

CONVEXITÉ

1 Parties convexes d'un espace vectoriel réel

Dans cette section, E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel réel.

Définition 1.1 Barycentre

Soient $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\Lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$. On appelle **barycentre** de $\{(x_1, \lambda_1), \dots, (x_n, \lambda_n)\}$ le vecteur $\frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.

REMARQUE. Un barycentre n'est donc rien d'autre qu'une moyenne pondérée.

Définition 1.2 Segment

Soit $(a, b) \in E^2$. On appelle **segment** $[a, b]$ l'ensemble $\{(1 - \lambda)a + \lambda b, \lambda \in [0, 1]\}$.

Proposition 1.1 Segment et barycentres

Soit $(a, b) \in E^2$. Le segment $[a, b]$ est l'ensemble des barycentre à coefficients **positifs** de a et b .

Définition 1.3 Partie convexe

On dit qu'une partie \mathcal{C} de E est **convexe** si pour tout $(a, b) \in \mathcal{C}^2$, $[a, b] \subset \mathcal{C}$.

Exemple 1.1

Un segment d'un \mathbb{R} -espace vectoriel est une partie convexe de cet espace vectoriel.

Exemple 1.2

Un sous-espace vectoriel ou un sous-espace affine d'un \mathbb{R} -espace vectoriel est une partie convexe de cet espace vectoriel.

Exemple 1.3

Toute boule (fermée ou ouverte) est une partie convexe d'un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Exercice 1.1

Montrer que les parties convexes de \mathbb{R} sont les intervalles.

Proposition 1.2 Convexité et barycentres

Une partie \mathcal{C} de E est convexe **si et seulement si** tout barycentre à coefficients **positifs** de vecteurs de \mathcal{C} appartient à \mathcal{C} .

2 Fonctions convexes

Dans cette section, I désigne un intervalle de \mathbb{R} .

Définition 2.1 Convexité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

► On dit que f est **convexe** sur I si :

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall t \in [0, 1], f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

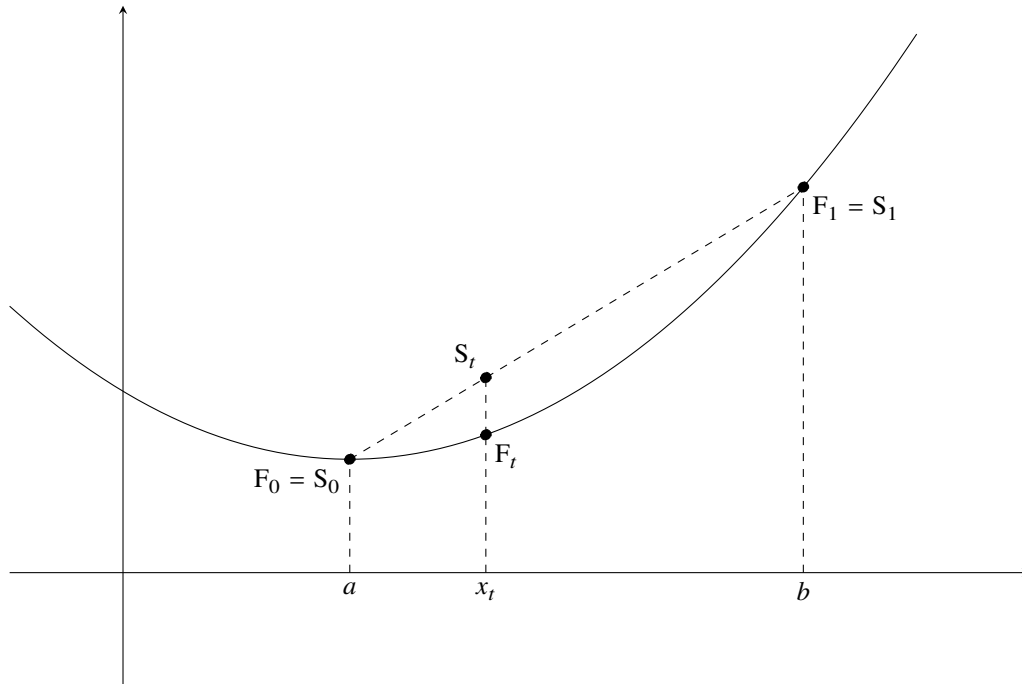
► On dit que f est **concave** sur I si :

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall t \in [0, 1], f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b)$$

REMARQUE. Pour tout $t \in [0, 1]$, le réel $(1-t)a + tb$ est compris entre a et b et appartient donc à I puisque I est un intervalle.

