

## Suites de fonctions

## Exercice 1 ★★★

ENS MP 2010

Soient  $d \in \mathbb{N}$  et  $(P_n)$  une suite de polynômes de  $\mathbb{R}_d[X]$ . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $(P_n)$  converge dans  $\mathbb{R}_d[X]$ .
- (ii)  $(P_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$ .
- (iii)  $(P_n)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

## Exercice 2 ★★★

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$  et  $p \in \mathbb{N}$ . On considère une suite  $(P_n)$  de fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à  $p$  qui converge simplement sur  $[a, b]$  vers une fonction  $f$ .

Montrer que  $f$  est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à  $p$  et que  $(P_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ .

## Exercice 3 ★

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que la suite  $(f^{(n)})$  des dérivées successives converge uniformément vers une fonction  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$ . Que peut-on dire de  $\varphi$  ?

## Exercice 4 ★★

CCP MP

On pose  $f_n : x \mapsto n \cos^n(x) \sin(x)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

- 1. Étudier la convergence simple de la suite  $(f_n)$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 2. La suite  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , sur  $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$  où  $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  ?
- 3. Soit  $g$  continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) g(t) dt = g(0)$$

## Exercice 5 ★★★★★

Théorème de Dini

- 1. Soit  $(f_n)$  une suite croissante de fonctions réelles continues sur un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . Montrer que si  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$ , alors la convergence est uniforme.
- 2. Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions croissantes, réelles et continues sur un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . Montrer que si  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$ , alors la convergence est uniforme.

## Exercice 6 ★★

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ .

$$\text{Calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}^1 x^{\frac{1}{n}} f(x) dx.$$

## Exercice 7

Soit  $f : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow [0, 1] \\ x & \longmapsto 2x(1-x) \end{cases}$ . On définit la suite de fonctions  $(f_n)$  par  $f_0 = \text{Id}_{[0,1]}$  et  $f_{n+1} = f \circ f_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Étudier la convergence de la suite  $(f_n)$ .

## Exercice 8 ★★

Soit  $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto n \cos^n(x) \sin(x)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Étudier la convergence de la suite de fonctions  $(f_n)$  sur  $\mathbb{R}$ .

## Exercice 9 ★★★

Soit  $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin^n(x) \cos(x)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Étudier la convergence de la suite de fonctions  $(f_n)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 10 ★★★**

Soit  $(P_n)$  la suite de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par

- $P_0(x) = 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ ;
- $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x)^2)$  pour tout  $x \in [0, 1]$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$ .
2. Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

3. En déduire que la suite  $(P_n)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$ .

**Exercice 11 ★★**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ .

1. Montrer que  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$  vers une fonction  $f$  à déterminer.
2. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$  et  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ .

**Exercice 12 ★**

Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f_n : x \in [0, 1] \mapsto n^\alpha x^n (1 - x)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Etudier la convergence simple et uniforme de  $(f_n)$  sur  $[0, 1]$ .

**Séries de fonctions****Exercice 13 ★★**

On note  $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{nx^{2n-1}}{1 - x^{2n}}$ .

1. Déterminer le domaine de définition  $D$  de  $S$ .
2. Montrer que  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D$ .
3. Étudier les variations de  $S$  sur  $D$ .
4. Étudier les limites de  $S$  aux bornes de  $D$ .

**Exercice 14 ★★****Mines-Ponts PC**

On pose  $f_n(x) = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+x}} \right) - 2\sqrt{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Étudier la convergence de simple  $\sum_{n \geq 1} f_{n+1} - f_n$ .
2. Montrer que  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .
3. Calculer  $\int_0^1 f(t) dt$ .

**Exercice 15 ★★★**

Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite décroissante de limite nulle. On pose  $f_n : x \mapsto \sin nx$ . Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} a_n f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 16 ★★★★★**

Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle décroissante de limite nulle. On pose  $f_n : x \mapsto \sin nx$ . Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} a_n f_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si la suite  $(na_n)$  converge vers 0.

**Exercice 17 ★★★****Mines-Télécom MP 2018**

1. Déterminer l'ensemble de définition de la série de  $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$ . Donner un équivalent simple de  $f$  en 0.
2. Mêmes questions avec  $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$ .

**Exercice 18 ★★****Mines-Télécom MP 2017**

On définit la suite de fonctions  $(g_n)$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  par  $g_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], g_{n+1}(x) = \int_0^x g_n(1-t) dt$$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n$  est bornée et que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|g_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|g_{n-1}\|_\infty$ .
2. On pose  $G : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ .  
Montrer que  $G$  est bien définie sur  $[0, 1]$  et déterminer une équation différentielle vérifiée par  $G$ .
3. En déduire l'expression de  $G$ .

