# Devoir à la maison n°12

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

## Problème 1

**1** **1.a** Puisque $x \in ]-1,1[$, $\lim_{n\to+\infty} 1-x^n = 1$. Ainsi $1-x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

**1.b** Soit $x \in ]-1,1[$. D'après la question précédente, $\frac{a_nx^n}{1-x^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} a_nx^n$. Par conséquent, $\left|\frac{a_nx^n}{1-x^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_nx^n|$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nx^n$ est 1 donc $\sum a_nx^n$ converge absolument i.e. la série à termes positifs $\sum |a_nx^n|$ converge. D'après l'équivalent précédent, $\sum \left|\frac{a_nx^n}{1-x^n}\right|$ converge i.e. $\sum \frac{a_nx^n}{1-x^n}$ converge absolument.

**1.c** On peut par exemple prendre $a_n = \frac{1}{n^2}$ et $x = 2$. Alors

$$\frac{a_nx^n}{1-x^n} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{2^n}{1-2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum \frac{a_nx^n}{1-x^n}$ converge également.

**2** Soit $b \in [0,1]$. Alors

$$\forall x \in [-b,b],\ |a_nx^n| = |a_n||x|^n \leq |a_n|b^n$$

et

$$\forall x \in [-b,b],\ |1-x^n| \geq 1-|x^n| = 1-|x|^n \geq 1-b^n > 0$$

On en déduit que

$$\forall x \in [-b,b], \left|\frac{a_nx^n}{1-x^n}\right| \leq \frac{|a_n|b^n}{1-b^n}$$

ou encore, en posant $f_n : x \mapsto \frac{a_nx^n}{1-x^n}$,

$$\|f_n\|_{\infty,[-b,b]} \leq \frac{|a_n|b^n}{1-b^n}$$

Or $\frac{|a_n|b^n}{1-b^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_n|b^n$ et la série $\sum a_nb^n$ converge absolument puisque $0 \leq b < 1$. Ainsi $\sum |a_n|b^n$ converge puis $\sum \frac{|a_n|b^n}{1-b^n}$ converge et enfin, $\sum \|f_n\|_{\infty,[-b,b]}$ converge. Ainsi $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-b,b]$.

**3** **3.a** Puisque les $f_n$ sont continues et que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,1[$, $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $]-1,1[$.

**3.b** Les fonctions $f_n$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et $\sum f_n$ converge uniformément et donc simplement vers $f$ sur $]-1,1[$. Il reste uniquement à montrer que $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,1[$. Pour conclure que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$. Comme précédemment, on va montrer la convergence normale sur tout segment $[-b,b]$ avec $0 \leq b < 1$. Fixons $b \in [0,1[$. Remarquons que

$$\forall x \in ]-1,1[,\ f_n'(x) = \frac{na_nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

On montre alors que

$$\|f_n'\|_{\infty,[-b,b]} \leq \frac{n|a_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$$

De plus, $\frac{n|a_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n|a_n|b^{n-1}$. Or la série entière $\sum a_n x^n$ et sa série dérivée $\sum n a_n x^{n-1}$ ont même rayon de convergence, à savoir 1. Par conséquent la série $\sum n a_n b^{n-1}$ converge absolument et on en déduit comme précédemment la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[-b, b]$.
On peut alors conclure que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et que

$$\forall x \in ]-1,1[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n a_n x^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

Notamment, $f'(0) = a_1$.

**4** **4.a** Il s'agit du théorème de sommation par paquets. La famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in \mathrm{A}}$ étant supposé sommable, il suffit de vérifier que les $\mathrm{I}_n$ forment une partition de A i.e. $\mathrm{A} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{I}_n$. S'il existe $(k,p) \in \mathrm{I}_n \cap \mathrm{I}_m$, alors $n = m = kp$ et donc $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_m$. Les $\mathrm{I}_n$ sont donc disjoints deux à deux. Par ailleurs, $(k,p) \in \mathrm{I}_{kp}$ donc $\mathrm{A} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{I}_n$.

**4.b** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série géométrique $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} |a_n x^{np}| = \sum_{p\in\mathbb{N}^*} |a_n||x^n|^p$ converge et

$$\sum_{p=1}^{+\infty} |a_n x^{np}| = \frac{|a_n||x|^n|}{1-|x|^n}$$

Or on a vu que pour tout $t \in ]-1,1[$, la série $\sum \frac{a_n t^n}{1-t^n}$ convergeait absolument donc la série $\sum \frac{|a_n||x|^n|}{1-|x|^n}$ converge. On en déduit la sommabilité de la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in\mathrm{A}}$.

