Devoir surveillé n°13

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

1. **a.** Le théorème fondamental de l'analyse nous apprend que F est une primitive de la fonction continue f. Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   b. Supposons que f vérifie (E_1). Via le changement de variable affine $u = x - t$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - \int_0^x (2x-u)f(u)\,\mathrm{d}u = 1 - 2x\mathrm{F}(x) + \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u$$

   Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente, $x \mapsto \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par opérations, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Supposons que f est solution de $(\mathcal{P})$. En évaluant (E_1) en 0, on obtient $f(0) = 1$. On a montré à la question précédente que f était de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, en dérivant la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - 2x\mathrm{F}(x) + \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u$$

   on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2\mathrm{F}(x) - 2x\mathrm{F}'(x) + xf(x) = -2\mathrm{F}(x) - xf(x)$$

   ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + xf(x) + 2\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = 0$$

   Ainsi f est solution de $\mathcal{P}_1$.
   Réciproquement, supposons que f est solution de $(\mathcal{P}_1)$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, elle est a fortiori continue sur $\mathbb{R}$. Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = f(x) - 1 + \int_0^x (t+x)f(x-t)\,\mathrm{d}t = f(x) - 1 + 2x\mathrm{F}(x) + \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u$$

   Alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(x) + xf(x) + 2\mathrm{F}(x) = 0$$

   Ainsi g est constante sur $\mathbb{R}$. De plus, $g(0) = 0$ donc f est nulle sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est solution de $(\mathcal{P}_1)$.

3. Il suffit de constater que $\mathrm{F}' = f$. D'après la question précédente, f est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si $f = \mathrm{F}'$ est solution de $(\mathcal{P}_1)$ ce qui équivaut à F solution de $(\mathcal{P}_2)$.

4. **a.** Comme le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supposé infini, H est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{H}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1}$$

   et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x\mathrm{H}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n$$

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{H}''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{H}''(x) + x\mathrm{H}'(x) + 2\mathrm{H}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_n\right] x^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_n = 0$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+1}$$

De plus, $a_0 = \mathrm{H}(0) = 0$ et $a_1 = \mathrm{H}'(0) = 1$.

b. Comme $a_0 = 0$, la relation $a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+1}$ montre que $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n) \times (2n-2) \times \cdots 2} a_1 = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{H}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n n!} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2/2)^n}{n!} = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

5. On vérifie que $\mathrm{H} : x \mapsto xe^{-\frac{x^2}{2}}$ est bien solution du problème $(\mathcal{P}_2)$. De plus, la solution de $(\mathcal{P}_2)$ est unique. En effet, si F est solution de $(\mathcal{P}_2)$, on a nécessairement $\mathrm{F}(0) = 0$ en évaluant la seconde relation en 0. Ainsi, toute solution de F est l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$. Ainsi l'unique solution de $(\mathcal{P})$ est $\mathrm{H}' : x \mapsto (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Solution 2

---

1. Soit $x \in \mathrm{J}$. Puisque $x > 0$, la suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{1+nx}}$ est décroissante et de limite nulle. D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum f_n(x)$ converge. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur J.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_{\infty,\mathrm{J}} = \sup_{x \in \mathrm{J}} \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série à termes positifs divergente donc $\sum \|f_n\|_{\infty,\mathrm{J}}$ diverge également. Autrement dit, $\sum f_n$ ne converge pas normalement.

3. Comme la série $\sum f_n$ converge simplement sur J, il suffit de montrer que la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle sur J. Posons $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n$. D'après le critère spécial des séries alternées,

$$\forall x \in \mathrm{J},\ |\mathrm{R}_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Ainsi

$$\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,\mathrm{J}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \|\mathrm{R}_n\|_{\infty,\mathrm{J}} = 0$ i.e. (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur J. Par conséquent, $\sum f_n$ converge uniformément sur J.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{+\infty} f_n = 0$ et $\lim_{+\infty} f_0 = 1$. Comme $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathrm{J} = [1, +\infty[$, on peut utiliser le théorème d'interversion série/limite :

$$\lim_{+\infty} \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n = 1$$

5. **a.** Il s'agit à nouveau du critère spécial des séries alternées.

b. Remarquons que

$$\forall x \in \mathrm{J},\ \varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right)$$

Remarquons que

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right| = \frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{\sqrt{1+nx}-\sqrt{nx}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+nx}+\sqrt{nx}\right)\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} \leq \frac{1}{2(nx)^{3/2}}$$

Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in \mathrm{J},\ \left| \varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(nx)^{3/2}} = \frac{\mathrm{K}}{x^{3/2}}$$

en posant $\mathrm{K} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. On en déduit bien que

$$\varphi(x) \underset{x \to +\infty}{=} \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Solution 3

---

1. Supposons qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{I}(\lambda)$ et $\mathrm{I}(\mu)$ convergent. Par différence, $\int_a^{+\infty} \left(\frac{\lambda - f(t)}{t} - \frac{\lambda - f(t)}{t} \right) \mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - \mu}{t} \mathrm{d}t$ converge. Comme $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge, ceci n'est possible que si $\lambda - \mu = 0$ i.e. $\lambda = \mu$.

