

# INTÉGRALES À PARAMÈTRES

$\mathbb{K}$  désigne les corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 Passage à la limite

### Théorème 1.1 Convergence dominée

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On suppose que

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- $(f_n)$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$ ;
- $f$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- il existe une fonction positive  $\varphi$  **intégrable** sur  $I$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$$

**REMARQUE.** L'intégrabilité des  $f_n$  sur  $I$  est garantie par la condition de domination.

### Exemple 1.1

On pose  $f_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{1}{t^n + e^t}$  et  $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers la fonction

$$f : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} e^{-t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{1+e} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Alors  $f$  est bien continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ . De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, |f_n(t)| \leq e^{-t}$$

et la fonction  $\varphi : t \mapsto e^{-t}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 e^{-t} dt = 1 - \frac{1}{e}$$

**Théorème 1.2 Intversion limite/intégrale**

Soient  $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$  où  $I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $a \in \bar{J}$  (éventuellement  $a = \pm\infty$ ). On suppose que :

- pour tout  $x \in J$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- pour tout  $t \in I$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, t) = g(t)$  où  $g$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- il existe une fonction positive  $\varphi$  **intégrable** sur  $I$  telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_I f(x, t) dt = \int_I g(t) dt$$

**Théorème 1.3 Intégration terme à terme**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On suppose que

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est **intégrable** sur  $I$ ;
- $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$ ;
- $f$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- la série  $\sum \int_I |f_n(t)| dt$  converge.

Alors  $f$  est intégrable sur  $I$  et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$$

## 2 Continuité

**Théorème 2.1**

Soient  $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose que :

- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto g(x, t)$  est continue sur  $A$ ;
- il existe une fonction positive  $\varphi$  **intégrable** sur  $I$  telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors  $F : x \in A \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est continue sur  $A$ .

**REMARQUE.** La dernière condition est une condition dite de **domination**.

**REMARQUE.** La continuité étant une notion locale, on peut remplacer la condition de domination sur  $A$  par la domination au

voisinage de tout point de  $A$ . En particulier, il suffit de montrer la domination sur tout compact de  $A$ .  
Si  $A$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , il suffit de montrer la domination sur tout segment de  $A$ .

### 3 Dérivabilité

#### Théorème 3.1

Soient  $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$  où  $I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . On suppose que :

- pour tout  $x \in J$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$  et intégrable sur  $I$ ;
- pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$ ;
- pour tout  $x \in J$ ,  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- il existe une fonction positive  $\varphi$  **intégrable** sur  $I$  telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors  $F : x \in J \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$  et

$$\forall x \in J, F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

**REMARQUE.** La dérivabilité étant une notion locale, on peut remplacer la domination sur  $J$  par la domination sur tout segment de  $J$ .

#### Corollaire 3.1

Soient  $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$  où  $I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . On suppose que :

- pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $J$ ;
- pour tout  $x \in J$  et pour tout  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$  et intégrable sur  $I$ ;
- il existe une fonction positive  $\varphi$  **intégrable** sur  $I$  telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors  $F : x \in J \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $J$  et

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \forall x \in J, F^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt$$

**REMARQUE.** A nouveau, la domination sur tout segment de  $J$  suffit.

**Corollaire 3.2**

Soient  $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$  où  $I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . On suppose que :

- pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $J$ ;
- pour tout  $x \in J$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe une fonction positive  $\varphi_k$  **intégrable** sur  $I$  telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_k(t)$$

Alors  $F : x \in J \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $J$  et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in J, F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$$

**REMARQUE.** A nouveau, la domination sur tout segment de  $J$  suffit.

**Exercice 3.1**

Montrer que la fonction  $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .