Devoir à la maison n°14

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + cy = f \\ y(0) = 0 \end{cases}$ admet une unique solution d'où l'unicité de la solution $\varphi(f)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et vérifiant $\varphi(f)(0) = 0$. Remarquons qu'en posant $\psi(x) = \varphi(f)(x)e^{cx}$ pour $x \in \mathrm{I}$, ψ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \psi'(x) = e^{cx}(\varphi(f)'(x) + c\varphi(f)(x)) = e^{cx}f(x)$$

De plus, $\psi(0) = 0$. Ainsi ψ est l'unique primitive de $x \mapsto e^{cx}f(x)$ s'annulant en 0. D'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \psi(x) = \int_0^x e^{ct}f(t)\ \mathrm{d}t$$

puis

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \varphi(f)(x) = e^{-cx}\int_0^x e^{ct}f(t)\ \mathrm{d}t$$

2 Soient $(f, g) \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathrm{I},\ \varphi(\lambda f + \mu g)(x) &= e^{-cx}\int_0^x e^{ct}\left(\lambda f + \mu g\right)(t)\ \mathrm{d}t \\
&= e^{-cx}\int_0^x e^{ct}\left(\lambda f(t) + \mu g(t)\right)\ \mathrm{d}t \\
&= \lambda e^{-cx}\int_0^x e^{ct}f(t)\ \mathrm{d}t + \mu e^{-cx}\int_0^x e^{ct}g(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \lambda\varphi(f)(x) + \mu\varphi(g)(x) \\
&= \left(\lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)\right)(x)
\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$ et φ est bien linéaire sur $\mathcal{C}^0(\mathrm{I})$.

3 Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $|f|$ et 1 pour le produit scalaire $(h, k) \mapsto \int_{\mathrm{I}} hk$, on obtient :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2\ \mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b \mathrm{d}t} = \sqrt{b-a}\|f\|_2$$

De plus,

$$\|f\|_2^2 = \int_a^b f(t)^2\ \mathrm{d}t \leq \int_a^b \|f\|_\infty^2\ \mathrm{d}t = (b-a)\|f\|_\infty^2$$

donc

$$\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$$

On peut donc poser $\mathrm{M}_1 = \sqrt{b-a}$ et $\mathrm{M}_2 = b - a$.

4 Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$.

$$\forall x \in \mathrm{I},\ |\varphi(f)(x)| = e^{-cx}\left|\int_0^x e^{ct}f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq e^{-ca}\int_a^b e^{ct}|f(t)|\ \mathrm{d}t \leq e^{-ca}\|f\|_\infty\int_a^b e^{ct}\ \mathrm{d}t = e^{-ca}\frac{e^{cb}-e^{ca}}{c}\|f\|_\infty = \frac{e^{c(b-a)-1}}{c}\|f\|_\infty$$

Par conséquent, $\|\varphi(f)\|_\infty \leq \mathrm{M}_0\|f\|_\infty$ avec $\mathrm{M}_0 = \dfrac{e^{c(b-a)-1}}{c}$.

5 Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$.

$$\forall x \in \mathrm{I},\ |\varphi(f)(x)| = e^{-cx}\left|\int_0^x e^{ct}f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq e^{-ca}\int_a^b e^{ct}|f(t)|\ \mathrm{d}t \leq e^{-ca}\int_a^b e^{cb}|f(t)|\ \mathrm{d}t = e^{c(b-a)}\|f\|_1$$

Il suffit donc de poser $\mathrm{A} = e^{c(b-a)}$.
En intégrant que $[a,b]$, on obtient

$$\|\varphi(f)\|_1 \leq \mathrm{A}(b-a)\|f\|_1$$

Il suffit donc de poser $\mathrm{C} = \mathrm{A}(b-a)$.

6 D'après les questions précédentes, il suffit de poser $\mathrm{B} = \mathrm{AM}_1$.
Alors

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \varphi(f)(x)^2 \leq \mathrm{B}^2\|f\|_2^2$$

En intégrant sur $[a,b]$, on obtient,

$$\int_a^b \varphi(f)(x)^2\ \mathrm{d}x \leq (b-a)\mathrm{B}^2\|f\|_2^2$$

c'est-à-dire

$$\|\varphi(f)\|_2 \leq \mathrm{B}\sqrt{b-a}\|f\|_2$$

Il suffit donc de poser $\mathrm{K} = \mathrm{B}\sqrt{b-a}$.

