Devoir surveillé n°10

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 —

Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note T l'application qui à tout poynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ associe le polynôme $\mathrm{T}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$.
On note Δ l'application qui à tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ associe le polynôme $\Delta(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$.
On note $\widetilde{\mathrm{T}}$ l'application qui à toute fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ associe la fonction $\widetilde{\mathrm{T}}(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \widetilde{\mathrm{T}}(f)(x) = f(x+1)$$

On note $\widetilde{\Delta}$ l'application qui à toute fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ associe la fonction $\widetilde{\Delta}(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \widetilde{\Delta}(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

Partie I –

1. Montrer que T et Δ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

2. **a.** Montrer que $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est stable par Δ. On note alors Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ induit par Δ.
   b. Déterminer $\operatorname{Ker}\Delta_n$.
   c. Déterminer le rang de Δ_n. En déduire $\operatorname{Im}\Delta_n$.

3. On pose $\mathrm{N}_0 = 1$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{N}_k = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(\mathrm{X}-j)$.
   a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\Delta(\mathrm{N}_k)$ en fonction des polynômes N_j.
   b. Soit $(j,k) \in \mathbb{N}^2$. Déterminer $\Delta^j(\mathrm{N}_k)$ puis $\Delta^j(\mathrm{N}_k)(0)$.
   c. Montrer que $(\mathrm{N}_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
   d. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(\mathrm{N}_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ en fonction des $\Delta^j(\mathrm{P})(0)$.

4. **a.** Montrer que $\widetilde{\mathrm{T}}$ et $\widetilde{\Delta}$ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
   b. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Déterminer $\widetilde{\mathrm{T}}^k(f)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   c. Soit $j \in \mathbb{N}$. Exprimer $\widetilde{\Delta}^j$ en fonction des $\widetilde{\mathrm{T}}^k$ pour $k \in [\![0, j]\!]$. On pourra remarquer que $\widetilde{\Delta} = \widetilde{\mathrm{T}} - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$.
   d. Soient $j \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Exprimer $\widetilde{\Delta}^j(f)(0)$ en fonction des $f(k)$ pour $k \in [\![0, j]\!]$.

Partie II –

On se donne $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On cherche les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ solutions du problème $(\mathscr{P})$ suivant :

$$(\mathscr{P}) \qquad \begin{cases} \deg P \leqslant n \\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(k) = f(k) \end{cases}$$

On pose $N = \displaystyle\prod_{j=0}^{n}(X-j)$.

1. Soit $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(k))_{0\leqslant k\leqslant n} \end{array} \right.$.

a. Montrer que Φ est un isomorphisme.

b. En déduire que le problème $(\mathscr{P})$ admet une unique solution que l'on notera P_f.

2. **a.** Soit $j \in [\![0,n]\!]$. Comparer $\widetilde{\Delta}^j(f)(0)$ et $\Delta^j(P_f)(0)$.

b. En déduire l'expression de P_f en fonction des $\widetilde{\Delta}^j(f)(0)$ et des polynômes N_j pour $j \in [\![0,n]\!]$.

3. Dans cette question, on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.
On note $M_n = \displaystyle\sup_{t\in[0,n]} |f^{(n+1)}(t)|$.

a. Soit $x \in [0,n]$ non entier. Montrer qu'il existe $c \in]0,n[$ tel que $f(x) - P_f(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}N(x)$.
On pourra appliquer le théorème de Rolle par récurrence à la fonction $\varphi : t \mapsto f(t) - P_f(t) - KN(t)$ où K est choisi tel que $\varphi(x) = 0$.

b. En déduire que pour tout $x \in [0,n]$ (entier ou non), $\left|f(x) - P_f(x)\right| \leqslant \dfrac{M_n}{n+1}$.

Problème 2 —

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $f(t) = \exp\left(-\frac{1}{t}\right)$ et $g(t) = \frac{f(t)}{t}$.

Partie I – Etude de deux suites implicites

1. Prouver que f et g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que g peut se prolonger en 0 en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. On notera encore g ce prolongement.

3. Faire un tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+$ puis en faire un graphe.

4. Soit H la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto g\left(\frac{1}{t}\right)$ s'annulant en 1.

- **a.** Calculer H.
- **b.** En donner un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1.

5. Soit $n \geqslant 3$ un entier naturel. On introduit l'équation $(\mathrm{E}_n) : f(t) = \frac{t}{n}$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}_+^*$.

- **a.** En utilisant la question **I.3**, montrer que (E_n) a une unique solution dans $]0,1[$, que l'on notera α_n. Montrer que (E_n) admet également une unique solution dans $]1,+\infty[$ que l'on notera β_n.
- **b.** Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ sont monotones.
- **c.** Est-il possible que l'une des deux suites converge vers une limite $l > 0$? En déduire leurs limites.

Partie II – Etude d'une équation différentielle

On considère une application y solution de l'équation différentielle $(\mathrm{E}) : x^2y' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$. Nous allons, *sans aucun calcul explicite de y*, déterminer entièrement la suite de terme général $u_n = y^{(n)}(0)$ à partir de l'équation (E).

1. Que vaut u_0 ?

2. Calculer u_1 et u_2.

3. y peut-elle être une application polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 ?

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- **a.** On suppose $n \geqslant 3$. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$x^2y^{(n+1)}(x) + (1+2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0$$

  En déduire une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}.
- **b.** Donner une expression de u_n utilisant une factorielle valable pour tout $n \geqslant 2$. En déduire un développement limité (dont on justifiera l'existence) de y à tout ordre au voisinage de 0.