Devoir surveillé n°06

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

Partie I –

I.1 **I.1.a** Les points P, Q et R ont pour coordonnées respectives $(1,0)$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. On trouve sans difficulté les équations des droites suivantes :

$$(\mathrm{PQ}) :\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \qquad (\mathrm{PR}) :\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \qquad (\mathrm{QR}) :\ x = -\frac{1}{2}$$

I.1.b Le point d'affixe $x+iy$ i.e. de coordonnées (x,y) appartient à T si et seulement si

$$x > -\frac{1}{2} \qquad y < -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \qquad y > \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$$

c'est-à-dire

$$2x+1>0 \qquad x+\sqrt{3}y-1<0 \qquad x-\sqrt{3}y-1<0$$

I.2 **I.2.a** On a clairement $\mathrm{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc 1 est valeur propre de A.

I.2.b Comme A est trigonalisable, sa trace est la somme de ses valeurs propres i.e. $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 1+\lambda+\overline{\lambda}$. Les valeurs propres de A^2 sont 1, λ^2 et $\overline{\lambda}^2$ donc $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2) = 1+\lambda^2+\overline{\lambda}^2$.
Puisque $\lambda = a+ib$ et $\overline{\lambda} = a-ib$,

$$\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 1+2a \qquad \mathrm{tr}(\mathrm{A}^2) = 1+2(a^2-b^2)$$

I.2.c Les coefficients de A sont tous strictement positifs donc $\mathrm{tr}(\mathrm{A})>0$.
Pour la même raison

$$\begin{aligned}
(\mathrm{A}^2)_{1,1} &= a_{1,1}^2 + a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,3}a_{3,1} > a_{1,1}^2\\
(\mathrm{A}^2)_{2,2} &= a_{2,1}a_{1,2} + a_{2,2}^2 + a_{2,3}a_{3,2} > a_{2,2}^2\\
(\mathrm{A}^2)_{3,3} &= a_{3,1}a_{1,3} + a_{3,2}a_{2,3} + a_{3,3}^2 > a_{3,3}^2
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2) > a_{1,1}^2+a_{2,2}^2+a_{3,3}^2$.

I.2.d D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\mathrm{tr}(\mathrm{A})^2 = \left(\sum_{k=1}^3 1\cdot a_{k,k}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^3 1^2\right)\left(\sum_{k=1}^3 a_{k,k}^2\right) = 3(a_{1,1}^2+a_{2,2}^2+a_{3,3}^2) < 3\,\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)$$

I.2.e D'une part,

$$1 + 2a = \mathrm{tr}(\mathrm{A}) > 0$$

D'autre part,

$$0 < 3\,\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2) - \mathrm{tr}(\mathrm{A})^2 = 2\left(1 + a^2 - 3b^2 - 2a\right) = 2(a - \sqrt{3}b - 1)(a + \sqrt{3}b - 1)$$

I.2.f Remarquons que $a - \sqrt{3}b - 1$ et $a + \sqrt{3}b - 1$ sont de même signe. Si l'on avait $a - \sqrt{3}b - 1 > 0$ et $a + \sqrt{3}b - 1 > 0$, on aurait $a > 1$ en additionant ces inégalités. Il s'ensuivrait que $|\lambda|^2 = a^2 + b^2 > 1$, ce qui n'est pas. Ainsi $a - \sqrt{3}b - 1 < 0$ et $a + \sqrt{3}b - 1 < 0$. D'après la question **I.1.b**, le point d'affixe λ appartient à T.

I.3 **I.3.a** D'après une relation d'Euler, $\lambda + \overline{\lambda} = 2r\cos(\theta)$ donc $\alpha = \frac{1+\lambda+\overline{\lambda}}{3}$.
On remarque que $j^2 = \overline{j}$ donc, toujours d'après une relation d'Euler,

$$j\lambda + j^2\overline{\lambda} = j\lambda + \overline{j\lambda} = re^{i\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)} + re^{-i\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

puis $\beta = \frac{1+j\lambda+j^2\overline{\lambda}}{3}$.
Enfin,

$$j^2\lambda + j\overline{\lambda} = \overline{j}\lambda + \overline{\overline{j}\lambda} = re^{i\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)} + re^{-i\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)} = 2\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

puis $\gamma = \frac{1+j^2\lambda+j\overline{\lambda}}{3}$.

