Devoir à la maison n°06

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 Posons $\mathrm{R}_n : x \mapsto \dfrac{\sin(n^2x)}{n^2}$. Alors $\|\mathrm{R}_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^2}$. Ainsi la série de fonctions $\sum \mathrm{R}_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. De plus, les R_n sont continues sur $\mathbb{R}$ donc R est continue (et a fortiori définie) sur $\mathbb{R}$.

2 L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 1$ donc φ est intégrable en 1 et $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc φ est intégrable en $+\infty$. Finalement, φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

3 On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ puisque f l'est.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|f(t)e^{-ixt}| = |f(t)|$ et $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que $\widehat{f}$ est continue et a fortiori définie sur $\mathbb{R}$.

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(nh)| \leq \dfrac{\mathrm{C}}{n^2h^2+1}$. Notamment, $f(nh) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/n^2)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f(nh)$ converge. Ceci prouve que S est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

5 Justifions déjà la convergence de l'intégrale. La partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ donc ϕ_h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et a fortiori sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|\phi_h(t)| \leq \frac{\mathrm{C}}{(\lfloor t/h \rfloor)^2 h^2 + 1}$$

Comem pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ donc $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$. Ainsi

$$\lfloor t/h \rfloor^2 h^2 + 1 \underset{t\to+\infty}{\sim} t^2$$

puis $\phi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^2)$. Ceci assure la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_h(t)\,\mathrm{d}t$.
On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \phi_h(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{nh} \phi_h(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nh}^{(n+1)h} \phi_h(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nh}^{(n+1)h} f(nh)\,\mathrm{d}t \qquad = \sum_{n=0}^{+\infty} hf(nh) = \mathrm{S}(h)
\end{aligned}$$

6 Soit $h \in]0,1]$ et $t \in [1,+\infty[$. Alors

$$0 \geq \frac{t}{h} - 1 < \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor$$

Ainsi

$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{\lfloor t/h \rfloor^2 h^2 + 1} \leq \frac{C}{(t/h-1)^2h^2+1} = \frac{C}{(t-h)^2+1}$$

Or $t - h \geq t - 1 \geq 0$ donc $|\phi_h(t)| \leq \dfrac{C}{(t-1)^2+1}$.

7 Remarquons que pour tout $h > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $t - h < \lfloor t/h \rfloor h \leq t$ donc, par continuité de f, $\lim\limits_{h\to 0^+} \phi_h(t) = f(t)$.

De plus, pour tout $h > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $|\phi_h(t)| \leq \varphi(t)$ avec $\varphi : t \mapsto \begin{cases} C & \text{si } t \in [0,1] \\ \dfrac{C}{(t-1)^2+1} & \text{si } t \in [1,+\infty[\end{cases}$. La fonction φ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^2)$ donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{h\to 0^+} \int_0^{+\infty} \phi_h(t)\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt$$

ou encore

$$\lim_{h\to 0^+} S(h) = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt$$

d'après la question **5**.

8 Posons $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(t^2)}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$. f est bien continue sur $\mathbb{R}$ puisque $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(t^2)}{t^2} = 1$.

De plus, si $|t| \geq 1$, $|f(t)| \leq \dfrac{1}{t^2} \leq \dfrac{2}{t^2+1}$ et si $|t| \leq 1$, $|f(t)| \leq 1$ (puisque $|\sin u| \leq |u|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$) puis $|f(t)| \leq 1 \leq \dfrac{2}{1+t^2}$. Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f(t)| \leq \dfrac{2}{1+t^2}$. On peut donc appliquer ce qui précède pour affirmer que

$$\lim_{x\to 0^+} S(\sqrt{x}) = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \frac{\pi}{2}$$

Or pour tout $x > 0$,

$$S(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \sum_{n=0}^{+\infty} f(n\sqrt{x}) = \sqrt{x}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n^2x}\right) = \sqrt{x}\left(1 + \frac{R(x)}{x}\right)$$

de sorte que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{R(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\pi}{2}$$

ou encore

$$R(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\pi\sqrt{x}}{2}$$

Enfin,

$$\frac{R(x) - R(0)}{x - 0} = \frac{R(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$$

Ainsi, $\dfrac{R(x)-R(0)}{x-0} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et R n'est pas dérivable en 0.

