Espaces vectoriels normés

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'objectif de ce chapitre est d'étendre les notions topologiques (limite, continuité) vues en première année dans le cadre réel au cadre des espaces vectoriels.

1 Normes

1.1 Définition

Définition 1.1 Norme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle **norme** sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes.

Séparation $\forall x \in E, N(x) = 0 \implies x = 0_E$.

Homogénéité $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

Inégalité triangulaire $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Remarque. L'homogénéité montre que si $x = 0_E$, alors $N(x) = 0$. En effet, $N(0_E) = N(0.0_E) = |0|N(0_E) = 0$.

Remarque. Une norme est souvent notée non comme une application mais à l'aide d'un symbole comme $\| \ \|$.

Remarque. Si N est une norme sur un espace vectoriel E, on a également la seconde inégalité triangulaire

$$\forall (x, y) \in E^2, \ N(x - y) \geq |N(x) - N(y)|$$

Exemple 1.1

- La valeur absolue est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.
- Le module est une norme sur $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Définition 1.2 Vecteur unitaire

On appelle vecteur unitaire tout vecteur de norme 1.

Remarque. Si $x \neq 0_E$, alors $\dfrac{x}{N(x)}$ est unitaire.

Définition 1.3 Espace vectoriel normé

On appelle espace vectoriel normé tout couple (E, N) où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N une norme sur E.

Proposition 1.1 Norme associée à un produit scalaire

Soit $(\mathrm{E}, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien réel. L'application $\|\cdot\|$ définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ est une norme sur E appelée norme associée au produit scalaire $\langle ., . \rangle$.

Norme d'algèbre

On appelle **norme d'algèbre** d'une $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathrm{E}, +, ., \times)$ toute norme N sur l'espace vectoriel E vérifiant de plus

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \mathrm{N}(x \times y) \leq \mathrm{N}(x)\mathrm{N}(y)$$

1.2 Normes usuelles

Définition 1.4 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Remarque. La norme $\|\cdot\|_2$ n'est autre que la norme associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{K}^n$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
En notant X la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à $x \in \mathbb{K}^n$, alors $\|x\|_2^2 = \mathrm{X}^\top\mathrm{X}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\|x\|_2^2 = \overline{\mathrm{X}^\top}\mathrm{X}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Normes matricielles

Si on identifie $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^{np}$, on étend naturellement les définitions précédentes à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Autrement dit pour $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$\|\mathrm{M}\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} |\mathrm{M}_{ij}| \qquad \|\mathrm{M}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} |\mathrm{M}_{ij}|^2} \qquad \|\mathrm{M}\|_\infty = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |\mathrm{M}_{ij}|$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut encore remarquer que $\|\cdot\|_2$ est la norme associée au produit scalaire $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2 \mapsto \operatorname{tr}(\mathrm{A}^\top\mathrm{B})$.
De plus, $\|\mathrm{M}\|_2^2 = \operatorname{tr}(\mathrm{M}^\top\mathrm{M})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\|\mathrm{M}\|_2^2 = \operatorname{tr}(\overline{\mathrm{A}^\top}\mathrm{A})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposition 1.2 Espace vectoriel des applications bornées

Soit X un ensemble. L'ensemble $\mathcal{B}(\mathrm{X}, \mathbb{K})$ des applications **bornées** de X dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^\mathrm{X}$.

Rappel **Borne supérieure**

La borne supérieure d'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ est son plus petit majorant noté $\sup \mathcal{A}$. La propriété de la borne supérieure garantit que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
Si f est une application d'un ensemble X à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note $\sup_\mathrm{X} f = \sup_{x \in \mathrm{X}} f(x) = \sup\{f(x),\ x \in \mathrm{X}\}$.

Lemme 1.1

Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Alors $k\mathcal{A} = \{ka,\ \ a \in \mathcal{A}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $\sup k\mathcal{A} = k \sup \mathcal{A}$.

Définition 1.5 Norme de la convergence uniforme

Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathcal{B}(\mathrm{X}, \mathbb{K})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{\mathrm{X}} |f|$. Alors $\|\cdot\|_\infty$ est un norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathrm{X}, \mathbb{K})$ des applications bornées de X dans $\mathbb{K}$.

