Devoir à la maison n°06

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 —

Partie I – Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Étudier la parité de f.

2. **a.** Donner un équivalent de la fonction sh en 0 et en déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Déterminer la limite de f en 0.

3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \left(\operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$$

4. Montrer que pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{th}(\mathrm{X}) < \mathrm{X}$.

5. En déduire le tableau de variations de f.

6. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $\mathrm{X} \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}\mathrm{X}}{\mathrm{X}}$.

7. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, f admet un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

où a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 sont cinq réels que l'on précisera.

8. Montrer que la fonction $g : x \in \mathbb{R}^* \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée G, puis prouver que G est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Partie II – Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) suivante que l'on va résoudre sur différents intervalles.

$$(\mathrm{E}) : \ xy' + y = \operatorname{ch} x$$

9. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

10. Donner sans justification les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.

11. Justifier que la fonction G définie à la question **I.8** est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Partie III – Une fonction définie par une intégrale

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $\mathrm{J}(x) = \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t$.

12. Déterminer la parité de J.

13. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

14. Justifier que J est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathrm{J}'(x) = f(x)\left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{1}{x}\right)$$

15. En déduire le signe de J' sur $\mathbb{R}_+^*$. On exprimera le (ou les) zéro(s) de J' à l'aide de la fonction ln.

16. **a.** Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{sh} t \geq t + \frac{t^3}{6}$.

b. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{J}(x) \geq \frac{x}{2} + \frac{6}{x}$$

puis les limites de J en 0^+ et en $+\infty$.

17. Donner le tableau de variations de J sur $\mathbb{R}_+^*$.

18. On pose $h(x) = \frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

a. Montrer que h est prolongeable par continuité en 0. On note encore h son prolongement.

b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathrm{J}(x) - \frac{x}{2} = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} h(u)\, \mathrm{d}u$$

c. Montrer

$$\mathrm{J}(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{x}{2} + \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

19. Montrer que la courbe de J admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique dont on précisera une équation. On donnera également la position de la courbe de J par rapport à cette asymptote.

20. Tracer l'allure de la courbe représentative de J sur $\mathbb{R}$.
On fera notamment figurer l'asymptote déterminée à la question **III.19** ainsi que les tangentes horizontales éventuelles.

On donne pour le tracé $\frac{1}{\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)} \approx 0,76$ et $\mathrm{J}\left(\frac{1}{\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)}\right) \approx 0,65$ à 10^{-2} près.