Calcul différentiel

Dérivées partielles

Solution 1

1. Comme les applications $(x, y) \mapsto x^3 - y^3$ et $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ sont polynomiales, elles sont continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ ne s'annule qu'en $(0, 0)$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. De plus,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x^3 - y^3| \leq |x^3| + |y^3| \leq (|x| + |y|)(x^2 + y^2)$$

donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},\ |f(x, y)| \leq \|(x, y)\|_1$$

Ainsi f est bien continue en $(0, 0)$. Finalement, f est bien continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. De la même manière, les applications polynomiales $(x, y) \mapsto x^3 - y^3$ et $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{y^4 + 3x^2y^2 + 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}$$

Par ailleurs,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 1$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$,

$$\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = -1$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$.
Enfin,

$$\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0 \neq 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$. De même,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 0 \neq -1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas non plus continue en $(0, 0)$.

3. Attention, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ peuvent ne pas être continues en $(0, 0)$ mais pourtant y admettre des dérivées partielles.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} = \frac{1}{x}$$

donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ n'est pas définie.
De même,

$$\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = -\frac{1}{y}$$

donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ n'est pas non plus définie.
Par contre,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x-0} = 0$$

donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$ et

$$\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y-0} = 0$$

donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$.

Solution 2

1. En utilisant éventuellement une composition par l'application $(x,y) \mapsto (y,x)$, on trouve :
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x) \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$$
2. En utilisant une composition par l'application $x \mapsto (x,x)$, on trouve :
$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)$$
3. En utilisant une composition par $(x,y) \mapsto (y, f(x,x))$, on trouve :
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,f(x,x))\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)\right) \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,f(x,x))$$
4. En utilisant une composition par $x \mapsto (x, f(x,x))$, on trouve :
$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,f(x,x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,f(x,x))\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)\right)$$

Solution 3

1. A y_0 fixé, $f(x,y_0) = \begin{cases} |x| \text{ si } |x| \geq |y_0| \\ |y_0| \text{ si } |x| \leq |y_0| \end{cases}$. Ainsi $f(.,y_0)$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{pmy_0\}$ et n'est pas dérivable en $\pm y_0$.
De même, à x_0 fixé, $f(x_0,y) = \begin{cases} |y| \text{ si } |y| \geq |x_0| \\ |x_0| \text{ si } |y| \leq |x_0| \end{cases}$. Ainsi $f(x_0,.)$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm x_0\}$ et n'est pas dérivable en $\pm x_0$.
On en déduit que f n'admet des dérivées partielles en (x_0,y_0) si et seulement si $|x_0| \neq |y_0|$.
2. La valeur absolue étant dérivable en tout point différent de 0, f admet une dérivée partielle en x en tout point (x_0,y_0) tel que $x_0 \neq 0$ et f n'admet pas de dérivée partielle en x en un point $(0,y_0)$. De même f admet une dérivée partielle en y en tout point (x_0,y_0) tel que $y_0 \neq 0$ et f n'admet pas de dérivée partielle en y en un point $(x_0,0)$.
3. f est évidemment dérivable en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus, $x \mapsto f(x,0) = \dfrac{\sin x^2}{|x|}$ et $y \mapsto f(0,y) = \dfrac{\sin y^2}{|y|}$ ne sont pas dérivables en 0 (considérer le taux d'acroissement à gauche et à droite) donc f n'admet pas de dérivée partielle en $(0,0)$.

Solution 4

f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus,

$$|f(x,y) \leq |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\|(x,y)\|^2$$

On a donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, ce qui prouve que f est continue en $(0,0)$.
Si $(x,y) \neq (0,0)$, on a clairement :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

De plus, $f(x,0)$ pour $x \neq 0$ et $f(0,y) = 0$ pour $y \neq 0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Les dérivées partielles de f sont clairement continues en tout point distinct de $(0,0)$. De plus,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq \frac{|y|(x^4+4x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{|y|(2x^4+4x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2} = 2|y|$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq \frac{|x|(x^4+4x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{|x|(2x^4+4x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2} = 2|x|$$

On a donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

ce qui prouve que les dérivées partielles de f sont continues en $(0,0)$. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$. On a :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = 1 \qquad \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = -1$$

On a donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$. Donc f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$.

Solution 5

On a classiquement :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}\right) \\ &\quad - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}\right) \\ &\quad + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)\end{aligned}$$

Après simplification, on trouve :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

Solution 6

Les applications $t \mapsto e^t \cos t$ et $t \mapsto \ln(1+t^2)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, l'application $t \mapsto (e^t\cos t, \ln(1+t^2))$ l'est également. Par composition, g est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus,

$$g'(t) = e^t(\cos t - \sin t)\frac{\partial f}{\partial x}(e^t\cos t, \ln(1+t^2)) + \frac{2t}{1+t^2}\frac{\partial f}{\partial y}(e^t\cos t, \ln(1+t^2))$$

Solution 7

1. Une fonction constante égale à c vérifie $(*)$ si et seulement si $2c = 2c^2$. Les fonctions constantes vérifiant $(*)$ sont donc la fonction nulle et la fonction constante égale à 1.

2. **a.** En choisissant $x = 0$ et $y = 0$ dans $(*)$, on obtient $2f(0) = 2f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2f(x) = f(x+0) + f(x-0) = 2f(x)f(0)$$

on ne peut avoir $f(0) = 0$ sinon f serait constante égale à 0. Ainsi $f(0) = 1$.
En dérivant $(*)$ par rapport à y, on obtient

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y)$$

En choisissant $x = 0$ et $y = 0$ dans cette nouvelle équation, on en déduit $f(0)f'(0) = 0$ et donc $f'(0) = 0$ puisque $f(0) = 1 \neq 0$.

b. En choisissant $x = 0$ dans $(*)$, on obtient $f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Puisque $f(0) = 1$, $f(-y) = f(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ i.e. f est paire.

3. **a.** Les applications $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto x - y$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, $(x, y) \mapsto f(x+y)$ et $(x, y) \mapsto f(x-y)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Par suite, F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de telles fonctions.

b. On calcule les dérivées partielles premières :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f'(x+y) + f'(x-y) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = f'(x+y) - f'(x-y)$$

puis les dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = f''(x+y) + f''(x-y) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = f''(x+y) + f''(x-y)$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = f''(x+y) - f''(x-y)$$

c. On voit que $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$. Or f étant solution de$(*)$, on sait également que $F(x, y) = 2f(x)f(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On en déduit que $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = 2f''(x)f(y)$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 2f(x)f''(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a donc $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En choisissant $y = 0$, on en déduit que $f''(x) - f''(0)f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puisque $f(0) = 1$. Quitte à poser $\alpha = f''(0)$, f est solution de l'équation différentielle $z'' - \alpha z = 0$.

d. C'est du cours.

(I) Si $\alpha = 0$, les solutions de cette équation différentielle sont $x \mapsto Ax + B$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

(II) Si $\alpha > 0$, les solutions de cette équation différentielle sont $x \mapsto A\operatorname{ch}(\omega x) + B\operatorname{sh}(\omega x)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega = \sqrt{\alpha}$.

(III) Si $\alpha < 0$, les solutions de cette équation différentielle sont $x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega = \sqrt{-\alpha}$.

4. Soit f une solution non constamment nulle

- Si f est du type (I), alors les conditions de la question **2** entraîne $A = 0$ et $B = 1$, ce qui est exclu car on a supposé f non constante.
- Si f est du type (II), alors les conditions de la question **2** entraîne $A = 1$ et $B = 0$. Réciproquement toute fonction $g_\omega : x \mapsto \operatorname{ch}(\omega x)$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ est bien solution de $(*)$.
- Si f est du type (III), alors les conditions de la question **2** entraîne $A = 1$ et $B = 0$. Réciproquement toute fonction $h_\omega : x \mapsto \cos(\omega x)$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ est bien solution de $(*)$.

Les solutions de $(*)$ sont donc la fonction nulle, les fonctions g_ω et h_ω pour $\omega \in \mathbb{R}$.

Solution 8

1. $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et ne s'y annule pas donc $(x, y) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y est également continue. Comme sin est continue sur $\mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ est continue $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme produit de fonctions continues.
De plus, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $|f(x, y)| \leq |x^2 + y^2| = \|(x, y)\|^2$. Ainsi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, ce qui prouve que f est aussi continue en $(0, 0)$.
Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. **a.** Les théorèmes classiques de dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle nous donne la dérivabilité des applications partielles et donc l'existence de dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus, pour $x \neq 0$:

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{|x|} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc f admet une dérivée partielle par rapport à x en $(0, 0)$.
De même, pour $y \neq 0$:

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = y \sin \frac{1}{|y|} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc f admet une dérivée partielle par rapport à y en $(0, 0)$.
Finalement, f admet des dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2$.

b. Les théorèmes de dérivation nous donnent pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

On montre comme à la première question que les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Mais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'admettent pas de limite en $(0, 0)$. En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0\right) = -1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}}, 0\right) = \frac{2}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et pourtant $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0\right)$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}}, 0\right)$ tendent vers $(0, 0)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ceci prouve que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'admet pas de limite en $(0, 0)$. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0, 0)$. A fortiori, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues en $(0, 0)$.

c. f n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Elle l'est néanmoins sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Solution 9

---

1. Les applications $\pi_1 : (x, y) \mapsto x$ et $\pi_2 : (x, y) \mapsto x$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et sin est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc $\sin \circ \pi_1 - \sin \circ \pi_2$ et $\pi_1 - \pi_2$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus, $\pi_1 - \pi_2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$.