7 Par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires, les questions précédentes assurent que l'endomorphisme φ est continu pour chacune des normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

8 Pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$\varphi(f_\lambda)(x) = e^{-cx}\int_0^x e^{ct}f_\lambda(t)\ \mathrm{d}t = e^{-cx}\int_0^x e^{(c-\lambda)t}\ \mathrm{d}t = \begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda x}-e^{-cx}}{c-\lambda} & \text{si } c \neq \lambda\\ xe^{-cx} & \text{si } c = \lambda\end{cases}$$

9 D'après le cours, pour tout $a > 0$, $x \mapsto e^{-ax}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Notamment, f_λ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. De même, si $c \neq \lambda$, $\varphi(f_\lambda)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ comme combinaison linéaire de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, $x \mapsto xe^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $xe^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc f_c est aussi intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
De manière générale, pour $a > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}$. Notamment, comme f_λ est positive sur $\mathbb{R}_+$, $\|f_\lambda\|_1 = \dfrac{1}{\lambda}$. Remarquons que, si $\lambda \neq c$, $\varphi(f_\lambda)$ est encore positive (numérateur et dénominateur de même signe). On en déduit que

$$\|\varphi(f_\lambda)\|_1 = \frac{1/\lambda - 1/c}{c-\lambda} = \frac{1}{\lambda c}$$

Enfin, f_c est encore positive sur $\mathbb{R}_+$ et, par intégration par parties,

$$\|\varphi(f_c)\|_1 = \int_0^{+\infty} xe^{-cx}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{c}\left[xe^{-cx}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{c}\int_0^{+\infty} e^{-cx}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{c^2}$$

On a donc $\|\varphi(f_\lambda)\|_1 = \dfrac{1}{\lambda c}$ de manière générale.

10 Les mêmes arguments permettent de prouver que f_λ^2 et $\varphi(f_\lambda)^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.
On trouve également comme à la question précédente que $\|f_\lambda\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ et que, lorsque $\lambda \neq c$,

$$\|\varphi(f_\lambda)\|_2^2 = \frac{1}{(c-\lambda)^2}\left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2c} - \frac{2}{\lambda+c}\right) = \frac{1}{2c\lambda(\lambda+c)}$$

donc $\|\varphi(f_\lambda)\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2c\lambda(\lambda+c)}}$. Par double intégration par parties, on obtient

$$\|\varphi(f_c)\|_2^2 = \int_0^{+\infty} x^2e^{-2cx}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2c}\left[x^2e^{-2cx}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2c}\int_0^{+\infty} 2xe^{-2cx}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2c^2}\left[xe^{-2cx}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2c^2}\int_0^{+\infty} e^{-2cx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4c^3}$$

de sorte que $\|\varphi(f_c)\|_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{c^3}}$. On a donc $\|\varphi(f_\lambda)\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2c\lambda(\lambda+c)}}$ de manière générale.

11 Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I})$.

$$\forall x \in \mathrm{I},\ |\varphi(f)(x)| = e^{-cx}\left|\int_0^x e^{-ct}f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq e^{-cx}\int_0^x e^{-ct}|f(t)|\,\mathrm{d}t \leq e^{-cx}\int_0^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t = e^{-cx}\|f\|_1$$

En intégrant sur $\mathbb{R}_+$, on obtient que $\varphi(f) \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I})$ et

$$\|\varphi(f)\|_1 \leq \frac{1}{c}\|f\|_1$$

Par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires, φ est un endomorphisme continu de $\mathrm{L}^1(\mathrm{I})$.
De plus, $|||\varphi||| \leq \dfrac{1}{c}$. Par ailleurs, pour tout $\lambda > 0$,

$$|||\varphi||| \geq \frac{\|\varphi(f_\lambda)\|_1}{\|f_\lambda\|_1} = \frac{1}{c}$$

donc $|||\varphi||| = \dfrac{1}{c}$.

12 Fixons $\mathrm{X} > 0$. Par définition de φ, $f = g' + cg$ puis $g'g + cg^2 = fg$ en intégrant sur le segment $[0, \mathrm{X}]$, on obtient

$$\int_0^{\mathrm{X}} g'(t)g(t)\,\mathrm{d}t + c\int_0^{\mathrm{X}} g(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{X}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On remarque que $\dfrac{1}{2}g^2$ est la primitive de gg' nulle en 0 donc

$$\frac{g(\mathrm{X})^2}{2} + c\int_0^{\mathrm{X}} g(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{X}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme $g(\mathrm{X})^2 \geq 0$,

$$c\int_0^{\mathrm{X}} g(t)^2\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\mathrm{X}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

puis, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$c\int_0^{\mathrm{X}} g(t)^2\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_0^{\mathrm{X}} f(t)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^{\mathrm{X}} g(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

Si $\displaystyle\int_0^{\mathrm{X}} g(t)^2\,\mathrm{d}t \neq 0$, on obtient en divisant par $\sqrt{\displaystyle\int_0^{\mathrm{X}} g(t)^2\,\mathrm{d}t}$:

$$c\sqrt{\int_0^{\mathrm{X}} g(t)^2\,\mathrm{d}t} \leq \sqrt{\int_0^{\mathrm{X}} f(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

Mais cette inégalité est encore évidemment valide si $\displaystyle\int_0^{\mathrm{X}} g(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$. A fortiori, comme f^2 est positive,

$$\sqrt{\int_0^{\mathrm{X}} g(t)^2\,\mathrm{d}t} \leq \frac{1}{c}\sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{c}\|f\|_2$$

