Semaine du 17/09 au 21/09

1 Cours

Raisonnements et ensembles

Logique Conjonction, disjonction, négation de propositions logiques. Implication et équivalence. Quantificateurs.

Raisonnements Double implication. Raisonnement par l'absurde. Contraposition. Récurrence (simple, double, forte). Analyse/-synthèse.

Ensembles Appartenance, inclusion. Union, intersection, complémentaire. Produit cartésien.

Sommes et produits

Techniques de calcul Symbole $\sum$ et règles de calcul, sommes télescopiques, changement d'indice, sommation par paquets.

Sommes classiques Suites arithmétiques et géométriques, factorisation de $a^n - b^n$, coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton.

Sommes doubles Définition, règles de calcul, interversion des signes $\sum$ (cas de sommes triangulaires), sommation par paquets.

2 Méthodes à maîtriser

- Rédiger proprement une récurrence.
- Montrer une inégalité en raisonnant par équivalence.
- Résolution d'équations et d'inéquations avec valeurs absolues et racines carrées.
- Changement d'indice.
- Calcul de sommes : il n'y a guère que deux techniques a priori :
  - faire apparaître une somme télescopique ;
  - faire apparaître des sommes connues (somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique ou somme provenant d'un développement via la formule du binôme de Newton).
- Interversion des symboles $\sum$ pour les sommes doubles.

3 Questions de cours

- Déterminer les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ f(m+n) = f(m) + f(n)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
- Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton par récurrence.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ sous forme **factorisée**.