Devoir à la maison n°11

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 Si s_1 et s_2 sont les racines de $a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$, on a : $a\mathrm{X}^2 + bx + c = a(\mathrm{X} - s_1)(\mathrm{X} - s_2)$ donc

$$\boxed{\sigma_1 = s_1 + s_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad \sigma_2 = s_1 s_2 = \frac{c}{a}}$$

2 On note (C) l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence.

- Si r_1 et r_2 sont deux solutions réelles distinctes de (C), alors

$$\boxed{\exists(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathrm{A}r_1^n + \mathrm{B}r_2^n}$$

- Si r est solution double de (C), alors

$$\boxed{\exists(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\mathrm{A}n + \mathrm{B})r^n}$$

- Si (C) possède deux racines r_1 et r_2 non réelles conjuguées, on note ces racines $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]0, \pi[$. Alors

$$\boxed{\exists(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\mathrm{A}\cos(n\theta) + \mathrm{B}\sin(n\theta))r^n}$$

3 La suite $\boxed{\left(\frac{1}{\operatorname{ch} n}\right)_{n\in\mathbb{N}}}$ est une suite de réels indexée par $\mathbb{Z}$ telle que les sous-suites $\left(\frac{1}{\operatorname{ch} n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(-n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Par ailleurs ce n'est pas une suite constante. On a bien trouvé une suite non constante élément de $\mathcal{C}$.

4
- La suite nulle est évidemment dans E
- Soit $(x, y) \in \mathcal{C}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On pose $z = \lambda x + \mu y$.
  Comme les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Comme les suites $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(z_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi $z \in \mathcal{C}$.

$\boxed{\mathcal{C} \text{ est un sous-espace vectoriel de E}}$

5 Soit $x \in \mathcal{C}$.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \le \mathrm{A}$.
De même, la suite $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $\mathrm{B} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_{-n}| \le \mathrm{B}$.
On pose alors $\mathrm{C} = \max(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ et on a : $\forall n \in \mathbb{Z},\ |x_n| \le \mathrm{C}$: la suite x est bornée.
Ainsi $\boxed{\text{toute suite dans } \mathcal{C} \text{ est bornée}}$

6 **Linéarité.** Soient $(x, y) \in \mathcal{C}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{T}(\lambda x + \mu y)_n &= (\lambda x + \mu y)_{n-1} + (\lambda x + \mu y)_{n+1}\\ &= \lambda x_{n-1} + \mu y_{n-1} + \lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1}\\ &= \lambda(x_{n-1} + x_{n+1}) + \mu(y_{n-1} + y_{n+1})\\ &= \lambda\mathrm{T}(x)_n + \mu\mathrm{T}(y)_n = (\lambda\mathrm{T}(x) + \mu\mathrm{T}(y))_n\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{T}(\lambda x + \mu y) = \lambda\mathrm{T}(x) + \mu\mathrm{T}(y)$.
Stabilité. Soient $x \in \mathcal{C}$ et $y = \mathrm{T}(x)$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{Z},\ y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$.

- La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la somme des suites $(x_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui convergent en tant que suites extraites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge de même que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- De la même manière, la suite $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la somme des suites $(x_{-n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(x_{-n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui convergent en tant que suites extraites de $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge de même que la suite $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Ainsi $y\in\mathcal{C}$.
Par conséquent, $\boxed{\mathrm{T} \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{C}.}$

7 Soit $x\in\mathcal{C}$. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $(\mathrm{S}\circ\mathrm{S}(x))_n = (\mathrm{S}(x))_{-n} = x_n$ donc $\mathrm{S}\circ\mathrm{S}(x) = x$ puis $\mathrm{S}^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$. S est donc une symétrie. On sait alors que $\mathcal{C} = \mathrm{Ker}(\mathrm{S}-\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{S}+\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$. De manière évidente, $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(\mathrm{S}-\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(\mathrm{S}+\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$. On en déduit que $\boxed{\mathrm{F}\oplus\mathrm{G} = \mathcal{C}}$.

8 Il découle de la question précédente que $\boxed{\text{S est la symétrie par rapport à F et parallélement à G.}}$

9 **9.a** Supposons que $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$. Soit alors $x\in\mathrm{Ker}\,(\mathrm{T}-\lambda\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$. On a alors

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ x_{n-1}+x_{n+1} = \lambda x_n$$

et en particulier

$$\forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+2}-\lambda x_{n+1}+x_n = 0$$

De même, en posant $y_n = x_{-n}$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ y_{n+2}-\lambda y_{n+1}+y_n = 0$$

L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence est (C) : $r^2-\lambda+1=0$ dont le discriminant est $\Delta = \lambda^2-4\neq 0$.

