

**EXERCICE 1.**

- Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe  $4\sqrt{2}(-1+i)$ .
- Trois nombres complexes ont pour produit  $4\sqrt{2}(-1+i)$ . Leurs modules sont en progression géométrique de raison 2 et leurs arguments sont en progression arithmétique de raison  $\frac{\pi}{4}$ . On note  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  ces trois nombres, où la numérotation respecte l'ordre des modules. Sachant que  $z_1$  a un argument compris entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi$ , déterminer le module et un argument de chacun des trois nombres  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ .
- Construire les images  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  des nombres complexes  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  dans le plan complexe.

**EXERCICE 2.**

On note  $j = e^{2i\pi/3}$ .

- Calculer  $j^3$ ,  $1+j+j^2$ ,  $1+j^2+j^4$ ,  $j^{-1}$  et  $\bar{j}$  en fonction de  $j$ .
- Simplifier l'expression

$$\frac{1+j}{(1-i)^2} + \frac{1-j}{(1+i)^2}.$$

**EXERCICE 3.**

Voici quelques calculs pour se délier les doigts...

- Représenter sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$\frac{2-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i}, \quad \frac{(2+i)(3+2i)}{2-i}, \quad \frac{3+4i}{(2+3i)(4+i)}.$$

- On considère les nombres complexes

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}+i}.$$

Représenter sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{|l|l|l|} \hline \text{a. } z_1 + z_2 & \text{c. } z_1/z_2 & \text{e. } z_1^3 + z_2^3 \\ \hline \text{b. } z_1 z_2 & \text{d. } z_1^2 + z_2^2 & \\ \hline \end{array}$$

**EXERCICE 4.**

Voici un peu d'entraînement...

- On pose  $z_1 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$  et  $z_2 = 1+i$ .
  - Représenter le quotient  $z_1/z_2$  sous forme polaire.
  - En déduire les valeurs de  $\cos(7\pi/12)$  et de  $\sin(7\pi/12)$ .
- En précisant pour quelles valeurs des réels  $x$  et  $y$ , elles ont un sens, mettre sous forme polaire les expressions suivantes :

$$\begin{array}{|l|l|} \hline \text{a. } 1 + \sin x - i \cos x & \text{d. } \frac{e^{ix} + e^{iy}}{1 + e^{i(x+y)}} \\ \hline \text{b. } \frac{1}{1 + i \tan x} & \\ \hline \text{c. } \frac{1 + \cos x + i \sin x}{1 - \cos x - i \sin x} & \text{e. } \frac{(1 - i\sqrt{3})(\cos x + i \sin x)}{\cos x + \sin x + i(\cos x - \sin x)} \\ \hline \end{array}$$

**EXERCICE 5.★**

Voici quelques calculs de puissances.

- Pour tout entier naturel  $n$ , simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{|l|l|} \hline \text{a. } \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \right)^n & \text{c. } \left( \frac{\sqrt{3}+i}{1+i} \right)^n \\ \hline \text{b. } \frac{(1-i)^n - \sqrt{2}^n}{(1+i)^n - \sqrt{2}^n} & \text{d. } (1 + \cos \theta + i \sin \theta)^n \\ \hline & \text{e. } \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{i} \\ \hline \end{array}$$

- Pour quelles valeurs de l'entier relatif  $n$  le nombre complexe  $(\sqrt{3}+i)^n$  appartient-il à  $\mathbb{R}_+$  ? Pour quelles valeurs est-il imaginaire pur ?

**EXERCICE 6.★**

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $z_\theta = -\sin(2\theta) + 2i \cos^2(\theta)$ .

- Déterminer le module et un argument de  $z_\theta$ . On discutera en fonction des valeurs de  $\theta$ .
- Déterminer l'ensemble des nombres réels  $\theta$  tels que  $|z_\theta| = |z_\theta - 1|$ .

