Convexité

1 Parties convexes d'un espace vectoriel réel

Dans cette section, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel réel.

Définition 1.1 Barycentre

Soient $(A_1, \dots, A_n) \in E^n$ et $(\lambda_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$. On appelle **barycentre** de $\{(A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n)\}$ le point $\frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$.

Remarque. Un barycentre n'est donc rien d'autre qu'une moyenne pondérée.

Remarque. On peut toujours se ramener au cas où $\Lambda = 1$. En effet, le barycentre de $\{(A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n)\}$ est aussi le barycentre de $\{(A_1, \lambda_1/\Lambda), \dots, (A_n, \lambda_n \Lambda)\}$.

Définition 1.2 Segment

Soit $(A, B) \in E^2$. On appelle **segment** $[A, B]$ l'ensemble $\{(1-\lambda)A + \lambda B,\ \lambda \in [0, 1]\}$.

Proposition 1.1 Segment et barycentres

Soit $(A, B) \in E^2$. Le segment $[a, b]$ est l'ensemble des barycentre à coefficients **positifs** de A et B.

Définition 1.3 Partie convexe

On dit qu'une partie $\mathcal{C}$ de E est **convexe** si pour tout $(A, B) \in \mathcal{C}^2$, $[A, B] \subset \mathcal{C}$.

Exemple 1.1

Un segment d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est une partie convexe de cet espace vectoriel.

Exemple 1.2

Un sous-espace vectoriel ou un sous-espace affine d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est une partie convexe de cet espace vectoriel.

Exemple 1.3

Toute boule (fermée ou ouverte) est une partie convexe d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 1.1

Montrer que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Proposition 1.2 Associativité du barycentre

Soient $(\mathrm{A}_i, \lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathrm{E}\times\mathbb{R})^n$. On note

- G le barycentre de $\{(\mathrm{A}_1, \lambda_1), \dots, (\mathrm{A}_n, \lambda_n)\}$;
- G_1 le barycentre de $\{(\mathrm{A}_1, \lambda_1), \dots, (\mathrm{A}_p, \lambda_p)\}$;
- G_2 le barycentre de $\{(\mathrm{A}_{p+1}, \lambda_{p+1}), \dots, (\mathrm{A}_n, \lambda_n)\}$;

Alors G est le barycentre de $\left\{\left(\mathrm{G}_1, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k\right), \left(\mathrm{G}_2, \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k\right)\right\}$.

Proposition 1.3 Convexité et barycentres

Une partie $\mathcal{C}$ de E est convexe si et seulement si tout barycentre à coefficients **positifs** de points de $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{C}$.

2 Fonctions convexes

Dans cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 2.1 Convexité

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une application.

- On dit que f est **convexe** sur I si :

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2,\ \forall t \in [0,1],\ f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a)+tf(b)$$

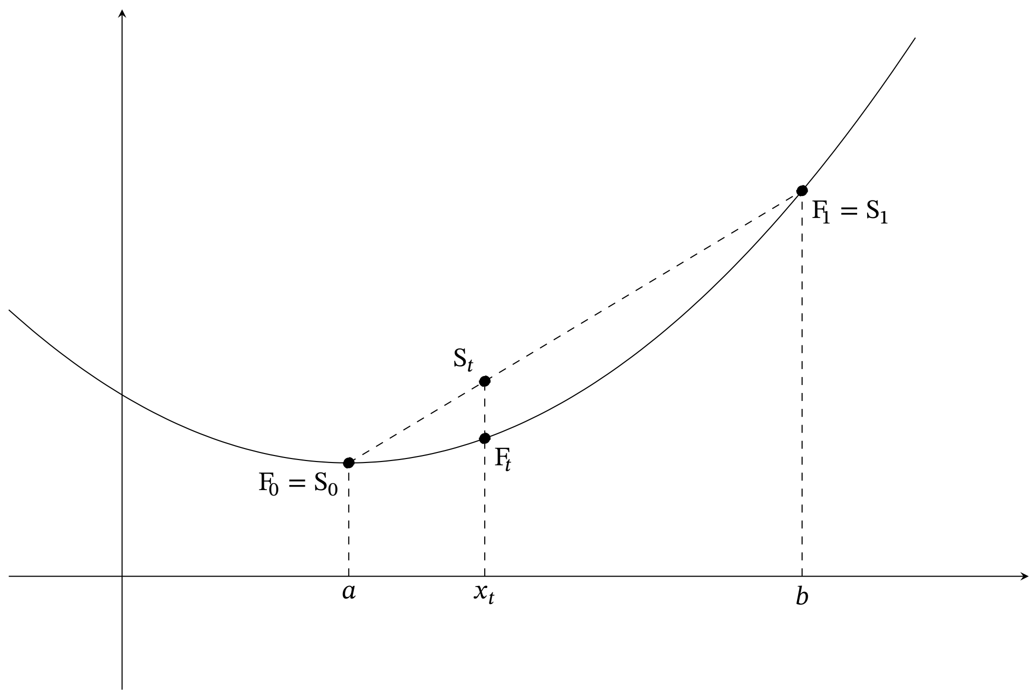
- On dit que f est **concave** sur I si :

