# Déterminants

## Solution 1.

1. Posons $c_1 = (i, i+1, \dots, j-1, j)$, $c_2 = (j-1, j-2, \dots, i+1, i)$ et $\sigma = c_1 \circ c_2$.

   - Si $k \notin [\![i, j]\!]$, $\sigma(k) = k$.
   - Si $k \in [\![i+1, j-1]\!]$, $c_2(k) = k-1 \in [\![i, j-2]\!]$ et donc $c_1(k-1) = k-1+1 = k$, d'où $\sigma(k) = k$.
   - $c_2(i) = j-1$ et $c_1(j-1) = j$ donc $\sigma(i) = j$.
   - $c_2(j) = j$ et $c_1(j) = i$ donc $\sigma(j) = i$.

   On en déduit que $\sigma = (i, j)$.

2. Soit $(i, j)$ une transposition de $S_n$. On peut supposer $i < j$. $(i, j)$ peut alors s'écrire comme un produit de deux cycles d'après la question précédente.
$$(i, j) = (i, i+1, \dots, j-1, j)(j-1, j-2, \dots, i+1, i)$$
   Or il est simple de décomposer chacun de ces deux cycles comme un produit de transpositions de la forme $(k, k+1)$
$$(i, i+1, \dots, j-1, j) = (i, i+1)(i+1, i+2) \dots (j-2, j-1)(j-1, j)$$
$$(j-1, j-2, \dots, i+1, i) = (j-1, j-2)(j-2, j-3) \dots (i+2, i+1)(i+1, i)$$
   On conclut en remarquant que toute permutation s'écrit comme un produit de transpositions.

## Solution 2.

Soit $(i, j)$ une transposition. Si $i = 1$ ou $j = 1$, la transposition $(i, j)$ est bien du type de l'énoncé. Sinon, on a $(i, j) = (1, j)(1, i)(1, j)$. Comme toute permutation s'écrit comme un produit de transpositions et que toute transposition s'écrit comme un produit de transpositions du type $(1, i)$, toute permutation s'écrit bien comme un produit de transpositions du type $(1, i)$.

## Solution 3.

**Première méthode :**
On peut déterminer le nombre d'inversions : il suffit de compter pour chaque élément de la seconde ligne le nombre d'éléments qui le suivent et qui lui sont inférieurs. On trouve
$$I(\sigma) = n-1+n-2+\dots+1+0 = \frac{n(n-1)}{2}$$
Ainsi $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
**Seconde méthode :**
On peut décomposer $\sigma$ en produit de cycles disjoints (en fait de transpositions).

- Si $n$ est pair
$$\sigma = (1, n) \circ (2, n-1) \circ \dots \circ \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\right)$$
  Ainsi $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n}{2}}$.
- Si $n$ est impair
$$\sigma = (1, n) \circ (2, n-1) \circ \dots \circ \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2}\right)$$
  Ainsi $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$.

**Solution 4.**

Comme $S_2 = \{\mathrm{Id}_{[\![1,2]\!]}, (1,2)\}$, le centre de $S_2$ est évidemment $S_2$.
Supposons $n \geq 3$. Tout d'abord $\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$ appartient évidemment au centre de $S_n$. Soit maintenant $\sigma$ appartenant au centre de $S_n$. $\sigma$ commute notamment avec toutes les transpositions. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Soient également deux éléments $j$ et $k$ de $[\![1,n]\!]$ tels que $i, j, k$ soient distincts deux à deux (c'est possible puisque $n \geq 3$). Comme $\sigma$ commute avec $(i,j)$, $\sigma \circ (i,j) \circ \sigma^{-1} = (i,j)$ i.e. $(\sigma(i), \sigma(j)) = (i,j)$. Ainsi $\sigma(i) \in \{i,j\}$. On montre de même que $\sigma(i) \in \{i,k\}$. Comme $j$ et $k$ sont distincts, on a nécessairement $\sigma(i) = i$. Finalement $\sigma = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$.
On en déduit que le centre de $S_n$ est le sous-groupe trivial $\{\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}\}$ pour $n \geq 3$.

**Solution 5.**

Posons $M_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. D'après le théorème de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{k=1}^n k\sigma(k) \leq \left(\sum_{k=1}^n k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n \sigma(k)^2\right)^{\frac{1}{2}} = M_n$$

Or $f(\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}) = M_n$ donc $M_n$ est le maximum de $f$ sur $S_n$.
Soit $\sigma \in S_n$ non décroissante. Alors il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i < j$ et $\sigma(i) < \sigma(j)$. Soit $\tau$ la transposition de $S_n$ échangeant $\sigma(i)$ et $\sigma(j)$ et posons $\sigma' = \tau \circ \sigma$. Alors

$$f(\sigma') - f(\sigma) = i\sigma(j) + j\sigma(i) - i\sigma(i) - j\sigma(j) = (j-i)(\sigma(i) - \sigma(j)) < 0$$

Ainsi le minimum de $f$ est atteint en la seule permutation décroissante de $S_n$, à savoir la permutation qui à $k \in [\![1,n]\!]$ associe $n+1-k$. Le minimum de $f$ sur $S_n$ vaut donc

$$\sum_{k=1}^n k(n+1-k) = \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

**Remarque.** On aurait aussi pu utiliser un argument de monotonie au lieu du théorème de Cauchy-Schwarz pour déterminer le maximum de $f$.

**Solution 6.**

1. Soit $(\sigma, \tau) \in S_n^2$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors

$$(P_\sigma P_\tau)_{i,j} = \sum_{k=1}^n (P_\sigma)_{i,k}(P_\tau)_{k,j} = \sum_{k=1}^n \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\tau(j)} = \sum_{k=1}^n \delta_{\sigma^{-1}(i),k}\delta_{k,\tau(j)}$$

   Cette somme est non nulle *si et seulement si* $\sigma^{-1}(i) = \tau(j)$ i.e. $i = \sigma \circ \tau(j)$ et dans ce cas elle vaut 1. Ainsi

$$(P_\sigma P_\tau)_{i,j} = \delta_{i,\sigma\circ\tau(j)} = (P_{\sigma\circ\tau})_{i,j}$$

   Il s'ensuit que $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}$. On en déduit que P est bien à valeurs dans $GL_n(\mathbb{K})$ puisque pour $\sigma \in S_n$, $P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\mathrm{Id}} = I_n$ puis que P est bien un morphisme de $S_n$ dans $GL_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$({}^t P_\sigma)_{i,j} = (P_\sigma)_{j,i} = \delta_{j,\sigma(i)} = \delta_{i,\sigma^{-1}(j)} = (P_{\sigma^{-1}})_{i,j}$$

   et donc ${}^t P_\sigma = P_{\sigma^{-1}}$.

3. Soit $\tau = (i,j)$ une transposition de $S_n$. Alors l'échange des colonnes (ou lignes) $i$ et $j$ transforment la matrice $P_\tau$ en la matrice $I_n$. On en déduit que $\det(P_\tau) = -1 = \varepsilon(\tau)$. On conclut en remarquant que les transpositions engendrent $S_n$.

**Solution 7.**

**1.** Effectuons l'opération $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$,

$$\Delta_1 = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix},$$

puis $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$,

$$\Delta_1 = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix},$$

le système étant triangulaire,

$$\Delta_1 = (a+2)(a-1)^2.$$

**2.** Effectuons l'opération $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$,

$$\Delta_2 = (x+2a)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & x & a \\ 1 & a & x \end{vmatrix},$$

puis $C_2 \longleftarrow C_2 - aC_1$, $C_3 \longleftarrow C_3 - aC_1$,

$$\Delta_2 = (2a+x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-a & 0 \\ 1 & 0 & x-a \end{vmatrix},$$

le système étant triangulaire,

$$\Delta_2 = (2a+x)(x-a)^2.$$

## Solution 8.

Effectuons l'opération $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$,

$$\Delta = (1+\omega+\omega^2)\begin{vmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & 1 & \omega^2 \\ 1 & \omega & 1 \end{vmatrix}.$$

▶ *Cas 1* : $\omega = 1$. Les trois colonnes de $\Delta$ sont identiques, donc $\Delta = 0$.