**EXERCICE 7.**

Soit

$$v = \frac{\sqrt{3}+i}{i-1}.$$

Ecrire  $v^{2002}$  sous forme polaire puis sous forme algébrique.

**EXERCICE 8.**

On pose  $\omega = \sqrt{3} + i$ . Déterminer  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $\omega^n \in \mathbb{R}$ . Même question avec  $\omega^n \in i\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 9.**

Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ .

1. Montrer que  $\frac{z+1}{z-1}$  est imaginaire pur *si et seulement si*  $z \in \mathbb{U}$ .
2. Montrer que  $\frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U}$  *si et seulement si*  $z$  est imaginaire pur.

**EXERCICE 10.**

1. Soit  $u \in \mathbb{C}$  tel que  $|u| \leq 1$ . Montrer que  $|u| \leq |2-u|$  et qu'il y a égalité *si et seulement si*  $u = 1$ .

On définit une suite *complexe*  $(z_n)$  par son premier terme  $z_0$  et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n}{2 - z_n}$$

On suppose  $|z_0| \leq 1$ .

2. Que peut-on dire de la suite  $(z_n)$  lorsque  $z_0 = 0$ ? Justifier.
3. Même question lorsque  $z_0 = 1$ .
4. Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|z_n| \leq 1$ .
5. En déduire que la suite  $(|z_n|)$  est décroissante.

**Dans la suite, on suppose  $z_0 \neq 1$ .**

6. Montrer que  $|z_1| < 1$ .
7. On pose  $q = \frac{1}{2-|z_1|}$ . Montrer que  $|z_{n+1}| \leq q|z_n|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
8. En déduire par récurrence que  $|z_n| \leq q^{n-1}|z_1|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
9. Quelle est la limite de la suite  $(|z_n|)$ ?

**EXERCICE 11.★**

Soient  $a$  et  $b$  de module 1 tels que  $a \neq \pm b$ .

1. Prouver que  $\frac{1+ab}{a+b} \in \mathbb{R}$ .
2. Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b} \in i\mathbb{R}.$$

**EXERCICE 12.★**

Soient  $a, b, c \in \mathbb{C}$  de module 1. Montrer que

$$|a+b+c| = |ab+bc+ac|.$$

**EXERCICE 13.★**

Déterminer les nombres complexes  $z$  tels que  $z$ ,  $1/z$  et  $1+z$  soient de même module.

**EXERCICE 14.★**

Soient  $a, b$  et  $c$  trois nombres complexes de module 1 tels que  $a \neq c$ . Montrer que

$$\frac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2} \in \mathbb{R}_+.$$

**EXERCICE 15.**

Dans tout l'exercice, le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct  $\mathcal{R}$ .

1. Déterminer les nombres complexes  $z$  non nuls tels que les nombres complexes  $z$ ,  $1/z$  et  $1+z$  aient même module.
2. Déterminer les nombres complexes tels que

$$|z-1| = |\bar{z}+1|.$$

Interprétation géométrique?

3. Déterminer le lieu des points du plan dont l'afixe  $z$  vérifie

$$|(1+i)\bar{z}-2i|=2.$$

**EXERCICE 16.**

Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes. Montrer que  $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$ .

**EXERCICE 17.★**

Soient  $\mathcal{E} = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$  et  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$  l'application définie par

$$\forall z \in \mathcal{E}, \quad f(z) = \frac{z+i}{z-2i}.$$

Déterminer les ensembles suivants :

1.  $\mathcal{E}_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathbb{R} \right\};$
2.  $\mathcal{E}_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in i\mathbb{R} \right\};$
3.  $\mathcal{E}_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(f(z)) = \pi/2 \right\}.$

**EXERCICE 18.★**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes

$$1. \operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0 \quad \left| \quad 2. \operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0 \quad \left| \quad 3. \operatorname{Re}(z^3) = \operatorname{Im}(z^3)\right.\right.$$

