Devoir surveillé n°04 : corrigé

Solution 1.

1. $F_0 = 1 \geqslant 0$ et $F_1 = 1 \geqslant 0$. Supposons $F_n \geqslant 0$ et $F_{n+1} \geqslant 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \geqslant 0$. Par récurrence double, $F_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (F_n) est donc positive.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+1} - F_n = F_{n-1} \geqslant 0$ et $F_1 - F_0 = 0 \geqslant 0$. Finalement, $F_{n+1} - F_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui prouve la croissance de la suite (F_n).

3. Puisque $F_2 = F_0 + F_1 = 2$, $F_0F_2 = 2 = F_1^2 + (-1)^0$. Supposons que $F_nF_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
F_{n+1}F_{n+3} &= F_{n+1}(F_{n+1} + F_{n+2}) \\
&= F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_{n+2} \\
&= F_nF_{n+2} - (-1)^n + F_{n+1}F_{n+2} \\
&= F_{n+2}(F_n + F_{n+1}) + (-1)^{n+1} \\
&= F_{n+2}^2 + (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

Par récurrence, $F_nF_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
F_{2n+1}(F_{2n+2} + F_{2n+3}) &= F_{2n+1}F_{2n+2} + F_{2n+1}F_{2n+3} \\
&= F_{2n+1}F_{2n+2} + F_{2n+2}^2 + (-1)^{2n+1} && \text{d'après la question}\mathbf{3} \\
&= F_{2n+2}(F_{2n+1} + F_{2n+2}) - 1 \\
&= F_{2n+2}F_{2n+3} - 1
\end{aligned}$$

On en déduit que $F_{2n+1} = \dfrac{F_{2n+2}F_{2n+3} - 1}{F_{2n+2} + F_{2n+3}}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, $G_{2n+1} = \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. La suite (F_n) étant croissante, $F_{2n+2} \geqslant F_2 = 2 > 1$ et $F_{2n+3} \geqslant F_2 = 2 > 1$ donc $0 \leqslant \frac{1}{F_{2n+2}} < 1$ et $0 \leqslant \frac{1}{F_{2n+3}} < 1$. Par stricte croissance de arctan, $0 \leqslant G_{2n+2} < \frac{\pi}{4}$ et $0 \leqslant G_{2n+3} < \frac{\pi}{4}$ et a fortiori, $G_{2n+2} + G_{2n+3} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Par ailleurs, $\tan(G_{2n+1}) = \frac{1}{F_{2n+1}}$ et

$$\begin{aligned}
\tan(G_{2n+2} + G_{2n+3}) &= \frac{\tan(G_{2n+2}) + \tan(G_{2n+3})}{1 - \tan(G_{2n+2})\tan(G_{2n+3})} \\
&= \frac{\frac{1}{F_{2n+2}} + \frac{1}{F_{2n+3}}}{1 - \frac{1}{F_{2n+2}} \cdot \frac{1}{F_{2n+3}}} \\
&= \frac{F_{2n+2} + F_{2n+3}}{F_{2n+2}F_{2n+3} - 1} \\
&= \frac{1}{F_{2n+1}} && \text{d'après la question précédente} \\
&= \tan(G_{2n+1})
\end{aligned}$$

Puisque la fonction tan est injective sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $G_{2n+1} = G_{2n+2} + G_{2n+3}$.

6. D'après la question **5** $G_{2n} = G_{2n-1} - G_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} G_{2k} &= \sum_{k=1}^{n} G_{2k-1} - G_{2k+1} \\
&= G_1 - G_{2n+1} && \text{par télescopage} \\
&= \arctan(1) - G_{2n+1} \\
&= \frac{\pi}{4} - G_{2n+1}
\end{aligned}$$

On en déduit le résultat demandé.

Solution 2.

1. La fonction sh est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\text{sh}(0) = 0$, $\lim_{+\infty} \text{sh} = +\infty$ et $1 \in [0, +\infty[$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $\text{sh}(\alpha) = 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de sh,
$$\forall t \in [0, \alpha],\ 0 \leqslant \text{sh}(t) \leqslant \text{sh}(\alpha) = 1$$
On en déduit donc que
$$\forall t \in [0, \alpha],\ \text{sh}^{n+1}(t) \leqslant \text{sh}^n(t)$$
Par croissance de l'intégrale, $I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est donc décroissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, \alpha]$, $\text{sh}(t) \geqslant 0$ donc $\text{sh}^n(t) \geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, $I_n \geqslant 0$. La suite (I_n) est décroissante et minorée : elle converge.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$ i.e. $1 + \text{sh}^2 = \text{ch}^2$. Alors
$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^\alpha (\text{sh}^n(t) + \text{sh}^{n+2}(t))\ dt \\ &= \int_0^\alpha \text{sh}^n(t)(1 + \text{sh}^2(t))\ dt \\ &= \int_0^\alpha \text{sh}^n(t)\,\text{ch}^2(t)\ dt = J_n \end{aligned}$$

