Devoir surveillé n°9 : corrigé

Problème 1 — Intégrales dépendant d'un paramètre

Partie I –

1. **a.** sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc F et G sont continues comme produits de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b. $\sin x \underset{x\to0}{\sim} x$ donc $\lim_{x\to0} F(x) = 1$.
   $1-\cos x \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ donc $G(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{x}{2}$ et $\lim_{x\to0} G(x) = 0$.

2. **a.** sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc F et G sont dérivables comme produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \qquad\qquad G'(x) = \frac{x\sin x + \cos x - 1}{x^2}$$

   b. On a $\sin x \underset{x\to0}{=} x + o(x^2)$ donc $F(x) \underset{x\to0}{=} 1 + o(x)$. Ceci prouve que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = 0$.
   De même, $1-\cos x \underset{x\to0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $G(x) \underset{x\to0}{=} \frac{x}{2} + o(x)$. Ceci prouve que G est dérivable en 0 et que $G'(0) = \frac{1}{2}$.

3. **a.** F s'annule en les $a_k = k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. De plus, la suite $(a_k)_{k\geqslant1}$ est strictement croissante.

   b. G s'annule en les $b_k = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. De plus, la suite $(b_k)_{k\geqslant1}$ est strictement croissante.
   La suite $(b_k)_{k\geqslant1}$ est une suite extraite de la suite $(a_k)_{k\geqslant1}$ car $b_k = a_{2k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

4. **a.** F est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[a_k, a_{k+1}]$. F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $]a_k, a_{k+1}[$. Enfin, $F(a_k) = F(a_{k+1}) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.

   b. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ donc F' et h ont même signe sur $\mathbb{R}_+^*$.

   c. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = x\sin x$.
   Pour $x \in [a_k, a_{k+1}]$, $x > 0$ et sin est de signe constant sur $[a_k, a_{k+1}]$ et ne s'annule qu'en a_k et a_{k+1}. Donc h' est de signe constant sur $[a_k, a_{k+1}]$ et ne s'annule qu'en a_k et a_{k+1}. Ainsi h est strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$.

   d. D'après **I.4.a**, F' et donc h s'annule au moins une fois sur $]a_k, a_{k+1}[$. D'après la question précédente, h est strictement monotone donc injective. Ainsi h s'annule exactement une fois sur $]a_k, a_{k+1}[$ et le réel x_k est donc unique.

