Devoir à la maison n° : corrigé

Problème 1 — Polynômes de Legendre

Partie I – Un endomorphisme auto-adjoint

1. L'application $\langle ., . \rangle$ est évidemment symétrique.
La bilinéarité provient de la linéarité de l'intégrale.
La positivité provient de la poistivité de l'intégrale.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. Alors $\int_{-1}^{1} P(t)^2 \, dt = 0$. Or $t \mapsto P(t)^2$ est continue (car polynomiale) et positive sur $[-1, 1]$: elle est donc nulle sur $[-1, 1]$. Par conséquent, $t \mapsto P(t)$ est nulle sur $[-1, 1]$ et P admet une infinité de racines. Ainsi $P = 0$ et $\langle ., . \rangle$ est définie.
L'application $\langle ., . \rangle$ est donc bien un produit scalaire.

2. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
L(\lambda P + \mu Q) &= \left[\left(X^2 - 1\right)(\lambda P + \mu Q)'\right]' \\
&= \left[\left(X^2 - 1\right)(\lambda P' + \mu Q')\right]' && \text{par linéarité de la dérivation} \\
&= \left[\lambda\left(X^2 - 1\right)P' + \mu\left(X^2 - 1\right)Q'\right]' && \text{par bilinéarité de la multiplication polynomiale} \\
&= \lambda\left[\left(X^2 - 1\right)P'\right]' + \mu\left[\left(X^2 - 1\right)Q'\right]' && \text{par linéarité de la dérivation} \\
&= \lambda L(P) + \mu L(Q)
\end{aligned}
$$

Ainsi L est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

3. **a.** Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $\deg P \leqslant n$ puis $\deg P' \leqslant n-1$. Puisque $\deg\left(X^2 - 1\right) = 2$, $\deg\left(\left(X^2 - 1\right)P'\right) \leqslant n+1$ et donc $\deg L(P) \leqslant n$.

b. Soit $P \in \operatorname{Ker} L_n$. Alors $\left[(X^2 - 1)P'\right]' = 0$ donc $(X^2-1)P'$ est un polynôme constant. Ainsi $\deg\left((X^2 - 1)P'\right) \leqslant 0$ mais comme $\deg(X^2 - 1) = 2$, on a nécessairement $P' = 0$ et donc P est constant. Réciproquement tout polynôme constant de $\mathbb{R}_n[X]$ appartient évidemment à $\operatorname{Ker} L_n$. On a donc $\operatorname{Ker} L_n = \mathbb{R}_0[X]$.
D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg} L_n = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \operatorname{Ker} L_n = (n + 1) - 1 = n$.

4. Par intégration par parties (justifiée par le fait que toutes les fonctions entrant en jeu sont polynomiales donc de classe $\mathcal{C}^\infty$)

$$
\langle L(P), Q \rangle = \left[(t^2 - 1)P'(t)Q(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (t^2 - 1)P'(t)Q'(t) \, dt = -2\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)P'(t)Q'(t) \, dt
$$

On procède alors à une nouvelle intégration par parties

$$
\langle L(P), Q \rangle = -\left[(t^2 - 1)P(t)Q'(t)\right]_{-1}^{1} + \langle P, L(Q) \rangle = \langle P, L(Q) \rangle
$$

Partie II – Etude d'une famille de polynômes

1. On a clairement $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = \frac{1}{2}\left(3X^2 - 1\right)$ et $P_3 = \frac{1}{2}\left(5X^3 - 3X\right)$.

2. **a.** On a clairement $\deg U_n = 2n$ donc $\deg P_n = 2n - n = n$.
Le coefficient de X^{2n} dans U_n est 1 donc le coefficient de X^n dans P_n i.e. le coefficient dominant de P_n est

$$
a_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{n!} = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}
$$

b. La famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille de polynômes à dégrés étagés donc elle est libre. Puisqu'elle comporte $n+1$ éléments et que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. **a.** Remarquons que $U_n = (X-1)^n(X+1)^n$ donc d'après la formule de Leibniz

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[(X-1)^n\right]^{(k)}\left[(X+1)^n\right]^{n-k} \\
&= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(X+1)^k \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k
\end{aligned}$$

b. On a $P_n(1) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{n}^2 2^n = 1$ et $P_n(-1) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{0}^2(-2)^n = (-1)^n$.

