Relations binaires

1 Généralités

Définition 1.1 Relation binaire

On appelle *relation binaire* sur un ensemble E toute partie $\mathcal{R}$ de E^2. Pour $(x,y) \in E^2$, la proposition $(x,y) \in \mathcal{R}$ se notera alors plutôt $x\mathcal{R}y$ et on dira dans ce cas que x est en relation avec y.

Point de vue «naïf»

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E peut également être vue comme une propriété que chaque couple $(x,y) \in E^2$ est susceptible d'avoir ou non. C'est souvent le point de vue qu'on adopte en pratique.

Exemple 1.1

$<, >, \leqslant, \geqslant$ définissent des relations binaires sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
La relation de divisibilité $|$ est une relation binaire sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$.
Soit $p \in \mathbb{Z}$. La relation $\equiv_p$ définie sur $\mathbb{Z}$ par $x \equiv_p y \iff p|x-y$ est une relation binaire sur $\mathbb{Z}$.
Soit $a \in \mathbb{R}$. La relation $\equiv_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par $x \equiv_a y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, y = x + ka$ est une relation binaire sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.2

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E.

- On dit que $\mathcal{R}$ est *réflexive* si pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est *symétrique* si pour tout $(x,y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est *antisymétrique* si pour tout $(x,y) \in E^2$, $(x\mathcal{R}y \text{ ET } y\mathcal{R}x) \implies x = y$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est *transitive* si pour tout $(x,y,z) \in E^3$, $(x\mathcal{R}y \text{ ET } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$.

Exemple 1.2

Les relations $\leqslant, \geqslant$ sont réflexives, antisymétriques et transitives sur $\mathbb{R}$.
Les relations $<, >$ sont transitives sur $\mathbb{R}$.
La relation $|$ est réflexive sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, antisymétrique sur $\mathbb{N}$ et non sur $\mathbb{Z}$, et transitive sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.
La relation $\equiv_p$ est réflexive, symétrique et transitive sur $\mathbb{Z}$.
La relation $\equiv_a$ est réflexive, symétrique et transitive sur $\mathbb{R}$.
La relation «être équivalent en a» est une relation réflexive, symétrique et transitive sur les fonctions définies au voisinage de a.
La relation «être négligeable en a» est une relation transitive sur les fonctions définies au voisinage de a.
La relation «être dominée en a» est une relation réflexive et transitive sur les fonctions définies au voisinage de a.
Les relations $\subset, \supset$ sont des relations réflexives, antisymétriques et transitives sur $\mathcal{P}(E)$ où E est un ensemble.

2 Relation d'équivalence

Définition 2.1 Relation d'équivalence

On appelle *relation d'équivalence* sur un ensemble E toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 2.1

La relation $\equiv_p$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
La relation $\equiv_a$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
La relation «être équivalent en a» est une relation d'équivalence sur les fonctions définies au voisinage de a (elle porte donc bien son nom).

Définition 2.2 Classe d'équivalence

Soient E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ et $a \in E$.
On appelle *classe d'équivalence* de a l'ensemble des $x \in E$ tels que $a\mathcal{R}x$.

Exemple 2.2

Si $\mathbb{Z}$ est muni de la relation d'équivalence $\equiv_p$ et si $a \in \mathbb{Z}$, alors la classe d'équivalence de a est $\{a + kp, k \in \mathbb{Z}\}$.

Proposition 2.1 Partition d'un ensemble en classes d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Alors les classes d'équivalences forment une *partition* de E, c'est-à-dire que

- toute classe d'équivalence est non vide ;
- la réunion des classes d'équivalence est égale à E ;
- deux classes d'équivalence sont soit disjointes soit confondues.

3 Relation d'ordre

Définition 3.1 Relation d'ordre

On appelle *relation d'ordre* sur un ensemble E toute relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemple 3.1

Les relations $\leqslant, \geqslant$ sont des relations d'ordre sur $\mathbb{R}$.
La relation $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ et non sur $\mathbb{Z}$.
Les relations $\subset, \supset$ sont des relations d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.

