Devoir à la maison n°05

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1 ★★

1. **a.** Montrer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Par la suite, on note f sa bijection réciproque.

b. Montrer que ch induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$. Par la suite, on note g sa bijection réciproque.

c. Montrer que th induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$. Par la suite, on note h sa bijection réciproque.

2. **a.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{ch}(f(x)) = \sqrt{x^2+1}$$

b. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$

$$\operatorname{sh}(g(x)) = \sqrt{x^2-1}$$

3. **a.** Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.

b. Justifier que g est dérivable sur $]1, +\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.

c. Justifier que h est dérivable sur $]-1, 1[$ et donner une expression de sa dérivée.

4. **a.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

b. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$

$$g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

c. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$

$$h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

Exercice 2

1. Soit g une fonction paire, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} g(t)\, dt = 2\int_0^{\pi} g(t)\, dt$$

2. On pose pour $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f_r(\theta) = r^2 - 2r\cos\theta + 1$$

Montrer que

$$\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ f_r(\theta) > 0$$

3. On pose pour $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\mathrm{I}(r) = \int_0^{\pi} \ln(f_r(\theta))\ \mathrm{d}\theta$$

A l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ \mathrm{I}(-r) = \mathrm{I}(r)$$

4. En remarquant que $2\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}(r) + \mathrm{I}(-r)$, montrer que

$$\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ 2\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}(r^2)$$

5. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ 2^n\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}(r^{2^n})$$

6. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $|r| < 1$. Montrer que

$$2\pi\ln(1 - |r|) \leq \mathrm{I}(r) \leq 2\pi\ln(1 + |r|)$$

7. En déduire que $\mathrm{I}(r) = 0$ lorsque $|r| < 1$.

8. Montrer également que

$$\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ \mathrm{I}\left(\frac{1}{r}\right) = \mathrm{I}(r) - 2\pi\ln(|r|)$$

9. En déduire la valeur de $\mathrm{I}(r)$ lorsque $|r| > 1$.