^2} \phi = d(x, F)^2 = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5}$$

**Seconde méthode**

On sait qu'il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $p_F(\sin) = af_2 + bf_1$ . De plus,  $\sin - p_F(\sin) \in F^\perp = \text{vect}(f_1, f_2)^\perp$  donc

$$\begin{cases} \langle \sin - p_F(\sin), f_1 \rangle = 0 \\ \langle \sin - p_F(\sin), f_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

Ceci équivaut à

$$\begin{cases} a\langle f_2, f_1 \rangle + b\|f_1\|^2 = \langle \sin, f_1 \rangle \\ a\|f_2\|^2 + b\langle f_1, f_2 \rangle = \langle \sin, f_2 \rangle \end{cases}$$

Or on a trouvé précédemment que

$$\|f_1\|^2 = \frac{\pi^3}{3} \quad \|f_2\|^2 = \frac{\pi^5}{5} \quad \langle f_1, f_2 \rangle = \frac{\pi^4}{4} \quad \langle \sin, f_1 \rangle = \pi \quad \langle \sin, f_2 \rangle = \pi^2 - 4$$

Ainsi

$$\begin{cases} \frac{\pi^4}{4}a + \frac{\pi^3}{3}b = \pi \\ \frac{\pi^5}{5}a + \frac{\pi^4}{4}b = \pi^2 - 4 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$a = \frac{20}{\pi^3} - \frac{320}{\pi^5} \qquad b = -\frac{12}{\pi^2} + \frac{240}{\pi^4}$$

A nouveau en vertu du théorème de Pythagore

$$\begin{aligned} \|\sin - p_F(\sin)\|^2 &= \|\sin\|^2 - \|p_F(\sin)\|^2 \\ &= \|\sin\|^2 - \|af_2 + bf_1\|^2 \\ &= \|\sin\|^2 - a^2\|f_2\|^2 - 2ab\langle f_1, f_2 \rangle - b^2\|f_1\|^2 \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5} \end{aligned}$$

### Solution 23

1. E est une partie non vide de  $\mathbb{R}$  minorée par 0. Elle admet une borne inférieure.
2. Si  $(\mathcal{S})$  admet une solution, alors  $K = 0$ . Les pseudo-solutions de  $(\mathcal{S})$  sont donc les éléments  $X$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tels que  $\|AX - B\|^2 = 0$  i.e. tels que  $AX - B = 0$ . Ce sont donc les solutions de  $(\mathcal{S})$ .

#### 3. Première méthode

Puisque  $\{AX, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\} = \text{Im } A$ , on peut affirmer que  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est pseudo-solution de  $(\mathcal{S})$  si et seulement si  $AX$  est la projection de  $B$  sur  $\text{Im } A$ . Or  $AX$  est la projection de  $B$  sur  $\text{Im } A$  si et seulement si  $AX - B$  est orthogonal à  $\text{Im } A$ . Or  $AX - B$  est orthogonal à  $\text{Im } A$  si et seulement si il est orthogonal à chaque colonne de  $A$  puisque les colonnes de  $A$  engendrent  $\text{Im } A$ . Ainsi  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est pseudo-solution de  $(\mathcal{S})$  si et seulement si  $A^T(AX - B) = 0$  i.e. si et seulement si  $X$  est solution de  $(\mathcal{S}')$ .

#### Seconde méthode

Supposons que  $X$  soit solution de  $(\mathcal{S}')$  i.e.  $A^T(AX - B) = 0$ . Alors pour tout  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \|AY - B\|^2 &= \|A(Y - X) + AX - B\|^2 \\ &= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 + 2\langle A(Y - X), AX - B \rangle \\ &= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 + 2(Y - X)^T A^T(AX - B) \\ &= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 \geq \|AX - B\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi  $X$  est pseudo-solution de  $(\mathcal{S})$ .

Supposons que  $X$  soit pseudo-solution de  $(\mathcal{S})$ . Alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tout  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$$\|A(X + \lambda Y) - B\|^2 \geq \|AX - B\|^2$$

ou encore

$$\|(AX - B) + \lambda AY\|^2 \geq \|AX - B\|^2$$

ce qui donne via une identité remarquable

$$2\lambda \langle AY, AX - B \rangle + \lambda^2 \|AY\|^2 \geq 0$$

Si on fixe  $Y$ , la dernière inégalité étant vraie pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a nécessairement  $\langle AY, AX - B \rangle = 0$ . Ainsi pour tout  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $\langle AY, AX - B \rangle = 0$  ou encore  $\langle Y, A^T(AX - B) \rangle = 0$ , ce qui prouve que  $A^T(AX - B) = 0$  et que  $X$  est solution de  $(\mathcal{S}')$ .

4. Soit  $X \in \text{Ker } A$ . On a donc  $AX = 0$  puis  $A^T AX = 0$  donc  $X \in \text{Ker } A^T A$ . Ainsi  $\text{Ker } A \subset \text{Ker } A^T A$ . Soit maintenant  $X \in \text{Ker } A^T A$ . On a donc  $A^T AX = 0$  puis  $X^T A^T AX = 0$ . Notons  $Y = AX$ . Ainsi  $Y^T Y = 0$  i.e.  $\|Y\|^2 = 0$  donc  $Y = 0$  i.e.  $AX = 0$ . D'où  $X \in \text{Ker } A$ . Ainsi  $\text{Ker } A^T A \subset \text{Ker } A$ . Finalement,  $\text{Ker } A = \text{Ker } A^T A$  et  $\text{rg } A = \text{rg } A^T A$  via le théorème du rang.
5. Si  $\text{rg}(A) = n$ , alors  $\text{rg}(A^T A) = n$ . La matrice  $A^T A$  est une matrice carrée de taille  $n$  et de rang  $n$  le système  $(\mathcal{S}')$  est donc de Cramer : il admet une unique solution i.e.  $(\mathcal{S})$  admet une unique pseudo-solution.

### Solution 24

Comme  $E$  est ouvert, un minimum de  $f$  est forcément un minimum local et donc un point critique. Pour  $x \in E$ ,  $\nabla f(x) = 2 \sum_{i=1}^p (x - x_i)$ .

L'unique point critique de  $f$  sur  $E$  est donc  $m = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i$ . Il suffit donc de vérifier que  $m$  est bien un minimum : il sera nécessairement unique.

Pour  $x \in E$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^p \|x - m + m - x_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^p (\|x - m\|^2 + 2\langle x - m, m - x_i \rangle + \|m - x_i\|^2) \\ &= p\|x - m\|^2 + f(m) + \left\langle x - m, \sum_{i=1}^p m - x_i \right\rangle \\ &= p\|x - m\|^2 + f(m) \geq f(m) \end{aligned}$$

car  $\sum_{i=1}^p m - x_i = 0$ . Ceci prouve que  $f$  atteint bien son minimum en  $m$ .

### Solution 25

Pour  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^p \|x - m + m - x_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^p (\|x - m\|^2 + 2\langle x - m, m - x_i \rangle + \|m - x_i\|^2) \\ &= p\|x - m\|^2 + f(m) + \left\langle x - m, \sum_{i=1}^p m - x_i \right\rangle \\ &= p\|x - m\|^2 + f(m) \geq f(m) \end{aligned}$$

car  $\sum_{i=1}^p m - x_i = 0$ . Ceci prouve que  $f$  atteint bien son minimum en  $m$ .

## Automorphismes orthogonaux

### Solution 26

Notons

$$\vec{a} = \frac{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}}{\sqrt{3}}$$

un vecteur normé dirigeant l'axe de la rotation. D'après le cours, pour tout vecteur  $\vec{x} \in E$ ,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \langle \vec{x} | \vec{a} \rangle \vec{a} + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) (\vec{x} - \langle \vec{x} | \vec{a} \rangle \vec{a}) \\ &\quad + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \vec{a} \wedge \vec{x} \end{aligned}$$

ie

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2} \langle \vec{x} | \vec{a} \rangle \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{a} \wedge \vec{x}.$$

On a donc

$$f(\vec{u}) = \vec{v}$$

puis

$$f(\vec{v}) = \vec{w}$$

et

$$f(\vec{w}) = \vec{u},$$

d'où

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**REMARQUE.** L'esquisse d'un petit tétraèdre trirectangle permet de retrouver *empiriquement* le résultat démontré ci-dessus, à moins de se fendre d'une petite démonstration...

