Devoir surveillé n°09 : corrigé

Problème 1 — Dérivation et polynômes

Partie I –

1. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Par suite, en prenant $\ell = 1$, f est continue en 0.

2. Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto x$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.
Puisque $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x)$ et $\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x^2)$, $x\cos x - \sin x \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$.
Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$. D'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque. Si on n'a pas encore vu le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, on montre d'abord que f est dérivable en 0. En effet

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin x - x}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x}{6}$$

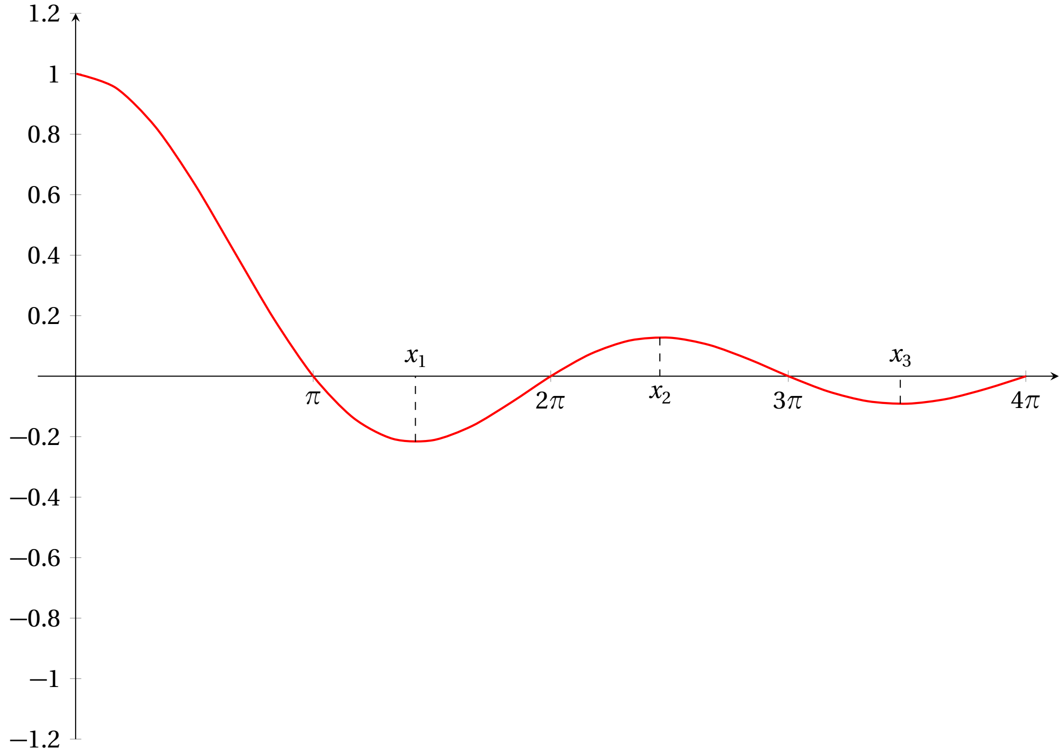
En particulier, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ de sorte que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$. Puisque $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 = f'(0)$, f' est bien continue en 0. Finalement, on retrouve le fait que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. ■

3. Soit $\varphi : x \mapsto x\cos x - \sin x$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = -x\sin x$. Ainsi φ' est de signe constant sur I_n et ne s'annule qu'aux bornes de I_n. Il s'ensuit que φ est strictement monotone sur I_n.
Sur I_n, φ est continue et strictement monotone donc établit une bijection de I_n dans $\varphi(\mathrm{I}_n)$ qui est un intervalle.
Or $\varphi(n\pi)\varphi((n+1)\pi) = -n(n+1)\pi^2 < 0$. Donc $0 \in \varphi(\mathrm{I}_n)$ et il existe un unique réel x_n dans I_n tel que $\varphi(x_n) = 0$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n\pi \leqslant x_n \leqslant n\pi + \pi$ d'où $1 \leqslant \dfrac{x_n}{n\pi} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$. Le théorème des gendarmes prouve alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n\pi} = 1$ ce qui donne $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$.
Or φ est strictement décroissante sur I_0 et $\varphi(0) = 0$. Donc f' est négative sur I_0 et ne s'annule qu'en 0. Donc f est strictement décroissante sur I_0.
Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. Sur I_{2n}, φ est strictement décroissante et s'annule en x_{2n}. Donc f est strictement croissante sur $[2n\pi, x_{2n}]$ et strictement décroissante sur $[x_{2n}, (2n+1)\pi]$.
De même, sur I_{2n-1}, φ est strictement croissante et s'annule en x_{2n-1}. Donc f est strictement décroissante sur $[(2n-1)\pi, x_{2n-1}]$ et strictement croissante sur $[x_{2n-1}, 2n\pi]$.

