Devoir à la maison n°17 : corrigé

Problème 1 — Matrices stochastiques (d'après ESCP 1996)

Partie I – Etude d'exemples

1. **a.** Si $\alpha = 1$, on a évidemment $\gamma_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Sinon, $\gamma_n = \frac{1}{n+1}\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$.

b. Si $\alpha = 1$, (γ_n) est constante égale à 1 donc converge vers 1.
Si $\alpha = -1$, $\gamma_n = \frac{1}{n+1}\frac{1+(-1)^n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $0 \leqslant \gamma_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi (γ_n) converge vers 0.
Si $|\alpha| < 1$, alors $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1}\frac{1}{1-\alpha}$ donc (γ_n) converge vers 0.
Si $|\alpha| > 1$, alors $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1}\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ donc (γ_n) diverge.

2. **a.** On trouve $A^2 = {}^tA$ et $A^3 = I_3$. On en déduit que $A^{3k} = I_3$, $A^{3k+1} = A$ et $A^{3k+2} = {}^tA$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b. Posons $B_n = (n+1)C_n$. D'après la question précédente, $B_{n+3} = B_n + I_n + A + {}^tA$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
B_{3n} &= B_0 + n(I_n + A + {}^tA) = I_n + n(I_n + A + {}^tA)\\
B_{3n+1} &= B_1 + n(I_n + A + {}^tA) = I_n + A + n(I_n + A + {}^tA)\\
B_{3n+2} &= B_2 + n(I_n + A + {}^tA) = (n+1)(I_n + A + {}^tA)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$C_{3n} = \begin{pmatrix} \frac{n+1}{3n+1} & \frac{n}{3n+1} & \frac{n}{3n+1}\\ \frac{n}{3n+1} & \frac{n+1}{3n+1} & \frac{n}{3n+1}\\ \frac{n}{3n+1} & \frac{n}{3n+1} & \frac{n+1}{3n+1}\end{pmatrix} \qquad C_{3n+1} = \begin{pmatrix} \frac{n+1}{3n+2} & \frac{n}{3n+2} & \frac{n+1}{3n+2}\\ \frac{n+1}{3n+2} & \frac{n+1}{3n+2} & \frac{n}{3n+2}\\ \frac{n}{3n+2} & \frac{n+2}{3n+2} & \frac{n+1}{3n+2}\end{pmatrix} \qquad C_{3n+2} = \begin{pmatrix} \frac13 & \frac13 & \frac13\\ \frac13 & \frac13 & \frac13\\ \frac13 & \frac13 & \frac13\end{pmatrix}$$

On constate que les suites (C_{3n}), (C_{3n+1}) et (C_{3n+2}) convergent vers la même matrice $C = \begin{pmatrix} \frac13 & \frac13 & \frac13\\ \frac13 & \frac13 & \frac13\\ \frac13 & \frac13 & \frac13\end{pmatrix}$.

On en déduit que (C_n) converge vers C.

c. On a $C^2 = C$ donc $v^2 = v$, ce qui prouve que v est un projecteur. On a clairement $\operatorname{Im} v = \operatorname{vect}((1,1,1))$ et on voit que $\operatorname{Ker} v$ est l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$.

3. **a.** On cherche une matrice inversible $P = \begin{pmatrix} a & b\\ dC & d\end{pmatrix}$ telle que $AP = PD$. La condition $AP = PD$ équivaut au système

$$\begin{cases} \frac13 a + \frac23 c = a\\ \frac13 b + \frac23 d = -\frac16 b\\ \frac12 a + \frac12 c = c\\ \frac12 b + \frac12 d = -\frac16 d\end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} a - c = 0\\ 3b + 4d = 0\end{cases}$$

Il suffit par exemple de prendre $a = c = 1$, $b = 4$ et $d = -3$ i.e. $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ qui est inversible, de sorte qu'on a bien $A = PDP^{-1}$.

b. On trouve $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Par récurrence, on obtient $A^k = PD^kP^{-1}$. Or $D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{6}\right)^k \end{pmatrix}$ et un calcul donne alors

$$A^k = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^k & \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^k \\ \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^k & \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^k \end{pmatrix}$$

c. On a $A^k = U + \left(-\frac{1}{6}\right)^k V$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $U = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$.

d. On a donc

$$C_n = U + \frac{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)} V = U + \frac{1}{n+1}\frac{6}{7}\left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right) V$$

e. Comme $\left|-\frac{1}{6}\right| < 1$, on montre que (C_n) converge vers $C = U$.

f. On vérifie que $U^2 = U$, ce qui prouve que $v^2 = v$. v est donc un projecteur de $\mathbb{R}^2$. On a alors $\operatorname{Im} v = \operatorname{vect}((1,1))$ et $\operatorname{Ker} v$ est la droite d'équation $3x + 4y = 0$.