I.3.b Puisque $1 + j + \overline{j} = 1 + j + j^2 = \frac{j^3-1}{j-1} = 0$, il est clair qye $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

I.3.c Un calcul immédiat montre que $\mathrm{J}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a clairement $\mathrm{A} = \alpha\mathrm{I}_3 + \beta\mathrm{J} + \gamma\mathrm{J}^2$.

I.3.d Un calcul immédiat donne $\chi_{\mathrm{J}} = \mathrm{X}^3 - 1$. Les valeurs propres de J sont les racines de $\mathrm{X}^3 - 1$, à savoir 1, j et j^2.

I.3.e Comme χ_{J} est scindé à racines simples, J est diagonalisable. Il existe donc $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{J} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}\left(\alpha\mathrm{I}_3 + \beta\mathrm{D} + \gamma\mathrm{D}^2\right)\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} \alpha+\beta+\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta j+\gamma j^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+\beta j^2+\gamma j \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$$

Les valeurs propres de A sont donc $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha+\beta j+\gamma j^2$ et $\alpha+\beta j^2+\gamma j$. En utilisant les expressions de α, β et γ trouvées à la question **I.3.a** et le fait que $1 + j + j^2 = 0$, on trouve

$$\alpha+\beta+\gamma = 1 \qquad \alpha+\beta j+\gamma j^2 = \overline{\lambda} \qquad \alpha+\beta j^2+\gamma j = \lambda$$

Les valeurs propres de A sont donc bien 1, λ et $\overline{\lambda}$.

Partie II –

II.1 Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$(\mathrm{AU})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

donc $\mathrm{AU} = \mathrm{U}$. Comme U n'est pas nul, 1 est bien valeur propre de A.

II.2 **II.2.a** **II.2.a.i** Comme $\det(\mathrm{B}) = 0$, B n'est pas inversible. Il existe donc $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $\mathrm{BX} = 0$.

II.2.a.ii On a notamment

$$0 = (\mathrm{BX})_k = \sum_{j=1}^{n} b_{k,j} x_j$$

et donc

$$b_{k,k} x_k = -\sum_{j \neq k} b_{k,j} x_j$$

Par inégalité triangulaire

$$|b_{k,k}||x_k| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}||x_j| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}||x_k|$$

Remarquons que $|x_k| > 0$ car sinon $0 \leq |x_i| \leq |x_k| = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ puis $\mathrm{X} = 0$, ce qui n'est pas. On en déduit donc que

$$|b_{k,k}| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}|$$

II.2.b Comme $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$, $\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) = (-1)^n \chi_{\mathrm{A}}(\lambda) = 0$. D'après la question précédente, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$|b_{k,k}| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}||x_j| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}|$$

c'est-à-dire

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j \neq k} |a_{k,j}|$$

Mais comme les $a_{k,j}$ sont positifs

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j \neq k} a_{k,j}$$

De plus, $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} = 1$ donc $\sum_{j \neq k} a_{k,j} = 1 - a_{k,k}$. Finalement,

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq 1 - a_{k,k}$$

Par inégalité triangulaire,

$$|\lambda| = |(a_{k,k} - \lambda) + a_{k,k}| \leq |a_{k,k} - \lambda| + |a_{k,k}| \leq 1 - a_{k,k} + a_{k,k} = 1$$

car $a_{k,k} > 0$.

II.2.c D'après la question précédente,

$$|a_{k,k} - e^{i\theta}| \leq 1 - a_{k,k}$$

puis

$$|a_{k,k} - e^{i\theta}|^2 \leq (1 - a_{k,k})^2$$

ou encore

$$(a_{k,k} - e^{i\theta})(a_{k,k} - e^{-i\theta}) \leq (1 - a_{k,k})^2$$

En développant, on obtient

$$a_{k,k}^2 - 2a_{k,k} \cos\theta + 1 \leq 1 - 2a_{k,k} + a_{k,k}^2$$

ou encore

$$a_{k,k} \cos\theta \geq a_{k,k}$$

Or $a_{k,k} > 0$ donc $\cos\theta \leq 1$. Mais $\cos\theta \leq 1$ donc $\cos\theta = 1$. Ainsi $\theta \equiv 0[2\pi]$ puis $\lambda = e^{i\theta} = 1$.

