Devoir surveillé n°04 : corrigé

Solution 1.

1. Tout d'abord,
$$\tan(\arctan a - \arctan b) = \frac{\tan(\arctan a) - \tan(\arctan b)}{1 + \tan(\arctan a)\tan(\arctan b)} = \frac{a-b}{1+ab}$$
De plus a et b sont positifs donc $\arctan a$ et $\arctan b$ appartiennent à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi $\arctan a - \arctan b$ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que
$$\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$$

2. C'est une simple application de la question précédente. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$$\arctan(k+1) - \arctan(k-1) = \arctan\left(\frac{(k+1)-(k-1)}{1+(k+1)(k-1)}\right) = \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right)$$

3. La question précédente permet de faire apparaître un télescopage.
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan(k+1) - \arctan(k-1) = \arctan(n+1) + \arctan(n) - \arctan(1) - \arctan(0) = \arctan(n+1) + \arctan(n) - \frac{\pi}{4}$$
Puisque $\lim_{+\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$,
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3\pi}{4}$$

Solution 2.

1. Soit θ un argument de $a+ib$ (il en existe puisque $a+ib \neq 0$). Alors $\cos\theta = \frac{a}{|a+ib|}$ et $\sin\theta = \frac{b}{|a+ib|}$. Ainsi
$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \tan(\arctan\frac{b}{a})$$
puis
$$\theta \equiv \arctan\frac{b}{a}[\pi]$$

2. Il s'agit d'un simple calcul. En utilisant la formule du binôme de Newton
$$\begin{aligned}
(5+i)^4 &= \binom{4}{0}5^4 i^0 + \binom{4}{1}5^3 i + \binom{4}{2}5^2 i^2 + \binom{4}{3}5 i^3 + \binom{4}{4}5^0 i^4 \\
&= 5^4 + 4\cdot 5^3 i - 6\cdot 5^2 - 4\cdot 5 i + 1 \\
&= 625 + 500i - 150 - 20i + 1 \\
&= 476 + 480i \\
&= 2\cdot(1+i)\cdot(239+i)
\end{aligned}$$

3. Puisque $(5+i)^4 = 2\cdot(1+i)\cdot(239+i)$,
$$\arg\left((5+i)^4\right) \equiv \arg(2\cdot(1+i)\cdot(239+i))[2\pi]$$
ou encore
$$4\arg(5+i) \equiv \arg(1+i) + \arg(239+i)[2\pi]$$
A fortiori
$$4\arg(5+i) \equiv \arg(1+i) + \arg(239+i)[\pi]$$

D'après la première question,

$$\arg(5+i) \equiv \arctan\frac{1}{5}[\pi]$$

donc

$$4\arg(5+i) \equiv 4\arctan\frac{1}{5}[4\pi]$$

et a fortiori

$$4\arg(5+i) \equiv 4\arctan\frac{1}{5}[\pi]$$

Toujours d'après la première question,

$$\arg(239+i) \equiv \arctan\frac{1}{239}[\pi]$$

Enfin

$$\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

donc a fortiori

$$\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$$

Finalement

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$$

4. Puisque $0 < \frac{1}{5} < \frac{\sqrt{3}}{3}$, $0 < \arctan\frac{1}{5} < \frac{\pi}{6}$ par stricte croissance de arctan. De même, $0 < \arctan\frac{1}{239} < \frac{\pi}{2}$. Ainsi

$$-\frac{\pi}{2} < 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) < 4\cdot\frac{\pi}{6}$$

A fortiori

$$\frac{\pi}{4} - \pi < 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) < \frac{\pi}{4} + \pi$$

5. Posons $x = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$. D'après la question **3**, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Mais d'après la question **4**, $\frac{\pi}{4} - \pi < x < \frac{\pi}{4} + \pi$ i.e. $-1 < k < 1$. Or k est entier donc $k = 0$ puis $x = \frac{\pi}{4}$.

Solution 3.

