

# SUITES NUMÉRIQUES

## SOLUTION 1.

1. Les racines de l'équation caractéristique

$$z^2 - z - 1 = 0,$$

sont

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

il existe donc  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall n \geq 0$ ,

$$u_n = \lambda \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

$$u_0 = 0 = \lambda + \mu, \quad u_1 = 1 = -\sqrt{5}\lambda,$$

on aboutit à

$$\lambda = -\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

On a donc,  $\forall n \geq 0$ ,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

2. Posons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\alpha_n = \phi_{n+1}^2 - \phi_n \phi_{n+2}.$$

On a alors ,

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \phi_{n+1}^2 - \phi_n(\phi_{n+1} + \phi_n) \\ &= \phi_{n+1}^2 - \phi_n^2 - \phi_n \phi_{n+1} \\ &= \phi_{n+1}(\phi_{n+1} - \phi_n) - \phi_n^2 \\ &= \phi_{n+1} \phi_{n-1} - \phi_n^2 \\ &= -\alpha_{n-1} \end{aligned}$$

La suite  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  est donc géométrique de raison  $-1$  et de premier terme  $\alpha_0 = 1$ , on a donc pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\phi_{n+1}^2 = \phi_n \phi_{n+2} + (-1)^n.$$

3. On prouve par une récurrence sans difficulté que

$$\forall n \geq 1, \quad u_n > 0,$$

ce qui justifie l'existence de la somme étudiée que nous noterons  $\sigma_n$ . D'après la formule démontré à la question 2., pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\phi_{k+1}^2 = \phi_k \phi_{k+2} + (-1)^k,$$

d'où en divisant par  $\phi_k \phi_{k+1} > 0$ ,

$$\frac{\phi_{k+1}}{\phi_k} = \frac{\phi_{k+2}}{\phi_{k+1}} + \frac{(-1)^k}{\phi_k \phi_{k+1}},$$

et donc

$$\alpha_k = \frac{(-1)^k}{\phi_k \phi_{k+1}} = \beta_k - \beta_{k+1}$$

où

$$\beta_k = \frac{\phi_k}{\phi_{k+1}}.$$

Après telescoping, il reste donc

$$\sigma_n = \beta_1 - \beta_{n+1}.$$

Or ,

$$\phi_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n ,$$

d'où

$$\beta_{n+1} \sim \frac{1+\sqrt{5}}{2} ,$$

et puisque  $\beta_1 = 1$  ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} .$$

### SOLUTION 2.

---

On prouve par une récurrence sans difficulté que

$$\forall n \geq 0, u_n > 0.$$

Posons alors

$$v_n = \frac{1}{u_n}.$$

Pour tout  $n \geq 0$  ,

$$v_{n+2} = \frac{1}{2}(v_{n+1} + v_n).$$

On reconnaît une récurrence linéaire d'ordre deux d'équation caractéristique

$$2r^2 - r - 1 = (2r + 1)(r - 1) = 0$$

Il existe donc  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall n \geq 0, v_n = \lambda + \mu \left( -\frac{1}{2} \right)^n ,$$

et plus précisément,

$$\lambda = \frac{v_0 + 2v_1}{3} = \frac{u_1 + 2u_0}{3u_0u_1} > 0$$

et

$$\mu = \frac{2v_0 - 2v_1}{3}.$$

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lambda,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3u_0u_1}{2u_0 + u_1}.$$

### SOLUTION 3.

---

On prouve par une récurrence sans difficulté que

$$\forall n \geq 0, u_n > 0.$$

Posons alors

$$v_n = \ln(u_n).$$

Pour tout  $n \geq 0$  ,

$$v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{3}v_n.$$

Les racines de l'équation caractéristique

$$z^2 - \frac{z+2}{3} = 0,$$

sont 1 et  $-\frac{2}{3}$ , il existe donc  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $\forall n \geq 0$ ,

$$v_n = \lambda + \mu \left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lambda.$$

Puisque

$$v_0 = \lambda + \mu, \quad v_1 = \lambda - \frac{2\mu}{3},$$

on aboutit à

$$\lambda = \frac{2v_0 + 3v_1}{5} = \frac{\ln(u_0^2 u_1^3)}{5},$$

et par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = (u_0^2 u_1^3)^{\frac{1}{5}}.$$

#### SOLUTION 4.

##### 1. L'équation caractéristique

$$2x^2 = 3x - 1$$

admet pour solutions 1 et  $\frac{1}{2}$ . Il existe donc  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que,

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = \lambda + \mu \frac{1}{2^n}.$$

On calcule  $\mu$  et  $\lambda$  grâce aux deux premiers termes de la suite,

$$\lambda + \mu = -1, \quad \lambda + \mu \frac{1}{2} = 1,$$

ainsi  $\lambda = 3$  et  $\mu = -4$  et

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = 3 - \frac{4}{2^n}.$$

##### 2. L'équation caractéristique

$$4x^2 = 4x - 1$$

admet la racine double  $\frac{1}{2}$ . Il existe donc  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que,

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = \frac{\lambda + \mu n}{2^n}.$$

On calcule  $\mu$  et  $\lambda$  grâce aux deux premiers termes de la suite,

$$\lambda = 1, \quad \frac{\lambda + \mu}{2} = 9,$$

ainsi  $\lambda = 1$  et  $\mu = 17$  et

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = \frac{17n + 1}{2^n}.$$

## 3. L'équation caractéristique

$$x^2 = x + 1$$

admet pour solutions

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Il existe donc  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que ,

$$\forall n \geq 0, v_n = \lambda \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \mu \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

On calcule  $\mu$  et  $\lambda$  grâce aux deux premiers termes de la suite ,

$$\lambda + \mu = 0, \quad \lambda \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \mu \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,$$

ainsi  $\lambda = -\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$  et  $\forall n \geq 0$ ,

$$v_n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

## 4. L'équation caractéristique

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4) = 0$$

admettant 2 et 4 pour racines, il existe deux nombres réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que pour tout  $n \geq 0$  ,

$$u_n = \lambda 2^n + \mu 4^n.$$

En particulier , pour  $n = 0$  et  $n = 1$  , on a les équations suivantes,

$$u_0 = 1 = \lambda + \mu, \quad u_1 = 1 = 2\lambda + 4\mu.$$

On trouve alors que  $\lambda = \frac{3}{2}$  et  $\mu = -\frac{1}{2}$  et donc

$$\forall n \geq 0, u_n = 3 \times 2^{n-1} - 2^{2n-1}.$$

**SOLUTION 5.**1. Soit HR(n) l'hypothèse de récurrence  $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n$ .

On a  $u_2 = \sqrt{u_1} \geq u_1$  car  $u_1 \in ]0, 1[$ . Ainsi HR(2) est vérifiée.

Supposons HR(n) vraie pour un certain  $n \geq 2$ . Alors  $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-2}} \geq 0$  d'après notre hypothèse de récurrence.

Donc HR(n + 1) est vraie.

On en déduit que  $(u_n)$  est croissante.

**REMARQUE.** On est obligé d'initialiser au rang 2 car l'étape d'hérédité  $\text{HR}(n) \Rightarrow \text{HR}(n + 1)$  fait intervenir  $u_{n-2}$ . ■

2. Montrons par récurrence double que  $(u_n)$  est majorée par 4. On a bien  $u_0 \leq 4$  et  $u_1 \leq 4$ . Supposons que  $u_n \leq 4$  et  $u_{n+1} \leq 4$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $u_{n+2} \leq \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$ .

**REMARQUE.** Comment trouver le majorant ? On choisit un majorant M qui nous arrange i.e. tel que  $\sqrt{M} + \sqrt{M} \leq M$ . On vérifie ensuite qu'il convient. ■

$(u_n)$  est croissante et majorée donc elle converge. Par continuité de la racine carrée, sa limite l vérifie  $l = \sqrt{l} + \sqrt{l}$  donc  $l = 4$ .

**SOLUTION 6.**

1. On raisonne par récurrence double. Tout d'abord,  $u_0, u_1 \in ]0, 1[$ . On suppose alors que  $u_n, u_{n+1} \in ]0, 1[$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $\sqrt{u_n}, \sqrt{u_{n+1}} \in ]0, 1[$  puis  $u_{n+2} \in ]0, 1[$ . On conclut que  $u_n \in ]0, 1[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- Si  $u_n \leq u_{n+1}$ , alors  $v_n = u_n$ . De plus,  $u_{n+2} \geq \sqrt{u_n} \geq u_n$  puisque  $u_n \in ]0, 1[$ . On a donc  $v_{n+1} = \min(u_{n+1}, u_{n+2}) \geq u_n = v_n$ .
- Si  $u_n \geq u_{n+1}$ , alors  $v_n = u_{n+1}$ . De plus,  $u_{n+2} \geq \sqrt{u_{n+1}} \geq u_{n+1}$  puisque  $u_{n+1} \in ]0, 1[$ . On a donc  $v_{n+1} = \min(u_{n+1}, u_{n+2}) = u_{n+1} = v_n$ .

Dans les deux cas,  $v_{n+1} \geq v_n$ . Ainsi  $(v_n)$  est croissante.

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- Si  $u_n \leq u_{n+1}$ , alors  $v_n = u_n$ . De plus,  $u_{n+2} \geq \sqrt{u_n} \geq u_n$  puisque  $u_n \in ]0, 1[$ . Donc  $\sqrt{u_{n+2}} \geq \sqrt{u_n}$ . On a également  $u_{n+3} \geq \sqrt{u_n}$  puisque  $\sqrt{u_{n+1}} \geq \sqrt{u_n}$  et  $\sqrt{u_{n+2}} \geq \sqrt{u_n}$ . On a montré que  $u_{n+2} \geq \sqrt{u_n}$  et  $u_{n+3} \geq \sqrt{u_n}$  donc  $v_{n+2} \geq \sqrt{u_n} = \sqrt{v_n}$ .
- Si  $u_n \geq u_{n+1}$ , alors  $v_n = u_{n+1}$ . De plus,  $u_{n+2} \geq \sqrt{u_{n+1}} = \sqrt{v_n} \geq v_n$  puisque  $v_n = u_{n+1} \in ]0, 1[$ . On a également  $u_{n+3} \geq \sqrt{v_n}$  puisque  $u_{n+2} \geq v_n$  et  $u_{n+1} = v_n$ . On a alors  $u_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$  et  $u_{n+3} \geq \sqrt{v_n}$  donc  $v_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$ .

Dans les deux cas,  $v_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$ .

4. On a  $v_n \in ]0, 1[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  donc  $(v_n)$  est bornée et croissante ; elle converge. Notons  $l$  sa limite. On a bien entendu  $l \in [0, 1]$ . De plus,  $v_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$  donc par passage à la limite (la fonction racine carrée est continue),  $l \geq \sqrt{l}$  et donc  $l \geq 1$ . Ainsi  $l = 1$ . De plus  $v_n \leq u_n < 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  donc, d'après le théorème des gendarmes,  $(u_n)$  converge vers 1.

#### SOLUTION 7.

L'équation caractéristique associée à cette suite récurrente est  $X^2 - (3 - 2i)X + 5 - 5i = 0$ . Son discriminant est  $\Delta = -15 + 8i$ . Soit  $\delta = x + iy$  une racine carrée de  $\Delta$ . On a donc 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 - y^2 = -15 \\ 2xy = 8 \end{cases}$$
 On en déduit  $\delta = \pm(1 + 4i)$ . Les racines de l'équation caractéristique sont donc  $\frac{3-2i+1+4i}{2} = 2 + i$  et  $\frac{3-2i-1-4i}{2} = 1 - 3i$ . On en déduit que le terme général  $u_n$  est de la forme  $\lambda(2 + i)^n + \mu(1 - 3i)^n$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Les conditions  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 1 + 4i$  donnent 
$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda(2 + i) + \mu(1 - 3i) = 1 + 4i \end{cases}$$
 On trouve  $\lambda = 1$  et  $\mu = -1$ . Ainsi  $u_n = (2 + i)^n - (1 - 3i)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

#### SOLUTION 8.

Tout d'abord, une récurrence simple montre que  $(u_n)$  est bien définie et positive. Supposons que  $u_n \geq 1$  pour tout  $n \geq 1$ . Alors pour tout  $n \geq 2$ ,  $1 + u_n u_{n-1} \geq u_n$  et donc  $u_{n+1} \leq u_n$ . La suite  $(u_n)$  est donc décroissante et minorée par 1 à partir du rang 2 : elle converge vers une certaine limite  $l$  vérifiant  $l = \frac{l^2}{1+l^2}$ , ce qui équivaut à  $l(1 - l + l^2) = 0$ . Or  $1 - l + l^2 \neq 0$  (considérer le discriminant du trinôme) donc  $l = 0$ , ce qui est absurde puisque  $(u_n)$  est minorée par 1. On en déduit qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u_{n_0} < 1$ . De plus,  $u_{n+1} \leq u_n^2 \leq u_n$  pour tout  $n \geq n_0$ . La suite  $(u_n)$  est décroissante à partir du rang  $n_0$  et minorée par 0. On en déduit qu'elle converge mais ce qui précède montre que  $(u_n)$  ne peut converger que vers 0.

#### SOLUTION 9.

1. Puisque  $\forall n \geq 0$ , on a  $a_{5n} = 0$  et  $a_{5n+1} = -1/5$ , la suite  $(a_n)$  n'a pas de limite lorsque  $n$  tend  $+\infty$ .

2. Puisque  $\forall n \geq 2$ , on a

$$b_n - b_{n-1} = \cos\left(\frac{n\pi}{5}\right),$$

cette suite est donc périodique non constante et ne converge donc pas vers 0 ; la suite  $(b_n)_{n \geq 1}$  n'est donc pas convergente.

