Devoir à la maison n°04

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 Remarquons que pour tout $x \in [0,1]$,

$$\frac{1-(-1)^p x^{2p}}{1+x^2} = \frac{1-(-x^2)^p}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{p-1}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{P-1}(-1)^k x^{2k}$$

En intégrant sur $[0,1]$, on obtient par linéarité de l'intégrale

$$\mathrm{H}_p = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k \int_0^1 x^{2k}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

2

$$\mathrm{H}_p = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - (-1)^p \int_0^1 \frac{x^{2p}\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

D'une part,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

D'autre part,

$$\left|(-1)^p \int_0^1 \frac{x^{2p}\,\mathrm{d}x}{1+x^2}\right| = \int_0^1 \frac{x^{2p}\,\mathrm{d}x}{1+x^2} \leq \int_0^1 x^{2p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2p+1}$$

donc

$$\lim_{p\to+\infty} (-1)^p \int_0^1 \frac{x^{2p}\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = 0$$

Par conséquent,

$$\lim_{p\to+\infty} \mathrm{H}_p = \frac{\pi}{4}$$

3 **3.a** I_0 est clairement défini. Supposons $n \neq 0$. La fonction $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sin x}$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\frac{\sin(nx)}{\sin(x)} \underset{x\to0}{\sim} \frac{nx}{x} = n$$

donc $\lim_{x\to0} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} = n$. La fonction $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sin x}$ est donc prolongeable en une fonction continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de sorte que I_n est bien défini.

3.b Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\sin((2p+1)x) - \sin((2p-1)x) = 2\sin(x)\cos(2px)$$

donc

$$\mathrm{I}_{2p+1} - \mathrm{I}_{2p-1} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2px)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\left[\sin(2px)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{I}_{2p+1} = \mathrm{I}_1 = \frac{\pi}{2}$$

3.c De la même manière, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\sin(2px) - \sin((2p-2)x) = 2\sin(x)\cos((2p-1)x)$$

donc

$$\mathrm{I}_{2p} - \mathrm{I}_{2p-2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2p-1)x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2p-1}\left[\sin((2p-1)x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{2p-1}(-1)^{p-1}$$

Par télescopage

$$\mathrm{I}_{2p} = \mathrm{I}_{2p} - \mathrm{I}_0 = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{I}_{2k} - \mathrm{I}_{2k-2} = \sum_{k=1}^{p} \frac{2}{2k-1}(-1)^{k-1} = 2\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 2\mathrm{H}_p$$

Comme (H_p) converge vers $\frac{\pi}{4}$, (I_{2p}) converge vers $\frac{\pi}{2}$.

4 **4.a** Comme précédemment, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} = n^2$ donc $x \mapsto \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de sorte que J_n est bien défini.

4.b Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\sin^2(nx) - \sin^2((n-1)x) = \frac{1-\cos(2nx)}{2} - \frac{1-\cos((2n-2)x)}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos((2n-2)x) - \cos(2nx)\right) = \sin((2n-1)x)\sin(x)$$

Ainsi pour tout entier $n \geq 1$,

$$\mathrm{J}_n - \mathrm{J}_{n-1} = \mathrm{I}_{2n-1} = \frac{\pi}{2}$$

Or $\mathrm{J}_0 = 0$ donc $\mathrm{J}_n = \frac{n\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5 La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et prolongeable par continuité en 0, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Une primitive de $x \mapsto \sin x$ est $x \mapsto -\cos x$ tandis que la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$. De plus, comme cos est bornée

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-\cos x}{x} = 0$$

Par intégration par parties, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est de même nature que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Cette dernière intégrale converge puisque $\frac{\cos x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Ainsi $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et finalement $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge aussi.

6 h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus

$$h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^3/6}{x^2} = -\frac{x}{6}$$

donc $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$. Enfin,

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x^2\cos x - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

Or

$$x^2\cos x \underset{x\to 0}{=} x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

et

$$\sin^2 x \underset{x\to 0}{=} x^2\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

donc

$$h'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^4/6}{x^4} = -\frac{1}{6}$$

donc $\lim_{x\to 0} h'(x) = -\frac{1}{6}$.