1. **a.**

$$\begin{aligned} & 2\operatorname{sh} x + 1 = 0 \\ \iff & \frac{e^x - e^{-x}}{2} + 1 = 0 \\ \iff & e^x - e^{-x} + 1 = 0 \\ \iff & e^{2x} + e^x - 1 = 0 \\ \iff & (e^x)^2 + e^x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $X^2 + X - 1 = 0$ sont $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Puisque $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqslant 0$ et que l'exponentielle est strictement positive, l'unique solution de l'équation initiale est $\alpha = \ln(\sqrt{5}-1)$.

b. En remarquant que $\operatorname{sh}\alpha = -\frac{1}{2}$

$$f(\alpha) = \operatorname{ch}^2\alpha + \operatorname{sh}\alpha = 1 + \operatorname{sh}^2\alpha + \operatorname{sh}\alpha = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

c. Comme ch est dérivable sur $\mathbb{R}$, ch^2 l'est aussi. De plus, sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $f = \operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = \operatorname{ch} x(2\operatorname{sh} x + 1)$$

La fonction sh étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

- $\forall x < \alpha$, $2\operatorname{sh} x + 1 < 0$,

► $\forall x > \alpha, 2\,\text{sh}\,x + 1 > 0$.

Bien évidemment ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de f'		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque. On obtient facilement la limite de f en $+\infty$ puisque $\lim_{+\infty} \text{ch} = \lim_{+\infty} \text{sh} = +\infty$.
Pour déterminer la limite en $-\infty$, on peut remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \text{ch}^2 x \left(1 + \frac{\text{th}\,x}{\text{ch}\,x}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{-\infty} \text{th} = 1$ et $\lim\limits_{-\infty} \text{ch} = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} 1 + \frac{\text{th}}{\text{ch}} = 1$ puis $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. ■

d. Puisque f est décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha + \infty[$, $f(x) \geqslant f(\alpha)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. On n'utilise en aucun cas la continuité de f ni un quelconque théorème des valeurs intermédiaires. ■

Puisque $f(\alpha) = \frac{3}{4} > 0$, on a a fortiori $f > 0$ sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et exp est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent $x \mapsto e^{\text{sh}\,x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Puisque $x \mapsto x + 1$ est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$, g l'est également.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = e^{\text{sh}\,x} \text{ch}\,x - 1$$

b. Comme dans la question **2.a**, $x \mapsto e^{\text{sh}\,x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. ch est également dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g' l'est également.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g''(x) = e^{\text{sh}\,x} \text{ch}^2 x + e^{\text{sh}\,x} \text{sh}\,x = e^{\text{sh}\,x} f(x)$$

c. Puisque $f > 0$ sur $\mathbb{R}$, $g'' > 0$ sur $\mathbb{R}$. g' est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $g'(0) = 0$ donc $g'(x) < 0$ pour $x < 0$ et $g'(x) > 0$ pour $x > 0$. On en déduit que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g(0) = 0$, $g \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

d. Soit $x \in [0, 1[$. D'après la question **2.c**, $g(x) \geqslant 0$ et donc $e^{\text{sh}\,x} \geqslant 1 + x$. Mais on a également $g(-x) \geqslant 0$ i.e. $e^{-\text{sh}\,x} \geqslant 1 - x$ puisque sh est impaire. Or $1 - x > 0$, donc on obtient en passant à l'inverse

$$\frac{1}{1-x} \geqslant \frac{1}{e^{-\text{sh}\,x}} = e^{\text{sh}\,x}$$

Les deux inégalités obtenues nous donnent l'encadrement

$$1 + x \leqslant e^{\text{sh}\,x} \leqslant \frac{1}{1-x}$$

a. Pour tout $k \in [\![n, np]\!]$,

$$0 \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}$$

et a fortiori $\frac{1}{k} \in [0, 1[$. On peut donc utiliser la question **2.d** pour affirmer que pour tout $k \in [\![n, np]\!]$

$$1 + \frac{1}{k} \leqslant \exp\left(\text{sh}\,\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{k}}$$

ou encore

$$\frac{k+1}{k} \leqslant \exp\left(\text{sh}\,\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{k}{k-1}$$

b. Puisque l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$e^{\mathrm{S}_n} = \prod_{k=n}^{np} \exp\left(\operatorname{sh}\frac{1}{k}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. D'après la question **2.b**, pour tout $k \in [\![n, np]\!]$,

$$\frac{k+1}{k} \leqslant e^{\operatorname{sh}\frac{1}{k}} \leqslant \frac{k}{k-1}$$