3. Puisque  $\forall n \geq 0$ , on a

$$\frac{n^2 - 3n + 1}{n + 2} = n - 5 \frac{11}{n + 2},$$

on a

$$c_n = (-1)^{n+1} \cos\left(\frac{11\pi}{n+2}\right),$$

et donc, par continuité de la fonction cosinus,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_{2n} = -1$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_{2n+1} = 1.$$

La suite  $(a_n)$  n'a donc pas de limite lorsque  $n$  tend  $+\infty$ .

#### SOLUTION 10.

1. Pour tout  $n \geq 1$ ,

$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0,$$

la suite  $(H_n)_{n \geq 1}$  est donc croissante. On en déduit, d'après le théorème des suites monotones, qu'elle est soit majorée et convergente, soit non majorée et tend vers  $+\infty$  avec  $n$ .

2. Pour tout  $n \geq 1$ ,

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k},$$

or  $\forall n + 1 \leq k \leq 2n$ ,

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n},$$

d'où

$$H_{2n} - H_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

On montre que  $H_n$  tend vers  $+\infty$  par l'absurde : supposons le contraire, d'après le résultat de la question 1.,  $(H_n)_{n \geq 1}$  est donc convergente de limite  $\ell \in \mathbb{R}$ . La suite extraite  $(H_{2n})_{n \geq 1}$  converge aussi vers  $\ell$ , d'où par passage à la limite dans l'inégalité obtenue à la question 2. :

$$0 \geq \frac{1}{2},$$

ce qui est absurde. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty.$$

#### SOLUTION 11.

1. On a bien-sûr que la suite  $(\alpha_n)$  est nulle donc elle converge vers 0.

2. Etude de  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .a. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a

$$n^2 + 3n - (n+1)^2 = n-1 \geq 0 \text{ et } (n+2)^2 - n^2 - 3n = n+4 > 0$$

ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)^2 \leq n^2 + 3n < (n+2)^2.$$

b. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n+1 \leq \sqrt{n^2 + 3n} < n+2,$$

et donc  $\lfloor \sqrt{n^2 + 3n} \rfloor = n+1$  puis  $\beta_n = \sqrt{n^2 + 3n} - (n+1)$ .c. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\beta_n = \sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 3n - (n+1)^2}{\sqrt{n^2 + 3n} + n+1} = \frac{n-1}{\sqrt{n^2 + 3n} + n+1}$$

Ainsi,

$$\beta_n = \frac{n-1}{n(\sqrt{1+3/n} + 1 + 1/n)} \sim \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

et la suite  $(\beta_n)$  est convergente de limite  $1/2$ .3. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas car admet deux sous-suites  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$  convergente mais de limites différentes.**SOLUTION 12.**1. En utilisant les formules d'addition on a pour tout  $n$  :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sin(n\alpha + \alpha) = \sin(\alpha) \cos(n\alpha) + \cos(\alpha) \sin(n\alpha) = \sin(\alpha)v_n + \cos(\alpha)u_n \\ v_{n+1} = \cos(n\alpha + \alpha) = \cos(\alpha) \cos(n\alpha) - \sin(\alpha) \sin(n\alpha) = \cos(\alpha)v_n - \sin(\alpha)u_n \end{cases}$$

Puisque  $\sin(\alpha) \neq 0$  grâce à l'hypothèse sur  $\alpha$ , on en déduit les relations

$$v_n = \frac{1}{\sin(\alpha)} (u_{n+1} - \cos(\alpha)u_n). \quad (1)$$

et

$$u_n = \frac{1}{\sin(\alpha)} (\cos(\alpha)v_n - v_{n+1}). \quad (2)$$

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $\ell$ , la relation (1) entraîne que  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell(1 - \cos(\alpha))}{\sin(\alpha)}$ . De même, si  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $\ell'$ , la relation (2) entraîne que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell'(\cos(\alpha) - 1)}{\sin(\alpha)}$ .

2. Si les deux suites sont convergentes de limites respectives  $\ell$  et  $\ell'$ , on a alors d'après la question précédente le système suivant :

$$\begin{cases} \ell' = \frac{\ell(1 - \cos(\alpha))}{\sin(\alpha)} \\ \ell = \frac{\ell'(\cos(\alpha) - 1)}{\sin(\alpha)} \end{cases}$$

Il en découle que  $\ell = -\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha} \ell$ , ce qui implique  $\ell = 0$ , car  $\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha} \geq 0 > -1$ . Comme  $\ell = 0$ , on a donc aussi  $\ell' = 0$ .

Par ailleurs, puisque pour tout  $n \geq 0$ , on a la relation  $u_n^2 + v_n^2 = \sin^2(n\alpha) + \cos^2(n\alpha) = 1$ , en passant à la limite on obtient  $\ell^2 + \ell'^2 = 1$ , ce qui est impossible si  $\ell = \ell' = 0$ .

L'hypothèse de départ que les suites convergent **toutes les deux** était donc fausse. **De plus**, on a vu à la question précédente, que si l'une des deux converge, alors l'autre converge aussi : on en conclut qu'aucune des deux suites ne peut converger.

**SOLUTION 13.**

1. Nous avons

$$\sqrt{u_n} \leq \sqrt{u_n + \sqrt{u_{n+1}}}.$$

En ajoutant  $u_{n-1}$  à chaque membre et en prenant la racine carrée, on en déduit que

$$\sqrt{u_{n-1} + \sqrt{u_n}} \leq \sqrt{u_{n-1} + \sqrt{u_n + \sqrt{u_{n+1}}}}.$$

En procédant ainsi, on obtient  $v_n \leq v_{n+1}$  ; la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est donc croissante.

2. Si  $a$  est la valeur de la suite constante  $(u_n)_{n \geq 1}$ , notons  $(a_n)_{n \geq 1}$  sa suite associée, c'est-à-dire celle qui vérifie, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$ . Montrons par récurrence sur  $n$ , que si  $\ell = \sqrt{a + \ell}$ , alors il majore  $(a_n)_{n \geq 1}$ . Nous avons  $a_1 = \sqrt{a} \leq \ell$  ; supposons que  $a_n \leq \ell$  ; en ajoutant  $a$  à chaque membre et en prenant la racine, on obtient

$$a_{n+1} = \sqrt{a + a_n} \leq \sqrt{a + \ell} = \ell.$$

La suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  est majorée et croissante, donc convergente.

3. Si  $a$  est un majorant de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ , nous avons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n \leq a_n$  ; comme  $(a_n)_{n \geq 1}$  est majorée,  $(v_n)_{n \geq 1}$  est donc convergente, car croissante et majorée.

**SOLUTION 14.**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Notons  $E_n = \{u_p, p \geq n\}$ .  $E_{n+1} \subset E_n$  donc  $\sup E_{n+1} \leq \sup E_n$  et  $\inf E_{n+1} \geq \inf E_n$  i.e.  $v_{n+1} \leq v_n$  et  $w_{n+1} \geq w_n$ . Ainsi  $(v_n)$  est décroissante et  $(w_n)$  est croissante.
2. On a  $E_n \subset E_0$  donc  $\sup E_n \leq \sup E_0$  et  $\inf E_n \geq \inf E_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ceci signifie que  $(v_n)$  est minorée et que  $(w_n)$  est majorée. Ainsi  $(v_n)$  et  $(w_n)$  convergent.
3. Comme  $u_n \in E_n$ , on a  $w_n \leq u_n \leq v_n$ . Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - w_n = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ .  $(u_n)$  converge d'après le théorème des gendarmes.  
Si  $(u_n)$  converge, notons  $l$  sa limite. Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $(u_n)$  converge vers  $l$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $E_N \subset [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ . Donc  $0 \leq v_N - w_N \leq 2\varepsilon$ . Comme  $(v_n - w_n)$  est décroissante, on a  $0 \leq v_n - w_n \leq 2\varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ . Ceci prouve que  $(v_n - w_n)$  tend vers 0.

**SOLUTION 15.**

1. Appliquons le lemme de Césaro à la suite de terme général

$$v_n = u_{n+1} - u_n.$$

La suite de terme général

$$S_{n-1} = \frac{v_0 + \dots + v_n}{n} = \frac{u_n - u_0}{n}$$

tend vers  $\ell$  et puisque  $u_0/n$  tend vers 0,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \ell.$$

2. Puisque  $(u_n)_{n \geq 0}$  est à termes positifs,  $\ell$  appartient à  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ .



- Cas où  $\ell > 0$ . Alors  $u_n$  est strictement positif à partir d'un certain rang et par continuité du logarithme,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)] = \ln(\ell),$$

et donc, d'après le résultat de la question 1.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{n} = \ln(\ell),$$

et par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell.$$

- Cas où  $\ell = +\infty$ . Alors  $u_n$  est strictement positif à partir d'un certain rang et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)] = +\infty,$$

et donc, d'après le résultat de la question 1.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{n} = +\infty,$$

et par composition des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty.$$

On remarque que  $\forall n \geq 1$ ,

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{4n+2}{n+1},$$

ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = 4,$$

et d'après le résultat de la question 2.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 4.$$

On remarque que  $\forall n \geq 1$ ,

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}.$$

Or,

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

De plus,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

et d'après le résultat de la question 2.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{e}.$$

### SOLUTION 16.

3. Puisque

$$k \ln \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sim -1,$$

on a par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k = \frac{1}{e},$$

et d'après le lemme de Césaro,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{1}{e}.$$

2. Puisque

$$\ln(\beta_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k},$$

et que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(k)}{k} = 0,$$

on a d'après le lemme de Césaro,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\beta_n) = 0,$$

et par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 1.$$

### SOLUTION 17.

On montre par récurrence que  $u_n > 0$  pour tout  $n$ . On en déduit que  $(u_n)$  est strictement croissante puisque

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0.$$

Si  $(u_n)$  était majorée, elle convergerait vers une limite  $l$  qui vérifierait  $l = l + \frac{1}{l}$ , ce qui est impossible. Ainsi  $(u_n)$  est croissante et non majorée :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

On remarque que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + \frac{1}{u_n^2}$$

Donc la suite  $(v_n)$  de terme général  $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$  converge vers 2. Le lemme de Césaro nous permet de dire que

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} v_k}{n} = \frac{u_n^2 - u_0^2}{n}$$

tend aussi vers 2. Ainsi  $u_n^2 \sim 2n$ . Comme  $(u_n)$  est une suite positive, on en déduit  $u_n \sim \sqrt{2n}$ .

### SOLUTION 18.

1. Tout d'abord, une récurrence évidente montre que  $u_n > 0$  et  $v_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Ensuite, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - u_n)$ . Puisque  $v_0 - u_0 > 0$ , on en déduit par une récurrence évidente que  $v_n - u_n > 0$  i.e.  $u_n < v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On en déduit également que la suite de terme général  $v_n - u_n$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}(\sqrt{u_n v_n} - u_n) = \frac{\sqrt{u_n}}{2}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \geq 0 \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2}(\sqrt{u_n v_n} - v_n) = \frac{\sqrt{v_n}}{2}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}) \leq 0 \end{aligned}$$

Ainsi  $(u_n)$  est croissante tandis que  $(v_n)$  est décroissante.

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont donc adjacentes : elles convergent donc vers une limite commune  $l$ .

2. On rappelle l'inégalité classique  $\ln(1+u) \leq u$  pour tout  $u \in ]-1, +\infty[$ .

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \ln y - \ln x &= \ln \frac{y}{x} = \ln \left( 1 + \frac{y-x}{x} \right) \leq \frac{y-x}{x} \\ \ln x - \ln y &= \ln \frac{x}{y} = \ln \left( 1 + \frac{x-y}{y} \right) \leq \frac{x-y}{y} \end{aligned}$$

On en déduit alors facilement l'inégalité voulue en tenant compte du fait que  $y - x > 0$  et  $x - y < 0$ .

3. On a vu à la question 1 que  $0 < u_n < v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , ce qui justifie que  $(c_n)$  est bien définie.  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{v_{n+1} - u_{n+1}}{\ln v_{n+1} - \ln u_{n+1}} \\ &= \frac{v_n - u_n}{\ln(v_n + \sqrt{u_n v_n}) - \ln(u_n + \sqrt{u_n v_n})} \\ &= \frac{v_n - u_n}{\ln(\sqrt{v_n}(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})) - \ln(\sqrt{u_n}(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}))} \\ &= \frac{v_n - u_n}{\ln v_n - \ln u_n} = c_n \end{aligned}$$

Ainsi la suite  $(c_n)$  est bien constante.

4. D'après la question 2 et le fait que  $0 < u_n < v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\frac{1}{v_n} \leq \frac{\ln v_n - \ln u_n}{v_n - u_n} \leq \frac{1}{u_n}$  i.e.  $u_n \leq c_n \leq v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
Le théorème des gendarmes assure que  $(c_n)$  converge vers  $l$ . Mais comme  $(c_n)$  est constante,

$$l = c_0 = \frac{b - a}{\ln b - \ln a}$$

### SOLUTION 19.

1. Posons pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\beta_n = u_n - v_n.$$

On a alors  $\forall n \geq 0$ ,

$$\beta_{n+1} = (p - q)\beta_n,$$

ainsi  $\forall n \geq 0$ ,

$$\beta_n = (p - q)^n(u_0 - v_0).$$

Puisque  $p + q = 1$  et  $0 < q < p$ , on a

$$0 < p - q < 1$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0.$$

De plus,  $\forall n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -(v_{n+1} - v_n) \\ &= -q\beta_n \end{aligned}$$

Lorsque  $u_0 = v_0$ , les deux suites sont constantes. Dans le cas contraire, les calculs précédents prouvent que les deux suites sont monotones de sens de variation contraires : elles sont donc adjacentes.

