Devoir à la maison n°01

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Partie I – Définition d'une application

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[X]$. Notons Q_1 et Q_2 les quotients respectifs des divisions euclidiennes de $P_1(X^2)$ et $P_2(X^2)$ par T et R_1 et R_2 les restes. On a donc

$$P_1(X^2) = TQ_1 + R_1 \text{ avec } \deg R_1 < \deg T \qquad P_2(X^2) = TQ_2 + R_2 \text{ avec } \deg R_2 < \deg T$$

On en déduit que

$$(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(X^2) = T(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) + (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2)$$

et $\deg(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) \leq \max(\deg R_1, \deg R_2) < \deg T$. Ainsi $\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$ et $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(X^2)$ par T. Par conséquent,

$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = (\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) + X(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) = \lambda_1(Q_1 + XR_1) + \lambda_2(Q_2 + XR_2) = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$$

ce qui prouve que f est bien linéaire.

2. f_n est linéaire puisque f l'est. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Il faut donc montrer que $f_n(P) = f(P) \in \mathbb{C}_n[X]$. Notons à nouveau Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(X^2)$ par T.
D'une part, $\deg R \leq \deg T - 1 = n - 1$ donc $\deg XR \leq n$.
D'autre part $\deg P(X^2) = 2\deg P \leq 2n$ donc

$$\deg Q = \deg QT - \deg T = \deg(P(X^2) - R) - n \leq \max(\deg P(X^2), \deg R) - n \leq 2n - n = n$$

Par conséquent, $\deg f(P) = \deg(Q + XR) \leq \max(\deg Q, \deg XR) \leq n$. Ceci prouve que $f_n(P) = f(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.
f_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

3. **a.** On reprend à nouveau les mêmes notations.

- Si $P = 1$, alors $Q = 0$ et $R = 1$. Ainsi $f_2(1) = X$.
- Si $P = X$, alors $Q = 1$ et $R = 0$. Ainsi $f_2(X) = 1$.
- Si $P = X^2$, alors $Q = X^2$ et $R = 0$. Ainsi $f_2(X^2) = X^2$.

La matrice de f_2 dans la base $(1, X, X^2)$ est donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. $A^2 = I_3$ donc $f_2^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_2[X]}$. f_2 est bijective et $f_2^{-1} = f_2$. f_2 est une symétrie.

On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(f_2 - \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_2[X]}) = \mathrm{vect}(1 + X, X^2)$.

De même, $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Ker}(A + I_3) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(f_2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_2[X]}) = \mathrm{vect}(X - 1)$.
f_2 est donc la symétrie par rapport à $\mathrm{vect}(1 + X, X^2)$ parallèlement à $\mathrm{vect}(X - 1)$.

Partie II – Etude d'un cas particulier

1. On emploie encore une fois les mêmes notations.

- Si $\mathrm{P}=1$, alors $\mathrm{Q}=0$ et $\mathrm{R}=1$. On a donc $f_3(1)=\mathrm{X}$.
- Si $\mathrm{P}=\mathrm{X}$, alors $\mathrm{Q}=0$ et $\mathrm{R}=\mathrm{X}^2$. On a donc $f_3(\mathrm{X})=\mathrm{X}^3$.
- Si $\mathrm{P}=\mathrm{X}^2$, alors $\mathrm{Q}=\mathrm{X}-1$ et $\mathrm{R}=\mathrm{X}^2-a\mathrm{X}+a$. On a donc $f_3(\mathrm{X}^2)=\mathrm{X}^3-a\mathrm{X}^2+(1+a)\mathrm{X}-1$.
- Si $\mathrm{P}=\mathrm{X}^3$, alors $\mathrm{Q}=\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2+\mathrm{X}-a-1$ et $\mathrm{R}=(1+2a)\mathrm{X}^2-a\mathrm{X}+a+a^2$. On a donc $f_3(\mathrm{X}^3)=(2a+2)\mathrm{X}^3+(-a-1)\mathrm{X}^2+(1+a+a^2)\mathrm{X}-a-1$.

La matrice de f_3 dans la base $(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2,\mathrm{X}^3)$ est donc bien la matrice B.

