Endomorphismes d'un espace euclidien

Dans tout ce chapitre E désigne un espace euclidien. On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dont il est muni et $\| \cdot \|$ la norme euclidien associée à ce produit scalaire.

1 Adjoint d'un endomorphisme

Rappel

On rappelle que E^* désigne l'espace dual d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur E. Autrement dit, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Théorème 1.1 Représentation des formes linéaires

L'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ a & \longmapsto & (x \in E \mapsto \langle a, x \rangle) \end{array}\right.$$

est un isomorphisme.

Remarque. Ceci signifie en particulier que pour toute forme linéaire $\varphi \in E^*$, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle a, x \rangle$.

Définition 1.1 Adjoint

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

Cet endomorphisme u^* s'appelle l'**adjoint** de u.

Méthode Déterminer un adjoint

Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. Alors $v = u^*$ si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

Exemple 1.1

$\mathrm{Id}_E^* = \mathrm{Id}_E$. En effet, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle \mathrm{Id}_E(x), y \rangle = \langle x, y \rangle = \langle x, \mathrm{Id}_E(y) \rangle$$

Exercice 1.1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $u = 0 \iff u^* \circ u = 0$.

Proposition 1.1 Propriétés de l'adjonction

Linéarité L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & u^* \end{array}\right.$ est linéaire.

Involutivité Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $(u^*)^* = u$.

Adjoint d'une composée Pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

Adjoint d'un inverse Si $u \in GL(E)$, alors $u^* \in GL(E)$ et $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.

Remarque. La linéarité et l'involutivité montrent que l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & u^* \end{array}\right.$ est donc une symétrie vectorielle.

Exercice 1.2

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$ et que $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.
2. En déduire que $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(u^*)$.

Proposition 1.2 Matrice de l'ajoint dans une base orthornormée

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** de E. Alors $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u)^\top$.

Remarque. On en déduit notamment que

$$\operatorname{rg}(u^*) = \operatorname{rg}(\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u^*)) = \operatorname{rg}(\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u)^\top) = \operatorname{rg}(\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \operatorname{rg}(u)$$

Exercice 1.3

Soit E un espace euclidien. Montrer que $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2 \mapsto \operatorname{tr}(f^* \circ g)$ est un produit scalaire sur E.

Proposition 1.3 Adjoint et stabilité

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

2 Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales

Définition 2.1 Projecteur orthogonal

On appelle **projecteur orthogonal** de E toute projecteur sur un sous-espace vectoriel F et parallélement à $F^\perp$.

Exemple 2.1

Soit D une droite de E de vecteur directeur a et p le projecteur orthogonal sur D. Alors

$$\forall x \in \mathrm{E},\ p(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2}a$$

Définition 2.2 Symétrie orthogonale

On appelle **symétrie orthogonale** de E toute symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel F et parallélement à $\mathrm{F}^\perp$.

Définition 2.3 Réflexion

On appelle **réflexion** de E toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

Exemple 2.2

Soient H est un hyperplan de E de vecteur normal a et s la réflexion par rapport à H. Alors

$$\forall x \in \mathrm{E},\ s(x) = x - 2\frac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2}a$$

3 Matrices orthogonales et isométries vectorielles

3.1 Matrices orthogonales

Définition 3.1 Matrice orthogonale

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est orthogonale si $\mathrm{AA}^\mathsf{T} = \mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.

Remarque. En pratique, il suffit de vérifier $\mathrm{AA}^\mathsf{T} = \mathrm{I}_n$ **ou** $\mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.

Remarque. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale. Alors A est inversible et $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^\mathsf{T}$. De plus, $\det(\mathrm{A}) = \pm 1$.

