Devoir à la maison n°14

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n \geqslant n_0} a_n$ une série à termes réels. Dans le cas où cette série converge, on note R_n le reste de rang n de cette série, c'est-à-dire $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.

On souhaite étudier la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{R}_n$ dans plusieurs cas.

Partie I – Cas d'une série géométrique

On se donne $q \in \mathbb{R}$ et on pose $a_n = q^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (on a donc $n_0 = 0$).

1. Pour quelles valeurs de q la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ convergent-elle ? On suppose cette condition vérifiée dans la suite de cette partie.

2. Exprimer R_n en fonction de q et n.

3. En déduire que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{R}_n$ converge et calculer sa somme.

Partie II – Cas d'une série de Riemann

On se donne dans cette partie $\alpha \in \mathbb{R}$ et on pose $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (on a donc $n_0 = 1$).

4. Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$ converge-t-elle ? On suppose cette condition vérifiée dans la suite de cette partie.

5. A l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que $\mathrm{R}_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}}$.

6. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{R}_n$ converge.

Partie III – Cas de la série harmonique alternée

Dans cette partie, on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (on a donc $n_0 = 1$). On note également S_n la somme partielle de rang n de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$, c'est-à-dire $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

7. Calculer $\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$.

8. En déduire que $\mathrm{S}_n = -\ln(2) + (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

9. En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$.

10. Exprimer R_n à l'aide d'une intégrale puis, à l'aide d'une intégration par parties, déterminer deux constantes réelles α et β telles que $\alpha > 1$ et $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^{n+1}\beta}{n+1} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

11. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{R}_n$.