

# SÉRIES ET FAMILLES SOMMABLES

$\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 Compléments sur les séries numériques

### 1.1 Comparaison à une série géométrique

#### Proposition 1.1 Règle de d'Alembert

Soit  $(a_n)$  une suite de **réels strictement positifs** (au moins à partir d'un certain rang).

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , alors  $\sum a_n$  converge.
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , alors  $\sum a_n$  diverge grossièrement.

#### Exemple 1.1

La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n!}{n^n}$  converge.

**REMARQUE.** On ne peut a priori pas conclure si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$  ou si la suite de terme général  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  n'admet pas de limite.

#### Exemple 1.2

Posons  $a_n = 1$  et  $b_n = \frac{1}{(n+1)^2}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$  mais  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  diverge tandis que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  converge.



**ATTENTION !** Il s'agit bien de **limites** dans l'énoncé de la règle de d'Alembert. Le fait d'avoir  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  ou  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  ne permet pas de conclure. En prenant  $a_n = \frac{1}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  mais la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$  diverge.

#### Corollaire 1.1

Soit  $(a_n)$  une suite de réels non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ , alors  $\sum a_n$  converge absolument.
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ , alors  $\sum a_n$  diverge grossièrement.

## 1.2 Séries alternées

### Proposition 1.2 Critère spécial des séries alternées

Soit  $(u_n)$  une suite monotone (à partir d'un certain rang) et de limite nulle. Alors la série  $\sum (-1)^n u_n$  converge.

**REMARQUE.** Ce critère est utile pour montrer la convergence de série non absolument convergent. Il serait par exemple ridicule d'invoquer ce résultat pour justifier la convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2}$ . Il suffit en effet de constater que  $\frac{(-1)^n}{n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

### Exemple 1.3

La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$  est convergente.

### Exemple 1.4

On souhaite étudier la convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ .

Bien entendu,  $\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$  converge car elle respecte le critère spécial des séries alternées.

Mais on ne peut pas utiliser le théorème de comparaison car il ne s'agit pas là de séries à **termes positifs**.

Néanmoins, comme  $\sin u \underset{u \rightarrow 0}{=} u + \mathcal{O}(u^3)$ ,

$$\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  converge car elle respecte le critère spécial des séries alternées et la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^3}$  converge également. On en déduit que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$  converge en tant que somme de deux séries convergentes.

### Exercice 1.1

Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + 1}\right)$ .

### Proposition 1.3 Majoration du reste d'une série alternée

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite monotone de limite nulle. On note  $R_n$  le reste d'ordre  $n$  de la série  $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n u_n$  i.e.  $R_n =$

$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ . Alors pour tout  $n \geq n_0 - 1$ ,

- $R_n$  est du signe de  $(-1)^{n+1} u_{n+1}$  ;
- $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ .

**REMARQUE.** En français : le reste d'une série vérifiant le critère des séries alternées est du même signe que son premier terme et est majoré en valeur absolue par la valeur absolue de ce premier terme.

**Exemple 1.5**

Considérons la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  avec  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ . D'après le critère spécial des séries alternées, cette série converge.

Notons  $S$  sa somme et  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ .

- Alors  $S = R_0$  donc  $S$  est du signe de  $u_1$  et  $|S| \leq |u_1|$ . On en déduit que  $0 \leq S \leq u_1 = 1$ .
- On peut affiner l'encadrement. En effet,  $R_1$  est du signe de  $u_2$  et  $|R_1| \leq |u_2|$  donc  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq R_1 \leq 0$ . Comme  $S = u_1 + R_1$ ,  $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq S \leq 1$ .
- On peut encore aller plus loin.  $R_2$  est du signe de  $u_3$  et  $|R_2| \leq |u_3|$  donc  $0 \leq R_2 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Comme  $S = u_1 + u_2 + R_2$ ,  $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq S \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**1.3 Comparaison série-intégrale****Proposition 1.4**

Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une application continue par morceaux et décroissante. Alors la série de terme général  $\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$  converge.

**Exemple 1.6 Constante  $\gamma$  d'Euler**

Si l'on considère l'application  $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x}$ , on peut montrer qu'il existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ .

