Devoir surveillé n°07

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 **1.a** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. L'application $x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $\mathbb{R}_+ \subset \mathrm{T}_1(\mathbb{R})$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{T}_1(\mathbb{R})$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x = y^2 \geq 0$. Ainsi $\mathrm{T}_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$. Par double inclusion, $\mathrm{T}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.

1.b Les racines n-ièmes de b sont les complexes $\sqrt[n]{r}e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

1.c La question précédente, montre que tout complexe non nul appartient à $\mathrm{T}_1(\mathbb{C})$. Mais 0 appartient évidemment à $\mathrm{T}_1(\mathbb{C})$ puisque $0^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $\mathrm{T}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

2 **2.a** Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{T}_p(\mathbb{K})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{B}^n = \mathrm{A}$. Par conséquent, $\det(\mathrm{A}) = (\det \mathrm{B})^n$ avec $\det \mathrm{B} \in \mathbb{K}$. Ainsi $\det \mathrm{A} \in \mathrm{T}_1(\mathbb{K})$.

2.b Puisque $\mathrm{T}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$, il suffit de choisir une matrice de déterminant strictement négatif. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3 Supposons qu'il existe une matrice $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$. Comme B commute avec B^2, B commute avec A, ce qui donne $b = c = 0$. Alors $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$ donne maintenant $a^2 = -1$ et $d^2 = -2$ ce qui est évidemment impossible. Pour tout $\det(\mathrm{A}) = 2 \in \mathbb{R}_+ = \mathrm{T}_1(\mathbb{R})$.

4 **4.a** On trouve $\chi_\mathrm{A} = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)^2$, $\mathrm{E}_1(\mathrm{A}) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{E}_2(\mathrm{A}) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Ainsi $\dim \mathrm{E}_1(\mathrm{A}) + \dim \mathrm{E}_2(\mathrm{A}) = 3$ donc A est diagonalisable.

4.b La matrice A est semblable à la matrice $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(1, 2, 2)$. Il existe donc $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $\Delta = \mathrm{diag}(1, \sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{2})$ et $\mathrm{B} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1}$, on a bien $\mathrm{B}^n = \mathrm{P}\Delta^n\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{A}$. Ainsi A est TP$\mathbb{R}$.

4.c On peut choisir $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. En choisissant B comme précédemment, on trouve pour $n = 2$,

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & -3+3\sqrt{2} & -2+\sqrt{2} \\ 2-2\sqrt{2} & -3+4\sqrt{2} & -2+\sqrt{2} \\ -2+2\sqrt{2} & 3-3\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et pour $n = 3$,

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt[3]{2} & -3+3\sqrt[3]{2} & -2+\sqrt[3]{2} \\ 2-2\sqrt[3]{2} & -3+4\sqrt[3]{2} & -2+\sqrt[3]{2} \\ -2+2\sqrt[3]{2} & 3-3\sqrt[3]{2} & 2-\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$$

5 **5.a** On rappelle que $\mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation d'angle θ. Ainsi $\mathrm{A} = \mathrm{R}(\pi)$ est la matrice d'une rotation d'angle π.

5.b On sait d'après le cours que R est un morphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ sur le groupe $(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\times)$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{A}=\mathrm{R}(\pi)=\mathrm{R}(\pi/n)^n$ donc A est TP$\mathbb{R}$.

6 **6.a** D'après le cours, N et trigonalisable et son unique valeur propre est 0. Elle est donc semblable à une matrice triangulaire de diagonale nulle. On en déduit immédiatement que $\chi_{\mathrm{N}}=\mathrm{X}^p$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\mathrm{N}^p=0$.

6.b Supposons que N soit TP$\mathbb{K}$. Notamment, il existe $\mathrm{B}\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{B}^p=\mathrm{N}$. Alors $\mathrm{B}^{p^2}=\mathrm{N}^p=0$. Par conséquent, B est nilpotente. En appliquant la question précédente à B (et non à N !), on obtient $\mathrm{N}=\mathrm{B}^p=0$.