**EXERCICE 19.**

Résoudre les équations suivantes dans  $\mathbb{C}$  :

$$\begin{array}{ll} 1. z^2 + (5-2i)z + 5-5i = 0; & 5. z^6 + (2i-1)z^3 - 1-i = 0; \\ 2. z^2 + (-3+i)z + 4-3i = 0; & 6. z^4 - z^3 - z + 1 = 0; \\ 3. z^2 - (9-2i)z + 26 = 0; & 7. z^4 + 2 - i\sqrt{12} = 0. \\ 4. z^4 + (3-6i)z^2 + 2(16-63i) = 0; & \end{array}$$

**EXERCICE 20.★**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$1. z^2 = \bar{z}; \quad \left| \quad 2. z^3 = \bar{z}; \quad \left| \quad 3. z^2 = 27\bar{z}.\right.\right.$$

**EXERCICE 21.★**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$z^2 + 8|z| - 3 = 0.$$

**EXERCICE 22.**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. (3+i)z^2 - (8+6i)z + 25+5i = 0; & 4. (1-5i)z^2 - (20+4i)z + 61+7i = 0; \\ 2. iz^2 + (4i-3)z + i-5 = 0; & \\ 3. z^2 - 5z + 4 + 10i = 0; & 5. z^6 - 2\cos(\theta)z^3 + 1 = 0, \text{ où } \theta \in \mathbb{R}. \end{array}$$

**EXERCICE 23.**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$1. z^5 = 16\bar{z}; \quad \left| \quad 2. 2\bar{z} - 3z = 2 + 3i.\right.$$

**EXERCICE 24.**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes

$$\begin{array}{ll} 1. 2z + 3\bar{z} = 1; & 3. z^2 = -\bar{z}^2; \\ 2. z^2 = \bar{z}; & 4. z^4 = \frac{1}{\bar{z}}. \end{array}$$

**EXERCICE 25.**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes

$$1. (z+i)^3 + iz^3 = 0; \quad \left| \quad 2. z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0.\right.$$

**EXERCICE 26.**

Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on pose  $f(z) = z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i$ .

1. Montrer que l'équation  $f(z) = 0$  a une unique solution imaginaire pure que l'on déterminera.
2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $f(z) = 0$ .
3. Etudier dans le plan complexe la nature du triangle ayant pour sommets les images des trois racines de cette équation.

**EXERCICE 27.**

1. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\theta \not\equiv 0[2\pi]$ . Montrer que  $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i \cotan \frac{\theta}{2}$  où  $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$ .
2. Résoudre l'équation  $(z-1)^5 = (z+1)^5$ . On exprimera les solutions à l'aide de la fonction  $\cotan$ .

**EXERCICE 28.**

1. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\theta \neq 0[2\pi]$ . Montrer que  $\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = i \cotan \frac{\theta}{2}$  où  $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$ .
2. Résoudre de deux façons l'équation  $(z - 1)^5 = (z + 1)^5$ . En déduire les valeurs de  $\cotan \frac{\pi}{5}$ ,  $\cotan \frac{2\pi}{5}$ ,  $\cotan \frac{3\pi}{5}$  et  $\cotan \frac{4\pi}{5}$ .

**EXERCICE 29.**

On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ ,  $\alpha = \omega + \omega^4$  et  $\beta = \omega^2 + \omega^3$ .

1. Déterminer une équation du second degré dont les racines sont  $\alpha$  et  $\beta$ .
2. En déduire  $\cos \frac{2\pi}{5}$  et  $\cos \frac{4\pi}{5}$ .
3. En déduire  $\cos \frac{\pi}{5}$  et  $\sin \frac{\pi}{5}$ .

