Topologie

Ouverts et fermés

Solution 1

Motrons que E est fermé si et seulement si (u_n) n'est pas majorée.

- Supposons (u_n) non majorée et posons $\mathrm{U} =]-\infty, u_0[\cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty}]u_n, u_{n+1}[\right)$. Montrons que $\mathbb{R} \setminus \mathrm{E} = \mathrm{U}$. Soit $x \in \mathrm{U}$. Si $x \in]-\infty, u_0[$, alors $x < u_0$ et $x \notin \mathrm{E}$ car (u_n) est croissante. Sinon, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in]u_n, u_{n+1}[$. A nouveau, $x \notin \mathrm{E}$ par croissance de (u_n). Soit maintenant $x \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{E}$. Comme (u_n) est strictement croissante, x est compris entre deux termes consécutifs de la suite donc $x \in \mathrm{U}$. Comme U est une réunion d'intervalles ouverts, U est ouvert. Son complémentaire E est fermé.
- Supposons (u_n) majorée. Par conséquent, (u_n) converge vers une limite l. On ne peut avoir $l \in \mathrm{E}$. Or (u_n) est une suite convergente d'éléments de E mais sa limite n'est pas dans E. E ne peut donc pas être fermé.

Solution 2

L'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathrm{E})^2 & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathrm{E}) \\ (f, g) & \longmapsto & f \circ g \end{array} \right.$ est continue. L'application $\psi : \mathcal{L}(\mathrm{E}) \to \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$ est également continue. Enfin, $\mathrm{Id}_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ est clairement linéaire. Ainsi $\varphi \circ \psi - \mathrm{Id}_{\mathcal{L}}(\mathrm{E})$. On conclut en remarquant que l'ensemble des projecteurs de E est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $\varphi \circ \psi - \mathrm{Id}_{\mathcal{L}}(\mathrm{E})$.

Solution 3

1. La forme linéaire $\phi : f \in \mathrm{E} \mapsto f(0)$ est continue puisque pour tout $f \in \mathrm{E}$, $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$. De même, la forme linéaire $\psi : f \in \mathrm{E} \mapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est également continue puisque pour tout $f \in \mathrm{E}$, $\left|\int_0^1 f(t)\, ft\right| \leq \|f\|_\infty$.
On en déduit que $\phi^{-1}(\{0\})$ et $\psi^{-1}([1, +\infty[)$ sont fermés en tant qu'images réciproques de fermés par des applications continues. Enfin, A est fermé en tant qu'intersection de ces deux fermés.

2. Soit $f \in \mathrm{A}$. Supposons $\|f\|_\infty \leq 1$. Alors $|f(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [0,1]$. En particulier, $f \leq 1$ sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leq 1$. Mais puisque $f \in \mathrm{A}$, $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geq 1$. Finalement $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ ou encore $\int_0^1 (1 - f(t))\,\mathrm{d}t = 0$. L'application $1 - f$ est positive, continue et d'intérgrale nulle sur $[0,1]$: elle est donc nulle i.e. f est constante égale à 1, ce qui contredit le fait que $f(0) = 0$.
On a donc montré par l'absurde que $\|f\|_\infty > 1$.

3. On vérifie que f_n est bien continue en α donc continue sur $[0,1]$. On a bien également $f_n(0) = 0$. Enfin, par la relation de Chasles,
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\alpha \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{1}{n}\right) t\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^1 \left(1 + \frac{1}{n}\right)\mathrm{d}t = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
Il suffit donc de choisir $\alpha = \frac{2}{n+1}$ pour avoir $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ de sorte que $f_n \in \mathrm{A}$. On vérifie également que $\frac{2}{n+1} \in]0,1]$.

4. Puisque pour tout $f \in \mathrm{A}$, $\|f\|_\infty > 1$, $d(0, \mathrm{A}) \geq 1$. De plus, en définissant f_n comme dans la question précédente
$$d(0, \mathrm{A}) \leq \|f_n\|_\infty = 1 + \frac{1}{n}$$
Par passage à la limite, $d(0, \mathrm{A}) \leq 1$. Finalement, $d(0, \mathrm{A}) = 1$.

Solution 4

1. Posons $U_n = \{u_k,\ k \geq n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\ell \in V$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors ℓ est également une valeur d'adhérence de la suite $(u_k)_{k\geq n}$ et on en déduit que $\ell \in \overline{U_n}$. Ainsi $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k,\ k \geq n\}}$. D'où l'inclusion $V \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k,\ k \geq n\}}$.
   Réciproquement, soit $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k,\ k \geq n\}}$. Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $\ell \in \overline{U_n}$. Ainsi $B(\ell, \varepsilon) \cap U_n \neq \emptyset$. Il existe donc $p \geq n$ tel que $\|u_p - \ell\| < \varepsilon$. Ceci prouve que $\ell \in V$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{U_n}$ est fermé. Ainsi V est fermé en tant qu'intersection de fermés.

Solution 5

$\emptyset$ et E sont clairement des parties ouvertes et fermées de E. Soit A une partie ouverte et fermée E. Supposons A non vide et fixons alors $a \in A$. Soit alors $b \in B$. Considérons l'application

$$\varphi :\ t \in \mathbb{R} \mapsto (1-t)a + tb$$

On vérifie aisément que l'application φ est lipschitzienne :

$$\forall (s,t) \in [0,1]^2,\ \|\varphi(s) - \varphi(t)\| = |s-t|\|a-b\|$$

L'application φ est donc continue. L'ensemble

$$S = \{t \in [0,1],\ \varphi(t) \in A\}$$

est une partie de $\mathbb{R}$ non vide ($0 \in S$) et majorée. Elle possède donc une borne supérieure $m \leq 1$. De plus, $\varphi^{-1}(A)$ est à la fois ouvert et fermé car φ est continue. Ainsi $S = \varphi^{-1}(A) \cap [0,1]$ est fermé donc $m = \sup S \in S$. Comme $\varphi^{-1}(A)$ est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]m-\varepsilon, m+\varepsilon[\subset \varphi^{-1}(A)$. Si $m < 1$, alors $t = m + \frac{1}{2}\min\{\varepsilon, 1-m\} \in \varphi^{-1}(A) \cap [0,1] = S$ et $t > m$, ce qui contredit le fait que m est la borne supérieure de S. Ainsi $m = 1 \in S$ donc $b = \varphi(1) \in A$. On a donc prouvé que $E = A$.

Solution 6

Posons $\varphi :\ u \in E \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. φ est clairement linéaire et

$$\forall u \in E,\ |\varphi(u)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = \|u\|$$

Ainsi φ est continue par caractérisation fondamentale de la continuité des applications linéaires. Par ailleurs $F = \varphi^{-1}(\{1\})$ donc F est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Pour montrer que F n'est pas ouvert, on peut montrer que $E \setminus F$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit la suite u_k en posant $u_n^k = \left(1\frac{1}{k+1}\right)\delta_{0,n}$. Alors $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $E \setminus F$. En posant $a_n = \delta_{0,n}$, $\|u^k - a\| = \frac{1}{k+1}$ donc $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers a qui est un élément de F. Par caractérisation séquentielle, $E \setminus F$ n'est pas fermé donc F n'est pas ouvert.

Remarque. On peut aussi utiliser le résultat classique mais hors programme stipulant que si A est une partie ouverte et fermée d'un espace vectoriel E, alors $A = \emptyset$ ou $A = E$. Rappelons une démonstration de ce résultat. Soit donc A une telle partie et supposons $A \neq \emptyset$. Donnons-nous alors $a \in A$ et $x \in E$. Posons $\varphi :\ t \in [0,1] \mapsto (1-t)a + tx$. Comme φ est continue, $\varphi^{-1}(A)$ est une partie ouverte et fermée de $[0,1]$. De plus, $\varphi^{-1}(A)$ est non vide puisqu'elle contient 0. Elle admet donc une borne supérieure m. Si on suppose $m \neq 1$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $m + \varepsilon \in \varphi^{-1}(A)$ car $\varphi^{-1}(A)$ est ouverte. Ceci contredit alors le fait que $m = \sup \varphi^{-1}(A)$. Ainsi $m = 1$ et comme $\varphi^{-1}(A)$ est fermée, elle contient sa borne supérieure. Ainsi $1 \in \varphi^{-1}(A)$ i.e. $x \in A$.

Enfin, F est un sous-espace affine de E. En effet, en notant a la suite telle que $a_n = \delta_{n,0}$, alors $F = a + \operatorname{Ker}\varphi$. Mais $\operatorname{Ker}\varphi$ n'est pas nul (il contient par exemple la suite dont les deux premiers termes valent 1 et -1 et les autres sont nuls). Par conséquent, F un sous-espace affine non réduit à un point donc non borné : en notant u un élément non nul de $\operatorname{Ker}\varphi$, $a + \lambda u \in E$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|a + \lambda u\| \geq |\lambda|\|u\| - \|a\|$ donc $\|a + \lambda u\| \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Solution 7

---

1. L'application $\varphi :\ f \in E \mapsto f(1)$ est une forme linéaire. De plus, pour tout $f \in E$, $|\varphi(f)| = |f(1)| \leq \|f\|_\infty$ donc φ est continue lorsque l'on munit E de la norme $\|\|_\infty$. Ainsi 0 est ouvert pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ comme image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ par l'application continue φ.

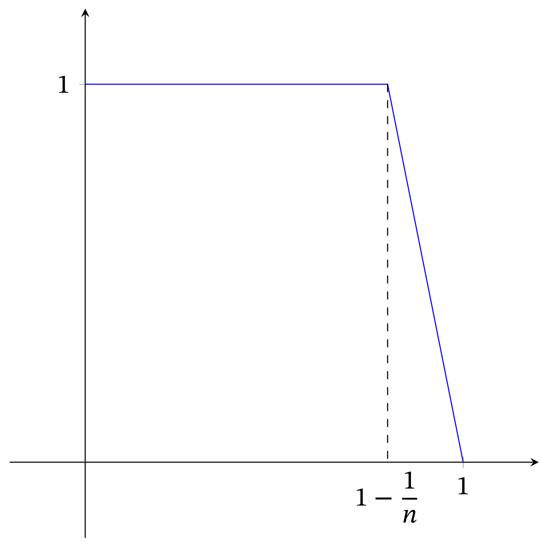
2. L'application $\psi : f \in \mathrm{E} \mapsto \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$ est une forme linéaire. De plus, pour tout $f \in \mathrm{E}$,

$$|\psi(f)| = \left|\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 |f(t)|\, \mathrm{d}t = \|f\|_1$$

Ainsi ψ est à nouveau continue si l'on unit E de la norme $\|\cdot\|_1$. Par conséquent, F est fermé pour la norme $\|\cdot\|_1$ comme image réciproque du fermé $\mathbb{R}_-$ par l'application continue ψ.

3. Pour montrer que 0 n'est pas ouvert pour la norme $\|\cdot\|_1$, on va montrer que $\mathrm{E} \setminus \mathrm{O}$ n'est pas fermé pour cette même norme. Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 - \dfrac{1}{n} \\ n - nx & \text{sinon} \end{cases}$$



On vérifie aisément que $f_n \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{O}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, en notant f la fonction constante égale à 1, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\|f - f_n\| = \frac{1}{2n}$$

Donc (f_n) converge vers f pour la norme $\|\cdot\|_1$ mais $f \in 0$. D'après la caractérisation séquentielle des fermés, $\mathrm{E} \setminus \mathrm{O}$ n'est pas fermé pour la norme $\|\cdot\|_1$ et O n'est donc pas ouvert pour cette norme.

Solution 8

1. Clairement, $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ et F est stable par combinaison linéaire donc F est un sous-espace vectoriel de E.

2. Pour $p \in \mathbb{N}$, définissons la suite u^p par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^p = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{si } n \leq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Clairement, $u^p \in \mathrm{F}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notons u la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{n+1}$$

Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\|u - u_p\|_\infty = \frac{1}{p+2}$$

donc $(u^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers u mais $u \notin \mathrm{F}$. Par caractérisation séquentielle, F n'est pas fermé dans E.