Partie II – Etude de (C_n) lorque A est r-périodique

1. **a.** Posons $z_k = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{r-1} \alpha_{k+l}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En utilisant, la périodicité de (α_k), on montre que $z_{k+1} = z_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi la suite (z_k) est constante égale à $z_0 = \gamma$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \beta_{n+r} &= \sum_{k=0}^{n+r} \alpha_k - \frac{n+r+1}{r}\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k - \frac{n+1}{r}\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k + \sum_{k=n+1}^{n+r} \alpha_k - \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k \\ &= (n+1)\gamma_n - (n+1)\gamma + \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_{n+1+k} - \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k \\ &= \beta_n + rz_{n+1} - r\gamma = \beta_n \end{aligned}$$

en utilisant la question précédente. Ainsi (β_n) est r-périodique et est donc bornée comme toute suite périodique. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\min_{0 \leqslant k \leqslant r-1} \beta_k \leqslant \beta_n \leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant r-1} \beta_k$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_n = \gamma + \frac{\beta_n}{n+1}$$

Comme (β_n) est bornée, (γ_n) converge vers γ.

2. **a.** Puisque $A^r = I_p$, $A^{k+r} = A^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $\alpha_{k+r} = a_{i,j}(A^{k+r}) = a_{i,j}(A^k) = \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite (α_k) est donc r-périodique. Avec les notations de la question précédente, on a $\gamma_n = c_{i,j}(C_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or on a montré que (γ_n) converge vers γ. Or

$$\gamma = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1} c_{i,j}(A^k) = c_{i,j}\left(\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1} A^k\right)$$

Ceci montrer que (C_n) converge vers

$$C = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1} A^k$$

b. Comme A et I_p commutent

$$\begin{aligned} A^r - I_p &= (A - I_p)\left(\sum_{k=0}^{r-1} A^k\right) = r(A - I_p)C \\ &= \left(\sum_{k=0}^{r-1} A^k\right)(A - I_p) = rC(A - I_p) \end{aligned}$$

Comme $A^r = I_p$ et $r \neq 0$, $AC = CA = C$.

c. Puisque $AC = C$, on montre par récurrence que $A^k C = C$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que

$$C^2 = \frac{1}{r}\left(\sum_{k=0}^{r-1} A^k\right) C = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1} A^k C = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1} C = C$$

On en déduit que $v^2 = v$ et v est donc un projecteur.
On a $AC = C$, ce qui signifie $u \circ v = v$ ou encore $(u - \mathrm{Id}) \circ v = 0$ et donc $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id})$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id})$. Alors $u(x) = x$ puis $u^k(x) = x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que

$$v(x) = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1} u^k(x) = x$$

et donc $x \in \operatorname{Im} v$. Ainsi $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}) \in \operatorname{Im} v$. Finalement $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \operatorname{Im} v$.
De même, $CA = C$, ce qui sigifie que $v \circ u = v$ ou encore $v \circ (u - \mathrm{Id}) = 0$ et donc $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) \subset \operatorname{Ker} v$. Mais on a également $\operatorname{rg} v = \dim \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id})$ d'après ce qui précède. Le théorème du rang permet donc d'affirmer que $\operatorname{rg}(u - \mathrm{Id}) = \dim \operatorname{Ker} v$ puis que $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) = \operatorname{Ker} v$.

3. **a.** La suite (α'_k) est r-périodique. La suite (γ'_n) qui lui est associée converge donc vers

$$\gamma' = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1} \alpha'_k$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \gamma'_n - \gamma_n &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha'_k - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=m}^{n+m} \alpha_k - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=n+1}^{n+m} \alpha_k - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k\right) \\ &= \frac{1}{n+1}(y_n - K) \end{aligned}$$

avec $y_n = \sum_{k=n+1}^{n+m} \alpha_k$ et $K = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k$. La suite (y_n) est r-périodique donc bornée. On en déduit que la $(\gamma'_n - \gamma_n)$ converge vers 0. Ainsi (γ_n) converge vers

$$\gamma' = \frac{1}{r}\sum_{k=m}^{m+r-1} \alpha_k$$

b. Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$. La suite de terme général $\alpha_k = c_{i,j}(A^k)$ est r-périodique à partir du rang m. D'après la question précédente, la suite (γ_n) qui lui est associée converge vers γ' en gardant les mêmes notations. Ceci montre que (C_n) converge vers

$$C = \frac{1}{r}\sum_{k=m}^{m+r-1} A^k$$

c. Comme A et I_p commutent

$$\begin{aligned} A^{m+r} - A^m &= (A - I_p)\left(\sum_{k=m}^{m+r-1} A^k\right) = r(A - I_p)C \\ &= \left(\sum_{k=m}^{m+r-1} A^k\right)(A - I_p) = rC(A - I_p) \end{aligned}$$