9 Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $F(x)$ est défini. Alors les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f(x+2n\pi)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f(x-2n\pi)$ convergent et

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+2n\pi) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-2n\pi) \\ &= f(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+2(n+1)\pi) - f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-2(n-1)\pi) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+2\pi+2n\pi) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x+2\pi-2n\pi) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi+2n\pi) = F(x+2\pi) \end{aligned}$$

Ainsi F est bien 2π-périodique.
Il suffit donc de montrer qu'elle est continue sur $[0, 2\pi]$ pour garantir qu'elle est continue (et a fortiori définie) sur $\mathbb{R}$. Posons à cet effet $f_n : x \mapsto f(x + 2n\pi)$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, 2\pi],\ |f_n(x)| \leq \frac{\mathrm{C}}{(x + 2n\pi)^2 + 1} \leq \frac{\mathrm{C}_1}{4n^2\pi^2 + 1}$$

Par conséquent, $\|f_n\|_{\infty,[0,2\pi]} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/n^2)$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. Comme les f_n sont clairement continues, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[0, 2\pi]$. De même,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, 2\pi],\ |f_{-n}(x)| \leq \frac{\mathrm{C}_1}{(x - 2n\pi)^2 + 1} \leq \frac{\mathrm{C}}{4(n-1)^2\pi^2 + 1}$$

Par conséquent, $\|f_{-n}\|_{\infty,[0,2\pi]} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/n^2)$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_{-n}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. Comme les f_{-n} sont clairement continues, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}$ est continue sur $[0, 2\pi]$. Finalement, $\mathrm{F} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n + \sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}$ est continue sur $[0, 2\pi]$ et donc sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

10 Posons $g_n : x \mapsto \widehat{f}e^{inx}$. Les g_n sont clairement continues sur $\mathbb{R}$. De plus, $\|g_n\|_\infty = |\widehat{f}(n)| \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/n^2)$ et $\|g_{-n}\|_\infty = |\widehat{f}(-n)| \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/n^2)$. On en déduit que les fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} g_{-n}$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Finalement, G est également continue (et a fortiori définie) sur $\mathbb{R}$ comme somme de ces deux fonctions continues. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}(x + 2\pi) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{in(x+2\pi)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(-n)e^{-in(x+2\pi)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(-n)e^{-inx} \\
&= \mathrm{G}(x)
\end{aligned}$$

donc G est 2π-périodique.

11 On utilise le résultat admis dans l'énoncé. Soit $p \in \mathbb{Z}$.

$$c_p(2\pi\mathrm{F}) = \int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(t)e^{-ipt}\ \mathrm{d}t$$

avec $f_n : t \mapsto f(t + 2n\pi)$. Or on a vu précédemment que les séries de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_{-n}$ convergeaient normalement sur $[0, 2\pi]$. Comme $|e^{-ipt}| = 1$, on en déduit également que les séries de fonctions de termes généraux $t \mapsto f_n(t)e^{-ipt}$ et $t \mapsto f_{-n}(t)e^{-ipt}$ convergent aussi normalement et donc uniformément sur le segment $[0, 2\pi]$, ce qui permet de procéder à une interversion série/intégrale :

$$c_p(2\pi\mathrm{F}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f_n(t)e^{-ipt}\ \mathrm{d}t$$

Or pour tout $n \in \mathbb{Z}$, via le changement de variable $t \mapsto t + 2n\pi$

$$\int_0^{2\pi} f_n(t)e^{-ipt}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t + 2n\pi)e^{-ipt}\ \mathrm{d}t = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t)e^{-ipt+2ipn\pi}\ \mathrm{d}t = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t)e^{-ipt}\ \mathrm{d}t$$

Ainsi

$$c_p(2\pi\mathrm{F}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t)e^{-ipt}\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ipt}\ \mathrm{d}t = \widehat{f}(p)$$

