Fonctions usuelles

Solution 1.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel 1 est une solution évidente de l'équation ; puisque la fonction définie f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2^x + 3^x$ est strictement croissante en tant que somme de deux fonctions strictement croissantes, il s'agit de l'unique solution de l'équation.

2. Un réel x est solution de l'équation *si et seulement si*

$$3^{2x} + 3^{2x-1} = 2^{x+\frac{1}{2}} + 2^{x+\frac{7}{2}},$$

ce qui équivaut à $3^{2x-1}(3+1) = 2^{x+\frac{1}{2}}(1+2^3)$, puis à $3^{2x-3} = 2^{x-\frac{3}{2}}$ et donc à

$$(2x-3)\ln(3) = \left(x - \frac{3}{2}\right)\ln(2).$$

Ainsi, l'unique solution de l'équation est

$$x = \frac{3\ln(3) - \frac{3}{2}\ln(2)}{2\ln(3) - \ln(2)} = \frac{3}{2}.$$

Solution 2.

1. Si $x = 0$, alors $\forall n \geqslant 1,\ f_n(x) = 0$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

Si $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Si $x < 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = -\infty$.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet ensemble,

$$f_n'(x) = n^\alpha e^{-nx}\left[1 - nx\right].$$

Ainsi, puisque

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0,$$

la fonction f_n est donc strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty, 1/n]$ de $-\infty$ à $f_n(1/n)$, puis strictement décroissante sur $[1/n, +\infty[$ de $f_n(1/n)$ à 0 : f admet un maximum valant $u_n = f_n(1/n)$.

3. On a

$$u_n = f_n(1/n) = n^\alpha \times \frac{1}{n} \times e = n^{\alpha-1}e.$$

Ainsi, lorsque $\alpha > 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Lorsque $\alpha = 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = e$.
Lorsque $\alpha < 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Solution 3.

- Si $\alpha = 0$, le résultat est banal.

- Soit $\alpha \neq 0$. Pour n assez grand, on a $1+\frac{\alpha}{n}>0$ et donc,

$$\ln(u_n) \;=\; n\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) \;=\; \alpha\times\frac{\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)}{\frac{\alpha}{n}}$$

  Puisque $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\ln(u_n)=\alpha,$$

  et par continuité de l'exponentielle en α,

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=e^{\alpha}.$$

Solution 4.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{n}=n^{1/n}=e^{\ln(n)/n}$. Pour x rèel supèrieur ou ègal à 1, posons alors $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$.

- f est dèrivable sur $[1,+\infty[$ et pour $x\geqslant 1$,

$$f'(x)=\frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

  Sur $[1,+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1-\ln(x)$ et donc f croit sur $[1,e]$ puis dècroit.

- En particulier, pour n entier supèrieur ou ègal à $e=2.71...$, on a $f(n)\leqslant f(3)$ et donc, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$\sqrt[n]{n}=e^{f(n)}\leqslant e^{f(3)}=\sqrt[3]{3}=1,44\ldots.$$

  Comme d'autre part, $\sqrt[1]{1}=1$ et $\sqrt{2}=1,41\ldots$, pour tout entier naturel non nul, on a $\sqrt[n]{n}\leqslant\sqrt[3]{3}$: $\sqrt[3]{3}\approx 1,44\ldots$ est la valeur cherchèe.

Solution 5.

Soient a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 tels que $a<b$. On a alors,

$$\begin{aligned} a^b=b^a \Leftrightarrow b\ln(a)=a\ln(b) &\Leftrightarrow \frac{\ln(a)}{a}=\frac{\ln(b)}{b}\\ &\Leftrightarrow f(a)=f(b)\end{aligned}$$

où f est la fonction étudiée $x>0\mapsto\ln(x)/x$. Après une étude sans difficulté, on prouve que la fonction f est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. Par suite, si a et b sont tous deux dans $[e,+\infty[$ ou encore dans $[3,+\infty[$, $f(a)\neq f(b)$ et le couple (a,b) n'est pas solution. Ceci impose donc $a=2$ et $b\geqslant 3$. La fonction f étant strictement décroissante sur $[3,+\infty[$, l'équation $f(b)=f(2)$ ou encore l'équation $2^b=b^2$ a au plus une solution dans cet intervalle. Cherchons cette éventuelle solution. Comme $2^3=8\neq 9=3^2$, puis $2^4=16=4^2$. Donc, $b=2$ convient et il existe un et un seul couple solution, le couple $(2,4)$.

Solution 6.

Par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, l'inégalité équivaut à

$$\forall x\in]0,1[\;,\;\; x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x)\geqslant-\ln(2).$$

Posons alors, pour tout $x\in]0,1[$,

$$f(x)=x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x).$$

Cette fonction est dérivable sur son intervalle de définition en tant que somme de fonctions dérivables, et $\forall x\in]0,1[$,

$$f'(x)=\frac{x}{x}+\ln(x)+\frac{x-1}{1-x}-\ln(1-x)=\ln(x)-\ln(1-x).$$

Comme ln est strictement croissante, $f'(x) > 0$ *si et seulement si* $x > 1 - x$, i.e. $x > \frac{1}{2}$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{2}[$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, 1[$. Elle admet ainsi un minimum sur $]0, 1[$ valant $f(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$, d'où le résultat.

SOLUTION 7.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = ae^{-bx} - be^{-ax}.$$
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = ab\left[e^{-ax} - e^{-bx}\right].$$
Soit $x > 0$. Puisque $0 < a < b$, on a $-ax > -bx$ et par croissance stricte de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(0) = a - b$, ainsi
$$\forall x > 0, \quad f(x) > f(0) = a - b.$$

SOLUTION 8.

Seuls les numéros **1.** et **2.** présentent des formes indéterminées.

1. On a, pour tout $n \geqslant 2$:
$$u_n = e^{\ln(n) - \sqrt{\ln(n)}}$$
et donc
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

2. On a, pour tout $n \geqslant 2$:
$$u_n = e^{2\ln(n) - \sqrt{n}}.$$
D'après les croissances comparées :
$$\lim_{n \to +\infty} (2\ln(n) - \sqrt{n}) = -\infty$$
d'où
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

3. On a, pour tout $n \geqslant 2$:
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}\ln(n)}$$
d'où
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

4. On a, pour tout $n \geqslant 2$:
$$u_n = n(\ln(n))^{\ln(n)}$$
d'où
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

SOLUTION 9.

1. Puisque $\ln(4) < 3$,
$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-3x} 4^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-3x} 4^x = +\infty.$$

2. D'après les théorèmes de comparaison usuels :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 4^x = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} x^2 4^x = 0.$$

3. D'après les théorèmes de comparaison usuels :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = +\infty.$$

4. Puisque $\ln(4) > 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} 4^x = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-x} 4^x = 0.$$

Solution 10.

Si $0 \leqslant x < 1$, $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$ et si $x = 0$, $f_n(x) = 0$ donc dans tous les cas,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet ensemble,

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n-(n+1)x).$$

La fonction est donc croissante sur $[0, n/(n+1)]$ et décroissante sur $[n/(n+1), 1]$: elle admet un maximum en $n/(n+1)$ valant :

$$u_n = f_n\big(n/(n+1)\big) = \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

D'après le résultat de l'exercice 4, on a

$$\lim_{n\to+infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1},$$

ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Solution 11.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \lambda e^{\lambda x} > 0$. f est donc strictement croissante. De plus, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2. Si $f(x) = x$, alors $e^{\lambda e^{\lambda x}} = f(f(x)) = f(x) = x$.

3. Soit x solution de (E), ce qui équivaut à $f(f(x)) = x$. Supposons $f(x) > x$. Comme f est strictement croissante, $f(f(x)) > f(x)$ et donc $x > f(x)$. Il y a contradiction. De même, si on suppose $f(x) < x$, alors $x = f(f(x)) < f(x)$ et il y a également contradiction. C'est donc que $f(x) = x$.

4. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \lambda e^{\lambda x} - 1$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit le tableau de variations.

x	$-\infty$		$-\frac{\ln\lambda}{\lambda}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	$\frac{1+\ln\lambda}{\lambda}$	$\nearrow$	$+\infty$

L'équation $f(x) = x$ n'admet donc aucune solution si $\dfrac{1+\ln\lambda}{\lambda} > 0$. Elle admet une unique solution si $\dfrac{1+\ln\lambda}{\lambda} = 0$ et deux solutions si $\dfrac{1+\ln\lambda}{\lambda} < 0$. Comme d'après les deux questions précédentes les solutions de $f(x) = x$ sont les solutions de (E), on en déduit :

- Si $\lambda > \dfrac{1}{e}$, l'équation (E) n'admet aucune solution.
- Si $\lambda = \dfrac{1}{e}$, l'équation (E) admet une unique solution qui vaut e.
- Si $\lambda < \dfrac{1}{e}$, l'équation (E) admet deux solutions.

Solution 12.

L'équation n'a de sens que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

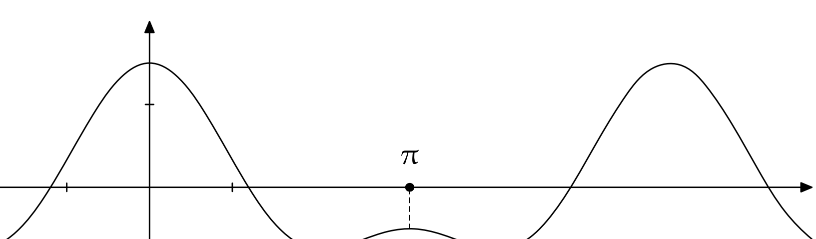
$$\begin{aligned}
(E) &\iff \sqrt{x}\ln(x) = x\ln(\sqrt{x}) && \text{par injectivité de ln sur } \mathbb{R}_+^* \\
&\iff \ln(x)\left(\frac{x}{2} - \sqrt{x}\right) = 0 \\
&\iff \ln(x) = 0 \text{ ou } \frac{x}{2} = \sqrt{x} \\
&\iff x = 1 \text{ ou } \sqrt{x} = 2 && \text{car } x \in \mathbb{R}_+^* \\
&\iff x = 1 \text{ ou } x = 4
\end{aligned}$$

Solution 13.

La fonction f est clairement paire et 2π-périodique, il suffit donc de l'étudier sur $[0,\pi]$. Elle est de plus dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle,

$$f'(x) = -\sin(x) - \sin(2x) = -2\sin(x)[\cos(x) + 1/2]$$

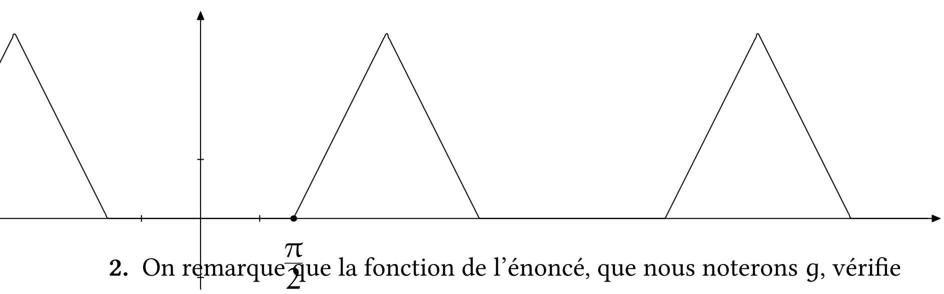
Ainsi f' est négative sur $[0, 2\pi/3]$ puis positive sur $[2\pi/3, \pi]$, ne s'annulant qu'en $0, 2\pi/3$ et π. La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0, 2\pi/3]$ de $3/2$ à $-3/4$ et strictement croissante sur $[2\pi/3, \pi]$ de $-3/4$ à $-1/2$. On en déduit la courbe représentative.



Solution 14.

1. On remarque que la fonction de l'énoncé, que nous noterons f, est 2π-périodique et paire. Il suffit donc de l'étudier sur $I = [0\,\pi]$. Sur I, on a $\arccos(\cos(x)) = x$.

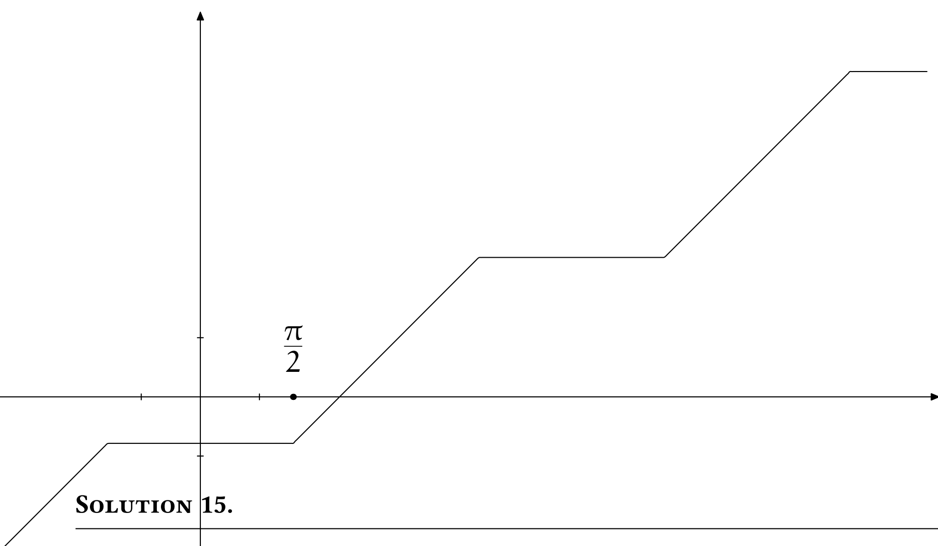
- Pour $x \in [0, \pi/2]$, $2x \in [0, \pi]$ et donc
$$\arccos(\cos(2x)) = 2x,$$
puis $f(x) = 0$.
- Pour $x \in [\pi/2, \pi]$, $2\pi - 2x \in [0, \pi]$ et a le même cosinus que $2x$, donc
$$\arccos(\cos(2x)) = 2\pi - 2x$$
et $f(x) = 2x - \pi$.
- D'où le graphe de f sur $\mathbb{R}$,



2. On remarque que la fonction de l'énoncé, que nous noterons g, vérifie
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x + 2\pi) = f(x) + \pi.$$
On déduira donc le graphe de g sur $\mathbb{R}$ de celui sur $[0, 2\pi]$ par translations de vecteurs
$$k\vec{u} \text{ où } \vec{u} = 2\pi\vec{\imath} + \pi\vec{\jmath},\ k \in \mathbb{Z}.$$

- Soit $x \in [0, 2\pi]$,
$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}} \\ &= \frac{x}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{1+\cos 2(\pi/4 - x/4)}{2}} \\ &= \frac{x}{2} - \arcsin\sqrt{\cos^2(\pi/4 - x/2)} \\ &= \frac{x}{2} - \arcsin\sqrt{\sin^2(\pi/4 - x/2)} \\ &= \frac{x}{2} - \arcsin|\sin(\pi/4 + x/2)|. \end{aligned}$$
- Pour $x \in [0, \pi/2]$, $\pi/4 + x/2 \in [0, \pi/2]$ donc
$$g(x) = x/2 - (\pi/4 - x/2) = -\pi/4.$$
- Pour $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$, $\pi/4 + (x/2) \in [\pi/2, \pi]$ donc
$$g(x) = x/2 - (\pi - \pi/4 - x/2) = -3\pi/4 + x.$$
- Pour $x \in [3\pi/2, 2\pi]$, $\pi/4 + (x/2) \in [\pi, 5\pi/4]$ donc
$$g(x) = x/2 - (\pi/4 + (x/2) - \pi) = 3\pi/4.$$

▶ D'où le graphe de g sur $\mathbb{R}$,



Solution 15.

