

DEVOIR À LA MAISON N°13

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 – Mines 2016 MP Maths 2 – Théorème taubérien de Hardy-Littlewood-Karamata

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0, +\infty[$.

I Une intégrale à paramètre

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose, sous réserve d'existence,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} du \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$$

- 1 Montrer que la fonction $\psi : u \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur I .
- 2 Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie.
- 3 Montrer que la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur I et exprimer $F'(x)$ sous la forme d'une intégrale.
- 4 En déduire que pour tout $x \in I$, $xF'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x) = -K$.
- 5 Pour tout $x \in I$, on pose $G(x) = \sqrt{x}e^{-x}F(x)$. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = C - K \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.
- 6 Déterminer les limites de G en 0 et $+\infty$ et en déduire la valeur de K .

II Etude de deux séries de fonctions

Dans toute cette partie, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-nx}$.

- 7 Montrer que f et g sont définies et continues sur I .
- 8 Montrer que pour tout $x \in I$, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.
- 9 Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n \geq 1}$ converge.

- 10** Démontrer que pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) e^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{I}$.
- 11** En déduire un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$. Montrer alors que $g(x)$ est équivalent à $\frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x \rightarrow 0$.

III Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

A tout ensemble $A \subset \mathbb{N}$, on associe la suite (a_n) définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit I_A l'ensemble des réels $x \geq 0$ pour lesquels la série $\sum a_n e^{-nx}$ converge. On pose $f_A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}$ pour tout $x \in I_A$. Enfin, sous réserve d'existence, on pose $\Phi(A) = \lim_{x \rightarrow 0} x f_A(x)$ et on note S l'ensemble des parties $A \subset \mathbb{N}$ pour lesquelles $\Phi(A)$ existe.

- 12** Quel est l'ensemble I_A si A est fini ? Si A est infini, montrer que l'on peut extraire une suite (b_n) de la suite (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$. Déterminer I_A dans ce cas.
- 13** Soit $A \in S$ et (a_n) la suite associée. Pour tout entier naturel n , on note $A(n)$ l'ensemble des éléments de A inférieurs ou égaux à n . Vérifier que pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n \geq 0} \text{card}(A(n)) e^{-nx}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \text{card}(A(n)) e^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1 - e^{-x}}$$

Dans la question suivante, $A = A_1$ désigne l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls.

- 14** Montrer que si $x > 0$, $f_{A_1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor e^{-nx}$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.
- En déduire un encadrement de $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx} - \frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}}$ puis un équivalent de f_{A_1} en 0. Prouver que $A_1 \in S$ et donner $\Phi(A_1)$.

Dans la question suivante, $A = A_2$ désigne l'ensemble constitué des entiers qui sont la somme des carrés de deux entiers naturels non nuls. On admet que $A_2 \in S$ et on désire majorer $\Phi(A_2)$.

Soit $v(n)$ le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p, q) pour lesquels $n = p^2 + q^2$.

- 15** Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n \geq 0} v(n) e^{-nx}$ converge et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n) e^{-nx} = f_{A_1}(x)^2$$

Montrer alors que pour tout $x > 0$, $f_{A_2}(x) \leq f_{A_1}(x)^2$. En déduire un majorant de $\Phi(A_2)$.

IV Un théorème taubérien

Soit $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que, pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n \geq 0} \alpha_n e^{-nx}$ converge.

On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} = \ell \in [0, +\infty[$$

On note F l'espace vectoriel des fonctions de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , E le sous-espace de F des fonctions continues par morceaux et E_0 le sous-espace de E des fonctions continues sur $[0, 1]$. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par la formule $\|\psi\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |\psi(t)|$.

Si $\psi \in E$, on note $L(\psi)$ l'application qui à $x > 0$ associe

$$L(\psi)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \psi(e^{-nx})$$

- 16** Montrer que $L(\psi)$ est bien définie pour tout $\psi \in E$ et que L est linéaire. Vérifier que pour tout $(\psi_1, \psi_2) \in E^2$, $\psi_1 \leq \psi_2$ entraîne $L(\psi_1) \leq L(\psi_2)$.

On note E_1 l'ensemble des $\psi \in E$ pour lesquels $\lim_{x \rightarrow 0} xL(\psi)(x)$ existe et, si $\psi \in E_1$, on pose

$$\Delta(\psi) = \lim_{x \rightarrow 0} xL(\psi)(x)$$

- 17** Vérifier que E_1 est un sous-espace vectoriel de E et que l'application Δ est une forme linéaire continue sur $(E_1, \|\cdot\|_\infty)$.
- 18** Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $e_p : t \in [0, 1] \mapsto t^p$ appartient à E_1 et calculer $\Delta(e_p)$. En déduire que $E_0 \subset E_1$ et calculer $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E_0$.

Pour tout $(a, b) \in [0, 1]^2$ tel que $a < b$, on note $\mathbb{1}_{[a, b]} : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ la fonction définie par

$$\mathbb{1}_{[a, b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $a \in]0, 1[$ et $\varepsilon \in]0, \min(a, 1 - a)[$. On note

$$g_-(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a - \varepsilon] \\ \frac{a - x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a - \varepsilon, a[\\ 0 & \text{si } x \in [a, 1] \end{cases}$$

et

$$g_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a] \\ \frac{a + \varepsilon - x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a, a + \varepsilon[\\ 0 & \text{si } x \in [a + \varepsilon, 1] \end{cases}$$

- 19** Vérifier que g_- et g_+ appartiennent à E_0 et calculer $\Delta(g_-)$ et $\Delta(g_+)$. Montrer que $\mathbb{1}_{[0, a]} \in E_1$ et calculer $\Delta(\mathbb{1}_{[0, a]})$. En déduire que $E_1 = E$ et donner $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E$.

On considère maintenant la fonction ψ définie sur $[0, 1]$ par la formule :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{e}\right[\\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right] \end{cases}$$

- 20** *Théorème taubérien.* Calculer $L(\psi)\left(\frac{1}{N}\right)$ pour tout entier $N > 0$ et en déduire la limite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \alpha_k$$

On rappelle que $v(n)$ est le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p, q) tels que $n = p^2 + q^2$.

- 21** Si $A_1 \in S$, que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{card}(A(n))$. Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v(k)$.