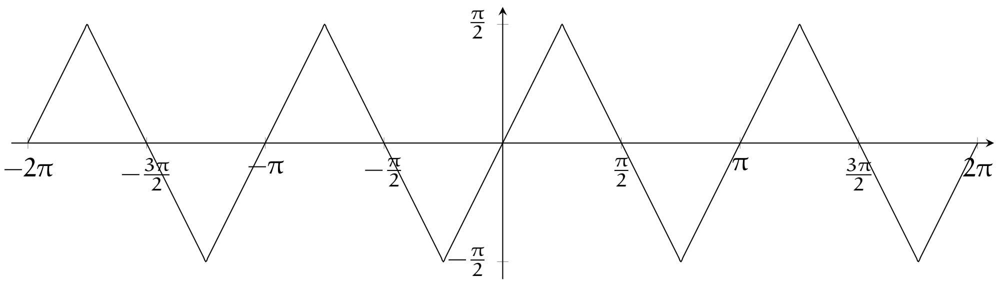
Devoir à la maison n°4 : corrigé

Problème 1 — Etude d'une fonction périodique

1. **a.** Comme sin et arcsin sont impaires, φ l'est également.
Puisque sin est 2π-périodique, φ est π-périodique.

b. Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $2t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $f(t) = \arcsin(\sin(2t)) = 2t$.
Pour $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\pi - 2t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $f(t) = \arcsin(\sin(2t)) = \arcsin(\sin(\pi - 2t)) = \pi - 2t$.

c. On peut tracer la courbe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ grâce à la question précédente. On obtient ensuite la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par symétrie par rapport à l'origine puisque φ est impaire. On complète ensuite par π-périodicité.



2. **a.** On a les équivalences suivantes :

$$|2x| \leqslant 1 + x^2 \iff |2x| \leqslant 1 + |x|^2 \iff |x|^2 - 2|x| + 1 \geqslant 0 \iff (|x| - 1)^2 \geqslant 0$$

La dernière inégalité étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, la première l'est également.

b. Comme $1 + x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité de la question précédente peut s'écrire, $-1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$. Or arcsin est définie sur $[-1, 1]$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

c. f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à l'origine et, en utilisant le fait que arcsin est impaire, on voit facilement que f l'est également.

3. **a.** Soit $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On a classiquement $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$ donc $\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t} = 2 \sin t \cos t = \sin(2t)$. Ainsi $f(\tan t) = \arcsin(\sin(2t)) = \varphi(t)$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$ et donc $f(x) = f(\tan(\arctan x)) = \varphi(\arctan x)$. Autrement dit, $f = \varphi \circ \arctan$.

c. La fonction arctan est croissante sur $]-\infty, -1]$ à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$. Or φ est décroissante sur cet intervalle donc f est décroissante sur $]-\infty, -1]$.
La fonction arctan est croissante sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Or φ est croissante sur cet intervalle donc f est croissante sur $[-1, 1]$.
La fonction arctan est croissante sur $[1, +\infty[$ à valeurs dans $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$. Or φ est décroissante sur cet intervalle donc f est décroissante sur $[1, +\infty[$.

d. On a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$ puis, par composition, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \arcsin 0 = 0$.
De plus, $f(1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ et $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$ par imparité.
On obtient donc le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

4. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1, 1]$. De plus, en reprenant les équivalences de la question **.2.a**,

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| = 1 \iff (|x|-1)^2 = 0 \iff x = \pm 1$$

On en déduit que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{2x}{1+x^2} \in]-1, 1[$. Par ailleurs, $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$. Par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Remarque. On aurait aussi pu utiliser le fait que $f = \varphi \circ \arctan$. ■

Pour $x \in]-1, 1[$, $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$. Or pour $t \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, $\varphi(t) = \arcsin(\sin(2t)) = 2t$ donc pour $x \in]-1, 1[$, $f(x) = 2 \arctan x$. Ainsi pour $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

Pour $x \in]1, +\infty[$, $\arctan x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$. Or pour $t \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\varphi(t) = \arcsin(\sin(2t)) = \pi - 2t$ donc pour $x \in]1, +\infty[$, $f(x) = \pi - 2\arctan x$. Ainsi pour $x \in]1, +\infty[$, $f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}$.