1. Puisque pour tout x positif,

$$\arctan(x) = \pi/2 - \arctan(1/x),$$

l'équation est équivalente à

$$\arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8) = \frac{\pi}{4}.$$

Puisque les nombres $1/2, 1/5$ et $1/8$ sont strictement compris entre 0 et $1/\sqrt{3} = \tan(\pi/6)$, leurs images par la fonction arctangente sont strictement comprises entre 0 et $\pi/6$. Posons

$$a = \arctan(1/2),\ b = \arctan(1/5),\ c = \arctan(1/8).$$

On a $a + b + c \in [0, \pi/2[$. L'égalité est donc équivalente à

$$\tan(a + b + c) = 1.$$

On a

$$\tan(a + b + c) = \frac{\tan(a + b) + \frac{1}{8}}{1 - \frac{\tan(a+b)}{8}}.$$

Or

$$\tan(a + b) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}.$$

Ainsi,

$$\tan(a + b + c) = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{72}} = \frac{65}{65} = 1.$$

2. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto \arctan(x-2) + \arctan(x) + \arctan(x+3)$$

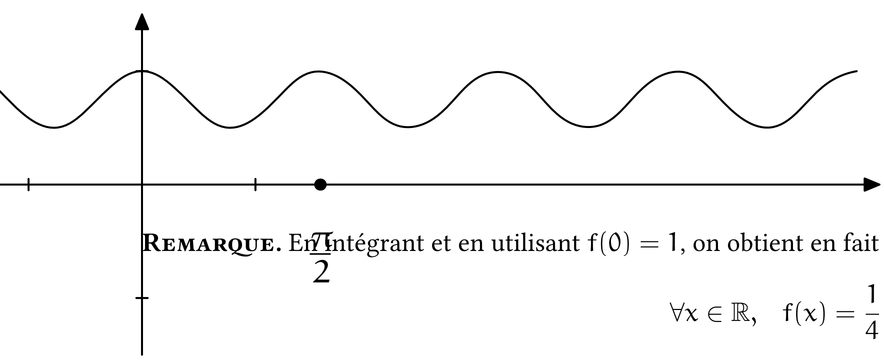
étant strictement croissante en tant que somme de fonctions strictement croissantes, l'équation du **1.** n'admet qu'une seule solution égale à 5.

Solution 16.

► Soit f la première fonction ;f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\cos(x)\sin^3(x) - 4\sin(x)\cos^3(x) \\ &= 4\cos(x)\sin(x)\left[\sin^2(x) - \cos^2(x)\right] \\ &= -2\sin(2x)\cos(2x) = -\sin(4x) \end{aligned}$$

La fonction f étant paire et $\pi/2$-périodique, il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi/4]$. D'après le calcul de f', f est décroissante sur cet intervalle : elle admet donc un minimum en $\pi/4$ valant $m = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{2}$, et un maximum en 0 valant 1. Voir la figure.



Remarque. En intégrant et en utilisant $f(0) = 1$, on obtient en fait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{3}{4}.$$

Cette égalité peut également se retrouver par une linéarisation. ■

► Soit g la deuxième fonction ; g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 5\cos(x)\sin^4(x) - 5\sin(x)\cos^4(x) \\ &= 5\cos(x)\sin(x)\left[\sin^3(x) - \cos^3(x)\right] \\ &= \frac{5}{2}\sin(2x)\left[\sin(x) - \cos(x)\right] \\ &\qquad \times \left[\sin^2(x) + \sin(x)\cos(x) + \cos^2(x)\right] \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}}\sin(2x)\frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sqrt{2}} \times \left[1 + \sin(x)\cos(x)\right] \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}}\sin(2x)\sin(x - \pi/4) \times \left[1 + \sin(x)\cos(x)\right] \end{aligned}$$

La fonction g étant clairement π-antipériodique, il suffit de l'étudier sur un intervalle d'amplitude π, par exemple $[0, \pi]$. Puisque pour tout x réel,

$$1 + \cos(x)\sin(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin(2x) \geqslant 1 - \frac{1}{2} > 0,$$

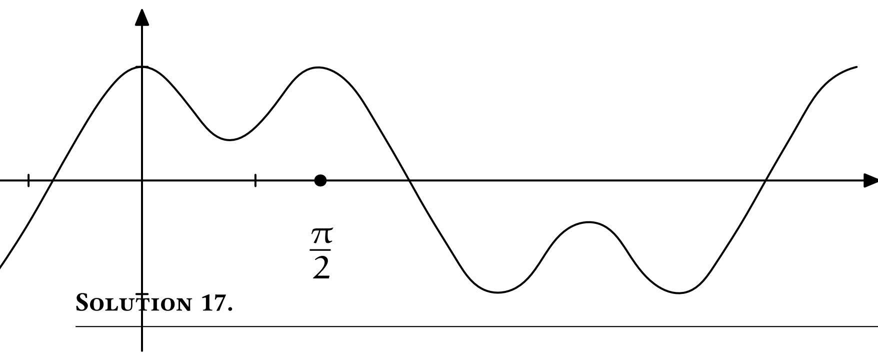
g' est du signe de $\sin(2x)\sin(x-\pi/4)$; ainsi g est décroissante sur $[0,\pi/4]$, croisssante sur $[\pi/4,\pi/2]$, puis à nouveau croissante sur $[\pi/2,\pi]$. Pour déterminer les extrema de g il faut donc comparer les nombres $g(0)$, $g(\pi/4)$, $g(\pi/2)$ et $g(\pi)$:

$$g(0) = g(\pi/2) = -g(\pi) = 1,$$

et

$$g(\pi/4) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Le maximum de g vaut donc 1 et son minimum -1. Voir la figure.



Solution 17.

1. Oui, car pour tout réel x positif, $|1-x| \leqslant 1+x$ donc $\frac{1-x}{1+x} \in [-1,1]$, intervalle de définition de l'arccosinus.

2. Soit $x \geqslant 0$. Posons $\theta = 2\arctan(\sqrt{x})$. D'après les variations de l'arctangente sur $\mathbb{R}_+$, on a $0 \leqslant \theta < \pi$. De plus, $\sqrt{x} = \tan(\theta/2)$ d'où $x = \tan^2(\theta/2)$.

3. Soit $x \geqslant 0$. Posons $\theta = 2\arctan(\sqrt{x})$ de sorte que $x = \tan^2(\theta/2)$. Puisque $\frac{1-x}{1+x} = \cos(\theta)$ et $0 \leqslant \theta < \pi$, $f(x) = \arccos(\cos(\theta)) = \theta = 2\arctan(\sqrt{x})$.

Solution 18.

Y a pas d'secret : il faut faire apparaître du sinus puisque y est un arcsinus ...

$$\begin{aligned}\cos(4y) &= 1 - 2\sin^2(2y) = 1 - 8\sin^2(y)\cos^2(y) \\ &= 1 - 8u^2\left[1-u^2\right]\end{aligned}$$

où $u = \sin(y) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Après tout calcul,

$$\cos(4y) = -u = \sin(-y) = \cos(\pi/2 + y).$$

On a donc

$$4y \equiv \frac{\pi}{2} + y[2\pi] \ \ \textit{ou} \ \ 4y \equiv -\frac{\pi}{2} - y[2\pi],$$

c'est-à-dire

$$y \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi/3] \ \ \textit{ou} \ \ y \equiv -\frac{\pi}{10}[2\pi/5].$$

Or y est l'arcsinus d'un nombre positif donc $y \in [0, \pi/2]$.Or la seule solution de la première congruence appartenant à cet intervalle est $\pi/6$ qui n'est donc pas y puisque

$$\sin(y) \neq \frac{1}{2} = \sin(\pi/6);$$

la seule solution de la seconde congruence appartenant à $[0, \pi/2]$ étant $3\pi 10$,*nécessairement* $y = \frac{3\pi}{10}$.

Solution 19.

Puisque a et b sont positifs,

$$\arctan(a), \arctan(b) \in [0, \pi/2[,$$

donc $\arctan(a) - \arctan(b) \in]-\pi/2, \pi/2[$. Or,

$$\tan\left(\arctan(a) - \arctan(b)\right) = \frac{a-b}{1+ab},$$

ainsi

$$\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right).$$

Solution 20.

