SEMAINE DU 11/12 AU 15/12

1 Cours

Nombres réels

Approximations d'un réel Ensembles de nombres : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Partie entière. Approximations décimales. Densité dans $\mathbb{R}$. Caractérisation séquentielle de la densité. $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$. Théorème de la borne supérieure. Caractérisation séquentielle de la borne inférieure et de la borne supérieure. Droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$. Borne supérieure et inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$. Applications à valeurs dans $\mathbb{R}$: majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure.

Intervalles de $\mathbb{R}$ Définition : une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si $\forall (x, y, t) \in I^2 \times \mathbb{R}, x \leqslant t \leqslant y \implies t \in I$. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties de la forme $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b]$, $]-\infty, b[$, $]-\infty, +\infty[$.

Relations binaires

Généralités Réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité. Exemples.

Relation d'ordre Définition. Ordre total, partiel. Majorant/minorant, maximum/minimum, borne supérieure/inférieure. Unicité du maximum/minimum, de la borne supérieure/inférieure sous réserve d'existence. Un maximum/minimum est une borne supérieure/inférieure.

Relation d'équivalence Définition. Classes d'équivalence. Les classes d'équivalence forment une partition.

2 Méthodes à maîtriser

- Déterminer le maximum/minimum M d'une partie $\mathcal{A}$:
  - M est un majorant/minorant de $\mathcal{A}$;
  - $M \in \mathcal{A}$.
- Déterminer la borne supérieure/inférieure M d'une partie $\mathcal{A}$:
  - M est un majorant/minorant de $\mathcal{A}$;
  - puis au choix :
    - tout majorant/minorant de $\mathcal{A}$ est minoré/majoré par M ;
    - il existe une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ convergeant vers M (si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle) ;
    - pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $a > M - \varepsilon / a < M + \varepsilon$ (si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle).
- Caractérisation de la partie entière :

$$n = \lfloor x \rfloor \iff x - 1 < n \leqslant x \iff n \leqslant x < n + 1$$

- Montrer qu'une relation binaire est une relation d'équivalence ou une relation d'ordre.

3 Questions de cours

- Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
- Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Rappeler la définition d'une classe d'équivalence. Montrer que deux classes d'équivalence sont soit disjointes soit confondues.
- Soit E un ensemble. On définit une relation binaire $\sim$ sur E^E de la manière suivante : pour tout couple $(f, g) \in (E^E)^2$, $f \sim g$ **si et seulement si** il existe une bijection $\varphi : E \to E$ telle que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

► Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Déterminer le sens de variation des applications

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \inf\limits_{y \geqslant x} f(y) \end{array} \right. \qquad h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sup\limits_{y \geqslant x} f(y) \end{array} \right.$$

► Soient A et B deux ensembles et $f : A \times B \to \mathbb{R}$ une application bornée. Montrer que

$$\sup_{x \in A} \left(\inf_{y \in B} f(x, y) \right) \leqslant \inf_{y \in B} \left(\sup_{x \in A} f(x, y) \right)$$