D'après un théorème de prolongement, h est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$\boxed{7}$ Il s'agit du lemme de Riemann-Lebesgue. Notons encore h la fonction prolongée sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)\sin((2n+1)x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2n+1}\left[h(x)\cos((2n+1)x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h'(x)\cos((2n+1)x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{h(0)\cos(0)}{2n+1} - \frac{h(\pi/2)\cos(\pi/2+n\pi)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h'(x)\cos((2n+1)x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h'(x)\cos((2n+1)x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)\sin((2n+1)x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |h'(x)\cos((2n+1)x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |h'(x)|\,\mathrm{d}x$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)\sin((2n+1)x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$\boxed{8}$ Remarquons que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)\sin((2n+1)x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)\sin((2n+1)x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{I}_{2n+1}$$

D'après les questions **7** et **3.b**,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Or par le changement de variable $u = (2n+1)x$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Par conséquent

$$\mathrm{K}_1 = \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{9}$ Le cas $n = 1$ a déjà été traité. Supposons donc $n \geq 2$. Alors $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^n(x)}{x^n} = 1$ et $\displaystyle\frac{\sin^n(x)}{x^n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/x^n)$ avec $n \geq 2$. Ainsi $x \mapsto \dfrac{\sin^n(x)}{x^n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et K_n est bien défini.

$\boxed{10}$ **10.a** Si n est pair, alors $x \mapsto \dfrac{\sin^n(x)}{x^n}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\mathrm{K}_n \geq 0$.

10.b Supposons n impair. Comme l'intégrale définissant K_n converge, on a d'après la relation de Chasles

$$\mathrm{K}_n = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \frac{\sin^n(x)}{x^n}$$

Par le changement de variable $t = x - p\pi$

$$\mathrm{K}_n = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^{\pi} \frac{\sin^n(t+p\pi)}{(t+p\pi)^n}\,\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^{\pi} \frac{((-1)^p\sin(t))^n}{(t+p\pi)^n}\,\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\int_0^{\pi} \frac{\sin^n(t)}{(t+p\pi)^n}\,\mathrm{d}t$$

Posons $u_p = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^n(t)}{(t+p\pi)^n}\,\mathrm{d}t$. La suite (u_p) est décroissante et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq u_p \leq \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{(p\pi)^n} = \frac{\pi}{(p\pi)^n}$$

donc (u_p) converge vers 0 par encadrement. La série $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^p u_p$ vérifie donc le critère spécial. Sa somme K_n est donc du signe de son premier terme u_0. Ainsi $\mathrm{K}_n \geq 0$.

11 **11.a** g_n est 2π périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc $g_n^{(k)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. En particulier, $g_n^{(k)}$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$: elle y est donc bornée. Par 2π-périodicité, $g_n^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

11.b Comme $g_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^n$, $g_n(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n-1})$. Comme g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut dériver ce développement limité de sorte que $g_n^{(k)}(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n-1-k})$.

11.c On va montrer par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}_k : \mathrm{K}_n = \frac{(n-k-1)!}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(k)}(x)}{x^{n-k}}\,\mathrm{d}x$$

$\mathcal{P}_0$ est vraie par définition de K_n. On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie pour un certain $k \in [\![0, n-2]\!]$. La dérivée de $g_n^{(k)}$ est $g_n^{(k+1)}$ et une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^{n-k}}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{n-1-k} \cdot \dfrac{1}{n-1-k}$. Comme $g_n^{(k)}$ est bornée et $n-1-k > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{g_n^{(k)}(x)}{x^{n-1-k}} = 0$. De plus, $g_n^{(k)}(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n-1-k})$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g_n^{(k)}(x)}{x^{n-1-k}} = 0$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_n &= \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(k)}(x)}{x^{n-k}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!} \left(-\frac{1}{n-1-k} \left[\frac{g_n^{(k)}(x)}{x^{n-1-k}} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n-1-k} \int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(k+1)}(x)}{x^{n-1-k}}\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{(n-2-k)!}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(k+1)}(x)}{x^{n-1-k}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
Par récurrence finie, $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie, ce qui est le résultat attendu.

12 **12.a**

$$\begin{aligned}
g_{2n}(t) &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^{2n} \\
&= \frac{1}{2^{2n} i^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (e^{it})^{2n-k} (-e^{-it})^k \\
&= \frac{1}{2^{2n}(-1)^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k e^{i(2n-2k)t} \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)t} \\
g_{2n+1}(t) &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^{2n+1} \\
&= \frac{1}{2^{2n+1} i^{2n+1}} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (e^{it})^{2n+1-k} (-e^{-it})^k \\
&= \frac{i}{2^{2n+1}(-1)^n} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k e^{i(2n+1-2k)t} \\
&= \frac{1}{2^{2n+1} i} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^{n+k} \binom{2n+1}{k} e^{i(2n+1-2k)t}
\end{aligned}$$

