

GROUPES

Solution 1

Notons H le sous-groupe de G engendré par E . Nous allons montrer que $E = H$. Montrons d'abord que tout élément de H peut s'écrire comme produit d'éléments distincts de E . Remarquons que si $x = ab$ avec $a, b \in E$, $x = ba'$ avec $a' = b^{-1}ab \in E$ car a' est un conjugué de a donc de même ordre que a . Soit $x \in H$, x s'écrit $x_1 x_2 \dots x_n$ (l'écriture de x ne comporte pas d'inverses car l'inverse d'un élément d'ordre fini est aussi d'ordre fini) où n est le nombre minimal d'éléments de E avec lesquels on peut écrire a . Supposons que cette écriture comporte deux éléments identiques i.e. il existe $i < j$ tels que $x_i = x_j = a$. En répétant la méthode décrite précédemment, $x = x_1 \dots x_i x_j x'_{i+1} \dots x'_{j-1} x_{j+1} \dots x_n$ où les x'_k appartiennent aussi à E . Mais $x_i x_j = a^2$ qui est aussi d'ordre fini et x s'écrit avec $n - 1$ éléments de E , ce qui contredit la minimalité de n . Notons $r = |E|$, l'écriture de longueur minimale de tout élément de H ne comporte qu'au plus r éléments tous distincts donc $|H| \leq r!$. En particulier, H est d'ordre fini donc tous ses éléments sont d'ordre fini. Ainsi $H \subset E$. Comme on a évidemment $E \subset H$, c'est que $E = H$ et E est un sous-groupe de G .

Solution 2

Pour $x \in G$, on note $\langle x \rangle$ le sous-groupe de G engendré par x . Remarquons que $\langle x \rangle$ est d'ordre fini, sinon il serait isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$ qui possède un nombre infini de sous-groupes. Comme G possède un nombre fini de sous-groupes, les sous-groupes de la forme $\langle x \rangle$ sont en nombre fini : on les notera $\langle x_1 \rangle, \dots, \langle x_n \rangle$. Soit $y \in G$: $\langle y \rangle$ est un des sous-groupes $\langle x_i \rangle$. En particulier, y appartient à l'un des $\langle x_i \rangle$. Ainsi $G = \bigcup_{i=1}^n \langle x_i \rangle$. Comme les $\langle x_i \rangle$ sont tous d'ordre fini, G est fini.

Solution 3

Tout d'abord, $S(x)$ est bien une partie de $S(E)$.

Ensuite, $\text{Id}_E \in S(x)$ puisque $\text{Id}_E(x) = x$.

Enfin, soient $\sigma, \sigma' \in S(x)$. Montrons que $\sigma^{-1} \circ \sigma' \in S(x)$. On a $\sigma^{-1} \circ \sigma'(x) = \sigma^{-1}(x)$ car $\sigma'(x) = x$. Or $\sigma(x) = x$ donc, en composant par σ^{-1} , $\sigma^{-1}(x) = x$. Donc $\sigma^{-1} \circ \sigma'(x) = \sigma^{-1}(x) = x$ et $\sigma^{-1} \circ \sigma' \in S(x)$.

$S(x)$ est bien un sous-groupe de $(S(E), \circ)$.

REMARQUE. $S(x)$ est appelé le stabilisateur de x .

Solution 4

1. Soient (x, y) et (x', y') dans G . Comme $x, x' \in \mathbb{R}^*$, $xx' \in \mathbb{R}^*$ et il est évident que $xy' + y \in \mathbb{R}$. Donc $(x, y) * (x', y') \in G$. Soient (x, y) , (x', y') et (x'', y'') dans G . On voit facilement que :

$$\begin{aligned} ((x, y) * (x', y')) * (x'', y'') &= (x, y) * ((x', y') * (x'', y'')) \\ &= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y) \end{aligned}$$

2. G possède un élément neutre à savoir $(1, 0)$. Soit $(x, y) \in G$ et cherchons $(x', y') \in G$ tel que $(x, y) * (x', y') = (1, 0)$. Ceci équivaut à résoudre

$$\begin{cases} xx' = 1 \\ xy' + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = \frac{1}{x} \\ y' = -\frac{y}{x} \end{cases} \text{ car } x \neq 0$$

Donc (x, y) admet pour inverse à droite $(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x})$. On vérifie facilement que c'est aussi l'inverse à gauche, donc l'inverse.

En conclusion, $(G, *)$ est bien un groupe. On voit qu'il n'est pas commutatif car $(1, 1) * (2, 2) = (2, 4)$ et $(2, 2) * (1, 1) = (2, 3)$.

3. A partir des premières valeurs de n , on conjecture $(x, y)^{*n} = (x^n, y + yx + \dots + yx^{n-1})$.

Initialisation : La formule est clairement vraie pour $n = 0$.

Hérédité : On suppose $(x, y)^{*n} = (x^n, y + yx + \dots + yx^{n-1})$ pour un certain n . Alors

$$\begin{aligned} (x, y)^{*(n+1)} &= (x, y) * (x, y)^{*n} \\ &= (x, y) * (x^n, y + yx + \dots + yx^{n-1}) \\ &= (x^{n+1}, y + yx + \dots + yx^n) \end{aligned}$$

On conclut par récurrence.

En outre, en utilisant la somme des termes d'une suite géométrique, on a :

$$(x, y)^{*n} = \begin{cases} \left(x^n, y \cdot \frac{1-x^n}{1-x}\right) & \text{si } x \neq 1 \\ (x, ny) & \text{sinon} \end{cases}$$

Solution 5

1. Soient $x, y \in G$. Comme th induit une bijection de \mathbb{R} sur $] -1, 1[$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $x = \text{th } a$ et $y = \text{th } b$. Alors $x * y = \text{th}(a + b) \in] -1, 1[$.

