# Devoir à la maison n°04 : corrigé

**Solution 1**

**1.** **a.** Soit $(z,z') \in (\mathbb{C}\setminus\{-i\})^2$ tel que $f(z)=f(z')$. Alors $\frac{iz+1}{z+i}=\frac{iz'+1}{z'+i}$ donc $(iz+1)(z'+i)=(iz'+1)(z+i)$. En développant, on obtient $izz'+z'-z+i=izz'+z-z'+i$ puis $z=z'$ donc $f$ est injective.

**b.** Soit $\mathrm{Z}\in \mathrm{I}mf$. Il existe donc $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ tel que $\mathrm{Z}=f(z)$. Supposons $\mathrm{Z}=i$. Alors $\frac{iz+1}{z+i}=i$ puis $iz+1=i(z+i)=iz-i$, ce qui est absurde. Ainsi $\mathrm{Z}\neq i$ de sorte que $\operatorname{Im} f\subset\mathbb{C}\setminus\{i\}$. Réciproquement, soit $\mathrm{Z}\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$. Posons $z=\frac{1-i\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-i}$. Alors $z(\mathrm{Z}-i)=1-i\mathrm{Z}$ puis $\mathrm{Z}(z+i)=iz+1$. En particulier, $z\neq -i$ puisqu'alors on aurait $0=i\times(-1)+1=2$. Ainsi $\mathrm{Z}=\frac{iz+1}{z+i}=f(z)$ de sorte que $\mathrm{Z}\in\operatorname{Im} f$. Par conséquent, $\mathbb{C}\setminus\{i\}\subset\operatorname{Im} f$.
Par double inclusion, $\operatorname{Im} f=\mathbb{C}\setminus\{i\}$. En particulier, $f$ n'est pas surjective puisque $\operatorname{Im} f\neq\mathbb{C}$.

**c.** Soit $\mathrm{Z}\in f(\mathcal{P})$. Il existe donc $z\in\mathcal{P}$ tel que $\mathrm{Z}=f(z)$. Remarquons alors que

$$\begin{aligned}
|iz+1|^2-|z+i|^2 &= (iz+1)\overline{iz+1}-(z+i)\overline{z+i}\\
&=(iz+1)(-i\overline{z}+1)-(z+i)(\overline{z}-i)\\
&=\left(z\overline{z}+iz-i\overline{z}+1\right)-\left(z\overline{z}-iz+i\overline{z}+1\right)\\
&=2i(z-\overline{z})=-4\operatorname{Im}(z)<0
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$|\mathrm{Z}|=|f(z)|=\frac{|iz+1|}{|z+i|}<1$$

Ceci signifie que $\mathrm{Z}\in\mathcal{D}$. Finalement, $f(\mathcal{P})\subset\mathcal{D}$.

**d.** Soit $\mathrm{Z}\in\mathcal{D}$. Alors $\mathrm{Z}\neq i$ donc $\mathrm{Z}$ admet un unique antécédent $z$ par $f$ par injectivité de $f$. On a déjà montré à la question **1.b** que cet unique antécédent était $z=\frac{1-i\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-i}$. Il s'agit alors de montrer que $z\in\mathcal{P}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(z)&=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})\\
&=\frac{1}{2i}\left(\frac{1-i\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-i}-\overline{\left(\frac{1-i\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-i}\right)}\right)\\
&=\frac{1}{2i}\left(\frac{1-i\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-i}-\frac{1+i\overline{\mathrm{Z}}}{\overline{\mathrm{Z}}+i}\right)\\
&=\frac{1}{2i}\cdot\frac{(1-i\mathrm{Z})(\overline{\mathrm{Z}}+i)-(1+i\overline{\mathrm{Z}})(\mathrm{Z}-i)}{(\mathrm{Z}-i)(\overline{\mathrm{Z}}+i)}\\
&=\frac{1}{2i}\cdot\frac{\left(\mathrm{Z}+\overline{\mathrm{Z}}+i-i\mathrm{Z}\overline{\mathrm{Z}}\right)-\left(\mathrm{Z}+\overline{\mathrm{Z}}-i+i\mathrm{Z}\overline{\mathrm{Z}}\right)}{(\mathrm{Z}-i)\overline{\mathrm{Z}-i}}\\
&=\frac{1}{2i}\cdot\frac{2i-2i\mathrm{Z}\overline{\mathrm{Z}}}{|\mathrm{Z}-i|^2}=\frac{1-|\mathrm{Z}|^2}{|\mathrm{Z}-i|^2}
\end{aligned}$$

