Devoir surveillé n° 1 : corrigé

Solution 1.

On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{S}) &\iff \begin{cases} x+y+az=1 & \\ (a-1)y+(1-a)z=0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (1-a)y+(1-a^2)z=1-a & L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+y+az=1 & \\ (a-1)y+(1-a)z=0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (2-a-a^2)z=1-a & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+y+az=1 \\ (a-1)y+(1-a)z=0 \\ (2+a)(1-a)z=1-a \end{cases}
\end{aligned}
$$

- Si $a=1$, alors
$$(\mathcal{S}) \iff x+y+z=1$$
Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\{(1-y-z,y,z),(y,z)\in\mathbb{R}^2\}$.
- Si $a=-2$, alors
$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} x+y-2z=1 \\ -3y+3z=0 \\ 0=4 \end{cases}$$
L'ensemble des solutions est vide.
- Si $a\neq-2$ et $a\neq1$, alors
$$
\begin{aligned}
(\mathcal{S}) &\iff \begin{cases} x+y+az=1 \\ y-z=0 \\ (2+a)z=1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=\dfrac{1}{2+a} \\ y=\dfrac{1}{2+a} \\ z=\dfrac{1}{2+a} \end{cases}
\end{aligned}
$$
Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\left\{\left(\frac{1}{2+a},\frac{1}{2+a},\frac{1}{2+a}\right)\right\}$.

Solution 2.

1. Clairement, $P_n=2^n\prod_{k=1}^n k=2^n n!$.
2. P_n est le produit des entiers pairs compris entre 1 et $2n$ tandis que Q_n est le produit des entiers impairs compris entre 1 et $2n$. Il en résulte que P_nQ_n est le produit de tous les entiers compris entre 1 et $2n$. Ainsi $P_nQ_n=(2n)!$.
3. On en déduit que $Q_n=\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

Solution 3.

Il faut tout d'abord intervertir l'ordre de sommation.

$$S_n=\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i}=\sum_{j=0}^n\sum_{i=0}^j\binom{j}{i}$$

Soit $j \in [\![0, n]\!]$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} 1^i 1^{j-i} = (1+1)^j = 2^j$$

Ainsi

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} 2^j = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1$$

Solution 4.

1. On trouve

$a_0 = 1$	$a_1 = 1$	$a_2 = 2$	$a_3 = 5$	$a_4 = 14$
$S_0 = 1$	$S_1 = 2$	$S_2 = 5$	$S_3 = 14$	$S_4 = 42$

On remarque que $S_n = a_{n+1}$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue le changement d'indice $l = n - k$ de sorte que

$$T_n = \sum_{l=0}^{n} (n-l) a_{n-l} a_l = \sum_{k=0}^{n} (n-k) a_k a_{n-k}$$

Ainsi

$$2T_n = \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} (n-k) a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (k+n-k) a_k a_n - k = nS_n$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(n+2)a_{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n!^2} = \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!^2} = 2(2n+1)a_n$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
S_{n+1} + T_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k a_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} k a_k a_{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (k+1) a_k a_{n+1-k} \\
&= a_0 a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1) a_k a_{n+1-k} \\
&= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (k+2) a_{k+1} a_{a_n - k}
\end{aligned}$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+2)a_{k+1} = 2(2k+1)a_k$ d'après la question **3** donc

$$\begin{aligned}
S_{n+1} + T_{n+1} &= a_{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n} (2k+1) a_k a_{n-k} \\
&= a_{n+1} + 4\sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k} + 2\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \\
&= a_{n+1} + 4T_n + 2S_n
\end{aligned}$$

Or on a vu à la question **2** que $2T_n = nS_n$ donc

$$S_{n+1} + T_{n+1} = a_{n+1} + 2nS_n + 2S_n = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

D'après la question **2**, $2T_{n+1} = (n+1)S_{n+1}$ donc

$$S_{n+1} + T_{n+1} = S_{n+1} + \frac{n+1}{2}S_{n+1} = \frac{n+3}{2}S_{n+1}$$

On en déduit que

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

5. D'après la question **1**, $S_0 = a_1 = 1$.
Supposons maintenant que $S_n = a_{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$. Or on a supposé que $S_n = a_{n+1}$ donc

