Devoir surveillé n°11

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – Centrale MP Maths 1 2014 – Polynômes de Tchebychev et de Dickson, applications

I Définitions et propriétés usuelles

Les polynômes de Tchebychev de première espèce $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définis par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

On ne demande pas de justifier l'existence et l'unicité de la famille de polynômes définie par cette relation.

$\boxed{1}$ **Polynômes de première espèce**

1.a Déterminer T_0, T_1, T_2 et T_3.

1.b En remarquant que pour tout réel θ, on a $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{T}_n = \sum_{0\leq k\leq n/2} \binom{n}{2k} (\mathrm{X}^2-1)^k \mathrm{X}^{n-2k}$$

1.c Montrer que la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{T}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n \qquad (\star)$$

En déduire, pour tout entier naturel n, le degré et le coefficient dominant de T_n. Retrouver ce résultat à l'aide de l'expression de la question **1.b**.

1.d Ecrire une fonction `tchebychev` en Python prenant en argument un entier naturel n et renvoyant la liste des coefficients de T_n par ordre de degré croissant.

1.e Montrer que, pour tout entier naturel n, le polynôme T_n est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples appartenant à $]-1,1[$. Déterminer les racines de T_n.

$\boxed{2}$ **Polynômes de deuxième espèce**
On définit les polynômes $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Tchebychev de deuxième espèce par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{U}_n = \frac{1}{n+1}\mathrm{T}'_{n+1}$$

2.a Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z},\ \mathrm{U}_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$$

2.b En déduire les propriétés suivantes.

2.b.i La suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence $(\star)$ que la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.b.ii Pour tout entier naturel n, le polynôme U_n est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples appartenant à $]-1,1[$. Déterminer les racines de U_n.

II Arithmétique des polynômes de Tchebychev

3 **Division euclidienne**

3.a Montrer que

$$\begin{cases} T_m T_n = \dfrac{1}{2}(T_{n+m} + T_{n-m}) & \text{pour tous entiers } 0 \leq m \leq n \\ T_m U_{n-1} = \dfrac{1}{2}(U_{n+m-1} + U_{n-m-1}) & \text{pour tous entiers } 0 \leq m < n \end{cases}$$

3.b Pour m et n entiers naturels tels que $m \geq n$, on se propose de déterminer le quotient $Q_{n,m}$ et le reste $R_{n,m}$ de la division euclidienne de T_n par T_m.

3.b.i On suppose $m < n < 3m$. Montrer que

$$Q_{n,m} = 2T_{n-m} \qquad \text{et} \qquad R_{n,m} = -T_{|n-2m|}$$

3.b.ii Déterminer $Q_{n,m}$ et $R_{n,m}$ lorsque n est de la forme $(2p+1)m$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

3.b.iii On suppose que $m > 0$ et que n n'est pas le produit de m par un entier impair. Montrer qu'il existe un unique entier $p \geq 1$ tel que $|n - 2pm| < m$ et que

$$Q_{n,m} = 2(T_{n-m} - T_{n-3m} + \cdots + (-1)^{p-1}T_{n-(2p-1)m}) \qquad \text{et} \qquad R_{n,m} = (-1)^p T_{|n-2pm|}$$

4 **Plus grand commun diviseur**
Dans cette question, on fixe deux entiers naturels m et n.

4.a Soit h le pgcd dans $\mathbb{N}$ de $m+1$ et $n+1$. En examinant les racines communes à U_n et U_m, montrer que U_{h-1} est un pgcd dans $\mathbb{R}[X]$ de U_n et U_m.

4.b Soit $g > 0$ le pgcd de m et n. On pose $m_1 = m/g$ et $n_1 = n/g$.

4.b.i Montrer que si m_1 et n_1 sont impairs, alors T_g est un pgcd de T_n et T_m.

4.b.ii Montrer que si l'un des deux entiers m_1 ou n_1 est pair, alors T_n et T_m sont premiers entre eux.

4.b.iii Que peut-on dire des pgcd de T_n et T_m lorsque m et n sont impairs ? Lorsque n et m sont des puissances de 2 distinctes ?

III Un théorème

Dans cette partie, on munit l'ensemble $\mathbb{C}[X]$ des polynômes complexes de la loi de composition interne associative donnée par la composition, notée $\circ$. Plus précisément, étant donné $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$, si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k$, la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant nulle à partir d'un certain rang, on a :

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k Q^k$$

On dit que les polynômes P et Q commutent si $P \circ Q = Q \circ P$. On note $\mathcal{C}(P)$ l'ensemble des polynômes complexes qui commutent avec le polynôme P :

$$\mathcal{C}(P) = \{Q \in \mathbb{C}[X],\ P \circ Q = Q \circ P\}$$

On cherche dans cette partie les familles $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes complexes vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(F_n) = n \qquad \text{et} \qquad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ F_n \circ F_m = F_m \circ F_n \tag{▲}$$

Il est clair que la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convient.
On note G l'ensemble des polynômes complexes de degré 1, et pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on pose $P_\alpha = X^2 + \alpha$.

5 **Préliminaires**

5.a Montrer que la famille $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (▲). On pourra comparer $\mathrm{T}_n \circ \mathrm{T}_m$ et T_{nm}.

5.b Vérifier que G est un groupe pour la loi $\circ$.
L'inverse pour la loi $\circ$ d'un élément U de G sera noté U^{-1}.

