Espaces vectoriels de dimension finie

Solution 1.

1. C'est faux en général ! Par exemple pour $a = b = 0$, on a $1 \cdot a + 1 \cdot b = 0$ mais $(1, 1) \neq (0, 0)$!
2. C'est faux en général ! Par exemple si $a = 0$, $\forall b \in E$, (a, b) est liée ! L'implication est vraie si on a de plus l'hypothèse $a \neq 0$.
3. C'est faux en général ! Par exemple si $a = b = 0$, $\forall c \in E$, (a, b, c) est liée !

Solution 2.

Notons respectivement u, v et w les vecteurs suivants,

$$(m, 1, 1) \ , \ (2m, -1, m) \ , \ (1, 5, 2).$$

Appliquons le critère usuel en recherchant les solutions réelles x, y, z du système suivant

$$yu + zv + xw = 0,$$

ie, sous forme matricielle,

$$\begin{bmatrix} 1 & m & 2m \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 2m \end{bmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_2 \leftarrow L_3 \leftarrow L_1$$

puis par les opérations $L_2 \leftarrow 5L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow -5L_3 + L_1$,

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5m+2 \\ 0 & 1-5m & -1-10m \end{bmatrix}$$

et par l' opération $L_3 + \frac{1}{3}(5m-1)L_2$,

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5m+2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3}(5m^2-5m-1) \end{bmatrix}$$

Le système est donc libre *si et seulement si*

$$5m^2 - 5m - 1 \neq 0,$$

c'est-à-dire,

$$m \neq \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{10}.$$

Solution 3.

Appliquons le critère usuel : soient a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0, \quad ae^x + bx^2 + c\ln(x) = 0.$$

On a pour tout x strictement positif ,

$$a + bx^2e^{-x} + c\ln(x)e^{-x} = 0,$$

et faisant tendre x vers $+\infty$, d'après les croissances comparées ,

$$a = 0.$$

On a pour tout x strictement positif ,

$$b + c\frac{\ln(x)}{x^2} = 0,$$

et faisant tendre x vers $+\infty$, d'après les croissances comparées ,

$$b = 0.$$

On a alors $c = 0$ car la fonction logarithme est non nulle.

Solution 4.

Appliquons la méthode du pivot de Gauss de détermination du rang.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{bmatrix}$$

par $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - aL_1$. Puis, par $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, on aboutit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a^2-a \end{bmatrix}, \text{ où } 2-a-a^2 = (2+a)(1-a).$$

► Si $a = 1$ ou $a = -2$, le rang de la famille n'est pas égal à trois donc la famille est liée.

► Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$, le rang vaut trois et la famille est donc libre.

La famille est donc libre *si et seulement si* $a \notin \{-2, 1\}$.

Solution 5.

1. Le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = a \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = b \\ 3\lambda_1 = c \end{cases}$$

a une solution si, et seulement si, $a - 2b + c = 0$. Le couple (u_1, u_2) n'engendre donc pas $\mathbb{R}^3$.

Remarque. On démontrera, en étudiant la théorie de la dimension, qu'une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ compte *au moins* n vecteurs, ce qui permet de répondre à cette question sans calcul. ■

2. Le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 = a \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = b \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = c \end{cases}$$

possède une unique solution, quel que soit le second membre (a, b, c). (Il suffit de réduire le système sous forme triangulaire pour le constater.)

Par conséquent, la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice (et même une base) de $\mathbb{R}^3$.

3. Famille génératrice (et même base) de $\mathbb{R}^3$.

4. Le système

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (a, b, c)$$

possède une solution si, et seulement si, $a + b = 0$, donc la famille (u_1, u_2, u_3) n'engendre pas $\mathbb{R}^3$.

5. Le système
$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (a, b, c)$$
possède une solution si, et seulement si, $-a+b+c=0$, donc la famille (u_1, u_2, u_3) n'engendre pas $\mathbb{R}^3$.

6. Le système
$$\sum_{k=1}^{4} \lambda_k u_k = (a, b, c)$$
possède une infinité de solutions, quel que soit le second membre, donc la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) engendre $\mathbb{R}^3$.

Solution 6.

1. Comme (e_1, e_2) est libre, $u \in \text{vect}(e_1, e_2)$ *si et seulement si* (e_1, e_2, u) est liée. Pivotons...
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ x & 1 & y & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1-2x & y-3x & 1-4x \end{bmatrix}$$
par $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - xL_1$. Puis
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & y-3x & -3+4x \end{bmatrix}$$
par $L_3 \leftarrow (L_3 + (1-2x)L_2)/4$. Ainsi
$$(x, 1, y, 1) \in \text{vect}(e_1, e_2)$$
si et seulement si
$$y - 3x = 0, \quad -3 + 4x = 0,$$
ie
$$(x, y) = \left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right).$$

2. Comme (e_1, e_2) est libre, $u \in \text{vect}(e_1, e_2)$ *si et seulement si* (e_1, e_2, u) est liée. Pivotons...
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ x & 1 & 1 & y \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1-2x & 1-3x & y-4x \end{bmatrix}$$
par $L_2 \leftarrow (L_2 - L_1)/4$ et $L_3 \leftarrow L_3 - xL_1$. Puis
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1-3x & y+4x-4 \end{bmatrix}$$
par $L_3 \leftarrow (L_3 + (1-2x)L_2)/4$. Ainsi
$$(x, 1, 1, y) \in \text{vect}(e_1, e_2)$$
si et seulement si
$$1 - 3x = 0, \quad y + 4x - 4 = 0,$$
ie
$$(x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right).$$

Solution 7.

