Devoir surveillé n°06

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

Partie I – Deux suites

1. On va prouver par récurrence que $a_n \geq 1$ et $b_n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation Tout d'abord $a_1 = 1 \geq 1$ et $b_0 = 0 \geq 0$.

Hérédité Supposons que $a_n \geq 1$ et $b_n \geq n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $a_{n+1} = a_n + 2b_b \geq 1 + 2n \geq 1$ et $b_{n+1} = a_n + b_n \geq 1 + n$.

Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 1$ et $b_n \geq n$.

Notamment, $b_n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. On est obligé de choisir une hypothèse de récurrence faisant intervenir à la fois a_n et b_n car les relations de récurrence de l'énoncé mêlent ces deux suites.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 = (a_n + 2b_n)^2 - 2(a_n + b_n)^2 = -(a_n^2 - 2b_n^2)$$

La suite $(a_n^2 - 2b_n^2)$ est donc géométrique de raison -1. Puisque $a_0^2 - 2b_0^2 = 1$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente,

$$|a_n^2 - 2b_n^2| = 1$$

De plus, on va vu que $b_n \geq n \geq 1$ donc $b_n^2 > 0$. Ainsi

$$\left|\frac{a_n^2}{b_n^2} - 2\right| = \frac{1}{b_n^2}$$

Par identité remarquable,

$$\frac{a_n^2}{b_n^2} - 2 = \left(\frac{a_b}{b_n} - \sqrt{2}\right)\left(\frac{a_b}{b_n} + \sqrt{2}\right)$$

Ainsi

$$\left|\frac{a_b}{b_n} - \sqrt{2}\right| \cdot \left|\frac{a_b}{b_n} + \sqrt{2}\right| = \frac{1}{b_n^2}$$

Mais comme $a_n \geq 1$ et $b_n \geq n \geq 1$ d'après la première question, a_n et b_n sont positifs de sorte que

$$\left|\frac{a_b}{b_n} + \sqrt{2}\right| = \frac{a_b}{b_n} + \sqrt{2} \geq \sqrt{2} \geq 1$$

On en déduit alors que

$$\left|\frac{a_b}{b_n} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{b_n^2}$$

4. D'après la première question, $b_n \geq n$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left|\frac{a_b}{b_n} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sqrt{2} - \frac{1}{n^2} \leq \frac{a_b}{b_n} \leq \sqrt{2} + \frac{1}{n^2}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, le théorème des gendarmes montre alors que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2b_{n+1} = a_{n+1} + 2(a_n + b_n) = a_{n+1} + 2a_n + 2b_n = a_{n+1} + 2a_n + a_{n+1} - a_n = 2a_{n+1} + a_n$$
$$b_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + 2b_n + b_{n+1} = b_{n+1} - b_n + 2b_n + b_{n+1} = 2b_{n+1} + b_n$$

6. Le polynôme caractéristique associé à la relation de récurrence suivie par les suites (a_n) et (b_n) est $X^2 - 2X - 1$. Ses racines sont $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$. Il existe donc des réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \alpha(1+\sqrt{2})^n + \beta(1-\sqrt{2})^n$$
$$b_n = \gamma(1+\sqrt{2})^n + \delta(1-\sqrt{2})^n$$

On sait que $a_0 = 1$ et $a_1 = a_0 + 2b_0 = 1$ donc $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha(1+\sqrt{2}) + \beta(1-\sqrt{2}) = 1$ puis $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.
De même, on sait que $b_0 = 0$ et $b_1 = a_0 + b_0 = 1$ donc $\gamma + \delta = 0$ et $\gamma(1+\sqrt{2}) + \delta(1-\sqrt{2}) = 1$ puis $\gamma = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\delta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^n$$
$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n$$

7. Par commodité, posons $\varphi = 1 + \sqrt{2}$ et $\psi = 1 - \sqrt{2}$. Ainsi

$$a_n = \frac{1}{2}\varphi^n + \frac{1}{2}\psi^n$$
$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\varphi^n - \frac{1}{2\sqrt{2}}\psi^n$$

Puisque $\varphi > 1$, $\lim_{n\to+\infty} \varphi^n = +\infty$ et puisque $|\psi| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \psi^n = 0$. Par conséquent,

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\varphi^n \qquad \text{et} \qquad b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2}}\varphi^n$$

Finalement

$$\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2}\varphi^n}{\frac{1}{2\sqrt{2}}\varphi^n} = \sqrt{2}$$

de sorte que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$.

8. Remarquons que

$$\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2} = \frac{a_n - b_n\sqrt{2}}{b_n} = \frac{\psi^n}{b_n}$$

On a déjà vu que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2}}\psi^n$ donc

$$\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{2}\left(\frac{\psi}{\phi}\right)^n$$

Or

$$\frac{\psi}{\phi} = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{2})^2}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = 2\sqrt{2} - 3$$

donc on obtient bien

$$\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{2}\left(2\sqrt{2} - 3\right)^n$$

Partie II – Algorithme de Babylone

9. Récurrence évidente.

10. Tout d'abord, $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n - \sqrt{2} = \frac{u_{n-1}}{2} + \frac{1}{u_{n-1}} - \sqrt{2} = \frac{u_{n-1}^2 - 2u_{n-1}\sqrt{2} + 2}{2u_{n-1}} = \frac{(u_{n-1} - \sqrt{2})^2}{2u_{n-1}} \geq 0$$

La suite (u_n) est donc bien minorée par $\sqrt{2}$.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} - \frac{u_n}{2} = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}$$

Or d'après la question précédente, $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ i.e. (u_n) est décroissante.