Remarque. Soient A une matrice orthogonale, λ une éventuelle valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Alors $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$ puis $(\mathrm{AX})^\mathsf{T}(\mathrm{AX}) = \lambda^2\mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{X}$ ou encore $\mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{AX} = \lambda^2\mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{X}$. Puisque A est orthogonale, on en déduit que $\mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{X} = \lambda^2\mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{X}$. Comme X est un vecteur propre, il est non nul et $\mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{X} > 0$. Finalement $\lambda^2 = 1$ i.e. $\lambda = \pm 1$. Ceci signifie que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \{-1, 1\}$.

Proposition 3.1

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est une matrice orthogonale si et seulement si la famille de ses colonnes (resp. de ses lignes) forment une base orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$).

Exercice 3.1

Montrer que les coefficients d'une matrice orthogonale appartiennent tous à $[-1, 1]$.

Exercice 3.2

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée d'un espace euclidien E de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de E si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est une matrice orthogonale.

Définition 3.2 Groupe orthogonal

L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ appelé **groupe orthogonal** d'ordre n et noté $\mathrm{O}(n)$ ou $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 3.1 Matrices de permutation

On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$. Pour $\sigma \in \mathrm{S}_n$, on note P_σ la matrice dont le coefficient en position (i, j) est $\delta_{i,\sigma(j)}$. Montrer que $\{\mathrm{P}_\sigma,\ \sigma \in \mathrm{S}_n\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Décomposition QR

L'interprétation matricielle de la méthode de Gram-Schmidt est que toute matrice A de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $\mathrm{A} = \mathrm{QR}$ où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure. En effet, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$ où $\mathcal{B}_0$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Le procédé de Gram-Schmidt permet l'obtention d'une base orthonormale (pour le produit scalaire usuel) $\mathcal{B}'$ à partir de $\mathcal{B}$. En posant $\mathrm{Q} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}')$ et $\mathrm{R} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, on a donc $\mathrm{A} = \mathrm{QR}$. Comme $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormales, Q est orthogonale. Enfin, si on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$, le procédé de Gram-Schmidt assure que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{vect}(e_1, \dots, e_p) = \mathrm{vect}(f_1, \dots, f_p)$. En particulier, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $e_p \in \mathrm{vect}(f_1, \dots, f_p)$ ce qui assure que R est triangulaire supérieure.

Exercice 3.3

Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.

Définition 3.3 Matrices orthogonales positives et négatives

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{O}(n)$. Si $\det(\mathrm{A}) > 0$, on dit que A est **orthogonale positive** ou **orthogonale directe** ; si $\det(\mathrm{A}) < 0$, on dit que M est **orthogonale négative** ou **orthogonale indirecte**.

Remarque. Si A est orthogonale positive, $\det(\mathrm{A}) = 1$.
Si A est orthogonale négative, $\det(\mathrm{A}) = -1$.

Définition 3.4 Groupe spécial orthogonal

L'ensemble des matrices orthogonales positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$ appellé **groupe spécial orthogonal** d'ordre n et noté $\mathrm{SO}(n)$ ou $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3.4

Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est compact.

3.2 Isométries vectorielles

Définition 3.5 Isométrie vectorielle

On appelle **isométrie vectorielle** de E tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ conservant la norme i.e tel que $\forall x \in \mathrm{E}, \|u(x)\| = \|x\|$.

Remarque. Si u est une isométrie vectorielle, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Proposition 3.2

Une isométrie vectorielle de E est un automorphisme de E.

Remarque. Une isométrie vectorielle est également appelée un **automorphisme orthogonal**.

Définition 3.6 Groupe orthogonal

L'ensemble des isométries vectorielles de E est un sous-groupe de GL(E) appelé **groupe orthogonal** de E et noté O(E).

Proposition 3.3 Caractérisations des isométries vectorielles

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est une isométrie vectorielle ;

(ii) u conserve le produit scalaire : $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$;

(iii) l'image d'une base orthonormée de E par u est une base orthonormée ;

(iv) la matrice de u dans une base orthonormée est orthogonale ;

(v) u est inversible et $u^* = u^{-1}$.

Exercice 3.5

Montrer qu'une symétrie est une isométrie vectorielle si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

Exercice 3.6

Soit E un espace euclidien. Montrer que O(E) est engendré par les réflexions.

