Corrigé TD : Séries

Solution 1.

- On suppose $0 < b < 1$. Dans ce cas, $b^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $2^{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $b^n = o\left(2^{\sqrt{n}}\right)$ puis $2^{\sqrt{n}} + b^n \sim 2^{\sqrt{n}}$. Finalement $u_n \sim a^n$. On en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge pour $0 < a < 1$ et diverge vers $+\infty$ sinon.
- On suppose $b > 1$. Dans ce cas, $2^{\sqrt{n}} = o\left(b^n\right)$ et donc $2^{\sqrt{n}}+b^n \sim b^n$. Finalement, $u_n \sim \left(\frac{a}{b}\right)^n 2^{\sqrt{n}}$. Si $a < b$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{a}{b} + \varepsilon < 1$. On montre alors que $u_n = o\left(\left(\frac{a}{b}+\varepsilon\right)^n\right)$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Si $a \geqslant b$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement.

Solution 2.

Première méthode :

- Supposons $p = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} \geqslant \frac{n!}{n!} = 1$$
La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge grossièrement.
- Supposons $p = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} \geqslant \frac{1}{n+1}$$
Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1}$ diverge vers $+\infty$. Par minoration, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge.
- Supposons $p \geqslant 2$. Pour $n \geqslant 2$,
$$1!+2!+\cdots+n! \leqslant (n-1)(n-1)!+n! \leqslant n(n-1)!+n! = 2n!$$
Ainsi
$$u_n \leqslant \frac{2n!}{(n+p)!} \leqslant \frac{2n!}{(n+2)!} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{2}{n^2}$$
Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ également.

Seconde méthode : On peut également montrer que $1!+2!+\cdots+n! \sim n!$. En effet, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$
$$\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} \geqslant 1$$
et pour $n \geqslant 3$,
$$\begin{aligned}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} &\leqslant 1+\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k!}{n!}\\ &\leqslant 1+\frac{1}{n}+(n-2)\frac{(n-2)!}{n!} \qquad \leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{(n-2)}{n(n-1)}\end{aligned}$$
Par encadrement, $\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ i.e. $1!+2!+\cdots+n! \sim n!$. On en déduit que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^p}$$

La série de terme général u_n est donc de même nature que celle de terme général $\frac{1}{n^p}$: elle converge donc *si et seulement si* $p \geqslant 2$.

Solution 3.

Supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Alors (S_n) converge vers la somme $S > 0$ de cette série. On a donc $\frac{u_n}{S_n} \sim \frac{u_n}{S}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{S_n}$ converge donc.
Supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge. Puisque cette série est à termes positifs, elle diverge donc vers $+\infty$. Si $\frac{u_n}{S_n}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{S_n}$ diverge grossièrement. Sinon, $\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) \sim -\frac{u_n}{S_n}$ donc les séries de terme général $\frac{u_n}{S_n}$ et $\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$ sont de même nature. Or

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) &= \sum_{n=1}^{N} \ln \frac{S_{n-1}}{S_n} \\ &= \sum_{n=1}^{N} (\ln S_{n-1} - \ln S_n) = \ln S_0 - \ln S_N\end{aligned}$$

Or $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$ puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge vers $+\infty$. Ainsi $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$ diverge de même que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{S_n}$.
Les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{S_n}$ sont donc toujours de même nature.

Solution 4.

On prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{2n}}{u_0} \leqslant \frac{v_{2n}}{v_0}$ et $\frac{u_{2n+1}}{u_1} \leqslant \frac{v_{2n+1}}{v_1}$. En posant $K = \max\left(\frac{u_0}{v_0}, \frac{u_1}{v_1}\right)$, on a donc $u_n \leqslant K v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est à termes positifs et son terme général est majoré par celui d'une série convergente : elle converge également.

Solution 5.

1. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour $n \geqslant N$. Par télescopage, on obtient, $\frac{u_n}{u_N} \leqslant \frac{v_n}{v_N}$ i.e. $u_n \leqslant \frac{u_N}{v_N} v_n$ pour tout $n \geqslant N$. On a donc $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

2. **a.** Soit β tel que $1 < \beta < \alpha$ et posons $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} \\ &= 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Ainsi $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{\alpha-\beta}{n}$. Puisque $\alpha - \beta > 0$, on a donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang. D'après la première question, $u_n = \mathcal{O}(v_n)$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge car $\beta > 1$ et, comme elle est à termes positifs, sa convergence entraîne celle de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

b. Cette fois-ci, on se donne β tel que $\alpha < \beta < 1$ et on pose à nouveau $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On montre comme précédemment que $v_n = \mathcal{O}(u_n)$. La divergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ entraîne la divergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

c. Si on pose $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge.
Si on pose maintenant $u_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$ pour $n \geqslant 2$, on a à nouveau $u_n = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Mais la fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln^2 x}$ étant décroissante, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^2 t}$ sont de même nature. Or une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t\ln^2 t}$ est $t \mapsto -\frac{1}{\ln t}$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale précédente et par conséquent celle de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

3. On a

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2n+2}{2n+3} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{2n}} \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Autrement dit, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ avec les notations précédentes. La série de terme général u_n diverge.

Remarque. Le critère de Raabe-Duhamel permet de conclure (sauf si $\alpha = 1$) dans les cas où le critère de d'Alembert ne le permet pas ($\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$).

Solution 6.

1. Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge, $a_n = o(1)$ et donc $a_n^2 = o(a_n)$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ étant convergente à termes positifs, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$ converge également.

2. Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge, $a_n = o(1)$ et donc $\frac{a_n}{1+a_n} \sim a_n$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ étant convergente à termes positifs, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge également.

3. Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge, $a_n = o(1)$. Ainsi $a_{2n} = o(1)$ et donc $a_n a_{2n} = o(a_n)$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ étant convergente à termes positifs, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n a_{2n}$ converge également.

4. On démontre facilement que pour $x, y \in \mathbb{R}$, $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\sqrt{a_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right)$. On sait que les séries de terme général a_n et $\frac{1}{n^2}$ convergent donc celle de terme général $\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ est à termes positifs et son terme général est majoré par celui d'une série convergente : elle converge donc également.

Solution 7.

