Devoir surveillé n° 3

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

On pose pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$.

1. Pour quels nombres complexes z, $f(z)$ est-il défini ?
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.
3. Montrer que $\begin{cases} |\operatorname{Im} z| < \dfrac{\pi}{2} \\ |f(z)| < 1 \end{cases} \iff |\operatorname{Im} z| < \dfrac{\pi}{4}$.
4. On pose $\Delta = \left\{z \in \mathbb{C},\ |\operatorname{Im} z| < \dfrac{\pi}{4}\right\}$ et $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Vérifier que $f(\Delta) \subset \mathcal{D}$.
5. Soit $Z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Montrer que l'équation $e^z = Z$ d'inconnue z admet une unique solution telle que $\operatorname{Im}(z) \in]-\pi, \pi[$.
6. Soit $u \in \mathcal{D}$. Montrer que $\dfrac{1+u}{1-u} \notin \mathbb{R}_-$.
7. Montrer que l'application f induit une bijection de Δ sur $\mathcal{D}$.

Exercice 2.

On pose $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}(z) > 0\}$ et $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. On rappelle que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.
Les trois questions sont complètement indépendantes.

1. On définit l'application $f\colon \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{iz+1}{z+i} \end{cases}$.
   - **a.** L'application f est-elle injective ?
   - **b.** Montrer que $\operatorname{Im} f = \mathbb{C} \setminus \{i\}$. L'application f est-elle surjective ?
   - **c.** Montrer que $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}$.
   - **d.** Montrer que f induit une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{D}$.
   - **e.** Déterminer $f^{-1}(\mathbb{U})$.
2. On définit l'application $g\colon \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ z & \longmapsto & -\dfrac{1}{z} \end{cases}$.
   - **a.** Montrer que l'application g est bien définie, autrement dit que $g(z) \in \mathcal{P}$ pour tout $z \in \mathcal{P}$.
   - **b.** Montrer que g est bijective.
3. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit l'application $A_\theta\colon \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta} \end{cases}$.

a. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Vérifier que l'application A_θ est bien définie, autrement dit que pour tout $z \in \mathcal{P}$, $A_\theta(z)$ est bien défini et $A_\theta(z) \in \mathcal{P}$.

b. Que vaut A_0 ?

c. Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $A_\theta \circ A_\varphi = A_{\theta+\varphi}$.

d. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que A_θ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 3.

Soit z un nombre complexe. On note A, B, C, D les points d'affixes respectifs $1, z, z^2, z^3$ dans un repère orthonormé du plan.

1. Pour quelles valeurs de z les points A, B, C, D sont-il deux à deux distincts ? On suppose cette cette condition remplie dans la suite de l'énoncé.
2. Déterminer les valeurs de z tels que $ABCD$ soit un parallélogramme. Préciser la nature de ce parallélogramme.
3. Déterminer les valeurs de z tels que le triangle ABC soit rectangle isocèle en A.
4. Déterminer les valeurs de z tels que ABD soit rectangle isocèle en A.

Exercice 4.

Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que f est injective *si et seulement si* $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$.

Exercice 5.

Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant $f(1) = 1$ et telle que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

On rappelle que $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{N})$ et on note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points fixes de f, c'est-à-dire

$$\mathcal{F} = \{a \in \mathbb{N}, f(a) = a\}$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. En déduire que $f \circ f = f$.
3. Montrer que $\operatorname{Im} f = \mathcal{F}$.
4. Montrer que pour tout $a \in \mathcal{F}$, $a + 1 \in \mathcal{F}$.
5. En déduire que $\mathcal{F} = \mathbb{N}$ et en déduire f.