Par ailleurs,

$$c_p(\mathrm{G}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n(t)e^{-ipt}\ \mathrm{d}t$$

A nouveau les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} g_{-n}$ convergent normalement sur $[0, 2\pi]$ donc il en est de même des séries de fonctions de termes généraux $t \mapsto g_n(t)e^{-ipt}$ et $t \mapsto g_{-n}(t)e^{-ipt}$. On procède donc à nouveau à une interversion série/intégrale :

$$c_p(\mathrm{G}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} g_n(t)e^{-ipt}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}\ \mathrm{d}t$$

Or on montre aisément que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta_{n,p}$ donc

$$c_p(\mathrm{G}) = \widehat{f}(p) = c_p(2\pi\mathrm{F})$$

D'après le résultat admis, $\mathrm{G} = 2\pi\mathrm{F}$.

12 Posons $g : t \mapsto f(at/2\pi)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|g(t)| \leq \frac{\mathrm{C}_1}{(at/2\pi)^2+1} = \frac{4\mathrm{C}_1\pi^2}{a^2t^2+4\pi^2}$$

Posons $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{4\mathrm{C}_1\pi^2(t^2+1)}{a^2t^2+4\pi^2}$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \varphi(t) = \dfrac{4\mathrm{C}_1\pi^2}{a^2}$. Notamment φ est bornée au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$. Il existe donc $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ tel que φ est bornée sur $[\mathrm{A}, +\infty[$ et sur $]-\infty, -\mathrm{A}]$. De plus, φ est continue sur le segment $[-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$ donc elle st bornée sur ce segment. On peut donc affirmer que φ est bornée sur $\mathbb{R}$. Notamment il existe $\mathrm{C}_1' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\varphi(t) \leq \mathrm{C}_1'$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |g(t)| \leq \frac{\mathrm{C}_1'}{t^2+1}$$

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{at}{2\pi}\right)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$$

En effectuant le changement de variable linéaire $u = \dfrac{at}{2\pi}$,

$$\hat{g}(x) = \frac{2\pi}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi ux/a}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{a}\widehat{f}\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

On montre comme précédemment l'existence de $\mathrm{C}_2' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\hat{g}(x)| \leq \frac{\mathrm{C}_2'}{x^2+1}$$

Ainsi g vérifie les mêmes hypothèses que f et on peut alors affirmer que

$$2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(2n\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{g}(n)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{a}\right)$$

13 On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{it^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n t^{2n}}{n!}$$

Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n t^{2n-2}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1}t^{2n}}{(n+1)!}$$

Comme $f(0) = i$, cette égalité est aussi valable pour $t = 0$. Finalement, f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$: elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

14 Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(t) = -\frac{2(e^{it^2}-1)}{t^3} + \frac{2ie^{it^2}}{t}$$

Comme $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it^2}$ est bornée (son module est constamment égal à 1), $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$.
Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$f''(t) = \frac{6(e^{it^2}-1)}{t^4} - \frac{4ie^{it^2}}{t^2} - \frac{2ie^{it^2}}{t^2} - 4e^{it^2}$$

A nouveau, comme $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it^2}$ est bornée, $f''(t) \underset{t\to+\infty}{=} -4e^{it^2} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

15 Sous réserve de convergence, on obtient par intégration par partie

$$\int_1^{+\infty} e^{ix^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2ix}\cdot 2ixe^{ix^2} = \left[\frac{1}{2ix}e^{ix^2}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{ix^2}}{2ix^2}\,\mathrm{d}x$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2ix}e^{ix^2} = 0$ car $x \mapsto e^{ix^2}$ est bornée et $\frac{e^{ix^2}}{2ix^2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{ix^2}}{2ix^2}\,\mathrm{d}x$ converge (absolument). L'intégration par parties précédente montre alors que $\int_1^{+\infty} e^{ix^2}\,\mathrm{d}x$ converge. Comme $x \mapsto e^{ix^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, $\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Comme $x \mapsto e^{ix^2}$ est paire, $\int_{-\infty}^0 e^{ix^2}\,\mathrm{d}x$ converge également puis $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