▶ *Cas 2* : $\omega = j$ ou $j^2$. Dans ce cas $\Delta = 0$ car

$$1 + \omega + \omega^2 = 0.$$

## Solution 9.

**1.** Une simple application de la règle de Sarrus aboutit à

$$\Delta_1 = 2abc.$$

**2.** Effectuons les opérations $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$,

$$\Delta_2 = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix},$$

puis en développant par rapport à la première ligne,

$$\Delta_2 = (c-b)(c-a)(b-a).$$

**3.** On remarque que les lignes du déterminant sont *liées* par la relation

$$L_3 = (a+b+c)L_1 - L_2.$$

On a donc $\Delta_3 = 0$.

**4.** Posons

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

et

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

On a

$$M\Omega = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & j\beta & j^2\gamma \\ \alpha & j^2\beta & j\gamma \end{pmatrix}$$

où

$$\alpha = a+b+c \ , \ \beta = a+jb+j^2c$$

et

$$\gamma = a+j^2b+jc.$$

On a donc

$$\det(M\Omega) = \det(M)\det(\Omega) = \alpha\beta\gamma\det(\Omega).$$

D'après le calcul de $\Delta_2$,

$$\det(\Omega) = (j^2-j)(j^2-1)(j-1) \neq 0,$$

on a donc

$$\Delta_4 = \det(M) = \alpha\beta\gamma.$$

**5.** Notons

$$A = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} c \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant s'écrit en colonnes ,

$$\Delta_5 = |A+B, B+C, A+C|.$$

En développant par trilinéarité ce déterminant , on obtient 8 termes dont 6 sont nuls par le caractère alterné du déterminant. On a

$$\Delta_5 = |A, B, C| + |B, C, A|.$$

Or , par antisymétrie ,

$$|B, C, A| = |A, B, C|$$

ainsi

$$\Delta_3 = 2|A, B, C|.$$

Or,

$$|A, B, C| = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

On a donc

$$\Delta_5 = 2abc\Delta_2,$$

d'où

$$\Delta_5 = 2abc(c-b)(c-a)(b-a).$$

**Solution 10.**

**1.** Par $L_k \leftarrow L_k - L_1$ pour $k = 2, 3$ et 4, développement par rapport à la première colonne puis factorisation, on aboutit à :

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 0 & a'-a & 0 & b(a'-a) \\ 0 & 0 & b'-b & a(b'-b) \\ 0 & a'-a & b'-b & a'b'-ab \end{vmatrix} \\ &= (a'-a)(b'-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \\ a'-a & b'-b & a'b'-ab \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

En effectuant $L_3 \leftarrow L_3 + (a-a')L_1$ puis une factorisation, on obtient :

$$\Delta_1 = (a'-a)(b'-b)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & a' \end{vmatrix}.$$

On trouve finalement, après développement par rapport à première colonne :

$$\Delta_1 = (a'-a)(b'-b)^2\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & a' \end{vmatrix} = (a'-a)^2(b'-b)^2.$$

**2.** En effectuant $L_k \leftarrow L_k - L_1$ pour $k = 2, 3$ et 4, puis en développant par rapport à la première colonne, on trouve :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

Puis par $L_k \leftarrow L_k - 2L_2$ pour $k = 3$ et 4, on aboutit à :

$$\Delta_2 = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix},$$

et en développant par rapport à la première colonne :

$$\Delta_2 = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 24.$$

**3.** Par $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$ puis en développant par rapport à la première colonne, on trouve :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Par $L_k \leftarrow L_k - L_1$ pour $k = 1$ et 2 puis en développant par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\Delta_3 = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -12 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -12.$$

**4.** Par $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, on obtient :

$$\Delta_4 = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

En effectuant alors $L_k \leftarrow L_k - L_1$ pour $k = 2, 3$ et 4, on aboutit à :

$$\Delta_4 = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

## Solution 11.

Pour tout $x$ réel, notons

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & \cdots & n & 1 \\ 1 & x & & \vdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & n & \vdots \\ \vdots & \vdots & & x & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}.$$

D'après la formule développée du déterminant (ou par récurrence sur $n$ au moyen d'un développement par rapport à la dernière colonne), P est une fonction polynôme de degré au plus $n$. Comme on a clairement

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n, \ \ P(k) = 0,$$

il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ P(x) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (x - k).$$

En développant le déterminant par rapport à la dernière colonne, on s'aperçoit que le monôme en $x^n$ de $P(x)$ provient du déterminant

$$\begin{vmatrix} x & 2 & \cdots & n \\ 1 & x & & \vdots \\ 1 & 2 & \ddots & n \\ 1 & 2 & \ldots & x \end{vmatrix}$$

et vaut donc $x^n$. Ainsi $\lambda = 1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(x) = \prod_{k=1}^{n} (x-k).$$

**Solution 12.**

▶ Si $n = 1$, le déterminant vaut clairement

$$\sin(2a_1).$$

▶ Si $n = 2$, on trouve

$$-\sin^2(a_1 - a_2).$$

▶ Si $n \geqslant 3$, notons $\mathrm{M} = (\sin(a_i + a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} \cos(a_1) \\ \vdots \\ \cos(a_n) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{S} = \begin{bmatrix} \sin(a_1) \\ \vdots \\ \sin(a_n) \end{bmatrix}.$$

D'après la formule d'addition du sinus, pour tout $j$ compris entre 1 et $n$, la $j$-ième colonne de M vaut

$$\cos(a_j)\mathrm{S} + \sin(a_j)\mathrm{C}.$$

Ainsi

$$\mathrm{Im}(\mathrm{M}) \subset \mathrm{vect}(\mathrm{C}, \mathrm{S})$$

et donc $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) \leqslant 2 < n$, d'où $\det(\mathrm{M}) = 0$.

**Solution 13.**

Notons, pour tout $x$ réel :

$$\mathrm{P}(x) = \begin{vmatrix} (x+1)^k & 2^k & 3^k & \cdots & n^k \\ (x+2)^k & 3^k & 4^k & \cdots & (n+1)^k \\ \vdots & & & & \vdots \\ (x+n)^k & \cdots & \cdots & \cdots & (2n-1)^k \end{vmatrix}.$$

En développant $\mathrm{P}(x)$ par rapport à la première colonne, on obtient que P est une fonction polynôme de degré au plus $k$ : P est donc de degré strictement inférieur à $n-1$. Comme il est clair que

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n-1, \quad \mathrm{P}(k) = 0,$$

la fonction P admet strictement plus de racines que son degré : on en conclut qu'elle est nulle.

**Solution 14.**

En développant $\Delta_n = \det(\mathrm{A}_n)$ par rapport à la première colonne, on aboutit à :

$$\Delta_n = (-1)^{n+1}\Delta_{n-1},$$

d'où, par une récurrence immédiate :

$$\Delta_n = \prod_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} = (-1)^{2+3+\cdots+(n+1)} = (-1)^{n(n+3)/2)}$$

**Solution 15.**

Effectuons successivement les opérations $L_k \leftarrow L_k - L_{k-1}$ pour $k$ variant de $n$ à 2 :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = n!.$$

**Solution 16.**

1. En effectuant les opérations $C_k \leftarrow C_k - C_1$ sur les colonnes de $\det(A + xJ)$ pour $k$ variant de 2 à $n$, on obtient que $\det(A + xJ)$ est égal à un déterminant dont les seuls coefficients dépendant de $x$ sont ceux de la première colonne et sont de la forme $a_i + xb_i$. En développant ce déterminant par rapport à la première colonne, on obtient que $\det(A + xJ)$ est une combinaison linéaire de fonctions affines de la variable $x$ : il s'agit donc d'une fonction affine de $x$.

