Fonctions d'une variable réelle, applications

Solution 1.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $x < f(x)$ alors $f(x) \leqslant f(f(x)) = x$. Contradiction !
Si $x > f(x)$ alors $f(x) \geqslant f(f(x)) = x$. Contradiction !
Donc $f(x) = x$.

Solution 2.

1. $f(I) = \left[-\frac{27}{6}, +\infty\right[$.
2. $f(I) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
3. $f(I) =]-\infty, -1]$.
4. $f(I) = [0; +\infty[$.
5. $f(I) = \mathbb{R}$.

Solution 3.

Il est équivalent de montrer que l'équation $f'(x) = 1$ admet 1 pour unique solution. On calcule pour $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

Par conséquent, $f'(x) = 1 \Leftrightarrow x^3 + 2\ln x - 1 = 0$. Posons $g(x) = x^3 + 2\ln x - 1$ pour $x > 0$. On a facilement :

$$\forall x > 0,\ g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} > 0$$

Par conséquent, g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$. De plus, $g(1) = 0$ donc la seule solution de l'équation $f'(x) = 1$ est 1.

Solution 4.

1. Par distributivité de $\cap$ sur $\cup$, on a :

$$(X \cup A) \cap (X \cup B) = (X \cap X) \cup (X \cap A) \cup (X \cap B) \cup (A \cap B)$$

Or $X \cap X = X$, $X \cap A \subset X$, $X \cap B \subset X$ et $A \cap B = \varnothing$. Donc $(X \cup A) \cap (X \cup B) = X$.

2. **a.** Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset X \cup A$ et $B \subset X \cup B$. Si $A \neq \varnothing$ ou $B \neq \varnothing$, alors $(\varnothing, \varnothing)$ n'admet pas d'antécédent par f. Si $A = \varnothing$ et $B = \varnothing$, alors $f(X) = (X, X)$. Puisque $E \neq \varnothing$, $(\varnothing, E)$ n'admet pas d'antécédent par f. Dans les deux cas, f n'est pas surjective.

   b. Supposons que $A \cap B = \varnothing$. Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $f(X) = f(Y)$. On a donc $X \cup A = Y \cup A$ et $X \cup B = Y \cup B$. Par conséquent, $(X \cup A) \cap (X \cup B) = (Y \cup A) \cap (Y \cup B)$. En utilisant la première question, on a donc $X = Y$. Ceci prouve que f est injective.
   Supposons que f soit injective. On a $f(A \cap B) = f(\varnothing) = (A, B)$. Par injectivité de f, on en déduit que $A \cap B = \varnothing$.

Solution 5.

Soit f une telle application (si elle existe). On va montrer par récurrence que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\text{HR}(n)$ l'hypothèse de récurrence : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ f(k) = k$.

On a $f(0)+f^2(0)+f^3(0)=3\times 0=0$. Or $f(0)$, $f^2(0)$ et $f^3(0)$ sont des entiers naturels ; en particulier, ils sont positifs. On a donc $f(0)=0$.
Supposons $\mathrm{HR}(n)$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$. On a $f(n+1)+f^2(n+1)+f^3(n+1)=3(n+1)$. Supposons par l'absurde que $f(n+1)\neq n+1$. Un des trois entiers $f(n+1)$, $f^2(n+1)$ et $f^3(n+1)$ est nécessairement strictement inférieur à $n+1$. Examinons les trois cas.

- Si $f(n+1)<n+1$. Notons $k=f(n+1)$. Puisque $k\leqslant n$, $f^2(n+1)=f(k)=k$ en utilisant $\mathrm{HR}(n)$. De même, $f^3(n+1)=k$. Ainsi $f(n+1)+f^2(n+1)+f^3(n+1)=3k<3(n+1)$, ce qui est impossible.

- Si $f^2(n+1)<n+1$. Notons $k=f^2(n+1)$. Puisque $k\leqslant n$, $f^3(n+1)=f(k)=k$ en utilisant $\mathrm{HR}(n)$. De même, $f^4(n+1)=k$. Ainsi $f^2(n+1)+f^3(n+1)+f^4(n+1)=3k$. Mais on a également $f^2(n+1)+f^3(n+1)+f^4(n+1)=3f(n+1)$. Donc $f(n+1)=k$. Mais alors $f(n+1)+f^2(n+1)+f^3(n+1)=3k<3(n+1)$, ce qui est impossible.

- Si $f^3(n+1)<n+1$. Notons $k=f^3(n+1)$. Puisque $k\leqslant n$, $f^4(n+1)=f(k)=k$ en utilisant $\mathrm{HR}(n)$. De même, $f^5(n+1)=k$. Ainsi $f^3(n+1)+f^4(n+1)+f^5(n+1)=3k$. Mais on a également $f^3(n+1)+f^4(n+1)+f^5(n+1)=3f^2(n+1)$. Donc $f^2(n+1)=k$. Mais alors $f^2(n+1)+f^3(n+1)+f^4(n+1)=3k$. On a également $f^2(n+1)+f^3(n+1)+f^4(n+1)=3f(n+1)$ donc $f(n+1)=k$. Finalement, $f(n+1)+f^2(n+1)+f^3(n+1)=3k<3(n+1)$, ce qui est impossible.

On a donc nécessairement $f(n+1)=n+1$ et donc $\mathrm{HR}(n+1)$ est vraie.
On a donc montré que si f vérifiait la condition de l'énoncé, alors f était nécessairement l'identité. Réciproquement, la fonction identité vérifie bien la condition recherchée.

Solution 6.

1. Supposons que pour tout $A\in\mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)))=A$. Soient $x,y\in E$ tel que $f(x)=f(y)$. On a alors $f^{-1}(f(\{x\}))=\{x\}$ et $f^{-1}(f(\{y\}))=\{y\}$. Mais $f(\{x\})=f(\{y\})$ donc $\{x\}=\{y\}$ i.e. $x=y$. Ainsi f est injective.
   Supposons que f soit injective. Soit $A\in\mathcal{P}(E)$. On a toujours $A\subset f^{-1}(f(A))$ puisque les éléments de A ont leurs images dans $f(A)$. Soit $x\in f^{-1}(f(A))$. On a donc $f(x)\in f(A)$. Il existe donc $a\in A$ tel que $f(x)=f(a)$. Par injectivité de f, $x=a$ et donc $x\in A$. Donc $f^{-1}(f(A))\subset A$.

2. Supposons que pour tout $B\in\mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B))=B$. En particulier, $f(f^{-1}(F))=F$. Comme $f^{-1}(F)\subset E$, $F=f(f^{-1}(F))\subset f(E)\subset F$. Donc $f(E)=F$ et f est surjective.
   Supposons que f soit surjective. Soit $B\in\mathcal{P}(F)$. On a toujours $f(f^{-1}(B))\subset B$ puisque $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des éléments de E qui ont leurs images dans B. Soit $y\in B$. Comme f est surjective, il existe $x\in E$ tel que $f(x)=y$. On a donc $x\in f^{-1}(B)$ et $y=f(x)\in f(f^{-1}(B))$. Donc $B\subset f(f^{-1}(B))$.

