

## COMPARAISON DE FONCTIONS

## SOLUTION 1.

1. En 0, on a les équivalents suivants :

$$3 + x \sim 3, \quad \sqrt{x+3} \sim \sqrt{3}, \quad \sin \sqrt{x} \sim \sqrt{x}$$

Par produit et quotient d'équivalents, on trouve une limite égale à  $3\sqrt{3}$ .

2. En 0, on a les équivalents suivants :

$$1 - e^x \sim -x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad 3x^3 + 2x^4 \sim 3x^3$$

Par produit et quotient d'équivalents, on trouve une limite égale à  $-\frac{1}{6}$ .

3. On a les équivalents suivants en  $0^+$  :

$$1 - \cos x^2 \sim \frac{x^4}{2}, \quad x^5 + x^3 \sim x^3$$

Par conséquent,

$$\frac{(1 - \cos x^2)e^{\frac{1}{x}}}{x^5 + x^3} \sim \frac{x}{2} e^{\frac{1}{x}}$$

En posant  $u = \frac{1}{x}$ , on a  $u \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$  et

$$\frac{x}{2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^u}{2u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty}$$

4. On pose  $u = x - \frac{\pi}{4}$  de telle sorte que  $u \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 0$ . On a alors

$$\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = u \tan\left(\frac{\pi}{2} + u\right) = -\frac{u}{\tan u} \sim -1$$

Donc  $\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} -1$ .

5. Ecrivons tout d'abord :

$$(\tanh x)^{\ln x} = e^{\ln x \ln(\tanh x)}$$

Or on sait que :

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

Par conséquent,

$$\tanh x - 1 = -\frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

On connaît un équivalent de  $\ln(1+u)$  en 0 :

$$\ln \tanh x = \ln\left(1 - \frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}\right) \sim -\frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \sim -2e^{-2x}$$

On sait que  $\ln(x) = o(e^{2x})$  en  $+\infty$  donc  $\ln x \ln(\tanh x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . Finalement,  $(\tanh x)^{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ .

## SOLUTION 2.

1. On met le terme prépondérant en facteur sous la première racine :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^3 + 1} &= \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)} = x \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= x \left(1 + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\end{aligned}$$

car  $u = \frac{1}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  et  $(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{u}{3} + o(u)$ . On met de même le terme prépondérant en facteur sous la deuxième racine :

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = x \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Posons  $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . Par conséquent,  $(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{u}{2} + o(u)$ . Or  $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x}$  car  $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ . Donc

$$1 + \frac{u}{2} + o(u) = 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

(on peut remplacer  $u$  par un équivalent). Finalement,

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} &= x \left(1 + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) - x \left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= x + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - x - \frac{1}{2} + o(1) \quad (\text{on développe}) \\ &= -\frac{1}{2} + o(1) \quad \text{car } \frac{1}{x^2} = o(1)\end{aligned}$$

La limite recherchée est donc  $-\frac{1}{2}$ .

| **REMARQUE.** Dans tous les calculs,  $x \rightarrow +\infty$  et  $u \rightarrow 0$ .

2. Mettons tout d'abord l'expression sous forme exponentielle

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = x \ln \left(\frac{x+1}{x}\right) = x \ln(x+1) - x \ln x$$

Or  $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  et  $\ln(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln 1 = 0$  donc  $x \ln(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . Finalement,  $x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . Par conséquent, la limite recherchée est  $e^0 = 1$ .

### SOLUTION 3.

1. Par croissances comparées et car  $\cos$  est bornée,  $\ln(\ln x)^2 - \cos^2 x + \ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x$ . Par croissances comparées,  $2^x - 50x^6 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2^x$ . Donc

$$\frac{(\ln(\ln x))^2 - \cos^2 x + \ln x}{2^x - 50x^6} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{2^x}$$

Par croissances comparées, la limite recherchée est 0.

2. Attention, «  $1^{+\infty}$  » est une forme indéterminée ! On ne réfléchit pas, on passe à la forme exponentielle.

$$\left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x - 1}\right)^x = e^{x \ln \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x - 1}\right)}$$

Or  $\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ . Donc  $\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1} = 1 + t$  avec  $t = \frac{3x-4}{x^2-x+1}$  et  $t \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . Or  $\ln(1+t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$ . Donc

$$\ln\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3x-4}{x^2-x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{x}$$

Donc  $x \ln\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 3$ . La limite recherchée est donc  $e^3$ .

3. On a  $\cos 3x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)$  et  $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ . Donc  $\cos 3x - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} -4x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -4x^2$ . Par conséquent, la limite recherchée est  $-4$ .

4. On a  $a^x = e^{x \ln a} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x \ln a + o(x)$ . De même  $b^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x \ln b + o(x)$ . Donc

$$a^x - b^x \underset{x \rightarrow 0}{=} x(\ln a - \ln b) + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln \frac{a}{b}$$

La limite recherchée est donc  $\ln \frac{a}{b}$ .

5. On se ramène en 0 en posant  $x = 1 + h$ . Ainsi  $\sqrt{2-x^2} = \sqrt{1-2h-h^2}$ . Or  $-2h-2h^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  donc

$$\sqrt{1-2h-h^2} - 1 \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -h - h^2 \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -h$$

On a aussi  $\ln x = \ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h$ . La limite recherchée est donc  $-1$ .

6. Pas besoin d'équivalent ici. On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-1 \leq \cos x \leq 1$ . Par croissance de l'exponentielle, on a donc

$$e^{-1} \leq e^{\cos x} \leq e$$

Ainsi

$$e^{-1} \sin \frac{1}{x} \leq \sin \frac{1}{x} e^{\cos x} \leq e \sin \frac{1}{x}$$

Comme  $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  et que  $\sin$  est continue en 0, on en déduit que  $\sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  et que la limite recherchée est nulle.

7. On passe à la forme exponentielle :

$$\left(\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)^{x^2} = e^{x^2 \ln(\cos(\frac{1}{\ln x}))}$$

Comme  $\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ ,

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \cos\left(\frac{1}{\ln x}\right) - 1$$

Comme  $\frac{1}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ ,

$$\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2(\ln x)^2}$$

Finalement,

$$x^2 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x^2}{2(\ln x)^2}$$

Par croissances comparées,  $-\frac{x^2}{2(\ln x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ . La limite recherchée est donc 0.

8. On se ramène en 0 en effectuant le changement de variable  $x = \frac{\pi}{2} + h$ . On a alors

$$(\tan x)(\tan 2x) = \left(\tan\left(\frac{\pi}{2} + h\right)\right)(\tan(\pi + 2h)) = -\frac{\tan 2h}{\tan h} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -2$$

La limite recherchée est  $-2$ .

9. On se ramène en 0 en effectuant le changement de variable  $x = 1 + h$ . Occupons nous du numérateur :

$$e^{x^2+x} - e^{2x} = e^{2+3h+h^2} - e^{2+2h} = e^{2+2h}(e^{h+h^2} - 1) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} e^2(h+h^2) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} e^2 h$$

Maintenant le dénominateur :

$$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi h}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi h}{2}$$

Par quotient, la limite recherchée est  $-\frac{2e^2}{\pi}$ .

