Nombres complexes

Solution 1.

1. On a facilement $|4\sqrt{2}(-1+i)| = 4\sqrt{2}|-1+i| = 8$. Si on note θ un argument de $4\sqrt{2}(-1+i)$, on a $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi $\theta \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$.
2. On a $|z_1z_2z_3| = 8|z_1|^3$ car $|z_2| = 2|z_1|$ et $|z_3| = 4|z_1|$. Puisque $|z_1z_2z_3| = 8$, on a $|z_1| = 1$. Notons θ_1, θ_2 et θ_3 des arguments de z_1, z_2 et z_3. On a donc $\theta_1+\theta_2+\theta_3 \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$. De plus, $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{4}$ et $\theta_3 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$. Ainsi $3\theta_1 + \frac{3\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$. On en déduit $\theta_1 \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}}$. Comme z_1 a un argument compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, on peut choisir $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$ puis $\theta_2 = \frac{11\pi}{12}$ et enfin $\theta_3 = \frac{7\pi}{6}$.

Solution 2.

Posons $z = \sqrt{3}+i$. On trouve aisément $\sqrt{3}+i = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$. Les racines carrées de z sont donc $\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{2}}$ et $-\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{2}}$.

Soit $Z = x+iy$ une racine carrée de z. Des relations $Z^2 = z$ et $|Z|^2 = |z|$ on tire $\begin{cases} x^2-y^2 = \sqrt{3} \\ x^2+y^2 = 2 \\ 2xy = 1 \end{cases}$. On en déduit $\begin{cases} x^2 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2} \\ y^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2} \\ 2xy = 1 \end{cases}$.

La dernière équation implique que x et y sont de même signe et donc que $\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}} \\ y = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}} \\ y = -\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}} \end{cases}$. Les racines carrées de z sont donc $\pm\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right)$. Puisque $\frac{\pi}{12} \in [0,\pi]$, $\sin\frac{\pi}{12} \geqslant 0$ et donc

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$$

En identifiant parties réelle et imaginaire, il vient :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Remarque. En remarquant que $2+\sqrt{3} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}$ et que $2-\sqrt{3} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}$, on peut simplifier les expressions précédentes en

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

■

Solution 3.

1. Tout d'abord $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ donc les racines carrées de $1+i$ sont $\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{8}}$ et $-\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{8}} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{9i\pi}{8}}$.
2. Soit maintenant z une racine carrée de $1+i$. Posons $z = x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Puisque $z^2 = 1+i$, on a $x^2-y^2 = 1$ et $2xy = 1$. Par ailleurs, $|z|^2 = |z^2| = |1+i| = \sqrt{2}$ donc $x^2+y^2 = \sqrt{2}$. On en déduit que $x^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ et $y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Puisque $xy = \frac{1}{2} > 0$, $\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} \\ y = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x- = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} \\ y = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{cases}$. Les racines carrées de $1+i$ sont donc $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

3. Puisque $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\frac{\pi}{8} \geqslant 0$. On peut alors identifier les racines carrées de $1+i$ sous forme exponentielle et algébrique. En particulier,

$$\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{8}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

On en déduit que

$$\sqrt[4]{2}\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \sqrt[4]{2}\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

puis que

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

et enfin que

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

4.

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$

5. Puisque $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$,

$$\cos\frac{3\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad \sin\frac{3\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \tan\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2}+1$$

Puisque $\frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8}$,

$$\cos\frac{5\pi}{8} = -\cos\frac{3\pi}{8} = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad \sin\frac{5\pi}{8} = \sin\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \tan\frac{5\pi}{8} = -\tan\frac{3\pi}{8} = -\sqrt{2}-1$$

Puisque $\frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$,

$$\cos\frac{7\pi}{8} = -\cos\frac{\pi}{8} = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \sin\frac{7\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad \tan\frac{7\pi}{8} = -\tan\frac{\pi}{8} = 1-\sqrt{2}$$

Solution 4.

1. $j^3 = 1$, $1+j+j^2 = (1-j^3)/(1-j)0$, $1+j^2+j^4 = 1+j^2+j = 0$, $j^{-1} = j^2 = \bar{j} = 1/j$.
2. On vérifie que $(1-i)^2 = -2i$ et $(1+i)^2 = 2i$ et on en déduit que

$$\frac{1+j}{(1-i)^2} + \frac{1-j}{(1+i)^2} = 2ij.$$

Solution 5.

1. On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{2-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i} = \frac{1}{7}(4\sqrt{3}+i),$$

$$\frac{(2+i)(3+2i)}{2-i} = \frac{1}{5}(1+18i),$$

$$\frac{3+4i}{(2+3i)(4+i)} = \frac{71-22i}{221}.$$

2. **a.** $\left(-2+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)\right)/4$.
   b. $e^{i(2\pi/3-\pi/6)}/2 = e^{i\pi/2}/2 = i$.
   c. $2e^{i(2\pi/3+\pi/6)} = 2e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3}+i$.
   d. $e^{i4\pi/3} + e^{-i\pi/3}/4 = -(3+5i\sqrt{3})/8$.
   e. $1 + e^{-i\pi/2}/8 = 1 - i/8$.

Solution 6.

1. Il faut commencer par représenter z_1 et z_2 sous forme polaire : $z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/6}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. On trouve $z_1/z_2 = e^{i(\pi/6-\pi/4)} = e^{-i\pi/12}$.

2. On cherche la représentation cartésienne de $e^{7i\pi/12} = ie^{i\pi/12}$. D'après la question précédente,

$$e^{i\pi/12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}.$$

Donc

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \quad \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

3. La forme polaire, au sens strict, est $\rho e^{i\theta}$ où θ est un réel et ρ, un réel *strictement positif*. En pratique, l'intérêt de cette forme est de représenter un nombre complexe sous la forme du *produit* d'un nombre réel par un nombre complexe de module 1 — peu importe que le facteur réel soit ou non positif.

   a.

$$\begin{aligned} 1 - ie^{ix} &= 1 + e^{i(x-\pi/2)} \\ &= 2\cos\frac{2x-\pi}{4}e^{i(x/2-\pi/4)}. \end{aligned}$$

   b. Expression définie pour $x \neq \pi/2 \mod \pi$.

$$\frac{1}{1+i\tan x} = \frac{\cos x}{\cos x + i\sin x} = \cos x e^{ix}.$$

   c. Expression définie pour $x \neq 0 \mod 2\pi$. On factorise par l'angle moitié :

$$\frac{1+\cos x + i\sin x}{1-\cos x - i\sin x} = \frac{1+e^{ix}}{1-e^{ix}} = i\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}.$$

   d. Expression définie lorsque $x+y \neq \pi \mod 2\pi$. On factorise par l'angle moitié :

$$\begin{aligned} \frac{e^{ix}+e^{iy}}{1+e^{i(x+y)}} &= \frac{e^{i(x+y)/2}}{e^{i(x+y)/2}} \cdot \frac{\cos(x-y)/2}{\cos(x+y)/2} \\ &= \frac{\cos(x-y)/2}{\cos(x+y)/2}. \end{aligned}$$

   e. Comme $\cos x$ et $\sin x$ ne peuvent être nuls en même temps, le dénominateur n'est jamais nul.
   Le numérateur est égal à $2e^{i\pi/3}e^{ix}$, le dénominateur a

$$(1+i)e^{-ix} = \sqrt{2}e^{i\pi/4}e^{-ix},$$

   donc le quotient est égal à

$$\sqrt{2}e^{i\pi/12}e^{2ix}.$$

Solution 7.

1. **a.**
$$\left(\frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}\right)^n = 2^{n/2}e^{in\pi/12}.$$

   b. On factorise par l'angle moitié :
$$\frac{e^{-ni\pi/4}-1}{e^{ni\pi/4}-1} = -e^{-ni\pi/4}.$$

   c. $2^{n/2}e^{-in\pi/12}$.

   d. Comme $1+e^{i\theta} = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$,
$$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}e^{ni\theta/2}.$$

   e. Comme $1\pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$, en factorisant par l'angle moitié,
$$\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{i} = 2^{(n+2)/2}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

2. Pour tout entier naturel n,
$$\omega^n = (\sqrt{3}+i)^n = 2^n e^{ni\pi/6}$$
donc ω^n est réel si, et seulement si, n est un multiple de 6 et ω^n est imaginaire pur si, et seulement si,
$$\exists\, k\in\mathbb{N},\quad \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2}+k\pi$$
c'est-à-dire
$$\exists\, k\in\mathbb{N},\quad n = 3+6k.$$

Solution 8.

1. On a
$$\begin{aligned} z_\theta &= -\sin(2\theta)+i(\cos(2\theta)+1) = i+ie^{2i\theta}\\ &= 2\cos(\theta)ie^{i\theta} = 2\cos(\theta)e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}\end{aligned}$$

   On aboutit donc à la discussion suivante.

   ► si $\theta\in\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, $z_\theta = 0$.

   ► si $\theta\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\pi/2+2k\pi,\pi/2+2k\pi[$, on a
$$|z_\theta| = 2\cos(\theta)\ \text{ et }\ \arg(z_\theta)\equiv\theta+\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

   ► si $\theta\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi/2+2k\pi,3\pi/2+2k\pi[$, on a
$$|z_\theta| = -2\cos(\theta)\ \text{ et }\ \arg(z_\theta)\equiv\theta+\frac{3\pi}{2}\ [2\pi].$$

2. L'égalité $|z_\theta| = |z_\theta - 1|$ est clairement équivalente à $|z_\theta|^2 = |z_\theta - 1|^2$, c'est-à-dire
$$|z_\theta|^2 = |z_\theta|^2 - 2\operatorname{Re}(z_\theta) + 1,$$
ce qui équivaut à $2\operatorname{Re}(z_\theta) = 1$, c'est-à-dire
$$\sin(2\theta) = -\frac{1}{2} = \sin(-\pi/6).$$
Cette équation est équivalente à
$$2\theta \in -\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } 2\theta \in \frac{7\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}.$$
L'ensemble des solutions est donc
$$\mathcal{S} = \left(-\frac{\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right).$$

Solution 9.

On a $\sqrt{3} + i = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$ et $i - 1 = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$. Ainsi
$$v = \frac{2e^{\frac{i\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{-\frac{7i\pi}{12}}.$$
Comme $2002 = 24 \times 83 + 10$, on déduit de la formule de Moivre que
$$v^{2002} = 2^{1001}e^{-\frac{70i\pi}{12}} = 2^{1001}e^{-i\pi\frac{3\times 24-2}{12}} = 2^{1001}e^{i\frac{\pi}{6}} = 2^{1000}\sqrt{3} + 2^{1000}i$$

Solution 10.

- On a $\omega = 2e^{i\pi/6}$ donc $\omega^n = 2^n e^{in\pi/6}$. Ainsi $\omega^n \in \mathbb{R}$ *si et seulement si* $\sin(n\pi/6) = 0$, c'est-à-dire il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\pi/6 = k\pi$, ie n est de la forme
$$6k\ ,\ k \in \mathbb{Z}.$$
Remarque. L'ensemble des solutions est donc $6\mathbb{Z}$. ■
- De même , $\omega^n \in i\mathbb{R}$ *si et seulement si* $\cos(n\pi/6) = 0$, ie il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\pi/6 = \pi/2 + k\pi$, c'est-à-dire n est de la forme
$$3 + 6k\ ,\ k \in \mathbb{Z}.$$
Remarque. L'ensemble des solutions est donc $3 + 6\mathbb{Z}$. ■

Solution 11.

1. L'équation équivaut à $5\operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z) = 4 - 3i$. L'unique solution de cette équation est donc $\frac{4}{5} + 3i$.
2. L'équation équivaut à $\operatorname{Re}(z) + 5i\operatorname{Im}(z) = -5 + i$. L'unique solution de cette équation est donc $5 + \frac{15}{5}i$.

Solution 12.

Posons $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$.

1. $Z \in \mathbb{R} \iff \overline{Z} = -Z \iff \dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} = -\dfrac{z+1}{z-1} \iff (\overline{z}+1)(z-1) = (z+1)(\overline{z}-1) \iff |z|^2 = 1 \iff z \in \mathbb{U}$.
2. $Z \in \mathbb{U} \iff Z\overline{Z} = 1 \iff \dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}\dfrac{z+1}{z-1} = 1 \iff (\overline{z}+1)(z+1) = (\overline{z}-1)(z-1) \iff z+\overline{z} = 0 \iff z \in i\mathbb{R}$.

Solution 13.

1. Ecrivons $a = e^{i\alpha}$ et $b = e^{i\beta}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{1+ab} &= \frac{e^{i(\alpha+\beta)/2}}{e^{i(\alpha+\beta)/2}} \times \frac{2\cos\big((\alpha+\beta)/2\big)}{2\cos\big((\alpha-\beta)/2\big)}\\ &= \frac{\cos\big((\alpha+\beta)/2\big)}{\cos\big((\alpha-\beta)/2\big)}\end{aligned}$$

   D'où le résultat.

2. Ecrivons $a = e^{i\alpha}$ et $b = e^{i\beta}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{z + abe^{i(\alpha+\beta)} - e^{i\alpha} - e^{-i\beta}}{e^{i\alpha} - e^{i\beta}}\\ &= \frac{e^{i(\alpha+\beta)/2}}{e^{i(\alpha+\beta)/2}}\\ &\times \frac{ze^{-i(\alpha+\beta)/2} + \overline{z}e^{i(\alpha+\beta)/2} - 2\cos\big((\alpha-\beta)/2\big)}{2i\sin\big((\alpha-\beta)/2\big)}\end{aligned}$$

   Ainsi, en posant $u = ze^{-i(\alpha+\beta)/2}$,

$$\Lambda = -\frac{\operatorname{Re}(u) - \cos\big((\alpha-\beta)/2\big)}{\sin\big((\alpha-\beta)/2\big)} \times i,$$

   d'où le résultat.

Solution 14.

1.