Soient maintenant $x, y, z \in G$. De la même façon, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $x = \text{th } a$, $y = \text{th } b$ et $z = \text{th } c$. On voit alors facilement que

$$(x * y) * z = x * (y * z) = \text{th}(a + b + c)$$

En conclusion, $*$ est une loi interne associative sur G .

2. Il est clair que 0 est l'élément neutre de $(G, *)$ et que tout $x \in G$ admet $-x$ pour inverse. G est donc un groupe.

L'expression de $x * y$ est symétrique en x et y : le groupe est donc commutatif.

3. Soit $x \in G$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que $x = \text{th } a$. On a donc $x^{*n} = \text{th}(na)$.

Or $a = \text{argth } x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Par conséquent,

$$\text{th}(na) = \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{n}{2}}}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{n}{2}} + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{n}{2}}} = \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}$$

REMARQUE. On a en fait montré que th était un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(G, *)$.

Solution 6

1. Notons e l'élément neutre de G . Comme H et K sont des sous-groupes de G , ils contiennent tous deux l'élément neutre e . Donc $e \in H \cap K$.

Soit $h, k \in H \cap K$. Comme H est un sous-groupe de G , $h^{-1}k \in H$. De même, $h^{-1}k \in K$. Par conséquent, $h^{-1}k \in H \cap K$. En conclusion, $H \cap K$ est un sous-groupe de G .

2. Si $H \subset K$ ou $K \subset H$, on a $H \cup K = K$ ou $H \cup K = H$. Donc $H \cup K$ est bien un sous-groupe de G .

Réciproquement, supposons que $H \cup K$ est un sous-groupe de G . Supposons de plus que $H \not\subset K$ et montrons que $K \subset H$. Comme $H \not\subset K$, il existe $h_0 \in H \setminus K$. Soit maintenant $k \in K$. Comme $h_0, k \in H \cup K$ et que $H \cup K$ est un sous-groupe de G , $h_0k \in H \cup K$.

On ne peut avoir $h_0k \in K$ car sinon $h_0 = (h_0k)k^{-1} \in K$, ce qui n'est pas. Donc $h_0k \in H$. Or $k = h_0^{-1}(h_0k) \in H$. Ceci étant vrai pour tout élément k de K , on a donc $K \subset H$.

Solution 7

1. On a pour tous $x, y \in G$,

$$\varphi(x)\varphi(y) = axa^{-1}aya^{-1} = axya^{-1} = \varphi_a(xy).$$

Ainsi φ_a est bien un endomorphisme de G .

Pour $x, y \in G$,

$$y = \varphi_a(x) \iff y = axa^{-1} \iff a^{-1}ya = x \iff x = \varphi_{a^{-1}}(y)$$

Ainsi φ_a est bien bijectif : c'est un automorphisme de G . On a en fait aussi prouvé que $\varphi_a^{-1} = \varphi_{a^{-1}}$.

2. Comme pour tout $a \in G$, φ_a est bijectif, $\mathfrak{I}(G) \subset \text{Aut}(G)$. On a $\text{Id}_G = \varphi_e \in \mathfrak{I}(G)$.

De plus, on vérifie que pour $a, b \in G$, $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab} \in \mathfrak{I}(G)$.

Enfin, on a vu à la question précédente que pour $a \in G$, $\varphi_a^{-1} = \varphi_{a^{-1}} \in \mathfrak{I}(G)$.

Par conséquent, $\mathfrak{I}(G)$ est un sous-groupe de $(\text{Aut}(G), \circ)$.

3. On a montré à la question précédente que $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab}$ i.e. $\varphi(a) \circ \varphi(b) = \varphi(ab)$. Ainsi φ est un morphisme de groupes.

Solution 8

Si f est un automorphisme, c'est en particulier un morphisme. Donc pour tous $a, b \in G$, $f(ab) = f(a)f(b)$ i.e.

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \iff (ab)^{-1} = (ba)^{-1} \iff ab = ba$$

Ainsi G est commutatif.

Réciproquement si G est commutatif, le raisonnement inverse nous montre que f est un morphisme. De plus, $f \circ f = \text{Id}_G$, donc f est bijectif (d'application réciproque lui-même). f est bien un automorphisme.

Solution 9

Soit $r \in \mathbb{Q}$. Montrons que $f(r) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$f(r) = f\left(n \frac{r}{n}\right) = nf\left(\frac{r}{n}\right)$$

Or $f(r)$, n et $f\left(\frac{r}{n}\right)$ sont des entiers. Donc $f(r)$ est divisible par n .

Ainsi $f(r)$ est divisible par tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. On a forcément $f(r) = 0$. En conclusion, le seul morphisme de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$ est le morphisme nul.

Solution 10

On remarque que pour tout $x \in G$, $x^{-1} = x$. Soient $x, y \in G$. On a donc $(xy)^{-1} = xy$. Mais on a aussi $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$. Par conséquent, $yx = xy$. Ceci étant valable pour tous $x, y \in G$, G est commutatif.

Solution 11

Il est clair que les homothéties sont bien des endomorphismes de $(\mathbb{R}, +)$.

