Devoir à la maison n°18

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

Soit (T_n) la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Partie I – Étude de la suite (T_n)

1. Déterminer les polynômes T_2 et T_3.
2. Déterminer le degré, la parité et le coefficient dominant de T_n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(T_0, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$T_n(\cos x) = \cos nx$$
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les racines de T_n sont exactement les réels $\cos(x_k)$ avec $x_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Partie II – Étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

On associe à tout couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ l'intégrale suivante :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos x)Q(\cos x)\, dx$$

On confondra polynôme et fonction polynomiale associée.

1. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ définit une produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
Dans toute la suite, $\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$.
2. Montrer que la famille $(T_0, \dots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Justifier que T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Partie III – Calcul exact d'une intégrale

On associe à tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ l'intégale et la somme suivantes :

$$I(P) = \int_0^\pi P(\cos x)\,dx \qquad\qquad S_n(P) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} P(\cos x_k)$$

1. **a.** Montrer que $I(T_p) = S_n(T_p)$ pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$.

   b. En déduire que pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $I(P) = S_n(P)$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On note respectivement Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par T_n.

   a. Montrer que $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

   b. En déduire que $I(P) = I(R)$.

   c. En déduire que $I(P) = S_n(P)$.

3. A-t-on toujours $I(P) = S_n(P)$ lorsque $\deg P \geqslant 2n$?

Partie IV – Calcul approché d'une intégrale

A toute fonction f continue sur $[-1, 1]$, on associe l'intégrale et la somme suivantes :

$$I(f) = \int_0^\pi f(\cos x)\,dx \qquad\qquad S_n(f) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\cos x_k)$$

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = I(f)$. On pourra remarquer (après l'avoir justifié) que

$$S_n(f) = \frac{\pi}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n} f\left(\cos\frac{k\pi}{2n}\right) - \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On définit une application f par $f(t) = \ln(a^2 - 2at + 1)$.

   a. Montrer que f est continue sur $[-1, 1]$.

   b. Écrire la décomposition en facteurs irréductibles de $X^{2n} + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ à l'aide des réels $x_1, \dots, x_n$.

   c. En déduire que $S_n(f) = \dfrac{\pi}{n}\ln\left(a^{2n} + 1\right)$.

   d. En déduire la valeur de $I(f)$ suivant les valeurs de a.

   e. Donner un équivalent de $S_n(f) - I(f)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On distinguera deux cas suivant les valeurs de a.