**EXERCICE 30.**

On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{11}}$  ainsi que

$$S = \omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9 \quad T = \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$$

1.
  - a. Montrer que  $\sin \frac{6\pi}{11} + \sin \frac{18\pi}{11} > 0$ . En déduire que  $\text{Im}(S) > 0$ .
  - b. Montrer que  $S + T = -1$  et  $ST = 3$ .
  - c. En déduire une équation du second degré dont sont solutions  $S$  et  $T$  puis les valeurs de  $S$  et  $T$ .
2.
  - a. Montrer que  $\omega - \omega^{10} = 2i \sin \frac{2\pi}{11}$ .
  - b. Montrer que  $\frac{1 - \omega^3}{1 + \omega^3} = -i \tan \frac{3\pi}{11}$ .
  - c. Montrer que  $\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = \frac{1 - \omega^3}{1 + \omega^3}$ .
  - d. En déduire que  $\tan \frac{3\pi}{11} + 4 \sin \frac{2\pi}{11} = i(T - S) = \sqrt{11}$ .

**EXERCICE 31.★**

En linéarisant  $\sin^4 x$ , calculer une expression simple de la somme

$$\sin^4 \left( \frac{\pi}{8} \right) + \sin^4 \left( \frac{3\pi}{8} \right) + \sin^4 \left( \frac{5\pi}{8} \right) + \sin^4 \left( \frac{7\pi}{8} \right).$$

**EXERCICE 32.★**

Soient  $\alpha$  et  $\beta$ , deux nombres réels. Simplifier les sommes

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(\alpha + k\beta), \\ S'_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(\alpha + k\beta), \\ S''_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \cos(\alpha + k\beta). \end{aligned}$$

**EXERCICE 33.★**

Soit  $\alpha$ , un nombre réel tel que  $\cos \alpha \neq 0$ . On pose

$$R_n = \sum_{k=0}^n \frac{\cos k\alpha}{\cos^k \alpha} \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{k=0}^n \frac{\sin k\alpha}{\cos^k \alpha}.$$

Calculer  $R_n + iI_n$  et en déduire des expressions simplifiées de  $R_n$  et de  $I_n$ .

**EXERCICE 34.**

Simplifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$F_n = \frac{\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cdots + \cos((2n+1)x)}{\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x) + \cdots + \sin((2n+1)x)}.$$

**EXERCICE 35.**

On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$  et  $\alpha = \omega + \frac{1}{\omega}$ .

1. Montrer que  $\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} + 1 + \omega + \omega^2 = 0$ .
2. En déduire que  $\alpha$  est solution d'une équation du second degré que l'on précisera.
3. En déduire la valeur de  $\cos \left( \frac{2\pi}{5} \right)$  puis de  $\sin \left( \frac{2\pi}{5} \right)$ .

**EXERCICE 36.★**

Soit  $\omega$  une racine septième de l'unité distincte de 1. Simplifier le nombre

$$\alpha = \frac{\omega}{1 + \omega^2} + \frac{\omega^2}{1 + \omega^4} + \frac{\omega^3}{1 + \omega^6}.$$

**EXERCICE 37.**

Etablir par un calcul que  $\operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}$  équivaut à

$$\left| \frac{z}{z-1} \right| < 1.$$

Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

**EXERCICE 38.★**

Soit  $\lambda$  un nombre réel irrationnel. Montrer que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\lambda\pi} \right| \leq \frac{1}{|\sin(\lambda\pi)|}.$$

**EXERCICE 39.**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $z \in \mathbb{C}$  tels que

$$1 + z + \dots + z^{n-1} - nz^n = 0.$$

Montrer que  $|z| \leq 1$ .

**EXERCICE 40.**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ . Montrer que

$$\left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}.$$

**EXERCICE 41.★**

Prouver que

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, |a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|.$$

étudier les cas d'égalité.

**EXERCICE 42.★**

Soient  $n \geq 2$  et  $z_1, z_2, \dots, z_n$  appartenant à  $\mathbb{C}^*$ . Prouver que

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|,$$

avec égalité *si et seulement si*

$$\arg(z_1) = \arg(z_2) = \dots = \arg(z_n).$$

**EXERCICE 43.**

Soient A, B, C, D quatre points du plan distincts deux à deux. On suppose de plus A, B, C non alignés et on introduit le cercle  $\mathcal{C}$  de centre O circonscrit au triangle ABC.