### Solution 27

Puisque  $O(E)$  est un groupe,  $r \circ s$  est un endomorphisme orthogonal de  $E$ . Comme

$$\det(r \circ s) = 1 \times -1 = -1,$$

$r \circ s$  est indirect : il s'agit d'une symétrie. On a donc

$$(r \circ s)^2 = r \circ s \circ r \circ s = \text{id}_E,$$

d'où  $s \circ r \circ s = r^{-1}$  et  $r \circ s \circ r = s^{-1} = s$ .

### Solution 28

Les colonnes de la matrice  $M$  étant normées et deux à deux orthogonales, la matrice étudiée est orthogonale. Une simple application de la règle de Sarrus permet de conclure que le déterminant de  $f$  vaut 1 :  $f$  est donc une rotation ; notons  $\theta$  son angle. Déterminons son axe en résolvant le système  $\mathcal{S}$  suivant,  $MX = X$ ...

$$\mathcal{S} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & -1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}.$$

Effectuons  $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ ,  $L_3 \leftarrow L_3 - \sqrt{6}L_1$

$$\mathcal{S} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix},$$

les solutions sont donc les vecteurs colinéaires au vecteur unitaire

$$\vec{a} = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}.$$

Le vecteur  $e_3$  est unitaire et orthogonal à  $\vec{a}$  donc

$$\langle f(e_3) | e_3 \rangle = \frac{1}{2} = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \text{Det}(a, u, f(u)) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(\theta),$$

$f$  est donc la rotation d'axe orienté par  $\vec{a}$  et d'angle  $\pi/3$ .

### Solution 29

- Prouvons 1)  $\Rightarrow$  2) Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs non nuls de  $E$ . Comme

$$\left( \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right) \perp \left( \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right),$$

on a :

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \middle| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = 0$$



i.e.

$$\frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\|u(y)\|^2}{\|y\|^2},$$

d'où, par positivité de la norme :

$$\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|u(y)\|}{\|y\|}.$$

La quantité

$$\frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

est donc indépendante du vecteur  $x \neq 0$ . Notons-la  $k$ . On a

$$\forall x \neq 0, \|u(x)\| = k\|x\|.$$

Comme  $u(x) = 0$ , cette égalité est prolongeable à  $E$  :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = k\|x\|.$$

- Prouvons 2)  $\Rightarrow$  3) Supposons que

$$\exists k \geq 0, \forall x \in E, \|u(x)\| = k\|x\|.$$

Si  $k = 0$ ,  $u$  est la composée de n'importe quelle rotation avec l'homothétie de rapport nul. Si  $k \neq 0$ , alors  $k > 0$ , notons  $h_k$  l'homothétie de rapport  $k$ . On a, pour tout vecteur  $x$  de  $E$ ,

$$\|((h_k)^{-1} \circ u)(x)\| = \frac{\|u(x)\|}{k} = \|x\|.$$

Ainsi l'endomorphisme  $(h_k)^{-1} \circ u$  de  $E$  est une isométrie  $i$  de  $E$  et  $u = h_k \circ i$ .

- Prouvons 3)  $\Rightarrow$  1) Si  $u = h_k \circ i$  avec  $h_k$  homothétie de rapport  $k \geq 0$  et  $i$  isométrie de  $E$ , alors, pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$ , on a

$$\langle u(x)|u(y) \rangle = k\langle x|y \rangle$$

et donc,

$$\langle x|y \rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x)|u(y) \rangle = 0.$$

### Solution 30

- Si  $H = K$  alors  $s_H = s_K$  et  $s_H$  et  $s_K$  commutent évidemment.
- Si  $H^\perp \subset K$ , alors on a également  $K^\perp \subset H$ . Soient  $a, b \in E$  tels que  $H = \text{vect}(a)^\perp$  et  $K = \text{vect}(b)^\perp$ . On a donc  $a \in K$  et  $b \in H$ . De plus,  $a$  et  $b$  sont orthogonaux. Enfin,  $(H \cap K)^\perp = H^\perp + K^\perp = \text{vect}(a) \oplus \text{vect}(b)$ . Soit  $x \in E$ . Il existe donc  $u \in H \cap K$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  tels que  $x = u + \lambda a + \mu b$ . On a alors :

$$s_H \circ s_K(x) = s_H(u + \lambda a + \mu b) = u - \lambda a - \mu b$$

$$s_K \circ s_H(x) = s_K(u - \lambda a + \mu b) = u - \lambda a - \mu b$$

On a bien prouvé que  $s_H$  et  $s_K$  commutent.

**REMARQUE.** On a même prouvé que  $s_H \circ s_K = s_K \circ s_H = s_{H \cap K}$ .

- Réciproquement, si  $s_H$  et  $s_K$  commutent, soit à nouveau  $a$  tel que  $H = \text{vect}(a)^\perp$ . On a donc  $s_H(a) = -a$ . Par conséquent,  $s_H \circ s_K(a) = s_K \circ s_H(a) = -s_K(a)$ . Ceci implique que  $s_K(a) \in H^\perp = \text{vect}(a)$ . Comme  $s_K$  est une isométrie, on a  $s_K(a) = a$  ou  $s_K(a) = -a$ . Si  $s_K(a) = a$  alors  $a \in K$  et donc  $H^\perp \subset K$ . Si  $s_K(a) = -a$  alors  $a \in K^\perp$ , c'est-à-dire que  $K = \text{vect}(a)^\perp = H$ .

### Solution 31

1. Soit  $(i, j, k)$  une base orthonormée directe de  $E$  et  $f$  vérifiant la condition de l'énoncé. Alors

$$f(i) = f(j) \wedge f(k) \qquad f(j) = f(k) \wedge f(i) \qquad f(k) = f(i) \wedge f(j)$$

La famille  $(f(i), f(j), f(k))$  est donc orthogonale. Par conséquent

$$\begin{aligned} \|f(i)\| &= \|f(j)\| \|f(k)\| \\ \|f(j)\| &= \|f(k)\| \|f(i)\| \\ \|f(k)\| &= \|f(i)\| \|f(j)\| \end{aligned}$$

Si l'un des vecteurs  $f(i), f(j), f(k)$  est nul alors ces 3 vecteurs sont nuls et donc  $f = 0$ . Si les 3 vecteurs sont non nuls, on tire des 3 dernières relations que :

$$\|f(i)\| = \|f(j)\| = \|f(k)\| = 1$$

Comme de plus  $f(i) = f(j) \wedge f(k)$ , la famille  $(f(i), f(j), f(k))$  est une base orthonormée directe. On a donc  $f \in \text{SO}(E)$ . Réciproquement, si  $f = 0$  ou  $f \in \text{SO}(E)$ , alors  $f$  vérifie bien la condition de l'énoncé puisque les applications  $(u, v) \mapsto f(u \wedge v)$  et  $(u, v) \mapsto f(u) \wedge f(v)$  sont bilinéaires et que ces deux applications coïncident sur une base orthonormée directe. L'ensemble des endomorphismes recherché est donc  $\text{SO}(E) \cup \{0\}$ .

2. Tout le raisonnement précédent reste valable à l'exception près que  $f(i) = -f(j) \wedge f(k)$  et la famille  $(f(i), f(j), f(k))$  est donc une base orthonormée indirecte.  $f$  est donc soit l'endomorphisme nul soit une isométrie indirecte. L'ensemble recherché est donc  $(\text{O}(E) \setminus \text{SO}(E)) \cup \{0\}$ .

