SOMMES, PRODUITS, SYSTÈMES, TRIGONOMÉTRIE

EXERCICE 1.

Calculer, pour tout entier non nul n,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + 1/k)$$

au moyen d'un telescopage.

EXERCICE 2.

Simplifier les sommes suivantes,

1. $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} (u_{k+1} - u_k)$;
2. $\displaystyle\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$.

EXERCICE 3.

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,.\,k!$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+2)\,2^{k}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1+1/k)$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)$

EXERCICE 4.

Simplifier la somme

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$$

en sommant par paquets.

EXERCICE 5.

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$.

EXERCICE 6.

Vérifier que

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} 2^k$$

et calculer une expression simple de cette somme en permutant l'ordre des sommations dans la somme double.

EXERCICE 7.

Simplifier la somme

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right).$$

EXERCICE 8.✩

On utilise une décomposition de la fraction en éléments simples.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t > 1, \qquad \frac{1}{t^2-1} = \frac{\alpha}{t-1} + \frac{\beta}{t+1}.$$

2. En déduire une simplification de la somme

$$v_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}.$$

EXERCICE 9.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On définit deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,\ b_n = B_{n+1} - B_n$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$.
2. Application : calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k k$.

EXERCICE 10.

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=3}^{n+1} k$
2. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$
3. $\sum_{k=3}^{n-1} 2^k$
4. $\sum_{k=1}^{n} kx^k$ (avec $x \in \mathbb{R}$)

EXERCICE 11.

Simplifier, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} 3^{n-k+1} \binom{n}{k}.$$

EXERCICE 12.

Pour tous n et p dans $\mathbb{N}$, établir que l'on a

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$

EXERCICE 13.

Calculer les sommes suivantes

1. $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.
2. $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{2n}{2k}$.

EXERCICE 14.

Soit n un entier naturel non nul.

1. Calculer $S_1 = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k$.
2. En déduire $T_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ et $T_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$.
3. Calculer $U_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k}$ et $U_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k+1}$. On pourra, si on le souhaite, s'inspirer des questions précédentes.

EXERCICE 15.

Calculer les sommes suivantes :

1. $U_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$.
2. $V_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$.
3. $W_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |i-j|$.
4. $X_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} i$.
5. $Y_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$

EXERCICE 16.

En permutant l'ordre des sommations, démontrer l'égalité

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}.$$

EXERCICE 17.

Sommes doubles.

1. Calculer la somme double

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i+j).$$

2. Calculer la somme double

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij.$$

EXERCICE 18.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}.$$

EXERCICE 19.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} S_k.$$

Établir que

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = (n+1)S_n - n.$$

Exercice 20.

Vérifier que
$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} 2^k$$
et calculer une expression simple de cette somme en permutant l'ordre des sommations dans la somme double.

Exercice 21.

Simplifier le produit suivant :
$$P = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

Exercice 22.

Soient
$$V = \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij \quad , \quad W = \prod_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} ij\ , \quad X = \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$$
$$Y = \prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} ij\ , \quad Z = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij.$$
Calculer V. En déduire W. Exprimer W en fonction de X et Y. Montrer, sans calcul, que $X = Y$. En déduire X puis Z.

Exercice 23.

Simplifier le produit
$$\prod_{k=1}^{n} 2^{1/k(k+1)}.$$

Exercice 24.

Pour tout $n \geqslant 2$, on pose
$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}.$$

1. Ecrire trouver une suite d'entiers relatifs $(v_k)_{k\geqslant 1}$ telle que
$$\forall k \geqslant 2,\quad \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{k-1}{k+1} \times \frac{v_k}{v_{k-1}}.$$

2. En déduire une simplification de u_n.

3. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 25.

Soit $\alpha \in]0,\pi[$. Simplifier le produit $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \cos\frac{\alpha}{2^k}$. En déduire la limite de P_n.

Exercice 26.

Résoudre
$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x - 2y + z - t = 1 \\ x + y + 2z + t = -1 \end{cases}$$

Exercice 27.

Résoudre
$$\begin{cases} -3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 8x_1 - 24x_2 + 4x_3 - 12x_4 - 4x_5 = -8 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_4 + 7x_5 = 10 \end{cases}$$

Exercice 28.

Résoudre selon les valeurs des paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$.
$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

EXERCICE 29.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on note E_a l'ensemble de solutions du système suivant.

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 2 \\ ax + 3y - z = 3 \\ 5x - 8y + z = -9 \end{cases}$$

Pour quels $a \in \mathbb{R}$ est-ce que E_a est vide ? contient un unique élément ? contient une infinité d'éléments ?

EXERCICE 30.

Résoudre le système

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 2y - z = -2 \\ -x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

EXERCICE 31.

Résoudre le système

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 2y - z = -2 \\ -x - y + \frac{1}{2}z = 4 \end{cases}$$

EXERCICE 32.

Déterminer les valeurs de a pour lesqelles le système

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3. \end{cases}$$

1. possède une seule solution,
2. ne possède pas de solution,
3. possède une infinité de solutions.

EXERCICE 33.

Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = -4 \\ 3x + 2y - 3z = 17 \\ 5x - 3y + 8z = -10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - 3z = 2 \\ -x + 6y - 11z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - z = -2 \\ x + y + z = 2 \\ -2x + 4y - 5z = -10. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y - 5z = 3 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \\ x + y - 7z = 2 \\ 2x - 3y + 8z = 5. \end{cases}$$

EXERCICE 34.

Simplifier le produit $p = \sin\left(\frac{\pi}{14}\right)\sin\left(\frac{3}{14}\pi\right)\sin\left(\frac{5}{14}\pi\right)$ en le multipliant par $\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$.

EXERCICE 35.☆

On cherche à calculer $\cos(\pi/5)$ et $\sin(\pi/5)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(3x) = \sin(2x)$.
2. En déduire les valeurs de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ pour $x = \pi/5$.

EXERCICE 36.

Calculer

$$\alpha = \frac{1}{\sin(\pi/18)} - \frac{\sqrt{3}}{\cos(\pi/18)}.$$

EXERCICE 37.

On pose

$$p = \cos(\pi/7)\cos(2\pi/7)\cos(4\pi/7),$$

et

$$s = \cos(2\pi/7) + \cos(4\pi/7) + \cos(6\pi/7).$$

1. Simplifier $p\sin(\pi/7)$. En déduire la valeur de p.
2. Calculer s à l'aide de la première question.

Exercice 38.

Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

1. $\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \tan(x/2)$;
2. $\sin(x-2\pi/3)+\sin(x)+\sin(x+2\pi/3) = 0$;
3. $\tan(\pi/4+x)+\tan(\pi/4-x) = \dfrac{2}{\cos(2x)}$;
4. $\dfrac{1}{\tan(x)} - \tan(x) = \dfrac{2}{\tan(2x)}$.

Exercice 39.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin(x)+\sin(5x) = \sqrt{3}\cos(2x)$;
2. $\cos(x)-\cos(2x) = \sin(3x)$;
3. $2\sin^2(x)+\sin^2(2x) = 2$;
4. $\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x) = 0$;
5. $\sin(2x)+\sin(x) = 0$;
6. $12\cos^2(x)-8\sin^2(x) = 2$.

Exercice 40.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sin 5x \leqslant \sin x$.