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta+\theta)\\ &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta\\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

2. D'après l'énoncé, on a $z = e^{i\theta}$. De plus,

$$\begin{aligned}|z^3 - z + 2|^2 &= \big(z^3 - z + 2\big)\overline{(z^3 - z + 2)}\\ &= |z|^6 + |z|^2 + 4 - 2(z+\overline{z}) - |z|^2(z^2+\overline{z}^2) + 2(z^3+\overline{z}^3)\\ &= 6 - 2(z+\overline{z}) - (z^2+\overline{z}^2) + 2(z^3+\overline{z}^3) \text{car } |z| = 1\\ &= 6 - 2(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) - (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 2(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) \qquad \text{car } z = e^{i\theta}\\ &= 6 - 4\cos\theta - 2\cos(2\theta) + 4\cos(3\theta) \qquad \text{en vertu d'une relation d'Euler}\\ &= 6 - 4\cos\theta - 2(2\cos^2\theta - 1) + 4(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)\\ &= 8 - 16\cos\theta - 4\cos^2\theta + 16\cos^3\theta\\ &= 4f(\cos\theta)\end{aligned}$$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 12x^2 - 2x - 4 = 2(2x+1)(3x-2)$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\frac{2}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Puisque $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$, on a en vertu de la première question

$$\max_{z \in \mathbb{U}} \varphi(z) = \max_{\theta \in \mathbb{R}} 2\sqrt{f(\cos\theta)}$$

Mais puisque $\operatorname{Im}\cos = [-1, 1]$,

$$\max_{z \in \mathbb{U}} \varphi(z) = \max_{x \in [-1,1]} 2\sqrt{f(x)}$$

La question précédente nous renseigne sur les variations de f sur $[-1, 1]$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\frac{2}{27}$	$\nearrow$	1

On peut en déduire que

$$\max_{z \in \mathbb{U}} \varphi(z) = 2\sqrt{\frac{13}{4}} = \sqrt{13}$$

Ce maximum est atteint en un élément de $\mathbb{U}$ dont un argument θ est tel que $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ i.e. tel que $\theta \equiv \pm\frac{2\pi}{3}[2\pi]$. On en déduit donc que le maximum de φ est atteint en j et j^2.

Solution 15.

1. Si $z_0 \in \mathbb{R}_+$, alors on vérifie par récurrence que $z_n = z_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci est évident lorsque $n = 0$. Supposons-le vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_0 + |z_0|)$. Mais comme $z_0 \in \mathbb{R}_+$, $|z_0| = z_0$ et donc $z_{n+1} = z_0$. Par récurrence $z_n = z_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si $z_0 \in \mathbb{R}_-$, alors $|z_0| = -z_0$ de sorte que $z_1 = 0$. Une récurrence évidente montre alors que $z_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Il s'agit encore d'une récurrence. Par hypothèse, $z_0 \notin \mathbb{R}_-$.
Supposons que $z_n \notin \mathbb{R}_-$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On raisonne par l'absurde en supposant que $z_{n+1} \in \mathbb{R}_-$. Alors $z_n = 2z_{n+1} - |z_n| \in \mathbb{R}_-$ car $|z_n| \in \mathbb{R}_+$. Ceci contredit le fait que $z_n \notin \mathbb{R}_-$. Par conséquent $z_{n+1} \notin \mathbb{R}_-$.
Finalement, $z_n \notin \mathbb{R}_-$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

3. Si un complexe n'appartient pas à $\mathbb{R}_-$, son argument principal ne peut être égal à π : il appartient donc à $]-\pi,\pi[$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $z_n \notin \mathbb{R}_-$, $z_n \neq 0$ donc cela a un sens de parler de son argument principal. La question précédente montre également que $\theta_n \in]-\pi,\pi[$. Par ailleurs, par la méthode de l'arc-moitié

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(r_n e^{i\theta_n} + r_n\right) = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{\frac{i\theta_n}{2}}$$

Puisque $\theta_n \in]-\pi,\pi[$, $\frac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) > 0$. Ainsi

$$r_{n+1} = \left|r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{\frac{i\theta_n}{2}}\right| = r_n \left|\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\right| = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$$

car $r_n \geqslant 0$ et $\left|e^{\frac{i\theta_n}{2}}\right| = 1$. On en déduit également que $\frac{\theta_n}{2}$ est un argument de z_{n+1} et puisque $\frac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\subset]-\pi,\pi]$, c'est son argument principal i.e. $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.

5. (θ_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La limite de la suite (θ_n) est nulle puisque $\frac{1}{2} \in [0,1[$.

6. Il s'agit à nouveau d'une récurrence. L'égalité à montrer est vraie pour $n = 0$ puisqu'un produit indexé sur l'ensemble vide vaut 1. Supposons-la vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = r_0 \left[\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)\right] \cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n+1}}\right) = r_0 \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$$

Par récurrence, l'égalité à démontrer est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. On sait que pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ et donc $\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2\sin(x)}$ pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$.

8. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\theta_0}{2^n} \in \left]-\frac{\pi}{2^n},\frac{\pi}{2^n}\right[\subset]-\pi,\pi[$. De plus, $z_0 \notin \mathbb{R}_+$ donc $\theta_0 \neq 0$ et donc $\frac{\theta_0}{2^n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $\frac{\theta_0}{2^n} \notin \pi\mathbb{Z}$.
D'après les deux questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$r_n = r_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{\theta_0}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)} = \frac{r_0}{2^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{\theta_0}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)} = \frac{r_0 \sin(\theta_0)}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}$$

car on remarque un produit télescopique.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = \theta_0 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}{\frac{\theta_0}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta_0$$

car $\lim_{n\to+\infty} \frac{\theta_0}{2^n} = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Puisque $\theta_0 \neq 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{r_0 \sin(\theta_0)}{\theta_0}$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \theta_n = 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \frac{r_0 \sin(\theta_0)}{\theta_0}$$

SOLUTION 16.

Comme $|a| = |b| = |c| = 1$, on a

$$a = \frac{1}{\overline{a}},\quad b = \frac{1}{\overline{b}} \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{\overline{c}},$$

d'où

$$a+b+c = \frac{1}{\overline{a}} + \frac{1}{\overline{b}} + \frac{1}{\overline{c}} = \frac{\overline{bc+ac+ab}}{\overline{abc}}$$

et donc

$$\begin{aligned}|a+b+c| &= \left|\frac{\overline{bc+ac+ab}}{\overline{abc}}\right| = \frac{|ab+bc+ac|}{|abc|} \\ &= |ab+bc+ac|\end{aligned}$$

car $|abc| = 1$.

Solution 17.

Soit z tel que

$$|z| = |1/z| = |1+z|.$$

Puisque le module d'un inverse est égal à l'inverse du module, on a alors $|z|^2 = 1$,donc $|z| = 1$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. On a donc

$$|1+z|^2 = (1+e^{i\theta})(1+e^{-i\theta}) = 2 + 2\cos(\theta),$$

et donc $|1+z| = 1$ *si et seulement si*

$$\cos(\theta) = -1/2$$

et finalement les solutions sont

$$j \ \text{ et } \ j^2.$$

Solution 18.

Soient α, β et γ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$a = e^{i\alpha}, \ \ b = e^{i\beta} \quad \text{et} \quad c = e^{i\gamma}.$$

Notons

$$\alpha = \frac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2}.$$

On a

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{e^{i\alpha}\left[e^{i(\gamma+\beta)/2}(e^{i(\gamma-\beta)/2} - e^{-i(\gamma-\beta)/2})\right]^2}{e^{i\beta}\left[e^{i(\gamma+\alpha)/2}(e^{i(\gamma-\alpha)/2} - e^{-i(\gamma-\alpha)/2})\right]^2} \\ &= \frac{e^{i(\alpha+\gamma+\beta)}\left[2i\sin((\gamma-\beta)/2)\right]^2}{e^{i(\beta+\gamma+\alpha)}\left[2i\sin((\gamma-\alpha)/2)\right]^2} \\ &= \left(\frac{\sin((\gamma-\beta)/2)}{\sin((\gamma-\alpha)/2)}\right)^2\end{aligned}$$

d'où le résultat.
Remarque. On déduit sans peine de ce calcul le théorème de l'angle au centre. ■

Solution 19.

$$\begin{aligned}|z+z'|^2+|z-z'|^2 &= (z+z')(\overline{z}+\overline{z'})+(z-z')(\overline{z}-\overline{z'})\\ &= 2z\overline{z}+2z'\overline{z'}=2(|z|^2+|z'|^2)\ .\end{aligned}$$

Solution 20.

1. On vérifie que 0 est solution et $z\in\mathbb{C}^*$ est solution de l'équation *si et seulement si* $\begin{cases}\left|z^2\right|=|\overline{z}|\\ \arg\left(z^2\right)\equiv\arg\left(\overline{z}\right)[2\pi]\end{cases}$, autrement dit *si et seulement si* $\begin{cases}|z|=1\\ \arg(z)\equiv 0\left[\dfrac{2\pi}{3}\right]\end{cases}$. Les solutions sont donc 0, 1, $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2=e^{\frac{4i\pi}{3}}$. On peut également écrire que l'ensemble des solutions est $\mathbb{U}_3\cup\{0\}$.

2. On vérifie que 0 est solution et $z\in\mathbb{C}^*$ est solution de l'équation *si et seulement si* $\begin{cases}\left|z^3\right|=|\overline{z}|\\ \arg\left(z^3\right)\equiv\arg\left(\overline{z}\right)[2\pi]\end{cases}$, autrement dit *si et seulement si* $\begin{cases}|z|=1\\ \arg(z)\equiv 0\left[\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}$. Les solutions sont donc 0, 1, i, -1 et $-i$. On peut également écrire que l'ensemble des solutions est $\mathbb{U}_4\cup\{0\}$.

3. On vérifie que 0 est solution et $z\in\mathbb{C}^*$ est solution de l'équation *si et seulement si* $\begin{cases}\left|z^2\right|=|2\overline{z}|\\ \arg\left(z^3\right)\equiv\arg\left(2\overline{z}\right)[2\pi]\end{cases}$, autrement dit *si et seulement si* $\begin{cases}|z|=2\\ \arg(z)\equiv 0\left[\dfrac{2\pi}{3}\right]\end{cases}$. Les solutions sont donc 0, 2, $2j=2e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $2j^2=e^{\frac{4i\pi}{3}}$. On peut également écrire que l'ensemble des solutions est $2\mathbb{U}_3\cup\{0\}$.

4. On vérifie que 0 est solution et $z\in\mathbb{C}^*$ est solution de l'équation *si et seulement si* $\begin{cases}\left|z^2\right|=\left|-\overline{z^2}\right|\\ \arg\left(z^2\right)\equiv\arg\left(-\overline{z^2}\right)[2\pi]\end{cases}$, autrement dit *si et seulement si* $2\arg(z)\equiv\pi-2\arg(z)[2\pi]$ ou encore $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des complexes dont les parties réelles et imaginaires sont égales en valeur absolue.

5. $z\in\mathbb{C}^*$ est solution de l'équation *si et seulement si* $\begin{cases}\left|z^4\right|=\left|\dfrac{32}{\overline{z}}\right|\\ \arg\left(z^4\right)\equiv\arg\left(\dfrac{32}{\overline{z}}\right)[2\pi]\end{cases}$, autrement dit *si et seulement si* $\begin{cases}|z|=2\\ \arg(z)\equiv 0\left[\dfrac{2\pi}{3}\right]\end{cases}$. Les solutions sont donc 0, 2, $2j=2e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $2j^2=e^{\frac{4i\pi}{3}}$. On peut également écrire que l'ensemble des solutions est $2\mathbb{U}_3\cup\{0\}$.

6. Pour $z\in\mathbb{C}^*$, l'équation équivaut à $z^2\overline{z^2}=1$ ou encore $|z|^4=1$. L'ensemble des solutions est donc $\mathbb{U}$.

7. Pour $z\in\mathbb{C}^*$, l'équation équivaut à $z^3\overline{z^3}=-1$ ou encore $|z|^6=-1$. L'ensemble des solutions est donc vide.

Solution 21.

1. Le discriminant est égal à
$$(5-2i)^2 - 20(1-i) = 1$$
et les racines sont donc
$$-2+i, \quad -3+i.$$

2. Le discriminant est égal à $-8+6i$, dont les racines carrées complexes sont $\pm(1+3i)$. On en déduit les deux racines :
$$1-2i, \quad 2+i.$$

3. On remarque que
$$z^4 - z^3 - z + 1 = (z-1)(z^3-1)$$
donc les racines sont 1 (racine double), j et j^2.

4. Il s'agit de calculer les racines quatrièmes du nombre
$$-2+i\sqrt{12} = 4e^{i2\pi/3}.$$
Comme les racines quatrièmes de l'unité sont 1, -1, i et $-i$, ce sont
$$\pm\sqrt{2}e^{i\pi/6} \quad \text{et} \quad \pm i\sqrt{2}e^{i\pi/6}.$$

Solution 22.

Si z_0 est une solution de
$$z^2 + 8|z| - 3 = 0,$$
alors
$$z^2 = -8|z| + 3 \in \mathbb{R},$$
donc z est réel ou imaginaire pur.

Si $z \in \mathbb{R}_+$, alors l'équation devient
$$z^2 + 8z - 3 = 0,$$
dont l'unique solution positive est $-4+\sqrt{19}$.

Si $z \in \mathbb{R}_-$, l'équation devient
$$z^2 - 8z - 3 = 0,$$
dont l'unique solution négative est $4-\sqrt{19}$.

Si $z = i\lambda \in i\mathbb{R}_+$, l'équation devient
$$-\lambda^2 + 8\lambda - 3 = 0,$$
dont les solutions (positives) sont $4 \pm \sqrt{13}$.

Si $z = i\lambda \in i\mathbb{R}_-$, l'équation devient
$$-\lambda^2 - 8\lambda - 3 = 0,$$
dont les solutions (négatives) sont $-4 \pm \sqrt{13}$.

Solution 23.

Rien à signaler ! L'exercice est roboratif : calcul du discriminant Δ, recherche de ses racines carrées $\pm\delta$ puis les formules bien connues …

1. $\delta = \pm(16-2i)$, solutions $2+3i$ et $1-2i$

2. $\delta = \pm(-1+2i)$, solutions $-3-2i$ et $-1-i$

3. $\delta = \pm(5-4i)$, solutions $2i$ et $5-2i$

4. $\delta = \pm 26(1+i)$, solutions $2-i$ et $-2+5i$
5. $e^{i\theta}$, $je^{i\theta}$, $j^2e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$, $je^{-i\theta}$, $j^2e^{-i\theta}$

Solution 24.