2. **a.** On sait que $\det(A + xJ) = \alpha x + \beta$. Avec $x = -a$ et $x = -b$, on trouve deux équations qui donnent :

$$\alpha = \frac{(c-a)^n - (c-b)^n}{b-a},$$
$$\beta = \frac{b(c-a)^n - a(c-b)^n}{b-a}.$$

On en déduit $\det(A)$ avec $x = 0$ :

$$\det(A) = \beta = \frac{b(c-a)^n - a(c-b)^n}{b-a}.$$

**b.** En appliquant la formule développée du déterminant, on remarque que $\det(A)$ est une expression polynomiale en $(a, b)$. En tant que telle, elle est continue (à $a$ fixé) par rapport à $b$. En particulier :

$$\det(A) = \lim_{b \to a} \frac{b(c-a)^n - a(c-b)^n}{b-a} = (c-a)^n + na(c-a)^{n-1}$$

car

$$\frac{b(c-a)^n - a(c-b)^n}{b-a}$$

est le taux d'accroissement en $a$ de la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par

$$x \mapsto f(x) = x(c-a)^n - a(c-x)^n$$

et que

$$f'(a) = (c-a)^n + na(c-a)^{n-1}.$$

**Solution 17.**

Effectuons $C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$ et factorisons :

$$D_n(x) = (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & a & \dots & a \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a \\ 1 & a & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Par les opérations $L_k \leftarrow L_k - L_1$ pour $k = 2, 3 \dots, n$, on aboutit à :

$$\begin{aligned} D_n(x) &= (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & a & \dots & a \\ 0 & x-a & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix} \\ &= (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

**Solution 18.**

Effectuons $C_1 \leftarrow L_1 + \dots + L_n$. On trouve

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n-1 & \dots & 1 \\ 1 & n & \dots & 2 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}.$$

Puis, par les opérations $L_k \leftarrow L_k - L_{k-1}$ pour $k$ variant de $n$ à 2 :

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n-1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1-n & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1-n & 1 \end{vmatrix}.$$

Développons alors par rapport à la première colonne :

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1-n & \ddots & & & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1-n & 1 \end{vmatrix}.$$

Puis en en effectuant $L_k \leftarrow L_k - L_1$ pour $k$ variant de 2 à $n$ :

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -n & 0 \end{vmatrix}.$$

Puis en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -n \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n (-n)^{n-2} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

**Solution 19.**

Notons $D_{n,p}$ le déterminant cherché. Suppososons $p \geq 1$. On note $L_0, L_1, \dots, L_p$ les lignes de la matrice et on effectue les opérations :

$$\begin{aligned} L_p &\leftarrow L_p - L_{p-1} \\ L_{p-1} &\leftarrow L_{p-1} - L_{p-2} \\ &\vdots \\ L_2 &\leftarrow L_2 - L_1 \\ L_1 &\leftarrow L_1 - L_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{n,p} &= \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ 0 & \binom{n}{0} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \binom{n+p-1}{0} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix} \\ &= D_{n,p-1} \end{aligned}$$

en développant par rapport à la première colonne. Par récurrence, $D_{n,p} = D_{n,0} = 1$.

**Solution 20.**

Notons $D_n(a,b)$ le déterminant à calculer. On note $C_1, \dots, C_n$ (resp. $L_1, \dots, L_n$) les colonnes (resp. les lignes de la matrice). On effectue l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - C_n$ :

$$\begin{vmatrix} a-b & b & \dots & \dots & b \\ 0 & a & & & b \\ \vdots & (0) & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & & & \ddots & b \\ b-a & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

On effectue ensuite l'opération $L_n \leftarrow L_n + L_1$ :

$$\begin{vmatrix} a-b & b & \dots & \dots & b \\ 0 & a & & & b \\ \vdots & (0) & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & & & \ddots & b \\ 0 & 2b & \dots & 2b & a+b \end{vmatrix}$$

On suppose maintenant $a \neq 0$ et on effectue l'opération $L_n \leftarrow L_n - \frac{2b}{a}(L_2 + L_3 + \dots + L_{n-1})$ :

$$\begin{vmatrix} a-b & b & \dots & \dots & b \\ 0 & a & & & b \\ \vdots & (0) & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & & & a & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a^2+ab-(n-2)b^2}{a} \end{vmatrix}$$

Par conséquent,

$$D_n(a,b) = (a-b)a^{n-3}(a^2+ab-(n-2)b^2)$$

si $a \neq 0$.
Etudions maintenant le cas $a = 0$. Remarquons que si $n \geq 4$ alors la matrice comporte au moins deux fois la ligne $(b, 0, \dots, 0, b)$ donc le déterminant est nul. Par ailleurs, un rapide calcul donne $D_2(0,b) = -b^2$ et $D_3(0,b) = 2b^2$. La formule précédente reste vraie pour $n \geq 3$. Finalement,

$$D_n(a,b) = \begin{cases} -b^2 \text{ si } a = 0 \text{ et } n = 2 \\ (a-b)a^{n-3}(a^2+ab-(n-2)b^2) \text{ sinon} \end{cases}$$

**Solution 21.**

On effectue les opérations $L_k \leftarrow L_k - L_{k-1}$ pour $k$ variant de $n$ à 2 :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & (-1) & \vdots \\ \vdots & (1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

On effectue ensuite l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_n$ :

$$\begin{vmatrix} n-1 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ \vdots & 1 & \ddots & (-1) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & (1) & & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

On effectue enfin les opérations $C_k \leftarrow C_k + C_n$ pour $k$ variant de 0 à $n-1$ :

$$\begin{vmatrix} n-1 & & & & \\ 0 & -2 & & (*) & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & (0) & \ddots & -2 & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Le déterminant vaut donc $(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1)$.

**Solution 22.**

En effectuant les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$ pour $i$ variant de 1 à $n-1$, on obtient,

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient $D_n = D_{n-1} + (-1)^n$. Comme $D_1 = 0$, on trouve que $D_n = 0$ si $n$ est impair et $D_n = 1$ si $n$ est pair.

**Solution 23.**

En développant par rapport à la deuxième ligne, on touve $D_n = 1 - D_{n-1}$. Comme $D_1 = 1$, $D_n = 2 - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**Solution 24.**

Supposons $n \geq 3$. En développant $D_n$ par rapport à la première ligne, on trouve

$$D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x \begin{vmatrix} x & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

En développant le dernier déterminant par rapport à la première colonne, on aboutit à $D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}$. Le polynôme caractéristique associé à cette relation de récurrence est $X^2 - (1+x^2)X + x^2$ qui a pour discriminant $(1+x^2)^2 - 4x^2 = (1-x^2)^2$. Ses racines sont donc 1 et $x^2$. On distingue alors deux cas :

**Cas $x^2 \neq 1$ :** Il existe alors $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $D_n = \lambda 1^n + \mu (x^2)^n = \lambda + \mu x^{2n}$. Puisque $D_1 = 1 + x^2$ et $D_2 = (1+x^2)^2 - x^2 = 1 + x^2 + x^4$, on trouve $\lambda = \dfrac{1}{1-x^2}$ et $\mu = \dfrac{x^2}{x^2-1}$. On a donc $D_n = \dfrac{1-x^{2(n+1)}}{1-x^2}$.

**Cas $x^2 = 1$ :** Il existe alors $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $D_n = (\lambda n + \mu)1^n = \lambda n + \mu$. On a $D_1 = 1 + x^2 = 2$ et $D_2 = 1 + x^2 + x^4 = 3$. On trouve $\lambda = 1$ et $\mu = 1$ d'où $D_n = n + 1$.

**Remarque.** On aurait également pu passer l'expression de $D_n$ pour $x^2 \neq 1$ à la limite quand $x$ tend vers $\pm 1$ puisque $D_n$ est polynomial en $x$ donc continu en $x$.

**Solution 25.**

Remarquons tout d'abord que si deux des $a_i$ sont égaux, le déterminant définissant $D(x)$ admet deux colonnes identiques, il est donc nul. On supposera donc par la suite les $a_i$ distincts deux à deux.

Remarquons que $\dfrac{P(x)}{x-a_i} = \prod_{j \neq i}(x - a_j)$ est polynomiale en $x$ de degré $n-1$. En développant le déterminant par rapport à la première ligne, on voit que D est polynomiale en $x$ de degré inférieur ou égal à $n-1$ (on peut notamment la prolonger par continuité en les $a_i$).

