

# DEVOIR SURVEILLÉ N°06

- ▶ La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- ▶ On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- ▶ Les calculatrices sont interdites.

## EXERCICE 1.

On définit la suite  $(F_n)$  en posant  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  et  $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $F_n > F_{n-1}$  pour tout entier  $n \geq 3$ .
2. Soit un entier  $n \geq 3$ . Quel est le reste de la division euclidienne de  $F_{n+1}$  par  $F_n$  ?
3. On note  $\varphi$  l'unique racine positive du polynôme  $X^2 - X - 1$ . Calculer  $\varphi$ .
4. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_{n+2} \geq \varphi^n$ .

A partir de maintenant, on se donne deux entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$  tels que  $a > b$ . On note  $r_0 = a$ ,  $r_1 = b$  et  $r_2, \dots, r_N$  la suite des restes dans l'algorithme d'Euclide appliqué à  $a$  et  $b$ . On rappelle que  $r_{N-1} = a \wedge b$ ,  $r_N = 0$  et que pour tout  $k \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket$ ,  $r_{k+2}$  est le reste de la division euclidienne de  $r_k$  par  $r_{k+1}$ .

5. Dans cette question uniquement, on suppose que  $a = 169$  et  $b = 104$ .
  - Donner les valeurs des  $r_k$ .
  - Donner la valeur de  $N$ .
  - Donner le PGCD de  $a$  et  $b$ .
6. Dans cette question uniquement, on se donne un entier  $n \geq 2$  et l'on suppose que  $a = F_{n+1}$  et  $b = F_n$ . A l'aide de la question 2,
  - exprimer les  $r_k$  à l'aide des termes de la suite  $(F_n)$  ;
  - exprimer  $N$  en fonction de  $n$  ;
  - déterminer le PGCD de  $F_{n+1}$  et  $F_n$ .

On revient maintenant au cas général.

7. Montrer que la suite finie  $(r_k)_{0 \leq k \leq N}$  est strictement décroissante.
8. Montrer que  $r_{N-1} \geq 1$  et que  $r_{N-2} \geq 2r_{N-1}$ .
9. Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 2, N \rrbracket$ ,  $r_{N+1-k} \geq F_k$ .
10. En déduire que  $N \leq \left\lfloor \frac{\ln(b)}{\ln(\varphi)} \right\rfloor + 2$ .

**EXERCICE 2.**

On pose  $f(x) = x + \ln(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

1. Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Que peut-on dire du sens de variation de sa bijection réciproque  $f^{-1}$  ainsi que des limites de  $f^{-1}$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$  ?
3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $f(x) = n$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On notera  $x_n$  cette unique solution.
4. Montrer que la suite  $(x_n)$  est croissante.
5. Déterminer la limite de  $(x_n)$  en  $+\infty$ .
6. Montrer que  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ .
7. Déterminer la limite de la suite de terme général  $x_{n+1} - x_n$ .
8. On pose  $u_n = \frac{n - x_n}{\ln(n)}$  pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, u_n - 1 = \frac{\ln(x_n/n)}{\ln(n)}$$

b. Déterminer la limite de  $(u_n)$ .

c. Montrer que

$$1 - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

9. En déduire que

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

**EXERCICE 3.**

On considère la fonction  $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto 1 - \sqrt{x}$  ainsi la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_0 = \frac{1}{4}$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) \in [0, 1]$ .
2. Montrer que  $u_n \in [0, 1]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Déterminer le sens de variation de  $f$  et de  $f \circ f$  sur  $[0, 1]$ .
4. Montrer que  $f$  possède un unique point fixe  $\alpha$  sur  $[0, 1]$  et déterminer celui-ci.
5. Montrer que  $u_0 \leq \alpha$ .
6. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{2n} \leq \alpha$ .
7. Montrer que  $u_0 \leq u_2$ . En déduire que la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante puis qu'elle converge.
8. Montrer que les points fixes de  $f \circ f$  sur  $[0, 1]$  sont 0,  $\alpha$  et 1.
9. En déduire la limite de la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ , puis la convergence et la limite de la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  et enfin la convergence et la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**EXERCICE 4.**

On admet l'irrationalité de  $\sqrt{2}$  et on introduit l'ensemble

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

1. Montrer que  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  est un sous-anneau de  $(\mathbb{R}, +, \times)$ .

$(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$  est donc un anneau.

2. a. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ , il existe un *unique* couple  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $x = a + b\sqrt{2}$ .

On peut alors définir le *conjugué* de  $x$  par  $\bar{x} = a - b\sqrt{2}$ .

b. Montrer que pour  $(x, y) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^2$ ,  $\overline{x \times y} = \bar{x} \times \bar{y}$ .

3. Pour  $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ , on pose  $N(x) = x\bar{x}$ .

a. Justifier que pour tout  $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ,  $N(x) \in \mathbb{Z}$ .

b. Montrer que pour tout  $(x, y) \in (\mathbb{Z}[\sqrt{2}])^2$ ,  $N(xy) = N(x)N(y)$ .

c. Montrer que  $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  est inversible dans l'anneau  $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$  *si et seulement si*  $|N(x)| = 1$ .

On note  $H$  l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ . On rappelle qu'alors  $(H, \times)$  est un groupe.  $H$  est notamment stable par produit et par inversion. De plus, d'après la question précédente,

$$H = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], |N(x)| = 1\}$$

4. Soient  $x \in H$  et  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $x = a + b\sqrt{2}$ .

a. Montrer que si  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$ , alors  $x \geq 1$ .

b. Montrer que si  $a \leq 0$  et  $b \leq 0$ , alors  $x \leq -1$ .

c. Montrer que si  $ab \leq 0$ , alors  $|x| \leq 1$ .

5. On note  $H^+ = H \cap ]1, +\infty[$ .

a. Soient  $x \in H^+$  et  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $x = a + b\sqrt{2}$ . Montrer que  $a > 0$  et  $b > 0$ .

b. En déduire que  $u = 1 + \sqrt{2}$  est le minimum de  $H^+$ .

6. Soit  $x \in H^+$ .

a. Montrer qu'il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $u^n \leq x < u^{n+1}$ .

b. Montrer que  $x = u^n$ .

7. En déduire que  $H = \{u^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{-u^n, n \in \mathbb{Z}\}$ .