Devoir surveillé n°13

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – CCP PC Maths 2020

Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n+1$, le pion a une chance sur 2 de se trouver en $x+1$ et une chance sur deux de se trouver en $x-1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.

Pour modéliser cette situation, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on considère une suite $(\mathrm{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_k = -1) = \frac{1}{2}$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathrm{S}_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

- si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{S}_n \neq 0$, on pose $\mathrm{T} = +\infty$;
- sinon, on pose $\mathrm{T} = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{S}_n = 0\}$.

L'événement $(\mathrm{T} = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{S}_n = 0\}$ est vide.
Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0) \qquad \text{et} \qquad q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \mathbb{P}(\mathrm{T} = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

I Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

1 Que représente la variable aléatoire S_n ?

2 Calculer p_0, p_1 et p_2.

3 Justifier que, si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $\mathrm{Y}_k = \dfrac{\mathrm{X}_k + 1}{2}$. On admet que $(\mathrm{Y}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

4 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

5 Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n.

6 On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente que :

$$p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}$$

II Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

7 Montrer que $R_p \geq 1$.

8 Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{1}{2} - k + 1\right)$$

9 Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = (1 - x^2)^\alpha$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

III Loi de la variable aléatoire T

On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

10 Calculer q_1 et q_2.

11 Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire que $R_q \geq 1$.

Dans la suite, on **admet** la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}$$

12 En utilisant un produit de Cauchy et la relation admise ci-dessus, montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1$$

13 En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}$ en précisant son rayon de convergence.

14 En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

15 En utilisant les questions **11** et **13**, déterminer la valeur de $\mathbb{P}(T = +\infty)$. Interpréter le résultat.

16 La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?

Problème 2 – EM Lyon 2022 – Etude de graphes

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{P}_2(n)$ l'ensemble des parties à deux éléments de $[\![0, n-1]\!]$. On rappelle que le cardinal de $\mathcal{P}_2(n)$ est égal à $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

On définit un *graphe* $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ par

- un ensemble fini $\mathcal{S}$, de cardinal n, dont les éléments sont appelés *sommets* ; ici l'ensemble $\mathcal{S}$ sera systématiquement égal à $[\![0, n-1]\!]$;
- une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}_2(n)$, c'est-à-dire un ensemble dont les éléments, appelés *arêtes*, sont de la forme $\{i, j\}$ avec $i, j \in \mathcal{S}$ et $i \neq j$.

On représentera commodément les sommets d'un graphe par des points, et les arêtes par des segments les reliant.

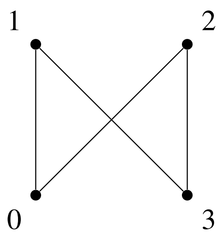

Fig. 1 : Un graphe à quatre sommets. Les arêtes sont $\{0, 1\}$, $\{1, 3\}$, $\{3, 2\}$ et $\{0, 2\}$.

Représentations informatiques d'un graphe

Un graphe (et plus précisément l'ensemble $\mathcal{A}$ de ses arêtes) admet communément deux représentations : la représentation par *liste de voisins* et la représentation par *matrice d'adjacence*.

- Soit i un sommet du graphe $\mathcal{G}$. Un sommet $j \neq i$ est dit *voisin* de i lorsque $\{i, j\}$ est une arête. On note alors $\mathrm{V}(i)$ l'ensemble des voisins de i.
  Cet ensemble sera représenté en Python par une liste : on notera $\mathtt{V[i]} = [\mathtt{j}_1, \dots, \mathtt{j}_\mathtt{d}]$ la *liste des voisins* de i.
- La *matrice d'adjacence* d'un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ est la matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (représentée en Python par une variable `A`, qui est une liste de listes) dont les coefficients sont

$$\mathrm{A}_{i,j} = \mathtt{A[i][j]} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1 Ecrire une fonction `VA(V)` prenant en argument une liste `V=[V[0],...,V[n-1]]` où `V[i]` est la liste des voisins du sommet i, et renvoyant la matrice d'adjacence correspondante. On pourra initialiser une matrice remplie de «0» par l'instruction

```
A=[[0]*n for j in range(n)]
```

2 Réciproquement, écrire une fonction `VA(V)` prenant en argument une matrice d'adjacence `A` et renvoyant une liste `V` dont les éléments sont les liste des voisins.

Comptage dans un graphe aléatoire

Dans toute la suite,

- $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé ;
- $\mathcal{G}$ est un graphe dont l'ensemble des sommets $\mathcal{S} = [\![0, n-1]\!]$ est déterministe (il ne dépend pas de $\omega \in \Omega$), mais dont l'ensemble des arêtes $\mathcal{A}$ est aléatoire.
- On se donne une famille $(X_{i,j})_{0 \le i < j \le n-1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi $\mathcal{B}(p)$, où $p \in]0, 1[$. Par commodité, on notera $m = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $\mathcal{G}(\omega) = (\mathcal{S}, \mathcal{A}(\omega))$ où

$$\mathcal{A}(\omega) = \left\{\{i, j\} \in \mathcal{P}_2(n);\ i < j \text{ et } X_{i,j}(\omega) = 1\right\}$$

  En termes usuels, un couple $\{i, j\}$ donné est une arête de $\mathcal{G}$ avec la probabilité p, et ce, de manière indépendante des autres couples. Le nombre p sera désigné sous le nom de *probabilité de connexion*.
- On note N la variable aléatoire égale au nombre d'arêtes du graphe $\mathcal{G}$, c'est-à-dire le cardinal de $\mathcal{A}$:

$$\forall \omega \in \Omega,\ N(\omega) = \operatorname{card}(\mathcal{A}(\omega))$$

- Si X est une variable aléatoire, on note, lorsqu'elles existent, $\mathbb{E}(X)$ son espérance et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.