1. En convenant que $A_{n_0-1} = 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k &= \sum_{k=n_0}^{n} (A_k - A_{k-1}) B_k \\
&= \sum_{k=n_0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=n_0}^{n} A_{k-1} B_k \\
&= \sum_{k=n_0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=n_0-1}^{n-1} A_k B_{k+1} \\
&= A_n B_n + \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k (B_k - B_{k+1}) \\
&= A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k
\end{aligned}$$

2. Il suffit de poser $a_n = \sin n$ et $B_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$. Avec les notations précédentes, pour tout $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=1}^{n} \sin k \\
&= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{i}\frac{e^{in}-1}{e^{i}-1}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{\frac{i(n+1)}{2}}\frac{\sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{\sin\frac{n+1}{2}\sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}} \\
b_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k} = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k$$

Or (A_n) est bornée et (b_n) converge vers 0 donc $(A_n b_n)$ converge vers 0. De plus pour tout $k \geqslant 1$,

$$|A_k b_k| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}} |b_k| = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

Or la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ converge (série télescopique) donc la série $\sum_{n\geqslant 1} A_n b_n$ est absolument convergente donc convergente. On en déduite la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin n}{n}$.

3. Rappelons que pour tout $n \geqslant n_0$

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$$

La suite (B_n) converge vers 0 et (A_n) est bornée donc $\lim_{n\to+\infty} A_n B_n = 0$.
Puisque (A_n) est bornée, $A_n b_n = \mathcal{O}(|b_n|)$. Or la série $\sum_{n\geqslant n_0} |b_n|$ converge car $\sum_{n\geqslant n_0} b_n$ est absolument convergente et est à termes positifs donc $\sum_{n\geqslant n_0} A_n b_n$ converge (absolument). Ainsi $\sum_{k=n_0}^{n-1} A_k b_k$ admet une limite quand n tend

vers $+\infty$.

Il s'ensuit que $\sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k$ admet également une limite lorsque n tend vers $+\infty$ i.e. que la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n B_n$ converge.

Solution 8.

1. Supposons que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \frac{u_n}{v_n}$. Par une récurrence évidente, $\frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{u_0}{v_0}$. Posons $\lambda = \frac{u_0}{v_0}$. On a alors $0 < u_n \leqslant \lambda v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$. Comme la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est à termes positifs et converge, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge également.
2. C'est tout simplement la contraposée de la proposition montrée à la question précédente.

Solution 9.

1. On remarque tout d'abord que $\sum \max(u_n, v_n)$ est à termes positifs.
   De plus, $\max(u_n, v_n) \leqslant u_n + v_n$ car u_n et v_n sont positifs.
   Enfin, $\sum u_n + v_n$ converge, ce qui permet de conclure à la convergence de $\sum \max(u_n, v_n)$.
2. On remarque tout d'abord que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ est à termes positifs.
   De plus, $\sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + v_n)$.
   Enfin, $\sum \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ converge, ce qui permet de conclure à la convergence de $\sum \max(u_n, v_n)$.
3. On remarque tout d'abord que $\sum \frac{u_n v_n}{u_n+v_n}$ est à termes positifs.
   De plus, $\frac{u_n v_n}{u_n+v_n} \leqslant v_n$ car $u_n + v_n$ est positif.
   Enfin, $\sum v_n$ converge, ce qui permet de conclure à la convergence de $\sum \frac{u_n v_n}{u_n+v_n}$.

Solution 10.

1. Soit $k \in]l, 1[$. Puisque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$ pour tout $n \geqslant N$. Une récurrence montre que $u_n \leqslant k^{n-N} u_N$ pour tout $n \geqslant N$. Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(k^n)$. Puisque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} k^n$ est un série à termes positifs convergente donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
2. Soit $k \in]1, l[$. Puisque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant k$ pour tout $n \geqslant N$. Une récurrence montre que $u_n \geqslant k^{n-N} u_N$ pour tout $n \geqslant N$. En particulier, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ et a fortiori ne converge pas vers 0. Ainsi $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.
3. Posons $u_n = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge. Posons $u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
4. Posons $u_n = \frac{n!}{n^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est à termes strictement positifs et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. On prouve alors classiquement que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.

Solution 11.

1. Si $\beta \geqslant 0$, alors $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$ pour $n \geqslant 3$. Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge puisque $\alpha > 1$. On en déduit que $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.
   Si $\beta < 0$, donnons-nous $\gamma \in]1, \alpha[$. Alors $(\ln n)^{-\beta} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^{\alpha-\gamma}\right)$ par croissances comparées. Ceci signifie que

$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$. Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n^\gamma}$ est à termes positifs et converge puisque $\gamma > 1$. On en déduit que $\sum_{n\geqslant2} u_n$ converge.

2. Si $\beta \leqslant 0$, alors $0 \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant u_n$ pour $n \geqslant 3$. Or $\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n^\alpha}$ diverge donc $\sum_{n\geqslant2} u_n$ diverge.

Si $\beta > 0$, donnons-nous $\gamma \in]\alpha, 1[$. Alors $(\ln n)^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o(n^{\gamma-\alpha})$ par croissances comparées. Ceci signifie que $\frac{1}{n^\gamma} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$. Or la série $\sum_{n\geqslant2} u_n$ est à termes positifs et la série de Riemann $\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n^\gamma}$ diverge puisque $\gamma < 1$. On en déduit que $\sum_{n\geqslant2} u_n$ diverge.

3. On a alors $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant u_n$ pour $n \geqslant 3$. Or la série harmonique $\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n}$ diverge. On en déduit que $\sum_{n\geqslant2} u_n$ diverge.

4. Posons $f(x) = \frac{1}{(x\ln x)^\beta}$ pour $x > 1$. f est décroissante sur $]1, +\infty$ de sorte que

$$\int_2^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=2}^n u_k \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^\beta} + \int_2^n f(x)\,dx$$

Si $\beta \neq 1$, alors $x \mapsto \frac{(\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta}$ est une primitive de f de sorte que

$$\frac{(\ln(n+1))^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta} \leqslant \sum_{k=2}^n u_k \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^\beta} + \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta}$$

Le théorème de minoration nous permet d'affirmer que la série $\sum u_n$ diverge si $\beta < 1$. Par contre, si $\beta > 1$, la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant2} u_n$ est croissante (puisque la série est à termes positifs) et majorée par une suite convergente donc elle converge en vertu du théorème de la limite monotone. On peut donc affirmer que $\sum_{n\geqslant2} u_n$ converge.