7 Comme les polynômes $(\mathrm{X}-\lambda_i)^{r_i}$ sont premiers entre eux deux à deux, le lemme des noyaux permet d'affirmer que

$$\operatorname{Ker}\chi_u(u)=\bigoplus_{i=1}^k \operatorname{Ker}(u-\lambda_i\operatorname{Id}_{\mathrm{E}})^{r_i}$$

Or $\chi_u(u)=0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton donc $\operatorname{Ker}\chi_u(u)=\mathbb{K}^p$. Ainsi

$$\mathbb{K}^p=\bigoplus_{i=1}^k \mathrm{C}_i$$

8 Soit $i\in[\![1,k]\!]$. Comme $\mathbb{K}[u]$ est une algèbre commutative, u commute avec $(u-\lambda_i\operatorname{Id}_{\mathbb{K}^p})^{r_i}$. On en déduit que $\mathrm{C}_i=\operatorname{Ker}(u-\lambda_i\operatorname{Id}_{\mathbb{K}^p})^{r_i}$ est stable par u.

9 Soit $x\in\mathrm{C}_i$. Alors, par définition de C_i,

$$(u_{\mathrm{C}_i}-\lambda_i\operatorname{Id}_{\mathrm{C}_i})^{r_i}(x)=(u-\lambda_i\operatorname{Id}_{\mathbb{K}^p})^{r_i}(x)=0$$

Ainsi $(u_{\mathrm{C}_i}-\lambda_i\operatorname{Id}_{\mathrm{C}_i})^{r_i}=0$ donc $u_{\mathrm{C}_i}-\lambda_i\operatorname{Id}_{\mathrm{C}_i}$ est nilpotent.

10 Soit $i\in[\![1,k]\!]$. Comme $u_{\mathrm{C}_i}-\lambda_i\operatorname{Id}_{\mathrm{C}_i}$ est nilpotent, sa matrice N_i dans une base $\mathcal{B}_i$ de C_i est nilpotente. La matrice de u_{C_i} dans cette base $\mathcal{B}_i$ est alors $\lambda_i\mathrm{I}_{p_i}+\mathrm{N}_i$. Comme $\mathbb{K}^p=\bigoplus_{i=1}^k\mathrm{C}_i$, la concaténation des bases $\mathcal{B}_i$ est une base de $\mathbb{K}^p$. Dans cette base, la matrice de u est alors $\operatorname{diag}(\lambda_1\mathrm{I}_{p_1}+\mathrm{N}_1,\dots,\lambda_k\mathrm{I}_{p_k}+\mathrm{N}_k)$. La matrice A de ce même endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$ est donc semblable à $\operatorname{diag}(\lambda_1\mathrm{I}_{p_1}+\mathrm{N}_1,\dots,\lambda_k\mathrm{I}_{p_k}+\mathrm{N}_k)$. Il existe donc $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que

$$\mathrm{A}=\mathrm{P}\operatorname{diag}(\lambda_1\mathrm{I}_{p_1}+\mathrm{N}_1,\dots,\lambda_k\mathrm{I}_{p_k}+\mathrm{N}_k)\mathrm{P}^{-1}$$

11 Supposons que pour tout $i\in[\![1,k]\!]$, $\lambda_i\mathrm{I}_{p_i}+\mathrm{N}_i$ est TP$\mathbb{K}$. Soit $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$. Il existe donc $\mathrm{B}_i\in\mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$ telle que $\lambda_i\mathrm{I}_{p_i}+\mathrm{N}_i=\mathrm{B}_i^n$. Posons $\mathrm{B}=\operatorname{diag}(\mathrm{B}_1,\dots,\mathrm{B}_k)$. Alors

$$\operatorname{diag}(\lambda_1\mathrm{I}_{p_1}+\mathrm{N}_1,\dots,\lambda_k\mathrm{I}_{p_k}+\mathrm{N}_k)\mathrm{P}^{-1}=\operatorname{diag}(\mathrm{B}_1^n,\dots,\mathrm{B}_k^n)=\mathrm{B}^n$$

puis

$$\mathrm{A}=\mathrm{P}\mathrm{B}^n\mathrm{P}^{-1}=(\mathrm{P}\mathrm{B}\mathrm{P}^{-1})^n$$

Ainsi A est-elle même TP$\mathbb{K}$.

