Semaine du 08/03 au 12/03

1 Cours

Applications linéaires

Définition et premières propriétés Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'une forme linéaire. Exemples en géométrie, dans les espaces de fonctions, dans les espaces de suites et dans les $\mathbb{K}^n$. Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Structure d'anneau de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Isomorphismes Définition d'un isomorphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme. Définition d'un automorphisme et groupe linéaire $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$.

Images directe et réciproque par une application linéaire L'image directe ou réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel. Noyau et image d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le noyau et l'image. Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base. Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et si $\mathrm{E} = \mathrm{S} \bigoplus \mathrm{Ker}\, f$, alors f induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Ker}\, f$.

Image d'une famille de vecteurs L'image d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image. Une application linéaire est injective/surjective/bijective si et seulement si l'image d'une base est une famille libre/une famille génératrice/une base.

Applications linéaires en dimension finie En dimension finie, deux espaces sont de même dimension si et seulement si ils sont isomorphes. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le rang. Si f est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de **même** dimension **finie**, alors f bijective $\iff$ f injective $\iff$ f surjective. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme. Si E et F sont de même dimension finie, $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est bijective si et seulement si il existe $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_\mathrm{F}$ **ou** $g \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$. Dimension de $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Homothéties, projecteurs et symétries Définition d'une homothétie. Définition d'un projecteur. Si p est la projection sur F parallèlement à G, alors $\mathrm{F} = \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}\, p$. Caractérisation des projecteurs ($p \circ p = p$). Définition d'une symétrie. Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_\mathrm{E})$. Caractérisation des symétries ($s \circ s = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$).

Formes linéaires et hyperplans Formes coordonnées. Définition d'un hyperplan comme noyau de forme linéaire non nulle. Lien entre hyperplans et droites vectorielles. Intersections d'hyperplans.

Polynômes

Polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ Définitions : polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, ensemble $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux. Polynômes pairs, impairs. $(\mathbb{K}[\mathrm{X}], +, \times)$ est un anneau intègre commutatif. $(\mathbb{K}[\mathrm{X}], +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Base canonique de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Degré d'un polynôme. Degré d'une combinaison linéaire, d'un produit. Définition de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Base canonique de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Famille de polynômes à degrés échelonnés. Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine d'un polynôme. Cas des polynômes pairs/impairs et des polynômes à coefficients réels. Polynôme dérivé. La dérivation est linéaire. Formule de Leibniz. Formule de Taylor.

2 Méthodes à maîtriser

- Calculer avec des endomorphismes comme dans tout anneau **non commutatif** et **non intègre**.
- Utiliser le noyau ou l'image d'une application linéaire pour prouver son injectivité ou sa surjectivité.
- Les équivalences $x \in \mathrm{Ker}\, f \iff f(x) = 0$ et $y \in \mathrm{Im}\, f \iff \exists x, y = f(x)$ doivent être automatiques.
- Utiliser la dimension pour faciliter la preuve de la bijectivité (injectivité + espaces d'arrivée et de départ de même dimension)
- Utiliser le théorème du rang pour passer de résultats sur le noyau à des résultats sur l'image et vice-versa.
- Utiliser la caractérisation des projecteurs/symétries ($p^2 = p$ ou $s^2 = \mathrm{Id}$).
- Déterminer la forme explicite d'une projection/symétrie étant donné deux sous-espaces supplémentaires (analyse / synthèse).
- Pour résoudre des équations d'inconnue polynomiale, chercher dans un premier temps à déterminer le degré du polynôme inconnu.

3 Questions de cours

Formes linéaires et hyperplans

Soit H un hyperplan et D une droite vectorielle d'un espace vectoriel E (non nécessairement de dimension finie). On suppose que $D \not\subset H$. Montrer que $E = H \oplus D$.

Somme de projecteurs

Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que, dans ce cas, $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Ker}(p + q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Formule de Taylor

Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ et tout $a \in \mathbb{K}$,

$$P(a + X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

Base duale

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E. Montrer que la famille des formes linéaires coordonnées $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*.

Intersection d'hyperplans

Soient $H_1, \dots, H_m$ des hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension n. Montrer que $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) \geq n - m$.

Composées

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g \qquad\qquad F = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} f$$