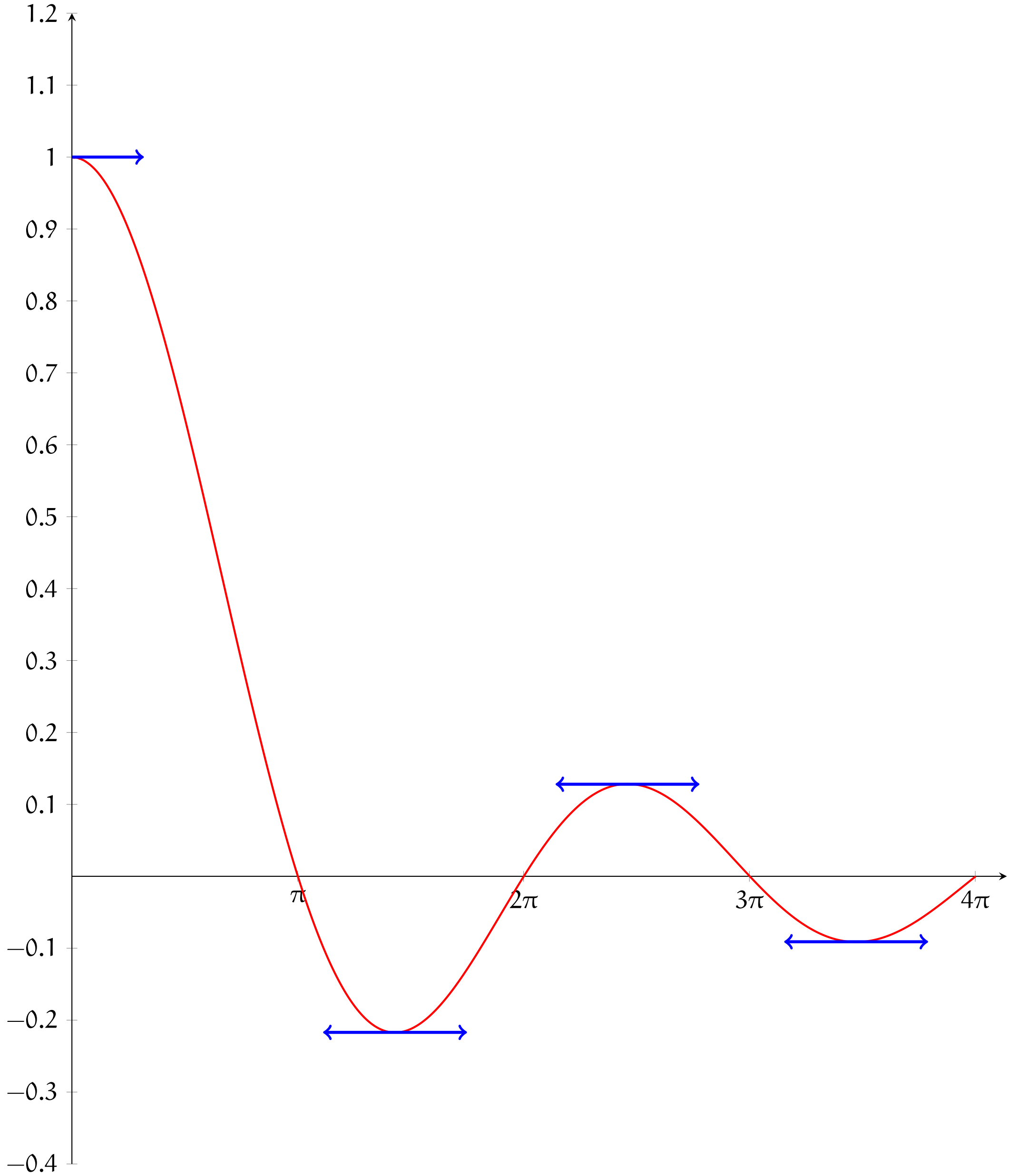
   e. Calculons les valeurs de h en a_k et $a_k + \frac{\pi}{2}$:

$$h(a_k) = h(k\pi) = (-1)^k k\pi \qquad\qquad h\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right) = h\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1}$$

   Ainsi $h(a_k)$ et $h\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right)$ sont de signe opposés. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, h s'annule sur $\left]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi $x_k \in \left]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}\right[$.

   f. $x_k > a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Or $\lim_{k\to+\infty} a_k = +\infty$ donc $\lim_{k\to+\infty} x_k = +\infty$.
   De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k\pi < x_k < k\pi + \frac{\pi}{2}$ donc $1 < \frac{x_k}{k\pi} < 1 + \frac{1}{2k}$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{k\to+\infty} \frac{x_k}{k\pi} = 1$. Par conséquent, $x_k \underset{k\to+\infty}{\sim} k\pi$.

5. Les points d'intersection de $\mathcal{C}_F$ avec l'axe des abscisses ont pour abscisses a_1, a_2, a_3, a_4 i.e. $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$. $\mathcal{C}_F$ admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses $0, x_1, x_2, x_3$.



Partie II –

1. f, $t \mapsto \cos(xt)$ et $t \mapsto \sin(xt)$ sont continues sur $[0,1]$ donc $t \mapsto f(t)\cos(xt)$ et $t \mapsto f(t)\sin(xt)$ le sont aussi. Les intégrales $I_f(x)$ et $J_f(x)$ sont donc bien définies.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in [0,1]$, $\cos(-xt) = \cos(xt)$ et $\sin(-xt) = -\sin(xt)$. Donc $I_f(-x) = I_f(x)$ et $J_f(-x) = -J_f(x)$. Ainsi I_f est paire et J_f est impaire.
3. **a.** Remarquons d'abord que $I_f(x) + iJ_f(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)e^{ixt}\,dt$. Comme f et $t \mapsto \frac{e^{ixt}}{ix}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on a en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I_f(x) + iJ_f(x) &= \left[f(t)\frac{e^{ixt}}{ix}\right]_0^1 - \int_0^1 f'(t)\frac{e^{ixt}}{ix}\,dt \\ &= \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} - \frac{1}{ix}\int_0^1 f'(t)e^{ixt}\,dt \end{aligned}$$

b. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, f et f' sont continues sur le segment $[0,1]$ donc bornées.

