Semaine du 05/10 au 10/10

1 Cours

Complexes

Corps des nombres complexes Partie réelle, partie imaginaire, module, conjugué et interprétation géométrique.

Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 Définition, notation $e^{i\theta}$, relations d'Euler et formule de Moivre, argument et interprétation géométrique, racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité et d'un complexe non nul.

Equations du second degré Racines carrées d'un complexe, résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes, somme et produit des racines.

Trigonométrie Linéarisation. Développement. Sommes trigonométriques.

Géométrie Angle de vecteurs et complexes. Expression complexe des similitudes.

Exponentielle complexe Définition et propriétés. $e^z = e^{z'} \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

2 Méthodes à maîtriser

- $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$, $z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z$, $z \in \mathbb{U} \iff \overline{z} = \dfrac{1}{z}$.
- $z \in \mathbb{R} \iff \arg z \equiv 0[\pi]$, $z \in i\mathbb{R} \iff \arg z \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.
- Extraction de racines $n^{\text{èmes}}$ par méthode exponentielle.
- Extraction de racines carrées, résolution d'équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du type $e^z = a$.
- Passage en complexe pour le calcul de sommes trigonométriques.
- Traduire l'alignement ou la perpendicularité via les complexes.

3 Questions de cours

Equations du second degré Résoudre une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$ au choix de l'examinateur.

Exponentielle complexe Résoudre une équation du type $e^z = a$ au choix de l'examinateur.

Extraction de racines Résoudre une équation du type $z^n = a$ au choix de l'examinateur.

BCCP 84

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $(z+i) = (z-i)^n$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Vérifier que ces solutions sont réelles.

BCCP 89 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. On se donne $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $\mathrm{S} = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.