Soient $(f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{a_n})$ une sous-famille finie de $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ (les a_i sont donc distincts deux à deux) et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_i} = 0$.
On peut supposer $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ sans perte de généralité. Supposons qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$ et posons alors $j = \max\{i \in I, \lambda_i \neq 0\}$. Alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_i} \underset{+\infty}{\sim} \lambda_j f_{a_j}$. D'où $\lambda_j f_{a_j} \underset{+\infty}{\sim} 0$, ce qui est absurde. C'est donc que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$. La famille $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ est donc libre.
On en déduit que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Solution 8.

Soient $(f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{a_n})$ une sous-famille finie de $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ (les a_i sont donc distincts deux à deux) et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_i} = 0$.
Supposons qu'il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$. Alors $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} \lambda_i f_{a_i} = -\lambda_j f_{a_j}$. Le membre de gauche est dérivable en a_i alors que le membre de droite ne l'est pas d'où une contradiction. C'est donc que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$. La famille $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ est donc libre.
On en déduit que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Solution 9.

1. Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
   Si $m = n$, alors
   $$\int_0^{2\pi} f_m(t)f_n(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \sin^2(mt)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos(2mt))\,dt = \pi$$
   Si $m \neq n$
   $$\int_0^{2\pi} f_m(t)f_n(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \sin(mt)\sin(nt)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos((m-n)t)-\cos((m+n)t))\,dt = 0$$
2. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$. Alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$
   $$\sum_{i=1}^n \int_0^{2\pi} \lambda_i f_i(t) f_j(t)\,dt = 0$$
   et donc $\lambda_j = 0$ d'après la première question. La famille $(f_1, \dots, f_n)$ est donc libre.
   On en déduit que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est libre.

Solution 10.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ tel que $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$.
Alors $(a + b\sqrt{2})^2 = (-c\sqrt{3})^2$ et donc $a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} = 3c^2$. On en déduit que $ab\sqrt{2}$ est rationnel et donc que $ab = 0$ car $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Si $b = 0$, alors $a + c\sqrt{3} = 0$ et donc $c\sqrt{3}$ est rationnel puis que $c = 0$ car $\sqrt{3}$ est irrationnel. Finalement, on a également $a = 0$. Ainsi $a = b = c = 0$ dans ce cas.
Si $a = 0$, alors $b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$ et donc $b = c = 0$ car $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $\frac{2}{3}$ sont irrationnels. On a également $a = b = c = 0$ dans ce cas.
On a donc $a = b = c = 0$ dans tous les cas, ce qui prouve que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Solution 11.

On remarque que $f = \cos(a)\sin + \sin(a)\cos$, $g = \cos(b)\sin + \sin(b)\cos$ et $h = \cos(c)\sin + \sin(c)\cos$. Ainsi $\operatorname{vect}(f, g, h) \subset \operatorname{vect}(\sin, \cos)$. Puisque la famille $(\sin, \cos)$ est libre, $\dim \operatorname{vect}(\sin, \cos) = 2$ puis $\operatorname{rg}(f, g, h) \leqslant 2$. De plus, $\operatorname{rg}(f, g, h) \geqslant 1$ car f est non nulle. Ainsi $\operatorname{rg}(f, g, h)$ vaut 1 ou 2.
Supposons que $\operatorname{rg}(f, g, h) = 1$. Alors $\operatorname{vect}(f)$ et $\operatorname{vect}(f, g, h)$ ont même dimension et $\operatorname{vect}(f) \subset \operatorname{vect}(f, g, h)$ donc $\operatorname{vect}(f, g, h) = \operatorname{vect}(f)$. On en déduit qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g = \lambda f$ et $h = \mu f$ ou encore

$$\begin{aligned}\cos(b)\sin + \sin(b)\cos &= \lambda\cos(a)\sin + \lambda\sin(b)\cos\\ \cos(c)\sin + \sin(c)\cos &= \mu\cos(a)\sin + \mu\sin(b)\cos\end{aligned}$$

Puisque la famille $(\sin, \cos)$ est libre, $\cos(b) = \lambda\cos(a)$ et $\sin(b) = \lambda\sin(a)$. Ainsi, $\cos(b)\sin(a) - \sin(b)\cos(a) = 0$ i.e. $\sin(a - b) = 0$ ou encore $a \equiv b[\pi]$. On montre de même que $a \equiv c[\pi]$.
Réciproquement, si $a \equiv b[\pi]$ et $a \equiv c[\pi]$, alors $g = \pm f$ et $h = \pm f$ donc $\operatorname{vect}(f, g, h) = \operatorname{vect}(f)$ puis $\operatorname{rg}(f, g, h) = 1$.
Finalement, $\operatorname{rg}(f, g, h) = 1$ si $a \equiv b \equiv c[\pi]$ et $\operatorname{rg}(f, g, h) = 2$ sinon.

Solution 12.

1. La somme des vecteurs de la famille est nulle : cette famille est donc liée.

2. Posons $u_k = v_k + v_{k+1}$ pour $n \in [\![1, n]\!]$ en convenant que $v_{n+1} = v_1$. Alors, si n est pair

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k v_k - (-1)^{k+1} v_{k+1} = (-1)^n v_{n+1} - v_1 = 0_E$$

Supposons maintenant n impair. Soit alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E$. Alors, en convenant que $\lambda_0 = \lambda_n$

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \lambda_{k-1}) v_k = 0_E$$

Par liberté de la famille $(v_1, \dots, v_n)$, $\lambda_k = -\lambda_{k-1}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On en déduit notamment que $\lambda_n = (-1)^n \lambda_0$ et donc $\lambda_n = 0$ puisque n est impair et $\lambda_0 = 0$. Comme $\lambda_k = -\lambda_{k-1}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ de sorte que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.

3. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k w_k = 0_E$. Par inversion de l'ordre de sommation,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k w_k = \sum_{k=1} \sum_{j=1}^{k} \lambda_k w_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \lambda_k w_j$$

En posant $\mu_j = \sum_{k=j}^{n} \lambda_k$, on a donc $\sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j = 0_E$ et donc $(\mu_1, \dots, \mu_n) = (0, \dots, 0)$ par liberté de la famille $(u_1, \dots, u_n)$. On montre alors successivement que $\lambda_n, \dots, \lambda_1$ sont nuls. La famille $(w_1, \dots, w_n)$ est donc libre.

Solution 13.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (y + x_k) = 0_E$$

En posant $\Lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$, l'égalité s'écrit

$$\sum_{k=1}^{n} (\Lambda\alpha_k + \lambda_k) x_k = 0_E$$

Puisque la famille $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est libre, $\Lambda\alpha_k + \lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Posons $A = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$. En additionnant les n égalités précédentes , on aboutit à $(A + 1)\Lambda = 0$.

Si $A \neq -1$, on a $\Lambda = 0$ et donc, d'après les calculs précédents, $\lambda_k = -\Lambda\alpha_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. La condition $A \neq -1$ est donc une condition *suffisante* pour que la famille $(y + x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ soit libre.

Réciproquement, montrons que $A \neq -1$ est une condition *nécessaire* pour que la famille $(y + x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ soit libre. Raisonnons par contraposition en supposant $A = -1$. Alors $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(y + x_k) = Ay - y = 0_E$. De plus, les α_k ne sont pas tous nuls puisque leur somme vaut -1. La famille $(y + x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est donc liée.

Solution 14.

1. On a $F = \{(x, y, z, x-y+z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$, et donc $F = \text{vect}(u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = (1, 0, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 0, -1)$ et $u_3 = (0, 0, 1, 1)$.

   ▶ Cette famille étant libre, F est sous-espace vectoriel de E de dimension 3.

   ▶ $a \in F$ donc il existe un unique triplet (α, β, γ) de réels tel que
   $$a = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3,$$
   ce qui est équivalent au système suivant,
   $$\begin{cases} \alpha & & & & & = & 3 \\ & & \beta & & & = & 1 \\ & & & & \gamma & = & 2 \\ \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 4 \end{cases}$$
   Les coordonnées de a dans la base (u_1, u_2, u_3) sont donc $(3, 1, 2)$.

2. On a $G = \{(x, y, x - y, -y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, et donc $F = \text{vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, 0, 1, 0)$ et $v_2 = (0, 1, -1, -1)$.

   ▶ Cette famille étant libre, G est sous-espace vectoriel de E de dimension 2.

   ▶ $b \in F$ donc il existe un unique couple (α, β) de réels tel que
   $$a = \alpha v_1 + \beta v_2,$$
   ce qui est équivalent au système suivant,
   $$\begin{cases} \alpha & & & = & 4 \\ & & \beta & = & 1 \\ \alpha & - & \beta & = & 3 \\ & - & \beta & = & -1 \end{cases}$$
   Les coordonnées de b dans la base (v_1, v_2) sont donc $(4, 1)$.

3. Un vecteur (x, y, z, t) appartient à $F \cap G$ *si et seulement si* ,
   $$\begin{cases} x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \\ x & - & y & - & z & & & = & 0 \\ & & y & & & + & t & = & 0 \end{cases}$$
   et par l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$,
   $$\begin{cases} x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & - & 2z & + & t & = & 0 \\ & & y & & & + & t & = & 0 \end{cases}$$
   ainsi ,
   $$x = -z, \ \ y = -2z, \ \ t = 2z$$
   et
   $$F \cap G = \{(-z, -2z, z, 2z) \ \ , \ \ z \in \mathbb{R}\},$$
   soit en posant $w = (-1, -2, 1, 2)$,
   $$F \cap G = \text{vect}(w).$$
   $F \cap G$ est donc de dimension 1 et de base (w).

Solution 15.

1. Puisque les solutions de l'équation caractéristique $z^2+z+1=0$ sont j et j^2 , $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension deux et de base
$$\left(x \mapsto e^{jx}, x \mapsto e^{j^2x}\right).$$

2. Les quatre fonctions suivantes forment une base du $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{S}$,
$$x \mapsto e^{jx},\ \ x \mapsto ie^{jx}$$
et
$$x \mapsto e^{j^2x},\ \ x \mapsto ie^{j^2x}.$$
$\mathcal{S}$ est donc de dimension quatre en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3. Puisque $j=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, les deux fonctions suivantes forment une base du $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{S}'$,
$$x \mapsto e^{\frac{-x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\ \ ,\ \ x \mapsto e^{\frac{-x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

4. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y''+4y=0$ sont les fonctions de la forme ,
$$x \mapsto \lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x),\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$
La condition $y(\pi)=0$ impose $\lambda=0$. $\mathcal{S}'$ est donc une droite vectorielle engendrée par
$$x \mapsto \sin(2x).$$

Solution 16.

On a
$$E=\left\{(2y-z,y,z,3y) \mid y,z\in\mathbb{R}\right\},$$
donc en posant $u=(2,1,0,3)$ et $v=(-1,0,1,0)$, on a $E=\operatorname{vect}(u,v)$ donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. La famille (u,v) étant clairement libre , E est de dimension 2 et de base $\mathcal{B}=(u,v)$.

Solution 17.