Pour $1 \leq i \leq n$, notons $\Delta_i$ le déterminant de Vandermonde des complexes $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$. On a donc $\Delta_i = \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq n \\ j \neq i, k \neq i}} (a_k - a_j)$. On va calculer $D(a_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. La première ligne du déterminant définissant $D(a_i)$ a tous ses coefficients nuls hormis le $i^{\text{ème}}$ qui vaut $\prod_{j\neq i}(a_j - a_i)$. En développant par rapport à cette ligne, on a donc :

$$\begin{aligned}
D(a_i) = \left((-1)^{i-1}\prod_{j\neq i}(a_j - a_i)\right)\Delta_i &= \left((-1)^{i-1}\prod_{j<i}(a_j - a_i)\right)\left(\prod_{j>i}(a_j - a_i)\right)\left(\prod_{\substack{1\leq j<k\leq n\\ j\neq i, k\neq i}}(a_k - a_j)\right)\\
&= \left(\prod_{j<i}(a_i - a_j)\right)\left(\prod_{j>i}(a_j - a_i)\right)\left(\prod_{\substack{1\leq j<k\leq n\\ j\neq i, k\neq i}}(a_k - a_j)\right)\\
&= \left(\prod_{j<i}(a_i - a_j)\right)\left(\prod_{i<k}(a_k - a_i)\right)\left(\prod_{\substack{1\leq j<k\leq n\\ j\neq i, k\neq i}}(a_k - a_j)\right)
\end{aligned}$$

On peut partitionner l'ensemble $\{(j,k) \in [\![1,n]\!]^2 \mid j < k\}$ en 3 parties suivant que $j \neq i$ et $k \neq i$ ou bien $j = i$ et $k > i$ ou bien $k = i$ et $j < i$. On a donc

$$D(a_i) = \prod_{1\leq j<k\leq n}(a_k - a_j)$$

Autrement dit $D(a_i) = \delta$ pour $1 \leq i \leq n$ où $\delta$ représente le déterminant de Vandermonde de $a_1, \dots, a_n$. Le polynôme $D - \delta$ est donc de degré inférieur ou égal à $n-1$ et admet $n$ racines distinctes (les $a_i$ sont supposés distincts deux à deux) : il est donc nul. On a donc $D(x) = \delta$ pour tout $x \in \mathbb{C}$.

## Solution 26.

**1.** Comme $\deg P = n$, P admet $n$ racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec multiplicité. Il suffit donc de montrer que toutes ces racines sont simples. Supposons que $z$ soit une racine multiple de P. On a donc $P(z) = 0$ et $P'(z) = 0$ i.e. $z^n - z + 1 = 0$ et $nz^{n-1} - 1 = 0$. En utilisant la deuxième équation, on obtient $z^n = \frac{z}{n}$. Puis en reportant dans la première, on obtient $z\left(\frac{1}{n} - 1\right) + 1 = 0$. On trouve donc $z = \frac{n}{n-1}$. Puisque $nz^{n-1} - 1 = 0$, on a $\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} = 1$, ce qui est impossible car $\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} > 1$.
Par conséquent, toutes les racines de P sont simples et P admet donc $n$ racines distinctes.

**2.** On définit les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ suivants : $U = (1, \dots, 1)$ et $Z_j = (\delta_{ij}z_i)_{1\leq i\leq n}$ pour $1 \leq j \leq n$. Si on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a $\det A = \det_{\mathcal{B}}(U + Z_1, \dots, U + Z_n)$. En développant ce déterminant par multilinéarité, on obtient une somme de $2^n$ termes dont tous ceux qui comportent plus d'une fois le vecteur U sont nuls. Il reste :

$$\det_{\mathcal{B}}(U + Z_1, \dots, U + Z_n) = \det_{\mathcal{B}}(Z_1, \dots, Z_n) + \sum_{j=1}^{n}\det_{\mathcal{B}}(Z_1, \dots, Z_{j-1}, U, Z_{j+1}, \dots, Z_n)$$

Or $\det_{\mathcal{B}}(Z_1, \dots, Z_n) = \begin{vmatrix} z_1 & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & z_n\end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} z_i$. Et pour $1 \leq j \leq n$,

$$\det_{\mathcal{B}}(Z_1, \dots, Z_{j-1}, U, Z_{j+1}, \dots, Z_n) = \begin{vmatrix} z_1 & & & 1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & z_{j-1} & \vdots & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & \vdots & z_{j+1} & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & 1 & & & z_n \end{vmatrix} = \prod_{i\neq j} z_i$$

en développant par rapport à la $j^{\text{ème}}$ ligne. En notant $\sigma_i$ pour $1 \leq i \leq n$ les fonctions symétriques élémentaires des $z_j$, on a $\det A = \sigma_n + \sigma_{n-1}$. Comme les $z_j$ sont les racines de P, $\sigma_n = \sigma_{n-1} = (-1)^n$. Ainsi $\det A = 2(-1)^n$.

**Solution 27.**

1. $D_n$ est nul puisque deux des colonnes ou deux des lignes sont égales.
2. En développant par rapport à la dernière ligne, on montre que F est une combinaison linéaire des fractions rationnelles $\frac{1}{X+b_j}$ pour $1 \leq j \leq n$. Ainsi F est une fraction rationnelle puisque $\mathbb{C}(X)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. De plus, les fractions rationnelles $\frac{1}{X+b_j}$ sont toutes de degré $-1$ donc $\deg F \leq -1$.
3. On a vu que F est de la forme $\sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{X+\beta_j}$ où les $\lambda_j$ sont des complexes. En réduisant au même dénominateur, on voit que $F(X) = \dfrac{P(X)}{\prod_{j=1}^n (X+b_j)}$ où P est un polynôme. Puisque $\deg F \leq -1$, $\deg P \leq n-1$.
4. Les $a_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$ sont des zéros de F puisqu'en substituant un de ces $a_i$ à X dans le déterminant définissant $F(X)$, on obtient deux lignes égales donc un déterminant nul. Les $a_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$ sont donc des racines de P. Les $a_i$ étant distincts deux à deux, P possède bien au moins $n-1$ racines.
   Puisque $\deg P \leq n-1$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P = \lambda \prod_{i=1}^{n-1}(X - a_i)$. On a bien évidemment $D_n = F(a_n)$. Reste à calculer $\lambda$. On a d'une part $(X+b_n)F = \lambda \frac{\prod_{i=1}^{n-1} X-a_i}{\prod_{j=1}^{n-1} X+b_j}$ et d'autre part

$$(X+b_n)F(X) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{X+b_n}{X+b_1} & \cdots & \frac{X+b_n}{X+b_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}$$

   En substituant $-b_n$ à X dans les deux expressions de $(X+b_n)F$ que l'on vient de trouver, on obtient

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \frac{\prod_{i=1}^{n-1} a_i + b_n}{\prod_{j=1}^{n-1} b_n - b_j}$$

   En développant le déterminant du membre de gauche par rapport à la dernière ligne, on trouve :

$$\lambda = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} b_n - b_j}{\prod_{i=1}^{n-1} a_i + b_n} D_{n-1}$$

   Par conséquent

$$D_n = F(a_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)\prod_{j=1}^{n-1}(b_n - b_j)}{\prod_{i=1}^{n-1}(a_i + b_n)\prod_{j=1}^{n-1}(a_n + b_j)} D_{n-1}$$

On montre alors par récurrence que :

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i)\prod_{1 \leq i < j \leq n}(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i,j \leq n}(a_i + b_j)}$$

**Solution 28.**

**Première méthode :**
Pour $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, note $\mathrm{V}_n(x_0, x_1, \dots, x_n)$ le déterminant de l'énoncé.
Supposons $n \geq 1$ et fixons $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $\mathrm{P}(x) = \mathrm{V}_n(x_0, \dots, x_{n-1})$. En développant le déterminant correspondant par rapport à la premièe colonne, on voit que P est une fonction polynômiale de degré au plus $n$ et que le coefficient du monôme de degré $n$ est $\mathrm{V}_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1})$. Supposons dans un premier temps les complexes $x_0, \dots, x_{n-1}$ distincts deux à deux. Ce sont tous des racines de P puisqu'en remplaçant $x$ par un de ces complexes dans le déterminant définissant $\mathrm{P}(x)$, on obtient deux lignes identiques et donc un déterminant nul. On en déduit que

$$\mathrm{P}(x) = \mathrm{V}_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

Finalement

$$\mathrm{V}_n(x_0, \dots, x_n) = \mathrm{P}(x_n) = \mathrm{V}_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)$$

L'égalité est encore valable lorsque deux des complexes parmi $x_0, \dots, x_{n-1}$ sont égaux puisque dans ce cas $\mathrm{V}_n(x_0, \dots, x_n) = \mathrm{V}_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) = 0$ (deux lignes sont égales dans chacun de ces déterminants).
On fait alors l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\mathrm{HR}(n) : \qquad \forall (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1},\ \mathrm{V}_n(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

$\mathrm{HR}(0)$ est vraie puisque pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{V}_0(x_0) = 1$. Il suffit de convenir classiquement qu'un produit indéxé sur l'ensemble vide vaut 1.
Supposons $\mathrm{HR}(n-1)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. D'après ce qui précède

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_n(x_0, \dots, x_n) &= \mathrm{V}_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) \\
&= \left( \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i) \right) \left( \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) \right) \\
&= \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{HR}(n)$ est vraie.
Par récurrence, $\mathrm{HR}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Seconde méthode :**
On reprend les mêmes notations que précédemment. Supposons $n \geq 1$. On note $\mathrm{C}_0, \dots, \mathrm{C}_n$ les colonnes du déterminant définissant $\mathrm{V}_n(x_0, \dots, x_n)$.
En effectuant les opérations, $\mathrm{C}_i \leftarrow \mathrm{C}_i - x_0 \mathrm{C}_{i-1}$ pour $n$ variant $i$ variant de $n$ à 1, on obtient

$$\mathrm{V}_n(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \dots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient

$$\mathrm{V}_n(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \dots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}$$

On peut alors factoriser chacune des lignes et on obtient

$$\mathrm{V}_n(x_0, \dots, x_n) = \left( \prod_{i=1}^{n} (x_i - x_0) \right) \mathrm{V}_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$$

On conclut alors par une récurrence similaire à celle effectuée pour la première méthode.