Si $\beta = 1$, alors $x \mapsto \ln(\ln x)$ est une primitive de f de sorte que

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leqslant \sum_{k=2}^n u_k$$

On conclut à la divergence de $\sum_{n\geqslant2} u_n$ via le théorème de minoration.

Solution 12.

1. Soit $q \in]l, 1[$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \sqrt[n]{u_n} \leqslant q$ pour $n \geqslant N$. Ainsi $0 \leqslant u_n \leqslant q^n$ pour $n \geqslant N$. Puisque la série $\sum q^n$ converge, il en est de même de la série $\sum u_n$.

2. Soit $q \in]1, l[$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant q \leqslant \sqrt[n]{u_n}$ pour $n \geqslant N$. Ainsi $0 \leqslant q^n \leqslant u_n$ pour $n \geqslant N$. Puisque la série $\sum q^n$ diverge, il en est de même de la série $\sum u_n$.

3. Posons $u_n = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ et $\sum u_n$ diverge.

Posons $u_n = \frac{1}{n^2}$. Alors $\sqrt[n]{u_n} = \exp\left(-\frac{2\ln n}{n}\right)$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ et $\sum u_n$ converge.

Solution 13.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geqslant 0$$

et

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leqslant 0$$

Ainsi la suite (S_{2n-1}) est croissante et la suite (S_{2n}) est décroissante. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_{2n} - S_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} - S_{2n-1} = 0$. Les suites (S_{2n-1}) et (S_{2n}) sont donc adjacentes. Elles convergent vers la même limite, ce qui assure la convergence de la suite (S_n) et donc de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Solution 14.

1. Supposons que $\sum u_n$ converge. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Il s'ensuit que $u_n = o(1)$ et donc $u_n^2 = o(u_n)$. Puisque $\sum u_n$ est à termes positifs et converge, $\sum u_n^2$ converge également.

   La réciproque est fausse puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge mais pas $\sum \frac{1}{n}$.
2. Il suffit de poser $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Solution 15.

(S_{2n}) est décroissante car

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$$

(S_{2n+1}) est croissante car

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geqslant 0$$

De plus

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Aussi les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont-elles adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite, ce qui entraîne la convergence de la suite (S_n), c'est-à-dire de la série $\sum (-1)^n u_n$.

Solution 16.

1. On sait que $\tan x \underset{x\to0}{=} x + \mathcal{O}(x^2)$ donc $\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Puisque $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge et est à termes positifs, il en est de même de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$.
2. Puisque $e^x \underset{x\to0}{=} 1 + x + o(x)$,

   $$\sqrt[n]{3} = e^{\frac{\ln 3}{n}} = 1 + \frac{\ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   et

   $$\sqrt[n]{2} = e^{\frac{\ln 2}{n}} = 1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On en déduit que

$$\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2} \sim \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{n}$$

Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}\right)$.

3. Puisque $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

De plus, $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ donc

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sim -\frac{1}{2n}$$

Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

4. Puisque $\operatorname{ch} x \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) = 1 + \frac{1}{6n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisque $\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n} = 1 + \frac{1}{6n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge et est à termes positifs, il en est de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}\right)$.

Solution 17.

Comme $\alpha > 0$, on a

$$\cos(1/n^\alpha) = 1 - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

ainsi, pour n au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} n\ln(\cos(1/n^\alpha)) &= n\ln\left(1 - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right) \\ &= -\frac{n^{1-2\alpha}}{2} + o(n^{1-2\alpha}) \end{aligned}$$

- Si $1 - 2\alpha < 0$, par continuité de l'exponentielle au point 0, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \neq 0$$

donc Σu_n diverge banalement.

- Si $1 - 2\alpha = 0$, par continuité de l'exponentielle en $-1/2$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$$

donc Σu_n diverge.

- Si $1-2\alpha > 0$, on a par croissances comparées au voisinage de $+\infty$,

$$u_n = e^{-n^{1-2\alpha}/2+o(n^{1-2\alpha})} = o(1/n^2)$$

donc Σu_n converge par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$.

En conclusion : Σu_n converge *si et seulement si*

$$0 < \alpha < 1/2.$$

SOLUTION 18.

On a clairement

$$u_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

donc Σu_n converge par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$.

SOLUTION 19.

Pöur tout $n \geqslant 0$, notons $u_n = 1/\binom{2n}{n}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(2n)!}{n!^2}\Big/\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}\\ &= \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{4} < 1$$

la série $\sum u_n$ est donc convergente d'après le critère de D'Alembert.

SOLUTION 20.

On a, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}u_n &= 1 + \frac{\ln(a)}{n} - \frac{2+\ln(bc)/n}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \frac{\ln(a/\sqrt{bc})}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Puisque toute série dont le terme général est en $\mathcal{O}(1/n^2)$ converge, on déduit du théorème sur les séries de Riemann que $\sum u_n$ converge *si et seulement si*

$$\ln(a/\sqrt{bc}) = 0,$$

i.e. $a = \sqrt{bc}$.

SOLUTION 21.

Comme

$$u_n = e^{-(1+1/n)\ln(n)} = \frac{1}{n}e^{-\ln(n)/n} \sim \frac{1}{n},$$

car

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n} = 0.$$

Ainsi la série $\sum u_n$ diverge.

Solution 22.

Comme
$$n^2 u_n = e^{2\ln(n)-\sqrt{n}},$$
on a
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0,$$
la série $\sum u_n$ converge par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$.

Solution 23.

On a :
$$n^2 u_n = e^{2\ln(n)-\ln(n)\ln(\ln(n))}.$$
Or
$$2\ln(n) = o(\ln(n)\ln(\ln(n))).$$
Ainsi
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$$
et donc, par comparaison aux séries de Riemann, $\sum u_n$ converge.

Solution 24.

Pour tout entier n, notons
$$\alpha_n = (7+4\sqrt{3})^n + (7-4\sqrt{3})^n.$$
D'après la formule du binôme, on a pour tout n dans $\mathbb{N}$:
$$\alpha_n = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} 2\binom{n}{2k} 7^{n-2k} 4^{2k} 3^k$$
ainsi $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ et donc, par π-périodicité et imparité de la tangente :
$$u_n = -\tan(\pi(7-4\sqrt{3})^n).$$
Comme $0 < 7-4\sqrt{3} < 1$, on a
$$u_n \sim -\pi(7-4\sqrt{3})^n$$
et puisque la série géométrique $\sum(7-4\sqrt{3})^n$ converge, la série $\sum u_n$ est convergente.

