

DEVOIR À LA MAISON N°1 : CORRIGÉ

SOLUTION 1.

1. D'après l'énoncé, $x_0^3 = x_0^2$ donc $x_0 \in \{0, 1\}$.
2. Si $x_0 = 0$, alors $x_1^3 = x_1^2$ donc $x_1 \in \{0, 1\}$. Si $x_0 = 1$, alors $1 + x_1^3 = (1 + x_1)^2$ ce qui équivaut à $x_1(x_1^2 - x_1 - 2) = 0$ ou encore $x_1(x_1 - 2)(x_1 + 1) = 0$ de sorte que $x_1 \in \{-1, 0, 2\}$.
3. Si $(x_0, x_1) = (0, 0)$, alors $(S_0, S_1) = (0, 0)$.
 Si $(x_0, x_1) = (0, 1)$, alors $(S_0, S_1) = (0, 1)$.
 Si $(x_0, x_1) = (1, 0)$, alors $(S_0, S_1) = (1, 1)$.
 Si $(x_0, x_1) = (1, -1)$, alors $(S_0, S_1) = (1, 0)$.
 Si $(x_0, x_1) = (1, 2)$, alors $(S_0, S_1) = (1, 3)$.
4. On raisonne par récurrence. On note \mathcal{P}_n l'assertion

$$\exists m \in \mathbb{N}, S_n = \frac{m(m+1)}{2}$$

Tout d'abord, \mathcal{P}_0 est vraie puisque $S_0 = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$ ou $S_1 = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$.

Supposons \mathcal{P}_n vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $S_n = \frac{m(m+1)}{2}$. D'une part,

$$\sum_{k=0}^{n+1} x_k^3 = S_{n+1}^2 = (S_n + x_{n+1})^2$$

et d'autre part

$$\sum_{k=0}^{n+1} x_k^3 = \left(\sum_{k=0}^n x_k^3 \right) + x_{n+1}^3 = S_n^2 + x_{n+1}^3$$

On en déduit que

$$(S_n + x_{n+1})^2 = S_n^2 + x_{n+1}^3$$

ou encore

$$x_{n+1}(x_{n+1}^2 - x_{n+1} - 2S_n) = 0$$

Cette dernière égalité équivaut à

$$x_{n+1}(x_{n+1}^2 - x_{n+1} - m(m+1)) = 0$$

ou encore

$$x_{n+1}(x_{n+1} + m)(x_{n+1} - (m+1)) = 0$$

de sorte que $x_{n+1} \in \{-m, 0, m+1\}$.

Si $x_{n+1} = -m$, alors $S_{n+1} = S_n - m = \frac{m(m-1)}{2} = \frac{(m-1)((m-1)+1)}{2}$. Si $m \geq 1$, alors $m-1 \in \mathbb{N}$. Sinon $m = 0$ et alors $S_{n+1} = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$.

Si $x_{n+1} = 0$, alors $S_{n+1} = S_n = \frac{m(m+1)}{2}$ et $m \in \mathbb{N}$.

Si $x_{n+1} = m+1$, alors $S_{n+1} = S_n + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$ et $m+1 \in \mathbb{N}$. Dans tous les cas de figure, \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

SOLUTION 2.

1. On remarque que

$$f(0) = f(0^2 + 0^2) = f(0)^2 + f(0)^2 = 2f(0)^2$$

de sorte que $f(0) = 0$ ou $f(0) = \frac{1}{2}$. Or f est à valeurs dans \mathbb{N} donc $f(0) = 0$.

De même

$$f(1) = f(1^2 + 0^2) = f(1)^2 + f(0)^2 = f(1)^2$$

donc $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$. Or l'énoncé stipule que $f(1) \neq 0$ donc $f(1) = 1$.

2. On utilise à nouveau le même genre d'astuce.

$$f(2) = f(1^2 + 1^2) = f(1)^2 + f(1)^2 = 2$$

$$f(4) = f(2^2 + 0^2) = f(2)^2 + f(0)^2 = 4$$

$$f(5) = f(2^2 + 1^2) = f(2)^2 + f(1)^2 = 5$$

$$f(8) = f(2^2 + 2^2) = f(2)^2 + f(2)^2 = 8$$

3. On décompose 5^2 de deux manières sous la forme d'une somme de deux carrés.

$$\begin{aligned} f(5^2) &= f(3^2 + 4^2) = f(3)^2 + f(4)^2 \\ &= f(5^2 + 0^2) = f(5)^2 + f(0)^2 = f(5)^2 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$f(3)^2 = f(5)^2 - f(4)^2 = 5^2 - 4^2 = 3^2$$

Puisque f est à valeurs positives, $f(3) = 3$. On en déduit aussitôt que

$$f(9) = f(3^2 + 0^2) = f(3)^2 + f(0)^2 = 3^2 + 0^2 = 9$$

De la même manière, puisque $10^2 = 6^2 + 8^2$,

$$f(10)^2 = f(10^2) = f(6)^2 + f(8)^2$$

Ainsi

$$f(6)^2 = f(10)^2 - f(8)^2 = 10^2 - 8^2 = 6^2$$

de sorte que $f(6) = 6$.

