Devoir à la maison n°07

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – D'après E3A PC 2021

On identifie dans ce poblème les polynômes à leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathrm{E}_n = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ où n est un entier naturel non nul.

1 On associe à $f \in \mathrm{E}_n$ l'application $\mathrm{L}(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{L}(f)(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} f(t)e^{t}\ \mathrm{d}t$$

1.a Justifier que l'application L est bien définie.

1.b Calculer $\mathrm{L}(1)$.

1.c Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathrm{L}(\mathrm{X}^{k+1}) = \mathrm{X}^{k+1} - (k+1)\mathrm{L}(\mathrm{X}^k)$.

1.d En déduire que L est un endomorphisme de E_n.

2 **2.a** Soient $f \in \mathrm{E}_n$ et $g = \mathrm{L}(f)$. Montrer que g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y = f$.

2.b En déduire $\mathrm{Ker}(\mathrm{L})$ puis que L est un automorphisme de E_n.

3 Soient λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.

3.a Justifier que $\lambda \neq 0$.

3.b Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E})\colon\ \lambda y' + (\lambda - 1)y = 0$.

3.c Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.

3.d Déterminer les solutions polynomiales de $(\mathcal{E})$.

3.e En déduire les valeurs propres de L et les sous-espaces propres associés.

3.f L'endomorphisme L est-il diagonalisable ?

4 On note $\mathrm{D}\colon\ \mathrm{P} \in \mathrm{E}_n \mapsto \mathrm{P}'$ et $\mathrm{Id}\colon\ \mathrm{P} \in \mathrm{E}_n \mapsto \mathrm{P}$.

4.a Comparer L^{-1} et $\mathrm{D} + \mathrm{Id}$.

4.b Déterminer la matrice M de L^{-1} dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E_n.

4.c Déterminer les valeurs propres de L^{-1}. Retrouver alors les valeurs propres de L.