Devoir à la maison n°12 : corrigé

Problème 1 — Fonctions 1-périodiques

Partie I – Un espace vectoriel

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e_k(x+1) = e^{2ik\pi(x+1)} = e^{2ik\pi x}e^{2ik\pi} = e^{2ik\pi x} = e_k(x)$$

Ainsi e_k est 1-périodique i.e. $e_k \in E$.

2. La fonction nulle sur $\mathbb{R}$ est 1-périodique donc appartient à E.
Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(f, g) \in E^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(\lambda f + \mu g)(x+1) = \lambda f(x+1) + \mu g(x+1) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$$

Ainsi $\lambda f + \mu g$ est 1-périodique donc appartient à E.
Ceci prouve que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.

3. Supposons $k \neq l$. Alors

$$\int_0^1 e_k(x)e_{-l}(x)\,dx = \int_0^1 e^{2i(k-l)\pi x}\,dx = \frac{1}{2i(k-l)\pi}\left[e^{2i(k-l)\pi x}\right]_0^1 = 0$$

Supposons maintenant $k = l$. Alors

$$\int_0^1 e_k(x)e_{l-}(x)\,dx = \int_0^1 dx = 1$$

4. Soit $(\lambda_k)_{-n \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{C}^{2n+1}$ tel que

$$\sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e_k = 0$$

Fixons $l \in [\![-n, n]\!]$. Alors

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e_k(x)\right) e_{-l}(x)\,dx = 0$$

Par linéarité de l'intégrale

$$\sum_{k=-n}^{n} \lambda_k \int_0^1 e_k(x)e_{-l}(x)\,dx = 0$$

Mais d'après la question précédente, $\int_0^1 e_k(x)e_{-l}(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Il en résulte que $\lambda_l = 0$. Ceci étant vrai quelque soit le choix de $l \in [\![-n, n]\!]$, la famille $(e_k)_{-n \leqslant k \leqslant n}$ est libre.

5. Puisque la famille $(e_k)_{-n \leqslant k \leqslant n}$ est libre et engendre E_n (par définition de E_n), c'est une base de E_n. Comme elle comporte $2n+1$ vecteurs, $\dim E_n = 2n+1$.

Partie II – Un endomorphisme

1. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(f, g) \in \left(\mathbb{C}^{\mathbb{R}}\right)^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
T(\lambda f + \mu g)(x) &= \frac{1}{2}\left((\lambda f + \mu g)\left(\frac{x}{2}\right) + (\lambda f + \mu g)\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\lambda f\left(\frac{x}{2}\right) + \mu g\left(\frac{x}{2}\right) + \lambda f\left(\frac{x+1}{2}\right) + \mu g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) \\
&= \frac{\lambda}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + \frac{\mu}{2}\left(g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) \\
&= \lambda T(f)(x) + \mu T(g)(x) = (\lambda T(f) + \mu T(g))(x)
\end{aligned}$$

Ainsi $T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$.
De plus, pour $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, $T(f) \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ donc T est bien un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.

2. Soit $f \in E$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
T(f)(x+1) &= \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x+1}{2}\right) + f\left(\frac{x+2}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x+1}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}+1\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x+1}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\
&= T(f)(x)
\end{aligned}$$

Ainsi $T(f)$ est 1-périodique i.e. $T(f) \in E$.
Ceci prouve que E est stable par T.

3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
T(e_k)(x) &= \frac{1}{2}\left(e_k\left(\frac{x}{2}\right) + e_k\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{ik\pi x} + e^{ik\pi(x+1)}\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{ik\pi x}\left(1 + e^{ik\pi}\right) \\
&= \begin{cases} e^{ik\pi x} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi $T(e_k) = e_{\frac{k}{2}}$ si k est pair et $T(e_k) = 0$ si k est impair.
De manière équivalente, on peut dire que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $T(e_{2k}) = e_k$ et $T(e_{2k+1}) = 0$.

4. Soit $k \in [\![-n, n]\!]$.

- Si k est pair, $T(e_k) = e_{\frac{k}{2}}$ et $\frac{k}{2} \in [\![-n, n]\!]$. Ainsi $T(e_k) \in E_n$.
- Si k est impair, $T(e_k) = 0 \in E_n$.

Comme $(e_k)_{-n \leqslant k \leqslant n}$ engendre E_n, $T(E_n) \subset E_n$ par linéarité de T. E_n est donc stable par T.

5. Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} T_n$ est engendré par la famille $(T(e_k))_{-n \leqslant k \leqslant n}$. Puisque $T(e_k) = 0$ pour k impair, $\operatorname{Im} T_n$ est engendré par la famille $(T(e_{2k}))_{-n \leqslant 2k \leqslant n}$, c'est-à-dire par la famille $(e_k)_{-n \leqslant 2k \leqslant n}$. Cette dernière famille est une sous-famille de la famille $(e_k)_{-n \leqslant k \leqslant n}$, qui est une base de E_n et a fortiori une famille libre. La famille $(e_k)_{-n \leqslant 2k \leqslant n}$ est donc également libre : c'est donc une base de $\operatorname{Im} T_n$. La dimension de $\operatorname{Im} T_n$ est le nombre d'entiers pairs compris entre $-n$ et n. Si n est pair, $\dim \operatorname{Im} T_n = n + 1$ et si n est impair, $\dim \operatorname{Im} T_n = n$.
Le théorème du rang affirme que $\dim E_n = \dim \operatorname{Im} T_n + \dim \operatorname{Ker} T_n$. Puisque $\dim E_n = 2n + 1$, $\dim \operatorname{Ker} T_n = n$ si n est pair et $\dim \operatorname{Ker} T_n = n + 1$ si n est impair.

Partie III – Deux projecteurs

1. Il suffit de remarquer que $(e_k)_{k \in [\![-n, n]\!]}$ est une base de E_n.

2. Soit $k \in [\![-n, n]\!]$.
Si k est pair, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 2p$. Alors $P_n(e_k) = S_n \circ T_n(e_k) = S_n(e_p) = e_{2p} = e_k$. A fortiori, $P_n \circ P_n(e_k) = P_n(e_k) = e_k$. Si k est impair, $P_n(e_k) = S_n \circ T_n(e_k) = S_n(0) = 0$. A fortiori, $P_n \circ P_n(e_k) = P_n(e_k) = 0$.
Comme $(e_k)_{-n \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E_n, $P_n \circ P_n = P_n$ et donc P_n est un projecteur.
Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} P_n$ est engendré par la famille $(P_n(e_k))_{-n \leqslant k \leqslant n}$ et donc par la famille $(e_{2p})_{-n \leqslant 2p \leqslant n}$ d'après ce qui précède. Ainsi $\operatorname{Im} P_n = \operatorname{vect}((e_{2p})_{-n \leqslant 2p \leqslant n})$.
Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker} P_n$ contient la famille $(e_{2p+1})_{-n \leqslant 2p+1 \leqslant n}$ d'après ce qui précède. Cette famille est libre en tant que sous-famille d'une base. Le théorème du rang permet alors d'affirmer que la dimension de $\operatorname{Ker} P_n$ est égal au nombre d'éléments de la famille $(e_{2p+1})_{-n \leqslant 2p+1 \leqslant n}$. Cette famille est donc une base de $\operatorname{Ker} P_n$ donc $\operatorname{Ker} P_n = \operatorname{vect}((e_{2p+1})_{-n \leqslant 2p+1 \leqslant n})$.

3. Soit $k \in [\![-n, n]\!]$.
Si $|2k| \leqslant n$, $Q_n(e_k) = T_n \circ S_n(e_k) = T_n(e_{2k}) = e_k$. A fortiori, $Q_n \circ Q_n(e_k) = e_k$. Si $|2k| > n$, $Q_n(e_k) = T_n \circ S_n(e_k) = T_n(0) = 0$. A fortiori, $Q_n \circ Q_n(e_k) = Q_n(e_k) = 0$.
Comme $(e_k)_{-n \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E_n, $Q_n \circ Q_n = Q_n$ et donc Q_n est un projecteur.
Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} Q_n$ est engendré par la famille $(Q_n(e_k))_{-n \leqslant k \leqslant n}$ et donc par la famille $(e_k)_{|2k| \leqslant n}$ d'après ce qui précéde. Ainsi $\operatorname{Im} Q_n = \operatorname{vect}\left((e_k)_{|2k[\leqslant n}\right)$.
Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker} Q_n$ contient la famille $(e_k)_{|2k|>n}$ d'après ce qui précède. Cette famille est libre en tant que sous-famille d'une base. Le théorème du rang permet alors d'affirmer que la dimension de $\operatorname{Ker} Q_n$ est égal au nombre d'éléments de la famille $(e_k)_{|2k|>n}$. Cette famille est donc une base de $\operatorname{Ker} Q_n$ donc $\operatorname{Ker} Q_n = \operatorname{vect}\left((e_k)_{|2k|>n}\right)$.