# Devoir à la maison n°01

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

## Exercice 1.

On considère une suite de *fonctions* $(f_n)$ définies sur $[0,1]$ de la manière suivante.

- $\forall x \in [0,1],\ f_0(x) = 0$ ;
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ f_{n+1}(x) = f_n(x) + \dfrac{1}{2}(x - f_n(x)^2)$.

**1.** **a.** Déterminer les fonctions $f_1$, $f_2$ et $f_3$.

**b.** Etudier les variations de $f_1$, $f_2$ et $f_3$ sur $[0,1]$.

**c.** Tracer les courbes des fonctions $f_1$, $f_2$ et $f_3$.

**2.** On fixe $x \in [0,1]$ et on pose $u_n = f_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{x}$.

**b.** Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

**c.** En déduire que la suite $(u_n)$ converge et préciser sa limite.

**3.** **a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant \sqrt{x} - f_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

**b.** Etudier les variations de la fonction $\varphi_n : t \in [0,1] \mapsto t\left(1 - \dfrac{t}{2}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

**c.** On note $\mathrm{M}_n$ le maximum de la fonction $x \mapsto \sqrt{x} - f_n(x)$ sur $[0,1]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \mathrm{M}_n \leqslant \dfrac{2}{n+1}$ et en déduire la limite de la suite $(\mathrm{M}_n)$.

## Exercice 2.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} k \qquad\qquad \mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Montrer que $\mathrm{T}_n = \mathrm{S}_n^2$.

## Exercice 3.

Une urne contient quatre boules rouges et deux boules noires.

**1.** On effectue au hasard un tirage simultané et sans remise de deux boules de l'urne. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules noires obtenues.
Déterminer la loi de X.

**2.** Après ce premier tirage, il reste donc quatre boules dans l'urne. On effectue à nouveau au hasard un tirage simultané et sans remise de deux boules de l'urne. On note Y le nombre de boules noires obtenues au second tirage.
Déterminer la loi de Y.

**3.** Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire au premier tirage sachant que l'on a tiré une seule boule noire au second tirage ?

**4.** Déterminer la probabilité de l'événement suivant :
«Il a fallu exactement deux tirages pour extraire les deux boules noires de l'urne».