10. On pourrait s'en sortir avec le changement de variable  $x = \frac{\pi}{3} + h$  mais il y a plus astucieux. En effet :

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \left( \sin \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \sin x \right) = 2 \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)$$

La limite recherchée est donc 2.

11. Pas besoin d'équivalent ici. En effet pour tout  $x \neq 0$ ,  $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$  donc

$$-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$$

Par le théorème des gendarmes, la limite recherchée est nulle.

#### SOLUTION 4.

1. Tout d'abord,  $\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$  car  $\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ . Par conséquent,  $u(x) = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x \ln x}$ . Donc  $u(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$  et  $\ln(1+u(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} u(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x \ln x}$ . Finalement,  $f(x) \sim \frac{1}{\ln x}$ .

2. Comme  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}$ ,  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ . Par conséquent,  $e^{f(x)} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}$ .  
Donc  $(e^{f(x)} - 1) \ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$  et la limite recherchée est 1.

3. Il suffit de remarquer que :

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \frac{\ln \left( x \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right)}{\ln x} = \frac{\ln x + \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\ln x}$$

En mettant sous forme exponentielle :

$$g(x) = \left[ e^{x \ln \left( 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x} \right)} - 1 \right] \ln x = (e^{f(x)} - 1) \ln x$$

D'après la question précédente,  $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$ .

#### SOLUTION 5.

Posons  $P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$  et  $Q(x) = x^{p+1} - x^p - x + 1$ . On a  $P(1) = Q(1) = 0$ . Puisque

$$P'(x) = n(n+1)x^n - n(n+1)x^{n-1} \quad \text{et} \quad Q'(x) = (p+1)x^p - px^{p-1} - 1$$

on a également  $P'(1) = Q'(1) = 0$ . Enfin,

$$P''(x) = n^2(n+1)x^{n-1} - n(n-1)(n+1)x^{n-2} \quad \text{et} \quad Q''(x) = p(p+1)x^{p-1} - p(p-1)x^{p-2}$$

ces expressions étant encore valables lorsque  $n = 1$  ou  $p = 1$  puisqu'alors le coefficient de  $x^{n-2}$  ou  $x^{p-2}$  est nul. On trouve  $P''(1) = n(n+1)$  et  $Q''(1) = 2p$ . On a donc

$$P(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{n(n+1)}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2) \quad \text{et} \quad Q(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} p(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{n(n+1)}{2p}.$$

#### SOLUTION 6.

On a clairement

$$\frac{a^t + b^t + c^t}{3} \underset{0+}{=} 1 + \frac{\ln(abc)}{3}t + o(t)$$

d'où

$$\ln(f(1/t)) \underset{0+}{=} \ln(\sqrt[3]{abc}) + o(1).$$

Donc, par continuité de l'exponentielle en  $\ln(\sqrt[3]{abc})$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt[3]{abc}.$$

## SOLUTION 7.

---

1. On a, au voisinage de 0,

$$x \cos(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

et

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Ainsi,

$$x \cos(x) - \tan(x) = -\frac{5}{6}x^3 + o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{5}{6}x^3.$$

D'où, puisque  $\sin^3(x) \underset{0}{\sim} x^3$ ,

$$\frac{x \cos(x) - \tan(x)}{\sin^3(x)} \underset{0}{\sim} -\frac{5}{6}$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - \tan(x)}{\sin^3(x)} = -\frac{5}{6}.$$

2. Reprenons les résultats établis au numéro précédent...

$$x - \tan(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{3}x^3,$$

d'où

$$\frac{x \cos(x) - \tan(x)}{\sin(x)(x - \tan(x))} \underset{0}{\sim} \frac{-5/6 x^3}{-1/3 x^4} = \frac{5}{2x}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x \cos(x) - \tan(x)}{\sin(x)(x - \tan(x))} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x \cos(x) - \tan(x)}{\sin(x)(x - \tan(x))} = -\infty.$$

3. Posons  $x = 1 + h$  et notons  $g(x)$  l'expression de l'énoncé. On a

$$g(x) = \frac{1+h}{h} - \frac{1}{\ln(1+h)}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln(1+h)} &\underset{0}{=} \frac{1}{h(1-h/2+o(h))} = \frac{1+h/2+o(h)}{h} \\ &\underset{0}{=} \frac{1}{h} + \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1+h}{h} - \frac{1}{\ln(1+h)} \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2} + o(1) = \frac{1}{2} + o(1).$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{1}{2}.$$

4. Posons  $x = 1 + h$  et notons  $g(x)$  l'expression de l'énoncé. On a

$$g(x) = \frac{(1+h)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+h)^{\frac{1}{3}} - 1}.$$

Or, pour  $\alpha \neq 0$ ,

$$(1+h)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha h$$

et donc

$$\frac{(1+h)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+h)^{\frac{1}{3}} - 1} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{1}{2}h}{\frac{1}{3}h} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{3}{2}.$$

### SOLUTION 8.

► Comparons  $f$ ,  $g$  et  $h$  au voisinage de  $+\infty$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 \ln x}{e^x} = \frac{x^3}{e^x} \cdot \frac{\ln x}{x}$$

Par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  ou encore  $f \underset{+\infty}{=} o(g)$ .

Pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ ,

$$\frac{h(x)}{f(x)} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

Par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{f(x)} = 0$  ou encore  $h \underset{+\infty}{=} o(f)$ .

► Comparons  $f$ ,  $g$  et  $h$  au voisinage de  $0^+$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{x^{\frac{3}{2}} (\ln x)^2}{e^x}$$

Par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{3}{2}} (\ln x)^2 = 0$  et par continuité de l'exponentielle en 0,  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$  ou encore  $h \underset{0^+}{=} o(g)$ .

Pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ , on obtient  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$  par opérations sur les limites. Ceci signifie que  $f \underset{0^+}{=} o(h)$ .

### SOLUTION 9.

1. On a d'abord :

$$\ln(1+x) = \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Comme  $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ ,  $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ . Par conséquent,

$$x \ln(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \ln x + 1 + o(1)$$

Il vient donc :

$$x \ln(1+x) - (x+1) \ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} -\ln x + 1 + o(1)$$

Comme  $1 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\ln x)$ , on a  $x \ln(1+x) - (x+1) \ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln x$ .

2. Comme  $\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ ,  $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ . De plus on sait que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x-1 < [x] \leq x$ . Donc, pour  $x > 0$  :

$$1 - \frac{1}{x} < \frac{[x]}{x} \leq 1$$

Ceci prouve que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x]}{x} = 1$ . Par conséquent,  $[x] \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ . Par produit, on obtient :

$$[x] \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

3. On a d'une part

$$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x)$$

et d'autre part

$$\sqrt{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(x)$$

Par conséquent,

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

4. Cherchons d'abord un équivalent du numérateur. On a  $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  et  $\cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ . Or  $-\frac{x^2}{2} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$ . Donc  $\sin x + \cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .

Cherchons maintenant un équivalent du dénominateur. On remarque que  $x - x \cos x = x(1 - \cos x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . Donc

$$\tan(x - x \cos x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x(1 - \cos x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{2}$$

Par quotient,  $\frac{\sin x + \cos x - 1}{\tan(x - x \cos x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$ .

