

DEVOIR SURVEILLÉ N°02 : CORRIGÉ

Problème 1 — Formule de Vandermonde

1. Evident.
2. On remarque que

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!k + n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

3. **Initialisation** : Soit $(m, p) \in \mathbb{N}^2$.

$$\sum_{k=0}^p \binom{0}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{0}{0} \binom{m}{p} = \binom{m}{p}$$

car $\binom{0}{k} = 0$ lorsque $k > 0$ avec les conventions adoptées. Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Supposons \mathcal{P}_n vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit $(m, p) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \binom{n+1}{k} \binom{m}{p-k} &= \sum_{k=0}^p \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \binom{m}{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} + \sum_{k=0}^p \binom{n}{k-1} \binom{m}{p-k} \\ &= \binom{m+n}{p} + \sum_{k=1}^p \binom{n}{k-1} \binom{m}{p-k} \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n \text{ et car } \binom{n}{-1} = 0 \text{ par convention} \\ &= \binom{m+n}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \binom{m}{p-1-k} \quad \text{par changement d'indice} \\ &= \binom{m+n}{p} + \binom{m+n}{p-1} \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n \\ &= \binom{m+n+1}{p} \end{aligned}$$

Conclusion : \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Lorsque $p = m = n$, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Par symétrie des coefficients binomiaux, on obtient le résultat voulu.

5. En effectuant le changement d'indice $\ell = n - k$, on obtient

$$S_n = \sum_{\ell=0}^n (n-\ell) \binom{n}{n-\ell}^2 = n \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell}^2 - \sum_{\ell=0}^n \ell \binom{n}{\ell}^2 = n \binom{2n}{n} - S_n$$

$$\text{Ainsi } S_n = \frac{1}{2} n \binom{2n}{n}.$$

6. Supposons n impair. La question précédente montre $2S_n = n \binom{2n}{n}$. Comme n est impair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$. Ainsi $2S_n = (2p+1) \binom{2n}{n}$ ou encore $\binom{2n}{n} = 2 \left(S_n - p \binom{2n}{n} \right)$. Comme S_n et $\binom{2n}{n}$ sont entiers, $\binom{2n}{n}$ est pair.

SOLUTION 1.

1. On utilise une formule de factorisation.

$$s = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2 \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{4\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Or

$$\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

et on a donc bien $s = 2p$.

2. En utilisant la formule de duplication du sinus,

$$p \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4} \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$$

Or

$$\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Ainsi

$$p \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4} \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Or $\frac{2\pi}{5}$ n'est pas un multiple entier de π donc $p \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \neq 0$, ce qui permet d'affirmer que $p = -\frac{1}{4}$ et donc $s = -\frac{1}{2}$.

3. Puisque $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ ont pour somme $s = -\frac{1}{2}$ et pour produit $p = -\frac{1}{4}$, ils sont racines du trinôme $X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$. Ces racines sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Comme $\frac{2\pi}{5} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ et donc

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

REMARQUE. On aurait aussi pu remarquer que

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(2 \times \frac{2\pi}{5}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$$

Ainsi

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = s = -\frac{1}{2}$$

ou encore

$$2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \frac{1}{2} = 0$$

Ainsi $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine du trinôme $2X^2 + X - \frac{1}{2}$. Ces racines sont à nouveau $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Comme précédemment, on invoque que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ pour en déduire que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Puis

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = s - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

■

SOLUTION 2.

1. On trouve $S_0 = \binom{0}{0} = 1$, $S_1 = \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 3$ et $S_2 = \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \binom{2}{0} + \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 7$.

2. D'après la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

La suite (2^n) étant géométrique,

$$\sum_{k=0}^n 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

3. On procède comme indiqué dans l'énoncé. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \binom{j}{i}$$

D'après la question précédente,

$$S_n = \sum_{j=0}^n 2^j = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

SOLUTION 3.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + my - z = 1 \\ x + y + mz = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ (m-1)y = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (m+1)z = m-1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

Il y a alors plusieurs cas à traiter.

Cas $m = 1$

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\{(1-y, y, 0), y \in \mathbb{R}\} = (1, 0, 0) + \mathbb{R}(-1, 1, 0)$$

Cas $m = -1$

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y = 0 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

Le système n'a donc pas de solution.

Cas $m \notin \{-1, 1\}$

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2m}{m+1} \\ y = 0 \\ z = \frac{m-1}{m+1} \end{cases}$$

Le système (\mathcal{S}) admet donc le triplet $(\frac{2m}{m+1}, 0, \frac{m-1}{m+1})$ pour unique solution.

SOLUTION 4.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4k(k+1)}\right) = \sin\frac{\pi}{4k} \cos\frac{1}{4(k+1)} - \cos\frac{\pi}{4k} \sin\frac{1}{4(k+1)}$$

puis

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4k(k+1)}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4k}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4(k+1)}\right)} = \tan\frac{\pi}{4k} - \tan\frac{\pi}{4(k+1)}$$

Par télescopage,

$$u_n = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4(n+1)}\right) = 1 - \tan\left(\frac{\pi}{4(n+1)}\right)$$

2. On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.