Devoir à la maison n°13

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles.*
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

Dans tout le problème, on considère les suites $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout entier naturel non nul n par :

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad u_n = \mathrm{H}_n - \ln n$$

Partie I –

1. Etablir pour tout entier naturel k non nul l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

2. **a.** Quelle est la limite de la suite (H_n) ?

b. En utilisant le résultat de la question **I.1**, montrer pour tout entier naturel non nul n l'encadrement suivant :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant \mathrm{H}_n \leqslant \ln(n) + 1$$

c. En déduire un équivalent simple de H_n quand n tend vers $+\infty$.

3. **a.** En utilisant à nouveau l'encadrement obtenu à la question **I.1**, montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b. En déduire que cette suite est convergente ; on note γ sa limite. Montrer que γ appartient à $[0,1]$.

4. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose pour tout entier naturel non nul k :

$$\mathrm{J}_k = \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t)\,dt$$

a. Établir pour tout entier naturel non nul k l'égalité suivante :

$$\mathrm{J}_k = \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t)\,dt$$

b. En déduire pour tout entier naturel non nul n la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{J}_k$$

5. On suppose dans cette question que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

a. Établir pour tout entier naturel non nul k la double inégalité suivante :

$$0 \leqslant \mathrm{J}_k \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{4t^3}$$

b. En déduire que la série de terme général J_k est convergente.

c. En déduire également, pour tout entier naturel non nul n l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{J}_k \leqslant \frac{1}{8n^2}$$

d. En déduire le développement asymptotique suivant :

$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Partie II –

On considère les suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$ définies par :

$$\forall n \geqslant 1,\ x_n = u_n - \frac{1}{2n} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 2,\ y_n = x_n - x_{n-1}$$

1. **a.** Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$?

b. Justifier pour tout entier naturel non nul n l'égalité suivante :

$$\gamma - x_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k$$

c. En déduire pour tout entier naturel non nul n l'égalité suivante :

$$\gamma - x_n = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)$$

2. Montrer que

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3k^3}$$

Pour la dernière question, on va admettre le résultat suivant.

> Si $\sum a_n$ est une série à termes positifs convergente et si $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$, alors $\sum b_n$ est également convergente (ce que l'on sait déjà) et
>
> $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

3. En déduire que

$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$