Semaine du 14/05 au 18/05

1 Cours

Séries numériques

Généralités Définition, sommes partielles. Nature d'une série, somme. Si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) converge vers 0. Divergence grossière. Nature et somme d'une série géométrique. Reste d'une série convergente. Opérations sur les séries.

Comparaison à une intégrale Encadrement de $\sum f(n)$ où f est monotone. Nature d'une série de Riemann.

Séries à termes positifs Une série à terme positif converge ou diverge vers $+\infty$. Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, lien entre la convergence ou la divergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Absolue convergence. La convergence absolue implique la convergence. Relations de comparaison : lien entre domination/négligeabilité/équivalence et convergence/divergence des séries.

Matrices

Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ Définition d'une matrice à n lignes et p colonnes. Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Produit matriciel : bilinéarité et associativité. Transposition : linéarité, involutivité , transposée d'un produit. Matrices définies par blocs et produit de telles matrices.

Matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$ Structure d'anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Élément neutre I_n. Matrices inversibles. Groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$. Inverse d'un produit de matrices inversibles. Inverse d'une transposée de matrice inversible. Trace : linéarité, trace d'une transposée, trace d'un produit.

Matrices particulières de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ Matrices diagonales, triangulaires supérieures et inférieures. Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$. Matrices symétriques et antisymétriques. Structure de sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Représentation des vecteurs Matrice colonne d'un vecteur dans une base. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. L'application qui à un vecteur associe sa matrice dans une base est un isomorphisme.

Opérations sur les lignes et colonnes d'une colonne Interprétation matricielle des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes d'une matrice. Calcul de l'inverse par pivot de Gauss. Calcul du rang par pivot de Gauss.

Représentation des applications linéaires Matrice d'une application linéaire dans des bases. L'application qui à une application linéaire associe sa matrice dans des bases est un isomorphisme. Interprétation matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire. La matrice d'une composée est le produit des matrices. Une application linéaire est bijective **si et seulement si** sa matrice est inversible et la matrice de la bijection réciproque est l'inverse de la matrice.

Représentation des endomorphismes Matrice d'un endomorphisme dans une base. L'application qui à un endomorphisme associe sa matrice dans une base est un isomorphisme d'algèbres. $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles et inverses l'une de l'autre **si et seulement si** $AB = I_n$ <u>**ou**</u> $BA = I_n$.

2 Méthodes à maîtriser

- Établir la convergence d'une série et calculer sa somme par télescopage.
- Utiliser une décomposition en éléments simples pour déterminer par télescopage la somme d'une série $\sum F(n)$ où F est une fraction rationnelle.
- Comparer la somme partielle ou le reste d'une série à une intégrale.
- Déterminer un équivalent de la somme partielle d'une série divergente ou du reste d'une série convergente par comparaison à une intégrale.
- Comparer à une série de Riemann ou une série géométrique pour déterminer la nature d'une série.
- Calculer une puissance de matrice grâce à un polynôme annulateur ou à la formule du binôme de Newton.
- Calculer l'inverse d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur ou à l'aide du pivot de Gauss.
- Écrire la matrice d'une application linéaire dans des bases ou d'un endomorphisme dans une base.
- Traduire matriciellement des informations sur des applications linéaires ou des endomorphismes et inversement.

3 Questions de cours

- Montrer la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 3} \frac{2n-1}{n^3-4n}$ et déterminer sa somme.
- Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, à savoir l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \operatorname{tr}(AX) = 0$. Montrer que $A = 0$.
- **Banque CCP 7**

  1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs. On suppose que (u_n) et (v_n) sont non nulles à partir d'un certain rang. Montrer que

  $$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}$$

  2. Etudier la convergence de la série

  $$\sum_{n \geqslant 2} \frac{((-1)^n + i) \ln(n) \sin(1/n)}{\sqrt{n+3} - 1}$$

- **Banque CCP 60** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$.

  1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
  2. f est-il surjectif ?
  3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
  4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

- **Banque CCP 71** Soit p le projecteur sur le plan P d'équation $x+y+z=0$ parallèlement à la droite D d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

  1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
  2. Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
  3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.