

# FONCTIONS À VALEURS VECTORIELLES

Dans tout ce chapitre, les fonctions considérées sont des fonctions définies sur un **intervalle**  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans un  $\mathbb{K}$ -**espace vectoriel normé  $E$  de dimension finie** ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).

## 1 Dérivabilité

### 1.1 Définition

#### Définition 1.1 Dérivabilité en un point

Soit  $f : I \rightarrow E$ . On dit que  $f$  est **dérivable** en  $a \in I$  si  $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  admet une limite en  $a$ . Dans ce cas, cette limite est notée  $f'(a)$ .

#### Définition 1.2 Négligeabilité

Soient  $f$  une fonction à valeurs dans  $E$  et  $g$  une fonction à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , toutes deux définies sur un voisinage de  $a$  (éventuellement non définies en  $a$ ). On dit que  $f$  est **négligeable** devant  $g$  en  $a$  si  $\lim_a \frac{f}{g} = 0$ . On note alors  $f = o_a(g)$ .

#### Proposition 1.1 Dérivabilité et développement limité

Une fonction  $f : I \rightarrow E$  est dérivable en  $a \in I$  si et seulement si  $f$  admet un développement limité d'ordre 1 en  $a$ . Dans ce cas, ce développement limité est

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$$

#### Proposition 1.2

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Alors  $f : I \rightarrow E$  est dérivable en  $a \in I$  si et seulement si les fonctions  $f_i = e_i^* \circ f$  sont dérivables en  $a$ . Dans ce cas,

$$f'(a) = \sum_{i=1}^n f'_i(a)e_i$$

#### Définition 1.3 Dérivabilité à gauche, à droite

Soit  $f : I \rightarrow E$ .

Alors  $f$  est **dérivable à droite** en  $a \in I$  si  $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  admet une limite à droite en  $a$ .

De même,  $f$  est **dérivable à gauche** en  $a \in I$  si  $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  admet une limite à gauche en  $a$ .

### 1.2 Opérations sur les fonctions dérivables

**Proposition 1.3 Combinaison linéaire**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  dérivables en  $a \in I$  (resp. sur  $I$ ). Alors pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ ,  $\lambda f + \mu g$  est dérivable en  $a$  (resp. sur  $I$ ). De plus,  $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ .

**Proposition 1.4 Composition par une application linéaire**

Soit  $f : I \rightarrow E$  dérivable en  $a \in I$  (resp. sur  $I$ ) et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $L \circ f$  est dérivable en  $a$  (resp. sur  $I$ ). De plus,  $(L \circ f)' = L \circ f'$ .

**Proposition 1.5 Dérivabilité et application bilinéaire**

Soient  $f : I \rightarrow E$  et  $g : I \rightarrow F$  dérivables en  $a \in I$  (resp. sur  $I$ ). Soit  $B : E \times F \rightarrow G$  une application **bilinéaire**. Alors  $B(f, g)$  est dérivable en  $a$  (resp. sur  $I$ ). De plus,  $B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$ .

**REMARQUE.**  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie.

**Exercice 1.1**

Soit  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une application dérivable. Montrer que si  $A(t)$  et  $A'(t)$  commutent pour tout  $t \in I$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n$  est dérivable sur  $I$  et que  $(A^n)' = nA'A^{n-1} = nA^{n-1}A'$ .

**Corollaire 1.1**

Soient  $E$  un espace euclidien,  $f : I \rightarrow E$  et  $g : I \rightarrow E$  deux fonctions dérivables en  $a \in I$  (resp. sur  $I$ ). Alors  $\langle f, g \rangle$  est dérivable en  $a$  (resp. sur  $I$ ) et  $\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$ .

**Exemple 1.1**

Si  $E$  est un espace euclidien et  $f : I \rightarrow E$  est une fonction dérivable sur  $I$  **ne s'annulant pas sur  $I$** , alors  $\|f\|$  est dérivable sur  $I$  et  $\|f\|' = \frac{\langle f', f \rangle}{\|f\|}$ .