1. La famille (a,b) est manisfestement libre donc $\operatorname{vect}(a,b)$ est de dimension 2.

2. Utilisons la présentation matricielle.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & c \\ 3 & 0 & -2 & a \\ 0 & 3 & 1 & b \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & c \\ 0 & 12 & 4 & a+3c \\ 0 & 3 & 1 & b \end{array}\right] \quad L_2 \leftarrow L_2+3L_1$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & c \\ 0 & 12 & 4 & a+3c \\ 0 & 0 & 0 & 4b-a-3c \end{array}\right] \quad L_3 \leftarrow 4L_3-L_2$$
La famille est donc de rang 2 et $4b-a-3c=0$.

3. Utilisons la présentation matricielle.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & a \\ 1 & 3 & 1 & b \\ -2 & 1 & 2 & c \\ 1 & -1 & 1 & d \\ 0 & 1 & 2 & e \\ -3 & 1 & 0 & f \\ 4 & 5 & 1 & g \end{array}\right]$$

et par les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, $L_6 \leftarrow L_6 + 3L_1$, $L_7 \leftarrow L_7 - 4L_1$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & 2 & 3 & b-a \\ 0 & 3 & -2 & c+2a \\ 0 & -2 & 3 & d-a \\ 0 & 1 & 2 & e \\ 0 & 4 & -6 & f+3a \\ 0 & 1 & 9 & g-4a \end{array}\right]$$

puis par les opérations $L_2 \leftarrow L_5$, $L_3 \leftarrow -L_2 + 2L_5$, $L_4 \leftarrow 3L_5 - L_3$, $L_5 \leftarrow L_4 + 2L_5$, $L_6 \leftarrow L_6 + 2L_4$, $L_7 \leftarrow L_7 - L_5$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & 2 & e \\ 0 & 0 & 1 & -b+a+2e \\ 0 & 0 & 8 & -c-2a+3e \\ 0 & 0 & 7 & d-a+2e \\ 0 & 0 & 0 & a+2d+f \\ 0 & 0 & 7 & g-4a-e \end{array}\right]$$

par les opérations $L_4 \leftarrow L_4 - 8L_3$, $L_5 \leftarrow L_5 - 7L_3$, $L_7 \leftarrow L_7 - 7L_3$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & 2 & e \\ 0 & 0 & 1 & -b+a+2e \\ 0 & 0 & 0 & -10a+8b-c-13e \\ 0 & 0 & 0 & -8a+7b+d-12e \\ 0 & 0 & 0 & a+2d+f \\ 0 & 0 & 0 & -11a+7b-15e+g \end{array}\right]$$

Le système est donc de rang 3 et vérifie les relations suivantes ,

$$-b+a+2e=0,$$

$$-10a+8b-c-13e=0,$$

$$a+2d+f=0$$

et

$$-11a+7b-15e+g=0.$$

Solution 18.

1. Il est clair que (1) est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ qui est donc de dimension 1. Ses sous-espaces vectoriels sont donc de dimension 0 ou 1 , il n'y en a donc que deux : $\{0\}$ et $\mathbb{C}$.

2. La famille $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ puisque tout nombre complexe s'écrit de manière unique sous la forme

$$a + ib \;\;,\;\; a, b \in \mathbb{R}.$$

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est donc de dimension 2. Ses sous-espaces vectoriels sont donc de dimension 0 , 1 ou 2 , il s'agit donc de $\{0\}$, $\mathbb{C}$ et des droites vectorielles $\mathbb{R}z$ pour tout $z \neq 0$.

Solution 19.

Toute suite arithmétique u est de la forme

$$(an + b)_{n\geqslant 0} = a(n)_{n\geqslant 0} + b(1)_{n\geqslant 0} \;,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. Les vecteurs $u = (n)_{n\geqslant 0}$ et $v = (1)_{n\geqslant 0}$ engendrent donc l'espace vectoriel des suites arithmétiques. Puisque (u, v) est clairement libre , cet espace est de dimension 2 et de base $\mathcal{B} = (u, v)$.

Solution 20.

1. $F = \{\lambda(1, 2, 3, 0) + \mu(1, -1, 4, 2) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$. Ainsi, F est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$ engendré par les vecteurs $(1, 2, 3, 0)$ et $(1, -1, 4, 2)$.
2. Les deux vecteurs ci-dessus n'étant pas colinéaires, ils forment une base de F. Par conséquent, $\dim F = 2$.

Solution 21.

1. Par définition, E est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 2, 1)$, et $w = (1, 1, 1)$. Il est clair que les vecteurs (u, v) sont linéairement indépendants, d'où $\dim F \geqslant 2$. D'autre part, $w = \frac{u+v}{2}$, ce qui implique $E = \text{vect}(u, v)$. Par conséquent, $\dim(E) = 2$.
2. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en tant qu'espace des solutions du système homogène

$$x - y = 0$$

à trois inconnues x, y et z. Une base de F est $((0, 0, 1), (1, 1, 0))$. Donc $\dim(F) = 2$.

3. L'ensemble G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en tant qu'espace des solutions du système homogène suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 3y & = & 0 \\ y + z & = & 0 \\ 2x - z & = & 0. \end{array}\right.$$

Le vecteur nul en est l'unique solution. Donc G est l'espace nul, $\dim(G) = 0$ (sa base est la famille vide).

4. L'ensemble H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en tant qu'espace des solutions du système homogène suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 3y & = & 0 \\ y + z & = & 0 \\ x + 2y - z & = & 0. \end{array}\right.$$

On résout ce système (la première équation est superflue car elle est la somme des deux autres) et on trouve que $H = \mathbb{K}(3, -1, 1)$, donc $\dim(H) = 1$.

5. L'ensemble L est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en tant qu'espace des solutions du système homogène suivant :

$$\begin{cases} -x+3y+z &= 0 \\ -2x+y+2z &= 0. \end{cases}$$

On trouve que les solutions sont de la forme $(\lambda, 0, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $(1,0,1)$ est une base de L et $\dim(L) = 1$.

