

DEVOIR À LA MAISON N° 1

EXERCICE 1.

1. Soient x_1, x_2, y_1, y_2 quatre réels.
 - a. Montrer que $(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$.
 - b. En déduire que $\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$.
2. Soient x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_n des réels. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^n (\lambda x_k + y_k)^2$$

- a. Déterminer des réels A , B et C tels que $P(\lambda) = A\lambda^2 + 2B\lambda + C$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On exprimera A , B et C sous forme de sommes.
- b. On suppose $A \neq 0$. P est donc un trinôme du second degré. Quel est le signe de $P(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$? Que peut-on en déduire sur le discriminant Δ de P ? En déduire l'inégalité suivante.

$$(CS) : \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

- c. On suppose $A = 0$. Que peut-on en déduire sur les réels x_1, \dots, x_n ? En déduire que l'inégalité (CS) est encore vraie.
- d. En utilisant (CS), montrer que

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

- e. Soient a_1, \dots, a_n des réels strictement positifs. En utilisant (CS), montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right) \geq n^2$$

EXERCICE 2.

Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel non nul. On pose

$$P_n = \prod_{k=1}^n (2k) \quad \text{et} \quad Q_n = \prod_{k=1}^n (2k-1)$$

1. Exprimer P_n en fonction de n .
2. Que vaut $P_n Q_n$?
3. En déduire Q_n .

EXERCICE 3.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$$

$$T_n = \sum_{k=0}^n k a_k a_{n-k}$$

1. Calculer a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 ainsi que S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 . Que remarque-t-on ?
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = \sum_{k=0}^n (n-k)a_{n-k}a_k$$

En déduire que $2T_n = nS_n$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$$

4. Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

puis que

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

5. En déduire par récurrence que $S_n = a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Montrer que a_n est un entier naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$.