Devoir à la maison n°8 : corrigé

Problème 1 — Petites Mines 2009

Partie I – Étude d'une fonction

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations arithmétiques sur des fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3(1-2x^2)e^{-2x^2}$$

On en déduit que f est

- strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$;
- strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$;
- strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.

Pour tout $x \neq 0$, $xe^{-x^2} = \frac{x^2e^{-x^2}}{x}$. Par croissances comparées,

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x^2} = 0$$

via le changement de variables $X = x^2$. A fortiori

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = 0$$

Puis, par opérations

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\searrow$	-1

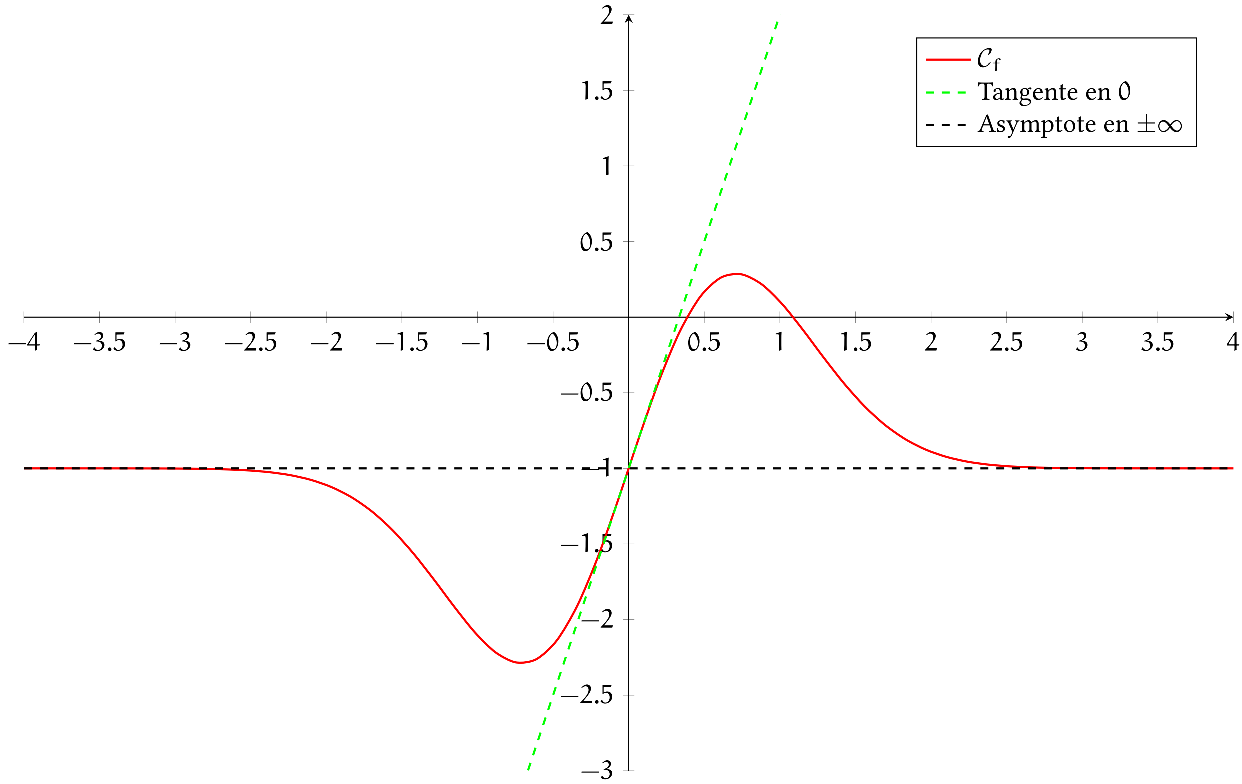
En particulier, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
Puisque $f(-x) + f(x) = -2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0, -1)$.

2. Puisque $f(0) = -1$ et $f'(0) = 3$, $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = 3x - 1$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - (3x-1) = 3x(e^{-x^2} - 1)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} - 1 \leqslant 0$ car $-x^2 \leqslant 0$ et par croissance de exp sur $\mathbb{R}$. Ainsi $f(x) - (3x-1) \leqslant 0$ pour $x \geqslant 0$ et $f(x) - (3x-1) \geqslant 0$ pour $x \leqslant 0$. On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente à gauche de 0 et au-dessous de celle-ci à droite de 0. $\mathcal{C}_f$ admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

3.



