# Réduction algébrique

## 1 Polynômes d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

### 1.1 Définition d'un polynôme d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

**Définition 1.1**

(i) Soient $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On pose $\mathrm{P}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$.

(ii) Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On pose $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{A}^n$.

**Exemple 1.1**

Si $u$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel E et $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$, alors $\mathrm{P}(u) = u^2 + u + \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ (et non $u^2 + u + 1$, ce qui n'aurait aucun sens).
Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$, alors $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n$ (et non $\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + 1$, ce qui n'aurait aucun sens).

**Exercice 1.1**

Soient $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Montrer que $\operatorname{Ker} \mathrm{P}(u)$ et $\operatorname{Im} \mathrm{P}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels stables par $u$.

**Lemme 1.1**

(i) Soient $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Alors pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E}$, $u(x) = \lambda x \implies \mathrm{P}(u)(x) = \mathrm{P}(\lambda)x$.

(ii) Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Alors pour tout $(\lambda, \mathrm{X}) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X} \implies \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{X} = \mathrm{P}(\lambda)\mathrm{X}$.

### 1.2 Sous-algèbre engendrée par un endomorphisme ou une matrice carrée

**Définition 1.2 Sous-algèbre engendrée par un endomorphisme ou une matrice carrée**

(i) Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. L'application $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}(u) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. L'image de ce morphisme, notée $\mathbb{K}[u]$, est une sous-algèbre **commutative** de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

(ii) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{A}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. L'image de ce morphisme, notée $\mathbb{K}[\mathrm{A}]$, est une sous-algèbre **commutative** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Exercice 1.2**

Soient $f$ et $g$ deux endomophismes d'un espace vectoriel E. Montrer que si $g$ commute avec $f$, alors $g$ commute avec tout élément de $\mathbb{K}[f]$.

**Remarque.** Si $\mathcal{B}$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'application $\begin{cases} \mathcal{L}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{cases}$ est un morphisme d'algèbres. On en déduit notamment que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{P}(u)) = \mathrm{P}(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u))$.

# 2 Application à la réduction

## 2.1 Polynômes annulateurs

**Définition 2.1 Polynôme annulateur**

(i) Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle **polynôme annulateur** de $u$ tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(u) = 0$.

(ii) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme annulateur** de A tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$.

**Méthode** **Calcul d'inverse à l'aide d'un polynôme annulateur**

Si une matrice ou un endomorphisme admet un polynôme annulateur de coefficient constant non nul, cette matrice ou cet endomorphisme est inversible et on peut exprimer son inverse sous la forme d'un polynôme en cette matrice ou cet endomophisme.

**Exemple 2.1**

Soit A une matrice annulé par $\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2$. Alors $\mathrm{A}^2 - 3\mathrm{A} + 2\mathrm{I}_n = 0$ ou encore $\frac{1}{2}(3\mathrm{A} - \mathrm{A}^2) = \mathrm{I}_n$, c'est-à-dire

$$\frac{3\mathrm{A} - \mathrm{I}_n}{2}\mathrm{A} = \mathrm{A}\frac{3\mathrm{A} - \mathrm{I}_n}{2} = \mathrm{I}_n$$

Ainsi A est inversible et $\mathrm{A}^{-1} = \frac{3\mathrm{A} - \mathrm{I}_n}{2}$.

**Méthode** **Calcul de puissances à l'aide d'un polynôme annulateur**

Soit P un polynôme annulant une matrice A ou un endomorphisme $u$. En notant $\mathrm{R}_n$ le reste de la division euclidienne de $\mathrm{X}^n$ par P, $\mathrm{A}^n = \mathrm{R}_n(\mathrm{A})$ ou $u_n = \mathrm{R}_n(u)$.

**Exercice 2.1**

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{A}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Proposition 2.1 Polynôme annulateur et valeur propre**

(i) Soient $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel et P un polynôme annulateur de $u$. Alors toute valeur propre de $u$ est racine de P.

