Devoir à la maison n°7

Exercice 1.

Toutes les fonctions entrant en jeu dans cet exercice sont à valeurs réelles.

1. On souhaite résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle suivante :

$$(E) \ : \ \cos(t)z''(t) - 2\sin(t)z'(t) - \cos(t)z(t) = 0$$

a. Soit z une fonction deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $\varphi(t) = \cos(t)z(t)$ pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Exprimer $\varphi''(t)$ en fonction de $z(t)$, $z'(t)$ et $z''(t)$ pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b. En déduire les solutions de (E).

2. On souhaite maintenant résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle suivante :

$$(F) \ : \ (1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$$

a. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]-1, 1[$. On pose $z(t) = y(\sin(t))$ pour $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Exprimer $y(x)$, $y'(x)$ et $y''(x)$ en fonction de $z(\arcsin x)$, $z'(\arcsin x)$ et $z''(\arcsin x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

b. En déduire que y est solution de (F) sur $]-1, 1[$ *si et seulement si* z est solution d'une équation différentielle que l'on précisera. En déduire les solutions de (F).

3. Soit f une solution de (F) sur $]-1, 1[$.

a. Montrer par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in]-1, 1[, \ (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+1)}(x) - (n+1)^2 f^{(n)}(x) = 0$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$. Déterminer une relation de récurrence entre a_{n+2} et a_n à l'aide de la question précédente.

d. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$a_{2p} = \frac{((2p)!)^2}{2^{2p}\,(p!)^2} a_0 \qquad\qquad a_{2p+1} = 2^{2p}\,(p!)^2\,a_1$$

4. On se propose de déterminer plusieurs développements limités à l'aide de la question **3**.

a. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Rappeler la formule de Taylor-Young appliquée à f en 0 à un ordre $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $g : x \in]-1, 1[\mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. Que valent $g(0)$ et $g'(0)$? En remarquant que g est solution de (F), donner le développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de g.

c. Soit $h : x \in]-1, 1[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Que valent $h(0)$ et $h'(0)$? En remarquant que h est solution de (F), donner le développement limité à l'ordre $2n$ en 0 de h.

d. Soit $k : x \in]-1, 1[\mapsto \arcsin x$. Déduire de la question **4.c** le développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de k.

5. En remarquant que $g = hk$ et en considérant le coefficient de x^{2n+1} dans le développement limité de cette fonction, montrer que

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1} \binom{2p}{p} \binom{2(n-p)}{n-p} = \frac{2^{4n}}{(n+1)\binom{2n+1}{n}}$$