**Proposition 1.6 Composition**

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi : I \rightarrow J$  dérivable sur  $I$  et  $f : J \rightarrow E$  dérivable sur  $J$ . Alors  $f \circ \varphi$  est dérivable sur  $I$  et  $(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi)$ .

**1.3 Fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$** **Définition 1.4 Fonction de classe  $\mathcal{C}^k$** 

Soient  $f : I \rightarrow E$  et  $k \in \mathbb{N}$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  si  $f$  est dérivable  $k$  fois sur  $I$  et si  $f^{(k)}$  est continue sur  $I$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  si  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $I$ .

**Notation 1.1**

On note  $\mathcal{C}^k(I, E)$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  à valeurs dans  $E$ .

**Proposition 1.7 Combinaison linéaire**

Soit  $(f, g) \in \mathcal{C}^k(I, E)^2$ , où  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Alors pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ ,  $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^k(I, E)^2$ .  
De plus, si  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$ .

**REMARQUE.** Ceci signifie que  $\mathcal{C}^k(I, E)$  est un  $\mathbb{K}$ -**espace vectoriel** et, plus précisément, un sous-espace vectoriel de  $E^I$ .

**Proposition 1.8 Composition par une application linéaire**

Soit  $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$ , où  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , et  $L \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $L \circ f \in \mathcal{C}^k(I, F)$ .  
De plus, si  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(L \circ f)^{(k)} = L \circ f^{(k)}$ .

**Proposition 1.9 Composition**

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi \in \mathcal{C}^k(I, J)$  et  $f \in \mathcal{C}^k(J, E)$ , où  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Alors  $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^k(I, E)$ .

## 2 Intégration

### 2.1 Définition et propriétés générales

**Définition 2.1 Fonctions continues par morceaux**

Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow E$  est dite **continue par morceaux** si ses coordonnées dans une base de  $E$  le sont.  
Une fonction  $f : I \rightarrow E$  est dite **continue par morceaux** si elle est continue par morceaux sur **tout segment** de  $I$ .

**REMARQUE.** La continuité par morceaux ne dépend pas de la base choisie.

**Notation 2.1**

On notera  $\mathcal{C}_m(I, E)$  l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $E$ .

**Définition 2.2 Intégrale d'une fonction vectorielle**

Soient  $f \in \mathcal{C}_m([a, b], E)$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . La quantité

$$\sum_{k=1}^n \left( \int_a^b e_k^* \circ f(t) \, dt \right) e_k$$

est indépendante de la base de  $E$  choisie. On la note  $\int_a^b f(t) \, dt$ ,  $\int_{[a,b]} f$  ou  $\int_a^b f$ .

Les propriétés des intégrales des fonctions à valeurs **vectorielles** sont quasiment les mêmes que celles des intégrales à valeurs **numériques**.

**Proposition 2.1 Linéarité de l'intégrale**

Soit  $(f, g) \in \mathcal{C}_m([a, b], E)^2$ . Pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ ,

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

**REMARQUE.** Ceci signifie que l'application  $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$  est une **application linéaire** de  $\mathcal{C}_m([a, b], E)$  dans  $E$ .

**Exercice 2.1**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $L \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $f \in \mathcal{C}_m([a, b], E)$ . Montrer que

$$L\left(\int_a^b f(t) dt\right) = \int_a^b L(f(t)) dt$$

**Proposition 2.2 Relation de Chasles**

Soient  $a, b, c$  trois réels tels que  $a \leq c \leq b$  et  $f$  continue par morceaux sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $E$ . Alors

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

**REMARQUE.** On en déduit notamment que  $\int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$ .

**Proposition 2.3 Inégalité triangulaire**

Soit  $f \in \mathcal{C}_m([a, b], E)$ . Alors

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$



**ATTENTION!** L'ordre des bornes importe. On doit avoir  $a \leq b$ .

**2.2 Sommes de Riemman****Définition 2.3 Somme de Riemann**

Soit  $f \in \mathcal{C}_m([a, b], E)$ . On appelle **somme de Riemann** de  $f$  l'une des deux sommes suivantes :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \qquad R'_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k)$$

où  $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $n$  est un entier non nul.

