Devoir surveillé n°6

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

Vocabulaire et notations

- Pour un réel t, on notera $\lfloor t \rfloor$ la partie entière de t.
- La notation $[\![0,9]\!]$ désigne l'ensemble $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
- On dit qu'une suite (u_n) est périodique à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n+T} = u_n$ pour tout $n \geqslant N$. On dit alors que (u_n) est T-périodique à partir du rang N.

Soit x un nombre réel. On définit deux suites (d_n) et (ε_n) de la manière suivante :

- On pose $d_0 = \lfloor x \rfloor$ et $\varepsilon_0 = x - \lfloor x \rfloor$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_{n+1} = \lfloor 10\varepsilon_n \rfloor$ et $\varepsilon_{n+1} = 10\varepsilon_n - \lfloor 10\varepsilon_n \rfloor$.

1. *Dans cette question uniquement*, on suppose $x = 123,456$. Calculer d_0, d_1, d_2, d_3 et $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Que valent d_n et ε_n pour $n \geqslant 4$?

2. On revient au cas général.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n \in [0,1[$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n \in [\![0,9]\!]$.

c. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x = S_n + \frac{\varepsilon_n}{10^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. En déduire que (S_n) converge vers x.

3. Soient $T \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}$. On suppose que la suite (d_n) est T-périodique à partir du rang N.

a. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 10^{N+T} S_{n+N+T} - 10^N S_{n+N}$. Montrer que la suite (u_n) est constante.

b. En déduire qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$10^{N+T} S_{n+N+T} - 10^N S_{n+N} = p$$

c. En déduire que x est rationnel.

4. Soit α le nombre dont l'écriture décimale est $0,123\,456\,456\,456\,456\ldots$. Montrer que α est rationnel et l'écrire sous la forme d'une fraction de deux entiers.

5. On suppose que x est rationnel. Il existe donc $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{a}{b}$. On définit deux suites (q_n) et (r_n) de la manière suivante.

- q_0 et r_0 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,q_{n+1} et r_{n+1} sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $10r_n$ par b.

a. Justifier qu'il existe deux entiers naturels N et M distincts tels que $r_N = r_M$.

b. En déduire que (r_n) est périodique à partir d'un certain rang.

c. En déduire que (q_n) est également périodique à partir d'un certain rang.

d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = b\varepsilon_n$ et $q_n = d_n$.
On a donc prouvé que la suite (d_n) était périodique à partir d'un certain rang.

6. On suppose que $x = \dfrac{13}{35}$. Déterminer $N \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathbb{N}^*$ tels que la suite (d_n) soit T-périodique à partir du rang N.

Exercice 2.

Soient m et n des entiers naturels non nuls. On pose $G = \{z_1z_2, (z_1, z_2) \in \mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n\}$.

1. *Dans cette question uniquement*, on pose $m = 4$ et $n = 6$. Déterminer les éléments et le cardinal de $\mathbb{U}_m$, $\mathbb{U}_n$, $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$ et G.

2. Montrer que $\mathbb{U}_{m\wedge n} \subset \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$.

3. A l'aide d'une relation de Bézout entre m et n, montrer que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_{m\wedge n}$.

4. Montrer que $G \subset \mathbb{U}_{m\vee n}$.

5. A l'aide d'une relation de Bézout entre m et n, montrer que $\mathbb{U}_{m\vee n} \subset G$.

Exercice 3.

L'objectif de cet exercice est d'obtenir une majoration du nombre de divisions euclidiennes effectuées lors du calcul d'un PGCD par l'algorithme d'Euclide.

1. On considère la suite (F_n) telle que $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note par ailleurs φ l'unique racine strictement positive du trinôme $X^2 - X - 1$.

a. Calculer φ.

b. Montrer que $F_{n+2} > \varphi^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $(a, b, q, r) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $a = bq + r$. Montrer que $a \wedge b = b \wedge r$.

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 < b < a$. On rappelle le principe de l'algorithme d'Euclide appliqué au couple (a, b) : il consiste à construire une suite finie $(r_k)_{0\leqslant k\leqslant N+1}$ telle que

- $r_0 = a$ et $r_1 = b$;
- pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, r_{k+2} est le reste de la division euclidienne de r_k par r_{k+1} ;
- $0 = r_{N+1} < r_N < \cdots < r_1 < r_0$.

L'entier N est donc le nombre de divisions euclidiennes effectuées dans l'algorithme d'Euclide appliqué au couple (a, b).

a. *Dans cette question uniquement*, on suppose $a = 154$ et $b = 48$. Déterminer N.

b. Justifier que $a \wedge b = r_N$.

c. Montrer que $r_k \geqslant r_{k+1} + r_{k+2}$ pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$.

d. Montrer par récurrence que $r_k \geqslant F_{N+2-k}$ pour tout $k \in [\![0, N]\!]$.

e. *Dans cette question uniquement*, on suppose $N \geqslant 2$. Montrer que $N < \dfrac{\ln b}{\ln \varphi} + 1$.

f. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que b s'écrit avec au plus k chiffres en base 10. Montrer que $N \leqslant 5k$.
On donne $\dfrac{\ln 10}{\ln \varphi} \approx 4,78$.

4. **a.** Écrire une fonction Python d'arguments deux entiers naturels a et b renvoyant le PGCD de a et b calculé à l'aide de l'algorithme d'Euclide décrit dans la question précédente.

b. Modifier légèrement la fonction de la question précédente afin qu'elle renvoie le nombre de divisions euclidiennes effectués dans l'algorithme d'Euclide.