Soit maintenant f est un endomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$. On a donc pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. On montre par récurrence que $f(nx) = nf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$ en passant à l'opposé. Soit maintenant r un rationnel. Il existe donc deux entiers p et q avec $q \neq 0$ tels que $r = \frac{p}{q}$. On a d'une part

$$f(p) = f(qr) = qf(r)$$

et d'autre part

$$f(p) = pf(1)$$

Donc $f(r) = rf(1)$. Posons donc $\lambda = f(1)$. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. On sait que x est limite d'une suite de rationnels (r_n) . Or f étant continue sur \mathbb{R} et donc en x , la suite $(f(r_n))$ tend vers $f(x)$. Or $f(r_n) = \lambda r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite, on a donc $f(x) = \lambda x$.

Solution 12

Notons e l'élément neutre de G .

- Tout d'abord, pour tout $x \in G$, $ex = xe = x$ donc $e \in Z(G)$.
- Soient $(a, b) \in Z(G)^2$ et $x \in G$. Alors

$$\begin{aligned} (ab)x &= a(bx) && \text{par associativité} \\ &= a(xb) && \text{car } b \in Z(G) \\ &= (ax)b && \text{par associativité} \\ &= (xa)b && \text{car } a \in Z(G) \\ &= x(ab) && \text{par associativité} \end{aligned}$$

Ainsi $ab \in Z(G)$ de sorte que $Z(G)$ est stable par produit.

- Soient $a \in Z(G)$ et $x \in G$. Alors $ax = xa$, puis $a^{-1}ax = a^{-1}xa$ i.e. $x = a^{-1}xa$. Enfin $xa^{-1} = a^{-1}xaa^{-1} = a^{-1}x$ de sorte que $a^{-1} \in Z(G)$. $Z(G)$ est donc stable par inversion.

Ainsi $Z(G)$ est un sous-groupe de G .

Solution 13

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a * 0 = 0 * a = a$ donc 0 est élément neutre. Mais pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(-1) * a = -1 \neq 0$ donc -1 n'admet pas d'inverse pour la loi $*$. $(\mathbb{R}, *)$ n'est donc pas un groupe.

Solution 14

1. Il suffit de choisir $n = \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor$.
2. Comme $G \neq \{0\}$ et $0 \in G$, G contient un élément non nul a . Si $a > 0$, $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide. Sinon, G étant un groupe, $-a \in G$ et à nouveau $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide.
De plus, $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est minorée par 0. Ainsi $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure.
3. a. Comme $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$ et que $a > 0$, il existe $x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $a \leq x < a + a = 2a$. Comme on a supposé $a \notin G$, on a en fait $a < x < 2a$. Puisque $x - a > 0$, il existe $y \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $a \leq y < a + (x - a) = x$. A nouveau $a \notin G$ donc $a < y < x < 2a$. Les réels x et y sont bien deux éléments distincts de $]a, 2a[$.
b. Comme $a < y < x < 2a$, $0 < x - y < a$. Comme G est un sous-groupe de \mathbb{R} , $y - x \in G$. On a donc $y - x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $y - x < a$, ce qui contredit le fait que $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$. On a donc $a \in G$.
c. Comme G est un sous-groupe de \mathbb{R} , $na \in G$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On a donc $a\mathbb{Z} \subset G$.
d. D'après la question 1, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $na \leq z < (n+1)a$. Comme z et a sont des éléments du sous-groupe G , $z - na$ est également un élément de G . Or $0 \leq z - na < a$ et $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$. On a donc nécessairement $z - na = 0$ i.e. $z = na$.
e. Les deux questions précédentes montrent que $G \subset a\mathbb{Z}$. Par double inclusion, $G = a\mathbb{Z}$.
4. a. Comme $\inf G \cap \mathbb{R}_+^* = 0$, il existe $\varepsilon' \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. D'après la question 1, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n\varepsilon' \leq t < (n+1)\varepsilon'$. Posons $g = n\varepsilon'$. $g \in G$ puisque $\varepsilon' \in G$. De plus, $0 \leq t - g < \varepsilon' < \varepsilon$ donc $|g - t| < \varepsilon$.
b. On a prouvé que pour tout élément t de \mathbb{R} et tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de G dans $]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$: ceci signifie que G est dense dans \mathbb{R} .

Solution 15

1. Il suffit de vérifier que pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, $f_n(p+q) = f_n(p)f_n(q)$.
2. On vérifie que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $|f_n(p)| = 1$.
3. f_n est injective si et seulement si $\text{Ker } f_n = \{0\}$. Il est donc équivalent de montrer que $\text{Ker } f_n \neq \{0\}$ si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$.
Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\alpha = \frac{a}{b}$. On vérifie alors que $f_n(b) = 1$ i.e. $b \in \text{Ker } f_n$ et donc $\text{Ker } f_n \neq \{0\}$.
Si $\text{Ker } f \neq \{0\}$, il existe $b \in \text{Ker } f$ tel que $b \neq 0$. On a alors $f(b) = 1$ i.e. $2\pi nba \equiv 0[2\pi]$ ou encore $nba \equiv 0[1]$. Autrement dit, nba est entier, ce qui signifie que α est rationnel.
4. a. On vérifie que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $f_1(p)^s = 1$ donc $\text{Im } f_1 \subset \mathbb{U}_s$.
b. Comme $r \wedge s = 1$, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $ur + vs = 1$. On en déduit que $f_1(u) = e^{\frac{2i\pi}{s}} \in \text{Im } f_1$. Comme $\text{Im } f_1$ est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) , $\left(e^{\frac{2ik\pi}{s}}\right) \in \text{Im } f_1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi $\mathbb{U}_s \in \text{Im } f_1$.
c. On vérifie que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f_1(sk) = 1$ donc $s\mathbb{Z} \subset \text{Ker } f_1$.
Soit $p \in \text{Ker } f_1$. On a donc $\frac{pr}{s} \in \mathbb{Z}$. Ainsi s divise pr et puisque $s \wedge r = 1$, s divise p . D'où $\text{Ker } f_1 \subset \mathbb{Z}$.
5. a. $n \wedge s$ divise s donc m est entier.

b. Tout diviseur commun de n et s est un diviseur commun de nr et s .