2. On développe deux fois par rapport à la première colonne :

$$\det(f_3)=\det(\mathrm{B})=\begin{vmatrix}0&0&-1&-a-1\\1&0&a+1&1+a+a^2\\0&0&-a&-a-1\\0&1&1&2a+2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&-1&-a-1\\0&-a&-a-1\\1&1&2a+2\end{vmatrix}=(a+1)\begin{vmatrix}-1&1\\-a&1\end{vmatrix}=(a+1)(a-1)$$

3. f_3 n'est pas bijective si et seulement si $\det(f_3)=0$ i.e. si et seulement si $a=\pm1$.

4. **a.** Dans ce cas, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$. Les trois premières colonnes sont linéairement indépendantes (famille échelonnée) et la dernière colonne est identique à la première. On en déduit que $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de Im B et que $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur de Ker B. En utilisant le théorème du rang, $\dim\operatorname{Ker}\mathrm{B}=1$ et $\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de Ker B.

On en déduit que $(\mathrm{X},\mathrm{X}^3,\mathrm{X}^3+\mathrm{X}^2-1)$ ou encore $(\mathrm{X},\mathrm{X}^3,\mathrm{X}^2-1)$ est une base de $\operatorname{Im} f_3$ et que (X^3-1) est une base de $\operatorname{Ker} f_3$.

b. La matrice de la famille $\mathcal{F}=(\mathrm{X},\mathrm{X}^3,\mathrm{X}^2-1,\mathrm{X}^3-1)$ (réunion des bases de $\operatorname{Im} f_3$ et $\operatorname{Ker} f_3$) dans la base canonique est $\begin{pmatrix}0&0&-1&-1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$. En développant deux fois par rapport à la première colonne, on trouve que le déterminant de cette matrice est -1, donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{C}_3[\mathrm{X}]$. Ceci prouve que $\mathbb{C}_3[\mathrm{X}]=\operatorname{Im} f_3\oplus\operatorname{Ker} f_3$.

Partie III – Etude du noyau

1. $\deg \mathrm{P}(\mathrm{X}^2)=2\deg\mathrm{P}=2p<n$. En employant toujours les mêmes notations, $\mathrm{Q}=0$ et $\mathrm{R}=\mathrm{P}(\mathrm{X}^2)$. Ainsi $f(\mathrm{P})=\mathrm{Q}+\mathrm{XR}=\mathrm{XP}(\mathrm{X}^2)$. Comme P est non nul, $f(\mathrm{P})$ est également non nul.

2. Supposons $\mathrm{P}\in\operatorname{Ker} f$. On a donc $\mathrm{Q}=-\mathrm{XR}$. Or $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2)=\mathrm{QT}+\mathrm{R}$ donc $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2)=(1-\mathrm{XT})\mathrm{R}$ et $\deg\mathrm{R}<\deg\mathrm{T}=n$ puisque R est le reste de la division euclidienne de $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2)$ par T.
Réciproquement, supposons qu'il existe $\mathrm{R}\in\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $\deg\mathrm{R}<n$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2)=(1-\mathrm{XT})\mathrm{R}$ i.e. $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2)=-\mathrm{XTR}+\mathrm{R}$. On en déduit que $-\mathrm{XR}$ et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2)$ par R. Alors $f(\mathrm{P})=-\mathrm{XR}+\mathrm{XR}=0$.

3. Soit $P \in \operatorname{Ker} f$. Il existe donc $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg R < n$ et $P(X^2) = (1-XT)R$. Ainsi $\deg P(X^2) = \deg(1-XT) + \deg R$. Or $\deg(1-XT) = \deg XT = n+1$ donc $\deg P(X^2) < 2n+1$ i.e. $\deg P(X^2) \leq 2n$. Ainsi $2\deg P \leq 2n$ donc $\deg P \leq n$.

4. Soit $P \in \operatorname{Ker} f$. D'après la question **2**, il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2) = (1-XT)R$ et $\deg R < n$. Posons $Q = X^k P$. Alors $Q(X^2) = X^{2k}P(X^2) = (1-XT)X^{2k}R$. Or $\deg X^{2k}R = 2k + \deg R$ et $\deg R = \deg P(X^2) - \deg(1-XT) = \deg P(X^2) - (n+1)$ donc $\deg X^{2k}R = 2k + \deg P(X^2) - (n+1) \leq 2n - (n+1) = n-1$. En utilisant maintenant l'autre sens de l'équivalence démontrée à la question **2**, on en déduit que $Q \in \operatorname{Ker} f$.

