

Produits scalaires

Exercice 1 ★

Un espace fonctionnel

On définit sur l'espace vectoriel réel E des fonctions de classe \mathcal{C}^1 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} ,

$$\langle f|g \rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

2. Etablir que $\forall f \in E$,

$$\left(f(1) + \int_0^1 f'(t)dt\right)^2 \leq 2\left(f^2(1) + \int_0^1 f'^2(t)dt\right)$$

Exercice 2 ★★

The scalar-quizz

Prouver que les applications suivantes sont des produits scalaires sur E :

1. sur $E = \mathbb{R}_2[X]$,

$$(P, Q) \mapsto \langle P|Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1) ;$$

2. pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, pour $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts,

$$\Psi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k) ;$$

3. pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, pour $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$(P, Q) \mapsto \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k) ;$$

4. pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$,

$$(P, Q) \mapsto \langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt ;$$

5. sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$,

$$(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt ;$$

6. pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = M_n(\mathbb{R})$,

$$\langle A|B \rangle = \text{tr}(A^T B) ;$$

7. sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$,

$$(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt ;$$

8. sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$,

$$(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt.$$

Bases orthonormales

Exercice 3 ★★

Produit mixte et produit vectoriel

Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 1$.

1. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases orthonormées directes de E . Montrer que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.
2. En déduire que $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.
3. Soient x_1, \dots, x_{n-1} $n - 1$ vecteurs de E . Montrer que l'application $x \in E \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$ est une forme linéaire sur E .
4. En déduire qu'il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \langle u, x \rangle$. On appelle u le produit vectoriel des vecteurs x_1, \dots, x_{n-1} et on note $u = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$.
5. Montrer que l'application $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in E^{n-1} \mapsto x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$ est une application $n - 1$ -linéaire alternée.

Exercice 4 ★★★

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}_n[X]^2$ dans \mathbb{R} définie par

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Donner sans calcul une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 5 ★★★

Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et e_1, \dots, e_n des vecteurs non nuls de E tels que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2$$

1. Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x|e_i \rangle \langle y|e_i \rangle.$$

2. En déduire que

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \langle x|e_i \rangle e_i.$$

3. Etablir que $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de E .

Exercice 6 ★

Retour aux polynômes

Sur l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}_2[X]$, on définit

$$\langle P|Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Trouver une base orthonormée de E par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt appliqué à la base canonique de E .
3. Trouver une *autre* base orthonormée de E en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange.

Sous-espaces orthogonaux

Exercice 7 ★

Posé à Centrale

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout $(f, g) \in E^2$, on pose

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

1. Prouver $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

2. On pose

$$F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}.$$

a. Soit $f \in F^\perp$. Montrer que $f^2 \in F^\perp$.

b. Prouver que $F^\perp = \{0\}$.

3. E est-il de dimension finie ?

Exercice 8 ★★

Montrer que $s : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^\top \end{cases}$ est une symétrie orthogonale pour le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire défini par $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 9 ★★

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

1. Soit \mathcal{B} une base orthonormale de E . Montrer que la matrice de f dans la base \mathcal{B} est symétrique.

2. Montrer que $\text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp$.

Exercice 10 ★★

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E .

1. Montrer que $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$ et que, si F et G sont de dimension finie, $G^\perp \subset F^\perp \implies F \subset G$.

2. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

3. Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ et que, si E est de dimension finie, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Projecteurs orthogonaux

Exercice 11 ★★

Soit u un vecteur unitaire d'un espace euclidien E . On note U le vecteur colonne représentant u dans une base orthonormée \mathcal{B} de E . Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\text{vect}(u)$ dans \mathcal{B} .

Exercice 12 ★★

Caractérisations des projections orthogonales

Soient E un espace euclidien et p une projection de E . Etablir l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1. p est orthogonale ;

2. $\forall x, y \in E, \langle p(x) | y \rangle = \langle x | p(y) \rangle$;

3. $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 13 ★

Calcul d'une projection orthogonale

On munit \mathbb{R}^4 de son produit scalaire usuel. Donner la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel F d'équations,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Optimisation

Exercice 14 ★

Un calcul de distance

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa structure euclidienne canonique (ie la base canonique est orthonormée). On note F le sous-espace vectoriel de E des polynômes s'annulant en 1.