1. Puisque 0 n'est pas solution , l'équation est équivalente à

$$\left(\frac{z+i}{z}\right)^3 = -i = i^3 ,$$

ainsi les solutions vérifient

$$\frac{z+i}{z} = ij^k ,$$

avec $k = 0$, 1 ou 2 ; d'où les solutions ,

$$\frac{1-i}{2}, -\frac{1+i\left(2+\sqrt{3}\right)}{2\left(2+\sqrt{3}\right)}, -\frac{1+i\left(2-\sqrt{3}\right)}{2\left(2-\sqrt{3}\right)}.$$

2. Puisque -1 n'est pas solution , l'équation est équivalente à

$$\frac{z^5+1}{z+1} = 0 .$$

Remarque. Le lecteur aura reconnu la formule de la série géométrique ! ■

Les solutions sont donc les racines 5-ièmes de -1 *sauf* -1 :

$$e^{i\pi/5}, e^{3i\pi/5}, e^{7i\pi/5}, e^{9i\pi/5}.$$

Solution 25.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(ix) = (ix)^3 - (16-i)(ix)^2 + (89-16i)ix + 89i = 16x^2 + 16x + i(-x^3 - x^2 + 89x + 89)$. Donc $f(ix) = 0$ *si et seulement si* $16x^2 + 16x = 0$ et $-x^3 - x^2 + 89x + 89$. La première équation admet 0 et -1 pour solution et on voit que -1 est également solution de la seconde équation mais que 0 ne l'est pas. On en déduit que $-i$ est l'unique solution imaginaire pure de l'équation $f(z) = 0$.

2. La question précédente nous montre que le polynôme $f(z)$ peut se factoriser par $z+i$. On trouve $f(z) = (z+i)(z^2 - 16z + 89)$. Les racines de $z^2 - 16z + 89$ sont $8+5i$ et $8-5i$. Les solutions de $f(z) = 0$ sont donc $-i$, $8+5i$ et $8-5i$.

3. Notons A le point d'affixe $-i$, B le point d'affixe $8+5i$ et C le point d'affixe $8-5i$.

$$AB = |8+6i| = 10 \qquad AC = |8-4i| = 2\sqrt{13} \qquad BC = |10i| = 10$$

On en déduit que le triangle ABC est isocèle en B.

Solution 26.

1. On applique la méthode de l'arc moitié.

$$
\begin{aligned}
\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{i\theta}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}}\right)} \\
&= \frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} && \text{d'après les relations d'Euler} \\
&= i\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
$$

2. On remarque que 1 n'est pas solution donc on suppose $z \neq -1$.

$$
\begin{aligned}
& (z-1)^5 = (z+1)^5 \\
\iff & \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 = 1 \\
\iff & \exists\omega \in \mathbb{U}_5,\ \frac{z-1}{z+1} = \omega \\
\iff & \exists\omega \in \mathbb{U}_5,\ (z-1) = \omega(z+1) \\
\iff & \exists\omega \in \mathbb{U}_5,\ z(1-\omega) = 1+\omega \\
\iff & \exists\omega \in \mathbb{U}_5,\ z = \frac{1+\omega}{1-\omega} \\
\iff & \exists k \in [\![1,4]\!],\ z = \frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{5}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{5}}} && \text{car on ne peut avoir } \omega = 1 \\
\iff & \exists k \in [\![1,4]\!],\ z = i\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{5} && \text{d'après la question précédente}
\end{aligned}
$$

L'ensemble des solutions est donc

$$
\left\{i\operatorname{cotan}\frac{\pi}{5}, i\operatorname{cotan}\frac{2\pi}{5}, i\operatorname{cotan}\frac{3\pi}{5}, i\operatorname{cotan}\frac{4\pi}{5}\right\}
$$

Solution 27.

1. On applique la méthode de l'arc moitié.

$$
\begin{aligned}
\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{i\theta}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}}\right)} \\
&= \frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} && \text{d'après les relations d'Euler} \\
&= i\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
$$

2. On remarque que 1 n'est pas solution donc on suppose $z \neq -1$.

$$\begin{aligned}
& (z-1)^5 = (z+1)^5 \\
\iff & \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 = 1 \\
\iff & \exists \omega \in \mathbb{U}_5,\ \frac{z-1}{z+1} = \omega \\
\iff & \exists \omega \in \mathbb{U}_5,\ (z-1) = \omega(z+1) \\
\iff & \exists \omega \in \mathbb{U}_5,\ z(1-\omega) = 1+\omega \\
\iff & \exists \omega \in \mathbb{U}_5,\ z = \frac{1+\omega}{1-\omega} \\
\iff & \exists k \in [\![1,4]\!],\ z = \frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{5}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{5}}} && \text{car on ne peut avoir } \omega = 1 \\
\iff & \exists k \in [\![1,4]\!],\ z = i \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{5} && \text{d'après la question précédente}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ i \operatorname{cotan} \frac{\pi}{5}, i \operatorname{cotan} \frac{2\pi}{5}, i \operatorname{cotan} \frac{3\pi}{5}, i \operatorname{cotan} \frac{4\pi}{5} \right\}$$

On peut également résoudre l'équation en développant

$$\begin{aligned}
& (z-1)^5 = (z+1)^5 \\
\iff & z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10z^2 + 5z + 1 = z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1 \\
\iff & 5z^4 + 10z^2 + 1 = 0
\end{aligned}$$

En posant $Z = z^2$, cette dernière équation équivaut à $5Z^2 + 10Z + 1$ dont les solutions sont $\frac{-5+2\sqrt{5}}{5}$ et $-\frac{5+2\sqrt{5}}{5}$. Le solutions de l'équation initiale sont donc les racines carrées *complexes* de ces deux réels négatifs. L'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{ i\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}, -i\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}, i\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}, -i\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \right\}$$

La fonction cotan est strictement décroissante sur $]0, \pi[$ puisque sa dérivée est $-\frac{1}{\sin^2}$. On a donc

$$\operatorname{cotan} \frac{\pi}{5} > \operatorname{cotan} \frac{2\pi}{5} > \operatorname{cotan} \frac{3\pi}{5} > \operatorname{cotan} \frac{4\pi}{5}$$

Par ailleurs, puisque $\frac{5-2\sqrt{5}}{5} < \frac{5+2\sqrt{5}}{5}$, on a par stricte croissance de la racine carrée :

$$-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} < -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} < \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} < \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotan} \frac{\pi}{5} &= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \\
\operatorname{cotan} \frac{2\pi}{5} &= \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \\
\operatorname{cotan} \frac{3\pi}{5} &= -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \\
\operatorname{cotan} \frac{4\pi}{5} &= -\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}
\end{aligned}$$

Solution 28.

1. Les solutions de l'équation
$$X^3+X^2+X+1=\frac{X^4-1}{X-1}=0$$
sont -1, i et $-i$.

   L'unique solution de $(z-i)/(z+i)=-1$ est $z=0$. L'unique solution de $(z-i)/(z+i)=i$ est $z=-1$. L'unique solution de $(z-i)/(z+i)=-i$ est $z=1$.

   Les solutions sont donc 0, -1 et 1.

2. Les solutions de l'équation
$$X^3+\frac{1}{X^3}=0$$
sont les racines sixièmes de -1, soit
$$e^{i\pi/6}e^{ik\pi/3}=e^{i(2k+1)\pi/6},\quad 0\leqslant k\leqslant 5.$$
Pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$, l'équation
$$\frac{z+1}{z-1}=\lambda$$
n'admet de solution que si $\lambda\neq-1$ et dans ce cas, son unique solution est $z=(\lambda+1)/(\lambda-1)$. Les solutions de l'équation initiale sont donc
$$-i\cot\frac{(2k+1)\pi}{12},\quad 0\leqslant k\leqslant 5.$$

3. Les racines sont les solutions de
$$\frac{1+iz}{1-iz}=e^{i(2k+1)\pi/n},$$
où l'entier k est compris entre 0 et $n-1$.

   Pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$, l'équation
$$\frac{1+u}{1-u}=\lambda$$
n'admet de solution que si $\lambda\neq-1$ et dans ce cas, son unique solution est $u=(\lambda-1)/(\lambda+1)$.

   Si n est pair, -1 n'est pas une racine n-ième de -1, donc les solutions de l'équation initiale sont
$$\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n},\quad 0\leqslant k\leqslant n-1.$$
En revanche, si n est impair, -1 est une racine n-ième de -1, donc les solutions de l'équation initiale sont encore
$$\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n},$$
mais avec $0\leqslant k\leqslant n-1$ et $k\neq(n-1)/2$: il n'y a que $n-1$ solutions.

Solution 29.

1. Le nombre $z\in\mathbb{C}$ vérifie l'equation *si et seulement si* il existe $k\in[\![0,n-1]\!]$ tel que $\frac{z+1}{z-1}=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, c'est-à-dire tel que
$$\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)z=-\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$
Cette dernière équation n'admet de solution que lorsque k est non nul. Ainsi z est solution de l'équation initiale *si et seulement si* il existe $k\in[\![1,n-1]\!]$ tel que
$$z=-\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}=\frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{i\sin\frac{k\pi}{n}}=-i\,\mathrm{cotan}\,\frac{k\pi}{n}$$
après passage à l'arc-moitié.

   Remarque. Il y a $n-1$ racines *distinctes* puisque la fonction cotangente est *strictement* decroissante sur l'intervalle $]0,\pi[$. ■

2. On remarque que $z \in \mathbb{C}$ verifie l'equation *si et seulement si* $-iz$ est solution de l'équation de la question précédente. Les racines sont donc les cotan $\frac{k\pi}{n}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

3. Le nombre $z \in \mathbb{C}$ vérifie l'equation *si et seulement si* il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que

$$\frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{i\theta}$$

c'est-à-dire

$$\left(1 - e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right) z = -\left(1 + e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$$

Puisque $\theta \not\equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n}\right]$, $\theta + \frac{2k\pi}{n} \not\equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n}\right]$ et a fortiori $\theta + \frac{2k\pi}{n} \not\equiv 0[2\pi]$. Ainsi z est solution de l'équation *si et seulement si* il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que

$$z = -\frac{1 + e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)}}{1 - e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)}} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\theta}{2}\right)}{i \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\theta}{2}\right)} = -i \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\theta}{2}\right)$$

après passage à l'arc-moitié.

4. En posant $A = \frac{z+1}{z-1}$, l'équation est équivalente à

$$A^n + \frac{1}{A^n} = 2\cos(n\theta)$$

En posant $B = A^n$, l'équation est équivalente à

$$B^2 - 2\cos(n\theta)B + 1 = 0$$

de discriminant $-4\sin^2(n\theta)$ et donc de solutions $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$.
Ainsi $z \in \mathbb{C}$ est solution de l'équation initiale *si et seulement si*

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{ni\theta} \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{-ni\theta}$$

Lorsque $\theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n}\right]$, on en déduit via la première question que les solutions sont les $-i \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{n}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Lorsque $\theta \not\equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n}\right]$, on en déduit via la troisième question que les solutions sont les $-i \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\theta}{2}\right)$ et les $-i \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\theta}{2}\right)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Solution 30.

1. On remarque que

$$\begin{aligned} & z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0 \\ \iff & (z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta}) = 0 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$ sont donc $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, ces deux solutions étant confondues lorsque $\theta \equiv -\theta[2\pi]$ i.e. lorsque $\theta \equiv 0[\pi]$.
Plus précisément, l'unique solution est 1 lorsque $\theta \equiv 0[2\pi]$ et -1 lorsque $\theta \equiv \pi[2\pi]$.

2. D'après la première question, $z^{2n} - 2z^n \cos(n\theta) + 1 = 0$ *si et seulement si* $z^n = e^{ni\theta}$ ou $z^n = e^{-in\theta}$. Les solutions de l'équation $z^{2n} - 2z^n \cos(n\theta) + 1 = 0$ sont donc les racines $n^{\text{èmes}}$ de $e^{ni\theta}$ et $e^{-ni\theta}$, à savoir les complexes $e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ et $e^{-i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$.
Lorsque $n\theta \equiv 0[2\pi]$ i.e. lorsque $\theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n}\right]$, les solutions de l'équation $z^{2n} - 2z^n \cos(n\theta) + 1 = 0$ sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de 1 tandis que lorsque $n\theta \equiv \pi[2\pi]$ i.e. lorsque $\theta \equiv \frac{\pi}{n} \left[\frac{2\pi}{n}\right]$, ce sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de -1. Dan ces deux cas, les solutions sont donc au nombre de n.
Lorsque $\theta \not\equiv 0 \left[\frac{\pi}{n}\right]$, alors $e^{ni\theta} \neq e^{-ni\theta}$: les racines $n^{\text{èmes}}$ de $e^{ni\theta}$ sont donc distinctes des racines $n^{\text{èmes}}$ de $e^{-ni\theta}$. L'équation $z^{2n} - 2z^n \cos(n\theta) + 1 = 0$ possède donc $2n$ solutions.

Solution 31.

Manifestement, i n'est pas solution de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$. Supposons donc $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Alors

$$
\begin{aligned}
& (z+i)^n = (z-i)^n \\
\iff & \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1
\end{aligned}
$$

Ainsi $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ est solution de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ *si et seulement si* $\frac{z+i}{z-i}$ est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité, c'est-à-dire *si et seulement si* il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Remarquons tout de suite que $k = 0$ ne peut convenir puisqu'alors on aurait $\frac{z+i}{z-i} = 1$ et, par suite, $i = -i$.
Ainsi $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ est solution de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ *si et seulement si* il existe $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Or pour $k \in [\![1, n-1]\!]$

$$
\begin{aligned}
& \frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
\iff & z+i = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-i) \\
\iff & z\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right) = i\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1\right) \\
\iff & z = i\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} \qquad \text{car } e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 1 \text{ puisque } k \in [\![1, n-1]\!] \\
\iff & z = \frac{2i\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}} \\
\iff & z = \cot\frac{k\pi}{n}
\end{aligned}
$$

Les solutions de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ sont les réels $\cot\frac{k\pi}{n}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$. Puisque cotan est injective sur $]0, \pi[$ (car strictement décroissante sur cet intervalle), ces réels sont tous distincts. Il existe donc $n-1$ solutions.
On pouvait également voir que les solutions de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ étaient réelles en remarquant que si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $(z+i)^n = (z-i)^n$, alors $|(z+i)^n| = |(z-i)^n|$ ou encore $|z+i|^n = |z-i|^n$ ce qui équivaut à $|z+i| = |z-i|$, un module étant positif. Le point d'affixe z est donc situé sur la médiatrice du segment reliant les points d'affixes $-i$ et i, à savoir l'axe des réels.

