# SEMAINE DU 03/06 AI 07/06

## 1 Cours

### Déterminants

**Groupe symétrique** Permutation. Structure de groupe de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$. Transposition et cycle. Décomposition d'une permutation en produits de transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Signature.

**Applications multilinéaires** Définition et exemples. Application multilinéaire symétrique, antisymétrique, alternée. Une application multilinéaire est antisymétrique **si et seulement si** elle est alternée.

**Déterminant d'une famille de vecteurs** Le déterminant $\det_{\mathscr{B}}$ dans une base $\mathscr{B}$ d'un espace vectoriel E de dimension $n$ est l'unique forme $n$-linéaire alternée sur E valant 1 en $\mathscr{B}$. Toute forme $n$-linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$. Formule de changement de base. Une famille $\mathscr{F}$ de $n$ vecteurs de E est une base **si et seulement si** $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$.

**Déterminant d'un endomorphisme** Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, $\det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B}))$ est indépendant de $\mathscr{B}$. C'est le déterminant de $f$ noté $\det(f)$. Propriétés : $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$ ; $f \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \det(f) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$ ; $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$ où $n = \dim \mathrm{E}$.

**Déterminant d'une matrice carrée** Définition comme déterminant des vecteurs colonnes dans la base canonique. Le déterminant d'un endomorphisme est égal au déterminant de sa matrice dans une base. Le déterminant dans une base d'un famille de vecteurs est le déterminant de cette famille de vecteurs dans cette base. Propriétés : $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})$ ; $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(\mathrm{A}) = 0$ et dans ce cas, $\det(\mathrm{A}^{-1} = \det(\mathrm{A})^{-1}$ ; si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\mathrm{A}) = \lambda^n \det(\mathrm{A})$.

**Calcul de déterminants** Effet sur le déterminant des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes. Déterminant d'une transposée. Déterminant d'une matrice triangulaire. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminants de matrices triangulaires par blocs. Déterminants de Vandermonde.

**Comatrice** Définition. Formule de la comatrice.

### Espaces préhilbertiens réels

**Produit scalaire et norme** Définition d'un produit scalaire. Orthogonalité. Espace préhilbertien réel, espace euclidien. Norme associée à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Inégalité triangulaire. Identités de polarisation.

## 2 Méthodes à maîtriser

- Décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints.
- Calculer la signature d'une permutation.
- Caractériser le fait qu'une famille de vecteurs est une base via le déterminant.
- Caractériser qu'un endomorphisme est un automorphisme via le déterminant.
- Calculer un déterminant par la méthode du pivot de Gauss.
- Développer un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- Établir des relations de récurrence pour calculer un déterminant.
- Caractériser le fait qu'une famille de vecteurs est une base, qu'un endomorphisme est un automorphisme, qu'une matrice est inversible via le déterminant.
- Calculer un déterminant par la méthode du pivot de Gauss.
- Développer un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- Établir des relations de récurrence pour calculer un déterminant.
- Montrer qu'une application est un produit scalaire. Dans l'ordre : symétrie, linéarité par rapport à l'**une** des deux variables (la linéarité par rapport à la seconde variable s'obtient par symétrie), positivité, définition.
- Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas des produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

## 3 Questions de cours

- On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n$ à coefficients entiers, inversibles et dont l'inverse est à coefficients entiers. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \iff \det(\mathrm{M}) = \pm 1$.

- Montrer que l'application $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2 \mapsto \langle \mathrm{A} \mid \mathrm{B} \rangle = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{AB})$ est un produit scalaire.

- **BCCP 76** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot \mid \cdot)$. On pose $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ pour $x \in \mathrm{E}$.

  1. (a) Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
     (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
  2. Soit $\mathrm{E} = \left\{ f \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R}),\ \forall x \in [a,b],\ f(x) > 0 \right\}$. Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)},\ f \in \mathrm{E} \right\}$ admet une borne inférieure $m$ et déterminer la valeur de $m$.

- **BCCP 79** Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$.

  1. Soit $h$ une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \implies h = 0$.
  2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose pour $(f,g) \in \mathrm{E}^2$, $(f \mid g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
  3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.