

DEVOIR SURVEILLÉ N°04 : CORRIGÉ

SOLUTION 1.

1. a. Il s'agit de résoudre l'équation $z + \frac{1}{z} = i$. Cette équation équivaut à $z^2 - iz + 1 = 0$. Le discriminant de cette équation du second degré est $-5 = (i\sqrt{5})^2$. Les solutions de cette équation sont donc

$$\frac{i}{2}(1 + \sqrt{5}) \quad \text{et} \quad \frac{i}{2}(1 - \sqrt{5})$$

- b. Comme i possède deux antécédents par φ , φ n'est pas injective.
- c. Soit $Z \in \mathbb{C}$. On considère l'équation $f(z) = Z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$. Cette équation équivaut à $z^2 - Zz + 1 = 0$. Cette équation du second degré admet au moins une solution. Une solution de cette équation ne peut être nulle puisque $0^2 - Z \times 0 - 1 = -1 \neq 0$. Ainsi l'équation $f(z) = Z$ possède donc une solution dans \mathbb{C}^* , c'est-à-dire que Z possède un antécédent par φ . L'application φ est donc surjective.
- d. Les antécédents de $2 \cos \theta$ par φ sont les solutions de l'équation $\varphi(z) = 2 \cos \theta$ qui équivaut à $z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0$. Puisque $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$ et $e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = 1$, les solutions de cette équation sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Il n'y a en fait qu'une solution lorsque le discriminant $4(\cos^2 \theta - 1)$ est nul et deux sinon. Or le discriminant n'est nul que si $\cos^2 \theta = 1$, c'est-à-dire $\cos \theta = \pm 1$ ou encore $\theta \equiv 0[\pi]$.
Finalement, $2 \cos \theta$ possède deux antécédents lorsque $\theta \not\equiv 0[\pi]$, à savoir $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ et un unique antécédent lorsque $\theta \equiv 0[\pi]$. On peut même préciser que, lorsque $\theta \equiv 0[2\pi]$, cet unique antécédent est $e^{i\theta} = e^{-i\theta} = 1$ et que, lorsque $\theta \equiv 0[2\pi]$, cet unique antécédent est $e^{i\theta} = e^{-i\theta} = -1$.

2. a. Les antécédents de $2\sqrt{12} - 4i$ par ψ lorsque $n = 3$ sont ses racines cubiques. Or $2\sqrt{12} - 4i = 8e^{-\frac{i\pi}{6}}$ donc les antécédents de $2\sqrt{12} - 4i$ par ψ sont $2e^{-\frac{i\pi}{18}}$, $2e^{\frac{11i\pi}{18}}$ et $2e^{\frac{23i\pi}{18}}$.
- b. De manière générale, tout complexe non nul possède n racines $n^{\text{èmes}}$ donc n antécédents par ψ . L'application ψ est donc surjective. Mais, puisque $n \geq 2$, ψ n'est pas injective.

- c. Les antécédents de $e^{in\theta}$ par ψ sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de $e^{ni\theta}$, c'est-à-dire $e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{n})}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

3. a. On sait que ψ et φ sont surjectives donc $\xi = \varphi \circ \psi$ l'est également. Par contre, $\xi = \varphi \circ \psi$ ne peut-être injective car ψ le serait alors également, ce qui n'est pas.

- b. D'après la question 1.d, les antécédents de $2 \cos(n\theta)$ par φ sont $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$ (éventuellement confondus lorsque $n\theta \equiv 0[\pi]$).

D'après la question 2.c, les antécédents de $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$ sont les complexes

$$e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{n})} \quad \text{et} \quad e^{-i(\theta + \frac{2k\pi}{n})} \quad \text{pour} \quad k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

Lorsque $n\theta \not\equiv 0[\pi]$, $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$ possèdent en tout $2n$ antécédents mais, lorsque $n\theta \equiv 0[\pi]$, $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$ sont confondus donc leurs antécédents également.