REMARQUE. Une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est concave sur I **si et seulement si** $-f$ est convexe sur I .

Interprétation graphique de la convexité



Soit $(a, b) \in \mathbb{I}^2$. Pour $t \in [0, 1]$, posons $x_t = (1 - t)a + tb$ et notons

- F_t le point du graphe de f d'abscisse x_t ;
- S_t le point du segment $[F_0F_1]$ d'abscisse x_t .

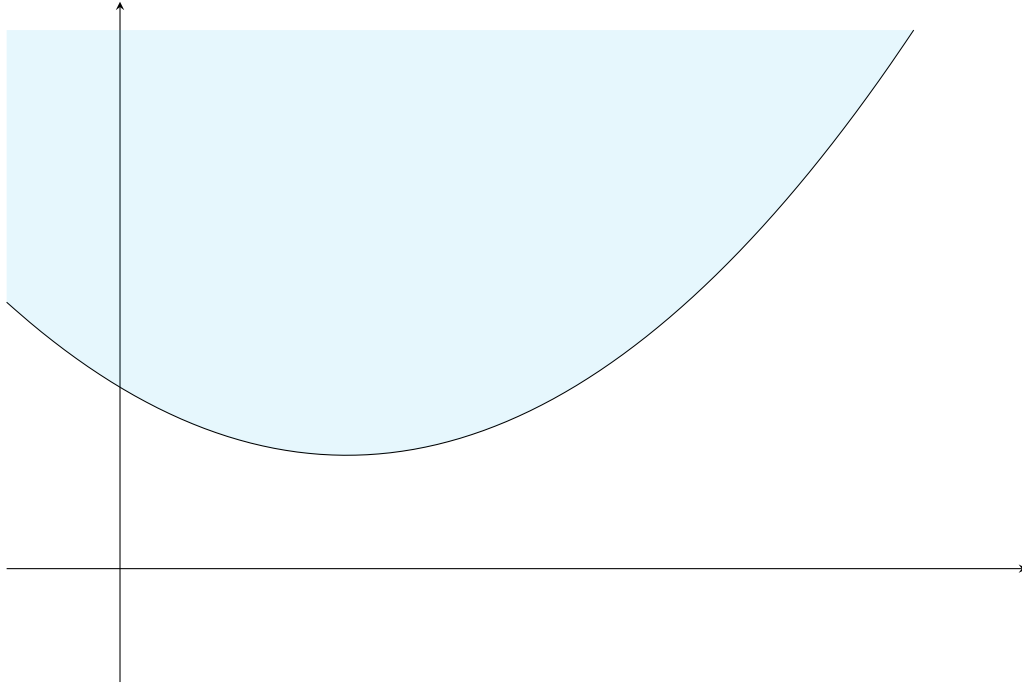
Lorsque t décrit $[0, 1]$, S_t décrit le segment $[F_0F_1]$ et F_t décrit l'arc du graphe compris entre F_0 et F_1 . La condition de convexité dit simplement que F_t est toujours situé **au-dessous** de S_t . Géométriquement, tout arc du graphe de f est situé **au-dessous** de la corde correspondante.

De manière similaire, dire que f est concave signifie tout arc du graphe de f est situé **au-dessus** de la corde correspondante.

Définition 2.2 Épigraphe

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle **épigraphe** de f l'ensemble $\{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$.

Interprétation graphique de l'épigraphe



L'épigraphe d'une fonction f est la portion de \mathbb{R}^2 située au-dessus du graphe de f .