Solution 32.

1. Posons $S = \alpha+\beta$ et $S = \alpha\beta$. On sait que $\omega^5 = 1$ et $\sum_{k=0}^{4} \omega^k = 0$. Ainsi $S = -1$ et $P = (\omega+\omega^4)(\omega^2+\omega^3) = \omega^3+\omega^4+\omega^6+\omega^7 = \omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = -1$. Ainsi α et β sont solutions de l'équation $z^2 - Sz + P = 0$ i.e. $z^2 + z - 1 = 0$.

2. Les solutions de $z^2 + z - 1 = 0$ sont $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Or $\alpha = \omega + \omega^4 = \omega + \overline{\omega} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3 = \omega^2 + \overline{\omega^2} = 2\cos\frac{4\pi}{5}$. En particulier, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}_-^*$. On en déduit que $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

3. $\cos\frac{\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. De plus, $\frac{\pi}{5} \in [0, \pi]$ donc $\sin\frac{\pi}{5} \geqslant 0$. Donc $\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \cos^2\frac{\pi}{5}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Solution 33.

1. **a.** Tout d'abord

$$\sin\frac{18\pi}{11} = \sin\left(\pi + \frac{7\pi}{11}\right) = -\sin\frac{7\pi}{11}$$

De plus, les réels $\frac{6\pi}{11}$ et $\frac{7\pi}{11}$ appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Or la fonction sin est strictement décroissante sur cet intervalle. Donc $\sin\frac{6\pi}{11} > \frac{7\pi}{11}$ et donc $\sin\frac{6\pi}{11}+\sin\frac{18\pi}{11} > 0$.

Remarque. Si l'on connaît les formules de factorisation, on peut également écrire

$$\sin\frac{6\pi}{11}+\sin\frac{18\pi}{11} = 2\sin\frac{12\pi}{11}\cos\frac{6\pi}{11}$$

Or $\frac{12\pi}{11}\in[\pi,2\pi]$ donc $\sin\frac{12\pi}{11}<0$ et $\frac{6\pi}{11}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ donc $\cos\frac{6\pi}{11}<0$. ■

Remarquons enfin que :

$$\operatorname{Im}(S) = \sin\frac{2\pi}{11}+\sin\frac{6\pi}{11}+\sin\frac{8\pi}{11}+\sin\frac{10\pi}{11}+\sin\frac{18\pi}{11}$$

Or les réels $\frac{2\pi}{11}$, $\frac{8\pi}{11}$ et $\sin\frac{10\pi}{11}$ appartiennent à l'intervalle $[0,\pi]$ donc leurs sinus sont positifs. Ainsi $\operatorname{Im}(S)>0$.

b. Remarquons que $\omega^{11}=1$. On fait alors apparaître la somme des termes d'une suite géométrique.

$$S+T = \left(\sum_{k=0}^{10}\omega^k\right)-1 = \frac{1-\omega^{11}}{1-\omega}-1 = -1$$

En développant brutalement :

$$ST = \omega^3+\omega^5+\omega^6+2\omega^7+\omega^8+2\omega^9+2\omega^{10}+5\omega^{11}+2\omega^{12}+2\omega^{13}+\omega^{14}+2\omega^{15}+\omega^{16}+\omega^{17}+\omega^{19}$$

Or $\omega^{11}=1$ donc on peut ramener les puissance de ω dans cette somme entre 0 et 10 :

$$\begin{aligned} ST &= 5+2\omega+2\omega^2+2\omega^3+2\omega^4+2\omega^5+2\omega^6+2\omega^7+2\omega^8+2\omega^9+2\omega^{10} \\ &= 3+2\sum_{k=0}^{10}\omega^k = 3 \end{aligned}$$

c. C'est du cours : S et T sont solutions de l'équation $x^2+x+3=0$. Les solutions de cette équation sont $\frac{-1+i\sqrt{11}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{11}}{2}$. Comme $\operatorname{Im}(S)>0$,

$$S=\frac{-1+i\sqrt{11}}{2} \qquad T=\frac{-1-i\sqrt{11}}{2}$$

2. a. Puisque $\frac{20\pi}{11}=2\pi-\frac{2\pi}{11}$,

$$\omega-\omega^{10} = e^{\frac{2i\pi}{11}}-e^{\frac{20i\pi}{11}} = e^{\frac{2i\pi}{11}}-e^{-\frac{2\pi}{11}} = 2i\sin\frac{2\pi}{11}$$

en utilisant une relation d'Euler.

b. On utilise la méthode de l'arc-moitié :

$$\frac{1-\omega^3}{1+\omega^3} = \frac{1-e^{\frac{6i\pi}{11}}}{1+e^{\frac{6i\pi}{11}}} = \frac{e^{-\frac{3i\pi}{11}}-e^{\frac{3i\pi}{11}}}{e^{-\frac{3i\pi}{11}}+e^{\frac{3i\pi}{11}}} = \frac{-2i\sin\frac{3\pi}{11}}{2\cos\frac{3\pi}{11}} = -i\tan\frac{3\pi}{11}$$

c. La somme à calculer est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k = -\omega^3\frac{1-\left(-\omega^3\right)^{10}}{1+\omega^3} = -\omega^3\frac{1-\omega^{30}}{1+\omega^3} = \frac{\omega^{33}-\omega^3}{1+\omega^3} = \frac{1-\omega^3}{1+\omega^3}$$

d. En ramenant à nouveau les puissances entre 0 et 10

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k &= -\omega^3+\omega^6-\omega^9+\omega^{12}-\omega^{15}+\omega^{18}-\omega^{21}+\omega^{24}-\omega^{27}+\omega^{30} \\ &= -\omega^3+\omega^6-\omega^9+\omega-\omega^4+\omega^7-\omega^{10}+\omega^2-\omega^5+\omega^8 \end{aligned}$$

Ainsi

$$T - S = \sum_{k=1}^{10} \left(-\omega^3\right)^k + 2(\omega^{10} - \omega)$$

Or d'après les questions précédentes :

$$\sum_{k=1}^{10} \left(-\omega^3\right)^k = -i\tan\frac{3\pi}{11} \qquad \omega - \omega^{10} = 2i\sin\frac{2\pi}{11}$$

donc

$$T - S = -i\tan\frac{3\pi}{11} - 4i\sin\frac{2\pi}{11}$$

puis

$$i(T - S) = \tan\frac{3\pi}{11} + 4\sin\frac{2\pi}{11}$$

Enfin $S = \frac{-1+i\sqrt{11}}{2}$ et $T = \frac{-1-i\sqrt{11}}{2}$ donc $i(T-S) = \sqrt{11}$.

Solution 34.

1. Puisque ω est une racine cinquième de l'unité, $\omega^4 = \omega^{-1}$. On en déduit que $A = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ via une relation d'Euler. De même, $\omega^3 = \omega^{-2}$ donc $B = 2\cos\frac{4\pi}{5}$.

2. Tout d'abord
$$A + B = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 - 1 = \frac{\omega^5 - 1}{\omega - 1} - 1 = -1$$
Puis
$$AB = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = -1$$
A et B sont solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. Or ces solutions sont $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
Puisque $\frac{2\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\frac{2\pi}{5} \geqslant 0$ et donc $A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $B = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

3. On en déduit donc $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.
Il s'ensuit $\cos\frac{3\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Solution 35.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sin^4 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 \\
&= \frac{e^{i4x} + e^{-i4x} - 4e^{i2x} - 4e^{-i2x} + 6}{2.8} \\
&= \frac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\sin^4\left(\frac{(2k+1)\pi}{8}\right) = \frac{-4\cos\Big((2k+1)\pi/4\Big) + 3}{8},$$

puisque $\cos\left[(2k+1)\pi/2\right] = 0$, et finalement

$$\sum_{k=0}^{3} \sin^4\left(\frac{(2k+1)\pi}{8}\right) = \frac{3}{2}.$$

Solution 36.

1. D'après la formule de la série géométrique, $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = \dfrac{\omega^5-1}{\omega-1} = 0$ puisque $\omega^5 = 1$. Il suffit alors de diviser cette égalité par ω^2.
2. On a $\alpha^2 = \omega^2 + \dfrac{1}{\omega^2} + 2$. D'après le question précédente, on a donc $\alpha^2+\alpha-1 = 0$.
3. D'après les relations d'Euler, $\alpha = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$. Les racines du trinôme X^2+X-1 sont $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Puisque $\dfrac{2\pi}{5}$ est compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ est positif et α également. Comme $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$, on a nécessairement $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. On en déduit $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.
   Par suite, il vient $\sin^2\dfrac{2\pi}{5} = 1-\cos^2\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$. Puisque $\dfrac{2\pi}{5}$ est compris entre 0 et π, $\sin\dfrac{2\pi}{5}$ est positif et donc $\sin\dfrac{2\pi}{5} = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Solution 37.

1. Deux cas se présentent.
   - Si m est un multiple de n, $\omega^m = 1$ et donc
   $$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{km} = n$$
   - Sinon $\omega^m \neq 1$ et ainsi,
   $$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{km} = \frac{\omega^{nm}-1}{\omega^m-1} = 0$$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Appliquons la formule du binôme de Newton.
   $$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\omega^{lk}z^l \\ &= \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{l}\omega^{lk}z^l \qquad \text{en permutant les sommes} \\ &= \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}z^l\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{lk} \end{aligned}$$
   D'après la première question, pour tout $l \in [\![1, n-1]\!]$,
   $$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{lk} = 0$$

et pour $l = 0$ ou $l = n$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{lk} = n$$

Ainsi $S(z) = n\left(z^n + 1\right)$.

3. Tout d'abord, $S\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right) = e^{i\pi} + 1 = 0$ d'après la question précédente. Mais on a également

$$\begin{aligned}
S\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{i\pi}{n}} + e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(2e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)^n && \text{par arc-moitié} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 2^n e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2}} \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \\
&= 2^n \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\pi} e^{\frac{i\pi}{2}} \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \\
&= 2^n i \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité demandée.

Solution 38.

Puisque $\omega \neq 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} &= \frac{\omega + \omega^2 + \omega^4 + \omega^5}{1 + \omega^2 + \omega^4 + \omega^6} \\
&= \frac{\omega + \omega^2 + \omega^4 + \omega^5}{\frac{\omega^8 - 1}{\omega^2 - 1}}
\end{aligned}$$

De plus $\omega^7 = 1$ donc $\omega^8 = \omega$ et

$$1 + \omega + \ldots + \omega^6 = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} &= (1+\omega)\big(-1 - \omega^3 - \omega^6\big) \\
&= -1 + \omega^2 + \omega^5
\end{aligned}$$

D'où,puisque

$$\frac{\omega^3}{1+\omega^6} = \frac{\omega^3}{1 + 1/\omega} = \frac{\omega^4}{1+\omega},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{(1+\omega)\big(-1 + \omega^2 + \omega^5\big) + \omega^4}{1+\omega} \\
&= \frac{-1 - \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6}{1+\omega} \\
&= \frac{-1 - \omega - 1 - \omega}{1+\omega} = -2
\end{aligned}$$

SOLUTION 39.

Posons $f : z \mapsto z^2+z+1$ et $g : z \mapsto z^2-z+1$. Remarquons que $f(i)=i$, $f(-i)=-i$, $g(i)=-i$ et $g(-i)=i$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$f(z)-i = f(z)-f(i) = (z-i)(z+i+1) \qquad f(z)+i = f(z)-f(-i) = (z+i)(z-i+1)$$
$$g(z)-i = g(z)-g(-i) = (z+i)(z-i-1) \qquad g(z)+i = g(z)-g(i) = (z-i)(z+i-1)$$

On en déduit que

$$f(z)^2+1 = (f(z)-i)(f(z)+i) = (z-i)(z+i)(z+i+1)(z-i+1) = (z^2+1)(z^2+2z+2)$$
$$g(z)^2+1 = (g(z)-i)(g(z)+i) = (z+i)(z-i)(z-i-1)(z+i-1) = (z^2+1)(z^2-2z+2)$$

Montrons maintenant que $|z^2+2z+2| \geqslant 2$ ou $|z^2-2z+2| \geqslant 2$. Posons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

$$|z^2+2z+2|^2 = (x^2-y^2+2x+2)^2+(2xy+2y)^2$$
$$|z^2-2z+2|^2 = (x^2-y^2-2x+2)^2+(2xy-2y)^2$$

Après calcul,

$$|z^2+2z+2|^2+|z^2-2z+2|^2 = 2x^4+4x^2y^2+16x^2+2y^4+8 \geqslant 8$$

On en déduit donc bien que $|z^2+2z+2| \geqslant 2$ ou $|z^2-2z+2| \geqslant 2$. Il s'ensuit que $|f(z)^2+1| \geqslant 2|z^2+1|$ ou $|g(z)^2+1| \geqslant 2|z^2+1|$.
Soit maintenant B une partie bornée non vide de $\mathbb{C}$ stable par f et g. Donnons-nous $z \in B$. Ce qui précède permet de construire par récurrence une suite (z_n) d'éléments de B telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n^2+1| \geqslant 2^n|z^2+1|$. Il suffit en effet de poser $z_0 = z$ puis une fois $z_0, \dots, z_n$ construits de poser $z_{n+1} = f(z_n)$ ou $z_{n+1} = g(z_n)$ suivant que $|f(z_n)^2+1| \geqslant 2|z_n^2+1|$ ou que $|g(z_n)^2+1| \geqslant 2|z_n^2+1|$.
Puisque B est bornée, on a forcément $z^2+1=0$ i.e. $z=i$ ou $z=-i$. Ainsi $B \subset \{i,-i\}$.
De plus, B est non vide donc $i \in B$ ou $-i \in B$. Puisque B est stable par g, $g(i) = -i \in B$ si $i \in B$ et $g(-i) = i \in B$ si $-i \in B$. Finalement, $B = \{-i, i\}$.

SOLUTION 40.