**Proposition 2.4 Convergence des sommes de Riemann**

Soit  $f \in \mathcal{C}_m([a, b], E)$ . Alors les suites  $(R_n(f))$  et  $(R'_n(f))$  convergent vers  $\int_a^b f(t) dt$ .

**REMARQUE.** L'ordre des bornes n'est pas important.

**2.3 Théorème fondamental de l'analyse et conséquences****Définition 2.4 Primitive**

Soit  $f \in \mathcal{C}(I, E)$ . On dit que  $F : I \rightarrow E$  est une **primitive** de  $f$  sur  $I$  si  $F$  est dérivable sur  $I$  et  $F' = f$ .

**Théorème 2.1 Théorème fondamental de l'analyse**

Soient  $f \in \mathcal{C}(I, E)$  et  $a \in E$ . Alors  $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est l'**unique primitive de  $f$  sur  $I$  s'annulant en  $a$** .

**Corollaire 2.1**

Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b], E)$ . Si  $F$  est une **primitive** de  $f$  sur  $[a, b]$ , alors

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

**Corollaire 2.2 Inégalité des accroissements finis**

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$ . Si  $\|f'\| \leq K$  sur  $I$ , alors

$$\forall (a, b) \in I^2, \|f(b) - f(a)\| \leq K|b - a|$$

**REMARQUE.** Il est essentiel que  $I$  soit un **intervalle**.

**REMARQUE.** Ceci signifie que  $f$  est  $K$ -lipschitzienne sur  $I$ .

**REMARQUE.** Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un **segment**  $[a, b]$ ,  $\|f'\|$  est continue sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  : elle y admet donc un maximum  $M$ .  $f$  est alors  $M$ -lipschitzienne.

**Techniques de calcul**

Puisque l'intégrale d'une fonction vectorielle est définie à l'aide des intégrales de ses coordonnées dans une base (i.e. des intégrales de fonctions numériques), les techniques de calcul vues en première année s'appliquent encore :

- intégration par parties ;
- changement de variable.

**3 Formules de Taylor**

**Proposition 3.1 Formule de Taylor avec reste intégral**

Soit  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], E)$ . Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

**REMARQUE.** L'ordre de  $a$  et  $b$  n'importe pas.

**Proposition 3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange**

Soit  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], E)$ . Alors

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max_{[a,b]} \|f^{(n+1)}\|$$

**REMARQUE.** L'ordre de  $a$  et  $b$  n'importe pas.

**REMARQUE.**  $\|f^{(n+1)}\|$  admet bien un maximum sur le **segment**  $[a, b]$  puisqu'elle y est **continue**.

**Proposition 3.3 Formule de Taylor-Young**

Soient  $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$  et  $a \in I$ . Alors  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $a$  donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

## 4 Arcs paramétrés

### 4.1 Définition

**Définition 4.1 Arc paramétré**

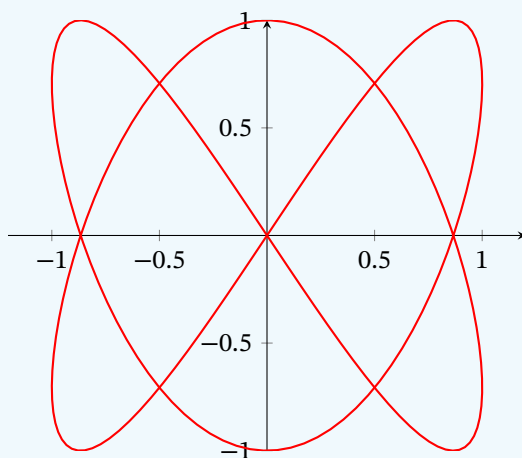
On appelle **arc paramétré** à valeurs dans  $E$  tout couple  $(I, \gamma)$  où  $I$  est un intervalle et  $\gamma$  une application de  $I$  dans  $E$ . L'ensemble  $\gamma(I)$  est appelé le **support** de l'arc paramétré.