12 **12.a** Effectuons la division euclidienne de V par X^p. Il existe donc $\mathrm{Q}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{R}\in\mathbb{R}_{p-1}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{V}=\mathrm{X}^p\mathrm{Q}+\mathrm{R}$. Comme Q est continue en 0, $\mathrm{Q}(x)\underset{x\to0}{=}\mathrm{Q}(0)+o(1)$ puis $x^p\mathrm{Q}(x)\underset{x\to0}{=}\mathrm{Q}(0)x^p+o(x^p)$ et enfin, $\mathrm{R}(x)\underset{x\to0}{=}-\mathrm{Q}(0)x^p+o(x^p)$ car $\mathrm{V}(x)\underset{x\to0}{=}o(x^p)$ par hypotèse. En notant $\mathrm{R}=\sum_{k=0}^{p-1}a_k\mathrm{X}^k$, on a donc

$$\sum_{k=0}^{p-1}a_kx^k\underset{x\to0}{=}-\mathrm{Q}(0)x^p+o(x^p)$$

Par unicité du développement limité, tous les a_k sont nuls. Ainsi $\mathrm{R}=0$ puis $\mathrm{V}=\mathrm{X}^p\mathrm{Q}$.

12.b En considérant le développement limité à l'ordre p de $(1+x)^{\frac{1}{n}}$ au voisinage de 0, il existe $\mathrm{U}\in\mathbb{R}_p[\mathrm{X}]$ tel que

$$(1+x)^{\frac{1}{n}}\underset{x\to0}{=}\mathrm{U}(x)+o(x^p)$$

On en déduit que

$$1+x\underset{x\to0}{=}\mathrm{U}(x)^n+o(x^p)$$

12.c Comme $1+x-\mathrm{U}(x)^n\underset{x\to0}{=}o(x^p)$, il existe $\mathrm{Q}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $1+\mathrm{X}-\mathrm{U}^n=\mathrm{X}^p\mathrm{Q}$ i.e. $1+\mathrm{X}=\mathrm{U}^n+\mathrm{X}^p\mathrm{Q}$.

13 13.a Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On choisit U et Q comme à la question précédente. On a vu précédemment que $N^p = 0$ car N est nilpotente. En appliquant l'égalité polynomiale $1 + X = U^n + X^p Q$ en N, on obtient

$$I_p + N = U(N)^n + N^p Q(N) = U(N)^n$$

Ceci prouve que $I_p + N$ est bien TP$\mathbb{K}$.

13.b Supposons que λ est TP$\mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe donc $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda = \mu^n$. Remarquons que N/λ est également nilpotente puisque $(N/\lambda)^p = N^p/\lambda^p = 0$. D'après la question précédente, il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $I_p + \frac{1}{\lambda}N = B^n$. Mais alors

$$\lambda I_p + N = \lambda(I_p + N/\lambda) = \mu^n B^n = (\mu B)^n$$

Ceci prouve que $\lambda I_p + N$ est également TP$\mathbb{K}$.

14 14.a Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Alors toutes ses valeurs propres sont non nulles et son polynôme caractéristique est scindé. En reprenant les notations de la partie précédente, $\lambda_i \operatorname{Id}_{p_i} + N_i$ est TP$\mathbb{C}$ d'après la question précédente. D'après la question **11**, A est-elle même TP$\mathbb{C}$.

14.b Si $p = 1$, on a vu précédemment que $T_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Ainsi toute «matrice» de $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ est TP$\mathbb{C}$.
Supposons $p \geq 2$. D'après la question **6.b**, la seule matrice TP$\mathbb{C}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est la matrice nulle. Or il existe des matrices nilpotentes non nulles dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Il suffit par exemple de considérer la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient «en haut à droite».

15 On peut par exemple considérer la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En posant $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A = \operatorname{diag}(0, I_3 + N)$. On remarque que N est clairement nilpotente (triangulaire de diagonale nulle).
A n'est pas inversible puisque $\operatorname{rg}(A) = 3 < 4$. A n'est pas diagonalisable car sinon, $I_3 + N$ le serait également et enfini N le serait aussi. Puisque N est nilpotente, elle serait nulle, ce qui n'est pas le cas.
Enfin, le «bloc» 0 est TP$\mathbb{R}$ car $0 \in T_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ et le bloc $I_3 + N$ est TP$\mathbb{R}$ car il est unipotent. D'après la question **11**, A est TP$\mathbb{R}$.