2. D'après le théorème fondamental de l'analyse, H_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ de dérivée $t \mapsto \lambda - f(t)$. Par ailleurs, $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ de dérivée $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$. Par intégration par parties,

$$\mathrm{I}(\lambda) = \left[\frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t} \right]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t^2} \,\mathrm{d}t$$

Cette intégration par parties est légitime, car H_λ étant bornée, $\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t} = 0$. Ainsi

$$\left[\frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t} \right]_a^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t} - \frac{\mathrm{H}_\lambda(a)}{a} = 0$$

puis

$$\mathrm{I}(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t^2} \,\mathrm{d}t$$

3. **a.** Posons $\mathrm{G}_\lambda(x) = \mathrm{H}_l a(x + \mathrm{T}) - \mathrm{H}_\lambda(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a déjà montré que H_λ était de classe $\mathcal{C}^1$ donc G_λ également et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{G}_\lambda'(x) = \mathrm{H}_\lambda'(x+\mathrm{T}) - \mathrm{H}_\lambda'(x) = (\lambda - f(x+\mathrm{T})) - (\lambda - f(x)) = f(x) - f(x+\mathrm{T}) = 0$$

Ainsi G_λ est constante sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{H}_\lambda(x+\mathrm{T}) - \mathrm{H}_\lambda(x) = \mathrm{G}_\lambda(0) &= \mathrm{H}_\lambda(\mathrm{T}) - \mathrm{H}_\lambda(0) \\
&= \int_a^{\mathrm{T}} (\lambda - f(t)) \,\mathrm{d}t - \int_a^0 (\lambda - f(t)) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\mathrm{T}} (\lambda - f(t)) \,\mathrm{d}t \qquad \text{d'après la relation de Chasles} \\
&= \lambda\mathrm{T} - \int_0^{\mathrm{T}} f(t) \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

b. Par télescopage

$$\mathrm{H}_\lambda(a+n\mathrm{T}) = \mathrm{H}_\lambda(a+n\mathrm{T}) - \mathrm{H}_\lambda(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{H}_\lambda(a+(k+1)\mathrm{T}) - \mathrm{H}_\lambda(a+k\mathrm{T}) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda\mathrm{T} - \int_0^{\mathrm{T}} f(t) \,\mathrm{d}t = n\left(\lambda\mathrm{T} - \int_0^{\mathrm{T}} f(t) \,\mathrm{d}t \right)$$

Ainsi la suite $(\mathrm{H}_\lambda(a+n\mathrm{T}))$ est bornée si et seulement si $\lambda\mathrm{T} - \int_0^{\mathrm{T}} f(t) \,\mathrm{d}t$ i.e. si et seulement si $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} f(t) \,\mathrm{d}t$.

c. Dans ce cas,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{H}_{\lambda_0}(x+\mathrm{T}) - \mathrm{H}_{\lambda_0}(x) = 0$$

Ainsi H_{λ_0} est T-périodique. Comme H_{λ_0} est continue, elle est bornée sur le segment $[0, \mathrm{T}]$. Par T-périodicité, elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

d. Remarquons que $\frac{\mathrm{H}_{\lambda_0}(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$, donc $t \mapsto \frac{\mathrm{H}_{\lambda_0}(t)}{t^2}$ également. Ainsi $\mathrm{I}(\lambda_0)$ converge.
D'après la question **1**, λ_0 est l'unique valeur de λ pour laquelle $\mathrm{I}(\lambda)$ converge.

e. Soit $x \in [a, +\infty[$. Alors

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_a^x \frac{\lambda_0}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \lambda_0(\ln x - \ln a)$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{I}(\lambda_0)$ et $\lim_{x\to+\infty} \lambda_0 \ln x = \pm\infty$ car $\lambda_0 \neq 0$. On en déduit que

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda_0 \ln x$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $t \mapsto \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$ est continue sur $]0, \pi/2]$ et comme $\sin u \underset{u\to0}{\sim} u$, $\lim_{t\to0^+} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)} = n$. Ainsi $t \mapsto \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$ se prolonge en une application continue sur le *segment* $[0, \pi/2]$. L'intégrale A_n est donc bien définie.
Le même argument montre également que B_n est bien définie.