Soient $u \in \mathrm{F}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Définissons v en posant $v_n = u_n + \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $v \ni n\mathrm{F}$ mais $v \in \mathrm{B}(u, \varepsilon)$ donc F n'est pas ouvert dans E.

Solution 9

1. Soit $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A convergeant vers $u \in$ E. Remarquons alors que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n^p = u_n$. Or pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $u_{n+1}^p \geq u_n$ donc, en faisant tendre p vers l'infini, $u_{n+1} \geq u_n$. Ainsi $u \in$ A et donc A est fermé par caractérisation séquentielle.

2. Soit $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B convergeant vers $u \in$ E. Comme $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers u,
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\lim_{p\to+\infty} u_n^p = \lim_{p\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} u_n^p = \lim_{p\to+\infty} 0 = 0$$
d'après le théorème de la double limite (adapté aux suites). Ainsi $u \in$ B et B est fermé par caractérisation séquentielle.

3. Soit $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C convergeant vers $u \in$ E. Notons ℓ_p la limite de u^p. Comme $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers u, la suite $(\ell_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et u converge vers $\lim_{p\to+\infty} \ell_p$ d'après le théorème de la double limite. En particulier, $u \in$ C et C est fermé par caractérisation séquentielle.

4. Soit $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D convergeant vers $u \in$ E. Soit N $\in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme 0 est valeur d'adhérence de u^p, il existe un entier $n \geq$ N tel que $|u_n^p| < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors
$$|u_n| \leq |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \leq \|u - u_p\|_\infty + |u_n^p| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
donc 0 est valeur d'adhérence de u. Ainsi $u \in$ D et D est fermé par caractérisation séquentielle.

5. Définissons pour $p \in \mathbb{N}$ la suite u^p par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \mid n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
$\mathrm{S}^p = \sum_{k=0}^{p} \frac{u^p}{2^p}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite S^p est périodique comme combinaison linéaire de suites périodiques (facile). La série $\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{u^p}{2^p}$ converge normalement et donc uniformément. Par conséquent, $(\mathrm{S}^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une suite S. Par ailleurs,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{u_n^p}{2^p}$$
On montre que $\mathrm{S}_1 = 0$ et que $\mathrm{S}_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Ainsi S n'est pas périodique. Par caractérisation séquentielle, E n'est donc pas fermé.

Solution 10

1. A est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ par l'application continue $(x,y) \mapsto e^{xy} - (x+y)^2$ donc A est ouvert dans $\mathbb{R}^2$.

2. B est l'image réciproque du fermé $\mathbb{R}_-$ par l'application continue $(x,y) \mapsto \ln(1+x^2+y^2) - x - y$ donc B est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

3. C est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $(x,y) \mapsto \sin(x+y) - \sqrt{x^2+y^2}$ donc C est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Solution 11

Première méthode.
Soit (f_n) une suite d'éléments de F convergeant vers $f \in$ E. Il s'agit de prouver que $f \in$ F. Comme (f_n) converge vers f pour la norme infinie, elle converge uniformément vers f. On en déduit que (f_n) converge simplement vers f. Si on fixe $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in$ F donc $f_n(x) \geq 0$. Par passage à la limite, $f(x) \geq 0$. Ceci étant valide pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \in$ F et donc F est fermé.
Deuxième méthode.
En posant $\varphi_x : f \in \mathrm{E} \mapsto f(x)$, on remarque que
$$\mathrm{F} = \bigcap_{x\in\mathbb{R}} \varphi_x^{-1}(\mathbb{R}_+)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. φ_x est une forme linéaire et

$$\forall f \in \mathrm{F},\ |\varphi_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_\infty$$

donc φ_x est continue par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires. Ainsi $\varphi_x^{-1}(\mathbb{R}_+)$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
Finalement, $\mathrm{F} = \bigcap_{x\in\mathbb{R}} \varphi_x^{-1}(\mathbb{R}_+)$ est fermé en tant qu'intersection de fermés.

Adhérence et intérieur

Solution 12

Soit M une matrice trigonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe donc une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible P telle que $\mathrm{M} = \mathrm{PTP}^{-1}$. Notons D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $1, 2, \dots, n$. Par continuité de l'application $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{PXP}^{-1}$, la suite de terme général $\mathrm{P}(\mathrm{T}+\frac{1}{p}\mathrm{D})\mathrm{P}^{-1}$ converge vers $\mathrm{PTP}^{-1} = \mathrm{M}$. De plus, pour p suffisamment grand, les coefficients diagonaux de $\mathrm{T}+\frac{1}{p}\mathrm{D}$ sont deux à deux distincts, ce qui prouve que $\mathrm{P}(\mathrm{T}+\frac{1}{p}\mathrm{D})\mathrm{P}^{-1}$ est diagonalisable. On a ainsi construit une suite de matrices diagonalisables convergeant vers M. Ceci prouve que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables contient l'ensemble des matrices trigonalisables.
Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, c'est fini puisque toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable. Supposons maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit (M_p) une suite convergente de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons M sa limite. Notons également χ_p le polynôme caractéristique de M_p et χ le polynôme caractéristique de M. Montrons le lemme suggéré dans l'énoncé. Soit donc $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ scindé sur $\mathbb{R}$, unitaire et de degré n. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses racines comptées avec multiplicités. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|\mathrm{P}(z)| = \prod_{k=1}^{n} |z-\alpha_k| \geq \prod_{k=1}^{n} |\operatorname{Im}(z-\alpha_k)| = |\operatorname{Im}(z)|^n$$

Puisque les matrices M_p sont diagonalisables, leur polynômes caractéristiques χ_p sont scindés sur $\mathbb{R}$, unitaires et de degré n. Par conséquent, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $|\chi_p(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$. Soit alors z une racine de χ (éventuellement complexe). Remarquons que $\lim_{p\to+\infty} \chi_p(z) = \chi(z)$ puisque les coefficients d'un polynôme caractéristique sont des fonctions polynomiales et donc continues des coefficients de la matrice. On a donc par passage à la limite, $0 = |\chi(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|$. Ainsi $\operatorname{Im}(z) = 0$ et z est réel. Les racines de χ sont toutes réelles, ce qui prouve que χ est scindé sur $\mathbb{R}$ et donc que M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Finalement, l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inclus dans l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution 13

Soient $(x, y) \in \overline{\mathrm{A}}^2$ et $t \in [0,1]$. Montrons que $z = (1-t)x + ty \in \overline{\mathrm{A}}$. Pour cela, donnons-nous $r > 0$ et montrons que $\mathrm{B}(z, r) \cap \mathrm{A} \neq \varnothing$. Puisque $(x, y) \in \overline{\mathrm{A}}^2$, $\mathrm{B}(x, r) \cap \mathrm{A} \neq \varnothing$ et $\mathrm{B}(y, r) \cap \mathrm{A} \neq \varnothing$. Il existe donc $u \in \mathrm{B}(x, r) \cap \mathrm{A}$ et $v \in \mathrm{B}(y, r) \cap \mathrm{A}$. Posons $w = (1-t)u + tv$. Par convexité de A, $w \in \mathrm{A}$. De plus,

$$\|w - z\| = \|(1-t)(u-x) + t(v-y)\| \leq \|(1-t)u\| + \|tv\| = (1-t)\|u-x\| + t\|v-y\|$$

Puisque $u \in \mathrm{B}(x, r)$ et $v \in \mathrm{B}(y, r)$, $\|u-x\| < r$ et $\|v-y\| < r$. On en déduit que $\|w-z\| < r$ de sorte que $w \in \mathrm{B}(z, r) \cap \mathrm{A}$. Ainsi $w \in \overline{\mathrm{A}}$. Ceci prouve que $\overline{\mathrm{A}}$ est convexe.
Soient $(x, y)\mathring{\mathrm{A}}^2$ et $t \in [0,1]$. Montrons que $z = (1-t)x + ty \in \mathring{\mathrm{A}}$. Puisque $x \in \mathring{\mathrm{A}}$ et $y\mathring{\mathrm{A}}$, il existe $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que $\mathrm{B}(x, r_1) \subset \mathrm{A}$ et $\mathrm{B}(x, r_2) \subset \mathrm{A}$. Posons alors $r = \min(r_1, r_2)$ et montrons que $\mathrm{B}(z, r) \in \mathrm{A}$. Soit donc $w \in \mathrm{B}(z, r)$. On a donc $\|w-z\| < r$. Posons $u = x + w - z$ et $v = y + w - z$. Alors $\|u-x\| = \|w-z\| < r \leq r_1$ et $\|v-y\| = \|w-z\| < r \leq r_2$ donc $u \in \mathrm{B}(x, r_1) \subset \mathrm{A}$ et $v \in \mathrm{B}(y, r_2) \subset \mathrm{A}$. De plus $(1-t)u + tv = (1-t)x + ty + w - z = w$ donc $w \in \mathrm{A}$ par convexité de A. Ceci prouve que $\mathrm{B}(w, r) \subset \mathrm{A}$ puis que $\mathring{\mathrm{A}}$ est convexe.

Solution 14

Dans la suite, on notera J_r la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients «diagonaux» valent 1 (elle n'est évidemment définie que si $0 \leq r \leq \min(n, p)$). Cette matrice est clairement de rang r.

On notera également N_r le nombre de matrices carrées de taille r extraites que l'on peut extraire d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et Φ_r l'application qui à une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ associe le N_r-uplet des déterminants de ces N_r matrices extraites.

On rappelle enfin que le rang d'une matrice est la taille maximale d'une matrice carré inversible extraite de cette matrice.

Etude de A_r

- $\mathrm{A}_0 = \{0\}$ donc A_0 est fermé mais pas ouvert.

- Si $r > \min(n, p)$, $A_r = \varnothing$ donc A_r est ouvert et fermé.
- Si $1 \leq r \leq \min(n, p)$, la suite $(J_r/k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans A_r et sa limite – la matrice nulle – n'est pas dans A_r. Ainsi A_r n'est pas fermé.
- Si $r < \min(n, p)$, la suite $(J_r + \frac{1}{k}E_{r+1,r+1})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans le complémentaire de A_r et sa limite J_r appartient à A_r. Le complémentaire de A_r n'est donc pas fermé, ce qui signifie que A_r n'est pas ouvert.
- Si $r = \min(n, p)$, A_r est l'image réciproque par l'application continue Φ_r de l'ouvert $\mathbb{R}^{N_r} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. A_r est donc un ouvert.

Etude de B_r

- Si $r \geq \min(n, p)$, alors $B_r = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ donc B_r est ouvert et fermé.
- Si $r < \min(n, p)$, B_r n'est pas ouvert en exploitant le même argument que pour A_r.
- Si $r < \min(n, p)$, B_r est le complémentaire de C_{r+1} qui est ouvert donc B_r est fermé.

Etude de C_r

- $C_0 = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ donc C_0 est fermé et ouvert.
- Si $r > \min(n, p)$, alors $C_r = \varnothing$ donc C_r est ouvert et fermé.
- Si $r \leq \min(n, p)$, C_r est l'image réciproque par l'application continue Φ_r de l'ouvert $\mathbb{R}^{N_r} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. C_r est donc un ouvert.
- Si $1 \leq r \leq \min(n, p)$, C_r est le complémentaire de B_{r-1} qui n'est pas ouvert donc donc C_r n'est pas fermé.

