

Suites de fonctions

Exercice 1 ★★★

ENS MP 2010

Soient $d \in \mathbb{N}$ et (P_n) une suite de polynômes de $\mathbb{R}_d[X]$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) (P_n) converge dans $\mathbb{R}_d[X]$.
- (ii) (P_n) converge simplement sur $[0, 1]$.
- (iii) (P_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 2 ★★★

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $p \in \mathbb{N}$. On considère une suite (P_n) de fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à p qui converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction f .

Montrer que f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à p et que (P_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Exercice 3 ★

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . On suppose que la suite $(f^{(n)})$ des dérivées successives converge uniformément vers une fonction φ sur \mathbb{R} . Que peut-on dire de φ ?

Exercice 4 ★★

CCP MP

On pose $f_n : x \mapsto n \cos^n(x) \sin(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- 1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur \mathbb{R} .
- 2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ où $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$?
- 3. Soit g continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) g(t) dt = g(0)$$

Exercice 5 ★★★★★

Théorème de Dini

- 1. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} . Montrer que si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$, alors la convergence est uniforme.
- 2. Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes, réelles et continues sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} . Montrer que si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$, alors la convergence est uniforme.

Exercice 6 ★★

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.

$$\text{Calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}^1 x^{\frac{1}{n}} f(x) dx.$$

Exercice 7

Soit $f : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow [0, 1] \\ x & \longmapsto 2x(1-x) \end{cases}$. On définit la suite de fonctions (f_n) par $f_0 = \text{Id}_{[0,1]}$ et $f_{n+1} = f \circ f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de la suite (f_n) .

Exercice 8 ★★

Soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto n \cos^n(x) \sin(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) sur \mathbb{R} .

Exercice 9 ★★★

Soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin^n(x) \cos(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) sur \mathbb{R} .

Exercice 10 ★★★

Soit (P_n) la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

- $P_0(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$;
- $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x)^2)$ pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

3. En déduire que la suite (P_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exercice 11 ★★

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R}_+ vers une fonction f à déterminer.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Exercice 12 ★

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n : x \in [0, 1] \mapsto n^\alpha x^n (1 - x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$.

Séries de fonctions**Exercice 13 ★★**

On note $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{nx^{2n-1}}{1 - x^{2n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de S .
2. Montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur D .
3. Étudier les variations de S sur D .
4. Étudier les limites de S aux bornes de D .

Exercice 14 ★★**Mines-Ponts PC**

On pose $f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+x}} \right) - 2\sqrt{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum_{n \geq 1} f_{n+1} - f_n$.
2. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f de classe \mathcal{C}^1 .
3. Calculer $\int_0^1 f(t) dt$.

Exercice 15 ★★★

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante de limite nulle. On pose $f_n : x \mapsto \sin nx$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} a_n f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

Exercice 16 ★★★★★

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. On pose $f_n : x \mapsto \sin nx$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} a_n f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} si et seulement si la suite (na_n) converge vers 0.

Exercice 17 ★★★

Mines-Télécom MP 2018

1. Déterminer l'ensemble de définition de la série de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$. Donner un équivalent simple de f en 0.
2. Mêmes questions avec $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$.

Exercice 18 ★★

Mines-Télécom MP 2017

On définit la suite de fonctions (g_n) de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} par $g_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], g_{n+1}(x) = \int_0^x g_n(1-t) dt$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|g_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|g_{n-1}\|_\infty$.
2. On pose $G : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.
Montrer que G est bien définie sur $[0, 1]$ et déterminer une équation différentielle vérifiée par G .
3. En déduire l'expression de G .

Exercice 19 ★★★★★

Banque Mines-Ponts MP 2019

1. Existe-t-il une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = k$?
2. Existe-t-il une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = \frac{1}{k^2}$?

Exercice 20

CCINP (ou CCP) PC 2019

Soit $t \in \mathbb{R}$ et on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{nt})$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \ln(2)$.
3. Montrer que $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = +\infty$.

Exercice 21

CCINP (ou CCP) MP 2019

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

1. Pour $t \in]0, 1[$, écrire $\frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ comme somme de série $\sum_{n \geq 0} u_n(t)$, où les u_n sont des fonctions puissances.
2. Déterminer la nature de la série $\sum \int_0^1 |u_n(t)| dt$. Que peut-on en déduire ?
3. Soit $S_N(t) = \sum_{n=0}^N u_n(t)$. Démontrer

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_N(t) dt$$

4. En déduire

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$$

5. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 22 ★

Soit $\alpha > 0$. On pose $f_n : x \mapsto e^{-n^\alpha x}$ et $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Étudier la continuité de f .
3. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 23 ★★★**Arts et Métiers PSI**

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Soit (f_n) la suite de fonctions définies par $f_0 = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [a, b], f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$$

1. Déterminer la nature de la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ sur $[a, b]$.
2. On note F la somme de cette série. Montrer que

$$\forall x \in [a, b], F(x) = f(x) + e^x \int_a^x e^{-t} f(t) dt$$

Exercice 24 ★★★★★**Centrale MP**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : x \mapsto x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
2. On note g la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .
3. On pose $f : x \mapsto g(x) - \ln(x)$. Montrer que f vérifie les trois conditions suivantes :
 - (i) $f(1) = 0$.
 - (ii) f est convexe sur \mathbb{R}_+^* ;
 - (iii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) - f(x) = \ln(x)$;
4. Réciproquement, soit f vérifiant les trois conditions de la question précédente. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x \ln(n) + \ln(n!) - \sum_{k=0}^n \ln(x+k)$$

Séries alternées**Exercice 25 ★★****CCINP (ou CCP) MP 2018**

Soit (λ_n) une suite strictement croissante de réels strictement positifs de limite $+\infty$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_n(x) = (-1)^n e^{-\lambda_n x}$$

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum f_n$ sur \mathbb{R}_+^* .
2. Étudier sa convergence uniforme sur \mathbb{R}_+^* .
3. On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} S(t) dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$$

Exercice 26 ★★

CCINP (ou CCP) PC 2017

On considère pour $x > 0$ la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

1. f est-elle bien définie et continue sur \mathbb{R}_+^* ?
2. Montrer que

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$

3. Montrer que

$$\forall x > 0, 2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$$

4. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
5. Déterminer un équivalent de f en 0^+ .
6. Montrer que :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

Exercice 27 ★★

Fonction ζ alternée

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de S .
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x \in D$,

$$2S(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n(x)$$

$$\text{avec } u_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

4. En déduire la limite de S en 0^+ .

Exercice 28

CCINP (ou CCP) MP 2021

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que S est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

2. À l'aide du critère spécial des séries alternées, trouver la monotonie de S .
3. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$$

puis en déduire un équivalent simple de $S(x)$ pour x qui tend vers 0.

Exercice 29 ★★★

On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$ pour $x > 0$.

1. Justifier que S est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .
2. Étudier la limite de S en $+\infty$.
3. Montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

Approximations

Exercice 30 ★★★

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f(t)t^k dt = 0$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 31 ★★★**Lemme de Riemann-Lebesgue**

On considère un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} et un espace vectoriel normé de dimension finie E .

1. Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans E . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} \varphi(t) \, dt = 0$$

2. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans E . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) \, dt = 0$$

3. Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R} à valeurs dans E . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t) \, dt = 0$$