En effet, pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) = \ln(n) - \ln(n-1) - \frac{1}{n}$$

La série  $\sum \ln(n) - \ln(n-1) - \frac{1}{n}$  converge donc vers un réel  $C$ . En termes de sommes partielles,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \ln(k) - \ln(k-1) - \frac{1}{k} = C$$

On a alors le résultat voulu en posant  $\gamma = 1 - C$ .

**1.4 Sommation des relations de comparaison**

**Proposition 1.5**

Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  deux séries numériques. On suppose de plus que  $(v_n)$  est à **termes positifs** à partir d'un certain rang.

**Domination** On suppose que  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ .

- Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  converge, alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge et  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ .
- Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  diverge, alors  $\sum_{k=0}^n u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$ .

**Négligeabilité** On suppose que  $u_n = o(v_n)$ .

- Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  converge, alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge et  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ .
- Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  diverge, alors  $\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$ .

**Equivalence** On suppose que  $u_n \sim v_n$ .

- Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  converge, alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge et  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ .
- Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  diverge, alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge et  $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$ .



**ATTENTION !** Il est essentiel que la suite de référence soit de signe constant à partir d'un certain rang.

**REMARQUE.** Dans les cas de convergence, les résultats restent vrais même si les sommes partielles débutent à un indice non nul.

**Lemme de Césaro**

Soit  $(u_n)$  est une suite numérique convergente de limite  $\ell$ . Posons  $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (suite des moyennes).

- Si  $\ell \neq 0$ ,  $u_n \sim \ell$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ell$  diverge. Ainsi  $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n \ell = (n+1)\ell$  i.e.  $v_n \sim \ell$ . Donc  $(v_n)$  converge vers  $\ell$ .
- Si  $\ell = 0$ ,  $u_n = o(1)$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} 1$  diverge. Ainsi  $\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n 1\right)$  i.e.  $v_n = o(1)$ . Donc  $(v_n)$  converge vers 0.

Dans les deux cas,  $(v_n)$  est de même limite que  $(u_n)$ .

**Exercice 1.2**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et la relation de récurrence  $u_{n+1} = \sin(u_n)$ .

1. Déterminer la limite de  $(u_n)$ .
2. Déterminer  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que la suite de terme général  $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$  converge vers un réel non nul.
3. En déduire un équivalent puis un développement asymptotique à deux termes de  $(u_n)$ .

## 2 Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé

### 2.1 Définitions

#### Définition 2.1 Série

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. On appelle **série de terme général**  $u_n$  la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$  où

$$\forall n \geq n_0, S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$$

Cette série est noté  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  ou plus simplement  $\sum u_n$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le premier terme.

Pour  $n \geq n_0$ ,  $S_n$  est appelée **somme partielle de rang**  $n$  de cette série.

**REMARQUE.** Une série est donc un cas particulier de suite.

#### Exemple 2.1

On appelle série télescopique toute série dont le terme général est de la forme  $u_n = v_n - v_{n-1}$ . La somme partielle de rang  $n$  de la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  est  $v_n - v_0$ .

### 2.2 Nature et somme d'une série

#### Définition 2.2 Convergence et divergence

On dit qu'une série à valeurs dans un espace vectoriel normé converge (resp. diverge) si la suite de ses sommes partielles converge (resp. diverge).

**REMARQUE.** En dimension infinie, la convergence/divergence peut dépendre de la norme, ce qui n'est pas le cas en dimension finie puisque toutes les normes sont alors équivalentes.

**REMARQUE.** La convergence d'une série ne dépend pas du premier rang i.e. les séries  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  et  $\sum_{n \geq n_1} u_n$  sont de même nature.

#### Définition 2.3 Somme d'une série

Si la série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge, la limite de la suite des sommes partielles est appelée **somme** de la série et est notée  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ .

**REMARQUE.** On a donc  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^n u_k$ .



**ATTENTION !** La notation  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$  n'a de sens que si la série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge. Il faut donc prouver la convergence de la série **avant** d'employer cette notation.

**Proposition 2.1 Lien suite/série**

La série  $\sum (u_n - u_{n-1})$  et la suite  $(u_n)$  sont de même nature (i.e. elles convergent toutes les deux ou elles divergent toutes les deux).