Solution 22.

Appliquons la méthode du pivot de Gauss...

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & u_3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 & u_2 \\ 1 & 0 & -3 & -5 & u_4 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & u_3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & u_2-u_1 \\ 0 & -2 & -2 & -8 & u_4-u_1 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_2-u_1+u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_4-u_1+2u_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Le rang de la famille vaut donc 2 et les vecteurs sont reliés par les deux relations

$$u_2 = u_1 - u_3 \ \text{ et } \ u_4 = u_1 - 2u_3.$$

On a donc $F = \text{vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \text{vect}(u_1, u_3)$ et puisque u_1 et u_3 ne sont pas colinéaires, (u_1, u_3) est une base de F.

Solution 23.

Raisonnons en deux temps.

► Supposons l'existence d'un supplémentaire commun S de F et G dans E. Comme

$$\dim(S) = \dim(E) - \dim(F) = \dim(E) - \dim(G),$$

on a $\dim(F) = \dim(G)$.

► Raisonnons par récurrence (descendante) sur la dimension commune de F et G. Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, notons $HR(k)$ la propriété suivante : deux sev F et G de même dimension k admettent un supplémentaire dans E commun S.

⋆ $HR(n)$ est banale car $S = \{0\}$ convient clairement.

⋆ Soit $1 \leqslant k \leqslant n$. Supposons $HR(k)$ vraie. Soient F et G deux sev de E de même dimension $k-1$. Si $F = G$, F et G admettent clairement un supplémentaire dans E commun S (c'est du cours !) Sinon, *on sait que* $F \cup G$ n'est pas un sev de E et en particulier que $F \cup G \neq E$: il existe donc $u \in E \setminus (F \cup G)$. On sait qu'alors $F \oplus \mathbb{K}u$ et $G \oplus \mathbb{K}u$ sont deux sev de dimension $k-1+1 = k$. D'après $HR(k)$, ils admettent donc un supplémentaire dans E commun noté S. Il est alors clair que $S \oplus \mathbb{K}u$ est supllémentaire commun de F et G dans E, d'où $HR(k-1)$.

⋆ La propriété $HR(k)$ est vraie pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$ d'après le principe de récurrence.
Remarque. On a utilisé la propriété classique suivante : si F et G sont deux sev de E, $F \cup G$ est un sev de E *si et seulement si* $F \subset G$ ou $G \subset F$. Si $\dim(F) = \dim(G)$, on peut remplacer cette dernière condition par $F = G$. ■

Solution 24.

Appliquons la méthode du pivot de Gauss. On a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} &\sim \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & \beta \\ \alpha & 1 & \beta & 1 \\ \alpha & \beta & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & \beta \\ \alpha & 1 & \beta & 1 \\ \alpha & \beta & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \beta-1 \end{bmatrix} , L_5 \leftarrow L_5 - L_3 \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & \beta \\ \alpha & 1 & \beta & 1 \\ 0 & \beta-1 & \alpha-\beta & 0 \\ 1 & \alpha & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \beta-1 \end{bmatrix} , L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & \beta \\ 0 & 1-\alpha^2 & \beta-\alpha & 1-\alpha\beta \\ 0 & \beta-1 & \alpha-\beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta-1 & \alpha-\beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta-1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

par $L_2 \leftarrow L_2 - \alpha L_1,\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1$.

▶ *Cas 1 :* $\beta \neq 1$. Le rang vaut 4.

▶ *Cas 2 :* $\beta = 1$ *et* $\alpha = 1$. On a alors

$$
\mathcal{S} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

et donc le rang vaut 1.

▶ *Cas 3 :* $\beta = 1$ *et* $\alpha = -1$. On a alors

$$
\mathcal{S} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}
$$

et donc le rang vaut 2.

▶ *Cas 4 :* $\beta = 1$ *et* $\alpha \neq \pm 1$. On a alors

$$
\mathcal{S} \sim \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1-\alpha^2 & 1-\alpha & 1-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

et le rang vaut alors 4.

Solution 25.

1. Puisqu'en dimension 1 , le seul hyperplan est l'espace nul, on a $n \geqslant 2$.
2. Puisque les deux hyperplans sont distincts, il existe $u \in H_1 \setminus H_2$. On a donc
$$E = H_2 \oplus \mathbb{K}u \subset H_2 + H_1 \subset E,$$
ainsi $E = H_1 + H_2$ et d'après la formule de Grassmann,
$$\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1 + n - 1 - n = n - 2.$$

Solution 26.

Intuitivement, une fonction de F est uniquement déterminée par ses valeurs en les x_i. Considérons donc l'application $\phi : \left\{ \begin{array}{lcl} F & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ f & \longmapsto & (f(x_0), f(\end{array} \right.$
L'application ϕ est clairement linéaire.

Soit $f \in \operatorname{Ker} \phi$. Il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ tels que $f_{|[x_i;x_{i+1}]} : x \mapsto a_i x + b_i$. Pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$
$$\left\{ \begin{array}{rl} a_i x_i + b_i &= 0 \\ a_i x_{i+1} + b_i &= 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} a_i(x_{i+1} - x_i) &= 0 \\ a_i x_i + b_i &= 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} a_i &= 0 \\ b_i &= 0 \end{array} \right.$$
Ainsi $f = 0$ et ϕ est surjective.

Soit $y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Cherchons $f \in F$ telle que $\phi(f) = y$. En prenant les mêmes notations que précédemment, on cherche donc $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ tels que
$$\left\{ \begin{array}{rl} a_i x_i + b_i &= y_i \\ a_i x_{i+1} + b_i &= y_{i+1} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} a_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \\ b_i &= y_i - a_i x_i \end{array} \right.$$
Ce qui montre que ϕ est surjective.