On dira que  $(I, \gamma)$  est un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^k$  si  $\gamma$  l'est.

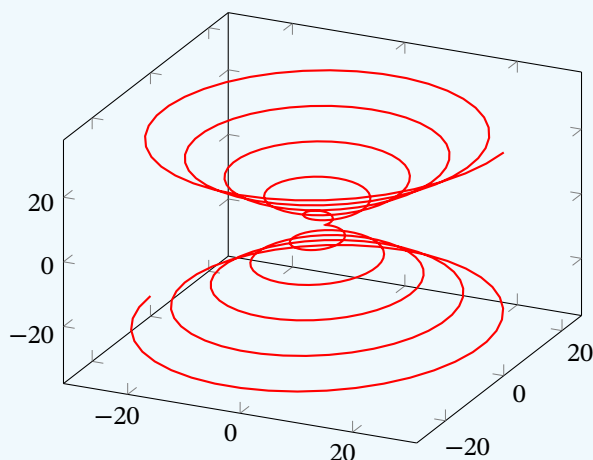
**REMARQUE.** Si  $E = \mathbb{R}^2$ , on parle d'**arc plan**.

**REMARQUE.** Si  $E = \mathbb{R}^2$  ou  $E = \mathbb{R}^3$ , le support de l'arc paramétré est une **courbe**.

**Exemple 4.1** Support de l'arc paramétré  $t \in \mathbb{R} \mapsto (\sin(2t), \sin(3t))$



**Exemple 4.2** Support de l'arc paramétré  $t \in \mathbb{R} \mapsto (t \cos(t), t \sin(t), t)$



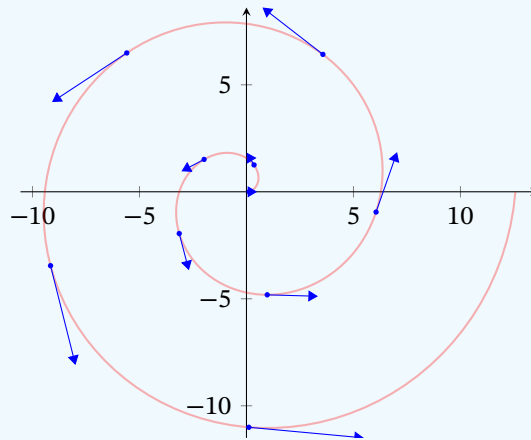
**Définition 4.2** Paramètre régulier

Soit  $(I, \gamma)$  un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$  à valeurs dans  $E$ . On dira que  $t_0 \in I$  est un **paramètre régulier** si  $\gamma'(t_0) \neq 0_E$ .

## 4.2 Tangentes et normales

**Proposition 4.1** Vecteur tangent

Soient  $(I, \gamma)$  un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $t_0 \in I$  un paramètre régulier. Alors  $\gamma'(t_0)$  est un vecteur directeur de la tangente à la courbe représentative de  $(I, \gamma)$ .

**Exemple 4.3 Vecteurs tangents à l'arc paramétré  $t \in \mathbb{R} \mapsto (t \cos t, t \sin t)$** **Méthode Déterminer la tangente à un arc plan**

Soient  $(I, \gamma)$  un arc paramétré à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  et  $t_0 \in I$  un paramètre régulier. La tangente  $\mathcal{T}_{t_0}$  à la courbe représentative de  $(I, \gamma)$  est  $\gamma(t_0) + \text{vect}(\gamma'(t_0))$ .

On peut déterminer une équation cartésienne de cette tangente en remarquant que

$$M \in \mathcal{T}_{t_0} \iff \text{Det}(M - \gamma(t_0), \gamma'(t_0)) = 0$$

**REMARQUE.** La notation  $\text{Det}$  désigne ici le déterminant dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Mais en fait, peu importe la base choisie puisque la colinéarité est indépendante de cette base.

