

DEVOIR À LA MAISON N° 7

Problème 1 —

Dans tout ce problème, le mot *entier* désignera un entier naturel supérieur ou égal à 1 et le mot *ensemble* désignera un ensemble de tels entiers.

Partie I —

Pour un ensemble A et un entier n , on définit :

- le nombre $v_n(A)$ d'éléments de A compris entre 1 et n i.e. $v_n(A) = \text{card}(A \cap \llbracket 1, n \rrbracket)$;
- la proportion $\delta_n(A)$ d'entiers de A parmi ceux compris entre 1 et n i.e. $\delta_n(A) = \frac{v_n(A)}{n}$.

La limite de la suite $(\delta_n(A))$, si elle existe, est appelée *densité* de A dans \mathbb{N}^* et est notée $\delta(A)$.

1. Déterminer, si elles existent les densités de
 - a. \mathbb{N}^* ;
 - b. d'un ensemble fini E ;
 - c. de l'ensemble $2\mathbb{N}$ des entiers pairs ;
 - d. de l'ensemble C des carrés d'entiers ;
 - e. de $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \llbracket 2^{2k}, 2^{2k+1} \rrbracket$;
 - f. de l'ensemble D des entiers dont l'écriture décimale ne comporte pas de 0.
2. Soient $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite strictement croissante d'entiers et $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}^*\}$.
 - a. Que vaut $v_{a_n}(A)$?
 - b. Montrer que si A possède une densité, alors $\delta(A)$ est la limite de la suite $\left(\frac{n}{a_n}\right)$.
 - c. Montrer que $a_{v_n(A)} \leq n < a_{v_n(A)+1}$.
 - d. Montrer que si la suite $\left(\frac{n}{a_n}\right)$ possède une limite l , alors $\delta(A) = l$.
3.
 - a. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la densité de l'ensemble A des entiers congrus à un entier p modulo q .
 - b. Soit α un réel supérieur ou égal à 1. Déterminer la densité de $A = \{\lfloor n\alpha \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Partie II —

1. Soient A et B deux ensembles. Montrer que si trois des quatre ensembles A , B , $A \cup B$ et $A \cap B$ ont une densité, alors le quatrième également et qu'alors

$$\delta(A) + \delta(B) = \delta(A \cup B) + \delta(A \cap B)$$

2. Que dire dans le cas où A et B sont deux ensembles disjoints possédant une densité ?
3. Si A possède une densité, montrer que $\overline{A} = \mathbb{N}^* \setminus A$ possède également une densité. Que vaut celle-ci ?

- On dit qu'un ensemble est *négligeable* s'il possède une densité nulle. Que dire d'une partie d'un ensemble négligeable ?
- Soit A un ensemble de densité δ et B un ensemble négligeable. Que dire de $A \cup B$?

Partie III –

Soit B un ensemble infini dont les éléments sont rangés en une suite strictement croissante $(b_n)_{n \geq 1}$. On appelle *densité relative* d'un ensemble A dans B la limite, si elle existe, de la suite de terme général

$$\delta_n(A|B) = \frac{\text{card}(A \cap \{b_k, 1 \leq k \leq n\})}{n}$$

On note alors cette densité relative $\delta(A|B)$.

- On se propose tout d'abord d'établir le lemme suivant. Soit (u_n) une suite réelle et (p_n) une suite d'entiers divergeant vers $+\infty$ vérifiant $p_n \leq p_{n+1} \leq p_n + 1$. Montrer que (u_n) est convergente *si et seulement si* (u_{p_n}) l'est et que dans ce cas, elles ont la même limite.
- Soient A et B deux ensembles tels que $A \cap B$ et B possèdent une densité avec B non négligeable. Montrer que pour tout n suffisamment grand, $\delta_n(A|B) = \delta_{v_n(B)}(A|B)\delta_n(B)$. En déduire que A possède une densité relative dans B et que $\delta(A|B) = \frac{\delta(A \cap B)}{\delta(B)}$.
- On dit que deux ensembles A et B sont *indépendants* si A , B et $A \cap B$ possèdent une densité et si $\delta(A \cap B) = \delta(A)\delta(B)$.
 - Montrer qu'un ensemble négligeable est indépendant de tout ensemble ayant une densité.
 - Soient A et B deux ensembles possédant une densité non nulle. Montrer que A et B sont indépendants *si et seulement si* A possède une densité relative dans B et $\delta(A|B) = \delta(A)$.
- Pour un entier p , on note M_p l'ensemble des entiers multiples de p . Étudier l'indépendance de M_p et M_q pour des entiers p et q .
- Soient A et B deux ensembles infinis dont les éléments sont rangés en des suites strictement croissantes $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$. On note $A_B = \{a_{b_n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que si A et B ont des densité, alors A_B également et que, dans ce cas, $\delta(A_B) = \delta(A)\delta(B)$.

Partie IV –

On note \mathbb{P} l'ensemble des nombres premiers et $(p_n)_{n \geq 1}$ la suite strictement croissante formée de ceux-ci. On note A_k l'ensemble des multiples de p_k pour $k \geq 1$.

- Soit $k \geq 1$. Justifier que $\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i}$ possède une densité P_k et que $P_k = \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.
- Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k = 0$.
- En remarquant que $\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i}$ contient tous les nombres premiers à partir de p_{k+1} , justifier que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(\mathbb{P}) \leq P_k$.
- En déduire que \mathbb{P} est de densité nulle.