Remarque. En particulier, si $\mathrm{X} = \mathbb{N}$, on définit une suite sur le sous-espace vectoriel des suites bornées de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Plus précisément,

$$\forall u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

Par ailleurs, une suite presque nulle est nécessairement bornée donc, en identifiant un polynôme à la suite presque nulle de ses coefficients, on peut étendre cette norme à $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Plus précisément, pour $\mathrm{P} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n$

$$\|\mathrm{P}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

Définition 1.6 Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique

Pour $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\ \mathrm{d}t}$$

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$.

Remarque. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire $(f,g) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^2 \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$.

Remarque. On peut également parler de la norme uniforme de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$. En effet, toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Dans ce cas,

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K}),\ \|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f| = \max_{[a,b]} |f|$$

Exercice 1.1 Quelques normes matricielles

Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on pose

$$\mathrm{N}_1(\mathrm{A}) = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{p} |\mathrm{A}_{i,j}| \qquad \mathrm{N}_2(\mathrm{A}) = \max_{1\leq j\leq p} \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}| \qquad \mathrm{N}_3(\mathrm{A}) = \sqrt{\max \mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top \mathrm{A})}$$

1. Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $n = p$, ce sont des normes d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1.3 Distance associée à une norme

Définition 1.7 Distance associé à une norme

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On appelle **distance** associée à N l'application $d : E^2 \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, \; d(x, y) = \|x - y\|$$

Proposition 1.3 Propriétés de la distance

Soit (E, N) un espace vectoriel normé et d la distance associée à N.

Séparation $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \implies x = y$.

Symétrie $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$.

Inégalité triangulaire $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Invariance par translation $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

Remarque. On a encore une fois la seconde inégalité triangulaire

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \; d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|$$

Définition 1.8 Distance à une partie

Soient (E, N) un espace vectoriel normé, $x \in E$ et A une partie non vide de A. On appelle **distance** de x à A le réel positif

$$d(x, A) = \inf \left\{ d(x, y), y \in A \right\}$$

Attention ! La borne inférieure n'est pas forcément atteinte.

Exemple 1.2

Si on considère l'espace vectoriel normé $(E, |\cdot|)$,

$$d(0,]1, 2]) = d(0, [1, 2]) = 1$$

1.4 Boules et sphères

Définition 1.9 Boule et sphère

Soient (E, N) un espace vectoriel normé, $a \in \mathrm{E}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

Boule ouverte On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\mathrm{B}(a,r) = \{x \in \mathrm{E},\ d(a,x) < r\} = \{x \in \mathrm{E},\ \|x-a\| < r\}$$

Boule fermée On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\mathrm{B}_f(a,r) = \{x \in \mathrm{E},\ d(a,x) \leq r\} = \{x \in \mathrm{E},\ \|x-a\| \leq r\}$$

Sphère On appelle **sphère** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\mathrm{S}(a,r) = \{x \in \mathrm{E},\ d(a,x) = r\} = \{x \in \mathrm{E},\ \|x-a\| = r\}$$

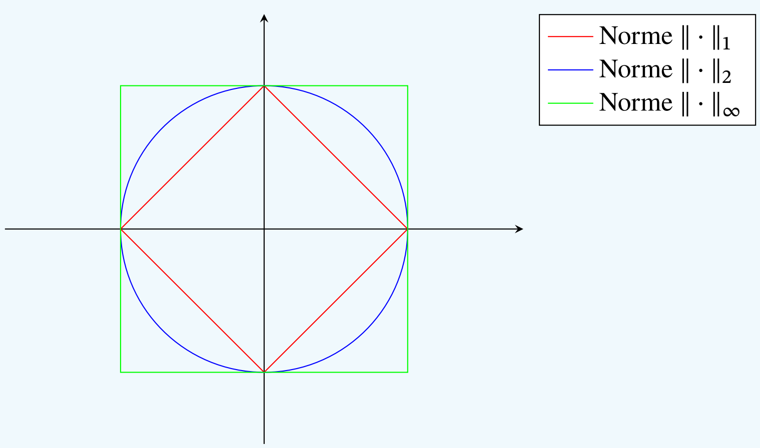
Exemple 1.3

Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $\mathrm{B}(a,r) =]a-r, a+r[$, $\mathrm{B}_f(a,r) = [a-r, a+r]$ et $\mathrm{S}(a,r) = \{a-r, a+r\}$.

Remarque. $\mathrm{B}_f(a,r)$ est l'union disjointe de $\mathrm{B}(a,r)$ et $\mathrm{S}(a,r)$.