Donc ϕ est un isomorphisme et $\dim F = \dim \mathbb{R}^{n+1} = n + 1$.

On obtient facilement une base $(e_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de F en considérant l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Il s'agit de la base antéduale de la base $(e_i^*)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de F^* avec $e_i^*(f) = f(x_i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$. Pour $0 \leqslant i \leqslant n$, e_i est la fonction affine par morceaux valant 1 en x_i et 0 en les x_j avec $j \neq i$.

Solution 27.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \lambda_i u_i = (0)$. La suite $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \lambda_i u_i = (\lambda_0, \dots, \lambda_k, 0, \dots)$ est nulle donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Ainsi la famille $(u_0, \dots, u_k)$ est libre. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ne peut être de dimension finie.
2. Les f_i sont bien de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i = 0$. En dérivant j fois où $0 \leqslant j \leqslant k$ et en évaluant en 0, on trouve $\lambda_j = 0$. Ainsi la famille $(f_0, \dots, f_k)$ est libre. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ne peut être de dimension finie. Comme $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ces espaces vectoriels sont également de dimension infinie.

Solution 28.

1. La suite nulle est évidemment périodique. Soient $u, v \in E_p$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda u_{n+p} + \mu u_{n+p} = \lambda u_n + \mu u_n$$

car u et v sont p-périodiques. Ainsi $\lambda u + \mu v$ est également p-périodique, ce qui prouve que E_p est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Tout d'abord, les suites $u^0, \dots, u^{p-1}$ sont bien p-périodiques puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n+p \equiv n[p]$.
Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 u^0 + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1} = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}$. En considérant les termes de rang $0, \dots, p-1$ dans cette égalité de deux suites, on trouve $\lambda_0 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$, ce qui prouve que $(u^0, \dots, u^{p-1})$ est libre.
Soit $v \in E_p$. Alors $v = v_0 u^0 + \dots + v_{p-1} u^{p-1}$, ce qui prouve que $(u^0, \dots, u^{p-1})$ engendre E_p.
Ainsi $(u^0, \dots, u^{p-1})$ est une base de E_p.

3. Comme $(u^0, \dots, u^{p-1})$ est une base de E_p et comporte p éléments, $\dim E_p = p$.

4. E_2 et E_4 sont tous deux des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. De plus, une suite 2-périodique est évidemment 4-périodique donc $E_2 \subset E_4$. Ainsi E_2 est un sous-espace vectoriel de E_4.

5. Soit $u \in F$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+4} = -u_{n+2} = u_n$ donc $u \in E_4$. Ainsi $F \subset E_4$. De plus, F contient la suite nulle et est stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de E_4.

6. Soit $u \in F \cap E_2$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n = -u_n$ donc $u_n = 0$. D'où $F \cap E_2 = \{0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}\}$.
Analyse : Soit $u \in E_4$. Supposons qu'il existe $v \in E_2$ et $w \in F$ telles que $u = v + w$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = v_n + w_n$$
$$u_{n+2} = v_{n+2} + u_{n+2} = v_n - w_n$$

On en déduit que $v_n = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$ et $w_n = \frac{u_n - u_{n+2}}{2}$.
Synthèse : Soit $u \in E_4$. Définissons deux suites v et w par $v_n = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$ et $w_n = \frac{u_n - u_{n+2}}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a clairement $u = v + w$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+2} = \frac{u_{n+2} + u_{n+4}}{2} = \frac{u_{n+2} + u_n}{2} = v_n$$
$$w_{n+2} = \frac{u_{n+2} - u_{n+4}}{2} = \frac{u_{n+2} - u_n}{2} = -w_n$$

Donc $v \in E_2$ et $w \in F$.

7. Puisque $E_4 = E_2 \oplus F$, $\dim E_4 = \dim E_2 + \dim F$ donc $\dim F = \dim E_4 - \dim E_2 = 4 - 2 = 2$.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+2} = \cos\left(n\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = -x_n$$
$$y_{n+2} = \sin\left(n\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = -y_n$$

Ainsi $(x, y) \in F^2$.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda x + \mu y = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}$. On a notamment $\lambda x_0 + \mu y_0 = 0$ donc $\lambda = 0$ et $\lambda x_1 + \mu y_1 = 0$ donc $\mu = 0$. La famille (x, y) est libre. Puisque $\dim F = 2$, (x, y) est une base de F.

Solution 29.

Si l'équation $X^2 + aX + b = 0$ admet deux solutions complexes distinctes r_1 et r_2, l'ensemble des solutions est $\text{vect}_\mathbb{C}(x \mapsto e^{r_1 x}, x \mapsto e^{r_2 x})$. C'est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 car la famille $(x \mapsto e^{r_1 x}, x \mapsto e^{r_2 x})$ est libre.
Si l'équation $X^2 + aX + b = 0$ admet une solution double r, l'ensemble des solutions est $\text{vect}_\mathbb{C}(x \mapsto e^{rx}, x \mapsto xe^{rx})$. C'est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 car la famille $(x \mapsto e^{rx}, x \mapsto xe^{rx})$ est libre.

Solution 30.

D'après la formule de Grassmann, $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 4 - \dim(F \cap G)$. Puisque $F+G \subset \mathbb{R}^3$, $\dim(F+G) \leqslant 3$ et donc $\dim(F \cap G) \geqslant 1$. En particulier, $F \cap G \neq \{0_E\}$. On peut déjà affirmer que F et G ne sont pas en somme directe.
Puisque $F \subset F+G$, $\dim(F+G) \geqslant 2$. Supposons que $\dim(F+G) = 2$, alors $\dim(F \cap G) = 2 = \dim F = \dim G$. Puisque $F \cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$, on en déduit que $F \cap G = F = G$, ce qui contredit le fait que F et G sont distincts. On a donc $\dim(F+G) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Puisque $F+G \subset \mathbb{R}^3$, $F+G = \mathbb{R}^3$.