Soit d un diviseur commun de nr et s . Un diviseur commun de d et s est a fortiori un diviseur commun de r et s et ne peut donc être égal qu'à ± 1 . Ceci prouve que $d \wedge r = 1$. D'après le théorème de Gauss, d divise n . Ainsi d est un diviseur commun de nr et s .

Finalement, $n \wedge s = nr \wedge s$.

c. On vérifie que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $f_n(p)^m = 1$ car $n \wedge s$ divise n . On a donc $\text{Im } f_n \subset \mathbb{U}_m$.

d. Comme $nr \wedge s = n \wedge s$, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $unr + vs = n \wedge s$. On en déduit que $f_n(u) = e^{\frac{2i\pi}{m}} \in \text{Im } f_n$. Comme $\text{Im } f_n$ est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) , $\left(e^{\frac{2ik\pi}{m}}\right) \in \text{Im } f_n$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi $\mathbb{U}_m \in \text{Im } f_n$.

e. On vérifie que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f_n(mk) = 1$ car $n \wedge s$ divise n . Ainsi $m\mathbb{Z} \subset \text{Ker } f_n$.

Soit $p \in \text{Ker } f_n$. Ainsi $\frac{np}{s} \in \mathbb{Z}$ et puisque $s \wedge r = 1$, s divise np . Par conséquent, $m = \frac{s}{n \wedge s}$ divise $\frac{n}{n \wedge s} p$. Comme $\frac{s}{n \wedge s} \wedge \frac{n}{n \wedge s} = 1$, m divise p . Ainsi $\text{Ker } f_n \subset m\mathbb{Z}$.

Solution 16

Première méthode :

Notons p le produit recherché et e l'élément neutre de G . Dans le produit, les éléments x de G tels que $x \neq x^{-1}$ i.e. $x^2 \neq e$ se simplifient avec leur inverse. Notons $A = \{x \in G \mid x^2 = e\}$. On a donc $p = \prod_{x \in A} x$. Les éléments de A sont d'ordre 1 ou 2. Comme l'ordre de G est impair, les éléments de A sont tous d'ordre 1, autrement dit $A = \{e\}$ et $p = e$.

Seconde méthode :

L'application $x \mapsto x^{-1}$ est une permutation de G . Ainsi $p = \prod_{x \in G} x = \prod_{x \in G} x^{-1}$. D'où $p^2 = e$. p est donc d'ordre 1 ou 2. Comme G est d'ordre impair, p est d'ordre 1 i.e. $p = e$.

Solution 17

Soit f un morphisme de $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$. On note $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ les matrices de dilatations. On note $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ pour $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ les matrices de transvection.

On rappelle que la multiplication d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à gauche par $T_{ij}(\lambda)$ correspond à l'opération sur les lignes $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et la multiplication d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à droite par $T_{ij}(\lambda)$ correspond à l'opération sur les lignes $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.

Enfin, on peut échanger les lignes L_i et L_j «au signe près» en effectuant à la suite les opérations $L_i \leftarrow L_i + L_j$, $L_j \leftarrow L_j - L_i$, $L_i \leftarrow L_i + L_j$, autrement dit en multipliant à gauche par $T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)$. La ligne L_i sera transformée en la ligne L_j et la ligne L_j sera transformée en la ligne $-L_i$.

Montrons par récurrence sur n via l'algorithme du pivot de Gauss que pour toute matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe $M, N \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $MAN = D_n(\det A)$ avec M et N des produits de matrice de transvection.

Si $n = 1$, il n'y a rien à faire.

Supposons que la propriété à vérifier soit vraie à un certain rang $n - 1 \geq 1$. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. La première colonne de A étant non nulle, il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $a_{i,1} \neq 0$.

- S'il existe $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ tel que $a_{i,2} \neq 0$, l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1-a_{1,1}}{a_{i,1}}L_i$ permet de placer un 1 en position $(1, 1)$.
- Si pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a $a_{i,2} = 0$, l'échange des lignes L_1 et L_2 «au signe près» permet de se ramener au cas précédent.

Il est alors aisé d'annuler tous les coefficients de la première ligne et la première colonne (hormis le 1 en position $(1, 1)$) à l'aide d'opérations sur les lignes et les colonnes. Autrement dit, il existe deux matrices M' et N' qui sont des produits de matrice de transvection telles que

$M'AN' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à A' .

REMARQUE. On a en fait montré que $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices de transvection et que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices de transvection et les matrices de dilatation.

Puisque $T_{ij}(\lambda) = T_{ij}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^m$, on a $f(T_{ij}(\lambda)) = 0$. On en déduit que pour tout $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $f(A) = f(D_n(\det A))$.

Si m est impair, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $D_n(\lambda) = D_n\left(\sqrt[m]{\lambda}\right)^m$ donc $f(A) = \bar{0}$ pour tout $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. f est donc le morphisme trivial.