1. Déterminer une base de F .

2. Calculer $\delta = \inf_{P \in F} \|X - P\|$.

Exercice 15 ★★★

Calculer le minimum de $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(a, b) \mapsto \int_0^\pi (\sin x - ax^2 - bx)^2 dx$$
Exercice 16 ★★★

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) du produit scalaire $(X, Y) \mapsto X^\top Y$. On se donne $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^m$. On pose $E = \{\|AX - B\|^2, X \in \mathbb{R}^n\}$ et $K = \inf E$.

1. Justifier l'existence de K .
2. On considère le système linéaire $(\mathcal{S}) : AX = B$. On appelle *pseudo-solution* de \mathcal{S} tout élément Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|AY - B\|^2 = K$. Montrer que si (\mathcal{S}) admet une solution, les pseudo-solutions de (\mathcal{S}) sont les solutions de (\mathcal{S}) .
3. On associe à (\mathcal{S}) le système $(\mathcal{S}') : A^\top AX = A^\top B$. Montrer qu'un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de (\mathcal{S}) si et seulement si il est solution de (\mathcal{S}') .
4. Montrer que $\text{rg } A^\top A = \text{rg } A$.
5. Montrer que si $\text{rg } A = n$, (\mathcal{S}) admet une unique pseudo-solution.

Exercice 17 ★★★**ENS MP 2010**

Soient E un espace euclidien et x_1, \dots, x_p des vecteurs de E . Pour $x \in E$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^p \|x - x_i\|^2$. Montrer que f atteint son minimum en un unique point que l'on précisera.

Exercice 18 ★★★

Soient E un espace euclidien et x_1, \dots, x_p des vecteurs de E . Pour $x \in E$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^p \|x - x_i\|^2$. Montrer que f atteint son minimum en $m = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i$.

Automorphismes orthogonaux**Exercice 19 ★****Un premier exemple**

Soient E un espace euclidien orienté de dimension trois muni d'une base orthonormée directe

$$\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

On note f la rotation d'axe $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Calculer la matrice de f relativement à la base \mathcal{B} .

Exercice 20 ★**Calculs dans $O_3(\mathbb{R})$**

Soient E un plan vectoriel euclidien orienté, r une rotation de E et s une réflexion. Calculer $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$.

Exercice 21 ★

Déterminer la nature et les caractéristiques de l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique vaut

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22 ★★★

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1. $\langle x|y \rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x)|u(y) \rangle = 0$;
2. $\exists k \geq 0, \forall x \in E, \|u(x)\| = k\|x\|$;
3. u est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Exercice 23 ★★★

Soient H et K deux hyperplans d'un espace euclidien E . On note s_H et s_K les symétries orthogonales par rapport à H et K . Montrer que s_H et s_K commutent si et seulement si $H = K$ ou $H^\perp \subset K$.

Exercice 24 ★★

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

1. Trouver les $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$\forall u, v \in E, f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$$

2. Trouver les $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$\forall u, v \in E, f(u \wedge v) = -f(u) \wedge f(v)$$

Exercice 25 ★★

Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Exercice 26 ★★★

Soit E un espace euclidien de dimension 2.

- On sait que la matrice d'une réflexion de E dans une base orthonormée est de la forme $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$. Quelle est l'interprétation géométrique de θ ?
- Déterminer une condition portant sur l'angle entre leurs axes pour que la somme de deux réflexions soit encore une réflexion.

Exercice 27 ★★**Petites Mines 2009**

Soit u un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E . On pose $v = \text{Id}_E - u$.

- Montrer que $\text{Im } v$ et $\text{Ker } v$ sont orthogonaux et supplémentaires.
- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, u^k est un automorphisme orthogonal.

Exercice 28 ★★

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ engendré par la famille (e_1, e_2, e_3) où

$$e_1 : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \quad e_2 : t \mapsto \cos(2\pi t) \quad e_3 : t \mapsto \sin(2\pi t)$$

- Montrer que $\Phi : (f, g) \mapsto 2 \int_0^1 f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire sur E .
- Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E .
- Pour tout réel x , on définit l'application τ_x qui à tout élément f de E associe g tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = f(x - t)$$

- Montrer que τ_x est un endomorphisme de E . Donner sa matrice relativement à \mathcal{B} .
- Montrer que τ_x est un automorphisme orthogonal de E .
- Caractériser géométriquement τ_x .

