Devoir à la maison n°16

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Partie I – Les réflexions engendrent O(E)

I.1 On a $y - x \neq 0$ donc $\dim \operatorname{vect}(y-x) = 1$. Comme $\mathrm{H} = \operatorname{vect}(y-x)^\perp$, $\dim \mathrm{H} = n - \dim \operatorname{vect}(y-x) = n-1$. Donc H est un hyperplan de E.

I.2 La projection de x sur $\operatorname{vect}(y-x)$ est $z = \dfrac{(y-x|x)}{\|y-x\|^2}(y-x)$. Or $\|y-x\|^2 = \|y\|^2 - 2(x|y) + \|x\|^2 = 2(\|x\|^2 - (x|y))$ car $\|y\| = \|x\|$ et donc $\|y-x\|^2 = 2(x|x-y)$. Finalement $z = -\dfrac{1}{2}(y-x)$. On en déduit que $s(x) = x - 2z = y$.
On pouvait également remarquer que $y-x$ et $y+x$ sont orthogonaux. En effet, $(y-x|y+x) = \|y\|^2 - \|x\|^2 = 0$. D'une part, $y - x \in \mathrm{H}^\perp$ donc $s(y-x) = x-y$. D'autre part, $y+x \in \operatorname{vect}(y-x)^\perp = \mathrm{H}$ donc $s(y+x) = y+x$. Ainsi $s(y) - s(x) = x - y$ et $s(y) + s(x) = y + x$. En soustrayant ces deux égalités membre à membre, on obtient bien $s(x) = y$.

I.3 **I.3.a** Si $n_u = n$, alors $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \mathrm{E}$ et donc $u = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

I.3.b Si $n_u < n$, alors $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \subsetneq \mathrm{E}$. Il existe donc $x_0 \in \mathrm{E} \setminus \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$. On a bien $u(x_0) \neq x_0$.

I.3.c Comme u est une isométrie vectorielle, $\|u(x_0)\| = \|x_0\|$. D'après la question **I.2**, $u(x_0)$ est l'image de x_0 par la réflexion par rapport à l'hyperplan $\operatorname{vect}(u(x_0) - x_0)^\perp$.

I.3.d D'après la question précédente, $\mathrm{I}_s = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \operatorname{vect}(u(x_0) - x_0)^\perp$. Soit $x \in \mathrm{I}_u$. On a donc $x = u(x)$. Alors

$$(x|u(x_0) - x_0) = (x|u(x_0)) - (x|x_0) = (u(x)|u(x_0)) - (x|x_0) = 0$$

car u conserve le produit scalaire. Ainsi $x \in \operatorname{vect}(u(x_0) - x_0)^\perp = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$. D'où $\mathrm{I}_u \subset \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

I.3.e Soit $x \in \mathrm{I}_u$. Alors $u(x) = x$ et donc $s(u(x)) = s(x)$. Or $\mathrm{I}_u \subset \mathrm{I}_s$ donc $s(x) = x$. Ainsi $\mathrm{I}_u \subset \mathrm{I}_{s\circ u}$. De plus, $s(u(x_0)) = s(s(x_0)) = x_0$ car s est une symétrie donc $u_0 \in \mathrm{I}_{s\circ u}$. Or $x_0 \notin \mathrm{I}_u$ donc $\mathrm{I}_u \subsetneq \mathrm{I}_{s\circ u}$ puis $\dim \mathrm{I}_u < dim \mathrm{I}_{s\circ u}$ i.e. $n_u + 1 \leq n_{s\circ u}$.

I.4 Soit HR(k) l'hypothèse de récurrence suivante :

> Tout $u \in \mathrm{O(E)}$ tel que $n_u = k$ peut s'écrire comme la composée d'au plus $n - k$ réflexions.

