Devoir surveillé n°11

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 —

Les parties II et III sont liées mais la partie I est indépendante du reste du problème.

Partie I –

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$.

1. Vérifier que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $E(s+t) = E(s)E(t)$.

2. En déduire que $E(t)^n = E(nt)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que $E(t)$ est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$ et déterminer son inverse.

4. Montrer que la famille (I, A, A^2) est une famille libre de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

5. En déduire que l'application $E : t \in \mathbb{R} \mapsto E(t)$ est injective.

6. Dans cette question, $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Expliciter la matrice $E(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ sous la forme d'un tableau matriciel.

Partie II –

On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

1. Montrer que $F = \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Préciser un vecteur directeur u de F et un vecteur directeur v de G.

2. Sans calculs, déterminer la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B} = (u, v)$.

3. En déduire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter P, D et P^{-1}.

4. Expliciter D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sous forme d'un tableau matriciel.

Partie III –

On reprend les notations de la partie II.

1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout réel t,

$$e^t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{E}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\mathrm{A}^k$. On écrira cette matrice sous la forme $\begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.
Expliciter sous forme de sommes les coefficients $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$a(t) = \lim_{n\to+\infty} a_n(t) \qquad b(t) = \lim_{n\to+\infty} b_n(t) \qquad c(t) = \lim_{n\to+\infty} c_n(t) \qquad d(t) = \lim_{n\to+\infty} d_n(t)$$

et $\mathrm{E}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$. Expliciter $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ et $d(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4. Montrer qu'il existe des matrices Q et R de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{E}(t) = e^{2t}\mathrm{Q} + e^t\mathrm{R}$$

et expliciter Q et R.

5. Calculer les matrices Q^2, R^2, QR et RQ. Que peut-on dire des endomorphismes q et r canoniquement associés à Q et R ? On précisera sa réponse à l'aide des droites F et G de la question **II.1**.

6. En déduire que

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{E}(s+t) = \mathrm{E}(s)\mathrm{E}(t)$$

Que dire de $\mathrm{E}(t)^n$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$? Que dire de l'inversibilité de $\mathrm{E}(t)$ et de son éventuel inverse pour $t \in \mathbb{R}$?
L'application $\mathrm{E} : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{E}(t)$ est-elle injective ?

Problème 2 —

Partie I – Définition d'une application

Soit n un entier naturel non nul.
Soit $\mathrm{T}(\mathrm{X})$ un polynôme de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ de degré n.
Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ qui à tout $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ associe $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) + \mathrm{X}\mathrm{R}(\mathrm{X})$ où $\mathrm{Q}(\mathrm{X})$ et $\mathrm{R}(\mathrm{X})$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2)$ par $\mathrm{T}(\mathrm{X})$.
On a donc $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{Q}(\mathrm{X})\mathrm{T}(\mathrm{X}) + \mathrm{R}(\mathrm{X})$ avec $\deg(\mathrm{R}(\mathrm{X})) < \deg(\mathrm{T}(\mathrm{X}))$.
On notera f_n la restriction de f à $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Montrer que f_n est un endomorphisme de l'espace vectoriel $(\mathbb{C}_n[\mathrm{X}], +, .)$.

3. Dans cette question uniquement $n = 2$ et $\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2$.

a. Donner la matrice A de f_2 sur la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$.

b. Calculer A^2. En déduire que f_2 est bijective et donner son application réciproque. En déduire la nature de f_2.

Partie II – Etude d'un cas particulier

Soit a un complexe fixé. Dans cette partie uniquement, $n = 3$ et $\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 + a$.

1. Montrer que f_3 a pour matrice sur la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^3)$ de $\mathbb{C}_3[\mathrm{X}]$:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

2. Calculer le déterminant de f_3.

3. Donner les valeurs de a pour lesquelles f_3 n'est pas bijective.

4. Dans cette question $a = -1$.

a. Donner une base de $\mathrm{Ker}\, f_3$, le noyau de f_3 ainsi qu'une base de $\mathrm{Im}\, f_3$, l'image de f_3.

b. Le noyau et l'image de f_3 sont-ils supplémentaires ?

Partie III – Etude du noyau

1. Soit $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ un polynôme non nul de degré p tel que : $2p < n$. Montrer que $f(\mathrm{P}(\mathrm{X}))$ est non nul.

2. Soit $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ un polynôme. Montrer qu'il appartient au noyau de f si et seulement si il existe un polynôme $\mathrm{R}(\mathrm{X})$ de degré strictement inférieur a n tel que : $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{R}(\mathrm{X})(1 - \mathrm{X}\mathrm{T}(\mathrm{X}))$.

3. En déduire que si $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ est un élément du noyau de f, alors il appartient à $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.

4. Déduire de la question **III.2** que pour tout élément P du noyau de f et que pour tout k de $\mathbb{N}$ tel que $\deg(\mathrm{P}(\mathrm{X})) + k \leq n$, le polynôme $\mathrm{X}^k\mathrm{P}(\mathrm{X})$ appartient au noyau de f.

5. On suppose dans cette question que le noyau de f n'est pas réduit au polynôme nul. Soit I l'ensemble des entiers naturels k tels qu'il existe un polynôme du noyau de f qui a pour degré k.

a. Montrer que I possède un plus petit élément d.

b. Soit $\mathrm{P}_0(\mathrm{X})$ un polynôme du noyau ayant pour degré d. Soit $\mathrm{P}_1(\mathrm{X})$ un autre polynôme du noyau ayant pour degré d. Montrer qu'il existe un complexe c tel que $\mathrm{P}_1(\mathrm{X}) = c\mathrm{P}_0(\mathrm{X})$.

c. Montrer qu'un polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ appartient au noyau de f si et seulement s'il existe un polynôme $\mathrm{S}(\mathrm{X})$ de degré inférieur ou égal à $n - d$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{S}(\mathrm{X})\mathrm{P}_0(\mathrm{X})$.

6. On suppose dans cette question que $\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 - 1$. Donner le noyau de f.

Partie IV – Etude d'un produit scalaire

Dans cette partie on prendra $\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2$ et on considérera g la restriction de f_2 à $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

1. Montrer que g est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel *réel* $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$. Donner sa matrice A sur la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Soit $\langle ., . \rangle$ définie sur $\mathbb{R}_2[X]^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (U(X), V(X)) \in \mathbb{R}_2[X]^2, \langle U(X), V(X) \rangle = U(1)V(1) + U'(1)V'(1) + U''(1)V''(1)$$

   Montrer que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$.

3. Montrer que la matrice A de g sur la base canonique est une matrice orthogonale.

4. **a.** La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est-elle orthonormale pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$?

   b. L'application g est-elle une isométrie vectorielle pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$?