2. Remarquons que pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$,

$$f(x,y) = \frac{2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}{x - y}$$

Donc en posant $\varphi : t \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$,

$$f(x,y) = \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Soit $(a,a) \in \Delta$. Alors $\lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{x-y}{2} = 0$ et $\lim_0 \varphi = 1$ donc $\lim_{(x,y)\to(a,a)} \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1$. De plus, on a clairement $\lim_{(x,y)\to(a,a)} \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = \cos a$ donc $\lim_{(a,a)} f = \cos(a)$. L'application f est donc prolongeable en une application $\tilde{f}$. De plus, pour $(a,a) \in \Delta$, $\tilde{f}(a,a) = \cos a$.

3. Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, $\tilde{f}$ admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$. On peut également préciser que

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) = \frac{\cos(x)(x-y) - (\sin(x) - \sin(y))}{(x-y)^2} \qquad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y) = \frac{\cos(y)(y-x) - (\sin(y) - \sin(x))}{(y-x)^2}$$

Soit alors $(a,a) \in \Delta$. Pour $h \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{\tilde{f}(a+h,a) - \tilde{f}(a,a)}{h} = \frac{\sin(a+h) - \sin(a) - h\cos(a)}{h^2}$$

Or d'après la formule de Taylor,

$$\sin(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sin(a) + h\cos(a) - \frac{\sin(a)}{2}h^2 + o(h^2)$$

donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}(a+h,a) - \tilde{f}(a,a)}{h} = -\frac{1}{2}\sin(a)$$

Ainsi $\tilde{f}$ admet une dérivée partielle selon sa première variable en (a,a) et

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(a,a) = -\frac{1}{2}\sin a$$

On prouve de la même manière $\tilde{f}$ admet une dérivée partielle selon sa seconde variable en (a,a) et

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(a,a) = -\frac{1}{2}\sin a$$

Remarque. Pour simplifier, on aurait pu remarquer que $\tilde{f}(x,y) = \tilde{f}(y,x)$ donc si $\tilde{f}$ admet une dérivée partielle suivant sa seconde variable en (x,y) elle en admet une selon sa seconde variable en (y,x) et

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(y,x)$$

4. La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim_0 \varphi = 1$. Notons encore φ ce prolongement. On a alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \tilde{f}(x,y) = \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

φ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \varphi'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t}$$

Or $\cos t \underset{t\to 0}{=} 1 + o(1)$ et $\sin t \underset{t\to 0}{=} t + o(t)$ donc $\varphi'(t) \underset{t\to 0}{=} o(1)$ i.e. $\lim_0 \varphi' = 0$. On en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (et que $\varphi'(0) = 0$). Puisque $(x,y) \mapsto \frac{x-y}{2}$ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par composition. De la même manière, $(x,y) \mapsto \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc $\tilde{f}$ l'est également en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. La question précédente était donc inutile. Remarquons qu'on peut également calculer les dérivées partielles de $\tilde{f}$ en (a,a) à l'aide de son expression en fonction de φ :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(a,a) = \frac{1}{2}\varphi'(0)\cos(a) - \frac{1}{2}\varphi(0)\sin(a) = -\frac{1}{2}\sin a$$
$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(a,a) = -\frac{1}{2}\varphi'(0)\cos(a) - \frac{1}{2}\varphi(0)\sin(a) = -\frac{1}{2}\sin a$$

5. En utilisant le développement en série entière de sin,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n+1)!}$$

Ainsi φ est développable en une série entière de rayon de convergence infini. Par conséquent, φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. L'expression

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \tilde{f}(x,y) = \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

permet alors de montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. En effet, les applications $(x,y) \mapsto \dfrac{x+y}{2}$ et $(x,y) \mapsto \dfrac{x-y}{2}$ sont clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ tandis que φ et cos sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque. On pouvait également utiliser l'indication de l'énoncé. Remarquons que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (y compris lorsque $x = y$)

$$\tilde{f}(x,y) = \int_0^1 \cos(tx + (1-t)y)\ \mathrm{d}t$$

Pour tout $t \in [0,1]$, $(x,y) \mapsto \cos(tx+(1-t)y)$ admet des dérivées partielles à tout ordre. Ces dérivées partielles sont de la forme $(x,y) \mapsto (-1)^\alpha t^\beta (1-t)^\gamma \cos(tx+(1-t)y)$ ou $(x,y) \mapsto (-1)^\alpha t^\beta (1-t)^\gamma \sin(tx+(1-t)y)$. De plus,

$$\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,1],\ \left|(-1)^\alpha t^\beta (1-t)^\gamma \cos(tx+(1-t)y)\right| \leq 1$$

et

$$\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,1],\ \left|(-1)^\alpha t^\beta (1-t)^\gamma \sin(tx+(1-t)y)\right| \leq 1$$

et $t \mapsto 1$ est intégrable sur le segment $[0,1]$. Donc, en appliquant le théorème de dérivation des intégrales à paramètres successivement par rapport aux variables x et y, on en déduit que $\tilde{f}$ admet des dérivées partielles à tout ordre.

6. Puisque $|\sin'| = |\cos| \leq 1$, sin est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ donc

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x-y|$$

donc

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta,\ |\tilde{f}(x,y)| \leq 1$$

De plus, pour $(a,a) \in \Delta$, $|\tilde{f}(a,a)| = |\cos(a)| \leq 1$ donc

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\tilde{f}(x,y)| \leq 1$$

Par ailleurs, $\tilde{f}(0,0) = \cos(0) = 1$ et $\tilde{f}(\pi,\pi) = \cos(\pi) = -1$. Ainsi $\tilde{f}$ admet 1 pour maximum et -1 pour minimum sur $\mathbb{R}^2$.

Solution 10

---

1. On applique la règle de la chaîne,

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$
$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) &= \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&\quad + \cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&\quad + \sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&\quad + \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&= \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + 2\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta) &= -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&\quad + r^2\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&\quad - r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&\quad - r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&\quad - r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&\quad + r^2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&= -r\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + r^2\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r^2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(r\cos\theta, r\sin\theta) - 2r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + r\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(r,\theta) = r^2\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$$

2. Il s'agit dans un premier temps d'appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Comme $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$ est continue sur tout compact $[a,b]\times[0,2\pi]$ avec $[a,b]\subset]-R,R[$, cela ne pose pas de problème (je ne détaille pas toutes les hypothèse). On en déduit que φ_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-R,R[$ et que :

$$\forall r\in]-R,R[,\ \varphi_n'(r) = \int_0^{2\pi}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)e^{-in\theta}\ d\theta$$
$$\forall r\in]-R,R[,\ \varphi_n''(r) = \int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta)e^{-in\theta}\ d\theta$$

Supposons dans un premier temps $n=0$. Alors

$$\forall r\in]-R,R[,\ r^2\varphi_0''(r) + r\varphi_0'(r) = \int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(r,\theta)\ d\theta = \left[\frac{\partial F}{\partial\theta}(r,\theta)\right]_0^{2\pi} = 0$$

Ainsi φ_n est solution de l'équation différentielle $x^2y''+xy'=0$. Les solutions de l'équation différentielles $x^2z'+xz=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x\mapsto\frac{A}{x}$ donc les solutions de $x^2y''+xy'=0$ sont les fonctions $x\mapsto A\ln x+B$. On montre de même que les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x\mapsto A\ln(-x)+B$. Mais φ_0 est continue en 0 donc en étudiant le recollement en 0, on trouve que φ_0 est constante.

Supposons maintenant $n \neq 0$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\forall r \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[,\ \varphi_n(r) &= -\frac{1}{in}\left[\mathrm{F}(r,\theta)e^{-in\theta}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \theta}(r,\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \theta}(r,\theta)e^{-in\theta}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \theta^2}(r,\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \theta^2}(r,\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall r \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[,\ r^2\varphi_n''(r) + r\varphi_n'(r) - n^2\varphi_n(r) = 0$$

et donc φ_n est solution sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) :\ x^2y'' + xy' - n^2y = 0$$

On va d'abord résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$. Une récurrence facile montre alors que toute solution est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Notons D l'endomorphisme de $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ définie par $\mathrm{D}(y) :\ x \mapsto xy'(x)$. L'équation différentielle $(\mathcal{E})$ s'écrit alors $\mathrm{D}^2(y) - n^2y = 0$. D'après le lemme des noyaux, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est alors

$$\operatorname{Ker}\left(\mathrm{D}^2 - n^2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}\right) = \operatorname{Ker}\left(\mathrm{D} - n\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(\mathrm{D} + n\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}\right) = \operatorname{vect}\left(x \mapsto x^n, x \mapsto x^{-n}\right)$$

De la même manière, on montre que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_-^*$ est $\operatorname{vect}\left(x \mapsto x^n, x \mapsto x^{-n}\right)$. On en déduit qu'il existe $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall r \in]0, \mathrm{R}[,\ \varphi_n(x) = \mathrm{A}x^n + \mathrm{B}x^{-n} \qquad \text{et} \qquad \forall r \in]-\mathrm{R}, 0[,\ \varphi_n(x) = \mathrm{C}x^n + \mathrm{D}^{-n}$$

Comme φ_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, le recollement en 0 montre que

- si $|n| \leq 2$, il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ tel que $\forall r \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, $\varphi_n(r) = \mathrm{A}r^{|n|}$;
- si $|n| \geq 3$, il existe $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi_n(r) = \begin{cases} \mathrm{A}r^{|n|} & \text{si } -\mathrm{R} < r < 0 \\ 0 & \text{si } r = 0 \\ \mathrm{B}r^{|n|} & \text{si } 0 < r < \mathrm{R} \end{cases}$.