16 Remarquons déjà que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et que $f(t) \underset{t\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Ainsi $\widehat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$ d'après la question **3**.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Sous réserve de convergence, on obtient par intégration par parties

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{ix}\left[f(t)e^{-ixt}\right]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} + \frac{1}{ix}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$$

Cette intégration par parties est légitime puisque $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t)e^{-ixt} = 0$ (f est de limite nulle en $+\infty$ et $t \mapsto e^{-ixt}$ est bornée). On obtient également

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{ix}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$$

Par une nouvelle intégration par parties

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{x^2}\left[f'(t)e^{-ixt}\right]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} - \frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$$

Cette intégration par parties est à nouveau légitime puisque $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f'(t)e^{-ixt} = 0$ d'après la question **14**. De plus,

$$\widehat{f}(x) = -\frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$$

Posons $g(t) = f''(t) + 4e^{-it^2}$ de sorte que $g(t) \underset{t\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. g étant aussi continue sur $\mathbb{R}$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ de même que $t \mapsto g(t)^{-ixt}$. De plus, par inégalité trangulaire

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\,\mathrm{d}t$$

de sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t \underset{x\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}(1)$. Enfin, via le changement de variable $u = t - x/2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it^2}e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(t-x/2)^2+ix^2/4}\,\mathrm{d}t = e^{ix^2}4\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(t-x/2)^2}\,\mathrm{d}t = e^{ix^2/4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu^2}\,\mathrm{d}u$$

et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it^2}e^{-ixt}\,\mathrm{d}t \underset{x\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}(1)$ car $x \mapsto e^{ix^2/4}$ est bornée. Finalement,

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{x^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t - 4\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it^2}e^{-ixt}\,\mathrm{d}t\right) \underset{x\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

17 On souhaite appliquer la formule sommatoire de Poisson à la fonction f. On souhaite donc montrer qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)| \leq \frac{C_1}{t^2+1} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ |\widehat{f}(x)| \leq \frac{C_2}{x^2+1}$$

Comme $1+t^2 \underset{t\to+\infty}{=} t^2$ et que $f(t) \underset{t\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, on a également $f(t) \underset{t\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2+1}\right)$. Il existe donc une constante D et un réel positif A tels que

$$\forall t \in]-\infty, -\mathrm{A}] \cup [\mathrm{A}, +\infty[,\ |f(t)| \leq \frac{\mathrm{D}}{t^2+1}$$

Par ailleurs, $t \mapsto (t^2+1)f(t)$ est continue sur le segment $[-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$ donc bornée sur ce segment. Il existe donc une constante D' telle que

$$\forall t \in [-\mathrm{A}, \mathrm{A}],\ |f(t)| \leq \frac{\mathrm{D}'}{t^2+1}$$

Il suffit alors de poser $\mathrm{C}_1 = \max(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$.
Comme on a également $|\widehat{f}(x)| \underset{x\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, on montre de la même manière l'existence de la constante C_2.
On peut alors appliquer la formule sommatoire de Poisson. On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)$$

De plus,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n\sqrt{x}) = i + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}-1}{n^2x} = i + \frac{2}{x}(\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0))$$

Remarque. Remarquons que F est bien défine sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une série de fonctions convergeant normalement sur $\mathbb{R}$.

Enfin, comme f est paire, on montre aisément que $\widehat{f}$ est également paire, de sorte que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) = \widehat{f}(0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)$$

On sait de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right| \leq \frac{\mathrm{C}_2}{1+\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)^2} = \frac{\mathrm{C}_2 x}{x+4n^2\pi^2} \leq \frac{\mathrm{C}_2 x}{4n^2\pi^2}$$

de sorte que, par inégalité trangulaire,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{C}_2}{4n^2\pi^2}\right) x$$

ou encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) \underset{x\to0^+}{=} \mathcal{O}(x)$$

Finalement,

$$i + \frac{2}{x}(\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0)) \underset{x\to0^+}{=} \frac{\widehat{f}(0)}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\sqrt{x}\right)$$

ou encore

$$\mathrm{F}(x) \underset{x\to0^+}{=} \mathrm{F}(0) + \frac{\widehat{f}(0)\sqrt{x}}{2} - \frac{ix}{2} + \mathcal{O}\left(x\sqrt{x}\right)$$