Finalement $2 \cos(n\theta)$ possède $2n$ antécédents par ξ lorsque $n\theta \not\equiv 0[\pi]$, à savoir les complexes

$$e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{n})} \quad \text{et} \quad e^{-i(\theta + \frac{2k\pi}{n})} \quad \text{pour} \quad k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

Lorsque $n\theta \equiv 0[\pi]$, $2 \cos(n\theta)$ ne possède que n antécédents. On peut préciser que, lorsque $n\theta \equiv 0[2\pi]$, ces antécédents sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. En effet, ces antécédents sont les solutions de l'équation $\xi(z) = 1$, qui équivaut à $(z^n - 1)^2 = 0$. De même, lorsque $n\theta \equiv \pi[2\pi]$, ces antécédents sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de -1 . En effet, ces antécédents sont les solutions de l'équation $\xi(z) = -1$, qui équivaut à $(z^n + 1)^2 = 0$.

4. a. Puisque $\alpha(0) = \alpha(2i\pi) = 1$, α n'est pas injective. Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. Notons θ un argument de Z . Alors $|Z| > 0$ donc on peut définir $\ln(|Z|) + i\theta$ qui est un antécédent de Z par α . Ainsi α est surjective.

- b. Les antécédents de i par φ sont $\frac{i}{2}(1 + \sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}$ et $\frac{i}{2}(1 - \sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}e^{-\frac{i\pi}{2}}$. Les antécédents de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}$ et $\frac{\sqrt{5}-1}{2}e^{-\frac{i\pi}{2}}$ par α sont respectivement les complexes

$$\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad \text{pour} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ce sont donc également les antécédents de i par $\beta = \varphi \circ \alpha$.

SOLUTION 2.

1. On a évidemment $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$.

2. D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned}(1+i)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2k} i^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} i^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} i^{2k+1} \quad \text{en séparant les termes d'indices pairs et impairs} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} (-1)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k i \quad \text{car } i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k \\ &= S_n + iT_n\end{aligned}$$

3. Tout d'abord,

$$(1+i)^{2n} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{2n} = 2^n e^{\frac{n i \pi}{2}}$$

De plus, $(1+i)^{2n} = S_n + iT_n$ et S_n et T_n sont *réels* (et même entiers) donc ce sont respectivement les parties réelle et imaginaire de $(1+i)^{2n}$. Finalement,

$$S_n = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad T_n = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

SOLUTION 3.

1. a. On utilise la méthode de l'arc-moitié.

$$\frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1} = \frac{2ie^{i\theta} \sin \theta}{2e^{i\theta} \cos \theta} = i \tan \theta$$

b. Remarquons que $-i$ n'est pas solution de (E) et que pour $z \neq -i$, $1 - iz \neq 0$ de sorte que

$$\begin{aligned}(1+iz)^5 = (1-iz)^5 &\iff \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5 = 1 \\ &\iff \frac{1+iz}{1-iz} \in \mathbb{U}_5 \\ &\iff \exists k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \frac{1+iz}{1-iz} = e^{\frac{2ik\pi}{5}} \\ &\iff \exists k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, 1+iz = e^{\frac{2ik\pi}{5}}(1-iz) \\ &\iff \exists k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{5}} - 1}{i(e^{\frac{2ik\pi}{5}} + 1)} \quad \text{car } \forall k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, e^{\frac{2ik\pi}{5}} \neq -1 \\ &\iff \exists k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, z = \tan \frac{k\pi}{5} \quad \text{d'après la question 1.a}\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont donc les *réels* $-\tan \frac{2\pi}{5}$, $-\tan \frac{\pi}{5}$, 0 , $\tan \frac{\pi}{5}$ et $\tan \frac{2\pi}{5}$.

c. Tout d'abord, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$(1+iz)^5 = \binom{5}{0} + \binom{5}{1}iz + \binom{5}{2}(iz)^2 + \binom{5}{3}(iz)^3 + \binom{5}{4}(iz)^4 + \binom{5}{5}(iz)^5 = 1 + 5iz - 10z^2 - 10iz^3 + 5z^4 + iz^5$$