**4.c** On applique la question **4.a**.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in\mathrm{I}_n} a_k x^{kp}\right)$$

Comme précédemment, $\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} = \frac{a_n x^n}{1-x^n}$ (série géométrique) et

$$\sum_{(k,p)\in\mathrm{I}_n} a_k x^{kp} = \left(\sum_{(k,p)\in\mathrm{I}_n} a_k\right) x^n = \left(\sum_{d|n} a_d\right) x^n = b_n x^n$$

On en déduit bien que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$$

**5** Dans cette question,

$$b_n = \sum_{d|n} a_d = \sum_{d|n} 1 = d_n$$

donc

$$\forall x \in ]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$$

**6** **6.a** On rappelle que

$$\varphi(n) = \operatorname{card}\{k \in [\![1,n]\!],\ k \wedge n = 1\}$$

donc $1 \leq \varphi(n) \leq n$. Notons R le rayon de convergence de la série $\sum \varphi(n) x^n$. Puisque $\varphi(n) \geq 1$ et que le rayon de convergence de $\sum z^n$ vaut 1, $\mathrm{R} \leq 1$. Mais $\varphi(n) \leq n$ et le rayon de convergence de $\sum n z^n$ vaut également 1, donc $\mathrm{R} \geq 1$. Finalement, $\mathrm{R} = 1$.

**6.b**
```python
def pgcd(a,b):
    return b if b==0 else pgcd(b,a%b)

def indicatrice(n):
    return len([k for k in range(n) if pgcd(k,n)==1])

def somme(n):
    return sum(indicatrice(d) for d in range(1,n+1) if n%d==0)
```

**6.c** Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Ensuite

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= \operatorname{card}\{1\} = 1\\ \varphi(2) &= \operatorname{card}\{1\} = 1\\ \varphi(3) &= \operatorname{card}\{1,2\} = 2\\ \varphi(4) &= \operatorname{card}\{1,3\} = 2\\ \varphi(6) &= \operatorname{card}\{1,5\} = 2\\ \varphi(12) &= \operatorname{card}\{1,5,7,11\} = 4\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{d\mid 12}\varphi(d) = \varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)+\varphi(6)+\varphi(12) = 12$$

**6.d** Dans cette question

$$b_n = \sum_{d\mid n} a_d = \sum_{d\mid n}\varphi(d) = n$$

Ainsi

$$\forall x \in ]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$$

Or on sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ donc, en dérivant, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Finalement,

$$\forall x \in ]-1,1[,\ f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

**7** On sait que

$$\forall x \in ]-1,1[,\ -\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$$

On va montrer qu'en posant $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x^n}{n}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge uniformément sur $[0,1[$. On sait déjà que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1[$. De plus, en posant $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ et en remarquant que la suite $(x^n/n)$ est décroissante et de limite nulle, on a d'après le critère spécial des séries alternées,

$$\forall x \in [0,1[,\ |\mathrm{R}_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

Ainsi $\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,[0,1[} \leq \frac{1}{n+1}$ et la suite $\left(\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,[0,1[}\right)$ converge vers 0 i.e $(\mathrm{R}_n)$ converge uniformément vers la fonction nulle. On en déduit que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1[$. Enfin, $\lim_1 f_n = \frac{(-1)^n}{n}$ donc, d'après le théorème de la double limite,

$$\lim_{x\to 1} -\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to 1} f_n(x)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$

**8** Tout d'abord, pour $x \in ]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n x^{n-1}}{1-x^n}$$

Fixons $b \in [0,1[$. On pose ici $f_n : x \mapsto \frac{a_n x^{n-1}}{1-x^n}$ et on montre comme à la question **2** que $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-b,b]$. Puisque $\lim_{x\to 0} f_n(x) = \begin{cases} a_1 & \text{si } n=1\\ 0 & \text{si } n \geq 2\end{cases}$, on obtient par le théorème de la double limite, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = a_1$. Par conséquent, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_1 x = -x$. Comme $f(0) = 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} a_1 = -1$$

donc $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1 = -1$.

**9** Tout d'abord, pour tout $x \in ]-1,1[$,

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n(1-x)}{(1-x^n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k}$$

Posons cette fois-ci,

$$f_n : x \mapsto \frac{a_n x^n}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k} = \frac{(-1)^n x^n}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to 1} f_n(x) = \frac{a_n}{n} = \frac{(-1)^n}{n}$. Il suffit donc de montrer la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0,1[$ pour conlure à l'aide du théorème de la double limite. Tout d'abord, $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1[$ et comme pour $x \in [0,1[$, la suite de terme général $\frac{x^n}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k}$ est décroissante (numérateur décroissant et déominateur croissant), on a d'après le critère spécial des séries alternées,

$$\forall x \in [0,1[, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq \frac{x^{n+1}}{\sum_{k=0}^{n} x^k} \leq \frac{1}{n+1}$$

On en déduit que le reste de la série $\sum f_n$ converge uniformément vers la fonction nuelle puis que $\sum f_n$ converge uniformément. D'après le théorème de la double limite

$$\lim_{x\to 1}(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to 1} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \ln 2$$

Ainsi

$$f(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{\ln 2}{1-x}$$