Solution 11

Soient f et f^2 harmoniques sur U. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial f^2}{\partial x_i} = 2f\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ puis $\dfrac{\partial^2 f^2}{\partial x_i^2} = 2f\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2$. Ainsi

$$\Delta(f^2) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f^2}{x_i^2} = 2f\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = 2f\Delta f + 2\|\nabla f\|^2$$

Comme f et f^2 sont harmoniques sur U, $\Delta(f) = \Delta(f^2) = 0$. Par suite, ∇f est nul sur l'ouvert connexe par arcs U donc f est constante sur U.

Différentiation

Solution 12

1. On montre sans difficulté que D est un sous-espace vectoriel de E^*. On vérifie également sans peine que les formes linéaires $\varphi_i :\ f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ appartiennent toutes à D. Elles sont calirement non nulles puisque $\varphi_i(e_i^*) = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

2. Notons ψ l'application de l'énoncé. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\forall f \in \mathrm{E},\ \psi(\lambda a + \mu b)(f) = \mathrm{d}f(0)\cdot(\lambda a + \mu b) = \lambda\ \mathrm{d}f(0)\cdot a + \mu\ \mathrm{d}f(0)\cdot b = \lambda\psi(a)(f) + \mu\psi(b)(f)$$

car $\mathrm{d}f(0)$ est linéaire par définition. Ainsi $\psi(\lambda a + \mu b) = \lambda\psi(a) + \mu\psi(b)$ de sorte que ψ est linéaire.
Soit $a \in \operatorname{Ker}\psi$. Pour tout $f \in \mathrm{E}$, $\psi(a)(f) = 0$. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i^* \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{d}e_i^*(0) = e_i^*$ car e_i^* est linéaire. Ainsi

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \psi(a)(e_i^*) = 0 = e_i^*(a)$$

Par conséquent, $a = \sum_{i=1}^n e_i^*(a)e_i = 0$. L'application ψ est donc bien injective.

3. Soit $f \in \mathrm{E}$. Fixons $x \in \mathbb{R}^n$. Par composition, l'application $\xi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(tx)$ est dérivable et, d'après la règle de la chaîne,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \xi'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)e_i^*(x)$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse

$$f(x) - f(0) = \xi(1) - \xi(0) = \int_0^1 \xi'(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\ \mathrm{d}t$$

Notons $\mathbb{1}$ la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que $f_i : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\ \mathrm{d}t$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi

$$f = f(0)\mathbb{1} + \sum_{i=1}^n f_i e_i^*$$

On peut prouver à l'aide du théorème de dérivation des intégrales à paramètre que les f_i sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sont donc des éléments de E. Soit alors $\varphi \in \mathrm{D}$.

$$\varphi(f) = f(0)\varphi(\mathbb{1}) + \sum_{i=1}^n \varphi(f_i e_i^*)$$

Tout d'abord,

$$\varphi(\mathbb{1}) = \varphi(\mathbb{1}^2) = 2\mathbb{1}(0)\varphi(\mathbb{1}) = 2\varphi(\mathbb{1})$$

donc $\varphi(\mathbb{1}) = 0$. De plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\varphi(f_i e_i^*) = f_i(0)\varphi(e_i^*) + e_i^*(0)\varphi(f_i) = \varphi(e_i^*)f_i$$

Ainsi

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i^*)f_i(0) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)^* \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)\ \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i^*)\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \sum_{i=1}^n \varphi(e_i^*)\varphi_i$$

On a vu à la première question que les φ_i appartiennaient à D. Comme les $\varphi(e_i^*)$ sont des scalaires, on peut affirmer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ engendre D. De plus, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est l'image de la base $(e_1, \dots, e_n)$ par l'application linéaire injective ψ donc cette famille est libre : c'est une base de D.

Solution 13

---

1. Comme le produit scalaire est bilinéaire, g est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et

$$\forall (x, h) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \mathrm{d}g(x) \cdot h = 2\langle f(x) - a \mid \mathrm{d}f(x) \cdot h\rangle$$

2. Posons $\mathrm{M} = g(0)$. Puisque $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$, il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| > \mathrm{A} \implies \|g(x)\| > \mathrm{M}$$

Comme la boule de centre 0 et de rayon A est compact, la fonction continue g admet un minimum m sur cette boule. De plus, comme 0 appartient à cette boule, $m \leq g(0) = \mathrm{M}$. Comme $f(x) > \mathrm{M}$ lorsque x n'appartient pas à cette boule, m est bien le minimum de g sur $\mathbb{R}^n$.

3. Notons x_0 le point où est atteient le minimum de g. Par conséquent, $\mathrm{d}g(x_0) = 0$. D'après la première question,

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ \langle f(x_0) - a \mid \mathrm{d}f(x_0) \cdot h \rangle = 0$$

Mais $\mathrm{d}f(x_0)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ injectif et donc également surjectif. Il s'ensuit que

$$\forall k \in \mathbb{R}^n,\ \langle f(x_0) - a \mid k \rangle = 0$$

puis $f(x_0) - a = 0$. Ainsi $f(x_0) = a$ de sorte que f est surjective.

Solution 14

---

1. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\exp(\mathrm{M}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{M}^k}{k!} = \exp(0) + \mathrm{M} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\mathrm{M}^k}{k!}$$

Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$. Alors

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\mathrm{M}^n}{n!} \right\| &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\|\mathrm{M}^n\|}{n!} && \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\|\mathrm{M}\|^n}{n!} = \exp(\|\mathrm{M}\|) - \|\mathrm{M}\| - 1 \end{aligned}$$

Puisque pour x réel, $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\mathrm{M}^n}{n!} \underset{\mathrm{M}\to 0}{=} o(\mathrm{M})$$

Finalement,

$$\exp(\mathrm{M}) \underset{\mathrm{M}\to 0}{=} \exp(0) + \mathrm{M} + o(\mathrm{M})$$

Par conséquent, $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \exp(\mathrm{M})$ est différentiable en 0 et $\mathrm{d}\exp(0) = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

2. Fixons $t_0 \in \mathbb{R}$. Remarquons que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \exp(\mathrm{A}(t) - \mathrm{A}(t_0)) \exp(\mathrm{A}(t_0))$$

car $\mathrm{A}(t) - \mathrm{A}(t_0)$ et $\mathrm{A}(t_0)$ commutent. L'application $\gamma : t \mapsto \mathrm{A}(t) - \mathrm{A}(t_0)$ est nulle en t_0 et est dérivable en t_0. Comme exp est différentiable en 0, $\exp \circ \gamma$ est dérivable en t_0 et

$$(\exp \circ \gamma)'(t_0) = \mathrm{d}\exp(0) \cdot \gamma'(t_0) = \gamma'(t_0) = \mathrm{A}'(t_0)$$

Enfin, l'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}\exp(\mathrm{A}(t_0))$ est linéaire donc φ est dérivable en t_0 et

$$\varphi'(t_0) = \mathrm{A}'(t_0) \exp(\mathrm{A}(t_0))$$

En écrivant $\varphi(t) = \exp(\mathrm{A}(t_0)) \exp(\mathrm{A}(t) - t_0)$, on obtient de la même manière

$$\varphi'(t_0) \exp(\mathrm{A}(t_0)) \mathrm{A}'(t_0)$$

Finalement, on a bien

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = \mathrm{A}'(t) \exp(\mathrm{A}(t)) = \exp(\mathrm{A}(t)) \mathrm{A}'(t)$$

Solution 15

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors pour tout $\mathrm{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$f(\mathrm{M} + \mathrm{H}) = f(\mathrm{M}) + \mathrm{MH} + \mathrm{HM} + \mathrm{H}^2$$

En choisissant une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|\mathrm{H}^2\| \leq \|\mathrm{H}\|^2$ donc

$$f(\mathrm{M} + \mathrm{H}) \underset{\mathrm{H}\to 0}{=} f(\mathrm{M}) + \mathrm{MH} + \mathrm{HM} + o(\mathrm{H})$$

De plus, $\mathrm{H} \mapsto \mathrm{MH} + \mathrm{HM}$ est linéaire. Ainsi f est différentiable en M et $\mathrm{d}f(\mathrm{M})$ est l'application $\mathrm{H} \mapsto \mathrm{MH} + \mathrm{HM}$.