**Solution 29.**

**1.** On trouve

$$
A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}
\qquad
A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}
\qquad
A_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

**2.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En développant $D_{n+2}$ par rapport à la première colonne

$$
D_{n+2} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{[n+2]}
= 2D_{n+1} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{[n+1]}
$$

En développant le second déterminant par rapport à la première ligne,

$$D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$$

**3.** La suite $(D_n)$ vérifie la relation de récurrence $D_{n+2} - 2D_{n+1} + D_n = 0$. L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui admet 1 pour racine double. Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $D_n = (\lambda n + \mu)1^n = \lambda n + \mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $D_1 = 2$ et $D_2 = 3$, on trouve $\lambda = \mu = 1$ et donc $D_n = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

## Solution 30.

Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$ et M la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$. On a immédiatement que

$$
M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

On a donc $\det(f) = \det(M) = 1 \neq 0$, donc $f$ est un automorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$.

## Solution 31.

Notons respectivement $p$ et $s$ la projection et la symétrie de l'énoncé. Soient $q = \dim F$ et $r = \dim G$ (on a donc $q + r = n$). Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.

La matrice de $p$ dans cette base est $\left(\begin{array}{c|c} I_q & \mathbf{0_{q,r}} \\ \hline \mathbf{0_{r,q}} & \mathbf{0_{r,r}} \end{array}\right)$. On a donc $\det p = 1$ si $q = n$ et $\det p = 0$ sinon.

La matrice de $s$ dans cette base est $\left(\begin{array}{c|c} I_q & \mathbf{0_{q,r}} \\ \hline \mathbf{0_{r,q}} & -I_r \end{array}\right)$. On a donc $\det s = (-1)^r$.

## Solution 32.

1. Si $p = \mathrm{Id}_E$, alors $\det p = 1$. Si $p \neq \mathrm{Id}_E$, alors $p$ n'est pas inversible et $\det p = 0$.

2. Posons $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. On sait que $E = F \oplus G$. En écrivant la matrice de $s$ dans une base adaptée à cette décomposition en somme directe, on a $\det s = (-1)^{\dim G}$.

3. $f$ est une symétrie et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. On sait que $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}$. D'après la question précédente, $\det f = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

**Solution 33.**

1. Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus $A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN$.

2. Notons classiquement $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$m(E_{11}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{21}E_{21} \qquad m(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix} = a_{11}E_{12} + a_{21}E_{22}$$

$$m(E_{21}) = \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}E_{11} + a_{22}E_{21} \qquad m(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = a_{12}E_{12} + a_{22}E_{22}$$

Ainsi la matrice de $m_A$ dans la base $(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ (attention à l'ordre !) est la matrice définie par blocs $\left(\begin{array}{c|c} A & 0_n \\ \hline 0_n & A \end{array}\right)$. On a donct $\det(m_A) = (\det A)^2$.

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note à nouveau $m_A : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{cases}$. $m_A$ est encore un endomorphisme. On note $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Remarquons que $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$. On a alors

$$m_A(E_{ij}) = \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{kl}E_{kl}E_{ij} = \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{kl}\delta_{li}E_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}E_{kj}$$

La matrice de $m_A$ dans la base $(E_{11}, E_{21}, \dots, E_{n1}, E_{12}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{n1}, E_{n2}, \dots, E_{nn})$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont tous égaux à A. On en déduit que $\det(m_A) = (\det A)^n$.

**Solution 34.**

1. Evident.

2. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$u_\sigma \circ u_\tau(x_1, \dots, x_n) = u_\sigma(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = (u_{\tau\circ\sigma(1)}, \dots, u_{\tau\circ\sigma(n)}) = u_{\tau\circ\sigma}(x_1, \dots, x_n)$$

On en déduit que $u_\sigma \circ u_\tau = u_{\tau\circ\sigma}$.

3. On a $u_\sigma \circ u_{\sigma^{-1}} = u_{\sigma^{-1}\circ\sigma} = u_{\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}_n}} = \mathrm{Id}_E$. Ainsi $u_\sigma$ est inversible (et $(u_\sigma)^{-1} = u_{\sigma^{-1}}$.
Pour $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$,

$$U(\sigma \circ \tau) = u_{(\sigma\circ\tau)^{-1}} = u_{\tau^{-1}\circ\sigma^{-1}} = u_{\sigma^{-1}} \circ u_{\tau^{-1}} = U(\sigma) \circ U(\tau)$$

donc U est bien un morphisme de groupes.

4. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, $u_\sigma(e_i) = e_{\sigma^{-1}(i)}$. Donc

$$\det(u_\sigma) = \det(u_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, u_{\sigma^{-1}(n)}) = \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$$

car un déterminant est une forme multilinéaire antisymétrique.

**Solution 35.**

1. $f$ est linéaire par linéarité de l'intégrale.
   Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a
   $$f(\mathrm{X}^k) = \frac{1}{k+1}((\mathrm{X}+1)^{k+1} - \mathrm{X}^{k+1}) = \frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k}\binom{k+1}{l}\mathrm{X}^l$$
   Ainsi $\deg f(\mathrm{X}^k) = k \leq n$ et $f(\mathrm{X}^k) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Par linéarité, $f(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
   $f$ induit bien un endomorphisme $f_n$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

2. L'expression de $f(\mathrm{X}^k)$ trouvée à la question précédente montre que la matrice de $f_n$ dans la base canonique est triangulaire supérieure et que ses coefficients diagonaux valent $\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{k} = 1$ pour $k$ variant de 0 à $n$. Le déterminant de $f_n$ vaut donc 1.

**Solution 36.**

1. On a alors
   $$\det(u)^2 = \det(u^2) = \det(-\operatorname{Id}_\mathrm{E}) = (-1)^{\dim \mathrm{E}}$$
   Puisque E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\det(u) \in \mathbb{R}$ et donc $\det(u)^2 \geq 0$ donc $\dim \mathrm{E}$ est paire.

2. On utilise la mise sous forme canonique.
   $$u^2 + u + \operatorname{Id}_\mathrm{E} = \left(u + \frac{1}{2}\operatorname{Id}_\mathrm{E}\right)^2 + \frac{1}{4}\operatorname{Id}_\mathrm{E}$$
   Ainsi
   $$\det\left(u + \frac{1}{2}\operatorname{Id}_\mathrm{E}\right)^2 = \det\left(-\frac{1}{4}\operatorname{Id}_\mathrm{E}\right) = \left(\frac{-1}{4}\right)^{\dim \mathrm{E}}$$
   de sorte que $\dim \mathrm{E}$ est paire.

   **Remarque.** De manière générale, la même méthode montre que s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $u^2 + au + b\operatorname{Id}_\mathrm{E} = 0$ et $a^2 - 4b < 0$, alors $\dim \mathrm{E}$ est paire.

**Solution 37.**

1. On trouve évidemment $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

**2.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $V(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$ donc

$$\begin{aligned}
V(\lambda) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & -1 \\ 1-\lambda & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)
\end{aligned}$$

V s'annule donc en $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$.

**3.** Notons $A_k$ la matrice de $u - \lambda_k \operatorname{Id}_E$ dans la base $(e_1, e_2, e_3)$ pour $k \in [\![1, 3]\!]$.