### Solution 32

Notons  $P$  le plan d'équation  $x + 2y - 3z = 0$ . On a  $P = \{(3z - 2y, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}((-2, 1, 0), (3, 0, 1))$ . Notons  $u_1 = (-2, 1, 0)$  et  $u_2 = (3, 0, 1)$ . Notons  $s$  la symétrie de l'énoncé. On va déterminer les images des vecteurs de la base canonique par  $s$ . Un vecteur normal à  $P$  est  $n = u_1 \wedge u_2 = (1, 2, -3)$ . Le projeté orthogonal d'un vecteur  $u$  sur  $P^\perp = \text{vect}(n)$  est donc  $p(u) = \frac{\langle u, n \rangle}{\|n\|^2} n$ . On a alors  $s(u) = u - 2p(u) = u - 2 \frac{\langle u, n \rangle}{\|n\|^2} n$ . Il suffit alors d'appliquer à  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$  et  $e_3 = (0, 0, 1)$ . On trouve

$$s(e_1) = \frac{1}{7}(6, -2, 3) \qquad s(e_2) = \frac{1}{7}(-2, 3, 6) \qquad s(e_3) = \frac{1}{7}(3, 6, -2)$$

La matrice de  $s$  dans la base canonique est donc  $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ .

### Solution 33

1. Soient  $s$  une réflexion de  $E$ ,  $(u, v)$  une base de  $E$ , et  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$  la matrice de  $s$  dans la base  $(u, v)$ . Recherchons l'axe de  $s$ .

Les vecteurs de l'axe sont les vecteurs de matrice colonne  $X$  dans la base  $(u, v)$  vérifiant  $AX = X$ . Posons  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Alors

$$\begin{aligned} AX = X &\iff \begin{cases} x \cos \theta + y \sin \theta = x \\ x \sin \theta - y \cos \theta = y \end{cases} \iff \begin{cases} x(\cos \theta - 1) + y \sin \theta = 0 \\ x \sin \theta - y(\cos \theta + 1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2y \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 0 \\ 2x \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 2y \cos^2 \frac{\theta}{2} = 0 \end{cases} \iff x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2} = 0 \end{aligned}$$

La dernière équivalence est justifiée par le fait que  $\sin \frac{\theta}{2}$  et  $\cos \frac{\theta}{2}$  ne peuvent être simultanément nuls. Un vecteur directeur de l'axe est donc  $\cos \frac{\theta}{2} u + \sin \frac{\theta}{2} v$ . On en déduit que  $\frac{\theta}{2}$  est l'angle orienté de droites entre l'axe des abscisses i.e.  $\text{vect}(u)$  et l'axe de la réflexion  $s$  (modulo  $\pi$  puisqu'il s'agit d'un angle orienté de droites).

2. Soit  $s_1$  et  $s_2$  deux réflexions de  $E$ . On peut choisir une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  de telle sorte que la matrice de  $s_1$  dans cette base soit  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . La matrice de  $s_2$  dans  $\mathcal{B}$  est de la forme  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ . La matrice de  $s_1 + s_2$  dans  $\mathcal{B}$  est donc  $A = \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -1 - \cos \theta \end{pmatrix}$ .  $s_1 + s_2$  est une réflexion si et seulement si la matrice  $A$  est orthogonale de déterminant  $-1$ . Ceci nous donne donc les conditions

$$\begin{cases} (1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 1 \\ \sin^2 \theta + (-1 - \cos \theta)^2 = 1 \\ (1 + \cos \theta)(-1 - \cos \theta) - \sin^2 \theta = -1 \end{cases}$$

Un rapide calcul montre que chacune des équations de ce système équivaut à  $2 \cos \theta = -1$  i.e.  $\theta \equiv \pm \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$ . On a donc  $\frac{\theta}{2} \equiv \pm \frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$ . Avec notre choix de base, l'axe de  $s_1$  est l'axe des abscisses. A l'aide de la première question, on peut donc conclure que  $s_1 + s_2$  est une réflexion si et seulement si l'angle non orienté de droites entre l'axe de  $s_1$  et l'axe de  $s_2$  vaut  $\frac{\pi}{3}$ .

### Solution 34

1. Soient  $y \in \text{Im } v$  et  $z \in \text{Ker } v$ . Il existe donc  $x \in E$  tel que  $y = v(x)$  i.e.  $y = x - u(x)$ . On a également  $v(z) = 0_E$  i.e.  $z = u(z)$ .

$$(y|z) = (x - u(x)|z) = (x|z) - (u(x)|z) = (x|z) - (u(x)|u(z)) = 0$$

car  $u$  conserve le produit scalaire. On a donc prouvé que  $\text{Im } v$  et  $\text{Ker } v$  sont orthogonaux.

En particulier, ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe. De plus, d'après le théorème du rang  $\dim \text{Ker } v + \dim \text{Im } v = \dim E$ , donc  $\text{Im } v$  et  $\text{Ker } v$  sont supplémentaires.

2. Une composée d'automorphismes orthogonaux est un automorphisme orthogonal.

### Solution 35

1. L'application  $\Phi$  est clairement symétrique. Elle est bilinéaire par linéarité de l'intégrale. Elle est positive par positivité de l'intégrale.

Enfin, soit  $f \in E$  telle que  $\Phi(f, f) = 0$ . On a donc  $\int_0^1 f(t)^2 dt = 0$ . Comme l'application  $f^2$  est positive et continue sur  $[0, 1]$ , elle est nulle sur  $[0, 1]$ . Par conséquent,  $f$  est également nulle sur  $[0, 1]$ . De plus,  $f$  est une combinaison linéaire des fonctions 1-périodiques  $e_1, e_2, e_3$ . Donc  $f$  est aussi 1-périodique. Elle est alors nulle sur  $\mathbb{R}$ . L'application  $\Phi$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire.

2. Les calculs sont élémentaires :

$$\begin{aligned} \|e_1\|^2 &= 2 \int_0^1 \frac{1}{2} dt = 1 \\ \|e_2\|^2 &= 2 \int_0^1 \cos^2(2\pi t) dt = \int_0^1 (1 + \cos(4\pi t)) dt = 1 \\ \|e_3\|^2 &= 2 \int_0^1 \sin^2(2\pi t) dt = \int_0^1 (1 - \cos(4\pi t)) dt = 1 \\ \langle e_1, e_2 \rangle &= \sqrt{2} \int_0^1 \cos(2\pi t) dt = 0 \\ \langle e_1, e_3 \rangle &= \sqrt{2} \int_0^1 \sin(2\pi t) dt = 0 \\ \langle e_2, e_3 \rangle &= 2 \int_0^1 \sin(2\pi t) \cos(2\pi t) dt = \int_0^1 \sin(4\pi t) dt = 0 \end{aligned}$$

La base  $(e_1, e_2, e_3)$  est donc orthonormée.

3. a. Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $f_1, f_2 \in E$ .  $\tau_x(\lambda f_1 + \mu f_2)$  est l'application  $t \mapsto (\lambda f_1 + \mu f_2)(x - t)$ , c'est-à-dire l'application  $t \mapsto \lambda f_1(x - t) + \mu f_2(x - t)$  i.e. l'application  $\lambda \tau_x(f_1) + \mu \tau_x(f_2)$ . Ainsi  $\tau_x$  est linéaire.