Solution 7.

On a $f(0)\geqslant 0$. Or $f(0)\in\mathbb{N}$ donc $f(0)=0$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $f(k)=k$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$. Notons $k=f(n+1)$. D'après l'énoncé, $k\leqslant n+1$. Si $k<n+1$, alors $f(k)=k$ par hypothèse de récurrence et donc $f(n+1)=f(k)$, ce qui contredit l'injectivité de f. Ainsi $f(n+1)=n+1$.
Par récurrence forte, $f(n)=n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Solution 8.

1. Soit $z\in\mathbb{U}$. Alors $|\overline{\alpha}z|=|\overline{\alpha}|\neq 1$. On ne peut donc avoir $\overline{\alpha}z=-1$ sinon on aurait $|\overline{\alpha}z|=|-1|=1$. Ceci prouve que $\overline{\alpha}z+1\neq 0$ et donc que f est définie sur $\mathbb{U}$.

2. On peut écrire les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
& |f(z)| = 1 \\
\iff\quad & |z+\alpha| = |\overline{\alpha}z+1| \\
\iff\quad & |z+\alpha|^2 = |\overline{\alpha}z+1|^2 \\
\iff\quad & (z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha}) = (\overline{\alpha}z+1)(\alpha\overline{z}+1) \\
\iff\quad & |z|^2+|\alpha|^2+\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z = |\alpha|^2|z|^2+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+1 \\
\iff\quad & (1-|\alpha|^2)|z|^2 = 1-|\alpha|^2 \\
\iff\quad & |z|^2 = 1 && \text{car } 1-|\alpha|^2 \neq 0 \\
\iff\quad & |z| = 1
\end{aligned}
$$

On a donc bien montré que $z \in \mathbb{U} \iff f(z) \in \mathbb{U}$.

3. Tout d'abord, d'après la question précédente, $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
Soit $Z \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{\alpha}z+1 \neq 0$. On a les équivalences suivantes

$$
\begin{aligned}
& Z = f(z) \\
\iff\quad & Z = \frac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1} \\
\iff\quad & Z(\overline{\alpha}z+1) = z+\alpha \\
\iff\quad & z(Z\overline{\alpha}-1) = \alpha - Z
\end{aligned}
$$

Puisque $Z \in \mathbb{U}$, on prouve comme à la première question que $Z\overline{\alpha}-1 \neq 0$. L'équation $f(z) = Z$ d'inconnue z admet une unique solution. De plus, si z est solution de cette équation, $f(z) = Z \in \mathbb{U}$ et d'après la question précédente $z \in \mathbb{U}$.
Ceci prouve que f induit une bijection de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$.

Solution 9.

Posons $f(x) = x\ln x$ pour $x > 0$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1+\ln x$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0, e^{-1}]$ et strictement croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$. De plus, $\lim_{0^+} f = 0$ donc $f(x) < 0 < 1$ pour $x \in]0, e^{-1}]$. Ainsi l'équation $f(x) = 1$ n'admet pas de solution sur $]0, e^{-1}]$. Enfin, f est continue et strictement croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$, $f(e^{-1}) = -e^{-1}$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, donc f induit une bijection de $[e^{-1}, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$. Comme $1 > e^{-1}$, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $[e^{-1}, +\infty[$.
En conclusion, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution 10.

Supposons f injective. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On sait déjà que $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$. Montrons alors que $f(A)\cap f(B) \subset f(A\cap B)$. Soit donc $y \in f(A)\cap f(B)$. Il existe donc $(a, b) \in A \times B$ tel que $y = f(a) = f(b)$. Mais par injectivité de f, $a = b$ de sorte que $a = b \in A\cap B$. On en déduit que $y \in f(A\cap B)$. On a donc bien montré que $f(A)\cap f(B) \subset f(A\cap B)$ puis, par double inclusion, que $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$.
Supposons maintenant que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Posons $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$. Alors $f(A) = \{f(x_1)\}$ et $f(B) = \{f(x_2)\}$. Puisque $f(x_1) = f(x_2)$, $f(A) = f(B)$. Ainsi $f(A)\cap f(B) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\}$. En particulier, $f(A) \cap f(B)$ est non vide. Puisque $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, $f(A \cap B)$ est également non vide. Il s'ensuit que $A \cap B$ est non vide et donc que $x_1 = x_2$. Ceci prouve l'injectivité de f.

Solution 11.

1. Puisque $f = g \circ f \circ g$ est injective, g l'est également.
Remarquons maintenant que $f \circ g \circ f \circ f \circ g = f$. Soit alors $y \in E$. Alors $f(y) = f \circ g \circ f \circ f \circ g(y)$ mais comme f est injective,

$y = g \circ f \circ f \circ g(y)$. Ainsi y admet un antécédent par g, à savoir $f \circ f \circ g(y)$. f est donc surjective.
Par conséquent, $g \circ f \circ g$ est surjective et donc g l'est également.

2. Puisque $g = f \circ g \circ f$ est surjective, f l'est également.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $g(x_1) = g(x_2)$. Puisque f est surjective, il existe $(y_1, y_2) \in E^2$ tel que $x_1 = f(y_1)$ et $x_2 = f(y_2)$. Alors $g \circ f(y_1) = g \circ f(y_2)$ puis $f \circ g \circ f(y_1) = f \circ g \circ f(y_2)$ i.e. $g(y_1) = g(y_2)$. Par conséquent, $g \circ f \circ g(y_1) = g \circ f \circ g(y_2)$ i.e. $f(y_1) = f(y_2)$ ou encore $x_1 = x_2$. Ainsi g est injective.
Puisque $g = f \circ g \circ f$ est injective, f l'est également.

Solution 12.

1. D'après l'énoncé, $f(0 + f(0)) = f(f(0)) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.

2. A nouveau d'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(f(n)) = f(0 + f(n)) = f(f(0)) + f(n) = f(0) + f(n) = f(n)$$

puisque $f(0) = 0$. On a donc $f \circ f = f$.

3. Procédons par double inclusion.
Soit $a \in \operatorname{Im} f$. Il existe donc $b \in \mathbb{N}$ tel que $a = f(b)$. Ainsi $f(a) = f(f(b)) = f(b) = a$ d'après la question précédente. Ainsi $a \in \mathcal{F}$. Ceci prouve que $\operatorname{Im} f \subset \mathcal{F}$.
Soit $a \in \mathcal{F}$. Alors $a = f(a) \in \operatorname{Im} f$. Ceci prouve que $\mathcal{F} \subset \operatorname{Im} f$.
Par double inclusion, $\operatorname{Im} f = \mathcal{F}$.