Si m est pair, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $D_n(\lambda) = D_n\left(\sqrt[m]{\lambda}\right)^m$ donc $f(A) = \bar{0}$ pour tout $A \in \text{GL}_n^+(\mathbb{R})$. De plus, si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $D_n(\lambda) = D_n(-1)D_n(-\lambda)$. Ainsi, pour tout $A \in \text{GL}_n^-(\mathbb{R})$, $f(A) = f(D_n(-1))$. Or $D_n(-1)^2 = I_n$ donc $f(D_n(-1)) = \bar{0}$ ou $f(D_n(-1)) = \bar{p}$ où $m = 2p$. f est donc soit le morphisme trivial, soit le morphisme valant $\bar{0}$ sur $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et \bar{p} sur $\text{GL}_n^-(\mathbb{R})$.

Solution 18**Associativité :**

Soient $x, y, z \in H$.

$$\begin{aligned}
 x.(y.z) &= f(f^{-1}(x) * f^{-1}(y.z)) \\
 &= f(f^{-1}(x) * (f^{-1}(y) * f^{-1}(z))) \\
 &= f((f^{-1}(x) * f^{-1}(y)) * f^{-1}(z)) \text{ par associativité de } * \\
 &= f(f^{-1}(x.y) * f^{-1}(z)) \\
 &= (x.y).z
 \end{aligned}$$

Elément neutre :

Notons e l'élément neutre de $(G, *)$. Pour tout $x \in H$

$$\begin{aligned}
 f(e).x &= f(e * f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(x)) = x \\
 x.f(e) &= f(f^{-1}(x).e) = f(f^{-1}(x)) = x
 \end{aligned}$$

Donc $(H, .)$ admet un élément neutre, à savoir $f(e)$.

Inversibilité :

Soit $x \in H$.

$$\begin{aligned}
 x.f((f^{-1}(x))^{-1}) &= f(f^{-1}(x) * (f^{-1}(x))^{-1}) = f(e) \\
 f((f^{-1}(x))^{-1}).x &= f((f^{-1}(x))^{-1} * f^{-1}(x)) = f(e)
 \end{aligned}$$

Ainsi tout élément x de G est inversible (d'inverse $(f^{-1}(x))^{-1}$).

REMARQUE. On a des résultats similaires pour les anneaux et les corps. La bijection f permet de «transporter» la structure de G sur H .

Solution 19**Associativité :**

Soient $x', y', z' \in H$. Comme f est surjective, x', y', z' admettent des antécédents x, y, z par f dans G .

$$\begin{aligned}
 x'.(y'.z') &= f(x).(f(y).f(z)) \\
 &= f(x).f(y * z) \\
 &= f(x * (y * z)) \\
 &= f((x * y) * z) \text{ par associativité de } * \\
 &= f(x * y).f(z) \\
 &= (f(x).f(y)).f(z) \\
 &= (x'.y').z'
 \end{aligned}$$

Elément neutre :

Notons e l'élément neutre de G . Soit $x' \in G$. Comme f est surjective, x' admet un antécédent x par f dans G

$$\begin{aligned}
 x'.f(e) &= f(x).f(e) = f(x * e) = f(x) = x' \\
 f(e).x' &= f(e).f(x) = f(e * x) = f(x) = x'
 \end{aligned}$$

Ainsi $(H, .)$ admet un élément neutre, à savoir $f(e)$.

Inversibilité :

Soit $x' \in G$. Comme f est surjective, x' admet un antécédent x par f dans G .

$$\begin{aligned}
 x'.f(x^{-1}) &= f(x).f(x^{-1}) = f(x * x^{-1}) = f(e) \\
 f(x^{-1}).x' &= f(x^{-1}).f(x) = f(x^{-1} * x) = f(e)
 \end{aligned}$$

Ainsi tout élément de G est inversible.

Puisque G et H sont des groupes, f est un morphisme de groupes.

REMARQUE. On a des résultats pour les anneaux et les corps. La surjection f permet de «transporter» la structure de G sur H .

Solution 20

Notons e l'élément neutre de G .

Pour tout $x \in G$, $x = e^{-1}xe$ donc $x \sim x$. Ainsi \sim est réflexive.

Soit $(x, y) \in G^2$ tel que $x \sim y$. Il existe donc $g \in G$ tel que $y = g^{-1}xg$. Mais alors $x = gyg^{-1} = (g^{-1})^{-1}x(g^{-1})$ donc $y \sim x$. Ainsi \sim est symétrique.

Soit $(x, y, z) \in G^3$ tel que $x \sim y$ et $y \sim z$. Il existe donc $(g, h) \in G^2$ tel que $y = g^{-1}xg$ et $z = h^{-1}yh$. Mais alors $z = h^{-1}g^{-1}xgh = (gh)^{-1}x(gh)$ donc $x \sim z$. Ainsi \sim est transitive.

Finalement, \sim est bien une relation d'équivalence.

Solution 21

Notons e l'élément neutre de G .

Pour tout $x \in G$, $x = xe$ et $e \in H$ car H est un sous-groupe de G donc $x \sim x$. Ainsi \sim est réflexive.

Soit $(x, y) \in G^2$ tel que $x \sim y$. Il existe donc $h \in H$ tel que $y = xh$. Mais alors $x = yh^{-1}$ et $h^{-1} \in H$ car H est un sous-groupe de G donc $y \sim x$. Ainsi \sim est symétrique.

Soit $(x, y, z) \in G^3$ tel que $x \sim y$ et $y \sim z$. Il existe donc $(h, k) \in H^2$ tel que $y = xh$ et $z = yk$. Mais alors $z = xhk$ et $hk \in H$ car H est un sous-groupe de G donc $x \sim z$. Ainsi \sim est transitive.

Finalement, \sim est bien une relation d'équivalence.

REMARQUE. On montrerait de la même manière que la relation binaire \sim définie par

$$\forall (x, y) \in G^2, x \sim y \iff \exists h \in H, y = hx$$

est également une relation d'équivalence.