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} = (2n+3)a_{n+1}$$

Or d'après la question **3**, $(n+3)a_{n+2} = 2(2n+3)a_{n+1}$ donc

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = \frac{n+3}{2}a_{n+2}$$

puis $S_{n+1} = a_{n+2}$ puisque $\frac{n+3}{2} \neq 0$.
Par récurrence, $S_n = a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Tout d'abord $a_0 = 1$ est un entier naturel. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tels que $a_0, a_1, \dots, a_n$ soient des entiers naturels. Alors S_n est également un entier naturel en tant que somme de produits de ces derniers entiers naturels. Puisque $a_{n+1} = S_n$, $an+1$ est également un entier naturel. Par récurrence forte, a_n est donc un entier naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 5.

1. **a.**

$$\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(y_1^2+y_2^2\right) - (x_1y_1+x_2y_2)^2 = x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1y_1x_2y_2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geqslant 0$$

On a donc bien l'inégalité demandée.

b. On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2} \leqslant \sqrt{x_1^2+x_2^2} + \sqrt{y_1^2+y_2^2} \\
\iff\quad & (x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2 \leqslant \left(\sqrt{x_1^2+x_2^2} + \sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^2 \\
& \text{car les membres de l'inégalité précédente sont positifs} \\
\iff\quad & x_1y_1 + x_2y_2 \leqslant \sqrt{(x_1^2+x_2)^2(y_1^2+y_2^2)}
\end{aligned}$$

Or cette dernière inégalité est vraie. En effet d'après la question précédente

$$\sqrt{(x_1^2+x_2)^2(y_1^2+y_2^2)} \geqslant \sqrt{(x_1y_1+x_2y_2)^2} = |x_1y_1+x_2y_2| \geqslant x_1y_1+x_2y_2$$

On en déduit l'inégalité demandée.

2. **a.** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^{n}(\lambda^2x_k^2 + 2\lambda x_ky_k + y_k^2 = \lambda^2\sum_{k=1}^{n}x_k^2 + 2\lambda\sum_{k=1}^{n}x_ky_k + \sum_{k=1}^{n}y_k^2 = A\lambda^2 + 2B\lambda + C$$

avec $A = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$, $B = \sum_{k=1}^{n} x_ky_k$ et $C = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$.

b. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) \geqslant 0$ comme somme de termes positifs. Le trinôme P étant de signe constant, son discriminant est négatif. Ainsi $4B^2 - 4AC \leqslant 0$ i.e. $B^2 \leqslant AC$, ce qui est l'inégalité demandée.

c. Si $A = 0$, alors $x_k^2 = 0$ i.e. $x_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ puisqu'une somme de termes positifs n'est nulle que si chacun de ses termes est nul. Il s'ensuit qu'on a également $B = 0$. Finalement, on a encore $B^2 \leqslant AC$ puisque les deux membres sont nuls dans ce cas.

d. On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}y_k^2}\\
\iff\quad & \sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}y_k^2}\right)^2\\
& \text{car les membres de l'inégalité précédente sont positifs}\\
\iff\quad & \sum_{k=1}^{n}x_k^2+2x_ky_k+y_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}x_k^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}y_k^2}+\sum_{k=1}^{n}y_k^2\\
\iff\quad & \sum_{k=1}^{n}x_ky_k \leqslant \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)}
\end{aligned}$$

Or cette dernière inégalité est vraie. En effet d'après l'inégalité (CS)

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)} \geqslant \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^2} = \left|\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right| \geqslant \sum_{k=1}^{n}x_ky_k$$

On en déduit l'inégalité demandée.

e. On choisit $x_k=\sqrt{a_k}$ et $y_k=\frac{1}{\sqrt{a_k}}$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ dans l'inégalité (CS). On a donc

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n}1\right)^2 = n^2$$