Semaine du 01/10 au 05/10

1 Cours

Complexes

Corps des nombres complexes Partie réelle, partie imaginaire, module, conjugué et interprétation géométrique.

Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 Définition, notation $e^{i\theta}$, relations d'Euler et formule de Moivre, argument et interprétation géométrique, racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité et d'un complexe non nul.

Equations du second degré Racines carrées d'un complexe, résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes.

Trigonométrie Linéarisation. Développement. Sommes trigonométriques.

2 Méthodes à maîtriser

- $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$, $z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z$.
- $z \in \mathbb{U} \iff \overline{z} = \dfrac{1}{z}$.
- $z \in \mathbb{R} \iff \arg z \equiv 0[\pi]$, $z \in i\mathbb{R} \iff \arg z \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.
- Extraction de racines $n^{\text{èmes}}$ via module et argument.
- Extraction de racines carrées, résolution d'équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- Passage en complexe pour le calcul de sommes trigonométriques.
- Méthode de l'arc-moitié pour factoriser $e^{i\theta_1} \pm e^{i\theta_2}$ où $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$.

3 Questions de cours

- Soit $(n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Calculer $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.
- Soit $(n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Calculer $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.
- Résoudre une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$ au choix de l'examinateur.
- **Banque CCP Exo 84** Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.
- **Banque CCP Exo 89** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
  1. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
  2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.