5. Comme  $\tan^2 x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ ,  $\sqrt{1+\tan^2 x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\tan^2 x}{2}$ . Par conséquent,

$$\frac{\sqrt{1+\tan^2 x} - 1}{\tan x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\tan x}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

6. On a  $\ln(\cos x) = \ln(1 + (\cos x - 1))$ . Or  $\cos x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . Donc

$$\ln(\cos x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

7. Comme  $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , on a  $e^{\frac{1}{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{x}$  et  $\cos\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + o(x)$ . Par conséquent,

$$e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

Et par produit,  $x(e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ .

8. Comme  $\left(\frac{1}{2}\right)^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  et  $\ln(\ln x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ , on a  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \ln(\ln x)$ . D'où

$$\ln(\ln x) - \left(\frac{1}{2}\right)^x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln x)$$

Par croissances comparées,  $\left(\frac{1}{3}\right)^x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ . Par conséquent,

$$\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$$

Par quotient, on obtient :

$$\frac{\ln(\ln x) - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3 \ln(\ln x)$$

9. Factorisons dans un premier temps :

$$e^{\sin x} - e^{\tan x} = e^{\tan x} (e^{\sin x - \tan x} - 1)$$

Comme  $e^{\tan x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ , on a clairement  $e^{\tan x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ . De plus,  $\sin x - \tan x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  donc  $e^{\sin x - \tan x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin x - \tan x$ . Mais on a :

$$\sin x - \tan x = \tan x (\cos x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$$

Finalement,  $e^{\sin x} - e^{\tan x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$ .

10. Remarquons que  $\frac{\pi x}{2x+3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$ . On a donc  $\frac{\pi x}{2x+3} = \frac{\pi}{2} + t$  avec  $t = -\frac{3\pi}{4x+6}$  et  $t \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . Or

$$\tan\left(\frac{\pi x}{2x+3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\frac{1}{\tan t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{t}$$

Par conséquent,

$$\tan\left(\frac{\pi x}{2x+3}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4x+6}{3\pi} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4x}{3\pi}$$

## SOLUTION 10.

1. En posant  $u = x - \frac{\pi}{2}$ , on a  $u \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 0$  et  $\cos x = -\sin u$ . Or  $\sin u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$  donc  $\cos x \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2} - x$ .

2. En posant  $u = x - \frac{\pi}{2}$ , on a  $u \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 0$  et  $\tan x = -\frac{1}{\tan u}$ . Or  $\tan u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$  donc  $\tan x \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$ .

3.  $\sqrt[3]{1+x^3} - x = (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} - x = x \left( \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right)$ . Or  $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  donc  $\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3x^3}$ . Finalement,  $\sqrt[3]{1+x^3} - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3x^2}$ .

4. En posant  $u = x - 1$ , on a  $u \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$  et  $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2+u} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+\frac{u}{2}} - 1 \right)$ . Or  $\frac{1}{1+\frac{u}{2}} - 1 \equiv u \rightarrow 0 - \frac{u}{2}$  donc  $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1-x}{4}$ .

## SOLUTION 11.

On a

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} &= \sqrt{n} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{n} \left( 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \end{aligned}$$



et

$$\begin{aligned}\sqrt{n-1} &= \sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\end{aligned}$$

donc

$$u_n = \frac{1}{4n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Ainsi

$$u_n \sim \frac{1}{4n^{3/2}}.$$

### SOLUTION 12.

---

1. On a au voisinage de 0,

$$\arccos(x) - \frac{\pi}{2} = -\arcsin(x) \underset{0}{\sim} -x.$$

2. On a au voisinage de 0,

$$x^4 + x + x^2 \underset{0}{\sim} x.$$

3. On a au voisinage de 0,

$$\arcsin(x) + x + x^2 = x + x + o(x) \underset{0}{\sim} 2x.$$

4. On a au voisinage de 0,

$$\arctan(x) + x = x + x + o(x) \underset{0}{\sim} 2x.$$

5. On a pour  $x \neq 1$ ,

$$\frac{1}{1-x} - 1 + x = \frac{2x - x^2}{1-x},$$

ainsi au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1-x} - 1 + x \underset{0}{\sim} \frac{2x}{1} = 2x.$$

6. On a

$$\frac{x^2}{1+x} \underset{0}{=} o(x),$$

ainsi

$$\frac{x^2}{1+x} - x = -x + o(x) \underset{0}{\sim} -x.$$

### SOLUTION 13.

---

On a au voisinage de 0,

$$\frac{e^x + 1}{2} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{48}x^4 + o(x^4)$$

de plus,

$$\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + o(u^4)$$

Posons

$$u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{48}x^4$$

et appliquons le théorème de composition des DL.

$u$	$\frac{x}{2}$	$\frac{x^2}{4}$	$\frac{x^3}{12}$	$\frac{x^4}{48}$
$-\frac{u^2}{2}$	0	$-\frac{x^2}{8}$	$-\frac{x^3}{8}$	$-\frac{7x^4}{96}$
$\frac{u^3}{3}$	0	0	$\frac{x^3}{24}$	$\frac{x^4}{16}$
$-\frac{u^4}{4}$	0	0	0	$-\frac{x^4}{64}$
$\ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right)$	$\frac{x}{2}$	$\frac{x^2}{8}$	0	$-\frac{x^4}{192}$

D'où

$$f(x) = -\frac{1}{192}x^4 + o(x^4)$$

et donc

$$f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{192}x^4.$$

#### SOLUTION 14.

---

On a au voisinage de 0,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7)$$

et

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + o(x^7)$$

Posons

$$y = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040}$$

et appliquons le théorème de composition des DL.

$y$	$x$	$\frac{x^3}{6}$	$\frac{x^5}{120}$	$\frac{x^7}{5040}$
$-\frac{y^3}{6}$	0	$-\frac{x^3}{6}$	$-\frac{x^5}{12}$	$-\frac{13x^7}{720}$
$\frac{y^5}{120}$	0	0	$\frac{x^5}{120}$	$\frac{x^7}{144}$
$-\frac{y^7}{5040}$	0	0	0	$-\frac{x^7}{5040}$
$\sin \circ \operatorname{sh}$	$x$	0	$-\frac{1}{15}x^5$	$-\frac{x^7}{90}$

Posons

$$u = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

et appliquons le théorème de composition des DL.