On en déduit que

$$(1-iz)^5 = 1 - 5iz - 10z^2 + 10iz^3 + 5z^4 - iz^5$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(1+iz)^5 = (1-iz)^5 &\iff 10iz - 20iz^3 + 2iz^5 = 0 \\ &\iff z(5 - 10z^2 + z^4) = 0 \\ &\iff z = 0 \text{ ou } z^4 - 10z^2 + 5 = 0 \\ &\iff z = 0 \text{ ou } z^2 = 5 + 2\sqrt{5} \text{ ou } z^2 = 5 - 2\sqrt{5} \\ &\iff z = 0 \text{ ou } z = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \text{ ou } z = -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \text{ ou } z = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \text{ ou } z = -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\end{aligned}$$

- d. Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$. Ainsi la fonction \tan est-elle croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Or

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{2\pi}{5} < -\frac{\pi}{5} < 0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$$

et

$$-\sqrt{5+2\sqrt{5}} < -\sqrt{5-2\sqrt{5}} < 0 < \sqrt{5-2\sqrt{5}} < \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

de sorte qu'en particulier, $\tan \frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\tan \frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

2. a.

$$\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} = \frac{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$$

- b. Il s'agit d'un problème d'extraction de racines cinquièmes. Les solutions sont donc les complexes $e^{\frac{2i(\alpha+k\pi)}{5}}$ pour $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

- c. L'équation (E_α) équivaut à l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5 = e^{2i\alpha}$. D'après la question précédente, les solutions de (E_α) sont les complexes z tels qu'il existe $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ tel que $\frac{1+iz}{1-iz} = e^{\frac{i(\alpha+2k\pi)}{5}}$. Or, pour $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, en posant $\alpha_k = \frac{\alpha+k\pi}{5}$

$$\frac{1+iz}{1-iz} = e^{2i\alpha_k}$$

$$\iff z = \frac{e^{2i\alpha_k} - 1}{i(e^{2i\alpha_k} + 1)}$$

$$\iff z = \tan \alpha_k \quad \text{d'après la question 1.a}$$

Les solutions de (E_α) sont donc les réels $\tan \alpha_k$ pour $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, autrement dit les réels $\tan\left(\frac{\alpha-2\pi}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha-\pi}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha+\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{\alpha+2\pi}{5}\right)$.

SOLUTION 4.

1. a. On a évidemment $j^3 = e^{2i\pi} = 1$.
b. On reconnaît la somme de trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $j \neq 1$. Ainsi

$$1 + j + j^2 = \frac{j^3 - 1}{j - 1} = 0$$

puisque $j^3 = 1$.

- c. En développant,

$$(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = a^2 + b^2j^3 + c^2j^3 + ab(j + j^2) + bc(j + j^2) + ca(j + j^2)$$

Or $j^3 = 1$ et $j + j^2 = -1$ donc

$$(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

d.

$$-j = -e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{-i\pi} e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

$$-j^2 = -e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-i\pi} e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

2. a. D'après la question 1.c, $(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = 0$. Ainsi $a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$.
► Si $a + bj + cj^2 = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{c-a}{b-a} &= \frac{c+bj+cj^2}{b+bj+cj^2} && \text{car } -a = bj+cj^2 \\ &= \frac{c(1+j^2)+bj}{b(1+j)+cj^2} \\ &= \frac{-cj+bj}{-bj^2+cj^2} && \text{car } 1+j+j^2=0 \\ &= \frac{j(b-c)}{j^2(c-b)} \\ &= -\frac{1}{j} = -j^2 && \text{car } j^3=1 \end{aligned}$$

► Si $a + bj^2 + cj = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{c-a}{b-a} &= \frac{c+bj+cj^2}{b+bj+cj^2} && \text{car } -a = bj + cj^2 \\ &= \frac{c(1+j^2) + bj}{b(1+j) + cj^2} \\ &= \frac{-cj + bj}{-bj^2 + cj^2} && \text{car } 1+j+j^2 = 0 \\ &= \frac{j(b-c)}{j^2(c-b)} \\ &= -\frac{1}{j} = -j^2 && \text{car } j^3 = 1\end{aligned}$$

b. D'après la question 1.d, $\frac{c-a}{b-a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ ou $\frac{c-a}{b-a} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$. Ainsi

$$\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = 1 \quad \text{ou encore} \quad \frac{|c-a|}{|b-a|} = 1 \quad \text{ou enfin} \quad |b-a| = |c-a|$$

et

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

Ces deux conditions s'écrivent également $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Le triangle ABC est donc équilatéral.