Solution 31.

1. F est un sous-espace vectoriel en tant que noyau de $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^{10} \\ f & \longmapsto & \left(f\left(\frac{1}{k}\right)\right)_{1 \leqslant k \leqslant 10} \end{array} \right.$.

2. Notons G l'ensemble des fonctions polynomiales de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 9. G est clairement un sous-espace vectoriel de E.
Soit $f \in F \cap G$. Alors f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 9 admettant 10 racines : elle est nulle. AInsi $F \cap G = \{0\}$.
Soit $f \in E$. On montre classiquement que $\phi_{|G}$ est un isomorphisme (interpolation de Lagrange). Il existe donc $P \in G$ telle que $P\left(\frac{1}{k}\right) = f\left(\frac{1}{k}\right)$ pour $k \in [\![1, 10]\!]$. Mais alors $g = f - P \in F$. On a donc $f = P + g$ avec $P \in G$ et $g \in F$. Ceci prouve que $E = F + G$.
Par conséquent $E = F \oplus G$.

Solution 32.

1. **a.** Puisque le vecteur $(1,1,1)$ est non nul et engendre G, $\dim G = 1$.

   b. On applique la méthode habituelle.

$$\begin{aligned} F &= \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\} \\ &= \left\{(x_1, x_2, -x_1 - x_2) \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x_1(1,0,-1) + x_2(0,1,-1) \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \operatorname{vect}\left((1,0,-1),(0,1,-1)\right) \end{aligned}$$

   La famille $((1,0,-1),(0,1,-1))$ engendre F et est libre car elle est échelonnée et ne comporte pas le vecteur nul : c'est donc une base de F.
   On a donc $\dim F = 2$.

   c. $(0,0,0) \in F \cap G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
   Soit $(x_1, x_2, x_3) \in F \cap G$. Puisque $(x_1, x_2, x_3) \in G$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x_1 = x_2 = x_3 = \lambda$. Puisque $(x_1, x_2, x_3) \in F$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et donc $3\lambda = 0$ puis $\lambda = 0$. On a donc $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$.
   Ainsi $F \cap G = \{(0,0,0)\}$.
   De plus, $\dim F + \dim G = 3 = \dim E$, ce qui permet de conclure que $E = F \oplus G$.

   d. On remarque que $a = (-1,0,1) + (2,2,2)$ avec $(-1,0,1) \in F$ et $(2,2,2) \in G$. La projection de a sur F parallélement à G est donc $(-1,0,1)$ et la projection de a sur G parallélement à F est $(2,2,2)$.

2. **a.** A nouveau, le vecteur $(1, \dots, 1)$ est non nul et engendre G donc $\dim G = 1$.

   b. On applique toujours la même méthode.

$$\begin{aligned} F &= \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\right\} \\ &= \left\{(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_1 - \dots - x_{n-1}) \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}\right\} \\ &= \left\{x_1 u_1 + \dots + x_{n-1} u_{n-1} \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}\right\} \\ &= \operatorname{vect}\left(u_1, \dots, u_{n-1}\right) \end{aligned}$$

où pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, u_i est le vecteur de E dont la $i^{\text{ème}}$ composante vaut 1, dont la $n^{\text{ème}}$ composante vaut -1 et dont toutes les autres composantes sont nulles.
La famille $(u_1, \dots, u_{n-1})$ engendre F et est libre car elle est échelonnée et ne comporte pas le vecteur nul : c'est donc une base de F.
On a donc $\dim F = n-1$.

c. $0_E \in F \cap G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in F \cap G$. Puisque $(x_1, \dots, x_n) \in G$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x_1 = \dots = x_n = \lambda$. Puisque $(x_1, \dots, x_n) \in F$, $x_1 + \dots + x_n = 0$ et donc $n\lambda = 0$ puis $\lambda = 0$ car $n \geqslant 0$. On a donc $(x_1, \dots, x_n) = 0_E$.
Ainsi $F \cap G = \{0_E\}$.
De plus, $\dim F + \dim G = n = \dim E$, ce qui permet de conclure que $E = F \oplus G$.

3. Comme F est un hyperplan de E, $\dim F = n-1$. Comme F est un sous-espace vectoriel de E, $0_E \in F$. Puisque $u \notin F$, $u \neq 0_E$ et donc $\dim G = 1$.
Supposons que $F \cap G \neq \{0_E\}$. Puisque $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E, $0_E \in F \cap G$. Or $F \cap G \neq \{0_E\}$ donc il existe $x \in F \cap G$ tel que $x \neq 0_E$. Puisque $x \in G$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda u$. Or $x \neq 0_E$ donc $\lambda \neq 0$. D'où $u = \frac{1}{\lambda}x$. Or $x \in F$ et F est un sous-espace vectoriel de E donc $u = \frac{1}{\lambda}x \in F$, ce qui contredit l'énoncé.
Ainsi $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = (n-1) + 1 = n = \dim E$, ce qui permet d'affirmer que $E = F \oplus G$.

Solution 33.

1. On a clairement $G = \{(x, y, 0, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, ainsi $G = \text{vect}(u_1, u_2)$ où

$$u_1 = (1, 0, 0, 0) \text{ et } u_2 = (0, 1, 0, 0).$$

G est donc un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 puisque (u_1, u_2) est manifestement libre.

