Devoir surveillé n°07 : corrigé

Solution 1.

1. L'équation (E) équivaut à $2x+7y=2$. Une solution particulière de cette équation est le couple $(8,-2)$. Si $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ est solution, alors $2x+7y=2\times 8-2\times 7$ donc $7(y+2)=2(8-x)$. Donc 7 divise $2(8-x)$. Or 7 est premier avec 2 donc 7 divise $8-x$. Il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que $8-x=7k$. Alors $y+2=2k$. Finalement, $(x,y)=(8-7k,-2+2k)$. Réciproquement, les couples $(8-7k,-2+2k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$ sont bien solutions de (E). L'ensemble des solutions de (E) est donc
$$\{(8-7k,-2+2k),\ k\in\mathbb{Z}\}$$
2. Une solution de (S) est -4. Ainsi (S) équivaut à $\begin{cases} x\equiv -4[6] \\ x\equiv -4[8]\end{cases}$. Ainsi x est solution de (S) *si et seulement si* $x+4$ est multiple commun de 6 et 8. Puisque $6\vee 8=24$, x est solution de (S) *si et seulement si* $x+4$ est multiple de 24. L'ensemble des solutions de (S) est donc $-4+24\mathbb{Z}$.
3. On sait que $3^2\equiv 1[8]$. Or $3^{100}=(3^2)^{50}$ donc $3^{100}\equiv 1[8]$. Or $0\leqslant 1<8$ donc 1 est le reste de la division euclidienne de 3^{100} par 8.
4. Soit $n\in\mathbb{Z}$. Puisque 3 est premier, $n^3\equiv n[3]$. Par conséquent, $n^5\equiv n^3\equiv n[3]$. Ainsi 3 divise n^5-n. De même, 5 est premier donc $n^5\equiv n[5]$ et 5 divise n^5-n. Puisque $3\wedge 5=1$, $15=3\times 5$ divise n^5-n. Enfin, n^5 et n sont de même parité donc n^5-n est pair. Ainsi 2 divise n^5-n. Or $2\wedge 15=1$ donc $30=2\times 15$ divise n^5-n.
5. Soit $n\in\mathbb{Z}$. Alors $2(3n+2)-3(2n+1)=1$ donc $3n+2$ et $2n+1$ sont premiers entre eux en vertu d'une relation de Bézout.

Solution 2.

1. Dans ce cas, on a $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n^2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   - **a.** Une récurrence évidente montre que (u_n) est constamment nulle.
   - **b.** Puisque $\lambda\neq 0$, $u_1=\frac{3}{4}\lambda^2>0$.
     Supposons que $u_n>0$ pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$. Alors $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n^2>0$.
     Par récurrence, $u_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
   - **c.** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a donc
     $$w_{n+1}=\ln(u_{n+1})=\ln\frac{3}{4}+2\ln(u_n)=2w_n+\ln\frac{3}{4}$$
     La suite (w_n) est donc arithmético-géométrique. On a tout simplement pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
     $$w_{n+1}+\ln\frac{3}{4}=2\left(w_n+\ln\frac{3}{4}\right)$$
     La suite $\left(w_n+\ln\frac{3}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc géométrique de raison 2. On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
     $$w_n+\ln\frac{3}{4}=2^n\left(w_1+\ln\frac{3}{4}\right)$$
     ou encore
     $$w_n=2^{n-1}\left(w_1+\ln\frac{3}{4}\right)-\ln\frac{3}{4}$$
     Puisque $w_1=\ln(u_1)=\ln\left(\frac{3}{4}\lambda^2\right)$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
     $$w_n=2^{n-1}\ln\left(\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2\right)-\ln\frac{3}{4}$$

Attention ! On ne peut pas écrire $\ln\left(\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2\right) = 2\ln\left(\frac{3}{4}\lambda\right)$ car λ est éventuellement négatif.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = e^{w_n} = \frac{4}{3}\exp\left(w_1 + \ln\frac{3}{4}\right)^{2^{n-1}} = \frac{4}{3}u_1^{2^{n-1}}\left(\frac{3}{4}\right)^{2^{n-1}}$$

Or $u_1 = \frac{3}{4}\lambda^2$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \frac{4}{3}\lambda^{2^n}\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n} = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^{2^n}$$