Solution 22

On notera e l'élément neutre de G .

Relation \sim :

Réflexivité Pour tout $x \in G$, $x = e^{-1}xe$ et $e \in H$ car H est un sous-groupe de G donc $x \sim x$.

Symétrie Soit $(x, y) \in G^2$ tel que $x \sim y$. Il existe donc $h \in H$ tel que $y = h^{-1}xh$. Alors $x = hyh^{-1} = (h^{-1})^{-1}yh^{-1}$ et $h^{-1} \in H$ car H est un sous-groupe de G donc $y \sim x$.

Transitivité Soit $(x, y, z) \in G^3$ tel que $x \sim y$ et $y \sim z$. Il existe donc $(h, k) \in H^2$ tel que $y = h^{-1}xh$ et $z = k^{-1}yk$. Donc $z = k^{-1}h^{-1}xhk = (hk)^{-1}(hk)$ et $hk \in H$ car H est un sous-groupe de G donc $x \sim z$.

Relation \sim_g :

Réflexivité Pour tout $x \in G$, $x = ex$ et $e \in H$ car H est un sous-groupe de G donc $x \sim_g x$.

Symétrie Soit $(x, y) \in G^2$ tel que $x \sim_g y$. Il existe donc $h \in H$ tel que $y = hx$. Alors $x = h^{-1}y$ et $h^{-1} \in H$ car H est un sous-groupe de G donc $y \sim_g x$.

Transitivité Soit $(x, y, z) \in G^3$ tel que $x \sim_g y$ et $y \sim_g z$. Il existe donc $(h, k) \in H^2$ tel que $y = hx$ et $z = ky$. Donc $z = khx$ et $kh \in H$ car H est un sous-groupe de G donc $x \sim_g z$.

Relation \sim_d :

Réflexivité Pour tout $x \in G$, $x = xe$ et $e \in H$ car H est un sous-groupe de G donc $x \sim_d x$.

Symétrie Soit $(x, y) \in G^2$ tel que $x \sim_d y$. Il existe donc $h \in H$ tel que $y = xh$. Alors $x = yh^{-1}$ et $h^{-1} \in H$ car H est un sous-groupe de G donc $y \sim_d x$.

Transitivité Soit $(x, y, z) \in G^3$ tel que $x \sim_d y$ et $y \sim_d z$. Il existe donc $(h, k) \in H^2$ tel que $y = xh$ et $z = yk$. Donc $z = xhk$ et $hk \in H$ car H est un sous-groupe de G donc $x \sim_d z$.

Solution 23

1. On rappelle que $S(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des bijections de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . On va montrer que G est un sous-groupe de $S(\mathbb{C})$.

- Montrons que $G \subset S(\mathbb{C})$. Soit $f \in G$. Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que $f(z) = az + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On montre alors que f est bijective en vérifiant que $z \mapsto \frac{1}{a}(z - b)$ est sa bijection réciproque.
- Clairement, $\text{Id}_{\mathbb{C}} \in G$, puisque $\text{Id}_{\mathbb{C}}$ est par exemple la translation de vecteur nul ou une rotation d'angle nul (et de centre quelconque).
- Montrons que G est stable par composition. Soit $(f, g) \in G^2$. Il existe donc $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que $f(z) = az + b$ et $g(z) = cz + d$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors $g \circ f(z) = caz + cb + d$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. $g \circ f$ est bien une translation ou une similitude directe puisque $ca \neq 0$.
- Montrons que G est stable par inversion. Soit $f \in G$. Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que $f(z) = az + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On a montré précédemment que $f^{-1}(z) = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ceci montre que f^{-1} est bien une translation ou une similitude directe puisque $\frac{1}{a} \neq 0$.

On a donc montré que G était un sous-groupe de $S(\mathbb{C})$ et donc un groupe.

2. • A nouveau, $\text{Id}_{\mathbb{C}} \in H$, puisque $\text{Id}_{\mathbb{C}}$ est par exemple la translation de vecteur nul ou une rotation d'angle nul (et de centre quelconque).
- Montrons que H est stable par composition. Soit $(f, g) \in H^2$. Il existe donc $(a, b, c, d) \in \mathbb{U} \times \mathbb{C} \times \mathbb{U} \times \mathbb{C}$ tel que $f(z) = az + b$ et $g(z) = cz + d$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors $g \circ f(z) = caz + cb + d$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. $g \circ f$ est bien une translation ou une rotation puisque $ca \in \mathbb{U}$.
 - Montrons que H est stable par inversion. Soit $f \in H$. Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{U} \times \mathbb{C}$ tel que $f(z) = az + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On a montré précédemment que $f^{-1}(z) = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ceci montre que f^{-1} est bien une translation ou une rotation puisque $ca \in \mathbb{U}$.

On a donc montré que H était un sous-groupe de G .