De plus, si  $(u_n)$  converge vers une limite  $l$ ,  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - u_{n-1} = l - u_{n_0-1}$ .

**2.3 Divergence grossière****Proposition 2.2**

Soit  $\sum u_n$  une série convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé. Alors la suite  $(u_n)$  converge vers 0.



**ATTENTION !** La réciproque est absolument fausse. Par exemple, la suite de terme général  $\frac{1}{n}$  converge vers 0 tandis que la série harmonique diverge.

**Définition 2.4 Divergence grossière**

Une série  $\sum u_n$  est dite **grossièrement divergente** lorsque la suite  $(u_n)$  ne converge pas vers 0.

**Exemple 2.2**

Si  $|q| \geq 1$ , la série  $\sum q^n$  diverge grossièrement.

La série  $\sum \frac{1}{n}$  ne diverge pas grossièrement.

**2.4 Reste d'une série convergente****Définition 2.5 Reste d'une série convergente**

Soit  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  une série convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé. Pour tout  $n \geq n_0$ , la série  $\sum_{k \geq n+1} u_k$  est convergente et on appelle sa somme le **reste de rang  $n$**  de la série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$ . Autrement dit, le reste de rang  $n$  de la série

$$\sum_{n \geq n_0} u_n \text{ est } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

**Proposition 2.3**

Soit  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  une série convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé. Alors pour tout  $n \geq n_0$

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

**REMARQUE.** Si on note  $S_n$  la somme partielle de rang  $n$ ,  $R_n$  le reste de rang  $n$  et  $S$  la somme de la série, on a donc  $S_n + R_n = S$  pour tout  $n \geq n_0$ .

**Exemple 2.3**

Lorsque  $|q| < 1$ , le reste de rang  $n$  de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$  est  $\frac{q^{n+1}}{1-q}$ .

**Corollaire 2.1**

La suite des restes d'une série convergente converge vers 0.

**2.5 Opérations sur les séries**

La proposition suivante n'est qu'une conséquence de la linéarité de la limite.

**Proposition 2.4 Linéarité de la somme**

Soient  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  et  $\sum_{n \geq n_0} v_n$  deux séries convergentes à valeurs dans un espace vectoriel normé et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ . Alors la série  $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$  converge et

$$\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n \geq n_0} u_n + \mu \sum_{n \geq n_0} v_n$$

**REMARQUE.** En termes plus savants, les séries numériques convergentes forment un espace vectoriel et l'application qui à une série convergente associe sa somme est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.



**ATTENTION!** La réciproque est fautive en général. Par exemple, si  $\sum (u_n + v_n)$  converge, on ne peut rien dire de  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  (prendre par exemple,  $u_n = -v_n = 2^n$ ).

On évitera à tout prix d'écrire des égalités du type  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$  avant d'avoir prouvé la convergence des séries  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  et  $\sum_{n \geq n_0} v_n$ .

**2.6 Absolue convergence****Définition 2.6 Absolue convergence**

Une série  $\sum u_n$  à valeurs dans un espace vectoriel normé est dite **absolument convergente** si  $\sum \|u_n\|$  converge.

**REMARQUE.** A nouveau, en dimension infinie, l'absolue convergence peut dépendre de la norme.

**Exemple 2.4**

On munit  $\mathbb{R}[X]$  des normes  $N : P \mapsto \max_{t \in [0,1]} |P(t)|$  et  $N' : P \mapsto \int_0^1 |P(t)| dt$ . Alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{X^n}{n}$  converge absolument pour  $N'$  mais pas pour  $N$ . En effet,  $N(X^n/n) = \frac{1}{n}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$  diverge tandis que  $N'(X^n/n) = \frac{1}{n(n+1)}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}$  converge.

**Théorème 2.1**

Une série absolument convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé de **dimension finie** est convergente. Dans ce cas,  $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$ .



**ATTENTION !** La réciproque est fausse. La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  converge tandis que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge.

**Exemple 2.5**

Si  $\|\cdot\|$  est une norme d'algèbre sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et si  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  vérifie  $\|A\| < 1$ . Alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} A^n$  est absolument convergente,  $I_p - A$  est inversible et  $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_p - A)^{-1}$ .

