Applications, fonctions d'une variable réelle

Généralités

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application croissante telle que $f \circ f = \mathrm{I}d_{\mathbb{R}}$. Prouver que $f = \mathrm{I}d_{\mathbb{R}}$.

Exercice 2.

Déterminer les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n)+f(f(n))+f(f(f(n)))=3n$.

Injectivité et surjectivité

Exercice 3.

Soit E un ensemble non vide et A et B deux parties de E.

1. Montrer que si $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing$, alors pour toute partie X de E

$$(\mathrm{X}\cup\mathrm{A})\cap(\mathrm{X}\cup\mathrm{B})=\mathrm{X}$$

2. Soit l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathrm{E})^2 \\ \mathrm{X} & \longmapsto & (\mathrm{X}\cup\mathrm{A}, \mathrm{X}\cup\mathrm{B}) \end{array} \right.$.

   a. Montrer que f n'est pas surjective.

   b. Montrer que f est injective *si et seulement si* $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing$.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective, telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \leqslant n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n)=n$.

Exercice 5.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{U}$. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{\alpha}z+1 \neq 0$, on pose $f(z)=\dfrac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{U}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{\alpha}z+1 \neq 0$. Montrer que $z \in \mathbb{U}$ *si et seulement si* $f(z) \in \mathbb{U}$.
3. Montrer que f induit une bijection de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$.

Exercice 6.

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. Montrer que f est injective *si et seulement si* $f(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = f(\mathrm{A})\cap f(\mathrm{B})$ pour tout couple $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{P}(\mathrm{E})^2$.

Exercice 7.

Soient f et g deux applications d'un ensemble E dans lui-même, telles que $g\circ f\circ g = f$ et $f\circ g\circ f = g$.

1. On suppose que f est injective. Démontrer que f et g sont bijectives.
2. On suppose que g est surjective. Démontrer que f et g sont bijectives.

Exercice 8.

Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant $f(1)=1$ et telle que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ f(m+f(n)) = f(f(m))+f(n)$$

On rappelle que $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{N})$ et on note $\mathscr{F}$ l'ensemble des points fixes de f, c'est-à-dire

$$\mathscr{F} = \{a \in \mathbb{N}, f(a)=a\}$$

1. Montrer que $f(0)=0$.
2. En déduire que $f\circ f = f$.
3. Montrer que $\operatorname{Im} f = \mathscr{F}$.
4. Montrer que pour tout $a \in \mathscr{F}$, $a+1 \in \mathscr{F}$.
5. En déduire que $\mathscr{F} = \mathbb{N}$ et en déduire f.

Exercice 9.

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct. A est le point d'affixe 2. On définit une application $\mathscr{T} : \mathscr{P}\setminus\{\mathrm{A}\} \to \mathscr{P}$ qui au point d'affixe z associe le point d'affixe $f(z)=2z+3+\dfrac{6}{z-2}$.

1. Étudier l'injectivité et la surjectivité de $\mathscr{T}$.
2. Déterminer l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ invariants par $\mathscr{T}$.
3. Deux points m et m' de $\mathscr{P}\setminus\{\mathrm{A}\}$ sont dits associés s'ils ont la même image par $\mathscr{T}$. Montrer que les points m et m', d'affixes respectifs z et z', sont associés *si et seulement si* $z=z'$ ou $(z-2)(z'-2)=3$.
4. On note $\mathscr{E}$ l'axe réel privé du point A. Déterminer l'ensemble $\mathscr{T}(\mathscr{E})$.
5. Soient B et C les points d'affixes $7-4\sqrt{3}$ et $7+4\sqrt{3}$. Déterminer l'ensemble $\mathscr{T}^{-1}([\mathrm{BC}])$.

Exercice 10.

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_1(x) = |x-2|$;
2. $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_2(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$;
3. $f_3 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_3(x) = \dfrac{3x+1}{4x+1}$;
4. $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3$;
5. $f_5 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto x^3$.

Exercice 11.