Solution 15

---

1. Soit $P \in A$. Comme P est scindé à racines simples, P s'annule n fois sur $\mathbb{R}$ en changeant de signes. Il existe donc des réels $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{n+1}$ tels que $P(\beta_i)P(\beta_{i+1}) < 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. L'application $\Phi : Q \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (Q(\beta_1), \dots, Q(\beta_{n+1}))$ est continue car elle est linéaire et que $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie. Munissons $\mathbb{R}_{n+1}$ de la norme uniforme et notons $\varepsilon = \min_{1\leq i\leq n+1} |P(\beta_i)|$ ainsi que B la boule ouverte de centre $(P(\beta_1), \dots, P(\beta_{n+1}))$. Alors $V = \Phi^{-1}(B)$ est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$ comme image réciproque d'un ouvert par une application continue. De plus, si $Q \in A$, alors, $Q(\beta_i)$ est du même signe que $P(\beta_i)$ par définition de ε. Par conséquent, on a également $Q(\beta_i)Q(\beta_{i+1}) < 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que Q s'annule au moins n fois. Mais comme Q est de degré au plus n, il est finalement de degré exactement n et scindé à racines simples. Autrement dit, V est un ouvert contenant P et inclus dans A, ce qui prouve que A est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On va montrer que l'adhérence de A est la réunion B de l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ constants ou scindés sur $\mathbb{R}$. Notons C l'ensemble des polynômes de B de degré n. Soit $P = a\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i) \in C$. Posons $\beta_{i,p} = \alpha_i + \frac{i}{p}$ et $Q_p = a\prod_{i=1}^{n}(X - \beta_{i,p})$. Alors (Q_p) est à valeurs dans A à partir d'un certain rang. De plus, $\lim_{p\to+\infty} \beta_{i,p} = \alpha_i$ et comme les coefficients d'un polynôme sont des fonctions polynomiales donc continues de ses racines et de son coefficient, (Q_p) converge vers P. Ainsi $P \in \overline{A}$ puis $C \subset \overline{A}$.
   La suite $\left(\frac{1}{p}X^n\right)$ est une suite d'éléments de C de limite nulle. D'après ce qui précède, c'est également suite d'éléments de $\overline{A}$. Comme $\overline{A}$ est fermée, $0 \in \overline{A}$.
   Soit $P \in B$ non nul. Posons $r = \deg P$ et $Q_p = \left(\frac{X}{p} + 1\right)^{n-r} P$. La suite (Q_p) est une suite d'éléments de C et donc de $\overline{A}$, convergeant vers P. Ainsi $P \in \overline{A}$.
   Finalement, on a montré que $B \subset \overline{A}$.

   Il est clair que $A \subset B$ donc $\overline{A} \subset \overline{B}$. Il suffit donc de montrer que B est fermé pour conclure que $\overline{A} = B$. Pour cela, on va montrer que $\mathbb{R}_n[X] \setminus B$ est ouvert. Soit donc $P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus B$. Alors P admet une racine complexe non réelle z.

Solution 16

---

1. Supposons que F est ouvert. Comme $0_E \in F$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(0_E, r) \subset F$. Soit alors $x \in E$. Si $x = 0_E$, alors $x \in F$. Sinon $\frac{rx}{\|2x\|} \in B(0_E, r) \subset F$. Ainsi $x = \frac{2}{r} \cdot \frac{rx}{\|2x\|} \in F$. Ainsi $F = E$.

2. **Première méthode.** Supposons que $\mathring{F} \neq \emptyset$. Il existe donc $a \in F$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \subset F$. Mais F est stable par la translation $x \mapsto x - a$ donc $B(0_E, r) \subset F$. En raisonnant comme dans la question précédente, $F = E$.
Deuxième méthode. Puisque $E \setminus \mathring{F} = \overline{E \setminus F}$, il suffit de montrer que $\overline{E \setminus F} = E$. Comme $F \subsetneq E$, on peut se donner $a \in E \setminus F$. Soit $x \in F$. Alors la suite de terme général $x + \frac{1}{n}a$ est à valeurs dans $E \setminus F$ et converge vers x. Ainsi $F \subset \overline{E \setminus F}$. Par ailleurs, $E \setminus F \subset \overline{E \setminus F}$ donc $E \subset \overline{E \setminus F}$ puis $\overline{E \setminus F}$.

Solution 17

Rappelons que pour toute partie A de E, $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$. Notamment Fr(A) est fermé comme intersection de deux fermés.
Comme F est fermé,

$$\mathrm{Fr}(F) = \overline{F} \cap \overline{E \setminus F} = F \cap \overline{E \setminus F}$$

Comme Fr(F) est également fermé,

$$\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(F)) = \overline{\mathrm{Fr}\, F} \cap \overline{E \setminus \mathrm{Fr}(F)} = \mathrm{Fr}(F) \cap \overline{E \setminus \mathrm{Fr}(F)}$$

Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Fr}(F) \subset \overline{E \setminus \mathrm{Fr}(F)}$ pour conclure.
La première égalité montre que $\mathrm{Fr}(F) \subset F$ donc $E \setminus F \subset E \setminus \mathrm{Fr}(F)$. Par conséquent, $\overline{E \setminus F} \subset \overline{E \setminus \mathrm{Fr}(F)}$.
On en déduit que

$$\mathrm{Fr}(F) \cap \overline{E \setminus F} \subset \overline{E \setminus F} \subset \overline{E \setminus \mathrm{Fr}(F)}$$

ce qui permet de conclure.

Solution 18

1. Remarquons que pour tout $y \in E$, la forme linéaire $\varphi_y : x \mapsto \langle x, y \rangle$ est continue. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x \in E,\ |\varphi_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

de sorte que φ_y est continue d'après la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.

2. On peut remarquer que

$$F = \{x \in E,\ \forall y \in F,\ \langle x, y \rangle = 0\} = \bigcap_{y \in F} \varphi_y^{-1}(\{0_E\})$$

Pour tout $y \in E$, $\varphi_y^{-1}(\{0_E\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé (le sous-espace nul) par une application continue. Par conséquent, F est fermé comme intersection de fermés.
On peut aussi utiliser la caractérisation séquentielle des fermés si l'on préfère. Soit (x_n) une suite d'éléments de $F^\perp$ convergeant vers $x \in E$. Fixons $y \in F$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_y(x_n) = \langle x_n, y \rangle = 0$. Par continuité de φ_y, $\lim_{n \to +\infty} \varphi_y(x_n) = \varphi_y(x)$. Par unicité de la limite, $\langle x, y \rangle = \varphi_y(x) = 0$. Ceci étant valable pour tout $y \in F$, $x \in F^\perp$. Ainsi $F^\perp$ est fermé par caractérisation séquentielle de la limite.

3. On sait que $F \subset (F^\perp)^\perp$. Or $(F^\perp)^\perp$ est fermé en applquant la question précédente à $F^\perp$. On sait que $\overline{F}$ est le plus grand fermé contenant F. Ainsi $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$.

Solution 19

Comme A est bornée, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|a\| \leq C$ pour tout $a \in A$.

Première méthode. Soit $x \in \overline{A}$. Il existe donc $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq C$. La norme est lipschitzienne donc continue de sorte que $\lim_{n \to +\infty} \|x_n\| = \|x\|$. Par passage à la limite, $\|x\| \leq C$.
Remarque. On peut se passer de la continuité de la norme en remarquant que, par inégalité triangulaire,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|x\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n\| \leq \|x - x_n\| + C$$

On obtient à nouveau $\|x\| \leq C$ en passant à la limite.

Deuxième méthode. Soit $x \in \overline{A}$. On se donne $\varepsilon > 0$. Alors $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Soit $a \in B(x, \varepsilon) \cap A$. Par inégalité triangulaire,

$$\|x\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq \varepsilon + C$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $\|x\| \leq C$.

Quelque soit la méthode, on en déduit que $\overline{A}$ est bornée.

Densité

Solution 20

1. On munit $\mathcal{C}([0,1])$ du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels définies sur $[0,1]$.
Par linéarité de l'intégrale, pour tout $P \in \mathcal{P}$, $\int_0^1 f(t)P(t)\,dt = 0$ i.e. $\langle f, P \rangle = 0$.
Le théorème de Stone-Weierstrass nous dit que $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme infinie. Or la norme L^2 associée au produit scalaire défini précédemment est dominée par la norme infinie donc $\mathcal{P}$ est aussi dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme L^2. On en déduit que pour tout $g \in \mathcal{C}([0,1])$, $\langle f, g \rangle = 0$. Ainsi $f \in \mathcal{C}([0,1])^\perp = \{0\}$ i.e. $f = 0$.
Réciproquement la fonction nulle vérifie bien la condition de l'énoncé.

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)t^{n_0+n}\,dt = 0$. D'après la question précédente, $t \mapsto t^{n_0}f(t)$ est nulle. On en déduit donc que pour $t \in]0,1]$, $f(t) = 0$ puis que f est nulle sur $[0,1]$ par continuité en 0.

Solution 21

On raisonne par récurrence sur n.
Soit A une partie convexe et dense de $\mathbb{R}$. A est donc un intervalle vérifiant $\bar{A} = \mathbb{R}$. On a donc $\sup A = \sup \bar{A} = +\infty$ et $\inf A = \inf \bar{A} = -\infty$. Ainsi $A = \mathbb{R}$.
Supposons la propriété à montrer vraie à un rang $n - 1 \geq 1$. Soit alors A une partie convexe et dense de $\mathbb{R}^n$. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. On va montrer que $A \cap H$ est une partie convexe et dense de H.
D'abord $A \cap H$ est convexe comme intersection de deux convexes.
On munit alors $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note u un vecteur unitaire normal à H. Soit $x \in H$ et $\varepsilon > 0$.
Posons $a = x + \frac{\varepsilon}{2}u$. Par densité de A dans $\mathbb{R}^n$, il existe $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|b - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\|u\| = 1$:

$$\langle b, u \rangle = \langle b - a, u \rangle + \langle a, u \rangle \geq -\|b - a\|\|u\| + \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 > 0$$

Posons $c = x - \frac{\varepsilon}{2}u$. Par densité de A dans $\mathbb{R}^n$, il existe $d \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|d - c\| < \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\|u\| = 1$:

$$\langle d, u \rangle = \langle d - c, u \rangle + \langle c, u \rangle \leq \|d - c\|\|u\| - \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 < 0$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'application $t \mapsto \langle (1-t)b + td, u \rangle$ s'annule en un point $t_0 \in]0,1[$. Posons $e = (1 - t_0)b + t_0 d$. On a donc $e \in H$ et $e \in A$ par convexité de A. De plus,

$$\|b - x\| \leq \|b - a\| + \|a - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

et

$$\|d - x\| \leq \|d - c\| + \|c - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Par inégalité triangulaire,

$$\|e - x\| = (\leq (1 - t_0)\|b - x\| + t_0\|d - x\| < (1 - t_0)\varepsilon + t_0\varepsilon = \varepsilon$$

Ceci achève de prouver la densité de $A \cap H$ dans H.
D'après notre hypothèse de récurrence, $A \cap H = H$. Or $\mathbb{R}^n$ est égal à la réunion de ses hyperplans. Donc $A = \mathbb{R}^n$.

Remarque. L'énoncé est faux en dimension infinie. $\mathbb{R}[X]$ est une partie convexe (en tant que sous-espace vectoriel) et dense (d'après le théorème de Stone-Weierstrass) de $\mathcal{C}([0,1])$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Pourtant, $\mathbb{R}[X]$ est d'intérieur vide. En effet, $\mathbb{R}[X]$ est l'union des $\mathbb{R}_n[X]$ qui sont des fermés d'intérieur vide en tant que sous-espaces vectoriels de dimension finie. On conclut par le théorème de Baire.