Solution 25.

Comme
$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$
où γ désigne la constante d'Euler, on a :
$$\begin{aligned} u_n = a^{H_n} &= a^{\ln(n)+\gamma+o(1)} = e^{(\ln(n)+\gamma+o(1))\ln(a)} \\ &= e^{\ln(n^{\ln(a)})} e^{\gamma+o(1)} = \frac{1}{n^{-\ln(a)}} e^{\gamma+o(1)} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$u_n \sim \frac{e^\gamma}{n^{-\ln(a)}}.$$

Comme $e^\gamma \neq 0$, on déduit du théorème sur les séries de Riemman que $\sum u_n$ converge *si et seulement si* $-\ln(a) > 1$, c'est-à-dire

$$a < \frac{1}{e}.$$

> **Remarque.** Sans être aussi savant sur la série harmonique, on peut déduire d'une comparaison série-intégrale que
>
> $$\ln(n) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$$
>
> ce qui permet de conclure avec des encadrements au lieu d'équivalents.

Solution 26.

On a clairement

$$u_n \underset{+\infty}{=} (1+a+b)\ln(n) + \frac{a+2b}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On a donc que $\sum u_n$ converge *si et seulement si*

$$a+b+1 = a+2b = 0,$$

ie $(a,b) = (-2,1)$.

Solution 27.

Pour tout entier n, notons

$$\alpha_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n.$$

D'après lma formule du binôme, on a pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$\alpha_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} 2\binom{n}{2k} 2^{n-2k} 3^k$$

ainsi $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ et donc, par π-antipériodicité du sinus :

$$|u_n| = |\sin(\pi(2-\sqrt{3})^n|.$$

Comme $0 < 2-\sqrt{3} < 1$, on a

$$|u_n| \sim (2-\sqrt{3})^n$$

et puisque la série géométrique $\sum (2-\sqrt{3})^n$ converge, la série $\sum u_n$ est absolumment convergente donc convergente.

Solution 28.

On posera $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.

- Supposons $\alpha \leqslant 0$. Par comparaison à une intégrale

  $$\int_0^n \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant S_n \leqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha}$$

  ou encore

  $$\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leqslant S_n \leqslant \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

  On en déduit $S_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

- Supposons $0 < \alpha \leqslant 1$. Par comparaison à une intégrale
$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant S_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}$$
Si $0 < \alpha < 1$, on en déduit
$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leqslant S_n \leqslant 1 + \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$
On en déduit à nouveau $S_n \sim \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
Si $\alpha = 1$,
$$\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln n$$
et donc $S_n \sim \ln n$.
- Supposons $\alpha > 1$. On compare à nouveau à une intégrale. Pour des entiers n et N tels que $1 \leqslant n < N$
$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}$$
ou encore
$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right)$$
En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient
$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$
On en déduit que $R_n \sim \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Solution 29.

Remarquons que S_n est la somme partielle de rang n de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$. Puisque $\frac{1}{n^2+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^2}$ et que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$ converge vers un réel C. En notant R_n le reste de rang n de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$, on a $S_n = C - R_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\frac{1}{k^2+\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^2}$, $R_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Une comparaison à une intégrale montre que $R_n \sim \frac{1}{n}$ d'où le résultat annoncé.

Solution 30.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a évidemment $u_n = \sum_{k=1}^n \ln k$. La fonction ln étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,
$$\int_1^n \ln(t)\,dt \leqslant u_n \leqslant \int_1^{n+1} \ln(t)\,dt$$
ou encore
$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant u_n \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n$$
On a clairement $1 = o(n\ln n)$, $n = o(n\ln n)$ donc $n\ln n - n + 1 \sim n\ln n$.
De plus,
$$(n+1)\ln(n+1) - n = n\ln n + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n$$
On a clairement $n = o(n\ln n)$ et $\ln n = o(n\ln n)$.
Par ailleurs, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = o(n\ln n)$.
On en déduit également que $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = o(n)$ et a fortiori $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = o(n\ln n)$.
Finalement, $(n+1)\ln(n+1) - n \sim n\ln n$.
Le théorème des gendarmes assure alors que $u_n \sim n\ln n$.

2. D'après la question précédente, $\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{1}{n^2(\ln n)^2}$. On en déduit par exemple que $\frac{1}{u_n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ce qui assure la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{u_n^2}$.

3. Soit $(x, y) \in]1, +\infty[$ tel que $x \leqslant y$. Alors $0 <\leqslant \ln x \leqslant \ln y$ donc $0\frac{1}{\ln y} \leqslant \frac{1}{\ln x}$. Puisque $0 < \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}$, on en déduit que $0 \leqslant f(y) \leqslant f(x)$.
Ainsi f est décroissante sur $]1, +\infty[$.

4. Soit $n \geqslant 2$. Puisque la fonction f est décroissante sur $]1, +\infty[$

$$\int_2^{n+1} f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k)$$

ou encore

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{u_k}$$

Par théorème de minoration, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{u_n}$ diverge (vers $+\infty$).

Solution 31.

Comme $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$, on a pour $k \in \mathbb{N}$ et pour $x = \dfrac{\alpha}{2^k}$:

$$\cos\frac{\alpha}{2^k} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2\sin\frac{\alpha}{2^k}} = \frac{u_{k-1}}{u_k}$$

avec $u_k = 2^k \sin\dfrac{\alpha}{2^k}$.
Notons S_n la somme partielle de la série de l'énoncé. On a donc par télescopage :

$$S_n = \ln u_{-1} - \ln u_n$$

Or $\ln u_{-1} = \ln\dfrac{\sin 2\alpha}{2}$. De plus, comme $\sin\dfrac{\alpha}{2^n} \sim \dfrac{\alpha}{2^n}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = \ln\alpha$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)$ converge et que sa somme vaut $\ln\left(\dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$.

Solution 32.