4. **a.** f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle admet un développement limité à tout ordre en 0.

b. On sait que $e^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. On en déduit que

$$e^{-x^2} \underset{x\to 0}{=} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

puis que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -1 + 3x - 3x^3 + \frac{3}{2}x^5 + o(x^5)$$

Partie II – Étude d'une équation différentielle

1. L'équation différentielle H_n est $xy' - (n - 2x^2)y = 0$. Sur $\mathbb{R}^*$, elle équivaut à $y' - \left(\frac{n}{x} - 2x\right) y = 0$. Une primitive de $x \mapsto \frac{n}{x} - 2x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto n\ln(x) - x^2$. Les solutions de H_n sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda x^n e^{-x^2}$ où λ décrit $\mathbb{R}$. Une primitive de $x \mapsto \frac{n}{x} - 2x$ sur $\mathbb{R}_-^*$ est $x \mapsto n\ln(-x) - x^2$. Les solutions de H_n sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda(-x)^n e^{-x^2}$ où λ décrit $\mathbb{R}$ ou, de manière plus simple, les fonctions $x \mapsto \lambda x^n e^{-x^2}$ où λ décrit encore $\mathbb{R}$.

2. La fonction constante égale à -1 étant clairement une solution particulière de E_n sur $\mathbb{R}$. On en déduit que les solutions de E_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $x \mapsto -1 + \lambda x^n e^{-x^2}$.

3. Supposons dans un premier temps $n = 1$. Soit y une solution de E_1 sur $\mathbb{R}$. Comme y est solution de E_1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$y(x) = \begin{cases} -1 + \lambda x e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -1 + \mu x e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La continuité de y en 0 impose $y(0) = -1$. De plus,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lambda \qquad \text{et} \lim_{x\to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \mu$$

La dérivabilité de y en 0 impose donc $\lambda = \mu$. On a donc $y(x) = \lambda x e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Réciproquement pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \mapsto -1 + \lambda x e^{-x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et solution de E_1 sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de E_1 sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $x \mapsto -1 + \lambda x e^{-x^2}$ où λ décrit $\mathbb{R}$.

Supposons maintenant $n \geqslant 2$. Comme précédemment toute solution y de E_n sur $\mathbb{R}$ est nécessairement de la forme

$$y(x) = \begin{cases} -1 + \lambda x^n e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -1 + \mu x^n e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Réciproquement, si y est de la forme précédente, elle est bien solution de E_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, elle est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}^*-$, elle est continue en 0 puisque $\lim_{0^+} y = \lim_{0^-} y = 0 = y(0)$ et

$$\lim_{x \to 0^+} y'(x) = \lim_{x \to 0^-} y'(x) = 0$$

donc y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en vertu du théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$.

Remarque. Si on ne connaît pas encore le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, on procède «à la main». On constate que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = 0$$

donc y est dérivable en 0 et $y'(0) = 0$. De plus,

$$\lim_{x \to 0^+} y'(x) = \lim_{x \to 0^-} y'(x) = 0 = y'(0)$$

donc y' est continue en 0. Puisque y' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, y' est continue sur $\mathbb{R}$ i.e. y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. ■

On vérifie alors que y est encore solution de E_n en 0 donc elle est solution de E_n sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de E_n sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $x \mapsto \begin{cases} -1 + \lambda x^n e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -1 + \mu x^n e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Partie III – Étude de deux suites

1. On a $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = \frac{3}{e} - 1 > 0$.

2. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_n'(x) = 3(nx^{n-1} - 2x^{n+1})e^{-x^2} = 3x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$$

On en déduit que f_n est strictement croissante sur $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_n(x) = \left(x^2\right)^{\frac{n}{2}} e^{-x^2} - 1$$

donc, par croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = -1$.
Remarquons que puisque $n \geqslant 2$, $1 \in \left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et puisque f_n est strictement croissante sur cet intervalle, $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \geqslant f_n(1) > 0$.
f est strictement monotone et continue sur chacun des deux intervalles $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$. De plus, $f_n(0) < 0$, $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) > 0$ et $\lim_{+\infty} f < 0$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f_n s'annule une unique fois sur chacun des deux intervalles $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$ en deux réels notés respectivement u_n et v_n.
Puisque $f_n(1) > 0$ et que 1 appartient à l'intervalle $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ sur lequel f_n est strictement croissante, $u_n > 1$. Par ailleurs $v_n > \sqrt{\frac{n}{2}} \geqslant 1$ puisque $n \geqslant 2$.

3. D'après la question précédente, $v_n \geqslant \sqrt{\frac{n}{2}}$ pour tout $n \geqslant 2$. Or $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = +\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ par théorème de minoration.

4. a. Par définition, $f_n(u_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$ donc $e^{-u_n^2} = \frac{1}{3u_n^n}$.

   b. $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1}e^{-u_n^2} - 1 = u_n - 1 < 0$.

   c. On sait également que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ et que f_{n+1} est strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ contenant u_n et u_{n+1}. D'où $u_n < u_{n+1}$. Ceci étant valable pour tout $n \geqslant 2$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante.

   d. La suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est également majorée par 1 donc elle converge en vertu du théorème de la limite monotone.