Remarque. La boule (ouverte ou fermée) de centre 0_E et de rayon 1 est appelée **boule unité** (ouverte ou fermée). La sphère de centre 0_E et de rayon 1 est appelée **sphère unité**.

Exemple 1.4 Sphères unité de $\mathbb{R}^2$ pour les normes « classiques »



Exemple 1.5

Dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, $\mathrm{B}(a,r)$ est le disque ouvert de centre a et de rayon r, $\mathrm{B}_f(a,r)$ est le disque fermé de centre a et de rayon r et $\mathrm{S}(a,r)$ est le cercle de centre a et de rayon r.

Proposition 1.4 Convexité des boules

Les **boules** d'un espace vectoriel normé sont des parties **convexes**.

1.5 Normes équivalentes

Définition 1.10 Normes équivalentes

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que N_2 est **équivalente** à N_1 si

$$\exists(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ \forall x\in E,\ \alpha N_1(x)\le N_2(x)\le\beta N_1(x)$$

Proposition 1.5

La relation «être équivalente à» est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. On pourra alors dire sans ambiguïté que deux normes sont équivalentes plutôt que de dire que l'une est équivalente à l'autre.

Propriétés inchangées par passage à une norme équivalente

L'équivalence des normes est une notion essentielle. On verra en effet que bon nombre de propriétés de parties d'un espace vectoriel, de suites ou de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé restent inchangées si on change une norme en une norme équivalente, notamment :

- le caractère borné ;
- la limite, la convergence ou la divergence des suites ;
- les ouverts, les fermés, les voisinages, les intérieurs, les adhérences, la densité ;
- la limite et la continuité des fonctions ;
- la compacité ;
- la connexité par arcs.

Méthode Montrer que deux normes ne sont pas équivalentes

Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ne sont pas équivalentes, il suffit de trouver une suite (u_n) d'éléments de E vérifiant l'une des deux conditions :

- l'une des deux suites $(N_1(u_n))$ et $(N_2(u_n))$ est bornée tandis que l'autre ne l'est pas ;
- l'une des deux suites $(N_1(u_n))$ et $(N_2(u_n))$ converge vers 0 tandis que l'autre ne converge pas vers 0.

Exemple 1.6

Posons pour $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$

$$\|\mathrm{P}\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \qquad \|\mathrm{P}\|_\infty = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{X}^k$. On vérifie sans peine que $\|\mathrm{P}_n\|_1 = n+1$ et $\|\mathrm{P}_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite de terme général $\|\mathrm{P}_n\|_\infty$ est bornée (et même constante) tandis que la suite de terme général $\|\mathrm{P}_n\|_1$ ne l'est pas (elle diverge vers $+\infty$). Ceci permet de conclure que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
On aurait pu aboutir au même résultat en considérant $\mathrm{Q}_n = \frac{1}{n+1}\mathrm{P}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, la suite de terme général $\|\mathrm{Q}_n\|_\infty$ converge vers 0 à la différence de la suite de terme général $\|\mathrm{Q}_n\|_1$ qui est constante égale à 1.

Théorème 1.1 Équivalence des normes en dimension finie

Toutes les normes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie** sont **équivalentes**.

Remarque. Ce théorème est faux si $\mathbb{K}$ n'est pas un corps «complet» (notion hors-programme) – par exemple, si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

1.6 Parties, suites et fonctions bornées

Le caractère borné d'une partie d'un espace vectoriel normé, d'une suite ou d'une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé est invariant si l'on change la norme en une norme équivalente.

Définition 1.11 Partie bornée

Soient (E, N) un espace vectoriel normé et A une partie de E. On dit que A est **bornée** s'il existe $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathrm{N}(x) \leq \mathrm{R}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

Remarque. Autrement dit, une partie est bornée si elle est incluse dans une boule (centrée en 0_E).

Exemple 1.7

Les boules et les sphères sont des parties bornées.

Exemple 1.8

$\mathrm{O}(n)$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{O}(n)$, $\|\mathrm{M}\|_2^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}) = \mathrm{tr}(\mathrm{I}_n) = n$.

Définition 1.12 Suite bornée

Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $(u_n) \in \mathrm{E}^\mathbb{N}$. On dit que la suite (u_n) est **bornée** s'il existe $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathrm{N}(u_n) \leq \mathrm{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
L'ensemble des suites bornées est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{E}^\mathbb{N}$.