**Exemple 2.6**

Si  $\|\cdot\|$  est une norme d'algèbre sur  $\mathcal{L}(E)$  et si  $u \in \mathcal{L}(E)$  vérifie  $\|u\| < 1$ . Alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u^n$  est absolument convergente,  $\text{Id}_E - u$  est inversible et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n = (\text{Id}_E - u)^{-1}$ .



**ATTENTION !** Le fait que l'espace vectoriel normé considéré soit de **dimension finie** est important. Si ce n'est pas le cas, une série peut converger absolument sans être convergente.

**Exemple 2.7**

Munissons  $\mathbb{R}[X]$  de la norme

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{R}[X] \mapsto \|P\| = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

Puisque  $\left\| \frac{X^n}{(n+1)^2} \right\| = \frac{1}{(n+1)^2}$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{X^n}{(n+1)^2}$  converge absolument. Supposons qu'elle converge vers un polynôme  $P = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p X^p$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| P - \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{(k+1)^2} \right\| = 0$$

Fixons  $p \in \mathbb{N}$ . Par définition de la norme  $\|\cdot\|$ , pour tout  $n \geq p$

$$\left| a_p - \frac{1}{(p+1)^2} \right| \leq \left\| P - \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{(k+1)^2} \right\|$$

En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on en déduit que  $a_p = \frac{1}{(p+1)^2}$ . Par conséquent, la suite  $(a_p)$  n'est pas presque nulle, ce qui est impossible car  $P$  est un polynôme.



### 3 Familles sommables

#### 3.1 Ensembles dénombrables

**Définition 3.1 Ensemble dénombrable**

Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

**Proposition 3.1**

Toute partie infinie de  $\mathbb{N}$  est dénombrable.

**Exemple 3.1**

L'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs sont dénombrables.

**Proposition 3.2**

Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement si il est en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$ .

**Exercice 3.1**

Soit  $A$  un ensemble. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $A$  est dénombrable ;
- (ii) il existe une injection de  $A$  dans un ensemble dénombrable ;
- (iii) il existe une surjection d'un ensemble dénombrable sur  $A$ .

**Proposition 3.3 Opération sur les ensembles dénombrables**

- Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

**Corollaire 3.1**

$\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}^2$  et  $\mathbb{Q}$  sont dénombrables.

**Proposition 3.4**

$\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.

#### 3.2 Familles sommables

**Définition 3.2 Famille sommable de réels positifs**

Soit  $J$  un ensemble **dénombrable** et  $(u_j)_{j \in J} \in (\mathbb{R}_+)^J$  une famille de réels **positifs**. Notons  $\mathcal{P}_f(J)$  l'ensemble des parties finies de  $J$ .

On dit que la famille  $(u_j)_{j \in J}$  est **sommable** si l'ensemble  $\left\{ \sum_{j \in K} u_j, K \in \mathcal{P}_f(J) \right\}$  est majoré. Dans ce cas, définit la somme de la famille  $(u_j)_{j \in J}$  par

$$\sum_{j \in J} u_j = \sup \left\{ \sum_{j \in K} u_j, K \in \mathcal{P}_f(J) \right\}$$

**REMARQUE.** Autrement dit, une famille est sommable si les sommes de ses sous-familles finies sont majorées.

**REMARQUE.** Toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.

**Exemple 3.2**

Soit  $q \in [0, 1[$ . La famille  $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$  est sommable. En effet, si  $J$  est une partie finie de  $\mathbb{Z}$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $J \subset \llbracket -N, N \rrbracket$ . Alors

$$\sum_{n \in J} q^{|n|} \leq \sum_{n=-N}^N q^{|n|} = 1 + 2q \frac{1 - q^N}{1 - q} \leq 1 + \frac{2q}{1 - q} = \frac{1 + q}{1 - q}$$

La somme de la famille  $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$  est  $\frac{1 + q}{1 - q}$  puisque

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1 + q}{1 - q} = \frac{1 + q}{1 - q}$$

**Exemple 3.3**

La famille  $\left( \frac{1}{pq} \right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  n'est pas sommable. En effet, posons  $J_N = \llbracket 1, N \rrbracket^2$  pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$\sum_{(p,q) \in J_N} \frac{1}{pq} = \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)^2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$$

puisque la série harmonique diverge vers  $+\infty$ .