Comme $A^{m+r} = A^m$ et $r \neq 0$, $AC = CA = C$.
Puisque $AC = C$, on montre par récurrence que $A^k C = C$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que

$$C^2 = \frac{1}{r}\left(\sum_{k=m}^{m+r-1} A^k\right) C = \frac{1}{r}\sum_{k=m}^{m+r-1} A^k C = \frac{1}{r}\sum_{k=m}^{m+r-1} C = C$$

On en déduit que $v^2 = v$ et v est donc un projecteur.
On a $AC = C$, ce qui signifie $u \circ v = v$ ou encore $(u - \mathrm{Id}) \circ v = 0$ et donc $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$. Alors $u(x) = x$ puis $u^k(x) = x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que

$$v(x) = \frac{1}{r}\sum_{k=m}^{m+r-1} u^k(x) = x$$

et donc $x \in \mathrm{Im}\, v$. Ainsi $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \in \mathrm{Im}\, v$. Finalement $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\, v$.
De même, $CA = C$, ce qui sigifie que $v \circ u = v$ ou encore $v \circ (u - \mathrm{Id}) = 0$ et donc $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}\, v$. Mais on a également $\mathrm{rg}\, v = \dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ d'après ce qui précède. Le théorème du rang permet donc d'affirmer que $\mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}) = \dim \mathrm{Ker}\, v$ puis que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\, v$.

Partie III – Etude de matrices stochastiques

1. Pour aller plus vite, on utilisera le fait que $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est stochastique *si et seulement si* M est à coefficients positifs et si $MU = U$ avec $U \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

a. Puisque M et N sont à coefficients positifs et que λ et μ sont des réels positifs, $\lambda M + \mu N$ est à coefficients positifs. De plus, $(\lambda M + \mu N)U = \lambda MU + \mu NU = (\lambda + \mu)U = U$ car M et N sont stochastiques et car $\lambda + \mu = 1$. Ainsi $\lambda M + \mu N$ est stochastique.

Remarque. On a en fait montré que $\mathcal{S}_p$ est une partie *convexe* de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. ■

b. Pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$,

$$c_{i,j}(MN) = \sum_{k=1}^{p} c_{ik}(M)c_{kj}(N) \geqslant 0$$

car M et N sont à coefficients positifs. De plus, $MNU = MU = U$ car M et N sont stochastiques. Donc MN l'est également.

c. Tout d'abord, on montre par récurrence que A^n est stochastique pour tout $n \in \mathbb{N}$ en utilisant la question précédente.
$C_0 = I_p$ est stochastique. Supposons que C_n le soit pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $C_{n+1} = \frac{n}{n+1}C_n + \frac{1}{n}A^{n+1}$ est stochastique d'après la question **III.1.a**. Par récurrence, $C_n \in \mathcal{S}_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que (C_n) admet une limite C. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, C_n est stochastique, on a

- $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $c_{i,j}(C_n) \geqslant 0$.
- $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} c_{i,j}(C_n) = 1$.

Par passage à la limite,

- $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $c_{i,j}(C) \geqslant 0$.
- $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} c_{i,j}(C) = 1$.

Ainsi C est stochastique.

2. **a.** Supposons M déterministe. La somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. Comme tous les coefficients valent 0 ou 1, un seul des coefficients de chaque ligne vaut 1 et les autres valents 0.
Réciproquement si tous les coefficients sont égaux à 0 ou 1 et si chaque ligne de M contient exactement un coefficient égal à 1, alors M est bien déterministe.

b. Il y a p choix possibles pour la position du seul coefficient 1 pour chacune des p lignes d'une matrice déterministe. On en déduit que card $\mathcal{D}_p = p^p$.

