Devoir à la maison n°15 : corrigé

Problème 1 — Equation intégrale

Partie I –

1. Remarquons tout d'abord que la relation (1) peut s'écrire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x\int_0^x f(t)\ dt + \int_0^x tf(t)\ dt = g(x)$$

On a donc $f(x) = g(x) + x\int_0^x f(t)\ dt - \int_0^x tf(t)\ dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(t)\ dt$ et $x \mapsto \int_0^x tf(t)\ dt$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ comme primitives de fonctions continues. Puisque $x \mapsto x$ et g sont également de classe $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$. Les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(t)\ dt$ et $x \mapsto \int_0^x tf(t)\ dt$ sont donc de classe $\mathcal{C}^2$ comme primitives de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Puisque $x \mapsto x$ et g sont également de classe $\mathcal{C}^2$, f de classe $\mathcal{C}^2$.
En dérivant une première fois la relation (1), on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) - \int_0^x f(t)\ dt = g'(x)$$

En dérivant cette relation une seconde fois, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) - f(x) = g''(x)$$

2. Dans les trois cas qui suivent, g'' est nulle. Si f est solution de (1), elle est solution de (2) et il existe donc $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = Ae^x + Be^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En reportant dans (1), on voit que f est solution de (1) *si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (A-B)x + (A+B) = g(x)$$

On rappelle que la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto x)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

a. Si g est nulle, f est solution de (1) *si et seulement si* $\begin{cases} A-B=0 \\ A+B=0 \end{cases}$ i.e. $A = B = 0$. L'unique solution de (1) est donc la solution nulle.

b. Si g est constante, notons C cette constante. f est solution de (1) *si et seulement si* $\begin{cases} A-B=0 \\ A+B=C \end{cases}$ i.e. $A = B = \frac{C}{2}$. L'unique solution est donc $x \mapsto C\operatorname{ch} x$.

c. Si g est affine, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $g(x) = \lambda x + \mu$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. f est solution de (1) *si et seulement si* $\begin{cases} A-B=\lambda \\ A+B=\mu \end{cases}$ i.e. $A = \frac{\lambda+\mu}{2}$ et $B = \frac{\mu-\lambda}{2}$. L'unique solution est donc $x \mapsto \lambda \operatorname{sh} x + \mu \operatorname{ch} x$.

3. Soient f_1 et f_2 deux solutions éventuelles de (1). Par linéarité de l'intégrale, $f_1 - f_2$ est solution d'une équation du type (1) avec un second membre nul. La question **I.2.a** montre que $f_1 - f_2 = 0$ i.e. $f_1 = f_2$. Ainsi (1) admet au plus une solution.

4. Soit f une fonction de la forme donnée par l'énoncé. f est bien dérivable puisque $x \mapsto \int_0^x e^{-t}g''(t)\ dt$ et $x \mapsto \int_0^x e^t g''(t)\ dt$ sont des primitives des fonctions $x \mapsto e^{-x}g''(x)$ et $x \mapsto e^x g''(x)$ en vertu du théorème fondamental de l'analyse : ce sont donc des fonctions dérivables. On a de plus pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{e^x}{2}\left[\int_0^x e^{-t}g''(t)\ dt + k_A\right] + \frac{e^{-x}}{2}\left[\int_0^x e^t g''(t)\ dt + k_B\right]$$

On en déduit que f' est à nouveau dérivable et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = \frac{e^x}{2}\left[\int_0^x e^{-t}g''(t)\ dt + k_A\right] - \frac{e^{-x}}{2}\left[\int_0^x e^t g''(t)\ dt + k_B\right] + g''(x) = f(x) + g''(x)$$

Autrement dit, f est solution de (2).

5. Soit f une solution de (2) vérifiant $f(0) = g(0)$ et $f'(0) = g'(0)$. En intégrant la relation $f''(t) - f(t) = g''(t)$ entre 0 et x, on obtient $f'(x) - f'(0) - F(x) = g'(x) - g'(0)$ où F désigne la primitive de f nulle en 0. Puisque $f'(0) = g'(0)$, on a donc $f'(t) - F(t) = g'(t)$. En intégrant à nouveau entre 0 et x, on obtient $f(x) - f(0) - \int_0^x F(t)\,dt = g(x) - g(0)$. Or $f(0) = g(0)$ et en intégrant par parties

$$\int_0^x F(t)\,dt = [(t-x)F(t)]_0^x - \int_0^x (t-x)F'(t)\,dt = \int_0^x (x-t)f(t)\,dt$$

Ainsi $f(x) - \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ i.e. f est solution de (1).