II.3 **II.3.a** Comme $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$, $\chi_{\mathrm{A}}(1) = \det(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = 0$ donc $\det((\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^\top) = 0$ ou encore $\det(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}^\top) = 0$. Par conséquent, $\chi_{\mathrm{A}^\top}(1) = 0$ et $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}^\top)$.
De plus, $\mathrm{rg}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) = \mathrm{rg}((\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)^\top) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}^\top - \mathrm{I}_n)$. D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{A}^\top - \mathrm{I}_n)$ i.e. $\dim \mathrm{E}_1(\mathrm{A}) = \dim \mathrm{E}_1(\mathrm{A}^\top)$.

II.3.b **II.3.b.i** Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(\mathrm{A}^\top \mathrm{V})_i = \mathrm{V}_i$ et donc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} v_j = v_i$$

Par inégalité triangulaire,

$$|v_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{j,i}||v_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}|v_j|$$

II.3.b.ii En additionnant ces inégalités,

$$\sum_{i=1}^{n}|v_i| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{j,i}|v_j| = \sum_{j=1}^{n}|v_j|\sum_{i=1}^{n}a_{j,i} = \sum_{j=1}^{n}|v_i|$$

En notant $S_i = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}|v_j|$, on a donc $|v_i| \leq S_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et $\sum_{i=1}^{n} S_i - |v_i| = 0$. Une somme de termes positifs,n'étant nulle que si chacun des termes est nul,

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ |v_i| = S_i = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}|v_j|$$

Ces égalités se traduisent par le fait que $A^{\mathsf{T}}|V| = |V|$.

II.3.b.iii Supposons qu'il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $|v_i| = 0$. Alors

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}|v_j| = |v_i| = 0$$

Comme il s'agit à nouveau d'une somme de termes positifs, on aurait $a_{j,i}|v_j| = 0$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ et donc $|v_j| = 0$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ car les $a_{j,i}$ ne sont pas nuls. Finalement, on aurait $V = 0n$ ce qui est exclus.

II.3.c D'après la question précédente, les y_i ne sont pas nuls. On peut donc considérer la matrice colonne $Z = X - \frac{x_1}{y_1}Y$ qui appartient encore à $E_1(A^{\mathsf{T}})$ (c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$). Par construction $z_1 = 0$, mais d'après la question précédente, $Z = 0$: si Z n'était pas nul, toutes ses composantes seraient non nulles. On en déduit que tous les vecteurs de $E_1(A^{\mathsf{T}})$ sont colinéaires à X i.e. $\dim E_1(A^{\mathsf{T}}) = 1$.
Soit V un vecteur non nul de $E_1(A^{\mathsf{T}})$. D'après la question précédente, $|V| \in E_1(A^{\mathsf{T}})$. Posons $\Omega = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}|v_i|}|V|$. A nouveau, $\Omega \in E_1(A^{\mathsf{T}})$. Par construction, $\sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1$. On a vu que $|v_i| > 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ donc $\omega_i > 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Supposons qu'il existe un vecteur Ω' vérifiant les mêmes conditions. Alors Ω' est colinéaire à Ω puisque $\dim E_1(A^{\mathsf{T}}) = 1$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Omega' = \lambda\Omega$. En fait, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ car les coordonnées de Ω' et Ω sont strictement positives. De plus,

$$1 = \sum_{i=1}^{n}\omega_i' = \lambda\sum_{i=1}^{n}\omega_i = \lambda$$

puis $\Omega' = \Omega$.
Enfin, puisque $A^{\mathsf{T}}\Omega = \Omega$,

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\omega_j = \omega_i$$

II.3.d On a donc montré que

- les valeurs propres de A sont de module inférieur ou égal à 1 ;
- la seule valeur propre de A de module 1 est 1 ;
- $E_1(A)$ est engendré par $U = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$;
- les valeurs propres de A^{T} sont de module inférieur ou égal à 1 ;
- la seule valeur propre de A^{T} de module 1 est 1 ;
- aucune coordonnée d'un vecteur propre de A^{T} associé à la valeur propre 1 n'est nulle ;
- il existe un vecteur propre de A^{T} associé à la valeur propre 1 dont les coordonnées sont strictement positives et de somme 1.

