

Axiomes

EXERCICE 1.

Préciser pour chacun des triplets suivants les lois $+$ et \cdot qui les munissent d'une structure d'espace vectoriel ainsi que le vecteur nul.

1. $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$
2. $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$
3. $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$
4. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

EXERCICE 2.

Vérifier que l'ensemble \mathbb{R}_+^* muni des lois interne et externe suivantes

$$u \boxplus v = uv \quad \text{et} \quad \lambda \boxdot u = u^\lambda,$$

où u et v sont dans \mathbb{R}_+^* et $\lambda \in \mathbb{R}$, est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Sous-espaces vectoriels

EXERCICE 3.

L'axe réel dans \mathbb{C} est-il un sous-espace vectoriel du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C} ? du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} ?

EXERCICE 4.

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les ensembles suivants,

$$F = \left\{ (\lambda - 3\mu, 2\lambda + 3\mu, \lambda) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

et

$$G = \left\{ (x, y, z) \in E \mid x + 2y = 0 \right\}.$$

1. Prouver que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$.

EXERCICE 5.

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

1. $E_1 = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \right\};$
2. $E_2 = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid u_n = \mathcal{O}(n^2) \right\};$
3. $E_3 = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid u_n \sim \frac{1}{n} \right\};$
4. $E_4 = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid \exists k \in \mathbb{R}, u_n \sim \frac{k}{n} \right\}.$

EXERCICE 6.

Parmi les parties suivantes de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, déterminer celles qui sont des sous-espaces vectoriels,

1. L'ensemble des fonctions telles que $f(1) = 0$;
2. L'ensemble des fonctions telles que $f(0) = 1$;
3. L'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 ;
4. L'ensemble des fonctions monotones;
5. L'ensemble des fonctions impaires;
6. L'ensemble des fonctions 2π -périodiques.

EXERCICE 7.

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et X, Y deux parties de E . Prouver que

$$\text{vect}(X \cap Y) \subset \text{vect}(X) \cap \text{vect}(Y).$$

Donner un exemple où cette inclusion est *stricte*.

EXERCICE 8.

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

1. $E_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0, \text{ et } x + 3az = 0 \right\};$
2. $E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\};$
3. $E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\};$
4. $E_4 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \alpha y + 1 \geq 0 \right\}.$

EXERCICE 9.

Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$;
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$;
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0, y = z\}$;
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$;
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy \geq 0\}$;
6. $E_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \geq 0\}$;
7. $E_7 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(1) = 0\}$;
8. $E_8 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 1\}$;
9. $E_9 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est croissante}\}$.

EXERCICE 10.

Montrer qu'un \mathbb{K} -espace vectoriel E n'est jamais l'union de deux sous espaces-vectoriels stricts (i.e. distincts de E).

Sommes de sous-espaces vectoriels

EXERCICE 11.

Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 d'équation $x + y + z = 0$ et G le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 d'équations $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer la projection de (x, y, z) sur F (resp. G) parallèlement à G (resp. F).

EXERCICE 12.

Soient F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Montrer que F_1, \dots, F_p sont en somme directe *si et seulement si*

$$\forall k \in \llbracket 2, p \rrbracket, \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_j \right) \cap F_k = \{0_E\}$$

EXERCICE 13.

Soient F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie tels que $F_1 + \dots + F_p = E$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels G_1, \dots, G_p de E tels que $G_k \subset F_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $G_1 \oplus \dots \oplus G_p = E$.

EXERCICE 14.

On note E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites réelles de limite nulle et G l'ensemble des suites réelles constantes.

1. Montrer que E, F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

EXERCICE 15.

Soient E l'ensemble des suites réelles constantes, F l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant $u_{n+1} + u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, G l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant $u_{n+2} + u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et enfin H l'ensemble des suites réelles périodiques de période 4.

1. Montrer que E, F, G, H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que E, F, G sont inclus dans H .
3. Montrer que $E \oplus F \oplus G = H$.

EXERCICE 16.

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) + f(1) = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions constantes sur \mathbb{R} .

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

EXERCICE 17.

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Quelles assertions parmi les suivantes sont vraies en général ?

