TD : Dénombrement, probabilités

Dénombrement

Exercice 1.

Montrer que sur toute planète de l'univers contenant au moins deux pays, il existe toujours deux pays ayant le même nombre de voisins.

Exercice 2.

Pour $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ on note $S(n,m)$ le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,m]\!]$.

1. Que vaut $S(n,n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$? Que vaut $S(n,m)$ si $n<m$?
2. Que vaut $S(0,0)$? Et $S(n,0)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$?
3. Montrer que pour tout $(n,m)\in\mathbb{N}^2$, $S(n+1,m)=m(S(n,m)+S(n,m-1))$.

Exercice 3.

1. On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique ?
   On tire simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique ? Donner le résultat en fraction irréductible.
2. Un digicode est une série de quatre caractères : une lettre A ou B suivie de trois chiffres. Combien existe-t-il de digicodes ? Combien existe-t-il de digicodes où tous les caractères sont distincts ? Combien existe-t-il de digicodes n'ayant pas deux caractères consécutifs identiques ?

Exercice 4.

Un digicode est composé de quatre caractères pris parmi dix chiffres et deux lettres. Combien peut-on former de

1. digicodes ?
2. digicodes à caractères distincts ?
3. digicodes contenant exactement un 7 ? à caractères distincts et contenant un 7 ?
4. digicodes contenant au moins un chiffre ? à caractères distincts et contenant au moins un chiffre ?
5. digicodes à caractères distincts contenant au moins une lettre ?

Exercice 5.

On pioche 8 cartes (une « main») dans un jeu de 32 cartes. Combien peut-on former de

1. mains ?
2. mains contenant trois piques exactement ?
3. mains contenant au moins trois piques ?
4. mains contenant au moins un roi et au moins un pique ?

Exercice 6.

Quel est le cardinal de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})\cap\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$?

Exercice 7.

Soient n et k deux entiers naturels non nuls.

1. Déterminer le nombre de k-uplets $(i_1,i_2,\dots,i_k)$ d'entiers tels que $1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_k\leqslant n$.
2. Déterminer le nombre de k-uplets $(i_1,i_2,\dots,i_k)$ d'entiers tels que $1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\ldots\leqslant i_k\leqslant n$.

Exercice 8.

Soient p et n deux entiers strictement positifs. On note $\mathscr{C}_{p,n}$ l'ensemble des applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ et $\mathscr{S}_{p,n}$ l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

1. Quel est le cardinal de $\mathscr{S}_{p,n}$?
2. Pour $f\in\mathscr{C}_{p,n}$, on définit l'application g sur $[\![1,p]\!]$ par :
   $$\forall x\in[\![1,p]\!],\ g(x)=f(x)+x-1$$
   Montrer que $g\in\mathscr{S}_{p,n+p-1}$.
3. En déduire que $\operatorname{card}\mathscr{C}_{p,n}=\operatorname{card}\mathscr{S}_{p,n+p-1}$.
4. Application : déduire des résultats précédents le nombre de p-uplets $(u_1,u_2,\dots,u_p)$ de $\mathbb{N}^p$ tels que :
   - **a.** $u_1+u_2+\dots+u_p\leqslant n$;
   - **b.** $u_1+u_2+\dots+u_p=m$;

Exercice 9.

Soit E un ensemble à n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$). On va dénombrer des parties de E, (X, Y, Z) sur lesquelles on posera certaines contraintes.

1. Déterminer le nombre de couples (X, Y) tels que $X \cap Y = \varnothing$.
2. Déterminer le nombre de couples (X, Y) tels que $X \cup Y = E$.
3. Déterminer le nombre de couples (X, Y) tels que (X, Y) forment une partition de E.
4. Déterminer le nombre de triplets (X, Y, Z) tels que $X \cup Y = Z$.

Exercice 10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant une preuve combinatoire, montrer que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. On pourra utiliser une partition d'un ensemble à $2n$ éléments en deux parties de n éléments.

Exercice 11.

On trace les cordes d'un cercle $\mathscr{C}$ joignant deux à deux n points distincts $A_1, \dots, A_n$ de $\mathscr{C}$. On suppose que trois de ces cordes ne sont jamais concourantes. En combien de points intérieurs au cercle se coupent-elles ?

Exercice 12.

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geqslant p^2 + 1$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$. Montrer que l'une au moins des propositions suivantes est vraie :

- au moins $p + 1$ des nombres $x_1, \dots, x_n$ sont égaux ;
- au moins $p + 1$ des nombres $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts.

Exercice 13.

Dans cet exercice, le mot *entier* désignera un entier naturel supérieur ou égal à 1 et le mot *ensemble* désignera un ensemble de tels entiers. Pour un ensemble A et un entier n, on définit :

- le nombre $\nu_n(A)$ d'éléments de A compris entre 1 et n i.e. $\nu_n(A) = \operatorname{card}(A \cap [\![1, n]\!])$;
- la proportion $\delta_n(A)$ d'entiers de A parmi ceux compris entre 1 et n i.e. $\delta_n(A) = \dfrac{\nu_n(A)}{n}$.

La limite de la suite $(\delta_n(A))$, si elle existe, est appelée *densité* de A dans B et est notée $\delta(A)$.
Déterminer, si elles existent les densités de

1. $\mathbb{N}^*$;
2. d'un ensemble fini E ;
3. de l'ensemble $2\mathbb{N}$ des entiers pairs ;
4. de l'ensemble C des carrés d'entiers ;
5. de $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}}]\!]2^{2k}, 2^{2k+1}]\!]$;
6. de l'ensemble D des entiers dont l'écriture décimale ne comporte pas de 0.

Exercice 14.

Soit E un ensemble fini. Pour $A \in \mathscr{P}(E)$, on note $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice de A.

1. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Justifier que $\operatorname{card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$.
2. Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{P}(E)$. On pose $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Justifier que $\prod_{i=1}^{n} (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_i}) = 0$.
3. En déduire que $\operatorname{card}(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \operatorname{card}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)$.

Exercice 15.

Quel est le nombre de relations d'ordre total sur un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$?

Exercice 16.

Soient r, m, n des entiers naturels. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$$

Exercice 17.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne n entiers relatifs. Montrer que l'on peut former un multiple de n en additionnant certains de ces n entiers.