Exercice 29 ★★★

Soit E un espace euclidien et f une application de E dans E (non supposée linéaire) telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

Montrer que f est la composée d'une translation et d'un automorphisme orthogonal.

Exercice 30 ★

Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note A la matrice de f dans une base orthonormale \mathcal{B} de E . Montrer que f est une symétrie orthogonale si et seulement si A est une matrice orthogonale symétrique.

Matrices orthogonales

Exercice 31 ★★

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}.$$

Exercice 32 ★★★

Soit $O = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ une matrice orthogonale réelle de taille n où A et D sont deux blocs carrés de tailles respectives p et q . Montrer que $(\det A)^2 = (\det D)^2$.

Exercice 33 ★

Soient A et B les matrices, dans deux bases orthonormales, d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Montrer que $\text{tr}(A^T A) = \text{tr}(B^T B)$.

Exercice 34 ★★

1. Soit X une matrice colonne réelle de taille n . Montrer que $X^T X \in \mathbb{R}_+$ et que $X^T X = 0$ implique $X = 0$.
2. Soit M une matrice antisymétrique réelle de taille n . Montrer que $I_n + M$ est inversible.
3. On pose $A = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Montrer que A est orthogonale.

Exercice 35 ★★★

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A = \text{com}(A)$ si et seulement si $A = 0$ ou $A \in \text{SO}(n)$.

Familles de vecteurs**Exercice 36 ★★★****Déterminants de Gram**

Soit E un espace euclidien. À une famille (x_1, \dots, x_p) de p vecteurs de E , on associe la matrice $G_p(x_1, \dots, x_p) = ((x_i | x_j))_{1 \leq i,j \leq p}$.

1. Montrer que la famille (x_1, \dots, x_p) est liée si et seulement si $\det G_p(x_1, \dots, x_p) = 0$.
2. On suppose maintenant que la famille (x_1, \dots, x_p) est libre et on note $F = \text{vect}(x_1, \dots, x_p)$.
 - a. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F et $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$. Montrer que $G_p(x_1, \dots, x_p) = A^T A$.
 - b. En déduire que $\det G_p(x_1, \dots, x_p) > 0$.
3. Soit $x \in E$. On note π la projection orthogonale sur F .
 - a. Montrer que $\det G_{p+1}(x, x_1, \dots, x_p) = \det G_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p)$.
 - b. Montrer que

$$d(x, F)^2 = \frac{\det G_{p+1}(x, x_1, \dots, x_p)}{\det G_p(x_1, \dots, x_p)}$$

Exercice 37 ★★★

Soient E un espace euclidien, p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et x_1, \dots, x_p des vecteurs de E tels que

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle < 0$$

1. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i x_i = 0$. On pose $I = \{i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \mid \alpha_i > 0\}$ et $J = \{j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \mid \alpha_j < 0\}$. En considérant $u = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$ et $v = \sum_{j \in J} \alpha_j x_j$, montrer que l'un des ensembles I ou J est vide (on convient qu'une somme indexée sur l'ensemble vide est nulle).
2. Montrer que I et J sont vides.
3. En déduire que la famille (x_1, \dots, x_{p-1}) est libre.

Exercice 38 ★★★**Déterminants de Gram**

Soit E un espace euclidien. À toute famille (x_1, \dots, x_p) de p vecteurs de E , on associe la matrice $G(x_1, \dots, x_p) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p}$.

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $F = \text{vect}(x_1, \dots, x_p)$. On note $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$. Montrer que $G(x_1, \dots, x_p) = A^T A$.
2. En déduire que $\det G(x_1, \dots, x_p) \geq 0$ et que (x_1, \dots, x_p) est liée si et seulement si $\det G(x_1, \dots, x_p) = 0$.
3. On se donne $x \in E$. Montrer que

$$\det G(x_1, \dots, x_p, x) = d(x, F)^2 \det G(x_1, \dots, x_p)$$

Exercice 39 ★★★

On pose $Q_n = (1 - X^2)^n = (1 + X)^n(1 - X)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On notera $\varphi(P, Q) = \langle P, Q \rangle$ par la suite.
2. Soit n et k deux entiers tels que $0 \leq k < n$. Montrer que $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$.
3. On pose $P_n = Q_n^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Endomorphismes remarquables**Exercice 40 ★★**

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Une application $u : E \rightarrow E$ est dite *antisymétrique* si

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, u(y) \rangle + \langle y, u(x) \rangle = 0$$

On note $A(E)$ l'ensemble des applications antisymétriques de E .