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2,\ \forall t \in [0,1],\ f((1-t)a+tb) \geq (1-t)f(a)+tf(b)$$

Remarque. Pour tout $t \in [0,1]$, le réel $(1-t)a+tb$ est compris entre a et b et appartient donc à I puisque I est un intervalle.

Remarque. Une application $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est concave sur I si et seulement si $-f$ est convexe sur I.

Interprétation graphique de la convexité



Soit $(a, b) \in I^2$. Pour $t \in [0, 1]$, posons $x_t = (1 - t)a + tb$ et notons

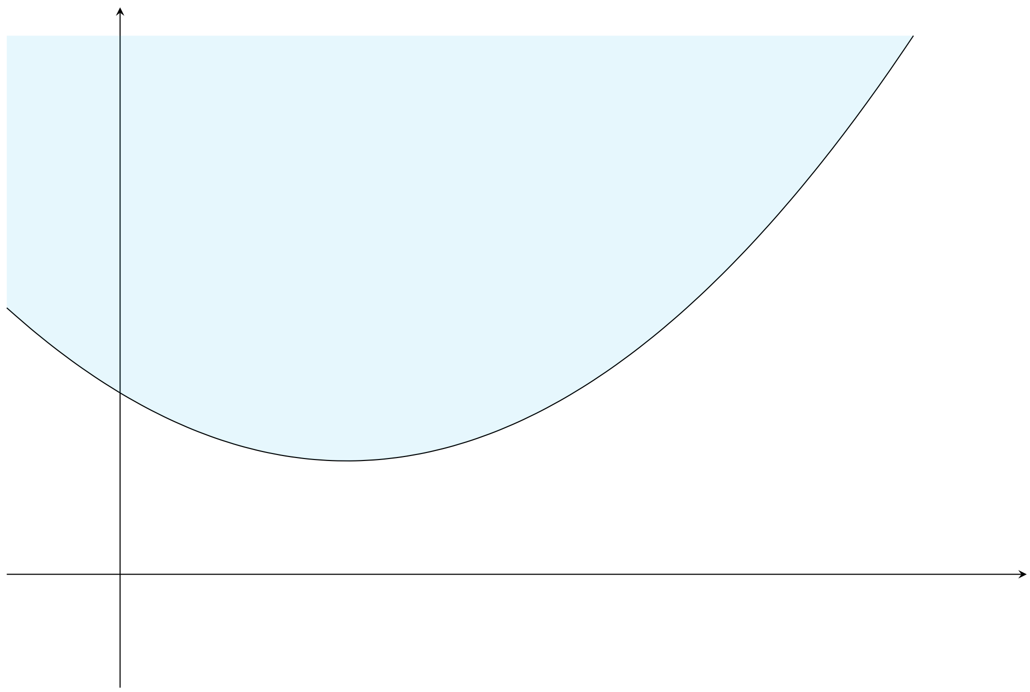
- F_t le point du graphe de f d'abscisse x_t ;
- S_t le point du segment $[F_0F_1]$ d'abscisse x_t.

Lorsque t décrit $[0, 1]$, S_t décrit le segment $[F_0F_1]$ et F_t décrit l'arc du graphe compris entre F_0 et F_1. La condition de convexité dit simplement que F_t est toujours situé **au-dessous** de S_t. Géométriquement, tout arc du graphe de f est situé **au-dessous** de la corde correspondante.
De manière similaire, dire que f est concave signifie tout arc du graphe de f est situé **au-dessus** de la corde correspondante.

