Devoir à la maison n°02

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles.*
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1.

Soit n un entier naturel impair. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $G = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$.

1. Soit $r \in \mathbb{Z}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk}$ selon les valeurs de r.

2. Montrer que l'application $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ k & \longmapsto & \omega^{k^2} \end{array} \right.$ est n-périodique.

3. Soit $j \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+j)^2} = G$.

4. Montrer que $G\overline{G} = n$ et en déduire $|G|$.

Exercice 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i}$.

1. Calculer S_0, S_1 et S_2.

2. Calculer les sommes $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} 2^k$.

3. En intervertissant l'ordre de sommation, calculer S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.

Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel non nul. On pose

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (2k) \qquad \text{et} \qquad Q_n = \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$$

1. Exprimer P_n en fonction de n.

2. Que vaut P_nQ_n ?

3. En déduire Q_n.