CALCUL DIFFÉRENTIEL

Différentiation

Exercice 1 **Banque Mines-Ponts MP 2019**

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et E^* son dual.
On définit

$$D = \{\varphi \in E^*, \forall (f,g) \in E^2, \varphi(fg) = f(0)\varphi(g) + g(0)\varphi(f)\}$$

1. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de E^* non réduit à 0.
2. Montrer que l'application $a \in \mathbb{R}^n \mapsto (f \in E \mapsto df(0) \cdot a)$ est injective.
3. Donner une base de D.
Indication : On pourra utiliser la relation fondamentale de l'analyse pour $t \in \mathbb{R} \mapsto f(tx)$.

Exercice 2 **Banque Mines-Ponts MP 2018**

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable, telle que $df(x)$ soit injective pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et vérifiant $\|f(x)\| \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
Le but de cet exercice est de montrer que f est surjective. On pose pour cela $g : x \to \|f(x) - a\|^2$ où $a \in \mathbb{R}^n$.

1. Justifier que g est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer $dg(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que g admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$.
3. Conclure.

Exercice 3 ★★★

Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable telle que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $A(s)$ et $A(t)$ commutent.

1. Justifier que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \exp(M)$ est différentiable en 0 et calculer sa différentielle en 0.
2. En déduire que $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(A(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = A'(t)\exp(A(t)) = \exp(A(t))A'(t)$$

Exercice 4 ★★

Montrer que $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^2$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en tout point de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dérivées partielles

Exercice 5 **CCINP (ou CCP) PSI 2019**

Soit la fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}\right.$.

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
3. Étudier l'existence de dérivées partielles secondes de f en $(0,0)$.

Exercice 6

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées ou dérivées partielles des fonctions suivantes en fonction des dérivées partielles de f.

1. $g(x,y) = f(y,x)$
2. $g(x) = f(x,x)$
3. $g(x,y) = f(y, f(x,x))$
4. $g(x) = f(x, f(x,x))$

Exercice 7

Etudier l'existence de dérivées partielles pour les fonctions suivantes.

1. $f(x,y) = \max(|x|,|y|)$.
2. $f(x,y) = |x| + |y|$.
3. $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{\sin x^2 + \sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$.

Exercice 8

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0)=0$. f est-elle de classe $\mathcal{C}^0$? $\mathcal{C}^1$? $\mathcal{C}^2$?

Exercice 9 **Laplacien en polaires**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On appelle *laplacien* de f l'application $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Donner une expresion du laplacien en coordonnées polaires.

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(e^t \cos t, \ln(1+t^2))$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 11 **Une équation fonctionnelle**

Le but de l'exercice est de déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation :

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y) \qquad (*)$$

1. Déterminer les solutions constantes de $(*)$.

2. Soit f une solution non constamment nulle de $(*)$.

- **a.** Montrer que $f(0)=1$ et $f'(0)=0$.
- **b.** Montrer que f est une fonction paire.

3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x,y) = f(x+y)+f(x-y)$$

- **a.** Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
- **b.** Calculer les dérivées partielles secondes de F.
- **c.** On suppose que f est une solution non constamment nulle de $(*)$. Des expressions de $\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y^2}$, déduire que f vérifie une équation différentielle de la forme $z'' - \alpha z = 0$.
- **d.** Donner les solutions de l'équation différentielle $z''-\alpha z = 0$ suivant les valeurs de α.

4. Déterminer toutes les solutions de $(*)$.

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de f.

2.
- **a.** Prouver l'existence de dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
- **b.** Etudier la continuité des dérivées partielles premières de f.
- **c.** La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 13 **Centrale-Supélec MP 2016**

On note $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = y\}$.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \Delta & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y} \end{cases}$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$.
2. Montrer que f est prolongeable en une application $\tilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $\tilde{f}$ admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
5. Montrer que $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. On pourra écrire $\tilde{f}(x,y)$ comme une intégrale entre 0 et 1.
6. Justifier l'existence pour $\tilde{f}$ d'un minimum et d'un maximum sur $\mathbb{R}^2$ et les déterminer.

Gradient

Exercice 14 ★★

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E et $u \in$ E. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \varphi(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle + \langle u, x\rangle$$

1. Justifier que φ est différentiable sur E.
2. Calculer le gradient de φ en tout point de E.

Exercice 15 ★★★

Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. Pour $x \in \mathrm{E}\setminus\{0_\mathrm{E}\}$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2}$.