Remarque. Cette expression est encore valable lorsque $n = 0$ ou $\lambda = 0$. ■

e. Si $|\lambda| < \frac{4}{3}$, alors $\left|\frac{3}{4}\lambda\right| < 1$ et donc (u_n) converge vers 0.
Si $|\lambda| > \frac{4}{3}$, alors $\left|\frac{3}{4}\lambda\right| > 1$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{4}{3}\left|\frac{3}{4}\lambda\right|^{2^n}$$

car 2^n est pair. On en déduit que (u_n) diverge vers $+\infty$.
Si $|\lambda| = \frac{4}{3}$, alors la dernière expression montre que la suite (u_n) est constante égale à $\frac{4}{3}$ à partir du rang 1. Elle converge donc vers $\frac{4}{3}$.
Remarque. On pouvait également utiliser la suite (w_n) dans le cas où $\lambda \neq 0$. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = 2^{n-1}\ln\left(\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2\right) - \ln\frac{3}{4}$$

Si $|\lambda| < \frac{4}{3}$, alors $0 < \left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2 < 1$ puis $\ln\left(\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2\right) < 0$ donc (w_n) diverge vers $-\infty$. Puisque $u_n = e^{w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (u_n) converge vers 0.
Si $|\lambda| > \frac{4}{3}$, alors $\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2 > 1$ puis $\ln\left(\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2\right) > 0$ donc (w_n) diverge vers $+\infty$. Puisque $u_n = e^{w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (u_n) converge vers $+\infty$.
Si $|\lambda| = \frac{4}{3}$, alors $\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2 = 1$ puis $\ln\left(\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2\right) = 0$ donc (w_n) est constante égale à $-\ln\frac{3}{4}$ et converge donc vers $-\ln\frac{3}{4}$. Puisque $u_n = e^{w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (u_n) converge vers $\frac{4}{3}$. ■

2. Dans ce cas, on a donc $u_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3u_n^2 - 8u_n + 12\right)$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}\left(3u_n^2 - 12u_n + 12\right) = \frac{3}{4}(u_n - 2)^2 \geqslant 0$$

La suite (u_n) est donc croissante.

b. Supposons que (u_n) converge vers une limite l. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{4}(u_n - 2)^2 = \frac{3}{4}(l-2)^2$. Par unicité de la limite, $\frac{3}{4}(l-2)^2 = 0$ et donc $l = 2$.

c. Comme (u_n) est croissante, $u_n \geqslant \lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si (u_n) convergeait vers une certaine limite l, on aurait $l \geqslant \lambda > 2$ par passage à la limite. Ceci est impossible d'après la question **2.b**. Comme (u_n) est croissante, elle converge ou diverge vers $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. Puisqu'elle ne peut converger, elle diverge vers $+\infty$.

d. Il s'agit de résoudre une équation du second degré.

$$\begin{aligned}
& u_1 = 2 \\
\iff & \frac{1}{4}\left(3\lambda^2 - 8\lambda + 12\right) = 2 \\
\iff & 3\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0 \\
\iff & (3\lambda - 2)(\lambda - 2) = 0 \\
\iff & \lambda \in \left\{\frac{2}{3}, 2\right\}
\end{aligned}$$

Les réels recherchés sont donc $\lambda_1 = \frac{2}{3}$ et $\lambda_2 = 2$.

e. Puisque (u_n) est croissante, on a clairement $u_n \geqslant \lambda \geqslant \lambda_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On montre alors par récurrence que $u_n \leqslant \lambda_2 = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
L'initialisation est claire.
Supposons $u_n \leqslant \lambda_2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'après notre remarque préliminaire, on a même $\lambda_1 \leqslant u_n \leqslant \lambda_2$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3u_n^2 - 8u_n + 12\right) = \frac{1}{4}\left((3u_n - 2)(u_n - 2) + 8\right) = \frac{3}{4}(u_n - \lambda_1)(u_n - \lambda_2) + 2 \leqslant 2$$

car $u_n - \lambda_1 \geqslant 0$ et $u_n - \lambda_2 \leqslant 0$.
Par récurrence, $u_n \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La suite (u_n) étant croissante et majorée, elle converge. D'après la question **2.b**, (u_n) converge vers 2.

f. On remarque que

$$u_1 = \frac{3}{4}(3\lambda^2 - 8\lambda + 12) = \frac{3}{4}(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) + 2 > 2$$

Il suffit alors de reprendre la preuve de la question **2.c**. Puisque (u_n) est croissante, $u_n \geqslant u_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si (u_n) convergeait vers une limite l, on aurait $l \geqslant u_1 > 2$ ce qui est impossible d'après la question **2.b**. La suite (u_n) ne converge donc pas donc, étant croissante, elle diverge vers $+\infty$.