De plus,  $\tau_x(e_1) = e_1$ . De plus, pour  $x, t \in \mathbb{R}$  :

$$\cos(2\pi(x - t)) = \cos(2\pi x) \cos(2\pi t) + \sin(2\pi x) \sin(2\pi t)$$

$$\sin(2\pi(x - t)) = \sin(2\pi x) \cos(2\pi t) - \cos(2\pi x) \sin(2\pi t)$$

Autrement dit,  $\tau_x(e_2) = \cos(2\pi x)e_2 + \sin(2\pi x)e_3$  et  $\tau_x(e_3) = \sin(2\pi x)e_2 - \cos(2\pi x)e_3$ . Donc  $\tau_x(e_1), \tau_x(e_2)$  et  $\tau_x(e_3)$  appartiennent à  $\text{vect}(e_1, e_2, e_3) = E$ . Comme  $(e_1, e_2, e_3)$  est une famille génératrice de  $E$ , on en déduit que  $\tau_x(f) \in E$  pour tout  $f \in E$ . Ainsi  $f$  est bien un endomorphisme de  $E$ .

b. Les calculs précédents montrent que la matrice de  $\tau_x$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  est  $M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi x) & \sin(2\pi x) \\ 0 & \sin(2\pi x) & -\cos(2\pi x) \end{pmatrix}$ .

c. On vérifie sans peine que  $M_x$  est orthogonale. Comme  $M_x$  est la matrice de  $\tau_x$  dans une base orthonormale, on en déduit que  $\tau_x$  est un automorphisme orthogonal.

d. On a  $\det M = -1$  donc  $\tau_x$  est une isométrie vectorielle indirecte. Comme  $\dim E = 3$ ,  $\tau_x$  est une réflexion ou une anti-rotation.

Cherchons les vecteurs invariants par  $\tau_x$ . On résout le système  $MX = X$  où  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned} MX = X &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 \cos(2\pi x) + x_3 \sin(2\pi x) = x_2 \\ x_2 \sin(2\pi x) - x_3 \cos(2\pi x) = x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2(\cos(2\pi x) - 1) + x_3 \sin(2\pi x) = 0 \\ x_2 \sin(2\pi x) - x_3(1 + \cos(2\pi x)) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_2 \sin^2(\pi x) + 2x_3 \sin(\pi x) \cos(\pi x) = 0 \\ 2x_2 \sin(\pi x) \cos(\pi x) - 2x_3 \cos^2(\pi x) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x_2 \sin(\pi x) - x_3 \cos(\pi x) = 0 \end{aligned}$$

Le sous-espace des vecteurs invariants par  $\tau_x$  est donc le plan  $P_x$  d'équation  $x_2 \sin(\pi x) - x_3 \cos(\pi x) = 0$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ .  $\tau_x$  est donc une réflexion. On peut également définir  $P_x$  par  $P_x = \text{vect}(e_1, \cos(\pi x)e_2 + \sin(\pi x)e_3)$ .

### Solution 36

Posons  $g(x) = f(x) - f(0_E)$  pour tout  $x \in E$ . En particulier,  $g(0_E) = 0 - E$ .

Montrons que  $g$  conserve la norme. Soit  $x \in E$ . Alors, d'après l'énoncé,

$$\|g(x)\| = \|f(x) - f(0_E)\| = \|x - 0_E\| = \|x\|$$

Montrons que  $g$  conserve le produit scalaire. Soit  $(x, y) \in E^2$ . Alors

$$\begin{aligned} \langle g(x), g(y) \rangle &= \frac{1}{2} (\|g(x)\|^2 + \|g(y)\|^2 - \|g(x) - g(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|f(x) - f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Montrons que  $g$  est linéaire. Soient  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et  $(x, y) \in E^2$ .

$$\begin{aligned} \|g(\lambda x + \mu y) - \lambda g(x) - \mu g(y)\|^2 &= \|g(\lambda x + \mu y)\|^2 + \lambda^2 \|g(x)\|^2 + \mu^2 \|g(y)\|^2 \\ &\quad - 2\lambda \langle g(\lambda x + \mu y), g(x) \rangle - 2\mu \langle g(\lambda x + \mu y), g(y) \rangle + 2\lambda\mu \langle g(x), g(y) \rangle \\ &= \|\lambda x + \mu y\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 + \mu^2 \|y\|^2 \\ &\quad - 2\lambda \langle \lambda x + \mu y, x \rangle - 2\mu \langle \lambda x + \mu y, y \rangle + 2\lambda\mu \langle x, y \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où  $g(\lambda x + \mu y) = \lambda g(x) + \mu g(y)$ .  $g$  est donc linéaire.

$g$  est linéaire et conserve le produit scalaire :  $c$  est un automorphisme orthogonal. Comme  $f = g + f(0_E)$ ,  $f$  est la composée de  $g$  par la translation de vecteur  $f(0_E)$ .

### Solution 37

Supposons que  $f$  est une symétrie orthogonale. Alors  $f$  est un automorphisme orthogonal et donc  $A$  est orthogonale i.e.  $A^T A = I_n$ . De plus,  $f$  est une symétrie donc  $A^2 = I_n$ . On en déduit que  $A^T = A$  et donc  $A$  est symétrique. Réciproquement, supposons  $A$  orthogonale et symétrique. Alors  $f$  est un automorphisme orthogonal. Or  $A^T A = I_n$  et  $A^T = A$  donc  $A^2 = I_n$  et  $f$  est une symétrie. Il est alors classique de montrer que  $f$  est une symétrie orthogonale.

## Matrices orthogonales

### Solution 38

Notons  $C_1, \dots, C_n$  les vecteurs colonnes de la matrice  $|A| = (|a_{i,j}|)_{1 \leq i,j \leq n}$  et  $U$  le vecteur colonne de taille  $n$  dont tous les coefficients valent 1. On a

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| = \sum_{i=1}^n \langle C_i | U \rangle \leq \sum_{i=1}^n \|C_i\| \cdot \|U\| = \sum_{i=1}^n 1 \times \sqrt{n} = n\sqrt{n},$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et puisque les vecteurs  $C_1, \dots, C_n$  sont unitaires (car  $A$  est orthogonale).

### Solution 39

Comme  $O$  est orthogonale,  $O^T O = I_n$ . On en déduit en particulier,

$$\begin{aligned} A^T A + C^T C &= I_p & A^T B + C^T D &= 0 \\ B^T B + D^T D &= I_q & B^T A + D^T C &= 0 \end{aligned}$$

- Si  $\det A = \det D = 0$ , alors on a bien l'inégalité demandée.
- Si  $\det D \neq 0$ , posons  $M = \left( \begin{array}{c|c} A^T & C^T \\ \hline \mathbf{0} & D^T \end{array} \right)$  et  $N = MO = \left( \begin{array}{c|c} I_p & \mathbf{0} \\ \hline D^T C & D^T D \end{array} \right)$ . Les matrices  $M$  et  $N$  étant triangulaires par blocs, on a  $\det M = \det(A^T) \det(D^T) = \det A \det D$  et  $\det N = \det I_p \det(D^T D) = (\det D)^2$ . De plus,  $\det N = \det(MO) = \det M \det O$ . On en déduit que  $(\det D)^2 = \det A \det D \det O$ . Puisque  $\det D \neq 0$ ,  $\det D = \det A \det O$  et donc  $(\det D)^2 = (\det A)^2 (\det O)^2$ . Or  $O$  est orthogonale donc  $\det O = \pm 1$  et  $(\det O)^2 = 1$ . On a bien l'égalité demandée.
- Si  $\det A \neq 0$ , posons  $M = \left( \begin{array}{c|c} A^T & \mathbf{0} \\ \hline B^T & D^T \end{array} \right)$  et  $N = MO = \left( \begin{array}{c|c} A^T A & A^T B \\ \hline \mathbf{0} & I_q \end{array} \right)$ . Les matrices  $M$  et  $N$  étant triangulaires par blocs, on a  $\det M = \det(A^T) \det(D^T) = \det A \det D$  et  $\det N = \det(A^T A) \det I_q = (\det A)^2$ . De plus,  $\det N = \det(MO) = \det M \det O$ . On en déduit que  $(\det A)^2 = \det A \det D \det O$ . Puisque  $\det A \neq 0$ ,  $\det A = \det D \det O$  et donc  $(\det A)^2 = (\det D)^2 (\det O)^2$ . On conclut comme précédemment en remarquant que  $(\det O)^2 = 1$ .

