

DEVOIR SURVEILLÉ N°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – Concours National Marocain MP 2000

- On considère un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$ sur le corps \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). $\mathcal{L}(E)$ désigne la \mathbb{K} -algèbre des endomorphismes de E . Si $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, l'endomorphisme composé $u \circ v$ sera tout simplement noté uv ; $[u, v]$ désignera l'endomorphisme $uv - vu$ et l'identité se notera Id .
- Si u est un endomorphisme de E , on note $\text{tr}(u)$ la trace de u et $\text{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u . \mathcal{T} désigne l'ensemble des endomorphismes de E de trace nulle. Si λ est une valeur propre de u , on notera $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ .
- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose $u^0 = \text{Id}$ et si $k \geq 1$, $u^k = uu^{k-1}$. On rappelle qu'un endomorphisme u est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ (endomorphisme nul).
- On définit l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E)^2 & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ (u, v) & \longmapsto [u, v] \end{cases}$$

et, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application

$$\Phi_u : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ v & \longmapsto [u, v] \end{cases}$$

- Pour $(m, p) \in \mathbb{N}^2$, on note $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans \mathbb{K} , à m lignes et p colonnes. I_m est la matrice identité d'ordre m . Enfin, $\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ désigne la matrice carrée d'ordre n de terme général $\alpha_i \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker (on rappelle que $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$).

Partie I

I.A Quelques propriétés de Φ_u

- 1** Montrer que \mathcal{T} est un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$.
- 2** Montrer que Φ est une application bilinéaire antisymétrique.
- 3** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme qui n'est pas une homothétie. Montrer que $\text{vect}(\text{Id}, u, \dots, u^{n-1})$ est inclus dans $\text{Ker } \Phi_u$ et que $\dim(\text{Ker } \Phi_u) \geq 2$.
- 4** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $v \in \text{Ker } \Phi_u$, alors $v(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$.
- 5** Montrer que l'image de Φ est incluse dans \mathcal{T} et que, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Im } \Phi_u \subset \mathcal{T}$. Existe-t-il $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $[u, v] = \text{Id}$? Peut-on avoir $\text{Im } \Phi_u = \mathcal{T}$?

6 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

6.a Montrer que u est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.

6.b En déduire que $\text{Ker } \Phi_u = \mathcal{L}(E)$ si et seulement si u est une homothétie.

7 **7.a** Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer par récurrence que pour tout

$$\forall k \in \mathbb{N}, \Phi_u^k(v) = \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{k}{p} u^{k-p} v u^p$$

7.b En déduire que si u est nilpotent, alors Φ_u l'est aussi.

I.B Détermination de l'image de Φ

Soit u un endomorphisme non nul de E de trace nulle.

8 u peut-il être une homothétie ?

9 Montrer qu'il existe $e_1 \in E$ tel que la famille $(e_1, u(e_1))$ soit libre.

10 En déduire l'existence d'une base (e_1, \dots, e_n) de E telle que la matrice A de u dans cette base soit de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & X^T \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$$

où $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})^2$ et $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

11 On suppose $A_1 = UV - VU$ avec $(U, V) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})^2$.

11.a Montrer que l'on peut trouver $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que la matrice $U - \alpha I_{n-1}$ soit inversible.

11.b On pose $U' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $V' = \begin{pmatrix} 0 & R^T \\ S & V \end{pmatrix}$ avec $(R, S) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})^2$. Etablir l'équivalence

$$A = U'V' - V'U' \iff [X^T = -R^T(U - \alpha I_{n-1}) \quad \text{et} \quad Y = (U - \alpha I_{n-1})S]$$

12 Montrer alors par récurrence que l'image de Φ est égale à \mathcal{T} .

I.C Détermination de $\text{tr}(\Phi_u)$

Soit u un endomorphisme de E . Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de u dans cette base. Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $u_{i,j}$ désigne l'endomorphisme de E tel que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$$

13 Rappeler pourquoi $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

14 Calculer, pour tout $(i, j, k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$ le produit $u_{i,j}u_{k,l}$ et montrer que l'on a :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \Phi_u(u_{i,j}) = \sum_{k=1}^n a_{k,i} u_{k,j} - \sum_{k=1}^n a_{j,k} u_{i,k}$$

15 En déduire $\text{tr}(\Phi_u)$.

Partie II

II.A Cas où u est diagonalisable

Dans cette sous-partie, on suppose que u est diagonalisable.

On pose $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, m_i désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i de u .

- 16** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u . Pour simplifier les notations, on pose $u(e_i) = \mu_i e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

16.a Montrer que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \Phi_u(u_{i,j}) = (\mu_i - \mu_j)u_{i,j}$$

16.b En déduire que Φ_u est diagonalisable et préciser $\text{Sp}(\Phi_u)$.