Définition 2.2 Épigraphe

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On appelle **épigraphe** de f l'ensemble $\{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$.

Interprétation graphique de l'épigraphe



L'épigraphe d'une fonction f est la portion de $\mathbb{R}^2$ située au-dessus du graphe de f.

Proposition 2.1 Épigraphe et convexité

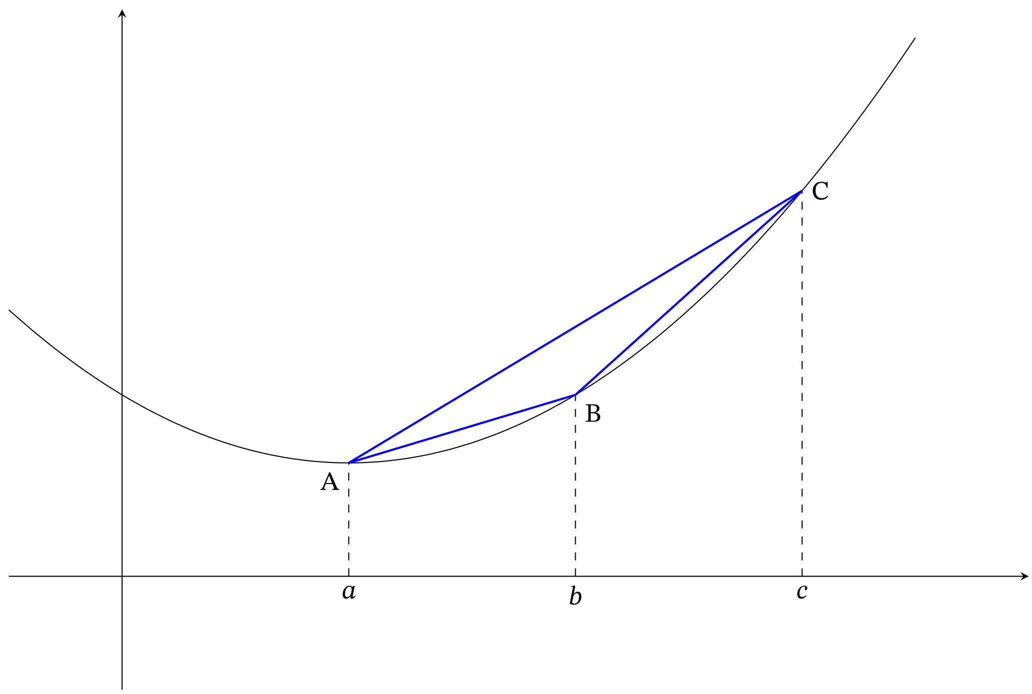
Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Alors f est convexe si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2.2 Inégalité des trois pentes

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Alors f est convexe si et seulement si pour tout $(a, b, c) \in \mathrm{I}^3$ tel que $a < b < c$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

Interprétation graphique de l'inégalité des trois pentes



L'inégalité des trois cordes s'interprète de la manière suivante

$$\text{pente de la corde AB} \leq \text{pente de la corde AC} \leq \text{pente de la corde BC}$$

Régularité d'une fonction convexe

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. L'inégalité des trois cordes montre que le taux de variation en un point $a \in \mathrm{I}$ est croissant sur I. Le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que le taux de variation en a admet une limite finie à gauche et à droite si $a \in \mathring{\mathrm{I}}$. Ainsi f est dérivable à gauche et à droite sur $\mathring{\mathrm{I}}$ et donc a fortiori continue sur $\mathring{\mathrm{I}}$. Néanmoins, f n'est pas nécessairement continue sur I si I est fermé : il peut y avoir discontinuité au extrémités de I.

3 Lien avec la dérivabilité

Proposition 3.1

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I.

(i) f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.

(ii) f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Corollaire 3.1

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable sur I.

(i) f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I.

(ii) f est concave sur I si et seulement si $f'' \leq 0$ sur I.