3. **a.** On remarque que $P(a) = (a-2)(a-b) > 0$, $P(b) = (b-2)(b-a) < 0$ et $P(2) = (2-a)(2-b) > 0$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}P(u_n) + u_n$$

Comme P est continue en L, on obtient par passage à la limite

$$L = \frac{1}{4}P(L) + L$$

et donc $P(L) = 0$. Ainsi L est une des deux racines de P.
Le signe de $P(a)$, $P(b)$ et $P(2)$ et la continuité de P montre que P s'annule sur $]a, b[$ et $]b, 2[$ via le théorème des valeurs intermédiaires. Puisque P possède au plus deux racines, c'est qu'il en possède exactement deux et qu'elles sont situés dans les intervalles $]a, b[$ et $]b, 2[$.
On en déduit que $a < L < b$ ou $b < L < 2$.

Solution 3.

1. On trouve

$$\begin{aligned} d_0 &= 123 & \varepsilon_0 &= 0,456 \\ d_1 &= 4 & \varepsilon_1 &= 0,56 \\ d_2 &= 5 & \varepsilon_2 &= 0,6 \\ d_3 &= 6 & \varepsilon_3 &= 0 \end{aligned}$$

On montre alors par récurrence que $d_n = \varepsilon_n = 0$ pour tout $n \geqslant 4$. En effet, $d_4 = \lfloor 10\varepsilon_3 \rfloor = 0$ et $\varepsilon_4 = 10\varepsilon_3 - d_4 = 0$ puisque $\varepsilon_3 = 0$. Supposons que $d_n = 0$ pour un certain $n \geqslant 4$. Alors $d_{n+1} = \lfloor 10\varepsilon_n \rfloor = 0$ et $\varepsilon_{n+1} = 10\varepsilon_n - d_{n+1} = 0$. Par récurrence, $d_n = 0$ pour tout $n \geqslant 4$.

2. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, $\varepsilon_0 = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$ puisque $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. Sinon $\varepsilon_n = 10\varepsilon_{n-1} - \lfloor 10\varepsilon_{n-1} \rfloor \in [0, 1[$ car $\lfloor 10\varepsilon_{n-1} \rfloor \leqslant 10\varepsilon_{n-1} < \lfloor 10\varepsilon_{n-1} \rfloor + 1$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\varepsilon_{n-1} \in [0, 1[$ d'après la question **2.a** et donc $10\varepsilon_{n-1} \in [0, 10[$. On en déduit que $d_n = \lfloor 10\varepsilon_{n-1} \rfloor \in [\![0, 9]\!]$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(S_{n+1} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{10^{n+1}}\right) - \left(S_n + \frac{\varepsilon_n}{10^n}\right) = S_{n+1} - S_n + \frac{\varepsilon_{n+1} - 10\varepsilon_n}{10^{n+1}} = \frac{d_{n+1}}{10^{n+1}} - \frac{\lfloor 10\varepsilon_n \rfloor}{10^{n+1}} = 0$$

La suite de terme général $S_n + \frac{\varepsilon_n}{10^n}$ est donc constante égale à son premier terme $S_0 + \frac{\varepsilon_0}{10^0} = d_0 + \varepsilon_0 = x$.

d. Puisque $\varepsilon_n \in [0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x - \frac{1}{10^n} < S_n \leqslant x$$

Puisque $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{10^n} = 0$, on obtient $\lim_{n \to +\infty} S_n = x$ d'après le théorème des gendarmes.

3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} = 10^{N+T} S_{n+N+T+1} - 10^N S_{N+n+1} &= 10^{N+T}\left(S_{n+N+T} + \frac{d_{n+N+T+1}}{10^{n+N+T+1}}\right) - 10^N\left(S_{n+N} + \frac{d_{n+N+1}}{10^{n+N+1}}\right) \\ &= u_n + \frac{d_{n+N+T+1} - d_{n+N+1}}{10^{n+1}} = u_n \end{aligned}$$

car (d_n) est T-périodique à partir du rang N. On en déduit que (u_n) est constante.

b. Comme (u_n) est constante, $u_n = u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$u_0 = 10^{N+T} S_{N+T} - 10^N S_N = \sum_{k=0}^{N+T} d_k 10^{N+T-k} - \sum_{k=0}^{N} d_k 10^{N-k}$$

Pour $k \in [\![0, N+T]\!]$, $10^{N+T-k} \in \mathbb{Z}$ et $d_k \in \mathbb{Z}$ donc $\sum_{k=0}^{N+T} d_k 10^{N+T-k} \in \mathbb{Z}$.
De même, pour $k \in [\![0, N]\!]$, $10^{N-k} \in \mathbb{Z}$ et $d_k \in \mathbb{Z}$ donc $\sum_{k=0}^{N} d_k 10^{N-k} \in \mathbb{Z}$.
On en déduit que $u_0 \in \mathbb{Z}$. En posant $p = u_0$, on a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$10^{N+T} S_{n+N+T} - 10^N S_{n+N} = p$$

c. Puisque (S_{n+N}) et (S_{n+N+T}) convergent toutes deux vers x (en tant que suites extraites de (S_n)), on obtient par unicité de la limite $10^{N+T}x - 10^N x = p$ et donc $x = \frac{p}{10^N(10^T-1)}$ puisque $10^T \geqslant 10 > 1$. Ceci prouve que x est rationnel.