6. La courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisse $n\pi$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.



Partie II –

1. Le calcul donne $g''(x) = \dfrac{-(x^2-2)\sin x - 2x\cos x}{x^3}$ pour tout $x > 0$.

2.

n	0	1	2
P_n	1	X	$\mathrm{X}^2 - 2$
Q_n	0	1	2X

3. En dérivant la relation donnée par l'énoncé, on a pour tout $x > 0$:

$$g^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{P}_n'(x)\sin^{(n)}(x) + \mathrm{P}_n(x)\sin^{(n+1)}(x) + \mathrm{Q}_n'(x)\sin^{(n+1)}(x) + \mathrm{Q}_n(x)\sin^{(n+2)}(x)}{x^{n+1}}$$
$$-(n+1)\frac{\mathrm{P}_n(x)\sin^{(n)}(x) + \mathrm{Q}_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+2}}$$

comme $\sin^{(n)}(x) = -\sin^{(n+2)}(x)$, on obtient :

$$g^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{P}_{n+1}(x)\sin^{(n+1)}(x) + \mathrm{Q}_{n+1}(x)\sin^{(n+2)}(x)}{x^{n+2}}$$

avec

$$\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{X}\mathrm{P}_n + \mathrm{X}\mathrm{Q}_n' - (n+1)\mathrm{Q}_n$$
$$\mathrm{Q}_{n+1} = \mathrm{X}\mathrm{Q}_n - \mathrm{X}\mathrm{P}_n' + (n+1)\mathrm{P}_n$$

4. On isole le cas $n = 0$. $\mathrm{P}_0 = 1$ donc P_0 est à coefficients entiers, de degré 0, de coefficient dominant 1 et pair. $\mathrm{Q}_0 = 0$ donc Q_0 à coefficients entiers, de degré $-\infty$. Cela n'a pas de sens de parler de son coefficient dominant et il est aussi bien pair qu'impair.
Traitons maintenant le cas $n \geqslant 1$. Soit $\mathscr{H}_n$ la propriété :

P_n est de degré n de coefficient dominant 1, Q_n est de degré $n-1$ et de coefficient dominant n, P_n et Q_n sont à coefficients entiers, P_n a la parité de n, Q_n a la parité opposée de celle de n.

$\mathscr{H}_1$ est vraie. Supposons $\mathscr{H}_n$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors P_n, Q_n, P_n' et Q_n' sont à coefficients entiers donc P_{n+1} et Q_{n+1} aussi.
De plus, XP_n est de degré $n+1$ de coefficient dominant 1 et XQ_n' et Q_n sont de degré strictement inférieur à $n+1$ donc P_{n+1} est de degré $n+1$ de coefficient dominant 1.
Par ailleurs, XQ_n, XP_n' et $(n+1)P_n$ sont de degré n de coefficients dominants respectifs n, n et $n+1$ donc Q_{n+1} est degré n de coefficient dominant $n+1$.
Enfin, P_n a la parité de n et Q_n a la parité opposée à celle de n donc XP_n, XQ_n' sont de la parité opposée à celle de n donc de la parité de $n+1$ tandis que XQ_n et XP_n' sont de la parité de n donc de la parité opposée à celle de $n+1$. On en déduit que P_{n+1} a la parité de $n+1$ tandis que Q_{n+1} a la parité opposée à celle de $n+1$.
Donc $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie. Ainsi $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. On a $P_3 = XP_2 + XQ_2' - 3Q_2 = X^3 - 6X$ et $Q_3 = XQ_2 - XP_2' + 3P_2 = 3X^2 - 6$.

6. Soit $\alpha_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $\beta_k = 2k\pi$. Comme pour tout $x > 0$, on a $U(x)\sin(x) + V(x)\cos(x) = 0$, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $U(\alpha_k) = 0$ et $V(\beta_k) = 0$. U et V admettent une infinité de racines donc sont égaux au polynôme nul.

