

INTERROGATION ÉCRITE N° 11

NOM :

Prénom :

Note :

1. Soit $p : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (x, -x - y + z, -x - 2y + 2z) \end{cases}$. On admet que $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
- (a) Montrer que p est un projecteur.

(b) Donner sans justification des bases de l'image et du noyau de p .

(c) Déterminer le rang de p .

2. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Quelles inclusions ou égalités existe-il *toujours* entre les sous-espaces vectoriels $\text{Im}(g \circ f)$, $\text{Ker}(g \circ f)$, $\text{Im } g$, $\text{Ker } g$, $\text{Im } f$, $\text{Ker } f$? On justifiera ses réponses.

3. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer avec soin que $g \circ f = 0 \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } g$.

4. On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Montrer que l'ensemble H des fonctions $f \in E$ telles que $\int_0^1 f(t) dt = 0$ est un hyperplan de E .

5. Soit $s : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(-X) \end{cases}$. On admet que s est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que s est une symétrie. Préciser par rapport à quel sous-espace vectoriel F et parallèlement à quel sous-espace vectoriel G .