5. a. Évident.

   b. Supposons $l \neq 1$. On a en fait $l < 1$ puisque (u_n) est majorée par 1. Pour tout $n \geqslant 2$, $f_n(u_n) = 0$ et donc $g_n(u_n) = 0$ d'après la question précédente. Ainsi pour tout $n \in\geqslant 2$.

$$0 = \ln 3 + n\ln(u_n) - u_n^2$$

   Puisque $l < 1$, le membre de droite diverge vers $-\infty$, ce qui est absurde.
   On en déduit que $l = 1$.

   c. Pour tout $n \geqslant 2$, $g_n(u_n) = 0$ et donc

$$n\ln(1 + w_n) = u_n^2 - \ln 3$$

   Puisque (w_n) converge vers 0, $n\ln(1 + w_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} nw_n$. Par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty} u_n^2 - \ln 3 = 1 - \ln 3$ donc

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1 - \ln 3}{n}$$

Solution 1.

1. Soit $x \in [0, 1]$. Alors $\sqrt{x} \in [0, 1]$ donc $f(x) = 1 - \sqrt{x} \in [0, 1]$.

2. On procède par récurrence. Tout d'abord, $u_0 \in [0, 1]$. Supposons que $u_n \in [0, 1]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 1]$ d'après la question précédente.

3. f est clairement décroissante sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$. On en déduit que $f \circ f$ est croissante sur $[0, 1]$.

4. Pour $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
& f(x) = x \\
\iff\quad & \sqrt{x} = 1 - x \\
\iff\quad & x = (1 - x)^2 \qquad \text{car les membres de l'égalité précédente sont positifs} \\
\iff\quad & x^2 - 3x + 1 = 0
\end{aligned}$$

   Les racines du trinôme précédent sont $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. La première racine appartient à l'intervalle $[0, 1]$ puisque $1 \leqslant \sqrt{5} \leqslant 3$ mais la seconde racine n'appartient pas à l'intervalle $[0, 1]$ car $\sqrt{5} > 1$.
   Finalement, l'unique point fixe de f sur $[0, 1]$ est $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

5. Puisque $20 \leqslant 25$, $5 \leqslant \frac{25}{4}$ puis $\sqrt{5} \leqslant \frac{5}{2}$ puis $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \geqslant \frac{1}{4} = u_0$.

6. On procède par récurrence. Tout d'abord, $u_0 \leqslant \alpha$. Supposons $u_{2n} \leqslant \alpha$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors par croissance de $f \circ f$ sur $[0, 1]$,

$$f \circ f(u_{2n}) \leqslant f \circ f(\alpha)$$

   c'est-à-dire

$$u_{2n+2} \leqslant \alpha$$

   On en déduit que $u_{2n} \leqslant \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. On a $u_0 = \frac{1}{4}$ puis $u_1 = \frac{1}{2}$ et enfin $u_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Puisque $8 \leqslant 9$, $\frac{1}{2} \leqslant \frac{9}{16}$ puis $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{3}{4}$ et enfin $u_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant \frac{1}{4} = u_0$.
Supposons maintenant que $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de $f \circ f$, $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) \leqslant f \circ f(u_{2n+2}) = u_{2n+4}$. Par récurrence, on a donc $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi (u_{2n}) est croissante. La suite (u_{2n}) est croissante et majorée par α donc elle converge.

8. Soit $x \in [0, 1]$.

$$
\begin{aligned}
& & f \circ f(x) &= x \\
&\iff & 1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}} &= x \\
&\iff & 1 - x &= \sqrt{1 - \sqrt{x}} \\
&\iff & (1 - x)^2 &= 1 - \sqrt{x} && \text{car les membres de l'égalité précédente sont positifs} \\
&\iff & \sqrt{x} &= 1 - (1 - x)^2 \\
&\iff & \sqrt{x} &= x(2 - x) \\
&\iff & x &= x^2(2 - x)^2 && \text{car les membres de l'égalité précédente sont positifs} \\
&\iff & x^2(2 - x)^2 - x &= 0 \\
&\iff & x\left(x(2 - x)^2 - 1\right) &= 0 \\
&\iff & x(x^3 - 4x^2 + 4x - 1) &= 0 \\
&\iff & x(x - 1)(x^2 - 3x + 1) &= 0
\end{aligned}
$$

Or on a vu précédemment que α est la seule racine du trinôme $x^2 - 3x + 1$ dans l'intervalle $[0, 1]$. On en déduit que les points fixes de $f \circ f$ sur $[0, 1]$ sont 0, α et 1.

9. f est continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ donc $f \circ f$ est continue sur $[0, 1]$. De plus, $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ et $u_{2n} \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite (u_{2n}) converge vers un point fixe de $f \circ f$ sur $[0, 1]$, à savoir 0, α ou 1. Or (u_{2n}) est croissante et majorée par α donc $u_0 \leqslant u_{2n} \leqslant \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sa limite ℓ vérifie donc $u_0 \leqslant \ell \leqslant \alpha$. A fortiori, $0 < \ell \leqslant \alpha$. Puisque ℓ est un point fixe de $f \circ f$, $\ell = \alpha$.
Enfin, $u_{2n+1} = f(u_{2n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f est continue sur $[0, 1]$ donc (u_{2n+1}) converge vers $f(\alpha) = \alpha$.
Puisque les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes les deux vers α, la suite (u_n) converge également vers α.