On a donc bien

$$\mathrm{F}(x) \underset{x\to0^+}{=} \mathrm{F}(0) + a\sqrt{x} + bx + \mathcal{O}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$

avec $b = -\frac{i}{2}$ et

$$a = \frac{1}{2}\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$$

Comme f est paire

$$a = 2\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}(e^{it^2}-1)\ \mathrm{d}t$$

Par intégration par parties

$$a = -2\left[\frac{e^{it^2}-1}{t}\right]_0^{+\infty} + 4\int_0^{+\infty} e^{it^2}\ \mathrm{d}t$$

Comme $e^{it^2}-1 \underset{t\to0}{\sim} it^2$, $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{it^2}-1}{t}=0$ et comme $t\mapsto e^{it^2}$ est bornée, $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{it^2}-1}{t}=0$. Finalement

$$a=4\int_0^{+\infty}e^{it^2}\,\mathrm{d}t=2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it^2}\,\mathrm{d}t=2\mathrm{I}$$

18 Pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x+\pi)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in^2(x+\pi)}}{n^2}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in^2x}}{n^2}e^{in^2\pi}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{in^2x}}{n^2}\qquad\text{car } n \text{ et } n^2 \text{ ont la même parité}\end{aligned}$$

Comme la série $\sum(-1)^n\dfrac{e^{in^2x}}{n^2}$ converge absolument, on peut séparer cette somme suivant la parité des indices :

$$\mathrm{F}(x+\pi)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{i(2n)^2x}}{(2n)^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{i(2n-1)^2x}}{(2n-1)^2}$$

Mais via le même argument

$$\mathrm{F}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{i(2n)^2x}}{(2n)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{i(2n-1)^2x}}{(2n-1)^2}$$

On en déduit que

$$\mathrm{F}(x+\pi)+\mathrm{F}(x)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{i(2n)^2x}}{(2n)^2}=\frac12\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{i4n^2x}}{n^2}=\frac12\mathrm{F}(4x)$$

ou encore

$$\mathrm{F}(x+\pi)=\frac12\mathrm{F}(4x)-\mathrm{F}(x)$$

19 D'après la question **17**,

$$\mathrm{F}(x)\underset{x\to0^+}{=}\mathrm{F}(0)+a\sqrt{x}+bx+\mathcal{O}\left(x^{\frac32}\right)$$

donc

$$\frac12\mathrm{F}(4x)\underset{x\to0^+}{=}\frac12\mathrm{F}(0)+a\sqrt{x}+2bx+\mathcal{O}\left(x^{\frac32}\right)$$

puis

$$\mathrm{F}(x+\pi)\underset{x\to0^+}{=}-\frac12\mathrm{F}(0)+bx+\mathcal{O}\left(x^{\frac32}\right)$$

On remarque que $\mathrm{R}(x)=\mathrm{Im}(\mathrm{F}(x))$, $\mathrm{F}(0)\in\mathbb{R}$ et $b=-\dfrac{i}{2}$ donc

$$\mathrm{R}(x+\pi)\underset{x\to0^+}{=}-\frac12x+\mathcal{O}\left(x^{\frac32}\right)$$

A fortiori,

$$\mathrm{R}(\pi+x)\underset{x\to0^+}{=}-\frac12x+o(x)$$

De plus, R est 2π-périodique et impaire donc

$$\mathrm{R}(\pi-x)=-\mathrm{R}(x-\pi)=-\mathrm{R}(\pi+x)\underset{x\to0^+}{=}-\frac12x+o(x)$$

ou encore

$$\mathrm{R}(\pi+x)\underset{x\to0^-}{=}\frac12x+o(x)$$

Finalement

$$\mathrm{R}(\pi+x)\underset{x\to0}{=}\frac12x+o(x)$$

donc R est dérivable en π et $\mathrm{R}'(\pi)=-\dfrac12$.