II.4 Montrons que N est une norme.

Positivité Comme les ω_i sont positifs, N est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Homogénéité Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Alors

$$N(\lambda X) = \sum_{i=1}^{n}\omega_i|\lambda x_i| = |\lambda|\sum_{i=1}^{n}\omega_i|x_i| = |\lambda|N(x)$$

Séparation Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $N(X) = 0$. Alors $\sum_{i=1}^n \omega_i|\lambda x_i| = 0$. Mais comme il s'agit d'une somme de termes positifs, $\omega_i|x_i| = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Les ω_i ne sont pas nuls donc $x_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ i.e. $X = 0$.

Inégalité triangulaire Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2$. Alors, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$

$$N(X+Y) = \sum_{i=1}^n \omega_i|x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n \omega_i\left(|x_i| + |y_i|\right) = N(X) + N(Y)$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Alors, par inégalité triangulaire,

$$N(AX) = \sum_{i=1}^n \omega_i \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{i=1}^n \omega_i \sum_{j=1}^n a_{i,j}|x_j| = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j}\omega_i\right)|x_j|$$

Mais on a vu à la question **II.3.c** que

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \sum_{i=1}^n a_{i,j}\omega_i = \omega_j$$

de sorte que

$$N(AX) \leq \sum_{j=1}^n \omega_j|x_j| = N(X)$$

En particulier, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et X un vecteur propre associé. Alors $N(AX) \leq N(X)$ donne $|\lambda|N(X) \leq N(X)$ puis $|\lambda| \leq 1$ car $N(X) > 0$ (X n'est pas nul en tant que vecteur propre).

II.5 **II.5.a** Remarquons que $\Phi(X) = \Omega^\top X$. Ainsi

$$\Phi(AX) = \Omega^\top AX = (A^\top\Omega)^\top X$$

Or $\Omega \in E_1(A^\top)$, donc $A^\top\Omega = \Omega$ puis $\Phi(AX) = \Omega^\top X = \Phi(X)$.

II.5.b $E_1(A) = \mathrm{vect}(U)$ est une droite et $\mathrm{Ker}\,\Phi$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ en tant que noyau d'une forme linéaire non nulle. Pour montrer que $E_1(A)$ et $\mathrm{Ker}\,\Phi$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, il suffit donc de montrer que $U \notin \mathrm{Ker}\,\Phi$. Or $\Phi(U) = \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \neq 0$ donc $U \notin \mathrm{Ker}\,\Phi$. On en déduit que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \mathrm{Ker}\,\Phi$.

II.5.c D'après la question **II.5.a**,

$$\Phi(X) = \Phi(AX) = \Phi(\lambda X) = \lambda\Phi(X)$$

Or $\lambda \neq 1$ donc $\Phi(X) = 0$ i.e. $X \in \mathrm{Ker}\,\Phi$.

II.5.d Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A et ϕ la forme linéaire canoniquement associée à Φ. D'après ce qui précède, $\phi \circ u = \phi$ et $\mathbb{C}^n = E_1(u) \oplus \mathrm{Ker}\,\phi$. L'égalité $\phi \circ u = \phi$ donne notamment $\mathrm{Ker}\,\phi \circ u = \mathrm{Ker}\,\phi$ de sorte que $\mathrm{Ker}\,\phi$ est stable par u. Dans une base adaptée à la décomposition en somme directe $\mathbb{C}^n = E_1(u) \oplus \mathrm{Ker}\,\phi$, la matrice de u est donc $\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ avec $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.

On en déduit que $\chi_A = \chi_u = (X - \lambda)\chi_B$. Si 1 était racine de χ_B, 1 serait valeur propre de l'endomorphisme $u_{|\,\mathrm{Ker}\,\varphi}$ de $\mathrm{Ker}\,\varphi$ induit par u. Notamment $u_{|\,\mathrm{Ker}\,\varphi}$ admettrait un vecteur propre $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ associé à la valeur propre 1. Ce vecteur x serait également un vecteur propre de u associée à la même valeur propre 1. On aurait donc $x \in E_1(u) \cap \mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$, ce qui contredit que x est un vecteur propre. Ainsi 1 n'est pas racine de χ_B : 1 est donc une racine simple de χ_A i.e. la multiplicité de la valeur propre de 1 dans χ_A vaut 1.