$u$	$x$	$-\frac{x^3}{6}$	$\frac{x^5}{120}$	$-\frac{x^7}{5040}$
$\frac{u^3}{6}$	$0$	$\frac{x^3}{6}$	$-\frac{x^5}{12}$	$\frac{13x^7}{720}$
$\frac{u^5}{120}$	$0$	$0$	$\frac{x^5}{120}$	$-\frac{x^7}{144}$
$\frac{u^7}{5040}$	$0$	$0$	$0$	$\frac{x^7}{5040}$
$(\text{sh} \circ \sin)(x)$	$x$	$0$	$-\frac{1}{15}x^5$	$\frac{x^7}{90}$

ainsi,

$$\sin(\text{sh}(x)) - \text{sh}(\sin(x)) = -\frac{1}{90}x^7 + o(x^7),$$

et donc

$$\sin(\text{sh}(x)) - \text{sh}(\sin(x)) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{90}x^7.$$

#### SOLUTION 15.

On a

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6)$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^5).$$

D'après le théorème sur les produits de DL, on a donc

$$f(x) = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{15}x^5 + o(x^5).$$

#### SOLUTION 16.

1. Produit de développements limités connus :

$$e^x \sin(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

2. Comme la valuation de  $\sin(x)$  est égale à 1, on trouve le développement limité à l'ordre 6 de  $\sin^3(x)$  en partant du développement limité à l'ordre 4 de  $\sin(x)$  :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Le développement limité de  $\cos x$  à l'ordre 3 est

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

On trouve finalement

$$\sin^3(x) - x^3 \cos(x) = o(x^6)...$$

3. Le cours dit comment calculer le développement limité à l'ordre 2 de  $(1+x)^{1/2}$ .

$$x^3\sqrt{1+x} = x^3 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{8} + o(x^5).$$

4. On se ramène à un développement limité connu par une transformation simple :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+x} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(x/2)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3).\end{aligned}$$

5. Même chose.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3-x^2} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-(x^2/3)} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^4}{27} + o(x^5).\end{aligned}$$

6. C'est immédiat :

$$\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

7. C'est sans soucis :

$$\begin{aligned}\sqrt{4-x} &= 2\sqrt{1-(x/4)} \\ &= 2 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{64} - \frac{x^3}{512} + o(x^3).\end{aligned}$$

8. D'après les formules d'addition,

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x).$$

Il ne reste plus qu'à appliquer les formules connues :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{\sqrt{3}x^3}{12} + o(x^3).$$

9. On se ramène à la seule forme connue :

$$\ln(2+x) = \ln(2) + \ln[1+(x/2)]$$

et on en déduit que

$$\ln(2+x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3).$$

10. Même chose.

$$\begin{aligned}\exp(3-x) &= e^3 \exp(-x) \\ &= e^3 - e^3x + \frac{e^3x^2}{2} - \frac{e^3x^3}{6} + o(x^3).\end{aligned}$$

11. On passe par la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/x} &= e^{\ln(1+x)/x} = e^{1-x/2+x^2/3+o(x^2)} \\ &= e \cdot e^{-x/2+x^2/3+o(x^2)} \\ &= e \cdot \left(1 - x/2 + x^2/8 + x^2/3 + o(x^2)\right)\end{aligned}$$

donc :

$$(1+x)^{1/x} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2).$$

**SOLUTION 17.**

1.

$$x + \ln(1+x) = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

2. La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $I$  (comme somme de fonctions continues et strictement croissantes). D'après le théorème d'inversion, la fonction  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur l'intervalle

$$J = ]f(-1^+), f(1^-)[ = ]-\infty, 1 + \ln 2[.$$

3. Admettons que

$$f^{-1}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$$

pour des réels  $a_k$  convenables. Comme  $f(0) = 0$ , alors  $f^{-1}(0) = 0$  et, par continuité de  $f^{-1}$ , on sait déjà que  $a_0 = 0$ . Comme  $f^{-1}(x)$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers 0, on peut prendre

$$u = f^{-1}(x) = \mathcal{O}(x)$$

dans le développement limité

$$f(u) = 2u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

Or

$$u^2 = a_1^2x^2 + 2a_1a_2x^3 + o(x^3)$$

$$u^3 = a_1^3x^3 + o(x^3)$$

donc

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= 2a_1x + \frac{(4a_2 - a_1^2)}{2}x^2 \\ &\quad + \frac{(6a_3 - 3a_1a_2 + a_1^3)}{3}x^3 \\ &\quad + o(x^3) \\ &= x \quad (\forall x \in J) \\ &= x + o(x^3). \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que

$$\begin{cases} 2a_1 &= 1 \\ -a_1^2 + 4a_2 &= 0 \\ a_1^3 - 3a_1a_2 + 6a_3 &= 0 \end{cases}$$

donc

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{16}, \quad a_3 = \frac{-1}{192}.$$

**REMARQUE.**  $f^{-1}$  admet un développement limité d'ordre 3 en 0 car elle est de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $f(I)$ . En effet, c'est la bijection réciproque d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^3$ , à savoir  $f$ , dont la dérivée ne s'annule pas sur  $I$  puisque pour tout  $x \in I$ ,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x} > 0$$

**SOLUTION 18.**1. a. On pose  $u = x - x_0$  et on trouve

$$e^{(1+u)} = e\left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)\right).$$

b. On applique les formules d'addition en posant  $u = x - \pi/4$  :

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 - u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4) \right).$$

c. Idem avec  $u = x - \pi/6$  :

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{3}u - \frac{u^2}{2} - \frac{\sqrt{3}u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4) \right).$$

d. On pose  $u = x - e$  et

$$\begin{aligned} \ln(x) &= 1 + \ln\left(1 + \frac{u}{e}\right) \\ &= 1 + \frac{u}{e} - \frac{u^2}{2e^2} + \frac{u^3}{3e^3} - \frac{u^4}{4e^4} + o(u^4). \end{aligned}$$

e. On se ramène à une forme connue avec  $u = x - 1$  :

$$\frac{1}{1 + (1 + u)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + (u + u^2/2)}$$

et on considère maintenant l'infiniment petit

$$v = u + \frac{u^2}{2} = \mathcal{O}(u).$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} v^2 &= u^2 + u^3 + \frac{u^4}{4}, \\ v^3 &= u^3 + \frac{3u^4}{2} + o(u^4), \\ v^4 &= u^4 + o(u^4), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{2} - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} - \frac{u^4}{8} + o(u^4).$$

f. On intègre le résultat précédent, puisque

$$\arctan(1 + u) = \arctan(1) + \int_1^{1+u} \frac{dt}{1 + t^2}.$$

Par conséquent,

$$\arctan(1 + u) = \frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{4} + \frac{u^3}{12} + o(u^4).$$

g. Pour tout  $x > 0$ , on a :

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

h. Notons  $f(x)$  l'expression de l'énoncé. Avec  $h = x - \pi/4$ , on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\tan(\pi/2 + 2h) \ln(\tan(h + \pi/4))} \\ &= e^{-\ln(\tan(h + \pi/4)) / \tan(2h)} \end{aligned}$$

d'où

$$f(\pi/4 + h) = \exp\left(-\frac{\ln\left(\frac{1 + \tan(h)}{1 - \tan(h)}\right)}{\tan(2h)}\right).$$

Développons à l'ordre 5  $\ln(1 + \tan(h))$ . On a

$$v = \tan(h) = h + \frac{h^3}{3} + \frac{2h^5}{15} + o(h^5).$$

De plus,

$$\ln(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} + \frac{v^5}{5} + o(v^5).$$