2. On remarque que la suite de terme général

$$\alpha_n = u_n + v_n$$

est constante. Si on note  $\ell$  la limite commune des deux suites, on a donc par passage à la limite

$$2\ell = u_0 + v_0$$

d'où

$$\ell = \frac{u_0 + v_0}{2}.$$

**SOLUTION 20.**

Puisque  $u_0 \leq v_0$  et  $\forall n \geq 0$ ,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} \geq 0,$$

$v_n \geq u_n$  pour tout  $n \geq 0$ . De plus

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0,$$

et  $(v_n)_{n \geq 0}$  est décroissante minorée par  $u_0$  donc converge vers  $\ell_1$ . De même,

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} [\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}] \geq 0,$$

et  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante majorée par  $v_0$  donc converge vers  $\ell_2$ . Et puisque  $\forall n \geq 0$ ,

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2},$$

par passage à la limite,

$$\ell_2 = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2},$$

et donc  $\ell_1 = \ell_2$  : les deux suites sont adjacentes.

**SOLUTION 21.**

1. Soient  $a$  et  $b$  strictement positifs, on remarque que

$$\frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

si et seulement si

$$\frac{2}{a+b} \leq \frac{a+b}{2ab}$$

ie

$$4ab \leq (a+b)^2$$

soit encore

$$0 \leq (a-b)^2.$$

La dernière inégalité étant acquise, le résultat est démontré.

2. Par une récurrence immédiate, on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_n > 0 \text{ et } b_n > 0.$$

Les deux suites sont donc bien définies. On remarque que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$a_{n+1} \leq a_n$$

si et seulement si

$$b_n \leq b_{n+1}$$

si et seulement si

$$b_n \leq a_n.$$

Il suffit donc de démontrer les inégalités

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n \leq a_n.$$

► Montrons le cas  $n = 0$  : c'est l'hypothèse  $b_0 \leq a_0$  de l'énoncé.

- Montrons les cas  $n \geq 1$  ; on a alors  $n - 1 \geq 0$ , d'où, en appliquant le résultat de la question **a.** pour  $a = a_{n-1}$  et  $b = b_{n-1}$ ,

$$\frac{2}{a_{n-1} + b_{n-1}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{b_{n-1}} \right)$$

soit encore

$$\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{b_n},$$

c'est-à-dire

$$b_n \leq a_n$$

puisque  $a_n > 0$ .

3. Démontrons l'inégalité par récurrence sur  $n$ . Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{I}_n$  la proposition :

$$0 \leq a_n - b_n \leq \frac{a_0 - b_0}{2^n}.$$

- $\mathcal{I}_0$  est vérifiée puisque  $0 \leq a_0 - b_0 \leq a_0 - b_0$ .  
 ► Montrons que la propriété  $\mathcal{I}_n$  est héréditaire. Supposons  $\mathcal{I}_n$  vérifiée. On a alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \\ &= \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} \\ &= \frac{a_n - b_n}{2} \times \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} \end{aligned}$$

Or, on a démontré à la question **c.** que

$$a_n - b_n \geq 0,$$

d'où

$$0 \leq \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} \leq \frac{a_n}{a_n + b_n} \leq 1$$

puisque  $a_n > 0$  et  $b_n > 0$  ainsi

$$0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

$\mathcal{I}_{n+1}$  est donc vérifiée.

- D'après le principe de récurrence, l'inégalité  $\mathcal{I}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

4. D'après le résultat de la question **b.**,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, de plus, on déduit de l'inégalité établie à la question **c.** et du théorème d'encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont donc adjacentes.

5. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_{n+1} b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = a_n b_n.$$

la suite  $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc constante. Soit  $\ell$  la limite commune de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n b_n = a_0 b_0,$$

$\ell^2 = a_0 b_0$ , et par passage à la limite dans l'inégalité

$$a_n \geq 0,$$

on a  $\ell \geq 0$  et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \sqrt{a_0 b_0}.$$

**SOLUTION 22.**

1. Etudions les variations de  $P_n$  sur  $[0, 1]$ . La fonction polynôme  $P_n$  est continue sur  $[0, 1]$  or  $P_n(0) = 1$  et  $P_n(1) = 2 - n \leq 0$ , le théorème des valeurs intermédiaires permet donc de conclure qu'il existe  $c \in [0, 1]$  tel que  $P_n(c) = 0$ .  $P_n$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et  $\forall x \in [0, 1]$ ,

$$P'_n(x) = n(x^{n-1} - 1) < 0.$$

La fonction polynôme  $P_n$  est donc strictement décroissante sur  $[0, 1]$ , il existe donc une unique racine  $u_n$  de  $P_n$  sur  $[0, 1]$ .

2. Pour tout  $n \geq 2$ ,  $P_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n - nu_{n+1} + 1$ . Or  $P_{n+1}(u_{n+1}) = 0$  i.e.  $u_{n+1}^{n+1} - (n+1)u_{n+1} + 1 = 0$  et donc  $nu_{n+1} = u_{n+1}^{n+1} - u_{n+1} + 1$ . On en déduit que

$$P_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n - u_{n+1}^{n+1} + u_{n+1} = u_{n+1}^n(1 - u_{n+1}) + u_{n+1}$$

Puisque  $u_{n+1} \in [0, 1]$ ,  $P_n(u_{n+1}) \geq 0$ . Or  $P_n$  est strictement décroissante sur  $[0, 1]$  et  $P_n(u_n) = 0$  donc  $u_{n+1} \leq u_n$ .

3. Pour tout  $n \geq 2$ ,

$$nu_n - 1 = u_n^n \leq 1,$$

d'où

$$0 \leq u_n \leq \frac{2}{n}$$

ainsi, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

4. On reprend l'encadrement de la question précédente,

$$0 \leq nu_n - 1 \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n,$$

on a donc d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (nu_n - 1) = 0$$

et ainsi

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$

**SOLUTION 23.**

On a  $g_n(0) = -1$  et  $g_n(1) = 1$  donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires  $g_n$  s'annule sur  $[0, -1]$ . La fonction  $g_n$  étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$  en tant que somme de fonctions strictement croissantes sur cet intervalle, elle ne prend qu'une seule fois la valeur 0, d'où l'existence et l'unicité de  $a_n$ . Remarquons que

$$\begin{aligned} g_{n+1}(a_n) &= a_n^{n+1} + a_n - 1 \\ &= a_n^{n+1} - a_n^n \\ &= a_n^n(a_n - 1) < 0 \end{aligned}$$

Ainsi  $a_n \leq a_{n+1}$  d'après les variations de  $g_{n+1}$ . La suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  étant positive, croissante et majorée par 1, elle converge vers une limite  $0 \leq \ell \leq 1$ . Prouvons que  $\ell = 1$  par l'absurde en supposant  $\ell < 1$ . Dans ce cas,  $\forall n \geq 1$ ,

$$0 \leq a_n \leq \ell^n,$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^n = 0,$$

et donc, puisque  $1 - a_n = a_n^n$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1 \neq \ell,$$

ce qui absurde. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

#### SOLUTION 24.

1. Posons pour tout  $x > 0$ ,

$$f(x) = x - n \ln(x).$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et sur cet intervalle,

$$f'(x) = \frac{x - n}{x}.$$

La fonction  $f$  est donc strictement décroissante sur  $]0, n]$  et strictement croissante sur  $[n, +\infty[$ . On a de plus

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

et d'après les croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Puisque  $n \geq 3 \geq e$ , on a

$$f(n) = n - n \ln(n) < 0.$$

L'équation  $f(x) = 0$  admet donc exactement deux solutions  $u_n < n < v_n$ .

2. Puisque  $v_n > n$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

Puisque  $f(2) = 2 - n \ln(2) < 0$ , on a

$$0 < u_n < 2,$$

d'où

$$0 < \ln(u_n) = \frac{u_n}{n} < \frac{2}{n}$$

et d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = 0,$$

et par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

#### SOLUTION 25.

1. Notons  $f_n$  l'application suivante :

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 \end{aligned}$$

L'application  $f_n$  est clairement continue et même dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'_n(x) = nx^{n-1} + \cdots + 1 > 0.$$

$f_n$  est donc strictement croissante. De plus,  $f_n(0) = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ . L'application  $f_n$  induit donc une bijection de  $\mathbb{R}_+$  dans  $[-1; +\infty[$ . L'équation  $f_n(x) = 0$  admet donc une unique solution strictement positive  $a_n$ .

2. On constate que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(a_{n+1}) = -a_{n+1}^{n+1} < 0 = f_n(a_n).$$

La stricte croissance de  $f_n$  permet donc de conclure que  $a_{n+1} < a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

3. La suite  $(a_n)$  est décroissante et minorée par 0 donc elle converge. Remarquons que

$$a_n^{n+1} - 1 = (a_n - 1)(a_n^n + a_n^{n-1} + \dots + a_n + 1) = 2(a_n - 1)$$

Comme  $(a_n)$  est strictement décroissante et positive,

$$0 \leq a_n < a_2 < a_1 = 1 \text{ pour } n \geq 3.$$

On en déduit donc que  $0 \leq a_n^{n+1} \leq a_2^{n+1}$  pour  $n \geq 3$ . De plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_2^{n+1} = 0$  car  $0 \leq a_2 < 1$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{n+1} = 0$ . Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2(a_n - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{n+1} - 1 = -1$$

Pra conséquent,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$ .

#### SOLUTION 26.

1. Il suffit d'étudier la fonction  $x \mapsto \tan x - x$  sur l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ .

2. On a  $-\frac{\pi}{2} + n\pi \leq u_n \leq \frac{\pi}{2} + n\pi$ . On en déduit

$$1 - \frac{2}{n} \leq \frac{u_n}{n\pi} \leq 1 + \frac{2}{n}$$

Le théorème des gendarmes nous dit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n\pi} = 1$  i.e.  $u_n \sim n\pi$ .

3. Par  $\pi$ -périodicité de  $\tan$ , on a  $\tan v_n = u_n$ . Remarquons que  $-\frac{\pi}{2} < v_n < \frac{\pi}{2}$ . On a donc

$$v_n = \arctan(\tan v_n) = \arctan(u_n)$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{\pi}{2}$ .

4. Posons  $w_n = v_n - \frac{\pi}{2}$ . On a donc  $u_n = w_n + \frac{\pi}{2} + n\pi$ . Et donc  $-\frac{1}{\tan v_n} = u_n$ . D'après la question précédente,  $w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  donc  $\tan w_n \sim w_n$ . De plus,  $u_n \sim n\pi$ . Donc  $w_n \sim -\frac{1}{n\pi}$ . Un développement asymptotiques à 3 termes de  $(u_n)$  est donc :

$$u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

#### SOLUTION 27.

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Posons  $f_n : x \mapsto \cos x - nx$ .  $f_n$  est dérivable et  $f'_n(x) = -\sin x - n < 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .  $f_n$  est continue et strictement décroissante sur  $[0, 1]$ . De plus,  $f_n(0) = 1 > 0$  et  $f_n(1) = \cos(1) - n < 0$ . On en déduit que  $f_n$  s'annule une unique fois sur  $[0, 1]$ . D'où l'existence et l'unicité de  $x_n$ .
- On a  $\cos x_n = nx_n$  et donc  $x_n = \frac{\cos x_n}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . On en déduit que  $|x_n| \leq \frac{1}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  puis que  $(x_n)$  converge vers 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Remarquons que  $f_n \geq f_{n+1}$  sur  $[0, 1]$ . Donc  $f_n(x_{n+1}) \geq f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n)$ . La stricte décroissance de  $f_n$  implique que  $x_{n+1} \leq x_n$ . Par conséquent la suite  $(x_n)$  est décroissante.



4. Comme  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  et que  $\cos$  est continue en 0,  $\cos x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \cos 0 = 1$ . Donc  $x_n = \frac{\cos x_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .
5. Comme  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ ,  $\cos x_n = 1 - \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2)$ . Or  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  donc  $\cos x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Ainsi  $x_n = \frac{\cos x_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ . On en déduit que  $x_n - \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^3}$ .

**SOLUTION 28.**

1. Soit  $n \geq 2$ . On étudie la fonction  $f_n$  définie par  $f_n(x) = x - \ln x - n$  pour  $x > 0$ .  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $x > 0$ ,  $f'_n(x) = 1 - \frac{1}{x}$ .  $f_n$  est donc strictement croissante sur  $]0, 1[$  et strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$ . De plus,  $\lim_{n \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty$ ,  $f_n(1) = 1 - n < 0$  car  $n \geq 2$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$  par croissances comparées. Comme  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , le théorème de la bijection appliqué à  $f_n$  sur les intervalles  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$  assure qu'il existe une unique solution à l'équation  $f_n(x) = 0$  sur chacun des intervalles  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ . Comme 1 n'est évidemment pas solution, l'équation  $f_n(x) = 0$  admet exactement deux solutions.
2. a. Comme  $x_n$  est la plus petite des deux solutions,  $x_n \in ]0, 1[$  pour tout  $n \geq 2$ . Or  $\ln x_n = x_n - n$  pour tout  $n \geq 2$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln x_n = -\infty$ . Par conséquent,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ .
- b. Puisque pour  $n \geq 2$ ,  $\ln x_n = -n + x_n$ ,  $x_n = e^{-n} e^{x_n}$ . Or  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  donc  $e^{x_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ . Ceci prouve que  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n}$ .
- c. Remarquons déjà que  $u_n = o(e^{-n})$ . On a pour tout  $n \geq 2$ ,  $x_n = \ln(e^{-n} + u_n) + n = \ln(1 + e^n u_n)$ . Or  $e^n u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$  donc  $\ln(1 + e^n u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^n u_n$ . Ainsi  $e^n u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n}$ . D'où  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-2n}$ .
- d. Posons  $s_n = u_n - e^{-2n}$  pour  $n \geq 2$  de sorte que  $s_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-2n})$ . On rappelle que

$$x_n = \ln(1 + e^n u_n) = \ln(1 + e^{-n} + e^n s_n)$$

D'une part,

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-n} + e^{-2n} + o(e^{-2n})$$

et d'autre part, en posant  $\alpha_n = e^{-n} + e^n s_n$ ,

$$\ln(1 + \alpha_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \alpha_n - \frac{\alpha_n^2}{2} + o(\alpha_n^2)$$

Or  $\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n}$  donc

$$\ln(1 + \alpha_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-n} + e^n s_n - \frac{e^{-2n}}{2} + o(e^{-2n})$$

On en déduit que  $e^n s_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{3}{2} e^{-2n} + o(e^{-2n})$  ou encore  $s_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{2} e^{-3n}$ .

