Semaine du 24/02 au 28/02

1 Cours

Espaces vectoriels de dimension finie

Famille de vecteurs Familles génératrices. Familles libres/liées. Bases. Base adaptée à une décomposition en somme directe. Cas particulier des familles de $\mathbb{K}^n$ (pivot de Gauss).

Dimension d'un espace vectoriel Théorème de la base incomplète/extraite. Existence de bases. Définition de la dimension. Dans un espace de dimension n une famille génératrice/libre possède au moins/au plus n éléments. Si $\mathscr{B}$ est une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n, alors $\mathscr{B}$ est une base ssi $\mathscr{B}$ est libre ssi $\mathscr{B}$ est génératrice.

Dimension et sous-espaces vectoriels Si F sous-espace vectoriel de E, alors $\dim F \leqslant \dim E$ avec égalité **si et seulement si** $F = E$. Hyperplans. Dimension d'une somme directe. Existence de supplémentaire en dimension finie. Formule de Grassmann. Caractérisation de la supplémentarité par la dimension. Une somme est directe **si et seulement si** la somme des dimensions est égale à la dimension de la somme

Rang d'une famille de vecteurs Définition. Si $\mathscr{F}$ est une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n, alors $\mathscr{F}$ est libre **si et seulement si** $\operatorname{rg}\mathscr{F} = p$ et $\mathscr{F}$ est génératrice **si et seulement si** $\operatorname{rg}\mathscr{F} = n$. Le rang est invariant par opérations de pivot de Gauss.

Applications linéaires

Définition et premières propriétés Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'une forme linéaire. Exemples dans les espaces de fonctions, dans les espaces de suites et dans les $\mathbb{K}^n$. Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E, F)$. Structure d'anneau de $\mathscr{L}(E)$.

Isomorphismes Définition d'un isomorphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme. Définition d'un automorphisme et groupe linéaire GL(E).

Images directe et réciproque par une application linéaire L'image directe ou réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel. Noyau et image d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le noyau et l'image.

2 Méthodes à maîtriser

- Montrer qu'une famille est libre.
- Montrer qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre, liée ou génératrice par pivot de Gauss.
- Déterminer la dimension d'un espace vectoriel en exhibant une base.
- Utiliser la dimension pour montrer qu'une famille libre/génératrice est une base.
- Utiliser la dimension pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont égaux.
- Utiliser la dimension pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.
- Calculer le rang d'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ par pivot de Gauss.
- Utiliser le rang pour montrer qu'une famille est libre ou génératrice.
- Montrer qu'une application est linéaire.
- Calculer avec des endomorphismes comme dans tout anneau **non commutatif** et **non intègre**.
- Utiliser le noyau ou l'image d'une application linéaire pour prouver son injectivité ou sa surjectivité.
- Les équivalences $x \in \operatorname{Ker} f \iff f(x) = 0$ et $y \in \operatorname{Im} f \iff \exists x,\ y = f(x)$ doivent être automatiques.

3 Questions de cours

Formule de Grassmann

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel E. Montrer que

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Image directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire

Soient $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ ainsi que G et H des sous-espaces vectoriels respectifs de E et F. Montrer que $f(\mathrm{G})$ et $f^{-1}(\mathrm{H})$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de F et E.

Hyperplans

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, H un hyperplan de E et D une droite non incluse dans H. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{D}$.

Banque CCP 01

1. On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
   Montrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini de $u_n = \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Banque CCP 42

1. Résoudre l'équation différentielle $(\mathrm{H})\colon\ 2xy' - 3y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Résoudre l'équation différentielle $(\mathrm{E})\colon\ 2xy' - 3y = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}_+$?

Banque CCP 56

On considère la fonction H définie sur $]1,+\infty[$ par

$$\mathrm{H}(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$$

1. Montrer que H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en 1.
3. En utilisant la fonction u de la question 2, calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

Banque CCP 84

Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$.

Banque CCP 89

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $\mathrm{S} = \dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

Banque CCP 94

1. Enoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{N}$. Montrer que $(a \mid c \text{ ET } b \mid c) \iff ab \mid c)$.
3. On considère le système $(\mathscr{S})\colon \begin{cases} x \equiv 6[17] \\ x \equiv 4[15] \end{cases}$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de $(\mathscr{S})$ dans $\mathbb{Z}$.
   (b) Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système $(\mathscr{S})$.

Trigonométrie réciproque

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Trigonométrie réciproque

Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

Equation intégrale

Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ à l'aide de la caractérisation séquentielle de la densité.