Devoir surveillé n° 4 : corrigé

Problème 1 — D'après Petites Mines 2000

Partie I – Etude d'une bijection réciproque

1. th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I =]\lim_{-\infty} \text{th}, \lim_{+\infty} \text{th}[=]-1, 1[$.

2. On sait que $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$.

3. Soit $x \in]-1, 1[$. Alors $\text{th}(\text{argth}(x)) = x$. Mais puisque th est impaire, $\text{th}(-\text{argth}(x)) = -\text{th}(\text{argth}(x)) = -x$. Mais on a également $\text{th}(\text{argth}(-x)) = -x$ de sorte que $\text{th}(-\text{argth}(x)) = \text{th}(\text{argth}(-x))$. Puisque th est strictement croissante donc injective, $-\text{argth}(x) = \text{argth}(-x)$.
On en déduit que argth est impaire.

4. th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc argth est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$\text{argth}'(x) = \frac{1}{\text{th}'(\text{argth}(x))} = \frac{1}{1 - \text{th}^2(\text{argth}(x))} = \frac{1}{1 - x^2}$$

5. On sait que

$$\frac{1}{1 - x^2} \underset{x \to 0}{=} 1 + x^2 + x^4 + o(x^4)$$

Puisque argth est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ sur I,

$$\text{argth}(x) \underset{x \to 0}{=} \text{argth}(0) + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

Puisque $\text{th}(0) = 0$, $\text{argth}(0) = 0$ (ou encore parce que argth est impaire). Finalement,

$$\text{argth}(x) \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

Partie II – Etude d'une équation différentielle

1. D'après la question **I.5**,

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{3} + \frac{x^2}{5} + o(x^2)$$

A fortiori, $f(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{3} + o(1)$ donc f est prolongeable par continuité en 0. Puisque le prolongement est encore noté f, on a donc $f(0) = \frac{1}{3}$.
On a également, $f(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{3} + o(x)$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
Enfin, f est dérivable sur $]-1, 0[$ et sur $]0, 1[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
Finalement, f est dérivable sur I.

2. L'équation différentielle homogène associée à (E) est $(E_H) : xy' + 3y = 0$ et elle équivaut à $y' + \frac{3}{x} = 0$ sur $]0, 1[$. Une primitive de $x \mapsto \frac{3}{x}$ sur $]0, 1[$ est $x \mapsto 3 \ln x$ de sorte que les solutions de (E_H) sur $]0, 1[$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda}{x^3}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
On emploie alors la méthode de variation de la constante. On cherche donc une solution particulière de E sur $]0, 1[$ de la forme $x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x^3}$ avec φ dérivable sur $]0, 1[$. Une telle fonction est solution de (E) *si et seulement si* $\varphi'(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$ pour tout $x \in]0, 1[$. Puisque $\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2} - 1$ pour tout $x \in]0, 1[$, on peut choisir $\varphi(x) = \text{argth}(x) - x$ pour tout $x \in]0, 1[$. Une solution particulière de (E) sur $]0, 1[$ est donc $x \mapsto \frac{\text{argth}(x) - x}{x^3}$.
Les solutions de (E) sur $]0, 1[$ sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{\text{argth}\, x - x + \lambda}{x^3}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
En procédant de la même manière, on montre que les solutions de (E) sur l'intervalle $]-1, 0[$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{\text{argth}\, x - x + \mu}{x^3}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

3. Soit g une éventuelle solution de (E) sur $]-1,1[$. Alors g est solution de (E) sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$. D'après la question précédente, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in]0,1[,\ f(x) = \frac{\operatorname{argth} x - x + \lambda}{x^3} = f(x) + \frac{\lambda}{x^3} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]-1,0[,\ f(x) = \frac{\operatorname{argth} x - x + \mu}{x^3} = f(x) + \frac{\mu}{x^3}$$

g doit être continue en 0 donc admettre une limite finie en 0. Puisque f est continue en 0, f admet une limite finie en 0. g ne peut alors admettre une limite finie en 0 que si $\lambda = \mu = 0$. On a donc $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in]-1,0[\cup]0,1[$. Par continuité en 0, cette égalité est vraie pour tout $x \in I$ de sorte que $f = g$.
Réciproquement, montrons que f est bien solution de E sur I. Tout d'abord, f est solution de (E) sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$. Par ailleurs, on a montré à la question **II.1** que f est dérivable en 0 et que $f(0) = \frac{1}{3}$. On a alors $0 \times f'(0) + 3f(0) = 1 = \frac{1}{1-0^2}$ donc f est solution de (E) sur I.
Finalement, l'unique solution de (E) sur I est la fonction f.