Comme

$$-\frac{v^2}{2} = -\frac{1}{2}\left(h^2 + \frac{2h^4}{3} + o(h^5)\right),$$

$$\frac{v^3}{3} = \frac{1}{3}(h^3 + h^5 + o(h^5)),$$

$$-\frac{v^4}{4} = -\frac{1}{4}(h^4 + o(h^5)),$$

et

$$\frac{v^5}{5} = \frac{1}{5}(h^5 + o(h^5)),$$

d'où

$$\ln(1 + \tan(h)) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{2h^3}{3} - \frac{7h^4}{12} + \frac{2h^5}{15} + o(h^5)$$

donc

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1 + \tan(h)}{1 - \tan(h)}\right) &= \ln(1 + \tan(h)) - \ln(1 + \tan(-h)) \\ &= 2u + \frac{4u^3}{3} + \frac{4u^5}{3} + o(u^5) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \ln(f(h + \pi/4)) &= \frac{2h + \frac{4h^3}{3} + \frac{4h^5}{3} + o(h^5)}{2h + 8h^3/3 + 64h^5/15 + o(h^5)} \\ &= \frac{1 + \frac{2h^2}{3} + \frac{2h^4}{3} + o(h^4)}{1 + 4h^2/3 + 32h^4/15 + o(h^4)} \\ &= -1 + \frac{2h^2}{3} + \frac{26h^4}{45} + o(h^4) \end{aligned}$$

En posant

$$u = \frac{2h^2}{3} + \frac{26h^4}{45} + o(h^4)$$

On a

$$f(h + \pi/4) = e^{-1} \left(1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right)$$

avec

$$u^2 = 4h^4/9 + o(h^4)$$

d'où finalement :

$$f(\pi/4 + h) = \frac{1}{e} + \frac{2}{3e}h^2 + \frac{4}{5e}h^4 + o(h^4).$$

**2. a.** Tout d'abord, pour tout  $x > 0$ ,

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2} = x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/3}$$

et on applique la formule du cours avec l'infiniment petit

$$u = \frac{1}{x}$$

pour trouver

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2} = x + \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + \frac{5}{81x^2} - \frac{10}{243x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

De même,

$$\sqrt[3]{x^3 - x^2} = x - \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} - \frac{5}{81x^2} - \frac{10}{243x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Donc

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} = \frac{2}{3} + \frac{10}{81x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

b. On prend bien entendu

$$u = x - \frac{\pi}{4}$$

pour infiniment petit. D'après les formules d'addition,

$$\begin{aligned}\cos(x) + \sin(x) &= \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2} \left(1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right).\end{aligned}$$

c. On pose  $u = x - \pi/4$  et d'après les formules d'addition,

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \frac{\cos(u) + \sin(u)}{\cos(u) - \sin(u)} \\ &= \frac{1 + u - u^2/2 + o(u^2)}{1 - u - u^2/2 + o(u^2)}.\end{aligned}$$

En prenant

$$v = u + \frac{u^2}{2} + o(u^2) = \mathcal{O}(u)$$

pour infiniment petit, on retrouve une forme connue :

$$\frac{1}{1-v} = 1 + v + \frac{3v^2}{2} + o(v^2)$$

et on en déduit que

$$\tan(x) = 1 + 2u + 2u^2 + o(u^2).$$

### SOLUTION 19.

On a au voisinage de 0,

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Posons  $u = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$  et appliquons le théorème de composition des DL...

$u$	0	$\frac{x^2}{2}$	0	$\frac{x^4}{24}$
$-\frac{u^2}{2}$	0	0	0	$-\frac{x^4}{8}$
$\ln(1 + \operatorname{ch}(x))$	0	$\frac{x^2}{2}$	0	$-\frac{x^4}{12}$

Ainsi,

$$\frac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{x} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3).$$

Posons  $v = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}$  et appliquons à nouveau le théorème de composition des DL.



$v$	$\frac{x}{2}$	$0$	$-\frac{x^3}{12}$
$\frac{v^2}{2}$	$0$	$\frac{x^2}{8}$	$0$
$\frac{v^3}{6}$	$0$	$0$	$\frac{x^2}{48}$
$f(x) - 1$	$\frac{x}{2}$	$\frac{x^2}{2}$	$-\frac{x^3}{16}$

Ainsi,

$$f(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{16} + o(x^4).$$

### SOLUTION 20.

---

► On a au voisinage de 0 ,

$$\arctan(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

et

$$\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

Posons  $u = x - \frac{x^3}{3}$  et appliquons le théorème de composition des DL.

$u$	$x$	$0$	$-\frac{x^3}{3}$
$-\frac{u^2}{2}$	$0$	$-\frac{x^2}{2}$	$0$
$\frac{u^3}{3}$	$0$	$0$	$\frac{x^3}{3}$
$\ln(1 + \arctan(x))$	$x$	$-\frac{x^2}{2}$	$0$

Ainsi,

$$\ln(1 + \arctan(x)) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

► On a au voisinage de 0,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

ainsi, après une banale composition de DL,

$$\frac{x}{\sin^2(x)} = \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right).$$

On a donc après un simple produit de DL,

$$\ln(h(x)) \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

◇ On a au voisinage de 0,

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

Posons  $u = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}$  et appliquons à nouveau le théorème de composition des DL.

$u$	$-\frac{x}{2}$	$\frac{x^2}{3}$
$\frac{u^2}{2}$	0	$\frac{x^2}{8}$
$\frac{h(x)}{e} - 1$	$-\frac{x}{2}$	$\frac{11x^2}{24}$

Ainsi,

$$h(x) \underset{0}{=} e - \frac{ex}{2} + \frac{11ex^2}{24} + o(x^2).$$

### SOLUTION 21.

---

On a au voisinage de 0,

$$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

ainsi,

$$3e^x + e^{-x} \underset{0}{=} 4 + 2x + 2x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

On a donc au voisinage de 0,

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

Posons  $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12}$  et appliquons le théorème de composition des DL.

$u$	$\frac{x}{2}$	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{12}$
$-\frac{u^2}{2}$	0	$-\frac{x^2}{8}$	$-\frac{x^3}{4}$
$\frac{u^3}{3}$	0	0	$\frac{x^3}{24}$
$f(x) - \ln(4)$	$\frac{x}{2}$	$\frac{3x^2}{8}$	$-\frac{x^3}{8}$

Ainsi,

$$f(x) \underset{0}{=} \ln(4) + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{8} + o(x^3).$$

### SOLUTION 22.

---

On a au voisinage de 0 ,

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

ainsi

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + o(x^4)}.$$

Or ,au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1 + u + u^2 + o(u^2).$$

Posons  $u = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{48}x^4$ . Puisque  $u = \mathcal{O}(x^2)$ , le développement à l'ordre 2 en  $u$  indiqué ci-dessus est suffisant pour développer  $f(x)$  à l'ordre 4. Appliquons la méthode de calcul du DL d'une composée.

$u$	$\frac{1}{4}x^2$	$-\frac{1}{48}x^4$
$u^2$	0	$\frac{1}{16}x^4$
$\frac{1}{1-u} - 1$	$\frac{1}{4}x^2$	$\frac{1}{24}x^4$

D'où

$$f(x) \underset{0}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + o(x^4).$$

### SOLUTION 23.

Nous allons considérer  $f(x)$  comme le produit de  $g(x) = x^2 \sin(x)$  et de  $h(x) = 1/(1+x)$ , et nous allons développer chacun des termes à l'ordre 5.