### Solution 40

On a  $B = P^{-1}AP$  où  $P$  est une matrice de passage entre deux bases orthonormales.  $P$  est donc une matrice orthogonale. On a donc  $P^{-1} = P^T$  puis  $B = P^T A P$ . Ainsi

$$\text{tr}(B^T B) = \text{tr}(P^T A^T P P^T A P) = \text{tr}(P^T A^T A P) = \text{tr}((P^T A^T A)P) = \text{tr}(P(P^T A^T A)) = \text{tr}(A^T A)$$

### Solution 41

- Notons  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ . Alors  $X^T X$  est une matrice carrée réelle de taille 1 i.e. un réel et  $X^T X = \sum_{k=1}^n x_k^2$ . Ainsi  $X^T X \geq 0$  puisque les  $x_k$  sont des réels et  $X^T X = 0$  implique  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = 0$  i.e.  $X = 0$ .

2. Soit  $X \in \text{Ker}(I_n + M)$ . On a donc  $(I_n + M)X = 0$  i.e.  $MX = -X$ . Ainsi  $X^T M X = -X^T X$ . Mais en transposant l'égalité  $MX = -X$ , on obtient  $X^T M^T = -X^T$  et donc  $X^T M = X^T$  puisque  $M^T = -M$ . Ainsi  $X^T M X = X^T X$ . Par conséquent,  $X^T X = -X^T X$  et donc  $X^T X = 0$ . D'après la question précédente,  $X = 0$ . D'où  $\text{Ker}(I_n + M) = \{0\}$  et  $I_n + M$  est inversible.
3. On a  $A^T A = ((I_n + M)^{-1})^T (I_n - M)^T (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$ . Or

$$((I_n + M)^{-1})^T = ((I_n + M)^T)^{-1} = (I_n - M)^{-1} \quad \text{et} \quad (I_n - M)^T = I_n + M$$

Ainsi  $A^T A = (I_n - M)^{-1} (I_n + M) (I_n - M) (I_n + M)^{-1}$ . Or  $I_n - M$  et  $I_n + M$  commutent donc

$$A^T A = (I_n - M)^{-1} (I_n - M) (I_n + M) (I_n + M)^{-1} = I_n$$

Ainsi  $A$  est orthogonale.

## Solution 42

Supposons  $A = 0$ . Alors il est clair que  $A = \text{com}(A) = 0$ .

Supposons  $A \in \text{SO}(n)$ . On sait que  $\text{com}(A)A^T = \det(A)I_n$ . Puisque  $A \in \text{SO}(n)$ ,  $\det(A) = 1$  et  $A^T = A^{-1}$ . Il s'ensuit que  $\text{com}(A) = A$ .

Supposons maintenant  $A = \text{com}(A)$ . Puisque  $\text{com}(A)^T A = \det(A)I_n$ ,  $A^T A = \det(A)I_n$ .

- Si  $\det(A) = 0$ ,  $A^T A = 0$  et, a fortiori,  $\text{tr}(A^T A) = 0$  et donc  $A = 0$  puisque  $(M, N) \mapsto \text{tr}(M^T N)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- Si  $\det(A) \neq 0$ , alors  $\text{tr}(A^T A) = \text{tr}(\det(A)I_n) = n \det(A)$ . En particulier,  $\det(A) > 0$  à nouveau car  $(M, N) \mapsto \text{tr}(M^T N)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Par ailleurs,  $\det(A^T A) = \det(\det(A)I_n)$  ou encore  $\det(A)^2 = \det(A)^n$ . Puisque  $n \neq 2$  et  $\det(A) > 0$ ,  $\det(A) = 1$ . Ainsi  $A^T A = I_n$  et  $A \in \text{SO}(n)$ .

## Familles de vecteurs

### Solution 43

1. • Supposons que la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  soit liée. Il existe donc  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$  non tous nuls tels que  $\sum_{j=1}^p \lambda_j x_j = 0_E$ . On a alors pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j (x_i | x_j) = 0$$

Si on note  $(C_1, \dots, C_p)$  les colonnes de la matrice  $G_p(x_1, \dots, x_p)$ , on a donc  $\sum_{j=1}^p \lambda_j C_j = 0$ . Les colonnes de la matrice  $G_p(x_1, \dots, x_p)$  sont liées donc  $\det G_p(x_1, \dots, x_p) = 0$ .

- Réciproquement, supposons que  $\det G = 0$ . Alors les colonnes  $C_1, \dots, C_p$  de  $G$  sont liées. Il existe donc  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$  non tous nuls tels que  $\sum_{j=1}^p \lambda_j C_j = 0$ . On en déduit comme précédemment que pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  :

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j (x_i | x_j) = 0$$

Posons  $z = \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j$ . L'égalité précédente signifie que  $(z | x_i) = 0$  pour  $1 \leq i \leq p$ . Par linéarité, on a donc  $(z | \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i) = 0$  i.e.  $\|z\|^2 = 0$ . Donc  $z = 0$ , ce qui signifie que  $(x_1, \dots, x_p)$  est liée.

2. a. Pour  $1 \leq j \leq p$ ,  $x_j = \sum_{i=1}^n (x_j | e_i) e_i$  puisque  $\mathcal{B}$  est orthonormée. Donc  $A = ((x_j | e_i))_{1 \leq i, j \leq p}$ . De plus,

$$(x_i | x_j) = \sum_{k=1}^n (x_i | e_k) (x_j | e_k)$$

Ceci signifie que  $G_p(x_1, \dots, x_p) = A^T A$ .

- b. On a  $\det G_p(x_1, \dots, x_p) = \det(A^T) \det(A) = (\det A)^2$ . Comme  $x_1, \dots, x_p$  est libre, c'est une base de  $F$  et donc  $\det A \neq 0$ . Ainsi  $\det G_p(x_1, \dots, x_p) > 0$ .

3. a. • Si  $x \in F$ , les deux déterminants sont nuls.  
 • Si  $x \notin F$ , notons  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $\text{vect}(x, x_1, \dots, x_p)$  et posons comme précédemment  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(x, x_1, \dots, x_p)$ . On a alors également  $G_{p+1}(x, x_1, \dots, x_p) = A^T A$ . Notons également  $A' = \text{mat}_{\mathcal{B}}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p)$  de sorte que  $G_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p) = (A')^T A'$ .  
 Comme  $\pi(x) \in F$  et que  $(x_1, \dots, x_p)$  est une base de  $F$ , il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$  tel que  $\pi(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ . Notons  $C, C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $A$  : la matrice  $A'$  s'obtient à partir de  $A$  en effectuant l'opération de pivot  $C \leftarrow C - \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i$ . On en déduit que  $\det(A') = \det(A)$  puis que  $\det G_{p+1}(x, x_1, \dots, x_p) = \det G_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p)$ .
- b. Comme  $x - \pi(x) \in F^\perp$ , on a  $x - \pi(x) \perp x_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . On en déduit que

$$G_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p) = \left( \begin{array}{c|ccc} \|x - \pi(x)\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & G_p(x_1, \dots, x_p) \end{array} \right)$$

On a donc  $\det G_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p) = \|x - \pi(x)\|^2 \det G_p(x_1, \dots, x_p)$ . On conclut en remarquant que  $d(x, F)^2 = \|x - \pi(x)\|^2$ .

#### Solution 44

1. On a  $u + v = 0$ . Donc  $\|u\|^2 = -\langle u, v \rangle = -\sum_{(i,j) \in I \times J} \alpha_i \alpha_j \langle x_i, x_j \rangle$ . Or pour  $(i, j) \in I \times J$ ,  $\alpha_i \alpha_j \langle x_i, x_j \rangle > 0$ . Ainsi si  $I$  et  $J$  sont non vides,  $\|u\|^2 < 0$ , ce qui est absurde.
2. Supposons que  $I$  soit non vide. Alors  $J$  est vide. On a donc  $v = 0$  puis  $u = 0$ . Donc  $\langle u, x_p \rangle = 0$ . Or  $\langle u, x_p \rangle = \sum_{i \in I} \alpha_i \langle x_i, x_p \rangle$ . Mais pour  $i \in J$ ,  $\alpha_i \langle x_i, x_p \rangle < 0$ . Comme  $I$  est non vide,  $\langle u, x_p \rangle < 0$ . Il y a donc contradiction. Ainsi  $I$  est vide. On démontre de même que  $J$  est vide.
3. Comme  $I$  et  $J$  sont vides,  $\alpha_i = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ . Ceci signifie que la famille  $(x_1, \dots, x_{p-1})$  est libre.