6. D'après la question **I.4** et en utilisant le fait que $g'' = \exp$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x}{2}(x + k_A) - \frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{e^{2x}}{2} + k_B\right)$$

Les conditions $f(0) = g(0)$ et $f'(0) = g'(0)$ de la question **I.5**, fournissent $\frac{k_A}{2} - \frac{k_B}{2} = 1$ et $\frac{k_A}{2} + \frac{k_B}{2} = 1$ i.e. $k_A = 2$ et $k_B = 0$. L'unique solution de (1) est donc $x \mapsto e^x\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

Partie II –

1. On raisonne comme à la question **I.1** pour montrer que $A(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus $A(f)'(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $A(f)'$ est donc elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ i.e. $A(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et $A(f)'' = f$.

2. Pour tout $f \in E$, $A(f)$ est également continue puisqu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ d'après la question précédente. Ainsi $A(E) \subset E$. De plus, A est linéaire par linéarité de l'intégrale. Ainsi A est un endomorphisme de E.
Soit $f \in \operatorname{Ker} A$. On a donc $A(f) = 0$ et a fortiori $A(f)'' = 0$. Or $A(f)'' = f$ donc $f = 0$, d'où $\operatorname{Ker} A = \{0_E\}$ et A est injectif.

3. Soient $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$. On procède à nouveau par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
U \circ A(f)(x) &= \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)A(f)(t)\,dt = -\left[\operatorname{ch}(x-t)A(f)(t)\right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)A(f)'(t)\,dt \\
&= -A(f)(x) - \left[\operatorname{sh}(x-t)A(f)'(t)\right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)A(f)''(t)\,dt \\
&= -A(f)(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)f(t)\,dt = -A(f)(x) + U(f)(x)
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $A(f)(0) = A(f)'(0) = 0$ et $A(f)'' = f$. Les intégrations par parties sont légitimes car $A(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$. L'égalité précédente étant vraie pour tout réel x, on a $U \circ A(f) = U(f) - A(f)$. Ceci étant maintenant vrai pour tout $f \in E$, on en déduit $U \circ A = U - A$.

4. Faisons l'hypothèse de récurrence $HR(n)$ suivante

$$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ A^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}f(t)\,dt$$

$HR(1)$ est vraie par définition de A. Supposons $HR(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$A^{n+1}(f)(x) = A^n(A(f))(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}A(f)(t)\,dt$$

En intégrant une première fois par parties :

$$A^{n+1}(f)(x) = -\left[\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}A(f)(t)\right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}A(f)'(t)\,dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}A(f)'(t)\,dt$$

car $A(f)(0) = 0$. En intégrant à nouveau par parties :

$$A^{n+1}(f)(x) = -\left[\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}A(f)'(t)\right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}A(f)''(t)\,dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}f(t)\,dt$$

car $A(f)'(0) = 0$ et $A(f)'' = f$.

5. **a.** Puisque sh est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction sh entre 0 et u à l'ordre $2n$:

$$\left|\operatorname{sh} u - \sum_{p=0}^{2n} \frac{\operatorname{sh}^{(p)}(0)}{p!} u^p\right| \leqslant M \frac{|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

où M désigne le maximum de $|\operatorname{sh}^{(2n+1)}|$ sur $[0, u]$ ou $[u, 0]$ suivant le signe de u.
Or pour p pair, $\operatorname{sh}^{(p)} = \operatorname{sh}$ et donc $\operatorname{sh}^{(p)}(0) = 0$ et pour p impair $\operatorname{sh}^{(p)} = \operatorname{ch}$ et donc $\operatorname{sh}^{(p)}(0) = 1$. Ainsi $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n} \frac{\operatorname{sh}^{(p)}(0)}{p!} u^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!}$.
On a donc également $\operatorname{sh}^{(2n+1)} = \operatorname{ch}$. Puisque ch est paire et croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $M = \operatorname{ch} u$ en distinguant les cas $u \geqslant 0$ et $u \leqslant 0$. On en déduit donc la formule demandée.

b. En utilisant l'expression de $A_n(f)(x)$ trouvée en **II.4**, on peut écrire :

$$U(f)(x) - U_n(f)(x) = \int_0^x \left(\operatorname{sh}(x-t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-t)^{2k-1}}{(2k-1)!}\right) f(t)\, dt$$

Par conséquent

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leqslant \left|\int_0^x \left|\operatorname{sh}(x-t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!}\right| |f(t)|\, dt\right|$$

Mais grâce à la majoration de la question **II.5.a**, on a donc

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leqslant \left|\int_0^x \frac{\operatorname{ch}(x-t)|x-t|^{2n+1}}{(2n+1)!} |f(t)|\, dt\right|$$