- Commençons par  $g$ . La fonction  $g$  est elle-même un produit. Le premier terme  $x^2$  est un polynôme de degré 2, son développement à l'ordre 5 est donc égal à  $x^2$ . Nous connaissons aussi un développement de  $\sin x$  à l'ordre 5 :  $\sin(x) = x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^5)$ . Le produit des deux termes conduit donc à

$$x^2 \sin(x) = x^3 - x^5/6 + o(x^5),$$

puisque'on ne tient compte dans le produit que des termes de degré  $\leq 5$ . Notons donc qu'il aurait été suffisant de développer  $\sin(x)$  seulement à l'ordre 3. Il est souvent possible d'utiliser ce type de raccourci, mais il est plus sûr au début d'appliquer strictement les règles de calcul, au prix de quelques lourdeurs.

- Passons maintenant à  $1/(1+x)$ . On sait que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + o(x^5).$$

- En utilisant la règle du produit, il vient donc

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3 - x^5/6 + o(x^5)) \times \\ &\quad (1 - x + x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + o(x^5)) \\ &= x^3 - x^4 + 5x^5/6 + o(x^5) \end{aligned}$$

Notons que, là encore, il aurait été possible de ne développer  $1/(1+x)$  qu'à l'ordre 2, puisque  $x^3$  est en facteur dans le premier terme  $g$ .

### SOLUTION 24.

1. On a

$$(1-x)^{-1/2} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + o(x^4)$$

et

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

d'où, après produit des deux DL :

$$f(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{49}{384}x^4 + o(x^4).$$

2. Comme  $1 + \cos(x) \underset{0}{=} 2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ , on a,

$$g(x) \underset{0}{=} \sqrt{2} \left[ 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^4) \right].$$

Puisque  $\sqrt{1+u} \underset{0}{=} 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$ , on déduit du théorème de composition des DL que,

$$g(x) \underset{0}{=} \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}x^2}{8} + \frac{\sqrt{2}x^4}{384} + o(x^4).$$

3. Comme  $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ , on a,

$$h(x) \underset{0}{=} e \times \exp \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right).$$

Puisque  $e^u \underset{0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ , on déduit du théorème de composition des DL que,

$$h(x) \underset{0}{=} e - \frac{ex^2}{2} + \frac{ex^4}{6} + o(x^4).$$

4. Comme

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

et

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^4),$$

on a :

$$\frac{\cos(x)}{1+x^2} \underset{0}{=} 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{37}{24}x^4 + o(x^4).$$

## SOLUTION 25.

1. Pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

donc pour  $x$  au voisinage de 0

$$\ln \left( \sum_{k=0}^n x^k \right) = \ln(1-x^{n+1}) - \ln(1-x)$$

Or  $\ln(1-x^{n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^{n+1}$  donc  $\ln(1-x^{n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$  et

$$\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

donc

$$\ln \left( \sum_{k=0}^n x^k \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

2. On sait que

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k - e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^n}{n!}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \ln \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right) &= \ln \left( e^x + \sum_{k=0}^{n-1} x^k - e^x \right) \\ &= x + \ln \left( 1 + e^{-x} \left( \sum_{k=0}^{n-1} x^k - e^x \right) \right) \end{aligned}$$

Or d'après ce qui précède,

$$e^{-x} \left( \sum_{k=0}^{n-1} x^k - e^x \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^n}{n!}$$

Puisque  $n \geq 1$ ,

$$e^{-x} \left( \sum_{k=0}^{n-1} x^k - e^x \right) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

et donc

$$\begin{aligned} \ln \left( 1 + e^{-x} \left( \sum_{k=0}^{n-1} x^k - e^x \right) \right) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^n}{n!} \\ &= -\frac{x^n}{n!} + o(x^n) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\ln \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right) = x - \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

3. La fonction  $t \mapsto e^{-t^2/2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $\int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$  est bien définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

$$e^{-\frac{t^2}{2}} \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + o(t^5)$$

Comme  $x \mapsto \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  est une primitive de  $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ , on obtient en intégrant terme à terme :

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + o(x^6)$$

Par conséquent,

$$\int_0^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{40} + o(x^{12})$$

et a fortiori

$$\int_0^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

D'après la relation de Chasles, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_x^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_0^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

On en déduit que

$$\int_x^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \underset{x \rightarrow 0}{=} -x + x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

**SOLUTION 26.**

Il est possible d'obtenir certains développements asymptotiques au voisinage de  $+\infty$  ou de  $-\infty$  en posant  $x = 1/u$ , ce qui ramène le problème à  $0^+$  (ou  $0^-$ ). Posant  $x = 1/u$ , on se ramène à  $u$  tendant vers  $0^+$ . Or,

$$\begin{aligned} f(1/u) &= \sqrt{1/u^2 + 1/u} = \frac{\sqrt{1+u}}{u} \\ &= \frac{1 + u/2 - u^2/8 + o(u^2)}{u} \\ &= 1/u + 1/2 - u/8 + o(u) \end{aligned}$$

d'où

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o(1/x).$$

Bien entendu, on aurait pu aussi mettre directement le terme dominant en facteur en écrivant  $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ , ce qui ramène au problème de  $\sqrt{1+u}$  au voisinage de 0.

**SOLUTION 27.**

1. On pourrait procéder par étude de fonctions mais comme on connaît la formule de Taylor avec reste intégral, autant en profiter. D'abord à l'ordre 1.

$$\sin x = x + \int_0^x (x-t)(-\sin t) dt$$

Pour  $x \in [0, 1]$ ,  $\sin t \geq 0$  et l'intégrale est négative. On en déduit que  $\sin x \leq x$ . Puis à l'ordre 3

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \sin t dt$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, l'intégrale est positive. On en déduit que  $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ .

2. Notons  $S_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2}$ . En utilisant la question précédente :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^6} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

Or  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$ . Ainsi

$$\left| S_n - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) \right| \leq \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^6} \leq \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \frac{n^3}{n^6} = \frac{1}{6n^2}$$

Finalement,  $S_n - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \mathcal{O} \left( \frac{1}{n^2} \right) = o \left( \frac{1}{n} \right)$ .