- Supposons $\Delta>0$. Alors (C) admet deux racines réelles *distinctes* de produit 1. L'une d'entre elles est donc de valeur absolue *strictement supérieure* à 1 : on la note r. De plus, il existe $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})\in\mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ x_n = \mathrm{A}r^n + \frac{\mathrm{B}}{r^n}$$

et

$$\forall n\in\mathbb{N},\ x_{-n} = y_n = \mathrm{C}r^n + \frac{\mathrm{D}}{r^n}$$

Comme $|r|>1$, (r^n) diverge et $\frac{1}{r^n}$ converge. Puisque (x_n) et (x_{-n}) convergent, on a donc $\mathrm{A}=\mathrm{C}=0$. Mais alors $x_0 = \mathrm{A}+\mathrm{B} = \mathrm{C}+\mathrm{D}$ donc $x_0 = \mathrm{B} = \mathrm{D}$. Enfin, $x_1+x_{-1} = \lambda x_0$ donc $\frac{\mathrm{B}}{r}+\frac{\mathrm{B}}{r} = \lambda\mathrm{B}$ i.e. $\left(\frac{2}{r}-\lambda\right)\mathrm{B} = 0$. Par ailleurs, $\frac{1}{r}$ est une racine de (C) donc $\frac{1}{r} = \frac{\lambda\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ i.e. $\frac{2}{r}-\lambda = \pm\sqrt{\Delta}\neq 0$. Par conséquent $\mathrm{B}=\mathrm{D}=0$ puis $x = 0_{\mathcal{C}}$. Ainsi $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{T}-\lambda\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}$.
- Supposons $\Delta<0$. Alors (C) admet deux racines complexes non réelles *distinctes* conjuguées et de produit 1 : elles sont donc toutes deux de module 1 et on peut les écrire $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ avec $\theta\in]0,\pi[$. De plus, il existe $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})\in\mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ x_n = \mathrm{A}\cos(n\theta)+\mathrm{B}\sin(n\theta)$$

et

$$\forall n\in\mathbb{N},\ x_{-n} = y_n = \mathrm{C}\cos(n\theta)+\mathrm{D}\sin(n\theta)$$

On sait alors qu'il existe $(\mathrm{R},\mathrm{S},\varphi,\psi)\in\mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ x_n = \mathrm{R}\cos(n\theta+\varphi)$$

et

$$\forall n\in\mathbb{N},\ x_{-n} = y_n = \mathrm{S}\cos(n\theta+\psi)$$

On montre classiquement que la suite de terme général $u_n = \cos(n\theta+\varphi)$ diverge. Supposons qu'elle converge : la suite de terme général $u_{n+1}-\cos(\theta)u_n = \sin(n\theta+\varphi)\sin\theta$ converge alors également. Mais comme $\sin\theta\neq 0$ ($\theta\in]0,\pi[$), la suite de terme général $\sin(n\theta+\varphi)$ converge. On en déduit que la suite de terme général $z_n = e^{i(n\theta+\varphi)} = \cos(n\theta+\varphi)+i\sin(n\theta+\varphi)$ converge. Mais (z_n) est une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$ donc sa convergence implique $e^{i\theta}=1$ i.e. $\theta\equiv 0[2\pi]$, ce qui est impossible car $\theta\in]0,\pi[$. Ainsi $(\cos(n\theta+\varphi))$ diverge. Comme (x_n) converge, ceci impose que $\mathrm{R}=0$. On montre de même que $\mathrm{S}=0$. Ainsi $x=0_{\mathcal{C}}$ et $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{T}-\lambda\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}$.

Finalement, si $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{2,-2\}$, $\boxed{\mathrm{Ker}\,(\mathrm{T}-\lambda\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}}$.

9.b On applique le résultat précédent avec $\lambda = 0$. On a $\mathrm{Ker}(\mathrm{T}) = \{0_{\mathcal{C}}\}$, donc par caractérisation de l'injectivité des applications linéaires, $\boxed{\text{T est injectif.}}$

