Devoir surveillé n°02

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

On pose $s = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $p = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

1. Montrer que $s = 2p$.
2. En calculant $p\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, déterminer la valeur de p et en déduire celle de s.
3. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 2.

Résoudre le système linéaire $(\mathscr{S}) : \begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On distinguera plusieurs cas suivant les valeurs du paramètre réel a.

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$.
2. En déduire par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{n^{\frac{1}{3}}}$$

Exercice 4.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i}$.

1. Calculer S_0, S_1 et S_2.

2. Calculer les sommes $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} 2^k$.

3. En intervertissant l'ordre de sommation, calculer S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.

1. Soient k, l, n des entiers naturels tels que $l \leqslant k \leqslant n$.

a. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$.

b. En déduire que si $l < n$, $\sum_{k=l}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{l} = 0$.

2. Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k$$

Exercice 6.

On conviendra que si k et n sont deux entiers naturels tels que $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$.

1. Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (p, n) tels que $p \leqslant n$

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

2. Donner des expressions de $\binom{k}{1}$, $\binom{k}{2}$ et $\binom{k}{3}$ *sans factorielles* valables pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que $k^3 = 6\binom{k}{3} + 6\binom{k}{2} + \binom{k}{1}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

4. En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} k^3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ *sous forme factorisée.*