4. Soit $a \in \mathcal{F}$. Alors $f(a) = a$. Par conséquent

$$f(a + 1) = f(1 + f(a)) = f(f(1)) + f(a) = a + f(1) = a + 1$$

car $f(1) = 1$ par hypothèse.

5. Puisque $f(0) = 0$, $0 \in \mathcal{F}$ et la question précédente permet de montrer par récurrence tout entier naturel appartient à $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que $\mathcal{F} = \mathbb{N}$. Ceci signifie que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ i.e. $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Solution 13.

1. Soit $Z \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$,

$$f(z) = Z \iff 2z^2 - (1 + Z)z + 2Z = 0$$

Cette équation du second degré admet toujours au moins une solution forcément distincte de 2 (on vérifie aisément que 2 n'est pas solution). Ceci prouve que f est surjective et donc $\mathcal{T}$ également. De plus, le discriminant de cette équation est $1 - 14Z + Z^2$ n'est pas nul pour $Z = 1$ par exemple. Ceci prouve que 1 admet deux antécédents par f. Ainsi f n'est pas injective et $\mathcal{T}$ ne l'est pas non plus.

2. On résout l'équation $f(z) = z$. On trouve aisément que les seules solutions sont 0 et 1. Les points invariants par $\mathcal{T}$ sont donc les points d'affixes 0 et 1.

3. Deux points m et m' d'affixes respectifs z et z' sont associés *si et seulement si* $f(z) = f(z')$. Ceci équivaut à

$$z + \frac{3}{z - 2} = z' + \frac{3}{z' - 2}$$

ou encore

$$(z - z')\left(1 - \frac{3}{(z - 2)(z' - 2)}\right) = 0$$

On en déduit bien que m et m' sont associés *si et seulement si* $z = z'$ ou $(z - 2)(z' - 2) = 3$.

4. Notons g la restriction de f à $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f'(x) = 2 - \frac{6}{(x-2)^2} = \frac{2(x^2-4x+1)}{(x-2)^2}$.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	$7-4\sqrt{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$7+4\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

On en déduit que $f(\mathbb{R}\setminus\{2\}) = \left]-\infty, 7-4\sqrt{3}\right] \cup \left[7+4\sqrt{3}, +\infty\right[$. Autrement dit, $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = (\mathcal{E}\setminus[BC]) \cup \{B, C\}$.

5. Posons $\alpha = 7-4\sqrt{3}$ et $\beta = 7+4\sqrt{3}$. Soit $m \in \mathcal{P}\setminus\{A\}$ d'affixe $z \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$.
Si $m \in \mathcal{T}^{-1}([BC])$, alors $f(z) \in [\alpha, \beta]$. En particulier, $f(z)$ est réel de sorte que $f(z) = \overline{f(z)} = f(\overline{z})$. D'après la question **3**, $z = \overline{z}$ ou $(z-2)(\overline{z}-2) = 3$ donc $z \in \mathbb{R}$ ou $|z-2|^2 = 3$. Si $z \in \mathbb{R}$, les variations de g étudiées à la question **4** montrent que $z = 2-\sqrt{3}$ ou $z = 2+\sqrt{3}$ puisque $f(z) \in [\alpha, \beta]$. On a donc également $|z-2|^2 = 3$ dans le cas où $z \in \mathbb{R}$. On a finalement montré que $\mathcal{T}^{-1}([BC]) \subset \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{3}$.
Réciproquement, si $m \in \mathcal{C}$, alors $|z-2|^2 = 3$ et donc $(z-2)(\overline{z}-2) = 3$ donc $f(z) = f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ d'après la question **3**. On a donc $f(z) \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, $f(z) - 7 = 2\left(z - 2 + \frac{3}{z-2}\right)$ mais puisque $|z-2|^2 = 3$, $\frac{3}{z-2} = \overline{z-2}$ de sorte que

$$|f(z) - 7| = 4|\operatorname{Re}(z-2)| \leqslant 4|z-2| = 4\sqrt{3}$$

Donc $f(z) \in [\alpha, \beta]$ et $m \in \mathcal{T}^{-1}([BC])$. On a donc montré que $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}^{-1}([BC])$.
Par double inclusion, $\mathcal{T}^{-1}([BC]) = \mathcal{C}$.

Solution 14.

Il suffit de lire le tableau de variation de la fonction $x \mapsto x^2$...

1. $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$;
2. $f([-3, 2]) = [0, 9]$;
3. $f([-3, 3]) = [0, 9]$;
4. $f^{-1}([9, 10]) = [-\sqrt{10}, -\sqrt{9}] \cup [\sqrt{9}, \sqrt{10}]$;
5. $f^{-1}([-5, -3]) = \varnothing$;
6. $f^{-1}([-4, 4[) =]-2, 2[$;
7. $f^{-1}(f([0, 1])) = [-1, 1]$;
8. $f(f^{-1}([-1, 4])) = [0, 4]$;
9. $f(f^{-1}(\mathbb{R}_-)) = \{0\}$.

Solution 15.

① Puisque $f_1(1) = f_1(3)$, f_1 n'est pas injective. On a clairement $-1 \notin f_1(\mathbb{R})$ donc f_1 n'est pas surjective.

② Puisque $f_2\left(4 \pm 2\sqrt{3}\right) = 1/4$, f_2 n'est pas injective. On a $1 \notin f_2(\mathbb{R})$ donc f_2 n'est pas surjective.

③ Puisque $\forall x \geqslant 0$,

$$f_3(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{16x+4},$$

la fonction f_3 est injective. Puisque $3/4 \notin f_3(\mathbb{R})$, la fonction f_3 n'est pas surjective.

④ La fonction f_4 est une bijection d'après le cours sur les fonctions usuelles.

⑤ Puisque tout nombre complexe admet au moins une racine cubique, f_5 est surjective. Puisque $f_5(1) = f_5(j)$ et $j \neq 1$, f_5 n'est pas injective.

Solution 16.

La fonction f est un produit de fonctions strictement croissantes et strictement positives sur $]0, 1[$, f est donc strictement croissante sur cet intervalle ; f étant de plus continue, elle réalise une bijection de $[0, 1]$ sur l'intervalle $[f(0), f(1)] = [0, 2e]$.

Solution 17.

