

SEMAINE DU 22/05 AU 26/05

1 Cours

Matrices

Matrices à coefficients dans \mathbb{K} Définition d'une matrice à n lignes et p colonnes. Structure de \mathbb{K} -espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Produit matriciel : bilinéarité et associativité. Transposition : linéarité, involutivité, transposée d'un produit. Matrices définies par blocs et produit de telles matrices.

Matrices carrées à coefficients dans \mathbb{K} Structure d'anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Élément neutre I_n . Matrices inversibles. Groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$. Inverse d'un produit de matrices inversibles. Inverse d'une transposée de matrice inversible. Trace : linéarité, trace d'une transposée, trace d'un produit.

Matrices particulières de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ Matrices diagonales, triangulaires supérieures et inférieures. Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$. Matrices symétriques et antisymétriques. Structure de sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Représentation des vecteurs Matrice colonne d'un vecteur dans une base. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. L'application qui à un vecteur associe sa matrice dans une base est un isomorphisme.

Opérations sur les lignes et colonnes d'une colonne Interprétation matricielle des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes d'une matrice. Calcul de l'inverse par pivot de Gauss. Calcul du rang par pivot de Gauss.

Représentation des applications linéaires Matrice d'une application linéaire dans des bases. L'application qui à une application linéaire associe sa matrice dans des bases est un isomorphisme. Interprétation matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire. La matrice d'une composée est le produit des matrices. Une application linéaire est bijective **si et seulement si** sa matrice est inversible et la matrice de la bijection réciproque est l'inverse de la matrice.

Représentation des endomorphismes Matrice d'un endomorphisme dans une base. L'application qui à un endomorphisme associe sa matrice dans une base est un isomorphisme d'algèbres. $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles et inverses l'une de l'autre **si et seulement si** $AB = I_n$ ou $BA = I_n$.

Noyau, image et rang de matrices Noyau, image et rang d'une matrice. Critère d'inversibilité d'une matrice carrée : noyau nul. Invariance du rang par multiplication par une matrice inversible. Invariance du rang par transposition. Le rang est la taille de la plus grande matrice carrée inversible extraite. Caractérisation de l'inversibilité par le rang.

Changement de base Matrice de passage d'une base vers une autre base. Formule de changement de bases pour les vecteurs, les applications linéaires et les endomorphismes. Matrices équivalentes. Deux matrices sont équivalentes **si et seulement si** elles ont même rang. Matrices semblables. Deux matrices semblables ont même trace. Trace d'un endomorphisme.

Systèmes linéaires Interprétation matricielle d'un système linéaire. Structure de l'ensemble des solutions d'un système. Système de Cramer : définition et unicité de la solution.

Déterminants

Groupe symétrique Permutation. Structure de groupe de (\mathfrak{S}_n, \circ) . Transposition et cycle. Décomposition d'une permutation en produits de transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Signature : unique morphisme non trivial de (\mathfrak{S}_n, \circ) dans $(\{-1, +1\}, \times)$.

Applications multilinéaires Définition et exemples. Application multilinéaire symétrique, antisymétrique, alternée. Une application multilinéaire est antisymétrique **si et seulement si** elle est alternée.

Déterminant d'une famille de vecteurs Le déterminant $\det_{\mathcal{B}}$ dans une base \mathcal{B} d'un espace vectoriel E de dimension n est l'unique forme n -linéaire alternée sur E valant 1 en \mathcal{B} . Toute forme n -linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$. Formule de changement de base. Une famille \mathcal{F} de n vecteurs de E est une base **si et seulement si** $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$. Interprétation géométrique du déterminant en dimension 2 ou 3.

Déterminant d'une matrice carrée Définition comme déterminant des vecteurs colonnes. Le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base est égal au déterminant de sa matrice dans cette base. Propriétés : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$; $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$; $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$; $\det({}^t A) = \det(A)$. Effet sur le déterminant des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire ou triangulaire par blocs. Déterminants de Vandermonde. Comatrice : définition. ${}^t \text{com}(A)A = A{}^t \text{com}(A) = \det(A)I_n$.

2 Méthodes à maîtriser

- ▶ Calculer une puissance de matrice grâce à un polynôme annulateur ou à la formule du binôme de Newton.
- ▶ Calculer l'inverse d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur ou à l'aide du pivot de Gauss.
- ▶ Écrire la matrice d'une application linéaire dans des bases ou d'un endomorphisme dans une base.
- ▶ Déterminer noyau, image et rang d'une matrice par pivot de Gauss.
- ▶ Traduire matriciellement des informations sur des applications linéaires ou des endomorphismes et inversement.
- ▶ Décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints.
- ▶ Calculer la signature d'une permutation.
- ▶ Caractériser le fait qu'une famille de vecteurs est une base et qu'une matrice est inversible via le déterminant.
- ▶ Calculer un déterminant par la méthode du pivot de Gauss.
- ▶ Développer un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- ▶ Établir des relations de récurrence pour calculer un déterminant.

3 Questions de cours

Pas de question de cours cette semaine.