Devoir à la maison n°02

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1 ★★ **Formule de Vandermonde**

On convient que pour $(n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$. On admet que les relations classiques sur les coefficients binomiaux restent encore vraies dans ces cas.

1. Démontrer que :
$$\forall (n,m,p) \in \mathbb{N}^3,\ \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

2. En déduire la valeur de $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3. A l'aide du changement d'indice $\ell = n-k$, déterminer la valeur de $\mathrm{T}_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4. En déduire que si n est un entier naturel impair, $\binom{2n}{n}$ est pair.

Exercice 2 ★

Exprimer $\mathrm{P}_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}$ à l'aide de factorielles.

Exercice 3 ★

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

2. On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on pose pour $n \in \mathbb{N}$
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} 3^k \sin^3\left(\frac{x}{3^k}\right)$$

Déterminer une expression simple de u_n.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).