1. **a.** On a $\Psi(\varnothing) = (\varnothing \cap A, \varnothing \cap B) = (\varnothing, \varnothing)$.

   b. On a $\Psi(\overline{A \cup B}) = \Psi(\overline{A} \cap \overline{B}) = (\overline{A} \cap \overline{B} \cap A, \overline{A} \cap \overline{B} \cap B) = (\varnothing, \varnothing)$.

   c. Supposons Ψ injective. Comme $\Psi(\varnothing) = \Psi(\overline{A \cup B})$, on en déduit $\overline{A \cup B} = \varnothing$ i.e. $A \cup B = E$.
   Réciproquement, supposons $A \cup B = E$. Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $\Psi(X) = \Psi(Y)$. On a donc $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$. Ainsi $(X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$ i.e. $X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B)$. Comme $A \cup B = E$, on en déduit $X = Y$. D'où l'injectivité de Ψ.

2. **a.** Supposons que $(\varnothing, B)$ admette un antécédent X par Ψ. Alors $X \cap A = \varnothing$ et $X \cap B = B$ i.e. $B \subset X$. Donc $B \cap A = \varnothing$. Réciproquement, si $A \cap B = \varnothing$, $\Psi(B) = (\varnothing, B)$. Ainsi $(\varnothing, B)$ admet un antécédent *si et seulement si* $A \cap B = \varnothing$.

   b. La question précédente montre que si Ψ est surjective, alors $A \cap B = \varnothing$.
   Supposons $A \cap B = \varnothing$. Soient $(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. On a alors $(X \cup Y) \cap A = (X \cap A) \cup (X \cap B)$. Comme $X \subset A$, $X \cap A = X$. De plus, $A \cap B = \varnothing$ donc $X \cap B = \varnothing$. Ainsi $(X \cup Y) \cap A = X$. De même, $(X \cup Y) \cap B = Y$. D'où $\Psi(X \cup Y) = (X, Y)$. Ainsi Ψ est surjective.

Solution 18.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$f(2m) = 2m, \quad f(2m+1) = m+1.$$

Ainsi $f(2) = f(3) = 2$ donc f n'est pas injective. En revanche, $f(0) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$n = f(2n-1).$$

L'application f est donc surjective.

Solution 19.

1. f n'est ni injective, ni surjective.
2. f est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]0,\frac{1}{2}]$.

Solution 20.

1. f est injective mais pas surjective.
2. a. E est le cercle de centre le point d'affixe 1 et de rayon 1. Son équation cartésienne est donc $(x-1)^2+y^2=1$ ou encore $x^2-2x+y^2=0$.
   F est la droite d'équation $x=\dfrac{1}{2}$.
   b. Soit $z=x+iy\in E\setminus\{0\}$. On a donc $x^2+y^2=2x$. Or $f(z)=\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$. Donc $\mathrm{Re}(f(z))=\frac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}$. Donc $f(z)\in F$. Ainsi $f(E\setminus\{0\})\subset F$.
   c. La restriction de f à $E\setminus\{0\}$ est injective comme restriction d'une application injective.
   Tirons partie du fait que $f\circ f(z)=z$. Montrons que $f(F)\subset E\setminus\{0\}$. Soit $z=\frac{1}{2}+iy\in F$. Alors $f(z)=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}=\frac{\frac{1}{2}-iy}{\frac{1}{4}+y^2}=\frac{2}{1+4y^2}-\frac{4iy}{1+4y^2}=x'+iy'$. On vérifie que (x',y') vérifie l'équation du cercle E. De plus, $\dfrac{1}{z}\neq 0$ donc $f(z)\in E\setminus\{0\}$.
   Ceci signifie que tout élément de F admet un antécédent (égal à $f(z)$ puisque $f\circ f(z)=z$) dans $E\setminus\{0\}$. L'application de $E\setminus\{0\}$ dans F induite par f est donc surjective.

Solution 21.

1. On sait que $A\Delta B=(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})$. Par conséquent,
$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\Delta B}&=\mathbb{1}_{(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})}\\&=\mathbb{1}_{A\cap\bar{B}}+\mathbb{1}_{A\cap\bar{B}}-\mathbb{1}_{A\cap\bar{B}\cap B\cap\bar{A}}\\&=\mathbb{1}_{A\cap\bar{B}}+\mathbb{1}_{A\cap\bar{B}}\qquad\text{car } A\cap\bar{B}\cap B\cap\bar{A}=\varnothing\\&=\mathbb{1}_A(1-\mathbb{1}_B)+\mathbb{1}_B(1-\mathbb{1}_A)\\&=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\end{aligned}$$
2. On pourrait raisonner directement sur les ensembles mais il est peut-être plus simple de raisonner sur les fonctions indicatrices.
$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)}&=(\mathbb{1}_{A\cap B}-\mathbb{1}_{A\cap C})^2\\&=(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C)^2\\&=(\mathbb{1}_A)^2(\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_C)^2\\&=\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\Delta C}\\&=\mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)}\end{aligned}$$
   Par conséquent, $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.
3. Raisonnons à nouveau sur les fonctions indicatrices.
$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C}&=(\mathbb{1}_{A\Delta B}-\mathbb{1}_C)^2\\&=\mathbb{1}_{A\Delta B}^2+\mathbb{1}_C^2-2\mathbb{1}_{A\Delta B}\mathbb{1}_C\\&=\mathbb{1}_{A\Delta B}+\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_{A\Delta B}\mathbb{1}_C\\&=(\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B)^2+\mathbb{1}_C-2(\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B)^2\mathbb{1}_C\\&=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-2(\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_C\\&=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-2(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C+\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C)+4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C\end{aligned}$$

La dernière expression est invariante par permutation de A, B et C. Par conséquent,

$$\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} = \mathbb{1}_{(B\Delta C)\Delta A}$$

Finalement, $(A\Delta B)\Delta C = (B\Delta C)\Delta A = A\Delta(B\Delta C)$.

Solution 22.

1. On trouve sans difficulté que $\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$ et $\mathbb{1}_Y = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$.
2. $X = Y \Leftrightarrow \mathbb{1}_X = \mathbb{1}_Y \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C \iff \mathbb{1}_A(1-\mathbb{1}_C) = 0 \iff \mathbb{1}_{A\setminus C} = 0 \iff A\setminus C = \varnothing \iff A \subset C$.

