Devoir surveillé n°4

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale $I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)dx$.
On se propose de démontrer l'existence de trois réels a, b, c tels que :

$$I_n \underset{n\to+\infty}{=} a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. Calculer I_0, I_1.
2. **a.** Étudier la monotonie de la suite (I_n).
   b. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n.
   c. Qu'en déduit-on pour la suite (I_n) ?
3. **a.** Majorer la fonction $g : x \mapsto e^{-2x}$ sur $[0,1]$ et en déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$
   b. Déterminer la limite de la suite (I_n).
4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$
5. En déduire la limite de la suite (nI_n).
6. Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n - 1))$.
7. Donner alors les valeurs de a, b, c. On justifiera sa réponse.

Problème 1 —

Partie I –

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = \frac{\arctan t}{t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.
2. Donner le développement limité de f à l'ordre 1 en 0. En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.
4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} \, du = -\frac{1}{2} t^2 f'(t)$$

   En déduire le sens de variation de f.
5. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2cm). On précisera les éventuelles branches infinies.

Partie II –

Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\phi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt$.

1. Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant \phi(x) \leqslant 1$. On pourra commencer par supposer $x > 0$.
3. Montrer que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\phi'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - \phi(x))$.
   Montrer que ϕ est dérivable en 0 avec $\phi'(0) = 0$. Donner les variations de ϕ.
4. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) \, dt = 0$. En déduire que $\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = 0$.
5. Tracer la courbe représentative de ϕ dans un repère orthonormé (unité : 2cm). On précisera les éventuelles branches infinies.

Partie III –

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \phi(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \frac{t}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{2}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|\phi'(x)| \leqslant \frac{1}{x}(1 - f(x)) = \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} \, dt$$

   On pourra utiliser les questions **II.2** et **II.3**.
   En déduire que $|\phi'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ puis que cette inégalité reste vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que l'équation $\phi(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note α cette solution.
   Montrer que $\alpha \in]0, 1]$.
4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$.
   En déduire que (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Partie IV –

On considère l'équation différentielle $x^2 y' + xy = \arctan(x)$.

1. Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. Montrer que ϕ est l'unique solution de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$.