5. Une primitive de $\text{sh}^n \text{ch}$ est $\frac{1}{n+1} \text{sh}^{n+1}$ et la dérivée de ch est sh donc une intégration par parties donne
$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^\alpha \text{sh}^n(t)\,\text{ch}^2(t)\ dt \\ &= \frac{1}{n+1} \left[\text{sh}^{n+1}(t)\,\text{ch}(t)\right]_0^\alpha - \frac{1}{n+1} \int_0^\alpha \text{sh}^{n+2}(t)\ dt \\ &= \frac{1}{n+1} \text{ch}(\alpha) - \frac{1}{n+1} I_{n+2} \end{aligned}$$
Finalement,
$$I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \text{ch}(\alpha) - \frac{1}{n+1} I_{n+2} - I_n$$
ou encore
$$(n+2) I_{n+2} = \text{ch}(\alpha) - (n+1) I_n$$

6. Notons ℓ la limite de (I_n). Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+2} = \frac{\text{ch}(\alpha)}{n+2} - \frac{n+1}{n+2} I_n$$
D'une part, $\lim_{n\to+\infty} I_{n+2} = \ell$.
D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\text{ch}(\alpha)}{n+2} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$. Donc par opération sur les limites,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\text{ch}(\alpha)}{n+2} - \frac{n+1}{n+2} I_n = -\ell$$
Finalement, $\ell = -\ell$ et donc $\ell = 0$.

Solution 3.

1. A l'aide de la relation de Chasles,
$$\int_0^{2\pi} g(t)\ dt = \int_0^{\pi} g(t)\ dt + \int_{\pi}^{2\pi} g(t)\ dt$$

A l'aide du changement de variable $t \mapsto 2\pi - t$,

$$\begin{aligned}\int_\pi^{2\pi} g(t)\,dt &= -\int_\pi^0 g(2\pi - t)\,dt\\ &= \int_0^\pi g(2\pi - t)\,dt\\ &= \int_0^\pi g(-t)\,dt \qquad \text{car } g \text{ est } 2\pi\text{-périodique}\\ &= \int_0^\pi g(t)\,dt \qquad \text{car } g \text{ est paire}\end{aligned}$$

2. Soient $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Remarquons que

$$\begin{aligned}f_r(\theta) &= (r - e^{i\theta})(r - e^{-i\theta})\\ &= (r - e^{i\theta})\overline{(r - e^{i\theta})} \qquad \text{car } r \in \mathbb{R}\\ &= |r - e^{i\theta}|^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

Supposons que $f_r(\theta) = 0$, alors $r = e^{i\theta}$, puis $|r| = |e^{i\theta}| = 1$ et donc, commee $r \in \mathbb{R}$, $r = \pm 1$, ce qui est exclu. Ainsi

$$\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ f_r(\theta) > 0$$

3. Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On effectue le changement de variable $\theta \mapsto \pi - \theta$. Ainsi

$$I(r) = -\int_\pi^0 \ln \circ f_r(\pi - \theta)\,d\theta = \int_0^\pi \ln \circ f_r(\pi - \theta)\,d\theta = \int_0^\pi \ln \circ f_{-r}(\theta)\,d\theta = I(-r)$$

car pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f_r(\pi - \theta) = r^2 - 2r\cos(\pi - \theta) + 1 = r^2 + 2r\cos\theta + 1 = f_{-r}(\theta)$$

4. Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Comme indiqué

$$\begin{aligned}2I(r) &= I(r) + I(-r)\\ &= \int_0^\pi \ln \circ f_r(\theta)\,d\theta + \int_0^\pi \ln \circ f_{-r}(\theta)\,d\theta\\ &= \int_0^\pi \ln(f_r(\theta) f_{-r}(\theta))\,d\theta\end{aligned}$$

Or, comme vu plus haut, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f_r(\theta) = |r - e^{i\theta}|^2 \qquad \text{et} \qquad f_{-r}(\theta) = |-r - e^{i\theta}|^2 = |r + e^{i\theta}|^2$$

de sorte que

$$f_r(\theta) f_{-r}(\theta) = \left|r - e^{i\theta}\right|^2 \left|r + e^{i\theta}\right|^2 = \left|(r - e^{i\theta})(r + e^{i\theta}\right|^2 = \left|r^2 - e^{2i\theta}\right|^2 = f_{r^2}(2\theta)$$

Finalement

$$2I(r) = \int_0^\pi \ln \circ f_{r^2}(2\theta)\,d\theta$$

En effectuant le changement de variable $\theta \mapsto 2\theta$, on obtient

$$2I(r) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln \circ f_{r^2}(\theta)\,d\theta$$

Or $\ln \circ f_{r^2}$ est clairement 2π-périodique et paire donc, d'après la question **1**,

$$2I(r) = \int_0^\pi \ln \circ f_{r^2}(\theta)\,d\theta = I(r^2)$$

5. On fixe $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et on procède à une récurrence. Tout d'abord, $2^0 I(r) = I(r^1) = I(r^{2^0})$. Supposons alors qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n I(r) = I(r^{2^n})$. D'après la question **4**,

$$2^{n+1} I(r) = 2I(r^{2^n}) = I((r^{2^n})^2) = I(r^{2^{n+1}})$$

Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n I(r) = I(r^{2^n})$$

6. Remarquons déjà que puisque $I(r) = I(-r)$, $I(r) = I(|r|)$.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$ donc