#### Solution 45

1. On a  $A = (\langle x_j, e_i \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ . De plus, comme  $\mathcal{B}$  est orthonormée, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$  :

$$\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_i, e_k \rangle \langle x_j, e_k \rangle$$

Ceci signifie que  $G(x_1, \dots, x_p) = A^T A$ .

2. Si  $(x_1, \dots, x_p)$  est liée, alors  $\text{rg } A < p$ . Par conséquent,  $\text{rg } G(x_1, \dots, x_p) = \text{rg}(A^T A) \leq \text{rg } A < p$ . Ceci signifie que  $G(x_1, \dots, x_p)$  est non inversible. Donc  $\det G(x_1, \dots, x_p) = 0$ .  
 Si  $(x_1, \dots, x_p)$  est libre, alors  $A$  est une matrice carrée inversible. Donc  $\det(A) \neq 0$ . Par conséquent,  $\det G(x_1, \dots, x_p) = \det(A^T A) = \det(A)^2 > 0$ .
3. On pose  $x = y + z$  avec  $y \in F$  et  $z \in F^\perp$ . On a alors :

$$\det G(x_1, \dots, x_p, x) = \det G(x_1, \dots, x_p, y) + \det G(x_1, \dots, x_p, z)$$

Comme  $y \in F$ , la famille  $(x_1, \dots, x_p, y)$  est liée et  $\det G(x_1, \dots, x_p, y) = 0$ . De plus,  $\det G(x_1, \dots, x_p, z) = \|z\|^2 \det G(x_1, \dots, x_p)$ , le déterminant étant diagonal par blocs. On conclut en remarquant que  $d(x, F)^2 = \|z\|^2$ .

#### Solution 46

1. La symétrie de  $\varphi$  est évidente. La bilinéarité de  $\varphi$  provient de la linéarité de l'intégrale. Pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $\int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt \geq 0$  donc  $\varphi$  est positive. Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt = 0$ . Comme  $P^2$  est continue positive sur  $[-1, 1]$ , on en déduit que  $P^2$  est nulle sur  $[-1, 1]$ . Le polynôme  $P^2$  admet donc une infinité de racines : il est donc nul. Par conséquent,  $P$  est également nul. Ceci prouve que  $\varphi$  est définie.  
 $\varphi$  est donc un produit scalaire.
2. 1 et  $-1$  sont des racines de multiplicité  $n$  de  $Q_n$ . On en déduit que  $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$  pour  $k < n$ .
3. Soit  $k, l \in \llbracket 0, n \rrbracket$  avec  $k \neq l$ . On peut supposer  $k < l$ .  
Supposons  $l \geq 1$  pour se donner une idée de la marche à suivre. On utilise une intégration par parties :

$$\langle P_k, P_l \rangle = \int_{-1}^1 Q_k^{(k)}(t)Q_l^{(l)}(t) dt = \left[ Q_k^{(k)}(t)Q_l^{(l-1)}(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 Q_k^{(k+1)}(t)Q_l^{(l-1)}(t) dt$$

Or  $l-1 < l$  donc  $Q_l^{(l-1)}(-1) = Q_l^{(l-1)}(1) = 0$  d'après la question précédente. Ainsi  $\langle Q_k^{(k)}, Q_l^{(l)} \rangle = -\langle Q_k^{(k+1)}, Q_l^{(l-1)} \rangle$ .

On peut donc prouver à l'aide d'une récurrence finie que  $\langle Q_k^{(k)}, Q_l^{(l)} \rangle = (-1)^l \langle Q_k^{(k+l)}, Q_l \rangle$ . Or  $k < l$  donc  $k+l > 2k$ . Puisque  $\deg Q_k = 2k$ ,  $Q_k^{(k+l)} = 0$ . On a donc  $\langle P_k, P_l \rangle = 0$ .

Les  $P_k$  sont donc orthogonaux deux à deux. La famille  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est donc orthogonale. De plus,  $\deg Q_k = 2k$  donc  $\deg P_k = \deg Q_k^{(k)} = k$ . La famille  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une famille de polynômes à degrés étagés : elle est donc libre. Comme elle comporte  $n+1$  éléments et que  $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ , c'est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

## Endomorphismes remarquables

### Solution 47

1. Soient  $x, y, z \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \langle z, u(\lambda x + \mu y) \rangle &= -\langle u(z), \lambda x + \mu y \rangle && \text{par antisymétrie} \\ &= -\lambda \langle u(z), x \rangle - \mu \langle u(z), y \rangle && \text{par bilinéarité du produit scalaire} \\ &= \lambda \langle z, u(x) \rangle + \mu \langle z, u(y) \rangle && \text{par antisymétrie} \end{aligned}$$

On a donc  $\langle z, u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu u(y) \rangle = 0$  pour tout  $z \in E$ . Comme  $E^\perp = \{0_E\}$ ,  $u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu u(y) = 0_E$ . D'où la linéarité de  $u$ .

2. (i)  $\Rightarrow$  (ii) Soient  $x, y \in E$ . Alors  $\langle u(x+y), x+y \rangle = 0$ . Or, par linéarité de  $u$  et bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle u(x+y), x+y \rangle = \langle u(x), x \rangle + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle + \langle u(y), y \rangle = \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle$$

D'où l'antisymétrie de  $u$ .

- (ii)  $\Rightarrow$  (iii) On a vu dans la question précédente que  $u$  était linéaire. Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  et  $A$  la matrice de  $u$  dans cette base. Comme  $\mathcal{B}$  est orthonormée,  $u(e_j) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_j), e_i \rangle e_i$  pour  $1 \leq j \leq n$ . On en déduit que  $a_{ij} = \langle u(e_j), e_i \rangle$  pour  $1 \leq i, j \leq n$ . Or, par antisymétrie de  $u$ ,  $\langle u(e_j), e_i \rangle = -\langle u(e_i), e_j \rangle$  i.e.  $a_{ij} = -a_{ji}$  pour  $1 \leq i, j \leq n$ . On en déduit que  $A$  est antisymétrique.

- (iii)  $\Rightarrow$  (i)  $u$  est bien linéaire par hypothèse. Soient  $\mathcal{B}$  une base orthonormale de  $E$  et  $A$  la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$ . Soit  $x \in E$  et  $X$  la matrice colonne de  $x$  dans  $\mathcal{B}$ . Alors

$$\langle u(x), x \rangle = (MX)^\top X = -X^\top MX = -\langle x, u(x) \rangle$$

On en déduit que  $\langle u(x), x \rangle = 0$ .



3. Fixons une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  et considérons  $\Phi$  l'isomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui à un endomorphisme de  $E$  associe sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$ . D'après la question précédente,  $\Phi(A(E)) = A_n(\mathbb{R})$  où  $A_n(\mathbb{R})$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  constitué des matrices antisymétriques. On a donc également  $A(E) = \Phi^{-1}(A_n(\mathbb{R}))$  donc  $A(E)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  comme image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire et  $\dim A(E) = \dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$  car  $\Phi$  est un isomorphisme.
4. Soient  $x \in \text{Ker } u$  et  $y \in \text{Im } u$ . Il existe  $z \in E$  tel que  $y = u(z)$ .

$$\langle x, y \rangle = \langle x, u(z) \rangle = -\langle z, u(x) \rangle = -\langle z, 0_E \rangle = 0$$

Ainsi  $\text{Im } u \subset (\text{Ker } u)^\perp$ . D'après le théorème du rang  $\dim \text{Im } u = n - \dim \text{Ker } u = \dim(\text{Ker } u)^\perp$ . Ainsi  $\text{Im } u = (\text{Ker } u)^\perp$ .

5. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel stable par  $u$ . Soient  $x \in F^\perp$ . Alors, pour tout  $y \in F$ ,  $\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle = 0$  car  $u(y) \in F$ . Ainsi  $u(x) \in F^\perp$ , ce qui prouve que  $u(F^\perp) \subset F^\perp$ .

#### Solution 48

Soit  $\mathcal{B}'$  une base orthonormale adaptée à la décomposition en somme directe  $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ . La matrice  $A'$  de  $p$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est diagonale (les éléments diagonaux valent 1 ou 0). Notons  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$ . On a  $A = PA'P^{-1}$ . Or  $P$  est orthogonale donc  $P^{-1} = P^T$ . Ainsi  $A = PA'P^T$  est symétrique.

#### Solution 49

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  antisymétrique. Si  $A$  est nulle,  $\text{rg } A = 0$  et donc le rang de  $A$  est pair.

Sinon, notons  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associée à  $A$ . On munit  $\mathbb{R}^n$  de son produit scalaire canonique et on se donne une base orthonormale  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$  adaptée à la décomposition en somme directe  $\mathbb{R}^n = S \oplus \text{Ker } u$  où  $S$  est un supplémentaire de  $\text{Ker } u$ . La matrice de

$u$  dans cette base  $\mathcal{B}$  est de la forme  $A' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$  avec  $B$  carrée de taille  $p = \dim S$ . Si on note  $P$  la matrice de passage de la base canonique

vers la base  $\mathcal{B}$ ,  $P$  est orthogonale et  $A' = P^{-1}BP = P^TAP$ . On en déduit que  $A'$  est également antisymétrique et donc  $B$  est antisymétrique et

$C$  est nulle. On a donc  $A' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On a  $\text{rg } A' = \text{rg } B$  mais comme  $S$  est un supplémentaire de  $\text{Ker } u$ ,  $\text{rg } A' = \dim S = p$ , ce qui prouve que  $B$  est inversible. Or  $\det(B^T) = \det(-B) = (-1)^p \det B$  donc  $p$  est pair sinon on aurait  $\det B = 0$  et  $B$  non inversible.

#### Solution 50

D'après le cours sur les espaces euclidiens et le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(u)^\perp) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\text{Im}(u)),$$

il suffit donc de prouver que

$$\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)^\perp.$$

Soit  $y \in \text{Im}(u)$ . Il existe  $x \in E$  tel que  $y = u(x)$ . Soit  $x' \in \text{Ker}(u)$ . On a :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u(x+x') | x+x' \rangle = \langle u(x) | x' \rangle + \langle x | u(x') \rangle \\ &= \langle u(x) | x' \rangle + 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\langle y | x' \rangle = 0.$$

On a donc prouvé que  $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)^\perp$ .

#### Solution 51

1. L'application  $f$  est clairement un endomorphisme par linéarité à droite du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soient  $x$  et  $y$  dans  $E$ . On a

$$\begin{aligned} \langle f(x), y \rangle &= \langle \langle a, x \rangle b + \langle b, x \rangle a, y \rangle \\ &= \langle a, x \rangle \langle b, y \rangle + \langle b, x \rangle \langle a, y \rangle \end{aligned}$$

Comme cette expression est symétrique en  $(x, y)$ , on a

$$\langle f(x), y \rangle = \langle f(y), x \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

par symétrie du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

2. Pour tout  $x \in E$ , on a  $x \in \text{Ker}(f)$  si et seulement si

$$\langle a, x \rangle b + \langle b, x \rangle a = 0.$$

Comme  $(a, b)$  est libre, cela équivaut à

$$\langle a, x \rangle = \langle b, x \rangle = 0,$$

ie  $x \in \text{vect}(a, b)^\perp$ . Ainsi

$$\text{Ker}(f) = \text{vect}(a, b)^\perp$$

et, d'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned} \text{rg}(f) &= n - \dim(\text{Ker}(f)) = n - \dim(\text{vect}(a, b)^\perp) \\ &= n - (n - \dim(\text{vect}(a, b))) = \dim(\text{vect}(a, b)) \\ &= 2 \end{aligned}$$

car  $(a, b)$  est libre.

3. On pose  $F = \text{Im}(f)$ .

a.  $F$  est un sev de  $E$  en tant que noyau d'un endomorphisme de  $E$ .

- $F$  est stable par  $f$  : soit  $y \in \text{Im}(f)$ ; on a alors  $f(y) \in \text{Im}(f) = F$ . Ainsi  $F$  est stable par  $f$ .
- Base de  $F$  : on a clairement

$$F = \text{Im}(f) \subset \text{vect}(a, b).$$

Comme  $\dim(F) = 2$  (d'après la question 2.), on a nécessairement

$$F = \text{Im}(f) = \text{vect}(a, b).$$

Ainsi  $(a, b)$  est une base de  $F$  car cette famille est libre.

b. Notons  $\mathcal{B} = (a, b)$  et  $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ . Comme

$$\begin{cases} f(a) = \|a\|^2 b + \langle a, b \rangle a \\ f(b) = \|b\|^2 a + \langle a, b \rangle b \end{cases},$$

on a

$$M = \begin{pmatrix} \langle a, b \rangle & \|b\|^2 \\ \|a\|^2 & \langle a, b \rangle \end{pmatrix}.$$

## Solution 52

- Soit

$$x \in \text{Ker}(u - id_E) \cap \text{Im}(u - id_E).$$

On a alors  $u(x) = x$  et il existe  $y \in E$  tel que  $x = u(y) - y$ . Par une récurrence sans difficulté, on établit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad nx = u^n(y) - y.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x = \frac{u^n(y) - y}{n}$$

et donc, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|x\| \leq \frac{\|u^n(y)\| + \|y\|}{n}.$$

Par une récurrence immédiate, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u^n(y)\| \leq \|y\|$$

et ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \|x\| \leq \frac{2\|y\|}{n}.$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient par le théorème d'encadrement,  $\|x\| = 0$ , ie  $x = 0$ . Ainsi

$$\text{Ker}(u - id_E) \cap \text{Im}(u - id_E) = \{0\}.$$

- Comme  $\text{Ker}(u - id_E) \oplus \text{Im}(u - id_E)$ , on déduit du théorème du rang que

$$\dim(\text{Ker}(u - id_E) \oplus \text{Im}(u - id_E)) = \dim(E)$$

et donc que

$$E = \text{Ker}(u - id_E) \oplus \text{Im}(u - id_E)$$

car  $\text{Ker}(u - id_E) \oplus \text{Im}(u - id_E) \subset E$ .

## Divers

### Solution 53

1. La bilinéarité vient de la linéarité de la trace. De plus, pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{tr}(M^T) = \text{tr}(M)$ . Par conséquent,  $\text{tr}(A^T B) = \text{tr}(B^T A)$ , d'où la symétrie. De plus,

$$\text{tr}(A^T B) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} b_{ij}$$

et en particulier

$$\text{tr}(A^T A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 \geq 0$$

Cette dernière somme ne s'annulant que si tous les  $a_{ij}$  sont nuls i.e.  $A = 0$ . L'application est donc définie positive. On vérifie sans difficulté que la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est orthonormée.

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\text{tr}(A)| = |\text{tr}(I_n A)| \leq \|I_n\| \|A\|$$

On vérifie facilement que  $\|I_n\| = \sqrt{n}$ .

3. a. Soient  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

$$(A|S) = \text{tr}(A^T S) = -\text{tr}(AS)$$

$$(S|A) = \text{tr}(S^T A) = \text{tr}(SA)$$

Or  $\text{tr}(SA) = \text{tr}(AS)$  donc  $(A|S) = 0$ . Les sous-espaces vectoriels  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  sont donc orthogonaux. On sait également que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On en déduit donc que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  est l'orthogonal de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

- b.  $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|A - p(A)\|$  où  $p$  désigne la projection orthogonale sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire la projection sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  parallèlement à  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ . On trouve facilement que  $p(A) = \frac{A^T + A}{2}$ . Ainsi

$$\|A - p(A)\| = \frac{1}{2} \|A - A^T\| = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij} - a_{ji})^2}$$

en utilisant la formule donnant le carré de la norme vue à la première question.