Solution 22

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et $\beta_1, \dots, \beta_n$ sont des réels strictement positifs, on montre que

$$\det\left(\left(\frac{1}{\alpha_i+\beta_j}\right)_{1\le i,j\le n}\right) = \frac{\left(\prod_{1\le i<j\le n}\alpha_i-\alpha_j\right)\left(\prod_{1\le i<j\le n}\beta_i-\beta_j\right)}{\prod_{1\le i,j\le n}\alpha_i+\beta_j} \tag{1}$$

Pour des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ d'un espace préhilbertien E, on pose $\mathrm{G}ram(x_1,\dots,x_n) = \det\left((x_i|x_j)_{1\le i,j\le n}\right)$. On montre que si $(u_1,\dots,u_n)$ est une famille libre de vecteurs de E et u un vecteur de E, alors

$$d\left(x, \mathrm{vect}(u_1,\dots,u_n)\right)^2 = \frac{\mathrm{G}ram(u_1,\dots,u_n,u)}{\mathrm{G}ram(u_1,\dots,u_n)} \tag{2}$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on notera $f_\alpha \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ la fonction $x \mapsto x^\alpha$. On a donc pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $(f_\alpha|f_\beta) = \dfrac{1}{\alpha+\beta+1}$.

$(i) \implies (ii)$ Comme la suite (a_n) est croissante, soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$. Si elle converge, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{a_n}$ est grossièrement divergente. Supposons donc que la suite (a_n) diverge vers $+\infty$. En utilisant (1) et (2), on montre que

$$d_n^2 = d(f_0, \mathrm{vect}(f_{a_0},\dots,f_{a_n}))^2 = \frac{\prod_{i=0}^n a_i^2}{\prod_{i=0}^n (1+a_i)^2} = \left(\prod_{i=0}^n \frac{a_i}{1+a_i}\right)^2$$

et donc

$$d_n = \prod_{i=0}^n \frac{a_i}{1+a_i}$$

Comme $\mathrm{vect}((f_{a_n})_{n\in\mathbb{N}})$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, (d_n) converge vers 0. En passant au logarithme, on en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)$ diverge vers $+\infty$. Puisque (a_n) diverge vers $+\infty$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{a_n}$ diverge donc également.

$(ii) \implies (i)$ Fixons $p \in \mathbb{N}$. En utilisant à nouveau (1) et (2), on trouve

$$d_{p,n}^2 = d(f_p, \mathrm{vect}(f_{a_0},\dots,f_{a_n}))^2 = \frac{1}{2p+1}\left(\prod_{i=0}^n \frac{a_i-p}{1+p+a_i}\right)^2$$

et donc

$$d_{p,n} = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}\prod_{i=0}^n \frac{|a_i-p|}{1+p+a_i}$$

S'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $a_i = p$, alors $d_{p,n} = 0$ pour tout $n \ge i$. Dans le cas contraire, on a

$$\ln d_{p,n} = -\frac{1}{2}\ln(2p+1) + \sum_{i=0}^n \ln\left|\frac{a_i-p}{1+p+a_i}\right|$$

On distingue à nouveau plusieurs cas :

- Si (a_n) converge vers un réel l, on montre que la suite $\left(\left|\dfrac{a_n-p}{1+p+a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel positif strictement inférieur à 1 (distinguer les cas $l \le p$ et $l > p$). La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left|\dfrac{a_n-p}{1+p+a_n}\right|$ diverge donc grossièrement vers $-\infty$. On en déduit que $d_{p,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

– Si (a_n) diverge vers $+\infty$, alors
$$\ln\left|\frac{a_n-p}{1+p+a_n}\right| \sim -\frac{2p+1}{1+p+a_n} \sim -\frac{2p+1}{a_n}$$
Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n}$ diverge vers $+\infty$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left|\frac{a_n-p}{1+p+a_n}\right|$ diverge également vers $+\infty$ et, à nouveau, $d_{p,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Bref, dans tous les cas $d_{p,n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
Soit maintenant $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Par le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme P à coefficients réels tels que $\|f-\mathrm{P}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. On montre facilement que $\|f-\mathrm{P}\|_2 \leq \|f-\mathrm{P}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Si P est nul c'est fini, puisqu'alors P appartient à $\operatorname{vect}\left((f_{a_n})_{n\in\mathbb{N}}\right)$. Sinon, posons $\mathrm{P} = \sum_{p=0}^{n} a_p f_p$. Posons $\mathrm{M} = \max\{|a_p|, 0 \leq p \leq n\}$. Pour $p \in [\![0,n]\!]$, il existe $g_p \in \operatorname{vect}\left((f_{a_n})_{n\in\mathbb{N}}\right)$ tel que $\|f_p - g_p\|_2 < \frac{\varepsilon}{2\mathrm{M}(n+1)}$. Posons alors $g = \sum_{p=0}^{n} a_p g_p$. Alors, par inégalité triangulaire
$$\|\mathrm{P}-g\|_2 \leq \sum_{p=0}^{n} |a_p|\|f_p-g_p\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$
A nouveau par inégalité triangulaire
$$\|f-g\|_2 \leq \|f-\mathrm{P}\|_2 + \|\mathrm{P}-g\|_2 < \varepsilon$$
ce qui prouve la densité de $\operatorname{vect}\left((f_{a_n})_{n\in\mathbb{N}}\right)$.

Solution 23

Remarquons déjà que, par linéarité de l'intégrale, $\int_a^b f(t)\mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour toute fonction polyomiale P.

Le théorème de Weierstrass permet d'affirmer qu'il existe une suite (P_n) de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$. De plus,
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)(f(t)-\mathrm{P}_n(t))\,\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)\mathrm{P}_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)(f(t)-\mathrm{P}_n(t))\,\mathrm{d}t$$
Comme f^2 est positive
$$\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t = \left|\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b f(t)(f(t)-\mathrm{P}_n(t))\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\cdot|f(t)-\mathrm{P}_n(t)|\,\mathrm{d}t \leq \|f-\mathrm{P}_n\|_\infty \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$
Comme (P_n) converge uniformément vers f, $\lim_{n\to+\infty} \|f-\mathrm{P}_n\|_\infty = 0$ puis $\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$. Or f^2 est continue et positive sur $[a,b]$ donc elle y est nulle. f est donc également nulle sur $[a,b]$.

Solution 24

---

1. Tout d'abord $0 \in \mathrm{F} \subset \overline{\mathrm{F}}$. Soient $(x,y) \in \overline{\mathrm{F}}^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Il existe donc deux suites (x_n) et (y_n) à valeurs dans F convergeant respectivement vers x et y. Alors $(\lambda x_n + \mu y_n)$ est une suite à valeurs dans F (puisque c'est un sous-espace vectoriel de E) convergeant vers $\lambda x + \mu y$. Ainsi $\lambda x + \mu y \in \overline{\mathrm{F}}$. Par conséquent, $\overline{\mathrm{F}}$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. On a $\mathrm{H} \subset \overline{\mathrm{H}} \subset \mathrm{E}$. Supposons H non fermé i.e. $\overline{\mathrm{H}} \neq \mathrm{H}$. Il existe donc $u \in \overline{\mathrm{H}} \setminus \mathrm{H}$. Soit alors $x \in \mathrm{E}$. Puisque H est un hyperplan, c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle φ sur E. Puisque $u \notin \mathrm{H}$, $\varphi(u) \neq 0$. Posons alors $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}$ et $h = x - \lambda u$. Alors $\varphi(h) = 0$ donc $h \in \mathrm{H} \subset \overline{\mathrm{H}}$. De plus, $u \in \overline{\mathrm{H}}$. Puisque $\overline{\mathrm{H}}$ est un sous-espace vectoriel de E, $x = h + \lambda u \in \overline{\mathrm{H}}$. Finalement, $\mathrm{E} = \overline{\mathrm{H}}$ i.e. H est dense dans E.

Solution 25

On notera $\|\cdot\|$ une norme sur E (peu importe laquelle, elles sont toutes équivalentes puisque E est de dimension finie).

1. Il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ et φ est constante sur chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$. Notons c_k la valeur de φ sur $]a_k, a_{k+1}[$. Alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$,

$$\int_a^b e^{i\lambda t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{i\lambda}\left(e^{i\lambda a_{k+1}} - e^{i\lambda a_k}\right)$$

Puisque $x \mapsto e^{i\lambda x}$ est bornée, on en déduit sans peine que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b e^{i\lambda t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

2. Il existe une suite (φ_n) de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$. Posons $\Phi_n : \lambda \mapsto \int_a^b e^{i\lambda t}\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{F} : \lambda \mapsto \int_a^b e^{i\lambda t}\mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\mathrm{F}(\lambda) - \Phi_n(\lambda)\| \le \int_a^b |e^{i\lambda t}| \cdot \|f(t) - \varphi_n(t)\|\,\mathrm{d}t \le (b-a)\|f - \varphi_n\|_\infty$$

et donc

$$\|\mathrm{F} - \Phi_n\|_\infty \le (b-a)\|f - \varphi_n\|_\infty$$

Remarque. La première norme uniforme est une norme uniforme sur $\mathbb{R}$ tandis que la seconde est une norme uniforme sur $[a, b]$.

Puisque (φ_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, l'inégalité précédente montre que (Φ_n) converge uniformément vers F sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la double limite,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \mathrm{F}(\lambda) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{\lambda\to+\infty} \Phi_n(\lambda)$$

D'après la question précédente, $\lim_{\lambda\to+\infty} \Phi_n(\lambda) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\lim_{\lambda\to+\infty} \mathrm{F}(\lambda) = 0$, ce qui répond à la question.

3. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque f est intégrable, les intégrales $\int_0^{+\infty} \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^0 \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$ convergent. Ainsi $\lim_{b\to+\infty} \int_b^{+\infty} \|f(t)\|\,\mathrm{d}t = 0$ et $\lim_{a\to-\infty} \int_{-\infty}^a \|f(t)\|\,\mathrm{d}t = 0$. Il existe donc des réels a et b tels que $a < b$, $\int_b^{+\infty} \|f(t)\|\,\mathrm{d}t \le \frac{\varepsilon}{3}$ et $\int_{-\infty}^a \|f(t)\|\,\mathrm{d}t \le \frac{\varepsilon}{3}$.
D'après la question précédente, $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Il existe donc $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \lambda \ge \lambda_0,\ \left|\int_a^b e^{i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

Soit donc $\lambda \ge \lambda_0$.

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\le \left|\int_{-\infty}^{a} e^{i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^b e^{i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_b^{+\infty} e^{i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le \int_{-\infty}^a \|f(t)\|\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{3} + \int_a^{+\infty} \|f(t)\|\,\mathrm{d}t \le \varepsilon
\end{aligned}$$

Ceci signifie que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Solution 26

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. M est alors trigonalisable : il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telle que $M = PTP^{-1}$. Notons $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $1, 1/2, \dots, 1/n$.
Si tous les coefficients diagonaux de T sont égaux, posons $T_k = T + \frac{1}{k}D$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. T_k est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont deux à deux distincts donc T_k est diagonalisable. De plus, (T_k) converge vers T. En posant $M_k = PT_kP^{-1}$, les M_k sont également diagonalisables et, par continuité du produit matriciel, (M_k) converge vers M.
Si les coefficients diagonaux de A ne sont pas tous égaux, posons

$$\alpha = \min\left\{|T_{i,i} - T_{j,j}|,\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ T_{i,i} \neq T_{i,j}\right\} > 0$$

Posons $T_k = T + \frac{\alpha}{k}D$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

- Si $T_{i,i} = T_{j,j}$, alors $(T_k)_{i,i} - (T_k)_{k,k} = \frac{\alpha}{k}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right) \neq 0$.
- Si $T_{i,j} \neq T_{i,j}$, alors, par inégalité triangulaire,

$$|(T_k)_{i,i} - (T_k)_{j,j}| = \left|T_{i,i} - T_{j,j} + \frac{\alpha}{ik} - \frac{\alpha}{jk}\right| \geq |T_{i,i} - T_{j,j}| - \frac{\alpha}{k}\left|\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right| > 0$$

car $|T_{i,i} - T_{j,j}| \geq \alpha$, $\frac{1}{k} \leq 1$ et $\left|\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right| < 1$.