4. **a.** Tout d'abord

$$U'_{n+1} = \left[\left(X^2-1\right)^{n+1}\right]' = 2(n+1)X\left(X^2-1\right)^n = 2(n+1)XU_n$$

D'autre part,

$$\left(X^2-1\right)U'_n = \left(X^2-1\right)\left[\left(X^2-1\right)^n\right]' = 2nX\left(X^2-1\right)^n = 2nXU_n$$

b. En dérivant $n+1$ fois la relation $U'_{n+1} = 2(n+1)XU_n$, on obtient via la formule de Leibniz

$$U_{n+1}^{(n+2)} = 2(n+1)\left(XU_n^{(n+1)} + (n+1)U_n^{(n)}\right)$$

ce qui équivaut à

$$2^{n+1}(n+1)!P'_{n+1} = 2(n+1)X\times 2^n n!P'_n + 2(n+1)^2\times 2^n n!P_n$$

Après simplification par $2^{n+1}(n+1)!$, on obtient

$$P'_{n+1} = XP'_n + (n+1)P_n$$

En dérivant $n+1$ fois la relation $\left(X^2-1\right)U'_n = 2nXU_n$, on obtient via la formule de Leibniz

$$\left(X^2-1\right)U_n(n+2) + 2(n+1)XU_n^{(n+1)} + (n+1)nU_n^{(n)} = 2nXU_n^{(n+1)} + 2n(n+1)U_n^{(n)}$$

ce qui équivaut à

$$\left(X^2-1\right)U_n^{(n+2)} + 2XU_n^{(n+1)} = n(n+1)U_n^{(n)}$$

ou encore

$$\left(X^2-1\right)P''_n + 2XP'_n = n(n+1)P_n$$

De plus,

$$L(P_n) = \left[\left(X^2-1\right)P'_n\right]' = \left(X^2-1\right)P''_n + 2XP'_n$$

Donc $L(P_n) = n(n+1)P_n$.

5. Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $m\neq n$. D'une part

$$\langle L(P_m), P_n\rangle = m(m+1)\langle P_m, P_n\rangle$$

D'autre part

$$\langle P_m, L(P_n)\rangle = n(n+1)\langle P_m, P_n\rangle$$

Mais d'après la question **I.4**, $\langle L(P_m), P_n\rangle = \langle P_m, L(P_n)\rangle$ donc

$$m(m+1)\langle P_m, P_n\rangle = n(n+1)\langle P_m, P_n\rangle$$

ce qui équivaut à

$$(m^2-n^2+m-n)\langle P_m, P_n\rangle = 0$$

ou encore

$$(m-n)(m+n+1)\langle P_m, P_n\rangle = 0$$

Or $m\neq n$ donc $m-n\neq 0$ et m et n sont positifs donc $m+n+1\geqslant 1>0$. Ainsi $\langle P_m, P_n\rangle = 0$.

6. **a.** D'après la question **II.5**, P_{n+1} est orthogonal à $P_0, \dots, P_n$ et donc à $\text{vect}(P_0, \dots, P_n)$. Or on a vu à la question **II.2.b** que $(P_0, \dots, P_n)$ était une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc P_{n+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$ i.e. $\langle P_{n+1}, Q\rangle = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

b. Si on note

- $\mathcal{I}'$ l'ensemble des racines de P_{n+1} de multiplicité impaire n'appartenant pas à l'intervalle $]-1,1[$,
- $\mathcal{P}$ l'ensemble des racines de P_{n+1} de multiplicité paire,

la décomposition en facteurs irréductibles de P_{n+1} s'écrit

$$P_{n+1} = \lambda S \prod_{r\in I}(X-r)^{m_r} \prod_{r\in\mathcal{I}'}(X-r)^{m'_r} \prod_{r\in\mathcal{P}}(X-r)^{n_r}$$

où

- $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (car P_{n+1} est non nul puisque de degré $n+1$),
- $(m_r)_{r\in\mathcal{I}}$ est une famille d'entiers impairs,
- $(m'_r)_{r\in\mathcal{I}'}$ est une famille d'entiers,
- $(n_r)_{r\in\mathcal{P}}$ est une famille d'entiers pairs
- et S est un produit de polynômes unitaires de degré 2 et de discriminant négatif.

Il vient alors

$$RP_{n+1} = \lambda S \prod_{r\in I}(X-r)^{m_r+1} \prod_{r\in\mathcal{I}'}(X-r)^{m'_r} \prod_{r\in\mathcal{P}}(X-r)^{n_r}$$

- Tout polynôme unitaire de degré 2 de discriminant négatif est positif sur $\mathbb{R}$ donc S est positif sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $r \in \mathcal{P}$, $(X-r)^{n_r}$ est positif sur $\mathbb{R}$ car n_r est pair.
- De même, pour tout $r \in \mathcal{I}$, $(X-r)^{m_r+1}$ est positif sur $\mathbb{R}$ car m_r+1 est pair.
- Enfin, $\prod_{r\in\mathcal{I}'}(X-r)^{m'_r}$ ne s'annule pas sur $]-1,1[$ donc est de signe constant sur $]-1,1[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Par conséquent, RP_{n+1} est de signe constant sur $]-1,1[$. Par continuité de $t \mapsto R(t)P_{n+1}(t)$ (application polynomiale) sur $[-1,1]$, RP_{n+1} est de signe constant sur $[-1,1]$.