7. En dérivant $n+1$ fois l'égalité, $xg(x) = \sin x$, on obtient pour tout $x > 0$,

$$xg^{(n+1)}(x) + (n+1)g^{(n)}(x) = \sin^{(n+1)}(x)$$

d'où en reportant les formules donnant $g^{(n)}(x)$ et $g^{(n+1)}(x)$:

$$(P_{n+1}(x) + (n+1)Q_n(x) - x^n)\sin^{(n+1)}(x) + ((n+1)P_n(x) - Q_{n+1}(x))\sin^{(n)}(x) = 0$$

Puisque à n fixé, l'une des expressions $\sin^{(n+1)}(x)$ ou $\sin^{(n)}(x)$ vaut $\pm\sin(x)$ tandis que l'autre vaut $\pm\cos x$, on peut appliquer le résultat de la question précédente et on a donc :

$$P_{n+1} + (n+1)Q_n - X^{n+1} = 0 \qquad\qquad (n+1)P_n - Q_{n+1} = 0$$

8. En reportant $Q_{n+1} = (n+1)P_n$ dans la définition de Q_{n+1}, on a $X(Q_n - P_n') = 0$ ce qui donne $Q_n = P_n'$ par intégrité de $\mathbb{R}[X]$.
On a donc $P_{n+1} = X^{n+1} - (n+1)Q_n = XP_n + XP_n'' - (n+1)Q_n$ ce qui donne $P_n + P_n'' = X^n$ à nouveau par intégrité de $\mathbb{R}[X]$.
P_n est donc solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_n : y'' + y = x^n$.

9. Si T est un polynôme non nul de degré p, $T + T''$ est aussi de degré p et non nul (car le degré de T'' est strictement inférieur à celui de T). Cela montre que Ψ est injectif et que si T appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, $\Psi(T)$ aussi.
Donc Ψ_n est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, cela implique que Ψ_n est bijectif.
Si Q est un polynôme quelconque, il existe un entier p tel que Q appartienne à $\mathbb{R}_p[X]$. Comme Ψ_p est bijectif, il existe P tel que $\Psi_p(P) = Q$. Donc P est un antécédent de Q par Ψ : Ψ est surjectif et comme Ψ est injectif, Ψ est bijectif.

10. Notons $P_n = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$. On a

$$\begin{aligned} P_n + P_n'' &= \sum_{k=0}^{n} b_k X^k + \sum_{k=0}^{n} k(k-1)b_k X^k \\ &= b_n X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}(b_k + (k+2)(k+1)b_{k+2})X^k = X^n \end{aligned}$$

Par suite $b_n = 1$, $b_{n-1} = 0$ et pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, $b_k = -(k+2)(k+1)b_{k+2}$.
Cela donne pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $b_{n-2k} = (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!}$ et $b_{n-2k+1} = 0$.
Finalement $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^{n-2k}$ avec $a_k = (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!}$.

11. Les solutions de $y'' + y = x^n$ sont la somme d'une solution particulière de cette équation et de la solution générale de $y'' + y = 0$.
P_n étant solution particulière, les solutions sont donc les fonctions du type : $x \mapsto P_n(x) + \lambda\cos x + \mu\sin x$, λ et μ étant deux réels.

Problème 2 — ENSI 1979

Partie I – Etude de cas particuliers

1. On trouve

$$\begin{array}{llll} P_1 = X & P_2 = 2X & P_3 = 3X - X^3 & P_4 = 4X - 4X^3 \\ Q_1 = 1 & Q_2 = 1 - X^2 & Q_3 = 1 - 3X^2 & Q_4 = 1 - 6X^2 + X^4 \end{array}$$

2. Les décompositions en facteurs irréductibles de P_2, Q_2, P_3, Q_3 ne posent pas de problèmes.

$$P_2 = 2X \qquad Q_2 = (1-X)(1+X) \qquad P_3 = X(\sqrt{3}-X)(\sqrt{3}+X) \qquad Q_3 = (1-X\sqrt{3})(1+X\sqrt{3})$$

La factorisation de P_4 est évidente. Les racines de $1-6X+X^2$ sont $3-2\sqrt{2}$ et $3+2\sqrt{2}$. Les racines de Q_4 sont donc les racines carrées de ces derniers réels. Puisque $3-2\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^2$ et $3+2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2$, les racines de Q_4 sont $1-\sqrt{2}$, $-1+\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$, $-1-\sqrt{2}$. Finalement,

$$P_4 = 4X(1-X)(1+X) \qquad Q_4 = (X+1+\sqrt{2})(X-1+\sqrt{2})(X+1-\sqrt{2})(X-1-\sqrt{2})$$