Mais comme g^2 est positive, la fonction $X \mapsto \sqrt{\int_0^X g(t)^2 \, dt}$ est croissante. De plus, elle est majorée par $\frac{1}{c}\|f\|_2$ donc elle admet une limite en $+\infty$. Ceci signifie que $\int_0^{+\infty} g(t)^2 \, dt$ converge i.e. $g = \varphi(f) \in L^2(I)$. De plus, $\|\varphi(f)\|_2 \leq \frac{1}{c}\|f\|_2$. Ainsi φ est un endomorphisme continu de $L^2(I)$ par caractérisation de la continuité des applications linéaires.
On peut ajouter que $|||\varphi||| \leq \frac{1}{c}$. Mais pour tout $\lambda > 0$,

$$|||\varphi||| \geq \frac{\|\varphi(f_\lambda)\|_2}{\|f_\lambda\|_2} = \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{2c\lambda(\lambda+c)}} = \frac{1}{c(\lambda+c)}$$

Passant à la limite lorsque λ tend vers 0^+, on obtient $|||\varphi||| \geq \frac{1}{c}$. Finalement, $|||\varphi||| = \frac{1}{c}$.

13 **13.a** Soit $(f,g) \in H(I)^2$. On sait que $|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2+g^2)$. Or f^2 et g^2 sont intégrables sur I donc fg l'est également. Pour la même raison, $f'g'$ est intégrable sur I.

13.b L'application ϕ est clairement symétrique. La bilinéarité de ϕ provient de la linéarité de l'intégrale et de la dérivation. Enfin, si f vérifie $\phi(f,f) = 0$, alors $\int_I f^2 + \int_I (f')^2 = 0$. Comme il s'agit d'une somme de deux termes positifs, $\int_I f^2 = \int_I (f')^2 = 0$. Notamment, $\|f\|_2 = 0$ donc $f = 0$. On a bien vérifié que ϕ était un produit scalaire.

13.c $\|\cdot\|_H$ est tout simplement la norme euclidienne associée au produit scalaire ϕ.

14 **14.a** Soit $f \in L^2(I)$. On a supposé que φ était un endomorphisme de $L^2(I)$ donc $\varphi(f) \in L^2(I)$. Par conséquent $\varphi(f)' = f - c\varphi(f) \in L^2(I)$.
Ainsi $\varphi(f) \in L^2(I)$ et $\varphi(f)' \in L^2(I)$ donc $\varphi(f) \in H(I)$. De plus, $\varphi(f)(0) = 0$ par définition donc $\varphi(f) \in K$.
Enfin, remarquons que

$$\forall g \in H(I),\ \|g\|_H^2 = \|g\|_2^2 + \|g'\|_2^2$$

On a supposé que φ était continu pour la norme $\|\cdot\|_2$. On peut donc poser $N = |||\Phi|||$. D'après la remarque précédente,

$$\|\varphi(f)\|_H^2 = \|\varphi(f)\|_2^2 + \|\varphi(f)'\|_2^2$$

Tout d'abord, $\|\varphi(f)\|_2 \leq N\|f\|_2$. De plus, on rappelle que $\varphi(f)' + c\varphi(f) = f$ de sorte que, par inégalité triangulaire,

$$\|\varphi(f)'\|_2 = \|f - c\varphi(f)\|_2 \leq \|f\|_2 + c\|\varphi(f)\|_2 \leq (1+Nc)\|f\|_2$$

Finalement,

$$\|\varphi(f)\|_H^2 \leq (N^2 + (1+Nc)^2)\|f\|_2^2$$

En posant $A = \sqrt{N^2 + (1+Nc)^2}$, on a bien le résultat voulu.

14.b On a vérifié à la question précédente que φ était bien une application linéaire de $L^2(I)$ dans $\mathbb{K}$.
Soit $f \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors $\varphi(f) = 0$ puis $f = \varphi(f)' + c\varphi(f) = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ et φ est injective.
Soit $g \in K$. Posons $f = g' + cg$. Puisque g et g' appartiennent à $L^2(I)$, f également. De plus, g est solution de l'équation différentielle $y' + cy = 0$ et vérifie la condition initiale $g(0) = 0$. Par unicité de la solution à un problème de Cauchy, $g = \varphi(f)$ et φ est surjective.
On peut donc conclure que φ est un isomorphisme de $L^2(I)$ dans K.

14.c Il suffit d'utiliser la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.

14.d Soit $g \in K$. Posons $f = \varphi^{-1}(g)$. Alors $g = \varphi(f)$ de sorte que $f = g' + cg$. Par inégalité triangulaire,

$$\|f\|_2 = \|g' + cg\|_2 \leq \|g'\|_2 + c\|g\|_2$$

Mais comme $\|g\|_H^2 = \|g\|_2^2 + \|g'\|_2^2$, on a clairement $\|g\|_2 \leq \|g\|_H$ et $\|g'\|_2 \leq \|g\|_H$. Ainsi

$$\|\varphi^{-1}(g)\|_2 = \|f\|_2 \leq (1+c)\|g\|_H$$

A nouveau, φ^{-1} est continue par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.