Solution 16

Remarquons que $\overline{\Omega}$ est également borné (utiliser la caractérisation séquentielle de l'adhérence par exemple). Comme $\overline{\Omega}$ est fermé par définition, $\overline{\Omega}$ est un compact de E (car E est de dimension finie). Ainsi f admet un maximum et un minimum sur $\overline{\Omega}$.
Si ce minimum et ce maximum sont atteints sur $\mathrm{Fr}(\Omega)$, alors ils sont égaux puisque f est constante sur $\mathrm{Fr}(\Omega)$. Ainsi f est constante sur $\overline{\Omega}$ et a fortiori sur Ω. On en déduit que $\mathrm{d}f$ est nulle sur Ω.
Sinon le minimum ou le maximum est atteint sur Ω. Ainsi f admet un extremum local sur l'ouvert Ω. On en déduit que $\mathrm{d}f$ s'annule sur Ω.

Gradient

Solution 17

1. **Première méthode.** Soit $a \in \mathrm{E}$. Pour tout $h \in \mathrm{E}$,

$$\begin{aligned}
\varphi(a+h) &= \frac{1}{2}\langle f(a+h), a+h\rangle + \langle u, a+h\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle f(a), a\rangle + \frac{1}{2}\langle f(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), a\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle + \langle u, a\rangle + \langle u, h\rangle \\
&= \varphi(a) + \frac{1}{2}\langle f(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), a\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle + \langle u, h\rangle \\
&= \varphi(a) + \langle f(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle + \langle u, h\rangle \qquad \text{car } f \text{ est auto-adjoint} \\
&= \varphi(a) + \langle f(a)+u, h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle
\end{aligned}$$

L'application $h \mapsto \langle f(a)+u, h\rangle$ est clairement linéaire. De plus, via l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle f(h), h\rangle| \leq \|f(h)\|\|h\|$$

Or f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie donc f est continue. Notamment, $\lim\limits_{h\to 0} f(h) = 0_{\mathrm{E}}$ puis $\lim\limits_{h\to 0} \|f(h)\| = 0$. On en déduit que

$$\varphi(a+h) \underset{h\to 0}{=} \varphi(a)\langle f(a)+u, h\rangle + o(h)$$

Ainsi f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a)$ est la forme linéaire $h \mapsto \langle f(a)+u, h\rangle$. **Deuxième méthode** L'application $\xi : x \mapsto \langle u, x\rangle$ est linéaire donc est différentiable sur E et $\mathrm{d}\xi = \xi$. f et Id_{E} sont différentiables sur E en tant qu'applications linéaires, donc $\psi : x \mapsto \langle f(x), x\rangle$ est également différentiable sur E car le produit scalaire est bilinéaire. De plus, $\mathrm{d}f = f$ et $\mathrm{d}\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ de sorte que

$$\forall (x,h) \in \mathrm{E}^2,\ \mathrm{d}\psi(x)\cdot h = \langle f(h), x\rangle + \langle f(x), h\rangle = 2\langle f(x), h\rangle$$

Finalement, $\varphi = \frac{1}{2}\psi + \xi$ est également différentiable et

$$\forall (x,h) \in \mathrm{E}^2,\ \mathrm{d}\varphi(x)\cdot h = \langle f(x)+u, h\rangle$$

2. On déduit directement de la question précédente que $\nabla\varphi(a) = \langle f(a)+u$ pour tout $a \in \mathrm{E}$.

Solution 18

1. Posons $\psi(x) = \|x\|^2$ et $\xi(x) = \langle f(x), x\rangle$ pour $x \in \mathrm{E}$.
Soit $x \in \mathrm{E}$. D'une part,

$$\forall h \in \mathrm{E},\ \psi(x+h) = \psi(x) + 2\langle x, h\rangle + \|h\|^2$$

Ainsi

$$\psi(x+h) \underset{h\to 0}{=} = \psi(x) + 2\langle x, h\rangle + o(h)$$

donc ψ est différentiable en x et $\nabla\psi(x) = 2x$.
D'autre part, en utilisant le fait que f est auto-adjoint,

$$\forall h \in \mathrm{E},\ \xi(x+h) = \xi(x) + 2\langle f(x), h\rangle + \langle f(h), h\rangle$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle f(h), h\rangle| \leq \|f(h)\|\|h\|$$

De plus, $\lim_{h\to 0} f(h) = 0$ car f est continue (linéaire et $\dim \mathrm{E} < +\infty$) puis $\lim_{h\to 0} \|f(h)\| = 0$ (la norme est lipschitzienne donc continue). On en déduit que

$$\xi(x+h) \underset{h\to 0}{=} \xi(x) + 2\langle f(x), h\rangle + o(h)$$

donc ξ est différentiable en x et $\nabla\xi(x) = 2f(x)$.
Comme ψ ne s'annule pas sur $\mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, $\varphi = \dfrac{\xi}{\psi}$ est également différentiable sur $\mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$ et, par opérations

$$\forall x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\},\ \nabla\varphi(x) = \frac{\psi(x)\,\nabla\xi(x) - \xi(x)\,\nabla\psi(x)}{\psi(x)^2} = \frac{2\left(\|x\|^2 f(x) - \langle f(x), x\rangle x\right)}{\|x\|^4}$$

2. Supposons que x soit un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. Alors

$$\|x\|^2 f(x) - \langle f(x), x\rangle x = \lambda\|x\|^2 x - \lambda\|x\|^2 x = 0_\mathrm{E}$$

donc $\nabla\varphi(x) = 0_\mathrm{E}$.
Réciproquement supposons que $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$ vérifie $\nabla\varphi(x) = 0_\mathrm{E}$. Alors

$$\|x\|^2 f(x) - \langle f(x), x\rangle x = 0_\mathrm{E}$$

puis, comme $x \neq 0_\mathrm{E}$,

$$f(x) = \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} x$$

donc x est bien un vecteur propre de f.

3. Remarquons que pour tout $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, $\varphi(x/\|x\|) = \varphi(x)$. Ainsi, en notant S la sphère unité de E, $\varphi(\mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}) = \varphi(\mathrm{S})$. Puisque φ est différentiable sur $\mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, elle est a fortiori continue sur $\mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$. Comme S est compact, $\varphi(\mathrm{S})$ est un segment. Notamment, φ admet un maximum sur S et donc sur $\mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$.

4. Puisque φ admet un maximum global sur l'*ouvert* $\mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, elle y admet un point critique. D'après une question précédente, ce point critique est un vecteur propre de f.

Jacobienne

Solution 19

On notera $\operatorname{Jac} g(x, y)$ la matrice jacobienne de g au point (x, y).

1. Remarquons que g admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et que ces dérivées partielles, à savoir $\dfrac{\partial g}{\partial x} : (x, y) \mapsto \left(1, \dfrac{1}{3}\cos x\right)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2\cos y, 1)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$. De plus,

$$\operatorname{Jac} g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2\cos y \\ \frac{1}{3}\cos x & 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice jacobienne est $1 - \dfrac{2}{3}\cos(x)\cos(y) > 0$ donc $\mathrm{d}g(x, y)$ est inversible.

2. Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$
\begin{aligned}
&\exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = (X,Y) \\
\iff &\exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x + 2\sin y = X \\ y + \frac{1}{3}\sin x = Y \end{cases} \\
\iff &\exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x + 2\sin y = X \\ y + \frac{1}{3}\sin(X - 2\sin y) = Y \end{cases}
\end{aligned}
$$

Considérons l'application $\varphi : y \in \mathbb{R} \mapsto y + \frac{1}{3}\sin(X - 2\sin y)$. Alors $\lim_{+\infty} \varphi = +\infty$ et $\lim_{-\infty} \varphi = -\infty$. De plus, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \varphi'(y) = 1 - \frac{2}{3}\cos(y)\cos(X - 2y) > 0$$

donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Enfin φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On peut alors conclure à la bijectivité de g.

3. On sait que $g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ donc $dg(g^{-1}(0,0)) = d\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(0,0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ donc $\mathrm{Jac}\, g(g^{-1}(0,0))\,\mathrm{Jac}\, g^{-1}(0,0) = I_2$. Or $g(0,0) = (0,0)$ donc $g^{-1}(0,0) = (0,0)$ puis

$$\mathrm{Jac}\, g^{-1}(0,0) = (\mathrm{Jac}\, g(0,0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution 20

---

1. f et g admettent des dérivées partielles continues en tout point de $\mathbb{R}^2$ donc elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ et a fortiori différentiables. De plus,

$$\mathrm{Jac}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2 - y^2) & -2y\cos(x^2 - y^2) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Jac}\, g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. **a.** Remarquons que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f \circ g(x,y) = \sin(4xy)$$

On en déduit que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{Jac}(f \circ g)(x,y) = \begin{pmatrix} 4y\cos(4xy) & 4x\cos(4xy) \end{pmatrix}$$

puis que

$$d(f \circ g)(x,y) \cdot (u,v) = 4(uy + vx)\cos(4xy)$$

b. Remarquons que

$$\mathrm{Jac}(f \circ g)(x,y) = \mathrm{Jac}\, f(g(x,y))\,\mathrm{Jac}\, g(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x+y)\cos(4xy) & -2(x-y)\cos(4xy) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x\cos(4xy) & 4y\cos(4xy) \end{pmatrix}$$

On aboutit au même résultat que précédemment.