**Définition 3.3 Famille sommable de réels**

Soient  $J$  un ensemble **dénombrable** et  $(u_j)_{j \in J} \in \mathbb{R}^J$  une famille de réels. On dit que la famille  $(u_j)_{j \in J}$  est sommable si la famille  $(|u_j|)_{j \in J}$  l'est.

**Rappel Parties positive et négative d'un réel**

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $x^+ = \max(0, x)$  et  $x^- = \max(0, -x)$ . Alors  $x = x^+ - x^-$  et  $|x| = x^+ + x^-$ .

**Proposition 3.5**

La famille  $(u_j)_{j \in J} \in \mathbb{R}^J$  est sommable si et seulement si les familles  $(u_j^+)_{j \in J}$  et  $(u_j^-)_{j \in J}$  sont sommables.

**Définition 3.4 Somme d'une famille de réels**

Soit  $(u_j)_{j \in J} \in \mathbb{R}^J$  une famille sommable. On définit la somme de la famille  $(u_j)_{j \in J}$  en posant

$$\sum_{j \in J} u_j = \sum_{j \in J} u_j^+ - \sum_{j \in J} u_j^-$$

**Définition 3.5 Famille sommable de complexes**

Soient  $J$  un ensemble **dénombrable** et  $(u_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^J$  une famille de complexes. On dit que la famille  $(u_j)_{j \in J}$  est sommable si la famille  $(|u_j|)_{j \in J}$  l'est.

**Proposition 3.6**

La famille  $(u_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^J$  est sommable si et seulement si les familles  $(\operatorname{Re}(u_j))_{j \in J}$  et  $(\operatorname{Im}(u_j))_{j \in J}$  sont sommables.

**Définition 3.6 Somme d'une famille de complexes**

Soit  $(u_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^J$  une famille sommable. On définit la somme de la famille  $(u_j)_{j \in J}$  en posant

$$\sum_{j \in J} u_j = \sum_{j \in J} \operatorname{Re}(u_j) + i \sum_{j \in J} \operatorname{Im}(u_j)$$

**Exemple 3.4**

Soit  $q \in \mathbb{C}$  tel que  $|q| < 1$ . Alors la famille  $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$  est sommable de somme  $\frac{1+q}{1-q}$ .

**Proposition 3.7 Linéarité de la somme**

Soient  $J$  un ensemble dénombrable ainsi que  $(u_j)_{j \in J}$  et  $(v_j)_{j \in J}$  deux familles de complexes. Si les familles  $(u_j)_{j \in J}$  et  $(v_j)_{j \in J}$  sont sommables, alors pour tout couple  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ ,

- la famille  $(\lambda u_j + \mu v_j)_{j \in J}$  est sommable ;
- $\sum_{j \in J} \lambda u_j + \mu v_j = \lambda \sum_{j \in J} u_j + \mu \sum_{j \in J} v_j$ .

**Proposition 3.8 Lien entre série et famille sommable**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une suite numérique. La famille  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable si et seulement si la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge absolument. Dans ce cas, la somme de la famille  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la somme de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

**REMARQUE.** Dans le cadre des séries, la notation  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  peut être ambiguë puisqu'elle peut donc désigner à la fois une série (i.e. la suite des sommes partielles) et la somme de la famille  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Proposition 3.9 Sommation par paquets**

Soient  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une partition d'un ensemble dénombrable  $J$  et  $(u_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ . Alors la famille  $(u_j)_{j \in J}$  est sommable si et seulement si

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(u_j)_{j \in J_n}$  est sommable ;
- la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{j \in J_n} |u_j| \right)$  converge ;

Dans ce cas,

- la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{j \in J_n} u_j \right)$  converge ;
- $\sum_{j \in J} u_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{j \in J_n} u_j \right)$ .

**Exemple 3.5 Produit de deux familles sommables**

Soient  $(u_i)_{i \in I}$  et  $(v_j)_{j \in J}$  deux familles sommables où  $I$  et  $J$  sont deux ensembles dénombrables. Il existe donc une bijection  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$  dans  $I$ . Posons pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $J_n = \{\varphi(n)\} \times J$ .