5. On utilise le fait que $\sin(t) \underset{t\to0}{=} t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$:

$$\varphi(t) = \frac{\sin(t) - t}{t\sin(t)} \underset{t\to0}{\sim} \frac{-t^3/6}{t^2} = -\frac{1}{6}$$

6. D'après la question précédente, φ est prolongeable par continuité sur le segment $[0, \pi/2]$. Elle y est donc bornée Par inégalité triangulaire

$$|\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(nt)||\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2}\|\varphi\|_\infty$$

La suite $(\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n)$ est donc bornée.

7. Via le changement de variable linéaire $u = nt$,

$$\mathrm{B}_n = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{B}_1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u$$

Remarquons que $|\sin|$ est π-périodique donc, avec les notations de la question **3** et $a = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \neq 0$$

On en déduit que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda_0 \ln(x) = \frac{2}{\pi}\ln(x)$$

et donc

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{n\pi}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n)}{\pi}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{2\ln(n)}{\pi} = +\infty$,

$$\mathrm{B}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n)}{\pi}$$

Puisque $(\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n)$ est bornée et que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{B}_n = +\infty$ d'après l'équivalent précédente,

$$\mathrm{A}_n = \mathrm{B}_n + (\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{B}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n)}{\pi}$$

Solution 4

1.

$$p = \mathbb{P}(b' = 1 \mid b = 1) \qquad 1 - p = \mathbb{P}(b' = 0 \mid b = 1)$$
$$q = \mathbb{P}(b' = 0 \mid b = 0) \qquad 1 - q = \mathbb{P}(b' = 1 \mid b = 0)$$

2. On recherche $\mathbb{P}(b' = 1)$. Comme $\{b = 0\}$ et $\{b = 1\}$ forment un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne

$$\mathbb{P}(b' = 1) = \mathbb{P}(b' = 1 \mid b = 0)\mathbb{P}(b = 0) + \mathbb{P}(b' = 1 \mid b = 1)\mathbb{P}(b = 1) = (1 - q)(1 - \alpha) + p\alpha$$

3. On recherche $\mathbb{P}(b = 1 \mid b' = 1)$. D'après la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(b = 1 \mid b' = 1) = \frac{\mathbb{P}(b' = 1 \mid b = 1)\mathbb{P}(b = 1)}{\mathbb{P}(b' = 1)} = \frac{p\alpha}{(1 - q)(1 - \alpha) + p\alpha}$$

4. Si le bit envoyé est un 1, on compte le nombre de bits transmis avec succès (probabilité p pour chacun d'entre eux). On peut supposer les transmissions dans chacun des canaux indépendantes. Ainsi la loi de X conditionné par l'événement $\{b = 1\}$ est une loi binomiale de paramètres n et p :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(\mathrm{X} = k \mid b = 1) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

De même si le bit envoyé est 0, on compte le nombre de bits transmis avec erreur (probabilité $1 - q$ pour chacun d'entre eux). La loi de X conditionné par l'événement $\{b = 0\}$ est une loi binomiale de paramètres n et $1 - q$:

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(\mathrm{X} = k \mid b = 0) = \binom{n}{k} (1 - q)^k q^{n-k}$$

A nouveau, $\{b = 0\}$ et $\{b = 1\}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) &= \mathbb{P}(\mathrm{X} = k \mid b = 0)\mathbb{P}(b = 0) + \mathbb{P}(\mathrm{X} = k \mid b = 1)\mathbb{P}(b = 1)\\ &= \binom{n}{k}\left(\alpha p^k (1 - p)^{n-k} + (1 - \alpha)(1 - q)^k q^{n-k}\right)\end{aligned}$$

5.