On a $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. Via l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, on voit que $\operatorname{rg}(u - \lambda_1 \operatorname{Id}_E) = 2$ et que $e_1 + e_2 + e_3 \in \operatorname{Ker}(u - \lambda_1 \operatorname{Id}_E)$. Via le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_1 \operatorname{Id}_E) = 1$ et $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$ est un vecteur directeur de $\operatorname{Ker}(u - \lambda_1 \operatorname{Id}_E)$.

On a $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. Via l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$, on voit que $\operatorname{rg}(u - \lambda_2 \operatorname{Id}_E) = 2$ et que $e_1 + e_2 \in \operatorname{Ker}(u - \lambda_2 \operatorname{Id}_E)$. Via le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_1 \operatorname{Id}_E) = 1$ et $f_2 = e_1 + e_2$ est un vecteur directeur de $\operatorname{Ker}(u - \lambda_2 \operatorname{Id}_E)$.

On a $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$. Via l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3$, on voit que $\operatorname{rg}(u - \lambda_3 \operatorname{Id}_E) = 2$ et que $e_2 - 2e_3 \in \operatorname{Ker}(u - \lambda_3 \operatorname{Id}_E)$. Via le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_3 \operatorname{Id}_E) = 1$ et $f_3 = e_2 - 2e_3$ est un vecteur directeur de $\operatorname{Ker}(u - \lambda_2 \operatorname{Id}_E)$.

**4.** Vérifions que $(f_1, f_2, f_3)$ est une base de E à l'aide du déterminant.

$$\det_{(e_1, e_2, e_3)}(f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

donc $(f_1, f_2, f_3)$ est bien une base de E. Puisque $u(f_k) = \lambda_k f_k$ pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$, la matrice de $u$ dans cette base est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

**5.** Il suffit de prendre pour P la matrice de passage de la base $(e_1, e_2, e_3)$ vers la base $(f_1, f_2, f_3)$ i.e. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Par pivot de Gauss, on trouve $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

**6.** Soit $n \in \mathbb{N}$. La matrice de $u^n$ dans la base $(e_1, e_2, e_3)$ est $A^n$. On prouve par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$. Puisque $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

On en déduit que

$$A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2(3.2^n - 1) & 4(1-2^n) & 2(1-2^n) \\ -2 + 3.2^n - 3^n & 4 - 2^{n+1} + 2.3^n & 2 - 2^n - 3^n \\ 2(3^n - 1) & 4(1-3^n) & 2(3^n+1) \end{pmatrix}$$

**Solution 38.**

**1.** On a $A \otimes B = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}B & a_{12}B \\ \hline a_{21}B & a_{22}B \end{array}\right)$ et $C \otimes D = \left(\begin{array}{c|c} c_{11}D & c_{12}D \\ \hline c_{21}D & c_{22}D \end{array}\right)$. Un calcul par blocs donne

$$(A \otimes B).(C \otimes D) = \left(\begin{array}{c|c} (a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21})BD & (a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22})BD \\ \hline (a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21})BD & (a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22})BD \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} ac_{11}BD & ac_{12}BD \\ \hline ac_{21}BD & ac_{22}BD \end{array}\right) = (AC) \otimes (BD)$$

en notant $ac_{ij}$ le coefficient en position $(i, j)$ de la matrice AC.

**2.** $I_2 \otimes B = \left(\begin{array}{c|c} B & 0_2 \\ \hline 0_2 & B \end{array}\right)$ donc $\det(I_2 \otimes B) = (\det B)^2$.

Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ canoniquement associé à $A \otimes I_2$. Notons $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$. Alors la matrice de $u$ dans la base $(e_1, e_3, e_2, e_4)$ est $I_2 \otimes A$. On a donc $\det(A \otimes I_2) = \det u = \det(I_2 \otimes A) = (\det A)^2$ d'après ce qui précède.
D'après la première question, $A \otimes B = (A \otimes I_2).(I_2 \otimes B)$. Ainsi $\det(A \otimes B) = (\det A)^2(\det B)^2$.

**3.** Puisqu'une matrice est inversible *si et seulement si* son déterminant est non nul, d'après la question précédente, $A \times B$ est inversible *si et seulement si* A et B le sont. Dans ce cas, on a d'après la première question

$$(A \otimes B).(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = I_2 \otimes I_2 = I_4$$

**Solution 39.**

Remarquons que

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_p & -A^{-1}B \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & S \end{array}\right)$$

En passant aux déterminants, on obtient

$$\det(M) \cdot \left|\begin{array}{c|c} I_p & -A^{-1}B \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & S \end{array}\right|$$

Il ne s'agit plus que de déterminants triangulaires par blocs :

$$\det(M)\det(I_p)\det(I_q) = \det(A)\det(S)$$

et finalement $\det(M) = \det(A)\det(S)$.

**Solution 40.**

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $D_\lambda = D + \lambda I_n$ et

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D_\lambda \end{pmatrix}.$$

Notons $N_\lambda = \begin{pmatrix} D_\lambda & 0 \\ -C & I_n \end{pmatrix}$. On a clairement

$$\det(N_\lambda) = \det(D_\lambda)$$

et

$$M_\lambda N_\lambda = \begin{pmatrix} AD_\lambda - BC & B \\ CD_\lambda - D_\lambda C & D_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD_\lambda - BC & B \\ 0 & D_\lambda \end{pmatrix}$$

car $D_\lambda C = CD_\lambda$. Ainsi,

$$\det(M_\lambda N_\lambda) = \det(AD_\lambda - BC)\det(D_\lambda),$$

or, on a aussi

$$\det(M_\lambda N_\lambda) = \det(M_\lambda)\det(N_\lambda) = \det(M_\lambda)\det(D_\lambda).$$

Comme le spectre de D est fini, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall \lambda \geqslant \lambda_0, \quad \det(D_\lambda) \neq 0$$

et donc

$$\forall \lambda \geqslant \lambda_0, \quad \det(M_\lambda) = \det(AD_\lambda - BC).$$

Cette égalité entre deux fonctions polynomiales en $\lambda$ (il suffit d'appliquer la formule développée du déterminant) étant vérifée sur un ensemble infini, les deux fonctions sont en fait égales, en particulier pour $\lambda = 0$ :

$$\det(M) = \det(AD - BC).$$

**Solution 41.**

Supposons $n$ impair et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Alors

$$\det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$$

donc $\det(A) = 0$. A fortiori, $\det(A) \geq 0$.
Pour le cas pair, on raisonne par récurrence.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $k \neq l$, on notera $P_{kl} = (\delta_{i,\tau(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $\tau$ est la transposition de $\mathfrak{S}_n$ échangeant $k$ et $l$. La multiplication à gauche (resp. à droite) d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ échange les $k^{\text{ème}}$ et $l^{\text{ème}}$ lignes (resp. colonnes). On remarque que $P_{kl}$ est symétrique et inversible car $P_{kl}^2 = I_n$.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ antisymétrique. Alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ donc $\det(A) = a^2 \geq 0$.

Supposons maintenant qu'il existe $p \geq 2$ tel que toute matrice antisymétrique réelle de taille $2(p-1)$ soit de déterminant positif. Soit $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ antisymétrique. Si $A = 0$, alors $\det A = 0$. Sinon, il existe $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$ et $A_{ij} \neq 0$. Posons $B = P_{2j}P_{1i}AP_{1i}P_{2j}$. Comme $P_{1i}$ et $P_{2j}$ sont symétriques, B est antisymétrique. B est donc de la forme $\left(\begin{array}{c|c} J & U \\ \hline -{}^tU & C \end{array}\right)$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & a_{ij} \\ -a_{ij} & 0 \end{pmatrix}$ et C antisymétrique.

Comme $a_{ij} \neq 0$, J est inversible. Posons $Q = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & -J^{-1}U \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array}\right)$. Q est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls donc inversible. Posons $D = {}^tQBQ$. Alors $D = \left(\begin{array}{c|c} J & 0 \\ \hline 0 & E \end{array}\right)$ avec $E = {}^tUJ^{-1}U + C$. Or

$$\det(D) = \det(Q)^2 \det(B) = \det(B)$$

et

$$\det(A) = \det(B)\det(P_{1i})^2\det(P_{2j})^2 = \det(B)$$

donc

$$\det(A) = \det(D) = \det(J)\det(E) = A_{ij}^2\det(E)$$

Or E est antisymétrique car J et C le sont. Par hypothèse de récurrence, $\det(E) \geq 0$ donc $\det(A) \geq 0$.
Par récurrence, toute matrice antisymétrique réelle de taille paire possède un déterminant positif.

