Devoir à la maison n°20

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – CCP PSI 2020 – Autour de la fonction sinus cardinal

Objectifs

Dans ce problème, on détermine dans la partie I la valeur de la transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal. On utilise ensuite dans la partie II une variante de la formule de Viète pour exprimer la transformée de Laplace de la partie I comme limite d'une suite d'intégrales.

I Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

Pour $x > 0$, on note :

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx}\, \mathrm{d}t \qquad \mathrm{G}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t)\, \mathrm{d}t \qquad \mathrm{H}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t)\, \mathrm{d}t$$

1 Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+, |\sin(t)| \leq t$.

2 Montrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

3 Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{F}(x) = 0$.

4 Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G.

5 Trouver une expression simple pour G et pour H. *On pourra calculer* $\mathrm{H}(x) + i\mathrm{G}(x)$.
En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t)\, \mathrm{d}t$.

6 En déduire une expression simple pour F. Que vaut F(1) ?

II Autour de la formule de Viète

7 Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2^n \sin(t/2^n) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$$

8 Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right).$$

On pourra raisonner par récurrence et utiliser l'identité :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right).$$

9 En déduire que pour tout $t > 0$:

$$\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right).$$

10 Montrer que pour tout $x > 0$:

$$\mathrm{F}(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx}\, \mathrm{d}t.$$

On pourra introduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ f_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx}$$

11 En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}$$

L'objet des trois questions suivantes est de redémontrer le résultat précédent de façon plus élémentaire.

12 Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$$

en écrivant cette quantité à l'aide d'une somme de Riemann.

13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in [\![1, 2^{n-1}]\!]$:

$$\left|\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}\right| \le \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$$

14 En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}\right) = 0$$

et retrouver le résultat de la question **11**.