Devoir surveillé n°02

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 Si $a = b$, on prouve par récurrence que les deux suites (a_n) et (b_n) sont constantes.

2 Remarquons que $x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$. L'inégalité de l'énoncé s'en déduit immédiatement.

3 D'après la question précédente, $a_{n+1} \leq b_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ i.e. $a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n}\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right) \geq 0$$

et

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leq 0$$

Donc (a_n) et (b_n) sont respectivement croissante et décroissante à partir du rang 1. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$$

ce qui prouve que (a_n) et (b_n) sont bornées.

4 La suite (a_n) est croissante à partir du rang 1 et majorée : elle converge. De même, (b_n) est décroissante à partir du rang 1 et minorée : elle converge également. Notons ℓ_1 et ℓ_2 leurs limites respectives. En passant à la limite dans l'égalité $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, on obtient $\ell_1 = \dfrac{\ell_1 + \ell_2}{2}$ ou encore $\ell_1 = \ell_2$. Enfin, par croissance de (a_n) à partir du rang 1, $\ell_1 \geq a_1 = \sqrt{ab} > 0$.

5 Notons $\Phi : (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto \left(\sqrt{xy}, \dfrac{x+y}{2}\right)$. On a alors $(a_n, b_n) = \Phi^n(a, b)$ puis $\mathrm{M}(a, b) = \lim\limits_{n\to+\infty} \Phi^n(a, b)$ (la puissance fait référence à la loi de composition). Comme $\Phi(a, b) = \Phi(b, a)$, $\Phi^n(a, b) = \Phi^n(b, a)$ pour tout entier $n \geq 1$. En passant à la limite, on obtient $\mathrm{M}(a, b) = \mathrm{M}(b, a)$.
On remarque également que $\Phi(\lambda(x, y)) = \lambda\Phi(x, y)$ pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrons alors que $\Phi^n(\lambda a, \lambda b) = \lambda\Phi^n(a, b)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci est clairement vrai pour $n = 0$. Supposons que ce soit vrai pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\Phi^{n+1}(\lambda a, \lambda b) = \Phi(\Phi^n(\lambda a, \lambda b)) = \Phi(\lambda\Phi^n(a, b)) = \lambda\Phi(\Phi^n(a, b)) = \lambda\Phi^{n+1}(a, b)$$

On a donc bien montré que $\Phi^n(\lambda a, \lambda b) = \lambda\Phi^n(a, b)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite, on obtient $\mathrm{M}(\lambda a, \lambda b) = \lambda\mathrm{M}(a, b)$.

6 D'après la question précédente,

$$\mathrm{M}(a, b) = \mathrm{M}\left(a \cdot 1, a \cdot \frac{b}{a}\right) = a\mathrm{M}\left(1, \frac{b}{a}\right) = af\left(\frac{b}{a}\right)$$

7 Tout d'abord, $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} \underset{t\to\pm\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$ l'est également. On en déduit la convergence des intégrales $\mathrm{I}(a,b)$ et $\mathrm{J}(a,b)$.
De plus,

$$\mathrm{J}(a,b) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} + \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$$

et, par le changement de variable $t \mapsto -t$,

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} = \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$$

d'où $\mathrm{J}(a,b) = 2\mathrm{I}(a,b)$.

8 L'application $\varphi : s \mapsto \dfrac{1}{2}\left(s - \dfrac{ab}{s}\right)$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\varphi'(s) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{ab}{s^2}\right) > 0$ donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, $\lim\limits_{0^+} \varphi = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \varphi = +\infty$ de sorte que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer le changement de variable indiqué :