On peut multiplier membre à membre ces inégalités puisque tous les membres sont positifs de sorte que

$$\prod_{k=n}^{np} \frac{k+1}{k} \leqslant \prod_{k=n}^{np} \exp\left(\operatorname{sh}\frac{1}{k}\right) \leqslant \prod_{k=n}^{np} \frac{k}{k-1}$$

Le membre central n'est autre que e^{S_n} et par télescopage, le membre de gauche est $\frac{np+1}{n}$ tandis que celui de droite est $\frac{np}{n-1}$. On en déduit bien que

$$\frac{np+1}{n} \leqslant e^{\mathrm{S}_n} \leqslant \frac{np}{n-1}$$

c. Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{np+1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{np}{n-1} = p$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} e^{\mathrm{S}_n} = p$. Par continuité de ln, (S_n) converge vers $\ln(p)$.

Solution 4.

1. Puisque ch est paire, f est impaire.

2. L'application $\varphi : x \mapsto \operatorname{th}(x) - \frac{1}{x}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (différence d'une fonction strictement croissante et d'une fonction strictement décroissante). De plus, $\lim_{0^+} \varphi = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \varphi = 1$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, φ s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$. L'équation $\operatorname{th} x = \frac{1}{x}$ admet donc une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Par définition, $\operatorname{th}\alpha = 1/\alpha$. Par ailleurs, $f(1/\alpha) = \frac{\operatorname{ch}\alpha}{\alpha}$. Mais

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha} = 1 - \operatorname{th}^2\alpha = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}$$

Comme $\operatorname{ch}\alpha$ et α sont positifs,

$$\operatorname{ch}\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

Enfin

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

4. Tout d'abord, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch}(1/x) = \operatorname{ch}(0) = 1$ donc

$$\lim_{+\infty} f = +\infty$$

Ensuite, en posant $u = \frac{1}{x}$, $u \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et

$$f(x) = \frac{\operatorname{ch} u}{u} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^u}{u} + \frac{e^{-u}}{u}\right)$$

Par croissances comparées, $\lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$ et par opérations, $\lim_{u\to+\infty} \frac{e^{-u}}{u} = 0$. Finalement, $\lim_{u\to+\infty} \frac{\operatorname{ch} u}{u} = +\infty$ et donc

$$\lim_{0^+} f = +\infty$$

5. f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (essentiellement car ch l'est sur $\mathbb{R}$) et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or on a vu que φ était strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\varphi(\alpha) = 0$ donc $\varphi(1/x) > 0$ pour $x < 1/\alpha$ et $\varphi(1/x) < 0$ pour $x > 1/\alpha$. Comme ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit le signe de f' sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc le tableau de variations suivant.

x	0		$1/\alpha$		$+\infty$
Signe de f'	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$	$\nearrow$	$+\infty$

6. Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(x)}{x} = \operatorname{ch}(1/x)$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Par ailleurs,

$$f(x) - x = x\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right)$$

Or, comme ch est dérivable en 0,

$$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{ch} u - 1}{u} = \operatorname{ch}'(0) = \operatorname{sh}(0) = 0$$

puis, en posant $u = 1/x$,

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) = 0$$

Ainsi $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$ de sorte que la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = x$.

7. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) - x = x\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right)$$

Or $\operatorname{ch} u > 1$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$ donc $f(x) - x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. La courbe de f est donc au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

8. On utilise le fait que f est impaire : sa courbe est donc symétrique par rapport à l'origine.