(ii) Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P un polynôme annulateur de A. Alors toute valeur propre de A est racine de P.

**Attention !** La réciproque est fausse. Une racine d'un polynôme annulateur n'est pas forcément une valeur propre.

**Théorème 2.1 Lemme des noyaux**

Soient $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_r$ des polynômes premiers entre eux deux à deux et $\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{P}_i$.

(i) Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors

$$\operatorname{Ker} \mathrm{P}(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} \mathrm{P}_i(u)$$

(ii) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\operatorname{Ker} \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} \mathrm{P}_i(\mathrm{A})$$

**Corollaire 2.1 Polynôme annulateur et diagonalisabilité**

(i) Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors $u$ est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de $u$ scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.

(ii) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de A scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.

**Corollaire 2.2 Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit**

Soient $u$ un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel stable par $f$. Alors $u_{|\mathrm{F}}$ est diagonalisable.

**Remarque.** En fait, de manière générale, si F est stable par $u$, $\mathrm{Sp}(u_{|\mathrm{F}}) \subset \mathrm{Sp}(u)$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u_{|\mathrm{F}})$, $\mathrm{E}_\lambda(u_{|\mathrm{F}}) = \mathrm{E}_\lambda(u) \cap \mathrm{F}$.

**Exercice 2.2**

Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes diagonalisables d'un même espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que si $u$ et $v$ commutent, alors il existe une base de E dans laquelle les matrices de $u$ et $v$ sont toutes deux diagonales.

**Théorème 2.2 Cayley-Hamilton**

(i) Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**. Alors $\chi_u(u) = 0$.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_A(A) = 0$.

**Exercice 2.3**

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A^{-1} = P(A)$.

**Proposition 2.2 Polynôme annulateur et trigonalisabilité**

(i) Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors $u$ est trigonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de $u$ scindé sur $\mathbb{K}$.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est trigonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de A scindé sur $\mathbb{K}$.

**Exercice 2.4**

Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes diagonalisables d'un même espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que si $u$ et $v$ commutent, alors il existe une base de E dans laquelle les matrices de $u$ et $v$ sont toutes deux triangulaires supérieures.

On peut affiner ce résultat.

**Proposition 2.3**

(i) Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie annulé par un polynôme scindé. Alors il existe des sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_r$ de E stables par $u$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ et tels que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, l'endomorphisme induit par $u$ sur $E_i$ soit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ annulée par un polynôme scindé. Alors A est semblable à une matrice diagonale par blocs où chaque bloc diagonal est la somme d'une matrice scalaire et d'une matrice triangulaire supérieure stricte.

**Remarque.** Plus précisément, si $P = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$ annule $u$, alors en posant $E_i = \operatorname{Ker}(u - \lambda_i)^{m_i}$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, les $E_i$ sont stables par $u$ et $u_{|E_i} = \lambda_i \operatorname{Id}_{E_i} + n_i$ avec $n_i = u_{|E_i} - \lambda_i \operatorname{Id}_{E_i}$ nilpotent.

De même, si $\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{r} (\mathrm{X} - \lambda_i)^{m_i}$ annule A, alors A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_2 \end{matrix}} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_n & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

**Décomposition de Dunford**

Il en résulte qu'il existe des endomorphismes $d$ et $n$ de E tels que

- $u = d + n$ ;
- les restrictions de $d$ aux sous-espaces vectoriels $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_r$ sont des homothéties ;
- $n$ est nilpotent ;
- $d$ et $n$ **commutent**.

On peut alors montrer que ces endomorphismes $d$ et $n$ sont uniques. L'écriture $u = d + n$ s'appelle la **décomposition de Dunford** de l'endomorphisme $u$.
De même, il existe des matrices D et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

- $\mathrm{A} = \mathrm{D} + \mathrm{N}$ ;
- D est diagonalisable ;
- N est nilpotente ;
- D et N **commutent**.

A nouveau, ces matrices D et N sont uniques. L'écriture $\mathrm{A} = \mathrm{D} + \mathrm{N}$ s'appelle la **décomposition de Dunford** de la matrice A.