6 **Commutant de** X^2 **et** T_2

6.a Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit Q un polynôme complexe non constant qui commute avec P_α. Montrer que Q est unitaire.

6.b En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe au plus un polynôme de degré n qui commute avec P_α. Déterminer $\mathcal{C}(\mathrm{X}^2)$.

6.c Soit P un polynôme complexe de degré 2. Justifier l'existence et l'unicité de $\mathrm{U} \in \mathrm{G}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{U} \circ \mathrm{P} \circ \mathrm{U}^{-1} = \mathrm{P}_\alpha$. Déterminer ces deux éléments lorsque $\mathrm{P} = \mathrm{T}_2$.

6.d Justifier que $\mathcal{C}(\mathrm{T}_2) = \{-1/2\} \cup \{\mathrm{T}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

7 **7.a** Montrer que les seuls complexes α tels que $\mathcal{C}(\mathrm{P}_\alpha)$ contienne un polynôme de degré 3 sont 0 et -2.

7.b En déduire le théorème de Block et Thielmann : si $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (▲), alors il existe $\mathrm{U} \in \mathrm{G}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{F}_n = \mathrm{U}^{-1} \circ \mathrm{X}^n \circ \mathrm{U} \qquad \text{ou} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{F}_n = \mathrm{U}^{-1} \circ \mathrm{T}_n \circ \mathrm{U}$$

IV Puissances dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$

Dans toute cette partie, on note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, muni de son addition et de sa multiplication usuelles.

8 Justifier qu'un élément M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ appartient à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\det \mathrm{M}| = 1$.

9 On introduit les polynômes de Dickson de première et deuxième espèce, $(\mathrm{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{E}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définis sous la forme de fonctions polynomiales de deux variables par :

$$\mathrm{D}_0(x,a) = 2 \qquad \mathrm{D}_1(x,a) = x \qquad \mathrm{E}_0(x,a) = 1 \qquad \mathrm{E}_1(x,a) = x$$

puis, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{D}_{n+2}(x,a) = x\mathrm{D}_{n+1}(x,a) - a\mathrm{D}_n(x,a) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}_{n+2}(x,a) = x\mathrm{E}_{n+1}(x,a) - a\mathrm{E}_n(x,a)$$

Justifier la relation suivante avec les polynômes de Tchebychev :

$$\forall (x,a) \in \mathbb{C}^2,\ \mathrm{D}_n(2xa, a^2) = 2a^n\mathrm{T}_n(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}_n(2xa, a^2) = a^n\mathrm{U}_n(x)$$

ainsi que les deux relations suivantes, valables pour tout entier naturel n et tout $(x,a) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$:

$$\mathrm{D}_n\left(x + \frac{a}{x}, a\right) = x^n + \frac{a^n}{x^n} \qquad \text{et} \qquad \left(x - \frac{a}{x}\right)\mathrm{E}_n\left(x + \frac{a}{x}, a\right) = x^{n+1} - \frac{a^{n+1}}{x^{n+1}} \tag{■}$$

10 Dans cette question, on cherche une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément A de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ soit une puissance n-ième dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $\mathrm{B} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{B}^n$. Dans toute la suite, on notera :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \tau = \operatorname{tr} \mathrm{A} \qquad \delta = \det \mathrm{A}$$

10.a Soit $\mathrm{B} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. On note, *dans cette question uniquement*, $\sigma = \operatorname{tr} \mathrm{B}$ et $\nu = \det \mathrm{B}$. Montrer, pour tout $n \geq 2$, l'égalité

$$\mathrm{B}^n = \mathrm{E}_{n-1}(\sigma,\nu)\mathrm{B} - \nu\mathrm{E}_{n-2}(\sigma,\nu)\mathrm{I}_2$$

où I_2 est la matrice identité d'ordre 2.
Etablir que $\operatorname{tr}(\mathrm{B}^n) = \mathrm{D}_n(\sigma,\nu)$.

10.b En déduire que si A est une puissance n-ième ($n \geq 2$) dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, alors il existe $\sigma \in \mathbb{Z}$ et $\nu \in \{-1, 1\}$ tels que :

- $\mathrm{E}_{n-1}(\sigma, \nu)$ divise b, c et $a - d$. On justifiera brièvement que $\mathrm{E}_{n-1}(\sigma, \nu)$ est bien un entier.
- $\tau = \mathrm{D}_n(\sigma, \nu)$ et $\delta = \nu^n$.

10.c On va maintenant établir la réciproque.
Soit A un élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ pour lequel il existe $\sigma \in \mathbb{Z}$ et $\nu \in \{-1, 1\}$ vérifiant les deux conditions de la question précédente. Pour simplifier, on note $p = \mathrm{E}_{n-1}(\sigma, \nu)$. On définit alors une matrice $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ avec

$$r = \frac{1}{2}\left(\sigma + \frac{a-d}{p}\right) \qquad s = \frac{b}{p} \qquad t = \frac{c}{p} \qquad u = \frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{a-d}{p}\right)$$

10.c.i En introduisant une racine complexe du polynôme $\mathrm{X}^2 - \sigma\mathrm{X} + \nu$ et à l'aide de ($\blacksquare$), montrer que

$$\tau^2 - 4\delta = p^2(\sigma^2 - 4\nu) \qquad \text{puis} \qquad ru - st = \nu$$

En déduire que B appartient à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

10.c.ii Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B}^n$.

10.d Montrer que la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ est un cube dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ et déterminer une matrice $\mathrm{B} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\mathrm{B}^3 = \mathrm{A}$.