Devoir surveillé n°12

NOM : Prénom : Note :

A lire attentivement avant de répondre aux questions

- Certaines questions, de numéros consécutifs, sont liées et regroupées dans des parties distinctes.
- Pour chaque question, il peut y avoir 0, 1 ou 2 bonnes réponses.
- Répondre directement sur le sujet : entourer les réponses justes A, B, C, D et barrer les réponses fausses $\cancel{\text{A}}$, $\cancel{\text{B}}$, $\cancel{\text{C}}$, $\cancel{\text{D}}$.
- Lorsqu'une question admet deux réponses justes, 1 point par réponse juste entourée. Lorsqu'une question admet une seule réponse juste, 4 points si seule la réponse juste est entourée, 2 points si la réponse juste est entourée mais qu'une autre réponse est également entourée, 0 point sinon. Lorsqu'une question n'admet aucune réponse juste, 4 points si toutes les réponses sont barrées, 0 point sinon. Les questions où toutes les réponses ne sont pas soit entourées soit barrées ainsi que les réponses ou plus de deux réponses sont entourées ne seront pas corrigées.
- Les calculatrices sont **interdites**.
- Ne pas d'oublier d'indiquer son nom sur le sujet.
- Conseil d'ami : faites marcher votre esprit de déduction et votre bon sens. En particulier, vérifiez la cohérence entre vos réponses aux différentes questions.

Exemple

On considère le polynôme $P = X^2 - 1$.

$\cancel{\text{A}}$ 0 est racine de P.	$\cancel{\text{A}}$ 0 est racine de P.	$\cancel{\text{A}}$ 0 est racine de P.
B 1 est racine de P.	$\cancel{\text{B}}$ 1 est racine de P.	B 1 est racine de P.
C -1 est racine de P.	C -1 est racine de P.	C -1 est racine de P.
$\cancel{\text{D}}$ P n'admet pas de racine réelle.	$\cancel{\text{D}}$ P n'admet pas de racine réelle.	D P n'admet pas de racine réelle.
Question corrigée (4 points)	Question corrigée (2 points)	Question non corrigée (0 point)
$\cancel{\text{A}}$ $P(0) = 1$.	$\cancel{\text{A}}$ $P' = 1$.	$\cancel{\text{A}}$ $P(0) = 1$
$\cancel{\text{B}}$ $P'(0) = 1$.	B $P'(0) = 1$.	$\cancel{\text{B}}$ $P'' = 1$.
C $P' = 2X$.	C $P' = 2X$.	$\cancel{\text{C}}$ $P(1) = -1$.
$\cancel{\text{D}}$ $P(X^2) = (X^2-1)^2$.	$\cancel{\text{D}}$ $P(X^2) = (X^2-1)^2$.	$\cancel{\text{D}}$ $P''(1) = 1$.
Question corrigée (4 points)	Question corrigée (2 points)	Question corrigée (4 points)

Primitives, intégrales, équations différentielles

Q1. La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle Q définie par $Q(x) = \frac{1}{x(x-1)^2}$ est

~~A.~~ $Q(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$

~~B.~~ $Q(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$

C. $Q(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

~~D.~~ $Q(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

Q2. Une primitive F sur $]0,1[$ de la fonction Q est définie par

A. $F(x) = \ln(x) - \ln(1-x) - \frac{1}{x-1}$

~~B.~~ $F(x) = \ln(x) - \ln(x-1) + \frac{1}{x-1}$

~~C.~~ $F(x) = -\frac{1}{x} - \ln(x) + \ln(1-x)$

~~D.~~ $F(x) = -\frac{1}{x} - \ln(1-x) + \frac{1}{x-1}$

Q3. On pose $I = \int_2^3 Q(x)\,dx$.