3 Exprimer N en fonction des variables $X_{i,j}$.

4 Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{V}(N)$.

5 Ecrire une fonction `GrapheAleatoire(n, p)` renvoyant une matrice d'adjacence aléatoire suivant la loi précédente.

Etude des sommets isolés

On dit que deux sommets i et j sont *reliés* s'il existe un entier k et des indices $i_1, \dots, i_k$ vérifiant $i_1 = i$, $i_k = j$ et

$$\forall \ell \in [\![1, k-1]\!],\ \{i_\ell, i_{\ell+1}\} \in \mathcal{A}$$

On dit alors que le chemin $i_1 \to i_2 \to \dots \to i_k$ *relie* les sommets i et j.

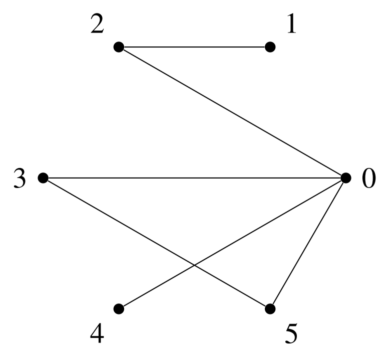

Fig. 2 : Les sommets 1 et 4 sont reliés par le chemin $1 \to 2 \to 0 \to 4$.

On dit qu'un sommet i est *isolé* s'il ne possède aucun voisin. On dit que le graphe $\mathcal{G}$ est *connexe* si deux sommets quelconques sont toujours reliés.

Dans toute la suite, l'entier n n'est plus fixé, et on étudiera notamment certaines propriétés asymptotiques valables dans la limite $n \to +\infty$. Notamment, la probabilité que deux sommets soient reliés pourra dépendre de n, et on la notera donc p_n. Pour les autres objets (le graphe, l'univers probabilisé), la dépendance en n pourra être gardée implicite.

Le but de cette partie est d'étudier le nombre Y_n de points isolés dans le graphe à n sommets caractérisé par une probabilité de connexion p_n.

6 Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note I_k la variable aléatoire indicatrice de l'événement «le sommet k est isolé» (c'est-à-dire que $I_k(\omega) = 1$ si le sommet est isolé dans $(\mathcal{S}, \mathcal{A}(\omega))$ et $I_k(\omega) = 0$ sinon).

6.a Montrer que les variables aléatoires I_k suivent une loi de Bernoulli de même paramètre q_n à déterminer.

6.b Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\mathbb{E}(Y_n)$.

7 **Cas des graphes «denses»** – On suppose que la dépendance en n de la probabilité de connexion p_n est de la forme

$$p_n = f(n)\frac{\ln n}{n} \qquad \text{où } f \text{ est une fonction telle que } f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

7.a Montrer que $\ln(1-x) \leq -x$ pour $x \in [0, 1[$. En déduire que $\mathbb{E}(Y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

7.b Que peut-on dire de $\mathbb{P}(Y_n > 0)$ quand $n \to +\infty$?
Interpréter le résultat obtenu.

8 **Cas des graphes «peu denses»** – On suppose dans cette question que

$$p_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

8.a Calculer la probabilité que deux sommets distincts i et j soient isolés. En déduire $\mathbb{E}(Y_n^2)$.

8.b Soient U et V deux variables aléatoires telles que U^2 et V^2 admettent une espérance. En remarquant que $\mathbb{E}((U + tV)^2) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\mathbb{E}(UV)^2 \leq \mathbb{E}(U^2)\mathbb{E}(V^2)$$

8.c Soit $W \geq 0$ une variable aléatoire positive, telle que $\mathbb{E}(W^2) > 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}(W > 0) \geq \frac{\mathbb{E}(W)^2}{\mathbb{E}(W^2)}$$

Indication : On pourra remarquer que $W = W \cdot \mathbb{1}_{\{W>0\}}$, où $\mathbb{1}_B$ est l'indicatrice d'un événement B, et utiliser l'inégalité de la question **8.b**.

8.d Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n)^2}{\mathbb{E}(Y_n^2)}$.

8.e Que peut-on déduire sur la probabilité que le graphe $\mathcal{G}$ soit connexe quand $n \to +\infty$?

9 Ecrire une fonction `Isoles(n, p)` comptant le nombre de points isolés d'un graphe aléatoire de paramètres n et p.
Indication : On pourra utiliser la fonction `GrapheAleatoire` de la question **5**.

10 Ecrire une fonction estimant la probabilité qu'un graphe aléatoire admette au moins un point isolé.
On précisera quels paramètres d'entrée une telle fonction doit prendre.

Rappels de Python

Les candidats sont invités à *commenter* abondamment leurs codes, et à respecter scrupuleusement les règles d'indentation de Python.

Pour toute la partie stochastique du problème, on utilisera la bibliothèque `random`.

```python
import random as rd
```

Instruction	Action
`L.append(x)`	Empile (ajoute) l'élément `x` à la liste `L`
`L.pop()`	Dépile (supprime) le dernier élément de la liste `L` et renvoie cet élément
`L.extend(M)`	Ajoute à la liste `L` tous les éléments de la liste `M`
`rd.random()`	Renvoie un réel (flottant) de $[0,1[$ avec probabilité uniforme
`rd.randint(a,b)`	Renvoie un entier de $[\![a,b]\!]$ avec probabilité uniforme
`len(L)`	Renvoie la longueur de la liste `L`