Or $\mathrm{Z}\in\mathcal{D}$ donc $|\mathrm{Z}|<1$ de sorte que $\operatorname{Im}(z)>0$ i.e. $z\in\mathcal{P}$. On a donc prouvé que tout élément de $\mathcal{D}$ admettait un unique antécédent par $f$ dans $\mathcal{P}$. Puisqu'on sait également que $f(\mathcal{P})\subset\mathcal{D}$, $f$ induit une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{D}$.

**e.** Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$. Alors

$$\begin{aligned}
& z\in f^{-1}(\mathbb{U})\\
\iff\ & f(z)\in\mathbb{U}\\
\iff\ & f(z)\overline{f(z)}=1\\
\iff\ & \frac{iz+1}{z+i}\cdot\frac{-i\overline{z}+1}{\overline{z}-i}=1\\
\iff\ & (iz+1)(-i\overline{z}+1)=(z+i)(\overline{z}-i)\\
\iff\ & z\overline{z}+iz-i\overline{z}+1=z\overline{z}+i\overline{z}-iz+1\\
\iff\ & z=\overline{z}\\
\iff\ & z\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ainsi $f^{-1}(\mathbb{U}) = \mathbb{R}$.

**2.** **a.** Soit $z \in \mathcal{P}$.

$$\mathrm{Im}(g(z)) = \frac{1}{2i}(g(z) - \overline{g(z)}) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{z - \overline{z}}{2i|z|^2} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|^2} > 0$$

donc $g(z) \in \mathcal{P}$. L'application $g$ est par conséquent bien définie.

**b.** Il suffit de vérifier que $g$ est une involution. En effet, pour tout $z \in \mathcal{P}$, $g(g(z)) = z$ donc $g \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$. Puisque $g$ est une involution, elle est bijective.

**3.** **a.** Soit $z \in \mathcal{P}$. Supposons $z \sin\theta + \cos\theta = 0$. Alors $\mathrm{Im}(z\sin\theta + \cos\theta) = 0$ et donc $\sin\theta \cdot \mathrm{Im}(z) = 0$. Puisque $\mathrm{Im}(z) > 0$, $\sin\theta = 0$. Or $z\sin\theta + \cos\theta = 0$ donc $\cos\theta = 0$. On a donc $\sin\theta = \cos\theta = 0$, ce qui est absurde puisque $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Finalement $z\sin\theta + \cos\theta \neq 0$, ce qui prouve que $\mathrm{A}_\theta(z)$ est bien défini.
Montrons maintenant que $\mathrm{A}_\theta(z) \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\mathrm{A}_\theta(z)) &= \frac{1}{2i}\left(\mathrm{A}_\theta(z) - \overline{\mathrm{A}_\theta(z)}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta} - \frac{\overline{z}\cos\theta - \sin\theta}{\overline{z}\sin\theta + \cos\theta}\right)\\
&= \frac{1}{2i} \cdot \frac{(z\cos\theta - \sin\theta)(\overline{z}\sin\theta + \cos\theta) - (\overline{z}\cos\theta - \sin\theta)(z\sin\theta + \cos\theta)}{|z\sin\theta + \cos\theta|^2}\\
&= \frac{1}{2i} \cdot \frac{(z\overline{z}\cos\theta\sin\theta + z\cos^2\theta - \overline{z}\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta) - (z\overline{z}\cos\theta\sin\theta - z\sin^2\theta + \overline{z}\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta)}{|z\sin\theta + \cos\theta|^2}\\
&= \frac{1}{2i} \cdot \frac{z(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - \overline{z}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{|z\sin\theta + \cos\theta|^2}\\
&= \frac{z - \overline{z}}{2i|z\sin\theta + \cos\theta|^2} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z\sin\theta + \cos\theta|^2}
\end{aligned}$$

Or $z \in \mathcal{P}$ donc $\mathrm{Im}(z) > 0$. Ainsi $\mathrm{Im}(\mathrm{A}_\theta(z)) > 0$ i.e. $\mathrm{A}_\theta(z) \in \mathcal{P}$.