Un vecteur (x, y, z, t) appartient à F *si et seulement si*

$$\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ 2x - y + 3z - 4t = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire, par l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$,

$$\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{cases}$$

d'où,

$$\begin{cases} y = -z + 2t \\ x = -2z + 3t \end{cases}$$

Ainsi,

$$F = \{(-2z + 3t, -z + 2t, z, t) \ , \ z, t \in \mathbb{R}\},$$

ainsi $G = \text{vect}(u_1, u_2)$ où

$$v_1 = (-2, -1, 1, 0) \text{ et } v_2 = (3, 2, 0, 1).$$

F est donc un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 puisque (v_1, v_2) est clairement libre.

2. Puisque $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$, pour établir que F et G sont supplémentaires dans E, il suffit de vérifier que $F \cap G = \{0\}$. Soit $(x, y, z, t) \in F \cap G$, on a alors $z = t = 0$ et donc $(x, y, z, t) = 0$ d'après les calculs menés à la question précédente. On sait alors que la famille

$$\mathcal{B} = (u_1, u_2, v_1, v_2)$$

est une base de E adaptée à la décomposition en somme directe $F \oplus G = E$.

3. Soit $(x, y, z, t) \in E$. D'après la question précédente, il existe un unique quadruplet de nombres $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ tel que

$$(x, y, z, t) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma v_1 + \delta v_2,$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} \alpha - 2\gamma + 3\delta = x \\ \beta - \gamma + 2\delta = y \\ \gamma = z \\ \delta = t \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha = x + 2z - 3t \\ \beta = y + z - 2t \\ \gamma = z \\ \delta = t \end{cases}$$

La projection de (x, y, z, t) sur F parallèlement à G vaut donc,

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = (x + 2z - 3t, y + z - 2t, 0, 0),$$

et celle de (x, y, z, t) sur G parallèlement à F,

$$\gamma v_1 + \delta v_2 = (-2z + 3t, -z + 2t, z, t).$$

SOLUTION 34.

1. On a $X \in F$ *si et seulement si* $\exists\, x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$X = (x, y, -x) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 0).$$

Ainsi $F = \text{vect}((1, 0, -1), (0, 1, 0))$ et F est un sous-espace vectoriel de E. Comme les deux vecteurs engendrant F ne sont pas colinéaires, $\dim(F) = 2$. De même, $X \in G$ *si et seulement si* $\exists\, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$X = (2y, y, 2y) = y(2, 1, 2).$$

Ainsi $G = \text{vect}((2, 1, 2))$ et G est un sous-espace vectoriel de E. Comme G est engendré par un vecteur non nul, $\dim(G) = 1$. Puisque $\dim(E) = 3 = \dim(F) + \dim(G)$, F et G sont supplémentaires dans E *si et seulement si*

$$F \cap G = \{0\}.$$

Un vecteur X appartient à $F \cap G$ *si et seulement si* il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que

$$X = (2y, y, 2y) \quad \text{et} \quad 2y + 2y = 0,$$

ie $X = (0, 0, 0)$. Ainsi $F \cap G = \{0\}$, d'où le résultat.

2. Soit $X = (x, y, z) \in E$. On recherche l'unique vecteur g de G tel que $X - g \in F$. Puisque g est de la forme $g = (2\lambda, \lambda, 2\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on recherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X - (2\lambda, \lambda, 2\lambda) = (x - 2\lambda, y - \lambda, z - 2\lambda) \in F$. Cette condition équivaut à $x - 2\lambda + z - 2\lambda = 0$, c'est-à-dire $\lambda = \frac{x+z}{4}$. La projection du vecteur $X = (x, y, z)$ sur F parallélement à G vaut donc

$$X - \lambda(2, 1, 2) = \left(\frac{x - z}{2}, \frac{4y - x - z}{4}, \frac{z - x}{2}\right).$$

SOLUTION 35.

1. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et posons $\forall k \leqslant n-1$,

$$f_k = e_k - e_n.$$

Les vecteurs f_i ainsi définis appartiennent à H et la famille $(f_1, \dots, f_{n-1})$ est libre car si un vecteur $e_i - e_n$ était combinaison linéaire des autres , le vecteur e_k s'exprimerait en fonction des $e_i, i \neq k$, ce qui est absurde car $\mathcal{B}$ est libre. La dimension de H est donc au moins égale à $n-1$; elle ne peut valoir n car $H \neq E$ (en effet , $u \notin H$) , donc H est de dimension $n-1$. Le vecteur u étant non nul , $\mathbb{R}u$ est de dimension 1. Ainsi ,

$$\dim(E) = \dim(H) + \dim(\mathbb{R}u);$$

pour montrer que H et $\mathbb{R}u$ sont supplémentaires dans E , il suffit donc de prouver que $F \cap H = \{0\}$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in H \cap \mathbb{R}u$. On a donc

$$x_1 = \dots = x_n \text{ et } x_1 + \dots + x_n = 0,$$

d'où $(x_1, \dots, x_n) = 0$ et $H \oplus \mathbb{R}u = E$.

2. Prouvons que $H \oplus \mathbb{R}v = E$. Puisque $v \notin H$, $v \neq 0$ et $\mathbb{R}v$ est de dimension 1. En reprenant les justifications avancées à la question **1.** , l suffit de prouver que $F \cap H = \{0\}$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ appartenant à $H \cap \mathbb{R}v$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall k \leqslant n, \ \ x_k = \lambda v_k$$

et

$$x_1 + \dots + x_n = \lambda(v_1 + \dots + v_n) = 0,$$

or $v \notin H$, donc $v_1 + \dots + v_n \neq 0$, et ainsi $\lambda = 0$ puis $(x_1, \dots, x_n) = 0$. On a bien $H \oplus \mathbb{R}v = E$.