~~A.~~ $I = \ln\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}$

B. $I = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}$

~~C.~~ $I = \frac{1}{6} - \ln(3)$

~~D.~~ I n'est pas définie

Q4. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur l'intervalle $]-\infty,-1[$ de l'équation différentielle

$$x(x-1)^2y' + y = 0$$

A. La fonction $x \mapsto \frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x-1}}$ appartient à $\mathcal{S}$.

B. $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.

~~C.~~ La fonction $x \mapsto \frac{x}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ appartient à $\mathcal{S}$.

~~D.~~ La fonction $x \mapsto \frac{x}{x-1}e^{x-1}$ appartient à $\mathcal{S}$.

Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{e^x - x - 1}{x}$$

Q5. **A.** f est continue sur $\mathbb{R}$

B. f est dérivable sur $\mathbb{R}$

~~**C.**~~ f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$

~~**D.**~~ f n'est pas dérivable en 0

Q6. ~~**A.**~~ La courbe représentative de f admet une asymptote verticale en 0.

~~**B.**~~ La courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = -1$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

C. La courbe représentative de f est située au-dessus de la droite d'équation $y = -1$.

~~**D.**~~ La courbe représentative de f admet une tangente horizontale en l'origine.

Q7. **A.** La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

~~**B.**~~ La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

~~**C.**~~ La fonction f admet un maximum en 0.

D. La fonction f admet -1 comme borne inférieure sur $\mathbb{R}$.

Fonctions usuelles

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

Q8. ~~**A.**~~ f est définie sur $]-1, 1[$.

B. f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

~~**C.**~~ f est paire.

D. f est impaire.

Q9. **A.** f est bornée.

~~**B.**~~ f est prolongeable par continuité en 1.

~~**C.**~~ f admet $\dfrac{\pi}{2}$ pour limite en $+\infty$.

D. f admet 0 pour limite en $+\infty$.

Q10. **A.** f est dérivable sur $]1, +\infty[$.

~~**B.**~~ Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{2}{1+x^2}$.

~~**C.**~~ Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$.

~~**D.**~~ Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f(x) = \pi - 2\arctan(x)$.

Séries

Q11. On s'intéresse à la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

- ~~**A.**~~ A l'aide d'une comparaison à une intégrale, on montre que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ converge *si et seulement si* $\alpha > 0$.
- **B.** A l'aide d'une comparaison à une intégrale, on montre que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ converge *si et seulement si* $\alpha > 1$.
- ~~**C.**~~ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \leqslant \frac{1}{\ln 2}$.
- ~~**D.**~~ La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ diverge grossièrement lorsque $\alpha < 0$.

Q12. On pose $u_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

- ~~**A.**~~ u_n est dominé par $\frac{1}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- ~~**B.**~~ u_n est équivalent à $\frac{1}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- ~~**C.**~~ La série de terme général u_n converge absolument.
- **D.** La série de terme général $\frac{1}{u_n}$ diverge grossièrement.

Q13. On note q un nombre complexe de module 1.

- ~~**A.**~~ La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{q^n}{n}$ converge uniquement si $q = -1$.
- **B.** La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{q^n}{n} - \frac{q^n}{n+1}$ converge absolument.
- ~~**C.**~~ La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{q^n}{n} - \frac{q^{n+1}}{n+1}$ diverge si $q = 1$.
- **D.** La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (q-1)\frac{q^n}{n}$ converge.

Arithmétique

Q14. Le produit de quatre entiers consécutifs est toujours divisible par

~~**A.**~~ 16 ~~**B.**~~ 18 ~~**C.**~~ 20 **D.** 24

Q15. Soient a et b deux entiers naturels tels que b divise a^2+1. Alors

~~**A.**~~ b divise a^4+1

B. b divise a^4+1 *si et seulement si* b divise 2

~~**C.**~~ b divise a^4+1 *si et seulement si* $b=1$

~~**D.**~~ b divise a^4+1 *si et seulement si* $b=2$

Q16. Parmi les entiers suivants, lesquels sont des diviseurs de $2^{2019}-1$?

~~**A.**~~ 2 ~~**B.**~~ 3 **C.** 7 ~~**D.**~~ 11

Q17. On considère l'équation (E) : $12x-16y=10$ d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$.