Proposition 3.4 Déterminant d'une isométrie

Le déterminant d'une isométrie vectoriel vaut -1 ou 1.

Définition 3.7 Isométries directes et indirecte

Soit $u \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$. Si $\det u = 1$, alors on dit que u est une **isométrie vectorielle directe** ; si $\det u = -1$, on dit que u est une **isométrie vectorielle indirecte**.

Exemple 3.2

Une réflexion est une isométrie vectorielle indirecte.

Définition 3.8 Groupe spécial orthogonal

L'ensemble des isométries vectorielles directes de E est un sous-groupe de O(E) appelé **groupe spécial orthogonal** de E et noté SO(E).

4 Réduction des isométries

4.1 Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie

Définition 4.1 Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. On dit que $\mathcal{B}_2$ a la même orientation que $\mathcal{B}_1$ si $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) > 0$.
La relation binaire «avoir la même orientation que» est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E pour laquelle il existe deux classes d'équivalence.
De manière arbitraire, on convient que l'une des classes d'équivalence sera formée des bases dites **directes** tandis que l'autre sera formée des bases dites **indirectes**.

Orienter un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Pour orienter concrètement un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on choisit une base de référence $\mathcal{B}_0$. Toutes les base de même orientation que $\mathcal{B}_0$ seront dites directes tandis que les autres seront dites indirectes.
Il n'existe que deux orientations possibles d'un même espace vectoriel.

Attention ! L'orientation n'a de sens que pour les espaces vectoriels **réels** puisqu'il y est question de **signe** d'un déterminant.

Exercice 4.1

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe d'un espace euclidien E de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base orthonormée directe de E si et seulement si $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est une matrice orthogonale positive.

Proposition 4.1

Soient E un espace euclidien orienté et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux **bases orthornomées directes** de E. Alors $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.

Produit mixte

On considère n vecteurs $x_1, \dots, x_n$ d'un espace euclidien orienté E de dimension n. Le déterminant de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ dans une base orthonormée directe **quelconque** de E s'appelle le **produit mixte** de $x_1, \dots, x_n$ et se note $[x_1, \dots, x_n]$.

Exercice 4.2

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien orienté E. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est une isométrie vectorielle directe ;

(ii) l'image d'une base orthonormée directe de E par u est une base orthonormée directe ;

(iii) la matrice de u dans une base orthonormée est orthogonale positive.

4.2 Isométries vectorielles du plan vectoriel euclidien

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel euclidien **orienté de dimension** 2.

Proposition 4.2

$O(2)$ est l'ensemble des matrices de la forme $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

$SO(2)$ est l'ensemble des matrices $R(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.3

Montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Lemme 4.1

$\forall(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2, R(\theta)R(\varphi) = R(\varphi)R(\theta) = R(\theta + \varphi)$.

Proposition 4.3

L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \theta & \longmapsto & R(\theta) \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes de noyau $2\pi\mathbb{Z}$ et d'image $SO_2(\mathbb{R})$.

Corollaire 4.1

$SO_2(\mathbb{R})$ est un groupe commutatif.

Corollaire 4.2

L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \longrightarrow & SO_2(\mathbb{R}) \\ z & \longmapsto & \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Re}(z) \end{pmatrix} \end{array} \right.$ est bien définie et c'est un isomorphismes de groupes.

Définition 4.2 Rotation

Soit $u \in SO(E)$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de u dans toute base orthonormée directe de E soit $R(\theta)$. On appelle alors u la **rotation (vectorielle) d'angle** θ.

Remarque. SO(E) est donc le groupe (commutatif) des rotations de E.

Remarque. L'angle d'une rotation est défini modulo 2π.

Remarque. Si l'on change l'orientation de E, la rotation d'angle θ devient la rotation d'angle $-\theta$.

Proposition 4.4 Classification des isométries vectorielles via le déterminant

Soit $u \in \mathrm{O(E)}$.