Enfin,

$$f(10) = f(1^2 + 3^2) = f(1)^2 + f(3)^2 = 1^2 + 3^2 = 10$$

4. Tout d'abord

$$f(50) = f(5^2 + 5^2) = f(5)^2 + f(5)^2 = 5^2 + 5^2 = 50$$

Enfin,

$$50 = f(50) = f(1^2 + 7^2) = f(1)^2 + f(7)^2 = 1 + f(7)^2$$

donc $f(7)^2 = 49 = 7^2$ puis $f(7) = 7$.

5. Puisque $125 = 10^2 + 5^2 = 11^2 + 2^2$, on obtient

$$f(10)^2 + f(5)^2 = f(11)^2 + f(2)^2$$

Or on a montré que $f(10) = 10$, $f(5) = 5$ et $f(2) = 2$ donc $f(11)^2 = 11^2$ puis $f(11) = 11$. De même, $145 = 8^2 + 9^2 = 12^2 + 1^2$ et on a montré que $f(8) = 8$, $f(9) = 9$ et $f(1) = 1$. On en déduit comme précédemment que $f(12) = 12$.

6. On peut raisonnablement conjecturer que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note \mathcal{P}_n l'assertion

$$\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, f(k) = k$$

D'après les questions précédentes, \mathcal{P}_4 est vraie (et même \mathcal{P}_6).

On suppose \mathcal{P}_n vraie pour un certain entier $n \geq 4$. D'après les indications de l'énoncé,

$$f(2n+1)^2 + f(n-2)^2 = f(2n-1)^2 + f(n+2)^2$$

Or $n-2$, $n+2$ et $2n-1$ appartiennent à $\llbracket 0, 2n \rrbracket$ car $n \geq 2$ donc $f(n-2) = n-2$, $f(n+2) = n+2$ et $f(2n-1) = 2n-1$ d'après \mathcal{P}_n . Ainsi $f(2n+1)^2 = (2n+1)^2$ puis $f(2n+1) = 2n+1$.

De même,

$$f(2n+2)^2 + f(n-4)^2 = f(2n-2)^2 + f(n+4)^2$$

Or $n-4$, $n+4$ et $2n-2$ appartiennent à $\llbracket 0, 2n \rrbracket$ car $n \geq 4$ donc $f(n-4) = n-4$, $f(n+4) = n+4$ et $f(2n-2) = 2n-2$ d'après \mathcal{P}_n . Ainsi $f(2n+2)^2 = (2n+2)^2$ puis $f(2n+2) = 2n+2$.

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui permet d'affirmer que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

SOLUTION 3.

1. Remarquons que $1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$.

2.

$$P(1) + P(j) + P(j^2) = (1 + j^3 + j^6) + \alpha(1 + j^2 + j^4) + \beta(1 + j + j^2) = 3 + \alpha(1 + j + j^2) + \beta(1 + j + j^2) = 3$$

3. Notons b_1 et b_2 les affixes des points B_1 et B_2 . Puisque $1, j$ et j^2 sont de module 1, $A_0O = A_1O = A_2O = 1$.
Pour $k \in \{0, 1, 2\}$

$$p_k = A_k B_1 \cdot A_k B_2 = A_k O \cdot A_k B_1 \cdot A_k B_2 = |j^k| \cdot |j^k - b_1| \cdot |j^k - b_2| = |j^k(j^k - b_1)(j^k - b_2)|$$

Posons $P(z) = z(z - b_1)(z - b_2)$ pour $z \in \mathbb{C}$ de sorte que $p_k = |P(j^k)|$ pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$. En développant, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Par inégalité triangulaire,

$$p_0 + p_1 + p_2 = |P(1)| + |P(j)| + |P(j^2)| \geq |P(1) + P(j) + P(j^2)| = 3$$

en utilisant la question précédente. Si l'on suppose que pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, $p_k < 1$, alors $p_0 + p_1 + p_2 < 3$, ce qui contredit l'inégalité précédente. Il existe donc $k \in \{0, 1, 2\}$ tel que $p_k \geq 1$, ce qui répond à la question.