Semaine du 29/11 au 03/12

1 Cours

Réduction algébrique

Polynômes d'endomorphismes Définition. Algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ pour $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\mathbb{K}[\mathrm{A}]$ pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Polynômes annulateurs Définition. Les valeurs propres sont **des** racines d'un polynôme annulateur. Lemme des noyaux. Une matrice/un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. Si un endomorphisme est diagonalisable, tout endomorphisme induit l'est également. Théorème de Cayley-Hamilton. Une matrice/un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé. Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est trigonalisable, il existe des sous-espaces supplémentaires sur lesquels les endomorphismes induits par u sont la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent. Interprétation matricielle.

Polynômes minimaux Idéal annulateur d'une matrice/d'un endomorphisme. Polynôme minimal d'une matrice/d'un endomorphisme. Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique. Le spectre est l'ensemble des racines du polynôme minimal. Une matrice/un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Une matrice/un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

Exponentielle Exponentielle d'une matrice/d'un endomorphisme. Exponentielle d'une somme de matrices/d'endomorphismes qui **commutent**. Inversibilité et inverse d'une exponentielle.

2 Méthodes à maîtriser

- Automatisme : $\mathrm{P}(u) = 0 \iff \pi_u \mid \mathrm{P}$.
- Calculer l'inverse d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur.
- Calculer les puissances d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur (division euclidienne de X^n par un polynôme annulateur P puis considérer les racines de P).
- Déterminer le polynôme minimal d'une matrice : il divise le polynôme caractéristique et il admet pour racines les valeurs propres, ce qui ne laisse qu'un nombre fini de possibilités.
- Calculer l'exponentielle d'une matrice :
  - diagonaliser si possible et utiliser $\exp(\mathrm{PDP}^{-1}) = \mathrm{P}\exp(\mathrm{D})\mathrm{P}^{-1}$ (admis) ;
  - trigonaliser si possible et utiliser $\exp(\mathrm{PTP}^{-1}) = \mathrm{P}\exp(\mathrm{T})\mathrm{P}^{-1}$ (admis) ;
  - écrire la matrice comme la somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente qui **commutent** et utiliser alors $\exp(\mathrm{D}+\mathrm{N}) = \exp(\mathrm{D})\exp(\mathrm{N})$;
  - utiliser un polynôme annulateur pour calculer les puissances puis $\exp(\mathrm{A}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^n}{n!}$.

3 Questions de cours

Calcul d'un polynôme minimal Calculer le polynôme minimal d'une matrice carrée de taille 3 au choix de l'interrogateur.

Calcul de puissances Calculer les puissances d'un matrice carrée de taille 2 ou 3 au choix de l'interrogateur.

Banque CCP Exos 62, 65, 88, 91, 93