**Solution 42.**

1. En posant $S = a^2 + b^2 + c^2$ et $\sigma = ab + bc + ac$, on a :

$$A^tA = \begin{pmatrix} S & \sigma & \sigma \\ \sigma & S & \sigma \\ \sigma & \sigma & S \end{pmatrix}.$$

2. Posons $\delta = \det(A)$. On a, par $L_k \leftarrow L_k - \sigma L_1$ pour $k = 2$ et $3$ :

$$\det(A^tA) = \delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & \sigma & \sigma \\ \sigma & 1 & \sigma \\ \sigma & \sigma & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & \sigma & \sigma \\ 0 & 1-\sigma^2 & \sigma-\sigma^2 \\ 0 & \sigma-\sigma^2 & 1-\sigma^2 \end{vmatrix}$$
$$= 2(\sigma-1)^2(\sigma+1/2)$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|\sigma| \leqslant a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

donc $\sigma \in [-1, 1]$. Notons, pour tout réel $\sigma$,

$$P(\sigma) = 2(\sigma-1)^2(\sigma+1/2) = 2\sigma^3 - 3\sigma^2 + 1.$$

Comme

$$P'(\sigma) = 6(\sigma-1)\sigma,$$

la fonction P est croissante sur $[-1, 0]$ et décroissante sur $[0, 1]$. Comme

$$P(-1) = -4,\ \ P(0) = 1 \ \text{ et } \ P(1) = 0$$

et $P(\sigma) = \delta^2 \geqslant 0$, on en déduit que

$$P(\sigma) \in [0, 1]$$

et donc que

$$|\delta| = \sqrt{P(\theta)} \in [0, 1].$$

**Solution 43.**

On a

$$(*) \qquad \operatorname{com}(A) = \det(A)\,{}^tA^{-1},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\det(\operatorname{com}(A)) &= \det(\det(A)\,{}^t\!A^{-1}) \\
&= \det(A)^n \det({}^t\!A^{-1}) \\
&= \det(A)^{n-1}.
\end{aligned}$$

En appliquant deux fois la formule $(*)$, on obtient

$$\operatorname{com}(\operatorname{com}(A)) = \det(\operatorname{com}(A))\,{}^t\!\operatorname{com}(A)^{-1},$$

puis

$$\begin{aligned}
\operatorname{com}(\operatorname{com}(A)) &= \det(A)^{n-1}\left(\det(A)\,A^{-1}\right)^{-1} \\
&= \det(A)^{n-1}\det(A)^{-1}\,A \\
&= \det(A)^{n-2}\,A.
\end{aligned}$$

## Solution 44.

1. Le déterminant d'une matrice est une somme de produits de coefficients de cette matrice. Comme les coefficients de A et B sont des entiers, $\det A$ et $\det B$ sont également des entiers.
2. On sait que $A\,{}^t\!\operatorname{com} A = (\det A)I_n$ et que $B\,{}^t\!\operatorname{com} B = (\det B)I_n$. Comme $\det A \wedge \det B = 1$, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $u \det A + v \det B = 1$. En posant $U = u\,{}^t\!\operatorname{com} A$ et $V = v\,{}^t\!\operatorname{com} B$, on a donc $AU + BV = I_n$. Les coefficients de $\operatorname{com} A$ et $\operatorname{com} B$ sont, au signe près, des déterminants d'ordre $n-1$ extraits de A et B : ce sont donc des entiers. Ainsi U et V sont à coefficients entiers.

## Solution 45.

Il y a trois cas.

- Soit $\operatorname{rg}(A) = n$. Alors A est inversible et $\operatorname{com}(A)$ également puisque $\det(A) \neq 0$ et $\left(\frac{1}{\det(A)}\,{}^t\!A\right)\operatorname{com}(A) = I_n$. Donc $\operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) = n$.
- Soit $\operatorname{rg}(A) < n-1$. Alors toutes les sous-matrices carrées de taille $n-1$ extraites de A sont de déterminant nul. Par conséquent $\operatorname{com}(A) = 0$ et $\operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) = 0$.
- Soit $\operatorname{rg}(A) = n-1$. Alors on peut extraire de A une sous-matrice carrée inversible de taille $n-1$ qui est, au signe près, un cofacteur de A. Ainsi $\operatorname{com}(A) \neq 0$. Puisque $\det(A) = 0$, on a ${}^t\!A\operatorname{com}(A) = \det(A)I_n = 0$. Ainsi $\operatorname{Im}(\operatorname{com}(A)) \subset \operatorname{Ker}({}^t\!A)$. Puisque $\operatorname{rg}({}^t\!A) = \operatorname{rg}(A) = n-1$, $\dim \operatorname{Ker}({}^t\!A) = 1$ via le théorème du rang. Ainsi $\operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) \leq 1$. Puisque $\operatorname{com}(A)$ est non nulle, $\operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) = 1$.

## Solution 46.

1. $M(a,b)$ est inversible *si et seulement si* $\det M(a,b) \neq 0$. Or $\det M(a,b) = |a|^2 + |b|^2$. Donc $M(a,b)$ est inversible *si et seulement si* $(a,b) \neq (0,0)$.
2. D'abord, $M(1,0) = I_2$ et pour $a, b, c, d \in \mathbb{C}$,

$$M(a,b)M(c,d) = M(ac - \overline{b}d, bc + \overline{a}d)$$

Enfin, pour $(a,b) \neq (0,0)$

$$M(a,b)^{-1} = \frac{1}{\det M(a,b)} = \frac{1}{|a|^2 + |b|^2}\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ -b & a \end{pmatrix} = M\left(\frac{\overline{a}}{|a|^2+|b|^2}, \frac{-b}{|a|^2+|b|^2}\right)$$

Ceci prouve que $\mathscr{H}\ \{0\}$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$.

**Solution 47.**

$f$ est clairement une forme $n$-linéaire. Montrons qu'elle est alternée. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On suppose qu'il existe $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $x_i = x_j$. Parmi les termes de la somme définissant $f(x_1, \dots, x_n)$, ceux où n'apparaît pas $f(x_i)$ ou $f(x_j)$ sont nuls d'après le caractère alterné du déterminant. Les deux termes restant sont ceux faisant apparaître $f(x_i)$ et $f(x_j)$. On obtient l'un à partir de l'autre en échangeant les vecteurs $f(x_i) = f(x_j)$ et $x_i = x_j$ : le caractère alterné du déterminant permet d'affirmer que ces deux termes sont opposés. Il s'ensuit que $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ puis le caractère alterné de $f$.
En tant que forme $n$-linéaire alternée, $f$ est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. Pour déterminer cette constante, il suffit d'évaluer la dernière égalité sur la base de $\mathcal{B}$ de E. En notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\lambda = f(e_1, \dots, e_n)$. Le $i^{\text{ème}}$ terme de la somme définissant $f(e_1, \dots, e_n)$ est le déterminant de la matrice $I_n$ dans laquelle on a remplacé la $i^{\text{ème}}$ colonne par le vecteur colonne composé des coordonnées de $u(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}$. En développant ce déterminant par rapport à sa $i^{\text{ème}}$ ligne, on trouve qu'il est égale à la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $u(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}$. Ceci signifie que $\lambda = f(x_1, \dots, x_n)$ est égal à la somme des coefficients diagonaux de la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, $\lambda = \operatorname{tr}(u)$.

**Solution 48.**

Remarquons tout d'abord que si $M \in GL_n(\mathbb{Z})$, alors $|\det(M)| = 1$. En effet, M et $M^{-1}$ sont à coefficients entiers donc leurs déterminants également et $\det(M)\det(M^{-1}) = \det(I_n) = 1$.
Soit $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \det(A + \lambda B)$. Cette application est polynomiale de degré au plus $n$. De plus, elle prend $2n + 1$ fois les valeurs 1 ou $-1$. On en déduit que $\varphi + 1$ ou $\varphi - 1$ s'annule au moins $n + 1$ fois. Puisque $\varphi + 1$ et $\varphi - 1$ sont de degré au plus $n$, l'une de ces deux applications est nulle. Il existe donc $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $\varphi = \varepsilon$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(1/x) = \varepsilon$, ce qui peut encore s'écrire $\det(B + xA) = \varepsilon x^n$. Les applications $x \mapsto \det(B + xA)$ et $x \mapsto \varepsilon x^n$ sont polynomiales et coïncident sur $\mathbb{R}^*$, elles coïncident donc en 0. On en déduit que $\det(B) = 0$.

