Semaine du 14/12 au 18/12

1 Cours

Nombres réels

Approximations d'un réel Ensembles de nombres : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Partie entière. Approximations décimales. Densité dans $\mathbb{R}$. Caractérisation séquentielle de la densité. $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$. Théorème de la borne supérieure. Caractérisation séquentielle de la borne inférieure et de la borne supérieure. Droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$. Borne supérieure et inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$. Applications à valeurs dans $\mathbb{R}$: majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure borne inférieure.

Intervalles de $\mathbb{R}$ Définition : une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si $\forall (x, y, t) \in I^2 \times \mathbb{R}, x \leqslant t \leqslant y \implies t \in I$. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties de la forme $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b]$, $]-\infty, b[$, $]-\infty, +\infty[$.

Relations binaires

Généralités Réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité. Exemples.

Relation d'ordre Définition. Ordre total, partiel. Majorant/minorant, maximum/minimum, borne supérieure/inférieure. Unicité du maximum/minimum, de la borne supérieure/inférieure sous réserve d'existence. Un maximum/minimum est une borne supérieure/inférieure.

Relation d'équivalence Définition. Classes d'équivalence. Les classes d'équivalence forment une partition.

Suites numériques

Généralités Définition d'une suite. Modes de définition : explicite ou par récurrence. Vocabulaire : suites constantes, stationnaires, majorées, minorées bornées, croissantes, décroissantes, monotones. Suites classiques : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2.

Limite d'une suite Définition. Unicité. Vocabulaire : convergence et divergence. Toute suite de limite strictement positive est minorée par un réel strictement positif à partir d'un certain rang. Deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang. Toute suite convergente est bornée. Opérations sur les limites. Suites extraites. Si une suite admet une limite, alors toute suite extraite admet la même limite.

2 Méthodes à maîtriser

- Déterminer le maximum/minimum M d'une partie $\mathcal{A}$:
  - M est un majorant/minorant de $\mathcal{A}$;
  - $M \in \mathcal{A}$.
- Déterminer la borne supérieure/inférieure M d'une partie $\mathcal{A}$:
  - M est un majorant/minorant de $\mathcal{A}$;
  - puis au choix :
    - tout majorant/minorant de $\mathcal{A}$ est minoré/majoré par M ;
    - il existe une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ convergeant vers M (si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle) ;
    - pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $a > M - \varepsilon / a < M + \varepsilon$ (si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle).
- Caractérisation de la partie entière :

$$n = \lfloor x \rfloor \iff x - 1 < n \leqslant x \iff n \leqslant x < n + 1$$

- Montrer qu'une relation binaire est une relation d'équivalence ou une relation d'ordre.
- Déterminer le sens de variation d'une suite : signe de $u_{n+1} - u_n$ ou position de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1 si les u_n sont **tous strictement positifs**.
- Prouver qu'une suite n'admet pas de limite en exhibant deux suites extraites de limites différentes.
- Déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 via l'équation caractéristique.

3 Questions de cours

- Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Rappeler la définition d'une classe d'équivalence. Montrer que deux classes d'équivalence sont soit disjointes soit confondues.
- Soit E un ensemble. On définit une relation binaire $\sim$ sur E^E de la manière suivante : pour tout couple $(f, g) \in (E^E)^2$, $f \sim g$ **si et seulement si** il existe une bijection $\varphi : E \to E$ telle que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
- Montrer l'unicité de la limite d'une suite réelle. On se restreindra aux cas de limites finies.
- Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles de limites finies ℓ_1 et ℓ_2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = \ell_1 + \ell_2$.
- Déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 au choix de l'examinateur.

Bonnes fêtes et bonnes vacances.