On a

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_p} \sum_{n\geqslant 0} \frac{\omega^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_p} \omega^n}{n!}$$

puisque les séries intervenant dans cette égalité convergent. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'endomorphisme de groupes $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{U}_p & \longrightarrow & \mathbb{U}_p \\ \omega & \longmapsto & \omega^n \end{array}\right.$ est un automorphisme *si et seulement si* n est premier avec p autrement dit *si et seulement si* p ne divise pas n (puisque p est premier). De plus, on sait que la somme des racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité est nulle. Donc pour n non multiple de p, $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_p} \omega^n = 0$ et pour n multiple de p, $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_p} \omega^n = p$. Finalement,

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_p} \sum_{n\geqslant 0} \frac{\omega^n}{n!} = p \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(pn)!}$$

Or $\sum_{n\geqslant 0}\frac{\omega^n}{n!}=e^\omega$. Donc $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(pn)!}=\frac{1}{p}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_p}e^\omega$.

Solution 33.

Considérons la fraction rationnelle $F=\frac{X}{X^4+X^2+1}$. Elle admet une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ du type

$$F=\frac{aX+b}{X^2-X+1}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

L'imparité de F donne $a=c$ et $b=-d$. En considérant la limite de $xF(x)$ lorsque x tend vers $\pm\infty$, on trouve $a+c=0$ et donc $a=c=0$. On trouve alors facilement $b=\frac{1}{2}$ et $d=-\frac{1}{2}$ d'où

$$F=\frac{1}{2(X^2-X+1)}-\frac{1}{2(X^2+X+1)}$$

On remarque alors que $X^2-X+1=X^2-(X-1)$ et que $X^2+X+1=(X+1)^2-X$. Ainsi pour $p\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{p}\frac{n}{n^4+n^2+1}&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{n^2-(n-1)}-\frac{1}{(n+1)^2-n}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{(p+1)^2-p}\right)\text{ par télescopage}\\&\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ainsi la série de l'énoncé converge bien et sa somme vaut $\frac{1}{2}$.

Solution 34.

La fraction rationnelle $F=\frac{2X-1}{X^3-4X}$ admet une décomposition en éléments simples du type

$$F=\frac{a}{X-2}+\frac{b}{X}+\frac{c}{X+2}$$

En posant $P=2X-1$ et $Q=X^3-4X$, on a

$$\begin{aligned}a&=\frac{P(2)}{Q'(2)}=\frac{3}{8}\\b&=\frac{P(0)}{Q'(0)}=\frac{1}{4}\\c&=\frac{P(-2)}{Q'(-2)}=-\frac{5}{8}\end{aligned}$$

Pour $p\geqslant 3$, on a en remarquant que $\frac{1}{4}=\frac{5}{8}-\frac{3}{8}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{p}\frac{2n-1}{n^3-4n}&=\frac{3}{8}\sum_{n=3}^{p}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\frac{5}{8}\sum_{n=3}^{p}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)+\frac{5}{8}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2}\right)\text{ par télescopage}\\&\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{89}{96}\end{aligned}$$

Ainsi la série de l'énoncé converge et sa somme vaut $\frac{89}{96}$.

Solution 35.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\binom{n+p}{n}} = \frac{p!}{(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)}$$
$$= \frac{p!}{p-1}\frac{(n+p)-(n+1)}{(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)}$$
$$= \frac{p!}{p-1}\left(\frac{1}{(n+p-1)\dots(n+1)} - \frac{1}{(n+p)\dots(n+2)}\right)$$

Donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a par télescopage

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\binom{n+p}{n}} = \frac{p!}{p-1}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{(n+p-1)\dots(n+1)} - \frac{1}{(n+p)\dots(n+2)}\right)$$
$$= \frac{p!}{p-1}\left(\frac{1}{(p-1)\dots 1} - \frac{1}{(N+p)\dots(N+2)}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{p!}{(p-1)(p-1)!} = \frac{p}{p-1}$$

Ainsi la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$ converge et sa somme vaut $\frac{p}{p-1}$.

Solution 36.

1. On reconnaît le développement de Taylor en 0 de exp.
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, a fortiori, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment d'extrémités 0 et x. De plus, la dérivée d'ordre $n+1$ de exp est encore exp pour tout t compris entre 0 et x, $|e^t| = e^t \leqslant M$ avec $M = \max(e^x, 1)$ (pour éviter de distinguer suivant le signe de x). En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et x à l'ordre n, on a
$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$
Remarquons que M est indépendant de n donc l'inégalité précédente est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par comparaison des suites de référence, $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$ par encadrement. La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge donc et sa somme est e^x.
2. On reconnaît les développements de Taylor en 0 de cos et sin.
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. cos et sin sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, a fortiori, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment d'extrémités 0 et x. Une récurrence évidente montre que $\cos^{(2n+1)} = (-1)^{n+1}\sin$ et $\sin^{(2n+2)} = (-1)^{n+1}\sin$. Il est alors évident que $\cos^{(2n+1)}$ et $\sin^{(2n+2)}$ sont majorées en valeur absolue par 1 sur $\mathbb{R}$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à cos entre 0 et x à l'ordre $2n$, on a
$$\left|\cos x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à sin entre 0 et x à l'ordre $2n+1$, on a
$$\left|\sin x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$
Par comparaison des suites de référence,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0$$
Ceci permet de conclure que les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ convergent et ont respectivement pour sommes $\cos x$ et $\sin x$.

> **Remarque.** On peut, en reprenant la preuve de la première question, montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$ converge et a pour somme e^{ix}. On obtient la convergence et la somme des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ en passant à la partie réelle et imaginaire.

3. On reconnaît le développement de Taylor en0 de $x \mapsto \ln(1+x)$.
Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. $f : t \mapsto \ln(1+t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ donc, a fortiori, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0,x]$. Une récurrence évidente montre que $f^{(n+1)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}$ pour tout $t \in]-1,+\infty[$. Ainsi pour tout $t \in [0,x]$,

$$|f^{(n+1)}(t)| \leqslant n!$$

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et x à l'ordre n, on a

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| \leqslant \frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

car $x \in [0,1]$. Par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} = \ln(1+x)$. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ converge donc et sa somme vaut $\ln(1+x)$.