Exercice 18.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant les réels $\delta_k = kx - \lfloor kx \rfloor$ pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer qu'il existe un couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $q \leqslant n$ et $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   - **a.** Montrer qu'il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$.
   - **b.** Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $p \in \mathbb{Z}$ tels qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$.
3. On admet l'irrationalité de π. En particulier, $\sin n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pose alors $u_n = \frac{1}{n \sin n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la suite (u_n) admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
   - **a.** Montrer que $l = 0$.
   - **b.** Aboutir à une contradiction en appliquant le résultat de la question **2.b** à π.

Exercice 19.

Une classe comporte 30 élèves. De combien de façons peut-on constituer répartir les élèves en trinômes ?

Exercice 20.

Combien existe-t-il d'anagrammes des mots suivants : «MATHS», «MOTO», «DODO», «ANAGRAMME», «ANTICONSTITUTIONNELLEMENT» ?

Exercice 21.

Dénombrer le nombre

1. d'applications d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à n éléments ;
2. de bijections entre deux ensembles à n éléments ;
3. d'injections d'un ensemble à $n-1$ éléments dans un ensemble à n éléments ;
4. de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à $n-1$ éléments.

Exercice 22.

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E de cardinal n. On suppose qu'il existe k classes d'équivalence pour $\mathscr{R}$ et on note p le cardinal de

$$G = \{(x, y) \in E^2, x \mathscr{R} y\}$$

Montrer que $n^2 \leqslant kp$.

Exercice 23.

On dispose de 9 jetons numérotés de 1 à 9. On considère une matrice carrée de taille 3 composée de ces 9 jetons. On cherche à déterminer la probabilité p pour que le déterminant de la matrice soit impair.

1. Question préliminaire.
   Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$, $n \geqslant 2$.
   Montrer que le déterminant de A est congru modulo 2 au déterminant de la matrice dont les coefficients sont les restes $r_{i,j}$ de la division euclidienne des $a_{i,j}$ par 2.
2. On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 composées des 9 jetons.
   Déterminer $\operatorname{card}(\mathscr{M})$.
3. On définit $\Omega = \{M \in \mathscr{M}, \det(M) \text{ impair}\}$ et Δ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 dont cinq coefficients sont égaux à 1, quatre coefficients sont nuls et de déterminant impair.
   Donner une relation entre $\operatorname{card}(\Omega)$ et $\operatorname{card}(\Delta)$.
4. Détermination de $\operatorname{card}(\Delta)$.
   - **a.** On considère une matrice de Δ dont une colonne possède trois coefficients égaux à 1.
     Déterminer le nombre K_1 de ces matrices.
   - **b.** On considère une matrice de Δ dont 2 colonnes possèdent exactement un coefficient nul. Déterminer le nombre K_2 de ces matrices.
   - **c.** Calculer $\operatorname{card}(\Delta)$.
   - **d.** En déduire $\operatorname{card}(\Omega)$.
5. Déterminer la probabilité p.

Exercice 24.

On dispose d'un alphabet de n lettres ($n \geqslant 1$). Montrer que le nombre M_n de mots comportant au plus une fois chaque lettre est $\lfloor n!e \rfloor$.

EXERCICE 25.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E_n = [\![1,n]\!]$ et on note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de E_n. On appelle foint fixe de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tout élément a de E_n tel que $\sigma(a) = a$.
Pour $p \in [\![0,n]\!]$, on note $S_{n,p}$ le nombre de permutations de E_n ayant exactement p points fixes.

1. **a.** Montrer que $S_{n,n} = 1$ et que $S_{n,n-1} = 0$.

   b. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} S_{n,k} = n!$.

2. On pose $\omega_n = S_{n,0}$. On convient que $\omega_0 = 1$.

   a. Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $S_{n,k} = \binom{n}{k}\omega_{n-k}$.

   b. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!} = 1$.

   c. En raisonnant par récurrence, montrer que $\frac{\omega_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

   d. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{\omega_n}{n!}$.

EXERCICE 26.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$. Déterminer le nombre de k-cycles de $\mathfrak{S}_n$.

Généralités

EXERCICE 27.

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 8 boules rouges. Quelle est la probabilité de la suite «blanc, blanc, rouge» si on tire successivement trois boules sans remise ?

EXERCICE 28.

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle positive sur l'univers Ω. L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{x_i, i \in [\![1,n]\!]\}$ où $0 \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_n$. On pose $p_k = P(X = x_k)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. On suppose de plus que l'espérance de X est non nulle.
On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note M_k le point de coordonnées (u_k, v_k)

$$u_k = \sum_{j=1}^{k} p_j \qquad\qquad v_k = \frac{1}{E(X)} \sum_{j=1}^{k} x_j p_j$$

On posera également $u_0 = v_0 = 0$. On appelle *courbe de Lorenz* de X la ligne polygonale joignant les points $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$.

1. Quelles sont les coordonnées du point M_n ? Montrer que la courbe de Lorenz est situé au-dessous de la première bissectrice.

2. On appelle *coefficient de Gini*, noté $I(X)$, le double de l'aire de la portion de plan comprise entre la première bissectrice et la courbe de Lorenz.

   a. Montrer que $I(X) \in [0,1]$.

   b. Calculer $I(X)$ en fonction de $v_1, \dots, v_n$ et $p_1, \dots, p_n$.

3. **a.** On suppose que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p. Calculer $I(X)$.

   b. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Calculer $I(X)$.

4. Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Montrer que $I(X) = \frac{E(|X_1 - X_2|)}{2E(X)}$.

EXERCICE 29.

On lance deux dés équilibrés et on note les deux faces visibles. On note E l'évènement « la somme des faces visibles est impaire », F l'évènement « au moins l'une des faces est 1 » et G « la somme des faces est 5 ».

1. Déterminer $E \cap F$, $F \cap G$, $\overline{E \cup F}$.

2. Calculer $P(E), P(F), P(G), P(E \cap F), P(F \cap G), P(E \cup F)$.

3. En déduire $P(F \cup G), P(\overline{E} \cup \overline{F}), P(\overline{F} \cap \overline{G})$.

EXERCICE 30.

Dans une tombola, 1000 billets dont 2 gagnants sont mis en vente. Quel est le nombre minimal de billets qu'il faut acheter pour que la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant soit supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$?

Exercice 31.