4. On remarque que $10^6 x - 10^3 x = 123333$. Ainsi $x = \frac{123333}{999000} = \frac{41111}{333000}$.

5. **a.** La suite (r_n) est à valeurs dans l'ensemble *fini* $[\![0, q-1]\!]$. Elle ne peut donc être injective. Ainsi il existe des entiers N et M distincts tels que $r_N = r_M$.

b. Pour simplifier, supposons $N < M$ et posons $T = M - N$. On va montrer par récurrence que (r_n) est T-périodique à partir du rang N.
On a bien $r_{N+T} = r_N$.
Supposons que $r_{n+T} = r_n$ pour un certain entier $n \geqslant N$. On sait que r_{n+1} et r_{n+1+T} sont les restes respectifs des divisions euclidiennes de $10r_n$ et $10r_{n+T}$ par b. Mais puisque $10r_n = 10r_{n+T}$, on a $r_{n+1} = r_{n+1+T}$ par unicité du reste dans la division euclidienne.
Par récurrence, $r_{n+T} = r_n$ pour tout $n \geqslant N$. Ainsi (r_n) est T-périodique à partir du rang N.

c. Soit $n \geqslant N+1$. On sait que q_n et q_{n+T} sont les quotients respectifs de $10r_{n-1}$ et $10r_{n-1+T}$ par b. Puisque $n-1 \geqslant N$ et que (r_n) est T-périodique à partir du rang N, $r_{n-1} = r_{n-1+T}$ et donc $10r_{n-1} = 10r_{n-1+T}$.
Par unicité du quotient dans la division euclidienne, $q_n = q_{n+T}$.
On a donc prouvé que (q_n) était T-périodique à partir du rang $N+1$.

d. Tout d'abord, $a = bq_0 + r_0$ avec $0 \leqslant r_0 < b$. On en déduit que

$$x - 1 = \frac{a}{b} - 1 < q_0 \leqslant \frac{a}{b} = x$$

et donc que $q_0 = \lfloor x \rfloor = d_0$. Par ailleurs,

$$r_0 = a - bq_0 = b\left(\frac{a}{b} - q_0\right) = b(x - \lfloor x \rfloor) = b\varepsilon_0$$

Supposons que $q_n = d_n$ et $r_n = b\varepsilon_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Par définition,

$$10\varepsilon_n = d_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$$

et donc

$$10b\varepsilon_n = bd_{n+1} + b\varepsilon_{n+1}$$

ou encore

$$10r_n = bd_{n+1} + b\varepsilon_{n+1}$$

On sait que $d_{n+1} \in \mathbb{Z}$ d'après la question **2.b**. De plus, $b\varepsilon_{n+1} = 10r_n - bd_{n+1} \in \mathbb{Z}$. Enfin, $\varepsilon_{n+1} \in [0, 1[$ d'après la question **2.a** donc $0 \leqslant b\varepsilon_{n+1} < b$. On en déduit que d_{n+1} et $q\varepsilon_{n+1}$ sont le quotient et le reste de la division euclidienne de $10r_n$ par b. Par unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne, $q_{n+1} = d_{n+1}$ et $r_{n+1} = b\varepsilon_{n+1}$.
Par récurrence, $q_n = d_n$ et $r_n = b\varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. On trouve successivement

$$
\begin{aligned}
q_0 &= 0 & r_0 &= 13\\
q_1 &= 3 & r_1 &= 25\\
q_2 &= 7 & r_2 &= 5\\
q_3 &= 1 & r_3 &= 15\\
q_4 &= 4 & r_4 &= 10\\
q_5 &= 2 & r_5 &= 30\\
q_6 &= 8 & r_6 &= 20\\
q_7 &= 5 & r_7 &= 25
\end{aligned}
$$

On a $r_1 = r_7$ donc (r_n) est 6-périodique à partir du rang 1 d'après la question **5.b**. Toujours d'après la question **5.b**, (q_n) est 6-périodique à partir du rang 2. Mais puisque les suites (d_n) et (q_n) sont identiques, (d_n) est également 6-périodique à partir du rang 2.