Solution 23.

f est clairement définie sur $\mathbb{R}$. On remarque également que f est paire.
Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
D'abord, $x \mapsto x^2-1$ est dérivable sur $]-\infty,-1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'ensuit que $x \mapsto \sqrt{|x^2-1|}$ est dérivable sur $]-\infty,-1[$.
De même, $x \mapsto x^2-1$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'ensuit que $x \mapsto \sqrt{|x^2-1|}$ est dérivable sur $]1,\infty[$.
Enfin, $x \mapsto x^2-1$ est dérivable sur $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$, $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'ensuit que $x \mapsto \sqrt{|x^2-1|}$ est dérivable sur $]-1,1[$.
Finalement, f est bien dérivable sur $dR\setminus\{-1,1\}$.
Pour tout $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ et donc

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et donc

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

f est donc décroissante sur $[0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$. Par parité, f est croissante sur $[-1,0]$ et décroissante sur $]-\infty,-1]$. De plus, la courbe représentative de f admet une tangente horizontale en le point d'abscisse 0.
Pour $x \in [0,1[$,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} -\infty$$

et pour $x \in]1,+\infty[$,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} +\infty$$

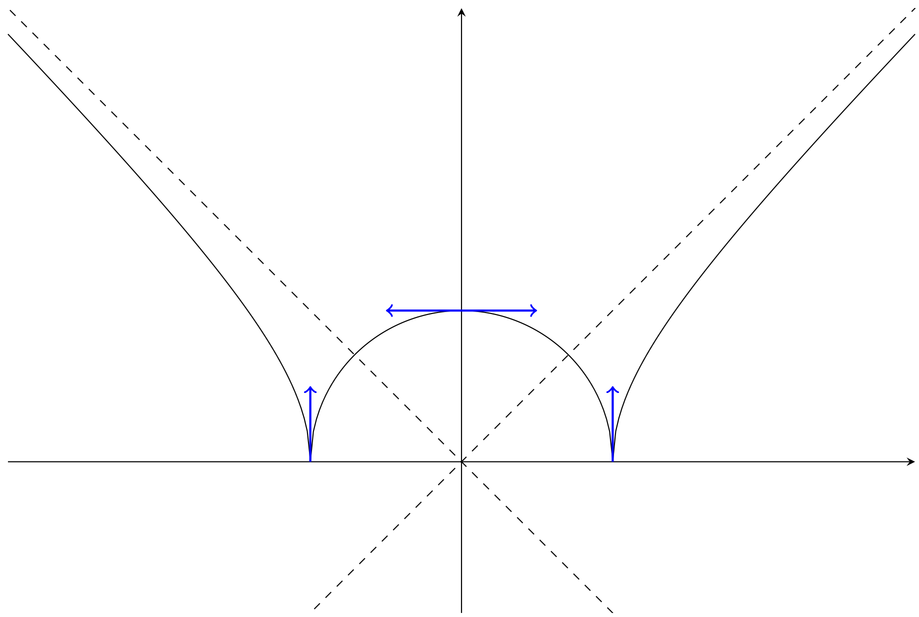
La courbe représentative de f admet donc une tangente verticale au point d'abscisse 1. Par parité, elle admet également une tangente verticale au point d'abscisse -1.
Pour $x \geqslant 1$

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et

$$f(x) - x = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x$ pour asymptote en $+\infty$ et est située en-dessous de celle-ci sur $[1,+\infty[$. Par parité, elle admet la droite d'équation $y = -x$ pour asymptote en $-\infty$ et elle est également située en-dessous de celle-ci sur $]-\infty,-1]$.
On en déduit le tracé suivant.



Solution 24.

1. Généralement pour calculer des limites faisant intervenir des sommes racines carrées, il est utile de faire intervenir "l'expression conjuguées" :
$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$
Les racines au numérateur ont "disparu" en utilisant l'identité $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$. Appliquons ceci : pour tout $x>-1$, on a
$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=\frac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$
et donc
$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}.$$
Il est alors clair que
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1$$
par les opérations usuelles sur les limites.

2. On reconduis la même méthode.
$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}\\
&=\frac{(\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m})((\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}))}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}\\
&=\frac{1+x^m-(1-x^m)}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}\\
&=\frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}\\
&=\frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}
\end{aligned}$$

Et nous avons
$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}} = 1.$$
Donc l'étude de la limite de f en 0 est la même que celle de la fonction $x \mapsto x^{m-n}$.

Distinguons plusieurs pour la limite de f en 0.

- Si $m > n$ alors x^{m-n} et donc $f(x)$ tend vers 0.
- Si $m = n$ alors x^{m-n} et $f(x)$ vers 1.
- Si $m < n$ alors $x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}} = \frac{1}{x^k}$ avec $k = n - m$ un exposant positif. Si k est pair alors les limites à droite et à gauche de $\frac{1}{x^k}$ sont $+\infty$. Pour k impair la limite à droite vaut $+\infty$ et la limite à gauche vaut $-\infty$. Conclusion pour $k = n - m > 0$ pair, la limite de f en 0 vaut $+\infty$ et pour $k = n - m > 0$ impair f *n'a pas de limite en* 0 car les limites à droite et à gauche ne sont pas égales.

3. On a, pour tout $x \neq 0$,
$$\sqrt{1+x+x^2} - 1 = \frac{x+x^2}{\sqrt{1+x+x^2}+1}$$
et donc
$$\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}$$
d'où
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right) = \frac{1}{2}$$
par les opérations usuelles sur les limites.

Solution 25.

1. La limite à droite vaut $+2$, la limite à gauche -2 donc il n'y a pas de limite au point 2.

2. Comme
$$\forall x \neq 0, \quad \frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\text{signe de } x$$
avec $x \mapsto 2\text{signe de } x$ bornée, on trouve $-\infty$.

3. Comme
$$\forall x \neq 2, \quad \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{x+2}{x-1},$$
On trouve 4.

4. Comme
$$\frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)} = \frac{(2\sin(x/2)\cos(x/2))^2}{2\cos^2(x/2)} = 2\sin^2(x/2),$$
on trouve 2.

5. Pour $x > -1$, on a
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} &= \frac{x-x^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}\\ &= \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}},\end{aligned}$$
on trouve ainsi $\frac{1}{2}$.

6. Comme pour $x > -5$, on a

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = \frac{2}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}},$$

on trouve 0.

7. En utilisant que $a^3 - 1 = (a-1)(1+a+a^2)$ pour $a = \sqrt[3]{1+x^2}$, on obtient pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{1}{1+a+a^2}.$$

On trouve donc $\frac{1}{3}$.

8. L'énoncé n'a de sens que pour $n \geqslant 1$. Pour $x \neq 1$, on a

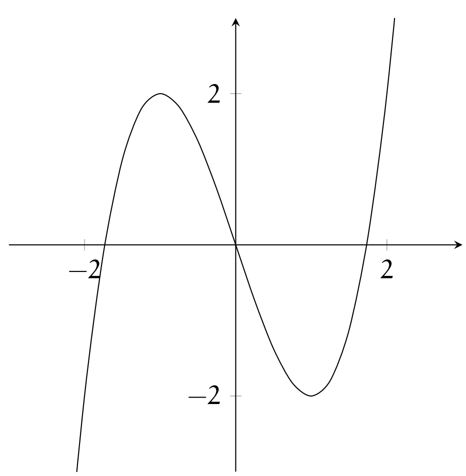
$$\frac{x^n - 1}{x-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

Ainsi, on trouve $\frac{1}{n}$.

Solution 26.