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \alpha \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} + (1 - \alpha)\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}(1 - q)^k q^{n-k}$$

On reconnaît dans les deux sommes l'espérance de lois binomiales de paramètres respectifs (n, p) et $(n, 1 - q)$. Ainsi

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \alpha n p + (1 - \alpha)n(1 - q) = n\left(\alpha p + (1 - \alpha)(1 - q)\right)$$

6. Il s'agit à nouveau de la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(b = 1 \mid \mathrm{X} = k) &= \frac{\mathbb{P}(\mathrm{X} = k \mid b = 1)\mathbb{P}(b = 1)}{\mathbb{P}(\mathrm{X} = k)}\\ &= \frac{\alpha\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}}{\binom{n}{k}\left(\alpha p^k (1 - p)^{n-k} + (1 - \alpha)(1 - q)^k q^{n-k}\right)}\\ &= \frac{\alpha p^k (1 - p)^{n-k}}{\alpha p^k (1 - p)^{n-k} + (1 - \alpha)(1 - q)^k q^{n-k}}\end{aligned}$$

7. On a donc $p = q$.

a. Dans ce cas,

$$\mathbb{P}(b = 1 \mid \mathrm{X} = k) = \frac{\alpha p^k (1 - p)^{n-k}}{\alpha p^k (1 - p)^{n-k} + (1 - \alpha)(1 - p)^k p^{n-k}}$$

et donc
$$\mathbb{P}(b=0 \mid \mathrm{X}=k) = 1-\mathbb{P}(b=1 \mid \mathrm{X}=k) = \frac{(1-\alpha)(1-p)^k p^{n-k}}{\alpha p^k(1-p)^{n-k}+(1-\alpha)(1-p)^k p^{n-k}}$$
On cherche les $k \in [\![0,n]\!]$ tels que
$$\mathbb{P}(b=1 \mid \mathrm{X}=k) > \mathbb{P}(b=0 \mid \mathrm{X}=k)$$
Ceci équivaut à
$$\alpha p^k(1-p)^{n-k} > (1-\alpha)(1-p)^k p^{n-k}$$
ou encore à
$$\left(\frac{p}{1-p}\right)^{2k} > \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{p}{1-p}\right)^n$$
Par stricte croissance de ln, ceci équivaut à
$$2k\left(\ln(p)-\ln(1-p)\right) > \ln(1-\alpha)-\ln(\alpha)+n\left(\ln(p)-\ln(1-p)\right)$$
Puisque $p > \frac{1}{2}$, $p > 1-p$ et donc $\ln(p)-\ln(1-p) > 0$. La condition recherchée est donc
$$k > \frac{\ln(1-\alpha)-\ln(\alpha)+n\left(\ln(p)-\ln(1-p)\right)}{2\left(\ln(p)-\ln(1-p)\right)}$$

b. Si $\alpha = \frac{1}{2}$, cette condition se simplifie en $k > \frac{n}{2}$, ce qui est conforme à l'intuition.

8. **a.**
$$\begin{aligned}f(n) &= \mathbb{P}(\{b=0\}\cap\{\mathrm{X}>n/2\}) + \mathbb{P}(\{b=1\}\cap\{\mathrm{X}<n/2\})\\ &= \sum_{n/2<k\leq n}\mathbb{P}(b=0 \mid \mathrm{X}=k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) + \sum_{0\leq k<n/2}\mathbb{P}(b=1 \mid \mathrm{X}=k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)\end{aligned}$$

b. En reprenant la question **7.a** dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$, on trouve
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(b=1 \mid \mathrm{X}=k) &= \frac{p^k(1-p)^{n-k}}{p^k(1-p)^{n-k}+(1-p)^k p^{n-k}}\\ \mathbb{P}(b=0 \mid \mathrm{X}=k) &= \frac{(1-p)^k p^{n-k}}{p^k(1-p)^{n-k}+(1-p)^k p^{n-k}}\end{aligned}$$
En reprenant la question **4** dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ et $p=q$, on obtient
$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \frac{1}{2}\binom{n}{k}\left(p^k(1-p)^{n-k}+(1-p)^k p^{n-k}\right)$$
Ainsi
$$f(n) = \frac{1}{2}\sum_{n/2<k\leq n}\binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k} + \frac{1}{2}\sum_{0\leq k<n/2}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$
En tenant compte de la symétrie des coefficients binomiaux, on peut simplifier :
$$f(n) = \sum_{0\leq k<n/2}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

c. Vu la question suivante, il vaut mieux calculer la liste des $\binom{n}{k}$ pour un entier naturel n donné. On utilise la formule du triangle de Pascal.

```python
def tab_bin(n):
  b=[1]
  for m in range(n):
    b.append(1)
    for k in range(m,0,-1):
      b[k]+=b[k-1]
  return b
```

Si l'on veut réellement le coefficient binomial $\binom{n}{k}$:

```
def binome(n,k):
    return tab_bin(n)[k]
```

d. Il est peut-être plus judicieux de passer p en paramètre.

```
def f(n,p):
    b=tab_bin(n)
    return sum(b[k]*p**k*(1-p)**(n-k) for k in range((n+1)//2))
```