Semaine du 07/06 au 11/06

1 Cours

Produit scalaire et norme Définition d'un produit scalaire. Orthogonalité. Espace préhilbertien réel, espace euclidien. Norme associée à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Inégalité triangulaire. Identités de polarisation.

Familles orthogonales Définition des familles orthogonales et orthonormales. Une famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. Théorème de Pythagore. Bases orthonormales : coordonnées, expression du produit scalaire et de la norme. Procédé de Gram-Schmidt. Existence de bases orthonormales. Toute famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complété en une base orthonormale.

Orthogonalité Orthogonal d'une partie. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, $F^{\perp}$ est l'unique supplémentaire orthogonal de F. Dimension de l'orthogonal en dimension finie. Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales. Expression du projeté orthogonal à l'aide d'une base orthonormale. Distance à un sous-espace vectoriel. Hyperplans affines : équations, distance à un hyperplan affine.

Automorphismes orthogonaux Définition. Caractérisation par conservation du produit scalaire. Groupe orthogonal. Caractérisation par les bases orthonormales. Automorphismes orthogonaux positifs et négatifs. Groupe spécial orthogonal.

Matrices orthogonales Définition. Groupe orthogonal. Liens entre matrices orthogonales, automorphismes orthogonaux et bases orthonormales. Matrices orthogonales positives et négatives. Groupe spécial orthogonal.

Automorphismes orthogonaux du plan euclidien Description de O(2) et SO(2). Rotations. Classification des automorphismes orthogonaux du plan euclidien.

Dénombrement

Cardinal d'un ensemble fini Cardinal d'une partie, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis. Cardinal de la réunion de deux ensembles finis. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Listes et combinaisons Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n. Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.

2 Méthodes à maîtriser

- Montrer qu'une application est un produit scalaire. Dans l'ordre : symétrie, linéarité par rapport à l'**une** des deux variables (la linéarité par rapport à la seconde variable s'obtient par symétrie), positivité, définition.
- Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas des produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
- Orthonormaliser une famille libre à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.
- Déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel.
- Calculer un projeté orthogonal.
- Calculer la distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie.
- Dénombrer un ensemble en le mettant en bijection avec un autre.
- Dénombrer un ensemble en le partitionnant.

3 Questions de cours

BCCP 76 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot \mid \cdot)$. On pose $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ pour $x \in \mathrm{E}$.

1. (a) Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall x \in [a,b],\ f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble $\left\{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)},\ f \in \mathrm{E}\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

BCCP 77 Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $(A^{\perp})^{\perp} = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

BCCP 78 Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E. On note $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. On suppose que $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.
   (a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2,\ (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble O(E) des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Prouver que $u \in O(E)$ si et seulement si $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

BCCP 79 Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \implies h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose pour $(f, g) \in E^2$, $(f \mid g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

BCCP 80 Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2(x)$.

BCCP 81 On admet que $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{tr}(A^{T}B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^{\perp}$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^{\perp}$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

BCCP 82 Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

BCCP 112 Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.