Le prince de Toscane demande un jour à Galilée : « Pourquoi, lorsqu'on jette trois dés, obtient-on plus souvent la somme 10 que la somme 9, bien que ces deux sommes soient obtenues toutes les deux de six façons différentes ? » Pouvez-vous répondre à cette question ?

Exercice 32.

Lequel de ces deux évènements est le plus probable : obtenir au moins un 6 en 4 lancers d'un dé, ou obtenir au moins un double 6 en lançant 24 fois deux dés ?

Exercice 33.

On jette trois dés identiques. Calculez :

1. la probabilité d'avoir exactement un 6.
2. la probabilité d'obtenir au moins un 6.
3. la probabilité d'obtenir au moins deux faces identiques.

Exercice 34.

On considère une classe de n élèves. Pour chaque élève, on suppose que chaque jour de l'année a la même probabilité d'être le jour de son anniversaire et on ne prend pas en compte les années bissextiles.
Calculer la probabilité p_n que deux élèves au moins de cette classe aient leur anniversaire le même jour.
à partir de combien d'élèves cette probabilité devient supérieure à 0.5 ? Combien vaut-elle si $n = 50$?

Exercice 35.

Une urne contient 5 boules blanches et 10 boules noires.

1. On tire au hasard 2 fois une boule de l'urne en remettant la boule après le tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir 1 boule blanche et 1 boule noire,
   a. dans cet ordre ?
   b. dans un ordre quelconque ?
2. On tire simultanément 5 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 3 boules noires ?

Exercice 36.

Un lance plusieurs fois un dé idéal. Quel est le nombre minimal de lancers nécessaires pour obtenir avec au moins 9 chances sur 10

1. au moins un six ?
2. au moins deux six ?

Exercice 37.

On tire trois cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir

1. que des cœurs ?
2. que des as ?
3. deux cœurs et un pique ?

(Donner les résultats en forme de fraction irréductible.)

Exercice 38.

Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires.
Donner les résultats aux questions suivantes en forme de fraction irréductible.

1. On prend trois boules au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une boule blanche ?
2. On prend trois boules au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir au moins deux boules de couleur différente ?
3. On prend une boule au hasard, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. Puis on procède encore deux fois de la même manière. Quelle est la probabilité de noter au moins deux fois la couleur blanche ?

Exercice 39.

Dans cet exercice on dispose de cartes et chaque carte comporte une lettre.

1. On arrange au hasard les cartes B, E, T, T et Y. Quelle est la probabilité d'obtenir le mot BETTY ?
2. On arrange au hasard les cartes C, C, C, I, O, O, O et R. Quelle est la probabilité d'obtenir le mot COCORICO ?

Exercice 40.

On considère une maladie dont 5% des personnes atteintes ne guérissent pas. On observe trois malades. Quelle est la probabilité que les trois patients guérissent ? Qu'aucun ne guérisse ? Qu'au moins un des trois ne guérisse pas ?

Exercice 41.

Dans une tombola, 1000 billets dont 2 gagnants sont mis en vente. Quel est le nombre minimal de billets qu'il faut acheter pour que la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant soit supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$?

Indépendance

Exercice 42.

Une famille à n enfants ($n \geqslant 2$). On note

- A l'événement «la famille a des enfants des deux sexes» ;
- B l'événement «la famille a au plus une fille».

Montrer que A et B sont des événements indépendants *si et seulement si* $n = 3$.

Exercice 43.

On lance un dé blanc et un dé rouge. On note b et r les numéros obtenus. On considère les évènements «b+r=7», «b=4» et «$|b-r|$ est pair». Ces évènements sont-ils deux à deux indépendants ?

Exercice 44.

Votre voisin a deux enfants dont vous ignorez les sexes. On considère les trois événements suivants :

- A : « Les deux enfants sont de sexes différents» ;
- B : « L'aîné est une fille» ;
- C : « La cadet est un garçon».

Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 45.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ un univers probabilisé, et A, B et C trois évènements mutuellement indépendants, de probabilités différentes de 0 et 1.

1. Montrer que A et $\mathrm{B} \cup \mathrm{C}$ sont indépendants.
2. Montrez que $\mathrm{P}(\mathrm{B} \cup \mathrm{C})$ est strictement inférieure à 1.

Exercice 46.

Soient $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ n événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. On les suppose mutuellement indépendants et de probabilités respectives $p_i = \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)$. Donner une expression simple de $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cup \dots \cup \mathrm{A}_n)$ en fonction de $p_1, \dots, p_n$.
Application : On suppose qu'une personne est soumise à n expériences indépendantes entre elles, et qu'à chaque expérience elle a une probabilité p d'avoir un accident, où $0 < p < 1$. Quelle est la probabilité qu'elle ait au moins un accident ?

Exercice 47.

Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de lecteurs pour correction. A chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité $1/3$. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième lecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième lecture ?
   Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?

Probabilités conditionnelles

Exercice 48.

On propose un questionnaire comprenant dix questions qui comportent chacune deux réponses possibles, l'une vraie, l'autre fausse. Pour tester si la personne interrogée essaie de deviner au hasard (c'est-à-dire que, pour toutes les questions, elle fait un tirage équiprobable sur les réponses possibles), on adopte la règle de décision suivante.

- Si au moins sept réponses sont bonnes, on admet que la personne interrogée n'a pas essayé de deviner au hasard ;
- sinon on admet la conclusion contraire.

1. Quelle est la probabilité de rejeter l'hypothèse « la personne a essayé de deviner au hasard » lorsque celle-ci est vraie ?
2. Que devient cette probabilité lorsque chacune des questions posées comporte trois réponses dont une seule est vraie ?

Exercice 49.

Un laboratoire a mis au point un alcootest. On sait que 2% des personnes contrôlées par la police sont réellement en état d'ébriété. Les premiers essais ont conduit aux résultats suivants.

- Lorsqu'une personne est réellement en état d'ébriété, 95 fois sur 100, l'alcootest se révèle positif.
- Lorsqu'une personne n'est pas en état d'ébriété, 96 fois sur 100, l'alcootest se révèle négatif.

Quelle est la probabilité pour qu'une personne soit réellement en état d'ébriété lorsque l'alcootest est positif ?

Exercice 50.