Espace tangent

Solution 21

---

1. Soient $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$. La transposition est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie : elle est donc continue. On en déduit aisément que

$$(e^{tA})^{\top} = e^{tA^{\top}} = e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}$$

Ainsi $e^{tA} \in O_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. L'application $\gamma_\mathrm{A} : t \mapsto e^{t\mathrm{A}}$ est est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma'_\mathrm{A}(t) = \mathrm{A}\exp(t\mathrm{A})$. Notamment, $\gamma_\mathrm{A}(0) = \mathrm{I}_n$ et $\gamma'_\mathrm{A}(0) = \mathrm{A}$. Ainsi A est un vecteur tangent à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ en I_n.
Réciproquement soit A un vecteur tangent à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ en I_n. Il existe donc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ dérivable tel que $\gamma(0) = \mathrm{I}_n$ et $\gamma'(0) = \mathrm{A}$. Pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\gamma(t)^\mathsf{T}\gamma(t) = \mathrm{I}_n$. Par bilinéarité du produit matriciel et linéarité de la transposition, on obtient en dérivant,

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[,\ \gamma'(t)^\mathsf{T}\gamma(t) + \gamma(t)^\mathsf{T}\gamma'(t) = 0$$

Notamment,

$$\gamma'(0)^\mathsf{T}\gamma(0) + \gamma(0)^\mathsf{T}\gamma'(0) = 0$$

Ce qui done $\mathrm{A}^\mathsf{T} + \mathrm{A} = 0$ et donc $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tangent à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ en I_n est $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Solution 22

Soit $\mathrm{M} = (x_0, y_0, z_0) \in \mathrm{S}$. Un vecteur normal au plan tangent en M à S est $n = (3x_0^2 + 3y_0, 3x_0, 1)$. Le vecteur u est tangent à S en M si et seulement si $u \perp n$ i.e. $-3x_0 = 1$. Ainsi l'ensemble recherché est la droite d'équation cartésienne $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{27} - y + z = 0 \end{cases}$.

Solution 23

Remarquons que $\mathrm{D} = \mathrm{A} + \mathrm{vect}(\vec{u})$ avec $\mathrm{A} = (-2, 1, 0)$ et $\vec{u} = (4, 0, -1)$. Soit $\mathrm{M} = (x_0, y_0, z_0) \in \mathrm{S}$. Ainsi $x_0 = 8y_0z_0$. Le plan P tangent à S en M est le plan passant par M et de vecteur normal $\vec{n} = (1, -8z_0, -8y_0)$. Le plan P contient la droite D si et seulement si $\vec{u} \perp \vec{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \perp \vec{n}$, ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 4 + 8y_0 = 0 \\ 8y_0z_0 + 2 - 8z_0(y_0 + 1) - 8y_0z_0 = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} y_0 = -\dfrac{1}{2} \\ z_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On rappelle qu'alors $x_0 = 8y_0z_0 = -2$. Le seul point de S en lequel le plan tangent contient la droite D est le point $\left(-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Optimisation

Solution 24

1.

- Recherche des points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

  Le seul point critique de f est $(0, 0)$.

- Etude au voisinage de $(0, 0)$:
  On trouve $\mathrm{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ de sorte que $\mathrm{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On ne peut pas conclure avec la hessienne.
  Néanmoins $f(x, 0) > 0$ pour $x > 0$ et $f(x, 0) < 0$ pour $x < 0$. Donc f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$ et donc aucun extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

2.

- Recherche des points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

  Le seul point critique de f est $(0, 3)$.

- Etude au voisinage de $(0,3)$:
  On trouve $\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathrm{tr}(\mathrm{H}_f(0,3)) = 4 > 0$ et $\det(\mathrm{H}_f(0,3)) = 3 > 0$. f admet donc un minimum local en $(0,3)$.
  Remarque. Posons $u = x$ et $v = y - 3$. Alors
  $$\begin{aligned} f(x,y) - f(0,3) &= f(u, 3+v) + 9 = u^2 + uv + v^2 \\ &= \frac{1}{2}\left((u+v)^2 + u^2 + v^2\right) \geq 0 \end{aligned}$$
  Ainsi f même un minimum global en $(0,3)$.

3.
- Recherche des points critiques :
  $$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 3y^2 = 0 \\ 8y^3 - 6xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$
  Le seul point critique de f est $(0,0)$.
- Etude au voisinage de $(0,0)$:
  On trouve $\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -6y \\ -6y & 24y^2 - 6x \end{pmatrix}$ de sorte que $\mathrm{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On ne peut pas conclure avec la hessienne.
  Néanmoins, $f(0,y) = y^4 > 0$ et $f\left(\frac{3}{2}y^2, y\right) = -\frac{y^4}{4} < 0$ pour $y \neq 0$. Ainsi f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$ et donc aucun extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

4.
- Recherche des points critiques :
  $$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 1 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = 0 \end{cases}$$
- Etude au voisinage de $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$:
  On trouve $\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Ainsi f n'admet pas d'extremum local en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ (point-selle) mais admet un maximum local en $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}, 0}\right)$.

Solution 25

---

1. f est polynomiale en x et y : elle admet donc des dérivées partielles premières polynomiales en tout point de $\mathbb{R}^2$. Ces dérivées partielles sont a fortiori continues sur $\mathbb{R}^2$.
2. Le calcul des dérivées partielles donnent :
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(1+y)^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2(1+y)^2 + 4y^3$$
   Les points critiques sont les points (x,y) tels que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. La première condition équivaut à $x = 0$ ou $y = -1$. La deuxième condition montre que y ne peut être égal à -1. On a donc $x = 0$ puis $y = 0$. Le seul point critique est $(0,0)$.
3. On a $f(0,0) = 0$ et pour $y \geq -1$, $f(x,y) \geq 0$. Ceci montre que f admet bien un minimum local en $(0,0)$. Mais $f(y,y) \underset{y\to-\infty}{\sim} y^5$ donc $\lim_{y\to-\infty} f(y,y) = -\infty$. f prend donc des valeurs strictement négatives et f n'admet pas de minimum global en $(0,0)$ (f n'admet pas de minimum global du tout).

Solution 26

1. En vertu du théorème spectral, il existe une base orthornormée $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de f. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées à ces vecteurs propres. Soit alors $h \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$. Alors
$$h = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid h) e_i$$
puis
$$f(h) = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid h) f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid h) \lambda_i e_i$$
Mais comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthornormée
$$(f(h) \mid h) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i \mid h)^2$$
Les λ_i sont strictement positifs et les $(e_i \mid h)$ ne peuvent être tous nuls car $h \neq 0_\mathrm{E}$. Ainsi $(f(h) \mid h) > 0$.

2. **a. Première méthode.** Soit $(x, h) \in \mathrm{E}^2$. Remarquons que
$$g(x+h) = \frac{1}{2}(f(x) \mid x) + \frac{1}{2}(f(x) \mid h) + \frac{1}{2}(f(h) \mid x) + \frac{1}{2}(f(h) \mid h) - (u \mid x) - (u \mid h)$$
$$g(x+h) = g(x) + (f(x) - u \mid h) + \frac{1}{2}(f(h) \mid h) \qquad \text{car } (f(h) \mid x) = (f(x) \mid h) \text{ en vertu de la symétrie de } f$$

Comme f est linéaire et que E est de dimension finie, il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|f(z)\| \leq \mathrm{C}\|z\|$ pour tout $z \in \mathrm{E}$. D'après Cauchy-Schwarzn
$$|(f(h) \mid h) \leq \|f(h)\|\|h\| \leq \mathrm{C}\|h\|^2$$
En particulier,
$$(f(h) \mid h) \underset{h \to 0}{=} o(h)$$
On en déduit que g est différentiable en x et que $\mathrm{d}g(x)$ est l'application $h \mapsto (f(x) - u \mid h)$. On peut également affirmer que $\nabla g(x) = f(x) - u$.
Deuxième méthode L'application $\varphi : x \mapsto (u \mid x)$ est linéaire donc est différentiable sur E et $\mathrm{d}\varphi = \varphi$. f et Id_E sont différentiables sur E en tant qu'applications linéaires, donc $\psi : x \mapsto (f(x) \mid x)$ est également différentiable sur E car le produit scalaire est bilinéaire. De plus, $\mathrm{d}f = f$ et $\mathrm{d}\,\mathrm{Id}_\mathrm{E} = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ de sorte que
$$\forall (x, h) \in \mathrm{E}^2,\ \mathrm{d}\psi(x) \cdot h = (f(h) \mid x) + (f(x) \mid h) = 2(f(x) \mid h)$$
Finalement, $g = \frac{1}{2}\psi - \varphi$ est également différentiable et
$$\forall (x, h) \in \mathrm{E}^2,\ \mathrm{d}g(x) \cdot h = (f(x) - u \mid h)$$

