

# DEVOIR À LA MAISON N°12

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1 —

On note  $f$  l'application qui à un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  associe le polynôme  $(X^2 - 1)P'' + 4XP'$ .

On rappelle que  $\mathbb{R}_n[X]$  désigne l'ensemble des polynômes de degré *inférieur ou égal* à  $n$ . Notamment  $\mathbb{R}_{-1}[X] = \{0\}$ .

On notera également  $I_n$  l'identité de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

### Partie I – Étude d'un endomorphisme

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .
2. On suppose qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $P \in \mathbb{R}[X]$  non nul tel que  $f(P) = \lambda P$ . En considérant le coefficient dominant de  $P$ , montrer que l'on a nécessairement  $\lambda = n(n+3)$  où  $n$  désigne le degré de  $P$ .
3. Dans la suite de l'énoncé, on pose  $\lambda_n = n(n+3)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que si un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  non nul vérifie  $f(P) = \lambda_n P$ , alors  $\deg P = n$ .
4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $f$  induit un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ , autrement dit que  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $f$ . On notera  $f_n$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  induit par  $f$ .
5. Dans cette question, on pose  $F_n = \text{Ker}(f_n - \lambda_n I_n)$  et  $G_n = \text{Im}(f_n - \lambda_n I_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - a. Montrer  $G_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Que peut-on en déduire sur la dimension de  $F_n$  ?
  - b. Montrer que  $\mathbb{R}_n[X] = F_n \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .
  - c. En déduire la dimension de  $F_n$  puis l'existence d'un unique polynôme  $P_n$  unitaire tel que  $f(P_n) = \lambda_n P_n$ . On précisera le degré de  $P_n$ .
6. On pose  $Q_n = (-1)^n P_n(-X)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $f(Q_n) = \lambda_n Q_n$ . Que peut-on en déduire sur la parité de  $P_n$  ?
7. Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ , le coefficient de  $X^{n-2}$  dans  $P_n$  est  $-\frac{n(n-1)}{2(2n+1)}$ .
8. Calculer  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$ .
9. On pose pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_n = (X^2 - 1)P'_n - nXP_n$ .
  - a. Montrer que  $R'_n = (n+2)(nP_n - XP'_n)$  puis calculer  $f(R_n)$  en fonction de  $R_n$  seulement.
  - b. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$R_n + \frac{n(n+2)}{2n+1} P_{n-1} = 0$$

- c. En dérivant cette dernière relation, montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$P_n - X P_{n-1} + \frac{n^2 - 1}{4n^2 - 1} P_{n-2} = 0$$

## Partie II – Comportement asymptotique d'une suite

On considère la suite réelle  $(u_n)$  de premiers termes  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = \frac{10}{9}$  et telle que pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{9} \left[ u_{n-1} - u_{n-2} + \frac{3}{4n^2 - 1} u_{n-2} \right]$$

10. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle  $\frac{1}{4X^2 - 1}$ . En déduire une expression simple de

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{4k^2 - 1} \text{ pour tout entier } n \geq 2 \text{ ainsi que la limite de la suite } (S_n).$$

11. a. Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \geq u_{n-1} \geq 1$ .  
b. Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$u_n = u_1 + \frac{1}{9} \left[ u_{n-1} - u_0 + \sum_{k=2}^n \frac{3}{4k^2 - 1} u_{k-2} \right]$$

- c. En déduire que  $u_n \leq \frac{6}{5}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et en déduire la convergence de la suite  $(u_n)$ .

12. On pose pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in \mathbb{R}$

$$f_n(t) = \frac{2^n}{e^{nt}} P_n(\operatorname{ch} t)$$

- a. Déterminer les fonctions  $f_0$  et  $f_1$  et montrer que pour tout entier  $n \geq 2$

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_n(t) - f_{n-1}(t) = e^{-2t} \left[ f_{n-1}(t) - f_{n-2}(t) + \frac{3}{4n^2 - 1} f_{n-2}(t) \right]$$

- b. Montrer par récurrence que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , les fonctions  $f_{n-1}$  et  $f_n - f_{n-1}$  sont positives et décroissantes sur  $\mathbb{R}$ .

13. Montrer que la fonction  $\operatorname{ch}$  induit une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur  $[1, +\infty[$ . On note  $\operatorname{argch}$  sa bijection réciproque. Préciser le sens de variation de  $\operatorname{argch}$ .

14. a. On pose  $\alpha = \operatorname{argch}(5/3)$ . Déterminer  $e^\alpha$  et montrer que  $u_n = f_n(\alpha)$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .  
b. On se donne un réel  $x \geq \frac{5}{3}$ . Montrer que la suite de terme général  $f_n(\operatorname{argch} x)$  converge vers une limite strictement positive  $\ell(x)$  que l'on ne demande pas de déterminer.  
En déduire un équivalent de  $P_n(x)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  que l'on exprimera à l'aide de  $\ell(x)$ .