- On vérifie que  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une partition de  $I \times J$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la famille  $(u_i v_j)_{(i,j) \in J_n}$  est sommable puisque la famille  $(u_{\varphi(n)} v_j)_{j \in J}$  l'est et

$$S_n = \sum_{(i,j) \in J_n} |u_i v_j| = |u_{\varphi(n)}| \sum_{j \in J} |v_j| = S |u_{\varphi(n)}|$$

en posant  $S = \sum_{j \in J} |v_j|$ .

- La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} S_n$  converge car la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_{\varphi(n)}|$  converge.

Le théorème de sommation par paquets permet alors d'affirmer que la famille  $(u_i v_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable. De plus,

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_i v_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{(i,j) \in J_n} u_i v_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j \in J} u_{\varphi(n)} v_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{j \in J} v_j \right) u_{\varphi(n)} = \left( \sum_{j \in J} v_j \right) \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = \left( \sum_{j \in J} v_j \right) \left( \sum_{i \in I} u_i \right)$$

**REMARQUE.** Par récurrence, le résultat précédent s'étend à un produit de plus de deux familles sommables.

**Exemple 3.6**

Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ . On souhaite montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1 - z}$$

La famille  $\left(\frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est sommable puisque la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}$  converge absolument (en utilisant la règle de d'Alembert, par exemple).

Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . En faisant intervenir une série géométrique,

$$\frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose alors  $J_n = \{2^n(2k+1), k \in \mathbb{N}\}$ . En partitionnant  $\mathbb{N}^*$  suivant la valuation 2-adique, on montre que  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une partition de  $\mathbb{N}^*$ . Le théorème de sommation par paquets permet alors d'affirmer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)} = \sum_{j=1}^{+\infty} z^j$$

Ce qui peut encore s'écrire d'après ce qui précède et en reconnaissant dans le second membre la somme d'une série géométrique :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1 - z}$$

**Proposition 3.10 Invariance par permutation des indices**

Soient  $J$  un ensemble dénombrable,  $(u_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$  et  $\varphi$  une permutation de  $J$ . Alors  $(u_j)_{j \in J}$  est sommable si et seulement si  $(u_{\varphi(j)})_{j \in J}$  l'est également et, dans ce cas,

$$\sum_{j \in J} u_{\varphi(j)} = \sum_{j \in J} u_j$$



**ATTENTION !** Dans le cadre des séries, cela ne veut pas dire que la somme d'une série convergente est invariante par permutation des indices. Considérons la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ . On montre facilement que cette série converge vers  $\ln 2$ .

Considérons la permutation  $\varphi$  de  $\mathbb{N}^*$  telle que  $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 2, \varphi(3) = 4, \varphi(4) = 3, \varphi(5) = 6, \varphi(6) = 8, \varphi(7) = 5, \dots$  (un impair, deux pairs, un impair, deux pairs, ...).

**3.3 Séries doubles**

**Proposition 3.11 Intersion de sommes**

Soit  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^2}$ . La famille  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable si et seulement si

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{m \in \mathbb{N}} |a_{m,n}|$  converge ;
- la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{m,n}| \right)$  converge.

Dans ce cas, on a la relation suivante dans laquelle la convergence des différentes séries est assurée :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}$$



**ATTENTION !** On ne peut pas toujours permuter l'ordre de sommation. Par exemple, en prenant

$$a_{p,q} = \frac{2p+1}{p+q+2} - \frac{p}{p+q+1} - \frac{p+1}{p+q+3}$$

On obtient

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = 1$$

**Définition 3.7 Produit de Cauchy**

Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$  où  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{l=0}^n a_{n-l} b_l$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Proposition 3.12**

Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  deux séries numériques **absolument convergentes**. Alors leur produit de Cauchy  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$  est une série absolument convergente. De plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$$

**Exemple 3.7**

Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ . Les séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a^n}{n!}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{b^n}{n!}$  sont absolument convergentes de sommes respectives  $e^a$  et  $e^b$ . On vérifie facilement que leur produit de Cauchy est  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a+b)^n}{n!}$ . On en déduit que  $e^{a+b} = e^a e^b$ .