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + t^2\right)\left((\sqrt{ab})^2 + t^2\right)}} \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \frac{\left(1 + \frac{ab}{s^2}\right)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(s - \frac{ab}{s}\right)^2\right)\left(ab + \frac{1}{4}\left(s - \frac{ab}{s}\right)^2\right)}} \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \frac{(s^2 + ab)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{\left(s^2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(s^2 - ab)^2\right)\left(s^2 ab + \frac{1}{4}(s^2 - ab)^2\right)}} \\
&= 2\int_{0}^{+\infty} \frac{(s^2 + ab)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{(s^2(a+b)^2 + (s^2 - ab)^2)\,(4s^2 ab + (s^2 - ab)^2)}} \\
&= 2\int_{0}^{+\infty} \frac{(s^2 + ab)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{(s^2(a+b)^2 + (s^2 - ab)^2)\,(4s^2 ab + (s^2 - ab)^2)}}
\end{aligned}$$

D'une part,

$$s^2(a+b)^2 + (s^2 - ab)^2 = s^2a^2 + s^2b^2 + s^4 + a^2b^2 = (s^2 + a^2)(s^2 + b^2)$$

et d'autre part,

$$4s^2ab + (s^2 - ab)^2 = s^4 + 2s^2ab + a^2b^2 = (s^2 + ab)^2$$

On en déduit finalement que

$$\mathrm{J}\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}} = 2\mathrm{I}(a,b)$$

9 La question précédente montre que $\mathrm{I}(\Phi(a,b)) = \mathrm{I}(a,b)$. Une récurrence évidente montre alors que $\mathrm{I}(\Phi^n(a,b)) = \mathrm{I}(a,b)$ i.e. $\mathrm{I}(a_n, b_n) = \mathrm{I}(a,b)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10 Posons $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(a_n^2 + t^2)(b_n^2 + t^2)}}$. Alors la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $f : t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{M}(a,b)^2 + t^2}$. De plus, (a_n) et (b_n) sont minorées par a_1 à partir du rang 1 donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ |f_n(t)| = f_n(t) \leq \frac{1}{a_1^2 + t^2}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{a_1^2 + t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc, d'après le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

ou encore

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}(a_n, b_n) = \mathrm{I}(\mathrm{M}(a,b), \mathrm{M}(a,b))$$

D'après la question précédente, on a donc

$$\mathrm{I}(a,b) = \mathrm{I}(\mathrm{M}(a,b), \mathrm{M}(a,b))$$

11 Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathrm{I}(\alpha,\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\alpha^2+t^2} = \frac{1}{\alpha}\left[\arctan\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

D'après la question précédente,

$$\mathrm{I}(a,b) = \frac{\pi}{2\mathrm{M}(a,b)}$$

ou encore

$$\mathrm{M}(a,b) = \frac{\pi}{2\mathrm{I}(a,b)}$$

12 D'après la relation de Chasles,

$$\mathrm{I}(1,x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}$$

L'application $s \mapsto \frac{x}{s}$ est un bijection strictement décroissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\sqrt{x}, +\infty[$ sur $]0, \sqrt{x}]$ de dérivée $s \mapsto -\frac{x}{s^2}$ donc

$$\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{x\ \mathrm{d}s}{s^2\sqrt{1+\frac{x^2}{s^2}}\sqrt{x^2+\frac{x^2}{s^2}}} = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s^2+x^2}\sqrt{1+s^2}}$$

Ainsi

$$\mathrm{I}(1,x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}$$

13 D'après la question précédente,

$$2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+t^2}} - \mathrm{I}(1,x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)\mathrm{d}t$$

Or pour tout $t \in [0, \sqrt{x}]$,

$$0 \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

donc

$$0 \leq 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+t^2}} - \mathrm{I}(1,x) \leq 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

Comme $\lim_{x\to0^+} 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 0$ donc

$$\mathrm{I}(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+t^2}} \underset{x\to0^+}{=} o\left(2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+t^2}}\right)$$

Ceci signifie également que

$$\mathrm{I}(1,x) \underset{x\to0^+}{\sim} 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

14 Posons $\varphi : t \mapsto \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$t + \sqrt{1+t^2} > t + \sqrt{t^2} = t + |t| \geq 0$$

donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) = \frac{1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{t + \sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

En effectuant le changement de variable $t = ux$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+t^2}} &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{x\,\mathrm{d}u}{\sqrt{x^2+x^2u^2}} \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= [\varphi(t)]_{t=0}^{t=1/\sqrt{x}} = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) \\
&= \ln\left(1+\sqrt{x+1}\right) - \frac{1}{2}\ln(x)
\end{aligned}$$