- *Calcul* : Notons $z = x+iy$, avec x et y réels. On a, pour $z \neq 1$,

$$\left|\frac{z}{z-1}\right|^2 = \frac{|z|^2}{|z-1|^2} = \frac{x^2+y^2}{(x-1)^2+y^2}.$$

  Ainsi

$$\left|\frac{z}{z-1}\right| < 1$$

  équivaut à

$$x^2+y^2 < x^2-2x+1+y^2,$$

  ie $x = \mathrm{Re}(z) < 1/2$.

- *Géométrie* : Notons $A(1)$, $M(z)$ et $O(0)$. L'inégalité

$$\left|\frac{z}{z-1}\right| < 1$$

  est équivalente à $OM < AM$, ie M appartient au demi-plan ouvert de frontière la médiatrice de $[OA]$ contenant A. Ce demi-plan est d'inéquation $x < 1/2$.

SOLUTION 41.

Comme λ est irrationnel, $e^{2i\lambda\pi} \neq 1$ et ainsi, d'après la formule de la série géométrique,

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\lambda\pi} = \frac{(e^{2i\pi\lambda})^n - 1}{e^{2i\pi\lambda} - 1} = \frac{e^{in\pi\lambda}}{e^{i\lambda\pi}} \times \frac{\sin(n\pi\lambda)}{\sin(\lambda\pi)} = e^{i(n-1)\pi\lambda} \times \frac{\sin(n\pi\lambda)}{\sin(\lambda\pi)}$$

et donc

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\lambda\pi}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(\lambda\pi)|}$$

puisque $|e^{i(n-1)\pi\lambda}\sin(n\pi\lambda)| = |\sin(n\pi\lambda)| \leqslant 1$.

Solution 42.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $|z| > 1$ et

$$1 + z + \cdots + z^{n-1} = nz^n.$$

On a donc

$$n|z|^n = |1 + z + \cdots + z^{n-1}| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k < n|z|^n$$

ce qui est absurde.

Solution 43.

Comme $z \notin \mathbb{U}$, on a $z \neq 1$. On peut donc appliquer la formule de la série géométrique :

$$\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \sum_{k=0}^{n} z^k$$

d'où, par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |z|^k = \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}$$

car $|z| \neq 1$.

Solution 44.

Puisque $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$, on a

$$|a| \leqslant \frac{1}{2}|a + b| + \frac{1}{2}|a - b|.$$

De plus, $b = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}$, donc

$$|b| \leqslant \frac{1}{2}|a + b| + \frac{1}{2}|a - b|,$$

et en sommant les deux inégalités,

$$|a| + |b| \leqslant |a + b| + |a - b|.$$

Il y a égalité ci-dessus *si et seulement si* il y a égalité dans les deux premières inégalités, i.e.

$$a = b, \ a = -b$$

ou $a+b$, $a-b$ et $b-a$ sont non nuls et ont le même argument : ce dernier cas ne peut manifestement pas se produire puisque $a-b=-(b-a)$. Il y a donc égalité ci-dessus *si et seulement si* $a=b$ ou $a=-b$.

Remarque. On peut aussi établir que

$$(|a+b|+|a-b|)^2 = (|a|+|b|)^2 + (|a|-|b|)^2 + 2|a^2-b^2|$$

pour résoudre cet exercice. ■

Solution 45.

Raisonnons par récurrence sur $n \geqslant 2$. Soit $\mathrm{HR}(n)$ la proposition suivante : pour tous nombres complexes non nuls $z_1, \dots, z_n$,

$$|z_1+\dots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\dots+|z_n|,$$

avec égalité *si et seulement si*

$$\arg(z_1)=\arg(z_2)=\dots=\arg(z_n).$$

- ▶ $\mathrm{HR}(2)$ est vraie,c'est l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité démontrés dans le cours.
- ▶ Montrons que la prpriété est héréditaire à partir du rang 2.Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie et soient $z_1 \dots, z_{n+1}$ nombres complexes non nuls.En aplliquant l'inégalité triangulaire à $z_1+\dots+z_n$ et z_{n+1}, on obtient

  $$\left|z_1+\dots+z_{n+1}\right| \leqslant \left|z_1+\dots+z_n\right| + |z_{n+1}|,$$

  en appliquant alors $\mathrm{HR}(n)$ à $z_1, \dots, z_n$,

  $$\left|z_1+\dots+z_n\right| \leqslant |z_1|+\dots+|z_n|,$$

  d'où l'inégalité au rang $n+1$. Il y a égalité *si et seulement si* il y a égalité dans les deux inégalités précédentes, ie d'après $\mathrm{HR}(n)$ si, *premièrement*

  $$\arg(z_1)=\dots=\arg(z_n),$$

  ce qui impose $z_1+\dots+z_n \neq 0$ et si, *deuxièmement*

  $$\arg(z_1+\dots+z_n)=\arg(z_{n+1}).$$

  $\mathrm{HR}(n+1)$ est donc prouvée puisque dans ce cas,

  $$\arg(z_1+\dots+z_n)=\arg(z_1).$$

- ▶ La propriété est vraie pour tout $n \geqslant 2$ d'après le principe de récurrence.

Solution 46.

1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Alors

   $$\frac{z-1}{z-i} = \frac{(z-1)(\overline{z}+i)}{|z-i|^2}$$

   et on cherche donc à résoudre

   $$|z|^2 - \mathrm{Re}[(1-i)z] = 0$$

   (puisque $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(\overline{z})$), c'est-à-dire

   $$\left|z-\frac{1+i}{2}\right|^2 = \left|\frac{1+i}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}.$$

   Le lieu des solutions est donc le cercle de centre $(1+i)/2$ et de rayon $\sqrt{2}/2$, privé de i.

2. On cherche cette fois à résoudre
$$\mathrm{Im}[(1+i)z] = 1$$
(puisque $\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(\overline{z})$). Une solution particulière évidente est $z = 1$. Si z_1 et z_2 sont deux solutions, alors
$$\mathrm{Im}[(1+i)(z_1 - z_2)] = 0,$$
ce qui signifie que $z_1 - z_2$ est colinéaire au conjugué de $1+i$. Par conséquent, le lieu des solutions est la droite issue de 1, dirigée par $1-i$, privée de i bien entendu !

3. Tiens, une puissance ! Je choisis la représentation polaire en posant $z = \rho e^{i\theta}$... Les parties réelle et imaginaire de
$$z^3 = \rho^3 e^{3i\theta}$$
sont égales si, et seulement si,
$$3\theta \equiv \frac{\pi}{4} \mod \pi$$
c'est-à-dire
$$\theta \equiv \frac{\pi}{12} \mod \frac{\pi}{3}.$$
Le lieu des solutions est donc la réunion des trois droites faisant un angle de $\pi/12$, $5\pi/12$ et $3\pi/4$ avec le demi-axe des abscisses positives.

Solution 47.

1. **a.** Le point A est situé sur le cercle de centre O et de rayon 1 donc $|a| = 1$. On a donc $a\overline{a} = 1$ puis $\overline{a} = \frac{1}{a}$. Comme les points B, C, D sont également sur $\mathcal{C}$, $\overline{b} = \frac{1}{b}$, $\overline{c} = \frac{1}{c}$, $\overline{d} = \frac{1}{d}$.

b. Posons $Z = \frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b}$. On a donc
$$\begin{aligned}
\overline{Z} &= \frac{\overline{d}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{a}}\frac{\overline{c}-\overline{b}}{\overline{d}-\overline{b}} \\
&= \frac{\frac{1}{d}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{d}-\frac{1}{b}} \\
&= \frac{\frac{a-d}{ad}}{\frac{a-c}{ac}}\frac{\frac{b-c}{bc}}{\frac{b-d}{bd}} \\
&= \frac{a-d}{a-c}\frac{b-c}{b-d}\frac{ac}{ad}\frac{bd}{bc} \\
&= \frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b} = Z
\end{aligned}$$
Ainsi Z est réel.

c. Puisque Z est réel, $\arg(Z) \equiv 0[\pi]$. On a donc $\arg\left(\frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b}\right) \equiv 0[\pi]$ puis $\arg\frac{d-a}{c-a} \equiv \arg\frac{d-b}{c-b}[\pi]$ ce qui équivaut à $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})[\pi]$.

2. On reprend la question précédente à l'envers et on montre que Z est réel.

3. On a les équivalences suivantes

$$
\begin{aligned}
& & Z = \frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b} & \\
&\iff & \frac{d-a}{d-b} = Z\frac{c-a}{c-b} & \\
&\iff & d-a = Z\frac{c-a}{c-b}d - Z\frac{c-a}{c-b}b & \\
&\iff & d\left(1-Z\frac{c-a}{c-b}\right) = a - Z\frac{c-a}{c-b}b & \\
&\iff & d\left(c-b-Z(c-a)\right) = a(c-b) - Zb(c-a) & \qquad \text{en multipliant par } c-b \\
&\iff & d = \frac{a(c-b)-Zb(c-a)}{c-b-Z(c-a)} &
\end{aligned}
$$

4. On a encore $\overline{a} = \frac{1}{a}$, $\overline{b} = \frac{1}{b}$, $\overline{c} = \frac{1}{c}$. De plus, comme Z est réel, $\overline{Z} = Z$.

$$
\begin{aligned}
\overline{d} &= \frac{\overline{a}(\overline{c}-\overline{b}) - \overline{Z}\overline{b}(\overline{c}-\overline{a})}{\overline{c}-\overline{b}-\overline{Z}(\overline{c}-\overline{a})} \\
&= \frac{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right) - \frac{Z}{b}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}-Z\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)} \\
&= \frac{b-c-Z(a-c)}{a(b-c)-Zb(a-c)} && \text{en multipliant numérateur et dénominateur par } abc \\
&= \frac{c-b-Z(c-a)}{a(c-b)-Zb(c-a)} \\
&= \frac{1}{d}
\end{aligned}
$$

On en déduit que $d\overline{d} = 1$ et donc que $|d| = 1$. Ainsi D est sur le cercle $\mathcal{C}$.

Solution 48.

1. Les points A et B sont confondus *si et seulement si* $z = 1$.
Les points A et C sont confondus *si et seulement si* $z^2 = 1$ i.e. $z = 1$ ou $z = -1$.
Les points A et D sont confondus *si et seulement si* $z^3 = 1$ i.e. $z = 1$, $z = j$ ou $z = j^2$.
Les points B et C sont confondus *si et seulement si* $z^2 = z$ i.e. $z = 0$ ou $z = 1$.
Les points B et D sont confondus *si et seulement si* $z^3 = z$ i.e. $z = 0$, $z = -1$ ou $z = 1$.
Les points C et D sont confondus *si et seulement si* $z^3 = z^2$ i.e. $z = 0$ ou $z = 1$.
Ainsi les points A, B, C, D sont deux à deux distincts *si et seulement si* $z \notin \{0, 1, -1, j, j^2\}$.

2. $ABCD$ est un parallélogramme *si et seulement si* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire *si et seulement si* $z-1 = z^2-z^3$ ou encore $-z^3+z^2-z+1 = 0$. Puisque $z \neq -1$, $-z^3+z^2-z+1 = \frac{(-z)^4-1}{-z-1} = -\frac{z^4-1}{z-1}$. Ainsi $ABCD$ est un parallélogramme *si et seulement si* $z^4 = 1$. Puisque les racines quatrièmes de l'unité sont $1, i, -1, -i$ et que $z \notin \{-1, 1\}$, $ABCD$ est un parallélogramme *si et seulement si* $z = i$ ou $z = -i$.
Si $z = i$, A, B, C, D sont les points d'affixes respectifs $1, i, -1, -i$ donc $ABCD$ est un carré.
Si $z = -i$, A, B, C, D sont les points d'affixes respectifs $1, -i, -1, i$ donc $ABCD$ est à nouveau un carré.

3. Le triangle ABC est rectangle isocèle en A *si et seulement si* $AB = AC$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. En termes d'affixes, ABC est rectangle isocèle en A *si et seulement si* $\begin{cases} |z-1| = |z^2-1| \\ \arg\frac{z^2-1}{z-1} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} \left|\frac{z^2-1}{z-1}\right| = 1 \\ \arg\frac{z^2-1}{z-1} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$. Puisque $\frac{z^2-1}{z-1} = z+1$, ceci équivaut à

$\begin{cases} |z+1| = 1 \\ \arg(z+1) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$ ou encore $z+1 = \pm i$.
Finalement, ABC est rectangle isocèle en A *si et seulement si* $z = -1 \pm i$.

4. On sait que $z^3-1 = (z-1)(z^2+z+1)$. Le triangle ABD est rectangle isocèle en A *si et seulement si* $AB = AD$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

En termes d'affixes, ABD est rectangle isocèle en A *si et seulement si* $\begin{cases} |z-1| = |z^3-1| \\ \arg \dfrac{z^3-1}{z-1} \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} \left|\dfrac{z^3-1}{z-1}\right| = 1 \\ \arg \dfrac{z^3-1}{z-1} \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$.

Puisque $\frac{z^3-1}{z-1} = z^2+z+1$, ceci équivaut à $\begin{cases} |z^2+z+1| = 1 \\ \arg(z^2+z+1) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$ ou encore $z^2+z+1 = \pm i$.
Finalement, ABC est rectangle isocèle en A *si et seulement si* z est solution d'une des deux équations $(E_1) :\ Z^2+Z+1+i = 0$ ou $(E_2) :\ Z^2+Z+1-i = 0$.
Le discriminant de (E_1) est $-3-4i = (1-2i)^2$. Les solutions de (E_1) sont donc $\frac{-1+(1-2i)}{2} = -i$ et $\frac{-1-(1-2i)}{2} = -1+i$. Puisque les coefficients de l'équation (E_2) sont les conjugués de ceux de l'équation (E_1), les solutions de (E_2) sont les conjuguées de celles de l'équation (E_1), c'est-à-dire i et $-1-i$.
Le triangle ABD est rectangle isocèle en A *si et seulement si* $z \in \{i, -i, 1+i, 1-i\}$.

Solution 49.