Notons

$$\alpha = \arctan(1/5) \text{ et } \beta = \arctan(1/239).$$

D'après les variations de l'arctangente,on sait que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1/5$ et $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, ainsi

$$0 \leqslant 3\alpha \leqslant 4\alpha - \beta \leqslant \frac{4}{5} < \frac{\pi}{2}.$$

Allons-y !

$$\tan(4\alpha - \beta) = \frac{\tan(4\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(4\alpha)\tan(\beta)}$$

Posons $u = \tan(4\alpha)$. On a alors,

$$u = \frac{2v}{1-v^2},$$

où

$$v = \tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{5^2}} = \frac{5}{12}$$

donc

$$u = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

D'où

$$\tan(4\alpha - \beta) = \frac{u - 1/239}{1 + u/239} = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \times \frac{1}{239}} = 1$$

Et puisque $4\alpha - \beta \in [0, \pi/2]$, $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$.

Solution 21.

Remarquons que
$$\arctan(3) = \frac{\pi}{2} - \arctan(1/3),$$
l'égalité est donc équivalente à
$$\arctan(1/3) + \arcsin(1/\sqrt{5}) = \frac{\pi}{4}.$$
Posons
$$a = \arctan(1/3) \text{et } \ b = \arcsin(1/\sqrt{5}).$$
Puisque $0 < \frac{1}{3} < 1$, $a \in]0, \pi/4[$. Puisque $0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a $b \in [0, \pi/4]$,et ainsi $a + b \in]0, \pi/2[$. L'égalité est donc équivalente à $\tan(a + b) = 1$. C'est parti !
$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} = \frac{\frac{1}{3}+\tan(b)}{1-\frac{\tan(b)}{3}}$$
Or,
$$\tan^2(b) = \frac{1}{\cos^2 b} - 1 = \frac{\sin^2 b}{1-\sin^2 b} = 1/4,$$
et puisque $\tan(b) > 0$ (Cf. les encadrements établis ci-dessus) ,
$$\tan(b) = \frac{1}{2}.$$
On a donc
$$\tan(a+b) = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{6}} = 1.$$

Solution 22.

- ▶ *Première méthode : on dérive !*

  Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
  $$x \longmapsto \arctan(x) + 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right).$$
  Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'apr‘es les théorèmes sur la dérivation des fonctions composées,et pour tout x réel,
  $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + 2 \times \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right] \times \frac{1}{1+\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right] \times \frac{1}{1+x^2-x\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{1+x^2-x\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2+x\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{1+x^2-x\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{\left(x^2+1\right)^2 - x^2\left(x^2+1\right)} \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2+1} = 0 \end{aligned}$$
  La fonction f est donc constante sur $\mathbb{R}$ et puisque $f(0) = \pi/2$,f est constante sur $\mathbb{R}$ égale à $\pi/2$.

- ▶ *Deuxième méthode : en finesse...*

- Pour $x > 0$,l'égalité de l'énoncé est équivalente à :

$$2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \arctan(1/x).$$

Puisque dans ce cas,

$$0 < \sqrt{x^2+1}-x < 1,$$
$$2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) \in [0, \pi/4],$$

il est donc équivalent de prouver que

$$\alpha = \tan\left(\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right) = \frac{1}{x}.$$

Allons-y !

$$\begin{aligned}\alpha &= 2 \times \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{1-\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2} \\ &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

- Pour $x < 0$,l'égalité de l'énoncé est équivalente à :

$$2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \pi + \arctan(1/x).$$

Puisque dans ce cas,

$$\sqrt{x^2+1}-x > 1,$$
$$2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) \in]\pi/2, \pi[,$$

il est donc équivalent de prouver que

$$\tan\left(\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right) = \frac{1}{x}.$$

Le calcul précédent est toujours valable.

- La formule est banalement vraie pour $x = 0$.

Solution 23.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de l'équation étudiée, on a successivement :

$$\begin{aligned}\tan\left(\arctan(x)+\arctan(2x)\right) &= \tan(\pi/4) \\ \frac{3x}{1-2x^2} &= 1 \\ 2x^2+3x-1 &= 0\end{aligned}$$

2. Le discriminant de l'équation précédente est $\Delta = 17$ et ses deux solutions sont :

$$x_1 = -\frac{3+\sqrt{17}}{4} < 0 \ , \ x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} > 0$$

La solution x_1 est à rejeter car, d'après les variations de la fonction arctan sur $\mathbb{R}$,

$$x_1 < 0 \Rightarrow \arctan(x_1)+\arctan(2x_1) < 0,$$

On remarque que $0 < x_2 < 2x_2 < 1$, ainsi

$$0 < \arctan(x_2) + \arctan(2x_2) < 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

x_2 est donc l'unique solution de l'équation.

Remarque. Il faut bien comprendre le raisonnement précédent : on a vu que

$$\arctan(x_2) + \arctan(2x_2) \in [0, \pi/2[$$

et

$$\tan(\arctan(x_2) + \arctan(2x_2)) = 1 = \tan(\pi/4)$$

on en déduit que

$$\arctan(x_2) + \arctan(2x_2) = \frac{\pi}{4}$$

car $\pi/4$ est l'unique angle compris entre 0 et $\pi/2$ dont la tangente vaut 1 (tan est injective sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$). ■

Solution 24.

1. Soit x une solution de la première équation. On a alors,

$$\tan(x) = \sin(x),$$

c'est-à-dire

$$\sin(x)\Big[1/\cos(x) - 1\Big] = 0,$$

et donc *nécessairement*

$$x \equiv 0[\pi].$$

Or $x \in \operatorname{Im}\arcsin$ donc $x \in [-1, 1]$. La seule solution envisageable est 0.
Réciproquement, on vérifie sans peine que 0 est effectivement solution.

2. La deuxième équation est équivalente à

$$\arccos(x) = \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right),$$

c'est-à-dire

$$\arccos(x) = \arcsin\Big(\sin\left(\arccos(x)\right)\Big),$$

Or, si $x \in [0, 1]$,

$$\arcsin\Big(\sin\left(\arccos(x)\right)\Big) = \arccos(x),$$

et si $x \in [-1, 0[$,

$$\arcsin\Big(\sin\left(\arccos(x)\right)\Big) = \pi - \arccos(x),$$

et

$$\pi - \arccos(x) \neq \arccos(x).$$

L'ensemble des solutions est donc $[0, 1]$.

Solution 25.

Soit $x \in]-1, 1[$. Posons $u = \arcsin(x)$. On a alors $x = \sin(u)$ et $u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, d'où

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin(u)}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} = \frac{\sin(u)}{\sqrt{\cos^2(u)}} = \frac{\sin(u)}{|\cos(u)|} = \frac{\sin(u)}{\cos(u)} = \tan(u).$$

Puisque $u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a donc $u = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, c'est-à-dire $\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Solution 26.

Raisonnons par récurrence. Soit $n \geqslant 0$. On note $HR(n)$ la proposition suivante : $\forall k \leqslant n$, il existe un polynôme réel P_k tel que $\forall x \in [-1,1]\ ,\ \cos(k \arccos(x)) = P_k(x)$.

- $HR(0)$, $HR(1)$ et $HR(2)$ sont banalement vérifiées car $\forall x \in [-1,1]\ ,\ \cos(0\times\arccos(x)) = 1$, $\cos(\arccos(x)) = x$ et $\cos(2\arccos(x)) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons vérifiée $HR(n)$. Il existe alors deux polynômes réels P_{n-1} et P_n tels que

$$\forall x \in [-1,1]\ ,\ \cos((n-1)\arccos(x)) = P_{n-1}(x) \ \text{ et } \ \cos(n\arccos(x)) = P_n(x).$$

Or, puisque

$$\forall \theta \in \mathbb{R}\ ,\ \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta),$$

on a $\forall x \in [-1,1]$,

$$\cos((n+1)\arccos(x)) = 2\cos(\arccos(x))\cos(n\arccos(x)) - \cos((n-1)\arccos(x)) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x).$$

En posant pour tout réel x, $P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x)$, on a

$$\forall x \in [-1,1]\ ,\ \cos((n+1)\arccos(x)) = P_{n+1}(x)$$

et P_{n+1} est bien un polynôme réel en tant que somme de polynôme réels. L'hypothèse $HR(n+1)$ est donc vérifiée.