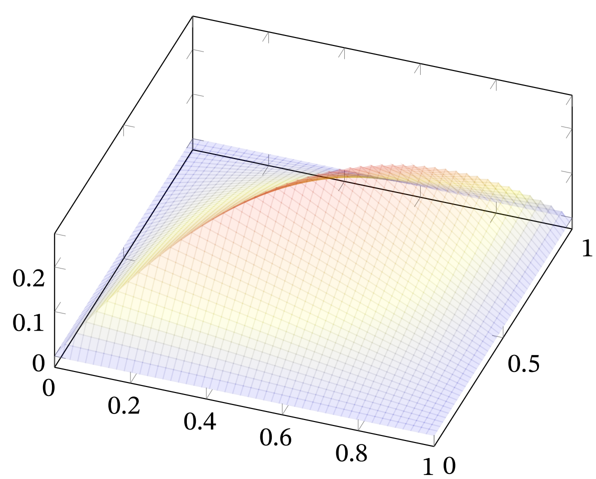
   b. D'après la question précédente, les points critiques de g sont les vecteurs $z \in \mathrm{E}$ tels que $f(z) = u$. Mais comme $\mathrm{Sp}(f) \in \mathbb{R}_+^*$, f est inversible. L'unique point critique de g est donc $z_0 = f^{-1}(u)$.

   c. En reprenant la question **2.a**,
$$\forall h \in \mathrm{E},\ g(z_0 + h) = g(z_0) + (f(z_0) - u \mid h) + \frac{1}{2}(f(h) \mid h) = g(z_0) + \frac{1}{2}(f(h) \mid h)$$
D'après la première question
$$\forall h \in \mathrm{E},\ g(z_0 + h) \geq g(z_0)$$
donc g admet bien un minimum global en z_0. Mais on a même prouvé que $(f(h) \mid h) > 0$ pour tout $h \in \mathrm{E}$ non nul donc $g(z_0 + h) = g(z_0)$ si et seulement si $h = 0_\mathrm{E}$. On peut donc préciser que z_0 est l'unique point en lequel g admet son minimum global.

Solution 27

1. Comme T est ouvert, si F admet un extremum local sur T, il s'agira d'un point critique. Or pour $(x, y) \in \mathrm{T}$, $\mathrm{F}(x, y) = x(1-y)$ de sorte que pour $(x, y) \in \mathrm{T}$,
$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(x, y) = 1 - y \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}(x, y) = -x$$
Puisque $0 < x < y < 1$ pour $(x, y) \in \mathrm{T}$, ces dérivées partielles ne s'annulent pas sur T : F n'admet pas d'extremum local sur T.

2. Remarquons que F est continue sur K. Si on n'est pas convaincu, on peut par exemple remarquer que
$$\forall (x, y) \in \mathrm{K},\ \mathrm{F}(x, y) = \min(x, y)(1 - \max(x, y))$$
De plus, les fonctions $(x, y) \mapsto \min(x, y)$ et $(x, y) \mapsto \max(x, y)$ sont continues puisque
$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2} \qquad \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$
Comme $\mathrm{K} = [0, 1]^2$ est compact comme produit de compacts, la fonction continue F admet un maximum et un minimum sur K. D'après la question précédente, ces extrema ne peuvent être atteints sur T, et par symétrie des rôles de x et y, ils ne peuvent pas non plus être atteints sur $\mathrm{T}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < y < x < 1\}$. Par conséquent, ils sont atteints sur
$$(\{0, 1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0, 1\}) \cup \Delta$$
Or
$$\begin{gathered} \forall y \in [0, 1],\ \mathrm{F}(0, y) = 0 \\ \forall x \in [0, 1],\ \mathrm{F}(x, 0) = 0 \\ \forall t \in [0, 1],\ \mathrm{F}(t, t) = t(1 - t) \end{gathered}$$
Une rapide étude montre que le minimum de $t \mapsto t(1 - t)$ sur $[0, 1]$ est 0 et que son maximum est $\frac{1}{4}$. On en déduit que $\max_{\mathrm{K}} \mathrm{F} = \frac{1}{4}$ et $\min_{\mathrm{K}} \mathrm{F} = 0$.



Remarque. On peut aussi pressentir que $\max_{\mathrm{K}} \mathrm{F} = \frac{1}{4}$. Dans ce cas, il suffit de constater que $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ et que
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{F}(x, y) = \begin{cases} x(1 - y) \leq x(1 - x) \leq \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y(1 - x) \leq y(1 - y) \leq \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$
Ceci prouve bien que $\max_{\mathrm{K}} \mathrm{F} = \frac{1}{4}$.

Solution 28

Tout d'abord, F est clairement positive sur K et $f(0,0) = 0$ donc $\min_{K} f = 0$.
Comme f est clairement continue sur le compact K, elle y admet également un maximum. Ce maximum est soit atteint sur la frontière de K, soit sur l'intérieur de K. Dans ce dernier cas, il est atteint en un point critique.
Etudions d'abord f sur la frontière de K :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ & f(x,0) = 0 \\
\forall y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ & f(0,y) = 0 \\
\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ & f\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) \leq \frac{1}{2} \\
\forall y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ & f\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \sin(y)\cos(y) = \frac{1}{2}\sin(2y) \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

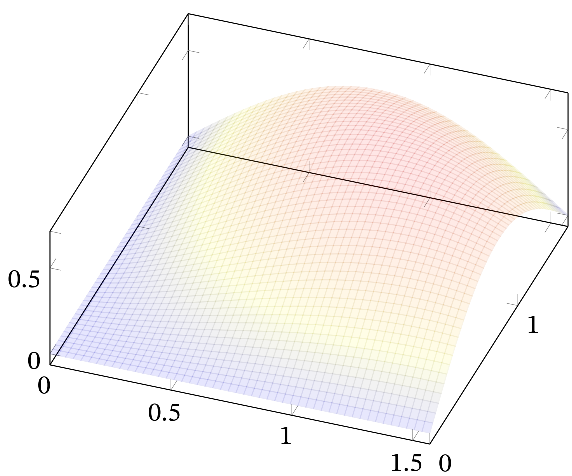
Ainsi f est majorée par $\frac{1}{2}$ sur la frontière de K.
Etudions maintenant les points critiques de f sur l'intérieur de K.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \sin(y)\left(\cos(x)\sin(x+y) + \sin(x)\cos(x+y)\right) = \sin(y)\sin(2x+y) \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= \sin(x)\left(\cos(y)\sin(x+y) + \sin(y)\cos(x+y)\right) = \sin(x)\sin(y+2x)
\end{aligned}$$

Ainsi pour $(x,y) \in \mathring{K} = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[^2$,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \\
\iff & \sin(2x+y) = \sin(y+2x) = 0 \\
\iff & 2x + y = y + 2x = \pi \\
\iff & x = y = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Or $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} > \frac{1}{2}$. On en déduit que $\max_{K} f = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.



Solution 29

1. On prouve classiquement que $\varphi : x \mapsto \|x\|^2$ est différentiable sur E et que pour tout $x \in E$, $d\varphi(x)$ est l'application $h \mapsto 2\langle x, h\rangle$. L'application $\psi : x \mapsto f(x) - a$ est également différentiable et pour tout $x \in E$, $d\varphi(x) = df(x)$. Par composition, $g = \varphi \circ \psi$ est différentiable sur E et
$$\forall (x,h) \in E^2,\ dg(x) \cdot h = d\varphi(\psi(x)) \circ d\psi(x) \cdot h = 2\langle f(x) - a, df(x) \cdot h\rangle$$

2. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, $g(x) \geq (\|f(x)\| - \|a\|)^2$. Comme $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$, on a également $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} g(x) = +\infty$. Ainsi il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \|x\| \geq \mathrm{A} \implies g(x) \geq g(0)$$

Par ailleurs, la boule B fermée de centre 0 et de rayon A est compact car E est de dimension finie. g est continue sur E car elle y est différentiable donc g admet un minimum m sur le compact B. Par définition de A, m est le minimum de g sur E.

3. Notons x_0 un point où g admet son minimum. On a alors $\mathrm{d}g(x) = 0$ et donc

$$\forall h \in \mathrm{E},\ \langle f(x_0) - a,\ \mathrm{d}f(x_0)\cdot h\rangle = 0$$

ou encore

$$\forall h \in \mathrm{Im}\ \mathrm{d}f(x_0),\ \langle f(x_0) - a, h\rangle = 0$$

Comme $\mathrm{d}f(x_0)$ est un endomorphisme injectif de l'espace vectoriel de dimension finie E, elle est également surjective i.e. $\mathrm{Im}\ \mathrm{d}f(x_0) = \mathrm{E}$. Ainsi

$$\forall h \in \mathrm{E},\ \langle f(x_0) - a, h\rangle = 0$$

On en déduit que $f(x_0) - a \in \mathrm{E}^\perp = \{0_\mathrm{E}\}$ i.e. $a = f(x_0)$. L'application f est donc surjective.

