Devoir à la maison n°01 : corrigé

Solution 1.

1. **a.** On trouve $f_1 : x \mapsto \frac{x}{2}$, $f_2 : x \mapsto -\frac{1}{8}x^2 + x$ et $f_3 : x \mapsto -\frac{1}{128}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{5}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$.

   b. f_1 est clairement strictement croissante sur $[0,1]$.
   f_2 est polynomiale donc dérivable sur $[0,1]$ et

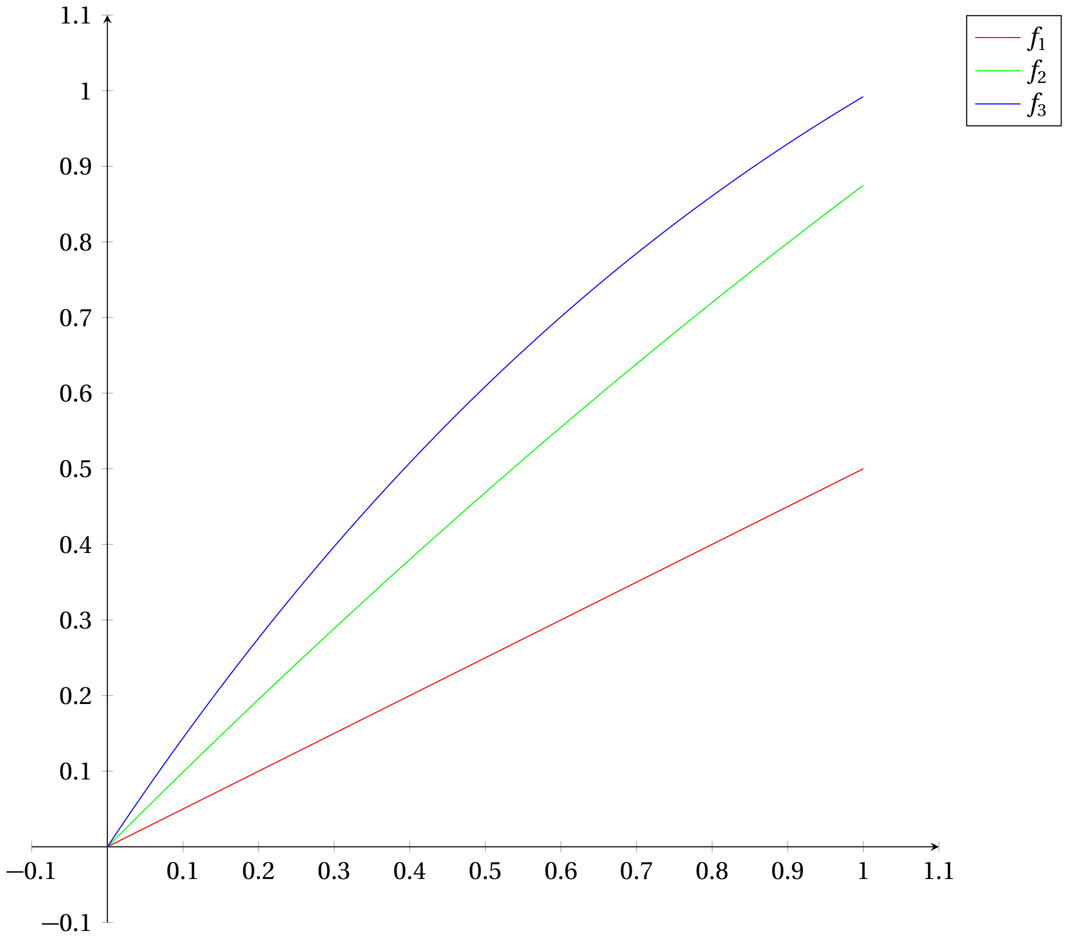
$$\forall x \in [0,1],\ f_2'(x) = 1 - \frac{1}{4}x > 0$$

   donc f_2 est strictement croissante sur $[0,1]$.
   f_3 est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_3'(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$$
$$f_3''(x) = -\frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

   Le trinôme $-\frac{3}{32}X^2 + \frac{3}{4}X - \frac{5}{4}$ admet pour racines $4 - \frac{2\sqrt{6}}{3}$ et $4 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Puisque $4 - \frac{2\sqrt{6}}{3} > 1$, f_3'' est strictement négative sur $[0,1]$. Ainsi f_3' est strictement décroissante sur $[0,1]$. Puisque $f_3'(1) = 1/2 > 0$, f_3' est strictement positive sur $[0,1]$, de sorte que f_3 est strictement croissante sur $[0,1]$.

   c. En regardant la suite des questions, on devine les positions respectives des courbes de f_1, f_2 et f_3.



2. **a.** Remarquons déjà que $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(x - u_n^2)$. On raisonne alors par récurrence.
   Initialisation : Tout d'abord, $u_0 = 0 \leqslant u_1 = \frac{x}{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$ car $x \in [0,1]$.