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ |r|^2 - 2|r| + 1 \leqslant |r|^2 - 2|r|\cos\theta + 1 \leqslant |r|^2 + 2|r| + 1$$

ou encore

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ (1-|r|)^2 \leqslant f_{|r|}(\theta) \leqslant (1+|r|)^2$$

donc

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ 2\ln(1-|r|) \leqslant \ln\circ f_{|r|}(\theta) \leqslant 2\ln(1+|r|)$$

puis, par croissance de l'intégrale,

$$2\pi\ln(1-|r|) \leqslant I(|r|) \leqslant 2\pi\ln(1+|r|)$$

Donc, d'après notre remarque initiale

$$2\pi\ln(1-|r|) \leqslant I(r) \leqslant 2\pi\ln(1+|r|)$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $|r| < 1$, on a également $|r|^{2^n} < 1$: on peut donc appliquer la question **6** de sorte que

$$\ln(1-|r^{2^n}|) \leqslant I(r^{2^n}) \leqslant \ln(1+|r^{2^n}|)$$

ou encore

$$\ln(1-|r|^{2^n}) \leqslant I(r^{2^n}) \leqslant \ln(1+|r|^{2^n})$$

Finalement,

$$\frac{1}{2^n}\ln(1-|r|^{2^n}) \leqslant \frac{1}{2^n}I(r^{2^n}) \leqslant \frac{1}{2^n}\ln(1+|r|^{2^n})$$

D'après la question **5**, on a donc

$$\frac{1}{2^n}\ln(1-|r|^{2^n}) \leqslant I(r) \leqslant \frac{1}{2^n}\ln(1+|r|^{2^n})$$

Comme $|r| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} |r|^{2^n} = 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(1-|r|^{2^n}) = \lim_{n\to+\infty} \ln(1+|r|^{2^n}) = 0$$

De plus, $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\ln(1-|r|^{2^n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\ln(1+|r|^{2^n}) = 0$$

En passant à la limite l'encadrement précédent lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $I(r) = 0$.

8. Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f_{1/r}(\theta) = \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r}\cos\theta + 1 = \frac{1}{r^2}(1 - 2r\cos\theta + r^2) = \frac{1}{r^2}f_r(\theta)$$

Ainsi

$$I\left(\frac{1}{r}\right) = \int_0^\pi \ln\circ f_{1/r}(\theta)\ d\theta = \int_0^\pi \ln\left(\frac{1}{r^2}f_r(\theta)\right)\ d\theta = \int_0^\pi (\ln\circ f_r(\theta) - 2\ln(|r|))\ d\theta = I(r) - 2\pi\ln(|r|)$$

9. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $|r| > 1$. Alors $\left|\frac{1}{r}\right| < 1$. D'après la question **7**, $I\left(\frac{1}{r}\right) = 0$. Ainsi

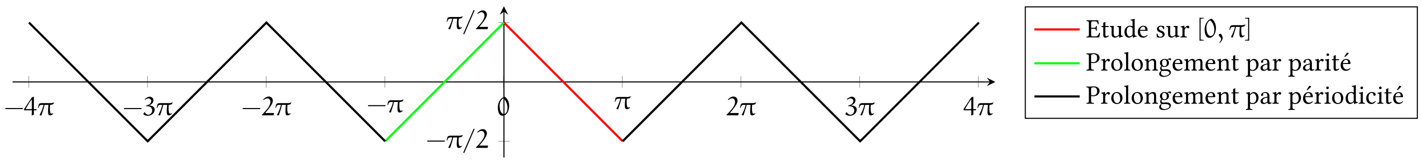
$$I(r) = I\left(\frac{1}{r}\right) + 2\pi\ln(|r|) = 2\pi\ln(|r|)$$

Solution 4.

Remarquons déjà que f est 2π-périodique et paire. On peut donc se contenter de l'étudier sur $[0,\pi]$.
De plus,

$$\forall x \in [0,\pi],\ f(x) = \arcsin\circ\cos(x) = \pi/2 - \arccos\circ\cos(x) = \pi/2 - x$$

On en déduit le graphe suivant.



Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) &= \arccos \circ \sin(x) \\ &= \pi/2 - \arcsin \circ \sin(x) \\ &= \pi/2 + \arcsin(-\sin x) \\ &= \pi/2 + \arcsin \circ \cos(x + \pi/2) = \pi/2 + f(x + \pi/2)\end{aligned}$$

Ainsi le graphe de g est obtenu à partir de celui de f par une translation de vecteur $\pi/2(\vec{\jmath} - \vec{\imath})$ si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ désigne une base du repère dans lequel sont tracés les graphes de f et g.