1. L'étude ne pose aucun problème.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$



2.

$$\begin{aligned}
& (x,y) \in \mathcal{C}_f \\
\iff & y = f(x) \\
\iff & y+1 = f((x-2)+2)-1 \\
\iff & y+1 = g(x-2) \\
\iff & (x-2, y+1) \in \mathcal{C}_g
\end{aligned}$$

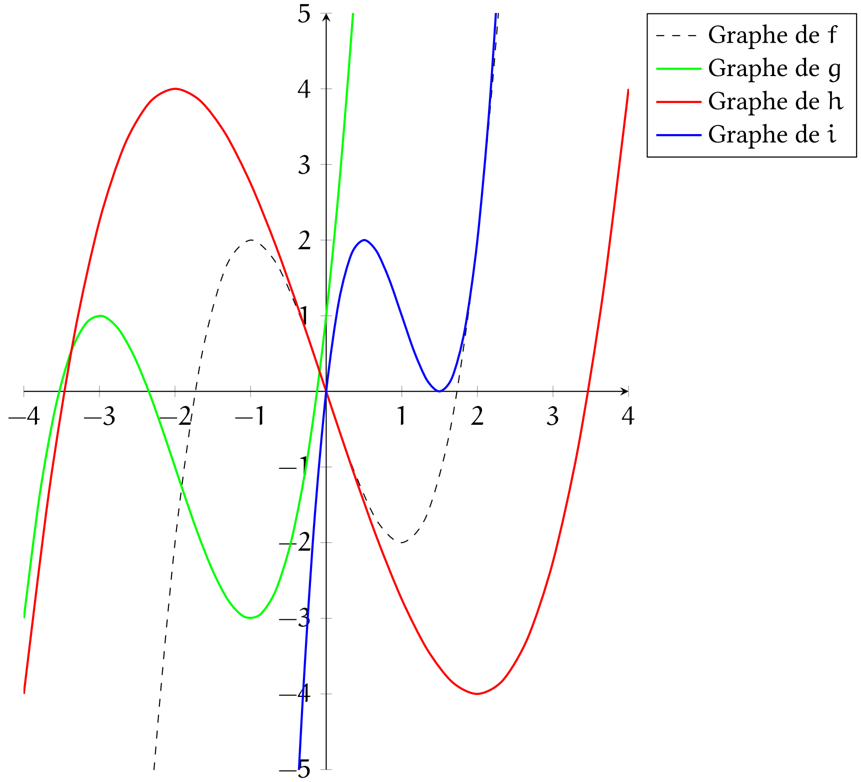
La courbe représentative de g est l'image de celle de f par une translation de vecteur de coordonnées $(-2,1)$.

$$\begin{aligned}
& (x,y) \in \mathcal{C}_f \\
\iff & y = f(x) \\
\iff & 2y = 2f\left(\frac{2x}{2}\right) \\
\iff & 2y = h(2x) \\
\iff & (2x, 2y) \in \mathcal{C}_h
\end{aligned}$$

La courbe représentative de h est l'image de celle de f par une homothétie de centre l'origine et de rapport 2.

$$\begin{aligned}
& (x,y) \in \mathcal{C}_f \\
\iff & y = f(x) \\
\iff & \frac{1}{2}y+1 = \frac{1}{2}f\left(2\left(\frac{x}{2}+1\right)-2\right)+1 \\
\iff & \frac{1}{2}y+1 = i\left(\frac{x}{2}+1\right) \\
\iff & \left(\frac{x}{2}+1, \frac{1}{2}y+1\right) \in \mathcal{C}_i
\end{aligned}$$

La courbe représentative de i est l'image de celle de f par une homothétie de centre l'origine et de rapport $\frac{1}{2}$ suivie d'une translation de vecteur de coordonnées $(1,1)$.



Solution 27.

1. Si f est paire, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. En dérivant cette relation, on obtient que $-f'(-x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit, f' est impaire. On prouve de la même manière que f' est paire lorsque f est impaire.
Par récurrence, on prouve alors que, si f est paire, $f^{(n)}$ a la parité de n et que, si f est impaire, $f^{(n)}$ a la parité contraire de celle de n.

2. Soit T une période de f. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$. En dérivant cette relation, on obtient que $f'(x+T) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit, f' est également périodique de période T. Par récurrence, on prouve que $f^{(n)}$ est périodique de période T.

Solution 28.

1. $x \mapsto x^4 - x^2$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi f est dérivable sur $]1, +\infty[$. Par parité, f est également dérivable sur $]-\infty, -1[$.
f n'est pas définie sur $]-1, 1[$ donc pas dérivable sur $]-1, 1[$.
Pour $x > 1$, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ donc $\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$. Ainsi f n'est pas dérivable en 1. Par parité, f n'est pas dérivable en -1.
Pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$,
$$f'(x) = \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - x^2}}$$

2.
   - $x \mapsto x^2 + x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$
   - $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

- $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Ainsi g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} e^{\sqrt{x^2+x+1}}$$

3.
- $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable sur $]\sqrt{2}, +\infty[$ à valeurs dans $]1, +\infty[$.
- $x \mapsto \sqrt{x} - 1$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$
- $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Ainsi h est dérivable sur $]\sqrt{2}, +\infty[$. Par parité, h est également dérivable sur $]-\infty, -\sqrt{2}[$.
h n'est pas définie sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ donc pas dérivable sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
Pour tout $x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$,

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}-1} \times \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{x^2-1-\sqrt{x^2-1}}$$

4. Tout d'abord i est 2π-périodique et paire donc on peut se contenter d'étudier la dérivabilité sur $[0, \pi]$. Sur cet intervalle, i n'est définie que sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- $\cos$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ à valeurs dans $]0, 1[$
- $x \mapsto 1 - \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, 1[$ à valeurs dans $]0, 1[$
- $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0, 1[$

Ainsi i est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, posons $h = \frac{\pi}{2} - x$ de sorte que

$$\frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = -\frac{\ln\left(1 - \sqrt{\sin h}\right)}{h} = \frac{\ln(1-\sqrt{\sin h}}{-\sqrt{\sin h}} \sqrt{\frac{\sin h}{h}} \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Ainsi

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\ln(1-\sqrt{\sin h}}{-\sqrt{\sin h}} \sqrt{\frac{\sin h}{h}} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Ainsi i n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{2}$.
Par parité et périodicité, i est dérivable sur $A = \left(\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) + 2\pi\mathbb{Z}$ et pour tout $x \in A$

$$i'(x) = \frac{1}{1-\sqrt{\cos x}} \times \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} = \frac{\sin x}{2\left(\sqrt{\cos x} - \cos x\right)}$$

Solution 29.