c. MN est stochastique d'apès la question **III.1.b**. De plus, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$

$$c_{i,j}(MN) = \sum_{k=1}^{p} c_{ik}(M)c_{kj}(N) \in \mathbb{N}$$

La somme des coefficients de chaque ligne de MN valant 1 et chacun de ces coefficients étant entier naturel, un seul d'entre eux vaut 1 et les autres sont nuls. Ceci prouve que MN est déterministe.

d. La suite (A^k) est à valeurs dans $\mathcal{D}_p$ d'après la question précédente. Comme $\mathcal{D}_p$ est un ensemble fini, la suite (A^k) ne peut être injective. Il existe donc des entiers naturels m et n tels que $m < n$ et $A^m = A^n$. Posons $r = n - m \in \mathbb{N}^*$. Alors $A^{m+r} = A^m$ i.e. A est donc r-périodique à partir du rang m.
Si A est inversible, alors en multipliant l'égalité $A^{m+r} = A^m$ par $(A^{-1})^m$, on obtient $A^r = I_p$, ce qui prouve que A est r-périodique.

e. Chaque colonne de A contient au moins un coefficient égal à 1 sinon une colonne de A serait nulle, ce qui contredirait son inversibilité. Comme A contient un seul coefficient égal à 1 par ligne, elle contient en tout p coefficients égaux à 1. On en déduit que chaque colonne de A contient exactement un coefficient égal à 1, les autres étant nuls.
On voit alors que $A{}^tA = I_p$, ce qui prouve que $A^{-1} = {}^tA$. Les coefficients de ${}^tA$ sont tous égaux à 0 ou 1 et comme chaque colonne de ${}^tA$ contient exactement un coefficient égal à 1, chaque ligne de ${}^tA$ contient exactement un coefficient égal à 1. Ceci prouve que $A^{-1} = {}^tA$ est déterministe. Comme A^{-1} est évidemment inversible, $A^{-1} \in \Delta_p$.

Remarque. Comme le produit de deux matrices déterministes inversibles et une matrice déterministe (d'après **III.2.c**) inversible et que $I_n \in \Delta_p$, on voit que Δ_p est un sous-groupe de $GL_p(\mathbb{R})$.
Les matrices déterministes inversibles sont aussi appelées matrices de permutation. Je vous laisse deviner pourquoi. ■

3. D'après la question **III.2.d**, A est r-périodique à partir d'un certain rang m. D'après les questions **II.3.b** et **II.3.c**, (C_n) converge vers une matrice C telle que $C^2 = C$. D'après la question **III.1.c**, $C \in \mathcal{S}_p$.

4. **a.** Puisque $XY = I_p$, X et Y sont inversibles.

b. Soit $j \in [\![1,p]\!]$. D'une part,

$$c_{jj}(XY) = \sum_{k=1}^{p} c_{jk}(X)c_{kj}(Y) \leqslant \mu_j \sum_{k=1}^{p} c_{jk}(X) = \mu_j$$

Puisque $c_{jj}(XY) = c_{jj}(I_p) = 1$, on a $\mu_j \geqslant 1$. D'autre part,

$$\sum_{i=1}^{p} c_{i,j}(Y) = 1$$

et $c_{i,j} \geqslant 0$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ donc $c_{i,j} \leqslant 1$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$. On en déduit que $\mu_j \leqslant 1$.
Finalement $\mu_j = 1$.

c. Soit $j \in [\![1,p]\!]$. Puisque $\mu_j = 1$, un des coefficients de la $j^{\text{ème}}$ ligne vaut 1. Puisque Y est stochastique, la somme des coefficients de cette ligne vaut 1 et, puisque tous les autres coefficients de cette ligne sont positifs, ils sont nuls.
Les coefficients de Y valent donc tous 0 ou 1 et chaque ligne de Y contient exactement un coefficient égal à 1, ce qui prouve que Y est déterministe. Ainsi $Y \in \Delta_p$ puisque Y est également inversible.
Puisque $XY = I_p$, $X = Y^{-1}$ est donc $X \in \Delta_p$ d'après **III.2.e**.

d. Posons $W = UV \in \Delta_p$. On a donc $W^{-1}UV = I_p$. D'après **III.2.e**, $W^{-1} \in \Delta_p$ et a fortiori $W^{-1} \in \mathcal{S}_p$. D'après **III.1.b**, $W^{-1}U \in \mathcal{S}_p$ et ce qui précède montre que $W^{-1}U \in \Delta_p$ et $V \in \Delta_p$. Enfin, $U = W(W^{-1}U) \in \mathcal{D}_p$ d'après **III.2.c** et U est inversible car W et $W^{-1}U$ le sont. Ainsi $U \in \Delta_p$.