4. Comme  $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ,  $U^T U = U U^T = I_n$ .

$$\|UA\|^2 = \text{tr}((UA)^T UA) = \text{tr}(A^T U^T UA) = \text{tr}(A^T A) = \|A\|^2$$

$$\|AU\|^2 = \text{tr}((AU)^T AU) = \text{tr}(U^T A^T AU) = \text{tr}(A^T A U U^T) = \text{tr}(A^T A) = \|A\|^2$$

5. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 &= \text{tr}(B^T A^T AB) = \text{tr}(A^T A B B^T) = \text{tr}((A^T A)^T B B^T) \\ &= (A^T A | B B^T) \leq \|A^T A\| \|B B^T\| = \|A^T A\| \|B^T B\| \end{aligned}$$

car  $\|B B^T\|^2 = \text{tr}(B B^T B B^T) = \text{tr}(B^T B B^T B) = \|B^T B\|^2$ . En utilisant la formule donnant le carré de la norme vue à la première question, on a :

$$\|A^T A\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left( \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} \right)^2$$

Or pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a d'après Cauchy-Schwarz dans  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} \leq \sqrt{S_i} \sqrt{S_j}$$

avec  $S_i = \sum_{k=1}^n a_{ki}^2$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Ainsi

$$\|A^T A\|^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} S_i S_j = \left( \sum_{i=1}^n S_i \right) \left( \sum_{j=1}^n S_j \right) = \left( \sum_{l=1}^n S_l \right)^2$$

Par conséquent,

$$\|A^T A\| \leq \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{kl}^2 = \|A\|^2$$

On a donc également  $\|B^T B\| \leq \|B\|^2$ , ce qui nous donne finalement l'inégalité demandée.

### Solution 54

Pour simplifier, on peut supposer  $u_1, \dots, u_{n+1}$  unitaires de sorte que pour  $i, j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$  distincts,  $(u_i | u_j) = \cos \alpha_n$ .

#### Première méthode

Notons  $u'_1, \dots, u'_n$  les projections orthogonales de  $u_1, \dots, u_n$  sur  $\text{vect}(u_{n+1})^\perp$ . Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$   $u'_i = u_i - (\cos \alpha_n) u_{n+1}$  et par le théorème de Pythagore,  $\|u'_i\|^2 = \|u_i\|^2 - (\cos^2 \alpha_n) \|u_{n+1}\|^2 = 1 - \cos^2 \alpha_n$ . Pour  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  distincts

$$(u'_i | u'_j) = (u_i | u_j) - \cos \alpha_n ((u_i | u_{n+1}) + (u_j | u_{n+1})) + \cos^2 \alpha_n \|u_{n+1}\|^2 = \cos \alpha_n - \cos^2 \alpha_n$$

Par conséquent,

$$\frac{(u'_i | u'_j)}{\|u'_i\| \|u'_j\|} = \frac{\cos \alpha_n - \cos^2 \alpha_n}{1 - \cos^2 \alpha_n} = \frac{\cos \alpha_n}{1 + \cos \alpha_n}$$

Les vecteurs  $u'_1, \dots, u'_n$  font donc un angle constant  $\alpha_{n-1}$  deux à deux. De plus,  $\cos \alpha_{n-1} = \frac{\cos \alpha_n}{1 + \cos \alpha_n}$  i.e.  $\cos \alpha_n = \frac{\cos \alpha_{n-1}}{1 - \cos \alpha_{n-1}}$ .

L'énoncé n'a de sens que pour  $n \geq 2$ . On trouve aisément  $\alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$ . Posons  $z_n = \frac{1}{\cos \alpha_n}$ . La suite  $(z_n)$  vérifie la relation de récurrence  $z_n = z_{n-1} - 1$ . Puisque  $z_2 = -2$ , on trouve  $z_n = -n$  pour tout  $n \geq 2$ . Ainsi  $\alpha_n = \arccos\left(-\frac{1}{n}\right)$ .

#### Deuxième méthode

Puisque  $\dim E = n$ , les  $n+1$  vecteurs  $u_1, \dots, u_{n+1}$  forment une famille liée. Il existe donc  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  tel que  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i = 0_E$ . Fixons  $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ . On a donc

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (u_i | u_j) = (0_E | u_j) = 0$$

ou encore

$$\lambda_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i \cos \alpha_n = 0$$

Posons  $\Lambda = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$ . L'égalité précédente s'écrit encore

$$\lambda_j + (\Lambda - \lambda_j) \cos \alpha_n = 0$$

ce qui équivaut à

$$\lambda_j (1 - \cos \alpha_n) + \Lambda \cos \alpha_n = 0$$

En sommant ces égalités pour  $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ , on obtient

$$\Lambda(1 - \cos \alpha_n) + (n+1)\Lambda \cos \alpha_n = 0$$

ou encore

$$\Lambda(1 + n \cos \alpha_n) = 0$$

Par ailleurs, il existe  $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$  tel que  $\lambda_j \neq 0$  et on rappelle que  $\lambda_j (1 - \cos \alpha_n) + \Lambda \cos \alpha_n = 0$ . Si on avait  $\Lambda = 0$ , on aurait donc  $\cos \alpha_n = 1$ , ce qui est exclu par l'énoncé. Ainsi  $\Lambda \neq 0$ , ce qui permet d'affirmer que  $\cos \alpha_n = -\frac{1}{n}$ . On cherche implicitement un angle  $\alpha_n$  non orienté donc  $\alpha_n = \arccos\left(-\frac{1}{n}\right)$ .

**Solution 55**

Soit  $X \in \text{Ker } A$ . On a donc  $AX = 0$  puis  $A^T AX = 0$  donc  $X \in \text{Ker } A^T A$ . Ainsi  $\text{Ker } A \subset \text{Ker } A^T A$ .

Soit maintenant  $X \in \text{Ker } A^T A$ . On a donc  $A^T AX = 0$  puis  $X^T A^T AX = 0$ . Notons  $Y = AX$ . Ainsi  $Y^T Y = 0$ . Or  $Y^T Y$  est la somme des carrés des composantes de  $Y$  donc  $Y = 0$  i.e.  $AX = 0$ . D'où  $X \in \text{Ker } A$ . Ainsi  $\text{Ker } A^T A \subset \text{Ker } A$ .

Finalement,  $\text{Ker } A = \text{Ker } A^T A$  et  $\text{rg } A = \text{rg } A^T A$  via le théorème du rang. En changeant  $A$  en  $A^T$ , on a également  $\text{rg } A^T = \text{rg } AA^T$ . Or  $\text{rg } A = \text{rg } A^T$ . Ainsi  $\text{rg } A^T A = \text{rg } AA^T = \text{rg } A$ .

**Solution 56**

1. Évident.

2. On va montrer que  $F$  admet pour supplémentaire la droite vectorielle  $\mathbb{R}_0[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Soit  $P \in \mathbb{R}_0[X] \cap F$ . Alors il existe  $(\lambda_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N}^*)}$  tel que  $P = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (1 + X^n)$ . On a donc

$$P = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n X^n$$

Mais comme  $\deg P \leq 0$ ,  $\lambda_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et donc  $P = 0$ . Ainsi  $F$  et  $\mathbb{R}_0[X]$  sont en somme directe.

3. Soit  $P \in F^\perp$ . Posons  $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$  avec  $(a_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ . Puisque  $\langle P, 1 + X^n \rangle = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $a_0 + a_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Mais comme la suite  $(a_n)$  est nulle à partir d'un certain rang, on en déduit que  $a_0 = 0$  puis que  $a_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ainsi  $P = 0$  puis  $F^\perp = \{0\}$ .

En particulier,  $F \oplus F^\perp = F \neq \mathbb{R}[X]$  puisque  $F$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}[X]$ .