

DEVOIR À LA MAISON N°06

- ▶ Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- ▶ Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- ▶ Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

EXERCICE 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} x^k + o(x^n)$$

2. En déduire un développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de \arcsin .

EXERCICE 2.

1. Soient a et b des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur un intervalle I . Montrer que toute solution sur I de l'équation différentielle $y' + ay = b$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur I .
2. Soient a , b et c des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur un intervalle I . Montrer que toute solution sur I de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

EXERCICE 3.

On considère sur \mathbb{R} l'équation différentielle :

$$(E) \quad (1+x^2)y' = 1+3xy$$

1. Démontrer que les solutions réelles de (E) sont les fonctions f_λ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_\lambda(x) = P(x) + \lambda(1+x^2)^r$$

où λ est un nombre réel, r un nombre rationnel à préciser et P une fonction polynôme à expliciter.

2. Montrer qu'il existe une unique solution g de (E) admettant une limite finie en $+\infty$.
3. Calculer g' et déterminer son signe.
4. Déterminer, si elle existe, la limite de $\frac{g(x)}{x^3}$ quand x tend vers $-\infty$.
5. Représenter graphiquement la fonction g .

EXERCICE 4.

On rappelle que si f est dérivable en a , alors la courbe représentative de f admet pour tangente au point d'abscisse a la droite d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

On considère l'équation différentielle

$$(E) : (1 + x^2)y' + 2xy = \frac{1}{x}$$

1. Dans cette question, on ne cherchera pas à résoudre (E). On note f_λ l'unique solution de (E) telle que $f_\lambda(1) = \lambda$.
 - a. Former une équation cartésienne de la tangente D_λ à la courbe représentative de f_λ au point d'abscisse 1.
 - b. Montrer que les droites D_λ passent toutes par un même point lorsque λ décrit \mathbb{R} .
2.
 - a. Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* .
 - b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer l'unique solution f_λ de (E) sur \mathbb{R}_+^* telle que $f_\lambda(1) = \lambda$.
3. On se place maintenant dans un cadre plus général. Soient a, b, c trois fonctions continues sur un intervalle I . On suppose que a ne s'annule pas sur I . On se donne $x_0 \in I$ et on considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : ay' + by = c$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note f_λ l'unique solution de (\mathcal{E}) sur I telle que $f_\lambda(x_0) = \lambda$. On note enfin \mathcal{D}_λ la tangente à la courbe représentative de f_λ au point d'abscisse x_0 .

Montrer que, lorsque λ décrit \mathbb{R} , les droites \mathcal{D}_λ sont soit toutes concourantes soit toutes parallèles.