12. Comme (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$, elle converge vers une limite $\ell \geq \sqrt{2} > 0$. On a également $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et, comme $\ell \neq 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell}$. Par unicité de la limite, $\ell = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell}$ et donc $\ell^2 = 2$ et enfin $\ell = \sqrt{2}$ car $\ell > 0$. Finalement, (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_{n+1} + \sqrt{2}} = \frac{\frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} - \sqrt{2}}{\frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} + \sqrt{2}} = \frac{u_n^2 + 2 - 2u_n\sqrt{2}}{u_n^2 + 2 + 2u_n\sqrt{2}} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{(u_n + \sqrt{2})^2} = v_n^2$$

On en déduit par récurrence que $v_n = v_0^{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus,

$$v_0 = \frac{u_0 - \sqrt{2}}{u_0 + \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = (3 - 2\sqrt{2})^{2^n}$$

14. Remarquons que $u_n - \sqrt{2} = (u_n + \sqrt{2})v_n$. Comme la suite $(u_n + \sqrt{2})$ converge, elle est bornée. On en déduit que $u_n - \sqrt{2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ i.e. $u_n - \sqrt{2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\mathrm{K}^{2^n}\right)$ avec $\mathrm{K} = 3 - 2\sqrt{2} \in [0, 1[$.

15. On rappelle que

$$\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{2}\left(2\sqrt{2} - 3\right)^n$$

et que

$$u_n - \sqrt{2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\mathrm{K}^{2^n}\right)$$

Mais en posant $q = 3 - 2\sqrt{2}$, on a $\mathrm{K}^{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o(q^n)$. En effet, par croissances comparées, $n \underset{n\to+\infty}{=} o(2^n)$ de sorte que

$$\ln\left(\frac{\mathrm{K}^{2^n}}{q^n}\right) = 2^n \ln(\mathrm{K}) - n\ln(q) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n \ln(\mathrm{K})$$

Mais comme $\mathrm{K} \in]0, 1[$, $\ln(\mathrm{K}) < 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} 2^n \ln(\mathrm{K}) = -\infty$ puis

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{\mathrm{K}^{2^n}}{q^n}\right) = -\infty$$

et enfin

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{K}^{2^n}}{q^n} = 0$$

On a donc bien $\mathrm{K}^{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o(q^n)$ et alors

$$u_n - \sqrt{2} \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2})$$

La suite (u_n) converge donc plus rapidement vers $\sqrt{2}$ que la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$.

Solution 1

1. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim_{0^+} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$ donc f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$, c'est-à-dire de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

2. f^{-1} est de même sens de variation que f, c'est-à-dire strictement croissante. Puisque $\lim_{0^+} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, $\lim_{-\infty} f^{-1} = 0^+$ et $\lim_{+\infty} f^{-1} = +\infty$.

   Remarque. Plus rigoureusement, f^{-1} est strictement croissante donc elle admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$. De plus,

$$\lim_{+\infty} f^{-1} = \inf_{\mathbb{R}} f^{-1} = 0$$
$$\lim_{+\infty} f^{-1} = \sup_{\mathbb{R}} f^{-1} = +\infty$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors n admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}_+^*$ car f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. La question précédente montre en fait que $x_n = f^{-1}(n)$. Puisque f^{-1} est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{-1}(n) \leq f^{-1}(n+1)$ i.e. $x_n \leq x_{n+1}$. La suite (x_n) est donc croissante.

5. Puisque $\lim_{+\infty} f^{-1} = +\infty$ et que $x_n = f^{-1}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n = x_n + \ln(x_n)$. Or $\ln(u) \underset{u\to+\infty}{=} o(u)$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ donc $\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(x_n)$. Ainsi $x_n + \ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{=} x_n + o(x_n)$ ou encore $x_n + \ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$. Finalement, $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$x_{n+1} - x_n = (n + 1 - \ln(x_{n+1})) - (n - \ln(x_n)) = 1 - \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$$

   Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc $\frac{x_{n+1}}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ puis $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = 0$. Finalement, $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 1$.