**b.** On vérifie immédiatement que $\mathrm{A}_0(z) = z$ pour tout $z \in \mathcal{P}$. Autrement dit, $\mathrm{A}_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$.

**c.** Soit $z \in \mathcal{P}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_\theta(\mathrm{A}_\varphi(z)) &= \frac{\mathrm{A}_\varphi(z)\cos\theta - \sin\theta}{\mathrm{A}_\varphi(z)\sin\theta + \cos\theta}\\
&= \frac{\frac{z\cos\varphi - \sin\varphi}{z\sin\varphi + \cos\varphi} \cdot \cos\theta - \sin\theta}{\frac{z\cos\varphi - \sin\varphi}{z\sin\varphi + \cos\varphi} \cdot \sin\theta + \cos\theta}\\
&= \frac{(z\cos\varphi - \sin\varphi)\cos\theta - (z\sin\varphi + \cos\varphi)\sin\theta}{(z\cos\varphi - \sin\varphi)\sin\theta + (z\sin\varphi + \cos\varphi)\cos\theta}\\
&= \frac{z(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) - (\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta)}{z(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta) + \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta}\\
&= \frac{z\cos(\theta+\varphi) - \sin(\theta+\varphi)}{z\sin(\theta+\varphi) + \cos(\theta+\varphi)}\\
&= \mathrm{A}_{\theta+\varphi}(z)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{A}_\theta \circ \mathrm{A}_\varphi = \mathrm{A}_{\theta+\varphi}$.

**d.** Il suffit de remarquer

$$\mathrm{A}_\theta \circ \mathrm{A}_{-\theta} = \mathrm{A}_{-\theta} \circ \mathrm{A}_\theta = \mathrm{A}_{\theta-\theta} = \mathrm{A}_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$$

Ainsi $\mathrm{A}_\theta$ est bijective et $\mathrm{A}_\theta^{-1} = \mathrm{A}_{-\theta}$.

## Solution 2

**1.** On a donc $z = e^{i\theta}$. Tout d'abord,

$$1 + z = 1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$$

de sorte que

$$|1+z| = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$$

Remarquons que pour $z \neq -1$ i.e. $\theta \not\equiv \pi[2\pi]$,

$$z^2 - z + 1 = \frac{1+z^3}{1+z} = \frac{1+e^{3i\theta}}{1+e^{i\theta}} = \frac{2\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)e^{\frac{3i\theta}{2}}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}}$$

Ainsi

$$|z^2 - z + 1| = \left|\frac{\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right|$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)\\
&= (2\cos^2(x) - 1)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x)\\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2(1-\cos^2(x))\cos(x)\\
&= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$|z^2 - z + 1| = \left|4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3\right|$$

Remarquons que cette égalité est encore valable lorsque $z = -1$ i.e. $\theta \equiv \pi[2\pi]$ puisqu'alors, $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$.
Finalement,

$$f(z) = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| + \left|4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3\right|$$

**2.** La fonction $g$ étant paire, on peut se contenter de déterminer ses extrema sur $[0,1]$.
Pour $t \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$,

$$g(t) = -4t^2 + 2t + 3$$

Ainsi $g$ est croissante sur $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.
Pour $t \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$,

$$g(t) = 4t^2 + 2t - 3$$

Ainsi $g$ est croissante sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$.
On peut résumer la situation par un tableau de variations.

| $t$ | $0$ | | $\frac{1}{4}$ | | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(t)$ | $3$ | $\nearrow$ | $\frac{13}{4}$ | $\searrow$ | $\sqrt{3}$ | $\nearrow$ | $3$ |

On en déduit que $g$ admet pour maximum $\frac{13}{4}$ et pour minimum $\sqrt{3}$ sur l'intervalle $[0,1]$. Puisque $g$ est paire, il s'agit également du maximum et du minimum de $g$ sur l'intervalle $[-1,1]$.

**3.** Remarquons que pour $z \in \mathbb{U}$

$$f(z) = g\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

où $\theta$ désigne un argument de $z$. Comme cos est à valeurs dans $[-1,1]$, la question précédente montre que

$$\forall z \in \mathbb{U},\ \sqrt{3} \leq f(z) \leq \frac{13}{4}$$