Solution 37.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^x t^{k-1}\, dt \\
&= \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k\, dt \\
&= \int_0^x \frac{1-(-t)^n}{1+t}\, dt \\
&= \int_0^x \frac{dt}{1+t} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt \\
&= \ln(1+x) + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt
\end{aligned}$$

Si x est positif, on a pour tout $t \in [0,x]$

$$0 \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$$

et par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt = 0$ puis

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = \ln(1+x)$$

On en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ converge et que sa somme est $\ln(1+x)$.
Supposons maintenant $x \leqslant 0$. Remarquons que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\, dt$$

Puis en effectuant le changement de variables $u = -t$ (pour se ramener à une variable d'intégration positive et s'éviter des maux de tête)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = \ln(1+x) + \int_0^{-x} \frac{u^n}{1-u}\, du$$

Pour tout $u \in [0, -x]$

$$1 \leqslant \frac{1}{1-u} \leqslant \frac{1}{1+x}$$

Par croissance de l'intégrale

$$\int_0^{-x} u^n \, du \leqslant \int_0^{-x} \frac{u^n}{1-u} \, du \leqslant \frac{1}{1+x} \int_0^{-x} u^n \, du$$

ou encore

$$\frac{(-x)^{n+1}}{n+1} \leqslant \int_0^{-x} \frac{u^n}{1-u} \, du \leqslant \frac{1}{1+x} \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{-x} \frac{u^n}{1-u} \, dt = 0$ puis

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = \ln(1+x)$$

On en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que sa somme est $\ln(1+x)$.

Solution 38.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1} \, dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k \, dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t} \, dt \\
&= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt \\
&= \ln(1+x) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt
\end{aligned}$$

On a pour tout $t \in [0, 1]$

$$0 \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$$

et par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt = 0$ puis

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = \ln(1+x)$$

On en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et que sa somme est $\ln(1+x)$.

Solution 39.

Notons u_n le terme général de la série étudiée. Puisque $u_n \sim 1/n^2$, la série $\sum u_n$ est clairement convergente. On remarque que, pour tout réel $x > 0$:

$$\frac{1}{x^2+3x} = \frac{1}{3x} - \frac{1}{3(x+3)}.$$

Il y a donc télescopage dans les sommes partielles de $\sum u_n$ qui converge et dont la somme vaut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}.$$

Solution 40.

Pour tout $n \geqslant 0$, on a par croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction arctangente de 0 à $\pi/2$:

$$\alpha_n = \arctan(n+1) - \arctan(n) \in [0, \pi/2[.$$

De plus,

$$\tan(\alpha_n) = \frac{n+n-n}{1+n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n+1}$$

et ainsi

$$\alpha_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right).$$

Il y donc télescopage dans les sommes partielles de $\sum u_n$ qui converge et dont la somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{\pi}{2}.$$

Solution 41.

Puisque $0 \leqslant p(n) \leqslant 9$ pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{p(n)}{n(n+1)} = \mathcal{O}\left(\frac{9}{n^2}\right)$$

et la série de l'énoncé est convergente. On remarque que, pour tout m dans $\mathbb{N}^*$, on a $p(n) = m$ *si et seulement si* $10^{m-1} \leqslant n < 10^m$. Notons $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de sommes partielles de la série de l'énoncé. On sait que $(S_{10^m-1})_{m\geqslant 1}$ converge vers la même limite que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ en tant que suite extraite. Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p(n)}{n(n+1)} = \lim_{m\to+\infty} S_{10^m-1}.$$

Or, pour tout $m \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
S_{10^m-1} &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=10^{k-1}}^{10^k-1} \frac{p(\ell)}{\ell(\ell+1)} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=10^{k-1}}^{10^k-1} \frac{k}{\ell(\ell+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{m} k \sum_{\ell=10^{k-1}}^{10^k-1} \left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} k\left(\frac{1}{10^{k-1}} - \frac{1}{10^k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{10^{k-1}} - \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{10^k} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{k-1+1}{10^{k-1}} - \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{10^k} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{10^{k-1}} - \frac{m}{10^m} = \frac{1-1/10^m}{1-1/10} - \frac{m}{10^m} \\
&= \frac{10}{9}(1-10^{-m}) - \frac{m}{10^m}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{m\to+\infty} S_{10^m-1} = \frac{10}{9}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p(n)}{n(n+1)} = \frac{10}{9}.$$

Solution 42.

- La série est clairement alternée de terme général convergeant vers 0 : elle est donc convergente.
- Soit $n \geqslant 1$. Notons $(\Sigma_n)_{n\geqslant 2}$ la suite des sommes partielles de cette série et posons, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \ln(k).$$

On a, après tout calcul

$$\begin{aligned}
\Sigma_{2n} &= \sum_{k=2}^{2n} (-1)^k[\ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln(k)] \\
&= -4S_{2n} + \ln(2n(2n+1)) \\
&= -4\ln\left(\frac{2\times 4\times\cdots\times(2n)}{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}\right) + \ln(2n(2n+1)) \\
&= \ln\left(\frac{2n(2n+1)(2n)!^4}{2^{8n}n!^8}\right)
\end{aligned}$$

En utilisant l'équivalent de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

on trouve que

$$\frac{2n(2n+1)(2n)!^4}{2^{8n}n!^8} \sim \frac{4n^2(2\pi\times 2n)^2(\frac{2n}{e})^{8n}}{2^{8n}(2\pi\times n)^4(\frac{n}{e})^{8n}} \sim \frac{4}{\pi^2}$$

et donc, par continuité du logarithme, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \Sigma_{2n} = \ln\left(\frac{4}{\pi^2}\right),$$

et, puisque la série converge, on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{4}{\pi^2}\right).$$

Solution 43.

La série

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \ln(1 + 1/n)$$

est clairement alternée. Comme

$$(\ln(1 + 1/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$$

tend vers 0 en décroissant, on déduit du critère spécial des séries alternées que la série converge. Notons $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des sommes partielles de cette série. Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)\\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right) = -\sum_{k=0}^{n-1} [\ln(2k+2)-\ln(2k+1)] + \sum_{k=1}^{n} [\ln(2k+1)-\ln(2k)]\\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \ln(2k+2) - \sum_{k=1}^{n} \ln(2k) + \sum_{k=1}^{n} \ln(2k+1) + \sum_{k=0}^{n-1} \ln(2k+1)\\
&= -2\sum_{k=1}^{n} \ln(2k) + 2\sum_{k=0}^{n-1} \ln(2k+1) + \ln(2n+1)\\
&= \ln\left(\left[\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\right]^2 (2n+1)\right) = \ln\left(\left[\frac{(2n)!}{(2\times 4\times\cdots\times(2n))^2}\right]^2 (2n+1)\right)\\
&= \ln\left(\left[\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\right]^2 (2n+1)\right) = \ln\left(\frac{(2n)!^2}{2^{4n} n!^4}(2n+1)\right)
\end{aligned}$$

Or, d'après la formule de Stirling, on sait que

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

d'où

$$\frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}2^{2n}(n/e)^{2n}}{2^{2n}2\pi n(n/e)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

et donc

$$\frac{(2n)!^2}{2^{4n}n!^4}(2n+1) \sim \frac{2n}{n\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

On déduit alors de la continuité du logarithme que

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

puis de la convergence de la série que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right).$$

Solution 44.