**Méthode Déterminer la normale à un arc plan**

Soient  $(I, \gamma)$  un arc paramétré à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  et  $t_0 \in I$  un paramètre régulier. La normale  $\mathcal{N}_{t_0}$  à la courbe représentative de  $(I, \gamma)$  est  $\gamma(t_0) + \text{vect}(\gamma'(t_0))^\perp$ .

On peut déterminer une équation cartésienne de cette tangente en remarquant que

$$M \in \mathcal{N}_{t_0} \iff \langle M - \gamma(t_0), \gamma'(t_0) \rangle = 0$$

**REMARQUE.** On a muni ici  $\mathbb{R}^2$  de sa structure euclidienne usuelle.



**Exemple 4.4 Cercle trigonométrique**

Posons  $x(t) = \cos t$  et  $y(t) = \sin(t)$  et étudions l'arc paramétré  $t \mapsto (x(t), y(t))$ .

**Courbe** Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$  donc la courbe représentative de cet arc paramétré est le cercle trigonométrique.

**Tangente** Soit  $t_0 \in \mathbb{R}^2$ . La tangente au point de paramètre  $t_0$  a pour équation

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

autrement dit

$$x \cos(t_0) + y \sin(t_0) = 1$$

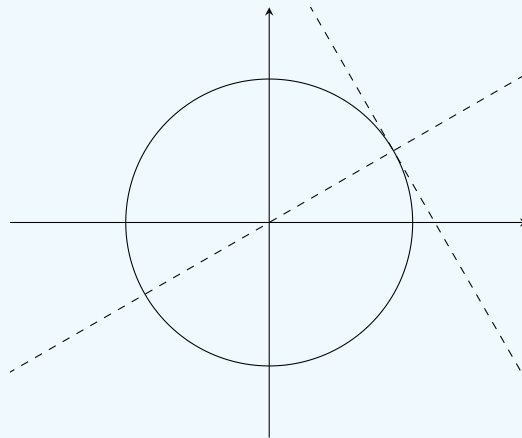
**Normale** Soit  $t_0 \in \mathbb{R}^2$ . La normale au point de paramètre  $t_0$  a pour équation

$$\begin{pmatrix} x - x(t_0) \\ y - y(t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} = 0$$

autrement dit

$$x \sin(t_0) - y \cos(t_0) = 0$$

**Tracé** On représente le cercle trigonométrique ainsi que la tangente et la normale au point de paramètre  $\pi/6$ .



**REMARQUE.** On retrouve notamment de manière analytique le fait qu'une normale à un cercle passe par le centre de ce cercle. Voilà qui est rassurant !

**4.3 Premier exemple**

On pose  $x(t) = \sin(t)$  et  $y(t) = \sin(2t)$ . On souhaite représenter le support de l'arc paramétré  $\gamma = (x, y)$ .

**Domaine d'étude et symétrie**

On cherche d'abord à restreindre le domaine d'étude en repérant des symétries.

- Puisque  $x$  et  $y$  sont  $2\pi$ -périodiques, on peut restreindre l'étude à  $[-\pi, \pi]$ .
- Par ailleurs,  $x$  et  $y$  sont impaires donc on peut étudier sur  $[0, \pi]$  et déduire  $\gamma([-\pi, 0])$  de  $\gamma([0, \pi])$  par la symétrie de centre l'origine.
- Enfin,  $x(\pi - t) = x(t)$  et  $y(\pi - t) = -y(t)$  donc on peut étudier sur  $[0, \pi/2]$  et déduire  $\gamma([\pi/2, \pi])$  de  $\gamma([0, \pi/2])$  par une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

## Variations

On a  $x'(t) = \cos(t)$  et  $y'(t) = 2 \cos(2t)$ . On trace les variations conjointes de  $x$  et  $y$ .

