Devoir à la maison n°6

Problème 1 —

Pour tout entier naturel n, on considère l'équation différentielle

$$(\mathbf{E_n}) : \ (x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0$$

appelée équation de Legendre d'ordre n. Elle intervient très souvent lors de l'étude de phénomènes physiques comme la conduction de la chaleur. On recherchera des solutions de cette équation sur l'intervalle $\Omega =]-1,1[$.

Partie I – Résolution de $(\mathbf{E_0})$

1. Déterminer la solution générale de $(\mathbf{E_0})$ sur l'intervalle Ω.
2. Trouver les solutions f de $(\mathbf{E_0})$ telles que $f(0)=0$ et $f'(0)=1$.

Partie II – Résolution de $(\mathbf{E_1})$

1. Déterminer les solutions polynomiales non nulles de $(\mathbf{E_1})$. On pourra commencer par déterminer le degré d'une telle solution
2. Soit y une fonction définie sur $\Omega =]-1,1[$. Pour tout x dans $\Omega^* = \Omega \setminus \{0\}$, on pose $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$.
   - **a.** Montrer que si y est solution de $(\mathbf{E_1})$ sur Ω, alors, z vérifie sur Ω^* une équation différentielle du second ordre, notée $(\mathbf{E_1'})$, que l'on précisera.
   - **b.** Établir l'existence de trois réels α, β et γ tels que

$$\forall x \in \Omega^*, \ \frac{4x^2-2}{x(x^2-1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x+1}$$

   - **c.** Résoudre $(\mathbf{E_1'})$ sur chacun des intervalles $]-1,0[$ et $]0,1[$.
   - **d.** En déduire la solution générale de $(\mathbf{E_1})$ sur l'intervalle Ω.

Partie III – Cas général

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des solutions polynomiales de $(\mathbf{E_n})$ sur $\mathbb{R}$ où n est un entier supérieur ou égal à 2. On considère une fonction polynômiale P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} a_k x^k$ où $a_0, \dots, a_q$ sont des réels et $a_q \neq 0$.

1. Montrer que si $P \in \mathcal{P}_n$, alors $q = n$ et $a_{n-1} = 0$.
2. On suppose que $P \in \mathcal{P}_n$.
   - **a.** Trouver une relation de récurrence liant a_k et a_{k+2}.
   - **b.** Vérifier que $a_{n-2k-1} = 0$ pour tout entier naturel k tel que $2k+1 \leqslant n$.
   - **c.** Montrer que, pour tout entier naturel k tel que $2k \leqslant n$, on a

$$a_{n-2k} = (-1)^k \frac{\binom{2n-2k}{n-2k}\binom{n}{k}}{\binom{2n}{n}} a_n$$

   - **d.** En déduire $\mathcal{P}_n$.
   - **e.** A titre d'exemple, préciser $\mathcal{P}_4$.