## 2.2 Idéal annulateur et polynôme minimal

**Définition 2.2 Idéal annulateur d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée**

(i) Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Le noyau du morphisme d'algèbres $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}(u) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est un idéal de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ appelé **idéal annulateur** de $u$.

(ii) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le noyau du morphisme d'algèbres $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{A}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un idéal de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ appelé **idéal annulateur** de A.

**Proposition 2.4 Polynôme minimal**

(i) Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**. L'idéal annulateur de $u$ admet un unique générateur unitaire appelé **polynôme minimal** de $u$, noté $\pi_u$.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'idéal annulateur de A admet un unique générateur unitaire appelé **polynôme minimal** de A, noté $\pi_A$.

**Remarque.** En clair, ceci signifie que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(u) = 0 \iff \pi_u \mid P \qquad \text{et} \qquad P(A) = 0 \iff \pi_A \mid P$$

**Attention !** L'idéal annulateur d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension infinie peut être réduit à $\{0\}$, auquel cas il n'existe pas de polynôme minimal.
Par exemple, l'idéal annulateur de l'endomorphisme $D : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P'$ est nul.

**Exemple 2.2**

Le polynôme minimal d'un projecteur sur un sous-espace vectoriel non trivial est $X(X-1)$.
Le polynôme minimal d'une symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel non trivial est $(X-1)(X+1)$.

**Corollaire 2.3**

(i) Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**. Alors $\pi_u$ divise $\chi_u$.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\pi_A$ divise $\chi_A$.

**Attention !** Une erreur classique consiste à croire qu'il suffit d'«enlever» les puissances du polynôme caractéristique pour obtenir le polynôme minimal.
Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\chi_A = (X-1)^2(X-2)^2$ et on vérifie que $(X-1)(X-2)$ n'annule pas A. On a en fait $\pi_A = (X-1)(X-2)^2$.

**Exemple 2.3**

(i) Si $u$ est un endomorphisme nilpotent d'indice $p$ d'un espace vectoriel de dimension $n$, alors son polynôme minimal est $X^p$. Puisque son polynôme caractéristique est $X^n$ et que $\pi_u$ divise $\chi_u$, on en déduit $p \leq n$.

(ii) Si A est une matrice nilpotente d'indice $p$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors son polynôme minimal est $X^p$. Puisque son polynôme caractéristique est $X^n$ et que $\pi_A$ divise $\chi_A$, on en déduit $p \leq n$.

**Exercice 2.5 Matrice compagnon**

Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Montrer que $\chi_A = \pi_A = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

**Proposition 2.5 Le polynôme minimal est un invariant de similitude**

Deux matrices carrées semblables ont le même polynôme minimal.

**Proposition 2.6 Spectre et polynôme minimal**

(i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{Sp}(A)$ est l'ensemble des racines de $\pi_A$.

(ii) Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de E de **dimension finie**. Alors $\mathrm{Sp}(u)$ est l'ensemble des racines de $\pi_u$.

**Exemple 2.4 Calcul d'un polynôme minimal**

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On trouve $\chi_A = X(X-1)^2$. Ainsi le polynôme minimal de A vaut $X(X-1)$ ou $X(X-1)^2$. On vérifie que $A(A - I_3) = 0$ donc $\pi_A = X(X-1)$.

**Exemple 2.5 Calcul d'un polynôme minimal**

Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $\chi_A = (X-1)^3$. Ainsi $\pi_A$ vaut $X-1$, $(X-1)^2$ ou $(X-1)^3$. Comme $A \neq I_3$, $\pi_A \neq X - 1$. On vérifie que $(A - I_3)^2 = 0$ donc $\pi_A = 0$.

**Proposition 2.7 Polynôme minimal d'un endomorphisme induit**

Soient $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel stable par F. Alors $\pi_{u_{|F}}$ divise $\pi_u$.