Définition 1.13 Application bornée

Soient X un ensemble, (E, N) un espace vectoriel normé et $f \in \mathrm{E}^{\mathrm{X}}$. On dit que f est **bornée** s'il existe $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathrm{N}(f(x)) \leq \mathrm{R}$ pour tout $x \in \mathrm{X}$.
L'ensemble des applications bornées est un sous-espace vectoriel de E^{X}.

Attention ! Le caractère borné peut dépendre de la norme considérée.

Exemple 1.9

On munit $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ des normes N_1 et N_2 définies par

$$\mathrm{N}_1 : \mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n \mapsto \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$
$$\mathrm{N}_2 : \mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

La suite de terme général $\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{X}^k$ est borné pour la norme N_1 puisque $\mathrm{N}_1(\mathrm{P}_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais elle ne l'est pas pour la norme N_2 puisque $\mathrm{N}_2(\mathrm{P}_n) = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.7 Produit d'espaces vectoriels normés

Proposition 1.6 Produit d'espaces vectoriels normés

Soit $(\mathrm{E}_k, \mathrm{N}_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille finie d'espace vectoriels normés et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Alors on définit une norme N sur $\prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}_k$ en posant

$$\forall x \in \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}_k,\ \mathrm{N}(x) = \left\|(\mathrm{N}_1(x_1), \dots, \mathrm{N}_n(x_n))\right\|$$

Si on change la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$, la norme N est transformée en une norme équivalente.

2 Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

Toutes les propriétés des suites vues dans cette section (limite, convergence, divergence, valeurs d'adhérence) restent inchangées si on remplace la norme de l'espace vectoriel normé considéré par une norme équivalente.

2.1 Convergence et divergence

Définition 2.1 Limite

Soient (E, N) un espace vectoriel normé, $(u_n) \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathrm{E}$. On dit que (u_n) admet ℓ pour **limite** si $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{N}(u_n - \ell) = 0$.

Remarque. Si (u_n) est une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé, cela n'a pas de sens de dire que (u_n) admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ (hormis si cet espace vectoriel est $\mathbb{R}$). Par contre, dire que la suite $(\mathrm{N}(u_n))$ admet $+\infty$ pour limite a un sens puisqu'il s'agit d'une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Proposition 2.1 Unicité de la limite

Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $(u_n) \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) admet une limite, alors celle-ci est unique.

Attention ! Comme en première année, il faut toujours justifier l'**existence** de la limite avant de parler de celle-ci.

Définition 2.2 Convergence et divergence

Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $(u_n) \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$.

(i) On dit que (u_n) **converge** si (u_n) admet une limite.

(ii) Dans le cas contraire, on dit que (u_n) **diverge**.

Proposition 2.2 Convergence et caractère borné

Toute suite **convergente** à valeurs dans un espace vectoriel normée est **bornée**.

Attention ! La réciproque est fausse. Par exemple, la suite de terme général $(-1)^n$ est bornée mais n'est pas convergente.

Attention ! La convergence d'une suite peut dépendre de la norme considérée.

Exemple 2.1

On munit $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ des normes N_1 et N_2 définies par

$$\mathrm{N}_1 : \mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n \mapsto \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$
$$\mathrm{N}_2 : \mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

La suite de terme général $\mathrm{P}_n = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{X}^k$ converge vers 0 la norme N_1 puisque $\mathrm{N}_1(\mathrm{P}_n) = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais elle ne converge pas pour la norme N_2. En effet, supposons que (P_n) converge vers un polynôme P. Puisque $\mathrm{N}_1 \leq \mathrm{N}_2$, (P_n) convergerait vers P pour la norme N_1 et donc $\mathrm{P} = 0$ par unicité de la limite. Mais (P_n) ne peut pas converger vers 0 pour la norme N_2 puisque $\mathrm{N}_2(\mathrm{P}_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Opérations algébriques

Proposition 2.3

Soient (λ_n) une suite convergente de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et (u_n) une suite convergente d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Alors la suite $(\lambda_n u_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n u_n = \left(\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n\right)\left(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n\right)$.

Proposition 2.4

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes d'un espace vectoriel normé. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \mu \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Attention ! Comme les suites considérées sont à valeurs dans un espace vectoriel et non un corps, cela n'a a priori pas de sens de parler de produit ou de quotient de telles suites.