T_k est donc triangulaire à coefficients diagonaux distincts et on conclut comme précédemment que (M_k) est une suite à valeurs dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ convergeant vers M.
Ainsi on a montré que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ était limite d'une suite de matrices de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ donc $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. a. Supposons que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Il existe donc des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ tels que $P = \prod_{k=1}^{d}(X - \lambda_k)$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$|P(z)| = \prod_{k=1}^{d} |z - \lambda_k|$$

Or pour tout $k \in [\![1,d]\!]$,

$$|z - \lambda_k| \geq |\operatorname{Im}(z - \lambda_k)| = |\operatorname{Im}(z)| \geq 0$$

car $\lambda_k \in \mathbb{R}$. On en déduit que $|P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^d$.
Inversement, supposons que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^d$$

Si $z \notin \mathbb{R}$, on a donc $|P(z)| > 0$ et donc $P(z) \neq 0$. Les racines de P sont donc toutes réelles. P est donc scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

b. En procédant comme dans le cas complexe, on montre que toute matrice de $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est limite d'une suite à valeurs dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathcal{T}_n(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathbb{D}_n(\mathbb{R})}$. Par ailleurs, $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ donc $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} \subset \overline{\mathcal{T}_n(\mathbb{R})}$. Il suffit alors de montrer que $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est fermé pour conclure.
Soit (T_k) une suite de matrices de $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ convergant vers T. Puisque les T_k sont trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les χ_{T_k} sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$. D'après la question précédente, on a alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C},\ |\chi_{T_k}(z)| \geq |z|^n$$

Fixons $z \in \mathbb{C}$. L'application $M \mapsto \chi_M$ est continue puisque chaque coefficient de χ_M est polynomial en les coefficients de M. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient alors $|\chi_T(z)| \geq |z|^n$. D'après la question précédente, χ_T est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et T est donc trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ceci prouve donc que $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est fermé.

Solution 27

---

1. φ est continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car polynomiale en les coefficients de M. Remarquons que φ est l'application qui à une matrice associe le discriminant de son polynôme caractéristique.

2. M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si χ_M est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, ce qui équivaut à $\varphi(M) \geq 0$ puisque $\varphi(M)$ est le discriminant de χ_M.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice de valeurs propres complexes, par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\varphi(A) < 0$. Si A était limite d'une suite de matrices diagonalisables (A_k), on aurait $\varphi(A_k) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par continuité de φ, $\lim_{k\to+\infty} \varphi(A_k) = \varphi(A) < 0$ mais, par passage à la limite, $\lim_{k\to+\infty} \varphi(A_k) \geq 0$. On obtient donc une contradiction. Ainsi $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. On a déjà $\mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}_2(\mathbb{R})$ donc $\overline{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})} \subset \overline{\mathcal{T}_2(\mathbb{R})}$. De plus, on a vu que $\mathcal{T}_2(\mathbb{R})$ est l'image réciproque du fermé $\mathbb{R}_+$ par l'application continue φ donc $\mathcal{T}_2(\mathbb{R})$ est fermé i.e. $\overline{\mathcal{T}_2(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_2(\mathbb{R})$. Ainsi $\overline{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})} \subset \mathcal{T}_2(\mathbb{R})$.

   Inversement, soit $M \in \mathcal{T}_2(\mathbb{R})$. Il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $T = P^{-1}MP$ soit triangulaire. En posant $T_k = T + \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & \frac{2}{k} \end{pmatrix}$, T_k est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont distincts au moins à partir d'un certain rang. Les matrices $M_k = PT_kP^{-1}$ sont donc diagonalisables à partir d'un certain rang et la suite (M_k) converge vers M par continuité du produit matriciel. Donc $M \in \overline{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})}$. Par double inclusion, $\overline{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_2(\mathbb{R})$.

Solution 28

Soit $a \in E$. Comme U est dense dans E, il existe $u \in U$ et $r_1 > 0$ tels que $B(a,r) \cap U \neq \emptyset$. Soit alors $u \in B(a,r) \cap U$. Mais $B(a,r) \cap U$ est ouvert comme intersection de deux ouverts. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(u,\varepsilon) \subset B(a,r) \cap U$. Mais comme V est dense dans E, $B(u,\varepsilon) \cap V \neq \emptyset$. A fortiori, $B(a,r) \cap U \cap V \neq \emptyset$. Ceci prouve que $U \cap V$ est dense dans E.

Solution 29

---

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$;

   $\chi_{AB}(\lambda) = \det(\lambda I_n - AB) = \det(A(\lambda A^{-1} - B)) = \det(A)\det(\lambda A^{-1} - B) = \det(\lambda A^{-1} - B)\det(A) = \det((\lambda A^{-1} - B)A) = \det(\lambda I_n - BA) = \chi_{AB}(\lambda)$

   On en déduit que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

2. Fixons $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les applications $A \mapsto \chi_{AB}$ et $A \mapsto \chi_{BA}$ sont continues : les coefficients des deux polynômes caractéristiques χ_{AB} et χ_{BA} sont polynomiaux en les coefficients de A. La question précédente montre que ces deux applications coïncident sur $GL_n(\mathbb{K})$. Or on montre classiquement que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On en déduit que $A \mapsto \chi_{AB}$ et $A \mapsto \chi_{BA}$ coïncident sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Limite et continuité

Solution 30

---

1. On a $|f(x,y)| \leq |x| + |y| = \|(x,y)\|_1$. On en déduit que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

2. On a $f(x,x) = 0$ et $f(x,0) = 1$. Donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

3. On a $f(x,-x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} f(x,x) = +\infty$ donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

4. Remarquons que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

   $$|x^3 + y^3| \leq |x|^3 + |y|^3 \leq (|x| + |y|)(x^2 + y^2) \leq 2\|(x,y)\|_1(x^2 + y^2)$$

   On en déduit que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

   $$|f(x,y)| \leq 2\|(x,y)\|_1$$

   Ainsi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

5. On a d'une part :

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

et, d'autre part :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2-1 = -1$$

On en déduit que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -1$.

6. On a $\lim_{x\to0^+} f(x,x) = 1$ et $\lim_{x\to0^+} f\left(e^{-\frac{1}{x}}, x\right) = \frac{1}{e}$ (on vérifie que $\lim_{x\to0^+}\left(e^{-\frac{1}{x}}, x\right) = (0,0)$). On en déduit que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

7. On a :

$$f(x,y) = \frac{\sin x^2}{x^2}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sin y^2}{y^2}\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

D'une part :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x^2} = \lim_{y\to0}\frac{\sin y^2}{y^2} = 1$$

D'autre part :

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

et de même

$$0 \leq \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

On en déduit que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

puis que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Solution 31

---

1. N_2 est une norme : il s'agit de la norme uniforme sur $[-1,1]$. Concernant N_1, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire ne pose pas de problème. Si $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ vérifie $\mathrm{N}_1(\mathrm{P})=0$, alors $\mathrm{P}^{(n)}(0)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Alors, d'après la formule de Taylor, $\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{P}^{(n)}(0)}{n!}\mathrm{X}^n = 0$.

2. D est un endomorphisme. D'après la formule de Taylor et l'inégalité triangulaire,

$$\mathrm{N}_1(\mathrm{D}(\mathrm{P})) = \mathrm{N}_1(\mathrm{P}') = \sum_{n=0}^{+\infty}|\mathrm{P}^{(n+1)}(0)| = \sum_{n=1}^{+\infty}|\mathrm{P}^{(n)}(0)| \leq \mathrm{N}_1(\mathrm{P})$$

D'après la caractérisation de la continuité des applications linéaires, D est continu pour la norme N_1.

3. Pour tout $p\in\mathbb{P}$, $\mathrm{N}_2(\mathrm{X}^p)=1$ et $\mathrm{N}_2(\mathrm{D}(\mathrm{X}^p)) = \mathrm{N}_2(p\mathrm{X}^{p-1}) = p$. Ainsi $\lim_{p\to+\infty}\frac{\mathrm{N}_2(\mathrm{D}(\mathrm{X}^p))}{\mathrm{N}_2(\mathrm{X}^p)} = +\infty$ donc D n'est pas continu pour la norme N_2 en vertu de la caractérisation de la continuité des applications linéaires.

Solution 32

Soit N une norme sur E. Tout d'abord, φ est un endomorphisme de E. Considérons pour $a\in\mathbb{R}_+$, $f_a : x\in[0,1]\mapsto e^{ax}$. Ainsi $\varphi(f_a) = f_a' = af_a$, puis par homogénéité, $\mathrm{N}(\varphi(f_a)) = a\mathrm{N}(f_a)$. Par conséquent, $\lim_{a\to+\infty}\frac{\mathrm{N}(\varphi(f_a))}{\mathrm{N}(f_a)} = +\infty$ et donc φ n'est pas continue par caractérisation de la continuité des applications linéaires.

Solution 33

---

1. Evident.

2. Supposons que $|b| > 1$. Alors
$$\frac{|f(\mathrm{X}^n)|}{\|\mathrm{X}^n\|} = |b|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
D'après la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires, f n'est pas continue.
Supposons $|b| \leq 1$. Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k \in \mathrm{E}$. Par inégalité triangulaire,
$$|f(\mathrm{P})| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k||b|^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| = \|\mathrm{P}\|$$
D'après la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires, f est continue.
On en déduit de plus que $|||f||| \leq 1$. Mais comme
$$|||f||| \geq \frac{|f(1)|}{\|1\|} = 1$$
on a donc $|||f||| = 1$.

Solution 34

---

1. ϕ est clairement linéaire et pour $f \in \mathrm{E}$, $\phi(f)$ est une primitive de f donc $\phi(f) \in \mathrm{E}$.

2. Soit $f \in \mathrm{E}$. Par inégalité triangulaire
$$\forall x \in [0,1],\ \|\phi(f)(x)\| \leq \int_0^x |f(t)|\ \mathrm{d}t \leq \int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t = \|f\|$$
A nouveau par inégalité triangulaire,
$$\|\phi(f)\| \leq \int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \|f\|\ \mathrm{d}t = \|f\|$$
Par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires, ϕ est continu.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'une part,
$$\|f_n\| = \left[-e^{-nt}\right]_0^1 = 1 - e^{-n}$$
D'autre part,
$$\forall x \in [0,1],\ \phi(f_n)(x) = \left[-e^{-nt}\right]_0^x = 1 - e^{-nx}$$
de sorte que
$$\|\phi(f_n)\| = 1 - \frac{1-e^{-n}}{n}$$

4. On a déjà montré que $\|\phi(f)\| \leq \|f\|$ pour tout $f \in \mathrm{E}$ donc $|||f|||$ est bien définie et $|||f||| \leq 1$. De plus,
$$\frac{\|\phi(f_n)\|}{\|f_n\|} = \frac{1 - \frac{1-e^{-n}}{n}}{1-e^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
donc $|||f||| = 1$.

Solution 35

Δ est clairement linéaire et, pour tout $u \in \mathrm{E}$,
$$\|\Delta(u)\|_\infty = \|(u_n) - (u_{n+1})\|_\infty \leq \|(u_n)\|_\infty + \|(u_{n+1})\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty$$
Ce qui prouve à la fois que $\Delta(u) \in \mathrm{E}$ et que Δ est continu : Δ est un endomorphisme continu de E.
De plus, $|||\Delta||| \leq 2$. En posant $v_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta(v)_n = -2(-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\|v\|_\infty = 1$ et $\|\Delta(v)\|_\infty = 2$ donc
$$|||\Delta||| \geq \frac{\|\Delta(v)\|_\infty}{\|v\|_\infty} = 2$$
Ainsi $|||\Delta||| = 2$.