Posons $v_0 = 1$ et, pour tout $k \geqslant 1$

$$v_k = \frac{\sqrt{k!}}{(1+\sqrt{1})\cdots(1+\sqrt{k})}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on a clairement

$$u_n = v_{n-1} - v_n.$$

Ainsi, en notant $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, on obtient après telescopage

$$S_n = v_0 - v_n = 1 - v_n.$$

De plus, on a

$$v_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}$$

et donc

$$-\ln(v_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

Comme

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$$

et que $\sum k^{-1/2}$ diverge vers $+\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} -\ln(v_n) = +\infty$$

et, par composition des limites,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0.$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1.$$

Solution 45.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Notons $f_x(t) = \dfrac{t - [t]}{t(t+x)}$. Comme $x > 0$, $t(t+x)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $]0, y]$. De plus, pour $0 \leqslant t < 1$, $[t] = 0$ et donc

$$\lim_{t\to0^+} \frac{t-[t]}{t(t+x)} = \lim_{t\to0^+} \frac{1}{t+x} = \frac{1}{x}$$

Enfin, la fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f_x est continue par morceaux sur $[0, y]$ et l'intégrale $G(x, y)$ est bien définie pour tout $(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction f_x est positive sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $y \mapsto G(x, y)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Il suffit donc maintenant de prouver que cette fonction est majorée. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $t - [t] < 1$ et $t(t+x) \geqslant t^2$ donc $f_x(t) \leqslant \frac{1}{t^2}$. On peut supposer $y \geqslant 1$. Séparons l'intégrale définissant $G(x, y)$ en deux parties pour éviter les problèmes en 0 :

$$G(x,y) = \int_0^1 f_x(t)\,dt + \int_1^y f_x(t)\,dt \leqslant \int_0^1 f_x(t)\,dt + \int_1^y \frac{dt}{t^2} \leqslant \int_0^1 f_x(t)\,dt + 1 - \frac{1}{y} \leqslant \int_0^1 f_x(t)\,dt + 1$$

Ainsi $y \mapsto G(x, y)$ est croissante est majorée, elle admet donc une limite finie en $+\infty$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a classiquement $\dfrac{1}{t(t+n)} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+n}\right)$. On en déduit que

$$G(n,y) = \frac{1}{n}\left(\int_0^y \frac{t-[t]}{t}\,dt - \int_0^y \frac{t-[t]}{t+n}\,dt\right)$$

On peut effectuer le changement de variable $u = t + n$ dans la seconde intégrale. Comme n est entier $[t] = [u - n] = [u] - n$ et donc $t - [t] = u - [u]$. On a donc

$$\int_0^y \frac{t-[t]}{t+n}\,dt = \int_n^{y+n} \frac{u-[u]}{u}\,du$$

On a alors

$$G(n,y) = \frac{1}{n}\left(\int_0^y \frac{t-[t]}{t}\,dt - \int_n^{y+n} \frac{t-[t]}{t}\,dt\right)$$

On utilise la relation de Chasles :

$$\int_0^y \frac{t-[t]}{t}\,dt = \int_0^n \frac{t-[t]}{t}\,dt + \int_n^y \frac{t-[t]}{t}\,dt \qquad \int_n^{y+n} \frac{t-[t]}{t}\,dt = \int_n^y \frac{t-[t]}{t}\,dt + \int_y^{y+n} \frac{t-[t]}{t}\,dt$$

Après simplification, on a la relation demandée.

4. Déterminons tout d'abord une expression de $\mathsf{G}(n)$. Remarquons que

$$0 \leqslant \int_y^{y+n} \frac{t-[t]}{t}\,dt \leqslant \int_y y+n\frac{1}{y}\,dt = \frac{n}{y}$$

On en déduit que $\lim\limits_{y\to+\infty}\int_y^{y+n}\frac{t-[t]}{t}\,dt = 0$. Ainsi $\mathsf{G}(n)=\frac{1}{n}\int_0^n \frac{t-[t]}{t}\,dt$ et $\mathsf{H}(n)=\int_0^n\frac{t-[t]}{t}\,dt$. On a donc

$$\mathsf{H}(n)-\mathsf{H}(n-1)=\int_{n-1}^{n}\frac{t-[t]}{t}\,dt$$

On effectue le changement de variables $u=t-(n-1)$ de sorte que

$$\mathsf{H}(n)-\mathsf{H}(n-1)=\int_0^1\frac{u-[u]}{u+n-1}\,dt=\int_0^1\frac{u}{u+n-1}$$

car $[u]=0$ pour $0\leqslant u<1$. On obtient alors facilement

$$\mathsf{H}(n)-\mathsf{H}(n-1)=1-(n-1)\ln\frac{n-1}{n}=1-(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

On va maintenant chercher un équivalent de $\mathsf{H}(n)-\mathsf{H}(n-1)-\frac{1}{2n}$.

$$\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2(n-1)^2}+\frac{1}{3(n-1)^3}+o\left(\frac{1}{(n-1)^3}\right)$$

On en déduit que

$$\mathsf{H}(n)-\mathsf{H}(n-1)=\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{3(n-1)^2}+o\left(\frac{1}{(n-1)^2}\right)$$

Or $\frac{1}{2(n-1)}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\frac{1}{(n-1)^2}\sim\frac{1}{n^2}$. Finalement,

$$\mathsf{H}(n)-\mathsf{H}(n-1)-\frac{1}{2n}=\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{6n^2}$ converge, on a également convergence de la série de terme général $\mathsf{H}(n)-\mathsf{H}(n-1)-\frac{1}{2n}$. Notons (S_n) la suite des sommes partielles de cette série i.e.

$$\mathsf{S}_n=\sum_{k=2}^{n}\mathsf{H}(k)-\mathsf{H}(k-1)-\frac{1}{2k}$$

On a par téléscopage $\mathsf{S}_n=\mathsf{H}(n)-\mathsf{H}(1)-\sum_{k=2}^n\frac{1}{2k}$. Comme (S_n) est bornée et que $\sum_{k=2}^n\frac{1}{2k}\sim\frac{1}{2}\ln n$ tend vers $+\infty$, on en déduit que $\mathsf{H}(n)\sim\frac{1}{2}\ln n$. Ainsi $\mathsf{G}(n)\sim\frac{1}{n\ln n}$.

