Semaine du 26/11 au 30/11

1 Cours

Comparaison de fonctions

Négligeabilité Définition et notation : $f \underset{a}{=} o(g) \iff \lim_a \frac{f}{g} = 0$. Règles de calcul et opérations interdites. Changement de variable. Exemples usuels : croissances comparées. Lien avec les limites : $\lim_a f = l \iff f \underset{a}{=} l + o(1)$.

Équivalence Définition et notation : $f \underset{a}{\sim} g \iff \lim_a \frac{f}{g} = 1$. Lien avec les petits o : $f \underset{a}{\sim} g \iff f \underset{a}{=} g + o(g)$. Règles de calcul et opérations interdites. Changement de variable. Équivalents usuels en 0 et formules avec petits o associées. Lien avec les limites : si deux fonctions sont équivalentes alors elles admettent toutes deux la même limite ou elles n'admettent pas de limites ; si l est un réel **non nul** alors $f \underset{a}{\sim} l \iff \lim_a f = l$.

Domination Définition et notation : $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g) \iff \frac{f}{g}$ bornée au voisinage de a.

Développements limités

Généralités Définition du développement limité d'une fonction. Unicité du développement limité.

Intégration et dérivation des DL, formule de Taylor-Young

- Intégration : si f admet un $DL_n(a)$, alors toute primitive F de f admet un $DL_{n+1}(a)$ et le DL de F s'obtient en intégrant terme à terme celui de f.
- Dérivation : si f admet un $DL_n(a)$ et <u>si f' admet un $DL_{n-1}(a)$</u>, alors le DL de f' s'obtient en dérivant terme à terme celui de f.
- Taylor-Young : Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un voisinage de a, alors f admet un $DL_n(a)$ donné par la formule de Taylor-Young. J'insiste : en plus de la formule, ce théorème donne aussi l'**existence** d'un DL !

Développements limités usuels $\frac{1}{1 \pm x}$, e^x, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ en 0.

Calculs sur les DL Combinaison linéaire et produit (pour l'instant).

2 Méthodes à maîtriser

- Pour les comparaisons de fonctions, on retiendra surtout les erreurs à ne pas commettre :
  1. On ne compose pas à gauche.
  2. On n'additionne pas des équivalents.
  3. On n'additionne pas des relations avec des petits o différents.
  4. On ne mélange pas équivalents et petits o dans une même ligne.
- Passage par les petits o pour déterminer l'équivalent d'une somme.
- Déterminer des limites à partir d'équivalents ou de petits o.
- Savoir se ramener en 0 par un changement de variable.
- Mettre les développements limités sous forme normalisée pour calculer des produits de DL.
- N'additionner que des développements limités de même ordre.
- Déterminer les ordres auxquels il faut développer les différentes composantes d'une expression pour obtenir un DL d'ordre donné de cette expression.

3 Questions de cours

- **Banque CCP Exo 56** On considère la fonction H définie sur $]1,+\infty[$ par

$$H(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln(t)}$$

  1. Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
  2. Montrer que la fonction u définie par $u(x)=\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en 1.
  3. En utilisant la fonction u de la question 2, calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

- Donner le développement limité en 0 à l'ordre n de $u\mapsto\dfrac{1}{1-u}$. En déduire le développement limité en 0 à l'ordre $2n+1$ de la fonction arctan.

- A partir d'un équivalent de tan en 0, calculer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction tan.

- Citer la formule de Taylor-Young avec ses hypothèses. En déduire le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$.