2.3 Valeurs d'adhérence

Définition 2.3 Suite extraite

Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $(u_n) \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** de (u_n) toute suite du type $(u_{\varphi(n)})$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Proposition 2.5 Convergence et suite extraite

Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $(u_n) \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathrm{E}$, alors toute suite extraite de (u_n) converge également vers ℓ.

Attention ! Il ne suffit pas qu'une suite extraire admette une limite pour garantir l'existence d'une limite pour la suite initiale.

Proposition 2.6

Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $(u_n) \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite $\ell \in \mathrm{E}$, alors (u_n) converge vers ℓ.

Définition 2.4 Valeur d'adhérence

Soient (E, N) un espace vectoriel normé, $(u_n) \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathrm{E}$. On dit que (u_n) admet ℓ pour valeur d'adhérence s'il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers ℓ.

Remarque. Dans le cadre des suites réelles, une valeur d'adhérence est forcément un réel. Cela n'est pas correct stricto sensu de dire que $+\infty$ ou $-\infty$ sont des valeurs d'adhérence bien qu'on puisse donner un sens à de telles affirmations.

Attention ! Si une suite converge, son unique valeur d'adhérence est sa limite mais la réciproque est fausse : une suite admettant une unique valeur d'adhérence ne converge pas nécessairement.

Exemple 2.2

La suite de terme général $n \sin \dfrac{n\pi}{2}$ admet 0 pour unique valeur d'adhérence mais ne converge pas (elle n'est même pas bornée).

Méthode **Prouver qu'une suite diverge**

Pour montrer qu'une suite diverge, il suffit d'exhiber deux valeurs d'adhérence.

Exemple 2.3

La suite de terme général $(-1)^n$ admet 1 et -1 pour valeurs d'adhérences donc elle diverge.

Exercice 2.1

Soit (u_n) une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Montrer que $\ell \in \mathrm{E}$ est une valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, la boule $\mathrm{B}(\ell, \varepsilon)$ contient une infinité de termes de la suite (u_n).

3 Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé

3.1 Définitions

Définition 3.1 Série

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. On appelle **série de terme général** u_n la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geq n_0}$ où

$$\forall n \geq n_0,\ \mathrm{S}_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

Cette série est noté $\sum_{n\geq n_0} u_n$ ou plus simplement $\sum u_n$ s'il n'y a pas ambiguïté sur le premier terme.
Pour $n \geq n_0$, S_n est appelée **somme partielle de rang** n de cette série.

Remarque. Une série est donc un cas particulier de suite.

Exemple 3.1

On appelle série télescopique toute série dont le terme général est de la forme $u_n = v_n - v_{n-1}$. La somme partielle de rang n de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est $v_n - v_0$.

3.2 Nature et somme d'une série

Définition 3.2 Convergence et divergence

On dit qu'une série à valeurs dans un espace vectoriel normé converge (resp. diverge) si la suite de ses sommes partielles converge (resp. diverge).

Remarque. En dimension infinie, la convergence/divergence peut dépendre de la norme, ce qui n'est pas le cas en dimension finie puisque toutes les normes sont alors équivalentes.

Remarque. La convergence d'une série ne dépend pas du premier rang i.e. les séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_1} u_n$ sont de même nature.

Définition 3.3 Somme d'une série

Si la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge, la limite de la suite des sommes partielles est appelée **somme** de la série et est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Remarque. On a donc $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

Attention ! La notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ n'a de sens que si la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge. Il faut donc prouver la convergence de la série **avant** d'employer cette notation.

Proposition 3.1 Lien suite/série

La série $\sum (u_n - u_{n-1})$ et la suite (u_n) sont de même nature (i.e. elles convergent toutes les deux ou elles divergent toutes les deux).

De plus, si (u_n) converge vers une limite l, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - u_{n-1} = l - u_{n_0-1}$.

3.3 Divergence grossière

Proposition 3.2

Soit $\sum u_n$ une série convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé. Alors la suite (u_n) converge vers 0.

Attention ! La réciproque est absolument fausse. Par exemple, la suite de terme général $\frac{1}{n}$ converge vers 0 tandis que la série harmonique diverge.

Définition 3.4 Divergence grossière

Une série $\sum u_n$ est dite **grossièrement divergente** lorsque la suite (u_n) ne converge pas vers 0.

Exemple 3.2

Si $|q| \geq 1$, la série $\sum q^n$ diverge grossièrement.