**SOLUTION 28.**

On a

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1+ax^2}{1+bx^2} &\underset{0}{=} (1+ax^2)(1-bx^2+b^2x^4-b^3x^6+o(x^6)) \\ &\underset{0}{=} 1 + (a-b)x^2 + (b^2-ab)x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

d'où

$$f(x) = (-1/2 + a - b)x^2 + (1/24 + b^2 - ab)x^4 + o(x^4).$$

Comme le système

$$a - b = 1/2, \quad 1/24 = ab - b^2 = b(a - b)$$

admet pour unique solution

$$(a, b) = (7/12, 1/12),$$

L'expression  $f(x)$  est un infiniment petit d'ordre le plus grans possible *si et seulement si*

$$a = \frac{7}{12} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{12}.$$

### SOLUTION 29.

1.  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = e^{(1+\frac{1}{x}) \ln x}$ . Or  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \frac{1}{x}) \ln x = -\infty$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ . Par conséquent  $f$  est bien continue en 0.
2. Etudions le taux de variation de  $f$  en 0 :  $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$ . Or  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ . Ainsi  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ .
3. Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x}) \ln x = +\infty$  puis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
4.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour  $x > 0$  :

$$f'(x) = \left( -\frac{1}{x^2} \ln x + \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \frac{1}{x} \right) f(x) = \frac{f(x)}{x^2} (x + 1 - \ln x)$$

Pour  $x > 0$ ,  $f'(x)$  est donc du signe de  $g(x) = x + 1 - \ln x$ .  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ .  $g$  est donc décroissante sur  $]0, 1]$  et croissante sur  $[1, +\infty[$ . Comme  $g(1) = 2 > 0$ , on en déduit que  $g$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par conséquent,  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

5. Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x}) \ln x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$ . Pour  $x > 0$ ,  $f(x) - x = x \left( e^{\frac{\ln x}{x}} - 1 \right)$ . Or  $e^{\frac{\ln x}{x}} - 1 \sim \frac{\ln x}{x}$ . Donc  $f(x) - x \sim \ln x$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$ .  $\mathcal{C}$  admet en  $+\infty$  une branche parabolique de direction la droite d'équation  $y = x$ .
6. Posons  $x = 1 + h$ , de sorte que  $f(x) = f(1 + h) = e^{(1+\frac{1}{1+h}) \ln(1+h)}$ . On a d'une part :

$$1 + \frac{1}{1+h} = 2 - h + h^2 + o(h^2)$$

et d'autre part :

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3) = h \left( 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2) \right)$$

De sorte que,

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{1}{1+h} \right) \ln(1+h) &= h \left( 2 - 2h + \frac{13}{6}h^2 + o(h^2) \right) \\ &= 2h - 2h^2 + \frac{13}{6}h^3 + o(h^3) \end{aligned}$$

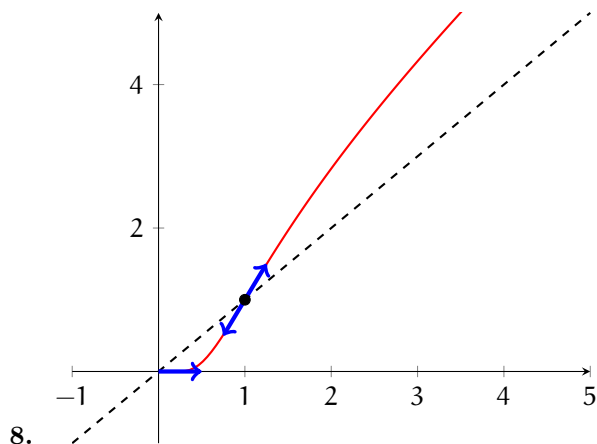
Posons  $u = 2h - 2h^2 + \frac{13}{6}h^3 + o(h^3)$ . On a  $u \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  et  $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$ . On trouve  $u^2 = 4h^2 - 8h^3 + o(h^3)$  et  $u^3 = 8h^3 + o(h^3)$ . Il vient finalement :

$$f(1+h) = 1 + 2h - \frac{1}{2}h^3 + o(h^3)$$

c'est-à-dire :

$$f(x) = 1 + 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

7. On déduit de la question précédente que  $\mathcal{C}$  admet au point d'abscisse 1 une tangente d'équation  $y = 1 + 2(x - 1)$  i.e.  $y = 2x - 1$ . On déduit la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $T$  du signe de  $-\frac{1}{2}(x - 1)^3$ . Au voisinage de  $1^-$ ,  $\mathcal{C}$  est au-dessus de  $T$  et au voisinage de  $1^+$ ,  $\mathcal{C}$  est au-dessous de  $T$ .



8.

### SOLUTION 30.

- $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $f'(x) = (x + 1)e^x > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ .  $f$  est donc continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Puisque  $f(0) = 0$  et  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ ,  $f$  induit une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur lui-même.
- $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+$  et sa dérivée ne s'y annule pas.  $f^{-1}$  est donc également  $\mathcal{C}^\infty$  : elle admet notamment un développement limité en 0 à tout ordre. On a  $f(0) = 0$  donc  $f^{-1}(0) = 0$ . On a également  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  donc  $f^{-1}(f(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} f^{-1}(x)$  i.e.  $f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ . Le développement limité d'ordre 2 de  $f^{-1}$  en 0 est donc  $f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + ax^2 + o(x^2)$ . Posons  $u = f^{-1}(x)$ . On a  $u \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  donc  $e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + o(u) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ . Ainsi

$$f(u) = ue^u = x(1 + ax + o(x))(1 + x + o(x)) = x + (a + 1)x^2 + o(x^2)$$

Comme  $f(u) = x$ , on a par unicité du développement limité  $a + 1 = 0$  i.e.  $a = -1$ .

| **REMARQUE.** Inutile de pousser le développement limité de  $e^u$  à un ordre supérieur à 1.

- Posons à nouveau  $u = f^{-1}(x)$ . On a donc  $f(u) = x$  i.e.  $ue^u = x$ . Ainsi  $u + \ln u = \ln x$ . Or  $u \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $\ln u \underset{u \rightarrow +\infty}{=} o(u)$  donc  $u \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x$  i.e.  $f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x$ .

### SOLUTION 31.

Un rapide coup d'oeil à l'ensemble de l'exercice permet de conclure qu'un DL (au moins à l'ordre trois !) sera le bienvenu.

- L'expression est définie sur  $[-1, 1] \setminus \{0\}$ . Allons-y, allons-o ... Puisqu'au voisinage de 0,

$$\arcsin'(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5),$$

on obtient d'après le théorème d'intégration des DL,

$$\arcsin(x) = \arcsin(x) - \arcsin(0) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6).$$

Ainsi, pour  $x$  voisin de 0 mais non nul,

$$\frac{1}{\arcsin(x)} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + o(x^5)}$$



Déterminons le  $DL_4(0)$  du dernier quotient, noté  $Q(x)$ , en appliquant le théorème de composition des DL. On a, au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2).$$

Posons  $u = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{40}x^4$ . Les calculs ne présentent aucune difficulté et sont résumés ci-dessous,

$u$	0	$-\frac{1}{6}x^2$	0	$-\frac{3}{40}x^4$
$u^2$	0	0	0	$\frac{x^4}{36}$
$Q(x)$	0	$-\frac{1}{6}x^2$	0	$-\frac{17}{360}x^4$

On en déduit qu'au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \times \left[ -\frac{1}{6}x^2 - \frac{17}{360}x^4 + o(x^5) \right] \\ &= -\frac{1}{6}x - \frac{17}{360}x^3 + o(x^4) \end{aligned}$$

2. Comme  $f(x) = o(1)$ , la fonction tend vers 0 avec  $x$ . Elle est donc prolongeable par continuité en 0 par  $f(0) = 0$ .

