Devoir surveillé n°09

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 —

Partie I –

Soit ℓ un réel. On note f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = \ell$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note I_n l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$.

1. Quelle valeur faut-il donner à ℓ pour que f soit continue en 0 ?
   On suppose désormais que ℓ a cette valeur.
2. Montrez que f est de classe $\mathscr{C}^1$ (c'est-à-dire : dérivable, et à dérivée continue) sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et explicitez la dérivée de f en 0.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez que, dans l'intervalle I_n, l'équation $x\cos x = \sin x$ possède une et une seule solution, que l'on notera x_n.
4. Déterminez un équivalent *très simple* de x_n, lorsque n tend vers l'infini.
5. Déterminez les variations de f dans l'intervalle I_0, puis dans les intervalles I_{2n-1} et I_{2n} pour $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Donnez l'allure de la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0, 4\pi]$.

Partie II –

Il est clair que la restriction g de f à l'intervalle $]0, +\infty[$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur cet intervalle ; on pourrait d'ailleurs prouver que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ mais ce n'est pas notre objectif.
On se propose simplement d'établir quelques résultats concernant la dérivée n-ième de g, notée $g^{(n)}$. En particulier, $g^{(0)}$ désigne g elle-même.
On identifie un polynôme P et la fonction polynôme $x \mapsto \mathrm{P}(x)$ qui lui est naturellement associée.
Chaque polynôme sera écrit selon les puissances décroissantes de X.

1. Explicitez $g''(x)$ pour $x > 0$.

Au vu des expressions de $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$, on se propose d'établir que l'assertion $\mathscr{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

> Il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que, pour tout $x>0$: $g^{(n)}(x)=\dfrac{\mathrm{P}_n(x)\sin^{(n)}x+\mathrm{Q}_n(x)\sin^{(n+1)}x}{x^{n+1}}$

Dans les deux questions suivantes, vous allez raisonner par récurrence sur n.

2. Il est clair que $\mathscr{A}(n)$ est vraie pour $n\in\{0,1,2\}$; vous dresserez simplement un tableau donnant les expressions de P_n et Q_n pour ces valeurs de n.

3. On fixe $n\in\mathbb{N}$, et on suppose l'assertion $\mathscr{A}(n)$ acquise.
Établissez l'assertion $\mathscr{A}(n+1)$; vous déterminerez des expressions de P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n.
Il résulte donc des questions **II.2** et **II.3** que l'assertion $\mathscr{A}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

4. Montrez que P_n et Q_n ont tous leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$; précisez le degré, la parité, et le coefficient dominant de ces polynômes.

5. Utilisez les formules établies à la question **II.3** pour expliciter P_3 et Q_3.

6. Deux polynômes U et V vérifient $\mathrm{U}(x)\sin x+\mathrm{V}(x)\cos x=0$ pour tout $x>0$.
Montrez que U et V sont tous deux égaux au polynôme nul.

7. En partant de la relation $xg(x)=\sin x$ et en appliquant la formule de Leibniz, ainsi que le résultat de la question précédente, mettez en évidence deux nouvelles relations liant P_n, Q_n, P_{n+1} et Q_{n+1}.

8. Justifiez alors la relation $\mathrm{P}_n'=\mathrm{Q}_n$, et montrez que P_n est solution d'une équation différentielle du second ordre *très simple*, que l'on notera $\mathscr{E}_n$.

9. Il est clair que l'application $\Psi:\mathrm{T}\mapsto\mathrm{T}+\mathrm{T}''$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ des polynômes à coefficients réels.
Montrez que Ψ induit un automorphisme Ψ_n du sous-espace $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ constitué des polynômes de degré n au plus.
Montrez ensuite que Ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
Il résulte de ceci que P_n est l'unique solution polynomiale de l'équation différentielle $\mathscr{E}_n$.

10. $n\in\mathbb{N}$ est fixé, et p désigne la partie entière de $\dfrac{n}{2}$.
Justifiez l'existence d'une famille $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant p}$ de réels vérifiant $\mathrm{P}_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}a_k\mathrm{X}^{n-2k}$ et déterminez une expression de a_k faisant intervenir des factorielles et/ou des puissances, mais débarrassée de tout signe $\prod$.

11. Soit $n\in\mathbb{N}$. Déterminez les solutions réelles de l'équation différentielle $y''+y=x^n$.

Problème 2 —

On définit deux suites de polynômes $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $\mathrm{P}_0=0$, $\mathrm{Q}_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{P}_n+\mathrm{X}\mathrm{Q}_n$$
$$\mathrm{Q}_{n+1}=-\mathrm{X}\mathrm{P}_n+\mathrm{Q}_n$$

Il est évident que $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de polynômes à coefficients *réels*, ce que l'on ne demande pas de montrer. On pose enfin $\mathrm{R}_n=\dfrac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{Q}_n}$ et $\mathrm{Z}_n=\mathrm{Q}_n+i\mathrm{P}_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Dans une première partie, on étudiera certains cas particuliers puis on étudiera le cas général dans la partie suivante.

Il est *fortement conseillé* de vérifier si les résultats obtenus dans le cas général sont cohérents avec ceux obtenus dans les cas particuliers.

Partie I – Etude de cas particuliers

1. Calculer P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3, P_4, Q_4.
2. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de P_2, Q_2, P_3, Q_3, P_4, Q_4 dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Donner la décomposition en éléments simples de R_2, R_3, R_4 dans $\mathbb{R}(X)$.

Partie II – Etude du cas général

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = (1+iX)^n$.
2. Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$P_n(\tan\alpha) = \frac{\sin(n\alpha)}{\cos^n(\alpha)} \qquad Q_n(\tan\alpha) = \frac{\cos(n\alpha)}{\cos^n(\alpha)}$$

A partir de maintenant, on suppose n non nul.
On sera amené dans plusieurs questions à distinguer des cas selon la *parité* de n.

3. Donner une expression *développée* de Z_n à l'aide de la formule du binôme de Newton et en déduire des expressions de P_n et Q_n.
4. Déterminer la parité, le degré et le coefficient dominant des polynômes P_n et Q_n.
5. A l'aide de la question **II.2**, déterminer les racines de P_n et Q_n. Montrer en particulier que toutes les racines de P_n et Q_n sont réelles et simples.
6. Factoriser P_n et Q_n sous forme de produits de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
7. Calculer la partie entière de la fraction rationnelle R_n.
8. Calculer P_n' et Q_n' en fonction de P_{n-1} et Q_{n-1}.
9. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle R_n.
10. Calculer les produits suivants

$$A_n = \prod_{0<2k<n} \tan\frac{k\pi}{n} \qquad B_n = \prod_{0<2k+1<n} \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}$$