On souhaite tester une maladie dans un échantillon de malades donné. On suppose que dans 90% des cas le test est positif lorsqu'on est malade et que dans 85% des cas le test est négatif lorsqu'on n'est pas malade. On sait aussi, lors d'une étude récente que la proportion des malades est 0.005.
Calculer la probabilité pour qu'une personne ayant un test positif soit réellement malade.

Exercice 51.

Dans une région, pendant une saison donnée, les statistiques météorologiques disent qu'en moyenne, il y a 40 % de jours de pluie et donc 60 % de jours sans pluie. Une étude de fiabilité d'un baromètre de marque donnée a montré que, lorsqu'il pleuvait, le baromètre prédisait un jour sans pluie 10 fois sur 100 et lorsqu'il ne pleuvait pas, il prédisait de la pluie 20 fois sur 100. Calculer la probabilité qu'il pleuve quand le baromètre prédisait qu'il pleut. Calculer la probabilité qu'il pleuve quand il indiquait qu'il ne pleut pas.

Exercice 52.

Une société de vente emploie trois transporteurs A, B et C pour faire livrer ses colis. Elle utilise le transporteur A les 3/4 du temps et une fois sur 8 chacun des deux autres. Chaque transporteur égare respectivement 1 %, 2 % et 3 % des colis qui lui sont confiés.

1. Calculer la probabilité qu'un colis se perde.
2. Un client se plaint de n'avoir pas reçu sa commande. Quelle est la probabilité que le transporteur A soit responsable ? Commenter le résultat.

Exercice 53.

On lance trois dés équilibrés. Quelle est la probabilité que l'un de ces dés montre 1 sachant que les trois dés ont montré des chiffres différents ?

Exercice 54.

On considère une urne A contenant deux boules rouges et trois boules vertes et une urne B contenant trois boules rouges et deux boules vertes. On tire au hasard une boule dans l'urne A que l'on place dans l'urne B. On tire ensuite successivement et sans remise deux boules dans l'urne B. Quelle est la probabilité que la boulé tirée dans l'urne A soit verte sachant que les deux boules tirées dans l'urne B sont rouges ?

Exercice 55.

On considère trois cartes :

- une avec les deux faces rouges ;
- une autre avec les deux faces blanches ;
- la dernière avec une face rouge et une face blanche.

On tire une carte au hasard et on expose une face au hasard : elle est rouge. Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?

Exercice 56.

Dans une usine, deux chaînes A et B fabriquent le même composant de manière indépendante. Les composants issus de la chaîne A (resp. B) sont défectueux avec un probabilité de 2% (resp. 4%). La chaîne A (resp. B) produit 30 (resp. 20) composants par jour. On choisit au hasard un composant produit dans la journée.

1. Avec quelle probabilité ce composant est-il défectueux ?
2. S'il est défectueux, quelle est la probabilité qu'il ait été produit par la chaîne B ?

Exercice 57.

On cherche un parapluie qui se trouve avec une probabilité $\frac{p}{7}$ dans l'un des sept étages d'un immeuble ($p \in [0,1]$). On a exploré en vain les six premiers étages. Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au septième étage ?

Exercice 58.

On considère n urnes numérotées de 1 à n. L'urne numéro k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?
2. On suppose qu'on a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée dans l'urne numéro k ?

Exercice 59.

Un buveur impénitent décide d'essayer de ne plus boire. S'il ne boit pas un jour donné, la probabilité qu'il ne boive pas le lendemain est de $0,4$. S'il succombe à la tentation un jour, alors le remords fait que la probabilité qu'il ne boive pas le lendemain monte à $0,8$.

1. Quelle est la probabilité que ce buveur ne boive pas le $n^{\text{ème}}$ jour ?
2. Que se passe-t-il lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 60.

Un examen comporte quinze questions. Chaque question admet trois réponses possibles. Les étudiants répondent à chaque question indépendamment. On suppose que les étudiants ayant préparé l'examen sont ne proportion 70% et répondent correctement à une question avec une probabilité de $0,8$. Les 30% d'étudiants restants choisissent les réponses au hasard. Il faut au moins 8 bonnes réponses pour réussir l'examen.

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard réussisse l'examen ?
2. Si un étudiant échoue, quelle est la probabilité qu'il ait préparé l'examen ?

Exercice 61.

Le génotype d'un individu est un ensemble de 2 gènes parmi a et A. Trois génotypes sont possibles : 1 (aa), 2 (aA) et 3 (AA). L'ordre ne compte pas dans le sens que aA et Aa représente le même génotype.
On s'intéresse à l'évolution d'une population de grande taille (génération 0) dont la proportion du génotype i est notée u_i pour $i \in \{1,2,3\}$.
On suppose les mariages aléatoires et on rappelle que le génotype d'un enfant est formé d'un gène issu de celui de chaque parent, les deux gènes d'un parent ayant la même probabilité d'être transmis.
Soit E le génotype d'un enfant de la première génération.

1. **a.** On note F et M les génotypes respectifs du père et de la mère. Exprimer les probabilités conditionnelles $\mathrm{P}(\mathrm{E}=1|(\mathrm{F},\mathrm{M})=(i,j))$ pour $(i,j)\in\{1,2,3\}^2$.

   b. En déduire que
   $$\mathrm{P}(\mathrm{E}=1)=\left(u_1+\frac{u_2}{2}\right)^2$$
   puis la valeur de $\mathrm{P}(\mathrm{E}=3)$.

   c. On pose $\theta = u_1 + \frac{u_2}{2}$. Déterminer en fonctions de θ les proportions des divers génotypes à la première génération : q_1, q_2, q_3.

   d. Calculer les proportions des divers génotypes à la deuxième génération et en déduire qu'elles sont inchangées au cours du temps.

2. On dispose d'un échantillon de n individus de cette population stabilisée. On note X_i le génotype du $i^{\text{ème}}$ individu de sorte que $\mathrm{P}(\mathrm{X}_i = j) = q_j$. Les variables $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ sont supposées mutuellement indépendantes. Pour $j\in\{1,2,3\}$, on note N_j le nombre d'individus de l'échantillon possédant le génotype j.

   a. Pour $j\in\{1,2,3\}$, déterminer la loi de N_j, son espérance et sa variance.

   b. Calculer $\mathrm{Cov}(\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2)$ en fonction de n, q_1, q_2.