12.b

$$\begin{aligned}
h_{2n}^{(2n-1)}(t) &= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{n+k}\binom{2n}{k}(i(2n-2k))^{2n-1}e^{i(2n-2k)t}\\
&= \frac{2^{2n-1}i^{2n-1}}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{n+k}\binom{2n}{k}(n-k)^{2n-1}e^{i(2n-2k)t}\\
&= \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{k}(n-k)^{2n-1}e^{i(2n-2k)t}+\sum_{k=n+1}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}(n-k)^{2n-1}e^{i(2n-2k)t}\right) && \text{car le terme d'indice } n \text{ est nul}\\
&= \frac{1}{2i}\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\binom{2n}{n-j}j^{2n-1}e^{2ijt}+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}(-j)^{2n-1}e^{-2ijt}\right) && \text{en posant } j=n-k \text{ et } j=k-n\\
&= \frac{1}{2i}\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n-j}j^{2n-1}e^{2ijt}-\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n-j}j^{2n-1}e^{-2ijt}\right) && \text{par symétrie des coefficients binomiaux}\\
&= (-1)^n\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{2n}{n-j}j^{2n-1}\frac{e^{2ijt}-e^{-2ijt}}{2i}\\
&= (-1)^n\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\sin(2jt) && \text{via une relation d'Euler}\\
h_{2n+1}^{(2n)}(t) &= \frac{1}{2^{2n+1}i}\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^{n+k}\binom{2n+1}{k}(i(2n+1-2k)^{2n}e^{i(2n+1-2k)t}\\
&= \frac{1}{2^{2n+1}i}\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^{n+k}\binom{2n+1}{k}i^{2n}(2n+1-2k)^{2n}e^{i(2n+1-2k)t}\\
&= \frac{1}{2^{2n+1}i}\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^{k}\binom{2n+1}{k}(2n+1-2k)^{2n}e^{i(2n+1-2k)t}\\
&= \frac{1}{2^{2n+1}i}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{2n+1}{k}(2n+1-2k)^{2n}e^{i(2n+1-2k)t}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}(-1)^{k}\binom{2n+1}{k}(2n+1-2k)^{2n}e^{i(2n+1-2k)t}\right)\\
&= \frac{1}{2^{2n+1}i}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{2n+1}{n-j}(2j+1)^{2n}e^{i(2j+1)t}+\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+n+1}\binom{2n+1}{j+n+1}(-2j-1)^{2n}e^{-i(2j+1)t}\right) && \text{en posant } j=n\\
&= \frac{1}{2^{2n+1}i}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{2n+1}{n-j}(2j+1)^{2n}e^{i(2j+1)t}-\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+n}\binom{2n+1}{n-j}(2j+1)^{2n}e^{-i(2j+1)t}\right) && \text{par symétrie des coeffic}\\
&= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n+1}{n-j}(2j+1)^{2n}\frac{e^{i(2j+1)t}-e^{-i(2j+1)t}}{2i}\\
&= (-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^j\binom{2n+1}{n-j}\left(j+\frac{1}{2}\right)^{2n}\sin((2j+1)t) && \text{via une relation d'Euler}
\end{aligned}$$

12.c Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$. Via le changement de variable $u=\alpha t$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha t)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}=\mathrm{K}_1=\frac{\pi}{2}$$

Par linéarité de l'intégration, on en déduit immédiatement que

$$\mathrm{K}_{2n}=\frac{(-1)^n\pi}{2(2n-1)!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{2n}{n-j}j^{2n-1}$$
$$\mathrm{K}_{2n+1}=\frac{(-1)^n\pi}{2(2n)!}\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{n-j}\left(j+\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$\boxed{13}$ **13.a** Pour tout entier $n\geq 2$,

$$\left|\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin^n(x)}{x^n}\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_\pi^{+\infty}\frac{|\sin^n(x)|}{x^n}\,\mathrm{d}x\leq\int_\pi^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n}=\frac{1}{(n-1)\pi^{n-1}}$$

Par encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin^n(x)}{x^n}\,\mathrm{d}x=0$$

13.b φ est clairement dérivable sur $]0,\pi]$ et

$$\forall x \in]0,\pi],\ \varphi'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