c. Soit $x > 0$. Par inégalité triangulaire :

$$|I_f(x) + iJ_f(x)| \leqslant \left|\frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix}\right| + \left|\frac{1}{ix}\int_0^1 f'(t)e^{ixt}\,dt\right|$$

Or $x > 0$ donc $|ix| = x$. Donc par inégalité triangulaire :

$$\left|\frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix}\right| \leqslant \frac{|f(1)| + |f(0)|}{x} \leqslant \frac{2M}{x}$$

De plus, en utilisant l'inégalité de continuité de l'intégrale :

$$\left|\frac{1}{ix}\int_0^1 f'(t)e^{ixt}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^1 |f'(t)e^{ixt}|\,dt \leqslant \frac{1}{x}\int_0^1 M'\,dt = \frac{M'}{x}$$

Donc, en posant $A = 2M + M'$, on a $|I_f(x) + iJ_f(x)| \leqslant \frac{A}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

d. $\lim_{x\to+\infty} \frac{A}{x} = 0$ donc, d'après la question précédente, $\lim_{x\to+\infty} |I_f(x)+iJ_f(x)| = 0$. Par conséquent, $\lim_{x\to+\infty} I_f(x)+iJ_f(x) = 0$. Par passage aux parties réelle et imaginaire, on a $\lim_{x\to+\infty} I_f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} J_f(x) = 0$.

e. Puisque I_f est paire et que I_g est impaire, $\lim_{x\to-\infty} I_f(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} J_f(x) = 0$.

4. **a.** $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

b. $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin'(x)| = |\cos(x)| \leqslant 1$. Soit $u \in \mathbb{R}$. On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis entre 0 et u : $|\sin(u) - \sin(0)| \leqslant |u - 0|$ i.e. $|\sin(u)| \leqslant |u|$.

c. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}|I_f(x) - I_f(y)| &= \left|\int_0^1 f(t)(\cos(xt) - \cos(yt))\,dt\right| \\ &= \left|-2\int_0^1 f(t)\sin\left(t\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(t\frac{x-y}{2}\right)\,dt\right| \\ &\leqslant 2\int_0^1 \left|f(t)\sin\left(t\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(t\frac{x-y}{2}\right)\right|\,dt\end{aligned}$$

Or pour $t \in [0,1]$, $\left|\sin\left(t\frac{x+y}{2}\right)\right| \leqslant 1$ et $\left|\sin\left(t\frac{x-y}{2}\right)\right| \leqslant \left|t\frac{x-y}{2}\right| = \frac{t}{2}|x-y|$ d'après **II.4.b**. Par conséquent,

$$|I_f(x) - I_f(y)| \leqslant |x-y|\int_0^1 t|f(t)|\,dt$$

5. Posons $K = \int_0^1 t|f(t)|\,dt$. La question précédente montre que I_f est K-lipschitzienne donc continue.

6. Pour $f = 1$, on a $I_f = F$ et $J_f = G$.

Problème 2 — Equation intégrale

Partie I –

1. Remarquons tout d'abord que la relation (1) peut s'écrire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x tf(t)\,dt = g(x)$$

On a donc $f(x) = g(x) + x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ et $x \mapsto \int_0^x tf(t)\,dt$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ comme primitives de fonctions continues. Puisque $x \mapsto x$ et g sont également de classe $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ et $x \mapsto \int_0^x tf(t)\,dt$ sont donc de classe $\mathcal{C}^2$ comme primitives de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Puisque $x \mapsto x$ et g sont également de classe $\mathcal{C}^2$, f de classe $\mathcal{C}^2$.
En dérivant une première fois la relation (1), on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) - \int_0^x f(t)\,dt = g'(x)$$

En dérivant cette relation une seconde fois, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) - f(x) = g''(x)$$

2. Soit f solution de (1) : il existe donc $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = Ae^x + Be^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En reportant dans (1), on voit que f est solution de (1) *si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (A-B)x + (A+B) = g(x)$$