1. Remarquons que $1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$.

2. $$P(1) + P(j) + P(j^2) = \left(1+j^3+j^6\right) + \alpha\left(1+j^2+j^4\right) + \beta(1+j+j^2) = 3 + \alpha(1+j+j^2) + \beta(1+j+j^2) = 3$$

3. Notons b_1 et b_2 les affixes des points B_1 et B_2. Puisque 1, j et j^2 sont de module 1, $A_0O = A_1O = A_2O = 1$. Pour $k \in \{0, 1, 2\}$
$$p_k = A_kB_1 \cdot A_kB_2 = A_kO \cdot A_kB_1 \cdot A_kB_2 = |j^k| \cdot |j^k - b_1| \cdot |j^k - b_2| = \left|j^k(j^k-b_1)(j^k-b_2)\right|$$
Posons $P(z) = z(z-b_1)(z-b_2)$ pour $z \in \mathbb{C}$ de sorte que $p_k = \left|P(j^k)\right|$ pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$. En développant, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Par inégalité triangulaire,
$$p_0 + p_1 + p_2 = |P(1)| + |P(j)| + |P(j^2)| \geqslant |P(1) + P(j) + P(j^2)| = 3$$
en utilisant la question précédente. Si l'on suppose que pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, $p_k < 1$, alors $p_0 + p_1 + p_2 < 3$, ce qui contredit l'inégalité précédente. Il existe donc $k \in \{0, 1, 2\}$ tel que $p_k \geqslant 1$, ce qui répond à la question.

Solution 50.

1. On trouve évidemment $\overline{w} = -w$ donc w est imaginaire pur.

2. D'une part
$$(b+c)(\overline{b} - \overline{c}) = |b|^2 - |c|^2 + w = w$$
car $|b| = |c|$ par hypothèse. Ainsi $(b+c)(\overline{b} - \overline{c})$ est imaginaire pur.
D'autre part
$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{(b+c)(\overline{b}-\overline{c})}{(b-c))(\overline{b}-\overline{c})} = \frac{w}{|b-c|^2}$$
Comme $|b-c|^2$ est réel et w est imaginaire pur, $\frac{b+c}{b-c}$ est également imaginaire pur.

3. Notons (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Ainsi $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$. Alors

$$z_1\overline{z_2} = (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)$$

Finalement,

$$\text{Re}(z_1\overline{z_2}) = x_1x_2 + y_1y_2 = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

4. Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont pour affixes respectifs $b + c$ et $b - c$. Leur produit scalaire est donc

$$\text{Re}\left((b + c)\overline{(b - c)}\right) = \text{Re}(w) = 0$$

car w est imaginaire pur. Les droites (AH) et (BC) sont donc perpendiculaires.

5. En inversant le rôle de a et b dans ce qui précède, on trouve également que (BH) et (AC) sont perpendiculaires. Les droites (AH) et (BH) sont donc deux hauteurs du triangle ABC se coupant en H, qui est donc l'orthocentre de ce triangle.

SOLUTION 51.

La condition d'alignement s'écrit

$$(z^3 - 1)\,\overline{(z - 1)} \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire $(z^2 + z + 1)\,|z - 1|^2 \in \mathbb{R}$, ie $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$ (qui inclus le cas $z = 1$), ce qui est équivalent à $(z + 1/2)^2 \in \mathbb{R}$, et finalement $z + 1/2$ est réel ou imaginaire pur . L'ensemble recherché est la réunion de l'axe réel et de la droite d'équation $x = -1/2$.
REMARQUE. On a utilisé l'équivalence $z^2 \in \mathbb{R}$ *si et seulement si* $z \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$. Elle se démontre sans peine en écrivant z sous forme algébrique ou sous forme polaire. ■

SOLUTION 52.

La condition d'alignement s'écrit :

$$(iz - z)\big(\bar{z}^2 - \bar{z}\big) = (-\bar{z} - i\bar{z})\big(z^2 - z\big),$$

c'est-à-dire

$$|z|^2(i - 1)(\bar{z} - 1) = |z|^2(-1 - i)(z - 1),$$

ainsi $z = 0$ ou $\bar{z} - 1 = i(z - 1)$, en écrivant z sous forme algébrique : $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, la dernière condition est équivalent à

$$y = 1 - x.$$

Géométriquement parlant, l'ensemble recherché est la droite d'équation $y = 1 - x$ à laquelle on ajoute le point O.

SOLUTION 53.

Les trois points $A(1), B(z^2), C(z^4)$ sont alignés *si et seulement si*

$$\text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{Im}(\overline{(z^2 - 1)}(z^4 - 1)) = 0,$$

ce qui est équivalent à $\overline{(z^2 - 1)}(z^4 - 1) \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\overline{(z^2 - 1)}\,(z^4 - 1) = \overline{\overline{(z - 1)}\,(z^4 - 1)}.$$

Nous devons donc résoudre l'équation

$$\overline{z^2 - 1}(z^4 - 1) = (z^2 - 1)\,\overline{(z^4 - 1)}.$$

Cette dernière équivaut à

$$\bar{(}z^2 - 1)(z^2 - 1)(z^2 + 1) = \bar{(}z^2 - 1)(z^2 - 1)\overline{(z^2 + 1)},$$

ie

$$|z^2-1|^2(z^2-\bar{z}^2)=0.$$

Les solutions sont donc les nombres complexes z vérifiant $z^2=1$ ou $z^2=\bar{z}^2$, i.e. $z=\pm 1$ ou $z=\bar{z}$ ou $\bar{z}=-z$. L'ensemble des points $M(z)$ vérifiant la condition est donc $(Ox)\cup(Oy)$.

Solution 54.

On a l'équivalence suivante :

$$\left(\frac{z}{z-1}\right)^4\in\mathbb{R}$$

si et seulement si

$$z=0 \text{ ou } \arg\left(\frac{z}{z-1}\right)\equiv 0\,[2\pi],$$

c'est-à-dire

$$z=0 \text{ ou } 4\arg\left(\frac{z}{z-1}\right)\equiv 0\,[\pi],$$

soit encore

$$z=0 \text{ ou } \arg\left(\frac{z}{z-1}\right)\equiv 0\,[\pi/4],$$

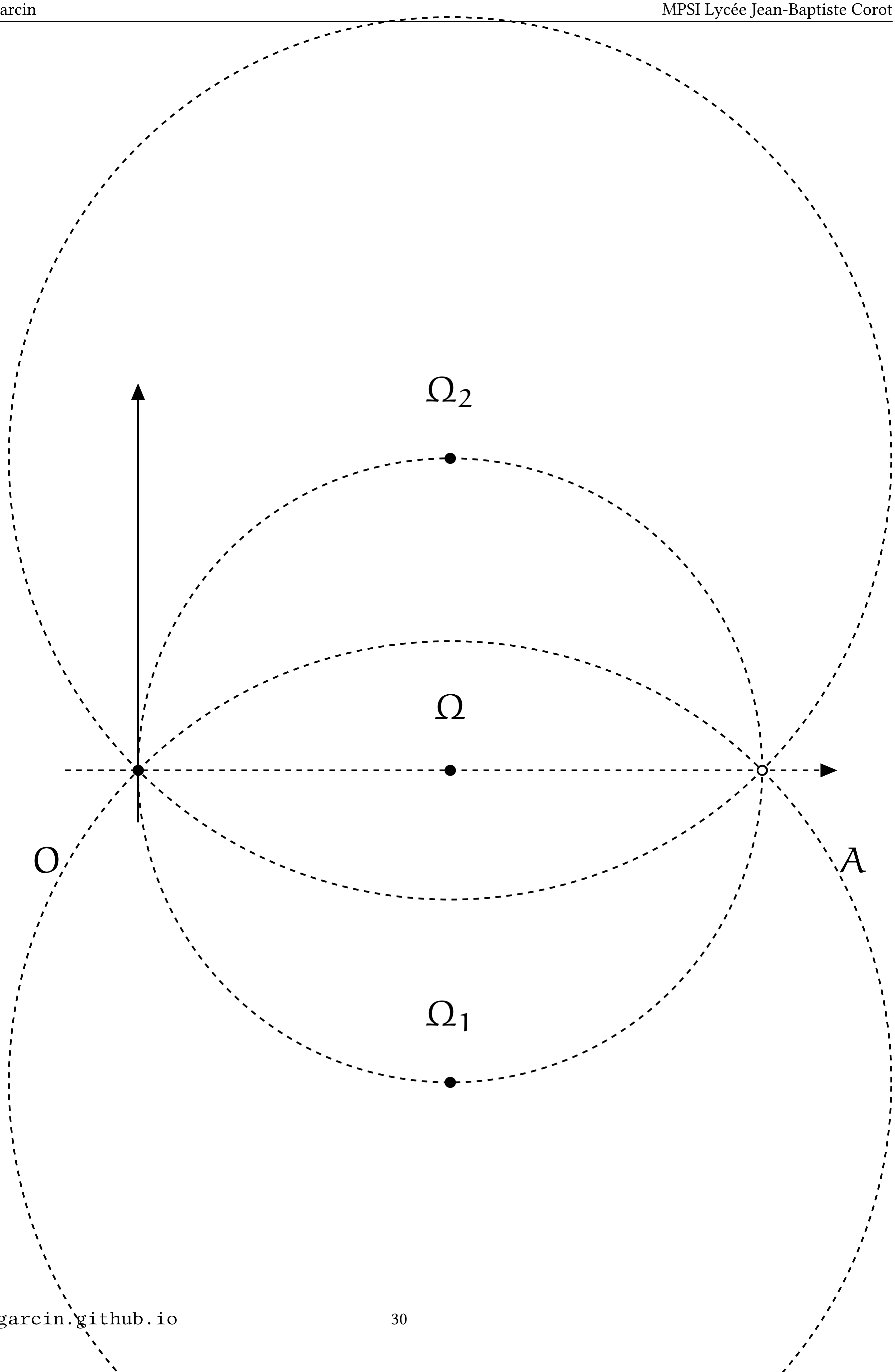
et finalement

$$z=0 \text{ ou } \arg\left(\frac{z}{z-1}\right)\equiv 0\,[\pi]$$
$$\text{ou } \arg\left(\frac{z}{z-1}\right)\equiv \frac{\pi}{4}\,[\pi] \text{ ou } \arg\left(\frac{z}{z-1}\right)\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi],$$
$$\text{ou } \arg\left(\frac{z}{z-1}\right)\equiv \frac{3\pi}{4}\,[\pi].$$

Notons A le point d'affixe 1, Ω le milieu de $[OA]$. Soient Ω_1 et Ω_2 les points de la médiatrice de $[OA]$ définis par

$$(\overrightarrow{\Omega_1 A},\overrightarrow{\Omega_1 O})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ et } (\overrightarrow{\Omega_2 A},\overrightarrow{\Omega_2 O})\equiv\frac{3\pi}{2}[2\pi].$$

La condition est équivalente à $M(z)$ appartient à la réunion de la droite (OA), du cercle de diamètre $[OA]$, du cercle de centre Ω_1 de rayon $O\Omega_1$ et du cercle de centre Ω_2 de rayon $O\Omega_2$ le tout privé du point A.


Ω_2
Ω
O
A
Ω_1

Solution 55.

1. Le triangle ABC est équilatéral direct *si et seulement si* $AB = AC$ et
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3},$$
c'est-à-dire $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3} = -j^2$, d'où, puisque $1 + j + j^2 = 0$, ABC est équilatéral direct *si et seulement si* $ja + j^2b + c = 0$ et en multipliant par j^2, $a + jb + j^2c = 0$.

   Remarque. Voici une bien meilleure preuve, faisant appel aux transformations complexes affines. Un triangle est équilatéral direct *si et seulement si* s'il se ramène par une similitude directe ou une translation au triangle équilatéral direct d'affixes $1, j, j^2$. Or pour ce dernier l'équation $a + bj + cj^2 = 0$ est vraie car $1 + j \times j + j^2 \times j^2 = 0$. Pour conclure il suffit alors de remarquer que l'équation $a + bj + cj^2 = 0$ est invariante sous les tranformations de la forme $(a, b, c) \mapsto (\alpha a + \beta, \alpha b + \beta, \alpha c + \beta)$ où $\alpha \neq 0$. ■

   Pour les configurations indirectes, on peut faire les mêmes calucls ou bien on remarque que changer l'orientation d'un triangle revient à permuter j et j^2 dans la relation précédente.

2. D'après ce qui précède, ABC est équilatéral *si et seulement si* $p = (a + j^2b + jc)(a + jb + j^2c) = 0$. Or
$$\begin{aligned} p &= a^2 + jab + j^2ac + j^2ab + b^2 + jbc + jac + j^2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + (j + j^2)ab + (j + j^2)ac + (j + j^2)bc \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc. \end{aligned}$$

   Remarque. L'utilisation de la relation bien connue $1 + j + j^2 = 0$ permet d'alléger sensiblement les calculs. ■

Solution 56.

1. Vérifions que le point H' d'affixe h est tel que $\overrightarrow{M_1H'} \perp \overrightarrow{M_2M_3}$. On a
$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1H'} \cdot \overrightarrow{M_2M_3} &= \mathrm{Re}((h' - z_1)\overline{(z_3 - z_2)}) \\ &= \mathrm{Re}((z_3 + z_2)\overline{(z_3 - z_2)}) \\ &= \mathrm{Re}(|z_3|^2 - |z_2|^2 + z_2\overline{z_3} - \overline{z_2}z_3) \\ &= \mathrm{Re}(|z_3|^2 - |z_2|^2) \\ &= OM_3^2 - OM_2^2 = 0 \end{aligned}$$
car $z_2\overline{z_3} - \overline{z_2}z_3 = Z - \overline{Z}$ (avec $Z = z_2\overline{z_3}$) est un imaginaire pur. On prouve de même que
$$\overrightarrow{M_2H'} \perp \overrightarrow{M_1M_3} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_3H'} \perp \overrightarrow{M_2M_1}$$
et donc que $H =' H$, orthocentre de $M_1M_2M_3$.

2. Notons G le centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$. Comme l'affixe g de G vaut
$$g = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \frac{h}{3},$$
on a $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$: les points O, H et G sont donc alignés.