9.c
- Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{T} - 2\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$. Alors
$$\forall n \in \mathbb{Z},\ x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 0$$
Comme l'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$ admet 1 pour racine double, il existe donc $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}) \in \mathbb{R}^4$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \mathrm{A}n + \mathrm{B}$$
et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{-n} = \mathrm{C}n + \mathrm{D}$$
Comme (x_n) et (x_{-n}) convergent, $\mathrm{A} = \mathrm{C} = 0$. De plus, $x_0 = \mathrm{B} = \mathrm{D}$. On en déduit que x est constante. Réciproquement, les suites constantes sont clairement dans $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{T} - 2\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$.
Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}\,(\mathrm{T} - 2\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) \text{ est l'ensemble des suites constantes}}$
- Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{T} + 2\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$. Alors
$$\forall n \in \mathbb{Z},\ x_{n+1} + 2x_n + x_{n-1} = 0$$
Comme l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ admet -1 pour racine double, il existe donc $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}) \in \mathbb{R}^4$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = (-1)^n(\mathrm{A}n + \mathrm{B})$$
et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{-n} = (-1)^n(\mathrm{C}n + \mathrm{D})$$
A nouveau, (x_n) et (x_{-n}) convergent donc $\mathrm{A} = \mathrm{C} = 0$ sinon $(|x_n|)$ et $(|x_{-n}|)$ divergent vers $+\infty$. Mais comme la suite de terme général $(-1)^n$ diverge, on obtient ensuite $\mathrm{B} = \mathrm{D} = 0$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}\,(\mathrm{T} + 2\,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}.}$

9.d Avec les 3 questions précédentes, on a établi que $\boxed{\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \{2\}}$.

10 10.a Soit $x \in \mathcal{C}$. On a alors
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n} \leq \frac{2\|x\|_\infty}{2^n} = \frac{\|x\|_\infty}{2^{n-1}}$$
Or la série $\sum \frac{\|x\|_\infty}{2^{n-1}}$ est une série géométrique convergente. Ainsi $\sum \frac{|x_n|+|x_{-n}|}{2^n}$ converge par comparaison : $\boxed{\mathrm{N}(x) \text{ est bien définie}}$.

10.b **Positivité** N est bien une application de $\mathcal{C}$ vers $\mathbb{R}^+$

Séparation Soit $x \in \mathcal{C}$ telle que $\mathrm{N}(x) = 0$. Alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n} = 0$$
Comme les termes de cette somme sont positifs, ils sont nuls :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| + |x_{-n}| = 0$$
Mais comme il s'agit à nouveau de termes positifs
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| = |x_{-n}| = 0$$
puis
$$\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = 0$$
Ainsi $x = 0_{\mathcal{C}}$.

Homogénéité Soit $x \in \mathcal{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$$\mathrm{N}(\lambda x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\lambda x_n| + |\lambda x_{-n}|}{2^n} = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n} = |\lambda|\mathrm{N}(x)$$

Inégalité triangulaire Soit $(x, y) \in \mathcal{C}^2$.
$$\begin{aligned}\mathrm{N}(x+y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n + y_n| + |x_{-n} + y_{-n}|}{2^n} \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n| + |y_n| + |x_{-n}| + |y_{-n}|}{2^n} \qquad \text{par inégalité triangulaire} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|y_n| + |y_{-n}|}{2^n} = \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{N est une norme sur } \mathcal{C}.}$

10.c Soit $x \in \mathcal{C}$ et $y = \mathrm{S}(x)$. Alors

$$\mathrm{N}(\mathrm{S}(x)) = \mathrm{N}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|y_n| + |y_{-n}|}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_{-n}| + |x_n|}{2^n} = \mathrm{N}(x)$$

Ainsi S est bien une isométrie. A fortiori, $\mathrm{N}(\mathrm{S}(x)) \leq \mathrm{N}(x)$ donc S est continue par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.

10.d $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ est également une application continue de $(\mathcal{C}, \mathrm{N})$ vers lui-même, donc $\mathrm{S} - \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ est continue sur $(\mathcal{C}, \mathrm{N})$. Donc

$$\mathrm{F} = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{S} - \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) = (\mathrm{S} - \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})^{-1}\,(\{0_{\mathcal{C}}\})$$

est l'image réciproque du fermé $\{0_{\mathcal{C}}\}$ par une application continue donc $\boxed{\text{F est une partie fermé de l'espace vectoriel normé } (\mathcal{C}, \mathrm{N})}$.
De même,

$$\mathrm{G} = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{S} + \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) = (\mathrm{S} + \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})^{-1}\,(\{0_{\mathcal{C}}\})$$

est l'image réciproque du fermé $\{0_{\mathcal{C}}\}$ par une application continue donc $\boxed{\text{G est une partie fermé de l'espace vectoriel normé } (\mathcal{C}, \mathrm{N})}$

10.e On considère la suite $\left(x^{(p)}\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ la suite d'éléments de $\mathcal{C}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, x_n^{(p)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les suites $x^{(p)}$ sont bien dans $\mathcal{C}$ et

$$\mathrm{N}\left(x^{(p)}\right) = \frac{1}{2^p} \qquad \text{et} \qquad \|x^{(p)}\|_\infty = 1$$

Ainsi $\frac{\mathrm{N}(x^{(p)})}{\|x^{(p)}\|_\infty} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\boxed{\text{les normes } \|\cdot\|_\infty \text{ et N ne sont pas équivalentes.}}$