On rappelle que la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto x)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.

a. Si g est nulle, f est solution de (1) *si et seulement si* $\begin{cases} A-B=0 \\ A+B=0 \end{cases}$ i.e. $A=B=0$. L'unique solution de (1) est donc la solution nulle.

b. Si g est constante, notons C cette constante. f est solution de (1) *si et seulement si* $\begin{cases} A-B=0 \\ A+B=C \end{cases}$ i.e. $A=B=\frac{C}{2}$. L'unique solution est donc $x \mapsto C\operatorname{ch} x$.

c. Si g est affine, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $g(x) = \lambda x + \mu$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. f est solution de (1) *si et seulement si* $\begin{cases} A-B=\lambda \\ A+B=\mu \end{cases}$ i.e. $A = \frac{\lambda+\mu}{2}$ et $B = \frac{\mu-\lambda}{2}$. L'unique solution est donc $x \mapsto \lambda\operatorname{sh} x + \mu\operatorname{ch} x$.

3. Soient f_1 et f_2 deux solutions éventuelles de (1). Par linéarité de l'intégrale, $f_1 - f_2$ est solution d'une équation du type (1) avec un second membre nul. La question **I.2.a** montre que $f_1 - f_2 = 0$ i.e. $f_1 = f_2$. Ainsi (1) admet au plus une solution.

4. Soit f une fonction de la forme donnée par l'énoncé. f est bien dérivable puisque les intégrales sont des primitives donc des fonctions dérivables. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{e^x}{2}\left[\int_0^x e^{-t}g''(t)\,dt + k_A\right] + \frac{e^{-x}}{2}\left[\int_0^x e^{t}g''(t)\,dt + k_B\right]$$

On en déduit que f' est à nouveau dérivable et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = \frac{e^x}{2}\left[\int_0^x e^{-t}g''(t)\,dt + k_A\right] - \frac{e^{-x}}{2}\left[\int_0^x e^{t}g''(t)\,dt + k_B\right] + g''(x) = f(x) + g''(x)$$

Autrement dit, f est solution de (2).

5. Soit f une solution de (2) vérifiant $f(0) = g(0)$ et $f'(0) = g'(0)$. En intégrant la relation $f''(t) - f(t) = g''(t)$ entre 0 et x, on obtient $f'(x) - f'(0) - F(x) = g'(x) - g'(0)$ où F désigne la primitive de f nulle en 0. Puisque $f'(0) = g'(0)$, on a donc $f'(t) - F(t) = g'(t)$. En intégrant à nouveau entre 0 et x, on obtient $f(x) - f(0) - \int_0^x F(t)\,dt = g(x) - g(0)$. Or $f(0) = g(0)$ et en intégrant par parties

$$\int_0^x F(t)\,dt = [(t-x)F(t)]_0^x - \int_0^x (t-x)F'(t)\,dt = \int_0^x (x-t)f(t)\,dt$$

Ainsi $f(x) - \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ i.e. f est solution de (1).

6. D'après la question **I.4** et en utilisant le fait que $g'' = \exp$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x}{2}(x + k_A) - \frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{e^{2x}}{2} + k_B\right)$$

Les conditions $f(0) = g(0)$ et $f'(0) = g'(0)$ de la question **I.5**, fournissent $\frac{k_A}{2} - \frac{k_B}{2} = 1$ et $\frac{k_A}{2} + \frac{k_B}{2} = 1$ i.e. $k_A = 2$ et $k_B = 0$. L'unique solution de (1) est donc $x \mapsto e^x\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