Remarque. Si $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur un ensemble E. La relation binaire $\succcurlyeq$ définie sur E par $\forall (x, y) \in E^2, x \succcurlyeq y \iff y \preccurlyeq x$ est également une relation d'ordre. ■

Définition 3.2 Ordre total ou partiel

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$. On dit que E est totalement ordonné par $\preccurlyeq$ (ou que l'ordre défini par $\preccurlyeq$ est total) si $\forall (x, y) \in E^2, x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$. Sinon on dira que E est partiellement ordonné par $\preccurlyeq$ (ou que l'ordre défini par $\preccurlyeq$ est partiel).

Exemple 3.2

$\leqslant$ et $\geqslant$ définissent un ordre total sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
$\mid$ définit un ordre partiel sur $\mathbb{N}$.
$\subset, \supset$ définissent un ordre partiel sur $\mathcal{P}(E)$ dès que $\operatorname{card}(E) \geqslant 2$.

Définition 3.3 Majorant,minorant

Soit A une partie d'un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$. Soit $m \in E$.

- On dit que m est un *minorant* de A si $\forall x \in A, m \preccurlyeq x$. On dit alors que A est minorée.
- On dit que m est un *majorant* de A si $\forall x \in A, x \preccurlyeq m$. On dit alors que A est majorée.
- On dit que A est bornée si elle est minorée et majorée.

Définition 3.4 Plus petit élément, plus grand élément

Soit A une partie d'un ensemble E muni d'une relation d'ordre. Soit $m \in E$.

- On dit que m est un *plus petit élément* ou un *minimum* de A si m est un minorant de A et si $m \in A$.
- On dit que m est un *plus grand élément* ou un *maximum* de A si m est un majorant de A et si $m \in A$.

Proposition 3.1 Unicité du minimum et du maximum

Soit A une partie d'un ensemble muni d'une relation d'ordre.

- Si A admet un minimum, il est unique : on le note $\min A$.
- Si A admet un maximum, il est unique : on le note $\max A$.

Exemple 3.3

Si on considère la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$, 0 est le maximum de $\mathbb{N}$ (aussi surprenant que cela puisse paraître) et 1 est le minimum de $\mathbb{N}$. La partie $\{2, 3\}$ n'admet ni maximum, ni minimum.

Attention ! Une partie d'un ensemble ordonné n'admet pas toujours de maximum ou de minimum. Par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre $\leqslant$, $[0, 1[$ admet 0 pour plus petit élément mais n'admet pas de plus grand élément.

Définition 3.5 Borne inférieure et borne supérieure

Soit A une partie d'un ensemble muni d'une relation d'ordre.

- Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, on l'appelle *borne inférieure* de A et on le note $\inf A$.
- Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, on l'appelle *borne supérieure* de A et on le note $\sup A$.

Exemple 3.4

Dans $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre $\leqslant$, $]1, +\infty[$ admet 1 pour borne inférieure mais n'admet pas de borne supérieure.
On munit $\mathcal{P}(E)$ de la relation d'ordre $\subset$ et on se donne $\mathcal{X}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. Alors $\inf \mathcal{X} = \bigcap_{A \in \mathcal{X}} A$ et $\sup \mathcal{X} = \bigcup_{A \in \mathcal{X}} A$.

Soit A une famille finie de $\mathbb{N}$ que l'on munit de la relation d'ordre de la divisibilité. Alors $\inf A$ est le pgcd des éléments de A tandis que $\sup A$ est le ppcm de ces eléments.

Proposition 3.2

Soit A une partie d'un ensemble muni d'une relation d'ordre.

- Si A admet un minimum, alors il admet une borne inférieure et $\min A = \inf A$.
- Si A admet un maximum, alors il admet une borne supérieure et $\max A = \sup A$.