8. **a.** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Remarquons que $n - x_n = \ln(x_n)$ donc

$$u_n - 1 = \frac{\ln(x_n)}{\ln(n)} - 1 = \frac{\ln(x_n) - \ln(n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(x_n/n)}{\ln(n)}$$

   b. On sait que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 1$ puis $\lim_{n\to+\infty} \ln(x_n/n) = 0$. Par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$. Par opérations, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n/n)}{\ln(n)} = 0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n - 1 = 0$ puis $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

   c. La question précédente montre que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1)$. On en déduit successivement que

$$\frac{n - x_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1)$$

   puis que

$$n - x_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + o(\ln(n))$$

   ensuite que

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + o(\ln(n))$$

   et enfin que

$$\frac{x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

   Puisque $\ln(1 + u) \underset{u\to0}{=} u + o(u)$ et que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$,

$$\ln(x_n/n) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

   ou encore que

$$\ln(x_n/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n}$$

   Ainsi

$$1 - u_n = -\frac{\ln(x_n/n)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

9. Puisque $u_n = \frac{n-x_n}{\ln(n)}$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, la question précédente montre que

$$1 - \frac{n-x_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On déduit successivement que

$$\frac{x_n - n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} -1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

puis que

$$x_n - n \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

et enfin que

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Solution 2

---

1. Soit $x \in [0,1]$. Alors $\sqrt{x} \in [0,1]$ donc $f(x) = 1 - \sqrt{x} \in [0,1]$.

2. On procède par récurrence. Tout d'abord, $u_0 \in [0,1]$. Supposons que $u_n \in [0,1]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$ d'après la question précédente.

3. f est clairement décroissante sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. On en déduit que $f \circ f$ est croissante sur $[0,1]$.

4. Pour $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
& f(x) = x \\
\iff\quad & \sqrt{x} = 1 - x \\
\iff\quad & x = (1-x)^2 && \text{car les membres de l'égalité précédente sont positifs} \\
\iff\quad & x^2 - 3x + 1 = 0
\end{aligned}$$

Les racines du trinôme précédent sont $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. La première racine appartient à l'intervalle $[0,1]$ puisque $1 \leq \sqrt{5} \leq 3$ mais la seconde racine n'appartient pas à l'intervalle $[0,1]$ car $\sqrt{5} > 1$.
Finalement, l'unique point fixe de f sur $[0,1]$ est $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

5. Puisque $20 \leq 25$, $5 \leq \frac{25}{4}$ puis $\sqrt{5} \leq \frac{5}{2}$ puis $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \geq \frac{1}{4} = u_0$.

6. On procède par récurrence. Tout d'abord, $u_0 \leq \alpha$. Supposons $u_{2n} \leq \alpha$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors par croissance de $f \circ f$ sur $[0,1]$,

$$f \circ f(u_{2n}) \leq f \circ f(\alpha)$$

c'est-à-dire

$$u_{2n+2} \leq \alpha$$

On en déduit que $u_{2n} \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. On a $u_0 = \frac{1}{4}$ puis $u_1 = \frac{1}{2}$ et enfin $u_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Puisque $8 \leq 9$, $\frac{1}{2} \leq \frac{9}{16}$ puis $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{3}{4}$ et enfin $u_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{4} = u_0$. Supposons maintenant que $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de $f \circ f$, $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) \leq f \circ f(u_{2n+2}) = u_{2n+4}$. Par récurrence, on a donc $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi (u_{2n}) est croissante. La suite (u_{2n}) est croissante et majorée par α donc elle converge.

8. Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
& & f \circ f(x) &= x \\
&\iff & 1 - \sqrt{1-\sqrt{x}} &= x \\
&\iff & 1 - x &= \sqrt{1-\sqrt{x}} \\
&\iff & (1-x)^2 &= 1 - \sqrt{x} && \text{car les membres de l'égalité précédente sont positifs} \\
&\iff & \sqrt{x} &= 1 - (1-x)^2 \\
&\iff & \sqrt{x} &= x(2-x) \\
&\iff & x &= x^2(2-x)^2 && \text{car les membres de l'égalité précédente sont positifs} \\
&\iff & x^2(2-x)^2 - x &= 0 \\
&\iff & x\left(x(2-x)^2 - 1\right) &= 0 \\
&\iff & x(x^3 - 4x^2 + 4x - 1) &= 0 \\
&\iff & x(x-1)(x^2 - 3x + 1) &= 0
\end{aligned}$$

Or on a vu précédemment que α est la seule racine du trinôme $x^2 - 3x + 1$ dans l'intervalle $[0,1]$. On en déduit que les points fixes de $f \circ f$ sur $[0,1]$ sont 0, α et 1.

9. f est continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ donc $f \circ f$ est continue sur $[0,1]$. De plus, $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ et $u_{2n} \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite (u_{2n}) converge vers un point fixe de $f \circ f$ sur $[0,1]$, à savoir 0, α ou 1.
Or (u_{2n}) est croissante et majorée par α donc $u_0 \leq u_{2n} \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sa limite ℓ vérifie donc $u_0 \leq \ell \leq \alpha$. A fortiori, $0 < \ell \leq \alpha$. Puisque ℓ est un point fixe de $f \circ f$, $\ell = \alpha$.
Enfin, $u_{2n+1} = f(u_{2n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f est continue sur $[0,1]$ donc (u_{2n+1}) converge vers $f(\alpha) = \alpha$.
Puisque les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes les deux vers α, la suite (u_n) converge également vers α.