   Remarque. Lorsque le triangle $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral, on a $O \neq H$ et la droite (OH) est appelée la droite d'Euler du triangle $M_1M_2M_3$. ■

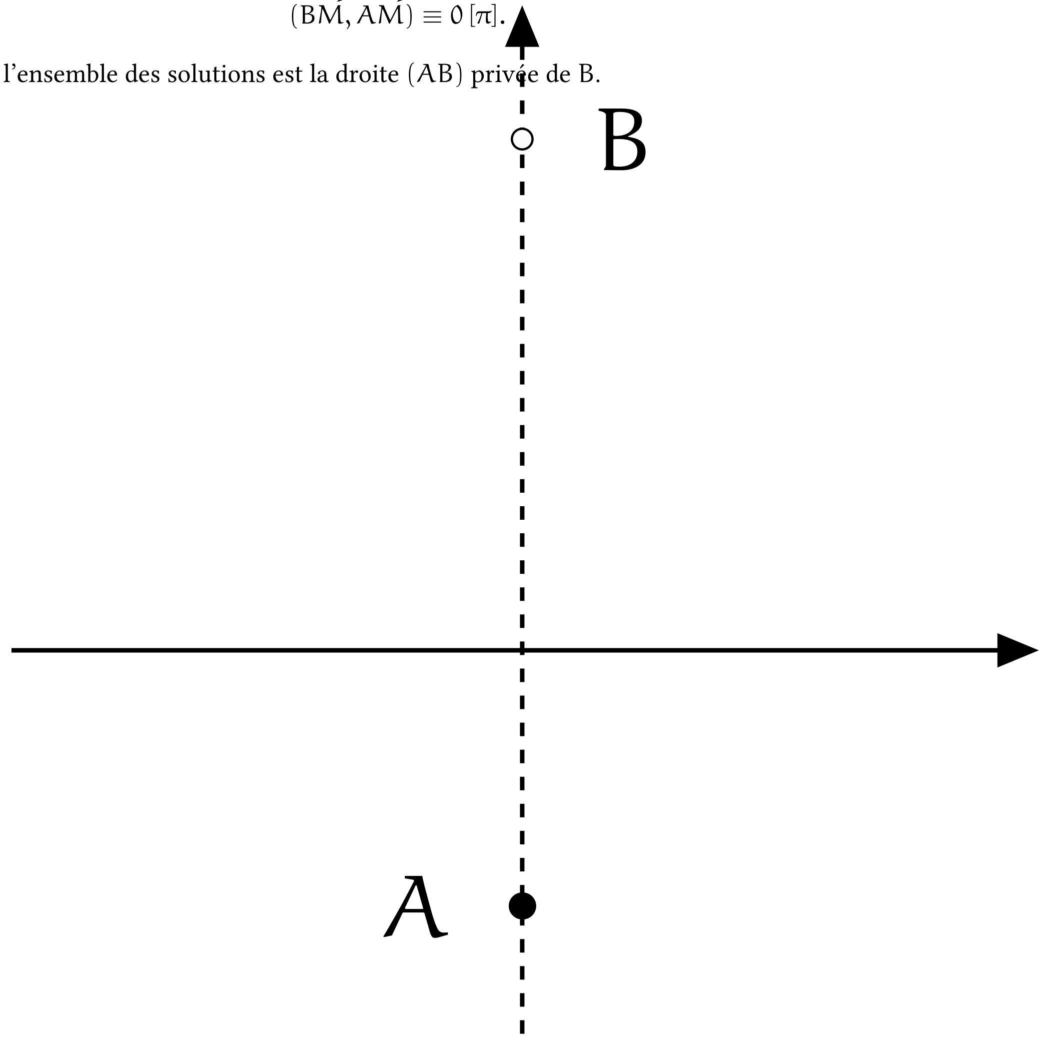
Solution 57.

Notons $A(-i)$ et $B(2i)$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. Pour $z \neq 2i$ et $z \neq -i$, on a $f(z) \in \mathbb{R}$ *si et seulement si* $\arg(f(z)) \equiv 0[\pi]$, c'est-à-dire $M(z)$ vérifie

$$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) \equiv 0\,[\pi].$$

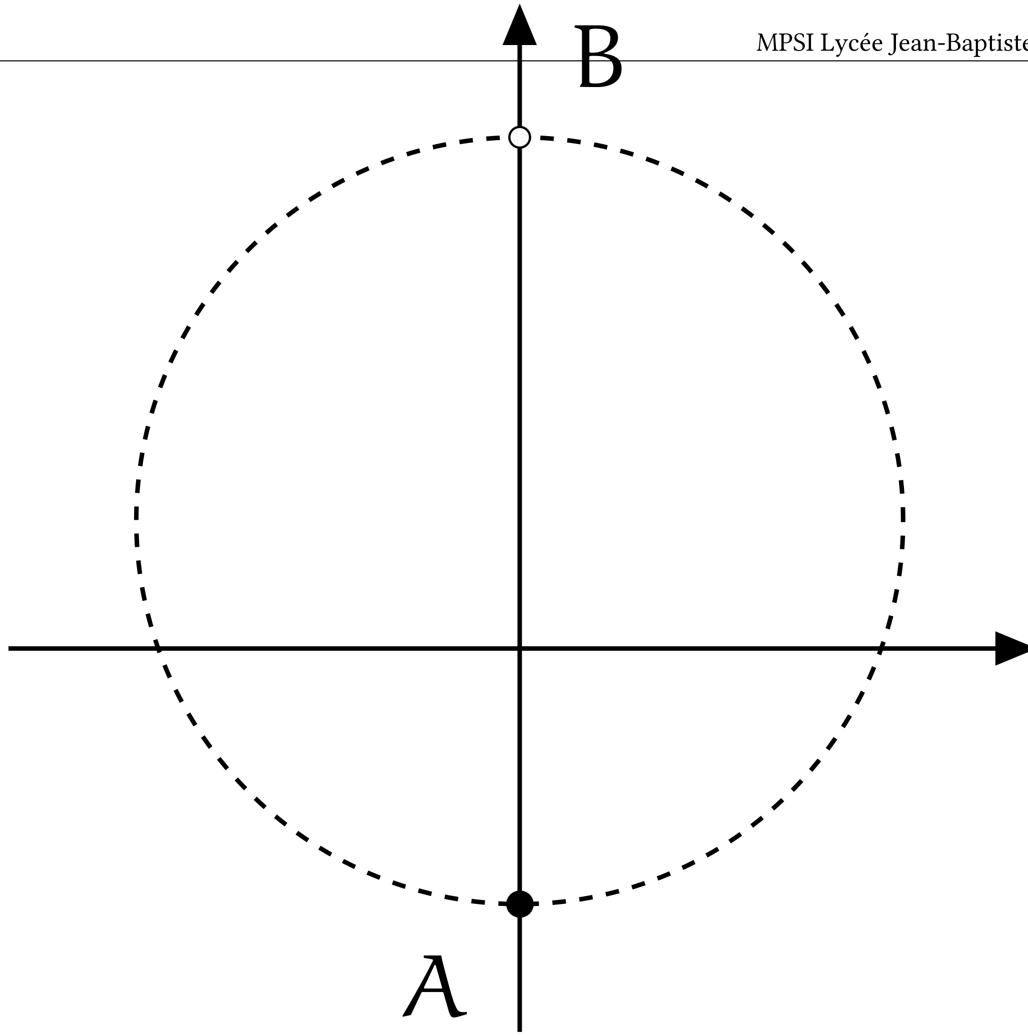
Comme $z = -i$ est solution, l'ensemble des solutions est la droite (AB) privée de B.



2. Pour $z \neq 2i$ et $z \neq -i$, on a $f(z) \in i\mathbb{R}$ *si et seulement si* $\arg(f(z)) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, c'est-à-dire $M(z)$ vérifie

$$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi].$$

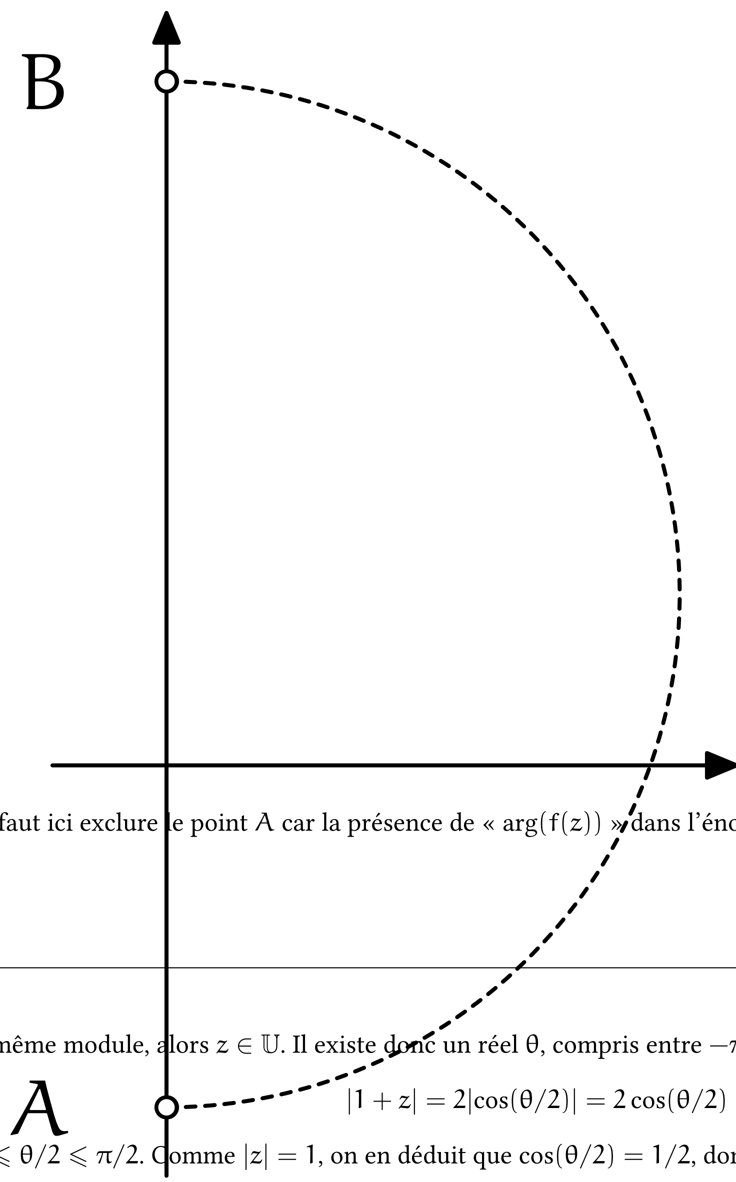
Comme $z = -i$ est solution, l'ensemble des solutions est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B.



3. Pour $z \neq 2\mathrm{i}$ et $z \neq -\mathrm{i}$, on a $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ *si et seulement si* $\arg(f(z)) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, c'est-à-dire $M(z)$ vérifie

$$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

L'ensemble des solutions est l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ du cercle de diamètre $[AB]$ privé de B parcouru de A vers B dans le sens trigonométrique et privé des points A et B.



Remarque. Il faut ici exclure le point A car la présence de « $\arg(f(z))$ » dans l'énoncé impose $f(z) \neq 0$, ie $z \neq -i$. ∎

Solution 58.

1. Si z et $1/z$ ont même module, alors $z \in \mathbb{U}$. Il existe donc un réel θ, compris entre $-\pi$ et π, tel que $z = e^{i\theta}$ et donc
$$|1+z| = 2|\cos(\theta/2)| = 2\cos(\theta/2)$$
puisque $-\pi/2 \leqslant \theta/2 \leqslant \pi/2$. Comme $|z| = 1$, on en déduit que $\cos(\theta/2) = 1/2$, donc $\theta = \pm 2\pi/3$ et $z = j$ ou $z = j^2$.
Réciproquement, on vérifie sans peine que j et j^2 vérifient bien la propriété voulue (notamment parce que $1 + j + j^2 = 0$). Donc les solutions sont j et j^2.

2. Astuce ! Un complexe et son conjugué ont même module, donc on étudie en fait
$$|z-1| = |z+1|.$$
Il s'agit de l'ensemble des points situés à même distance de 1 et de -1, c'est l'axe des imaginaires purs.

3. On divise l'équation par $|1+i| = \sqrt{2}$ et on conjugue :

$$\left|z + \frac{2i}{1-i}\right| = \sqrt{2}.$$

C'est donc le cercle de centre $2i/(1-i)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Solution 59.

1. On trouve $z_0 = 1$, $z_1 = 1-i$, $z_2 = -2i$ et $z_3 = -2-2i$.

2. On a $z_{n+1} = x_n + iy_n + y_n - ix_n = x_n + iy_n - i(x_n + iy_n) = (1-i)z_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi (z_n) est une suite géométrique de raison $1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$.

3. Comme (z_n) est une suite géométrique de premier terme $z_0 = 1$ et de raison $1-i$, on a $A_n = \dfrac{(1-i)^{n+1}-1}{1-i-1} = i(1-i)^{n+1} - i$. On a $B_n = \text{Re}(A_n)$ et $C_n = \text{Im}(A_n)$ donc

$$B_n = \text{Re}\left(i(1-i)^{n+1} - i\right) = -\text{Im}\left((1-i)^{n+1}\right) = -\text{Im}\left(\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^{-\frac{(n+1)i\pi}{4}}\right) = 2^{\frac{n+1}{2}} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)$$

$$C_n = \text{Im}\left(i(1-i)^{n+1} - i\right) = \text{Re}\left((1-i)^{n+1}\right) - 1 = \text{Re}\left(\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^{-\frac{(n+1)i\pi}{4}}\right) - 1 = 2^{\frac{n+1}{2}} \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right) - 1$$

Solution 60.

Posons $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} ke^{ik\alpha}$ de sorte que $S_n = \text{Re}(U_n)$ et $T_n = \text{Im}(U_n)$. On fait apparaître un télescopage.

$$\begin{aligned}
\left(e^{i\alpha} - 1\right) U_n &= \sum_{k=0}^{n} \left(ke^{i(k+1)\alpha} - ke^{ik\alpha}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)e^{i(k+1)\alpha} - ke^{ik\alpha}\right) - \sum_{k=0}^{n} e^{i(k+1)\alpha} \\
&= (n+1)e^{i(n+1)\alpha} - \frac{e^{i\alpha}\left(e^{i(n+1)\alpha} - 1\right)}{e^{i\alpha} - 1} \\
&= (n+1)e^{i(n+1)\alpha} - \frac{e^{i(n+1)\alpha} - 1}{1 - e^{-i\alpha}}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
U_n &= \frac{(n+1)e^{i(n+1)\alpha}}{e^{i\alpha} - 1} - \frac{e^{i(n+1)\alpha} - 1}{\left(e^{i\alpha} - 1\right)\left(1 - e^{-i\alpha}\right)} \\
&= \frac{(n+1)e^{i(n+1)\alpha}\left(1 - e^{-i\alpha}\right) - \left(e^{i(n+1)\alpha} - 1\right)}{\left(e^{i\alpha} - 1\right)\left(1 - e^{-i\alpha}\right)} \\
&= \frac{ne^{i(n+1)\alpha} - (n+1)e^{in\alpha} + 1}{2(\cos\alpha - 1)}
\end{aligned}$$

On en déduit le résultat voulu en passant aux parties réelle et imaginaire.

