Devoir surveillé n°01

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

Notons $\mathcal{P}_n$: «$(1+x)^n \geq 1+nx$». $\mathcal{P}_0$ est clairement vraie. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour n certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $(1+x)^n \geq 1+nx$. Or $1+x \geq 0$ donc

$$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

ou encore

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 2

Posons pour $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{P}_n : 1 \leq u_n \leq n^2$$

Initialisation. Puisque $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies.
Hérédité. Supposons que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 &\leq u_n \leq n^2 \\ 1 &\leq u_{n+1} \leq (n+1)^2 \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$1+\frac{2}{n+2} \leq u_{n+2} \leq (n+1)^2+\frac{2n^2}{n+2}$$

En particulier, il est clair que $u_{n+2} \geq 1$. Reste à montrer que

$$(n+1)^2+\frac{2n^2}{n+2} \leq (n+2)^2$$

Calculons donc la différence suivante :

$$\begin{aligned} (n+2)^2-\left[(n+1)^2+\frac{2n^2}{n+2}\right] &= 2n+3-\frac{2n^2}{n+2} \\ &= \frac{(2n+3)(n+2)-2n^2}{n+2} \\ &= \frac{7n+6}{n+2} \geq 0 \end{aligned}$$

On a donc bien montré que

$$(n+1)^2+\frac{2n^2}{n+2} \leq (n+2)^2$$

et par conséquent que

$$u_{n+2} \leq (n+2)^2$$

$\mathcal{P}_{n+2}$ est donc vraie.
Conclusion. Par récurrence double, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution 3

Tout d'abord, $u_0 = 1 = 0!$ et $u_1 = 1 = 1!$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = n!$ et $u_{n+1} = (n+1)!$. Alors

$$u_{n+2} = (n+1)(n! + (n+1)!) = (n+1)(n! + n!(n+1)) = (n+1)n!(n+2) = (n+2)!$$

Par récurrence double, $u_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 4

On raisonne par l'absurde. Supposons que $\sqrt{n^2+1}$ soit un entier. Il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n^2+1} = k$. Ainsi $n^2+1 = k^2$ ou encore $(k-n)(k+n) = 1$. Comme k et n sont deux entiers naturels, on a nécessairement $k-n = k+n = 1$. Notamment

$$2n = (k+n) - (k-n) = 1 - 1 = 0$$

et donc $n = 0$, ce qui contredit l'énoncé. Ainsi $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

Solution 5

1. D'après l'énoncé, $f(0)^2 = f(0)$ donc $f(0) \in \{0, 1\}$. De plus, $f(0)f(1) = f(0) + 1$ donc on ne peut avoir $f(0) = 0$. Ainsi $f(0) = 1$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x)f(0) = f(0) + x + 0$$

donc

$$f(x) = x + 1$$

3. Réciproquement, si $f(x) = x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = (x+1)(y+1) = xy + 1 + x + y = f(xy) + x + y$$

On en déduit que l'unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$

est la fonction $x \mapsto x + 1$.

Solution 6

1. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Remarquons que

$$d_2(x, y) = \left|\frac{y - x}{(x+1)(y+1)}\right| = \frac{|y - x|}{(x+1)(y+1)}$$

Ainsi il est clair que $d_2(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

2. Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3$. Posons

$$\mathrm{X} = \frac{x}{x+1} \qquad \mathrm{Y} = \frac{y}{y+1} \qquad \mathrm{Z} = \frac{z}{z+1}$$

Puisque $\mathrm{X} - \mathrm{Z} = \mathrm{X} - \mathrm{Y} + \mathrm{Y} - \mathrm{Z}$, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|\mathrm{X} - \mathrm{Z}| \leq |\mathrm{X} - \mathrm{Y}| + |\mathrm{Y} - \mathrm{Z}|$$

c'est-à-dire

$$d_2(x, z) \leq d_2(x, y) + d_2(y, z)$$

3. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. On rappelle que

$$d_2(x, y) = \frac{|y - x|}{(x+1)(y+1)} = \frac{d_1(x, y)}{(1+x)(1+y)}$$

Or $x \geq 0$ et $y \geq 0$ donc $1 + x \geq 1$ et $1 + y \geq 1$. Par conséquent, $(1+x)(1+y) \geq 1$ donc

$$d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$$

4. Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un tel λ. Notamment, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$d_1(x,0) \leq \lambda d_2(x,0)$$

c'est-à-dire

$$x \leq \lambda \frac{x}{x+1}$$

Notamment, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\lambda \geq x+1$$

ce qui est évidemment absurde. Il n'existe donc pas de réel λ tel que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ d_1(x,y) \leq \lambda d_2(x,y)$$

Solution 7

On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}
& (1-\lambda)\sqrt{x}+\lambda\sqrt{y} \leq \sqrt{(1-\lambda)x+\lambda y} \\
\iff\ & \left[(1-\lambda)\sqrt{x}+\lambda\sqrt{y}\right]^2 \leq (1-\lambda)x+\lambda y \qquad \text{car tous les membres de l'inégalité précédente sont positifs} \\
\iff\ & (1-\lambda)^2x+\lambda^2y+2(1-\lambda)\lambda\sqrt{x}\sqrt{y} \leq (1-\lambda)x+\lambda y \\
\iff\ & 0 \leq \left[(1-\lambda)-(1-\lambda)^2\right]x+\left[\lambda-\lambda^2\right]y-2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x}\sqrt{y} \\
\iff\ & 0 \leq \lambda(1-\lambda)x+\lambda(1-\lambda)y-2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x}\sqrt{y} \\
\iff\ & 0 \leq \lambda(1-\lambda)\left[x+y-2\sqrt{x}\sqrt{y}\right] \\
\iff\ & 0 \leq \lambda(1-\lambda)(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie car $\lambda \geq 0$ et $1-\lambda \geq 0$ donc la première l'est également par équivalence.

Solution 8

1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} \setminus (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) &= \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B} \cap \mathrm{C}} \\
&= \mathrm{A} \cap (\overline{\mathrm{B}} \cup \overline{\mathrm{C}}) \\
&= (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) \cup (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{C}}) \qquad \text{par distributivité de l'intersection sur l'union} \\
&= (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \setminus \mathrm{C})
\end{aligned}$$

2. D'une part,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} \setminus (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) &= \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B} \cup \mathrm{C}} \\
&= \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}} \cap \overline{\mathrm{C}}
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \setminus \mathrm{C}) &= (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) \cap (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{C}}) \\
&= (\mathrm{A} \cap \mathrm{A}) \cap \overline{\mathrm{B}} \cap \overline{\mathrm{C}} \\
&= \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}} \cap \overline{\mathrm{C}}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{A} \setminus (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \setminus \mathrm{C})$.

3. D'une part,

$$\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \setminus \mathrm{C}) = \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{C}}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \setminus (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) &= \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{C}} \\
&= \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap (\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{C}}) \\
&= (\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{C}}) \qquad \text{par distributivité de l'union sur l'intersectuion} \\
&= \varnothing \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{C}}) \qquad \text{car } \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{A}} = \varnothing \\
&= \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{C}}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \setminus \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \setminus (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$.

4. Si on prend $A = B = C$,

$$A \cup (B \setminus C) = A \cup \varnothing = A$$
$$(A \cup B) \setminus (A \cup C) = A \setminus A = \varnothing$$

Notamment, si A est non vide (ce qui est possible dès que E est non vide), $A \cup (B \setminus C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.