- Si $\det(u) = +1$, alors u est une rotation.
- Si $\det(u) = -1$, alors u est une réflexion i.e. une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Remarque. Il n'existe donc que **deux** types d'isométries vectorielles du plan.

Exercice 4.4

On se place dans un plan euclidien. Montrer que la composée de deux réflexions est une rotation et que toute rotation peut s'écrire comme la composée de deux réflexions.

Proposition 4.5 Classification des isométries vectorielles via les vecteurs invariants

Soit $u \in \mathrm{O(E)}$. Notons $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id_E})$.

- Si $\dim \mathrm{F} = 0$, alors u est une rotation d'angle non nul (modulo 2π).
- Si $\dim \mathrm{F} = 1$, alors u est une réflexion.
- Si $\dim \mathrm{F} = 2$, alors $u = \mathrm{Id_E}$.

Remarque. La matrice d'une réflexion dans une base orthonormée directe (ou indirecte) est de la forme $\mathrm{S}(\theta)$, θ dépendant de la base choisie (contrairement aux rotations). De plus, il existe une base orthonormée (directe si on le souhaite) de E dans laquelle la matrice d'une réflexion est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Proposition 4.6

Soient r une rotation d'angle θ et u un vecteur unitaire. Alors $\cos\theta = (u \mid r(u))$ et $\sin\theta = [u, r(u)]$.

Méthode Déterminer l'axe d'une réflexion connaissant sa matrice

Soit s une réflexion de matrice S dans une base orthonormée $\mathcal{B}$. L'axe de s est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants. Pour le déterminer, il suffit de résoudre $\mathrm{SX} = \mathrm{X}$.

Exercice 4.5

Soit s une réflexion de matrice $\mathrm{S}(\theta)$ dans une base orthonormée (e_1, e_2) d'un espace euclidien de dimension 2. Déterminer l'axe de s.

Définition 4.3 Angle de vecteurs

Soient u et v deux vecteurs non nuls de E. Posons $u' = \frac{u}{\|u\|}$ et $v' = \frac{v}{\|v\|}$. Il existe une unique rotation r telle que $r(u') = v'$. On appelle angle de vecteurs (u, v) l'angle de cette rotation r (défini modulo 2π).

Remarque. Si l'on change l'orientation de E, les angles sont changés en leurs opposés.

Proposition 4.7 Relation de Chasles

Pour tous vecteurs u, v, w de E non nuls, $(u, v) + (v, w) = (u, w)$.

Proposition 4.8 Lien avec le produit scalaire et le produit mixte

Pour tous vecteurs u, v non nuls de E :

$$(u \mid v) = \|u\|\|v\| \cos(u, v) \qquad [u, v] = \|u\|\|v\| \sin(u, v)$$

Exercice 4.6

Montrer que les rotations conservent les angles orientés et que les réflexions changent les angles orientés en leurs opposés.

4.3 Cas général

Proposition 4.9 Stabilité de l'orthogonal

Soit u une isométrie vectorielle de E. Si F est un sous-espace vectoriel de E **stable** par u, alors $F^\perp$ est également **stable** par u.

Lemme 4.2

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors il existe un plan ou une droite de E stable par u.

Proposition 4.10 Réduction des isométries vectorielles

Soit u une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E. Alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $(\theta \in]0, \pi[)$.

Corollaire 4.3 Réduction des matrices orthogonales

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $(\theta \in]0, \pi[)$, telles que $A = PDP^\top$.

