Semaine du 09/05 au 13/05

1 Cours

Séries numériques

Généralités Définition, sommes partielles. Nature d'une série, somme. Si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) converge vers 0. Divergence grossière. Nature et somme d'une série géométrique. Reste d'une série convergente. Opérations sur les séries.

Comparaison à une intégrale Encadrement de $\sum f(n)$ où f est monotone. Nature d'une série de Riemann.

Séries à termes positifs Une série à terme positif converge ou diverge vers $+\infty$. Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, lien entre la convergence ou la divergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Absolue convergence. La convergence absolue implique la convergence. Relations de comparaison : lien entre domination/négligeabilité/équivalence et convergence/divergence des séries.

Matrices

Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ Définition d'une matrice à n lignes et p colonnes. Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Produit matriciel : bilinéarité et associativité. Transposition : linéarité, involutivité , transposée d'un produit. Matrices définies par blocs et produit de telles matrices.

Matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$ Structure d'anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Élément neutre I_n. Matrices inversibles. Groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$. Inverse d'un produit de matrices inversibles. Inverse d'une transposée de matrice inversible. Trace : linéarité, trace d'une transposée, trace d'un produit.

Matrices particulières de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ Matrices diagonales, triangulaires supérieures et inférieures. Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$. Matrices symétriques et antisymétriques. Structure de sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

2 Révisions

Structures algébriques : groupes, anneaux, corps

3 Méthodes à maîtriser

- Établir la convergence d'une série et calculer sa somme par télescopage.
- Comparer la somme partielle ou le reste d'une série à une intégrale.
- Comparer à une série de Riemann ou une série géométrique pour déterminer la nature d'une série.
- Calculer une puissance de matrice grâce à un polynôme annulateur ou à la formule du binôme de Newton.
- Calculer l'inverse d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur ou à l'aide du pivot de Gauss.

4 Démonstrations classiques

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n u_n$ converge.
- Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha \leqslant 1$.
- Déterminer un équivalent du reste de la série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.
- Montrer que l'absolue convergence d'une série implique sa convergence dans le cas réel puis dans le cas complexe.
- Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\text{vect}(I_n)$.
- Montrer que l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.