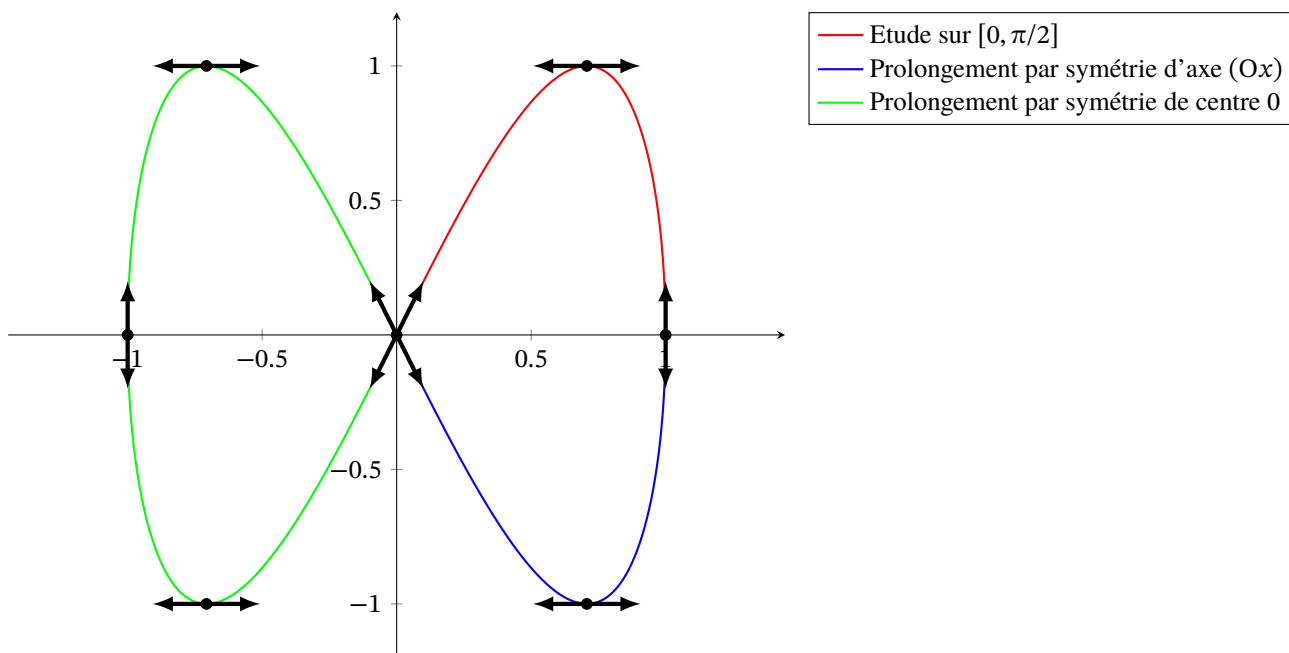
$t$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
Signe de $x'(t)$	1	+	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ + 0
Variations de $x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
Variations de $y$	0	1	0
Signe de $y'(t)$	2	+	0 - -2

## Tracé

On peut tracer  $\gamma([0, \pi/2])$  et compléter avec les symétries observées précédemment. On peut de plus placer des tangentes remarquables :

- tangente de vecteur directeur  $(1, 2)$  en l'origine ;
- tangente horizontale au point de coordonnées  $(0, \sqrt{2}/2)$  ;
- et tangente verticale au point de coordonnées  $(1, 0)$  ;

ainsi que celles obtenues par symétries.



## Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
T=np.linspace(0,2*np.pi,200)
X=np.sin(T)
Y=np.sin(2*T)
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

## 4.4 Second exemple

On pose  $x(t) = t \ln(t)$  et  $y(t) = \ln(t)/t$ . On souhaite représenter le support de l'arc paramétré  $\gamma = (x, y)$ .

### Domaine d'étude et symétrie

On cherche d'abord à restreindre le domaine d'étude en repérant des symétries. On remarque que  $x(1/t) = -y(t)$  et  $y(1/t) = -x(t)$ . On peut donc étudier sur  $]0, 1]$  et on obtient  $\gamma([1, +\infty[)$  à partir de  $\gamma(]0, 1])$  par symétrie par rapport à la droite d'équation  $y = -x$ .