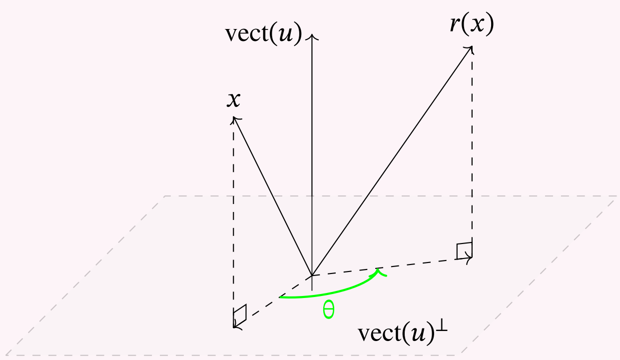
4.4 Cas d'un espace euclidien de dimension 3

Orientation induite

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. On peut orienter un plan P de E en se donnant un vecteur u non nul normal à P : on décrète qu'une base (v, w) de P est directe (resp. indirecte) si (u, v, w) est directe (resp. indirecte). On vérifie sans peine qu'on a alors bien orienté P : on parle alors de l'orientation de P induite par u.

Remarque. Si on change u en $-u$, on change l'orientation induite de P.

Définition 4.4 Rotation



Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et u un vecteur non nul de E. On appelle **rotation** (vectorielle) d'angle θ et d'axe orienté par u l'endomorphisme laissant les vecteurs de $\text{vect}(u)$ invariants et induisant une rotation d'angle θ dans le plan $\text{vect}(u)^\perp$ dont l'orientation est induite par celle de $\text{vect}(u)$ par u.

Remarque. Si u et u' sont deux vecteurs non nuls, colinéaires et de même sens, les rotations d'axes orientés par u et u' et de même angle θ sont identiques.
Si u et u' sont deux vecteurs non nuls, colinéaires et de sens contraire, la rotation d'axe orienté par u et d'angle θ et la rotation d'axe orienté par u' et d'angle $-\theta$ sont identiques.

Remarque. Si on change l'orientation de E, les angles de rotation sont changés en leurs opposés.

Proposition 4.11 Matrice d'une rotation

La matrice de la rotation d'angle θ et d'axe orienté par u dans une base orthonormée directe de premier vecteur colinéaire et de même sens que u est $R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Proposition 4.12

Les isométries vectorielles directes d'un espace euclidien de dimension 3 sont les rotations.

Méthode Déterminer l'image d'un vecteur par une rotation d'axe et d'angle donnés

Soit r une rotation d'angle θ d'axe orienté par u. On suppose u unitaire. Soit x un vecteur de E. On veut déterminer $r(x)$.

- On calcule la projection orthogonale y de x sur $\text{vect}(u)$: $y = \langle x, u\rangle u$. On a alors $z = x - y \in \text{vect}(u)^\perp$.
- On calcule l'image de z : $r(z) = (\cos\theta)z + (\sin\theta)u \wedge z$.
- On a alors $r(x) = y + r(z)$.

Méthode **Déterminer la matrice d'une rotation d'axe et d'angle donnés**

Soit r une rotation d'angle θ orienté par u. On suppose u unitaire. On veut déterminer la matrice M de r dans la base canonique.

Méthode n°1 On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La méthode précédente nous permet de calculer $r(e_1)$, $r(e_2)$ et $r(e_3)$. On peut aussi remarquer que $r(e_3) = r(e_1) \wedge r(e_2)$. Les colonnes de M sont les vecteurs colonnes représentant $r(e_1)$, $r(e_2)$ et $r(e_3)$ dans la base canonique.

Méthode n°2 On détermine v, w tels que (u, v, w) soient une base orthonormée directe : il suffit de choisir v orthogonal à u et de poser $w = u \wedge v$. La matrice de r dans la base (u, v, w) est $\mathrm{R}(\theta)$. Si on note P la matrice de la base (u, v, w) dans la base canonique, alors la matrice recherchée est $\mathrm{PR}(\theta)\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PR}(\theta)\mathrm{P}^{\mathsf{T}}$.

Exercice 4.7 Matrice d'une rotation

Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'axe dirigé par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Méthode **Déterminer l'axe et l'angle de la rotation associée à une matrice de** $\mathrm{SO}(3)$

Soit r une rotation de matrice R dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}$.

