Semaine du 22/03 au 26/03

1 Cours

Polynômes

Polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ Définitions : polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, ensemble $\mathbb{K}[X]$. Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux. Polynômes pairs, impairs. $(K[X], +, \times)$ est un anneau intègre commutatif. $(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Degré d'un polynôme. Degré d'une combinaison linéaire, d'un produit. Définition de $\mathbb{K}_n[X]$. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Famille de polynômes à degrés échelonnés. Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine d'un polynôme. Cas des polynômes pairs/impairs et des polynômes à coefficients réels. Polynôme dérivé. La dérivation est linéaire. Formule de Leibniz. Formule de Taylor.

Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ Relation de divisibilité. Division euclidienne. Algorithme de division euclidienne. Un polynôme P admet a pour racine si et seulement si il est divisible par $X - a$. Existence et unicité d'un PGCD unitaire ou nul. Algorithme d'Euclide pour les polynômes. Théorème de Bézout. Polynômes premiers entre eux. Lemme de Gauss. Un polynôme de degré n admet au plus n racines. Polynômes interpolateurs de Lagrange. Existence et unicité d'un PPCM unitaire ou nul.

Racines multiples Définition. Un polynôme de degré n admet au plus n racines comptées avec multiplicité. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les dérivées successives.

Factorisation Polynômes irréductibles. Définition et décomposition en facteurs irréductibles. Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$. Polynôme scindé. Un polynôme est scindé si et seulement si il possède autant de racines comptées avec multiplicité que son degré. Lien coefficients/racines.

Fractions rationnelles

Corps des fractions rationnelles Définition. Opérations. Degré. Dérivation. $\mathbb{K}(X)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et un corps.

Fonctions rationnelles, zéros et pôles Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle. Zéros et pôles d'une fraction rationnelle. Multiplicité d'un zéro ou d'un pôle.

Décomposition en éléments simples Partie entière. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$. Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ où P est scindé.

Sous-espaces affines

Sous-espaces affines Définition. Intersection de sous-espaces affines. Translation.

Équations linéaires Description de l'ensemble des solutions de $f(x) = b$ d'inconnue $x \in E$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour résoudre des équations d'inconnue polynomiale, chercher dans un premier temps à déterminer le degré du polynôme inconnu.
- Déterminer le reste d'une division euclidienne (utiliser les racines du diviseur).
- Montrer qu'un polynôme est nul en montrant qu'il admet une infinité de racines.
- Caractériser la multiplicité d'une racine via les dérivées successives.
- Passer de la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$ à celle sur $\mathbb{R}[X]$ (regrouper les racines conjuguées).
- Utiliser la parité et le fait qu'un polynôme est à coefficients réels pour obtenir de nouvelles racines à partir d'une racine donnée.
- Savoir résoudre des équations polynomiales de degré 2 à coefficients complexes.
- Savoir déterminer des racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe.
- Résoudre des systèmes polynomiaux symétriques en les inconnues.
- Exprimer une somme et un produit de racines à l'aide des coefficients du polynôme.
- Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle irréductible $F = P/Q$:
  - Calculer la partie entière.
  - Factoriser le dénominateur en produit de facteurs irréductibles.
  - Écrire la décomposition en éléments simples à l'aide de coefficients inconnus.
  - Déterminer des coefficients ou des relations entre ceux-ci :

  * Le coefficient associé à un pôle simple a est $\mathrm{P}(a)/\mathrm{Q}'(a)$;
  * Évaluer $(\mathrm{X}-a)^p\mathrm{F}$ en un pôle a (DES dans $\mathbb{C}$) ou $(\mathrm{X}^2+a\mathrm{X}+b)^p\mathrm{F}$ en un racine de $\mathrm{X}^2+a\mathrm{X}+b$ (DES dans $\mathbb{R}$) ;
  * Utiliser le fait que $\mathrm{F}\in\mathbb{R}(\mathrm{X})$: les coefficients de la DES dans $\mathbb{C}$ sont conjugués ;
  * Utiliser la parité éventuelle de la fraction rationnelle ;
  * Utiliser la limite de $x\mathrm{F}(x)$ quand x tend vers $+\infty$;
  * Évaluer en des valeurs particulières.

- Simplifier par télescopage une somme du type $\sum \mathrm{F}(k)$ où F est une fraction rationnelle via une DES.
- Calculer une intégrale du type $\displaystyle\int \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t$ où F est un fraction rationnelle via une DES.
- Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire $f(x)=b$: solution particulière + solutions de l'équation homogène.

3 Questions de cours

Décomposition en éléments simples

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ une fraction rationnelle au choix de l'interrogateur.

Lien coefficients/racines

Déterminer les racines du polynômes $\mathrm{P}_n=(\mathrm{X}+i)^n-(\mathrm{X}-i)^n$. En déduire les valeurs de $\mathrm{A}_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et $\mathrm{B}_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Polynômes «périodiques»

Déterminer les polynômes $\mathrm{P}\in\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)=\mathrm{P}(\mathrm{X})$.

Retour sur $\mathbb{U}_n$

Factoriser X^n-1 en produits de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. En déduire la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\mathrm{X}^n-1}$.