

DEVOIR À LA MAISON N°04 : CORRIGÉ

Solution 1

1. a. Soit $(z, z') \in (\mathbb{C} \setminus \{-i\})^2$ tel que $f(z) = f(z')$. Alors $\frac{iz+1}{z+i} = \frac{iz'+1}{z'+i}$ donc $(iz+1)(z'+i) = (iz'+1)(z+i)$. En développant, on obtient $izz' + z' - z + i = izz' + z - z' + i$ puis $z = z'$ donc f est injective.
- b. Soit $Z \in \text{Im } f$. Il existe donc $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ tel que $Z = f(z)$. Supposons $Z = i$. Alors $\frac{iz+1}{z+i} = i$ puis $iz+1 = i(z+i) = iz-i$, ce qui est absurde. Ainsi $Z \neq i$ de sorte que $\text{Im } f \subset \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Réciproquement, soit $Z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Posons $z = \frac{1-iZ}{Z-i}$. Alors $z(Z-i) = 1-iZ$ puis $Z(z+i) = iz+1$. En particulier, $z \neq -i$ puisqu'alors on aurait $0 = i \times (-1) + 1 = 2$. Ainsi $Z = \frac{iz+1}{z+i} = f(z)$ de sorte que $Z \in \text{Im } f$. Par conséquent, $\mathbb{C} \setminus \{i\} \subset \text{Im } f$. Par double inclusion, $\text{Im } f = \mathbb{C} \setminus \{i\}$. En particulier, f n'est pas surjective puisque $\text{Im } f \neq \mathbb{C}$.
- c. Soit $Z \in f(\mathcal{P})$. Il existe donc $z \in \mathcal{P}$ tel que $Z = f(z)$. Remarquons alors que

$$\begin{aligned} |iz+1|^2 - |z+i|^2 &= (iz+1)\overline{iz+1} - (z+i)\overline{z+i} \\ &= (iz+1)(-i\bar{z}+1) - (z+i)(\bar{z}-i) \\ &= (z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 1) - (z\bar{z} - iz + i\bar{z} + 1) \\ &= 2i(z - \bar{z}) = -4\text{Im}(z) < 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$|Z| = |f(z)| = \frac{|iz+1|}{|z+i|} < 1$$

Ceci signifie que $Z \in \mathcal{D}$. Finalement, $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}$.

- d. Soit $Z \in \mathcal{D}$. Alors $Z \neq i$ donc Z admet un unique antécédent z par f par injectivité de f . On a déjà montré à la question 1.b que cet unique antécédent était $z = \frac{1-iZ}{Z-i}$. Il s'agit alors de montrer que $z \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} \text{Im}(z) &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1-iZ}{Z-i} - \overline{\left(\frac{1-iZ}{Z-i} \right)} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1-iZ}{Z-i} - \frac{1+i\bar{Z}}{\bar{Z}+i} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{(1-iZ)(\bar{Z}+i) - (1+i\bar{Z})(Z-i)}{(Z-i)(\bar{Z}+i)} \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{(Z + \bar{Z} + i - iZ\bar{Z}) - (Z + \bar{Z} - i + iZ\bar{Z})}{(Z-i)\bar{Z}-i} \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{2i - 2iZ\bar{Z}}{|Z-i|^2} = \frac{1-|Z|^2}{|Z-i|^2} \end{aligned}$$

Or $Z \in \mathcal{D}$ donc $|Z| < 1$ de sorte que $\text{Im}(z) > 0$ i.e. $z \in \mathcal{P}$. On a donc prouvé que tout élément de \mathcal{D} admettait un unique antécédent par f dans \mathcal{P} . Puisqu'on sait également que $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}$, f induit une bijection de \mathcal{P} sur \mathcal{D} .

- e. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Alors

$$\begin{aligned} & z \in f^{-1}(\mathcal{U}) \\ \Leftrightarrow & f(z) \in \mathcal{U} \\ \Leftrightarrow & f(z)f(\bar{z}) = 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{iz+1}{z+i} \cdot \frac{-i\bar{z}+1}{\bar{z}-i} = 1 \\ \Leftrightarrow & (iz+1)(-i\bar{z}+1) = (z+i)(\bar{z}-i) \\ \Leftrightarrow & z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 1 = z\bar{z} + i\bar{z} - iz + 1 \\ \Leftrightarrow & z = \bar{z} \\ \Leftrightarrow & z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi $f^{-1}(\mathbb{U}) = \mathbb{R}$.

2. a. Soit $z \in \mathcal{P}$.

$$\operatorname{Im}(g(z)) = \frac{1}{2i}(g(z) - \overline{g(z)}) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i|z|^2} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|^2} > 0$$

donc $g(z) \in \mathcal{P}$. L'application g est par conséquent bien définie.

b. Il suffit de vérifier que g est une involution. En effet, pour tout $z \in \mathcal{P}$, $g(g(z)) = z$ donc $g \circ g = \operatorname{Id}_{\mathcal{P}}$. Puisque g est une involution, elle est bijective.