Partie II –

1. On raisonne comme à la question **I.1** pour montrer que $A(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus $A(f)'(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $A(f)'$ est donc elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ i.e. $A(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et $A(f)'' = f$.
2. Pour tout $f \in E$, $A(f)$ est également continue puisqu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ d'après la question précédente. Ainsi $A(E) \subset E$. De plus, A est linéaire par linéarité de l'intégrale. Ainsi A est un endomorphisme de E.
Soit $f \in \operatorname{Ker} A$. On a donc $A(f) = 0$ et a fortiori $A(f)'' = 0$. Or $A(f)'' = f$ donc $f = 0$, d'où $\operatorname{Ker} A = \{0_E\}$ et A est injectif.
3. Soient $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$. On procède à nouveau par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
U \circ A(f)(x) &= \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)A(f)(t)\,dt = -\left[\operatorname{ch}(x-t)A(f)(t)\right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)A(f)'(t)\,dt \\
&= -A(f)(x) - \left[\operatorname{sh}(x-t)A(f)'(t)\right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)A(f)''(t)\,dt \\
&= -A(f)(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)f(t)\,dt = -A(f)(x) + U(f)(x)
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $A(f)(0) = A(f)'(0) = 0$ et $A(f)'' = f$. Les intégrations par parties sont légitimes car $A(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$. L'égalité précédente étant vraie pour tout réel x, on a $U \circ A(f) = U(f) - A(f)$. Ceci étant maintenant vrai pour tout $f \in E$, on en déduit $U \circ A = U - A$.
4. Faisons l'hypothèse de récurrence $HR(n)$ suivante

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(t)\,dt$$

$HR(1)$ est vraie par définition de A. Supposons $HR(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. En intégrant par parties :

$$A^{n+1}(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}A(f)(t)\,dt = -\left[\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}A(f)(t)\right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}A(f)'(t)\,dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}A(f)'(t)\,dt$$

car $A(f)(0) = 0$. En intégrant à nouveau par parties :

$$A^{n+1}(f)(x) = -\left[\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}A(f)'(t)\right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}A(f)''(t)\,dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}f(t)\,dt$$

car $A(f)'(0) = 0$ et $A(f)'' = f$.
5. **a.** Puisque sh est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction sh entre 0 et u à l'ordre $2n$:

$$\left|\operatorname{sh} u - \sum_{p=0}^{2n} \frac{\operatorname{sh}^{(p)}(0)}{p!}u^p\right| \leqslant M\frac{|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

où M désigne le maximum de $|\operatorname{sh}^{(2n+1)}|$ sur $[0,u]$ ou $[u,0]$ suivant le signe de u.
Or pour p pair, $\operatorname{sh}^{(p)} = \operatorname{sh}$ et donc $\operatorname{sh}^{(p)}(0) = 0$ et pour p impair $\operatorname{sh}^{(p)} = \operatorname{ch}$ et donc $\operatorname{sh}^{(p)}(0) = 1$. Ainsi $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n} \frac{\operatorname{sh}^{(p)}(0)}{p!}u^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!}$.
On a donc également $\operatorname{sh}^{(2n+1)} = \operatorname{ch}$. Puisque ch est paire et croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $M = \operatorname{ch} u$ en distinguant les cas $u \geqslant 0$ et $u \leqslant 0$. On en déduit donc la formule demandée.

   b. En utilisant l'expression de $A_n(f)(x)$ trouvée en **II.4**, on peut écrire :

$$U(f)(x) - U_n(f)(x) = \int_0^x \left(\operatorname{sh}(x-t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-t)^{2k-1}}{(2k-1)!}\right) f(t)\,dt$$

Par conséquent

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leqslant \left|\int_0^x \left|\operatorname{sh}(x-t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!}\right| |f(t)|\,dt\right|$$

Mais grâce à la majoration de la question **II.5.a**, on a donc

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leqslant \left|\int_0^x \frac{\operatorname{ch}(x-t)|x-t|^{2n+1}}{(2n+1)!} |f(t)| \, dt\right|$$

On en déduit par inégalité de la moyenne

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leqslant M \left|\int_0^x |f(t)| \, dt\right|$$

où M désigne le maximum de $t \mapsto \frac{\operatorname{ch}(x-t)|x-t|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ sur l'intervalle $[0,x]$ ou $[x,0]$. Par changement de variables, M est aussi le maximum de $t \mapsto \frac{\operatorname{ch}(t)|t|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ sur l'intervalle $[0,x]$ ou $[x,0]$. Cette fonction étant paire et croissante sur $\mathbb{R}_+$, on trouve $M = \frac{\operatorname{ch}(x)|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ en distinguant les cas $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$.
Les théormèmes de comparaison sur les suites usuelles donnent $|x|^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{=} o((2n+1)!)$. Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{ch}(x)|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left|\int_0^x |f(t)| \, dt\right| = 0$$

Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} U(f)(x) - U_n(f)(x) = 0$.

c. Soient $f \in E$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $A \circ U_n = U_n \circ A = U_{n+1} - A$.
On peut donc écrire

$$\begin{aligned} U \circ A(f)(x) &= (U - U_n) \circ A(f)(x) + U_n \circ A(f)(x) = (U - U_n) \circ A(f)(x) + (U_{n+1} - A)(f)(x) \\ &= (U - U_n) \circ A(f)(x) + (U_{n+1} - U)(f)(x) + (U - A)(f)(x) \end{aligned}$$

En appliquant la question précédente, on a $(U_{n+1} - U)(f)(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On peut également appliquer la question précédente à $A(f)$ qui est bien une fonction de E de sorte que $(U - U_n) \circ A(f)(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par unicité de la limite, on a donc $U \circ A(f)(x) = (U - A)(f)(x)$. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $U \circ A(f) = (U - A)(f)$. Ceci étant valable pour tout $f \in E$, on a finalement $U \circ A = U - A$.

6. **a.** On a $(I-A)\circ(I+U) = I-A+U-A\circ U = I$ d'après la question **II.5.c**. De même, $(I+U)\circ(I-A) = I-A+U+U\circ A = I$ d'après la question **II.3**. Ainsi $I - A$ et $I + U$ sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

b. Une fonction f de E est solution de (1) *si et seulement si* $(I - A)(f) = g$ i.e. $f = (I + U)(g)$. L'unique solution f de (1) est donc définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = g(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) g(t) \, dt$$

c. g est bien continue mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$: on ne peut plus utiliser les résultats de la première partie.
Tout d'abord, remarquons que f est paire. En effet, en utilisant la parité de g :

$$f(-x) = g(-x) + \int_0^{-x} \operatorname{sh}(-x-t) g(t) \, dt = g(x) + \int_0^{-x} \operatorname{sh}(-x-t) g(-t) \, dt$$

Effectuons le changement de variables $u = -t$ et utilisons l'imparité de sh :

$$f(-x) = g(x) - \int_0^x \operatorname{sh}(-x+u) g(u) \, du = g(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-u) g(u) \, du = f(x)$$

Déterminons maintenant f sur $\mathbb{R}_+$ en distinguant des cas.

- Si $x \in [0, 1[$,

$$f(x) = x + \int_0^x t \operatorname{sh}(x-t) \, dt = x - [t \operatorname{ch}(x-t)]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \operatorname{ch}(x-t) \, dt = -[\operatorname{sh}(x-t)]_{t=0}^{t=x} = \operatorname{sh}(x)$$

- Si $x \in [0, 2[$,

$$\begin{aligned} f(x) = 2 - x + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) g(t) \, dt &= 2 - x + \int_0^1 t \operatorname{sh}(x-t) \, dt + \int_1^x (2-t) \operatorname{sh}(x-t) \, dt \\ &= 2 - x - [t \operatorname{ch}(x-t)]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \operatorname{ch}(x-t) \, dt - [(2-t)\operatorname{ch}(x-t)]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x \operatorname{ch}(x-t) \, dt \\ &= -[\operatorname{sh}(x-t)]_{t=0}^{t=1} + [\operatorname{sh}(x-t)]_{t=1}^{t=x} \\ &= \operatorname{sh}(x) - 2\operatorname{sh}(x-1) \end{aligned}$$

- Si $x \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t)\,dt = \int_0^1 t\operatorname{sh}(x-t)\,dt + \int_1^2 (2-t)\operatorname{sh}(x-t)\,dt \\
&= -\left[t\operatorname{ch}(x-t)\right]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \operatorname{ch}(x-t)\,dt - \left[(2-t)\operatorname{ch}(x-t)\right]_{t=1}^{t=2} - \int_1^2 \operatorname{ch}(x-t)\,dt \\
&= -\left[\operatorname{sh}(x-t)\right]_{t=0}^{t=1} + \left[\operatorname{sh}(x-t)\right]_{t=1}^{t=2} \\
&= \operatorname{sh}(x) - 2\operatorname{sh}(x-1) + \operatorname{sh}(x-2)
\end{aligned}$$