3. Comme

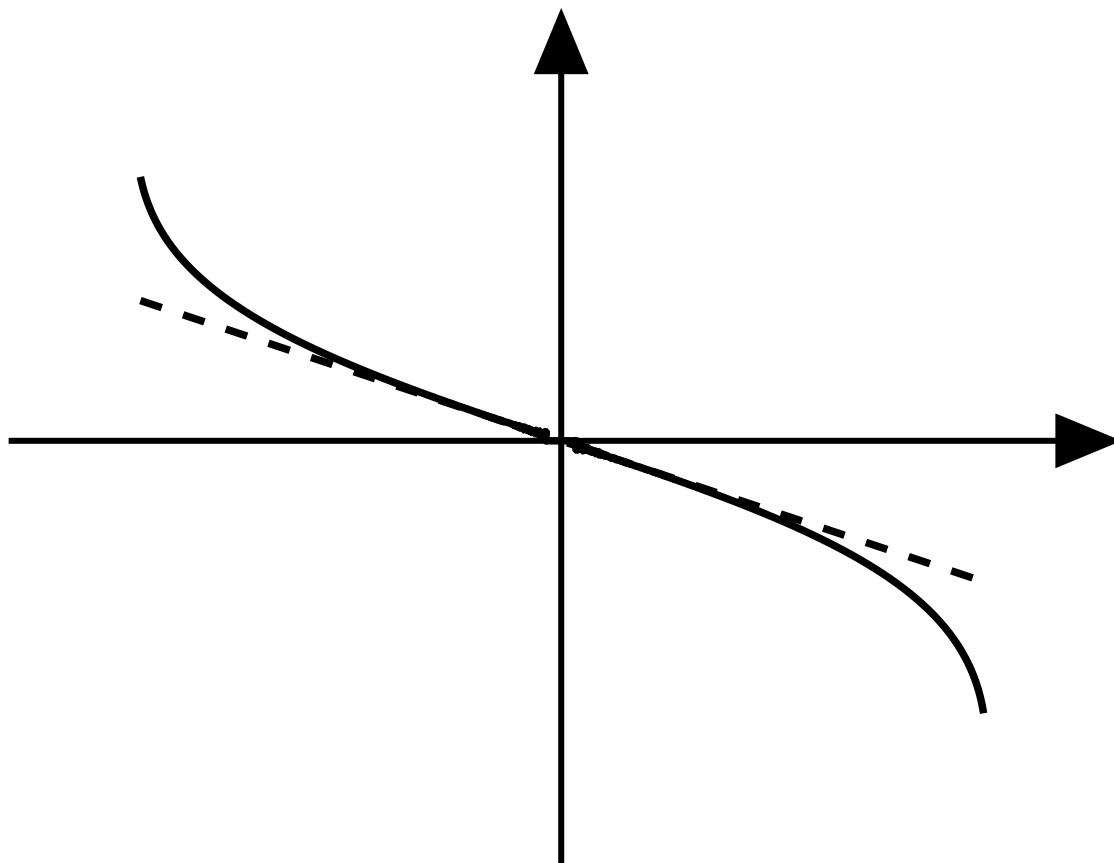
$$f(x) = -\frac{1}{6}x + o(x),$$

la prolongée  $f$  (prolongée par continuité en 0 par  $f(0) = 0$ ) est dérivable en 0 avec  $f'(0) = -\frac{1}{6}$ .

4. Comme

$$f(x) - \left( -\frac{1}{6}x \right) = -\frac{17}{360}x^3 + o(x^3),$$

$f$  présente un point d'inflexion en l'origine : la courbe traverse sa tangente.



**SOLUTION 32.**

On a au voisinage de  $\pm\infty$ ,

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

ainsi

$$f(x) = x + 2 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe admet donc la droite d'équation  $y = x + 2$  pour asymptote en  $\pm\infty$ , la courbe étant située au-dessus de l'asymptote au voisinage de  $+\infty$ , et inversement au voisinage de  $-\infty$ .

**SOLUTION 33.**

Il s'agit de montrer que  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) = 0$ . On pose  $t = 1/x$  et on se rappelle que le DL d'ordre 1 de  $\ln(1+t)$  en 0 est  $t$ . Donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t^2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - \frac{2}{t} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t^2} (\ln(1+t) - \ln(1-t)) - \frac{2}{t} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t^2} (t - (-t)) - \frac{2}{t} \right) = 0. \end{aligned}$$

**SOLUTION 34.**

Les racines de  $x^2 + x$  sont 0 et  $-1$ .  $f$  est donc définie sur  $] -\infty, -1] \cup ]0; +\infty[$ . On a d'abord  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  par croissance comparée. La courbe admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote verticale. De plus, en  $\pm\infty$

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} e^{\frac{1}{x}} \\ &= |x| \left( 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \left( 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= |x| \left( 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \end{aligned}$$

La courbe admet donc la droite d'équation  $y = x + \frac{3}{2}$  comme asymptote oblique en  $+\infty$  et la droite d'équation  $y = -x - \frac{3}{2}$  comme asymptote oblique en  $-\infty$ .

**SOLUTION 35.**

1. Supposons  $f$  dérivable en  $a$ . On a alors

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$$

et

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + o(h),$$

ainsi

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{2hf'(a) + o(h)}{2h} = f'(a) + o(1)$$

et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

2. La fonction *valeur absolue* n'est pas dérivable en 0 mais admet une dérivée symétrique en 0 car

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = 0.$$

### SOLUTION 36.

Ecrivons la formule de Taylor-Young à l'ordre deux en  $x_0$ ,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + o(h^2).$$

On a donc aussi

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + o(h^2).$$

D'où, en notant  $\tau(h)$  le quotient

$$\frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2},$$

on a,

$$\tau(h) = f''(x_0) + o(1),$$

ainsi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = f''(x_0).$$

### SOLUTION 37.

On a  $u_n = \arctan n^3 - \arctan n^2$ . Or si  $n > 0$ ,  $n^2$  et  $n^3$  sont strictement positifs d'où  $\arctan n^2 = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{n^2}$  et  $\arctan n^3 = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{n^3}$ . Ainsi  $u_n = \arctan \frac{1}{n^2} - \arctan \frac{1}{n^3}$  pour  $n \geq 1$ . Comme  $\arctan u \sim u$ ,  $\arctan \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$  et  $\arctan \frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{n^3}$ . De plus,  $\frac{1}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc  $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ .

### SOLUTION 38.

1. On remarque que l'intégrande tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Nous ne disposons pas en première année de théorème d'inversion limite/intégrale mais il y a cependant des chances que  $(u_n)$  converge vers 1. En effet,

$$1 - u_n = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n} \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

On en déduit que  $(u_n)$  converge vers 1.

2. On a vu que  $1 - u_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n}$ . Soit  $n \geq 1$  : on écrit  $\frac{x^n}{1+x^n}$  sous la forme  $\frac{x}{n} \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}$  et on effectue une intégration par parties :

$$1 - u_n = \left[ \frac{x}{n} \ln(1+x^n) \right]_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$$

En utilisant l'inégalité classique  $\ln(1+u) \leq u$ , on a :

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

Donc  $\int_0^1 \ln(1+x^n) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Par conséquent,

$$1 - u_n = \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{i.e.} \quad u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$