Soient E un ensemble, A et B deux parties *fixées* de E, et Ψ l'application de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ dans $\mathscr{P}(\mathrm{A}) \times \mathscr{P}(\mathrm{B})$ définie par

$$\forall \mathrm{X} \subset \mathrm{E}, \qquad \Psi(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} \cap \mathrm{A}, \mathrm{X} \cap \mathrm{B}).$$

1. *Etude de l'injectivité de* Ψ.
   - **a.** Calculer $\Psi(\varnothing)$.
   - **b.** Calculer $\Psi(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}})$.
   - **c.** Prouver que Ψ est injective *si et seulement si* $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E}$.
2. *Etude de la surjectivité de* Ψ.
   - **a.** Le couple $(\varnothing, \mathrm{B})$ admet-il un antécédent par Ψ ?
   - **b.** Déterminer *une condition nécessaire et suffisante* sur A, B et E pour que Ψ soit surjective.

Exercice 12.

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$\begin{cases} f(n) = n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ f(n) = \dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Etudier l'injectivité et la surjectivité de f.

Images directes et réciproques

Exercice 13.

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image de l'ensemble I par la fonction f :

1. $\mathrm{I} = [-5, 1[$ et $f(x) = \dfrac{5x-2}{1-x}$.
2. $\mathrm{I} = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$ et $f(x) = \dfrac{5x^2-1}{1-x}$.
3. $\mathrm{I} =]-1, 1[$ et $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$.
4. $\mathrm{I} =]1, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^3}$.
5. $\mathrm{I} =]-\pi, \pi[\setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right\}$ et $f(x) = \tan x$.

Exercice 14.

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E, $f^{-1}(f(\mathrm{A}))) = \mathrm{A}$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(\mathrm{B})) = \mathrm{B}$.

Exercice 15.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$. Déterminer les ensembles suivants :

1. $f(\mathbb{R})$;
2. $f([-3, 2])$;
3. $f([-3, 3])$;
4. $f^{-1}([9, 10])$;
5. $f^{-1}([-5, -3[)$;
6. $f^{-1}([-4, 4[)$;
7. $f^{-1}(f([0, 1]))$;
8. $f(f^{-1}([-1, 4]))$;
9. $f(f^{-1}(\mathbb{R}_-))$.

Exercice 16.

Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. On considère les ensembles $\mathrm{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ et $\mathrm{F} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z = \dfrac{1}{2}\right\}$.
   - **a.** Si on identifie $\mathbb{C}$ au plan, donner la nature géométrique de E et F, et donner leurs équations cartésiennes.
   - **b.** Vérifier que $f(\mathrm{E} \setminus \{0\}) \subset \mathrm{F}$.
   - **c.** Montrer que f induit une bijection de $\mathrm{E} \setminus \{0\}$ sur F.

Fonctions indicatrices

EXERCICE 17.

Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. On définit la *différence symétrique* de A et B par :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Montrer que $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)$,
$$\mathbb{1}_{A\Delta B} = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2.$$
2. Montrer que $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E)$,
$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$
3. Montrer que $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E)$
$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

EXERCICE 18.

Soient A, B, C trois ensembles. On pose $X = A \cup (B \cap C)$ et $Y = (A \cup B) \cap C$.

1. Déterminer les fonctions indicatrices de X et Y en fonction de celles de A, B et C.
2. En déduire à quelle condition nécessaire et suffisante (portant sur A et C) les ensembles X et Y sont égaux.

Calcul de limites

EXERCICE 19.

Voici un peu d'entraînement sur la méthode de la quantité conjuguée.

1. Démontrer que
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1.$$
2. Soient m, n des entiers positifs. Etudier
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}.$$
3. Démontrer que
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2} - 1\right) = \frac{1}{2}.$$

EXERCICE 20.

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$;
6. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$;
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$;
8. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$.

Dérivabilité

EXERCICE 21.

Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Si f est paire ou impaire, que peut-on dire de la parité de f', de $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$?
2. Si f est périodique, que peut-on dire de la périodicité de f', de $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$?