- L'hypothèse $HR(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$ d'après le principe de récurrence.

Remarque. Les lecteurs cultivés auront reconnu la suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ des polynômes de Tchebychev de première espèce. Au-delà des formules d'addition et des nombres complexes, le calcul de ces polynômes peut s'effectuer par récurrence (et c'est de loin la manière la plus rapide d'y parvenir avec l'avantage d'une programmation par une simple boucle sous **Maple**) à partir de $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $\forall n \geqslant 2\ ,\ P_n = 2XP_{n-1} - P_{n-2}$. ■

Solution 27.

1. Posons pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) = \arcsin(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin(2x-1).$$

La fonction est bien définie car $2x-1$ appartient à $[-1,1]$ lorsque x décrit $[0,1]$. Puisque $\forall x \in]0,1[\ ,\ 2x-1 \in]-1,1[$, la fonction f est dérivable sur $]0,1[$ en tant que somme de fonctions composées dérivables. De plus, $\forall x \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 0 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} - \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} - \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} = 0 \end{aligned}$$

La fonction f est donc constante sur $]0,1[$. Puisque $f(1/2) = \arcsin(1/\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - 0 = 0$, f est nulle sur $]0,1[$. La fonction f étant continue sur $[0,1]$ en tant que somme de composées de fonctions continues sur $[0,1]$, on a par continuité de f en 0 et 1,

$$\forall x \in [0,1]\ ,\ f(x) = 0.$$

2. Soient $x \in [0,1]$ et $u = \arcsin(\sqrt{x})$. On a donc $\sin(u) = \sqrt{x}$ puis $x = \sin^2(u)$. On a ainsi

$$2x-1 = 2\sin^2(u)-1 = -\cos(2u)$$

puis $\arcsin(2x-1) = \arcsin(-\cos(2u)) = -\arcsin(\cos(2u)) = -\arcsin(\sin(\pi/2-2u))$. Or, $u = \arcsin(\sqrt{x}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ car $\sqrt{x} \geqslant 0$ et donc $2u \in [0,\pi]$ puis $\pi/2 - 2u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On a donc $\arcsin(\sin(\pi/2-2u)) = \pi/2-2u$. En conclusion, $\frac{1}{2}\arcsin(2x-1) = u - \frac{\pi}{4}$. On a donc

$$\forall \in [0,1], \quad \arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1).$$

Solution 28.

On a $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \tan(\arctan x) = x$ et $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$. Comme $\arctan x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $g(x) > 0$. On en déduit $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Solution 29.

Pour que cette équation ait un sens, il faut que $x \in [-1,1]$ et $2x \in [-1,1]$. Il faut donc que $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

- Analyse : Si x est solution alors $\sin(\arccos x) = \sin(\arcsin 2x)$, ce qui équivaut à $\sqrt{1-x^2} = 2x$. Après passage au carré, on obtient $1-x^2 = 4x^2$. Cette équation a pour solution $\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
- Synthèse : $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ne peut être solution de $\sqrt{1-x^2} = 2x$ car une racine carré est toujours positive. La seule solution possible est donc $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Le réel α est solution de l'équation $\sqrt{1-x^2} = 2x$ et donc de l'équation $\sin(\arccos x) = \sin(\arcsin 2x)$. Or $\alpha \geqslant 0$ donc $\arccos \alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. De plus, $\arcsin 2\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Par injectivité de la fonction sin sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a donc $\arccos \alpha = \arcsin 2\alpha$ et α est donc bien l'unique solution de l'équation initiale.

Solution 30.

1. L'équation est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $\dfrac{1}{1+x^2} \in [-1,1]$.

$$\begin{aligned} &\arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + \arccos\frac{3}{5} = \frac{\pi}{2} \\ \iff\ &\arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \arcsin\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Comme les deux membres de l'égalité appartiennent à $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, l'équation équivaut à :

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{3}{5}$$

Les solutions sont donc $\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

2. Comme $\frac{3}{4} \in [0,1]$, $\arccos\frac{3}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Les deux membres de l'égalité appartiennent donc à $[0,\pi]$. L'équation équivaut donc à

$$x = \cos\left(2\arccos\frac{3}{4}\right)$$

Or $\cos\left(2\arccos\frac{3}{4}\right) = 2\cos^2\left(\arccos\frac{3}{4}\right) - 1 = \frac{1}{8}$. L'unique solution est donc $\frac{1}{8}$.

3. Comme $\frac{1}{4} \in [0,1]$ et $\frac{1}{3} \in [0,1]$, $\arccos\frac{1}{4} + \arcsin\frac{1}{3} \in [0,\pi]$. Les deux membre de l'égalité appartiennent donc à $[0,\pi]$. L'équation équivaut donc à

$$x = \cos\left(\arccos\frac{1}{4} + \arcsin\frac{1}{3}\right)$$

Or on a :

$$\begin{aligned}\cos\left(\arccos\frac{1}{4} + \arcsin\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{4}\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{1}{3}\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{15}}{12}\end{aligned}$$

L'unique solution est donc $\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{15}}{12}$.

4. On vérifie que ± 1 n'est pas solution. Les deux membres de l'équation appartiennent donc à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par conséquent, l'équation équivaut à

$$\tan(\arcsin x) = \tan(\arctan 2x)$$

Or $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\tan(\arctan 2x) = 2x$. L'équation équivaut donc à :

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 2x$$

Ceci équivaut à $x = 0$ ou $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2$. Après calcul, les solutions sont donc $0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Si x est solution de l'équation, alors on a *nécessairement* :

$$\tan(\arcsin 2x) = \tan(\arctan x)$$

Comme précédemment, on a :

$$\tan(\arcsin 2x) = \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} \text{ et } \tan(\arctan x) = x$$

Par conséquent,

$$\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} = x$$

Ceci implique $x = 0$ ou $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} = 1$. Cette dernière équation n'admet pas de solution. De plus, on vérifie que 0 est bien solution : c'est donc l'unique solution.

Solution 31.

Posons $f(x) = \cos(\sin x) - \sin(\cos x)$. On connaît ses formules de trigonométrie :

$$f(x) = \cos(\sin x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right) = -2\sin\left(\frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

De plus,

$$\sin x - \cos x = \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{\sin x - \cos x}{2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{\sin x + \cos x}{2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

puis

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}$$

Or $\frac{\pi}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} < \pi$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$0 < \frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi \quad \text{et} \quad -\pi < \frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\pi}{4} < 0$$

On en déduit que $\sin\left(\frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ ne sont jamais nuls quelque soit $x \in \mathbb{R}$. Ainsi la fonction f ne s'annule jamais. Comme elle est continue, elle est de signe constant. Or $f(0) = 1 - \sin(1) > 0$ donc $f > 0$ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution 32.

1. f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

2. $x \mapsto \frac{1}{2x-1}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$, $x \mapsto x^2 - 1$ et arctan sont dérivables sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathcal{D}$.
Pour $x \in \mathcal{D}$,
$$f'(x) = 2x \arctan\frac{1}{2x-1} - \frac{x^2-1}{2x^2-2x-1}$$
Donc pour $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$, $f'(x) = 2xg(x)$ avec
$$g(x) = \arctan\frac{1}{2x-1} - \frac{x^2-1}{2x(2x^2-2x+1)}$$