**Proposition 2.8 Diagonalisabilité et polynôme minimal**

(i) Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Dans ce cas, $\pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\mathrm{X} - \lambda)$.

(ii) Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Dans ce cas, $\pi_\mathrm{A} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} (\mathrm{X} - \lambda)$.

**Proposition 2.9 Trigonalisabilité et polynôme minimal**

(i) Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

(ii) Une matrice carrée est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

**Proposition 2.10 Dimension de la sous-algèbre engendrée par un endomorphisme ou une matrice carrée**

(i) Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**. Posons $d = \deg \pi_u$. Alors $\dim \mathbb{K}[u] = d$ et $(u^k)_{0 \le k \le d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

(ii) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $d = \deg \pi_\mathrm{A}$. Alors $\dim \mathbb{K}[\mathrm{A}] = d$ et $(\mathrm{A}^k)_{0 \le k \le d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[\mathrm{A}]$.

**Sous-espaces caractéristiques**

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ dont le polynôme minimal est scindé i.e.

$$\pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\mathrm{X} - \lambda)^{\mu_\lambda}$$

On appelle **sous-espace caractéristique** associé à la valeur propre $\lambda$ le sous-espace vectoriel

$$\mathrm{N}_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{E})^{\mu_\lambda}$$

Le lemme des noyaux garantit que

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{N}_\lambda(u)$$

Par ailleurs, le polynôme caractéristique de $u$ est alors de la forme

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\mathrm{X} - \lambda)^{m_\lambda}$$

où $\mu_\lambda \le m_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On peut montrer que

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \mathrm{N}_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{E})^{m_\lambda}$$

Si $u$ est diagonalisable, alors $\mu_\lambda = 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Les sous-espaces caractéristiques sont alors exactement les sous-espaces propres.
Les sous-espaces caractéristiques de $u$ sont stables par $u$. L'endomorphisme $u_\lambda$ de $\mathrm{N}_\lambda(u)$ induit par $u$ est alors de la forme $\lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{N}_\lambda(u)} + n_\lambda$ où $n_\lambda$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathrm{N}_\lambda(u)$ (cf. Proposition 2.3).

# 3 Exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice

**Définition 3.1 Exponentielle d'un endomorphisme**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie** et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u^n}{n!}$ converge absolument. Sa somme est appelée **exponentielle** de $u$ et est notée $e^u$ ou $\exp(u)$.

**Remarque.** L'exponentielle de l'endomorphisme nul de $\mathcal{L}(E)$ est $\mathrm{Id}_E$.

**Définition 3.2 Exponentielle d'une matrice carrée**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ converge absolument. Sa somme est appelée **exponentielle** de A et est notée $e^A$ ou $\exp(A)$.

**Remarque.** L'exponentielle de la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice identité $I_n$.

**Remarque.** Si N est une matrice **nilpotente** d'indice $d$. Alors

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{N^k}{k!}$$

**Exercice 3.1 Exponentielle d'une matrice diagonale**

Montrer que l'exponentielle d'une matrice diagonale D est une matrice diagonale et que les coefficients diagonaux de $\exp(D)$ sont les exponentielles des coefficients diagonaux de D.

**Exercice 3.2 Exponentielle d'une matrice triangulaire**

Montrer que l'exponentielle d'une matrice triangulaire supérieure / inférieure T est une matrice triangulaire supérieure / inférieure et que les coefficients diagonaux de $\exp(T)$ sont les exponentielles des coefficients diagonaux de T.

**Exercice 3.3 Exponentielle et similitude**

Soit $(A, B, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \times GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Montrer que $\exp(B) = P^{-1}\exp(A)P$.

**Exercice 3.4**

Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\exp(M) = P(M)$. On pourra au choix utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange ou montrer que $\mathbb{K}[M]$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Méthode** **Calcul de l'exponentielle d'une matrice diagonalisable**

Pour calculer l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut chercher, **si possible**, à la diagonaliser. En effet, si $A = PDP^{-1}$, alors $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$ et l'exponentielle d'une matrice diagonale est facile à calculer.

