Devoir à la maison n°14

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Partie I – Division selon les puissances croissantes

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant.

Division selon les puissances croissantes

Soient $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $B(0) \neq 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + X^{p+1}R$ et $\deg Q \leqslant p$. On appelle Q et R le quotient et le reste de la division de A par B selon les puissances croissantes à l'ordre p.

1. Montrer l'unicité du couple (Q, R).
2. En raisonnant par récurrence sur p, montrer l'existence du couple (Q, R).
3. On donne ci-dessous un exemple de calcul effectif d'une division selon les puissances croissantes. Avec les notations précédentes, $A = 3 + 4X - X^3$, $B = 1 - 2X + X^3$ et $p = 2$.
   On a donc $A = B \times (3 + 10X + 20X^2) + 36X^3 - 10X^4 - 20X^5$. Ainsi le quotient est $Q = (3 + 10X + 20X^2)$ et le reste est $R = 36 - 10X - 20X^2$.

$$
\begin{array}{crcrcrcrcrcr|l}
 & 3 & + & 4X & & & - & X^3 & & & & & 1 - 2X + X^3 \\
\ominus & 3 & - & 6X & & & + & 3X^3 & & & & & 3 + 10X + 20X^2 \\
\cline{2-8}
 & & & 10X & & & - & 4X^3 & & & & & \\
\ominus & & & 10X & - & 20X^2 & & & + & 10X^4 & & & \\
\cline{4-10}
 & & & & & 20X^2 & - & 4X^3 & - & 10X^4 & & & \\
\ominus & & & & & 20X^2 & - & 40X^3 & & & + & 20X^5 & \\
\cline{6-12}
 & & & & & & & 36X^3 & - & 10X^4 & - & 20X^5 &
\end{array}
$$

   Effectuer la division selon les puissances croissantes de $A = 2 - X + X^2 - X^3$ par $B = 1 - 2X + X^2$ à l'ordre 2. On présentera les calculs comme dans l'exemple et on donnera le quotient et le reste de cette division.

Partie II – Application aux développements limités

1. Soit $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $B(0) \neq 0$. On note Q le quotient de la division selon les puissances croissantes de A par B à l'ordre p. Justifier le développement limité suivant

$$\frac{A(x)}{B(x)} \underset{x \to 0}{=} Q(x) + o(x^p)$$

2. Soient f et g deux fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies au voisinage de 0. On suppose qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}_p[X]^2$ tel que $B(0) \neq 0$, $f(x) \underset{x \to 0}{=} A(x) + o(x^p)$ et $g(x) \underset{x \to 0}{=} B(x) + o(x^p)$. On note Q le quotient de la division selon les puissances croissantes de A par B à l'ordre p. Montrer avec soin que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to 0}{=} Q(x) + o(x^p)$$

3. A l'aide de la question précédente, déterminer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{\cos x}{\exp x}$.

Partie III – Décomposition en éléments simples

1. Ecrire la division selon les puissances croissantes de $X^3 - 1$ par $X + 1$ à l'ordre 3. En déduire la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^3 - 1}{X^4(X+1)}$.

2. Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^2 + 1}{(X-1)^4(X+1)^3}$ à l'aide de la division selon les puissances croissantes.