Solution 30

---

1. Les points critiques de f sont les solutions du système $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$,

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} y = x^2 \\ x = x^4 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Les points critiques de f sont donc $(0,0)$ et $(1,1)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^3 > 0$ et $f(-\varepsilon, 0) = -\varepsilon^3 < 0$. Comme $(\varepsilon, 0)$ et $(-\varepsilon, 0)$ sont arbitrairement proches de $(0,0)$, f prend des valeus strictement positives et strictement négatives dans tout voisinage de $(0,0)$. Ainsi f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

3. Dans un premier temps,

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = 3u^2 + 3v^2 - 3uv + u^3 + v^3$$

puis

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ g(r\cos\theta, r\sin\theta) = 3r^2 - 3r^2\cos\theta\sin\theta + r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 3r^2\left(1 - \frac{1}{2}\sin(2\theta) + \frac{r}{3}(\cos^3\theta + \sin^3\theta)\right)$$

4. Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Comme sin et cos sont à valeurs dans $[-1,1]$, on a d'une part

$$1 - \frac{1}{2}\sin(2\theta) \geq \frac{1}{2}$$

et d'autre part

$$\frac{1}{3}(\cos^3\theta + \sin^3\theta) \geq -\frac{2}{3} \geq -2$$

Comme $r \geq 0$, on obtient

$$1 - \frac{1}{2}\sin(2\theta) + \frac{r}{3}(\cos^3\theta + \sin^3\theta) \geq \frac{1}{2} - 2r$$

puis

$$g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geq 3r^2\left(\frac{1}{2} - 2r\right)$$

Notamment pour $r \leq \frac{1}{4}$, $g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geq 0$. On en déduit que pour tout (x, y) dans le disque de centre $(1, 1)$ et de rayon $\frac{1}{4}$ (pour la norme euclidienne), $f(x, y) \geq f(1, 1)$. Autrement dit, f admet un minimum local en $(1, 1)$.

5. Remarquons que $f(x, x) = 2x^3 - 3x^2$. Notamment, $\lim_{x\to-\infty} f(x, x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x, x) = +\infty$. La fonction f ne possède pas de minimum global puisqu'elle n'est même pas minorée et elle ne possède pas non plus de maximum global puisqu'elle n'est pas majorée.

Solution 31

---

1. On peut prolonger f en une fonction continue $\tilde{f}$ sur $(\mathbb{R}_+)^n$ en posant $\tilde{f} = 0$ sur la frontière de $(\mathbb{R}_+^*)^n$. Alors

$$\overline{\mathrm{C}} = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1\right\}$$

est fermé et borné donc compact car $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie. Ainsi $\tilde{f}$ admet un maximum sur $\overline{\mathrm{C}}$. Or $\tilde{f}$ est nulle sur $\operatorname{Fr}\mathrm{C}$ et $f\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = \ln(n) > 0$ donc le maximum de $\tilde{f}$ est atteint sur C. Puisque $\tilde{f} = f$ sur C, f admet donc bien un maximum sur C.

2. Posons $g : (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \mapsto \sum_{i=1}^n x_i - 1$ de sorte que $\mathrm{C} = g^{-1}(\{0\})$. f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $n(\mathbb{R}_+^*)^n$. D'après le théorème des extrema liés, $\nabla f(a)$ est colinéaire à $\nabla g(a)$ i.e. $(-1-\ln(a_1), \dots, -1-\ln(a_n))$ est colinéaire à $(1, \dots, 1)$. On en déduit que les $-1-\ln(a_i)$ sont tous égaux puis que les a_i sont tous égaux. Puisque $a \in \mathrm{C}$, $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ donc les a_i sont tous égaux à $\frac{1}{n}$. Ainsi le maximum de f sur C est atteint en $\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ et vaut $\ln(n)$.

Remarque. On peut aboutir au même résultat de manière plus élégante en utilisant la convexité de la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto -x\ln(x)$.

Solution 32

---

f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2$ donc elle admet un maximum et un minimum sur le compact S. Posons $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 - 1$ de sorte que $\mathrm{S} = g^{-1}(\{0\})$. Alors f et g sont clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Notons $(a, b) \in \mathrm{S}$ le point où f atteint son minimum/maximum. Comme $\nabla(a, b) = (2a, 2b) \neq (0, 0)$ puisque $(a, b) \in \mathrm{S}$, on peut appliquer le théorème des extrema liés : on résout le système $\begin{cases}\nabla f(a, b) = \lambda\nabla g(a, b) \\ g(a, b) = 0\end{cases}$ i.e. $\begin{cases} b = 2\lambda a \\ a = 2\lambda b \\ a^2 + b^2 = 1\end{cases}$ ce qui donne $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Puisque $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$, on en déduit que $\max_{\mathrm{S}} f = \frac{1}{2}$ et $\min_{\mathrm{S}} f = -\frac{1}{2}$.

Solution 33

Déterminons d'abord les points critiques

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\\
\iff&\begin{cases}e^{x-y}(x^2-2y^2+2x)=0\\ e^{x-y}(-x^2+2y^2-4y)=0\end{cases}\\
\iff&\begin{cases}x^2-2y^2+2x=0\\ -x^2+2y^2-4y=0\end{cases}\\
\iff&\begin{cases}x^2-2y^2+2x=0\\ 2x-4y=0\end{cases}\\
\iff&\begin{cases}2y^2+4y=0\\ x=2y\end{cases}\\
\iff&\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}x=-4\\ y=-2\end{cases}
\end{aligned}$$

Les deux points critiques sont $(0,0)$ et $(-4,-2)$. On calcule la hessienne de f

$$\mathrm{H}_f(x,y)=e^{x-y}\begin{pmatrix}x^2-2y^2+4x+2 & -x^2+2y^2-2x-4y\\ -x^2+2y^2-2x-4y & x^2-2y^2+8y-4\end{pmatrix}$$

D'une part, $\mathrm{H}_f(0,0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&-4\end{pmatrix}$ donc f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$. D'autre part, $\mathrm{H}_f(-4,-2)=e^{-2}\begin{pmatrix}-6&8\\8&-12\end{pmatrix}$. Alors $\det(\mathrm{H}_f(-4,-2))=8e^{-4}>0$ et $\operatorname{tr}(\mathrm{H}_f(-4,-2))=-18e^{-2}<0$ donc f admet un minimum local en $(-4,-2)$.
Remarque. Puisque $f(0,-y)=-2y^2e^y\underset{y\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$, ce minimum local n'est pas un minimum global (f n'admet pas de minimum global).

Solution 34

Remarquons que $\mathcal{E}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ g(x,y)=0\}$ est compact. Tout d'abord, $\mathcal{E}$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue g. On montre aisément que $xy\geq-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On en déduit que pour $(x,y)\in\mathcal{E}$,

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)\leq x^2+y^2-xy=1$$

Ainsi $\mathcal{E}$ est inclus dans le disque de centre l'origine et de rayon $\sqrt{2}$. Notamment, $\mathcal{E}$ est bornée. Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, $\mathcal{E}$ est compacte.
Soit (a,b) un extremum global de f sur $\mathcal{E}$. C'est a fortiori un extremum local. Comme $\nabla f(a,b)=(2,-1)\neq(0,0)$, $\nabla g(a,b)=(2a+b,a+2b)$ est colinéaire à $\nabla f(a,b)$. Ainsi $\begin{vmatrix}2a+b&2\\a+2b&-1\end{vmatrix}=-2a-b-2(a+2b)=-4a-5b=0$. Comme $g(a,b)=0$, on obtient $b=\pm\dfrac{4}{\sqrt{21}}$. Ainsi $(a,b)=\pm\dfrac{1}{\sqrt{21}}(-5,4)$. Or

$$f\left(-\frac{5}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}}\right)=-\frac{14}{\sqrt{21}}<\frac{14}{\sqrt{21}}=f\left(\frac{5}{\sqrt{21}},-\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$$

Donc f admet pour minimum $-\dfrac{14}{\sqrt{21}}$ atteint en $\left(-\dfrac{5}{\sqrt{21}},\dfrac{4}{\sqrt{21}}\right)$ et comme maximum $\dfrac{14}{\sqrt{21}}$ atteint en $\left(\dfrac{5}{\sqrt{21}},-\dfrac{4}{\sqrt{21}}\right)$

Equations aux dérivées partielles

Solution 35

Soit f une fonction solution de l'EDP. On effectue le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$ i.e. on pose $g(u, v) = f(x, y)$ de telle sorte que g est de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v}$$

g vérifie donc l'EDP $2\frac{\partial g}{\partial u} = g$. Ainsi $g(., v)$ est solution de l'équation différentielle $2y' = y$. g est donc de la forme $g(u, v) = \lambda(v)e^{\frac{u}{2}}$ avec $\lambda = g(0, .)$ de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi $f(x, y) = \lambda(x - y)e^{\frac{x+y}{2}}$.
Réciproquement, toute fonction de cette forme vérifie l'EDP initiale.

Solution 36

Soit f une solution de l'EDP. On pose $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ pour $r > 0$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. g est également de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

On en déduit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}$$

On en déduit $\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$. Ainsi $g(r, \theta) = \varphi(r)$ où φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi $f(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.
Réciproquement, toute fonction de cette forme est solution de l'EDP initiale.