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\theta_n = \frac{\mathrm{N}_1}{n} + \frac{\mathrm{N}_2}{2n}$ (N_1 et N_2 dépendent elles-mêmes de n).

   a. Calculer l'espérance de θ_n.

   b. Montrer que la variance de θ_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 62.

On dispose d'un dé à 6 faces et d'une pièce de monnaie. Après avoir lancé n fois le dé, on lance la pièce autant de fois qu'on a obtenu le 6 avec le dé. On note S le nombre de 6 obtenus avec le dé et F le nombre de faces obtenues avec la pièce.

1. Quelle est la loi de S ?
2. Soit $s \in [\![0, n]\!]$. Déterminer la loi de F conditionnée par l'événement $S = s$.
3. Montrer que F suit la loi $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{12}\right)$.

Exercice 63.

Un chercheur sur la maladie M souhaite examiner si les symptomes A, B, C sont liés à la maladie. Les tests sur 1000 personnes choisies au hasard dans la population durant une longue période de temps sont résumés ci-dessous :

	A	$\overline{A}$
M	20	80
$\overline{M}$	182	718

	B	$\overline{B}$
M	80	20
$\overline{M}$	160	740

	C	$\overline{C}$
M	50	50
$\overline{M}$	50	850

1. La maladie M est-elle indépendante du symptome A ? du symptome B ? du symptome C ? (Justifier.)
2. Sachant que parmi les milles personnes exactement dix ont les symptomes B et C en même temps, combien n'ont ni B ni C ?

Exercice 64.

Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne. Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

Exercice 65.

On considère une urne contenant 3 boules vertes et 3 boules rouges. On lance un dé et on tire simultanément dans l'urne autant de boules que le chiffre obtenu. On note X le nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de X.

Exercice 66.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit au hasard un entier X entre 1 et n puis on choisit au hasard un entier Y entre 1 et X.

1. Déterminer la loi de Y. On donnera les probabilités sous forme de sommes.
2. Déterminer un expression simple de l'espérance de Y.
3. Donner un équivalent de l'espérance de Y lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 67.

Une urne contient quatre boules rouges et deux boules noires.

1. On effectue au hasard un tirage simultané et sans remise de deux boules de l'urne. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules noires obtenues.
   Déterminer la loi de X.
2. Après ce premier tirage, il reste donc quatre boules dans l'urne. On effectue à nouveau au hasard un tirage simultané et sans remise de deux boules de l'urne. On note Y le nombre de boules noires obtenues au second tirage.
   Déterminer la loi de Y.
3. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire au premier tirage sachant que l'on a tiré une seule boule noire au second tirage ?
4. Déterminer la probabilité de l'événement suivant :
   «Il a fallu exactement deux tirages pour extraire les deux boules noires de l'urne».

Exercice 68.

Une maison est équipée d'une alarme. On sait qu'en cas d'effraction, l'alarme fonctionne 99 fois sur 100, et qu'elle se déclenche sans raison 5 fois sur 1000. On estime à 0.1 la probabilité d'une effraction.
L'alarme se déclenche. Quelle est la probabilité que ce soit une fausse alerte ?

EXERCICE 69.

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate que :

- il y a parmi les malades 1 vacciné pour 4 non-vaccinés.
- Il y a 1 malade sur 12 parmi les vaccinés.

Quelle est la probabilité, pour un non-vacciné, de tomber malade ? Le vaccin est-il efficace ?

EXERCICE 70.

On considère n sacs $S_1, \dots, S_n$. Le sac S_k contient k jetons blancs et $n+1-k$ jetons noirs. On choisit un sac aléatoirement, de sorte que le sac S_k est choisi avec la probabilité αk pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, pour un certain réel α fixé. On tire ensuite un jeton au hasard dans le sac choisi.

1. Quelle doit être la valeur de α ?
2. Le jeton tiré est noir. Quelle est la probabilité qu'il provienne du sac S_k ?

EXERCICE 71.

Une urne U_1 contient 1 boule noire et 5 boules blanches. Une autre urne U_2 contient 4 boules noires et 2 blanches. On effectue dans ces urnes une suite de tirages d'une boule de la façon suivante :

- le 1^{er} tirage se fait au hasard dans l'une ou l'autre des deux urnes ;
- si le n-ième tirage ($n \in \mathbb{N}^*$) donne une boule blanche, le $(n+1)$-ième tirage s'effectue dans la même urne que le n-ième tirage ;
- si le n-ième tirage donne une boule noire, on change d'urne pour effectuer le $(n+1)$-ième tirage ;
- chaque boule tirée est aussitôt remise dans l'urne d'où elle provient.

Pour tout $n \geq 1$, on note A_n l'évènement « le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U_1 » et B_n l'évènement « une boule blanche est obtenue au n-ième tirage ».

1. On pose $p_n = P(A_n)$ pour tout $n \geq 1$.
   a. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n (pour tout $n \geq 1$).
   b. En déduire la valeur de p_n en fonction de n, puis montrer que $(p_n)_{n\geq 1}$ converge et donner sa limite.
2. On pose $q_n = P(B_n)$ pour tout $n \geq 1$.
   a. Exprimer q_n en fonction de p_n.
   b. En déduire que $(q_n)_{n\geq 1}$ converge et donner sa limite.

Variables aléatoires

EXERCICE 72.

Soient trois boîtes de gélules de couleurs blanches ou rouges. La proportion du nombre de gélules rouges est variable d'une boîte à l'autre et vaut 1/2 pour la boîte B1, 1/3 pour la boîte B2 et 1/4 pour la boîte B3.
On tire une gélule dans chacune des trois boîtes. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X définissant le nombre de gélules rouges obtenues ?

EXERCICE 73.

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Un joueur tire une boule au hasard et gagne une somme X égale au numéro de la boule tirée. Calculer E(X), V(X) et σ(X).

Exercice 74.

Soit quatre dés à six faces non pipés (les faces sont équiprobables et tous les lancers sont mutuellement indépendants).

- Le dé A a pour face $3;3;3;3;3;3$.
- Le dé B a pour face $2;6;2;6;2;2$.
- Le dé C a pour face $1;5;1;5;1;5$.
- Le dé D a pour face $4;0;4;0;4;4$.