Posons maintenant $\psi : x \mapsto x\cos x - \sin x$. ψ est dérivable sur $[0,\pi]$ et

$$\forall x \in [0,\pi],\ \psi'(x) = -x\sin x \leq 0$$

Comme ψ' ne s'annule qu'en 0 et π sur l'intervalle $[0,\pi]$, ψ est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Or $\psi(0) = 0$ donc ψ est strictement négative sur $]0,\pi]$. Par conséquent, φ' est strictement négative sur $]0,\pi]$ et φ est strictement décroissante sur cet intervalle.
Remarquons que $\lim\limits_0 \varphi = 1$ donc, par stricte décroissance, $\varphi(x) < 1$ pour tout $x \in]0,\pi]$. Posons $\varepsilon \in]0,\pi]$. Alors

$$0 \leq \int_0^\pi \varphi^n(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \varphi^n(x)\ \mathrm{d}x + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^\pi \varphi^n(x)\ \mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{2} + \pi\varphi^n(\varepsilon/2)$$

Comme $0 \leq \varphi(\varepsilon/2) < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^n(\varepsilon/2) = 0$. Il existe donc $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq \mathrm{N}$, $\varphi^n(\varepsilon/2) \leq \dfrac{\varepsilon}{2\pi}$ et donc

$$0 \leq \int_0^\pi \varphi^n(x)\ \mathrm{d}x \leq \varepsilon$$

Ainsi, par définition de la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^\pi \varphi^n(x)\ \mathrm{d}x = 0$. D'après la relation de Chasles, (K_n) converge vers 0.

$\boxed{14}$ Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin(x) \leq 1$ donc $\sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$ puis $\mathrm{A}_{n+1} \leq \mathrm{A}_n$ par croissance de l'intégrale. La suite (A_n) est donc décroissante.

$\boxed{15}$ Soit un entier $n \geq$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x) \cdot \sin(x)\ \mathrm{d}x \\
&= -\left[\sin^{n-1}(x)\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\ \mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)(1-\sin^2(x))\ \mathrm{d}x = (n-1)(\mathrm{A}_{n-2} - \mathrm{A}_n)
\end{aligned}$$

ou encore

$$n\mathrm{A}_n = (n-1)\mathrm{A}_{n-2}$$

$\boxed{16}$ Pour tout entier $n \geq 2$,

$$n\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n-1} = (n-1)\mathrm{A}_{n-2}\mathrm{A}_{n-1}$$

La suite $(n\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc constante égale à $1 \cdot \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{A}_0 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{17}$ Par décroissance de (A_n), pour tout entier $n \geq 2$,

$$\frac{n}{n-1}\mathrm{A}_n = \mathrm{A}_{n-2} \leq \mathrm{A}_{n-1} \leq \mathrm{A}_n$$

La suite (A_n) est strictement positive donc pour tout entier $n \geq 2$,

$$\frac{n}{n-1} \leq \frac{\mathrm{A}_{n-1}}{\mathrm{A}_n} \leq 1$$

Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{A}_{n-1}}{\mathrm{A}_n} = 1$ i.e.

$$\mathrm{A}_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{A}_n$$

Par conséquent,

$$\frac{\pi}{2} = n\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\mathrm{A}_n^2$$

puis, comme (A_n) est positive,

$$\mathrm{A}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

18 Soit $\xi : x \mapsto \sin(x) - x + x^2$. ξ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \xi'(x) = \cos(x) - 1 + 2x$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \xi''(x) = -\sin(x)$$

Notamment ξ'' est négative sur $[0,1]$. ξ' est donc décroissante sur $[0,1]$. De plus, $\xi'(1) = \cos(1) + 1 \geq 0$ donc ξ' est positive sur $[0,1]$. Finalement, ξ est croissante sur $[0,1]$ et, comme $\xi(0) = 0$, ξ est positive sur $[0,1]$. On en déduit aisément que

$$\forall x \in]0,1],\ \frac{\sin(x)}{x} \geq 1 - x^2$$

19 Pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{K}_{2p} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{2p} \mathrm{d}x \geq \int_0^1 \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{2p} \mathrm{d}x \geq \int_0^1 (1-x^2)^{2p}\ \mathrm{d}x$$

On effetctue alors le changement de variable $x = \cos(t)$:

$$\int_0^1 (1-x^2)^{2p}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))^{2p} \sin(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{4p+1}(t)\ \mathrm{d}t = \mathrm{A}_{4p+1}$$

20 Les K_n sont positifs donc pour tout $n\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{p=1}^{2n} \mathrm{K}_p \geq \sum_{p=1}^{n} \mathrm{K}_{2p} \geq \sum_{p=1}^{n} \mathrm{A}_{4p+1}$$

Or $\mathrm{A}_{4p+1} \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{8p}}$ donc la série $\sum \mathrm{A}_{4p+1}$ diverge vers $+\infty$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{2n} \mathrm{K}_p = +\infty$. La série $\sum \mathrm{K}_n$ diverge donc (vers $+\infty$).