Devoir à la maison n°09

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1.

L'objet de cet exercice est de prouver les solutions entières de l'équation :

$$x^2+y^2=z^2 \tag{E}$$

sont (à une permutation près de x et y) les triplets (x,y,z) de la forme :

$$x=d(u^2-v^2) \qquad y=2duv \qquad z=d(u^2+v^2)$$

où d,u,v sont des entiers.

1. S'assurer que les solutions avancées vérifient bien l'équation (E).

2. Soit (x,y,z) un triplet d'entiers solution de l'équation (E). On suppose x, y et z premiers entre eux dans leur ensemble et strictement positifs.

   a. Montrer que x, y et z sont premiers entre eux deux à deux.
   b. Montrer que x et y sont de parités distinctes. En déduire la parité de z.

3. On reprend les hypothèses de la question précédente et on suppose de plus x impair et y pair.

   a. Montrer que le pgcd de $z+x$ et $z-x$ est 2.
   b. Il existe donc $(a,b,c)\in(\mathbb{N}^*)^3$ tel que

$$y=2a \qquad z+x=2b \qquad z-x=2c$$

   Montrer que b et c sont des carrés d'entiers naturels non nuls.

4. Conclure.

Exercice 2.

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(\mathcal{E}):\ y'''-y=0 \qquad (\mathcal{F}):\ y''+y'+y=0 \qquad (\mathcal{G}):\ y'-y=0$$

On note E, F et G les ensembles respectifs des solutions *à valeurs réelles* de $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{G})$. Les solutions de $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{G})$ sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, ce qu'on ne demande pas de montrer. On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2. Montrer que $F\subset E$ et $G\subset E$.

3. Donner les solutions des équations différentielles $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{G})$.

4. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et donner pour chacun une famille génératrice.

5. **a.** Soit $y\in E$. On pose $y_1=2y-y'-y''$ et $y_2=y+y'+y''$. Montrer que $y_1\in F$ et $y_2\in G$.
   b. Montrer que F et G sont supplémentaires de E.

6. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.