1. Lorsque deux joueurs s'affrontent, ils lancent chacun un dé (les deux dés étant différents). Le gagnant est celui dont la face du dessus comporte le chiffre le plus grand.
   a. Montrer que si Tom joue avec le dé A et Jerry joue avec le dé B, alors Tom a une probabilité de gagner égale à $\frac{2}{3}$.
   b. Montrer que si Tom joue avec le dé B et Jerry joue avec le dé C, alors Tom a une probabilité de gagner strictement plus grande qu'un demi. Calculer cette probabilité.
   c. Montrer que si Tom joue avec le dé C et Jerry joue avec le dé D, alors Tom a une probabilité de gagner strictement plus grande qu'un demi. Calculer cette probabilité.
   d. Que se passe-t-il si Tom joue avec le dé D et si Jerry joue avec le dé A ?
2. On suppose dans cette question que Tom a le droit de sélectionner un des quatre dés et que Jerry peut ensuite choisir un des trois dés restants. Puis chacun lance son dé et le gagnant est celui dont la face du dessus comporte le chiffre le plus grand.
   a. Préférez-vous être à la place de Tom ou de Jerry ? Justifier la réponse.
   b. On suppose que Tom doit payer un euro à Jerry si Jerry gagne et que Jerry doit payer $\alpha \geqslant 0$ euros à Tom si Tom gagne. On suppose que Tom n'accepte de jouer que si l'espérance de son gain est positive ou nulle. Donner l'ensemble des $\alpha \geqslant 0$ pour lesquels Tom accepterait de jouer.
3. On suppose dans cette question que Tom a le droit de sélectionner deux des quatre dés et que Jerry joue avec les deux dés restants. Puis chacun des joueurs lance ses dés et le gagnant est celui dont les faces du dessus des deux dés donne la somme la plus grande. Préférez-vous être à la place de Tom ou de Jerry ? Justifier la réponse.

Exercice 75.

n désigne un entier naturel non nul.
On admet que pour tout $\mathrm{N} \in [\![0, 2^n - 1]\!]$, il existe un unique n-uplet $(x_0, \dots, x_{n-1})$ dans $\{0,1\}^n$ tel que $\mathrm{N} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k b^k$.

1. On note $\mathrm{X}_0, \dots, \mathrm{X}_{n-1}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
   Montrer que la variable aléatoire $\mathrm{U} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \mathrm{X}_k$ suit la loi uniforme sur $[\![0, 2^n - 1]\!]$.
2. Réciproquement on se donne une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur $[\![0, 2^n - 1]\!]$. On note $\mathrm{X}_0, \dots, \mathrm{X}_{n-1}$ les variables de Bernoulli telles que $\mathrm{U} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \mathrm{X}_k$.
   Montrer que $\mathrm{X}_0, \dots, \mathrm{X}_{n-1}$ sont mutuellement indépendantes et de paramètre $\frac{1}{2}$.

Exercice 76.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
   On pose $\mathrm{Y} = \max(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ et $\mathrm{Z} = \min(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$.
   a. Déterminer les lois de Y et Z.
   b. Calculer leurs espérances et leurs variances.
   c. Déterminer des équivalents des espérances et des variances de Y et Z lorsque n tend vers $+\infty$.
   d. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?
2. On se donne maintenant $p \in \mathbb{N}^*$ et on considère p variables aléatoires mutuellement indépendantes $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_p$ suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
   On pose $\mathrm{Y} = \max(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_p)$ et $\mathrm{Z} = \min(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_p)$.
   a. Déterminer les lois de Y et Z.
   b. Calculer les espérances de Y et Z (sous forme d'une somme) ainsi que leurs limites lorsque p tend vers $+\infty$.
   c. Déterminer des équivalents des espérances de Y et Z lorsque n tend vers $+\infty$, p étant fixé.

EXERCICE 77.

Un concierge a n clés dont une seule ouvre sa porte, mais il ne sait plus laquelle.

1. Il les essaie l'une après l'autre en éliminant après chaque essai la clé qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais pour trouver la bonne clé.

2. Le concierge rentre chez lui après une soirée bien arrosée... Après chaque essai, il remet la clé essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais pour trouver la bonne clé.

EXERCICE 78.

Un fumeur a dans chacune de ses poches droite et gauche une boîte d'allumettes de contenance N chacune. Lorsqu'il désire une allumette, il choisit au hasard une de ses poches (chacune avec un probabilité 1/2). On considère le moment où, pour la première fois, le fumeur ouvre une boîte vide. A ce moment, l'autre boîte peut contenir un nombre d'allumettes compris entre 0 et N. On note $\mu_{r,\mathrm{N}}$ la probabilité qu'elle en contienne r.

1. Calculer $\mu_{r,\mathrm{N}}$ pour $r \in [\![0,\mathrm{N}]\!]$.

2. Donner un équivalent de $\mu_{0,\mathrm{N}}$ lorsque N tend vers $+\infty$.

3. Montrer que pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et tour $r \in [\![0,\mathrm{N}]\!]$
$$(2\mathrm{N}+2)\mu_{r+1,\mathrm{N}+1} = (2\mathrm{N}+1-r)\mu_{r,\mathrm{N}}$$

4. On note $\mathrm{E_N}$ le nombre moyen d'allumettes restantes lorsque le fumeur ouvre une boîte vide pour la première fois (quand les deux boîtes contiennent N allumettes au départ). Montrer que
$$\mathrm{E_N} = \frac{(2\mathrm{N}+1)}{2^{2\mathrm{N}}}\binom{2\mathrm{N}}{\mathrm{N}} - 1$$

5. Déterminer un équivalent de $\mathrm{E_N}$ lorsque N tend vers $+\infty$.

6. Déterminer le nombre moyen $\mathrm{F_N}$ d'allumettes utilisées lorsque le fumeur ouvre une boîte vide pour la première fois (quand les deux boîtes contiennent N allumettes au départ).

EXERCICE 79.

On considère dans cette partie des entiers naturels non nuls n, u, d, t, b vérifiant $u+d+t = b$.
Une urne $\mathscr{U}$ contient b boules parmi lesquelles u boules portent le numéro 1, d le numéro 2 et t le numéro 3.
Une expérience consiste en n tirages successifs d'une boule de l'urne $\mathscr{U}$ *avec remise*. Les tirages sont supposés mutuellement indépendants.
A chaque tirage, toutes les boules de l'urne $\mathscr{U}$ ont la même probabilité d'être tirées.
L'univers Ω est l'ensemble $\{1,2,3\}^n$ et on note U (resp. D, T) la variable aléatoire définie sur Ω dont la valeur est le nombre de boules numérotées 1 (resp. 2, 3) tirées au cours de l'expérience.