15 Puisque $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(1+\sqrt{x+1}\right) = \ln(1+\sqrt{2})$ et $\lim\limits_{0^+} \ln = -\infty$,

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+t^2}} \underset{x\to0^+}{\sim} -\frac{1}{2}\ln(x)$$

puis que

$$\mathrm{I}(1,x) \underset{x\to0^+}{\sim} 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+t^2}} \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$$

Ainsi

$$f(x) = \mathrm{M}(1,x) = \frac{\pi}{2\mathrm{I}(1,x)} \underset{x\to0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln(x)}$$

16 On a vu précédemment que

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \mathrm{M}(b,a) = \mathrm{M}(a,b) = af\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ainsi

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{M}\left(1,\frac{1}{x}\right) = \mathrm{M}\left(\frac{1}{x},1\right) = \frac{1}{x}f(x)$$

ou encore

$$f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\pi}{2\ln(x)}$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to0^+}{\sim} -\dfrac{\pi}{2\ln(1/x)} = \dfrac{\pi}{2\ln(x)}$ puis $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi x}{2\ln(x)}$.

17 Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Fixons $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\forall (x,t) \in [\mathrm{A},+\infty[\times\mathbb{R}_+,\ \left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{\mathrm{A}^2+t^2}}$$

  et on a vu que $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{\mathrm{A}^2+t^2}}$ était intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que $x \mapsto \mathrm{I}(1,x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, $x \mapsto f(x) = \dfrac{\pi}{2\mathrm{I}(1,x)}$ l'est également puisque $\mathrm{I}(a,b) > 0$ pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ (intégrale d'une fonction continue, positive et non constamment nulle sur $\mathbb{R}_+$).

18 On a vu que $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\dfrac{\pi}{2\ln(x)}$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$. Ainsi f est prolongeable par continuité en 0. Notons encore f la fonction ainsi prolongée en posant $f(0) = 0$. Alors

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} \underset{x\to0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2x\ln(x)}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0^-$ donc

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$$

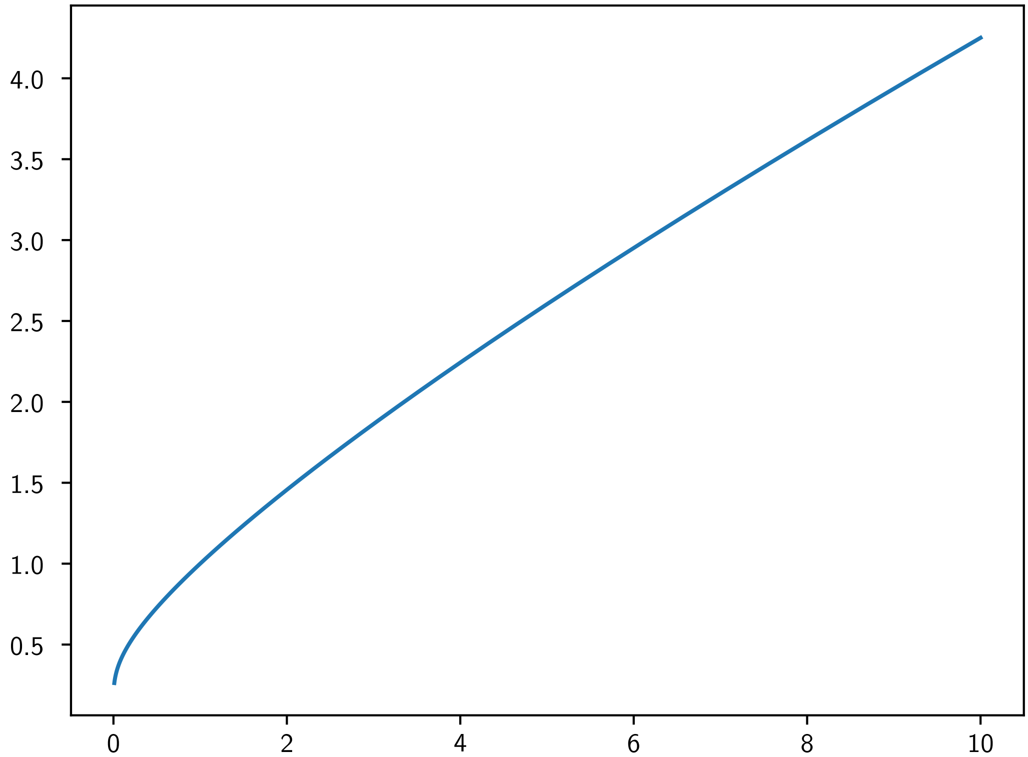
Ainsi la courbe de f admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