**Solution 49.**

Puisque A et B sont semblables, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $PA = BP$. On peut poser $P = Q + iR$ avec $(Q, R) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Puisque A et B sont réelles, on obtient $QA = BQ$ et $RA = BR$ par passage aux parties réelle et imaginaire.
Posons $D(\lambda) = \det(P + \lambda Q)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Puisque le déterminant est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice, D est une fonction polynomiale. Puisque $D(i) \neq 0$, D n'est pas constamment nulle sur $\mathbb{C}$. Elle ne peut pas être constamment nulle sur $\mathbb{R}$ car elle serait alors nulle sur $\mathbb{C}$ puisque $\mathbb{R}$ est infini.
Soit donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $D(\lambda) \neq 0$. Alors $S = Q + \lambda R$ appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est inversible et $SA = BS$, ce qui prouve que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

**Solution 50.**

1. Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. Puique $x \in \operatorname{Im} f$, il existe $y \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = f(y)$. Comme $f^3 + f = 0$, $f^3(y) + f(y) = 0$ i.e. $f^2(x) + x = 0$. Or $x \in \operatorname{Ker} f$ donc $f(x) = 0$ puis $f^2(x) = 0$. Finalement $x = 0$. $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont donc en somme directe. D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$. On en conclut que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

2. **a.** Comme $f$ est non nul, $\operatorname{Im} f \neq \{0\}$ donc $\operatorname{Im} f$ contient un vecteur non nul $u$.

   **b.** Cela a en fait déjà été démontré à la première question.

   **c.** Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u + \mu f(u) = 0$. En composant par $f$, on a également $\lambda f(u) + \mu f^2(u) = 0$ i.e. $\lambda f(u) - \mu u = 0$. En éliminant $f(u)$ dans les deux égalités, on trouve $(\lambda^2 + \mu^2)u = 0$. Comme $u$ est non nul, on a $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ et donc $\lambda = \mu = 0$.
   Ainsi $(u, f(u))$ est une famille libre de $\operatorname{Im} f$, d'où $\operatorname{rg} f \geq 2$.

3. **a.** Comme $\operatorname{rg} f = 3$, $f$ est un endomorphisme surjectif donc bijectif. En composant $f^3 + f = 0$ par $f^{-1}$, on aboutit à $f^2 + \operatorname{Id} = 0$ i.e. $f^2 = -\operatorname{Id}$.

   **b.** On a donc $\det(f^2) = \det(-\operatorname{Id}) = (-1)^3 = -1$. Or $\det(f^2) = \det(f)^2 \geq 0$. Il y a donc contradiction.
   La seule possibilité est donc $\operatorname{rg} f = 2$. Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

4. Puisque $\dim \operatorname{Ker} f = 1$, il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}(v)$. De plus, $(u, f(u))$ est une famille libre de $\operatorname{Im} f$ et donc une base de $\operatorname{Im} f$ puisque $\operatorname{rg} f = 2$. Puisque $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires, $(v, f(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de $f$ dans cette base est bien de la forme voulue.

**Solution 51.**

1. On remarque que $K^2 = pK$. On montre alors par récurrence que $K^n = p^{n-1}K$ pour $n \geq 1$. On a bien entendu $K^0 = I_p$.

2. **Première méthode** On a $A = \frac{1}{p-1}(K - I)$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
A^n &= \frac{1}{(p-1)^n}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}K^k\right] \\
&= \frac{1}{(p-1)^n}\left[(-1)^n I_p + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}K^k\right] \\
&= \frac{1}{(p-1)^n}\left[(-1)^n I_p + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}p^{k-1}K\right] \\
&= \frac{1}{(p-1)^n}\left[(-1)^n I_p + \frac{1}{p}\left(\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}p^k\right) - (-1)^n\right)K\right] \\
&= \frac{1}{(p-1)^n}\left[(-1)^n I_p + \frac{1}{p}\left((p-1)^n - (-1)^n\right)K\right]
\end{aligned}$$

Or $K = (p-1)A + I$. On trouve après simplification :

$$A^n = \left(\frac{(-1)^n p}{(p-1)^{n-1}} + \frac{1}{p}\right)I_p + \left(\frac{p-1}{p} - \frac{(-1)^n}{p(p-1)^{n-1}}\right)A$$

On a donc $v_n = \dfrac{(-1)^n p}{(p-1)^{n-1}} + \dfrac{1}{p}$ et $u_n = \dfrac{p-1}{p} - \dfrac{(-1)^n}{p(p-1)^{n-1}}$.

**Deuxième méthode** On a $K^2 = pK$ et $K = (p-1)A + I_p$. On en déduit que $(p-1)A^2 - (p-2)A - I_p = 0$. Notons $R_n$ le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $P = (p-1)X^2 - (p-2)X - 1$. On a donc $\deg R_n \leq 1$. Posons $R_n = u_n X + v_n$. Les racines de $p$ sont 1 et $-\frac{1}{p-1}$. On a donc $R_n(1) = 1^n = 1$ et $R_n\left(-\frac{1}{p-1}\right) = \frac{(-1)^n}{(p-1)^n}$. Or $R(1) = u_n + v_n$ et $R_n\left(-\frac{1}{p-1}\right) = -\frac{1}{p-1}u_n + v_n$. On en déduit $u_n = \dfrac{p-1}{p} - \dfrac{(-1)^n}{p(p-1)^{n-1}}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n p}{(p-1)^{n-1}} + \dfrac{1}{p}$. Comme $P(A) = 0$, $A^n = R_n(A) = u_n A + v_n$.

3. On a $AX = X$. Par récurrence, $A^n X = X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite $(A^n X)$ est constante égale à $X$. Sa limite est $X$.

4. **Première méthode** Notons $L_1, \dots, L_p$ les lignes d'une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On effectue les opérations suivantes à la fois sur A et $I_p$ :
   - $L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{k=2}^{p} L_k$ ;
   - $L_k \leftarrow L_k - \frac{1}{p-1}L_1$ pour $2 \leq k \leq p$ ;
   - $L_k \leftarrow -(p-1)L_k$ pour $2 \leq k \leq p$ ;
   - $L_1 \leftarrow L_1 - \sum_{k=2}^{p} L_k$.

   De cette façon, la matrice A est transformée en $I_p$ et la matrice $I_p$ est transformée en la matrice B avec des $(2-p)$ sur la diagonale et des 1 ailleurs. Ceci prouve que A est inversible et que $A^{-1} = B$.

   **Deuxième méthode** On a vu précédemment que $(p-1)A^2 - (p-2)A - I_p = 0$ i.e. $A[(p-1)A - (p-2)I] = I_p$. On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = (p-1)A - (p-2)I$. $A^{-1}$ est la matrice avec des $(2-p)$ sur la diagonale et des 1 ailleurs.

5. **Première méthode** La matrice $A(\lambda) = A - \lambda I_p$ est la matrice avec des $-\lambda$ sur la diagonale et des $\frac{1}{p-1}$ ailleurs. La matrice $A\left(-\frac{1}{p-1}\right)$ est évidemment de rang $1 < p$ donc son déterminant est nul. De même la somme des colonnes de $A(1)$ est nulle donc son déterminant est nul. Donc $\chi$ admet pour racines $\lambda_1 = -\frac{1}{p-1}$ et $\lambda_2 = 1$. Après calcul, on trouve $(A - \lambda_1 I_p)(A - \lambda_2 I_p) = 0$.

**Deuxième méthode** Le polynôme $P = (p-1)X^2 - (p-2)X - 1$ admet $\lambda_1 = -\frac{1}{p-1}$ et $\lambda_2 = 1$ pour racines. Donc $P = (p-1)(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$. On en déduit que $(A-\lambda_1 I_p)(A-\lambda_2 I_p) = \frac{1}{p-1}P(A) = 0$. Les matrices $A - \lambda_1 I_p$ et $A - \lambda_2 I_p$ ne sont pas inversibles sinon on aurait $A - \lambda_2 p = 0$ ou $A - \lambda_1 I_p = 0$, ce qui n'est pas. On en déduit que $\det(A - \lambda_1 I_p) = \det(A - \lambda_2 I_p) = 0$ i.e. que $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont des racines de $\chi$.