3. Posons $P(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1$. On obtient successivement $P'(x) = 2(4x^3 - 6x^2 + 9x - 2)$ et $P''(x) = 6(4x^2 - 4x + 3)$. En considérant le discriminant, on montre que $\forall x \in \mathbb{R},\ P''(x) > 0$. Donc P' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, P' est continue et $\lim\limits_{-\infty} P' = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} P' = +\infty$. On en conclut que P' s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$. Notons α cet unique zéro de P'. P est donc décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha, +\infty[$. Reste à montrer que $P(\alpha) > 0$. Effectuons la division euclidienne de P par P'. On trouve un reste égal à $R(x) = 3x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$. Comme $P'(\alpha) = 0$, $P(\alpha) = R(\alpha)$. Or le discrimant de R est strictement négatif donc ce trinôme est de signe constant strictement positif. En particulier, $R(\alpha) > 0$. On en déduit que $P(x) \geqslant P(\alpha) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. g est dérivable sur $\mathcal{D} \setminus \{0\}$ et pour $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$,
$$g'(x) = -\frac{2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2} = -\frac{P(x)}{2x^2(2x^2-2x+1)^2}$$
D'après la question précédente, $g'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$. Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$, $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
On a $\lim\limits_{-\infty} g = 0$, donc g est strictement négative sur $]-\infty, 0[$.
On a $\lim\limits_{0^+} g = +\infty$ et $\lim\limits_{\frac{1}{2}^-} g = -\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} < 0$, donc g s'annule une unique fois sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. Notons β ce zéro de g.
On a $\lim\limits_{+\infty} g = 0$, donc g est strictement positive sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
En outre $f'(0) = 1$ et $f'(x) = 2xg(x)$ pour $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$: on en déduit que f' est strictement positive sur $]-\infty, \beta[$, strictement

négative sur $\left]\beta, \frac{1}{2}\right[$ et strictement poitive sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. f est donc strictement croissante sur $]-\infty, \beta]$, strictement décroissante sur $\left[\beta, \frac{1}{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
De plus, $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{x}{2}$ donc $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. On a également $\lim\limits_{\frac{1}{2}^-} = \frac{3\pi}{8}$ et $\lim\limits_{\frac{1}{2}^+} = -\frac{3\pi}{8}$.

Comme β est un zéro de g, on peut s'apercevoir que $f(\beta) = \dfrac{(\beta^2-1)^2}{2\beta(2\beta^2-2\beta+1)}$.

x	$-\infty$		β		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	$\frac{3\pi}{8}$ ‖ $-\frac{3\pi}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque. Comme β est très proche de $\frac{1}{2}$ et que $f(\beta)$ est très proche de $f\left(\frac{1}{2}^-\right)$, la calculatrice ne permet pas de voir que f est décroissante sur $\left[\beta, \frac{1}{2}\right[$. Pour information,

$$\beta \approx .4899143616 \qquad f(\beta) \approx 1.178452180 \qquad f\left(\frac{1}{2}^-\right) = \frac{3\pi}{8} \approx 1.178097245$$

■

Solution 33.

1. $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$.

2. Soient $x_1, \dots, x_7$ sept réels quelconques et posons $a_i = \arctan x_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 7$. On a donc $a_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ pour $1 \leqslant i \leqslant 7$. On divise l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de longeur π en six intervalles de longueur $\frac{\pi}{6}$ en posant $I_j = \left[-\frac{\pi}{2} + (j-1)\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{2} + j\frac{\pi}{6}\right]$ pour $1 \leqslant j \leqslant 6$. Chacun des sept angles a_i appartient à l'un des six intervalles I_j. D'après le principe des tiroirs, il existe deux des a_i dans un même intervalle I_j. Notons a et b ces deux angles. Quitte à échanger a et b, on peut supposer $a \geqslant b$. On a donc $0 \leqslant a - b \leqslant \frac{\pi}{6}$. Par croissance de tan, $0 \leqslant \tan(a-b) \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$ et donc $0 \leqslant \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Il suffit alors de remarquer que $x = \tan a$ et $y = \tan b$ sont deux des sept réels $x_1, \dots, x_7$.

Solution 34.

Tout d'abord les solutions sont à rechercher dans l'intervalle $[-1, 1]$.
Première méthode :
On remarque que $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est solution «évidente». La fonction arcsin et la fonction arccos sont respectivement strictement croissante et strictement décroissante sur $[-1, 1]$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \arcsin x - \arccos x$ est strictement croissante sur $[-1, 1]$. Ell est donc injective. Ceci prouve que $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est l'unique solution de l'équation.

Seconde méthode :
Soit x une solution de l'équation. On a donc $x \in [-1, 1]$ et

$$\sin(\arcsin x - \arccos x) = \sin\frac{\pi}{6}$$

ou encore

$$\sin(\arcsin x)\cos(\arccos x) - \sin(\arccos x)\cos(\arcsin x) = \frac{1}{2}$$

On en déduit que

$$x^2 - (\sqrt{1-x^2})^2 = \frac{1}{2}$$

ou encore

$$x^2 = \frac{3}{4}$$

On a donc $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Réciproquement, on voit que seul $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est solution puisque

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \qquad \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$
$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} \qquad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

Solution 35.

1. Puisque arcsin est définie sur $[-1, 1]$, f est définie sur $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

2. $$f\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin\frac{1}{2} + \arcsin 1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

3. Comme arcsin est strictement croissante sur $[-1, 1]$, elle l'est également sur I. De même, la fonction $x \mapsto \arcsin(2x)$ est strictement croissante sur I. Ainsi f est strictement croissante sur I. Elle y est également continue comme somme de fonctions continues. D'après le théorème de la bijection, f induit une bijection de I sur $J = f(I)$.
De plus, $J = \left[f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{2}\right)\right]$. Or $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ et, f étant impaire comme somme de fonctions impaires, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3}$. Ainsi

$$J = \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$$

4. On sait que f induit une bijection de I sur J. Or $\frac{\pi}{2} \in J$ donc $\frac{\pi}{2}$ admet un unique antécédent par f dans I. Ceci prouve que l'équation $f(x) = \frac{\pi}{2}$ admet une unique solution dans I.

5. Notons α l'unique solution de l'équation $f(x) = \frac{\pi}{2}$. On a donc

$$\arcsin(\alpha) + \arcsin(2\alpha) = \frac{\pi}{2}$$

ou encore

$$\arcsin(2\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\alpha)$$

On a donc

$$\sin(\arcsin(2\alpha)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\alpha)\right) = \cos(\arcsin(\alpha))$$

Ainsi

$$2\alpha = \sqrt{1-\alpha^2}$$

On remarque en particulier que $\alpha \geqslant 0$ puisqu'une racine carrée est positive. En élevant au carré cette dernière égalité, on obtient

$$4\alpha^2 = 1 - \alpha^2$$

ou encore

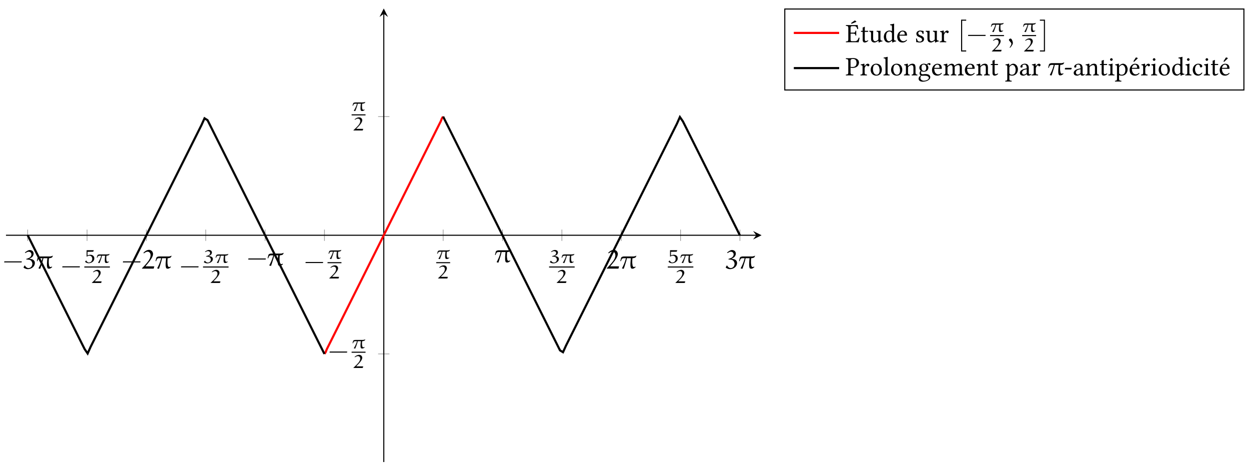
$$\alpha^2 = \frac{1}{5}$$

Or on a vu que $\alpha \geqslant 0$ donc $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
L'unique solution de l'équation $f(x) = \frac{\pi}{2}$ est donc $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

