

DEVOIR SURVEILLÉ N°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 —

Partie I – Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right)$.

1. Étudier la parité de f .
2. a. Donner un équivalent de la fonction sh en 0 et en déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
 b. Déterminer la limite de f en 0.
3. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \left(\operatorname{th} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right)$$

4. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{th}(X) < X$.
5. En déduire le tableau de variations de f .
6. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $X \mapsto \frac{\operatorname{sh} X}{X}$.
7. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, f admet un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o \left(\frac{1}{x^4} \right)$$

où a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 sont cinq réels que l'on précisera.

8. Montrer que la fonction $g: x \in \mathbb{R}^* \mapsto f \left(\frac{1}{x} \right)$ se prolonge sur \mathbb{R} en une fonction continue notée G , puis prouver que G est dérivable sur \mathbb{R} .

Partie II – Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) suivante que l'on va résoudre sur différents intervalles.

$$(E) : xy' + y = \operatorname{ch} x$$

9. Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* .

10. Donner sans justification les solutions de (E) sur \mathbb{R}_- .
11. Justifier que la fonction G définie à la question I.8 est l'unique fonction dérivable sur \mathbb{R} qui soit solution de (E) sur \mathbb{R} .

Partie III – Une fonction définie par une intégrale

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $J(x) = \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt$.

12. Déterminer la parité de J.
13. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.
14. Justifier que J est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$J'(x) = f(x) \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{1}{x} \right)$$

15. En déduire le signe de J' sur \mathbb{R}_+^* . On exprimera le (ou les) zéro(s) de J' à l'aide de la fonction \ln .
16. a. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{sh} t \geq t + \frac{t^3}{6}$.
- b. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, J(x) \geq \frac{x}{2} + \frac{6}{x}$$

puis les limites de J en 0^+ et en $+\infty$.

17. Donner le tableau de variations de J sur \mathbb{R}_+^* .

18. On pose $h(x) = \frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

- a. Montrer que h est prolongeable par continuité en 0. On note encore h son prolongement.
- b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$J(x) - \frac{x}{2} = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} h(u) du$$

- c. Montrer

$$J(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x}{2} + \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

19. Montrer que la courbe de J admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique dont on précisera une équation. On donnera également la position de la courbe de J par rapport à cette asymptote.
20. Tracer l'allure de la courbe représentative de J sur \mathbb{R} .
On fera notamment figurer l'asymptote déterminée à la question III.19 ainsi que les tangentes horizontales éventuelles.

On donne pour le tracé $\frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})} \approx 0,76$ et $J\left(\frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}\right) \approx 0,65$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 1.

Dans cet exercice, on recherche les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 vérifiant la relation.

$$(E) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

On se donne donc dans un premier temps une telle fonction f .

1. Montrer que $f(0) \in \{0, 1\}$.
2. Montrer que si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle.

Dans les deux questions suivantes, on suppose $f(0) = 1$.

3. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y)$$

En déduire la valeur de $f'(0)$.

4. On pose $r = f''(0)$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = rf(x)$$

En déduire une expression de $f(x)$ en fonction de r et x . On distinguera les cas $r = 0$, $r > 0$ et $r < 0$.

5. Répondre à la question initialement posée.

EXERCICE 2.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? On justifiera à chaque fois sa réponse.

1. Si \mathcal{A} est une partie de \mathbb{R} dense dans \mathbb{R} , alors $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$ n'est pas dense dans \mathbb{R} .
2. \mathbb{Z} est dense dans \mathbb{R} .
3. Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux parties de \mathbb{R} telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ et \mathcal{A} est dense dans \mathbb{R} , alors \mathcal{B} est également dense dans \mathbb{R} .
4. Il existe des parties de \mathbb{R} bornées et denses dans \mathbb{R} .