3. La décomposition en éléments simples de R_2 est directe :

$$R_2 = \frac{2X}{(1-X)(1+X)} = \frac{(X+1)-(1-X)}{(1-X)(1+X)} = \frac{1}{1-X} - \frac{1}{1+X}$$

Une division euclidienne montre que la partie entière de R_3 est $\frac{1}{3}X$. La méthode usuelle montre que

$$R_3 = \frac{1}{3}X - \frac{4}{9\left(X-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} - \frac{4}{9\left(X+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

La décomposition en éléments simples de R_4 est de la forme

$$R_4 = \frac{\alpha}{X-1-\sqrt{2}} + \frac{\beta}{X-1+\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{X+1-\sqrt{2}} + \frac{\delta}{X+1+\sqrt{2}}$$

avec

$$\alpha = \frac{P_4(1+\sqrt{2})}{Q_4'(1+\sqrt{2})} \qquad \beta = \frac{P_4(1-\sqrt{2})}{Q_4'(1-\sqrt{2})} \qquad \gamma = \frac{P_4(-1+\sqrt{2})}{Q_4'(-1+\sqrt{2})} \qquad \delta = \frac{P_4(-1-\sqrt{2})}{Q_4'(-1-\sqrt{2})}$$

On remarquera pour simplifier les calculs que $\frac{P_4}{Q_4'} = \frac{1-X^2}{X^2-3}$ et on tirera profit du fait que R_4 est impaire. On trouve alors

$$R_4 = \frac{-1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{X-1-\sqrt{2}} + \frac{-1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{X-1+\sqrt{2}} + \frac{-1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{X+1-\sqrt{2}} + \frac{-1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{X+1+\sqrt{2}}$$

Partie II – Etude du cas général

1. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_{n+1} = Q_{n+1} + iP_{n+1} = -XP_n + Q_n + iP_n + iXQ_n = (1+iX)(Q_n + iP_n) = (1+iX)Z_n$$

Puisque $Z_0 = 1$, on montre alors aisément que $Z_{n+1} = (1+iX)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Tout d'abord, $1 + i\tan\alpha = \frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}$ donc $(1+i\tan\alpha)^n = \frac{e^{in\alpha}}{\cos^n\alpha}$. Puisque P_n et Q_n sont à coefficients réels, il s'ensuit que

$$P_n(\tan\alpha) = \operatorname{Im}((1+i\tan\alpha)^n) = \frac{\sin n\alpha}{\cos^n\alpha} \qquad Q_n(\tan\alpha) = \operatorname{Re}((1+i\tan\alpha)^n) = \frac{\cos n\alpha}{\cos^n\alpha}$$

3. D'après la formule du binôme,

$$Z_n = (1+iX)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k X^k = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (-1)^k X^{2k} + i \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k X^{2k+1}$$

donc

$$P_n = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k X^{2k+1} \qquad Q_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (-1)^k X^{2k}$$

4. D'après la question **II.3**, P_n est impair et Q_n est pair.

Remarque. On peut également déterminer la parité de P_n et Q_n sans leurs formes développées. D'une part,

$$\overline{Z}_n = (1-iX)^n = Z_n(-X) = Q_n(-X) + iP_n(-X)$$

D'autre part, puisque P_n et Q_n sont à coefficients réels,

$$\overline{Z}_n = Q_n - iP_n$$

Puisque P_n, Q_n, $P_n(-X)$, $Q_n(-X)$ sont à coefficients réels, $P_n(-X) = -P_n(X)$ et $Q_n(-X) = Q_n(X)$. Autrement dit, P_n est impair et Q_n est pair. ■

La question **II.3** montre également que

- si n est pair, $\deg P_n = n-1$, $\deg Q_n = n$, le coefficient dominant de P_n est $-(-1)^{\frac{n}{2}} n$ et le coefficient dominant de Q_n est $(-1)^{\frac{n}{2}}$;
- si n est impair, $\deg P_n = n$, $\deg Q_n = n-1$, le coefficient dominant de P_n est $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ et le coefficient dominant de Q_n est $(-1)^{\frac{n-1}{2}} n$.