Solution 37

Remarquons que $v = y - \frac{x^2}{2}$ et posons $g(u, v) = f(x, y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} - x\frac{\partial g}{\partial v}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial v}$$

Enfin, $x + y = \frac{u^2}{2} + u + v$. Donc (E) équivaut à $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{u^2}{2} + u + v$. Ainsi

$$g(u, v) = \frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{2} + uv + \varphi(v)$$

où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors

$$f(x, y) = g\left(x, y - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x\left(y - \frac{x^2}{2}\right) + \varphi\left(y - \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + xy + \varphi\left(y - \frac{x^2}{2}\right)$$

La condition $f(0, y) = 0$ donne $\varphi(y) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
La solution recherchée est donc

$$f : (x, y) \mapsto -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + xy + \left(y - \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^3}{3} + xy + y$$

Solution 38

Supposons f homogène de degré α. En dériavnt la relation $f(tx,ty)=t^\alpha f(x,y)$ par rapport à t, on obtient

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \forall t>0,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=\alpha t^{\alpha-1}f(x,y)$$

Il suffit alors de spécialiser cette relation à $t=1$ pour obtenir

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\alpha f(x,y)$$

Réciproquement soit f de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant cette dernière relation. Fixons x et y et posons $\varphi(t)=f(tx,ty)-t^\alpha f(x,y)$ pour $t>0$. Par composition, φ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $t>0$:

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)-\alpha t^{\alpha-1}f(x,y)\\&=\frac{1}{t}\left(tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\right)-\alpha t^{\alpha-1}f(x,y)\\&=\frac{\alpha}{t}f(tx,ty)-\alpha t^{\alpha-1}f(x,y)=\frac{\alpha}{t}\varphi(t)\end{aligned}$$

φ est donc solution de l'équation différentielle $y'=\frac{\alpha}{t}y$ et vérifie la condition initiale $\varphi(1)=0$. On sait qu'une équation différentielle linéaire du premier degré possède une unique solution vérifiant une condition initiale donnée. Comme la fonction nulle vérifie la même équation différentielle et la même condition initiale que φ, c'est que $\varphi=0$ et f est bien homogène de degré α.

Solution 39

1. Supposons f homogène de degré α. En dérivant la relation $f(tx,ty)=t^\alpha f(x,y)$ par rapport à t, on obtient

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \forall t>0,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=\alpha t^{\alpha-1}f(x,y)$$

Il suffit alors de spécialiser cette relation à $t=1$ pour obtenir

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\alpha f(x,y)$$

2. **a.** Par composition, φ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $t>0$:

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)-\alpha t^{\alpha-1}f(x,y)\\&=\frac{1}{t}\left(tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\right)-\alpha t^{\alpha-1}f(x,y)\\&=\frac{\alpha}{t}f(tx,ty)-\alpha t^{\alpha-1}f(x,y)=\frac{\alpha}{t}\varphi(t)\end{aligned}$$

φ est donc solution de l'équation différentielle $y'=\frac{\alpha}{t}y$.

b. φ vérifie la condition initiale $\varphi(1)=0$. On sait qu'une équation différentielle linéaire du premier degré possède une unique solution vérifiant une condition initiale donnée. Comme la fonction nulle vérifie la même équation différentielle et la même condition initiale que φ, c'est que $\varphi=0$ et f est bien homogène de degré α.

3. En dérivant la relation $f(tx,ty)=t^\alpha f(x,y)$ par rapport à x, on obtient $t\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)=t^\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ i.e. $\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)=t^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ est homogène de degré $\alpha-1$. On raisonne de la même manière pour montrer que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est également homogène de degré $\alpha-1$.

Solution 40

1. $\overline{\mathrm{U}}$ est fermé et borné donc compact car $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie. Comme f est continue sur $\overline{\mathrm{U}}$, elle y admet un maximum.

2. Supposons que $\bar{x} \notin \partial\mathrm{U}$. Alors $\bar{x} \in \mathrm{U}$. Notamment, $\boldsymbol{\Delta} f(\bar{x}) > 0$. Il existe donc $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\bar{x}) > 0$. Puisque U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que le disque ouvert de centre $\bar{x}$ et de rayon r soit inclus dans U (on munit par exemple $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne). Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et posons

$$\forall t \in]-r, r[,\ \varphi(t) = f(\bar{x} + te_i)$$

Pour tout $t \in]-r, r[$, $\bar{x} + te_i$ appartient au disque précédemment défini de sorte que φ est bien définie sur $]-r, r[$. Elle est également de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet intervalle par composition. Puisque f admet un maximum en $\bar{x}$, φ admet un maximum en 0. En particulier,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\bar{x}) = \varphi''(0) \leq 0$$

ce qui est contradictoire. Ainsi $\bar{x} \in \partial\mathrm{U}$.

3. La fonction $g : x \mapsto \|x\|^2$ est clairement continue sur $\overline{\mathrm{U}}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car elle est polynomiale. De plus, $\boldsymbol{\Delta} g = 2n$. Ainsi $f_\varepsilon = f + \varepsilon g$ est continue sur $\overline{\mathrm{U}}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. De plus, $\boldsymbol{\Delta} f_\varepsilon = \boldsymbol{\Delta} f + \varepsilon \boldsymbol{\Delta} g = 2n\varepsilon > 0$.

4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **2**, $f_{1/p}$ admet un maximum sur $\overline{\mathrm{U}}$ atteint en $x_p \in \partial\mathrm{U}$. Notamment,

$$f_{1/p}(\bar{x}) \leq f_{1/p}(x_p)$$

ou encore

$$f(\bar{x}) + \frac{1}{p}\|\bar{x}\|^2 \leq f(x_p) + \frac{1}{p}\|x_p\|^2$$

On définit ainsi une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\partial\mathrm{U}$. Comme $\partial\mathrm{U}$ est fermé et borné, il est compact car $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie. La suite (x_p) étant à valeurs dans ce compact, on peut en extraire une suite $(x_{\varphi(p)})$ convergeant vers $x_\infty \in \partial\mathrm{U}$. De plus,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ f(\bar{x}) + \frac{1}{\varphi(p)}\|\bar{x}\|^2 \leq f(x_{\varphi(p)}) + \frac{1}{\varphi(p)}\|x_{\varphi(p)}\|^2$$

En passant à la limite lorsque p tend vers $+\infty$ dans cette dernière inégalité, on obtient alors

$$f(\bar{x}) \leq f(x_\infty)$$

par continuité de f en x_∞. Mais on également $f(\bar{x}) \geq f(x_\infty)$ car f atteint son maximum en $\bar{x}$. Finalement, $f(\bar{x}) = f(x_\infty)$ et le maximum de f sur $\overline{\mathrm{U}}$ est donc atteint en $x_\infty \in \partial\mathrm{U}$.

5. On peut appliquer la question précédente à $f_1 - f_2$. Ainsi le maximum de $f_1 - f_2$ sur $\overline{\mathrm{U}}$ est atteint sur $\partial\mathrm{U}$. Puisque $f_1 = f_2$ sur $\partial\mathrm{U}$, ce maximum est nul. De la même manière, la maximum de $f_2 - f_1$ sur $\overline{\mathrm{U}}$ i.e. le minimum de $f_1 - f_2$ est également nul. Finalement, $f_1 - f_2$ est nulle sur $\overline{\mathrm{U}}$. En particulier, $f_1 = f_2$ sur U.

Solution 41

1. ϕ est clairement linéaire. Soit $f \in \mathrm{E}$. Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et f appartiennent à E, $\phi(f) \in \mathrm{F}$.

2. Un calcul sans difficulté montre que $\phi(f) = 0$.

3. Il est évident que $\phi(f) = 0$ pour $f \in \mathrm{G}$. Ainsi $\mathrm{G} \subset \operatorname{Ker}\phi$. Comme ϕ n'est pas le sous-espace nul, ϕ n'est pas injective.

4. Soit $y \in \mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{A}(t, y)\exp(-at)\ \mathrm{d}t$ est dérivable de dérivée $x \mapsto \mathrm{A}(x, y)\exp(-ax)$. Ainsi $x \mapsto f(x, y)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = af(x, y) + \mathrm{A}(x, y)$$

Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x} \in \mathrm{F}$ puis $f \in \mathrm{E}$. On a également bien $\phi(f) = \mathrm{A}$.

5. Soit $f \in \operatorname{Ker}\Phi$. Alors pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,y)$ est solution de l'équation différentielle $z' - az = 0$. Il existe donc $\alpha(y) \in \mathbb{R}$ tel que $f(x,y) = \alpha(y)\exp(ax)$. Alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha(y) = f(x,y)\exp(ax)$. Notamment, $\alpha(y) = f(0,y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ donc α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On a donc bien $f \in \mathrm{G}$. Par double inclusion, $\operatorname{Ker}\phi = \mathrm{G}$.

6. Posons pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{A}(x,y) = 2x - 3y$ et

$$g(x,y) = \int_0^x \mathrm{A}(t,y)\exp(-at)\,\mathrm{d}t$$

D'après une question précédente,

$$\phi(g) = \mathrm{A}$$

De plus,

$$g(x,y) = \int_0^x (2t-3y)e^{-at}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{2 - 3ay - (2ax - 3ay + 2)e^{-ax}}{a^2} & \text{si } a \neq 0 \\ x^2 - 3yx & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Les fonctions f recherchées sont les fonctions f vérifiant $\phi(f) = \mathrm{A}$. Comme ϕ est linéaire, l'ensemble des fonctions f recherchées est le sosu-espace affine $g + \operatorname{Ker}\phi = g + \mathrm{G}$.