Exemple 3.1

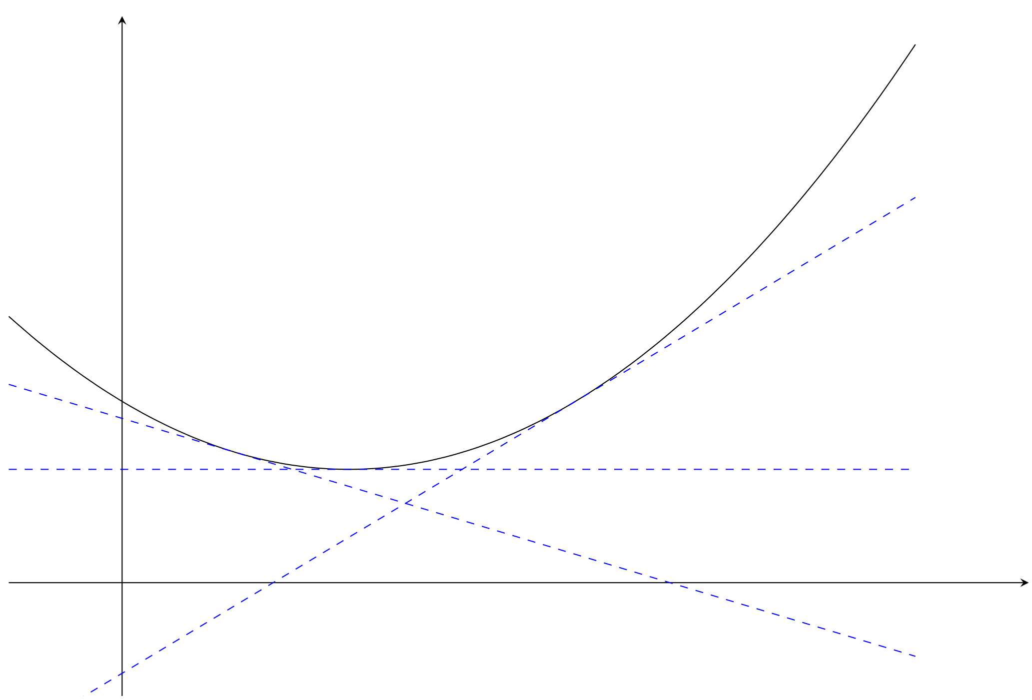
- ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
- exp est convexe sur $\mathbb{R}$.
- sin est concave sur $[0, \pi]$.
- cos est concave sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- tan est convexe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- arcsin est convexe sur $[0, 1]$.
- arccos est concave sur $[0, 1]$.
- arctan est concave sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition 3.2 Position par rapport aux tangentes

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I.

1. Si f est convexe sur I, alors pour tout $(a, x) \in \mathrm{I}^2$, $f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a)$.
2. Si f est concave sur I, alors pour tout $(a, x) \in \mathrm{I}^2$, $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$.

Interprétation graphique



Le graphe de f est situé au-dessus de ses tangentes.

Exemple 3.2

- $\forall x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1+x$.
- $\forall x \in [-\pi,\pi]$, $|\sin x| \leq |x|$.
- $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $|\tan x| \geq |x|$.
- $\forall x \in [-1,1]$, $|\arcsin x| \geq |x|$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\arctan x| \leq |x|$.

4 Convexité généralisée et applications

A nouveau, désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 4.1 Convexité généralisée

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $(x_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathrm{I}^n$ et $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$.

(i) Si f est convexe, alors

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

(ii) Si f est concave, alors

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

Remarque. La définition de la convexité correspond au cas $n = 2$.

Remarque. Pour tout $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, le réel $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ est compris entre $\min_{1\leq k\leq n} x_k$ et $\max_{1\leq k\leq n} x_k$ et appartient donc à I puisque I est un intervalle.

Remarque. Ceci signifie que l'image d'un barycentre de réels par une fonction convexe est au-dessous du barycentre des images.

Inégalités de moyennes

Soit $(x_k)_{1\le k\le n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

- $\mathrm{H}_n = \dfrac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$ s'appelle la **moyenne harmonique** des réels $x_1, \dots, x_n$.
- $\mathrm{G}_n = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$ s'appelle la **moyenne géométrique** des réels $x_1, \dots, x_n$.
- $\mathrm{A}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ s'appelle la **moyenne arithmétique** des réels $x_1, \dots, x_n$.

En utilisant la concavité du logarithme, on prouve :

$$\mathrm{H}_n \le \mathrm{G}_n \le \mathrm{A}_n$$