

# DEVOIR À LA MAISON N°15

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1 – Polynômes de Bernoulli et fonction $\Gamma$

### Partie I – Polynômes de Bernoulli

On admet l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}[X]$  vérifiant les trois conditions suivantes :

$$B_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, B'_n = B_{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(t) dt = 0$$

On pose également  $b_n = B_n(0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Calculer  $B_1$  et  $B_2$ . En déduire  $b_1$  et  $b_2$ .
2. Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $B_n(0) = B_n(1)$ .
3. On pose pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = (-1)^n B_n(1 - X)$ . Montrer que la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie les trois mêmes conditions que celles définissant la suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n = (-1)^n B_n(1 - X)$ .
4. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1) = 0$ .

5. A l'aide de la formule de Taylor, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n = \sum_{k=0}^n \frac{b_{n-k}}{k!} X^k$ .

6. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{b_k}{(2n+2-k)!}$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_{2n} = \frac{1}{(2n+1)!} - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{2k}}{(2n+2-2k)!}$$

7. Calculer  $b_4$ .

### Partie II – Lemme de Riemann-Lebesgue et noyau de Dirichlet

8. Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ . A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \sin(\lambda t) dt = 0$$

9. Montrer que  $\varphi : t \in ]0, 1[ \mapsto \frac{t(1-t)}{\sin(\pi t)}$  peut se prolonger en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ .

10. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que

$$\forall t \in ]0, 1[, \sum_{k=1}^p \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2p+1)\pi t)}{2 \sin(\pi t)} - \frac{1}{2}$$

11. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(0) = P(1) = 0$ . Montrer que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p \int_0^1 P(t) \cos(2k\pi t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 P(t) dt$$

### Partie III – Fonction $\zeta$ de Riemann

On note pour tout réel  $\alpha > 1$ ,  $\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ .

On pose pour  $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,

$$I_{k,n} = \int_0^1 B_{2n}(t) \cos(2k\pi t) dt$$

12. Calculer  $I_{k,1}$ .

13. Déterminer une relation entre  $I_{k,n}$  et  $I_{k,n-1}$  valide pour tout entier  $n \geq 2$ . En déduire que

$$\forall (k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, I_{k,n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}}$$

14. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \cdot (2\pi)^{2n} b_{2n}$$

15. Calculer  $\zeta(2)$  et  $\zeta(4)$ .