~~**A.**~~ (E) admet une unique solution.

B. (E) n'admet pas de solution.

~~**C.**~~ Il existe $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ tel que les solutions de (E) soient les couples $(a-16k,b+12k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

~~**D.**~~ Il existe $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ tel que les solutions de (E) soient les couples $(a-4k,b+3k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Algèbre linéaire et géométrie euclidienne

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique et on considère le plan F d'équation $2x-2y+z=0$

Q18. La matrice du projecteur orthogonal p sur le plan F est

~~**A.**~~ $M=\begin{pmatrix}-3&4&-2\\4&-3&2\\-2&2&0\end{pmatrix}$

~~**B.**~~ $M=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&4&-2\\4&-1&2\\-2&2&2\end{pmatrix}$

~~**C.**~~ $M=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7&-4&2\\-4&7&2\\2&-2&4\end{pmatrix}$

D. $M=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}5&4&-2\\4&5&2\\-2&2&8\end{pmatrix}$

Q19. On note s la symétrie orthogonale par rapport au plan F.

A. La matrice de s dans la base canonique est orthogonale.

~~**B.**~~ Le déterminant de s vaut 1.

~~**C.**~~ Le vecteur $(2,-2,1)$ est invariant par s.

D. Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de s est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Probabilités

Q20. On lance un dé à 4 faces dont les faces sont numérotées de 1 à 4 sur une table. On note le numéro indiqué sur la face en contact avec la table. On suppose que le dé est pipé de telle sorte qu'il existe un réel α tel que pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, la probabilité d'obtenir k soit égale à αk.

~~A.~~ La probabilité d'obtenir 2 est $\frac{1}{2}$.

B. La probabilité d'obtenir 4 est $\frac{2}{5}$.

~~C.~~ La probabilité d'obtenir 1 est $\frac{1}{4}$.

~~D.~~ Les événements «obtenir 2» et «obtenir 4» sont indépendants.

Q21. Si A et B sont deux événements d'un même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$, alors :

~~A.~~ On a toujours $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

B. Il existe un événement A indépendant de lui-même.

C. On a toujours $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) - \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B)$.

~~D.~~ Si A et B sont indépendants, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On dispose de deux pièces : la pièce C donne face avec la probabilité $1/2$ et la pièce D donne face avec la probabilité $2/3$.
On choisit une des deux pièces au hasard. On la lance. Si l'on obtient face, on conserve la pièce qu'on vient de lancer, sinon on change de pièce. On effectue ainsi une suite de lancers.
On note p_n la probabilité de jouer avec la pièce C au $n^{\text{ème}}$ lancer et F_n l'événement «on obtient face au $n^{\text{ème}}$ lancer.
Puisque la pièce est initialement choisie au hasard, on convient que $p_0 = \frac{1}{2}$.

Q22. **A.** On démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3}$.

~~B.~~ On démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}$.

~~C.~~ On démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{2}{3}$.

~~D.~~ On démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{2}{3}$.

Q23. On en déduit que :

~~A.~~ $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{5}$.

B. $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} + \frac{2}{5}$.

~~C.~~ $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$.

~~D.~~ $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} + \frac{1}{5}$.

Q24. La probabilité de l'événement F_n est :

~~A.~~ $-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{3}{5}$ ~~B.~~ $-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{5}$ ~~C.~~ $-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} + \frac{1}{5}$ ~~D.~~ $-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} + \frac{3}{5}$

Une suite de polynômes

Q25. On pose $J_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \, dx$ et $K_n = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^{n-1} \, dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

~~A.~~ $K_n = (2n+1)J_n$ ~~B.~~ $K_n = 2nJ_n$ ~~C.~~ $K_n = \frac{1}{2n+1}J_n$ **D.** $K_n = \frac{1}{2n}J_n$

Q26. En calculant $J_n - J_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient la relation de récurrence suivante.