La série $\sum \frac{1}{n}$ ne diverge pas grossièrement.

3.4 Reste d'une série convergente

Définition 3.5 Reste d'une série convergente

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé. Pour tout $n \geq n_0$, la série $\sum_{k \geq n+1} u_k$ est convergente et on appelle sa somme le **reste de rang** n de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$. Autrement dit, le reste de rang n de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Proposition 3.3

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé. Alors pour tout $n \geq n_0$

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Remarque. Si on note S_n la somme partielle de rang n, R_n le reste de rang n et S la somme de la série, on a donc $S_n + R_n = S$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 3.3

Lorsque $|q| < 1$, le reste de rang n de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$ est $\frac{q^{n+1}}{1-q}$.

Corollaire 3.1

La suite des restes d'une série convergente converge vers 0.

3.5 Opérations sur les séries

La proposition suivante n'est qu'une conséquence de la linéarité de la limite.

Proposition 3.4 Linéarité de la somme

Soient $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ deux séries convergentes à valeurs dans un espace vectoriel normé et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors la série $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et

$$\sum_{n \geq n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n \geq n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n \geq n_0}^{+\infty} v_n$$

Remarque. En termes plus savants, les séries numériques convergentes forment un espace vectoriel et l'application qui à une série convergente associe sa somme est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Attention ! La réciproque est fausse en général. Par exemple, si $\sum (u_n + v_n)$ converge, on ne peut rien dire de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ (prendre par exemple, $u_n = -v_n = 2^n$).

On évitera à tout prix d'écrire des égalités du type $\sum_{n=n_0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=n_0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=n_0}^{+\infty}v_n$ **avant** d'avoir prouvé la convergence des séries $\sum_{n\geq n_0}u_n$ et $\sum_{n\geq n_0}v_n$.

3.6 Absolue convergence

Définition 3.6 Absolue convergence

Une série $\sum u_n$ à valeurs dans un espace vectoriel normé est dite **absolument convergente** si $\sum \|u_n\|$ converge.

Remarque. A nouveau, en dimension inifine, l'absolue convergence peut dépendre de la norme.

Exemple 3.4

On munit $\mathbb{R}[X]$ des normes $N : P \mapsto \max_{t\in[0,1]}|P(t)|$ et $N' : P \mapsto \int_0^1 |P(t)|\,dt$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{X^n}{n}$ converge absolument pour N' mais pas pour N. En effet, $N(X^n/n)=\frac{1}{n}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ diverge tandis que $N'(X^n/n)=\frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n(n+1)}$ converge.

Théorème 3.1

Une série absolument convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé de **dimension finie** est convergente. Dans ce cas, $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\|u_n\|$.

Attention ! La réciproque est fausse. La série $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge tandis que la série $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n}$ diverge.

Exemple 3.5

Si $\|.\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ vérifie $\|A\|<1$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}A^n$ est absolument convergente, $I_p - A$ est inversible et $\sum_{n=0}^{+\infty}A^n=(I_p-A)^{-1}$.

Exemple 3.6

Si $\|.\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}(E)$ et si $u\in\mathcal{L}(E)$ vérifie $\|u\|<1$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}u^n$ est absolument convergente, $\mathrm{Id}_E - u$ est inversible et $\sum_{n=0}^{+\infty}u^n=(\mathrm{Id}_E-u)^{-1}$.

Attention ! Le fait que l'espace vectoriel normé considéré soit de **dimension finie** est important. Si ce n'est pas le cas, une série peut converger absolument sans être convergente.

Exemple 3.7

Munissons $\mathbb{R}[X]$ de la norme

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{R}[X] \mapsto \|P\| = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

Puisque $\left\|\frac{X^n}{(n+1)^2}\right\| = \frac{1}{(n+1)^2}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{X^n}{(n+1)^2}$ converge absolument. Supposons qu'elle converge vers un polynôme $P = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p X^p$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|P - \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{(k+1)^2}\right\| = 0$$

Fixons $p \in \mathbb{N}$. Par définition de la norme $\|\cdot\|$, pour tout $n \geq p$

$$\left|a_p - \frac{1}{(p+1)^2}\right| \leq \left\|P - \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{(k+1)^2}\right\|$$

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $a_p = \frac{1}{(p+1)^2}$. Par conséquent, la suite (a_p) n'est pas presque nulle, ce qui est impossible car P est un polynôme.