Solution 46.

1. Définition

On définit deux suites (q_n) et (a_n) par récurrence. On pose $a_0=x$ et pour $n\in\mathbb{N}$

$$q_n=\left\lfloor\frac{1}{a_n}\right\rfloor+1 \qquad\qquad a_{n+1}=q_na_n-1$$

Il faut vérifier que ces deux suites sont bien définies. Nous démontrerons en même temps que (q_n) est une suite d'entiers supérieurs ou égaux à 2. Faisons l'hypothèse de récurrence suivante :

$\mathsf{HR}(n)$: a_n et q_n sont définis, $q_na_n>1$, $0<a_n\leqslant 1$ et $q_n\geqslant 2$.

Initialisation : a_0 est bien définie et comme $a_0 = x > 0$, q_0 est bien défini et c'est clairement un entier. De plus, $\frac{1}{a_0} < q_0 \leqslant \frac{1}{a_0} + 1$ donc $a_0 q_0 > 1$. D'après l'énoncé $a_0 = x \in]0,1]$. On en déduit également que $\frac{1}{a_0} \geqslant 1$ et donc, par croissance de la partie entière, $q_0 \geqslant 2$.
Hérédité : Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$. a_{n+1} est bien défini puisque a_n et q_n le sont. De plus, $a_{n+1} = q_n a_n - 1 > 0$ donc q_{n+1} est bien défini et c'est clairement un entier. Par ailleurs, $\frac{1}{a_{n+1}} < q_{n+1} \leqslant \frac{1}{a_{n+1}} + 1$ donc $q_{n+1}a_{n+1} > 1$. On sait également que $\frac{1}{a_n} < q_n \leqslant \frac{1}{a_n} + 1$ donc $q_n a_n \leqslant a_n + 1$ puis $a_{n+1} = q_n a_n - 1 \leqslant a_n \leqslant 1$.
Conclusion : $\mathrm{HR}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En reprenant une partie de la récurrence, on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{a_n} < q_n \leqslant \frac{1}{a_n} + 1$ implique que $q_n a_n \leqslant a_n + 1$ et donc que $a_{n+1} = q_n a_n - 1 \leqslant a_n$. La suite (a_n) est une suite décroissante de réels strictement positifs donc la suite $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ est croissante. Par croissance de la partie entière, la suite (q_n) est croissante.

Reste à montrer qu'on a bien $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n}$. Montrons par récurrence que

$$x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_k} + \frac{a_{n+1}}{q_0 q_1 \dots q_n}$$

Puisque $a_1 = q_0 a_0 + 1$, $x = a_0 = \frac{1}{q_0} + \frac{a_1}{q_0}$, ce qui initialise la récurrence. Supposons alors que $x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_k} + \frac{a_{n+1}}{q_0 q_1 \dots q_n}$. Puisque $a_{n+2} = q_{n+1} a_{n+1} - 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{q_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{q_{n+1}}$ et donc

$$x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_k} + \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n q_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{q_0 q_1 \dots q_n q_{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_k} + \frac{a_{n+2}}{q_0 q_1 \dots q_n q_{n+1}}$$

L'hérédité est donc prouvée.
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n \geqslant 2$ et $0 \leqslant a_n \leqslant 1$, on a $0 \leqslant \frac{a_{n+1}}{q_0 q_1 \dots q_n} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$. Ceci prouve que $\frac{a_{n+1}}{q_0 q_1 \dots q_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$.

Unicité

Supposons qu'il existe une suite croissante d'entiers supérieurs ou égaux à 2 (q_n) telle que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{q_n q_{n+1} \dots q_k}$. Cette somme est bien convergente puisque pour $k \geqslant n$, $\frac{1}{q_n q_{n+1} \dots q_k} \leqslant \frac{1}{2^{k-n+1}}$ et que la série $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-n+1}}$ converge. On remarque que $a_{n+1} = q_n a_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, comme (q_n) est croissante, on a $a_{n+1} \leqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin, $q_n = \frac{1}{a_n} + \frac{a_{n+1}}{a_n}$ et donc $\frac{1}{a_n} < q_n \leqslant \frac{1}{a_n} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $q_n = \left\lfloor \frac{1}{a_n} \right\rfloor + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi les suites (q_n) et (a_n) vérifient $a_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$q_n = \left\lfloor \frac{1}{a_n} \right\rfloor + 1 \qquad\qquad a_{n+1} = q_n a_n - 1$$

Ceci détermine la suite (q_n) de manière unique.

2. Supposons la suite (q_n) constante égale à C à partir du rang N.

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n} + \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_{N-1} C^{n-N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n} + \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_{N-1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{C^n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n} + \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_{N-1}} \frac{C}{C-1} \end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit bien que x est rationnel.
Supposons maintenant x rationnel. Il existe donc $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{p}{q}$. On garde les notations de la question

précédente. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier p_n tel que $a_n = \frac{p_n}{q}$. L'initialisation est claire puisque $a_0 = x = \frac{p}{q}$: il suffit donc de poser $p_0 = p$. Supposons maintenant que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier p_n tel que $a_n = \frac{p_n}{q}$. On a alors $a_{n+1} = q_n a_n - 1 = \frac{p_{n+1}}{q}$ avec $p_{n+1} = q_n p_n - q$, ce qui achève la récurrence. D'après la première question, (a_n) est une suite décroissante de réels strictements positifs : on en déduit que (p_n) est une suite décroissante d'entiers naturels (non nuls). La suite (p_n) est donc stationnaire. Il en est de même de la suite (a_n) puis de la suite (q_n) puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n = \left\lfloor \frac{1}{a_n} \right\rfloor + 1$.

3. Posons $x = e - 2$ de sorte que $x \in]0,1]$. On sait que $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!}$. Si on pose $q_n = n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, (q_n) est bien croissante et on a bien $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n}$. La suite (q_n) n'étant pas stationnaire, x n'est pas rationnel d'après la question précédente.