~~A.~~ $J_n = \frac{2n-1}{2n}J_{n-1}$ ~~B.~~ $J_n = \frac{2n+1}{2n-1}J_{n-1}$ **C.** $J_n = \frac{2n}{2n+1}J_{n-1}$ ~~D.~~ $J_n = \frac{2n}{2n-1}J_{n-1}$

Q27. On pose $I_n = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \, dx$.

~~A.~~ $I_n = (-1)^n 2^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$

~~B.~~ $I_n = (-1)^n 2^{2n} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$

C. $I_n = (-1)^n 2^{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

~~D.~~ $I_n = (-1)^n 2^{2n} \frac{(2n)!}{((n+1)!)^2}$

Q28. On définit pour $n \in \mathbb{N}$ les polynômes $P_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = P_n^{(n)}$ (dérivée $n^{\text{ème}}$ de P_n).

~~A.~~ Le monôme de plus haut degré de L_n est $\frac{(2n+1)!}{(n+1)!}X^{n+1}$.

~~B.~~ L_n est toujours un polynôme pair.

~~C.~~ L_n a la même parité que $n+1$.

D. L_n a la même parité que n.

Q29. A partir de la définition de L_n, on peut écrire :

~~A.~~ $L_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} [(X-1)^n]^{(k)} [(X+1)^n]^{(n-k)}$

B. $L_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [(X-1)^n]^{(k)} [(X+1)^n]^{(n-k)}$

~~C.~~ $L_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{k(k-1)\cdots 1} [(X-1)^n]^{(k)} [(X+1)^n]^{(n-k)}$

~~D.~~ $L_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{k(k-1)\cdots 1} [(X-1)^n]^{(k)} [(X+1)^n]^{(n-k)}$

Q30. On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

~~A.~~ $L_n(1) = L_n(-1)$ ~~B.~~ $L_n(1) = 0$ ~~C.~~ $L_n(1) = n!$ **D.** $L_n(1) = 2^n n!$

Q31. En calculant P_n' et P_n'', on constate que

~~A.~~ P_n' et P_n'' n'ont pas de racines autres que 1 et -1 dans $[-1, 1]$.

~~B.~~ P_n' possède une racine dans $]-1, 1[$ et P_n'' n'a pas de racines dans $]-1, 1[$.

~~C.~~ P_n'' possède une racine double dans $]-1, 1[$.

D. P_n'' possède deux racines opposées dans $]-1, 1[$.

Q32. On considère deux entiers naturels k et n tels que $k < n$.

~~A.~~ Les seules racines de $P_n^{(k)}$ sont 1 et -1.

~~B.~~ A l'aide du théorème de Rolle, on montre que $P_n^{(k)}$ s'annule exactement k fois sur $[-1, 1]$.

C. A l'aide du théorème de Rolle, on montre que $P_n^{(k)}$ s'annule exactement k fois sur $]-1, 1[$.

~~D.~~ A l'aide du théorème de Rolle, on montre que $P_n^{(k)}$ s'annule exactement $k+1$ fois sur $]-1, 1[$.

Q33. On peut déduire des questions précédentes que :

~~A.~~ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n(1) = L_n(-1)$.

B. L_n est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples toutes comprises dans l'intervalle $]-1, 1[$.

C. Si n est impair, les racines de L_n sont opposées deux à deux.

~~D.~~ Si n est pair, 0 est racine de L_n.

Q34. En calculant P_{n+1}'' pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient la relation

~~A.~~ $P_{n+1}'' = 2(2n+1)^2 P_n + 4n(n+1)P_{n-1}$

~~B.~~ $P_{n+1}'' = (n+1)^2 P_{n-1} + 4n(n+1)P_n$

C. $P_{n+1}'' = 2(2n+1)(n+1)P_n + 4n(n+1)P_{n-1}$

~~D.~~ $P_{n+1}'' = (2n-1)(n+1)P_n - 4n(n+1)P_{n-1}$

Q35. En dérivant n fois P_{n+1}', on obtient pour n non nul :

~~A.~~ $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 2(n+1)X^2 P_n^{(n-1)}$