Solution 36

1. N_2 est une norme : il s'agit de la norme uniforme sur $[-1,1]$. Concernant N_1, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire ne pose pas de problème. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $N_1(P) = 0$, alors $P^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après la formule de Taylor, $P = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} X^n = 0$.
2. D est un endomorphisme. D'après la formule de Taylor et l'inégalité triangulaire,
$$N_1(D(P)) = N_1(P') = \sum_{n=0}^{+\infty} |P^{(n+1)}(0)| = \sum_{n=1}^{+\infty} |P^{(n)}(0)| \leq N_1(P)$$
D'après la caractérisation de la continuité des applications linéaires, D est continu pour la norme N_1.
3. Pour tout $p \in \mathbb{P}$, $N_2(X^p) = 1$ et $N_2(D(X^p)) = N_2(pX^{p-1}) = p$. Ainsi $\lim_{p \to +\infty} \frac{N_2(D(X^p))}{N_2(X^p)} = +\infty$ donc D n'est pas continu pour la norme N_2 en vertu de la caractérisation de la continuité des applications linéaires.

Solution 37

Soit N une norme sur E. Tout d'abord, φ est un endomorphisme de E. Considérons pour $a \in \mathbb{R}_+$, $f_a : x \in [0,1] \mapsto e^{ax}$. Ainsi $\varphi(f_a) = f_a' = af_a$, puis par homogénéité, $N(\varphi(f_a)) = aN(f_a)$. Par conséquent, $\lim_{a \to +\infty} \frac{N(\varphi(f_a))}{N(f_a)} = +\infty$ et donc φ n'est pas continue par caractérisation de la continuité des applications linéaires.

Solution 38

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $Y = AX$. Fixons $i \in [\![1,n]\!]$. Alors
$$Y_i = \sum_{j=1}^{p} A_{i,j} X_j$$
Donc
$$|Y_i| \leq \sum_{j=1}^{p} |A_{i,j}||X_j| \leq \sum_{j=1}^{p} |A_{i,j}| \|X\|_\infty$$
Et donc
$$\|AX\|_\infty = \|Y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |Y_i| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{p} |A_{i,j}| \right) \|X\|_\infty$$
donc
$$|||A||| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{p} |A_{i,j}|$$
Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que
$$\sum_{j=1}^{p} |A_{i_0,j}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{p} |A_{i,j}|$$
Posons $X_j = 1$ si $A_{i_0,j} \geq 0$ et $X_j = -1$ si $A_{i_0,j} < 0$. Alors, en posant $X = (X_1, \dots, X_p)^\top$, on a $\|X\|_\infty = 1$. De plus, en posant $Y = AX$
$$Y_{i_0} = \sum_{j=1}^{p} A_{i_0,j} X_j = \sum_{j=1}^{p} |A_{i_0,j}|$$
On en déduit que
$$|||A||| \geq \|AX\|_\infty = \|Y\|_\infty \geq |Y_{i_0}| = \sum_{j=1}^{p} |A_{i_0,j}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{p} |A_{i,j}|$$
Donc
$$|||A||| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{p} |A_{i,j}|$$

2. Soit $X = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $Y = AX$. Fixons $i \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$Y_i = \sum_{j=1}^{p} A_{i,j} X_j$$

Donc

$$\|AX\|_1 = \|Y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |Y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} |A_{i,j}||X_j| = \sum_{j=1}^{p} |X_j| \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^{p} |X_j| \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}| = \left(\max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}| \right) \|X\|_1$$

Par conséquent,

$$|||A||| \leq |\max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|$$

Soit $j_0 \in [\![1, p]\!]$ tel que $\sum_{i=1}^{n} |A_{i,j_0}| = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|$. Posons $X_{j_0} = 1$ et $X_j = 0$ si $j \neq j_0$. Alors, en posant $X = (X_1, \dots, X_p)^\top$, on a $\|X\|_1 = 1$. De plus, en posant $Y = AX$,

$$|||A||| \geq \|AX\|_1 = \|Y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |Y_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{p} A_{i,j} X_j \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j_0}| = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|$$

donc

$$|||A||| = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|$$

3. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

$$\|AX\|_2^2 = X^\top A^\top AX$$

Comme $A^\top A$ est symétrique réelle, il existe une base orthonormée $(U_1, \dots, U_p)$ de vecteurs propres de $A^\top A$. Notons λ_i la valeur propre associée à U_i. Si $X = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i U_i$,

$$\|AX\|_2^2 = \|Y\|_2^2 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 \lambda_i \leq \max \mathrm{Sp}(A^\top A) \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 = \max \mathrm{Sp}(A^\top A) \|X\|_2^2$$

Ainsi

$$|||A||| \leq \sqrt{\max \mathrm{Sp}(A^\top A)}$$

Soit X un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre λ de $A^\top A$. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est X. Alors

$$\|AX\|_2^2 = \|AX\|_2^2 = X^\top A^\top AX = \lambda X^\top X = \lambda \|X\|_2^2$$

Ainsi $|||A||| \leq \sqrt{\lambda}$. Par conséquent, $|||A||| = \max \mathrm{Sp}(A^\top A)$.

Compacité

Solution 39

L'espace normé en question doit nécessairement être de dimension infinie. Considérons $E = \ell^\infty(\mathbb{R})$ (ensemble des suite réelles bornées) muni de la norme ∞. La boule unité fermée B de E est bien fermée et bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (\delta_{pn})_{p \in \mathbb{N}}$. Ainsi (u_n) est une suite d'éléments de B. Supposons B compact. Il existe donc une sous-suite $(u_{\varphi}(n))$ convergente. Notons $l = (l_p)_{p \in \mathbb{N}}$ sa limite. Soit $p \in \mathbb{N}$. la suite $(u_{\varphi(n),p})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l_p. Or pour $\varphi(n) > p$, $u_{\varphi(n),p} = 0$ donc $l_p = 0$. La suite l est donc nulle. Or $\|u_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par continuité de la norme, $\|l\| = 1$, ce qui contredit $l = 0$.

Solution 40

1. Comme $\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{a\})$ est connexe par arcs, son image par f qui est continue est donc également connexe par arcs. C'est donc un intervalle I de $\mathbb{R}$ ne contenant pas a. C'est donc un intervalle minoré ou majoré par a. Ainsi $f(\mathbb{R}^2) = \mathrm{I} \cup \{a\}$ admet a pour minimum ou maximum. Ceci prouve que f admet a pour extremum global sur $\mathbb{R}^2$.

2. Puisque $f^{-1}(\{a\})$ est bornée, il existe une boule fermée de $\mathbb{R}^2$ telle que $f^{-1}(\{a\}) \subset \mathrm{B}$. Alors $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{B}$ est connexe par arcs et son image par f est un intervalle I ne contenant pas a. L'intervalle I est encore majoré par a ou minoré par a.
Supposons que I est minoré par a, c'est-à-dire que $f(x) \geq a$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{B}$. f étant continue sur le compact B, elle y admet un minimum global m. Puisque $f^{-1}(\{a\}) \subset \mathrm{B}$, $a \geq m$. Ainsi f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ (en fait sur B).
Supposons que I est majoré par a, c'est-à-dire que $f(x) \leq a$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{B}$. f étant continue sur le compact B, elle y admet un maximum global M. Puisque $f^{-1}(\{a\}) \subset \mathrm{B}$, $a \leq \mathrm{M}$. Ainsi f admet un maximum global sur $\mathbb{R}^2$ (en fait sur B).

3. Remarquons que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{a\}))$ est un intervalle minoré ou majoré par a.
Supposons f non majorée sur $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$. $f(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{\mathrm{A}\}))$ est un intervalle minoré ou majoré par A. Puisque f est non majorée, il existe $x \in \mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{\mathrm{A}\}))$ tel que $f(x) > \mathrm{A}$. Ainsi l'intervalle $f(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{\mathrm{A}\}))$ est minoré par A puisqu'il contient $f(x)$. Le compact $f^{-1}(\{\mathrm{A}\})$ est inclus dans une boule fermée de rayon $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_+$. Ainsi pour $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x\| > \mathrm{R}$, on a $f(x) > \mathrm{A}$. On en déduit que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} = +\infty$.
Supposons f non minorée sur $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$. $f(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{\mathrm{A}\}))$ est un intervalle minoré ou majoré par A. Puisque f est non minorée, il existe $x \in \mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{\mathrm{A}\}))$ tel que $f(x) < \mathrm{A}$. Ainsi l'intervalle $f(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{\mathrm{A}\}))$ est majoré par A puisqu'il contient $f(x)$. Le compact $f^{-1}(\mathrm{A})$ est inclus dans une boule fermée de rayon $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_+$. Ainsi pour $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x\| > \mathrm{R}$, on a $f(x) < \mathrm{A}$. On en déduit que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} = -\infty$.
Supposons f bornée sur $\mathbb{R}^2$. Soit (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ telle que $\|x_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La suite $(f(x_n))$ étant bornée, on peut supposer qu'elle converge quitte à en extraire une sous-suite. Notons l sa limite. Soit $\varepsilon > 0$. D'après notre remarque préliminaire, $f(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{l + \varepsilon\}))$ est un intervalle minoré ou majoré par $l + \varepsilon$. Or $\|x_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f^{-1}(\{l + \varepsilon\})$ est compact donc borné : il existe donc $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \notin f^{-1}(\{l + \varepsilon\})$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$. Enfin $(f(x_n))$ converge vers l donc il existe $p \geq \mathrm{N}$ tel que $f(x_p) < l + \varepsilon$. Ainsi $f(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{l + \varepsilon\}))$ est un intervalle majoré par $l + \varepsilon$. On prouve de même que $f(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{l - \varepsilon\}))$ est un intervalle majoré par $l - \varepsilon$. Les compacts $f^{-1}(\{l + \varepsilon\})$ et $f^{-1}(\{l - \varepsilon\})$ sont inclus dans une boule de rayon $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x\| > \mathrm{R}$, $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$. Ceci prouve que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = l$.

Solution 41

---

1. Remarquons déjà que l'existence de la valeur d'adhérence (x', y') est justifiée par la compacité de K^2. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers (x', y'). Remarquons alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|g^n(x') - x\| = \|g^n(x') - g^n(x_n)\| \leq \|x' - x_n\| \qquad \text{et} \qquad \|g^n(y') - y\| = \|g^n(y') - g^n(y_n)\| \leq \|y' - y_n\|$$

car g et donc g^n est 1-lipschitzienne. On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|(g^{\varphi(n)}(x') - g^{\varphi(n)}(y')) - (x - y)\| \leq \|g^{\varphi(n)}(x') - x\| + \|g^{\varphi(n)}(y') - y\| \leq \|x' - x_{\varphi(n)}\| + \|y' - y_{\varphi(n)}\|$$

Ainsi la suite $(g^{\varphi(n)}(x') - g^{\varphi(n)}(y'))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x - y$, qui est bien une valeur d'adhérence de la suite $(g^n(x') - g^n(y'))_{n \in \mathbb{N}}$.

2. A nouveau, le fait que g soit 1-lipschitzienne montre que la suite $(\|g^n(x') - g^n(y')\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante. Elle est également minorée donc elle converge.
La question précédente et la continuité de la norme montrent que $\|x - y\|$ est une valeur d'adhérence de cette même suite. C'est donc que la suite $(\|g^n(x') - g^n(y')\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\|x - y\|$.
Si l'on reprend la première question,

$$\|g^{n+1}(x') - g(x)\| \leq \|g^n(x') - x\| = \|g^n(x') - g^n(x_n)\| \leq \|x' - x_n\| \qquad \text{et} \qquad \|g^{n+1}(y') - g(y)\| \leq \|g^n(x') - x\| = \|g^n(y') - g^n(y_n)\| \leq \|y' - y_n\|$$

On en déduit comme précédemment que $g(x) - g(y)$ est encore une valeur d'adhérence de la suite $(g^n(x') - g^n(y'))_{n \in \mathbb{N}}$ et donc également de la suite $(\|g^n(x') - g^n(y')\|)_{n \in \mathbb{N}}$. On en déduit que $\|g(x) - g(y)\| = \|x - y\|$.
g est donc bien une isométrie.

