Devoir surveillé n°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 ★★

Soit h la fonction définie par

$$h(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition de h.

2. Justifier que h est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.

3. En déduire la valeur de $h(x)$ en fonction de la valeur de x.

4. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Justifier que $S_n = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. En déduire la limite de la suite (S_n).

c. Démontrer que $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

d. On pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan(2k^2)$. Déterminer les limites des suites (T_n) et (T_n/n).

Exercice 2 ★★

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \cos^n(x)\sin(x)$.

1. On fixe $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
2. Déterminer le minimum de f_n sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *sans étudier ses variations*.
3. Etudier les variations de f_n et en déduire que f_n atteint son maximum M_n sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n = 0$.

On pose maintenant $g_n = \sqrt{n}\, f_n$ et on note M'_n le maximum de g_n sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. On fixe $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} g_n(x)$.
6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

7. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.
8. Déduire des deux questions précédentes que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{M}'_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Exercice 3 ★★ **Fonction W de Lambert**

On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto xe^x$.

1. Etudier les variations de f et déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. On regroupera ces informations dans un tableau de variation.
2. Justifier que f induit une bijection de $[-1, +\infty[$ sur un intervalle I à déterminer. On note W sa bijection réciproque.
3. Justifier que W est dérivable sur un intervalle J à préciser. Déterminer $\mathrm{W}'(0)$ et montrer que

$$\forall x \in \mathrm{J} \setminus \{0\},\ \mathrm{W}'(x) = \frac{\mathrm{W}(x)}{x(1+\mathrm{W}(x))}$$

Exercice 4 ★★

On définit la fonction $f_n : t \in [0,n] \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que
$$\forall u \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+u) \leq u$$

2. En déduire que pour tout $t \in [0,n]$,
$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \qquad \text{et} \qquad \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$$

3. En déduire que pour tout $t \in [0,n]$,
$$0 \leq e^{-t} - f_n(t) \leq e^{-t}\left[1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right]$$

4. Montrer que pour tout $u \in [0,1]$,
$$(1-u)^n \geq 1-nu$$

5. En déduire que pour tout $t \in [0,n]$,
$$0 \leq e^{-t} - f_n(t) \leq \frac{t^2e^{-t}}{n}$$

On pose $g_n : t \in [0,n] \mapsto e^{-t} - f_n(t)$.

6. Déterminer le minimum m_n de g_n sur $[0,n]$.

7. Montrer que la fonction $\psi : t \mapsto t^2e^{-t}$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$.

8. On admet que g_n admet un maximum M_n sur $[0,n]$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n = 0$.