~~B.~~ $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 2(n+1)(n-1)^2 P_n^{(n-1)}$

C. $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 2n(n+1)P_n^{(n-1)}$

~~D.~~ $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 2(n-1)(n+1)P_n^{(n-1)}$

Q36. En dérivant $n-1$ fois l'expression de P_{n+1}'' obtenue précédemment, on obtient pour $n \in \mathbb{N}^*$,

~~A.~~ $L_{n+1} = 2(2n+1)^2 P_n^{(n-1)} + 4n(n+1)L_{n-1}$

~~B.~~ $L_{n+1} = (n+1)^2 P_{n-1}^{(n-1)} + 4n(n+1)L_n$

C. $L_{n+1} = 2(n+1)(2n+1)P_n^{(n-1)} + 4n(n+1)L_{n-1}$

~~D.~~ $L_{n+1} = (n+1)(2n-1)P_n^{(n-1)} - 4n(n+1)L_{n-1}$

Q37. On obtient finalement pour $n \in \mathbb{N}^*$ la relation permettant d'exprimer L_{n+1} en fonction de L_n et L_{n-1}.

~~A.~~ $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n - 4(n-1)^2 L_{n-1}$

~~B.~~ $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n - 4n^2 L_{n-1}$

~~C.~~ $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 4n^2 L_{n-1}$

~~D.~~ $L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 4(n-1)^2 L_{n-1}$

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt$$

On notera $\|P\|$ la norme d'un polynôme P.

Q38. En procédant à des intégrations par parties successives, on montre que pour $k \leqslant m < n$

~~A.~~ $\langle L_n, X^m \rangle = (-1)^{k+1} m(m-1)\cdots(m-k) \int_{-1}^{1} t^{m-k} P_n^{(n-k)}(t)\ dt$

~~B.~~ $\langle L_n, X^m \rangle = (-1)^{k} m(m-1)\cdots(m-k) \int_{-1}^{1} t^{m-k} P_n^{(n-k)}(t)\ dt$

~~C.~~ $\langle L_n, X^m \rangle = (-1)^{m} m! \int_{-1}^{1} t P_n^{(n-m+1)}(t)\ dt$

D. $\langle L_n, X^m \rangle = (-1)^{m-1} m! \int_{-1}^{1} t P_n^{(n-m+1)}(t)\ dt$

Q39. On en déduit que pour $m < n$:

~~A.~~ $\langle L_n, X^m \rangle = (-1)^m m!$

~~B.~~ $\langle L_n, X^m \rangle = (-1)^{m-1} (m-1)!$

~~C.~~ $\langle L_n, X^m \rangle = (n-m)!$

D. $\langle L_n, X^m \rangle = 0$

Q40. On peut alors en déduire que si m est différent de n :

~~A.~~ $\langle L_n, L_m \rangle = (-1)^{m+n} (m+n)!$

~~B.~~ $\langle L_n, L_m \rangle = (-1)^{m-1} (m-1)!$

~~C.~~ Si $n > m$, alors $\langle L_n, L_m \rangle = (-1)^{n-m} (n-m)!$

D. $\langle L_n, L_m \rangle = 0$

Q41. En intégrant n fois par parties l'intégrale définissant $\|L_n\|^2$, on obtient

~~A.~~ $\|L_n\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n(t) P_n^{(2n+1)}(t)\ dt$

~~B.~~ $\|L_n\|^2 = (-1)^n \int_{-1}^{1} P_n(t) P_n^{(2n+1)}(t)\ dt$

C. $\|L_n\|^2 = (-1)^n \int_{-1}^{1} P_n(t) P_n^{(2n)}(t)\ dt$

~~D.~~ $\|L_n\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n(t) P_n^{(2n)}(t)\ dt$

Q42. On obtient alors comme expression de $\|L_n\|^2$:

~~A.~~ $\|L_n\|^2 = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{2n+1}$ B. $\|L_n\|^2 = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}$ ~~C.~~ $\|L_n\|^2 = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ ~~D.~~ $\|L_n\|^2 = 1$