Partie III – Etude d'une équation fonctionnelle

1. Supposons f constante égale à $a \in \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. f est bien dérivable en 0 et vérifie l'équation fonctionnelle de l'énoncé *si et seulement si* $a = \frac{2a}{1+a^2}$, ce qui équivaut à $a^3 - a = 0$ ou encore $a(a-1)(a+1) = 0$. Les fonctions constantes solutions du problème posé sont donc les fonctions constantes égales à 0, 1 ou -1.

2. Si f est solution, alors $f(0) = \frac{2f(0)}{1+f(0)^2}$ donc, en raisonnant comme dans la question précédente, $f(0)$ vaut 0, 1 ou -1.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$. L'équation fonctionnelle nous dit que

$$f(x) = \frac{2y}{1+y^2}$$

Or $(1+y)^2 \geqslant 0$ et $(1-y)^2 \geqslant 0$ de sorte que $-(1+y^2) \leqslant 2y \leqslant 1+y^2$ puis $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

4. Supposons f solution. Alors $-f$ est également dérivable en 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-f(x) = -\frac{2f(x)}{1+f(x)^2} = \frac{2(-f(x))}{1+(-f(x))^2}$$

de sorte que $-f$ est également solution.

5. Tout d'abord, th est bien dérivable en 0. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$1 + \operatorname{th}^2(x) = 1 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{(e^x+e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{2(e^{2x}+e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

Ainsi

$$\frac{2\operatorname{th}(x)}{1+\operatorname{th}^2(x)} = \frac{\frac{2(e^x-e^{-x})}{e^x+e^{-x}}}{\frac{2(e^{2x}+e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^2}} = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}{e^{2x}+e^{-2x}} = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} = \operatorname{th}(2x)$$

Ainsi th est bien solution du problème posé.

6. On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_0}{2^n} = 0$ donc, par continuité de f en 0, $\lim_{n\to+\infty} u_n = f(0) = 1$.

7. On a clairement $u_n = \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$. Une récurrence simple montre que la suite (u_n) est du signe de u_0. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_{n+1}^3 - u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2} = \frac{u_{n+1}(u_{n+1}^2-1)}{1+u_{n+1}^2}$$

Or on a prouvé à la question **III.3** que f est à valeurs dans $[-1,1]$ de sorte que $u_{n+1}^2 - 1 \leqslant 0$. Puisque u_{n+1} est du signe de u_0, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ si $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ si $u_0 \leqslant 0$.
Par conséquent, (u_n) est décroissante si $u_0 \geqslant 0$ et croissante si $u_0 \leqslant 0$.

8. Puisque $f(x_0) \neq f(0) = 1$ et que f est à valeurs dans $[-1,1]$, on a donc $u_0 = f(x_0) \in [-1,1[$.
Si $u_0 \geqslant 0$, (u_n) est décroissante de limite 1 d'après les questions **III.6** et **III.7**, ce qui est absurde puisque $u_0 < 1$.
Si $u_0 \leqslant 0$, (u_n) admet 1 pour limite d'après la question **III.6** mais tous ses termes sont négatifs d'après la question **III.7**, ce qui est absurde.
On en déduit donc que le problème de l'énoncé n'admet pas de solution non constante et valant 1 en 0.

9. Si f est une solution non constante telle que $f(0) = -1$, alors $g = -f$ est une solution non constante du même problème d'après **III.4** et vérifie $g(0) = 1$, ce qui est impossible d'après la question précédente.
On en déduit donc que le problème de l'énoncé n'admet pas de solution non constante et valant -1 en 0.

10. Le problème n'admet donc pas de solution non constante valant 1 ou -1 en 0 ou encore, toute solution valant 1 ou -1 en 0 est nécessairement constante.

11. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 1$. Considérons à nouveau la suite de terme général $u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$. Alors (u_n) converge vers $f(0) = 0$. En reprenant la question **III.7**, on montre que (u_n) est croissante puisque $u_0 = 1 \geqslant 0$. On a donc $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci contredit le fait que (u_n) converge vers 0.
De même, s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = -1$, on prouve que la même suite (u_n) décroît vers 0 alors que $u_0 = -1$, ce qui est absurde.
On en déduit que f ne peut prendre les valeurs -1 ou 1.

12. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque th est solution du problème,

$$\operatorname{th}(2g(x)) = \frac{2\operatorname{th}(g(x))}{1 + \operatorname{th}^2(g(x))}$$

Puisque argth est la bijection récriproque de la bijection induite par th de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$,

$$\operatorname{th}(g(x)) = \operatorname{th}(\operatorname{argth}(f(x))) = f(x)$$

Ainsi

$$\operatorname{th}(2g(x)) = \frac{2f(x)}{1 + f(x)^2}$$

Mais comme f est solution du problème,

$$\operatorname{th}(2g(x)) = f(2x) = \operatorname{th}(g(2x))$$

Puisque th est injective, $2g(x) = g(2x)$.

13. Puisque f est dérivable en 0 et que argth est dérivable en $f(0) = 0$, $g = \operatorname{argth} \circ f$ est dérivable en 0.

14. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_0}{2^n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = g'(0)$ car $g(0) = \operatorname{argth}(f(0)) = \operatorname{argth}(0) = 0$.

15. La question **III.12** montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \frac{g\left(\frac{x_0}{2^n}\right)}{\frac{x_0}{2^n}} = \frac{g\left(2 \cdot \frac{x_0}{2^{n+1}}\right)}{2 \cdot \frac{x_0}{2^{n+1}}} = \frac{2g\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)}{2 \cdot \frac{x_0}{2^{n+1}}} = \frac{g\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x_0}{2^{n+1}}} = v_{n+1}$$

La suite (v_n) est donc constante.

16. La suite (v_n) est donc constante égale à $v_0 = \frac{g(x_0)}{x_0}$. Puisqu'elle converge vers $g'(0)$, on a alors $\frac{g(x_0)}{x_0} = g'(0)$ i.e. $g(x_0) = ax_0$ avec $a = g'(0)$. Ceci est valable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$ mais on a également $g(0) = 0 = a.0$ de sorte que $g(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

17. On sait qu'une fonction solution vaut 0, -1 ou 1 en 0.
La question précédente montre que les solutions du problème nulles en 0 sont de la forme $x \mapsto \operatorname{th}(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}$. Ces fonctions sont bien dérivables en 0 et la question **III.5** montre qu'elles sont alors effectivement solutions.
La question **III.10** montre qu'une fonction valant -1 ou 1 en 0 est nécessairement constante. Les fonctions constantes égales à -1 ou 1 sont également bien solutions d'après la question **III.1**. Finalement, les fonctions solutions sont :

- la fonction constante égale à -1 ;
- la fonction constante égale à 1 ;
- les fonctions $x \mapsto \operatorname{th}(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Solution 1.

1. **a.** φ est deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en tant que produit de fonctions deux fois dérivables sur cet intervalle et pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\varphi''(t) = \cos(t)z''(t) - 2\sin(t)z'(t) - \cos(t)z(t)$$

b. D'après la question précédente, z est solution de (E) *si et seulement si* φ'' est nulle sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Or φ'' est nulle sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *si et seulement si* il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(t) = \lambda t + \mu$ pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que les solutions de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sont les fonctions

$$t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \frac{\lambda t + \mu}{\cos t} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

2. **a.** Puisque $z(t) = y(\sin t)$, pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $y(x) = z(\arcsin x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$. On en déduit que pour tout $x \in]-1, 1[$

$$y'(x) = \frac{z'(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} \qquad y''(x) = \frac{z''(\arcsin x)}{1-x^2} + \frac{xz'(\arcsin x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

b. y est solution de (F) *si et seulement si*

$$\forall x \in]-1, 1[, \ (1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$$

ce qui équivaut d'après la question précédente à

$$\forall x \in]-1, 1[, \ z''(\arcsin x) - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arcsin x) - z(\arcsin x) = 0$$

Puisque sin prend toute les valeurs dans $]-1, 1[$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ceci équivaut encore à

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ z''(\arcsin(\sin t)) - \frac{2 \sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} z'(\arcsin(\sin t)) - z(\arcsin(\sin t)) = 0$$

Or pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ car cos est positive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\arcsin(\sin t) = t$. Finalement, y est solution de (F) *si et seulement si*

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ z''(t) - \frac{2 \sin t}{\cos t} z'(t) - z(t) = 0$$

autrement dit, *si et seulement si* z est solution de (E).
Les solutions de (E) étant les fonctions

$$t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \frac{\lambda t + \mu}{\cos t} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

celles de (F) sont les fonctions

$$x \in]-1, 1[\mapsto \frac{\lambda \arcsin x + \mu}{\cos(\arcsin x)} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

ou encore les fonctions

$$x \in]-1, 1[\mapsto \frac{\lambda \arcsin x + \mu}{\sqrt{1-x^2}} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