- | | |
|-------------------------------|--|
| 1. $F \cap G \subset F + G$; | 4. $F + F = F$; |
| 2. $F \cup G \subset F + G$; | 5. $F \cup (F \cap G) \subset F + G$; |
| 3. $F \subset F + G$; | 6. $F + G = G + F$. |

EXERCICE 18.

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .

1. Que pensez-vous de la proposition suivante,

$$F + G = F \text{ si et seulement si } F \supset G ?$$

2. Que pensez-vous de la proposition suivante,

$$F + G = F + H \implies G = H ?$$

EXERCICE 19.★

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E tels que

$$F + H = G + H, \quad F \cap H = G \cap H,$$

et $F \subset G$. Prouver que $F = G$.

EXERCICE 20.★

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, P le sous-ensemble de E formé par les fonctions paires et I le sous-ensemble de E formé par les fonctions impaires.

1. Montrer que P et I sont deux sous-espaces supplémentaires dans E .
2. Pour tout $f \in E$, la projection du vecteur f sur P parallèlement à I est appelée *partie paire* de f . On définit de même la *partie impaire* de f . Calculer les parties paire et impaire des fonctions suivantes : le cosinus, le sinus, l'exponentielle, $f : x \mapsto x^4 + x$.

EXERCICE 21.★★

Soient $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, \mathcal{C} l'ensemble des fonctions constantes sur $[0, 1]$, et \mathcal{A} l'ensemble des éléments de E s'annulant en 1.

1. Montrer que \mathcal{C} et \mathcal{A} sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .
2. Montrer que \mathcal{C} est également un supplémentaire dans E du sous-espace suivant

$$\mathcal{N} = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}.$$

3. Calculer les projections sur \mathcal{C} parallèlement à \mathcal{A} puis à \mathcal{N} d'une fonction $f \in E$.
4. Donner d'autres exemples de supplémentaires de \mathcal{C} dans E .

EXERCICE 22.

On note $E = \mathbb{R}^3$ et

$$F = \{(x, y, z) \in E \mid x + y - z = 0\}$$

et

$$G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Etablir que F et G sont des sev de E .
2. Déterminer $F \cap G$.
3. Prouver que $F + G = E$. La somme est-elle directe ?

EXERCICE 23.★★

Soient A, B et C trois sev d'un \mathbb{K} -ev E . On note

$$F = (A \cap B) + (A \cap C), \quad G = A \cap (B + (A \cap C))$$

et $H = A \cap (B + C)$.

1. Montrer que F et G sont des sev de H .
2. Etablir que $F = G$.
3. A-t-on toujours $F = G = H$?

EXERCICE 24.★★

Soient F, G, F' et G' quatre sev d'un \mathbb{K} -ev E tels que $F \cap G = F' \cap G'$. Etablir que

$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F.$$

EXERCICE 25.

On note E l'espace vectoriel réel des fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soient \mathcal{N} et \mathcal{A} les sous-ensembles de E définis par,

$$\mathcal{A} = \{f \in E \mid f \text{ affine}\}$$

et

$$\mathcal{N} = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}.$$

1. Prouver que \mathcal{A} et \mathcal{N} sont deux sous-espaces vectoriels de E .
2. Montrer que \mathcal{A} et \mathcal{N} sont supplémentaires dans E .
3. Déterminer la projection sur \mathcal{A} parallèlement à \mathcal{N} d'une fonction $f \in E$.

REMARQUE. On rappelle qu'une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est affine si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = at + b$. ■

Familles de vecteurs

EXERCICE 26.

Soit $\mathcal{F} = ((1, -2, 1), (2, -3, 1), (-1, 3, -2))$.

1. Le vecteur $(2, 1, 3)$ est-il combinaison linéaire de la famille \mathcal{F} ?
2. Même question pour le vecteur $(2, 5, -7)$.

EXERCICE 27. ★★

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n : x \mapsto \cos^n(x) \quad \text{et} \quad g_n : x \mapsto \cos(nx).$$

Montrer que pour tout n positif,

$$\text{vect}(f_k, 0 \leq k \leq n) = \text{vect}(g_k, 0 \leq k \leq n).$$

EXERCICE 28.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^3$ et

$$u = (1, -1, 1), \quad v = (0, 1, \alpha).$$

Déterminer une condition *nécessaire et suffisante* portant sur α pour que $(1, 1, 2) \in \text{vect}(u, v)$.