3. a. Soit $z \in \mathcal{P}$. Supposons $z \sin \theta + \cos \theta = 0$. Alors $\operatorname{Im}(z \sin \theta + \cos \theta) = 0$ et donc $\sin \theta \cdot \operatorname{Im}(z) = 0$. Puisque $\operatorname{Im}(z) > 0$, $\sin \theta = 0$. Or $z \sin \theta + \cos \theta = 0$ donc $\cos \theta = 0$. On a donc $\sin \theta = \cos \theta = 0$, ce qui est absurde puisque $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$. Finalement $z \sin \theta + \cos \theta \neq 0$, ce qui prouve que $A_\theta(z)$ est bien défini. Montrons maintenant que $A_\theta(z) \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(A_\theta(z)) &= \frac{1}{2i}(A_\theta(z) - \overline{A_\theta(z)}) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{z \cos \theta - \sin \theta}{z \sin \theta + \cos \theta} - \frac{\bar{z} \cos \theta - \sin \theta}{\bar{z} \sin \theta + \cos \theta}\right) \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{(z \cos \theta - \sin \theta)(\bar{z} \sin \theta + \cos \theta) - (\bar{z} \cos \theta - \sin \theta)(z \sin \theta + \cos \theta)}{|z \sin \theta + \cos \theta|^2} \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{(z\bar{z} \cos \theta \sin \theta + z \cos^2 \theta - \bar{z} \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta) - (z\bar{z} \cos \theta \sin \theta - z \sin^2 \theta + \bar{z} \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta)}{|z \sin \theta + \cos \theta|^2} \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{z(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - \bar{z}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{|z \sin \theta + \cos \theta|^2} \\ &= \frac{z - \bar{z}}{2i|z \sin \theta + \cos \theta|^2} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z \sin \theta + \cos \theta|^2} \end{aligned}$$

Or $z \in \mathcal{P}$ donc $\operatorname{Im}(z) > 0$. Ainsi $\operatorname{Im}(A_\theta(z)) > 0$ i.e. $A_\theta(z) \in \mathcal{P}$.

b. On vérifie immédiatement que $A_0(z) = z$ pour tout $z \in \mathcal{P}$. Autrement dit, $A_0 = \operatorname{Id}_{\mathcal{P}}$.

c. Soit $z \in \mathcal{P}$. Alors

$$\begin{aligned} A_\theta(A_\varphi(z)) &= \frac{A_\varphi(z) \cos \theta - \sin \theta}{A_\varphi(z) \sin \theta + \cos \theta} \\ &= \frac{\frac{z \cos \varphi - \sin \varphi}{z \sin \varphi + \cos \varphi} \cdot \cos \theta - \sin \theta}{\frac{z \cos \varphi - \sin \varphi}{z \sin \varphi + \cos \varphi} \cdot \sin \theta + \cos \theta} \\ &= \frac{(z \cos \varphi - \sin \varphi) \cos \theta - (z \sin \varphi + \cos \varphi) \sin \theta}{(z \cos \varphi - \sin \varphi) \sin \theta + (z \sin \varphi + \cos \varphi) \cos \theta} \\ &= \frac{z(\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta) - (\sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta)}{z(\cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta) + \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta} \\ &= \frac{z \cos(\theta + \varphi) - \sin(\theta + \varphi)}{z \sin(\theta + \varphi) + \cos(\theta + \varphi)} \\ &= A_{\theta+\varphi}(z) \end{aligned}$$

On en déduit que $A_\theta \circ A_\varphi = A_{\theta+\varphi}$.

d. Il suffit de remarquer

$$A_\theta \circ A_{-\theta} = A_{-\theta} \circ A_\theta = A_{\theta-\theta} = A_0 = \operatorname{Id}_{\mathcal{P}}$$

Ainsi A_θ est bijective et $A_\theta^{-1} = A_{-\theta}$.

Solution 2

1. On a donc $z = e^{i\theta}$. Tout d'abord,

$$1 + z = 1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

de sorte que

$$|1 + z| = 2 \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 1 - z + z^2 &= 1 - e^{i\theta} + e^{2i\theta} \\
 &= e^{i\theta} (e^{-i\theta} - 1 + e^{i\theta}) \\
 &= e^{i\theta} (2 \cos \theta - 1) \\
 &= e^{i\theta} \left(2 \left(2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1 \right) - 1 \right) \\
 &= e^{i\theta} \left(4 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - 3 \right)
 \end{aligned}$$

de sorte que

$$|1 - z + z^2| = \left| 4 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - 3 \right|$$

Finalement,

$$f(z) = 2 \left| \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right| + \left| 4 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - 3 \right|$$

2. La fonction g étant paire, on peut se contenter de déterminer ses extrema sur $[0, 1]$.

Pour $t \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$,

$$g(t) = -4t^2 + 2t + 3$$

Ainsi g est croissante sur $\left[0, \frac{1}{4} \right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$.

Pour $t \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right]$,

$$g(t) = 4t^2 + 2t - 3$$

Ainsi g est croissante sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right]$.

On peut résumer la situation par un tableau de variations.

t	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$g(t)$	3	$\frac{13}{4}$	$\sqrt{3}$	3

On en déduit que g admet pour maximum $\frac{13}{4}$ et pour minimum $\sqrt{3}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Puisque g est paire, il s'agit également du maximum et du minimum de g sur l'intervalle $[-1, 1]$.

3. Remarquons que pour $z \in \mathbb{U}$

$$f(z) = g \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)$$

où θ désigne un argument de z . Comme \cos est à valeurs dans $[-1, 1]$, la question précédente montre que

$$\forall z \in \mathbb{U}, \sqrt{3} \leq f(z) \leq \frac{13}{4}$$