Hérédité : Supposons maintenant qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{x}$. Puisque $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{x}$, $x - u_{n+1}^2 \geqslant 0$ puis $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{2}(x - u_{n+1}^2) \geqslant u_{n+1}$. Enfin,

$$\sqrt{x} - u_{n+2} = \sqrt{x} - u_{n+1} - \frac{1}{2}(x - u_{n+1}^2) = \left(\sqrt{x} - u_{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + u_{n+1})\right)$$

Or, d'une part, $\sqrt{x} - u_{n+1} \geqslant 0$ et, d'autre part, $x \leqslant 1$ et $u_{n+1} \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$ donc $1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + u_{n+1}) \geqslant 0$. On obtient bien $\sqrt{x} - u_{n+2} \geqslant 0$. Finalement, on a montré que

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \sqrt{x}$$

Conclusion : On peut alors conclure par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{x}$$

b. D'après la question précédente, (u_n) est croissante et majorée. Notons ℓ sa limite. La relation de récurrence vérifiée par (u_n) implique que $\ell = \ell + \frac{1}{2}(x - \ell^2)$ et donc que $\ell^2 = x$. Or (u_n) est positive d'après la question précédente donc $\ell \geqslant 0$ puis $\ell = \sqrt{x}$.

3. **a.** Soit $(n, x) \in \mathbb{N} \times [0, 1]$. On a déjà remarqué que

$$0 \leqslant \sqrt{x} - f_{n+1}(x) = \left(\sqrt{x} - f_n(x)\right)\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + f_n(x))\right)$$

Or on sait également que $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \sqrt{x}$ donc $\sqrt{x} - f_n(x) \geqslant 0$ et $1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + f_n(x)) \leqslant 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}$. Finalement,

$$0 \leqslant \sqrt{x} - f_{n+1}(x) \leqslant \left(\sqrt{x} - f_n(x)\right)\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant \sqrt{x} - f_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. φ_n est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\varphi_n'(t) = \left(1 - \frac{t}{2}\right)^n - \frac{nt}{2}\left(1 - \frac{t}{2}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{n+1}{2}t\right)$$

On en déduit que φ_n est croissante sur $\left[0, \frac{2}{n+1}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{2}{n+1}, 1\right]$.
Notamment, φ_n admet un maximum et celui-ci vaut

$$\varphi_n\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1}\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a montré précédemment que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$0 \leqslant \sqrt{x} - f_n(x) \leqslant \varphi_n(\sqrt{x}) \leqslant \frac{2}{n+1}\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n$$

Or pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant 1 - \frac{2}{n+1} \leqslant 1$ donc

$$0 \leqslant \sqrt{x} - f_n(x) \leqslant \frac{2}{n+1}$$

Ceci étant valable pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leqslant \mathrm{M}_n \leqslant \frac{2}{n+1}$.
Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que (M_n) converge vers 0.

Solution 2.

On sait que $\mathrm{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}$. On raisonne alors par récurrence.
Il est clair que $\mathrm{T}_1 = \mathrm{S}_1^2 = 1$.
Supposons que $\mathrm{T}_n = \mathrm{S}_n^2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_{n+1}^2 &= (\mathrm{S}_n + (n+1))^2 \\
&= \mathrm{S}_n^2 + 2(n+1)\mathrm{S}_n + (n+1)^2 \\
&= \mathrm{T}_n + 2(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 \\
&= \mathrm{T}_n + n(n+1)^2 + (n+1)^2 \\
&= \mathrm{T}_n + (n+1)^3 = \mathrm{T}_{n+1}
\end{aligned}$$

On conclut donc par récurrence que $T_n = S_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution 3.

1. Il existe $\binom{6}{2}$ issues possibles à ce tirage. La variable aléatoire X est à valeurs dans $\{0,1,2\}$.

- L'événement $X = 0$ correspond à tirer les deux boules parmi les quatre rouges. On en déduit que

$$P(X=0) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{5}$$

- L'événement $X = 1$ correspond à tirer une boule parmi les deux noires et une boule parmi les quatre rouges. On en déduit que

$$P(X=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{8}{15}$$

- L'événement $X = 2$ correspond à tirer les deux boules parmi les deux noires. On en déduit que

$$P(X=2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{15}$$

2. La variable aléatoire Y est encore à valeurs dans $\{0,1,2\}$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= P(Y=0|X=0)P(X=0)+P(Y=0|X=1)P(X=1)+P(Y=0|X=2)P(X=2)\\
&= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \times \frac{2}{5} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}} \times \frac{8}{15} + 1 \times \frac{1}{15}\\
&= \frac{2}{5}\\
P(Y=1) &= P(Y=1|X=0)P(X=0)+P(Y=1|X=1)P(X=1)+P(Y=1|X=2)P(X=2)\\
&= \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} \times \frac{2}{5} + \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} \times \frac{8}{15} + 0 \times \frac{1}{15}\\
&= \frac{8}{15}\\
P(Y=2) &= P(Y=2|X=0)P(X=0)+P(Y=2|X=1)P(X=1)+P(Y=2|X=2)P(X=2)\\
&= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \times \frac{2}{5} + 0 \times \frac{8}{15} + 0 \times \frac{1}{15}\\
&= \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

3. On utilise la formule de Bayes

$$P(X=1|Y=1) = \frac{P(Y=1|X=1)P(X=1)}{P(Y=1)}$$

Or $P(Y=1) = P(X=1)$ et on a vu à la question précédente que

$$P(Y=1|X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}$$

Ainsi la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire au premier tirage sachant que l'on a tiré une seule boule noire au second tirage est $\frac{1}{5}$.

4. La probabilité recherchée est :

$$P(X=1,Y=1)+P(X=0,Y=2) = P(Y=1|X=1)P(X=1)+P(Y=2|X=0)P(X=0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} \times \frac{8}{15} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$$