Devoir surveillé n°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont autorisées.

Problème 1 – D'après E3A 2003 MP Maths A

Dans tout le problème, on considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} x^n$$

On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Partie I

1 Montrer que le rayon de convergence de la série entière définissant f est $\frac{1}{e}$.

2 Montrer que la série de terme général $\frac{n^{n-1}e^{-n}}{n!}$ converge.

3 En déduire la convergence normale de la série définissant f sur $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$.

4 Quel est le domaine de continuité de f ?

Partie II

5 Montrer que tout entier naturel n non nul vérifie l'inégalité : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

6 Quelle est la classe de f sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$? Exprimer f' sous forme de série entière sur cet intervalle.

7 Montrer que f est croissante sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$.

8 Déterminer une valeur approchée de $f\left(-\frac{1}{e}\right)$ à 10^{-2} près.

Partie III

Soit m un entier naturel non nul. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = (1 - e^x)^m$.

$\boxed{9}$ Après avoir justifié que φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, montrer que pour tout entier i compris entre 0 et m, il existe un polynôme P_i tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi^{(i)}(x) = \mathrm{P}_i(e^x)(1 - e^x)^{m-i}$$

$\boxed{10}$ En développant $\varphi(x)$, montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N} \text{ tel que } m \geq 2,\ \sum_{n=1}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} n^{m-1} = 0$$

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(y) = ye^{-y}$.

$\boxed{11}$ Etudier et représenter la fonction g.

$\boxed{12}$ Montrer l'existence d'un unique réel $\alpha \in]-1, 0[$ tel que $\alpha e^{-\alpha} = -\frac{1}{e}$. Montrer de plus :

$$\forall y \in [\alpha, 1],\ g(y) \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$$

$\boxed{13}$ Montrer que :

$$\forall y \in [\alpha, 1],\ f(ye^{-y}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=n}^{+\infty} (-1)^{m-n} \frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!} y^m \right)$$

$\boxed{14}$ Soit $y \in [\alpha, -\alpha]$. On considère la suite double $(z_{n,m})_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ définie par

$$z_{n,m} = \begin{cases} (-1)^{m-n} \dfrac{n^{m-1}}{n!(m-n)!} y^m & \text{si } 1 \leq n \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que cette suite double est sommable.

$\boxed{15}$ En déduire que : $\forall y \in [\alpha, -\alpha],\ f(ye^{-y}) = y$.

On admettra dans ce qui suit que cette propriété est valable sur l'intervalle $[\alpha, 1]$.

$\boxed{16}$ Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$.

$\boxed{17}$ Que peut-on dire de la dérivabilité de f en $-\frac{1}{e}$ et $\frac{1}{e}$? Justifier précisément votre réponse.

Exercice 1 **CCP MP 2017**

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ est sommable et calculer sa somme.

2. Démontrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ n'est pas sommable.

Exercice 2 ★★ **Sommation d'Abel (d'après CCP MP 2014)**

Soient $(a_n)_{n\geq n_0}$ et $(B_n)_{n\geq n_0}$ deux suites complexes. On définit alors deux suites $(A_n)_{n\geq n_0}$ et $(b_n)_{n\geq n_0}$ de la manière suivante :

$$\forall n \geq n_0,\ A_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$
$$\forall n \geq n_0,\ b_n = B_{n+1} - B_n$$

1. Montrer que $\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$ pour tout entier $n \geq n_0$.

2. Dans cette question, on suppose que la suite (A_n) est bornée et que (B_n) est une suite réelle décroissante de limite nulle.

a. Montrer que la série $\sum_{n\geq n_0} b_n$ converge.

b. En déduire que la série $\sum_{n\geq n_0} a_n B_n$ converge.

c. En déduire en particulier que la série $\sum_{n\geq n_0} (-1)^n B_n$ converge.

3. Soient $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$. On donnera le résultat sous la forme $re^{i\varphi}$ où $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2$.

b. Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}$.
On précisera notamment dans les cas de convergence s'il s'agit ou non de convergence absolue. De même, dans les cas de divergence, on précisera s'il s'agit ou non de divergence grossière.

c. En déduire la nature des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$.

4. Montrer que si la suite (B_n) converge vers 0, si la suite (A_n) est bornée et si la série $\sum_{n\geq n_0} b_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum_{n\geq n_0} a_n B_n$ est convergente.