EXERCICE 22.

Etudier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x^4 - x^2}$
2. $g : x \mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}}$
3. $h : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2-1} - 1\right)$
4. $i : x \mapsto \ln\left(1 - \sqrt{\cos x}\right)$

EXERCICE 23.☆

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall x \neq \pm 1$,
$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} - \frac{b}{1-x}.$$
2. Calculer la dérivée n-ième sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ de la fonction
$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

EXERCICE 24.☆

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, calculer la dérivée n-ième de

$$x\mapsto e^{x\cos(\alpha)}\cos(x\sin(\alpha)).$$

Etude de fonctions

EXERCICE 25.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction $f:x\in\mathbb{R}\mapsto x^3-3x$.
2. *Sans calculs*, tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$g:x\in\mathbb{R}\mapsto f(x+2)-1 \qquad h:x\in\mathbb{R}\mapsto 2f\left(\frac{x}{2}\right) \qquad i:x\in\mathbb{R}\mapsto\frac{1}{2}f(2x-2)+1$$

EXERCICE 26.

On considère la fonction réelle définie par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Montrer que le point $(1,0)$ est le seul point de la courbe où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=x$.

EXERCICE 27.

Montrer que l'équation $x\ln x=1$ admet une unique solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.

EXERCICE 28.

Montrer que la fonction définie par

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ,\ \ x\longmapsto f(x)=2xe^x$$

induit une bijection de $[0,1]$ sur un ensemble à déterminer.

EXERCICE 29.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que f induit une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à préciser.

EXERCICE 30.☆☆

Soit $f:x\mapsto\sqrt{|x^2-1|}$. Etudier la fonction f, puis représenter f graphiquement. On précisera les tangentes remarquables ainsi que les asymptotes.

EXERCICE 31.

Etudier les fonctions suivantes. On précisera également leurs images.

1. $f:x\mapsto x^x$
2. $f:x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$
3. $f:x\mapsto\sqrt{1+x^2}$
4. $f:x\mapsto\sin x-\dfrac{1}{3}\sin 3x$

EXERCICE 32.

Soient $f:x\in\mathbb{R}\mapsto\sqrt{x^2+x+1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $f(-1-x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. En déduire sans justification une symétrie de $\mathscr{C}_f$.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée. En déduire les variations de f que l'on présentera dans un tableau de variations.
   On précisera les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
4. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ dont on déterminera une équation. En déduire sans calcul que $\mathscr{C}_f$ admet également une asymptote oblique en $-\infty$ dont on précisera une équation.
5. Préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à ses asymptotes.
6. Tracer $\mathscr{C}_f$. On fera figurer les asymptotes et les tangentes remarquables.

EXERCICE 33.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer en fonction de n le nombre de solutions de l'équation $x^n\ln x=-\dfrac{1}{n^2}$.

EXERCICE 34.

Soit $k\in\mathbb{R}_+^*$. Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équations $e^x=1+kx$.

EXERCICE 35.

On considère la fonction réelle $f\ :\ x\longmapsto\dfrac{(x+1)^2}{2x-1}$.

1. Etudiez f, déterminez ses éventuelles asymptotes, puis tracez la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Prouvez que $\mathscr{C}_f$ possède un centre de symétrie.

Inégalités

Exercice 36.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 37.

Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$x \leqslant \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\tan x$$

Exercice 38.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{8\sin x - \sin(2x)}{6} \leqslant x$$

Minorant, majorant, minimum, maximum

Exercice 39.

Les fonctions suivantes sont-elles majorées, minorées, bornées ? Justifier.

1. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \sin x$
2. $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{2\sin x + 3\cos x^2}{1+e^x}$
3. $h : x \in \mathbb{R} \mapsto (1+\sin x)\ln(1+x^2)$
4. $i : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2}\sin x$

Exercice 40.

Les fonctions suivantes admettent-elles un minimum ou un maximum ?

1. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2}$
2. $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$
3. $h : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-x}\sqrt{x}$.
4. $i : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x + \dfrac{a}{x}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$