Devoir surveillé n°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

1. Soient a et b deux réels positifs. Montrer que

$$\arctan(a)-\arctan(b)=\arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$$

2. En déduire que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\arctan\left(\frac{2}{k^2}\right)=\arctan(k+1)-\arctan(k-1)$$

3. On pose pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{2}{k^2}\right)$$

Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2.

1. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. Montrer qu'un argument de $a+ib$ est congru à $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ modulo π.

2. Vérifier que

$$(5+i)^4=2\cdot(1+i)\cdot(239+i)$$

3. En déduire que

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[\pi]$$

4. Montrer que

$$\frac{\pi}{4}-\pi<4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)<\frac{\pi}{4}+\pi$$

5. En déduire que

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)=\frac{\pi}{4}$$

Exercice 3.

On se donne $p \in \mathbb{N}^*$ et on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=n}^{np} \operatorname{sh} \frac{1}{k}$$

On souhaite étudier la limite éventuelle de la suite (S_n).

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh} x$.

- **a.** Résoudre l'équation $2\operatorname{sh} x + 1 = 0$. On notera α son unique solution que l'on exprimera à l'aide de la fonction ln.
- **b.** Déterminer une expression simple de $f(\alpha)$.
- **c.** Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On ne demande pas de préciser les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
- **d.** En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = e^{\operatorname{sh} x} - x - 1$.

- **a.** Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- **b.** Justifier que g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ où g'' désigne la dérivée de g'.
- **c.** En déduire les variations de g' puis celle de g, et enfin que $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- **d.** Montrer que pour tout $x \in [0,1[$,

$$1 + x \leqslant e^{\operatorname{sh} x} \leqslant \frac{1}{1-x}$$

3.

- **a.** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Montrer que pour tout $k \in [\![n, np]\!]$,

$$\frac{k+1}{k} \leqslant e^{\operatorname{sh} \frac{1}{k}} \leqslant \frac{k}{k-1}$$

- **b.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$,

$$\frac{np+1}{n} \leqslant e^{\mathrm{S}_n} \leqslant \frac{np}{n-1}$$

- **c.** Déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice 4.

On pose pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = x \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Déterminer la parité de f.

2. Justifier que l'équation $\operatorname{th}(x) = \dfrac{1}{x}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$. On notera α cette unique solution.

3. Montrer que $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$.

4. Préciser les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. On justifiera ses réponses.

5. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$. On fera intervenir le réel α de la question **2**.

6. Montrer que la courbe de f admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

7. Préciser la position de la courbe de f par rapport à son asymptote sur $\mathbb{R}_+^*$.

8. Tracer la courbe de f. On fera apparaître les différentes asymptotes ainsi que les tangentes horizontales. On donne $\dfrac{1}{\alpha} \approx 0,83$ et $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} \approx 1,51$.