3. **a.** Remarquons tout d'abord que f est deux fois dérivable en tant que solution d'une équation différentielle d'ordre 2.
De plus, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f''(x) = \frac{3xf'(x)}{1-x^2} + \frac{f(x)}{1-x^2}$$

Supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que f soit n fois dérivable sur $]-1, 1[$. A fortiori, f est $n-1$ fois dérivable sur $]-1, 1[$. f' est également $n-1$ fois dérivable sur $]-1, 1[$. Puisque $x \mapsto \frac{3x}{1-x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ sont indéfiniment dérivables donc a fortiori $n-1$ fois dérivables sur $]-1, 1[$, f'' est $n-1$ fois dérivable sur $]-1, 1[$.
Autrement dit f est $n+1$ fois dérivable sur $]-1, 1[$.
Par récurrence, f est indéfiniment dérivable sur $]-1, 1[$.

b. Notons $\mathrm{HR}(n)$ l'hypothèse de récurrence suivante

$$\forall x \in]-1, 1[, \ (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+1)}(x) - (n+1)^2 f^{(n)}(x) = 0$$

$\mathrm{HR}(0)$ est vraie puisque f est solution de (F). Supposons que $\mathrm{HR}(n)$ soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors en dérivant (ceci est licite car les fonctions en jeu sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$), on obtient

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)f^{(n+3)}(x) - 2xf^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+2)}(x) - (2n+3)f^{(n+1)}(x) - (n+1)^2 f^{(n+1)}(x) = 0$$

ou encore

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)f^{(n+3)}(x) - (2n+5)xf^{(n+2)}(x) - (n+2)^2 f^{(n+1)}(x) = 0$$

puisque $(n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$.
Par récurrence, $\mathrm{HR}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. On peut prouver directement la relation demandée sans récurrence à l'aide de la formule de Leibniz en dérivant n fois la relation

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)f''(x) - 3xf'(x) - f(x) = 0$$

c. En évaluant la relation de la question précédente en $x = 0$, on obtient $a_{n+2} = (n+1)^2 a_n$.

d. Récurrences sans aucune difficulté.

4. **a.** C'est du cours

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

b. g est bien solution de (F) (prendre $\lambda = 1$ et $\mu = 0$ dans la solution générale). On a évidemment $g(0) = 0$. De plus, $g(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ de sorte que $g'(0) = 1$. En reprenant les notations de la question précédente, $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$a_{2p} = 0 \qquad\qquad a_{2p+1} = 2^{2p}\,(p!)^2$$

En appliquant la formule de Taylor-Young à g en 0 à l'ordre $2n+1$ (ceci est licite puisque g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'après la question **3.a**), on a donc

$$g(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{p=0}^{n} \frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1} + o(x^{2n+1})$$

c. h est bien solution de (F) (prendre $\lambda = 0$ et $\mu = 1$ dans la solution générale). On a évidemment $h(0) = 1$. De plus, $h(x) \underset{x \to 0}{=} 1 + o(x)$ de sorte que $h'(0) = 0$. En reprenant les notations de la question précédente, $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$a_{2p} = \frac{((2p)!)^2}{2^{2p}\,(p!)^2} \qquad\qquad a_{2p+1} = 0$$

En appliquant la formule de Taylor-Young à h en 0 à l'ordre $2n$ (ceci est licite puisque h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'après la question **3.a**), on a donc

$$h(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{p=0}^{n} \frac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2} x^{2p} + o(x^{2n})$$

ou encore

$$h(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}} x^{2p} + o(x^{2n})$$

d. Puisque k est une primitive de h sur $]-1,1[$,

$$k(x) \underset{x \to 0}{=} k(0) + \sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{2p}{p}}{(2p+1)2^{2p}} x^{2p+1} + o(x^{2n+1})$$

et donc

$$k(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{2p}{p}}{(2p+1)2^{2p}} x^{2p+1} + o(x^{2n+1})$$

5. Le coefficient de x^{2n+1} dans le développement limité de g en 0 est $\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
D'autre part, dans le produit hk, un terme en x^{2n+1} est obtenu comme le produit d'un terme en x^{2p+1} dans le développement limité de k en 0 et d'un terme en $x^{2(n-p)}$ dans le développement limité de h en 0. Par unicité du développement limité

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{2p}{p}}{(2p+1)2^{2p}} \frac{\binom{2(n-p)}{n-p}}{2^{2(n-p)}} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

ou encore

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1}\binom{2p}{p}\binom{2(n-p)}{n-p} = \frac{2^{4n}}{(n+1)\binom{2n+1}{n}}$$