On choisit un repère orthonormé du plan de centre O tel que  $\mathcal{C}$  ait pour rayon 1. On note a, b, c, d les affixes respectifs de A, B, C, D.

On pose enfin  $Z = \frac{d - a}{c - a} \frac{c - b}{d - b}$ .

1. Dans cette question, on suppose que D appartient à  $\mathcal{C}$ .

a. Justifier que  $\bar{a} = \frac{1}{a}$ ,  $\bar{b} = \frac{1}{b}$ ,  $\bar{c} = \frac{1}{c}$ ,  $\bar{d} = \frac{1}{d}$ .

b. Montrer que Z est un réel.

c. En déduire que  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})[\pi]$ .

2. Réciproquement, on suppose que  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})[\pi]$  et on veut montrer que D appartient à  $\mathcal{C}$ .

a. Que peut-on dire de Z ?

b. Exprimer d en fonction de a, b, c, Z.

c. Calculer  $\bar{d}$  et en déduire que D appartient à  $\mathcal{C}$ .

**EXERCICE 44.★**

Déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe z tels que les points d'affixes 1, z et  $z^3$  soient alignés.

**EXERCICE 45.★**

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que les points d'affixes respectives z, iz et  $z^2$  soient alignés.

**EXERCICE 46.★**

Le plan  $\mathcal{P}$  est muni d'un repère orthonormé direct  $\mathcal{R}$ . Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan  $\mathcal{P}$  tels que les points d'affixes respectives 1,  $z^2$  et  $z^4$  soient alignés.

**EXERCICE 47.★★**

Déterminer les points M(z) du plan  $\mathcal{P}$  tels que  $\left( \frac{z}{z-1} \right)^4 \in \mathbb{R}$ .

**EXERCICE 48.★★**

Soient  $A, B, C$  trois points deux à deux distincts d'affixes  $a, b, c$ .

1. Prouver que  $ABC$  est un triangle équilatéral direct *si et seulement si*

$$a + jb + j^2c = 0,$$

et équilatéral indirect *si et seulement si*

$$a + jc + j^2b = 0.$$

2. Prouver que  $ABC$  est un triangle équilatéral *si et seulement si*

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$

**EXERCICE 49.★**

On se place dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit  $M_1M_2M_3$  un triangle inscrit dans un cercle de centre  $O$ . On note  $z_k$  l'affixe de  $M_k$ .

1. Montrer que l'orthocentre  $H$  du triangle  $M_1M_2M_3$  a pour affixe

$$h = z_1 + z_2 + z_3.$$

2. En déduire que le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un vrai triangle sont alignés.

**EXERCICE 50.★**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$1. e^z + e^{-z} = 1; \quad | \quad 2. e^z + e^{-z} = 2i.$$

**EXERCICE 51.**

Soient  $(x_n)$  et  $(y_n)$  deux suites réelles définies par  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 0$  et par  $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n - x_n \end{cases}$ . On pose  $z_n = x_n + iy_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Calculer  $z_0, z_1, z_2$  et  $z_3$ .  
2. Montrer que  $(z_n)$  est une suite géométrique. On donnera sa raison sous forme trigonométrique.

3. Exprimer  $A_n = \sum_{k=0}^n z_k$ ,  $B_n = \sum_{k=0}^n x_k$ ,  $C_n = \sum_{k=0}^n y_k$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE 52.★**

Simplifier la somme

$$S_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-3)^k \binom{n}{2k}.$$

**EXERCICE 53.★**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose

$$S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k}, \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+1},$$

et  $S_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+2}.$

1. Calculer  $S_1 + S_2 + S_3$ , puis  $S_1 + jS_2 + j^2S_3$  et  $S_1 + j^2S_2 + j^4S_3$ .  
2. En déduire les valeurs de  $S_1, S_2$  et  $S_3$ .