3. a. Pour tout  $n \geq 2$ ,  $y_n \geq 1$  donc  $y_n = \ln y_n + n \geq n$ . En particulier,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$ .
- b. Comme  $y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ ,  $\ln y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(y_n)$ . Donc  $n = y_n - \ln y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} y_n$ .
- c. Remarquons tout d'abord que  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$ . On a pour tout  $n \geq 2$ ,

$$v_n = y_n - n = \ln y_n = \ln(n + v_n) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{v_n}{n}\right)$$

Comme  $\frac{v_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ ,  $\ln\left(1 + \frac{v_n}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{v_n}{n}$ . A fortiori,  $\ln\left(1 + \frac{v_n}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ . Ceci prouve que  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$ .

- d. Posons  $t_n = v_n - \ln n$  pour  $n \geq 2$ . On rappelle que pour  $n \geq 2$ ,  $v_n = \ln n + \ln\left(1 + \frac{v_n}{n}\right)$ . Ainsi

$$t_n = \ln\left(1 + \frac{v_n}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{v_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$$

**SOLUTION 29.**

1. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Puisque  $\forall t \in [k, k+1]$ ,

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k},$$

on obtient après intégration sur  $[k, k+1]$ ,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{1+k}.$$

2. Etudions le sens de variation de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .  $\forall n \geq 0$ ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

En appliquant le résultat de la question 1. à  $k = n$ , on obtient

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

ainsi  $(u_n)_{n \geq 1}$  est-elle croissante.

Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

et

$$u_n = S_n - \ln(n).$$

En additionnant les  $n-1$  inégalités de la question 1. correspondant aux valeurs entières  $k$  comprises entre 1 et  $n-1$ , on obtient :

$$S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n - \frac{1}{n},$$

et donc

$$\frac{1}{n} \leq u_n \leq 1.$$

la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante majorée par 1, elle est donc convergente.

**SOLUTION 30.**

Puisque la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , pour tout entier naturel  $k$  non nul, on a

$$\forall k \leq t \leq k+1, \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k},$$

ce qui entraîne par positivité de l'intégrale,

$$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}.$$

Soit  $n \geq 1$ . En additionnant les inégalités précédentes pour  $k$  variant de  $n$  à  $2n$ , on obtient en appliquant la relation de Chasles pour les intégrales,

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k+1} \leq \int_n^{2n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k},$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} \leq \ln(2n+1) - \ln(n) \leq u_n,$$

ie

$$u_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} \leq \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) \leq u_n,$$

et finalement,

$$\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) \leq u_n \leq \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}.$$

La fonction  $\ln$  étant continue en 2, le théorème d'encadrement permet de conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(2).$$

### SOLUTION 31.

Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont convergentes donc bornées. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \text{ ET } |b_n - b| < \varepsilon$$

Soit maintenant  $n \geq 2N$ . On va couper la somme suivante en 3 parties :

$$\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k b_{n-k} + \sum_{k=N}^{n-N} a_k b_{n-k} + \sum_{k=n-N+1}^n a_k b_{n-k}$$

(ceci est valide car on a bien  $N \leq n - N$ ). Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} - ab &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N-1} (a_k b_{n-k} - ab) \\ &\quad + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N}^{n-N} (a_k b_{n-k} - ab) \\ &\quad + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n-N+1}^n (a_k b_{n-k} - ab) \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, on a donc :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} - ab \right| &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N-1} |a_k b_{n-k} - ab| \\ &\quad + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N}^{n-N} |a_k b_{n-k} - ab| \\ &\quad + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n-N+1}^n |a_k b_{n-k} - ab| \end{aligned}$$

Pour  $0 \leq k \leq N-1$ , on a par une majoration brutale :

$$|a_k b_{n-k} - ab| \leq |a_k b_{n-k}| + |ab| \leq 2M^2$$

De même, pour  $n - N + 1 \leq k \leq n$ , on a

$$|a_k b_{n-k} - ab| \leq 2M^2$$

Enfin, pour  $N \leq k \leq n - N$ , on a à la fois  $k \geq N$  et  $n - k \geq N$ . Donc  $|a_k - a| < \varepsilon$  et  $|b_{n-k} - b| < \varepsilon$ . De manière classique :

$$\begin{aligned} |a_k b_{n-k} - ab| &= |a_k b_{n-k} - a_k b + a_k b - ab| \\ &\leq |a_k| |b_{n-k} - b| + |b| |a_k - a| \leq 2M\varepsilon \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} - ab \right| &\leq \frac{4NM^2}{n+1} + \frac{2M(n-2N)\varepsilon}{n+1} \\ &\leq \frac{4NM^2}{n+1} + 2M\varepsilon \end{aligned}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4NM^2}{n+1} = 0$  donc il existe  $N'$  tel que

$$n \geq N' \Rightarrow \frac{4NM^2}{n+1} < \varepsilon$$

Pour  $n \geq \max(N, N')$ , on a donc :

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} - ab \right| \leq (1 + 2M)\varepsilon$$

Quitte à changer  $\varepsilon$  en  $\frac{\varepsilon}{1+2M}$ , on a le résultat voulu.

### SOLUTION 32.

1. On sait (ou on redémontre) que pour  $m, k \in \mathbb{N}^*$ ,  $k \binom{m}{k} = m \binom{m-1}{k-1}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il suffit alors de prendre  $m = n + p + 1$  et  $k = n + 1$ .

2. On utilise le principe de la sommation d'Abel :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (k+1-k)u_k = \sum_{k=1}^n (k+1)u_k - \sum_{k=1}^n ku_k \\ &= (n+1)u_{n+1} - u_1 + \sum_{k=1}^n (k+1)u_k - \sum_{k=1}^n (k+1)u_{k+1} = (n+1)u_{n+1} - u_1 + \sum_{k=1}^n (k+1)(u_k - u_{k+1}) \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente,  $(k+1)(u_{k+1} - u_k) = pu_{k+1}$ , d'où :

$$S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 + p \sum_{k=1}^n u_{k+1} = (n+1)u_{n+1} - u_1 + p(S_n - u_1 + u_{n+1}) = (n+p+1)u_{n+1} - (p+1)u_1 + pS_n$$

$$\text{Or } u_1 = \frac{1}{p+1} \text{ donc } S_n = \frac{1}{p-1} (1 - (n+p+1)u_{n+1}).$$

3. On majore brutalement :

$$0 \leq (n+p)u_n = \frac{n!p!}{(n+p-1)!} = \frac{p!}{\prod_{k=n+1}^{n+p-1} k} \leq \frac{p!}{\prod_{k=n+1}^{n+p-1} n} = \frac{p!}{n^{p-1}}$$

Comme  $p \geq 2$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{p-1}} = 0$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

4. On a  $S_n = \frac{1}{p-1} (1 - v_{n+1})$ . On en déduit que  $(S_n)$  converge vers  $\frac{1}{p-1}$ .

### SOLUTION 33.

Montrons que la suite  $(u_n)$  est croissante. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et étudions  $f : x \in [1, n] \mapsto (n+1) \ln \frac{x+1}{n+1} - n \ln \frac{x}{n}$ .  $f$  est clairement dérivable sur  $[1, n]$  et pour tout  $x \in [1, n]$ ,  $f'(x) = \frac{n+1}{x+1} - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x(x+1)} \leq 0$ . Comme  $f(n) = 0$ , on en déduit que  $f$  est positive sur  $[1, n]$ . En particulier, pour tout  $k \in [1, n]$ ,  $n \ln \frac{k}{n} \leq (n+1) \ln \frac{k+1}{n+1}$ , ce qui équivaut à  $\left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1}$ . On en déduit que

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{k}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n = u_n$$

La suite  $(u_n)$  est donc bien croissante.

Montrons que la suite  $(u_n)$  est majorée. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a classiquement  $\ln x \leq x - 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . On a donc notamment  $\ln \frac{k}{n} \leq \frac{k}{n} - 1$  puis  $n \ln \frac{k}{n} \leq k - n$  et finalement  $\left(\frac{k}{n}\right)^n \leq e^{k-n}$  pour tout  $k \in [1, n]$ . En utilisant la formule de la série géométrique

$$u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \sum_{k=1}^n e^{k-n} = e^{1-n} \frac{e^n - 1}{e - 1} = \frac{e - e^{1-n}}{e - 1} \leq \frac{e}{e - 1}$$

La suite  $(u_n)$  est donc bien majorée.

Elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

### SOLUTION 34.

1. Il suffit d'étudier  $x \mapsto \ln(1+x) - x$  sur  $] -1, +\infty[$ .

2. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question précédente

$$\ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$$

ce qui équivaut à

$$\ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$$

ou encore

$$\ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$$

Toujours d'après la question précédente,

$$\ln\left(1 - \frac{1}{p+1}\right) \leq -\frac{1}{p+1}$$

ce qui équivaut à

$$\ln\left(\frac{p}{p+1}\right) \leq -\frac{1}{p+1}$$

ou encore

$$\ln(p) - \ln(p+1) \leq -\frac{1}{p+1}$$

et finalement à

$$\ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p+1}$$

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \leq 0$$

d'après la question précédente. Ainsi  $(u_n)$  est-elle décroissante.

4. Puisque pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k)$$

on obtient pour tout  $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k)$$

autrement dit

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 \leq \ln(n)$$

via un changement d'indice et un télescopage. Ceci équivaut encore à  $u_n \leq 1$ .

De même, puisque pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

on obtient pour tout  $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

autrement dit

$$\ln(n) \leq u_n - \frac{1}{n}$$

via un changement d'indice et un télescopage. Ceci équivaut encore à  $u_n \geq \frac{1}{n}$ . A fortiori,  $u_n \geq 0$ .

La suite  $(u_n)$  étant décroissante et minorée par 0, elle converge vers un réel  $\gamma$ . Mais puisque  $0 \leq u_n \leq 1$  pour tout  $n \geq 2$ ,  $\gamma \in [0, 1]$ .

**REMARQUE.** La majoration par 1 pouvait également être obtenue en utilisant le fait que  $(u_n)$  est décroissante et que  $u_1 = 1$ . ■

#### SOLUTION 35.

Il s'agit de prouver que la suite de terme général

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{n!}$$

converge vers 0. Or,

$$\alpha_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!}.$$

Le plus grand terme de la somme correspondant à l'indice  $n-2$  on a l'encadrement suivant,

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq (n-1) \times \frac{(n-2)!}{n!},$$

ainsi,

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n},$$

et par encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0.$$

#### SOLUTION 36.

Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$x \mapsto \sqrt{x}.$$

La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ . Ainsi,  $\forall k \geq 1, \forall x \in [k, k+1]$ ,

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k+1)$$

d'où,  $\forall k \geq 1$ ,

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k+1),$$

et en sommant de  $k = 1$  à  $k = n - 1$ , pour  $n \geq 2$ ,

$$\sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=2}^{n+1} f(k),$$

c'est-à-dire

$$S_n \leq \int_1^n f(x) dx \leq S_n + f(n+1) - 1.$$

Or, une primitive de  $f$  sur  $[1, +\infty[$  est donnée par

$$x \mapsto F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$$

d'où  $\forall n \geq 2$ ,

$$\frac{2}{3}n^{3/2} - \sqrt{n+1} + \frac{1}{3} \leq S_n \leq \frac{2}{3}n^{3/2} - \frac{2}{3},$$

Et par croissances comparées,

$$S_n \sim \frac{2}{3}n^{3/2}.$$

### SOLUTION 37.

1. Soit  $u \geq 0$ . On a  $\forall t \in [0, u]$ ,

$$1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1,$$

d'où, après intégration sur  $[0, u]$ ,

$$\int_0^u (1-t) dt \leq \int_0^u \frac{dt}{1+t} \leq \int_0^u dt,$$

c'est-à-dire

$$u - \frac{u^2}{2} \leq \ln(1+u) \leq u.$$

2. On a

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Or, d'après le résultat de la question 1.,  $\forall k \leq n$ ,

$$\frac{k}{n^2} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{n^4},$$

et en additionnant ces  $n$  inégalités membre à membre,

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} \leq \ln(u_n) \leq \frac{n(n+1)}{n^2} + \frac{v_n}{n^4},$$

où

$$v_n = \sum_{k=1}^n n^2.$$

Or, par un encadrement grossier,

$$0 \leq v_n \leq n \times n^2 = n^3.$$

et puisque

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} \sim \frac{1}{2},$$

d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \frac{1}{2}.$$

Par continuité de l'exponentielle en  $1/2$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{e}.$$

### SOLUTION 38.

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $x = 1$ , on a  $P_n(x) = 2^{n+1}$ . Soit  $x \neq 1$ . Raisonnons par récurrence sur  $n$ . Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , notons HR( $n$ ) l'hypothèse suivante

$$P_n(x) = \frac{x^{2^{n+1}} - 1}{x - 1}.$$

- HR(0) est vraie puisque  $P_0(x) = x + 1 = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ .
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons HR( $n$ ) vraie. On a

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= P_n(x) \times (x^{2^{n+1}} + 1) \\ &= \frac{x^{2^{n+1}} - 1}{x - 1} \times (x^{2^{n+1}} + 1) \\ &= \frac{x^{2 \times 2^{n+1}} - 1}{x - 1} = \frac{x^{2^{n+2}} - 1}{x - 1} \end{aligned}$$

d'où HR( $n + 1$ ).