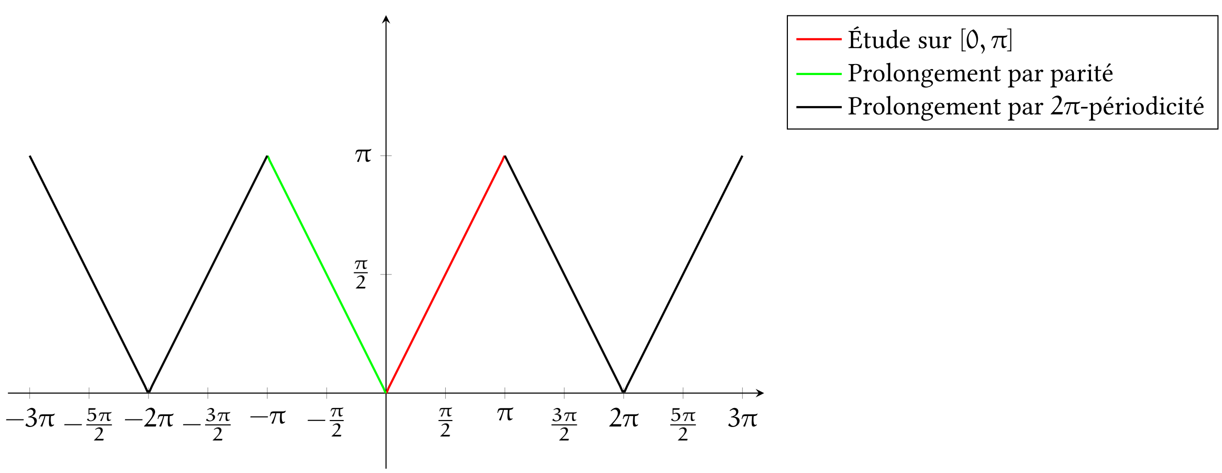
Solution 36.

Posons $f = \arcsin \circ \sin$ et $g = \arccos \circ \cos$.

f est π-antipériodique i.e. $f(x+\pi) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (a fortiori, elle est 2π-périodique). De plus, $f(x) = x$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit le graphe suivant.



g est paire et 2π-périodique. De plus, $g(x) = x$ pour tout $x \in [0, \pi]$. On en déduit le graphe suivant.



Solution 37.

En posant $t = e^x$, l'équation est équivalente à

$$3t - \frac{1}{t} = 4,$$

c'est-à-dire $3t^2 - 4t - 1 = 0$, donc $t = \frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$. Puisque $t = e^x > 0$, on trouve l'unique solution

$$x = \ln\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right).$$

Solution 38.

- Si $a = 0$, on a clairement $S_n = (n+1)\operatorname{ch}(b)$ et $\Sigma_n = (n+1)\operatorname{sh}(b)$.
- Supposons $a \neq 0$. On remarque que

$$S_n + \Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ka+b} \text{ et } S_n - \Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} e^{-ka-b}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n + \Sigma_n &= e^b \frac{e^{(n+1)a} - 1}{e^a - 1} \\ &= \frac{e^{b+(n+1)a/2}}{e^{a/2}} \frac{e^{(n+1)a/2} - e^{-(n+1)a/2}}{e^{a/2} - e^{-a/2}} \\ &= \frac{\operatorname{sh}((n+1)a/2)}{\operatorname{sh}(a/2)} e^{b+na/2}. \end{aligned}$$

Comme $S_n - \Sigma_n$ s'obtient de $S_n + \Sigma_n$ ne changeant (a, b) en $(-a, -b)$ on trouve

$$S_n - \Sigma_n = \frac{\operatorname{sh}((n+1)a/2)}{\operatorname{sh}(a/2)} e^{-b-na/2},$$

d'où

$$S_n = \operatorname{ch}(b + na/2)\frac{\operatorname{sh}((n+1)a/2)}{\operatorname{sh}(a/2)}$$

et

$$\Sigma_n = \operatorname{sh}(b + na/2)\frac{\operatorname{sh}((n+1)a/2)}{\operatorname{sh}(a/2)}.$$

Solution 39.

On remarque que f est impaire et qu'elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque ch ne s'annule pas. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$

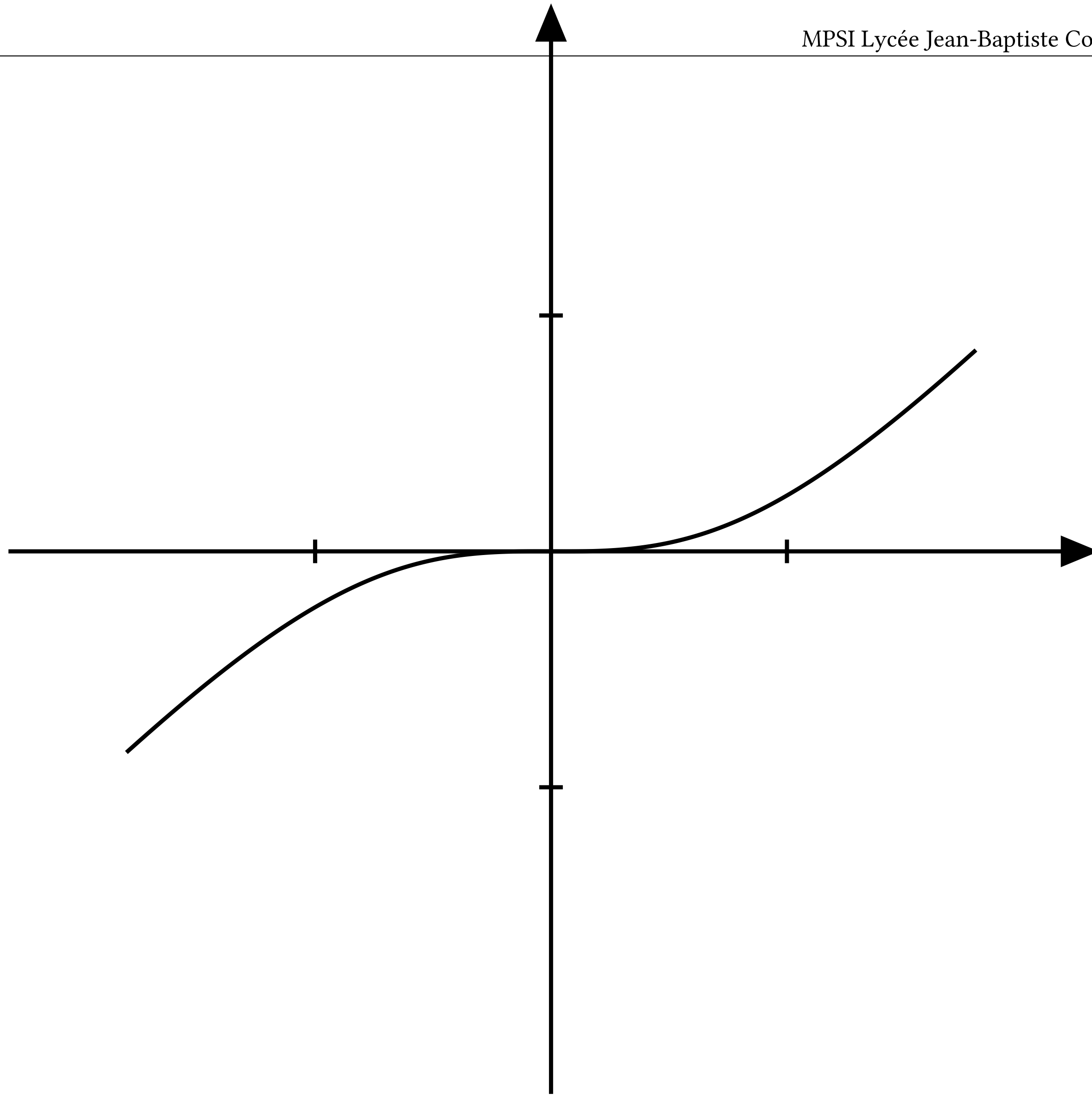
$$f(x) = x - \operatorname{th}(x),$$

ainsi

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \operatorname{th}^2(x) \geqslant 0.$$

La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$



Solution 40.