c. Tout d'abord $\langle P_{n+1}, R\rangle = \int_{-1}^{1} R(t)P_{n+1}(t)\,dt$. Or $t \mapsto R(t)P_{n+1}(t)$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-1,1]$, continue car polynomiale et non constamment nulle sur $[-1,1]$ car sinon on aurait $RP_{n+1} = 0$ ce qui n'est pas. Ainsi $\langle P_{n+1}, R \neq 0$. D'après la question **II.6.a**, on a donc $\deg R \geqslant n+1$ i.e. $\operatorname{card}\mathcal{I} \geqslant n+1$. Or $\deg P_{n+1} = n+1$ donc P_{n+1} possède au plus $n+1$ racines et $\operatorname{card}\mathcal{I} \leqslant n+1$. Ainsi $\operatorname{card}\mathcal{I} = n+1$. $\mathcal{I}$ est donc l'ensemble de toutes les racines de P_{n+1} i.e. P_{n+1} admet $n+1$ racines simples dans $]-1,1[$.

7. **a.** Puisque $\deg P'_{n+1} = n$ et que $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe $(\lambda, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P'_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$. On a donc $P'_{n+1} = \lambda_n P_n + Q$ avec $\deg Q < n$. Or le coefficient de X^n dans P'_{n+1} est $(n+1)a_{n+1}$ et le coefficient de X^n dans $\lambda_n P_n + Q$ est $\lambda_n a_n$ donc $\lambda_n = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}$. On a alors

$$\left\langle P'_{n+1}, P_n\right\rangle = \frac{a_{n+1}}{a_n}\langle P_n, P_n\rangle + \langle Q, P_n\rangle = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2$$

En effet, $\langle P_n, Q\rangle = 0$ en vertu de la question **II.6.a**.

b. Par intégration par parties

$$\|P_n\|^2 = \left[tP_n(t)^2\right]_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} tP_n(t)P'_n(t)\,dt = P_n(1) + P_n(-1)^2 - 2\int_{-1}^{1} tP_n(t)P'_n(t)\,dt$$

Or d'après **II.3.b**, $P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$ donc

$$\|P_n\|^2 = 2 - 2\int_{-1}^{1} tP_n(t)P'_n(t)\,dt$$

c. On a $a_n = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$ et $a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}\binom{2(n+1)}{n+1}$ d'après la question **II.2.a**. On en déduit que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{n+1}$.
Ainsi $\left\langle P'_{n+1}, P_n\right\rangle = (2n+1)\|P_n\|^2$.
On a également vu à la question **II.4.b** que $P'_{n+1} = XP'_n + (n+1)P_n$ donc

$$\left\langle P'_{n+1}, P_n\right\rangle = \langle XP'_n, P_n\rangle + (n+1)\|P_n\|^2$$

Mais d'après la question **II.7.b**,

$$\langle XP'_n, P_n \rangle = \int_{-1}^{1} tP'_n(t)P_n(t)\,dt = 1 - \frac{1}{2}\|P_n\|^2$$

Finalement

$$(2n+1)\|P_n\|^2 = 1 - \frac{1}{2}\|P_n\|^2 + (n+1)\|P_n\|^2$$

et donc

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$$

8. **a.** La famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ d'après **II.2.b** et **II.5**. Puisque $T_k = \frac{P_k}{\|P_k\|}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $(T_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. On a $X^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \left\langle X^{n+1}, T_k \right\rangle T_k$ car $(T_k)_{0 \leqslant k \leqslant n+1}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Comme $(T_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$, la projection de X^{n+1} sur $\mathbb{R}_n[X]$ est $\sum_{k=0}^{n} \left\langle X^{n+1}, T_k \right\rangle T_k$. Par conséquent,

$$d(X^{n+1}, \mathbb{R}_n[X]) = \left\| \left\langle X^{n+1}, T_{n+1} \right\rangle T_{n+1} \right\| = \left| \left\langle X^{n+1}, T_{n+1} \right\rangle \right| = \sqrt{\frac{2n+3}{2}} \left| \left\langle X^{n+1}, P_{n+1} \right\rangle \right|$$

On a également $X^{n+1} = \lambda P_{n+1} + Q$ avec $\deg Q \leqslant n$. En identifiant les coefficients dominants, $\lambda = \frac{1}{a_{n+1}}$. Ainsi

$$\left\langle X^{n+1}, P_{n+1} \right\rangle = \frac{1}{a_{n+1}} \langle P_{n+1}, P_{n+1} \rangle + \langle Q, P_{n+1} \rangle = \frac{1}{a_{n+1}} \|P_{n+1}\|^2$$

Il vient donc

$$d(X^{n+1}, \mathbb{R}_n[X]) = \sqrt{\frac{2n+3}{2}} \frac{1}{\binom{2(n+1)}{n+1}} \frac{2}{2n+3} = \sqrt{\frac{2}{2n+3}} \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}$$