2. Distinguons trois cas.

- Si  $|x| > 1$  ou  $x = 1$ , la suite  $(P_n(x))_{n \geq 0}$  diverge (vers  $+\infty$  si  $x \geq 1$  et vers  $-\infty$  si  $x < -1$ ).
- Si  $x = -1$ , la suite est constante égale à 0.
- Si  $|x| < 1$ , la suite  $(P_n(x))_{n \geq 0}$  converge vers  $\frac{1}{1-x}$ .

### SOLUTION 39.

1. Le résultat découle immédiatement de l'inégalité suivante :

$$(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \geq 4x(x + 1).$$

2. D'après le résultat de la question 1.,  $\forall n \geq 0$ ,

$$0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

et d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$



**SOLUTION 40.**

Puisque  $\forall n \geq 0$ ,

$$1 \leq \binom{n}{k} \leq 2^n,$$

on a l'encadrement suivant :

$$1 \leq u_n \leq 2^{n(n+1)/n^3}.$$

Et puisque  $x \mapsto 2^x$  est continue en 0,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n(n+1)/n^3} = 1$$

ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

**SOLUTION 41.**

1. On multiplie au numérateur et au dénominateur par  $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n) = 2^n n!$  et on trouve  $u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} u_n \leq u_n$ . La suite  $(u_n)$  est donc décroissante et minorée par 0 : elle converge.
3. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_{n+1} = (n+2)u_{n+1}^2 = (n+2) \left( \frac{2n+1}{2n+2} \right)^2 u_n^2 = \frac{n+2}{n+1} \left( \frac{2n+1}{2n+2} \right)^2 v_n$ . Or  $(n+2)(2n+1)^2 - (n+1)(2n+2)^2 = -3n-2 < 0$  donc  $v_{n+1} \leq v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ainsi  $(v_n)$  est décroissante minorée par 0 : elle converge. On a  $u_n = \sqrt{\frac{v_n}{n+1}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . On en déduit que  $(u_n)$  converge vers 0.

**SOLUTION 42.**

On prouve aisément par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

$$(1-z) \prod_{k=0}^n (1+z^{2^k}) = 1 - z^{2^{n+1}}$$

Puisque  $|z| < 1$ ,  $z \neq 1$  et donc

$$\prod_{k=0}^n (1+z^{2^k}) = \frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Enfin  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z|^{2^{n+1}} = 0$  car  $|z| < 1$  d'où le résultat demandé.

**SOLUTION 43.**

1. On utilise l'expression factorielle des coefficients binomiaux :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$$

2. Remarquons que les termes de  $(u_n)$  sont strictement positifs. De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{4^{n+1}} \frac{4^n}{\sqrt{n}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \frac{2(2n+1)}{n+1} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}$$

Or  $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 > 4n^2 + 4n = (2\sqrt{n(n+1)})^2$ . On en déduit que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La suite  $(u_n)$  est donc (strictement) croissante.

3. On procède par récurrence comme indiqué dans l'énoncé. Notre hypothèse de récurrence est donc

$$HR(n) : u_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$$

**Initialisation** On a  $u_0 = 0$  donc  $HR(0)$  est vraie.

**Hérédité** On suppose  $HR(n)$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la question précédente,  $u_{n+1} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}$  donc en utilisant

$HR(n)$  :

$$u_{n+1} \leq \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{n+1}}$$

Or on a les équivalences suivantes

$$\frac{\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{\frac{n+1}{2n+3}} \iff \sqrt{(2n+1)(2n+3)} \leq 2(n+1) \iff (2n+1)(2n+3) \leq 4(n+1)^2 \iff 4n^2+8n+3 \leq 4n^2+8n+4$$

La dernière égalité est toujours vraie : on en déduit que  $u_{n+1} \leq \sqrt{\frac{n+1}{2n+3}}$  i.e.  $HR(n+1)$  est vraie.

**Conclusion** Par récurrence,  $HR(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

4. D'après la question précédente,  $u_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée, elle converge vers un réel

$K \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . De plus,  $u_1 = \frac{1}{2}$  et donc  $u_n \geq \frac{1}{2}$  pour  $n \geq 1$ . Ainsi  $K \geq \frac{1}{2}$ . On a donc  $\frac{a_n \sqrt{n}}{4^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} K$  i.e.  $\binom{2n}{n} \sim K \frac{4^n}{\sqrt{n}}$ .

#### SOLUTION 44.

1. Récurrence évidente.

2. Si  $u_n \geq 1$ , alors  $u_n \leq u_n^2$ . De plus,  $n \geq 1$  donc  $1 + u_n \leq n + u_n^2$ . Par conséquent,  $u_{n+1} \leq 1$ .

Si  $u_n \leq 1$ , alors  $1 + u_n \leq 2$ . On a aussi  $n + u_n^2 \geq n$  de manière évidente. Donc  $u_{n+1} \leq \frac{2}{n}$ .

3. Si  $u_2 \geq 1$ , alors  $u_3 \leq 1$ .

Si  $u_2 \leq 1$ , alors  $u_3 \leq \frac{2}{2} = 1$ .

Montrons par récurrence que pour  $n \geq 3$ ,  $u_n \leq \frac{2}{n-1}$ .

**Initialisation** : On a vu que  $u_3 \leq 1$  donc l'hypothèse de récurrence est vraie au rang 3.

**Hérédité** : Supposons que  $u_n \leq \frac{2}{n-1}$  pour un certain  $n \geq 3$ . On a donc  $u_n \leq 1$  et donc  $u_{n+1} \leq \frac{2}{n}$  et l'hypothèse de récurrence est vraie au rang  $n+1$ .

**Conclusion** : L'hypothèse de récurrence est vraie pour tout  $n \geq 3$ .

4. Par le théorème des gendarmes, on conclut que  $(u_n)$  converge vers 0.

5. Pour  $n \geq 2$ , on a :  $u_n = \frac{1 + u_{n-1}}{n + u_{n-1}^2}$ . Or  $u_{n-1} = o(1)$  d'après la question précédente. Donc  $1 + u_{n-1} \sim 1$  et  $n + u_{n-1}^2 \sim n$ . On en déduit que  $u_n \sim \frac{1}{n}$ .

6. Après un calcul laborieux, on trouve :

$$v_{n+1} = \frac{2n^2 + n^2v_n + n + nv_n - v_n^2 - 2v_n - 1}{n^3 + v_n^2 + 2v_n + 1}$$

7. On a  $v_n = o(1)$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} 2n^2 + n^2v_n + n + nv_n - v_n^2 - 2v_n - 1 &\sim 2n^2 \\ n^3 + v_n^2 + 2v_n + 1 &\sim n^3 \end{aligned}$$

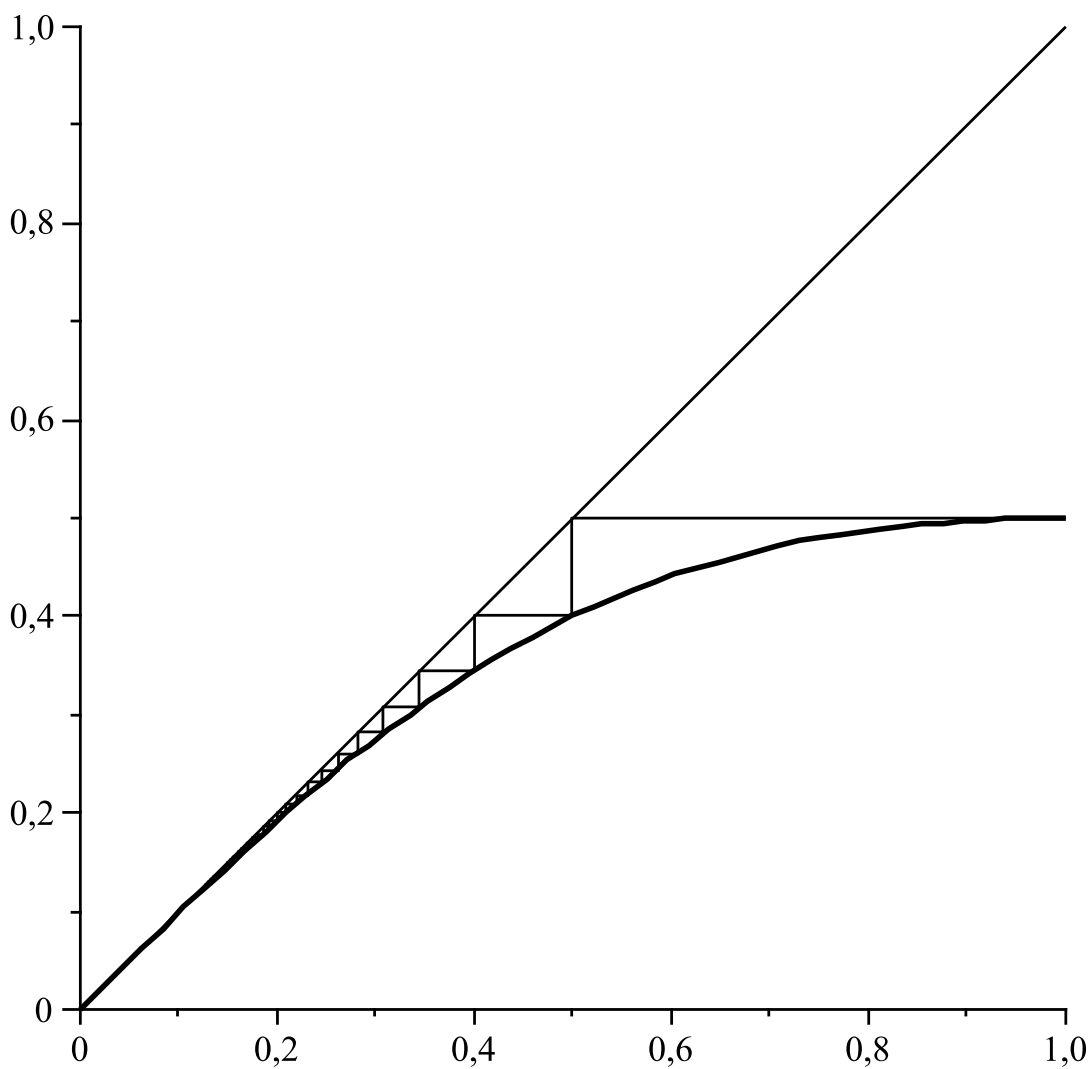
Ainsi  $v_{n+1} \sim \frac{2}{n}$  et  $v_n \sim \frac{2}{n-1} \sim \frac{2}{n}$ .

8. Comme  $v_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ , on a :

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{v_n}{n} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

#### SOLUTION 45.

► *Commençons par une figure.*



On conjecture que la suite converge vers 0.

- *La suite est définie* : notons  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}.$$

Puisque  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est définie  $\forall u_0 \in \mathbb{R}$ .

- *Point(s) fixe(s) de  $f$*  : Un réel  $x$  est point fixe de  $f$  si et seulement si

$$\frac{x}{1+x^2} = x \iff x^3 = 0,$$

ie  $x = 0$ .

- *Etude de la convergence* : supposons  $u_0 \geq 0$ . Posons  $I = [0, +\infty[$ . Puisque  $I$  est stable par  $f$ , on prouve par une récurrence sans difficulté que

$$\forall n \geq 0, u_n \in I.$$

On a alors, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1} \leq u_n.$$

La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante minorée par 0 donc convergente. Puisque sa limite est un point fixe de  $f$  qui n'en admet qu'un, 0, on a

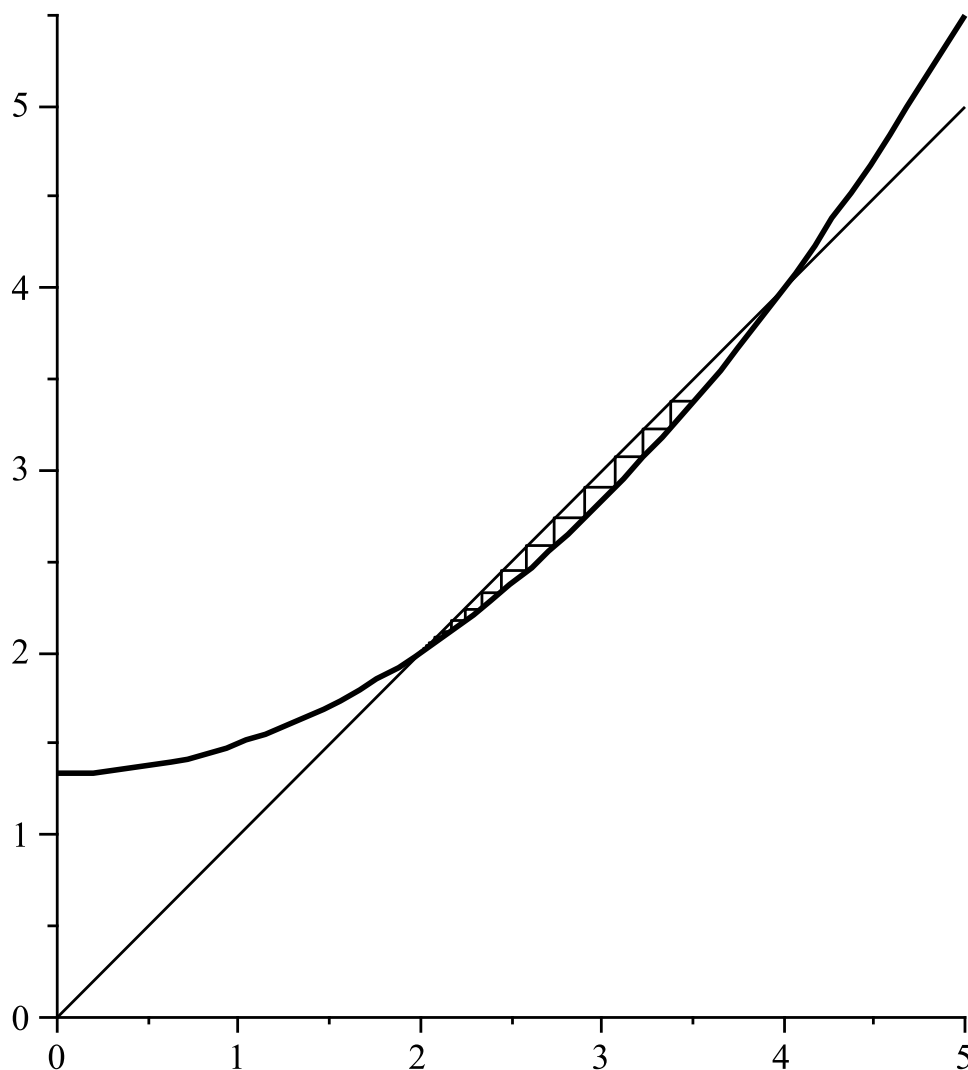
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Puisque la fonction  $f$  est impaire, pour tout  $u_0$  négatif, la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  croît vers 0.

