Devoir à la maison n°5

Problème 1 —

Partie I –

Pour tout réel a positif ou nul, on note g_a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g_a(t) = t^a$.

1. Montrer que la fonction g_a est prolongeable par continuité en 0 (on notera toujours g_a la fonction ainsi prolongée, qui est donc définie et continue sur $\mathbb{R}_+$). Préciser la valeur de $g_a(0)$. Montrer que la fonction g_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ pour $a \geqslant 1$.

Soient a et b deux réels positifs ou nuls. On pose

$$I(a, b) = \int_0^1 g_a(t)\, g_b(1-t)\, dt\,.$$

2. Justifier l'existence de l'intégrale $I(a, b)$. Comparer $I(a, b)$ et $I(b, a)$.

On écrira abusivement $I(a, b) = \displaystyle\int_0^1 t^a(1-t)^b\, dt$.

3. Soient a et b deux réels positifs ou nuls. Trouver une relation entre $I(a+1, b)$ et $I(a, b+1)$.

4. Calculer $I(a, 0)$. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a

$$I(a, n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)}\,.$$

5. Soient p et q deux entiers naturels. Exprimer $I(p, q)$ à l'aide de factorielles.

6. En déduire la valeur de l'intégrale

$$J(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p+1}(\cos\theta)^{2q+1}\, d\theta\,,$$

où p et q sont deux entiers naturels.

Partie II –

Pour tout réel a strictement positif, on note f_a la fonction définie par

$$f_a(x) = x\ \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right)\,.$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f_a.

On note $\mathcal{C}_a$ la courbe représentant la restriction de la fonction f_a à l'intervalle $]a, +\infty[$.

2. Si a et x dont deux réels tels que $0 < a < x$, démontrer l'encadrement

$$\frac{a}{x} \leqslant \ln x - \ln(x-a) \leqslant \frac{a}{x-a}\,.$$

3. En déduire les variations de la fonction f_a sur l'intervalle $]a, +\infty[$ (on dressera un tableau de variations). Préciser la nature des branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_a$.
4. Donner l'allure des courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sur un même schéma.
5. On fixe $a > 0$ et on considère la suite $y = (y_n)$ définie, pour tout entier naturel n tel que $n > a$, par $y_n = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n$.
   Étudier le comportement (sens de variation, limite) de la suite (y_n).

Partie III –

Pour tout réel positif ou nul x et tout entier naturel non nul n, on pose

$$F_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x \, du\,.$$

1. Montrer que $F_n(x) = n^{x+1}\, I(x, n)$.
2. En utilisant les résultats de la partie II, montrer que, pour tout x fixé, la suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
3. On fixe $x \geqslant 0$.
   a. Montrer l'existence d'un réel strictement positif U tel que
   $$\forall u \in \mathbb{R}_+ \qquad u \geqslant U \Longrightarrow e^{-u} \leqslant \frac{1}{u^{x+2}}\,.$$
   b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a
   $$F_n(x) \leqslant \int_0^U e^{-u} u^x \, du + \frac{1}{U}\,.$$
   c. Montrer que la suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
   Pour tout réel positif ou nul x, on pose $F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$.
4. Démontrer la relation fonctionnelle
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad F(x+1) = (x+1)F(x).$$
   En déduire la valeur de $F(k)$ pour k entier naturel.