Proposition 2.1 Épigraphe et convexité

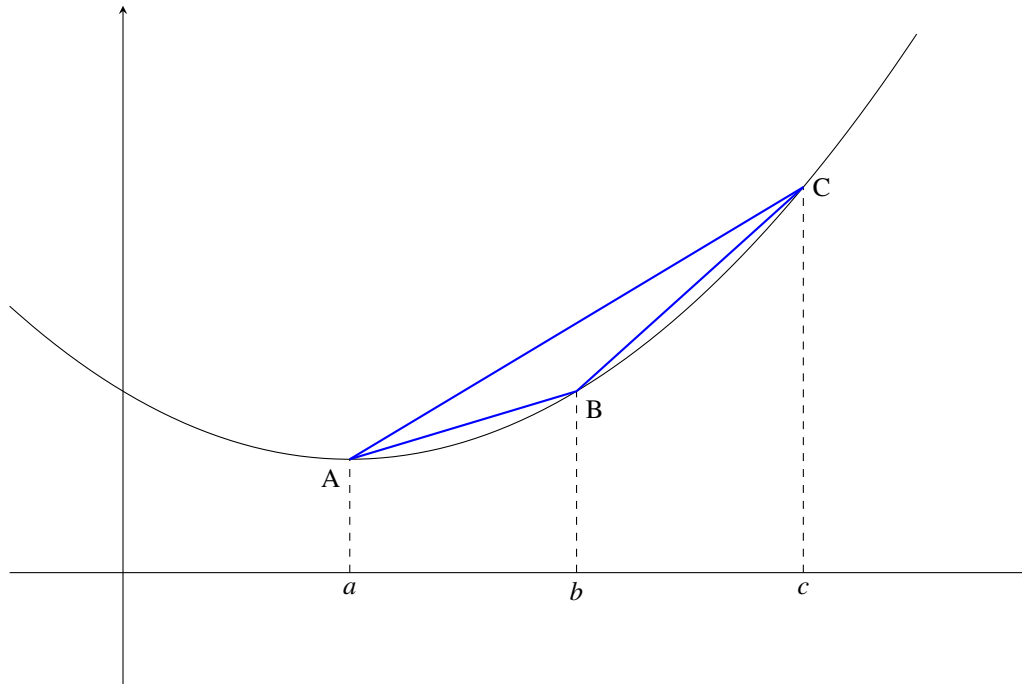
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est convexe **si et seulement si** son épigraphe est une partie convexe de \mathbb{R}^2 .

Proposition 2.2 Inégalité des trois cordes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est convexe **si et seulement si** pour tout $(a, b, c) \in I^3$ tel que $a < b < c$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

Interprétation graphique de l'inégalité des trois cordes



L'inégalité des trois cordes s'interprète de la manière suivante

$$\text{pente de la corde AB} \leq \text{pente de la corde AC} \leq \text{pente de la corde BC}$$

Régularité d'une fonction convexe

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I . L'inégalité des trois cordes montre que le taux de variation en un point $a \in I$ est croissant sur I . Le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que le taux de variation en a admet une limite finie à gauche et à droite si $a \in \mathring{I}$. Ainsi f est dérivable à gauche et à droite sur \mathring{I} et donc a fortiori continue sur \mathring{I} . Néanmoins, f n'est pas nécessairement continue sur I si I est fermé : il peut y avoir discontinuité aux extrémités de I .

3 Lien avec la dérivabilité

Proposition 3.1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur I .

- (i) f est convexe sur I **si et seulement si** f' est croissante sur I .
- (ii) f est concave sur I **si et seulement si** f' est décroissante sur I .

Corollaire 3.1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable sur I .

- (i) f est convexe sur I **si et seulement si** $f'' \geq 0$ sur I .
- (ii) f est concave sur I **si et seulement si** $f'' \leq 0$ sur I .