5.
- Supposons n pair.
  La question **II.2** montre que les réels $\tan \frac{k\pi}{n}$ pour $k \in \llbracket -\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1 \rrbracket$ sont racines de P_n. La fonction tan étant strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ces $n-1$ réels sont distincts. Puisque $\deg P_n = n-1$, ce sont exactement les racines de P_n et elles sont simples.
  La question **II.2** montre que les réels $\tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k \in \llbracket -\frac{n}{2}, \frac{n}{2}-1 \rrbracket$ sont racines de Q_n. La fonction tan étant strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ces n réels sont distincts. Puisque $\deg Q_n = n$, ce sont exactement les racines de P_n et elles sont simples.
- Supposons n impair.
  La question **II.2** montre que les réels $\tan \frac{k\pi}{n}$ pour $k \in \llbracket -\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2} \rrbracket$ sont racines de P_n. La fonction tan étant strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ces n réels sont distincts. Puisque $\deg P_n = n$, ce sont exactement les racines de P_n et elles sont simples.
  La question **II.2** montre que les réels $\tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k \in \llbracket -\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}-1 \rrbracket$ sont racines de Q_n. La fonction tan étant strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ces $n-1$ réels sont distincts. Puisque $\deg Q_n = n-1$, ce sont exactement les racines de P_n et elles sont simples.

6. Les questions précédentes montrent que si n est pair

$$\begin{aligned}
P_n &= -(-1)^{\frac{n}{2}} n \prod_{k=-\frac{n}{2}+1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X - \tan \frac{k\pi}{n}\right) \\
&= -(-1)^{\frac{n}{2}} nX \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X - \tan \frac{k\pi}{n}\right)\left(X + \tan \frac{k\pi}{n}\right) \\
Q_n &= (-1)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}-1} \left(X - \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \\
&= (-1)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(X - \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\left(X + \tan \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)
\end{aligned}$$

et que si n est impair

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_n &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \left(\mathrm{X} - \tan\frac{k\pi}{n}\right) \\
&= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{X} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\mathrm{X} - \tan\frac{k\pi}{n}\right)\left(\mathrm{X} + \tan\frac{k\pi}{n}\right) \\
\mathrm{Q}_n &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \prod_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}-1} \left(\mathrm{X} - \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \\
&= (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \left(\mathrm{X} - \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\left(\mathrm{X} + \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)
\end{aligned}$$

7. Lorsque n est pair, $\deg \mathrm{P}_n < \deg \mathrm{Q}_n$ donc la partie entière de R_n est nulle.
Lorsque n est impair, $\deg \mathrm{P}_n = \deg \mathrm{Q}_n + 1$ donc la partie entière de R_n est de degré 1. Puisque P_n et Q_n sont respectivement impair et pair, R_n est impaire. L'unicité de la décomposition en éléments simples nous apprend donc que la partie entière de R_n est également impaire. Elle est donc de la forme $a\mathrm{X}$ où a est le quotient du coefficient de P_n par le coefficient dominant de Q_n. Ainsi $a = \frac{1}{n}$. La partie entière de la fraction rationnelle R_n est donc $\frac{1}{n}\mathrm{X}$.

8. D'une part,

$$\mathrm{Z}_n' = ni(1+i\mathrm{X})^{n-1} = ni\mathrm{Z}_{n-1} = -n\mathrm{P}_{n-1} + ni\mathrm{Q}_{n-1}$$

D'autre part,

$$\mathrm{Z}_n' = \mathrm{Q}_n' + i\mathrm{P}_n'$$

Puisque P_{n-1}, Q_{n-1}, P_n', Q_n' sont à coefficients réels, on en déduit que $\mathrm{Q}_n' = -n\mathrm{P}_{n-1}$ et $\mathrm{P}_n' = n\mathrm{Q}_{n-1}$.