3. Fixons $y \in \mathrm{E}$. La suite $(g^n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact K donc on peut en extraire une suite $g(^{\varphi(n)}(y))_{n \in \mathbb{N}}$ convergente. La suite $(g^{\varphi(n+1)}(y) - g^{\varphi(n)}(y))_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers 0. Mais comme g est une isométrie,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|g^{\varphi(n+1) - \varphi(n)}(y) - y\| = \|(g^{\varphi(n+1)}(y) - g^{\varphi(n)}(y))\|$$

donc la suite $(g^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ car φ est strictement croissante donc $g^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y)$ appartient à $g(\mathrm{K})$. On en déduit que $y \in \overline{g(\mathrm{K})}$. Mais comme g est continue et K est compact, $g(\mathrm{K})$ est compact donc fermé. Ainsi $\overline{g(\mathrm{K})} = g(\mathrm{K})$ et $y \in g(\mathrm{K})$. L'application g est donc surjective. Pour le contre-exemple, on peut considérer l'espace vectoriel E des suites bornées muni de la norme infinie ainsi que la boule unité K. L'application g qui à une suite $u \in \mathrm{E}$ associe la suite v définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est clairement une isométrie. De plus, K est stable par K mais g n'est clairement pas surjective.

Solution 42

---

1. L'application $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \|x-y\| \end{array} \right.$ est continue comme composée des applications continues $(x,y) \mapsto x-y$ et $x \mapsto \|x\|$. Comme K^2 est compact comme produit de compacts, $\phi(\mathrm{K}^2)$ est un compact de $\mathbb{R}$. En particulier, $\phi(\mathrm{K})$ est majoré et contient sa borne supérieure. Ainsi $\delta(\mathrm{K})$ existe et la borne supérieure le définissant est atteinte.

2. Remarquons tout d'abord que le symétrique par rapport à a d'un point x de E est $2a-x$.
Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_a$. Pour $y \in \mathrm{E}$, notons $\phi_y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x-y\| \end{array} \right.$. On a
$$\mathrm{T}(\mathrm{B}) = \mathrm{B} \cap \left(\bigcap_{y\in\mathrm{B}} \phi_y^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\delta(\mathrm{B})\right]\right) \right)$$
Comme ϕ_y est continue pour tout $y \in \mathrm{B}$, les $\phi_y^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\delta(\mathrm{B})\right]\right)$ sont fermés. Ainsi T(B) est fermé comme intersection de fermés. De plus, $\mathrm{T}(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B}$ avec B compact donc T(B) est compact.
Montrons que T(B) est symétrique par rapport à a. Soit $x \in \mathrm{T}(\mathrm{B})$. On veut donc montrer que $2a - x \in \mathrm{T}(\mathrm{B})$. Or pour tout $y \in \mathrm{B}$:
$$\|(2a-x)-y\| = \|x-(2a-y)\| \leq \frac{1}{2}\delta(\mathrm{B})$$
car $x \in \mathrm{T}(\mathrm{B})$ et $2a - y \in \mathrm{B}$ par symétrie de B par rapport à a. Ainsi $2a - x \in \mathrm{T}(\mathrm{B})$. Donc $\mathrm{T}(\mathrm{B}) \in \mathcal{S}_a$.

3. Soient $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_a$ et $(x,y) \in \mathrm{T}(\mathrm{B})^2$. A fortiori, $(x,y) \in \mathrm{B}^2$ de sorte que, par définition de T(B) $\|x-y\| \leq \frac{1}{2}\delta(\mathrm{B})$. On en déduit que $\delta(\mathrm{T}(\mathrm{B})) \leq \frac{1}{2}\delta(\mathrm{B})$. On peut alors montrer par récurrence que $\delta(\mathrm{B}_n) \leq \frac{1}{2^n}\delta(\mathrm{B}_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Posons $\tilde{\mathrm{B}} = \bigcap_{n\geq0} \mathrm{B}_n$. Alors $\tilde{\mathrm{B}}$ est fermé comme intersection de fermés et $\tilde{\mathrm{B}}$ est inclus dans le compact B_0 donc il est compact. Puisque $\tilde{\mathrm{B}} \subset \mathrm{B}_n$, $\delta(\tilde{\mathrm{B}}) \leq \delta(\mathrm{B}_n) \leq \frac{1}{2^n}\delta(\mathrm{B}_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\delta(\tilde{\mathrm{B}}) = 0$. Si $\mathrm{B}_0 = \varnothing$, alors clairement $\tilde{\mathrm{B}} = \varnothing$. Montrons maintenant que si $\mathrm{B}_0 \neq \varnothing$, alors $\tilde{\mathrm{B}} = \{a\}$. Soit $x \in \tilde{\mathrm{B}}$. Alors x et $2a - x$ appartiennent à $\tilde{\mathrm{B}}$ puisque tous les $\mathrm{T}_n(\mathrm{B})$ sont symétriques par rapport à a. En particulier, $\|x-(2a-x)\| = 0$ puis $a = x$.

4. Soient u une isométrie et $(x,y) \in \mathrm{E}^2$. On pose alors $\mathrm{B}_0 = \{x,y\}$ et on définit la suite (B_n) comme précédemment. Posons $m = \frac{x+y}{2}$ de sorte que B_0 est symétrique par rapport à m. Alors, comme précédemment, $\bigcap_n \in \mathbb{N}\mathrm{B}_n = \{m\}$.
Montrons maintenant que si B est un compact de E, alors $\mathrm{T}(u(\mathrm{B})) \subset u(\mathrm{T}(\mathrm{B}))$. Soit en effet $x \in \mathrm{T}(u(\mathrm{B}))$. En particulier, $x \in u(\mathrm{B})$ donc il existe $a \in \mathrm{T}(\mathrm{B})$ tel que $x = u(a)$. De plus, pour tout $y \in u(\mathrm{B})$, $\|x-y\| \leq \frac{1}{2}\delta(u(\mathrm{B}))$ donc pour tout $b \in \mathrm{B}$, $\|u(a)-u(b)\| \leq \frac{1}{2}\delta(u(\mathrm{B}))$. Or u est une isométrie donc $\|u(a)-u(b)\| = \|a-b\|$ et on montre facilement que $\delta(u(\mathrm{B})) = \delta(\mathrm{B})$. Finalement $\|a-b\| \leq \frac{1}{2}\delta(\mathrm{B})$ pour tout $b \in \mathrm{B}$ i.e. $a \in \mathrm{T}(\mathrm{B})$. Ainsi $x = u(a) \in u(\mathrm{T}(\mathrm{B}))$.
On en déduit alors par récurrence que $\mathrm{T}^n(u(\mathrm{B}_0)) \subset u(\mathrm{T}^n(\mathrm{B}_0))$ i.e. $\mathrm{C}_n \subset u(\mathrm{B}_n)$ en posant $\mathrm{C}_n = \mathrm{T}^n(u(\mathrm{B}_0))$. Finalement,
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{C}_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} u(\mathrm{B}_n)$$
Mais comme u est injective en tant qu'isométrie,
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} u(\mathrm{B}_n) = u\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n\right) = u(\{a\}) = \{u(a)\}$$

Mais $C_0 = \{u(x), u(y)\}$ est symétrique par rapport à $n = \dfrac{u(x)+u(y)}{2}$ donc on montre comme à la question précédente que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \{n\}$. Finalement, $\{n\} \subset \{u(a)\}$ donc $n = u(a)$. u conserve bien les milieux.

Solution 43

1. Tout d'abord, f est continue sur K car lipschitzienne. L'application $\varphi : x \in K \mapsto \|f(x)-x\|$ est alors elle-même continue par continuité de la norme. Elle admet donc un minimum sur le compact K atteint en $a \in K$. Supposons que $f(a) \neq a$. D'après la propriété vérifiée par f, on aurait alors $\varphi(f(a)) < \varphi(a)$, ce qui est contradictoire. Ainsi $f(a) = a$ et f admet un point fixe.
Supposons maintenant que f possède deux points fixes a et b. Comme $a \neq b$, $\|f(a)-f(b)\| < \|a-b\|$ i.e. $\|a-b\| < \|a-b\|$, ce qui est absurde. Ainsi f possède un unique point fixe.

2. Notons a l'unique point fixe de f. La suite de terme général $\|x_n - a\|$ est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc. Notons m sa limite. Soit alors ℓ une valeur d'adhérence de la suite (x_n). On peut alors extraire de la suite (x_n) une suite $(x_{\psi(n)})$ convergeant vers ℓ.
La suite de terme général $\|x_{\psi(n)} - a\|$
   - converge vers m en tant que suite extraite de la suite de terme général $\|x_n - a\|$;
   - converge vers $\|\ell - a\|$ par continuité de la norme.

   Ainsi $m = \|\ell - a\|$.
De même, la suite de terme général $\|x_{\psi(n)+1} - a\|$
   - converge vers m en tant que suite extraite de la suite de terme général $\|x_n - a\|$;
   - converge également vers $\|f(\ell) - a\|$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_{\psi(n)+1} - a\| = \|f(x_{\psi(n)}) - a\|$ et que f est continue.

   Ainsi $m = \|f(\ell) - a\|$.
Supposons que $\ell \neq a$. Alors
$$m = \|f(\ell) - a\| = \|f(\ell) - f(a)\| < \|\ell - a\| = m$$
ce qui est absurde. Ainsi $\ell = a$.
La suite (x_n) est donc à valeurs dans un compact et ne possède que a comme unique valeur d'adhérence : elle converge donc vers a.

3. On peut par exemple considérer $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2+1}$. f n'admet clairement aucun point fixe. Par contre, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$,
$$|f(x)-f(y)| = \left|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}\right| = \frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}} = \frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}$$
Or, par stricte croissance de la racine carrée et inégalité triangulaire
$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1} > \sqrt{x^2}+\sqrt{y^2} = |x|+|y| \geq |x+y|$$
On en déduit que
$$|f(x)-f(y)| < |x-y|$$

Solution 44

Tout d'abord les deux maxima sont bien définies car B et S sont des compacts et $z \mapsto |P(z)|$ est continue.

Tout d'abord, $S \subset B$ donc $\max_{z\in B} |P(z)| >= \max_{z\in S} |P(z)|$. Supposons que l'inégalité soit stricte. Le maximum de $|P|$ sur B est alors atteint en un point z_0 qui n'appartient pas à S, autrement dit un point intérieur à B.

Si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)}(z_0) = 0$, alors P est constant d'après la formule de Taylor. De même, si $P(z_0) = 0$, P est le polynôme constant nul. Mais on a alors clairement $\max_{z\in B} |P(z)| = \max_{z\in S} |P(z)|$, ce qui contredit notre hypothèse.