19 D'après ce qui précède, $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2\ln(x)}$. Notamment, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. La courbe de f admet donc une branche parabolique horizontale en $+\infty$.

20 Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $x \le y$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{y^2+t^2}}$$

En intégrant sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $\mathrm{I}(1,x) \ge \mathrm{I}(1,y)$. Puis $\dfrac{\pi}{2\mathrm{I}(1,x)} \le \dfrac{\pi}{2\mathrm{I}(1,y)}$ ou encore $\mathrm{M}(1,x) \le \mathrm{M}(1,y)$ et enfin $f(x) \le f(y)$. Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Son prolongement par continuité l'est donc sur $\mathbb{R}_+$.



21 On a vu précédemment que pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\mathrm{I}\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \mathrm{I}(a,b)$. Notamment, $\mathrm{I}(\dfrac{1+x}{2}, \sqrt{x}) = \mathrm{I}(1,x)$ puis $\mathrm{M}\left(\dfrac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right) = \mathrm{M}(1,x)$. Or $\mathrm{M}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathrm{M}(a,b)$ pour tout $(\lambda, a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ donc $\mathrm{M}(1,x) = \mathrm{M}\left(\dfrac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right) = \dfrac{1+x}{2}\mathrm{M}\left(1, \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$ et enfin $\mathrm{I}(1,x) = \dfrac{2}{1+x}\mathrm{I}\left(1, \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

22 **22.a** La suite (w_n) est manifestement strictement positive. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_{n+1} - 1 = \frac{2\sqrt{w_n} - 1 - w_n}{1+w_n} = -\frac{(\sqrt{w_n}-1)^2}{1+w_n} \le 0$$

donc $w_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_{n+1} - w_n = \frac{2\sqrt{w_n} - w_n - w_n^2}{1 + w_n} = \frac{\mathrm{P}(\sqrt{w}_n)}{1 + w_n}$$

En posant $\mathrm{P} = 2\mathrm{X} - \mathrm{X}^2 - \mathrm{X}^4$. On remarque que 0 et 1 sont racines évidentes de P. On peut donc factoriser

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}(1 - \mathrm{X})(2 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2)$$

Comme $\sqrt{w_n} \in]0, 1]$, $\mathrm{P}(\sqrt{w_n}) \geq 0$. On en déduit que (w_n) est croissante à partir du rang 1. En notant γ sa limite, on a alors

$$\gamma = \frac{2\sqrt{\gamma}}{1 + \gamma}$$

ou encore $\mathrm{P}(\sqrt{\gamma}) = 0$. Les seules racines de P sont 0 et 1 donc $\gamma = 0$ ou $\gamma = 1$. Or (w_n) est croissante à partir du rang 1 et $w_1 > 0$ donc $\gamma \geq w_1 > 0$. Finalement $\gamma = 1$.

22.b La relation est vraie pour $n = 0$ d'après la question **21**. Supposons la vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors, toujours d'après la question **21** appliquée à w_{n+1},

$$\mathrm{I}(1, w_{n+1}) = \frac{2}{1 + w_{n+1}} \mathrm{I}(1, w_{n+2}) = \mathrm{I}(1, w_{n+2}) \prod_{k=0}^{n+1} \frac{2}{1 + w_k}$$

On a donc prouvé le résultat par récurrence.

