Devoir à la maison n°07

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Petites Mines 2002 – Exemples de matrices semblables à leur inverse

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

Partie I –

I.1 Démontrer que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ont même déterminant.

I.2 Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels.
On considère l'application w de $\operatorname{Ker} u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.

I.2.a Montrer que $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Ker} u^i$.

I.2.b En déduire que $\dim(\operatorname{Ker} u^{i+j}) \leq \dim(\operatorname{Ker} u^i) + \dim(\operatorname{Ker} u^j)$.

I.3 Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\operatorname{rg} u = 2$.

I.3.a Montrer que $\dim(\operatorname{Ker} u^2) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question **I.2.b**).

I.3.b Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.

I.3.c Écrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.

I.4 Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\operatorname{rg} u = 1$.

I.4.a Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.

I.4.b Justifier l'existence d'un vecteur c de $\operatorname{Ker} u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E.

I.4.c Écrire alors la matrice U′ de u et la matrice V′ de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie II –

Soit désormais une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1}.

On pose alors $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice P de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{T} = \mathrm{I}_3 + \mathrm{N}$.

II.1 Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.

II.2 Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

II.3 On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

II.4 On suppose dans cette question que $\operatorname{rg} N = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

II.4.a En utilisant la question **I.3**, montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire une matrice semblable à la matrice M.

II.4.b Calculer M^3 et déterminer $\operatorname{rg} M$.

II.4.c Montrer que les matrices M et N sont semblables.

II.4.d Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

II.5 On suppose dans cette question que $\operatorname{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.
Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

II.6 **Exemple** : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

II.6.a Montrer que $\operatorname{Ker}(u - id_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2).

II.6.b Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E, et écrire la matrice de u dans cette base.

II.6.c Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

II.7 Réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?