On en déduit par inégalité de la moyenne

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leqslant M \left|\int_0^x |f(t)|\, dt\right|$$

où M désigne le maximum de $t \mapsto \frac{\operatorname{ch}(x-t)|x-t|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ sur l'intervalle $[0, x]$ ou $[x, 0]$. Par changement de variables, M est aussi le maximum de $t \mapsto \frac{\operatorname{ch}(t)|t|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ sur l'intervalle $[0, x]$ ou $[x, 0]$. Cette fonction étant paire et croissante sur $\mathbb{R}_+$, on trouve $M = \frac{\operatorname{ch}(x)|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ en distinguant les cas $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$.
Les théorèmes de comparaison sur les suites usuelles donnent $|x|^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{=} o((2n+1)!)$. Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{ch}(x)|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left|\int_0^x |f(t)|\, dt\right| = 0$$

Par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U(f)(x) - U_n(f)(x) = 0$.

c. Remarquons que $A \circ U_n = U_n \circ A = U_{n+1} - A$.
On peut donc écrire

$$U \circ A = (U - U_n) \circ A + U_n \circ A = (U - U_n) \circ A + U_{n+1} - A = (U - U_n) \circ A + (U_{n+1} - U) + (U - A)$$

Soient $f \in E$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc

$$U \circ A(f)(x) = (U - U_n) \circ A(f)(x) + (U_{n+1} - U)(f)(x) + (U - A)(f)(x)$$

En appliquant la question précédente, on a $(U_{n+1} - U)(f)(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On peut également appliquer la question précédente à $A(f)$ qui est bien une fonction de E de sorte que $(U - U_n) \circ A(f)(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par unicité de la limite, on a donc $U \circ A(f)(x) = (U - A)(f)(x)$. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $U \circ A(f) = (U - A)(f)$. Ceci étant valable pour tout $f \in E$, on a finalement $U \circ A = U - A$.

6. **a.** On a $(I - A) \circ (I + U) = I - A + U - A \circ U = I$ d'après la question **II.5.c**. De même, $(I + U) \circ (I - A) = I - A + U + U \circ A = I$ d'après la question **II.3**. Ainsi $I - A$ et $I + U$ sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

b. Une fonction f de E est solution de (1) *si et seulement si* $(I-A)(f) = g$ i.e. $f = (I+U)(g)$. L'unique solution f de (1) est donc définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t)\ dt$$

c. g est bien continue mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$: on ne peut plus utiliser les résultats de la première partie. Tout d'abord, remarquons que f est paire. En effet, en utilisant la parité de g :

$$f(-x) = g(-x) + \int_0^{-x} \operatorname{sh}(-x-t)g(t)\ dt = g(x) + \int_0^{-x} \operatorname{sh}(-x-t)g(-t)\ dt$$

Effectuons le changement de variables $u = -t$ et utilisons l'imparité de sh :

$$f(-x) = g(x) - \int_0^x \operatorname{sh}(-x+u)g(u)\,du = g(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-u)g(u)\,du = f(x)$$

Déterminons maintenant f sur $\mathbb{R}_+$ en distinguant des cas.

▶ Si $x \in [0,1[$,

$$f(x) = x + \int_0^x t\operatorname{sh}(x-t)\ dt = x - [t\operatorname{ch}(x-t)]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\ dt = -[\operatorname{sh}(x-t)]_{t=0}^{t=x} = \operatorname{sh}(x)$$

▶ Si $x \in [0,2[$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2 - x + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t)\ dt = 2 - x + \int_0^1 t\operatorname{sh}(x-t)\ dt + \int_1^x (2-t)\operatorname{sh}(x-t)\ dt \\
&= 2 - x - [t\operatorname{ch}(x-t)]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \operatorname{ch}(x-t)\ dt - [(2-t)\operatorname{ch}(x-t)]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x \operatorname{ch}(x-t)\ dt \\
&= -[\operatorname{sh}(x-t)]_{t=0}^{t=1} + [\operatorname{sh}(x-t)]_{t=1}^{t=x} \\
&= \operatorname{sh}(x) - 2\operatorname{sh}(x-1)
\end{aligned}$$

▶ Si $x \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t)\ dt = \int_0^1 t\operatorname{sh}(x-t)\ dt + \int_1^2 (2-t)\operatorname{sh}(x-t)\ dt \\
&= -[t\operatorname{ch}(x-t)]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \operatorname{ch}(x-t)\ dt - [(2-t)\operatorname{ch}(x-t)]_{t=1}^{t=2} - \int_1^2 \operatorname{ch}(x-t)\ dt \\
&= -[\operatorname{sh}(x-t)]_{t=0}^{t=1} + [\operatorname{sh}(x-t)]_{t=1}^{t=2} \\
&= \operatorname{sh}(x) - 2\operatorname{sh}(x-1) + \operatorname{sh}(x-2)
\end{aligned}$$