1. Montrer que la variable aléatoire U suit une loi usuelle (à préciser). Donner son espérance et sa variance.
   Donner de même les lois des variables aléatoires D et T.

2. Les variables U et D sont-elles indépendantes ? Justifier.

3. Déterminer sans calcul la loi de la variable aléatoire U+D, son espérance et sa variance.

4. En déduire que la covariance du couple (U, D) est égale à $-\dfrac{nud}{b^2}$.

EXERCICE 80.

Une entreprise recrute un cadre. n candidats se présentent pour le poste (n étant un entier naturel non nul fixé). Chacun d'eux passe un test et le premier qui y satisfait est engagé. La probabilité qu'a un candidat de réussir le test est $p \in]0,1[$. On notera $q = 1-p$ pour alléger les calculs.
On définit la variable aléatoire X par $\mathrm{X} = k$ si le k-ième candidat qui se présente est engagé, et $\mathrm{X} = n+1$ si aucun des n candidats n'est engagé.

1. **a.** Déterminez la loi de X.

   b. Vérifiez que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = 1$.

2. **a.** En dérivant par rapport à x la formule donnant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

   b. En déduire que $\mathrm{E(X)} = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

3. Comment doit-on choisir p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des n candidats ? Calculer la valeur minimum de p obtenue pour $n = 4$ puis pour $n = 10$.

Exercice 81.

Un mobile évolue de façon aléatoire le long d'un axe gradué, d'origine O. A l'instant $t=0$, il est en O. A chaque instant entier $t=k$, son abscisse varie de $+1$ avec la probabilité p et de -1 avec la probabilité $q=1-p$, où p est un nombre fixé dans $]0,1[$. On note X_n son abscisse au temps $t=n$.

1. Quelles sont les valeurs possibles de X_1, X_2 et X_3 ?
2. Plus généralement, montrer que les valeurs possibles de X_n sont les entiers relatifs $2k-n$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$.
3. Déterminer la loi de X_n.
4. On pose $Y_n = \dfrac{X_n+n}{2}$.
   - **a.** Reconnaître la loi de Y_n, et donner sans calculs $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
   - **b.** En déduire $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
   - **c.** Quelles sont les limites de $E(X_n)$ et $V(X_n)$ quand $n \to +\infty$?

Exercice 82.

Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues.

1. On tire au hasard 4 boules successivement sans remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de X, puis calculer l'espérance de X.
2. On tire maintenant au hasard 4 boules successivement *avec* remise. Reprendre la question précédente avec la variable aléatoire Y égale au nombre de boules rouges obtenues.

Lois de variables aléatoires

Exercice 83.

On note E_n l'ensemble des applications de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même. On choisit au hasard de manière équiprobable une de ces applications et on définit la variable aléatoire X_n égale au nombre de points fixes de cette application.

1. Déterminer la loi de X_n.
2. Soit $k\in\mathbb{N}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=k)$.

Exercice 84.

Dans tout l'exercice, N désigne un entier naturel non nul.
Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$. On note T_n et Z_n les variables aléatoires définies pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par

$$T_n=\sup(U_1,\dots,U_n) \qquad \text{et} \qquad Z_n=\inf(U_1,\dots,U_n)$$

On pose $S_n=T_n+Z_n-1$.
On pose enfin pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$a_n(N)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } N\geqslant 2\\ 0 & \text{si } N=1\end{cases}$$

1. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,N]\!]$. Établir la relation suivante.

$$E(Y)=\sum_{k=0}^{N-1}P(Y>k)$$

2. **a.** Calculer $P(T_n\leqslant k)$ pour tout $k\in[\![1,N]\!]$.
   b. En déduire la loi de T_n.
   c. Calculer $E(T_n)$ en fonction de N et $a_n(N)$.
3. **a.** Calculer $P(Z_n>k)$ pour tout $k\in[\![0,N-1]\!]$.
   b. En déduire $E(Z_n)$ en fonction de $a_n(N)$.
4. **a.** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(T_n)$.
   b. Déterminer $E(S_n)$.

Exercice 85.

Soit (Ω,P) un espace probabilisé fini et $(A,B)\in\mathscr{P}(\Omega)^2$ tel que $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$ et $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\mathbb{1}_A+2\mathbb{1}_B$.

Exercice 86.

On considère une urne contenant r boules rouges et $N-r$ boules blanches ($1\leqslant r\leqslant N$). On tire successivement et sans remise toutes les boules. On note X_n le rang d'apparition de la $n^{\text{ème}}$ boule rouge ($1\leqslant n\leqslant r$). Déterminer la loi de X_n.

Exercice 87.

On lance simultanément 4 dés indiscernables et on note X le nombre de numéros différents sortis. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 88.

Soient n et N des entiers naturels tels que $1 \leqslant n \leqslant \mathrm{N}$.
On dispose d'une urne contenant N boules : N_1 blanches et N_2 noires.

1. On tire successivement n boules dans l'urne avec remise et on note X le nombre de boules blanches obtenues. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. On tire successivement n boules dans l'urne sans remise et on note Y le nombre de boules blanches obtenues. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
3. On tire simultanément n boules dans l'urne et on note Z le nombre de boules blanches obtenues. Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance.

Exercice 89.

Peut-on piper deux dés de manière à ce qu'il y ait équiprobabilité sur l'ensemble des sommes possibles obtenues en les lançant simultanément ?

Exercice 90.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Existe-t-il deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ dont la somme suit une loi uniforme sur $[\![0, 2n]\!]$?

Exercice 91.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=\mathrm{Z})$.

Exercice 92.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant la loi $\mathscr{U}\left([\![0, n]\!]^2\right)$.

1. Déterminer les lois de X, Y et X + Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 93.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y})$.

Exercice 94.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$. On pose $\mu_r = \mathbb{E}((\mathrm{X}-np)^r)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\mu_r x^r}{r!}$ converge et calculer sa somme.

Chaînes de Markov

Exercice 95.

Alphonse, Bérénice et Clothilde jouent à la balle.

