Devoir à la maison n°13

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Mines 2016 MP Maths 2 – Théorème taubérien de Hardy-Littlewood-Karamata

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0,+\infty[$.

I Une intégrale à paramètre

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose, sous réserve d'existence,

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad \mathrm{K} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

1 Montrer que la fonction $\psi : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur I.

2 Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $\mathrm{F}(x)$ est définie.

3 Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et exprimer $\mathrm{F}'(x)$ sous la forme d'une intégrale.

4 En déduire que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $x\mathrm{F}'(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{F}(x) = -\mathrm{K}$.

5 Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on pose $\mathrm{G}(x) = \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{F}(x)$. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{G}(x) = \mathrm{C} - \mathrm{K}\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

6 Déterminer les limites de G en 0 et $+\infty$ et en déduire la valeur de K.

II Etude de deux séries de fonctions

Dans toute cette partie, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-nx}$.

7 Montrer que f et g sont définies et continues sur I.

8 Montrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

9 Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geq1}$ converge.

$\boxed{10}$ Démontrer que pour tout $x > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

$\boxed{11}$ En déduire un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \to 0$. Montrer alors que $g(x)$ est équivalent à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x \to 0$.