Solution 24

1. On sait que th est strictement croissante et continue sur \mathbb{R} . De plus, $\lim_{-\infty} \text{th} = -1$ et $\lim_{+\infty} \text{th} = 1$. Donc th induit une bijection de \mathbb{R} sur G .
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \frac{\text{th}(a) + \text{th}(b)}{1 + \text{th}(a)\text{th}(b)} &= \frac{\frac{\text{sh } a}{\text{ch } a} + \frac{\text{sh } b}{\text{ch } b}}{1 + \frac{\text{sh } a}{\text{ch } a} \cdot \frac{\text{sh } b}{\text{ch } b}} \\ &= \frac{\text{sh } a \text{ ch } b + \text{sh } b \text{ ch } a}{\text{ch } a \text{ ch } b + \text{sh } a \text{ sh } b} \\ &= \frac{(e^a - e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^b - e^{-b})(e^a + e^{-a})}{(e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^b - e^{-b})(e^a - e^{-a})} \\ &= \frac{e^{a+b} - e^{-(a+b)}}{e^{a+b} + e^{-(a+b)}} = \text{th}(a + b) \end{aligned}$$

3. Vérifions que \star est une loi interne sur G . Soit $(x, y) \in G^2$. Par surjectivité de th sur G , il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = \text{th } a$ et $y = \text{th } b$. Alors $x \star y = \text{th}(a + b) \in G$.
La loi \star est clairement commutative.
Vérifions que \star est associative. Soit $(x, y, z) \in G^3$. Comme précédemment, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(x, y, z) = (\text{th } a, \text{th } b, \text{th } c)$. Alors

$$(x \star y) \star z = \text{th}(a + b) \star \text{th } c = \text{th}(a + b + c) = \text{th } a \star \text{th}(b + c) = x \star (y \star z)$$

Pour tout $x \in G$, $0 \star x = x \star 0 = x$ et $0 \in G$ donc 0 est neutre pour \star .

Enfin, pour tout $x \in G$, $x \star (-x) = (-x) \star x = 0$ et $-x \in G$ donc tout élément de G est inversible pour la loi \star .

Tout ceci prouve que (G, \star) est un groupe commutatif.

4. Tout d'abord $x^{\star 0} = 0 = \frac{(1+x)^0 - (1-x)^0}{(1+x)^0 + (1-x)^0}$. Supposons que $x^{\star n} = \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
 x^{\star(n+1)} &= x \star x^{\star n} \\
 &= \frac{x + x^{\star n}}{1 + x \cdot x^{\star n}} \\
 &= \frac{x + \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}}{1 + x \cdot \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}} \\
 &= \frac{x(1+x)^n + x(1-x)^n + (1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n + x(1+x)^n - x(1-x)^n} \\
 &= \frac{(1+x)(1+x)^n - (1-x)(1-x)^n}{(1+x)(1+x)^n + (1-x)(1-x)^n} \\
 &= \frac{(1+x)^{n+1} - (1-x)^{n+1}}{(1+x)^{n+1} + (1-x)^{n+1}}
 \end{aligned}$$

Par récurrence, l'égalité de l'énoncé est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin, si $n \in \mathbb{Z}_-$, en utilisant le fait que $-n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 x^{\star n} &= (x^{\star(-1)})^{\star(-n)} = (-x)^{\star(-n)} \\
 &= \frac{(1 + (-x))^{-n} - (1 - (-x))^{-n}}{(1 + (-x))^{-n} + (1 - (-x))^{-n}} \\
 &= \frac{\frac{1}{(1-x)^n} - \frac{1}{(1+x)^n}}{\frac{1}{(1-x)^n} + \frac{1}{(1+x)^n}} \\
 &= \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}
 \end{aligned}$$

Solution 25

Supposons G fini. Alors l'ensemble de ses parties est également fini. A fortiori, l'ensemble de ses sous-groupes est fini.

Supposons que l'ensemble des sous-groupes de G est fini. Montrons d'abord que tout élément de G est d'ordre fini. Soit $x \in G$. Si x n'est pas d'ordre fini, alors les sous-groupes $\langle x^k \rangle$ pour $k \in \mathbb{N}$ sont distincts et en nombre infini, ce qui contredit l'hypothèse de départ. De plus, $G = \bigcup_{x \in G} \langle x \rangle$. Mais les sous-groupes $\langle x \rangle$ sont en nombre fini par hypothèse et sont tous finis car tout $x \in G$ est d'ordre fini. Par conséquent, G est fini.

Solution 26

Soit G un groupe cyclique d'ordre n et g un de ses générateurs. Notons p le plus petit entier naturel non nul tel que $g^p \in H$. On va montrer que H est le sous-groupe engendré par g^p . Ce sera donc un sous-groupe cyclique. Puisque $g^p \in H$, le sous-groupe engendré par g^p est bien inclus dans H . Soit maintenant $h \in H$. Puisque g engendre G , il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $h = g^q$. Effectuons la division euclidienne de q par p : il existe $(a, b) \in \mathbb{N}$ tel que $q = ap + b$ et $b < p$. Mais alors $g^b = h(g^p)^{-a} \in H$ de sorte que, par minimalité de p , $b = 0$. Ainsi $h = (g^p)^a$ appartient au sous-groupe engendré par g^p . Ainsi H est inclus dans le sous-groupe engendré par g^p . Par double inclusion, ces deux sous-groupes sont égaux et H est cyclique.

Solution 27

Soient g un générateur de G et d un diviseur de n . Posons $k = \frac{n}{d}$. On va montrer que le sous-groupe H engendré par g^k est l'unique sous-groupe de G d'ordre d .

Montrons tout d'abord que H est bien d'ordre d . L'ordre de H est l'ordre de g^k : il s'agit donc de montrer que l'ordre p de g^k vaut bien d . Puisque $(g^k)^d = g^n = e$, p divise d . Si on avait $p < d$, alors $g^n = g^{kp} = e$ et $kp < kd = n$, ce qui contredit que g est un générateur de G . Ainsi $p = d$.