5. **a.** Comme $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, il existe un polynôme de degré entier naturel dans $\operatorname{Ker} f$. Ainsi I est non vide. Comme c'est une partie de $\mathbb{N}$, I admet un minimum.

b. Notons a_0 et a_1 les coefficients dominants respectifs de P_0 et P_1 (ceux-ci existent puisque P_0 et P_1 sont de degré $d \in \mathbb{N}$ donc non nuls). Alors $P_1 - \frac{a_1}{a_0}P_0$ appartient à $\operatorname{Ker} f$ et est de degré strictement inférieur à d. Par minimalité de d, on en déduit que $P_1 - \frac{a_1}{a_0}P_0 = 0$. En posant $c = \frac{a_1}{a_0}$, on a donc bien $P_1 = cP_0$.

c. Soit k un entiel naturel tel que $k \leq n-d$. Alors $\deg P_0 + k \leq n$ et, d'après la question **4**, $X^k P_0 \in \operatorname{Ker} f$. Comme $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel, on en déduit que pour tout $S \in \mathbb{C}_{n-d}[X]$, $SP_0 \in \operatorname{Ker} f$.
Réciproquement, soit $P \in \operatorname{Ker} f$.D'après **3**, $\deg P \leq n$. Soit S et U le quotient et le reste de la division euclidienne de P par P_0. On a en particulier $\deg U < d \leq n$ ($P_0 \in \operatorname{Ker} f$ donc $d = \deg P_0 \leq n$ d'après **3**). Comme $SP_0 = P - U$, $\deg S = \deg(P-U) - \deg P_0 \leq \max(\deg P, \deg U) - d \leq n-d$. D'après ce qui précède, $SP_0 \in \operatorname{Ker} f$. Ainsi $U = P - SP_0 \in \operatorname{Ker} f$. Or $\deg U < d$ donc, par minimalité de d, $U = 0$ et $P = SP_0$.

6. D'après **3**, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f_3$. Or on a vu à la question **4.a** que, dans ce cas, $\operatorname{Ker} f_3 = \operatorname{vect}(X^3 - 1)$.

Partie IV – Etude d'un produit scalaire

1. Il suffit de reprendre les questions **1** et **2** en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.
La matrice A est celle de la question **3.a** (on la considère tout simplement comme une matrice à coefficients réels et non complexes).

2. La symétrie est évidente.
La bilinéarité provient de la bilinéarité du produit de polynômes, de la linéarité de la dérivation et de la linéarité de l'évaluation en 1.
Pour tout $U \in \mathbb{R}_2[X]$, $\langle U, U\rangle = U(1)^2 + U'(1)^2 + U''(1)^2$ donc la forme bilinéaire est positive.
Soit $U \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\langle U, U\rangle = 0$. On a donc $U(1)^2 + U'(1)^2 + U''(1)^2 = 0$. Une somme de termes positifs étant nulle si et seulement si chacun des termes est nul, on en déduit $U(1) = U'(1) = U''(1) = 0$. Ainsi 1 est racine de U d'ordre au moins 3. Comme $\deg U \leq 2$, U est nécessairement nul.
$\langle ., .\rangle$ est donc une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive : c'est un produit scalaire.

3. On vérifie que $A^{\mathsf{T}}A = I_3$ donc A est orthogonale.

4. **a.** On a $\langle 1, X\rangle = 1 \neq 0$ donc la base canonique $(1, X, X^2)$ n'est pas orthogonale donc encore moins orthonormale.

b. Attention, la matrice de g dans la base canonique est orthogonale mais la base canonique n'est pas orthonormale : on n'en déduit surtout pas que g est une isométrie. En fait $\langle 1, 1\rangle = 1$ et $\langle g(1), g(1)\rangle = \langle X, X\rangle = 2$. g ne conserve donc pas le produit scalaire ; ce n'est pas une isométrie.