### Variations

On a  $x'(t) = \ln(t) + 1$  et  $y'(t) = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}$ . On trace les variations conjointes de  $x$  et  $y$ .

$t$	0	$e^{-1}$	1
Signe de $x'(t)$		- 0 +	1
Variations de $x$	0	$-e^{-1}$	0
Variations de $y$	$-\infty$	$-e$	0
Signe de $y'(t)$		+ $2e^2$ +	1

### Asymptotes

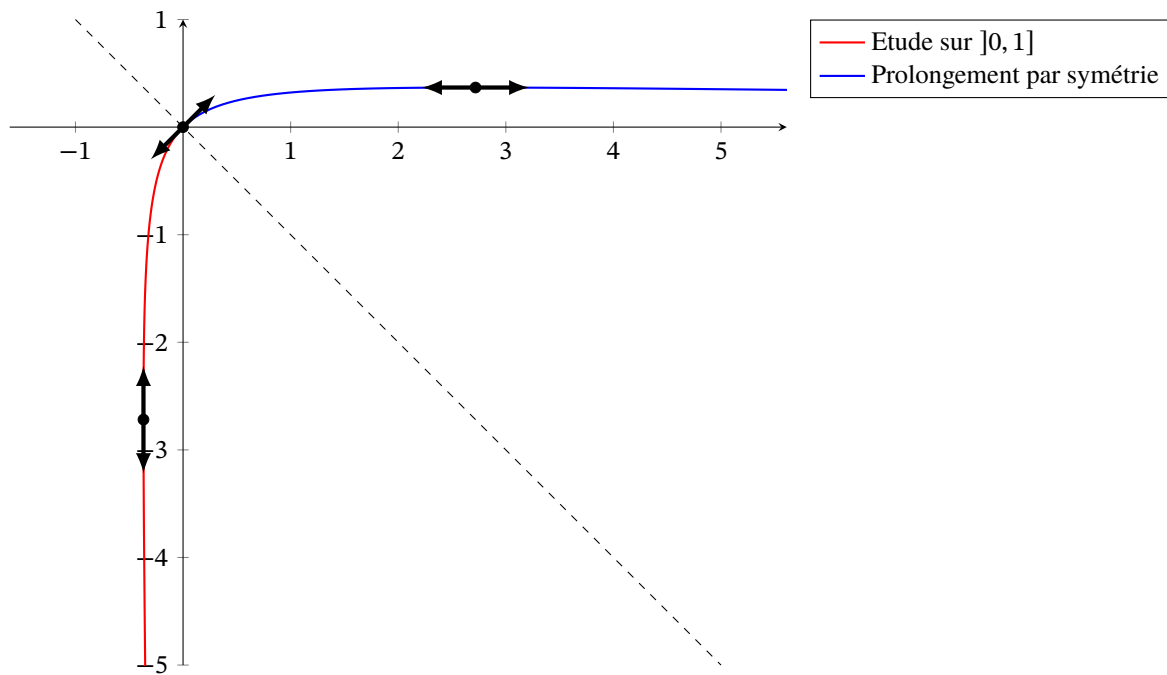
Puisque  $\lim_{0^+} x = 0$  et  $\lim_{0^+} y = -\infty$ , le support de  $\gamma$  admet une asymptote d'équation  $x = 0$ . On obtient une seconde asymptote par symétrie, à savoir la droite d'équation  $y = 0$ .

### Tracé

On peut tracer  $\gamma(]0, 1])$  et compléter avec la symétrie observée précédemment. On peut de plus placer des tangentes remarquables :

- tangente verticale au point de coordonnées  $(-e^{-1}, -e)$ ;
- et tangente de vecteur directeur  $(1, 1)$  en l'origine ;

ainsi que celles obtenues par symétries.



### Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
T=np.linspace(0.2,5,100)
X=T*np.log(T)
Y=np.log(T)/T
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```