#### SOLUTION 46.

---

- *Commençons par une figure.*



On conjecture la convergence de la suite vers 2 pour tout condition initiale  $0 \leq u_0 < 4$ , vers 4 pour pour  $u_0 = 4$  (plus précisément : la suite est constante dans ce cas) et la divergence de la suite pour tout  $u_0 > 4$ .

► *Définition et points fixes* : on définit l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$x \mapsto \frac{x^2 + 8}{6}.$$

Puisque  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est définie  $\forall u_0 \in \mathbb{R}$ . On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) - x = \frac{x^2 - 6x + 8}{6} = \frac{(x-2)(x-4)}{6}.$$

Si  $u_0 = 2$  ou 4, la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est constante. Notons

$$I_1 = [0, 2[, \quad I_2 = ]2, 4[, \quad I_3 = ]4, +\infty[.$$

La fonction  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , les réels 2 et 4 sont des points fixes de  $f$  et  $f(0) > 0$ , donc les trois intervalles  $I_k$  sont stables par  $f$ .

► *Etude de la convergence* : puisque  $\forall x \in I_1$ ,  $f(x) \geq x$ , pour tout  $u_0 \in I_1$ ,  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante majorée par 2 donc converge vers l'unique point fixe de  $f$  appartenant à  $[0, 2]$  ie 2. puisque  $\forall x \in I_2$ ,  $f(x) \leq x$ , pour tout  $u_0 \in I_2$ ,  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante minorée

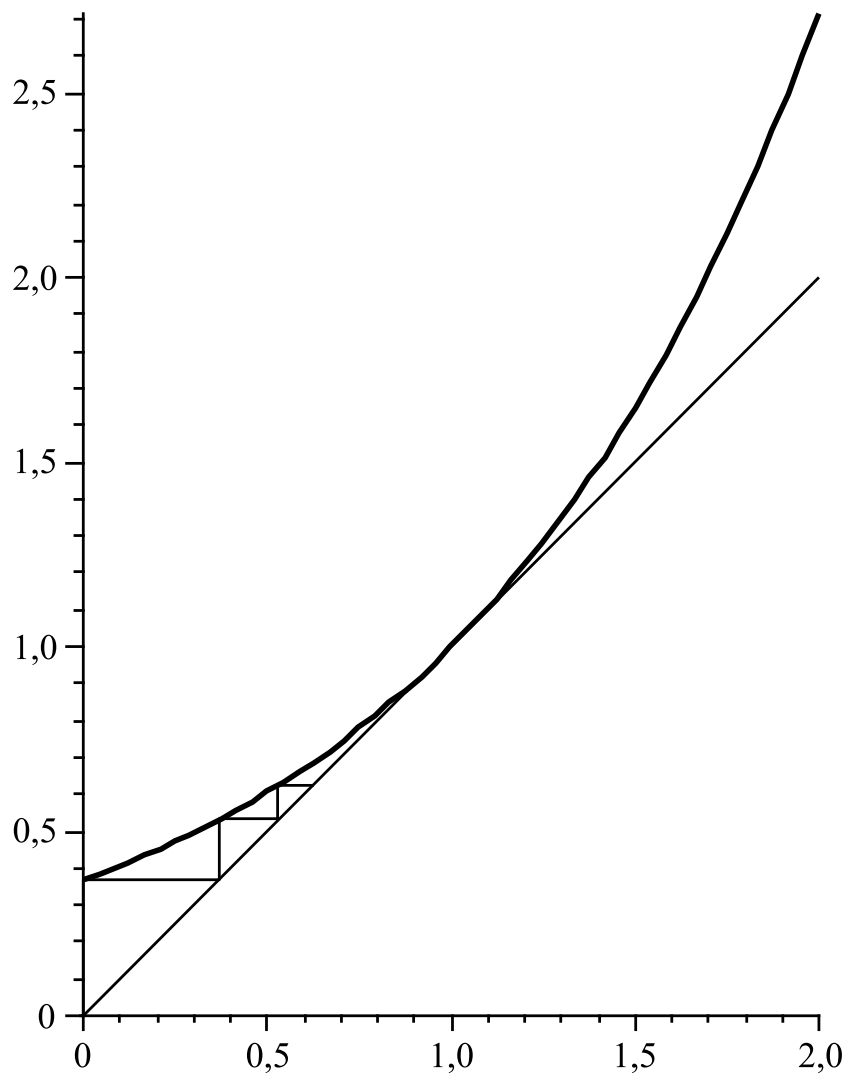
par 2 donc converge vers l'unique point fixe de  $f$  appartenant à  $[2, 4[$  ie 2. Puisque  $\forall x \in I_3, f(x) \geq x$ , pour tout  $u_0 \in I_3, (u_n)_{n \geq 0}$  est croissante non convergente car

$$[u_0, +\infty[$$

ne contient aucun point fixe de  $f$ . La suite diverge donc vers  $+\infty$ . On en déduit l'étude de la convergence pour toute condition initiale négative : si  $u_0 = -2$  ou  $-4$ , on a  $u_1 = 2$  ou  $4$  et la suite est constante à partir du rang 1. Si  $u_0 \in ]-4, 0]$ , on a  $u_1 \in [0, 4[$  et la suite converge vers 2. Si  $u_0 \in ]-\infty, -4[$ , on a  $u_1 \in ]4, +\infty[$  et la suite diverge vers  $+\infty$ .

#### SOLUTION 47.

► Figure.



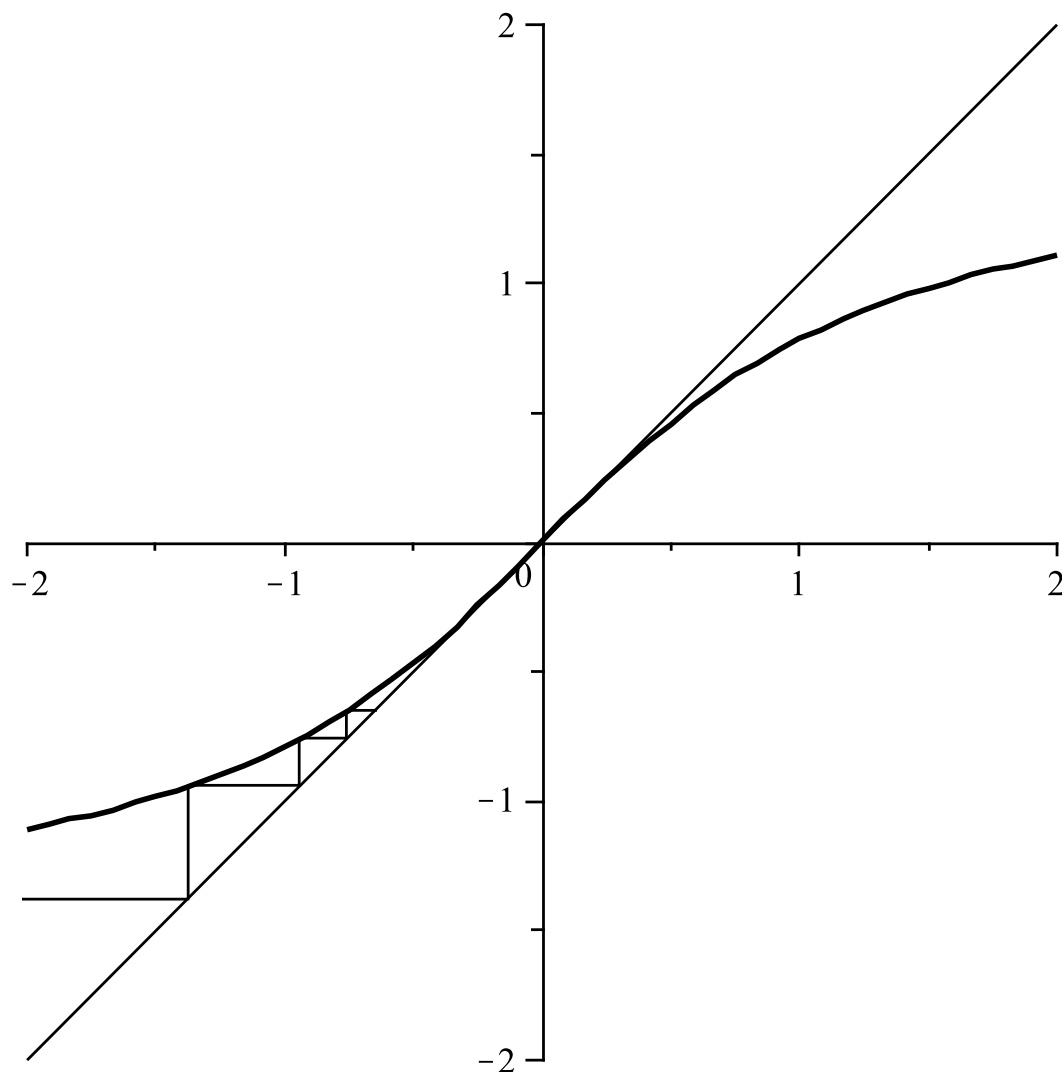
On conjecture que, pour  $u_0 > 1$ , la suite diverge vers  $+\infty$  et, pour  $u_0 \leq 1$ , la suite converge vers 1.

- *Définition de la suite* : comme  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , la suite est définie pour toute condition initiale  $u_0 \in \mathbb{R}$ .
- *Monotonie de la suite* : soit  $\delta$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\delta(x) = e^{x-1} - x$ . Cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$ ,  $\delta'(x) = e^{x-1} - 1$ . La fonction  $\delta$  est donc strictement décroissante sur  $] -\infty, 1]$  et strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ . Puisque  $\delta(0) = 0$ ,  $\delta$  est positive sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $f$  admet donc un unique point fixe valant 0 et,  $\forall u_0 \in \mathbb{R}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\delta(u_n) \geq 0$  ie  $u_{n+1} \geq u_n$ . La suite est donc croissante.

- *Convergence de la suite* : supposons que  $u_0 \leq 1$ . Puisque  $I = ]-\infty, 1]$  est stable par  $f$ , on prouve par une récurrence immédiate que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ . La suite est croissante majorée par 1 donc convergente. Sa limite est un point fixe de  $f$ , elle vaut donc 1. Supposons  $u_0 > 1$ . Puisque  $I = ]1, +\infty[$  est stable par  $f$ , on prouve par une récurrence immédiate que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ . La suite est croissante minorée par  $u_0 > 1$ , elle ne peut converger car  $[u_0, +\infty[$  ne contient aucun point fixe de  $f$ . La suite diverge donc vers  $+\infty$  d'après le théorème des suites monotones.

#### SOLUTION 48.

- *Figure.*



On conjecture que la suite converge toujours vers 0.

- *Définition de la suite* : puisque que  $\arctan$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , la suite est définie pour toute condition initiale  $u_0 \in \mathbb{R}$ .
- *Monotonie de la suite* : soit  $\delta$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\delta(x) = \arctan(x) - x$ . Cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$ ,