**Exercice 19****Banque Mines-Ponts MP 2019**

1. Existe-t-il une suite de réels  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = k$  ?
2. Existe-t-il une suite de réels  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = \frac{1}{k^2}$  ?

**Exercice 20****CCINP (ou CCP) PC 2019**

Soit  $t \in \mathbb{R}$  et on pose  $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{nt})$ .

1. Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ?
2. Montrer que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \ln(2)$ .
3. Montrer que  $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = +\infty$ .

**Exercice 21****CCINP (ou CCP) MP 2019**

Soit  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ .

1. Pour  $t \in ]0, 1[$ , écrire  $\frac{t^{a-1}}{1+t^b}$  comme somme de série  $\sum_{n \geq 0} u_n(t)$ , où les  $u_n$  sont des fonctions puissances.
2. Déterminer la nature de la série  $\sum \int_0^1 |u_n(t)| dt$ . Que peut-on en déduire ?
3. Soit  $S_N(t) = \sum_{n=0}^N u_n(t)$ . Démontrer

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_N(t) dt$$

4. En déduire

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$$

5. Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ .

**Exercice 22 ★**

Soit  $\alpha > 0$ . On pose  $f_n : x \mapsto e^{-n^\alpha x}$  et  $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ .

1. Quel est le domaine de définition de  $f$  ?
2. Étudier la continuité de  $f$ .
3. Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

**Exercice 23 ★★★****Arts et Métiers PSI**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $(f_n)$  la suite de fonctions définies par  $f_0 = f$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\forall x \in [a, b], f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$$

1. Déterminer la nature de la convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  sur  $[a, b]$ .
2. On note  $F$  la somme de cette série. Montrer que

$$\forall x \in [a, b], F(x) = f(x) + e^x \int_a^x e^{-t} f(t) dt$$

**Exercice 24****Centrale MP**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n : x \mapsto x \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ .

1. Montrer que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. On note  $g$  la somme de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ . Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
3. On pose  $f : x \mapsto g(x) - \ln(x)$ . Montrer que  $f$  vérifie les trois conditions suivantes :
  - (i)  $f(1) = 0$ .
  - (ii)  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$  ;
  - (iii)  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) - f(x) = \ln(x)$  ;
4. Réciproquement, soit  $f$  vérifiant les trois conditions de la question précédente. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x \ln(n) + \ln(n!) - \sum_{k=0}^n \ln(x+k)$$

**Séries alternées****Exercice 25 ★★****CCINP (ou CCP) MP 2018**

Soit  $(\lambda_n)$  une suite strictement croissante de réels strictement positifs de limite  $+\infty$ . On pose pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_n(x) = (-1)^n e^{-\lambda_n x}$$

1. Étudier la convergence simple de la série  $\sum f_n$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Étudier sa convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
3. On pose  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ . Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} S(t) dt$  converge et que

$$\int_0^{+\infty} S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$$

**Exercice 26 ★★**

CCINP (ou CCP) PC 2017

On considère pour  $x > 0$  la suite  $(u_n)$  définie pour  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$  et  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ .

1.  $f$  est-elle bien définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  ?
2. Montrer que

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$

3. Montrer que

$$\forall x > 0, 2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$$

4. Déterminer un équivalent de  $f$  en  $+\infty$ .
5. Déterminer un équivalent de  $f$  en  $0^+$ .
6. Montrer que :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

**Exercice 27 ★★**

Fonction  $\zeta$  alternée

On considère la fonction  $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ .

1. Déterminer le domaine de définition  $D$  de  $S$ .
2. Déterminer la limite de  $S$  en  $+\infty$ .
3. Montrer que pour tout  $x \in D$ ,

$$2S(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n(x)$$

$$\text{avec } u_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

4. En déduire la limite de  $S$  en  $0^+$ .

**Exercice 28**

CCINP (ou CCP) MP 2021

Soit  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ .

1. Montrer que  $S$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

2. À l'aide du critère spécial des séries alternées, trouver la monotonie de  $S$ .
3. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$$

puis en déduire un équivalent simple de  $S(x)$  pour  $x$  qui tend vers 0.

**Exercice 29 ★★★**

On pose  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$  pour  $x > 0$ .

1. Justifier que  $S$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Étudier la limite de  $S$  en  $+\infty$ .
3. Montrer que  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

## Approximations

**Exercice 30 ★★★**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\int_a^b f(t)t^k dt = 0$ . Que peut-on dire de  $f$  ?

**Exercice 31 ★★★****Lemme de Riemann-Lebesgue**

On considère un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  et un espace vectoriel normé de dimension finie  $E$ .

1. Soit  $\varphi$  une fonction en escalier sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $E$ . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} \varphi(t) \, dt = 0$$

2. Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $E$ . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) \, dt = 0$$

3. Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $E$ . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t) \, dt = 0$$