Comme f est impaire, f' est paire et donc pour $x \in]-\infty, -1[$, $f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}$.

b. On a $f'(0) = 2$ et $f(0) = 0$. Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donc $y = 2x$.
On a $f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}$ et $f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$. Une équation de la tangente au point d'abscisse $\sqrt{3}$ est donc

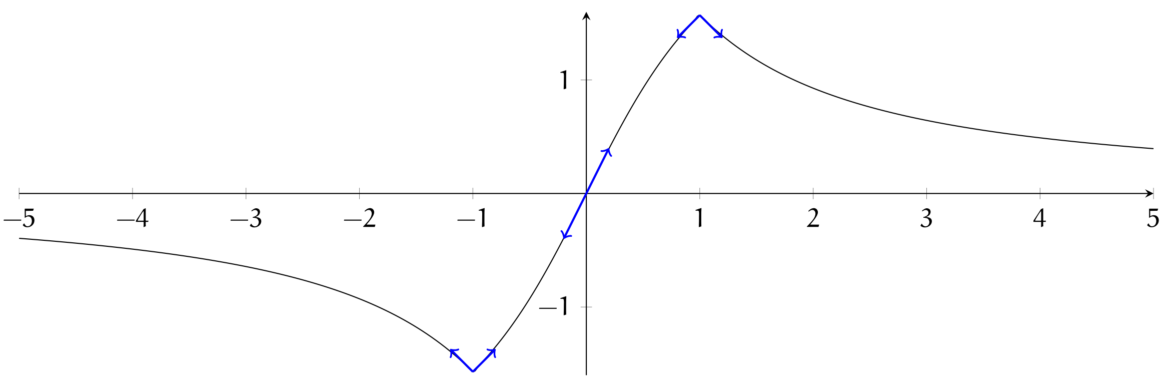
$$y = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{3}) + \frac{\pi}{3}$$

On a $f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{2}$ et $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$. Une équation de la tangente au point d'abscisse $\sqrt{3}$ est donc

$$y = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{3}$$

c. On a $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{2}{1+x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} -\frac{2}{1+x^2} = -1$.

d.



5. **a.** Les variations de f montrent que $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \leqslant 0$. L'équation $f(x) = h$ n'admet donc pas de solution sur $\mathbb{R}_-$.
De plus, f est continue et strictement croissante sur $]0, 1[$ donc induit une bijection de $]0, 1[$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. L'équation $f(x) = h$ admet donc une unique solution sur $]0, 1[$. Par ailleurs, f est continue et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ donc induit une bijection de $]1, +\infty[$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. L'équation $f(x) = h$ admet donc une unique solution sur $]1, +\infty[$.
Comme $f(1) = \frac{\pi}{2} \neq h$, on peut donc conclure que l'équation $f(x) = h$ admet exactement deux solutions (l'une appartenant à $]0, 1[$ et l'autre appartenant à $]1, +\infty[$). Ceci signifie que la droite d'équation $y = h$ coupe la courbe représentative de f en exactement deux points.

b. Puisque $h \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$f(x) = h \iff \frac{2x}{1+x^2} = \sin h$$

Cette dernière équation équivaut encore à

$$x^2 \sin h - 2x + \sin h = 0$$

Le discriminant réduit de cette équation du second degré est $1 - \sin^2 h = \cos^2 h$. Les solutions sont donc

$$\frac{1 - \cos h}{\sin h} \quad \text{et} \quad \frac{1 + \cos h}{\sin h}$$

Puisque $h \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{1-\cos h}{\sin h} < \frac{1+\cos h}{\sin h}$. On en déduit que

$$x_1 = \frac{1-\cos h}{\sin h} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+\cos h}{\sin h}$$

Remarque. On pouvait également raisonner de la manière suivante. Tout d'abord,

$$f(x_1) = \varphi(\arctan x_1) \qquad \text{et} \qquad f(x_2) = \varphi(\arctan x_2)$$

d'après la question **.3.b**. Or d'après la question **.5.a**, $x_1 \in]0,1[$ et $x_2 \in]1,+\infty[$ donc $\arctan x_1 \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et $\arctan x_2 \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$. Mais en utilisant la question **.1.b**, on a alors

$$h = f(x_1) = 2\arctan x_1 \qquad \text{et} \qquad h = f(x_2) = \pi - 2\arctan x_2$$

On en déduit que

$$x_1 = \tan\frac{h}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{h}{2}\right) = \cot\frac{h}{2}$$

■

c. Le milieu I de $[M_1M_2]$ a pour abscisse $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1}{\sin h}$ et pour ordonnée h. La courbe décrite par I lorsque h décrit $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a donc pour équation $x = \frac{1}{\sin y}$ ou encore $y = \arcsin\frac{1}{x}$ car $y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a

$$0 < y < \frac{\pi}{2} \iff 0 < \sin y < 1 \iff \frac{1}{\sin y} > 1$$

Ainsi la courbe décrite par I est la courbe représentative de $g : x \mapsto \arcsin\frac{1}{x}$ sur $]1,+\infty[$. Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ à valeurs dans $]0,1[$ et que la fonction arcsin est strictement croissante sur $]0,1[$, g est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$. Enfin $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. On en déduit la courbe suivante.