Devoir à la maison n°03 : corrigé

Solution 1.

1. On a donc $z = e^{i\theta}$. Tout d'abord,

$$1 + z = 1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i\theta}{2}}$$

de sorte que

$$|1 + z| = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$$

Remarquons que pour $z \neq -1$ i.e. $\theta \not\equiv \pi[2\pi]$,

$$z^2 - z + 1 = \frac{1+z^3}{1+z} = \frac{1+e^{3i\theta}}{1+e^{i\theta}} = \frac{2\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) e^{\frac{3i\theta}{2}}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i\theta}{2}}}$$

Ainsi

$$\left|z^2 - z + 1\right| = \left|\frac{\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right|$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \\
&= (2\cos^2(x) - 1)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) \\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2(1 - \cos^2(x))\cos(x) \\
&= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\left|z^2 - z + 1\right| = \left|4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3\right|$$

Remarquons que cette égalité est encore valable lorsque $z = -1$ i.e. $\theta \equiv \pi[2\pi]$ puisqu'alors, $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$.
Finalement,

$$f(z) = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| + \left|4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3\right|$$

2. La fonction g étant paire, on peut se contenter de déterminer ses extrema sur $[0, 1]$.
Pour $t \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$,

$$g(t) = -4t^2 + 2t + 3$$

Ainsi g est croissante sur $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.
Pour $t \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$,

$$g(t) = 4t^2 + 2t - 3$$

Ainsi g est croissante sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$.
On peut résumer la situation par un tableau de variations.

t	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
$g(t)$	3	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	3

On en déduit que g admet pour maximum $\frac{13}{4}$ et pour minimum $\sqrt{3}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Puisque g est paire, il s'agit également du maximum et du minimum de g sur l'intervalle $[-1, 1]$.

3. Remarquons que pour $z \in \mathbb{U}$

$$f(z) = g\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

où θ désigne un argument de z. Comme cos est à valeurs dans $[-1, 1]$, la question précédente montre que

$$\forall z \in \mathbb{U},\ \sqrt{3} \leqslant f(z) \leqslant \frac{13}{4}$$

Solution 2.

1. On sait que $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ donc $(1+i)^{2n} = 2^n e^{\frac{ni\pi}{2}}$. On en déduit que

$$\operatorname{Re}\left((1+i)^{2n}\right) = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \equiv 0[4] \\ 0 & \text{si } n \equiv 1[2] \\ -2^n & \text{si } n \equiv 2[4] \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}\left((1+i)^{2n}\right) = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0[2] \\ 2^n & \text{si } n \equiv 1[4] \\ -2^n & \text{si } n \equiv 3[4] \end{cases}$$

2. D'après la formule du binôme,

$$(1+i)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} i^k \binom{2n}{k}$$

En séparant les termes d'indices pairs et impairs

$$(1+i)^{2n} = \sum_{k=0}^{n} i^{2k}\binom{2n}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} i^{2k+1}\binom{2n}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k i\binom{2n}{2k+1} = S_n + iT_n$$

Comme S_n et T_n sont des réels, ce sont respectivement les partie réelle et imaginaire de $(1+i)^{2n}$. Finalement,

$$S_n = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad T_n = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

3. On procède comme précédemment.

$$(1+i)^{2n-1} = \sqrt{2}^{2n-1} e^{\frac{(2n-1)i\pi}{4}} = 2^{n-1}\sqrt{2}e^{\frac{(2n-1)i\pi}{4}}$$

A nouveau, en séparant les termes d'indices pairs et impairs,

$$(1+i)^{2n-1} = U_n + iV_n$$

donc

$$U_n = \operatorname{Re}\left(1+i)^{2n-1}\right) = 2^{n-1}\sqrt{2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}\right) = \begin{cases} 2^{n-1} & \text{si } n \equiv 0[4] \\ 2^{n-1} & \text{si } n \equiv 1[4] \\ -2^{n-1} & \text{si } n \equiv 2[4] \\ -2^{n-1} & \text{si } n \equiv 3[4] \end{cases}$$

$$V_n = \operatorname{Im}\left(1+i)^{2n-1}\right) = 2^{n-1}\sqrt{2}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}\right) = \begin{cases} -2^{n-1} & \text{si } n \equiv 0[4] \\ 2^{n-1} & \text{si } n \equiv 1[4] \\ 2^{n-1} & \text{si } n \equiv 2[4] \\ -2^{n-1} & \text{si } n \equiv 3[4] \end{cases}$$