On n'utilisera pas le théorème spectral dans tout cet exercice.

1. Calculer le gradient de φ en tout point de $\mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$.
2. Montrer que $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$ est un vecteur propre de f si et seulement si $\nabla\varphi(x) = 0$.
3. Montrer que φ admet un maximum sur $\mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$.
4. En déduire que f admet un vecteur propre.

Optimisation

Exercice 16

Déterminer les extrema locaux des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = x^3 + y^3$.
2. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
3. $f(x,y) = 2y^4 - 3xy^2 + x^2$.
4. $f(x,y) = x^3 - y^2 - x$.

Exercice 17

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2(1+y)^3 + y^4 \end{cases}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la fonction f admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f admet un minimimum local mais pas global en ce point critique.

Exercice 18 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2018**

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un endomorphisme symétrique f de E dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

1. Montrer que : $\forall h \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\},\ \ (f(h) \mid h) > 0$.

2. Soient $u \in \mathrm{E}$ fixé et $g : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) \mid x) - (u \mid x)$.

  a. Montrer que g est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point de E.

  b. Montrer qu'il existe un unique vecteur $z_0 \in \mathrm{E}$ point critique de g.

  c. Montrer que g admet un minimum global en z_0.

Exercice 19 ★★ **CCP PSI 2015**

On considère les ensembles

$$\mathrm{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$$

et

$$\mathrm{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x < y < 1\}$$

ainsi que la fonction F définie sur K par

$$\mathrm{F}(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y(1-x) & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. La fonction F admet-elle des extrema locaux sur T ?

2. La fonction F admet-elle un minimum sur K ? un maximum sur K. Si oui, déterminer leurs valeurs.

Exercice 20 ★★

Déterminer le minimum et le maximum éventuels de $f : (x, y) \mapsto \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$ sur $\mathrm{K} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$.

Equations aux dérivées partielles

Exercice 21

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

Exercice 22

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Exercice 23

Résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) : $\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = x + y$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ en effectuant le changement de variables $\begin{cases} x = u \\ y = \frac{u^2}{2} + v \end{cases}$.
Déterminer la solution vérifiant $f(0, y) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 24

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est *homogène de degré* α si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t > 0,\ f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

Exercice 25

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est *homogène de degré* α si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t > 0,\ f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

1. Montrer que si f est homogène de degré α, alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y) \qquad (*)$$

2. Réciproquement, on suppose que f vérifie la relation $(*)$.

a. On fixe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $\varphi(t) = f(tx, ty) - t^\alpha f(x, y)$ pour $t > 0$. Montrer que φ vérifie une équation différentielle du premier ordre sans second membre et préciser celle-ci.

b. En déduire que f est homogène de degré α.

3. Montrer que si f est homogène de degré α, les dérivées partielles de f sont également homogènes et préciser leur degré.

Exercice 26 **Problème de Dirichlet et principe du maximum**

Soient U un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On note $\partial\mathrm{U} = \overline{\mathrm{U}} \setminus \mathrm{U}$ la frontière de U.
On se donne une fonction f à valeurs réelles continue sur $\overline{\mathrm{U}}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. On pose alors

$$\forall x \in \mathrm{U},\ \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

1. Montrer que f admet un maximum sur $\overline{\mathrm{U}}$. On note alors $\bar{x}$ un point de $\overline{\mathrm{U}}$ où ce maximum est atteint.

2. On suppose que $\Delta f > 0$ sur U. Montrer que $\bar{x} \in \partial\mathrm{U}$.

A partir de maintenant, on suppose $\Delta f = 0$ sur U.

3. On se donne $\varepsilon > 0$ et on pose

$$\forall x \in \overline{\mathrm{U}},\ f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon\|x\|^2 = f(x) + \varepsilon\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Montrer que f_ε est continue sur $\overline{\mathrm{U}}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que $\Delta f_\varepsilon > 0$ sur U.

4. En déduire que le maximum de f sur $\overline{\mathrm{U}}$ est atteint sur $\partial\mathrm{U}$.

5. Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues sur $\overline{\mathrm{U}}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et vérifiant $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$ sur U. On suppose en outre que $f_1 = f_2$ sur $\partial\mathrm{U}$. Montrer que $f_1 = f_2$ sur U.