1. Par définition, $x^x = e^{x \ln x}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
$x \mapsto x \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle et exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = (\ln x + 1)x^x$. Ainsi f' est positive sur $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ et négative sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.
Puisque $x \ln x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. De plus, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Enfin, $\frac{f(x)}{x} = e^{(x-1)\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc le graphe de f admet une branche parabolique de direction (Oy).
On laisse au lecteur de tracer le graphe de f.
Le tableau de variations nous apprend que $\operatorname{Im} f = \left[e^{-\frac{1}{e}}, +\infty\right[$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et dérivable sur cet intervalle comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ donc f' est positive sur $]0, e]$ et négative sur $[e, +\infty[$.
On a sans problème $f(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\infty$. Par croissances comparées, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, le graphe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

On a clairement $\operatorname{Im} f = \left]-\infty, \frac{1}{e}\right]$.

3. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \geqslant 0$, f est définie sur $\mathbb{R}$. f est clairement paire donc il suffit de procéder à une étude sur $\mathbb{R}_+$.
$x \mapsto 1 + x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
On a clairement $= \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On a clairement $\operatorname{Im} f = [1, +\infty[$.

4. f est clairement définie sur $\mathbb{R}$. De plus, f est impaire et 2π-périodique donc on peut l'étudier sur $[0, \pi]$.
f est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout $x \in [0, \pi]$, $f'(x) = \cos(x) - \cos(3x) = 2\sin(2x)\sin(x)$. Comme sin est positive sur $[0, \pi]$, $f'(x)$ est du signe de $\sin(2x)$ pour $x \in [0, \pi]$. f' est donc positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et négative sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0

On trace ensuite le graphe de f sur $[0, \pi]$ qu'on complète par une symétrie par rapport à l'origine puis par 2π-périodicité.
On a clairement $f([0, \pi]) = \left[0, \frac{4}{3}\right]$ puis $f([-\pi, \pi]) = \left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$ car f est impaire et finalement $\operatorname{Im} f = \left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$ par 2π-périodicité.

Solution 30.

On pose $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$. Il suffit donc de montrer que f est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
f est clairement dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x) = \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = \frac{(\cos x - 1)^2(2\cos x + 1)}{\cos^2 x}$$

Ainsi $f' \geqslant 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et f est donc croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Puisque $f(0) = 0$, f est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on en déduit l'inégalité demandée.

Solution 31.

On étudie la fonction $f \colon x \mapsto 6x - 8\sin x + \sin 2x$. f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 6 - 8\cos 2x + 2\cos 2x = 4\cos^2 x - 8\cos x + 4 = 4(\cos x - 1)^2 \geqslant 0$$

Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $f(0) = 0$, f est positive sur $\mathbb{R}_+$ et on en déduit l'inégalité demandée.

Solution 32.

1. Le discriminant du trinôme $x \mapsto x^2 + x + 1$ est strictement négatif donc $x \mapsto x^2 + x + 1$ est positif sur $\mathbb{R}$. Ceci prouve que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. On trouve $f(-1 - x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ comme axe de symétrie.

3. $x \mapsto x^2 + x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

Ainsi f est décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
De plus, $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Ainsi $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Puis pour tout $x > 0$,

$$f(x) - x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

Ainsi $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \frac{1}{2}$. $\mathcal{C}_f$ admet donc pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$.
Par symétrie, la droite d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est asypmtote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

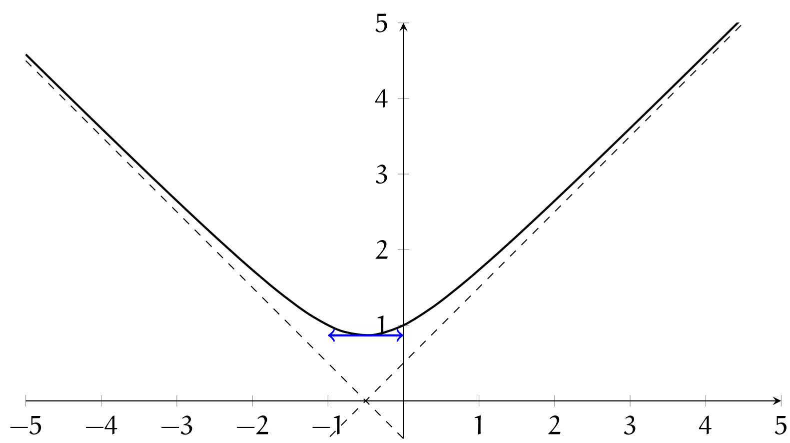
$$\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geqslant \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} = \left|x+\frac{1}{2}\right|$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \geqslant x + \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad f(x) \geqslant -x - \frac{1}{2}$$

On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses asymptotes.

6.



Solution 33.

Soit $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^n \ln x$. f_n est clairement dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_n'(x) = nx^{n-1}\ln x + x^{n-1} = x^{n-1}(n\ln x + 1)$$

Par croissance comparées, $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$ et, par produit, $\lim_{n\to+\infty} x^n \ln x = +\infty$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$e^{-\frac{1}{n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$\|$ 0	$\searrow$	$-\frac{1}{ne}$	$\nearrow$	$+\infty$

Si $-\frac{1}{ne} > -\frac{1}{n^2}$, autrement dit si $n < e$, les variations de f_n montrent que l'équation $f_n(x) = -\frac{1}{n^2}$ ne peut avoir de solution.
On ne peut avoir $-\frac{1}{ne} = -\frac{1}{n^2}$ car e n'est pas un entier.
Enfin, si $-\frac{1}{ne} < -\frac{1}{n^2}$, autrement dit, si $n > e$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires montre que l'équation $f_n(x) = -\frac{1}{n^2}$ admet une solution sur $\left]0, e^{-\frac{1}{n}}\right[$ et une solution sur $\left]e^{-\frac{1}{n}}, +\infty\right[$. En effet, f_n est continue et strictement monotone sur ces deux intervalles et $\lim_{0^+} f_n > -\frac{1}{n^2} > f_n(e^{-\frac{1}{n}})$ et $f_n(e^{-\frac{1}{n}}) < -\frac{1}{n^2} < \lim_{+\infty} f_n$.
En conclusion, l'équation $f_n(x) = -\frac{1}{n^2}$ admet deux solutions si $n \geqslant 3$ et aucune si $n \leqslant 2$.

Solution 34.

Posons $f_k : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - 1 - kx$. f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k'(x) = e^x - k$.
Par somme, $\lim_{-\infty} f_k = +\infty$ et par croissances comparées, $\lim_{+\infty} f_k = +\infty$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\ln k$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$k - 1 - k\ln k$	$\nearrow$	$+\infty$

La question est alors de connaître le signe de $k - 1 - k\ln k$. Pour cela, on étudie la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x\ln x - x + 1$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \ln x$. On en déduit que g est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $]0, 1]$. Puisque $g(1) = 0$, $g(k) > 0$ pour tout $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
Si $k \neq 1$, on a donc $k - 1 - k\ln k = -g(k) < 0$. Puisque f_k est continue et strictement monotone sur $]0, \ln k[$ et sur $]\ln k, +\infty[$ et que $\lim_{-\infty} f_k = \lim_{+\infty} f_k = +\infty$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que l'équation $f_k(x) = 0$ admet une unique solution sur chacun de ces deux intervalles et donc deux solutions en tout.
Si $k = 1$, les variations de f_1 montrent que l'équation $f_1(x) = 0$ admet une unique solution (à savoir 0).

