

DEVOIR À LA MAISON N°14

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

EXERCICE 1.

On considère la fonction $g: x \in]0, 1] \mapsto x \ln(x)$.

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. On note encore g ce prolongement.
2. Etudier brièvement les variations de g sur $[0, 1]$.
3. On définit la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $t_0 \in \left] \frac{e^{-1}}{3}, e^{-1} \right[$ et $t_{n+1} = -g(t_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_0 \leq t_{n+1} \leq e^{-1}$.
4. Montrer que pour tout $x \in [t_0, e^{-1}]$,

$$|g(x) - g(e^{-1})| \leq \frac{|x - e^{-1}|^2}{2t_0}$$

5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|t_n - e^{-1}| \leq 2t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0} \right)^{2^n}$$

6. En déduire la limite de la suite (t_n) .

EXERCICE 2.

1. On pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite (S_n) converge vers un réel à préciser.
2. On pose $u_n = \left(\frac{4^n n^n n!}{(2n)!} \right)^{\frac{1}{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel à préciser.

EXERCICE 3.

1. On considère la fonction $f: t \in]0, 1] \mapsto -t \ln(t)$. Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0. On notera encore f son prolongement. Etudier brièvement les variations de f sur $[0, 1]$.
2. On pose

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, R_n(t) = e^t - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}$$

Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, |R_n(t)| \leq \frac{t^{n+1} e^t}{(n+1)!}$$

Dans la suite, on pose

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I_{p,q} = \int_0^1 x^p (\ln x)^q dx$$
$$I = \int_0^1 e^{f(t)} dt$$

3. Montrer que

$$\left| I - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} I_{k,k} \right| \leq \frac{e^{e^{-1}}}{e^{n+1}(n+1)!}$$

4. Déterminer une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p,q-1}$ puis la valeur de $I_{p,q}$ pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

5. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^n}$ converge puis que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} = I$.