Montrons maintenant que H est bien l'unique sous-groupe de G d'ordre d . Soit K un sous-groupe de G d'ordre d . Puisque K et H sont tous deux d'ordre d , il suffit de montrer que $K \subset H$. Soit $x \in K$. Il existe alors un entier p tel que $g^p = x$. Puisque K est d'ordre d , $g^{pd} = x^d = e$. Ainsi $n = kd$ divise pd puis k divise p . Il existe donc un entier q tel que $p = kq$. Mais alors $x = g^p = g^{kq} = (g^k)^q \in H$. Ainsi $K \subset H$ puis $K = H$ par égalité des ordres de K et H .

Solution 28

Remarquons déjà que G est commutatif. En effet, si $(x, y) \in G^2$, alors $(xy)^2 = e$ où e est le neutre. Ainsi $xyxy = e$ puis en multipliant par yx à droite, $xy = yx$.

Comme G est fini, il admet une partie génératrice minimale $\{g_1, \dots, g_r\}$. On montre alors que l'application $\begin{cases} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r & \longrightarrow G \\ (\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_r) & \longmapsto g_1^{\varepsilon_1} \dots g_r^{\varepsilon_r} \end{cases}$ est un isomorphisme de groupes. On en déduit que $|G| = |(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r| = 2^r$.

Solution 29

Soit G un groupe d'ordre p premier. Soit x un élément non neutre de G . L'ordre de x divise donc p . Comme p est premier, l'ordre de x vaut 1 ou p . Mais x n'est pas neutre donc son ordre ne vaut pas 1. Ainsi l'ordre de x est p et G est cyclique.

Solution 30

Tout d'abord, comme x et y commutent, $(xy)^{pq} = x^{pq}y^{pq} = (x^p)^qy^{pq} = e$ où e est le neutre de G . Ainsi l'ordre d de xy divise pq . Par ailleurs, $(xy)^d = e$ i.e. $x^d = y^{-d}$ et $y^d = x^{-d}$. Ainsi $x^{dq} = y^{dp} = e$ puis p divise dq et q divise dp . Comme p et q sont premiers entre eux, p divise d et q divise d d'après le lemme de Gauss. Mais en utilisant à nouveau le fait que p et q sont premiers entre eux, pq divise d . Finalement, $d = pq$.

Solution 31

On notera e l'élément neutre de G . Les éléments de G sont d'ordre 1, 2, 3 ou 6.

Si G possède un élément d'ordre 6, alors G est cyclique et donc isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Supposons que G ne possède pas d'élément d'ordre 6. Evidemment, les éléments de G ne peuvent pas tous être d'ordre 1 (seul l'élément neutre est d'ordre 1).

Supposons que G ne possède que des éléments d'ordre 2 hormis l'élément neutre.

Supposons que G ne possède que des éléments d'ordre 2 hormis l'élément neutre.

Ainsi G possède un élément τ d'ordre 2 et un élément γ d'ordre 3. Par conséquent, $\{e, \tau, \gamma, \tau\gamma, \gamma\tau, \tau\gamma\tau\} \subset G$. On vérifie que les 6 éléments sont bien deux à deux distincts.

- e, τ et γ sont bien deux à deux distincts puisqu'ils sont d'ordre deux à deux distincts.
- $\tau\gamma$

Solution 32

- $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$ car $|0| = 0 \neq 1$.
 - $1 \in \mathbb{U}$ car $|1| = 1$.
 - Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2$. Alors $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{1}{1} = 1$ donc $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{U}$.

\mathbb{U} est donc un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .

- $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{C}^*$ car pour $0^n = 0 \neq 1$.
 - $1 \in \mathbb{U}_n$ car $1^n = 1$.
 - Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}_n^2$. Alors $\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n} = \frac{1}{1} = 1$ donc $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{U}_n$.

\mathbb{U}_n est donc un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .

- Soit $(z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$. Alors $f(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n = f(z_1) f(z_2)$. f est donc un endomorphisme de (\mathbb{C}^*, \times) .
 - $\text{Ker } f = \{z \in \mathbb{C}^*, z^n = 1\} = \mathbb{U}_n$. Le noyau de f étant un sous-groupe du groupe de départ, \mathbb{U}_n est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .
 - Si $n = 1$, $f = \text{Id}_{\mathbb{C}^*}$ donc f est injectif.
Sinon, $\text{card Ker } f = \text{card } \mathbb{U}_n = n > 1$ donc $\text{Ker } f \neq \{1\}$. Ainsi f n'est pas injectif.
 - Tout nombre complexe non nul admet une racine $n^{\text{ème}}$ non nulle (il en admet même n) donc $\text{Im } f = \mathbb{C}^*$ et f est surjectif.
- Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors $g(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = g(\theta_1) g(\theta_2)$. g est donc un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe (\mathbb{C}^*, \times) .
 - $\text{Ker } g = 2\pi\mathbb{Z} \neq \{0\}$ donc g n'est pas injectif.

- c. $\text{Im } g = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{U}$. L'image de g étant un sous-groupe du groupe d'arrivée, \mathbb{U} est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .
 - d. $\text{Im } g = \mathbb{U} \neq \mathbb{C}^*$ donc g n'est pas surjectif.
- 5.
- a. Soit $(z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$. Alors $h(z_1 z_2) = |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = h(z_1) h(z_2)$. h est donc un morphisme de (\mathbb{C}^*, \times) dans (\mathbb{R}^*, \times) .
 - b. $\text{Ker } h = \{z \in \mathbb{C}^*, |z| = 1\} = \mathbb{U}$. Le noyau de h étant un sous-groupe du groupe de départ, \mathbb{U} est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .
 - c. $\text{Ker } h = \mathbb{U} \neq \{1\}$ donc h n'est pas injectif.
 - d. $\text{Im } h = \mathbb{R}_+^* \neq \mathbb{R}^*$ donc h n'est pas surjectif.