REMARQUE. Rien à voir avec les applications *multilinéaires* antisymétriques !

1. Soit $u \in A(E)$. Montrer que u est linéaire.
2. Soit $u : E \rightarrow E$. Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
 - (i) u est linéaire et $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$;
 - (ii) u est antisymétrique ;
 - (iii) u est linéaire et sa matrice dans une base orthonormée est antisymétrique.
3. Montrer que $A(E)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel et déterminer sa dimension.
4. Soit $u \in A(E)$. Montrer que $\text{Im } u$ est l'orthogonal de $\text{Ker } u$.
5. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u alors F^\perp est également stable par u .

Exercice 41 ★★

Soient E un espace euclidien, p une projection orthogonale et \mathcal{B} une base orthonormale de E . Montrer que la matrice A de p dans la base \mathcal{B} est symétrique.

Exercice 42 ★★★

Montrer que le rang d'une matrice antisymétrique réelle est pair.

Exercice 43 ★★

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0.$$

Montrer que

$$(\text{Ker}(u))^\perp = \text{Im}(u).$$

Exercice 44 ★★

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n , n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit (a, b) une famille libre de E . Soit f l'application

$$x \mapsto \langle a|x \rangle b + \langle b|x \rangle a.$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et que

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x)|y \rangle = \langle x|f(y) \rangle.$$

2. Déterminer le noyau et le rang de f .

3. On pose $F = \text{Im}(f)$.

- a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E stable par f et en donner une base.
- b. Déterminer la matrice de l'endomorphisme g induit par f sur F dans cette base.

Exercice 45 ★★★

Endomorphismes 1-lipschitziens

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Etablir que

$$E = \text{Ker}(u - id_E) \oplus \text{Im}(u - id_E).$$

Divers

Exercice 46 ★★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On travaille dans l'espace des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $|\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|$.
3.
 - a. Quel est l'orthogonal de l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques ?
 - b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients de A ?
4. Soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|UA\| = \|AU\| = \|A\|$.
5. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Exercice 47 ★★★

Soit E un espace euclidien de dimension n et u_1, \dots, u_{n+1} des vecteurs non nuls de E faisant un angle constant α_n (non nul) deux à deux. Que vaut α_n ?

Exercice 48 ★★★

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{rg}(A^T A) = \text{rg}(AA^T) = \text{rg } A$.

Exercice 49 ★★★

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

$$\text{pour } P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \text{ et } Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n.$$

2. On pose $F = \text{vect}(1 + X^n, n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que $F^\perp = \{0\}$. Conclusion ?

Inégalités

Exercice 50 ★★

Inégalité de Ptolémée

Soit E un espace euclidien. On pose $f : E \setminus \{0\} \rightarrow E \setminus \{0\}$.

$$x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$$

1. Montrer que pour $x, y \in E \setminus \{0\}$, $\|f(x) - f(y)\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|}$.

2. Soient $a, b, c, d \in E$. Montrer que

$$\|a - c\|\|b - d\| \leq \|a - b\|\|c - d\| + \|b - c\|\|a - d\|.$$

Exercice 51 ★★★

Inégalité d'Hadamard

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et de base orthonormée \mathcal{B} . Soient (x_1, \dots, x_n) une famille de n vecteurs de E . Montrer que

$$|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|$$

Exercice 52 ★

Soit $n \geq 1$. Prouver que

$$\left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right]^2 \leq n \left[1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right].$$

Exercice 53 ★

Immédiat

Soient $n \geq 1$ et $x_1, \dots, x_n > 0$. Prouver que

$$\left[\sum_{k=1}^n x_k\right] \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right] \geq n^2.$$

Exercice 54 ★★

Technique

Soit $n \geq 2$. Prouver que

$$\frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2}.$$

Exercice 55

On considère l'ensemble E des fonctions continues et strictement positives sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\inf_{f \in E} \left(\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \right)$$

existe et est atteint.

Exercice 56

Soit f une fonction \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose $f(a) = 0$. Montrer que

$$\int_a^b f^2(u) du \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u) du.$$