On s'inspire du passage à l'arc moitié de l'exponentielle complexe,

$$\begin{aligned} e^{a} - e^{b} &= e^{\frac{a+b}{2}}\left[e^{\frac{a-b}{2}} - e^{\frac{-(a-b)}{2}}\right] \\ &= 2e^{\frac{a+b}{2}}\,\mathrm{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} e^{a} + e^{b} &= e^{\frac{a+b}{2}}\left[e^{\frac{a-b}{2}} + e^{\frac{-(a-b)}{2}}\right] \\ &= 2e^{\frac{a+b}{2}}\,\mathrm{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right) \end{aligned}$$

Solution 41.

1. Soit x un rèel. Puisque $\mathrm{ch}(x)$ n'est pas nul, et d'après l'exercice ., on a

$$\begin{aligned}\mathrm{th}(2x) = \frac{\mathrm{sh}(2x)}{\mathrm{ch}(2x)} &= \frac{2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x)}\\ &= \frac{\mathrm{ch}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}\frac{2\,\mathrm{sh}(x)/\,\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}^2(x)/\,\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{2\,\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{th}^2(x)}\end{aligned}$$

et donc, $\mathrm{th}(2x) = \frac{2\,\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{th}^2(x)}$ (si on ne veut pas faire appel aux formules d'addition hyperboliques, le plus simple est de tout écrire en fonction de e^x). Maintenant, th ne s'annulant qu'en 0, pour x non nul, on a

$$\frac{2}{\mathrm{th}(2x)} = \frac{1+\mathrm{th}^2(x)}{\mathrm{th}(x)} = \frac{1}{\mathrm{th}(x)} + \mathrm{th}(x)$$

et donc,

$$\frac{2}{\mathrm{th}(2x)} - \frac{1}{\mathrm{th}(x)} = \mathrm{th}(x).$$

2. Soient a un réel strictement positif et n un entier naturel. Pour tout entier naturel k, le rèel $x = 2^k a$ n'est pas nul et d'après **1.**,

$$\begin{aligned}2^k\,\mathrm{th}(2^k a) &= 2^k\Big(\frac{2}{\mathrm{th}(2.2^k a)} - \frac{1}{\mathrm{th}(2^k a)}\Big)\\ &= \frac{2^{k+1}}{\mathrm{th}(2^{k+1}a)} - \frac{2^k}{\mathrm{th}(2^k a)}\end{aligned}$$

En sommant ces égalités pour k variant de 0 à n, on obtient par telescopage

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 2^k\,\mathrm{th}(2^k a) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^{k+1}}{\mathrm{th}(2^{k+1}a)} - \frac{2^k}{\mathrm{th}(2^k a)}\right)\\ &= \frac{2^{n+1}}{\mathrm{th}(2^{n+1}a)} - \frac{1}{\mathrm{th}(a)}\end{aligned}$$

Solution 42.

Notons

$$f(x) = \arctan(e^x) - \arctan(\mathrm{th}(x/2)).$$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^x \times \frac{1}{1+(e^x)^2} - \frac{1}{2}(1-\mathrm{th}^2(x/2))\frac{1}{1+\mathrm{th}^2(x/2)}\\ &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1}{2}(1-\mathrm{th}^2(x/2))\frac{1}{1+\mathrm{th}^2(x/2)}\\ &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{ch}^2(x/2)-\mathrm{sh}^2(x/2)}{\mathrm{ch}^2(x/2)+\mathrm{sh}^2(x/2)}\\ &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1}{2}\frac{1}{(e^x+e^{-x})/2}\\ &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{e^x}{1+e^{2x}}\\ &= 0\end{aligned}$$

La fonction f est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Comme

$$f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$

on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan(e^x) = \arctan(\operatorname{th}(x/2)) + \frac{\pi}{4}.$$

Solution 43.

1. Comme arctan et sh sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables. Puisque l'ensemble de définition de l'arccosinus est $[-1, 1]$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \in [0, 1] \subset [-1, 1],$$

la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$. Comme $1/\operatorname{ch}(x) = 1$ *si et seulement si* $x = 0$ et que arccos est dérivable sur $]-1, 1[$, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de fonctions dérivables.

2. Pour tout x dans $\mathbb{R}^*$, on a

$$f'(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{1 + \operatorname{sh}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$$

et

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)' \frac{1}{\sqrt{1 - (1/\operatorname{ch}(x))^2}} = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} \frac{1}{\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2(x) - 1}{\operatorname{ch}^2(x)}}} \\ &= \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} \frac{|\operatorname{ch}(x)|}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(x)}} = \frac{\operatorname{sh}(x)}{|\operatorname{sh}(x)| \operatorname{ch}(x)} \end{aligned}$$

car $\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{ch}(x) > 0$. Ainsi, comme $\operatorname{sh}(x)$ est du signe de $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = g'(x)$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad f'(x) = -g'(x).$$

Ainsi, il existe C et C' dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = g(x) + C$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad f(x) = -g(x) + C'.$$

Comme f et g sont contionues sur $\mathbb{R}$ enn tant que composée de fonctions continues. Ainsi, par continuité en 0,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = g(x) + C$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad f(x) = -g(x) + C'.$$

En particulier, $C = f(0) - g(0) = 0 - 0 = 0$ et $C' = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = g(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-, \quad f(x) = -g(x).$$

Solution 44.

1. f est clairement définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Puisque $0 < \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, g est définie sur $\mathbb{R}$. L'égalité $\dfrac{1}{\operatorname{ch} x} = 1$ n'ayant lieu que pour $x = 0$, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

2. On trouve $f'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $g'(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{|\operatorname{sh} x| \operatorname{ch} x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. En particulier $f' = g'$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $f - g$ est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et comme $f(0) = 0 = g(0)$ et que f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, on a $f(x) = g(x)$ pour tout $x \geqslant 0$. On remarque que f est impaire et g est paire, donc pour tout $x < 0$, $f(x) = -f(-x) = -g(-x) = -g(x)$.

Solution 45.

- Méthode trigonométrique :
  On a $\operatorname{ch} x + 1 = 2 \operatorname{ch}^2 \dfrac{x}{2}$. Donc
  $$\operatorname{argch}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}\right) = \operatorname{argch}\left(\operatorname{ch} \frac{x}{2}\right)$$
  et on conclut en considérant les cas $x \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$.

- Par dérivation :
  On pose $f(x) = \operatorname{argch}\left(\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}\right)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on trouve :
  $$f'(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{2|\operatorname{sh} x|}$$
  Donc $f'(x) = -\dfrac{1}{2}$ pour $x < 0$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2}$ pour $x > 0$. De plus, f est continue en 0 est $f(0) = 0$. On a donc $f(x) = \dfrac{|x|}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution 46.

1. sh est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et arctan est définie sur $\mathbb{R}$ donc $\arctan \circ \operatorname{sh}$ est définie sur $\mathbb{R}$. th est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1, 1[$ et arccos est définie sur $[-1, 1]$ donc $\arccos \circ \operatorname{th}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$.
   sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\arctan \circ \operatorname{sh}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. th est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1, 1[$ et arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ donc $\arccos \circ \operatorname{th}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. D'après la question précédente, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$f'(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}$$
   Or $1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$ donc $\dfrac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$. De plus, $1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ donc $\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^x}$ puisque $\operatorname{ch} x > 0$. Ainsi $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$. On en déduit que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. D'après la question précédente, f est constante sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(0) = \arctan 0 + \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$.
   Comme $\operatorname{Im} \operatorname{sh} = \mathbb{R}$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{sh} t = \dfrac{5}{12}$. On a alors $\operatorname{ch} t = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t}$ car $\operatorname{ch} t > 0$. On obtient $\operatorname{ch} t = \dfrac{13}{12}$. Ainsi $\operatorname{th} t = \dfrac{5}{13}$. On a alors $f(t) = \frac{\pi}{2}$ ce qui nous donne l'égalité de l'énoncé.