Solution 35.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$.

   Variations. Après un petit calcul on trouve
$$f'(x) = \frac{2(x-2)(x+1)}{2x-1}.$$

Par l'étude du signe de f' on déduit que f est strictement croissante sur $]-\infty,-1]$ et sur $[2,\infty[$, et strictement décroissante sur $[-1,1/2[$ et sur $]1/2,2]$.

Asymptotes. On a

$$\lim_{x\to 1/2} |f(x)| = \infty.$$

Cela montre que f possède une asymptote verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$.
Pour trouver des asymptotes non-verticales on remarque que le terme dominant de $f(x)$ est $\frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$. On cherche donc $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$(*) \qquad \lim_{x\to\infty} (f(x) - (x/2 + b)) = 0.$$

On calcule

$$\begin{aligned} f(x) - (x/2+b) &= \frac{(x+1)^2 - (x/2+b)(2x-1)}{2x-1} \\ &= \frac{(5/2-2b)x + 1 + b}{2x-1}. \end{aligned}$$

Pour avoir $(*)$ il faut donc prende $b = 5/4$. Ainsi la droite d'équation

$$y = x/2 + 5/4$$

est une asymptote ∞, et aussi en $-\infty$.

Voici une méthode plus systématique pour obtenir cette asymptote. La fonction f est une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes). On procède donc à la division polynomiale du numérateur $x^2 + 2x + 1$ par le dénominateur $2x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x + 1 & 2x-1 \\ \hline -x^2 + \frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \\ \frac{5}{2}x + 1 & \\ -\frac{5}{2}x + \frac{5}{4} & \\ \hline \frac{9}{4} & \end{array}$$

Le reste est $\frac{9}{4}$ et le quotient est $\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$. Autrement dit,

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{2x-1} = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} + \frac{9/4}{2x-1}.$$

En faisant tendre x vers l'infini dans cette expression on retrouve l'asymptote.

2. On soupçonne que le point d'intersection I des deux asymptotes est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$. Prouvons-le !
On constate que la courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à I *si et seulement si* la « fonction décalée » g définie par

$$g(x) = f(x + x_I) - y_I$$

est impaire. Les coordonnées de I étant $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ on a

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} = \frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{2x} - \frac{3}{2} = \frac{x^2 + \frac{9}{4}}{2x}.$$

La fonction g est clairement impaire, et ainsi $\mathcal{C}_f$ est bien symétrique par rapport au point I.

Solution 36.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$,
$$f\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
donc f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$. Elle n'est donc pas bornée sur $\mathbb{R}$ a fortiori.
Pour $n \in \mathbb{N}$,
$$f\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}+2n\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$
donc f n'est pas minorée sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}
|g(x)| &= \frac{\left|2\sin x + 3\cos x^2\right|}{|1+e^x|} \\
&= \frac{\left|2\sin x + 3\cos x^2\right|}{1+e^x} \\
&\leqslant \left|2\sin x + 3\cos x^2\right| && \text{car } e^x \geqslant 0 \\
&\leqslant 2|\sin x| + 3\left|\cos x^2\right| && \text{par inégalité triangulaire} \\
&\leqslant 5
\end{aligned}$$
Ainsi g est bornée sur $\mathbb{R}$ donc majorée et minorée sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+\sin x \geqslant 0$ et $\ln(1+x^2) \geqslant 0$ donc $h(x) \geqslant 0$. Ainsi h est minorée sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$h\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 2\ln\left(1+\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^2\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
donc h n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|i(x)| = e^{-x^2}|\sin x|$. Or pout tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} \leqslant 1$ et $|\sin x| \leqslant 1$ donc $|i(x)| \leqslant 1$. Ainsi i est bornée sur $\mathbb{R}$.

Solution 37.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant 1$ et $f(0) = 1$ donc f admet un maximum en 0 valant 1. Si m est un minorant de f, alors $m \leqslant \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Or f ne prend pas de valeurs négatives donc f n'admet pas de minimum sur $\mathbb{R}$.

2. Une étude de fonction montre que g admet un maximum en e valant $\frac{1}{e}$. Puisque $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$, f n'est pas minorée et n'admet donc pas de minimum sur $\mathbb{R}$.

3. h est clairement positive et $h(0) = 0$ donc h admet un minimum en 0 valant 0. Une étude de fonction montre que h admet un maximum en $\frac{1}{2}$ valant $\frac{1}{\sqrt{2e}}$.

4. On a $\lim_{x\to0^+} i(x) = +\infty$ ou encore $\lim_{x\to+\infty} i(x) = +\infty$ donc i n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$: elle n'y admet donc pas de maximum.
De plus, i est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $i'(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$.
On en déduit que i admet un minimum en $\sqrt{a}$ valant $2\sqrt{a}$.

Solution 38.

Posons $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x + x$.
f' est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$.
f' est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $f'(0) = 0$, f' est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.
On en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_-$. Puisque $f(0) = 0$, f est positive sur $\mathbb{R}$ et on en déduit l'inégalité demandée.

Solution 39.

1. On prouve après mise au même dénominateur et identification des coefficients que
$$a = \frac{1}{2}\,,\ b = -\frac{1}{2}.$$

2. On prouve par une récurrence sans difficulté que
$$x \mapsto \frac{1}{1+x}$$
est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, et que sur cet ensemble,
$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$
On en déduit que la fonction
$$x \mapsto \frac{1}{1-x}$$
est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et que sur cet ensemble,
$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$
La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, et sur cet ensemble,
$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{n+1}}.$$

Solution 40.

Comme x et α sont *réels,*
$$\begin{aligned} e^{x\cos(\alpha)}\cos(x\sin(\alpha)) &= \Re\left(e^{x\cos(\alpha)}e^{ix\sin(\alpha)}\right) \\ &= \Re\left(e^{xe^{i\alpha}}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent,
$$\begin{aligned} &\frac{d^n e^{x\cos(\alpha)}\cos(x\sin(\alpha))}{dx^n} \\ &= \Re\left(\frac{d^n e^{xe^{i\alpha}}}{dx^n}\right) \\ &= \Re\left(e^{in\alpha}e^{xe^{i\alpha}}\right) \\ &= e^{x\cos(\alpha)}\cos\big(n\alpha + x\sin(\alpha)\big). \end{aligned}$$