- Lorsqu'Alphonse a la balle, il la passe à Bérénice avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et à Clothilde avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.
- Lorsque Bérénice a la balle, elle la passe à Alphonse avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et à Clothilde avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.
- Lorsque Clothilde a la balle, elle l'envoie toujours à Bérénice.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

- A_n l'événement «Alphonse possède la balle à l'issue du $n^{\text{ème}}$ lancer» ;
- B_n l'événement «Bérénice possède la balle à l'issue du $n^{\text{ème}}$ lancer» ;
- C_n l'événement «Clothilde possède la balle à l'issue du $n^{\text{ème}}$ lancer».

On pose $a_n = \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$, $b_n = \mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(\mathrm{C}_n)$.
Au départ la balle est lancée à l'un des trois joueurs. C'est par convention le lancer numéro 0.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice M telle que $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{M}\mathrm{X}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{P}(\lambda) = \det(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_3)$. Montrer que P admet trois racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que l'on déterminera.
4. Déterminer trois matrices colonnes non nulles $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3$ telles que $\mathrm{M}\mathrm{U}_k = \lambda_k \mathrm{U}_k$ pour tout $k \in \{1,2,3\}$.
5. En déduire une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$.
6. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis a_n, b_n, c_n en fonction de a_0, b_0, c_0 et n.
7. Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n), (c_n) en fonction de a_0, b_0, c_0.

Exercice 96.

Une boîte A contient deux jetons portant le numéro 0 et une boîte B contient deux jetons portant le numéro 1.
Un échange consiste à tirer un jeton dans chaque boîte et à les échanger. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la somme des numéros des jetons contenus dans la boîte A après n échanges.
On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $q_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ et $r_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$.

1. Calculer p_0, q_0, r_0 et p_1, q_1, r_1.
2. Exprimer p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1} en fonction de p_n, q_n, r_n.
3. Déterminer une relation entre q_n, q_{n+1}, q_{n+2}.
4. Exprimer p_n, q_n et r_n en fonction de n.
5. Déterminer les limites des suites (p_n), (q_n), (r_n).

Couples de variables aléatoires

Exercice 97.

Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue n tirages sans remise dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi du couple (X, Z).
2. En déduire la loi de Z.

Exercice 98.

Soient n et N des entiers naturels tels que $2 \leqslant n \leqslant N$.
On effectue un tirage simultané de n boules dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On note X et Y respectivement le plus grand et le plus petit numéro obtenu.

1. Question préliminaire : soient a et b des entiers naturels tels que $a \leqslant b$. Montrer que
$$\sum_{k=a}^{b} \binom{k}{a} = \binom{b+1}{a+1}$$
2. Déterminer les lois de X et Y.
3. Déterminer la loi du couple (X, Y). En déduire la loi de $X - Y$.
4. Déterminer les espérances de X et Y.
5. Déterminer les variances de X et Y.
6. Déterminer la variance de $X - Y$. En déduire la covariance du couple (X, Y).

Exercice 99.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi sur un espace probabilisé fini (Ω, P). On note $E = X_1(\Omega) = X_2(\Omega)$ et on se donne une application $f : E^2 \to F$ telle que $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$ pour tout $(x_1, x_2) \in E^2$.
On pose $Y_1 = f(X_1, X_2)$ et $Y_2 = f(X_2, X_1)$. Montrer que Y_1 et Y_2 ont même loi.

Espérance et variance

Exercice 100.

Soit un espace probabilisé fini (Ω, P).
Pour toute variable aléatoire X sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit le polynôme G_X par

$$\mathrm{G}_\mathrm{X} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}=n)\mathrm{X}^n$$

1. Soit X une variable aléatoire sur Ω.
   - **a.** Que vaut $\mathrm{G}_\mathrm{X}(1)$?
   - **b.** Montrer que $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}_\mathrm{X}'(1)$.
   - **c.** Montrer que $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}_\mathrm{X}''(1) + \mathrm{G}_\mathrm{X}'(1) - \mathrm{G}_\mathrm{X}'(1)^2$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur Ω.
   Montrer que $\mathrm{G}_{\mathrm{X}+\mathrm{Y}} = \mathrm{G}_\mathrm{X}\mathrm{G}_\mathrm{Y}$.
3. Déterminer une expression factorisée G_X lorsque X suit une loi binomiale de paramètres n et p. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 101.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.
On pose $\mathrm{Z} = |\mathrm{X}-\mathrm{Y}|$ et $\mathrm{T} = \inf(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

1. Déterminer l'espérance de Z.
2. En déduire l'espérance de T.
3. Calculer l'espérance de Z^2 en fonction de la variance de X.

Exercice 102.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Déterminer l'espérance de $\dfrac{1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)}$.

Exercice 103.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. En utilisant la formule de transfert, déterminer l'espérance de $\mathrm{Z} = \dfrac{1}{\mathrm{X}+\mathrm{Y}+1}$.

Exercice 104.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. En utilisant la formule de transfert, déterminer l'espérance de $\mathrm{Z} = \dfrac{1}{\mathrm{X}+\mathrm{Y}+1}$.

Exercice 105.

On considère une urne contenant n boules numérotées. On procède à un tirage successif de n boules avec remise. On note X le nombre de numéros qui sont sortis au moins une fois pendant le tirage. Calculer l'espérance de X ainsi qu'un équivalent de celle-ci lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 106.

Soit un entier $n \geqslant 2$. On munit le groupe symétrique S_n de la probabilité uniforme. On note X la variable aléatoire qui à une permutation associe son nombre de points fixes. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Inégalités

Exercice 107.

Soient X une variable aléatoire réelle et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{P}\left(|\mathrm{X}| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathrm{E}(g(|\mathrm{X}|)}{g(a)}$$

Exercice 108.

On lance n fois une pièce de monnaie bien équilibrée. En utilisant l'inégalité de Tchebychev, déterminer n pour que la fréquence d'apparition de «face» soit comprise entre $0,45$ et $0,55$ avec une probabilité au moins égale à $0,9$.

Exercice 109.

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini.

1. Soit C un événement. Montrer que $\mathrm{V}(\mathbb{1}_\mathrm{C}) \leqslant \frac{1}{4}$.
2. Soient A et B deux événements. Montrer que $|\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_\mathrm{A}, \mathbb{1}_\mathrm{B})| \leqslant \frac{1}{4}$.
3. En déduire que
$$|\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})| \leqslant \frac{1}{4}$$
   Quand a-t-on égalité ?