Interrogation écrite n°07

NOM : Prénom : Note :

1. Soit $\mathcal{A} = \left\{ \dfrac{n+p}{n^2+p^2},\ (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$. $\mathcal{A}$ possède-telle un maximum ? un minimum ? une borne supérieure ? une borne inférieure ? Les déterminer le cas échéant.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n^2$. Ainsi pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $n+p \leq n^2+p^2$ puis $\dfrac{n+p}{n^2+p^2} \leq 1$. On en déuit que $\mathcal{A}$ est majorée par 1. De plus, $1 = \dfrac{1+1}{1^2+1^2}$ donc $1 \in \mathcal{A}$. On en déduit que $\max \mathcal{A} = 1$. A fortiori, $\sup \mathcal{A} = 1$.

   0 est clairement un minorant de $\mathcal{A}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n+1}{n^2+1} \in \mathcal{A}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1} = 0$ donc $0 = \inf \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ admettait un minimum, ce serait également la borne inférieure de $\mathcal{A}$, autrement dit 0. Mais en tant que minimum, on aurait $0 \in \mathcal{A}$, ce qui n'est pas. Ainsi $\mathcal{A}$ n'admet pas de minimum.

2. Soit (u_n) la suite telle que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) converge vers 0.

   Une récurrence évidente montre que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n^3}{1+u_n^2} \leq 0$$

   donc (u_n) est décroissante. Comme elle est également minorée par 0, elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et que $\lim\limits_{n+\infty} \dfrac{u_n}{1+u_n^2} = \dfrac{\ell}{1+\ell^2}$. On en déduit successivement que $\ell = \dfrac{\ell}{1+\ell^2}$, $\ell(1+\ell^2) = \ell$, $\ell^3 = 0$ et enfin $\ell = 0$. Par conséquent, (u_n) converge vers 0.

3. Soit (u_n) la suite telle que $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} > 0$ donc (u_n) est croissante. On en déduit que (u_n) converge ou diverge vers $+\infty$. Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + e^{-u_n} = \ell + e^{-\ell}$. Par unicité de la limite, $\ell = \ell + e^{-\ell}$. On en déduit que $e^{-\ell} = 0$, ce qui est absurde. Ainsi (u_n) diverge vers $+\infty$.

4. On pose $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression de u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

   Posons $v_n = u_n + 4$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \frac{1}{2}u_n + 2 = \frac{1}{2}(u_n + 4) = \frac{1}{2}v_n$$

   La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 4 = 4$. Par conséquent, $v_n = \dfrac{4}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n - 4 = \frac{4}{2^n} - 4$$

   Puisque $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -4$.

5. On pose $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression de u_n en fonction de n.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0$. Le polynôme caractéristique associée à cette relation de récurrence linéaire d'ordre deux à coefficients constants est $X^2 - X + 1$. Ses racines sont $e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{i\pi}{3}}$. Comme (u_n) est manifestement une suite réelle, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \mu\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

   Puisque $u_0 = 1$, $\lambda = 1$ et puisque $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $\mu = 0$. On en déduit donc que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$