Ainsi $P(z_0) \neq 0$ et on peut poser $p = \min\left\{k \in \mathbb{N}^*,\ P^{(k)}(z_0) \neq 0\right\}$. D'après la formule de Taylor, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que
$$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = P(z_0) + \frac{P^{(p)}(z_0)}{p!}(z-z_0)^p + Q(z-z_0)(z-z_0)^{p+1}$$

Notamment,

$$\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}^2,\ \mathrm{P}(z_0+re^{i\theta})=\mathrm{P}(z_0)\left(1+\frac{\mathrm{P}^{(p)}(z_0)}{p!\mathrm{P}(z_0)}r^pe^{ip\theta}+\frac{\mathrm{Q}(re^{i\theta})}{\mathrm{P}(z_0)}r^{p+1}e^{i(p+1)\theta}\right)$$

Posons $\mathrm{A}=\dfrac{\mathrm{P}^{(p)}(z_0)}{p!\mathrm{P}(z_0)}$ et $\mathrm{R}=\dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}(z_0)}$.

$$\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}^2,\ \mathrm{P}(z_0+re^{i\theta})=\mathrm{P}(z_0)\left(1+\mathrm{A}r^pe^{ip\theta}+\mathrm{R}(re^{i\theta}r^{p+1}e^{i(p+1)\theta}\right)$$

Choisissons θ de telle sorte que $\mathrm{A}e^{ip\theta}=|\mathrm{A}|$. Par inégalité triangulaire,

$$\forall r\in\mathbb{R}_+,\ |\mathrm{P}(z_0+re^{i\theta})|\geq|\mathrm{P}(z_0)|\left(1+|\mathrm{A}|r^p-|\mathrm{R}(re^{i\theta})|r^{p+1}\right)=|\mathrm{P}(z_0)|\left(1+r^p(|\mathrm{A}|-|\mathrm{R}(re^{i\theta})|r\right)$$

Ainsi

$$\forall r\in\mathbb{R}_+,\ |\mathrm{P}(z_0+re^{i\theta})|-|\mathrm{P}(z_0)|\geq|\mathrm{A}||\mathrm{P}(z_0)|r^p-|\mathrm{R}(re^{i\theta})|r^{p+1}=r^p\left(|\mathrm{A}||\mathrm{P}(z_0)|-|\mathrm{R}(re^{i\theta})|r\right)$$

Comme R est continue et $|\mathrm{A}||\mathrm{P}(z_0)|\neq0$,

$$r^p\left(|\mathrm{A}||\mathrm{P}(z_0)|-|\mathrm{R}(re^{i\theta})|r\right)\underset{r\to0^+}{\sim}|\mathrm{A}||\mathrm{P}(z_0)|r^p$$

Notamment, $r\mapsto|\mathrm{P}(z_0+re^{i\theta})|-|\mathrm{P}(z_0)|$ est strictement positive au voisinage de 0^+. Comme z_0 est intérieur à B, il existe $r>0$ tel que $z_0+re^{i\theta}\in\mathrm{B}$ et $|\mathrm{P}(z_0+re^{i\theta})|-|\mathrm{P}(z_0)|>0$, ce qui contredit le fait que $|\mathrm{P}|$ admet son maximum sur B en z_0.

On conclut donc par l'absurde que $\max\limits_{z\in\mathrm{B}}|\mathrm{P}(z)|=\max\limits_{z\in\mathrm{S}}|\mathrm{P}(z)|$.

Solution 45

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, il suffit de montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est borné et fermé. Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne. Alors pour tout $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|\mathrm{A}\|^2=\mathrm{tr}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A})=\mathrm{tr}(\mathrm{I}_n)=n$$

donc $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est borné. De plus, l'application $f:\ \mathrm{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mapsto\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$ est continue par continuité du produit matriciel et de la transposition. Or $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})=f^{-1}(\{\mathrm{I}_n\})$ et le singleton $\{\mathrm{I}_n\}$ est fermé donc $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé.

Solution 46

Puisque $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty}f(x)=+\infty$, il existe $\mathrm{A}\in\mathbb{R}_+$ tel que $\|x\|>\mathrm{A}\implies f(x)>f(0)$. Comme E est de dimension finie, la boule fermée $\mathrm{B}_f(0,\mathrm{A})$ est compacte. Comme f est continue, f admet un minimum m sur cette boule. Comme $0\in\mathrm{B}_f(0,\mathrm{A})$, $f(0)\geq m$ et donc pour $x\in\mathrm{E}\setminus\mathrm{B}_f(0,\mathrm{A})$, $f(x)>f(0)\geq m$. Finalement, $f(x)\geq m$ pour tout $x\in\mathrm{E}$ et m est atteint sur $\mathrm{B}_f(0,\mathrm{A})$ donc m est le minimum de f sur E.

Solution 47

Soit $y\in\mathrm{L}$. On se donne une suite $(y_n)\in\mathrm{L}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers y. Posons $x_n=f^{-1}(y_n)\in\mathrm{K}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Soit $x\in\mathrm{K}$ une valeur d'adhérence de la suite (x_n). On peut donc en extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers x. Par continuité de f en x, $(f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(x)$ i.e. $(y_{\varphi(n)})$ converge vers $f(x)$. Comme $y(_{\varphi(n)})$ est une suite extraite de (y_n), elle converge vers y. Par unicité de la limite, $y=f(x)$ i.e. $x=f^{-1}(y)$. Ainsi l'unique valeur d'adhérence de (x_n) est x i.e. l'unique valeur d'adhérence de $(f^{-1}(y_n))$ est $f^{-1}(y)$. Comme $(f^{-1}(y_n))$ est à valeurs dans le compact K, elle converge vers $f^{-1}(y)$. Par conséquent, f^{-1} est continue en y par caractérisation séquentielle de la continuité. Finalement, f^{-1} est continue sur L.

Connexité

Solution 48

---

1. Posons $\mathrm{U}=\mathbb{R}^n\setminus\cup_{i=1}^r\mathrm{Ker}\,f_i$ et notons $\mathrm{E}=\{-1,+1\}^r$. Pour $a\in\mathrm{E}$, on pose

$$\mathrm{C}_a=\{x\in\mathrm{U},\ \forall i\in[\![1,r]\!],\ a_if_i(x)>0\}$$

Montrons que les composantes connexes par arcs de U sont les C_a pour $a\in\mathrm{E}$.

Montrons que les C_a sont non vides. Soient $a\in\mathrm{E}$. Comme la famille $f_1,\dots,f_r$ est libre, l'application linéaire

$$\mathrm{F}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n&\longrightarrow&\mathbb{R}^r\\ x&\longmapsto&(f_i(x))_{1\leq i\leq r}\end{array}\right.$$

est de rang r, autrement dit surjective. Il existe donc $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{F}(x) = a$. On vérifie alors que $x \in \mathrm{C}_a$.
Montrons que les C_a sont connexes par arcs. Soient $a \in \mathrm{E}$ et $(x, y) \in \mathrm{C}_a^2$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$a_i f_i((1-t)x + ty) = a_i(1-t)f_i(x) + a_i t f_i(y) > 0$$

(considérer les cas $t = 0$, $t = 1$ et $t \in]0, 1[$). Ainsi C_a est convexe et, a fortiori, connexe par arcs.
Montrons que les C_a sont maximaux. Soit $a \in \mathrm{E}$, $x \in \mathrm{C}_a$ et $y \in \mathrm{U} \setminus \mathrm{C}_a$. Il existe donc $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_i f_i(x) > 0$ et $a_i f_i(y) < 0$. Soit $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ continue telle que $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$. L'application $a_i f_i \circ \phi$ est continue sur $[0, 1]$ et s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi ϕ ne peut être à valeurs dans U. Ceci prouve que C_a est un connexe par arcs maximal.
Par conséquent, le nombre de composantes connexes par arcs de U est $\operatorname{card} \mathrm{E} = 2^r$.

2. On pose à nouveau $\mathrm{U} = \mathbb{C}^n \setminus \cup_{i=1}^r \operatorname{Ker} f_i$. Montrons que U est connexe par arcs. Soient $(x, y) \in \mathrm{U}^2$. L'application

$$\mathrm{P} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\prod_{i=1}^r f_i((1-z)x + zy) \end{array} \right.$$

est polynomiale. Elle possède donc un nombre fini de racines. L'ensemble $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{P}(z) \neq 0\}$ est donc connexe par arcs et contient 0 et 1. Il est donc possible de construire une application $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{C}$ continue ne prenant pas pour valeurs ces racines et telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$. L'application $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ t & \longmapsto & (1 - \varphi(t))x + \varphi(t)y \end{array} \right.$ est continue. Comme φ ne prend pas pour valeurs les racines de P, $\mathrm{P} \circ \varphi$ ne s'annule pas ; autrement dit, ϕ est à valeurs dans U. Enfin, $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$: ϕ est donc un chemin continu de U entre x et y. Ceci prouve que U est connexe par arcs. Il ne possède donc qu'une seule composante connexe par arcs, à savoir lui-même.

Solution 49

1. Soit $(a, b) \in \mathrm{S}^2$. Supposons dans un premier temps que $a \neq -b$. Posons

$$\gamma : t \in [0, 1] \mapsto \frac{(1-t)a + tb}{\|(1-t)a + tb\|}$$

- Comme $a \neq -b$, on vérifie aisément que le dénominateur ne s'annule pas de sorte que γ est continue sur $[0, 1]$.
- γ est clairement à valeurs dans S.
- $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Supposons $a = -b$. Comme $\dim \mathrm{E} \geq 2$, il existe un vecteur c non colinéaire à a. En particulier, c est non nul et quitte à le divisier par sa norme, on peut supposer $c \in \mathrm{S}$. On alors $c \neq -a$ et $c \neq -b$. D'après ce qui précède, il existe un chemin continu γ_1 reliant a à c et un chemin continu γ_2 reliant c à b. En posant $\gamma(t) = \gamma_1(2t)$ pour $t \in [0, 1/2]$ et $\gamma(t) = \gamma_2(2t - 1)$ pour $t \in [1/2, 1]$, γ est un chemin continu reliant a à b.

2. Soit $\mathrm{S}(a, r)$ la sphère de centre $a \in \mathrm{E}$ et de rayon r. Alors $\mathrm{S}(a, r)$ est l'image de S par l'application continue $x \mapsto a + rx$ donc $\mathrm{S}(a, r)$ est également connexe par arcs.

Solution 50

On sait que $\det \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{-1, 1\}$. Or det est continu sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\{-1, 1\}$ n'est évidemment pas connexe par arcs donc $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas non plus connexe par arcs.

Solution 51

On rappelle qu'en posant $\mathrm{R} : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$,

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{\mathrm{R}(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$$

Comme R est clairement continue sur $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{R}$ est connexe par arcs, $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Solution 52

1. L'application d est polynomiale : elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois. Ainsi V est égal à $\mathbb{C}$ privé d'un nombre *fini* de points. Il est donc connexe par arcs.

2. L'application $f : z \in \mathbb{C} \mapsto (1-z)A + zB$ est clairement continue (elle est affine). On en déduit que $f(V)$ est connexe par arcs. Remarquons que $A = f(0) \in f(V)$ et $B = f(1) \in f(V)$. Comme $f(V)$ est connexe par arcs, il existe un chemin continu reliant A à B à valeurs dans $f(V)$. Par construction de V, $f(V) \subset GL_n(\mathbb{C})$ donc ce chemin continu est également à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$. Ceci étant valable pour tout couple $(A, B) \in GL_n(\mathbb{C})^2$, $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Solution 53

1. Soit f une telle application. L'application $x \mapsto x^3$ étant injective (car strictement croissante), on a alors $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Réciproquement, $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ vérifie bien la condition de l'énoncé.

2. Soit f une telle application. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $(f(z)/z)^3 = 1$ donc $f(z)/z = 1$ ou $f(z)/z = j$ ou $f(z)/z = j^2$.

   Remarque. On prendra garde à différencier les propositions logiques suivantes :

   $$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ (f(z)/z = 1 \text{ OU } f(z)/z = j \text{ OU } f(z)/z = j^2)$$

   et

   $$(\forall z \in \mathbb{C}^*, ; f(z)/z = 1) \text{ OU } (\forall z \in \mathbb{C}^*, ; f(z)/z = j) \text{ OU } (\forall z \in \mathbb{C}^*, ; f(z)/z = j^2)$$

   Ainsi l'application $\psi : z \in \mathbb{C}^* \mapsto \dfrac{f(z)}{z}$ est à valeurs dans $\{1, j, j^2\}$. Mais $\mathbb{C}^*$ est connexe et ψ est continue sur $\mathbb{C}^*$ donc $\psi(\mathbb{C}^*)$ est un connexe de $\{1, j, j^2\}$. Ainsi $\psi(\mathbb{C}^*) = \{1\}$ ou $\psi(\mathbb{C}^*) = \{j\}$ ou $\psi(\mathbb{C}^*) = \{j^2\}$. Comme f est continue en 0, on a donc $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ ou $f = j\,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ ou $f = j^2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$.