HR(n) est vraie puisque si $n_u = n$, alors $u = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ s'écrit comme le produit de 0 réflexion.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et supposons HR(l) vraie pour $k \leq l \leq n$. Soit $u \in \mathrm{O(E)}$ tel que $n_u = k - 1$. La question précédente montre qu'il existe une réflexion s tel que $n_{s\circ u} \geq n_u + 1 = k$. Ainsi $s \circ u$ peut s'écrire comme le produit d'au plus $n - n_{s\circ u}$ réflexions. Or $u = s \circ s \circ u$ donc u s'écrit comme le produit d'au plus $n - n_{s\circ u} + 1$ réflexions. On conclut en remarquant que $n - n_{s\circ u} + 1 \leq n - n_u$, ce qui prouve que HR($k-1$) est vraie.
Par récurrence descendante forte, HR(k) est vraie pour $0 \leq k \leq n$.

Partie II – Automorphimes orthogonaux en dimension 3

II.1 D'après les résultats de la première partie, u peut s'écrire comme la composée de k réflexions avec $k \leq 2$.
On ne peut avoir $k = 0$, sinon on aurait $u = \mathrm{Id}_E$ et $n_u = 3$.
On ne peut pas non plus avoir $k = 1$, sinon u serait une réflexion et on aurait $n_u = 2$.
Ainsi u est la composée de deux réflexions. Ces deux réflexions sont distinctes sinon on aurait $u = \mathrm{Id}_E$ et $n_u = 3$.
u est donc une rotation.

II.2 u est la composée d'au plus 1 réflexion. u ne peut être la composée de 0 réflexion, sinon on aurait $u = \mathrm{Id}_E$ et $n_u = 3$. u est donc une réflexion.

II.3 **II.3.a** u est la composée d'au plus trois réflexions. u ne peut être la composée de 0 réflexion (sinon $n_u = 0$), ni la composée d'une réflexion (sinon $n_u = 2$), ni la composée de deux réflexions (sinon u est une rotation et $n_u = 1$ ou $n_u = 3$ suivant que l'angle est nul ou non). Ainsi u est la composée de trois réflexions.

II.3.b Comme u conserve le produit scalaire, on vérifie de manière immédiate que $-u$ conserve également le produit scalaire. Ainsi $-u$ est une isométrie vectorielle. Comme u est la composée de trois réflexions, $\det(u) = (-1)^3 = -1$ puis $\det(-u) = (-1)^3 \det(u) = 1$. Donc $-u$ est une isométrie vectorielle positif donc une rotation.

II.3.c Il existe donc une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E et un angle α tel que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(-u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Dans cette même base, la matrice de u est donc $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$. Posons $\theta = \alpha + \pi$. De la trigonométrie élémentaire montre que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

II.3.d Soit s l'endomorphisme de matrice $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ et r l'endomorphisme de matrice $\mathrm{R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans cette même base. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée directe, s est une réflexion et r une rotation. Enfin $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{RS} = \mathrm{SR}$, ce qui signifie que $u = r \circ s = s \circ r$.

II.4 Supposons $\mathrm{D} = \mathrm{P}^\perp$. Soit $x \in \mathrm{D}$. Alors $s \circ r(x) = s \circ r(x) = -x$. Soit $x \in \mathrm{P}$. Alors $s \circ r(x) = r \circ s(x) = r(x)$. Ainsi $r \circ s$ et $s \circ r$ coïncident sur D et P donc sur E puisque D et P sont supplémentaires dans E.
Supposons que s et r commutent. Soient $x \in \mathrm{D}$ et $y \in \mathrm{P}$. Remarquons que $r \circ s(x) = s \circ r(x) = s(x)$. On en déduit que $s(x) \in \mathrm{D}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $s(x) = \lambda x$. De plus, s étant une isométrie vectorielle, $(x|y) = (s(x)|s(y)) = -\lambda(x|y)$ i.e. $(1+\lambda)(x|y) = 0$. Si $\lambda = -1$, alors $s(x) = -x$ et donc $x \in \mathrm{P}^\perp$ d'où $(x|y) = 0$. Sinon, on obtient directement $(x|y) = 0$. Ainsi P et D sont orthogonaux. Comme $\dim \mathrm{P} + \dim \mathrm{D} = 3$, on en déduit que l'un est l'orthogonal de l'autre.