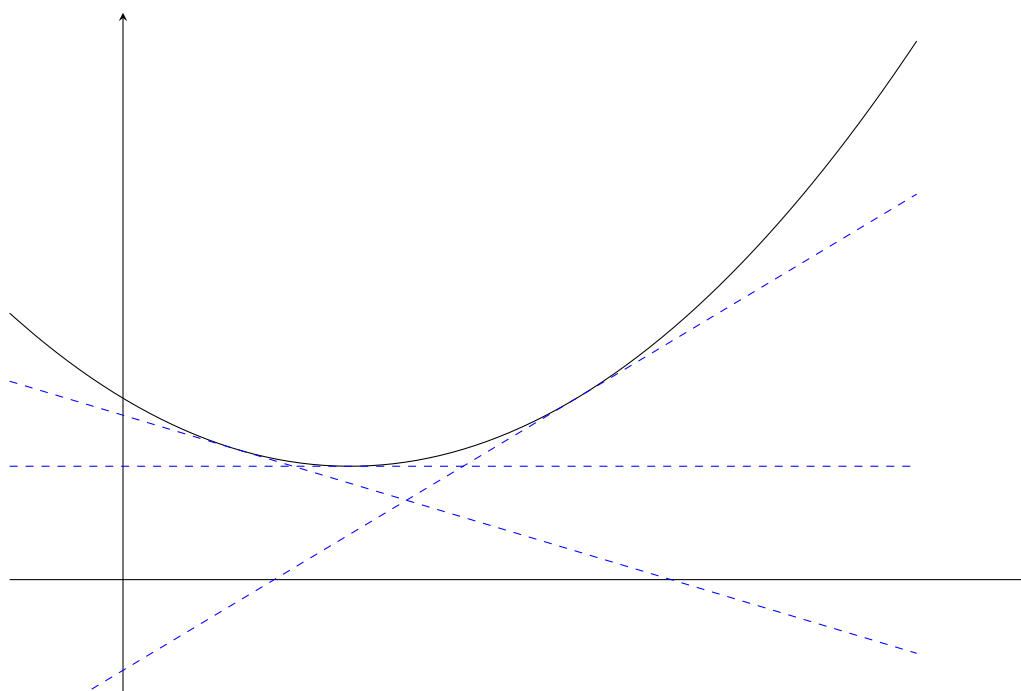
Exemple 3.1

- ▶ \ln est concave sur \mathbb{R}_+^* .
- ▶ \exp est convexe sur \mathbb{R} .
- ▶ \sin est concave sur $[0, \pi]$.
- ▶ \cos est concave sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- ▶ \tan est convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
- ▶ \arcsin est convexe sur $[0, 1]$.
- ▶ \arccos est concave sur $[0, 1]$.
- ▶ \arctan est concave sur \mathbb{R}_+ .

Proposition 3.2 Position par rapport aux tangentes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur I .

1. Si f est convexe sur I , alors pour tout $(a, x) \in I^2$, $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$.
2. Si f est concave sur I , alors pour tout $(a, x) \in I^2$, $f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a)$.

Interprétation graphique

Le graphe de f est situé au-dessus de ses tangentes.

Exemple 3.2

- $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x.$
- $\forall x \in [-\pi, \pi], |\sin x| \leq |x|.$
- $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, |\tan x| \geq |x|.$
- $\forall x \in [-1, 1], |\arcsin x| \geq |x|.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, |\arctan x| \leq |x|.$

4 Convexité généralisée et applications

A nouveau, désigne un intervalle de \mathbb{R} .

Définition 4.1 Convexité généralisée

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_k)_{1 \leq k \leq n} \in I^n$ et $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$.

(i) Si f est convexe, alors

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

(ii) Si f est concave, alors

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

REMARQUE. La définition de la convexité correspond au cas $n = 2$.

REMARQUE. Pour tout $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, le réel $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ est compris entre $\min_{1 \leq k \leq n} x_k$ et $\max_{1 \leq k \leq n} x_k$ et appartient donc à I puisque I est un intervalle.

REMARQUE. Ceci signifie que l'image d'un barycentre de réels par une fonction convexe est au-dessous du barycentre des images.

Inégalités de moyennes

Soit $(x_k)_{1 \leq k \leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

- $H_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}}$ s'appelle la **moyenne harmonique** des réels x_1, \dots, x_n .
- $G_n = \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}$ s'appelle la **moyenne géométrique** des réels x_1, \dots, x_n .
- $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ s'appelle la **moyenne arithmétique** des réels x_1, \dots, x_n .

En utilisant la concavité du logarithme, on prouve :

$$H_n \leq G_n \leq A_n$$