

DEVOIR À LA MAISON N°10

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Exercice 1 ★★★

L'objet de cet exercice est de prouver les solutions entières de l'équation :

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (E)$$

sont (à un échange près de x et y) les triplets (x, y, z) de la forme :

$$x = d(u^2 - v^2) \quad y = 2duv \quad z = d(u^2 + v^2)$$

où d, u, v sont des entiers.

1. S'assurer que les triplets proposés vérifient bien l'équation (E).
2. Soit (x, y, z) un triplet d'entiers solution de l'équation (E). On suppose x, y et z premiers entre eux dans leur ensemble et strictement positifs.
 - a. Montrer que x, y et z sont premiers entre eux deux à deux.
 - b. Montrer que x et y sont de parités distinctes. En déduire la parité de z .
3. On reprend les hypothèses de la question précédente et on suppose de plus (quitte à échanger x et y) que x est impair et que y est pair.
 - a. Montrer que le pgcd de $z + x$ et $z - x$ est 2.
 - b. Il existe donc $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que

$$y = 2a \quad z + x = 2b \quad z - x = 2c$$

Montrer que b et c sont des carrés d'entiers naturels non nuls.

4. Conclure.

Problème 1 – Polynômes de Tchebychev

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n et g_n les fonctions telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \cos(nx) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \cos^n(x)$$

En particulier, f_0 et g_0 sont la fonction constante égale à 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n = \text{vect}(f_0, f_1, \dots, f_n) \quad \text{et} \quad G_n = \text{vect}(g_0, g_1, \dots, g_n)$$

F_n et G_n sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Partie I – Cas particulier

1. Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, $f_k \in G_2$. En déduire que $F_2 \subset G_2$.
2. Montrer que la famille (f_0, f_1, f_2) est libre. Quelle est la dimension de F_2 ?
3. Montrer que la famille (g_0, g_1, g_2) est libre. Quelle est la dimension de G_2 ?
4. En déduire que $F_2 = G_2$.

Partie II – Une inclusion

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+2} = 2f_{n+1}f_1 - f_n$.
2. Montrer par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in G_n$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \subset G_n$.

Partie III – Utilisation de la dimension

1. Calculer $I_{k,l} = \int_0^{2\pi} f_k(t)f_l(t) dt$ pour $(k, l) \in \mathbb{N}^2$. On distinguera plusieurs cas.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille (f_0, \dots, f_n) est libre.
3. En déduire la dimension de F_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Justifier que $\dim G_n \leq n + 1$.
5. Prouver que $F_n = G_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.