- 17** Montrer que

$$\text{Ker } \Phi_u = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, v(E_{\lambda_i}(u)) \subset E_{\lambda_i}(u)\}$$

- 18** En déduire que $\text{Ker } \Phi_u$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E_{\lambda_1}(u)) \times \mathcal{L}(E_{\lambda_2}(u)) \times \dots \times \mathcal{L}(E_{\lambda_p}(u))$. Quel est le rang de Φ_u ?

- 19** On suppose en plus que u a n valeurs propres *distinctes*. Quel est la dimension de $\text{Ker } \Phi_u$? Quel est le polynôme minimal de u ? En déduire que $\text{Ker } \Phi_u = \text{vect}(\text{Id}, u, \dots, u^{n-1})$.

II.B Cas où $\dim E = 2$

On suppose dans cette sous-partie que $\dim E = 2$. Soit u un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie.

- 20** Montrer que $\text{Ker } \Phi_u = \text{vect}(\text{Id}, u)$. On pourra utiliser une base de E de la forme $(e, u(e))$ dont on justifiera l'existence.

- 21** Montrer que le polynôme caractéristique de Φ_u est de la forme $X^2(X^2 + \beta)$ avec $\beta \in \mathbb{K}$.

- 22** Si $\beta = 0$, l'endomorphisme Φ_u est-il diagonalisable ?

- 23** On suppose $\beta \neq 0$. Etudier la diagonalisabilité de Φ_u selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- 24** On suppose Φ_u diagonalisable.

24.a Montrer que $\text{Sp}(\Phi_u) = \{0, \lambda, -\lambda\}$ où λ est un scalaire non nul.

Dans la suite de la question, v désigne un vecteur propre de Φ_u associé à la valeur propre λ .

24.b L'endomorphisme v peut-il être inversible ? Calculer $\text{tr}(v)$ puis v^2 .

24.c Détermination de $\text{Sp}(u)$.

- Pour quelles valeurs du vecteur e , la famille $(e, v(e))$ est-elle une base de E ?
- Vérifier que la matrice de u dans une telle base est triangulaire inférieure puis en déduire que
$$\text{Sp}(u) = \left\{ \frac{\text{tr}(u) - \lambda}{2}, \frac{\text{tr}(u) + \lambda}{2} \right\}.$$

24.d En déduire que u est diagonalisable.

II.C Cas où Φ_u est diagonalisable

Soit u un endomorphisme de E tel que Φ_u soit diagonalisable et $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_{n^2})$ une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de vecteurs propres de Φ_u de sorte que $\Phi_u(v_i) = \beta_i v_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$. Soient enfin $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et $x \in E$ un vecteur propre associé.

- 25** Calculer $u(v_i(x))$ en fonction de λ , β_i et $v_i(x)$.
- 26** Montrer que l'application $\Psi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & v(x) \end{cases}$ est linéaire surjective.
- 27** Montrer alors que u est diagonalisable.

Partie III

Soient λ une valeur propre *non nulle* de Φ_u et v un vecteur propre associé. On désigne par P_u le polynôme caractéristique de u .

- 28** **28.a** Montrer que $\forall x \in \mathbb{K}, v(x \text{Id} - u) = ((x + \lambda) \text{Id} - u)v$.
- 28.b** Qu'en déduit-on sur P_u si $\det(v) \neq 0$.
- 28.c** Montrer alors que l'endomorphisme v n'est pas inversible.
- 29** Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \Phi_u(v^k) = k\lambda v^k$. Qu'en déduit-on si $v^p \neq 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$.
- 30** Conclure que $v^n = 0$.
- Dans la suite, on suppose que $v^{n-1} \neq 0$.*
- 31** Soit $e \in E$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$. Montrer que la famille $(e, v(e), \dots, v^{n-1}(e))$ est une base de E et écrire la matrice de l'endomorphisme v dans cette base.
- 32** On pose $\mathcal{A} = \{w \in \mathcal{L}(E) \mid wv - vw = \lambda v\}$.
- 32.a** Montrer que \mathcal{A} contient l'endomorphisme w_0 dont la matrice relativement à la base \mathcal{B} est $\text{diag}(0, \lambda, 2\lambda, \dots, (n-1)\lambda)$.
- 32.b** Montrer que \mathcal{A} est un sous-espace affine de $\mathcal{L}(E)$ dont on précisera la direction.
- 32.c** Déterminer la dimension ainsi qu'une base de la direction de \mathcal{A} .
- 33** Quelle est alors la forme de la matrice dans la base \mathcal{B} de l'endomorphisme u ?
- 34** On suppose dans cette question que la matrice de u dans une base \mathcal{B}' de E est de la forme $\text{diag}(\alpha, \alpha + \lambda, \dots, \alpha + (n-1)\lambda)$. Décrire par leur matrice dans la base \mathcal{B}' les éléments de l'espace $E_\lambda(\Phi_u)$. Quelle est sa dimension?