Remarque. On aurait aussi pu raisonner par récurrence. ■

Solution 61.

Via la formule du binôme

$$(1+i)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} i^k$$

En séparant les termes d'indices pairs et impairs,

$$(1+i)^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} i^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} i^{2k+1} = S_n + iT_n$$

D'autre part, $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ donc

$$(1+i)^{2n} = 2^n e^{\frac{ni\pi}{2}}$$

En identifiant parties réelle et imaginaire, on en déduit que

$$S_n = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad T_n = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Plus précisément,

- si $n \equiv 0[4]$, $S_n = 2^n$ et $T_n = 0$;
- si $n \equiv 1[4]$, $S_n = 0$ et $T_n = 2^n$;
- si $n \equiv 2[4]$, $S_n = -2^n$ et $T_n = 0$;
- si $n \equiv 3[4]$, $S_n = 0$ et $T_n = -2^n$.

Solution 62.

1. On utilise la méthode de l'arc-moitié :

$$z^k - 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{\frac{ik\pi}{n}} = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)}$$

   Puisque $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\frac{k\pi}{n} \in]0,\pi[$ et donc $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$. Il s'ensuit que $|z^k - 1| = \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et qu'un argument de $z^k - 1$ est $\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2}$.

2. Remarquons que pour $k = 0$, $|z^k - 1| = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0$ et donc que

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1| = 2\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

   Ainsi S est la partie imaginaire de

$$T = 2\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}$$

   Classiquement

$$T = 2\frac{e^{i\pi}-1}{e^{\frac{i\pi}{n}}-1} = \frac{-4}{2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{\frac{i\pi}{2n}}} = \frac{2ie^{-\frac{i\pi}{2n}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

   Finalement

$$S = \mathrm{Im}(T) = \frac{2\cos\left(-\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

   Puisque $n > 1$, $\frac{\pi}{2n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on peut écrire

$$S = \frac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$$

Solution 63.

1. Si on avait $\omega = 1$, on aurait $\frac{\pi}{n} \equiv 0[2\pi]$ puis $1 \equiv 0[2n]$, ce qui est faux. Ainsi $\omega \neq 1$.
2. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\omega \neq 1$. Ainsi
$$A_n = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{1-e^{i\pi}}{1-\omega} = \frac{2}{1-\omega}$$
3. Classiquement
$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re}\left(\omega^k\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k\right) = \operatorname{Re}(A_n)$$
$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im}\left(\omega^k\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k\right) = \operatorname{Im}(A_n)$$
En utilisant la méthode de l'arc-moitié :
$$A_n = \frac{2}{e^{\frac{i\pi}{2n}}\left(e^{-\frac{i\pi}{2n}} - e^{\frac{i\pi}{2n}}\right)} = \frac{2e^{-\frac{i\pi}{2n}}}{-2i\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{ie^{-\frac{i\pi}{2n}}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{i\left(\cos\frac{\pi}{2n} - i\sin\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2n} + i\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = 1 + i\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$
On en déduit les résultats voulus.
4. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,
$$\omega^{2k} - 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 2ie^{\frac{ik\pi}{n}} \sin\frac{k\pi}{n}$$
Puisque $\frac{k\pi}{n} \in [\![0, n-1]\!]$, $\sin\frac{k\pi}{n} \geqslant 0$ de sorte que
$$|\omega^{2k} - 1| = 2|i|\left|e^{\frac{ik\pi}{n}}\right|\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$$
Ainsi
$$B_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = 2S_n = \frac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

Solution 64.

Via la formule du binôme
$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k$$
En séparant les termes d'indices pairs et impairs,
$$(1+i)^n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} i^{2k} + \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} i^{2k+1} = S_n + iT_n$$
D'autre part, $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ donc
$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{ni\pi}{4}}$$
En identifiant parties réelle et imaginaire, on en déduit que
$$S_n = 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \qquad T_n = 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Solution 65.

1. Supposons $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. On remarque que $D_n(\theta)$ est la somme de $2n+1$ termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta} \neq 1$.

$$\begin{aligned}
D_n(\theta) &= e^{-ni\theta} \cdot \frac{e^{(2n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \\
&= e^{-in\theta} \cdot \frac{e^{\frac{(2n+1)i\theta}{2}} \left(e^{\frac{(2n+1)i\theta}{2}} - e^{-\frac{(2n+1)i\theta}{2}} \right)}{e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right)} \\
&= \frac{e^{\frac{(2n+1)i\theta}{2}} - e^{-\frac{(2n+1)i\theta}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \\
&= \frac{2i\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Si $\theta \equiv 0[2\pi]$, on a évidemment $D_n(\theta) = 2n+1$.

2. Supposons $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. Posons $S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{\left(k+\frac{1}{2}\right)i\theta}$. Alors

$$\begin{aligned}
S_n(\theta) &= e^{\frac{i\theta}{2}} \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} \\
&= e^{\frac{i\theta}{2}} \cdot \frac{e^{(n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \\
&= e^{\frac{i\theta}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{(n+1)i\theta}{2}} \left(e^{\frac{(n+1)i\theta}{2}} - e^{-\frac{(n+1)i\theta}{2}} \right)}{e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}} \right)} \\
&= e^{\frac{(n+1)i\theta}{2}} \cdot \frac{2i\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= e^{\frac{(n+1)i\theta}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_n(\theta) &= \sum_{k=0}^{n} D_k(\theta) \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right) \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \operatorname{Im}(S_n(\theta)) \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{(n+1)i\theta}{2}}\right) \\
&= \frac{\sin^2\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Lorsque $\theta \equiv 0[2\pi]$,

$$F_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$$

Solution 66.

On somme séparément les termes d'indice pair et les termes d'indice impair :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(i\sqrt{3})^p &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}(i\sqrt{3})^{2k} \\ &\quad+ \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}(i\sqrt{3})^{2k+1} \\ &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}(-3)^k \\ &\quad+ i\sqrt{3}\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}(-3)^k\end{aligned}$$

donc

$$S_n = \mathfrak{R}\left[\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(i\sqrt{3})^p\right].$$

D'après la formule du binôme,

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(i\sqrt{3})^p = (1+i\sqrt{3})^n$$

et comme

$$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3},$$

on trouve enfin que

$$\begin{aligned}S_n &= \mathfrak{R}(2^n e^{in\pi/3}) \\ &= 2^n\cos\frac{n\pi}{3}.\end{aligned}$$

Solution 67.

1. D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned}S_1+S_2+S_3 &= \sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k} \\ &= (1+1)^{3n} = 2^{3n} = 8^n.\end{aligned}$$

Remarquons que $j^{3k+1} = (j^3)^k j = j$ et que $j^{3k+2} = (j^3)^k j^2 = j^2$. Toujours d'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned}S_1+jS_2+j^2S_3 &= \sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}j^k \\ &= (1+j)^{3n} \\ &= (e^{i\pi/3})^{3n} = (-1)^n.\end{aligned}$$

Remarquons aussi que $(j^2)^{3k+1} = j^2$ et que $(j^2)^{3k+2} = j^4$. D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned}S_1+j^2S_2+j^4S_3 &= \sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}(j^2)^k \\ &= (1+j^2)^{3n} \\ &= (e^{-i\pi/3})^{3n} = (-1)^n.\end{aligned}$$

2. Rappelons que $1+j+j^2=0$ et que $1+j^2+j^4=0$. La somme des trois sommes calculées plus haut nous donne

$$3S_1 = 8^n + 2(-1)^n.$$

Multiplions la deuxième somme par j^2 et la troisième par j, et sommons : on trouve

$$3S_2 = 8^n + (-1)^n(j+j^2) = 8^n - (-1)^n.$$

Multiplions la deuxième somme par j et la troisième par j^2, et sommons : on trouve

$$3S_3 = 3S_2 = 8^n - (-1)^n.$$

Remarque. On peut démontrer que $S_2 = S_3$ en n'utilisant que la propriété de symétrie des coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}\binom{3n}{3k+1} &= \binom{3n}{3n-(3k+1)} \\ &= \binom{3n}{3(n-k-1)+2}.\end{aligned}$$

■

Solution 68.

Bien entendu, il faut appliquer la formule du binôme (les coefficients binomiaux sont là pour y faire penser), et surtout ne pas calculer séparément S_n et S'_n, qui sont respectivement les parties réelle et imaginaire de la somme

$$C_n = e^{i\alpha}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{i\beta})^k = e^{i\alpha}(1+e^{i\beta})^n.$$

Factorisons par l'angle moitié :

$$(1+e^{i\beta})^n = 2^n\cos^n\frac{\beta}{2}e^{in\beta/2}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}S_n &= 2^n\cos^n\frac{\beta}{2}\cos\Big(\alpha+\frac{n\beta}{2}\Big), \\ S'_n &= 2^n\cos^n\frac{\beta}{2}\sin\Big(\alpha+\frac{n\beta}{2}\Big).\end{aligned}$$

La somme S''_n est la partie réelle d'une somme géométrique :

$$e^{i\alpha}\sum_{k=0}^{n}(-e^{i\beta})^k.$$

Si $\beta = \pi \mod 2\pi$, alors

$$S''_n = \mathfrak{R}[(n+1)e^{i\alpha}] = (n+1)\cos\alpha.$$

Sinon, d'après la formule de la série géométrique,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-e^{i\beta})^k &= \frac{1-e^{i(n+1)(\beta+\pi)}}{1+e^{i\beta}} \\ &= i^n e^{i\beta n/2}\frac{\sin[(n+1)(\beta+\pi)/2]}{\cos\beta/2},\end{aligned}$$

donc

$$S''_n = \frac{\sin[(n+1)(\beta+\pi)/2]}{\cos\beta/2}\cdot\mathfrak{R}(i^n e^{i(\alpha+n\beta/2)}).$$

On peut simplifier cette dernière partie réelle en discutant sur la parité de n. Si $n = 2p$, alors

$$\mathfrak{R}(i^n e^{i(\alpha+n\beta/2)}) = (-1)^p \cos(\alpha + n\beta/2)$$

et si $n = 2p + 1$, alors

$$\mathfrak{R}(i^n e^{i(\alpha+n\beta/2)}) = (-1)^{p+1} \sin(\alpha + n\beta/2).$$

Solution 69.

La somme $R_n + iI_n$ est la somme géométrique

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}\right)^k.$$

Traitons pour commencer le cas singulier : $e^{i\alpha}/\cos\alpha = 1$ si, et seulement si, $\cos\alpha = 1$ et dans ce cas,

$$R_n + iI_n = n + 1,$$

donc $R_n = n + 1$ et $I_n = 0$ (unicité de la représentation cartésienne).

Dans le cas général, lorsque $\cos\alpha \notin \{0, 1\}$, on remarque que $e^{i\alpha}/\cos\alpha = 1 + i\tan\alpha$ et donc

$$R_n + iI_n = \frac{1 - e^{i(n+1)\alpha}/\cos^{n+1}\alpha}{-i\tan\alpha},$$

d'où

$$R_n = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\cos^{n+1}\alpha\tan\alpha},$$
$$I_n = i\frac{\cos^{n+1}\alpha - \cos(n+1)\alpha}{\cos^{n+1}\alpha\tan\alpha}.$$

Solution 70.

Posons

$$S_n = e^{ix} + e^{3ix} + \cdots + e^{(2n+1)x}$$

et $R_n = \mathrm{Re}(S_n)$ et $I_n = \mathrm{Im}(S_n)$ de sorte que

$$S_n = \frac{R_n}{S_n}.$$

- *Cas 1 :* $x \equiv 0\,[\pi]$. Dans ce cas S_n n'est pas défini car $I_n = \mathrm{Im}(S_n) = 0$.
- *Cas 2 :* $x \not\equiv 0\,[\pi]$. On a alors classiquement

  $$S_n = \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} e^{inx}$$

  et

  $$R_n = \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}\cos(nx) \text{ et } I_n = \frac{\sin^2(nx)}{\sin(x)}.$$

  On a

  $$I_n = 0 \textit{ si et seulement si } nx \equiv 0\,[\pi]$$

  ie $x \equiv 0\,[\pi/n]$.
- *Conclusion* : S_n est bien définie *si et seulement si* $x \not\equiv 0\,[\pi/n]$ et dans ce cas, on a

  $$S_n = \frac{R_n}{S_n} = \frac{\cos(nx)}{\sin(nx)} = \mathrm{cotan}(nx).$$

Solution 71.

Puisque $-7 = e^{\ln(7)+i\pi}$, l'équation $e^z = -7$ admet pour solutions les nombres de la forme $\ln(7) + i\pi + 2i\pi k$, avec $k \in \mathbb{Z}$. De même $-2i = e^{\ln(2)+3i\pi/2}$, l'équation $e^z = -2i$ admet pour solutions les nombres de la forme $\ln(2) + 3i\pi/2 + 2i\pi k$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Puisque

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = e^{\ln(\sqrt{2})+i\pi/4},$$

l'équation $e^z = 1 + i$ admet pour solutions les nombres de la forme $\ln(\sqrt{2}) + i\pi/4 + 2i\pi k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Solution 72.

1. En posant $\zeta = e^z$, l'équation est équivalente à
$$\zeta + (1/\zeta) = 1,$$
c'est-à-dire $\zeta^2 - \zeta + 1 = 0$, de solutions
$$e^{i\pi/3},\ \ e^{-i\pi/3}.$$
L'ensemble des solutions de l'équation initiale est donc
$$\left(i\frac{\pi}{3} + 2i\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-i\frac{\pi}{3} + 2i\pi\mathbb{Z}\right).$$

2. En posant $\zeta = e^z$, l'équation est équivalente à
$$\zeta^2 - 2i\zeta + 1 = 0,$$
de solutions
$$(1+\sqrt{2})e^{i\pi/2},\ \ (\sqrt{2}-1)e^{-i\pi/2}.$$
L'ensemble des solutions est donc égal à
$$\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + i\frac{\pi}{2} + 2i\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right) - i\frac{\pi}{2} + 2i\pi\mathbb{Z}\right).$$