**Exemple 3.1 Exponentielle d'une matrice diagonalisable**

On souhaite calculer l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = (X-1)(X-4) + 2 = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$$

Comme $\chi_A$ est scindé à racines simples, $\chi_A$ est diagonalisable. De plus, $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 3\}$ et les sous-espaces propres sont

$$E_2(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \qquad E_3(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. De plus,

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \mathrm{com}(P)^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalement

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^2 - e^3 & e^2 - e^3 \\ 2e^3 - 2e^2 & 2e^3 - e^2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 3.5**

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$. Montrer de deux manières différentes que $\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

**Proposition 3.1 Exponentielle d'une somme**

- Soient $a$ et $b$ deux endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ qui **commutent**. Alors $\exp(a+b) = \exp(a) \circ \exp(b)$.
- Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui **commutent**. Alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

**Remarque.** On en déduit notamment que si A et B commutent, exp(A) et exp(B) commutent également.

**Attention !** L'hypothèse de commutativité est essentielle. Par exemple, si l'on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient aisément $\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ (A est diagonale) et $\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B est nilpotente). En posant $C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on s'aperçoit facilement que $C^n = C$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $\exp(C) = \begin{pmatrix} 1 & e-1 \\ 0 & e \end{pmatrix}$. On vérifie alors facilement que $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$.

**Exemple 3.2**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $A = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque en particulier que N est **nilpotente**. Comme $I_3$ et N commutent, $\exp(A) = \exp(I_3)\exp(N)$. Or $\exp(I_3) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ et $\exp(N) = I_3 + N + \frac{N^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que $\exp(A) = \begin{pmatrix} e & e & e/2 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

**Décomposition de Dunford et exponentielle**

Un théorème hors-programme affirme que pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable, il existe un endomorphisme diagonalisable $d$ et un endomorphisme nilpotent $n$ qui **commutent** tels que $u = d + n$. Cette écriture s'appelle la **décomposition** de Dunford de $u$. On a bien évidemment un énoncé similaire pour les matrices.
Si l'on dispose d'une décomposition de Dunford $u = d + n$, alors $\exp(u) = \exp(d)\exp(n)$ et les exponentielles d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent sont simples à calculer.

**Exemple 3.3 Exponentielle d'une matrice trigonalisable**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 1 \\ -2 & X-1 & 2 \\ -3 & 1 & X+2 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ 0 & X-1 & 2 \\ X-1 & 1 & X+2 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ 0 & X-1 & 2 \\ 0 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1)$$

Comme $\chi_A$ est scindé, A est trigonalisable. De plus, $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$ et les sous-espaces propres sont

$$E_{-1}(A) = \mathrm{vect}(C_1) \quad \text{avec} \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad E_1(A) = \mathrm{vect}(C_2) \quad \text{avec} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notamment, A n'est pas diagonalisable. On cherche alors $C_3$ vérifiant $AC_3 = C_3 + C_2$ et on trouve par exemple $C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $A = PTP^{-1}$ en posant $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que $\exp(A) = P\exp(T)P^{-1}$.

Or, d'une part, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et, d'autre part, $T = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. D et N commutent de sorte que

$$\exp(T) = \exp(D)\exp(N) = \exp(D)(I_3 + N) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

Enfin, on trouve

$$\exp(A) = P\exp(T)P^{-1} = \begin{pmatrix} e - e^{-1} & -e & e^{-1} \\ e - e^{-1} & e & e^{-1} - e \\ e - 2e^{-1} & -e & 2e^{-1} \end{pmatrix}$$

**Corollaire 3.1 Exponentielle et inversibilité**

- Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\exp(a) \in \mathrm{GL}(E)$ et $\exp(a)^{-1} = \exp(-a)$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

**Exercice 3.6**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det(\exp(A)) > 0$.
2. On suppose A **antisymétrique**. Montrer que $\exp(A) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 3.7**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(A) = e^{\operatorname{tr}(A)}$.