Méthode n°1

- On cherche d'abord un vecteur directeur u de l'axe en résolvant $\mathrm{RX} = \mathrm{X}$.
- On détermine un vecteur v non nul et orthogonal à u.
- On détermine le vecteur $r(v)$ grâce à R.
- On a alors $\cos\theta = \dfrac{\langle v, r(v)\rangle}{\|v\|^2}$.
- On détermine θ grâce au signe de $\sin\theta$: on remarque que $[u, v, r(v)] = \|u\|\|v\|^2 \sin\theta$ ou que $v \wedge r(v) = \|v\|^2(\sin\theta)\dfrac{u}{\|u\|}$.

Méthode n°2

- On cherche d'abord un vecteur directeur u de l'axe en résolvant $\mathrm{RX} = \mathrm{X}$.
- R et $\mathrm{R}(\theta)$ sont la matrice de r dans des bases différentes donc $\mathrm{tr}(\mathrm{R}(\theta)) = \mathrm{tr}(\mathrm{R})$ i.e. $1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}(\mathrm{R})$. On en déduit $\cos\theta$.
- On détermine θ grâce au signe de $\sin\theta$. Le signe de $\sin\theta$ est le même que celui de $[u, x, r(x)]$ où x est un vecteur quelconque de E : en pratique, on prend un vecteur de la base canonique.

Exercice 4.8 Matrice de rotation

Soit $\mathrm{A} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $\mathrm{A} \in \mathrm{SO}(3)$.
2. Déterminer l'axe et l'angle de la rotation associée à A.

Exercice 4.9

Soit r une rotation d'un espace euclidien E de dimension 3. On suppose qu'il existe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ non nul tel que $u(x) = -x$. Montrer que r est une rotation d'angle π.

Exercice 4.10 Anti-rotations

Soit E un espace euclidien de dimension 3.

1. Montrer qu'une rotation de E commute avec une réflexion de E si et seulement si l'axe de la première est orthogonal au plan de la seconde.
2. On appelle anti-rotation de E toute composée commutative d'une rotation et d'une réflexion. Montrer que les isométries vectorielles indirectes de E sont les anti-rotations.

5 Endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

5.1 Définition et généralités

Définition 5.1 Endomorphisme auto-adjoint

On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est **auto-adjoint** si $u^* = u$, c'est-à-dire si

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

Notation 5.1

L'ensemble des automorphismes auto-adjoints de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ noté $\mathcal{S}(\mathrm{E})$.

Remarque. La notation $\mathcal{S}(\mathrm{E})$ provient du fait qu'un endomorphisme auto-adjoint est aussi appelé un endomorphisme **symétrique**. Mais cette dernière appellation peut prêter à confusion car un endomorphisme auto-adjoint est rarement une symétrie.

Remarque. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors

$$u \in \mathcal{S}(\mathrm{E}) \iff \forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

Proposition 5.1 Stabilité de l'orthogonal

Soit $u \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $\mathrm{F}^\perp$ est également stable par u.

Proposition 5.2 Interprétation matricielle

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors u est **auto-adjoint** si et seulement si sa matrice dans une **base orthonormée** de E est symétrique.

Proposition 5.3 Projecteurs auto-adjoints

Les projecteurs auto-adjoints d'un espace euclidien sont les projecteurs orthogonaux.

Exercice 5.1

Montrer que les symétries auto-adjointes d'un espace euclidien sont les symétries orthogonales.

Remarque. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien de dimension n et A sa matrice dans une **base orthonormée**. Alors

- u est un **projecteur orthogonal** si et seulement si $A^2 = A$ et $A^\top = A$;
- u est une **symétrie orthogonale** si et seulement si $A^2 = I_n$ et $A^\top = A$.

5.2 Réduction d'un endomorphisme auto-adjoint

Théorème 5.1 Théorème spectral

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) u est un endomorphisme **auto-adjoint** ;

(ii) E est la **somme directe orthogonale des sous-espaces propres** de u ;

(iii) il existe une **base orthonormale** de E formée de **vecteurs propres** de u.

