Devoir surveillé n°3

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

On expose dans cet exercice la méthode de Cardan pour la résolution des équations du troisième degré.
On montre aisément par un changement de variable que toute équation du troisième degré est équivalente à une équation de la forme suivante

$$(E) : \ X^3 + pX + q = 0 \qquad \text{avec } (p, q) \in \mathbb{C}^2$$

Nous allons maintenant tenter de résoudre l'équation (E).

1. Soit z une solution éventuelle de l'équation (E).

  a. Justifier l'existence de deux complexes u et v tels que $u + v = z$ et $uv = -\frac{p}{3}$.

  b. Calculer u^3v^3 en fonction de p et $u^3 + v^3$ en fonction de q. Pour le calcul de $u^3 + v^3$, on pourra commencer par développer $(u + v)^3$.

  c. En déduire que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation

$$(E') : \ X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$$

  d. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Vérifier que $ju + j^2v$ et $j^2u + jv$ sont également solutions de l'équation (E).

2. On en déduit donc la méthode suivante pour résoudre l'équation (E) :

- On forme l'équation (E') dont on calcule les racines.
- On extrait des racines cubiques u et v de ces deux solutions vérifiant $uv = -\frac{p}{3}$.
- Les solutions de (E) sont alors les complexes $u + v$, $ju + j^2v$, $j^2u + jv$.

Appliquer cette méthode à la résolution de l'équation

$$X^3 - 3iX + 1 - i = 0$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

Problème 1 —

Les différentes parties de ce problème sont très largement indépendantes.

Partie I – Étude d'une application

On définit une application f de la manière suivante :

$$f \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + \dfrac{1}{z} \end{array} \right.$$

1. Déterminer les antécédents éventuels du nombre complexe i par f.
2. L'application f est-elle injective ?
3. Montrer que f est surjective.
4. Montrer que $f(\mathbb{U}) = [-2, 2]$.
5. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \cup \mathbb{R}$.
6. Montrer que $f(\mathbb{R}^*) =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. On pourra procéder à une érude de fonction.
7. On pose $D = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z| < 1\}$. Montrer que $f(D) \subset \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$.
8. Montrer que tout élément de $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ admet exactement 2 antécédents par f dans $\mathbb{C}^*$. Que vaut le produit de ces deux antécédents ?
9. Montrer que f induit une bijection de D sur $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$.

Partie II – Un petit peu d'exponentielle complexe

On définit une application g de la manière suivante :

$$g \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(e^z) \end{array} \right.$$

1. Déterminer les antécédents éventuels du nombre complexe i par g.
2. Déterminer $g(i\mathbb{R})$.
3. Déterminer $g(\mathbb{R})$.

Partie III – Une suite d'applications

On définit une suite d'applications (φ_n) de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ en posant

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \varphi_0(z) = 2 \text{ et } \varphi_1(z) = z$$

et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C},\ \varphi_{n+2}(z) = z\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)$$

1. Donner des expressions de $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ et $\varphi_4(z)$.
2. En déduire les solutions des équations $\varphi_2(z) = 0$, $\varphi_3(z) = 0$ et $\varphi_4(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ \varphi_n(f(z)) = f(z^n)$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $f(z^n) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$.
5. En déduire les solutions de l'équation $\varphi_n(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On précisera également le nombre de ces solutions.