22.c On a prouvé que $x \mapsto \mathrm{I}(1, x)$ était continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme (w_n) converge vers 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}(1, w_{n+1}) = \mathrm{I}(1, 1) = \frac{\pi}{2\mathrm{M}(1, 1)} = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que (p_n) converge vers $\ell = \frac{\pi}{2\mathrm{I}(1, x)}$. Ainsi $\mathrm{I}(1, x)\ell = \frac{\pi}{2}$.

23 Soit $x \in]-1, 1[$. Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin^2 t \leq 1$ donc $1 - x^2 \sin^2 t \geq 1 - x^2 > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}}$ est donc continue sur le segment $[0, \pi/2]$ de sorte que $\mathrm{K}(x)$ est bien définie.

24 On effectue le changement de variable usuel (?) $t = \tan(u)$. On obtient

$$\mathrm{I}(1, x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 + t^2}\sqrt{x^2 + t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u \sqrt{1 + \tan^2 u}\sqrt{x^2 + \tan^2 u}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u}}$$

25 Soit $x \in]0, 1]$. Alors $\sqrt{1 - x^2} \in [0, 1[$ et on peut écrire

$$\mathrm{K}(\sqrt{1 - x^2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - (1 - x^2)\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t}}$$

Via le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$, on obtient;

$$\mathrm{K}(\sqrt{1 - x^2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\sin^2 u + x^2 \cos^2 u}} = \mathrm{I}(1, x)$$

26 **26.a** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathrm{W}_n - \mathrm{W}_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)(1 - \sin^2 t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\cos^2 t\ \mathrm{d}t$$

Les fonctions $\frac{1}{2n+1}\sin^{2n+1}$ et cos sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ de dérivées respectives $\sin^{2n} \cdot \cos$ et $-\sin$ donc, par intégration par parties,

$$\mathrm{W}_n - \mathrm{W}_{n+1} = \frac{1}{2n+1}\left[\sin^{2n+1}(t)\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1}\mathrm{W}_{n+1}$$

On en déduit immédiatement que $\mathrm{W}_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\mathrm{W}_n$.

26.b On calcule $W_0 = \frac{\pi}{2}$ donc la formule est vraie pour $n = 0$. Supposons la vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!\pi}{4(n+1)^2 \cdot 2^{2n+1}(n!)^2} = \frac{(2n+2)!\pi}{2^{2n+3}((n+1)!)^2}$$

donc la formule est vraie au rang $n+1$. Ainsi le résultat est démontré pour tout $n \in \mathbb{N}$.

27 Le rayon de convergence du développement en série entière est 1. De manière générale,

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

avec $\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)$. Ainsi

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} - k\right) = \frac{1}{2^n n!}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

28 Comme $x \sin t \in]-1,1[$, on peut écrire

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^{2n} \sin^{2n}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \sin^{2n}(t)$$

29 Il s'agit de justifier une interversion série/intégrale. On fixe $x \in]-1,1[$ et on pose $f_n : t \in [0,\pi/2] \mapsto \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \sin^{2n}(t)$. On remarque que $\|f_n\|_\infty = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$. Remarquons que

$$\frac{\|f_{n+1}\|_\infty}{\|f_n\|_\infty} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} x^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x^2 < 1$$

La série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge donc d'après le critère de d'Alembert i.e. la série $\sum f_n$ converge normalement sur le segment $[0,\pi/2]$. On peut donc procéder à une interversion série/intégrale :

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x^2 \sin^2 t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} W_n = \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((2n)!)^2}{16^n (n!)^4} x^{2n}$$

30 D'après les résultats précédents,

$$M(3,5) = M(5,3) = 5M\left(1, \frac{3}{5}\right) = \frac{5\pi}{2I(3/5)} = \frac{5\pi}{2K(\sqrt{1-(3/5)^2})} = \frac{5\pi}{2K(4/5)}$$

Comme $\frac{4}{5} \in]-1,1[$, on peut calculer $K(4/5)$ sous la forme de somme d'une série avec la question précédente.