Remarque. Notamment, tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux.

Définition 5.2 Matrices orthogonalement semblables

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On dit que B est **orthogonalement semblable** à A, s'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = P^{-1}AP = P^\top AP$.

Exercice 5.2

Montrer que la relation binaire «être orthogonalement semblable» est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

Corollaire 5.1 Réduction des matrices symétriques

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel $(X, Y) \mapsto X^\top Y$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) A est une matrice **symétrique** ;

(ii) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est la **somme directe orthogonale des sous-espaces propres** de A ;

(iii) il existe une **base orthonormale** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de **vecteurs propres** de A ;

(iv) A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale i.e. il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^\top$.

Remarque. Notamment, toute matrice symétrique **réelle** est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Attention ! Une matrice symétrique complexe n'est pas nécessairement diagonalisable. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. En effet, A est nilpotente ($A^2 = 0$) non nulle.

5.3 Endomorphismes auto-ajoints positifs et définis positifs, matrices symétriques positives et définies positives

Définition 5.3 Endomorphisme auto-adjoint (défini positif)

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

- On dit que u est **positif** si
$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geq 0$$
- On dit que u est **défini positif** si
$$\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ \langle u(x), x\rangle > 0$$
ou, de manière équivalente, si
$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geq 0 \text{ ET } (\langle u(x), x\rangle = 0 \implies x = 0_E)$$

Notation 5.2

On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs d'un espace euclidien E et $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs d'un espace euclidien E.

Exercice 5.3

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\Phi(x, y) \in E^2 \mapsto \langle f(x), y\rangle$ est un produit scalaire sur E si et seulement si $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

Exercice 5.4 Somme d'endomorphismes auto-adjoints positifs

Montrer qu'une somme d'endomorphismes auto-adjoints positifs est un endomorphisme auto-adjoint positif.

Proposition 5.4 Caractérisation spectrale

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors

(i) $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$;

(ii) $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Remarque. On en déduit que $\mathcal{S}^{++}(E) = \mathcal{S}^+(E) \cap GL(E)$.

Exercice 5.5

Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer que pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0 \iff u(x) = 0_E$.

Exercice 5.6

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que $f^* \circ f \in \mathcal{S}^+(\mathrm{E})$. A quelle condition $f^* \circ f$ est-il défini positif ?

Exercice 5.7 Racine carrée d'un endomorphisme auto-adjoint positif

Soit $f \in \mathcal{S}^+(\mathrm{E})$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ tel que $f = g^2$.

Définition 5.4 Matrice symétrique (définie positive)

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- On dit que M est **positive** si
$$\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{AX} \geq 0$$
- On dit que u est **définie positive** si
$$\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{AX} > 0$$
ou, de manière équivalente, si
$$\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{AX} \geq 0 \text{ ET } (\mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{AX} = 0 \implies \mathrm{X} = 0)$$

Notation 5.3

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5.8 Somme de matrices symétriques positives

Montrer qu'une somme de matrices symétriques positives est une matrice symétrique positive.

Exercice 5.9

Montrer que les coefficients diagonaux d'une matrice symétrique positive (resp. définie positive) sont positifs (resp. strictement positifs).

Proposition 5.5 Caractérisation spectrale

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors

(i) $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(\mathrm{M}) \subset \mathbb{R}_+$;

(ii) $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(\mathrm{M}) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Remarque. On en déduit que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5.10

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{AX} = 0 \iff \mathrm{X} = 0$.

Exercice 5.11

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $A^{\mathsf{T}}A \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$. A quelle condition $A^{\mathsf{T}}A$ est-elle définie positive ?

Exercice 5.12 Racine carrée d'une matrice symétrique positive

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$.

Exercice 5.13

Soit $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\det(A) > 0$ et $\operatorname{tr}(A) > 0$.

Exercice 5.14 Décomposition polaire

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A^{\mathsf{T}}A = S^2$.
2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(Q, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = QS$.