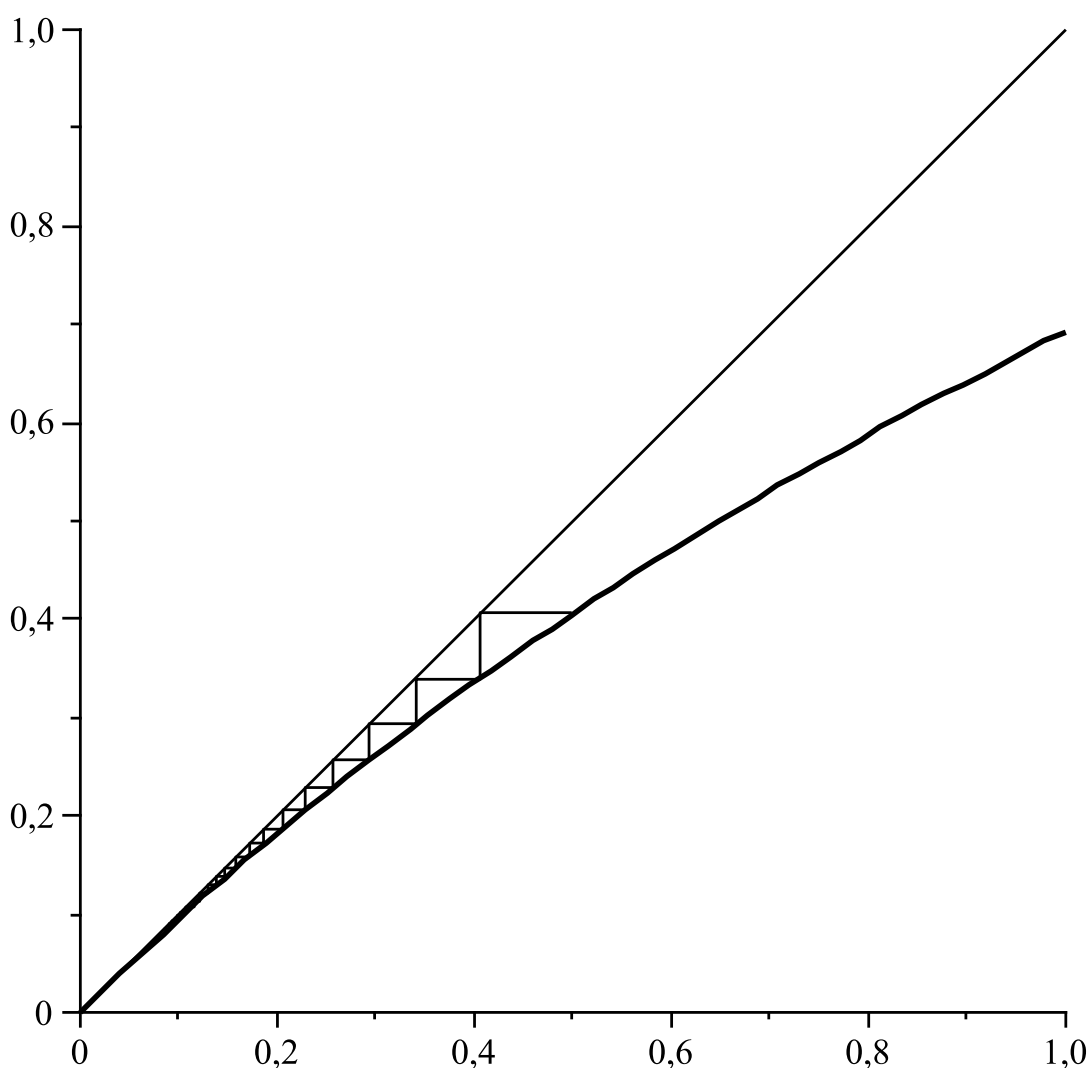
$$\delta'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - 1 = -\frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

La fonction  $\delta$  est donc strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ . Puisque  $\delta(0) = 0$ ,  $\delta$  est négative sur  $\mathbb{R}_+$  et positive sur  $\mathbb{R}_-$ . La fonction  $f$  admet donc un unique point fixe valant 0.

- *Convergence de la suite* : si  $u_0 \leq 0$ . Puisque  $I = ]-\infty, 0]$  est stable par  $f$ , on prouve par une récurrence immédiate que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in I$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\delta(u_n) \geq 0$  ie  $u_{n+1} \geq u_n$ . La suite est donc croissante. Puisqu'elle est majorée par 0, elle converge. Sa limite est un point fixe de  $f$ , elle vaut donc 0. Si  $u_0 \geq 0$ . Puisque  $I = [0, +\infty[$  est stable par  $f$ , on prouve par une récurrence immédiate que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in I$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\delta(u_n) \leq 0$  ie  $u_{n+1} \leq u_n$ . La suite est donc décroissante. Puisqu'elle est minorée par 0, elle converge. Sa limite est un point fixe de  $f$ , elle vaut donc 0.

#### SOLUTION 49.

- *Figure.*



On conjecture que la suite converge vers 0.

- *Définition de la suite* : comme  $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ , la suite est définie pour toute condition initiale  $u_0 \in \mathbb{R}_+$ .



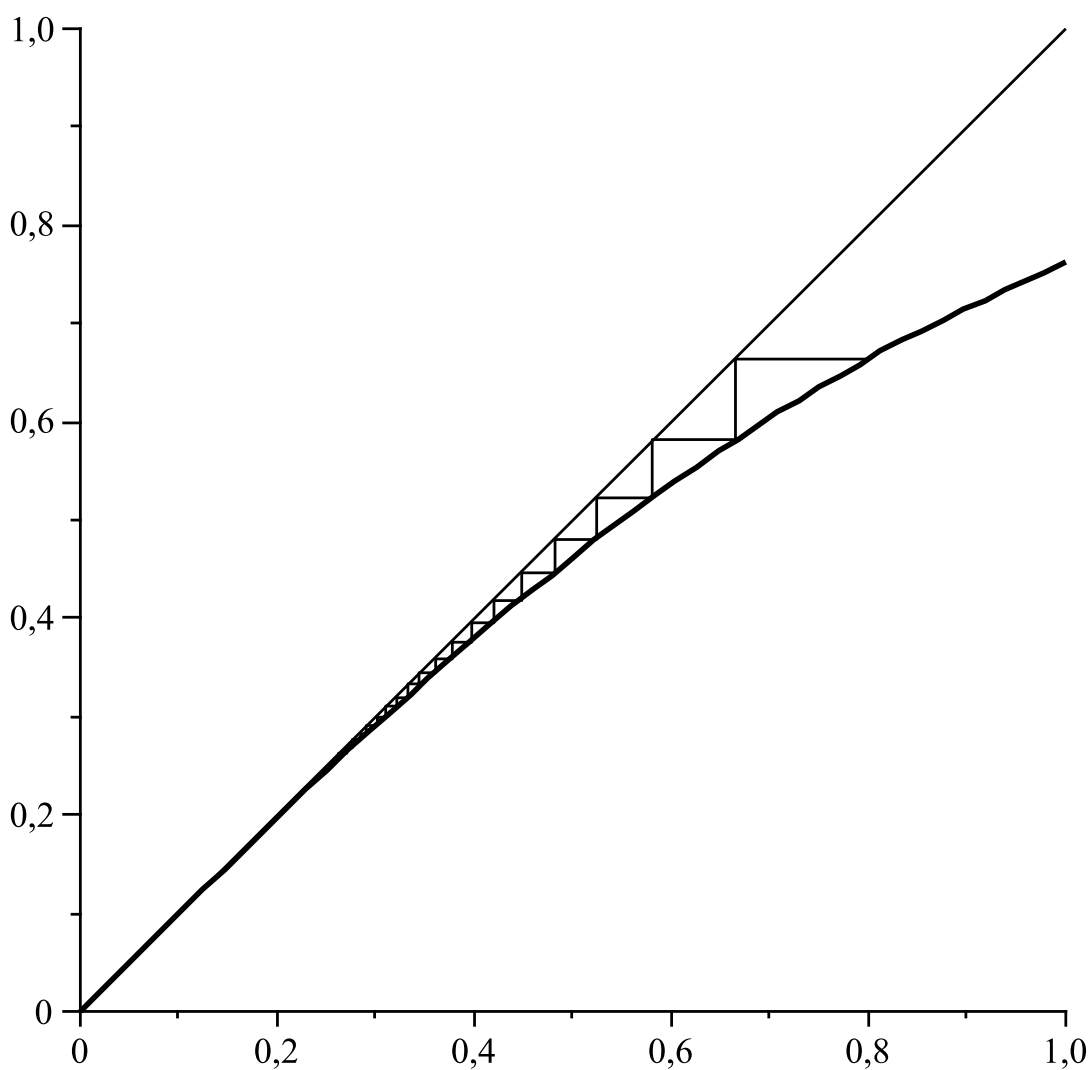
- *Convergence de la suite* : soit  $\delta$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $\delta(x) = \ln(1+x) - x$ . Cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et, pour tout réel  $x$  strictement positif,

$$\delta'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} < 0.$$

La fonction  $\delta$  est donc strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Puisque  $\delta(0) = 0$ ,  $\delta$  est négative sur  $\mathbb{R}_+$ . La fonction  $f$  admet donc un unique point fixe valant 0. Puisque  $I = [0, +\infty[$  est stable par  $f$ , on prouve par une récurrence immédiate que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  appartient à  $I$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\delta(u_n) \leq 0$  ie  $u_{n+1} \leq u_n$ . La suite est donc décroissante. Puisqu'elle est minorée par 0, elle converge. Sa limite est un point fixe de  $f$ , elle vaut donc 0.

#### SOLUTION 50.

- *Figure.*



On conjecture que la suite converge vers 0.

- *Définition de la suite* : comme  $th$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , la suite est bien définie pour toute condition initiale  $u_0 \in \mathbb{R}$ .

- *Convergence d'la suite* : soit  $\delta$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\delta(x) = \operatorname{th}(x) - x$ . Cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$  non nul,

$$\delta'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) - 1 = -\operatorname{th}^2(x) < 0.$$

La fonction  $\delta$  est donc strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ . Puisque  $\delta(0) = 0$ ,  $\delta$  est négative sur  $\mathbb{R}_+$  et positive sur  $\mathbb{R}_-$ . La fonction  $f$  admet donc un unique point fixe valant 0.

- *Cas 1* :  $u_0 \leq 0$ . Puisque  $I = ]-\infty, 0]$  est stable par  $f$ , on prouve par une récurrence immédiate que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in I$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\delta(u_n) \geq 0$  ie  $u_{n+1} \geq u_n$ . La suite est donc croissante. Puisqu'elle est majorée par 0, elle converge. Sa limite est un point fixe de  $f$ , elle vaut donc 0.
- *Cas 2* :  $u_0 \leq 0$ . Puisque  $I = [0, +\infty[$  est stable par  $f$ , on prouve par une récurrence immédiate que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in I$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\delta(u_n) \leq 0$  ie  $u_{n+1} \leq u_n$ . La suite est donc décroissante. Puisqu'elle est minorée par 0, elle converge. Sa limite est un point fixe de  $f$ , elle vaut donc 0.

### SOLUTION 51.

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $v_n = a^{-n^2+n}u_n$ .

- a. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $a^{-(n+1)^2+n+1} = a^{-n(n+1)}$ , on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= a^{-n(n+1)}(a^{2n}u_n + a^{n^2}) - a^{-n^2+n}u_n \\ &= a^{-n} \end{aligned}$$

- b. Après telescoping et puisque  $v_0 = 1$ , on a pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} a^{-k},$$

d'après la question précédente. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a^k}.$$

- c. Il y a deux cas à considérer...

- Si  $a = 1$ , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = n + 1,$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n + 1.$$

- Si  $a \neq 1$ , on peut appliquer la formule de la série géométrique : pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$v_n = 1 + \frac{1 - 1/a^n}{1 - 1/a},$$

et donc,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} u_n &= a^{n^2-n} + a^{n^2-n} \frac{1 - 1/a^n}{1 - 1/a} \\ &= \frac{2a^{n^2} - a^{n^2-1} - a^{n^2-n}}{a^n - a^{n-1}} \\ &= a^{n^2-n} \frac{(2 - 1/a - a^{-n})}{1 - 1/a} \end{aligned}$$

2. D'après ce qui précède,

► Si  $a = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

► Si  $a = -1$ , on a

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = 1 + \frac{1 - (-1)^n}{2}$$

et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.

► Si  $|a| > 1$ , on a

$$u_n \sim a^{n^2 - n} \frac{2 - 1/a}{1 - 1/a}$$

et la suite diverge vers  $+\infty$ .

► Si  $|a| < 1$ , on a

$$u_n \sim -\frac{a^{n^2 - 2n}}{1 - 1/a}$$

et la suite tend vers 0.

## SOLUTION 52.

1. On prouve par une récurrence forte immédiate que  $\forall n \geq 0, u_n \geq 0$ . Ainsi, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

et la suite  $(u_{n \geq 0})$  est croissante.

2. Prouvons le résultat par récurrence. L'hypothèse au rang  $n$  étant que la formule est vraie pour tous les entiers  $k \leq n$ .

► Le cas  $n = 1$  est banal. Pour  $n = 2$ , le résultat est acquis car  $u_2 = u_1 + \alpha u_0 < 2u_1$ .

► Supposons l'hypothèse au rang  $n \geq 2$ . On a alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq u_1 \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \alpha^k) \\ &\quad + \alpha^n u_1 \prod_{k=0}^{n-2} (1 + \alpha^k) \\ &\leq \alpha^n u_1 \prod_{k=0}^{n-2} (1 + \alpha^k) \\ &\quad \times [\alpha^n + \alpha^{n-1} + 1] \end{aligned}$$

or,

$$\alpha^n + \alpha^{n-1} + 1 \leq (1 + \alpha^{n-1})(1 + \alpha^n),$$

donc

$$u_{n+1} \leq u_1 \prod_{k=0}^n (1 + \alpha^k)$$

et l'hypothèse au rang  $n + 1$  est vérifiée.

► L'inégalité est acquise pour tout rang  $n \geq 1$  d'après le principe de récurrence.

Soit  $u \geq 0$ , puisque

$$\forall t \in [0, u], \quad \frac{1}{1+t} \leq 1,$$

on obtient après intégration sur  $[0, u]$ ,

$$\ln(1+u) \leq u.$$

Ainsi,  $\forall n \geq 1$ ,

$$\ln \left( \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \alpha^k) \right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

Or,  $\forall n \geq 1$ ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u^k = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} \leq \frac{1}{1 - \alpha}.$$

D'après le résultat de la question 2., la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est donc majorée. Puisqu'elle est croissante, elle converge.

### SOLUTION 53.

3. Par une récurrence immédiate, on prouve que  $\forall n \geq 1, x_n > 0$ . On a donc,  $\forall n \geq 1$ ,

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + nx_n^2} \leq x_n.$$

La suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers un réel  $\ell \geq 0$ . Raisonnons par l'absurde en supposant  $\ell > 0$ . Alors,  $\forall n \geq 1$ ,

$$0 \leq x_{n+1} \leq \frac{x_1}{1 + n\ell^2},$$

et d'après le théorème d'encadrement,

$$\ell = 0,$$

ce qui est absurde. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0.$$

2. Prouvons la propriété par récurrence sur  $n \geq 2$ . Puisque  $\forall x \in \mathbb{R}, x(1-x) \leq 1/4$ , on a

$$x_2 \leq \frac{1}{4}.$$

Supposons l'inégalité vérifiée au rang  $n \geq 2$ . Alors  $1 - x_n \geq 0$  et donc

$$nx_n(1 - x_n) \leq (1 - x_n),$$

ainsi

$$(n+1)x_{n+1} \leq 1,$$

et la propriété est acquise au rang  $n+1$ .

