DEVOIR SURVEILLÉ N°07

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

EXERCICE 1.

Soient m et n des entiers naturels non nuls. On pose $G = \left\{z_1 z_2, (z_1, z_2) \in \mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n\right\}$.

1. *Dans cette question uniquement*, on pose $m = 4$ et $n = 6$. Déterminer les éléments et le cardinal de $\mathbb{U}_m$, $\mathbb{U}_n$, $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$ et G.
2. Montrer que $\mathbb{U}_{m\wedge n} \subset \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$.
3. A l'aide d'une relation de Bézout entre m et n, montrer que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_{m\wedge n}$.
4. Montrer que $G \subset \mathbb{U}_{m\vee n}$.
5. A l'aide d'une relation de Bézout entre m et n, montrer que $\mathbb{U}_{m\vee n} \subset G$.

EXERCICE 2.

1. Soient a un entier strictement supérieur à 1 et n un entier naturel non nul. On suppose que $a^n + 1$ est un nombre premier.
   a. Montrer que a est pair.
   b. Soit m un diviseur impair positif de n. Il existe alors $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = km$. Montrer que $a^k + 1$ divise $a^n + 1$ puis que $m = 1$.
   c. Que peut-on en déduire sur n ?
2. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$.
   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$.
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k$.
   c. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m < n$. Montrer que $F_m \wedge F_n = 1$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et p un nombre premier divisant F_n. On considère l'ensemble
$$A = \left\{k \in \mathbb{N}^*,\ 2^k \equiv 1[p]\right\}$$
   a. Montrer que $2^{n+1} \in A$.
   b. Justifier que A admet un minimum que l'on notera m.
   c. En écrivant la division euclidienne de 2^{n+1} par m, montrer que m divise 2^{n+1}.
   d. Montrer que $m = 2^{n+1}$.
   e. Justifier que $p - 1 \in A$.
   f. En déduire que $p \equiv 1\left[2^{n+1}\right]$.

Exercice 3.

On note $E = \mathbb{R}^3$ et on définit les ensembles

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0\}$$
$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = x - y - z = 0\}$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
3. Déterminer les projetés du vecteur $(1, 2, 3)$ sur F parallélement à G et sur G parallélement à F.

Exercice 4.

On considère les équations différentielles

$$(\mathscr{E}) : y^{(4)} - y = 0 \qquad (\mathscr{F}) : y'' - y = 0 \qquad (\mathscr{G}) : y'' + y = 0$$

On note E, F et G les ensembles respectifs des solutions à valeurs *réelles* de $(\mathscr{E})$, $(\mathscr{F})$ et $(\mathscr{G})$.

1. Résoudre $(\mathscr{F})$ et $(\mathscr{G})$.
2. Montrer que toute solution de $(\mathscr{E})$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $F \subset E$ et $G \subset E$.
4. Montrer que E, F et G sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
5. On se donne $f \in E$. Montrer que $f'' + f \in F$ et $f'' - f \in G$.
6. En déduire que $E = F \oplus G$.
7. En déduire la forme générale des solutions de $(\mathscr{E})$.

Exercice 5.

On note

$$E = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+4} + u_{n+2} + u_n = 0\right\}$$
$$F = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0\right\}$$
$$G = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0\right\}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $F \subset E$ et que $G \subset E$.
3. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et en déterminer des familles génératrices.
4. Soit $u \in E$. On définit les suites v et w par $v_n = u_{n+2} - u_{n+1} + u_n$ et $w_n = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $v \in F$ et que $w \in G$.
5. Montrer que $E = F \oplus G$.
6. En déduire la forme générale des éléments de E.