Interrogation écrite n°11

NOM : Prénom : Note :

1. Soit $p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, -x - y + z, -x - 2y + 2z) \end{array} \right.$. On admet que $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
   (a) Montrer que p est un projecteur.

   (b) Donner sans justification des bases de l'image et du noyau de p.

   (c) Déterminer le rang de p.

2. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Quelles inclusions ou égalités existe-il *toujours* entre les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(g \circ f)$, $\mathrm{Ker}(g \circ f)$, $\mathrm{Im}\, g$, $\mathrm{Ker}\, g$, $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Ker}\, f$? On justifiera ses réponses.

3. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer avec soin que $g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

4. On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble H des fonctions $f \in E$ telles que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$ est un hyperplan de E.

5. Soit $s : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(-X) \end{array} \right.$. On admet que s est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que s est une symétrie. Préciser par rapport à quel sous-espace vectoriel F et parallèlement à quel sous-espace vectoriel G.