3. On remarque que  $\forall n \geq 1$ ,

$$\frac{(n+1)x_{n+1}}{nx_n} = \frac{n+1}{n} \times \frac{1}{1 + nx_n^2} \geq 1$$

si et seulement si

$$n^2 x_n^2 \leq 1,$$

ce qui est vrai d'après la question 2. Puisque  $\forall n \geq 1$ , on en déduit que la suite de terme général  $nx_n$  est croissante.

4. On remarque que  $\forall n \geq 2$  et  $\forall k \leq n$ ,

$$1 \geq (k-1)x_{k-1} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k-1}}.$$

D'où, en additionnant membre à membre ces  $n-1$  inégalités et après télescopage,

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_1} \leq n-1,$$

puis,

$$n \leq \frac{1}{x_n} \leq n-1 + \frac{1}{x_1},$$

donc

$$\frac{1}{x_n} \sim n,$$

et ainsi

$$x_n \sim \frac{1}{n}.$$

#### SOLUTION 54.

1. La minoration par 0 est évidente. Prouvons la majoration par 2 par récurrence. On a  $u_1 = 1$  donc l'inégalité est vraie au rang 1. Supposons que  $\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}} \leq 2$  pour un certain  $n \geq 2$ . Alors

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} \leq \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}}} \leq \sqrt{3} \leq 2$$

L'inégalité est donc établie pour tout  $n \geq 1$ .

2. Comme pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} = \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}} \frac{\sqrt{n-1}}{n}}$ , on a en utilisant l'inégalité de la question précédente :

$$1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + 2 \frac{\sqrt{n-1}}{n}}$$

D'après le théorème des gendarmes,  $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$  converge vers 1.

3.  $u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n + u_{n-1}} - \sqrt{n} = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n + u_{n-1}} + \sqrt{n}}$ . Or d'après la première question  $u_{n-1} = \mathcal{O}(\sqrt{n}) = o(n)$  donc  $\sqrt{n + u_{n-1}} \sim \sqrt{n}$ . Ainsi  $\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n + u_{n-1}} + \sqrt{n}} \sim \frac{u_{n-1}}{2\sqrt{n}} \sim \frac{u_{n-1}}{2\sqrt{n-1}}$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n-1}}{2\sqrt{n-1}} = \frac{1}{2}$  d'après la deuxième question. On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \sqrt{n} = \frac{1}{2}$ .

#### SOLUTION 55.

1. a. Comme  $|z_n| \in \mathbb{R}$ ,  $y_{n+1} = \frac{y_n}{2}$ . On en déduit que  $(y_n)$  converge vers 0.  
b. Par inégalité triangulaire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|z_{n+1}| \leq \frac{|\operatorname{Re}(z_n)| + |z_n|}{2} \leq |z_n|$$

puisque pour tout complexe  $z$ ,  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ .

- c. On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\operatorname{Re}(z_{n+1}) = \frac{\operatorname{Re}(z_n) + |z_n|}{2} \geq \operatorname{Re}(z_n)$$

puisque pour tout complexe  $z$ ,  $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ . Ainsi  $(x_n)$  est croissante.

- d. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\operatorname{Re}(z_n) \leq |z_n| \leq |z_0|$  par décroissance de  $(|z_n|)$ . Ainsi  $(x_n)$  est croissante et majorée ; elle converge.  
e. Comme  $(x_n)$  et  $(y_n)$  convergent,  $(z_n)$  converge. Puisque  $(y_n)$  converge vers 0, la limite de  $(z_n)$  est réelle.

- f. Si  $z_0 \in \mathbb{R}_+$ , on montre par récurrence que  $z_n = z_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Donc  $(z_n)$  converge vers  $z_0$ .  
 Si  $z_0 \in \mathbb{R}_-$ , alors  $z_1 = 0$  et on montre par récurrence que  $z_n = 0$  pour tout  $n \geq 1$ . Donc  $(z_n)$  converge vers 0.

2. a. En appliquant la méthode de l'arc-moitié, on a :

$$z_{n+1} = r_n \cos \frac{\theta_n}{2} e^{i \frac{\theta_n}{2}}$$

Puisque  $\theta_n \in ]-\pi, \pi]$ ,  $\frac{\theta_n}{2} \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et donc  $r_n \cos \frac{\theta_n}{2} \geq 0$ . On en déduit que  $r_{n+1} = r_n \cos \frac{\theta_n}{2}$ .  
 Comme  $\frac{\theta_n}{2} \in ]-\pi, \pi]$ ,  $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$ .

- b. On en déduit immédiatement que  $(\theta_n)$  converge vers 0.

- c. Comme  $\alpha \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$ ,  $\frac{\alpha}{2^k} \neq 0[\pi]$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On utilise alors l'indication de l'énoncé :

$$S_n = \prod_{k=1}^n \frac{\sin \frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{\alpha}{2^k}}$$

Par télescopage, on a  $S_n = \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}}$ .

Comme  $\frac{\alpha}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,  $\sin \frac{\alpha}{2^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{2^n}$ . Par conséquent,  $2^n \sin \frac{\alpha}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$  puis  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ .

- d. Par une récurrence facile,  $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$ . On montre aussi facilement que pour  $n \geq 1$  :

$$r_n = r_0 \prod_{k=0}^{n-1} \cos \frac{\theta_k}{2} = r_0 \prod_{k=0}^{n-1} \cos \frac{\theta_0}{2^{k+1}} = r_0 \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta_0}{2^k}$$

Si  $\theta_0 = 0$ ,  $z_0 \in \mathbb{R}_+$  et on a vu que  $(z_n)$  est constante égale à  $z_0$ . Ainsi  $(z_n)$  converge vers  $z_0$ .

Si  $\theta_0 = \pi$ ,  $z_0 \in \mathbb{R}_-$  et on a vu que  $(z_n)$  est nulle à partir du rang 1. Ainsi  $(z_n)$  converge vers 0.

Si  $\theta_0 \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$ , la question précédente montre que  $(r_n)$  converge vers  $r_0 \frac{\sin \theta_0}{\theta_0}$ . Comme  $(\theta_n)$  converge vers 0,  $(z_n)$  converge également vers  $r_0 \frac{\sin \theta_0}{\theta_0}$ .

#### SOLUTION 56.

Supposons que  $(z_n)$  converge vers une limite  $l \in \mathbb{C}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $z_{2n} = \exp(i \ln 2) z_n$  et par passage à la limite,  $l = \exp(i \ln 2) l$ . Puisque  $\frac{\ln 2}{2\pi}$  est non entier (on a  $0 < \frac{\ln 2}{2\pi} < 1$ ),  $\exp(i \ln 2) \neq 1$  et donc  $l = 0$ . Mais pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|z_n| = 1$  et donc  $|l| = 1$ , ce qui est absurde. Ainsi  $(z_n)$  ne converge pas.

#### SOLUTION 57.

Notons  $\ell_1, \ell_2$  et  $\ell_3$  les limites respectives des suites :

$$(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}.$$

La suite de terme générale  $u_{6n}$  étant extraite de  $(u_{3n})_{n \geq 0}$  mais également de  $(u_{2n})_{n \geq 0}$ , elle converge vers  $\ell_3$  et  $\ell_1$ , d'où  $\ell_3 = \ell_1$  par unicité de la limite. De même, la suite de terme générale  $u_{6n+3}$  étant extraite de  $(u_{3n})_{n \geq 0}$  mais également de  $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ , elle converge vers  $\ell_3$  et  $\ell_2$ , d'où  $\ell_3 = \ell_2$  par unicité de la limite. Ainsi  $\ell_1 = \ell_2$  et, d'après le cours,  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge.

#### SOLUTION 58.

Posons  $u_n = \{\sqrt{n}\}$ . Alors  $u_{n^2} = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . De plus,  $n-1 \leq \sqrt{n^2-1} < n$  pour  $n \geq 1$  donc  $\{\sqrt{n^2-1}\} = n$ . Enfin

$$\{\sqrt{n^2-1}\} = \sqrt{n^2-1} - (n-1) = 1 + \sqrt{n^2-1} - n = 1 - \frac{1}{n + \sqrt{n^2-1}}$$

Les suites  $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{n^2-1})_{n \geq 1}$  sont des suites extraites de la suite  $(u_n)$  de limites respectives 0 et 1. La suite  $(u_n)$  n'admet donc pas de limite.

### SOLUTION 59.

#### Première méthode

Supposons qu'une des suites ne soit pas majorée – la suite  $(a_n)$  pour fixer les idées. Alors on peut extraire une suite  $(a_{\varphi(n)})$  qui diverge vers  $+\infty$ . Puisque  $e^{a_{\varphi(n)}} + e^{b_{\varphi(n)}} + e^{c_{\varphi(n)}} \geq e^{a_{\varphi(n)}}$ ,  $e^{a_{\varphi(n)}} + e^{b_{\varphi(n)}} + e^{c_{\varphi(n)}}$  tend vers  $+\infty$ , ce qui contredit le fait que  $e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n}$  tend vers 3.

Supposons maintenant qu'une des suites ne soit pas minorée – la suite  $(a_n)$  pour fixer les idées. Alors on peut extraire une suite  $(a_{\varphi(n)})$  qui diverge vers  $-\infty$ . Les deux autres suites ne peuvent pas être majorées sinon  $a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)} + c_{\varphi(n)}$  tendrait vers  $-\infty$ . Ainsi une des suites n'est pas majorée et on est ramené au cas précédent dont on a vu qu'il était impossible.

Par conséquent, les trois suites sont bornées.

La suite  $(a_n)$  est bornée donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe donc une suite extraite  $(a_{\varphi_1(n)})$  convergente. La suite  $(b_{\varphi_1(n)})$  est également bornée donc il existe une suite extraite  $(b_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)})$  convergente. Enfin, la suite  $(c_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)})$  est bornée donc il existe une suite extraite  $(c_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3(n)})$  convergente. Pour simplifier les notations, posons  $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3$ . Ainsi les suites  $(a_{\varphi(n)})$ ,  $(b_{\varphi(n)})$ ,  $(c_{\varphi(n)})$  convergent. Notons  $a, b, c$  leurs limites. On a donc  $a + b + c = 0$  et  $e^a + e^b + e^c = 3$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $e^x \geq 1 + x$  avec inégalité stricte lorsque  $x \neq 0$ . Supposons que l'un des réels  $a, b, c$  soit non nul –  $a$  pour fixer les idées. Alors  $e^a > 1 + a$ ,  $e^b \geq 1 + b$  et  $e^c \geq 1 + c$  donc  $e^a + e^b + e^c > 3 + a + b + c$  i.e.  $3 > 3$  ce qui est absurde. Ainsi  $a = b = c = 0$ .

Ce qui précède montre que 0 est la seule valeur d'adhérence des suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(c_n)$ . Il est classique de montrer que 0 est la limite de ces trois suites.

#### Seconde méthode

Posons  $f(x) = e^x - 1 - x$ . On montre facilement que  $f$  est positive et ne s'annule qu'en 0. D'après l'énoncé  $u_n = f(a_n) + f(b_n) + f(c_n)$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . De plus,  $0 \leq f(a_n) \leq u_n$  donc, par encadrement,  $(f(a_n))$  converge vers 0. La représentation graphique de  $f$  montre bien que  $(a_n)$  doit converger vers 0. Soit  $\varepsilon > 0$ . Posons  $m = \min(f(\varepsilon), f(-\varepsilon))$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $|f(a_n)| < m$ . Les variations de  $f$  montrent alors que pour  $n \geq N$ ,  $|a_n| < \varepsilon$ . Ainsi  $(a_n)$  converge vers 0. On raisonne de la même manière pour  $(b_n)$  et  $(c_n)$ .

### SOLUTION 60.

Supposons  $(u_n)$  non majorée. Alors on peut en extraire une sous-suite  $(u_{\varphi(n)})$  divergeant vers  $+\infty$ . Puisque  $v_n = (u_n + v_n) - u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et que  $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ ,  $(v_{\varphi(n)})$  diverge vers  $-\infty$ . Mais alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)}^p = +\infty$  et,  $q$  étant impair,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{\varphi(n)}^q = -\infty$ . Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)}^p - v_{\varphi(n)}^q = +\infty$ , ce qui contredit l'énoncé.

Supposons  $(u_n)$  non minorée. Alors on peut en extraire une sous-suite  $(u_{\varphi(n)})$  divergeant vers  $-\infty$ . Puisque  $v_n = (u_n + v_n) - u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et que  $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ ,  $(v_{\varphi(n)})$  diverge vers  $+\infty$ . Mais alors,  $p$  étant impair,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)}^p = -\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{\varphi(n)}^q = +\infty$ .

Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)}^p - v_{\varphi(n)}^q = -\infty$ , ce qui contredit l'énoncé.

La suite  $(u_n)$  est donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une valeur d'adhérence  $l \in \mathbb{R}$ . Soit  $(u_{\varphi(n)})$  une sous-suite convergeant vers  $l$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = 0$ ,  $(v_{\varphi(n)})$  converge vers  $-l$ . Enfin, puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^p - v_n^q = 0$ ,  $l^p - (-l)^q = 0$ .

$p$  et  $q$  étant impairs, ceci équivaut à  $l^p + l^q = 0$ . La fonction  $x \mapsto x^p + x^q$  étant strictement croissante (encore une fois, on utilise le fait que  $p$  et  $q$  sont impairs) et s'annulant en 0, on a donc  $l = 0$ . 0 est l'unique valeur d'adhérence de la suite  $(u_n)$  : on démontre alors classiquement que  $(u_n)$  converge vers 0. Puisque  $v_n = (u_n + v_n) - u_n$ , on en déduit que  $(v_n)$  converge vers 0.