9. Supposons n pair. Puisque R_n est impaire, la décomposition en éléments simples de R_n est de la forme

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\lambda_k}{\mathrm{X} - \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}} + \frac{\lambda_k}{\mathrm{X} + \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

avec

$$\lambda_k = \frac{\mathrm{P}_n\left(\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{\mathrm{Q}_n'\left(\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{\mathrm{P}_n\left(\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{\mathrm{P}_{n-1}\left(\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$$

D'après la question **II.2**, on obtient après simplification

$$\lambda_k = -\frac{1}{n\cos^2\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

Supposons n impair. Puisque R_n est impaire, la décomposition en éléments simples de R_n est de la forme

$$\mathrm{R}_n = \frac{1}{n}\mathrm{X} + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{\lambda_k}{\mathrm{X} - \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}} + \frac{\lambda_k}{\mathrm{X} + \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

avec

$$\lambda_k = -\frac{1}{n\cos^2\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

10. ► Supposons n pair.
Les racines non nulles de P_n autrement dit de $\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{X}}$ sont les $\tan\frac{k\pi}{n}$ et les $-\tan\frac{k\pi}{n}$ pour $k \in [\![1, \frac{n}{2}-1]\!]$. Le produit de ces racines vaut donc

$$(-1)^{\frac{n}{2}-1} \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \tan^2\frac{k\pi}{n} = (-1)^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{A}_n^2$$

Par ailleurs,

$$\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{X}} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{2k+1}(-1)^k \mathrm{X}^{2k}$$

donc le produit des racines de $\frac{P_n}{X}$ est aussi

$$(-1)^{n-2}\frac{\binom{n}{1}(-1)^0}{\binom{n}{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}-1}}=(-1)^{\frac{n}{2}-1}$$

Ainsi $A_n^2=1$. Puisque $\tan\frac{k\pi}{n}>0$ pour $k\in\llbracket 1,\frac{n}{2}-1\rrbracket$, on a donc $A_n>0$ de sorte que $A_n=1$.
Les racines de Q_n sont les $\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ et les $-\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k\in\llbracket 0,\frac{n}{2}-1\rrbracket$. Le produit de ces racines vaut donc

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\tan^2\frac{(2k+1)\pi}{2n}=(-1)^{\frac{n}{2}}B_n^2$$

Par ailleurs,

$$Q_n=\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n}{2k}(-1)^kX^{2k}$$

donc le produit des racines de Q_n est aussi

$$(-1)^n\frac{\binom{n}{0}(-1)^0}{\binom{n}{n}(-1)^{\frac{n}{2}}}=(-1)^{\frac{n}{2}}$$

Ainsi $B_n^2=1$. Puisque $\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}>0$ pour $k\in\llbracket 0,\frac{n}{2}-1\rrbracket$, on a donc $B_n>0$ de sorte que $B_n=1$.
Remarque. On peut aussi remarquer que les tangentes intervenant dans chacun des produits A_n et B_n sont inverses l'une de l'autre deux à deux en vertu de la relation trigonométrique $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan(\theta)}$. ■

► Supposons n impair.
Les racines non nulles de P_n autrement dit de $\frac{P_n}{X}$ sont les $\tan\frac{k\pi}{n}$ et les $-\tan\frac{k\pi}{n}$ pour $k\in\llbracket 1,\frac{n-1}{2}\rrbracket$. Le produit de ces racines vaut donc

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\tan^2\frac{k\pi}{n}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}A_n^2$$

Par ailleurs,

$$\frac{P_n}{X}=\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1}(-1)^kX^{2k}$$

donc le produit des racines de $\frac{P_n}{X}$ est aussi

$$(-1)^{n-1}\frac{\binom{n}{1}(-1)^0}{\binom{n}{n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}n$$

Ainsi $A_n^2=n$. Puisque $\tan\frac{k\pi}{n}>0$ pour $k\in\llbracket 1,\frac{n-1}{2}\rrbracket$, on a donc $A_n>0$ de sorte que $A_n=\sqrt{n}$.
Les racines de Q_n sont les $\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ et les $-\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k\in\llbracket 0,\frac{n-1}{2}-1\rrbracket$. Le produit de ces racines vaut donc

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1}\tan^2\frac{(2k+1)\pi}{2n}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}B_n^2$$

Par ailleurs,

$$Q_n=\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k}(-1)^kX^{2k}$$

donc le produit des racines de Q_n est aussi

$$(-1)^{n-1}\frac{\binom{n}{0}(-1)^0}{\binom{n}{n-1}(-1)^{\frac{n-1}{2}}}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n}$$

Ainsi $B_n^2=\frac{1}{n}$. Puisque $\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}>0$ pour $k\in\llbracket 0,\frac{n-1}{2}-1\rrbracket$, on a donc $B_n>0$ de sorte que $B_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$.
Remarque. A nouveau, en utilisant la relation trigonométrique $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan(\theta)}$, on peut montrer que $B_n=\frac{1}{A_n}$. ■