Dérivation et intégration

Opérations et dérivation

$$(u+v)'=u'+v' \qquad (uv)'=u'v+uv' \qquad (\lambda u)'=\lambda u' \qquad (u\circ v)'=(u'\circ v)v'$$

$$\left(u^{-1}\right)'=\frac{1}{u'\circ u^{-1}} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \qquad \left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2} \qquad (u^\alpha)'=\alpha u' u^{\alpha-1}$$

<u>Formule de Leibniz</u> : $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$

Dérivées usuelles

$$\ln x \longmapsto \frac{1}{x} \qquad e^{ax}\longmapsto a e^{ax} \qquad x^\alpha \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\sin x \longmapsto \cos x \qquad \cos x \longmapsto -\sin x \qquad \tan x \longmapsto 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\arcsin x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos x \longmapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arctan x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{sh} x \longmapsto \operatorname{ch} x \qquad \operatorname{ch} x \longmapsto \operatorname{sh} x \qquad \operatorname{th} x \longmapsto 1-\operatorname{th}^2 x=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

Primitives usuelles

$$\ln x \longmapsto x\ln x - x \qquad e^{ax}\longmapsto \frac{e^{ax}}{a}\ (a\neq 0) \qquad x^\alpha \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha\neq -1 \\ \ln|x| & \text{si } \alpha=-1 \end{cases}$$

$$\sin x \longmapsto -\cos x \qquad \cos x \longmapsto \sin x \qquad \tan x \longmapsto -\ln|\cos x|$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longmapsto \arcsin x \qquad -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longmapsto \arccos x \text{ ou } -\arcsin x \qquad \frac{1}{1+x^2} \longmapsto \arctan x$$

$$\operatorname{sh} x \longmapsto \operatorname{ch} x \qquad \operatorname{ch} x \longmapsto \operatorname{sh} x \qquad \operatorname{th} x \longmapsto \ln(\operatorname{ch} x)$$

Formules de Taylor

<u>Formule de Taylor avec reste intégral</u> : Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, alors

$$\forall (a,b)\in \mathrm{I}^2, f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

<u>Inégalité de Taylor-Lagrange</u> : Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et si $|f^{(n+1)}|\leqslant \mathrm{M}$ sur I, alors

$$\forall (a,b)\in \mathrm{I}^2, \left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right|\leqslant \mathrm{M}\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

<u>Formule de Taylor-Young</u> : Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^{n}$ sur un intervalle I et $a\in\mathrm{I}$, alors

$$\forall x\in \mathrm{I}, f(x)\underset{x\to a}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o\left((x-a)^n\right)$$